Aristippus Philosophus Socraticus, naufragio cum ejectus ad Rhodiensium litus animadvertisset Geometrica schemata descripta, exclamavisse ad comites ita dicitur, Bene speremus, Hominum enim vestigia video.

Vitruv. Architect. lib. 6. Præf.

delin. M Burghers sculpt Univ. Oxon.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ.

EUCLIDIS
QUÆ SUPERSUNT
OMNIA.

Ex Recensione DAVIDIS GREGORII M. D.
Astronomiæ Professoris Saviliani, & R. S. S.

OXONIÆ,

E THEATRO SHELDONIANO, An. Dom. MDCCIII.

Imprimatur,

GUIL. DELAUNE

VICE-CAN. *OXON.*

Junii 3. 1703.

REVERENDO VIRO

HENRICO ALDRICH

S. T. P.

ÆDIS CHRISTI OXONIENSIS

DECANO,

ET

Synodi Provinciæ Cantuarienſis

INFERIORIS DOMUS

PROLOCUTORI DIGNISSIMO.

CUM Tuæ, Vir Reverende, & dignitatis ſplendore, & eruditionis varietate omnium ad Te oculos atque ánimos trahas; tum præſertim ea, qua literas & literatos foves, benevolentia & liberalitate facis, ut doctorum omnium votis, affectibus, prædicatione cumuleris. Inter Artes vero univerſas quas & Ipſe colis, & ad quas alios accendis, nulla fere eſt quæ curas Tuas magis exercuit quam Matheſis: inter viros quamplurimos, quorum induſtriam provocaſti, me certe devinctiorem habes neminem. Me enim in Oxonio hoſpitem & quaſi peregrinum ſumma illico humanitate amplexus es; meque deinde & ſtudia mea, ultra quam mihi fas erat ſperare, Tuo frequentius colloquio, hortatu, conſilio adjuviſti. Libere mecum communicare ſolebas, quid de omni Matheſeos diſciplina ſenſeris, quis fuerit ſcopus, qui fructus, quæ cujuſque tradendæ ratio commodiſſima. Memini vero quam ſæpe reclamares viris in re Mathematica novitatis, compendii, & forte ſui nimium amantibus; cum interim Juventutem ad ipſos

fontes

fontes remittendam, Veterumque libros diligentius esse versandos terendosque vehementer urgeres. Ad hæc studia resuscitanda suadebas, ut Antiqui illi scriptores sive eruti e MSS. publici juris fierent, sive prius editi ad prelum denuo revocarentur; utque Euclides imprimis (quem Te uno, Vir Clarissime, nemo aut penitius inspexit, aut sæpius revolvit, aut distinctius animo infixit) paulo quam antehac elegantior perfectiorque, sed sua lingua, suo simplex cultu atque apparatu prodiret. Mihi vero hanc provinciam commendabas volenti, fateor, atque optanti; quippe qui & rei Mathematicæ inservire, & Tibi semper placere magnopere cupiam. Habes itaque hic, quod a me postulabas, Euclidis libros, quantum meæ vires & diligentia efficere poterant, emendatos & numero suo absolutos. Ex Te satis intellexi perfectissimum opus nihil indigere adjumentis. Cum itaque Tuo obsecutus judicio perpauca admodum annotaverim, pauca etiam erunt quæ veniam Tuam desiderabunt. Si hæc tandem Tibi non displicuerint, pro solita Amicitia studiis meis succurre, Tuoque in me Imperio ulterius utere. Nihil oneris impones, quod Te tanto tamque benevolo Adjutore non lubens suscipiam,

Tibi omnibus officiis

omnique cultu devotissimus,

David Gregory.

PRÆFATIO.

PRODEUNT tandem in lucem Euclidis Opera, quæ supersunt omnia, nunc primum Græce & Latine edita. Adjecta sunt quædam quæ Euclidis forsan non sunt: noluimus enim quidquam prætermittere, quod vel communi consensu, vel celebrioris alicujus Geometræ judicio, Euclidi adscriptum est. De singulis, vel qua autoritate Euclidis nomen vendicent, vel quibus argumentis ab illo abjudicanda censeamus; quis sit cujusque libri scopus & methodus; quid demum in hac Editione præstitum sit, quibusque auxiliis muniti hæc adornavimus, paulo fusius dicemus, ubi pauca de ipso Authore prælibaverimus.

Quo genere aut patria oriundus sit Euclides minime constat: alium esse ab Euclide Megareo, cujus vitam descripsit Laertius, vel inde quis suspicetur, quod inter scripta ejus nullum opus Mathematicum memoretur. Sed præterea liquet illum Megareum & hunc nostrum, tum ætate disjunctos esse, tum moribus & disciplina diversos. Erat enim ille (ut ait Laertius) Socratis auditor; hic (ut testatur Proclus libro 2. comment. in lib. 1. Elem.) non Socrate solum & Platone, sed Eudoxo Platonis, & Menæchmo Eudoxi discipulo junior. Ille (eodem Laertio authore) vehemens & litigiosus; hic (Pappo teste libro 7. Collect. math.) suavissimi ingenii vir, & contentionis minime amans. Floruit vero (ut ex Proclo discimus) sub Ptolemæo Lagi, (qui Ægypto annis plus quam trecentis ante Æram Christianam cæpit imperare,) Eratosthene & Archimede paulo antiquior. Alexandriæ primus omnium Scholam mathematicam fœlicibus auspiciis aperuit, unde omnes fere insigniores Mathematici prodiere. Si hæc & plura quædam de Euclide clarius uberiusque enarrata desideras, Lector, consule Celeberrimum SAVILIUM, *qui in Prælectionibus illis, quas tanquam primitias propriæ Fundationi consecrare voluit, quicquid de Euclide ex veterum monumentis erui potest copiosissime accuratissimeque expendit. Cum vero (ut ait Vir ille clarissimus) Euclidis quidem ingenii monumenta habeamus plurima, vitæ perpauca, de Ejus scriptis aliquanto diligentius disseremus.*

Opera ejus, partim à Pappo lib. 7, partim à Proclo lib. 2. enumerata, hæc sunt: Elementorum *Libri*, Datorum *Liber*, Introductio Harmonica, Sectio Canonis, Phænomena, Optica, Catoptrica, *Liber de* Divisionibus, Porismatum *Libri*, Locorum ad superficiem *Libri*, Fallaciarum *Liber*, Conicorum *Libri*; *de quibus ordine dicendum erit.*

PRÆCIPUE *vero (inquit Proclus loco citato) circa Geometricam Elementorum Institutionem eum quispiam admirabitur, propter ordinem & delectum eorum, quæ per Elementa distribuit, theorematum atque problematum. Verisimile est etiam ante Euclidem Geometriæ Elementa aliqua constructa fuisse ab Hippocrate Chio, Leonte, aliisque magno numero, à Proclo lib. 2. versus initium memoratis. Nam Proclus expresse ait quod Euclides in Elementis multa quidem ordinavit Eudoxi, multa Theateti perfecit, ea præterea, quæ laxius à prioribus demonstrata fuerant, firmissimis demonstrationibus munivit, quæ nec coargui nec convinci possunt; unde à Proclo & veteribus* κατ' ἐξοχὴν *dictus est* στοιχειωτής, *& Geometra.*

Elementa hæc, prout nunc extant, libris constant Quindecim; nisi quod (inquit Gerardus Vossius) de duobus postremis res non sit ita aperta. Plerique eos non Euclidis putant, sed commentarios Hypsiclis Alexandrini, qui ducentis post Euclidem annis floruit. Sane decimusquartus præfationem habet propriam, quam nec primus habet Euclidis: non vano argumento, libros duos ultimos alterius esse, quam Euclidis.

Licet Euclides, qui (teste Proclo) secta fuit Platonicus, totius Elementorum Institutionis finem statuat τ̃ κοσμικῶν σχημάτων, Mundanarum Figurarum, *constitutionem, ad quem (inquit Kepplerus) referuntur omnes omnino propositiones omnium librorum, exceptis quæ ad Numerum perfectum ducunt; (figurarum, inquam, earum quæ Platonicæ appellantur, à Pythagora licet detectæ fuerint, ut ostendit epigramma:*

 Σχήματι

PRÆFATIO.

Σχήματα πέντε Πλάτωνος, ἃ Πυθαγόρας σοφὸς εὗρε·
Πυθαγόρας σοφὸς εὗρε, Πλάτων δ' ἀριδήλ' ἐδίδαξεν·
Εὐκλείδης ἐπὶ τοῖσι κλέος περικαλλὲς ἔτευξεν.)

proprie tamen Geometria hæc dividitur in ἐπιπέδων θεωρίαν, superficierum contemplationem, & στερεομετρίαν, solidorum. *Nam de Punctis & Lineis, ut ait Proclus, nulla est instituta ab Euclide in Elementis peculiaris tractatio. Sed* στερεομετρία *intelligi nequit sine notitia linearum* συμμέτρων & ἀσυμμέτρων. *Nec hanc scire possumus, nisi notitiam habeamus numerorum. Quare Elementa hæc commode in quatuor partes dividuntur. Prima est* ἐπιπέδων θεωρία, *sex libris comprehensa; quæ rursum triplex est: quatuor primis agitur de Planis absolute; in quinto de Proportionibus Magnitudinum in genere; in sexto denique de Proportionibus Figurarum planarum. Altera est de Numerorum Affectionibus; nempe liber septimus, octavus & nonus, qui Arithmeticorum vocantur. Tertia est de Lineis* συμμέτροις & ἀσυμμέτροις, *unde hæc pars* Συμμετρία *dicitur, ac libro decimo continetur. Quarta est* Στερεομετρία, *sive de Solidis, quæ reliquis libris absolvitur.*

Circa hosce Elementorum libros, prout nunc ab omnibus teruntur, varie inter recentiores disputatur quæ fuerint Theonis in illis partes. “*Quidam propositiones Elemento-*
“*rum tribuunt Euclidi, demonstrationes Theoni, homines stulti* (*inquit* Savilius) *& per-*
“*ridiculi; quasi ullus unquam artifex suas edi voluerit conclusiones, nullis adjectis pro-*
“*bationibus. Hoc neque Philosophorum quisquam, nec Medicorum, nedum Mathemati-*
“*corum, fecit unquam. Secunda est opinio Petri Rami, qui tam propositiones quam de-*
“*monstrationes Euclidi abjudicat, universa Theoni attribuens, false: eadem enim hæc*
“*quæ nunc habemus, eodem ordine, eisdem verbis, agnoscunt sub Euclidis nomine Pro-*
“*clus & Boëtius Theone posteriores, & anterior Theone Alexander Aphrodiseus, & omnis*
“*antiquitas. Tertia opinio est eorum, qui omnia attribuunt Euclidi; quæ aut vera est,*
“*aut veritati certe proxima. Quid ergo dicemus vulgatis libris, qui* ἐκ τῆς Θέωνος συνου-
“σιῶν, ex Theonis colloquiis sive congressibus, *præ se ferunt? cujus tamen tituli in neutro*
“*nostrorum codicum MSS. ullum reperi vestigium. Non diffiteor in uno ad oram mar-*
“*ginis adscripta esse ad decimumtertium librum hæc verba:* Εὐκλείδης ὁ τὰ στοιχεῖα συνα-
“θροίσας, ἦν ἐπὶ χρόνοις Ἀλεξάνδρου τοῦ Μακεδόνος· Θέων δὲ ὁ συντάξας αὐτὰ, ἐπὶ Θεοδοσίου
“τοῦ βασιλέως; *ut collectionem Elementorum Euclidi, ordinationem & dispositionem Theoni*
“*tribuisse videatur. Magna certe Theonis laus, si inordinata & incomposita in ordinem*
“*redegit. Sed ne huic incerto scholiastæ fidem adjungamus, obstat, ut dixi, Procli &*
“*antiquorum omnium auctoritas; obstat mirabilis & concinna propositionum series, ex*
“*quibus unam loco suo si eximas, tota corruat compages & structura necesse est. Quid igitur?*
“*Nullæ sunt Theonis in hoc libro partes? Non me movent superius dicta; sed auctoritatem*
“*ipsius Theonis, in commentariis in Almagestum, perpendendam existimo, quæ fortasse*
“*viam præire possunt ad eruendam in hac quæstione veritatem. Quod vero sectores, in-*
“*quit, in circulis æqualibus sint proportionales angulis ad centrum constitutis, ostensum*
“*est à nobis in editione Elementorum,* ἐκδόσει, *ad finem sexti libri. Ex quibus verbis*
“*& novam Elementorum editionem adornasse Theonem constat, & nonnulla ab ipso adjecta.*
“*Et quidem in omnibus nostris exemplaribus hæc verba de sectore anneсtuntur ultimæ*
“*propositioni libri sexti Elementorum, quæ & Theonis esse puto, ut etiam demonstrationem*
“*ad illa verba:* Λέγω ὅτι κ, *&c. usque ad finem. Nam Euclidis illa solennis clausula,*
“ὅπερ ἔδει δεῖξαι, *quæ proxime præcedit, finis est, ut puto, Euclideæ. Idem judicium*
“*ferendum puto de multis in decimo libro lemmatiis, & fortasse propositionibus nonnullis.*
“*Alexander certe aliquot ante Theonem seculis, in commentariis in priora Aristotelis, eam,*
“*quæ quinta est decimi in nostris libris, citat pro quarta; ut necesse sit aliquam ex præ-*
“*cedentibus, quartam, uti reor, qua sine magno incommodo sane carere potuissemus, suo*
“*tempore ab Elementorum libro abfuisse, vel saltem cum tertia coaluisse. Et quidem ul-*
“*timam decimi non dubito assumentum esse Theonis, vel potius, antiquioris (nam apud*
“*Alexandrum extat iisdem prope verbis) minus perspicacis ingenii, quippe alieno loco po-*
“*sitam. Forte & Definitiones quædam & Axiomata, Libro 1. præposita, Theonem vel alium præter Euclidem agnoscunt auctorem,* ex. gr. *Ax.* 11; *nam licet Euclides hoc pronunciatum adhibeat in demonstranda prop.* 29. *El.* 1, *illud tamen pro Axiomate non habuit, sed pro conversa prop.* 17, *utpote quæ ex illa manifesto consequatur. Fortasse & alteræ demonstrationes, quæ passim occurrunt, sunt etiam Theonis: nam quæ in Datorum libro reperiuntur, Euclidis non esse expresse asserit Pappus, licet cum illis Elementorum facile*

cile comparandæ. Sunt vero ex his quædam quæ Theonem non sapiunt, sed à sciolis quibusdam conscriptæ sunt. Sunt & lemmata & corollaria quædam in Elem. 10. quæ ab ageometris subjuncta sunt: illa ubique nota perstrinximus. "Ex quibus omnibus "concludit Savilius Theonis fuisse partes, in Euclide paucissimis quidem in locis inter-"polando, explicando, augendo; ultra hoc nullas. Qui tamen labos non tanti fuit, ut "Proclo (omnium ante se Mathematicorum diligentissimo laudatori) commemoratione dignus "videretur.

Corpus hoc Elementorum ea claritate & evidentia, eo judicio ac firmitudine compactum est, ut singulæ in iis propositiones, jam à bis mille annis, ab omnibus habeantur pro evidentibus, & pro talibus passim ab omnibus citentur. De antiquorum super hisce sententia consulantur Pappus, Proclus, cæterique quotquot erant Geometræ. Ex recentioribus unicus sufficiat Cardanus, qui lib. 13. de Subtilitate de hisce verba faciens, sic inquit: "Quo-"rum inconcussa dogmatum firmitas, perfectioque adeo absoluta, ut nullum opus jure huic "aliud comparare audeas. Quibus fit ut adeo veritatis lux in eo refulgeat, ut soli hi "in arduis quæstionibus videantur posse à vero falsum discernere, qui Euclidem habent "familiarem. Quibus non obstantibus, dantur aliqui, qui licet utilitatem propositionum Euclidearum in omni re geometrica, earumque firmitatem ultra agnoscant, methodum tamen desiderant; nempe queruntur illum, neglecta methodo, de Lineis, de Angulis, de Figuris planis mixtim agere: nimirum hanc esse optimam veræ methodi legem existimavit vir accuratissimus, ut nihil sumatur pro vero nisi demonstratum; nihil demonstretur nisi ex antecedentibus. "Quo fit (inquit Savilius) ut ordo, quem isti Methodistæ requirunt ab Eu-"clide, quo nunquam vidit hic sol μεθοδικώτερον, servari non potuerit, nisi si quis est adeo "ineptus, ut nescio cujus imaginariæ venustatis rationem habendam putet, neglecta sani-"tate. Quivis eorum, qui Geometriæ Elementa alia methodo tradenda suscepit, inter Euclideum opus alteriusque cujusvis præter proprium judex constituatur; illico patebit discrimen. Impetret horum aliquis si possit, à judice æque habili, sententiam qualem de Euclideis Elementis tulit Ramus: "Nullus paralogismus, nulla ψευδογραφία, in totis Ele-"mentis, nobis quanquam severe inquirentibus animadverti potuit: quam laudem esse sin-"gularem profiteor, quamque nulli adhuc neque Grammatico, neque Rhetori, neque Lo-"gico concedere potui, ut in Grammatica, Rhetorica, Logica nihil falsi docuisset. Nullane igitur est methodus compendiosior ad Geometriam addiscendam, quam hæcce per Euclidis Elementa, quam adeo reformidant plerique? Huic certe quæstioni respondeat ipse Euclides. Ille à Ptolemæo Ægypti Rege interrogatus, an via esset aliqua ad Geometriam magis compendiaria sua στοιχειώσει, respondisse fertur, auctore Proclo in lib. 2, Μὴ εἶναι βασιλικὴν ἀτραπὸν ἐπὶ γεωμετρίαν.

Hæc vindicandis Elementis, quæ nullo indigent vindice, abunde sufficient: quid porro nos in iis edendis præstitimus, paucis explicemus. Primo, Textum Græcum quod attinet, ut is quam emendatissimus & castigatissimus prodiret, modis omnibus curavimus; adhibitis, prout opus esset, in consilium MSS. Codicibus haud paucis, melioris notæ, quos in hunc ipsissimum usum Academiæ pridem legârat magnus SAVILIUS; ut & Castigationibus ejus propria manu adscriptis ad marginem editionis Hervagianæ. Accessit singularis, & nunquam satis prædicanda amicissimi D. Joannis Hudsoni S. T. P. Protobibliothecarii Bodleiani industria in expoliendis Græcis hisce, & quidem universa Editione à vitiis, etiam typographicis, liberanda. Nempe in omnes, etiam infimas, operis nostri partes se demisit vir optimus. Textum Hervagianum, ante paulo quam in typographorum manus traderetur, accurate interpungendum & distinguendum curavit. Latina cum Græcis per totum, in Elementis præsertim ac Datis, summa fide contulit. Ubi ea à se invicem discrepantia deprehenderentur, vel etiam Græcum ipsum suspectum haberetur, consulti illico MSS. Codices, quorum lectio, si cum Latinis congrueret, ad marginem adscripta extabat; sin minus, apposita stellula, ut exinde judicandi occasio mihi daretur, utra demum lectio Geometricis rationibus magis conveniret. Denique, quo textus puritati melius consuleretur, etiam schedas singulas, mox ut eas à prelo madentes exceperat, semel atque iterum legere & accurate recensere haud gravatus est; eandemque plane in Euclidis nostri, quam in aliorum Auctorum Græcorum monumentis, à se summa cum laude evulgatis, præstitit diligentiam. Traductionem plerunque secuti sumus Federici Commandini, at infinitis in locis castigatam; præcipue ex libris clarissimi Edvardi Bernardi, Astronomiæ olim Professoris Saviliani, in Bibliotheca Bodleiana adservatis. Notas nullas adjecimus, nisi cum opus esset textum corruptum *restituere, aut scholium à sciolo interpolatum perstringere: neque enim Euclides is erat, qui elementarem institutionem contexeret, quæ ulteriore egeret explicatione, sive quæ non esset vere elementaris. Atque in hac re provoco ad cujusvis experientiam, sintne Elementa hæc clariora & intellectu faciliora, ubi sola exhibentur, an ubi scholiis & lemmatiis innumeris obrutus ipse Euclides vix appareat. Schemata nitide justæque mensuræ excudi curavimus, & demonstrationibus congrua; præsertim in Elemento quinto, ubi error in schemate mentem persæpe transversim agit. In libro quinto quantitates literis designatæ non magis debent esse lineæ quam aliæ quævis magnitudines; consuetudini tamen gerentes morem, rectas in schemate descripsimus, utpote imaginationi maxime accommodatas. In libris septimo, octavo & nono, nulla debent esse schemata; literæ enim non determinatos numeros designant, sed quosvis in certis conditionibus: ad imaginationem tamen sublevandam, puncta depinximus ea multitudine quæ propositioni conveniant. At si quando numeri congrui tam magni sunt, ut punctorum multitudo statim non pateat; ipsos numeros apposuimus more communi notatos.*

SEQUUNTUR *Euclidis* Δεδομένα, Data, *libro unico comprehensa, cui præfigitur, ob affinitatem, Marini Philosophi* εἰς τὰ δεδομένα προθεωρία, In Data Præfatio; *tametsi stylo satis obscuro conscripta Euclidis Data parum illustret. Cum autem Data hæc sint ad Analysin geometricam comparata, & ejus quasi Elementa veteribus Geometris familiaria, at à recentioribus fere neglecta; libet huc transcribere Pappi Alexandrini præfationis ad lib. 7. collect. mathemat. partem, quæ de veterum Analysi geometrica tractat, & Euclidis Data accurate describit, eorumque usum indicat. Hanc vero (quia Græce nondum extat) Græce trademus, una cum versione Commandini.*

Pappi Alexandrini Mathematicarum Collectionum Liber Septimus.

Continet autem lemmata loci resoluti.

Locus qui vocatur resolutus, ô Hermodore fili, ut summatim dicam, propria quædam est materia, post communium elementorum constitutionem, iis parata, qui in geometricis sibi comparare volunt vim, ac facultatem inveniendi problemata, quæ ipsis proponuntur: atque hujus tantummodo utilitatis gratia inventa est. Scripserunt autem hac de re tres viri, nempe Euclides στοιχειωτὴς, Apollonius Pergæus, & Aristæus senior, quæ quidem per resolutionem & compositionem procedit. Resolutio igitur est via à quæsito tanquam concesso, per ea quæ deinceps consequuntur, ad aliquod concessum in compositione: in resolutione enim id quod quæritur tanquam factum ponentes, quid ex hoc contingat consideramus, & rursum illius antecedens; quousque progredientes incidamus in aliquod jam cognitum, vel quod sit è numero principiorum. Et hujusmodi processum *Resolutionem* appellamus, veluti ex contrario factam solutionem. In compositione autem, per conversionem, ponentes tanquam jam factum id quod postremum in resolutione sumpsimus, atque hic ordinantes secundum naturam ea antecedentia, quæ illic consequentia erant, & mutua illorum facta compositione, ad quæsiti finem pervenimus; & hic modus vocatur *Compositio.* Duplex autem est resolutionis genus: alterum quidem quod veritatem perquirit, & *Contemplativum* appellatur: alterum vero, quo investigatur id quod dicere proposuimus, vocaturque *Problematicum.* In contemplativo igitur genere, quod quæritur ut jam existens & ut verum ponen-

Πάππου τοῦ Ἀλεξανδρέως Συναγωγῆς ἕβδομον.

Περιέχει δὲ λήμματα τοῦ ἀναλυομένου τόπου.

Ὁ καλούμενος ἀναλυόμενος, Ἑρμόδωρε τέκνον, κατὰ σύλληψιν ἰδία τίς ἐστιν ὕλη παρεσκευασμένη, μετὰ τὴν τῶν κοινῶν στοιχείων ποίησιν, τοῖς βουλομένοις ἀναλαμβάνειν ἐν γραμμαῖς δύναμιν εὑρετικὴν τῶν προτεινομένων αὐτοῖς προβλημάτων· καὶ εἰς τοῦτο μόνον χρησίμη καθεστῶσα. γέγραπται δὲ ὑπὸ τριῶν ἀνδρῶν, Εὐκλείδου τε τοῦ στοιχειωτοῦ, καὶ Ἀπολλωνίου τοῦ Περγαίου, καὶ Ἀρισταίου τοῦ πρεσβυτέρου, κατὰ ἀνάλυσιν καὶ σύνθεσιν ἔχουσα τὴν ἔφοδον. ἀνάλυσις τοίνυν ἐστὶν ὁδὸς ἀπὸ τοῦ ζητουμένου, ὡς ὁμολογουμένου, διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων, ἐπί τι ὁμολογούμενον ἐν συνθέσει· ἐν μὲν τῇ ἀναλύσει τὸ ζητούμενον ὡς γεγονὸς ὑποθέμενοι, τὸ ἐξ οὗ τοῦτο συμβαίνει σκοπούμεθα· καὶ πάλιν ἐκείνου τὸ προηγούμενον, ἕως ἂν οὕτως ἀναποδίζοντες, καταντήσωμεν εἴς τι τῶν ἤδη γνωριζομένων, ἢ τάξιν ἀρχῆς ἐχόντων. καὶ τὴν τοιαύτην ἔφοδον ἀνάλυσιν καλοῦμεν, οἷον ἀνάπαλιν λύσιν. ἐν δὲ τῇ συνθέσει, ἐξ ὑποστροφῆς, τὸ ἐν τῇ ἀναλύσει καταληφθὲν ὕστατον ὑποστησάμενοι γεγονὸς ἤδη, καὶ τὰ ἑπόμενα ἐκεῖ, ἐνταῦθα προηγούμενα κατὰ φύσιν τάξαντες, καὶ ἀλλήλοις ἐπισυνθέντες, εἰς τέλος ἀφικνούμεθα τῆς τοῦ ζητουμένου κατασκευῆς· καὶ τοῦτο καλοῦμεν σύνθεσιν. διττὸν δέ ἐστιν ἀναλύσεως γένος. τὸ μὲν γὰρ ζητητικὸν τἀληθοῦς, ὃ καλεῖται θεωρητικόν· τὸ δὲ ποριστικὸν τοῦ προτεθέντος λέγειν, ὃ καλεῖται προβληματικόν. ἐπὶ μὲν οὖν τοῦ θεωρητικοῦ γένους, τὸ ζητούμενον ὡς ὂν ὑποθέμενοι, καὶ ὡς ὡς ἀληθὲς, εἶτα διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων ὡς ἀληθῶς, καὶ ὡς ἔστι καθ' ὑπόθεσιν, προελθόντες ἐπί τι ὁμολογούμενον· ἐὰν μὲν ἀληθὲς ᾖ ἐκεῖνο τὸ ὁμολογούμενον, ἀληθὲς ἔσται καὶ τὸ ζητούμενον, καὶ ἡ ἀπόδειξις ἀντίστροφος τῇ ἀναλύσει· ἐὰν δὲ ψεύδει ὁμολογουμένῳ ἐντύχωμεν, ψεῦδος ἔσται καὶ τὸ ζητούμενον. ἐπὶ δὲ τοῦ προβληματικοῦ γένους, τὸ προταθὲν ὡς γνωσθὲν ὑποθέμενοι, εἶτα διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων ὡς ἀληθῶς προελθόντες ἐπί τι ὁμολογούμενον· ἐὰν μὲν τὸ ὁμολογούμενον δυνατὸν ᾖ καὶ ποριστὸν, ὃ καλοῦσιν οἱ ἀπὸ τῶν μαθημάτων δοθὲν, δυνατὸν ἔσται καὶ τὸ προταθὲν, καὶ πάλιν ἡ ἀπόδειξις ἀντίστροφος τῇ ἀναλύσει· ἐὰν δὲ ἀδυνάτῳ ὁμολογουμένῳ ἐντύχωμεν, ἀδύνατον ἔσται καὶ τὸ πρόβλημα. διορισμὸς δέ ἐστι προδιαστολὴ τοῦ πότε, καὶ πῶς, καὶ ποσαχῶς δυνατὸν ἔσται τὸ πρόβλημα. τοσαῦτα μὲν οὖν περὶ ἀναλύσεως καὶ συνθέσεως.

Τῶν δὲ προειρημένων τοῦ ἀναλυομένου βιβλίων ἡ τάξις ἐστὶ τοιαύτη. Εὐκλείδου δεδομένων βιβλίον ἕν· Ἀπολλωνίου λόγου ἀποτομῆς δύο, χωρίου ἀποτομῆς δύο, ἐπαφῶν δύο· Εὐκλείδου πορισμάτων τρία· Ἀπολλωνίου νεύσεων δύο, τοῦ αὐτοῦ τόπων ἐπιπέδων δύο, κωνικῶν ὀκτώ· Ἀρισταίου τόπων στερεῶν πέντε· Εὐκλείδου τόπων πρὸς ἐπιφανείαν δύο· Ἐρατοσθένους περὶ μεσοτήτων δύο. γίνεται βιβλία λα', ὧν τὰς περιοχὰς, μέχρι τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν, ἐξεθέμην σοι πρὸς ἐπίσκεψιν, καὶ τὸ πλῆθος τῶν τόπων, καὶ τῶν διορισμῶν, καὶ τῶν πτώσεων, καθ' ἕκαστον βιβλίον· ἀλλὰ καὶ τὰ λήμματα τὰ ζητούμενα· καὶ οὐδεμίαν ἐν τῇ πραγματείᾳ τῶν βιβλίων καταλέλοιπα ζήτησιν, ὡς ἐνόμιζον.

Περὶ τῶν Δεδομένων Εὐκλείδου.

Περιέχει δὲ τὸ πρῶτον βιβλίον, ὅπερ ἐστὶ τῶν δεδομένων, ἅπαντα θεωρήματα ἐνενήκοντα· ὧν πρῶτα μὲν καθόλου ἐπὶ μεγεθῶν διαγράμματα κγ'· τὸ δὲ δ' καὶ τὸ κ' ἐν εὐθείαις ἐστὶν ἀνάλογον ἄνευ θέσεως· τὰ δὲ ἑξῆς τούτοις ιδ' ἐν εὐθείαις ἐστὶ θέσει δεδομέναις. τὰ δὲ τούτοις ἑξῆς ι', ἐπὶ τριγώνων ἐστὶ τῷ εἴδει δεδομένων, ἄνευ θέσεως. τὰ δὲ ἑξῆς τούτοις ἑπτὰ, ἐπὶ τυχόντων ἐστὶν εὐθυγράμμων χωρίων εἴδει δεδομένων, ἄνευ θέσεως. τὰ δὲ ἑξῆς τούτοις ἓξ, ἐν παραλληλογράμμοις ἐστὶ καὶ παραβολαῖς εἴδει δεδομένων χωρίων. τῶν δὲ ἐχομένων ε', τὸ μὲν πρῶτον γραφόμενόν ἐστι, τὰ δὲ δ' ἐπὶ τριγώνων χωρίων, ὅτι αἱ διαφοραὶ τῶν δυνάμεων τῶν πλευρῶν πρὸς ταῦτα τὰ τρίγωνα χωρία λόγον ἔχουσι δεδομένον. τὰ δὲ ἑξῆς ἑπτὰ, ἕως τοῦ ο' καὶ γ', ἐν δυσὶ παραλληλογράμμοις, ὅτι διὰ τὰς ἐν ταῖς γωνίαις ὑποθέσεις ἐν δεδομένοις ἐστὶ λόγοις πρὸς ἀλλήλους· ἔνια δὲ τούτων ἐπιλόγους ἔχει ὁμοίους ἐν δυσὶ τριγώνοις. ἐν δὲ τοῖς ἀφεξῆς ἓξ διαγράμμασιν, ἕως τοῦ ο' καὶ θ', δύο μέν ἐστιν ἐπὶ τριγώνων, δ' δὲ ἐπὶ πλειόνων εὐθειῶν ἀνάλογον οὐσῶν. τὰ δὲ ἑξῆς τρία, ἐπὶ δύο

tes, per ea quæ deinceps consequuntur tanquam vera, & quæ ex positione sunt, procedimus ad aliquod concessum; quod quidem si verum sit, verum erit & quæsitum; & demonstratio resolutioni ex contraria parte respondebit: si vero falso evidenti occurramus, falsum erit & quæsitum. In problematico autem genere, quod propositum est ut cognitum ponentes, per ea quæ deinceps consequuntur tanquam vera, procedimus ad aliquod concessum; quod quidem si fieri, compararique possit, (quod Datum vocant mathematici,) etiam illud quod propositum est fieri poterit; & rursus demonstratio resolutioni ex contraria parte respondens: at si quod fieri evidenter non possit occurramus, & problema itidem fieri non poterit. Determinatio autem est, quæ declarat quando, & qua ratione, & quot modis problema fieri possit. Hæc igitur de Resolutione & Compositione dicta sunt.

Dictorum autem librorum, qui ad resolutum locum pertinent, ordo talis est. Euclidis Datorum liber unus; Apollonii de Proportionis Sectione libri duo, de Spatii Sectione duo, Tactionum duo; Euclidis Porismatum tres; Apollonii Inclinationum duo, ejusdem Planorum Locorum duo, Conicorum octo; Aristæi Locorum Solidorum quinque; Euclidis Locorum ad Superficiem duo; Eratosthenis de Medietatibus duo. Atque ita omnes libri sunt numero triginta & unus; quorum periochas, usque ad Apollonii Conica, tibi exposuimus ad contemplationem, & multitudinem locorum & determinationum & casuum in unoquoque libro; sed & etiam lemmata quæ requiruntur: & in librorum tractatione nullam, ut arbitramur, quæstionem omisimus.

De Datis Euclidis.

Primus autem liber, qui est Datorum, theoremata nonaginta continet; quorum primum quidem universe in magnitudinibus diagrammata habet 23; vigesimum-quartum vero est in rectilineis proportionalibus sine positione: at quæ deinceps sequuntur quatuordecim sunt in rectis lineis positione datis. Quæ vero sequuntur decem in triangulis specie datis, sine positione. Quæ sequuntur septem sunt de quibusvis spatiis rectilineis specie datis, sine positione. Quæ sequuntur sex in parallelogrammis, & applicationibus spatiorum specie datorum. Eorum quæ deinceps sunt quinque, primum quidem est in lineis; quatuor vero in spatiis triangulis, quod differentiæ quadratorum laterum ad ipsa triangula spatia rationem habeant datam. Quæ sequuntur septem, usque ad septuagesimum-tertium, in duobus parallelogrammis, quod ob positiones in angulis rationem inter se datam habeant: aliqua autem horum epilogos similes habent in duobus triangulis. In sequentibus vero sex diagrammatibus, usque ad septuagesimum-nonum, duo quidem sunt in triangulis, quatuor in pluribus rectis lineis proportionalibus. Quæ deinceps sunt tria, in duabus rectis lineis proportionalibus, quæ datum spatium continent. At quæ in omnibus octo, usque ad nonaginta, in circulis ostenduntur, vel magnitudine tantum datis, vel etiam positione; nimirum rectis lineis per datum punctum ductis.

εὐθειῶν ἀνάλογον οὐσῶν, τὰ δ' ἐστὶ, δοθέν τι περιεχουσῶν χωρίον. τὰ δὲ ἐπὶ πᾶσιν ὀκτὼ, ἕως ϟ', ἐν κύκλοις δείκνυται, τοῖς μὲν μεγέθει μόνον δεδομένοις, τοῖς δὲ καὶ θέσει, ἀγομένων εὐθειῶν διὰ δεδομένου σημείου.

Exhinc perspicere licet quomodo veteres Geometræ theorema demonstrarent, vel problema construerent. Non enim, ut neoterici plerique, symbolis suppositis, in calculum arithmeticum sese statim immergebant; sed ex datis gradum faciebant ad alia, ope penus analytici; nempe Datorum *horum, aliorumque Euclidis, Apollonii, Aristæi & Eratosthenis Librorum* 30. *supra enumeratorum. Hujusmodi Analyseos apud veteres passim extant exempla, nominatim in propositionibus* 107, 117, 155, 204, 205, *&c. septimi libri math. collect. Pappi. Inter recentiores Clariss. D.* Antonius Hugo de Omerique, *in Analysi Geometrica* Gadibus *An.* 1698. *edita, hanc fere veterum Analysin postliminio reducere feliciter est aggressus.*

Postquam Pappus enumeravit Libros, qui ad resolutum locum pertinent, eorum descriptionem particularem aggreditur. Ac primo de Datis Euclidis agit. Ex hujus libri descriptione liquet illum temporis injurias esse passum: ait enim illum theoremata nonaginta continere, cum nunc nonaginta quinque in eo numerentur. Sed libet singulas divisiones dispicere. Theoremata prima 48 *eodem sunt ordine, numero, & de iisdem rebus, quibus à Pappo describuntur. Quæ sequuntur* 7, *nempe à* 49^{ni} *ad* 55^{tum} *inclusive, sunt (ut à Pappo describuntur) de quibusvis spatiis rectilineis specie datis, sine positione: hæc* 7 *omisit Commandinus in versione latina. Sex deinde sequentia, nempe à* 56^{to} *ad* 61^{mum} *inclusive, respondent descriptioni Pappi. Sic etiam* 5 *proxima; illorum enim primum est de figuris descriptis à duabus rectis datam rationem habentibus: loco vero quatuor sequentium sunt quinque; exinde proculdubio, quod quæ vulgo numerantur* 64^{tum} *&* 65^{tum} *sint tantum bini casus ejusdem theorematis; est enim alterum in oxygoniis triangulis, quod alterum est in amblygoniis; adeo ut numerus propositionum sit hic auctus unitate. Sequentia* 7 *à descriptione Pappi non discrepant, nisi quod horum penultimum sit de quibusvis figuris, & ultimum sit de rectangulo parallelogrammo comparato cum alio rectilineo: patet vero ex Pappi verbis theoremata* 71^{mum} *&* 72^{dum} *(ut vulgo numerantur) debere esse tantum epilogos, ut &* 75^{tum} *&* 76^{tum}; *nam in illis eadem enunciantur de triangulis, quæ prius de parallelogrammis. Adeo ut hic reperiantur quatuor theoremata supra numerum, quæ una cum uno, (de quo prius) faciunt quinque supra numerum; unde fit ut horum ultimum, quod Pappo est* 73^{tium}, *sit* 78^{vum}. *Sequentium theorematum duo sunt in triangulis, ut ait Pappus; at tantum tria in pluribus rectis proportionalibus, licet Pappus numeret quatuor. Pappus proxime describit tria theoremata in duabus rectis proportionalibus, quæ datum continent spatium; sunt tamen quatuor: verum hic aliquis irrepsit error; nequeunt enim duæ rectæ dici proportionales; & præterea vel rectarum harum, vel quadratorum ab illis, summa vel differentia data est. Octo sequentia theoremata exacte respondent descriptioni Pappi. Atque sic sunt* 90 *theoremata; nempe si vulgo numerata* 64^{tum} *&* 65^{tum} *in unum coalescant; &* 71^{mum} *&* 72^{dum}, *item* 75^{tum} *&* 76^{tum} *pro epilogis habeantur, qualia ea habet Pappus, & detrahatur unum ex antepenultimis quatuor à Pappo descriptis, & suppleatur unum in penultimis tribus. Nos eundem, quem à prædecessoribus habuimus, numerum, quique in MSS. nostris obtinet, retinuimus, ne citationes ab auctoribus factæ turbarentur.*

Græcum textum infinitis in locis, ex diversis quos habuimus codicibus MSS. supplevimus; versionem Latinam Claudii Hardy *ex* Bernardo *emendavimus, & diagrammatibus suas literas ex MSS. restituimus, quas* Cl. Hardy *immutaverat, ut paucioribus incisis schematibus opus haberet. Euclides enim in Operibus suis indubitatis, etiam in hac re adiaphora, methodum elegantem ubique observavit; nempe ut prima puncta, primasque lineas vel figuras prioribus alphabeti literis designaret, sequentia sequentibus, atque ita porro.*

Unicum theorema 86^{tum} *insigniter vitiatum videtur; quod tamen ex MSS. restitui nequit. Illud sic legendum crediderim:* Si duæ rectæ datum spatium comprehendant in angulo dato; possit autem recta data altera majus, alterius quadrato, quam in ratione: & utraque ipsarum data erit. *Vel sic aliter:* Si duæ rectæ datum spatium comprehendant in angulo dato; quadratum autem rectæ quadrato alterius majus sit, alterius quadrato, quam in ratione: & utraque ipsarum data erit. *Vel ita optime:*

optime: Si duæ rectæ datum spatium comprehendant in angulo dato; earum autem quadrata simul sumpta æqualia sint spatio dato: & utraque ipsarum data erit. *Etenim si sic fuisset enunciatum hoc theorema, tum positis (methodo, sive potius stylo recentiorum) x & y duabus rectis, & angulo dato recto, (nam alter quivis datus angulus differt à recto sicut* $\frac{m}{n}$ *ab* $\frac{m}{m}$ *sive* 1, *quæ differentia gradum æquationis nihil mutat,) fiet* $xy = a^2$, *&* $b^2 - x^2 = y^2$ *sive* $b^2 = x^2 + y^2$; *& reductione facta ad unicam æquationem,* $x^4 - b^2 x^2 + a^4 = 0$, *vel* $y^4 - b^2 y^2 + a^4 = 0$. *Ideoque cum Euclides ostendat in hoc casu dari x & y, simul ostendit resolutionem æquationis hujusmodi quatuor dimensionum, nempe* $z^4 * - dz^2 * + c = 0$, *sicut in sequente unico theor.* 87, *ostendit resolutionem hujusmodi æquationis* $z^4 * + dz^2 * - c = 0$, *vel hujusmodi* $z^4 * - dz^2 * - c = 0$. *Unde factum, ut duobus his theorematibus contineretur resolutio omnium æquationum (quas vocant) biquadraticarum secundo & quarto terminis carentium. At si theorema hoc 86*tum *accipiatur modo quo vulgo legitur, tum erit* $xy = a^2$ *&* $x^2 - b^2 . y^2 :: e . f$, *sive* $fx^2 - fb^2 = ey^2$; *& rejecta x, fiet* $ey^4 + fb^2 y^2 - fa^4 = 0$; *vel rejecta y, fiet* $fx^4 - fb^2 x^2 - ea^4 = 0$. *Atque sic resoluta haberetur æquatio hujus formulæ* $z^4 * + dz^2 * - c = 0$, *vel hujus* $z^4 * - dz^2 * - c = 0$; *nempe ejusdem cum illis quæ in sequente 87*mo *resolutæ sunt; & formula hæc* $z^4 * - dz^2 * + c = 0$ *omnino omissa esset ab Euclide: quod minime est verisimile, præsertim si consideretur theor. 84*to *Datorum resolutas esse æquationes pure quadraticas harum formularum* $z^2 + dc - c = 0$, *&* $z^2 - dz - c = 0$; *& 85*to *hanc* $z^2\ dz + c = 0$; *cujusmodi æquatio in biquadraticis est omissa, nisi lectio suprapposita (vel æquipollens alia) admittatur. Immo constructionis harum æquationum (simpliciter sive una æquatione, non autem duabus, ut in 84*to *& 85*to*, enunciatarum) habita est ratio in theorematibus 58*vo *& 59*no *Datorum; immo & in ipsis Elementis, prop. 28*va *& 29*na *libri 6; & prop. 30*ma *ejusdem est problema quadraticum ex prius ostensa methodo constructum, sicut theoremata aliquot versus finem Datorum sunt alia hujus methodi exempla.*

Sequuntur *Euclidis duo Tractatus Musici*; Introductio Harmonica & Sectio Canonis. *In quibus edendis Celeberrimi D.* Wallisii *consiliis usi fuimus, qui in Notis suis ad Ptolemæi Harmonica (ab ipso edita) ejusque Appendice Græcorum Harmonicam feliciter restituit & illustravit: quo itaque lectorem ablegamus, qui de hac re plura desiderat. Euclidis, dixi, Tractatus duo; non quod utrumque putemus ab Euclide scriptum, (forte neutrum;) sed quod è nuperis scriptoribus quidam hos Euclidi tribuerint. E nuperis, inquam, scriptoribus quidam; nam nemo (quod scimus) veterum, Ptolemæo antiquiorum, eorum vel utrumque vel alterum memoravit uspiam; nec in ullo antiquo codice MS. adscriptum extat Euclidis nomen. (Quæ agnoscit Meibomius in Præfatione sua; qui tamen eos Euclidi tribuit, sed ut ab aliis forsan interpolatos.) Mirum autem est, si Euclidis fuerint, quod nemo veterum Ptolemæo antiquiorum, nec ipse Ptolemæus, eorum uspiam meminerit. Fieri quidem potest, quod eorum prior fuerit ab Euclide scriptus, qui totus est Aristoxeneus, Aristoxeni hypothesin per omnia secutus; quæ quidem hypothesis Euclidis tempore recepta fuerat, eaque sola; atque deinceps ad Ptolemæum usque, qui primus omnium hanc Canonis Sectionem introduxit, ante quem nemo (quod scimus) aut hujus Sectionis, aut etiam hujusce Canonis mentionem fecit, aut de eo quicquam cogitavit.*

Aristoxenus enim ejusque sectatores (Aristoxenei dicti) pro postulato habuerunt, Magnitudinem, qua differunt Dia-pente & Dia-tessaron, (pro arbitrio suo) dicendam Tonum; *atque ad hanc mensuram intervalla reliqua exigebant omnia. Et speciatim Dia-tessaron censebant hujusmodi Tonos continere duos cum semisse; Dia-pente, tres cum semisse; & Dia-pason, sex tonos, seu quinque Tonos & duo Hemitonia, (Tonos omnes reputantes tum inter se, tum huic æquales;) & Hemitonium, hujusce Toni præcise semissem, de Sonorum inter se proportione minime solliciti. Ptolemæus autem (omnium primus) hanc Diastematum seu Intervallorum mensuram per hanc Toni magnitudinem improbans, distinguenda censuit intervalla Musica pro Ratione seu Proportione, quam inter se habent Soni terminantes hæc intervalla, secundum Acuminis & Gravitatis gradum considerati; quod & Pythagorici ante fecerant, sed rejicit Aristoxenus. Adeoque Dia-pason censuit in Ratione dupla; Dia-pente in sesquialtera; Dia-tessaron in sesquitertia; Tonumque ipsum (quo differunt Dia-pente & Dia-tessaron) in sesquioctava; reliquaque intervalla, pro sua cujusque Sonorum terminantium proportione. Et quidem, sumpta pro Canone linea cujuscunque longitudinis determinatæ, docet, quomodo secandus sit hic Canon, ut hæc singula intervalla repræsentet.*

 Cui

Cui quidem hypothesi apte respondet Experimentum physicum: quippe si chorda Musica, æquabiliter tensa, intelligatur (cæteris paribus) secundum has longitudines divisa; ejusdem partes (plectro percussæ) sonos exhibebunt gravitate proportionales suis respective longitudinibus. Atque hinc est, quod Ptolemæus, quique illum sequuntur, (propter hanc Canonis Sectionem,) dici solent Canonici; ut reliquis Musicis (Aristoxeneis) contra distincti, quos Musicos *vocant, non* Canonicos.

Atque hanc Ptolemaicam Hypothesin, Aristoxeneæ contrariam, exponit Tractatuum horum posterior, qui Sectio Canonis dicitur. Adeoque (quicquid sit de priori) posterior hic tractatus nullo modo censeri potest ab Euclide scriptus, cum hæc Sectio Canonis non nisi longo post Euclidem tempore primum innotuerit, nullaque hujus extent vestigia in quopiam scriptore Musico (quod scimus) qui sit antiquior Ptolemæo. Fieri quidem potest (idque probabiliter) ut, si ejusdem Authoris censendus sit uterque, uterque sit Ptolemæi, qui forte Hypothesin Aristoxeneam, quæ hucusque obtinuit, fideliter primum exposuit; dein expositam refutavit, seu (ut mollius loquamur) correxit & emendavit. Hoc enim posteriori Tractatu factum est, qui est prioris solida refutatio. Demonstrat utique (contra quam supponit prior Hypothesis) Dia-pason minus esse quam ejusmodi sex Tonos; & Dia-tessaron minus quam duos cum semisse; & Dia-pente minus quam tres cum semisse: item illos, qui pro Tonis antea censebantur, non inter se æquales omnes, nec exposito Tono Diazeuctico, quem ut communem mensuram posuerint: item, quod dici solet Hemitonium, non esse expositi semissem, nec posse Tonum illum in duas partes æquales (concinnas) dividi. Quæ omnia ἀναντιῤῥήτως *demonstrantur, suntque priori hypothesi plane contraria. Cumque hodierni Musici practici etiamnum loqui soleant non raro secundum phraseologiam Aristoxeneorum, (de Tonis & Hemitoniis,) intelligendi sunt non secundum Mathematicam* ἀκρίβειαν, *sed (latius) vero proximum pro vero sumentes. Sed, ubi accuratius loqui libet, Tono Diazeuctico (à Mese ad Paramesen) rationem assignant sesquioctavam; Tonis quibusdam minoribus, sesquinonam; Hemitonio, sesquidecimamquintam; Limmati, sesquioctogesimam;* τῷ *Dia-tessaron, sesquitertiam; Dia-pente, sesquialteram; Ditono, sesquiquartam; Dia-pason, duplam; Dia-pason cum Dia-pente, triplam; Dis-dia-pason, quadruplam; & reliquis similiter. Cumque hæc sibi sumpserit demonstranda Ptolemæus, omnino candide factum est, quod hypothesin, quam subversum ibat, fideliter primum exposuerit, (ne censeretur vel cum umbris dimicare, vel adversariis esse injurius,) deinde falsitatis arguerit. Hinc esse suspicamur, quod soleant hi Tractatus junctim incedere; quasi fuerint ejusdem Auctoris Tractatus duo, aut ejusdem (si libet) Tractatus duæ partes. Atque hæc sunt quæ de Authore dicenda putavimus, quem Ptolemæum fuisse potius censeamus. Euclidis interim nomen ideo retinemus, eo quod huic ab aliis sint adscripti; reliquisque scriptis Euclideis hic subjungimus, ne censeamur Euclidis quicquam omisisse: suntque Tractatus ipsi (cujuscunque fuerint Authoris) merito æstimandi.*

In his edendis Meibomii editionem (Amstelodami habitam, Anno 1652) in Textu Græco fere per omnia sequimur; præterquam ubi (in Notis suis) aliquid immutandum subinnuit ipse, ut qui in his aliisque veteribus Musicis edendis & restituendis utilem impendit operam. Apud ipsum videat (cui libet) variantes variorum codicum lectiones, & cur hos aliis prætulerit; quibus codicibus usus fuerit; quid alii de Authore senserint; aliaque rem ipsam spectantia, scitu digna. Ejusdem versionem Latinam ut plurimum retinemus, paucis tamen in locis subinde mutatam; præsertim quod pro Latinis literis schemata respicientibus substituimus ubique Græcas, ut quæ schematismis aptius inserviant. Sed & voces aliquot parce immutavimus. Sic, verbi gratia, pag. 1. lin. 13. ποιὰν τάξιν ἐχόντων, *quod ille reddit* certum quendam ordinem servantibus, *aptius reddendum putamus* secundum qualitatem ordinatis, *pag.* 533. *lin.* 10. *Non enim* τινὰ *dicitur, (ut indeterminatum, seu indefinitum, innuat;) sed* ποιὰν, *quod Prædicamentum Qualitatis respiciat: quippe ejusdem soni Productio & Contractio (seu Longitudo & Brevitas) soni Quantitatem respiciunt; sed (quæ hic considerantur) Intensio & Remissio (seu Acumen & Gravitas) ejusdem Qualitatem: quod innuit vox* ποιά. *Et similiter ubi vox* ποιὰ *vel* ποιότης *occurrit. Et mirum est, quod Interpretes (tum hic tum alibi) id non observaverint. Sic vocem* τάσιν, *quam ille variis in locis (varietatem affectans) aliter atque aliter reddit*, intensionem, finitionem, determinationem, *&c. nos* tensionem *ubique reddimus; vocabulis artis pressius insistendum putantes, quo ambiguitatem vitemus. Item Rationes, quæ ipsi (novis vocibus) passim vocantur* sescupla, supertertia,

tertia, superoctava, &c. (*quo linguam Latinam, ut ille loquitur, novis vocabulis ditare possit,*) *nos receptioribus vocabulis dicimus* sesquialteram, sesquitertiam, sesquioctavam, &c. *quæ voces sunt nec minus latinæ, & melius notæ, & ab ipso aliquando admissæ. Idque potissimum facimus, quia liquet Mathematicos scriptores, & Euclidem maxime, non varietati phrasium indulgere, sed ad statas loquendi formulas stylum suum accommodare.*

Sic vocem ἄγειν, *quam Meibomius* (*p.* 2. *l.* 31.) *reddit* ascendit, *nos* tendit *reddimus,* (*p.* 533. *l. ult.*) *nam vox* ἄγειν *non magis Ascensum innuit quam Descensum. Et apud Meibomium* (*p.* 3. *lin.* 12, 14, 17, 19.) *simili sensu occurrunt voces* deferetur, erigetur, descendet, ascendet, (*innuentes Acutum in Alto, & Grave in Imo,*) *quas nos* (*pag.* 534. *l.* 15, 16, 18, 19.) *expungendas censuimus; tum, quia nihil est in Græco textu quod his vocibus Latinis respondeat; tum maxime, quia Euclides* (*aut quisquis fuerit horum Tractatuum Author*) *nusquam docet Intensionem Ascendendo fieri, nec Remissionem Descendendo.*

Verum quidem est, quod hodierni Musici sic loqui soleant, (*Acutum in Alto reputantes, & Grave in Imo,*) *quodque ex Græcis recentioribus nonnulli sic aliquando* (*sed raro*) *loqui videantur; apud quos sensim inolevit mos sic loquendi. Hinc est quod apud recentiores Græcos Modus Hypodorius dicitur, qui quam Dorius Gravior; & Hypophrygius quam Phrygius* (*toto Dia-tessaron,*) *& in reliquis similiter; & Hypermixolydius acutior quam Mixolydius. Nec tamen omnes eodem sensu loquuntur: nam Nicomacho* (*pag.* 7. *lin.* 12.) *Hypermese est quam Mese gravior; totoque decursu suo Grave reputat Infimum & Acutum Altissimum. Atque Aristides Quintilianus* (*pag.* 18. *editionis Meibomianæ*) *Tonum Hypodorium acutiorem facit quam Dorium; & Hypophrygium quam Phrygium; & Hypolydium quam Lydium. Sed antiquiores Græci plane contrarium,* (*Grave reputantes in Alto, & Acutum in Imo.*) *Hinc est quod Tetrachordorum Gravissimum dicitur Hypaton* (ὑπατῶν) *Chordarum* Supremarum; *deinde Meson* (μέσων) Mediarum; *& tandem* (νητῶν *sive* νεάτων) Ultimarum *sive* Novissimarum. *Et, in eodem Tetrachordo, Chorda gravissima Hypate* (ὑπάτη) *Chorda* Suprema *dicitur; Parypate* (παρυπάτη) Supremæ proxima; *& Nete* (νήτη *sive* νεάτη) Ultima *sive* Novissima. *Sic Hypate Hypaton, Parypate Hypaton, Hypate Meson, Parypate Meson &c, Grave pro Summo indicant olim habitum; eademque nomina etiamnum retinentur. Horumque Author Tractatuum à Proslambanomeno* (*serius assumpto*) *procedit ad Hypaten Hypaton, Parypaten Hypaton, & sic continue, ad Acutiores sonos descendendo. Quod etiam ad Boëthii tempora continuatum est, qui, in schematismis suis, Grave semper in Summo ponit, & Acutum in Imo. Nolimque Euclidis authoritatem prætendi, quasi sua ætate sic fuerint loquuti, ut nunc dierum. Non interim negemus, quin fieri possit ut Aristoxeni ætate admissum fuerit, ut omnium acutissimum, Tetrachordon* ὑπερβολαίων, (excellentium, supereminentium, extravagantium, insuper adjectorum, *pluribus enim modis Latine redditur ea vox;*) *nam semel occurrit vox* ὑπερβολαίοις *apud Aristoxenum,* (*p.* 40. *lin.* 7. *editionis Meibomianæ,*) *qui est omnium quos nunc habemus Musicorum antiquissimus, sed Platone & Aristotele junior, quos ambos ipse citat sub initium libri secundi; & quibus etiam non multo juniorem esse Euclidem nostrum superius ostensum est, ut non possibile sit Tractatus hosce duos ab ipso fuisse scriptos. Sed sciendum est, tum Proslambanomenon, in Grave; tum totum Hyperbolæon Tetrachordum, in Acutum, multo serius admissa fuisse, quam indita fuerint priora nomina ab iis qui chordam Gravissimam censuerint* (ὑπάτην) Supremam. *Et quidem Vocis* Motum in Acutum, & Motum in Grave, *item* Intensionem & Remissionem, *passim habemus apud scriptores Musicos; sed* (*pro illis*) Ascensum & Descensum *nemo* (*quod scimus*) *dixerit Græcorum veterum.*

Tractatus *Musicos excipiunt* Phænomena; *Liber certe unicus, qui à Geometra scriptus cœlestia ullo modo attingit. Hujus meminit Joannes Grammaticus Philoponus ad* 2. *Phys. Aristot.; meminit etiam Pappus in lib.* 6, *ubi queritur casus esse amissos in ejus Theor.* 2^{do} 12^{mo} 13^{tio} *&c, quos supplet: unde patet Pappum librum hunc pro corrupto habuisse; neque enim de Euclide dixisset, quod propositiones* ἀμελέστερον, negligenter, *intelligeret. Hoc ulterius patet ex secundis demonstrationibus passim interpolatis, & ex scholiis* ἐκ παλαιοῦ. *Liber hic Phænomenôn supponit Elementa sphærica tunc extantia: cum vero nihil supersit hac de re scriptum ante Euclidem, præter Autolyci Prytanei Librum de Sphæra quæ movetur, hunc unicum citandum censuimus. Neque enim concinnum judicavimus, ad astruenda quæ ab Euclide asseruntur, Sphærica afferre Theodosii, quæ multis post seculis scripta sunt.*

In

In hoc edendo codices MSS. diligenter contulimus, ut textus Græcus, qui nunc primo lucem aspicit, quam castigatissimus prodiret. Theor. 2. vox ἀρκτικοῦ, *redditur* Poli arctici, *non* Circuli. *Theor. 4. & alibi sæpius, loco* μεσημβρινὸς, *legimus* μέγιστος κύκλος, *exigente sensu. Versione usi sumus Josephi Auriæ Anno 1591. Romæ edita, at plurimis in locis emendata. Schemata restituimus qualia in MSS. reperiuntur, quæ intellectu multo sunt faciliora. Zamberti & Auriæ theoremata 14 & 15 in unum conjecimus, tam ex fide optimorum codicum, quam ex rei ipsius natura; sunt enim ejusdem theorematis tantum casus diversi.*

PROXIME *apparent* Optica & Catoptrica. *Horum meminit Proclus in lib. 2. & Marinus in Præf. in Data; at nullibi (quod sciam) Pappus: tantum enim abest, ut, dum lib. 6. collect. math. Prop. 50, 51 idem demonstrat quod Euclides Theor. 35, 36 & 37 Opticæ, nullam mentionem Euclidis injiciat: postquam vero hanc rem absolvisset, nempe Prop. 55. ejusdem Libri, de Astronomicis verba faciens, Euclidis Phænomenôn meminit, eaque supplevit. Multa nos movent ut suspicemur Opus hoc esse spurium; vel, si hujusmodi Opus ab Euclide fuerat conscriptum, illud temporis lapsu prorsus fuisse corruptum. Multa, inquam, sunt quæ hoc suadeant; quorum pauca, præter dicta de Pappi silentio, adnotare non piget. Ipsum Præfationis initium satis ostendit hanc saltem ab Euclide non esse profectam: loquitur enim non in persona sua, sed in alia sive tertia; ostenditque de peripheria circulari quod in Optica demum fit ad Prop. 22. Ut taceam modum, hic & in Catoptrica, angulos designandi, quem Euclides nullibi adhibuit. Porro nemo concinnitati & elegantiæ Euclidis assuetus putabit Positiones 5, 6 & 7, item 8 & 9, rursusque 10 & 11 esse Euclidis. Rursus Phænomena 1, 2 & 3 Catoptricæ sunt prorsus falsa: occupato etenim eo speculi (sive plani, sive convexi, sive cavi) loco, in quem cadit perpendicularis ducta à re aspectabili ad speculum, res aspectabilis etiamnum cernitur: miror que hoc pro Phænomeno proponi à quopiam philosopho, nedum ab Euclide, cum quotidiana experientia in speculis planis contrarium doceat. Ultimum Phænomenon verum quidem est, at ad Catoptricam nihil attinens: Dioptricum enim est prorsus, nec quisquam est ejus in hoc libro usus. Pars theor. 5. contraria est theor. 6, estque utrumque ineptissime prolatum. Septimum theor. & quinque sequentia pendent à 16, 17 & 18, quæ Euclidem minime sapiunt; atque hæc rursus à tribus Phænomenis supra dictis: ideoque licet 7 & 16 vera sunt, tamen non sunt demonstrata: reliqua vero duo, 17 & 18, ne quidem sunt vera; hoc est, visibilis extremitatis imago non est in concursu radii reflexi per oculum transeuntis cum perpendiculari ab eadem ad speculum. Theorema 25 omnino falsum est, atque hic error ab Albazeno & Vitellione continuatur. Theoremata 23, 28 & 29 veram sapiunt Catoptricam: abest tamen suppositio, quod plures radii ab eodem visibilis puncto manant; absque qua difficile prorsus est solidi quidquam in Catoptricis invenire. Theorema ultimum nulli innititur demonstrationi, ac experientiæ prorsus est contrarium: non enim circa centrum speculi cavi Soli oppositi accenditur ignis, sed in medio puncto centrum inter & speculum. Quod theorema hoc sit hic perperam demonstratum, agnoscit Vitellio prop. ult. lib. 8. suæ Opticæ, & pseudographiam detegit; attamen, neque illic, neque ad prop. 37. lib. 9, ubi rem hanc rursus tractat, verum locum definit. In hisce Auctor assumit visum fieri per emissionem radiorum ex Oculo in Objectum: & licet hoc maximis prematur difficultatibus ex Physica petitis, in re tamen Mathematica, ubi Oculus habetur tanquam punctum videns, eodem redit cum hypothesi emissionis radiorum ex Visibili, & intramissionis in Oculum; concinnius tamen putabant veteres radium ab animato Oculo versus Objectum dirigi, quam ab Objecto inanimato versus Oculum; nunquam enim (quod res est) de radiis ab unoquoque visibilis puncto circumquaque perpetuo manantibus cogitarunt. Versione latina Joannis Penæ sumus usi, Græcumque textum quam potuimus castigatum fecimus: adjecimus passim Notas doctissimas & restitutiones, quas Illustris* Savilius *ad oram marginis adscripserat, ex quibus liquet illum recte existimasse* Euclidis Opticæ & Catoptricæ libros esse non magni momenti.

SCRIPSIT *etiam Euclides Librum* περὶ διαιρέσεων, de Divisionibus, *teste Proclo.* Joannes Dee *Londinensis, cum Librum de Divisionibus superficierum,* Machometo Bagdedino *(qui floruisse creditur seculo Christi decimo) vulgo adscriptum, ex Arabico (uti credo, licet hoc expresse non dicat) in Latinum verteret, & Commandino in lucem publicam edendum committeret, sic scribit: "Cum ipsemet Euclides Librum de Divisionibus scripserit, "nullum, qui sub hoc titulo extet, alium novimus, nec qui jure meliori propter tractandi "excellentiam Euclidi ascribi queat, invenire possumus ullum: nullius enim Machometi*

"tantum

"*tantum in Mathematicis acumen adhuc perspicere ex eorum, quæ habemus, monimentis* "*potuimus, quantum in his ubique elucet problematibus. Denique in antiquissimo quodam* "*Geometrici negocii fragmento memini me expressis verbis ex hoc libello locum citatum le*-"*gisse, veluti ex Euclidis certissimo opere. Porro invenimus ad hæc verba lib.* 2. *Procli*, Circulus namque, & Rectilineorum quodlibet, in ratione dissimiles dividi potest figuras; quod & ipse Euclides in Divisionibus pertractat, *ipsius* Jo. Dee *manu scriptum*: "*Clarum hinc esse potest Librum illum, sive Fragmentum, de Divisionibus Super*-"*ficierum, quem nos cum Mathematico excellentissimo D. Federico Commandino Urbini* "*reliquimus, Anno* 1563, *ipsius Euclidis fuisse; quod tum conjiciebamus quidem, aliis ar*-"*gumentis adducti, hujus loci immemores. Ex hoc ipso tamen Procli loco colligit* Savilius *hunc librum non esse Euclidis*: "*Atqui nulla est* (*inquit in Prælect.*1.) *in illo Bagdedini* "*libello propositio, quæ figuras doceat in similes vel dissimiles figuras dividere, sed in datam* "*proportionem dividere. Inter contrarias gravissimorum Virorum opiniones de auctore hujus Libri, illum hoc in loco edendum judicavimus, quod & raro admodum reperiatur, & Euclidem auctorem magis sapiat quam Optica & Catoptrica pro ejusdem Libris habitæ. Illum Latine tantum exhibemus; Græce enim, quod sciamus, nullibi reperitur; nescimus an Arabice, in aliqua Italiæ bibliotheca. Euclidis propositiones ab illo citatas numeravimus, non ut ille Campanum secutus, sed prout in hac editione numerantur. Notas pauculas Illustris* Savilii *adjecimus, quæ locis quibus adjectæ sunt multum lucis afferunt.*

Tres *item* Porismatum *Libros edidit Euclides, teste Pappo & Proclo. Et Proclus quidem, in commentariis, Porisma hujusmodi dicit Propositionem, quæ neque Problema est neque Theorema, id est, quæ neque generationem aut* ποίησιν *alicujus rei requirit, neque simplicem contemplationem; sed inventionem tantum: ut Dati Circuli centrum invenire, & quæ huic similia; alia plane ac diversa notione vocis Porismatis, quam quæ in Elementis. Perierunt hi Libri magno rei Geometricæ, Loci præsertim Resoluti, damno. Ex iis vero quæ in* 7mo *lib. Pappi* (*tum in Præf. tum à Prop.* 127. *ad* 165.) *supersunt, non difficile futurum reor illos quodammodo restituere, ubi Textus Græcus lucem aspexerit: Commandini namque versio Præfationis latina mentem Pappi minime assequitur.*

Pappus *etiam in dicto lib.*7. *commemorat Euclidis* τόπων πρὸς ἐπιφάνειαν, Locorum ad Superficiem, *Libros duos, ad Analysin Geometricam itidem pertinentes; sed qui etiam periere. Horum nihil consignavit Pappus præter Lemmata quatuor.*

Fallaciarum, ψευδαρίων, *quoque Librum ab Euclide conscriptum memorat Proclus in Libro* 2do; *de quo sic scribit*: "*Quoniam multa mente concipimus ut veritati ad*-"*hærentia, & scientificis principiis consentanea, quæ à principiis aberrant & simpliciores* "*decipiunt; methodos tradidit Euclides altera ab alteris prudenter discernendi, per quas* "*hujus disciplinæ tirones fierent exercitatiores ad deprehendendos paralogismos, & à fal*-"*laciis & captionibus cautiores. Atque hunc Librum, per quem hanc infert nobis præpara*-"*tionem, Fallaciarum inscripsit; quippe qui modos ipsarum omnes ordine enumeravit, at*-"*que in horum unoquoque cogitationem nostram variis exercuit theorematibus, & Fallaciæ* "*Verum comparavit, ipsique experientiæ deceptionis redargutionem coaptavit. Hic itaque* "*Liber purgandi exercendique vim habet; sicut Elementaris Geometriæ Institutio invinci*-"*bilem perfectumque habet ordinem. Periit & hic magno totius rei literariæ damno.*

"Euclides, *teste Pappo in lib.* 7, *secutus Aristæum scriptorem luculentum in iis* "*quæ de Conicis tradiderat, neque antevertens, neque volens eorum tractationem destruere,* "*cum mitissimus esset & benignus erga omnes,* quatuor Libros Conicorum *scripsit, quos* "*Apollonius* (*qui Euclidis discipulis Alexandriæ longo tempore operam dedit*) *explevit, ac* "*iis quatuor alios adjunxit. De his igitur plura non dicemus, cum brevi forsan Apollonii Conica Græce, Mathematicis hucusque invisa, edendi occasio dabitur.*

Est & *Fragmentum quod in Zamberti editione latina Euclidi adscribitur*, de Levi & Ponderoso. *Nescio qua auctoritate fretus istud fecerit* Jo. Hervagius *editor; neque enim aliud dicit, quam quod dum hæc ederet, illud ad se fuerit allatum.* Savilius *illud pro spurio habet. Nos, cum paginam non excedat, edimus, prout illud accepimus; ne quid in hac nostra editione desideretur.*

Oxoniæ,
Junii 10. 1703.

ELENCHUS OPERUM.

ET-

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ*.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER PRIMUS.

ΟΡΟΙ.

α'. ΣΗΜΕΙΟΝ ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

β'. Γραμμὴ δὲ, μῆκος ἀπλατές.

γ'. Γραμμῆς δὲ πέρατα, σημεῖα.

δ'. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

ε'. Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

ϛ'. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα, γραμμαί.

ζ'. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

η'. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

θ'. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

ι'. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἐστιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

ια'. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν, ἡ μείζων ὀρθῆς.

ιβ'. Ὀξεῖα δὲ, ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

ιγ'. Ὅρος ἐστὶν, ὅ τινός ἐστι πέρας.

DEFINITIONES.

1. PUNCTUM est, cujus pars nulla est.

2. Linea autem est longitudo non lata.

3. Lineæ vero extrema sunt puncta.

4. Recta quidem linea est, quæ ex æquo sua interjacet puncta.

5. Superficies autem est, quod longitudinem & latitudinem tantum habet.

6. Superficiei vero extrema sunt lineæ.

7. Plana quidem superficies est, quæ ex æquo suas lineas rectas interjacet.

8. Planus vero angulus est duarum linearum, in plano sese tangentium, & non in directum jacentium, mutua inclinatio.

9. Quando autem lineæ angulum comprehendentes rectæ fuerint, angulus ipse appellatur rectilineus.

10. Cum vero recta linea super rectam lineam insistens angulos deinceps inter se æquales fecerit, rectus est uterque æqualium angulorum: & quæ insistit recta linea, perpendicularis vocatur ad eam super quam insistit.

11. Obtusus angulus est, qui major est recto.

12. Acutus autem, qui est recto minor.

13. Terminus est, quod alicujus est extremum.

* Quidam Codices addunt: Ἐκ τῶν Θέωνος συνουσιῶν.

14. Figura est, quæ aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur.

15. Circulus est figura plana una linea comprehensa, quæ circumferentia appellatur; ad quam, ab uno puncto eorum quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

16. Hoc autem punctum, centrum circuli nuncupatur.

17. Diameter vero circuli est recta quædam linea per centrum ducta, & ex utraque parte circumferentiâ circuli terminata: quæ etiam circulum bifariam secat.

18. Semicirculus est figura comprehensa sub diametro, & ea circuli circumferentia, quæ à diametro intercipitur.

19. Segmentum circuli est, quod recta linea & circuli circumferentia comprehenditur.

20. Rectilineæ figuræ sunt, quæ rectis lineis comprehenduntur.

21. Trilateræ quidem, quæ tribus.

22. Quadrilateræ, quæ quatuor.

23. Multilateræ vero, quæ pluribus quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.

24. E trilateris autem figuris, æquilaterum triangulum est, quod tria latera habet æqualia.

25. Isosceles autem, quod duo tantum æqualia habet latera.

26. Scalenum vero, quod tria latera habet inæqualia.

27. Adhæc, è trilateris figuris, rectangulum quidem triangulum est, quod rectum angulum habet.

28. Amblygonium autem, quod habet angulum obtusum.

29. Oxygonium vero, quod tres habet angulos acutos.

30. E figuris autem quadrilateris, quadratum quidem est, quod & æquilaterum est & rectangulum.

31. Oblongum, quod rectangulum quidem est, sed non æquilaterum.

32. Rhombus, quod æquilaterum quidem est, sed non rectangulum.

33. Rhomboïdes, quod habet opposita

ιδ'. Σχῆμά ἐστι, τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον.

ιε'. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον, ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἣ καλεῖται περιφέρεια· πρὸς ἣν, ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων, πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

ιϛ'. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.

ιζ'. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας· ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

ιη'. Ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα, ὑπό τε διαμέτρου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

ιθ'. Τμῆμα κύκλου ἐστὶ, τὸ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

κ'. Εὐθύγραμμα σχήματά ἐστι, τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα.

κα'. Τρίπλευρα μὲν, τὰ ὑπὸ τριῶν.

κβ'. Τετράπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ τεσσάρων.

κγ'. Πολύπλευρα δὲ, τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

κδ'. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων, ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς.

κε'. Ἰσοσκελὲς δὲ, τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς.

κϛ'. Σκαληνὸν δὲ, τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

κζ'. Ἔτι τε, τῶν τριπλεύρων σχημάτων, ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι, τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν.

κη'. Ἀμβλυγώνιον δὲ, τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν.

κθ'. Ὀξυγώνιον δὲ, τὸ τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

λ'. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων, τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον.

λα'. Ἑτερόμηκες δὲ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ.

λβ'. Ῥόμβος δὲ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ.

λγ'. Ῥομβοειδὲς δὲ, τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευρὰς πλευρά τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον.

λδʹ. Τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλείσθω.

λεʹ. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵ τινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

ΑΙΤΗΜΑΤΑ.

αʹ. Ἠτήσθω, ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

βʹ. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβάλλειν.

γʹ. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

ΚΟΙΝΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ.

αʹ. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

βʹ. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

γʹ. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.

δʹ. Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.

εʹ. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπά ἐστιν ἄνισα.

ϛʹ. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

ζʹ. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

ηʹ. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

θʹ. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστι.

ιʹ. * Καὶ πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

ιαʹ. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλόμεναι αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἐπ' ἄπειρον συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι.

ιβʹ. Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν.

& latera & angulos invicem æqualia, sed neque æquilaterum est, nec rectangulum.

34. Reliqua autem quadrilatera præter hæc, vocentur trapezia.

35. Parallelæ denique rectæ lineæ sunt, quæ in eodem jacentes plano, atque ex utraque parte in infinitum productæ, in neutram sibi coincidunt.

POSTULATA.

1. POstuletur, à quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.

2. Item rectam lineam finitam continue in directum producere.

3. Item quovis centro & intervallo circulum describere.

COMMUNES NOTIONES, SIVE AXIOMATA.

1. QUÆ eidem æqualia, inter se sunt æqualia.

2. Item si æqualibus æqualia addantur, tota sunt æqualia.

3. Item si ab æqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt æqualia.

4. Item si inæqualibus æqualia addantur, tota sunt inæqualia.

5. Item si ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt inæqualia.

6. Item quæ ejusdem sunt duplicia, inter se sunt æqualia.

7. Item quæ ejusdem sunt dimidia, inter se æqualia sunt.

8. Item quæ sibi mutuo congruunt, sunt æqualia.

9. Item totum sua parte majus est.

10. * Item omnes anguli recti inter se æquales sunt.

11. Item si in duas rectas lineas recta incidens angulos interiores & ad easdem partes duobus rectis minores fecerit; duæ illæ rectæ, in infinitum productæ, coincident inter se ex ea parte, ad quam sunt anguli duobus rectis minores.

12. Item duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

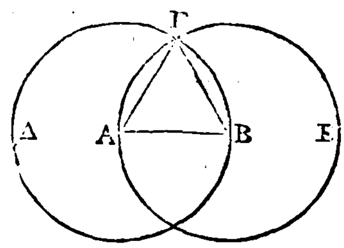
* In quibusdam Codicibus Axiomata 10 & 11 inter Postulata numerantur.

Propositio I. Problema.

Super datam rectam terminatam, triangulum æquilaterum constituere.

SIT data recta terminata AB: oportet vero super rectam AB triangulum æquilaterum constituere.

Centro quidem A, intervallo autem AB, describatur [per 3. post.] circulus BΓΔ; & rursus centro B, intervallo BA, describatur circulus AΓE; & à puncto Γ, in quo circuli sese mutuo secant, ad puncta A, B ducantur [per 1. post.] rectæ ΓA, ΓB.



Quoniam igitur punctum A est centrum circuli ΓΔB, recta AΓ [per 15. def.] erit æqualis ipsi AB: rursus, quoniam punctum B est centrum circuli ΓAE, erit BΓ æqualis rectæ BA. ostensum autem est rectam ΓA æqualem esse rectæ AB: utraque igitur rectarum ΓA, ΓB æqualis est rectæ AB. quæ autem eidem sunt æqualia, & inter se sunt æqualia; recta igitur ΓA rectæ ΓB æqualis est: quare tres rectæ ΓA, AB, BΓ inter se sunt æquales.

Est igitur [per 24. def.] triangulum ABΓ æquilaterum, atque etiam constitutum super datam rectam terminatam AB. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α΄.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα πεπερασμένη ἡ AB· δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς AB εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Κέντρῳ μὲν τῷ A, διαστήματι δὲ τῷ AB, κύκλος γεγράφθω ὁ BΓΔ· καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ B, διαστήματι δὲ τῷ BA, κύκλος γεγράφθω ὁ AΓE· καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ A, B σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓA, ΓB.

Ἐπεὶ οὖν τὸ A σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔB κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ AΓ τῇ AB· πάλιν, ἐπεὶ τὸ B σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓAE κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ BΓ τῇ BA. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓA τῇ AB ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓA, ΓB τῇ AB ἐστιν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΓA ἄρα τῇ ΓB ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓA, AB, BΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

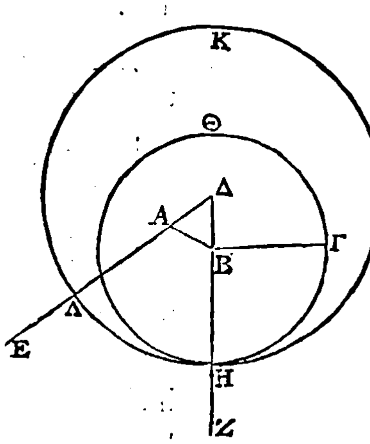
Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓ τρίγωνον, καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς AB. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. II. Probl.

Ad datum punctum, datæ rectæ æqualem rectam ponere.

SIT datum punctum A, & data recta BΓ: oportet quidem ad punctum A, rectæ BΓ æqualem rectam ponere.

Ducatur [per 1. post.] ab A puncto ad punctum B recta AB; & super eam [per 1. prop.] constituatur triangulum æquilaterum ΔAB, producanturque in directum ipsis ΔA, ΔB rectæ AE, BZ; dein centro B, intervallo BΓ, describatur [per 3. post.] circulus ΓHΘ: & rursus centro Δ, intervallo ΔH, describatur circulus HKΛ.



Quoniam igitur punctum B est centrum circuli ΓHΘ, erit [per 15. def.] recta BΓ æqualis rectæ BH. rursus, quoniam punctum Δ centrum est circuli HKΛ, erit recta ΔΛ rectæ ΔH æqualis; ex quibus ΔA æqualis est ΔB: reliqua igitur AΛ, [per 3. ax.] reliquæ BH æqualis erit. ostensum autem est rectam BΓ rectæ BH æqualem esse: utraque igitur rectarum AΛ, BΓ rectæ BH æqualis est. quæ vero eidem æqualia, & inter se sunt æqualia: ergo & recta AΛ æqualis est rectæ BΓ.

Ad datum igitur punctum A, datæ rectæ BΓ æqualis posita est recta AΛ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β΄.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ A, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ BΓ· δεῖ δὴ πρὸς τῷ A σημείῳ, τῇ BΓ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ A σημείου ἐπὶ τὸ B σημεῖον εὐθεῖα ἡ AB· καὶ συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔAB, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας τῶν ΔA, ΔB εὐθεῖαι αἱ AE, BZ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ B, διαστήματι δὲ τῷ BΓ, κύκλος γεγράφθω ΓHΘ· καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΔH, κύκλος γεγράφθω ὁ HKΛ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ B σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓHΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ BΓ τῇ BH. καὶ πάλιν, ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ HKΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΛ τῇ ΔH, ὧν ἡ ΔA τῇ ΔB ἴση ἐστί· λοιπὴ ἄρα ἡ AΛ λοιπῇ τῇ BH ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ BΓ τῇ BH ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν AΛ, BΓ τῇ BH ἐστιν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ AΛ ἄρα τῇ BΓ ἐστιν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ A, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ BΓ ἴση εὐθεῖα κεῖται ἡ AΛ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γʹ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, Γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Κείσθω πρὸς τῷ Α σημείῳ τῇ Γ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΔ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΕΖ.

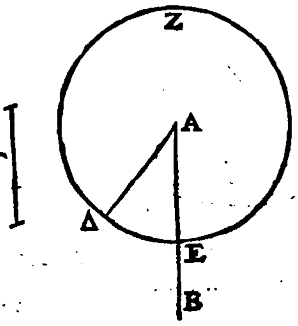
Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΔ· ἀλλὰ καὶ ἡ Γ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση. ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΕ, Γ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΑΕ τῇ Γ ἐστὶν ἴση.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τῶν ΑΒ, Γ, ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴση ἀφῄρηται ἡ ΑΕ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. III. PROBL.

Datis duabus rectis inæqualibus, à majore auferre rectam æqualem minori.

Sint duæ datæ rectæ inæquales AB & Γ, quarum major sit AB: oportet à recta AB majore auferre rectam æqualem rectæ Γ minori.



Ponatur [per 2. prop.] ad punctum A recta AΔ æqualis rectæ Γ; & centro A, intervallo AΔ, describatur [per 3. post.] circulus ΔEZ.

Et quoniam punctum A centrum est circuli ΔEZ, erit recta AE æqualis rectæ AΔ: est autem recta Γ æqualis eidem AΔ. utraque igitur rectarum AB, Γ æquatur rectæ AΔ: quare & recta AE est æqualis rectæ Γ.

Datis igitur duabus rectis inæqualibus AB, Γ, ab AB majore ablata est AE æqualis rectæ Γ minori. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δʹ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

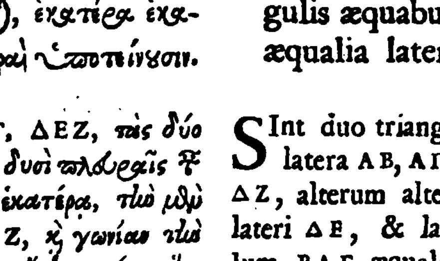
Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην· λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, τῆς δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΔΕ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΔΕ· ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ΔΕ, ἐφαρμόσει καὶ ἡ ΑΓ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΔΖ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ὥστε καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ σημεῖον ἐφαρμόσει, διὰ τὸ ἴσην πάλιν εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΔΖ. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφηρμόκει, ὥστε βά-

PROP. IV. THEOREMA.

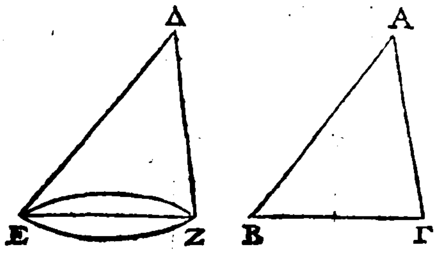
Si duo triangula habuerint duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri; & angulum æqualem angulo, qui ab æqualibus rectis comprehenditur: habebunt & basim basi æqualem, & triangulum erit triangulo æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquabuntur, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur.

Sint duo triangula ABΓ, ΔEZ, habentia duo latera AB, AΓ æqualia duobus lateribus ΔE, ΔZ, alterum alteri; nempe latus AB æquale lateri ΔE, & latus AΓ lateri ΔZ, & angulum BAΓ æqualem angulo EΔZ: dico & basim BΓ æquari basi EZ, & triangulum ABΓ æquari triangulo ΔEZ, & reliquos angulos reliquis angulis æquari, alterum alteri, quibus latera æqualia subtenduntur; angulum nempe ABΓ angulo ΔEZ, & angulum AΓB angulo ΔZE.



Nam si ABΓ triangulum applicetur triangulo ΔEZ, posito puncto A super punctum Δ, & recta AB super rectam ΔE; punctum B congruet puncto E, quia recta AB æquatur rectæ ΔE: congruente autem recta AB rectæ ΔE, congruet etiam recta AΓ rectæ ΔZ, quia angulus BAΓ æqualis est angulo EΔZ: quare & punctum Γ congruet puncto Z, quia recta AΓ æqualis est rectæ ΔZ. punctum autem B congruebat puncto E, idcirco

circo basis ΒΓ congruet basi ΕΖ: nam si punctum Β congruat puncto Ε, & punctum Γ puncto Ζ, basis autem ΒΓ non congruat basi ΕΖ; necesse est duas rectas comprehendere spatium, quod [per 12. ax.] fieri non potest. congruet igitur basis ΒΓ basi ΕΖ, eique æqualis erit: quare & totum triangulum ΑΒΓ congruet toti triangulo ΔΕΖ, eritque ei æquale; & reliqui anguli reliquis angulis congruent, iisque æquabuntur; nempe angulus ΑΒΓ angulo ΔΕΖ, & angulus ΑΓΒ angulo ΔΖΕ.



Si igitur duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus æqualia, alterum alteri; & angulum habuerint angulo æqualem, qui ab æqualibus rectis comprehenditur: habebunt & basim basi æqualem, & triangulum triangulo erit æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. quod erat demonstrandum.

σις ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει· εἰ γὰρ τὸ μὲν Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφαρμόζοντος, τὸ δὲ Γ ἐπὶ τὸ Ζ, ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ἀδύνατον. ἐφαρμόσει ἄρα ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ, καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται· ὥστε καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἐπὶ ὅλον τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἐφαρμόσει, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι, καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

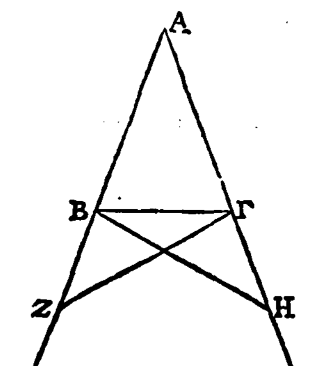
Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. V. THEOR.

Triangulorum isoscelium anguli ad basim sunt inter se æquales: &, productis æqualibus rectis, anguli sub basim erunt inter se æquales.

SIT triangulum isosceles ΑΒΓ, habens latus ΑΒ æquale lateri ΑΓ, & producantur [per 2. post.] rectæ ΒΔ, ΓΕ in directum rectis ΑΒ, ΑΓ: dico angulum ΑΒΓ æqualem esse angulo ΑΓΒ, item angulum ΓΒΔ æqualem esse angulo ΒΓΕ.

Sumatur enim in recta ΒΔ punctum quodlibet Ζ, & ab ΑΕ recta majore auferatur [per 3. prop.] recta ΑΗ æqualis rectæ ΑΖ minori, & ducantur rectæ ΖΓ, ΗΒ.



Quoniam igitur ΑΖ æquatur rectæ ΑΗ, & ΑΒ rectæ ΑΓ, duæ etiam ΖΑ, ΑΓ æquantur duabus ΗΑ, ΑΒ, altera alteri, & comprehendunt communem angulum ΖΑΗ: erit igitur [per 4. prop.] basis ΖΓ æqualis basi ΗΒ, & triangulum ΑΖΓ æquale triangulo ΑΗΒ, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur; angulus nempe ΑΓΖ angulo ΑΒΗ, & angulus ΑΖΓ angulo ΑΗΒ. cum autem tota ΑΖ æquatur toti ΑΗ, & ΑΒ æquatur rectæ ΑΓ; reliqua igitur ΒΖ [per 3. ax.] æquabitur reliquæ ΓΗ. ostensum autem est rectam ΖΓ æqualem esse rectæ ΗΒ: duæ itaque rectæ ΒΖ, ΖΓ æquantur duabus ΓΗ, ΗΒ, altera alteri, & angulus ΒΖΓ æquatur angulo ΓΗΒ, & recta ΒΓ est eorum basis communis; erit igitur [per 4. prop.] & triangu-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· καὶ, προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

ΕΣτω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΓ, ἴσην ἔχον τὴν ΑΒ πλευρὰν τῇ ΑΓ πλευρᾷ, καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπ᾽ εὐθείας ταῖς ΑΒ, ΑΓ εὐθεῖαι αἱ ΒΔ, ΓΕ· λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΕ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΒΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΕ τῇ ἐλάσσονι τῇ ΑΖ ἴση ἡ ΑΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΓ, ΗΒ εὐθεῖαι.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΖ τῇ ΑΗ, ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΗΑ, ΑΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι τὴν ὑπὸ ΖΑΗ· βάσις ἄρα ἡ ΖΓ βάσει τῇ ΗΒ ἴση ἐστὶν, καὶ τὸ ΑΖΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΖΓ τῇ ὑπὸ ΑΗΒ. καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ ΑΖ ὅλῃ τῇ ΑΗ ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΖ λοιπῇ τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΗΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΒΖ, ΖΓ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΖΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΒΓ· καὶ τὸ ΒΖΓ ἄρα τρίγω-
νον

νον τῷ ΓΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσαι, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐσὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΗ. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΖ γωνίᾳ ἐδείχθη ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ΓΒΗ τῇ ὑπὸ ΒΓΖ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐσὶν ἴση, καί εἰσι πρὸς τῇ βάσει τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἴση, καί εἰσιν ὑπὸ τὴν βάσιν.

Τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· καὶ, προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

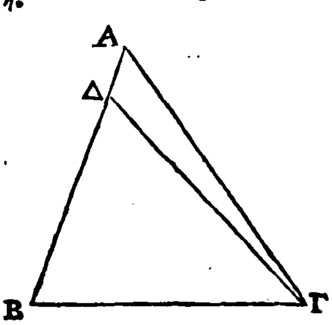
lum ΒΖΓ æquale triangulo ΓΗΒ, & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur: æqualis est igitur angulus ΖΒΓ angulo ΗΓΒ, & angulus ΒΓΖ angulo ΓΒΗ. idcirco cum ostensum fuerit totum angulum ΑΒΗ æqualem esse toti angulo ΑΓΖ, & angulum ΓΒΗ æqualem angulo ΒΓΖ; reliquus angulus ΑΒΓ [per 3. ax.] reliquo ΑΓΒ æqualis erit, & sunt ad basim trianguli ΑΒΓ: ostensum etiam est angulum ΖΒΓ æqualem esse angulo ΗΓΒ, & sunt sub basim.

Triangulorum igitur isoscelium anguli ad basim sunt inter se æquales: &, productis rectis æqualibus, anguli sub basim erunt inter se æquales. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΑΓΒ γωνίᾳ· λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΓ πλευρᾷ τῇ ΑΒ ἐσὶν ἴση.



Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἐσίν. ἔσω μείζων ἡ ΑΒ· καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐσὶν ἡ ΔΒ τῇ ΑΓ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐσὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΑΒ ἴση ἐσὶν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσαι, τῷ ἐλάσσονι τὸ μεῖζον, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐσιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ· ἴση ἄρα.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. VI. THEOR.

Si trianguli duo anguli sint inter se æquales, latera æqualibus angulis subtensa inter se æqualia erunt.

Esto triangulum ΑΒΓ, æqualem habens ΑΒΓ angulum angulo ΑΓΒ: ajo latus ΑΓ æquale esse lateri ΑΒ.

Si enim ΑΓ inæquale est lateri ΑΒ, eorum alterum majus erit. sit majus ΑΒ: & ab ΑΒ majore auferatur [per 3. prop.] recta ΔΒ æqualis lateri ΑΓ minori, & ducatur recta ΔΓ.

Quoniam igitur ΔΒ æquatur rectæ ΑΓ, & recta ΒΓ est latus commune, duæ rectæ ΔΒ, ΒΓ æquantur duabus rectis ΑΓ, ΓΒ, altera alteri, & angulus ΔΒΓ angulo ΑΓΒ est æqualis; basis igitur ΔΓ æquabitur basi ΑΒ, & triangulum ΑΒΓ æquabitur triangulo ΔΓΒ, majus minori, quod absurdum est: non est ideo ΑΒ inæqualis rectæ ΑΓ; igitur æqualis.

Idcirco si trianguli duo anguli sint inter se æquales, latera æqualibus angulis subtensa inter se æqualia erunt. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἄλλαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συνεστάτωσαν, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ τῷ τε Γ καὶ Δ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ Γ, Δ, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι τὰ Α, Β ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις· ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΓΑ τῇ

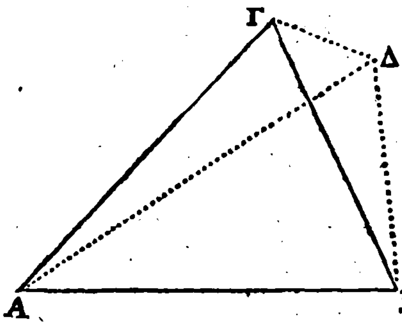
PROP. VII. THEOR.

Super eandem rectam, duabus iisdem rectis duæ aliæ rectæ æquales altera alteri non constituentur, ad aliud atque aliud punctum in easdem partes, eosdem terminos habentes cum rectis initio ductis.

Nam si fieri potest, super eandem rectam ΑΒ, duabus iisdem rectis ΑΓ, ΓΒ duæ aliæ rectæ ΑΔ, ΔΒ æquales altera alteri constituantur, ad aliud atque aliud punctum Γ & Δ, in easdem partes Γ & Δ, eosdem terminos habentes Α & Β cum rectis initio ductis; ita ut recta ΓΑ sit æqualis rectæ

ΔΑ, habens cum illa eundem terminum, punctum Α, & recta ΓΒ æqualis rectæ ΔΒ, habens cum illa eundem terminum, punctum Β: & ducatur recta ΓΔ.

Quoniam igitur ΑΓ æquatur rectæ ΑΔ, æqualis est [per 5. prop.] angulus ΑΓΔ angulo ΑΔΓ: quare angulus ΑΔΓ major est angulo ΔΓΒ, & angulus ΓΔΒ multo major est angulo ΔΓΒ. rursus quoniam recta ΓΒ æqualis est rectæ ΔΒ, erit angulus ΓΔΒ æqualis angulo ΔΓΒ. ostensum autem est eodem esse multo majorem, quod est impossibile.



Super eandem igitur rectam, duabus iisdem rectis duæ aliæ rectæ æquales altera alteri non constituentur, ad aliud & aliud punctum in easdem partes, habentes eosdem terminos cum rectis initio ductis. quod erat demonstrandum.

ΔΑ, τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαι αὐτῇ τὸ Α, ἡ δὲ ΓΒ τῇ ΔΒ, τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσα αὐτῇ τὸ Β· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ.

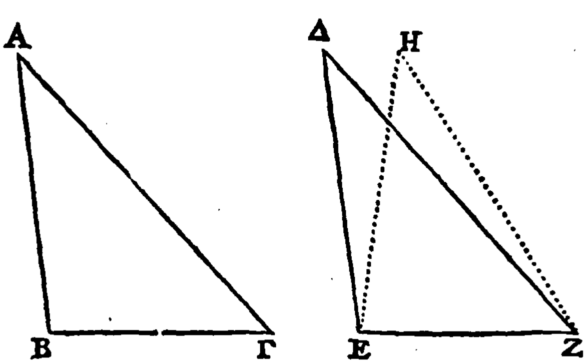
Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ, πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΔΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΔΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΒ. ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῷ μείζων, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συσταθήσονται, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VIII. Theor.

Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri; habeant etiam & basim basi æqualem: angulum quoque angulo æqualem habebunt, ab æqualibus rectis comprehensum.

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, habentia duo latera ΑΒ, ΑΓ duobus lateribus ΔΕ, ΔΖ æqualia, alterum alteri, latus quidem ΑΒ lateri ΔΕ, & latus ΑΓ lateri ΔΖ; habeant etiam & basim ΒΓ æqualem basi ΕΖ: dico etiam angulum ΒΑΓ æqualem esse angulo ΕΔΖ.



Si enim triangulum ΑΒΓ applicetur triangulo ΔΕΖ, & punctum Β ponatur super punctum Ε, & recta ΒΓ super rectam ΕΖ; congruet punctum Γ puncto Ζ, quia recta ΒΓ æquatur rectæ ΕΖ: congruente vero ΒΓ rectæ ΕΖ, congruent etiam ΒΑ, ΑΓ rectis ΕΔ, ΔΖ. si enim basis ΒΓ congruat basi ΕΖ, latera vero ΒΑ, ΑΓ non congruant lateribus ΕΔ, ΔΖ, sed situm mutent, ut ΕΗ, ΗΖ; constituentur, super eandem rectam, duabus iisdem rectis aliæ duæ rectæ æquales, altera alteri, ad aliud & aliud punctum in easdem partes, habentes eosdem terminos. sed [per 7. prop.] non constituuntur: congruente igitur basi ΒΓ basi ΕΖ, non possunt non congruere etiam latera ΒΑ, ΑΓ lateribus ΕΔ, ΔΖ. congruent igitur: adeoque angulus ΒΑΓ congruet angulo ΕΔΖ, eique æqualis erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην· καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ· ἐχέτω δὲ καὶ βάσιν τὴν ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴσην· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστὶν ἴση.

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Β σημείου ἐπὶ τὸ Ε σημεῖον, τῆς δὲ ΒΓ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΕΖ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς ΒΓ ἐπὶ τὴν ΕΖ, ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ ΒΑ, ΑΓ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. εἰ γὰρ βάσις μὲν ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει, αἱ δὲ ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ οὐκ ἐφαρμόζουσιν, ἀλλὰ παραλλάξουσιν, ὡς αἱ ΕΗ, ΗΖ· συσταθήσονται, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι. οὐ συνίστανται δέ· οὐκ ἄρα, * ἐφαρμοζομένης τῆς ΒΓ βάσεως ἐπὶ τὴν ΕΖ βάσιν, οὐκ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. ἐφαρμόσουσι ἄρα· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ἐπὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΔΖ ἐφαρμόσει, καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται.

* Ισ. ἐφαρμοσάσης.

Ἐὰν

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔχῃ· καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si igitur duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri; habeant etiam & basim basi æqualem: angulum quoque angulo æqualem habebunt, ab æqualibus rectis comprehensum. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

PROP. IX. PROBL.

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.

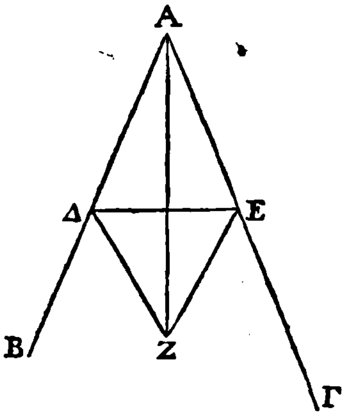
Datum angulum rectilineum bifariam secare.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ· δεῖ δὴ αὐτὴν δίχα τεμεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ· λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΖ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΖ δυσὶ ταῖς ΕΑ, ΑΖ ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστί· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΖ ἐστὶν ἴση.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



SIT datus angulus rectilineus ΒΑΓ: oportet illum bifariam secare.

Sumatur in recta ΑΒ punctum quodlibet Δ, & à recta ΑΓ auferatur [per 3. prop.] recta ΑΕ æqualis rectæ ΑΔ, & ducatur recta ΔΕ; & super rectam ΔΕ fiat [per 1. prop.] triangulum æquilaterum ΔΕΖ, & ducatur recta ΑΖ: dico angulum ΒΑΓ bifariam secari à recta ΑΖ.

Quoniã enim ΑΔ æquatur rectæ ΑΕ, recta autem ΑΖ sit communis; duæ rectæ ΔΑ, ΑΖ duabus rectis ΕΑ, ΑΖ æquales erunt, altera alteri; basis etiam ΔΖ æquatur basi ΕΖ: angulus igitur ΔΑΖ æquatur [per 8. prop.] angulo ΕΑΖ.

Datus igitur angulus rectilineus ΒΑΓ bifariam secatur à recta ΑΖ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

PROP. X. PROBL.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

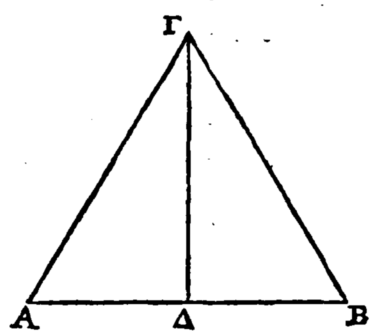
Datam rectam lineam terminatam bifariam secare.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ δίχα τεμεῖν.

Συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία δίχα τῇ ΓΔ εὐθείᾳ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ εὐθεῖα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ σημεῖον.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ, δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΔ δυσὶ ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΔ ἐστὶν ἴση.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



SIT data recta terminata ΑΒ: oportet rectam ΑΒ bifariam secare.

Fiat [per 1. prop.] super illam triangulum æquilaterum ΑΒΓ, & secetur [per 9. prop.] angulus ΑΓΒ bifariam à recta ΓΔ: dico rectam ΑΒ bifariam secari in puncto Δ.

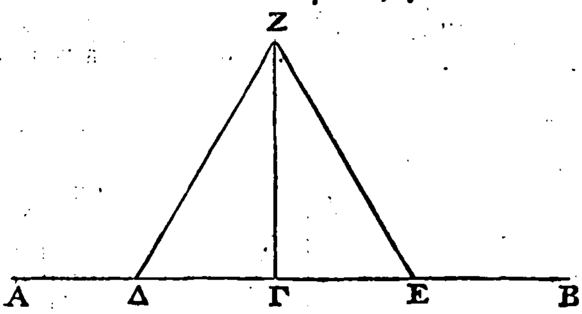
Quoniam enim ΑΓ æqualis est rectæ ΓΒ, recta autem ΓΔ est communis; duæ rectæ ΑΓ, ΓΔ æquales sunt duabus rectis ΒΓ, ΓΔ, altera alteri, & angulus ΑΓΔ æqualis est angulo ΒΓΔ: basis igitur ΑΔ æqualis est [per 4. prop.] basi ΒΔ.

Data igitur recta terminata ΑΒ bifariam secatur in puncto Δ. quod erat faciendum.

Prop. XI. Probl.

Datæ rectæ lineæ, à puncto in ipsa dato, ad rectos angulos rectam lineam ducere.

SIT data recta AB, & punctum in ea Γ: oportet à puncto Γ ipsi rectæ AB ad rectos angulos rectam lineam ducere.



Sumatur in recta AΓ punctum quodlibet Δ, & [per 3. prop.] ponatur ΓE æqualis rectæ ΓΔ, & [per 1. prop.] constituatur super rectam ΔE triangulum æquilaterum ZΔE, & ducatur recta ZΓ: dico quod datæ rectæ AB, à dato in ea puncto Γ, ad rectos angulos ducitur recta ZΓ.

Quoniam enim æqualis est ΓΔ rectæ ΓE, & recta ZΓ communis; duæ rectæ ΔΓ, ΓZ æquantur duabus rectis EΓ, ΓZ, altera alteri, & basis ΔZ æquatur basi EZ: angulus igitur ΔΓZ æquatur [per 8. prop.] angulo EΓZ; atque hi anguli sunt deinceps. quando autem recta insistens in rectam fecerit angulos deinceps inter se æquales, rectus est [per 10. def.] uterque æqualium angulorum: rectus igitur est uterque angulorum ΔΓZ, ZΓE.

Datæ igitur rectæ lineæ AB, à dato in illa puncto Γ, ad rectos angulos ducta est recta linea ZΓ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Γ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ AB εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς AΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΓE, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔE τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ZΔE, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ZΓ· λέγω ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ AB, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ZΓ.

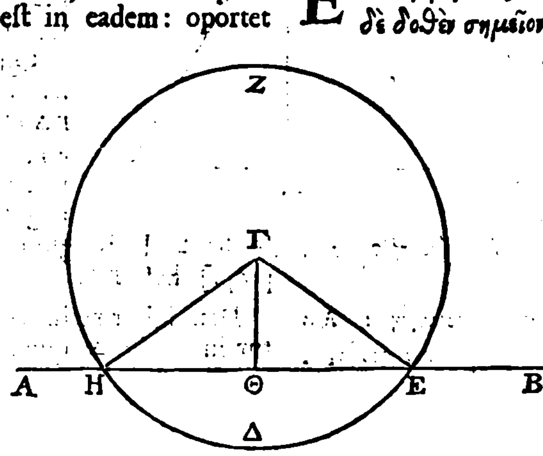
Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΓE, κοινὴ δὲ ἡ ZΓ, δύο δὴ αἱ ΔΓ, ΓZ δυσὶ ταῖς EΓ, ΓZ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔZ βάσει τῇ EZ ἴση ἐστί· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓZ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ EΓZ ἴση ἐστὶ, καί εἰσιν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἐστιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΔΓZ, ZΓE.

Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ AB, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας γραμμὴ ἦκται εὐθεῖα ἡ ZΓ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XII. Probl.

Super datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod non est in eadem, perpendicularem lineam rectam ducere.

SIT data recta infinita AB, & datum punctum Γ, quod non est in eadem: oportet super datam rectam infinitam AB, à dato puncto Γ, quod in eadem non est, perpendicularem lineam rectam ducere.



Sumatur enim ex altera parte rectæ AB punctum quodlibet Δ, & centro Γ, intervallo ΓΔ, describatur [per 3. post.] circulus EZH, & secetur recta EH bifariam [per 10. prop.] in puncto Θ, ducanturque rectæ ΓH, ΓΘ, ΓE: dico quod super datam rectam infinitam AB, à dato pun-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος ἡ AB, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, τὸ Γ· δεῖ δὴ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν AB, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς AB εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΔ, κύκλος γεγράφθω ὁ EZH, καὶ τετμήσθω ἡ EH δίχα κατὰ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓH, ΓΘ, ΓE· λέγω ὅτι ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν AB, ἀπὸ τοῦ δοθέν-

τος

τος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ ΓΘ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΘΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΘΓ, δύο δὴ αἱ ΗΘ, ΘΓ δυσὶ ταῖς ΕΘ, ΘΓ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΓΗ βάσει τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΘΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΘΓ ἐστὶν ἴση, καί εἰσιν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ ΓΘ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ὡς ἂν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ· ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΔ σταθεῖσα γωνίας ποιείτω, τὰς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ· λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ γωνίαι, ἢ δύο ὀρθαί εἰσιν, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι.

Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΑ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, δύο ὀρθαί εἰσιν. εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσι. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ἴση ἐστὶ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΕΒΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ εἰσὶν ἴσαι. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ ἴση ἐστὶ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς αὐταῖς ἴσαι· τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ ἄρα ταῖς ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν· ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσι, καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ὡς ἂν ἄρα εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ· ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, δύο εὐθεῖαι, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Πρὸς γάρ τινι εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β, δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΒΔ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας

ψcto Γ, quod in eadem non est, ducta est perpendicularis recta linea ΓΘ.

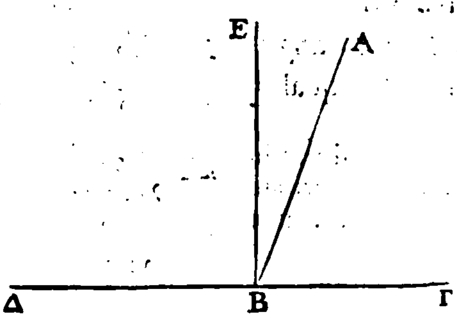
Quoniam enim ΗΘ æqualis est rectæ ΘΕ, recta autem ΘΓ est communis; duæ rectæ ΗΘ, ΘΓ sunt æquales duabus rectis ΕΘ, ΘΓ, altera alteri, & basis ΓΗ æquatur [per 15. def.] basi ΓΕ: angulus igitur ΓΘΗ æquatur [per 8. prop.] angulo ΕΘΓ; atque hi anguli sunt deinceps. quando autem recta insistens in rectam fecerit angulos deinceps inter se æquales, rectus est uterque æqualium angulorum; & recta insistens vocatur perpendicularis ad eam in quam insistit.

Super datam igitur rectam infinitam ΑΒ, à dato puncto Γ, quod non est in eadem, perpendicularis ducitur ΓΘ. quod erat faciendum.

Prop. XIII. Theor.

Si recta insistens in rectam faciat angulos; vel duos rectos faciet, vel duobus rectis æquales.

Recta enim quælibet ΑΒ insistens in rectam ΓΔ faciat angulos ΓΒΑ, ΑΒΔ: dico quod anguli ΓΒΑ, ΑΒΔ vel erunt recti, vel duobus rectis æquales.



Si enim angulus ΓΒΑ æqualis sit angulo ΑΒΔ, duo anguli [per 10. def.] erunt recti. sin minus, ducatur [per 11. prop.] à puncto Β recta ΒΕ ad rectos angulos rectæ ΓΔ: quare anguli ΓΒΕ, ΕΒΔ sunt duo recti. & quoniam angulus ΓΒΕ æquatur duobus angulis ΓΒΑ, ΑΒΕ; si addatur communis angulus ΕΒΔ, anguli ΓΒΕ, ΕΒΔ æquantur tribus angulis ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ. rursus, cum angulus ΔΒΑ æquetur angulis duobus ΔΒΕ, ΕΒΑ; si communis angulus ΑΒΓ addatur, anguli ΔΒΑ, ΑΒΓ æquabuntur tribus angulis ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ. ostensi autem sunt anguli ΓΒΕ, ΕΒΔ iisdem tribus esse æquales; & quæ eidem æqualia, sunt inter se æqualia; anguli igitur ΓΒΕ, ΕΒΔ æquantur angulis ΔΒΑ, ΑΒΓ: sed anguli ΓΒΕ, ΕΒΔ sunt duo recti; idcirco anguli ΔΒΑ, ΑΒΓ sunt duobus rectis æquales.

Si igitur recta insistens super rectam faciat angulos; faciet vel duos angulos rectos, vel duobus rectis æquales. quod erat demonstrandum.

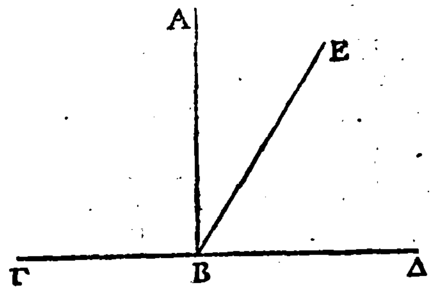
Prop. XIV. Theor.

Si ad aliquam rectam lineam, & ad punctum in ea, duæ rectæ, non ad easdem partes positæ, faciant angulos deinceps duobus rectis æquales; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt.

Ad aliquam enim rectam lineam ΑΒ, & ad punctum in ea Β, duæ rectæ ΒΓ, ΒΔ, non ad easdem partes positæ, faciant angulos deinceps

ΑΒΓ, ΑΒΔ duobus rectis æquales: dico rectam ΒΔ esse in directum rectæ ΓΒ.

Si enim ΒΔ non sit in directum rectæ ΒΓ, sit [per 2. post.] ΒΕ in directum rectæ ΓΒ.



Quoniam igitur recta ΑΒ insistit in rectam ΓΒΕ, anguli ΑΒΓ, ΑΒΕ æquantur [per 13. prop.] duobus rectis; sunt autem [ex hyp.] anguli ΑΒΓ, ΑΒΔ duobus rectis æquales: anguli igitur ΓΒΑ, ΑΒΕ æquantur angulis ΓΒΑ, ΑΒΔ. communis auferatur ΑΒΓ; reliquus igitur ΑΒΕ æquabitur reliquo ΑΒΔ, minor majori, quod fieri non potest: recta igitur ΒΕ non est in directum rectæ ΒΓ. eodem modo ostendemus, nullam aliam esse præter ΒΔ: est ergo recta ΓΒ in directum rectæ ΒΔ.

Si igitur ad aliquam rectam, & ad punctum in ea, duæ rectæ, non ad easdem partes positæ, faciant angulos deinceps duobus rectis æquales; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt. quod erat demonstrandum.

τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιείτωσαν· λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ ΓΒ ἡ ΒΔ.

Εἰ γὰρ μή ἐστι τῇ ΒΓ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ, ἔστω τῇ ΓΒ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΕ.

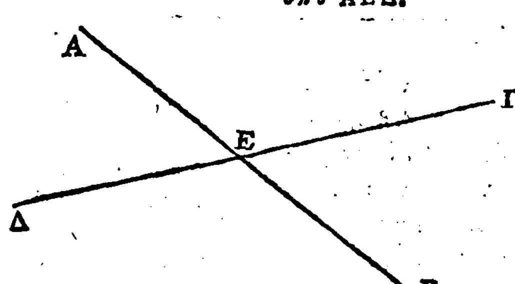
Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΒ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΒΕ ἐφέστηκεν, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΕ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ ἴσαι εἰσί. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΒΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΒΔ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ.

Ἐὰν ἄρα πρός τινι εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, δύο εὐθεῖαι, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XV. Theor.

Si duæ rectæ sese mutuo secent, angulos ad verticem facient inter se æquales.

DUÆ rectæ ΑΒ, ΓΔ sese mutuo secent in puncto Ε: dico angulum ΑΕΓ æquari angulo ΔΕΒ, & angulum ΓΕΒ æquari angulo ΑΕΔ.



Quoniam enim recta ΑΕ insistit in rectam ΓΔ, faciens angulos ΓΕΑ, ΑΕΔ; idcirco anguli ΓΕΑ, ΑΕΔ æquantur [per 13. prop.] duobus rectis. rursus, quoniam recta ΔΕ insistit in rectam ΑΒ, faciens angulos ΑΕΔ, ΔΕΒ; idcirco anguli ΑΕΔ, ΔΕΒ æquantur [per 13. prop.] duobus rectis. ostensi autem sunt anguli ΓΕΑ, ΑΕΔ æquales duobus rectis: sunt igitur anguli ΓΕΑ, ΑΕΔ æquales angulis ΑΕΔ, ΔΕΒ. auferatur communis angulus ΑΕΔ; reliquus igitur ΓΕΑ æquatur reliquo ΒΕΔ. eodem modo demonstrabitur angulos ΓΕΒ, ΔΕΑ esse æquales.

Si igitur duæ rectæ sese mutuo secent, faciunt angulos ad verticem inter se æquales. quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Hinc manifestum est, quotcunque rectis sese mutuo secantibus, angulos ad punctum sectionis æquari quatuor rectis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσι.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΕ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΔ ἐφέστηκε, γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΔΕ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΑΒ ἐφέστηκε, γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ ταῖς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ ἴσαι εἰσί. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΕΔ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΕΑ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση ἐστίν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΒ, ΔΕΑ ἴσαι εἰσίν.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

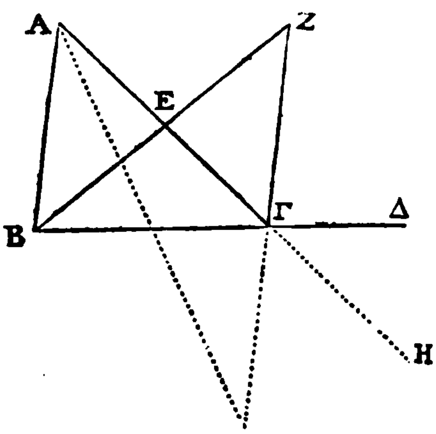
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι καὶ ἐὰν ὁσαιδήποτ' οὖν εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς πρὸς τῇ τομῇ γωνίας τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσουσι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛʹ.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν ἐκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία, ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΓ γωνιῶν.

Τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΕ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ, καὶ διήχθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ Η.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΕΓ ἴση ἐστίν, κατὰ κορυφὴν γάρ· βάσις ἄρα ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστί, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΕΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ. μείζων δέ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΕΓΔ τῆς ὑπὸ ΕΓΖ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΑΕ. ὁμοίως δή, τῆς ΒΓ τετμημένης δίχα, δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XVI. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto, angulus exterior major est utrolibet interiorum & oppositorum.

SIT triangulum ΑΒΓ; & producatur latus ΒΓ usque ad Δ: dico exteriorem angulum ΑΓΔ majorem esse utrolibet interiorum & oppositorum ΓΒΑ, ΒΑΓ.

Secetur [per 10. prop.] ΑΓ bifariam in Ε, & ducta recta ΒΕ producatur ad Ζ, & ponatur [per 3. prop.] ΕΖ æqualis rectæ ΒΕ, & ducatur recta ΖΓ, & producatur ΑΓ ad Η.

Quoniam igitur ΑΕ æquatur rectæ ΕΓ, & ΒΕ rectæ ΕΖ, duæque ΑΕ, ΕΒ æquantur duabus ΓΕ, ΕΖ, altera alteri, angulus etiam ΑΕΒ æquatur [per 15. prop.] angulo ΖΕΓ; est enim ad verticem: basis ΑΒ æquatur [per 4. prop.] basi ΖΓ, & triangulum ΑΒΕ æquatur triangulo ΖΕΓ, & reliqui anguli reliquis angulis æquantur, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur: est igitur angulus ΒΑΕ æqualis angulo ΕΓΖ. major autem est [per 9. ax.] angulus ΕΓΔ angulo ΕΓΖ: major est igitur angulus ΑΓΔ angulo ΒΑΕ. eodem modo, si ΒΓ secetur bifariam, demonstrabitur angulum ΒΓΗ, id est [per 15. prop.] angulum ΑΓΔ, majorem esse angulo ΑΒΓ.

Omnis igitur trianguli uno latere producto, angulus exterior major est utrolibet interiorum & oppositorum. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζʹ.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ.

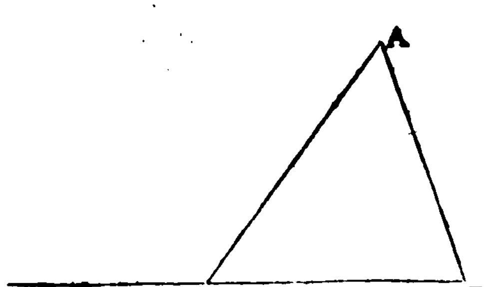
Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῆς ὑπὸ ΑΒΓ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ μείζονές εἰσιν. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ.

PROP. XVII. THEOR.

Omnis trianguli duo anguli sunt minores duobus rectis, quomodocunque sumpti.

SIT triangulum ΑΒΓ: dico duos angulos trianguli ΑΒΓ, quomodocunque sumptos, minores esse duobus rectis.

Producatur enim [per 2. post.] ΒΓ ad Δ.



Et quoniam ΑΓΔ est exterior angulus trianguli ΑΒΓ, major est [per 16. prop.] interiore & opposito ΑΒΓ. addatur communis angulus ΑΓΒ: anguli igitur ΑΓΔ, ΑΓΒ sunt majores angulis ΑΒΓ, ΒΓΑ. sed anguli ΑΓΔ, ΑΓΒ æquantur [per 13. prop.] duobus rectis: anguli igitur ΑΒΓ, ΒΓΑ sunt minores duobus rectis. eodem modo demonstrabimus angulos ΒΑΓ, ΑΓΒ minores esse duobus rectis; itemque angulos ΓΑΒ, ΑΒΓ.

Omnis igitur trianguli duo anguli ſunt minores duobus rectis, quomodocunque ſumpti. quod erat demonſtrandum.

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

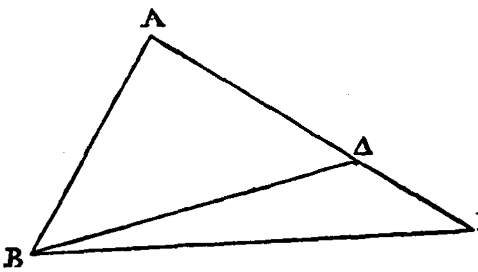
Prop. XVIII. Theor.

Omnis trianguli majus latus majorem angulum ſubtendit.

SIT triangulum ΑΒΓ, habens latus ΑΓ majus latere ΑΒ: dico angulum etiam ΑΒΓ majorem eſſe angulo ΒΓΑ.

Quoniam enim latus ΑΓ majus eſt latere ΑΒ, ponatur [per 3. prop.] recta ΑΔ æqualis lateri ΑΒ, & ducatur recta ΒΔ.

Et quoniam ΑΔΒ eſt exterior angulus trianguli ΒΔΓ, major eſt [per 16. prop.] interiore & oppoſito ΔΓΒ. æqualis autem eſt [per 5. prop.] angulus ΑΔΒ angulo ΑΒΔ, quia latus ΑΒ æquatur lateri ΑΔ: ideoque major eſt angulus ΑΒΔ angulo ΑΓΒ; angulus igitur ΑΒΓ multo major eſt angulo ΑΓΒ.



Omnis igitur trianguli majus latus ſubtendit majorem angulum. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, μείζονα ἔχον τὴν ΑΓ πλευρὰν τῆς ΑΒ· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΓΑ.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ.

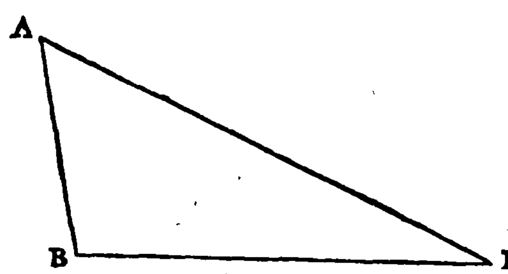
Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΔΓ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΒ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῆς ὑπὸ ΔΓΒ. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XIX. Theor.

Omnis trianguli majori angulo majus latus ſubtenditur.

SIT triangulum ΑΒΓ, habens angulum ΑΒΓ majorem angulo ΒΓΑ: dico latus ΑΓ majus eſſe latere ΑΒ.



Si enim non ſit majus: latus ΑΓ, vel eſt æquale lateri ΑΒ, vel ipſo minus. æquale autem non eſt latus ΑΓ lateri ΑΒ: nam tum angulus ΑΒΓ æqualis eſſet [per 5. prop.] angulo ΑΓΒ. non eſt autem æqualis: nec igitur latus ΑΓ lateri ΑΒ æquale erit. neque tamen minus eſt latus ΑΓ latere ΑΒ: tum enim angulus ΑΒΓ minor eſſet [per 18. prop.] angulo ΑΓΒ. at non eſt minor: nec igitur latus ΑΓ minus erit latere ΑΒ. demonſtratum autem eſt non eſſe æquale: majus eſt igitur latus ΑΓ latere ΑΒ.

Omnis igitur trianguli majori angulo majus latus ſubtenditur. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΓΑ· λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΓ πλευρᾶς τῆς ΑΒ μείζων ἐστίν.

Εἰ γὰρ μή· ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, ἢ ἐλάσσων. ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ. οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ. οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ. οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ. ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ ἴση ἐστί· μείζων ἄρα ἐστὶ ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XX. Theor.

Omnis trianguli duo latera ſunt majora reliquo, quomodocunque ſumpta.

SIT enim triangulum ΑΒΓ: dico trianguli ΑΒΓ duo latera, quomodocunque ſumpta, majora eſſe reliquo; nempe ΒΑ, ΑΓ latere ΒΓ; & ΑΒ, ΒΓ latere ΑΓ; & ΒΓ, ΓΑ latere ΑΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ, αἱ δὲ ΑΒ, ΒΓ τῆς ΑΓ, αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

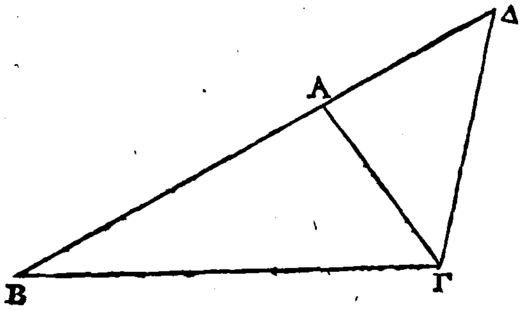
Διήχθω

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΔΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ· ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΒΓΔ γωνία τῆς ὑπὸ ΑΓΔ μείζων ἐστί· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΔ τῆς ὑπὸ ΑΔΓ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΔΓΒ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΑΓ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, ἡ ΔΒ ἄρα τῆς ΒΓ ἐστὶν μείζων. ἴση δὲ ἡ ΔΒ ταῖς ΑΒ, ΑΓ· μείζονες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ μὲν ΑΒ, ΒΓ τῆς ΓΑ μείζονές εἰσιν· αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Producatur enim latus ΒΑ ad punctum Δ, & [per 3. prop.] ponatur ΔΑ æqualis rectæ ΓΑ, & jungatur ΔΓ.



Quoniam igitur ΔΑ æqualis est rectæ ΑΓ, erit etiam [per 5. prop.] angulus ΑΔΓ æqualis angulo ΑΓΔ: est autem [per 9. ax.] angulus ΒΓΔ major angulo ΑΓΔ; major est igitur angulus ΒΓΔ angulo ΑΔΓ. quoniam etiam triangulum ΔΓΒ habet angulum ΒΓΔ majorem angulo ΒΔΓ, & [per 19. prop.] majorem angulum subtendit majus latus, latus ΔΒ majus erit latere ΒΓ. est autem recta ΔΒ æqualis lateribus ΑΒ, ΑΓ: majora igitur sunt latera ΒΑ, ΑΓ latere ΒΓ. eodem modo ostendemus latera ΑΒ, ΒΓ majora esse latere ΓΑ; & latera ΒΓ, ΓΑ majora latere ΑΒ.

Omnis igitur trianguli duo latera, quomodocunque sumpta, sunt majora reliquo. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν· αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάσσονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσι.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ΒΓ, ἀπὸ τῶν περάτων τῶν Β, Γ, δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάτωσαν αἱ ΒΔ, ΔΓ· λέγω ὅτι αἱ ΒΔ, ΔΓ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐλάσσονες μέν εἰσι, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσι, τὴν ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐπὶ τὸ Ε.

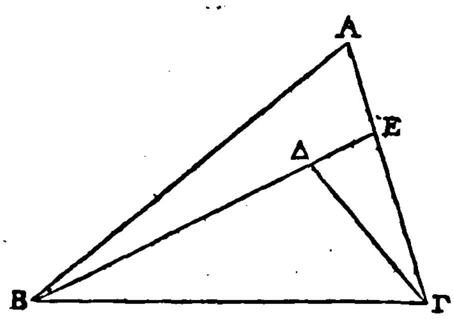
Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι· τοῦ ΑΒΕ ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΕ τῆς ΒΕ μείζονές εἰσι. κοινὴ προσκείσθω ἡ ΕΓ· αἱ ἄρα ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονές εἰσι. πάλιν, ἐπεὶ τοῦ ΓΕΔ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ τῆς ΓΔ μείζονές εἰσι, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΔΒ· αἱ ΓΕ, ΕΒ ἄρα τῶν ΓΔ, ΔΒ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονες ἐδείχθησαν αἱ ΒΑ, ΑΓ· πολλῷ ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΔ, ΔΓ μείζονές εἰσι.

Πάλιν, ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστί· τοῦ ΓΔΕ ἄρα τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΕΔ. διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα καὶ τοῦ ΑΒΕ τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΒΔΓ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

PROP. XXI. THEOR.

Si à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ intus constituantur: hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum comprehendent.

Trianguli enim ΑΒΓ in uno latere ΒΓ, à terminis Β, Γ, constituantur intus duæ rectæ ΒΔ, ΔΓ: dico rectas ΒΔ, ΔΓ minores esse duobus reliquis trianguli lateribus ΒΑ, ΑΓ, angulum tamen comprehendere ΒΔΓ majorem angulo ΒΑΓ.



Producatur enim recta ΒΔ ad punctum Ε.

Et cum omnis trianguli duo latera [per 20. prop.] sint majora reliquo: trianguli ΑΒΕ duo latera ΑΒ, ΑΕ sunt majora latere ΒΕ. communis addatur recta ΕΓ: sunt igitur latera ΒΑ, ΑΓ majora rectis ΒΕ, ΕΓ. rursus, quoniam trianguli ΓΕΔ duo latera ΓΕ, ΕΔ sunt majora latere ΓΔ, communis addatur ΔΒ: sunt igitur rectæ ΓΕ, ΕΒ majores rectis ΓΔ, ΔΒ. sed latera ΒΑ, ΑΓ ostendebantur esse majora rectis ΒΕ, ΕΓ: sunt igitur ΒΑ, ΑΓ multo majora quam ΒΔ, ΔΓ.

Rursus, quoniam angulus, qui extra est quemvis triangulum, major est [per 16. prop.] interiore & opposito; angulus ΒΔΓ, qui extra est triangulum ΓΔΕ, major est angulo ΓΕΔ. eadem de causa angulus ΓΕΒ, qui extra est triangulum ΑΒΕ, major est angulo ΒΑΓ. ostensum autem est angulum ΒΔΓ majorem esse angulo ΓΕΒ: angulus igitur ΒΔΓ multo major est angulo ΒΑΓ.

Si igitur à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ intus constituantur: hæ reliquis duobus trianguli lateribus sunt quidem minores, angulum vero comprehendunt majorem. quod erat demonstrandum.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο αἱ εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν· αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάσσονες μὲν εἰσι, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXII. PROBL.

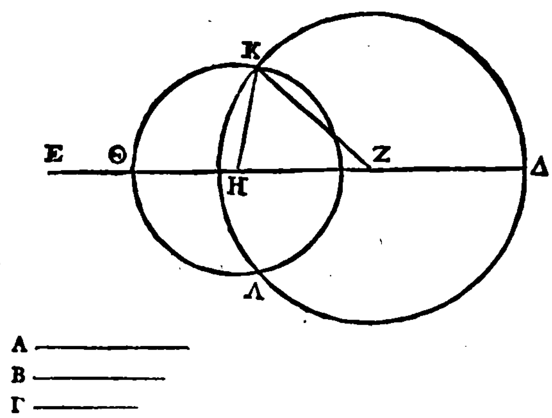
E tribus rectis, quæ tribus rectis datis sunt æquales, triangulum constituere: oportet autem duas, utcunque sumptas, majores esse reliqua.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις, τρίγωνον συστήσασθαι· δεῖ δὴ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντη μεταλαμβανομένας.

Sint tres datæ rectæ A, B, Γ, quarum duæ utcunque sumptæ sint majores reliqua; nempe A & B majores quam Γ, item A & Γ majores quam B, denique B & Γ majores quam A: oportet è rectis lineis, æqualibus ipsis A, B, Γ, triangulum constituere.

Ponatur recta linea ΔE, finita quidem ad Δ, infinita vero versus E; & ponatur [per 3. prop.] ΔZ æqualis rectæ A, & recta ZH æqualis rectæ B, rectæ autem Γ sit æqualis HΘ; & centro Z, intervallo autem ZΔ, describatur [per 3. post.] circulus ΔKΛ; & rursus centro H, intervallo HΘ, describatur circulus KΛΘ, & ducantur rectæ KZ, KH: dico triangulum KZH, fieri è tribus lineis rectis, æqualibus ipsis rectis A, B, Γ.



Quoniam enim punctum Z est centrum circuli ΔKΛ, recta ZΔ æqualis est [per 15. def.] rectæ ZK: at ZΔ æquatur rectæ A; recta igitur KZ æqualis est rectæ A. rursus, quoniam punctum H est centrum circuli ΛKΘ, æqualis est HΘ rectæ HK: est autem HΘ æqualis rectæ Γ; est igitur KH æqualis rectæ Γ. rectæ autem B æqualis est ZH: tres igitur rectæ KZ, ZH, HK æquantur tribus rectis A, B, Γ.

E tribus idcirco rectis KZ, ZH, HK, quæ tribus datis rectis A, B, Γ sunt æquales, constituitur triangulum KZH. quod erat faciendum.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν, πάντη μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν ΑΒ τῆς Γ, αἱ δὲ ΑΓ τῆς Β, καὶ ἔτι αἱ ΒΓ τῆς Α· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων τῶν Α, Β, Γ τρίγωνον συστήσασθαι.

Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ, πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ Δ, ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ Ε· καὶ κείσθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΖ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΖΗ, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ ΗΘ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δὲ τῷ ΖΔ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΚΛ· καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΘ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΚΛΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΖ, ΚΗ· λέγω ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν, τῶν ἴσων τῶν Α, Β, Γ, τρίγωνον συνέσταται τὸ ΚΖΗ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΚΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΔ τῇ ΖΚ· ἀλλὰ ἡ ΖΔ τῇ Α ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῇ Α ἐστὶν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΛΚΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΗΚ· ἀλλὰ ἡ ΗΘ τῇ Γ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ΚΗ ἄρα τῇ Γ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΗ τῇ Β ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ τρισὶ ταῖς Α, Β, Γ ἴσαι εἰσίν.

Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς Α, Β, Γ, τρίγωνον συνέσταται τὸ ΚΖΗ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. XXIII. PROBL.

Ad datam rectam, & ad datum in ea punctum, dato angulo rectilineo angulum rectilineum æqualem constituere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

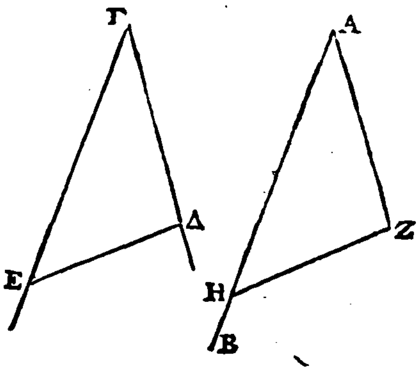
Sit data recta linea AB, & in ea datum punctum A, datus autem angulus rectilineus sit ΔΓE: oportet ad datam rectam AB, & ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo ΔΓE æqualem angulum rectilineum constituere.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΔΓΕ· δεῖ δὴ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Εἰλήφθω

Εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν ΓΔ, ΓΕ τυχόντα σημεῖα τὰ Δ, Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ τῶν ΓΔ, ΔΕ, ΓΕ, τρίγωνον συνεστάτω τὸ ΑΖΗ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΓΔ τῇ ΑΖ, τὴν δὲ ΓΕ τῇ ΑΗ, καὶ ἔτι τὴν ΔΕ τῇ ΖΗ.

Ἐπεὶ οὖν αἱ δύο αἱ ΔΓ, ΓΕ δυσὶ τῶν ΖΑ, ΑΗ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΕ βάσει τῇ ΖΗ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΑΗ ἐστὶν ἴση.



Sumantur in utraque recta ΓΔ, ΓΕ puncta quælibet Δ, Ε, & ducatur recta ΔΕ: & è tribus rectis lineis, quæ æquales sint tribus ΓΔ, ΔΕ, ΓΕ, constituatur [per 22. prop.] triangulum ΑΖΗ; ita ut ΓΔ æquetur rectæ ΑΖ, recta autem ΓΕ rectæ ΑΗ, recta denique ΔΕ rectæ ΖΗ.

Quoniam igitur duæ rectæ ΔΓ, ΓΕ æquantur duabus rectis ΖΑ, ΑΗ, altera alteri, & basis ΔΕ æquatur basi ΖΗ; angulus ΔΓΕ [per 8. prop.] æqualis est angulo ΖΑΗ.

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴση γωνία εὐθύγραμμος συνίσταται ἡ ὑπὸ ΖΑΗ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ad datam igitur rectam lineam ΑΒ, & ad datum in ea punctum Α, dato angulo rectilineo ΔΓΕ constituitur æqualis angulus rectilineus ΖΑΗ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

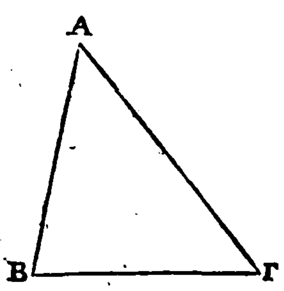
Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.

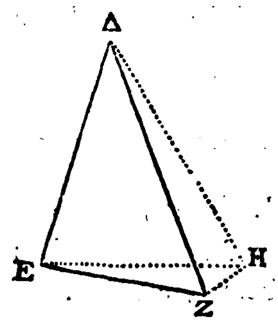
Prop. XXIV. Theor.

Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri; angulum autem angulo majorem, qui ab æqualibus rectis comprehenditur: etiam basim basi majorem habebunt.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, γωνία δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας ὑπὸ ΕΔΖ μείζων ἔστω· λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ γωνίας, συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΕ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ, τῇ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΗ· καὶ κείσθω ὁποτέρᾳ τῶν ΑΓ, ΔΖ ἴση ἡ ΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΕ, ΖΗ.





Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, quæ duo latera ΑΒ, ΑΓ duobus lateribus ΔΕ, ΔΖ habent æqualia, alterum alteri, latus nempe ΑΒ lateri ΔΕ, atque latus ΑΓ lateri ΔΖ; angulus autem ΒΑΓ sit major angulo ΕΔΖ: dico basim ΒΓ majorem esse basi ΕΖ.

Quoniam enim angulus ΒΑΓ major est angulo ΕΔΖ, constituatur [per 23. prop.] ad rectam ΔΕ, & ad punctum in ea Δ, angulus ΕΔΗ æqualis angulo ΒΑΓ: ponaturque ΔΗ [per 3. prop.] æqualis alterutri rectarum ΑΓ, ΔΖ, & ducantur ΗΕ, ΖΗ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΔΗ, δύο δὴ αἱ ΒΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΗ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΗ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΗ ἐστὶν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΗ τῇ ΔΖ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΖΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΗΖ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ, πολλῷ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΕΖΗ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΕΖΗ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΕΗΖ· ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα πλευρὰ ἡ ΕΗ τῆς ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΕΗ τῇ ΒΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ.

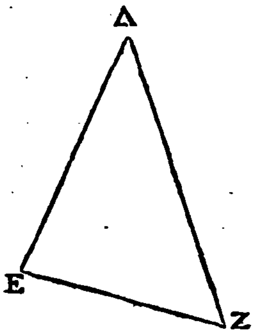
Itaque quoniam ΑΒ æquatur rectæ ΔΕ, & recta ΑΓ rectæ ΔΗ, duæ rectæ ΒΑ, ΑΓ æquantur duabus ΕΔ, ΔΗ, altera alteri, & angulus ΒΑΓ æquatur [per construct.] angulo ΕΔΗ: basis igitur ΒΓ æqualis erit [per 4. prop.] basi ΕΗ. rursus, quoniam ΔΗ æqualis est rectæ ΔΖ, & angulus ΔΖΗ est [per 5. prop.] æqualis angulo ΔΗΖ; major erit ΔΖΗ angulo ΕΗΖ, multoque igitur major erit angulus ΕΖΗ angulo ΕΗΖ. & quoniam triangulum ΕΖΗ habet angulum ΕΖΗ majorem angulo ΕΗΖ; majorem autem angulum [per 19. prop.] majus latus subtendit: est latus ΕΗ majus latere ΕΖ. verum ΕΗ æquale est [per construct.] lateri ΒΓ; itaque latus ΒΓ majus est latere ΕΖ.

Si igitur duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri; angulum autem habeant angulo majorem, qui ab æqualibus rectis comprehenditur: etiam basim basi majorem habebunt. quod erat demonstrandum.

Prop. XXV. Theor.

Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri; basim autem habeant basi majorem: habebunt etiam angulum majorem angulo, qui ab æqualibus rectis comprehenditur.

Sint duo triangula ABΓ, ΔEZ, quæ habent duo latera AB, AΓ æqualia duobus lateribus ΔE, ΔZ, alterum alteri, latus quidem AB lateri ΔE, & latus AΓ lateri ΔZ; basis autem BΓ sit major basi EZ: dico angulum BAΓ majorem esse angulo EΔZ.



Si enim non sit major, vel est æqualis ei, vel minor. æqualis autem non est angulus BAΓ angulo EΔZ, sic enim esset [per 4. prop.] basis BΓ æqualis basi EZ: non est autem; angulus igitur BAΓ non est æqualis angulo EΔZ. sed neque minor, sic enim esset [per 24. prop.] basis BΓ minor basi EZ: atqui non est; angulus igitur BAΓ non est minor angulo EΔZ. ostensum autem est eum non esse æqualem: major est igitur angulus BAΓ angulo EΔZ.

Si igitur duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri; basim autem habeant basi majorem: habebunt etiam angulum majorem angulo, qui ab æqualibus rectis comprehenditur. quod erat demonstrandum.

Prop. XXVI. Theor.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale; vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum subtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

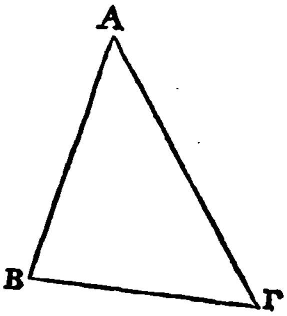
Sint duo triangula ABΓ, ΔEZ, quæ duos angulos ABΓ, BΓA duobus angulis ΔEZ, EZΔ æquales habent, alterum alteri, angulum scilicet ABΓ æqualem angulo ΔEZ, angulum vero BΓA angulo EZΔ: habeant autem & unum latus uni lateri æquale; & primum, quod æqua-

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν βάσιν δὲ τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ· καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, βάσις δὲ ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἔστω· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΔΖ μείζων ἐστίν.



Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ, ἢ ἐλάσσων. ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΔΖ, ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ ἡ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ· οὐκ ἔστι δέ, οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΔΖ. ἀλλ' οὐδὲ μὴν ἐλάσσων, ἐλάσσων γὰρ ἂν καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ· οὐκ ἔστι δέ, οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδ' ἴση· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ· καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Ἔστωσαν δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ· ἐχέτω δὲ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην· πρότερον, τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις

τὴν

τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· λέγω ὅτι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, μία αὐτῶν μείζων ἔσται. ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ κείσθω τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΗΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΓ.

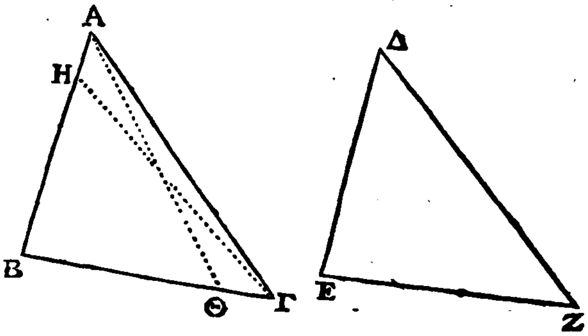
Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΗ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΒΗ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΗΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΗΓΒ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΕ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἴση ἐστὶν, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ· ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ ἴση, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

ΑΛΛΑ δὴ πάλιν, ἔστωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι ἴσαι, ὡς ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ· λέγω πάλιν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ΒΓ τῇ ΕΖ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω εἰ δυνατὸν μείζων ἡ ΒΓ, καὶ κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΒΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΘ τῇ ΕΖ, ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΔΕ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΘ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΘΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΔ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΖΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΘΑ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἐστὶν ἴση, τριγώνου δὴ τοῦ ΑΘΓ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΘΑ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΒΓΑ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ, ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΓ

*



libus adjacet angulis, latus nempe ΒΓ lateri ΕΖ: dico & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habere, alterum alteri, latus scilicet ΑΒ lateri ΔΕ, & latus ΑΓ lateri ΔΖ, & reliquum angulum ΒΑΓ reliquo angulo ΕΔΖ.

Si enim latus ΑΒ sit inæquale lateri ΔΕ, eorum alterum erit majus. sit ΑΒ majus, & ponatur [per 3. prop.] ΗΒ recta æqualis lateri ΔΕ, & ducatur ΗΓ.

Quoniam igitur latus ΒΗ æquale est lateri ΔΕ, latus autem ΒΓ lateri ΕΖ, duo nempe latera ΒΗ, ΒΓ æqualia duobus ΔΕ, ΕΖ, alterum alteri, & angulus ΗΒΓ æqualis est angulo ΔΕΖ: basis igitur ΗΓ æquatur [per 4. prop.] basi ΔΖ, & triangulum ΗΓΒ æquabitur triangulo ΔΕΖ, & reliqui anguli reliquis angulis æquabuntur, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur: est igitur angulus ΗΓΒ æqualis angulo ΔΖΕ. angulus autem ΔΖΕ ponitur æqualis angulo ΒΓΑ: est igitur angulus ΒΓΗ æqualis angulo ΒΓΑ, minor majori, quod fieri non potest. non est igitur latus ΑΒ inæquale lateri ΔΕ: ergo est æquale. est autem ΒΓ latus æquale lateri ΕΖ, atque duo latera ΑΒ, ΒΓ æquantur duobus ΔΕ, ΕΖ, alterum alteri, & angulus ΑΒΓ æquatur angulo ΔΕΖ: basis igitur ΑΓ [per 4. prop.] æquatur basi ΔΖ, & reliquus angulus ΒΑΓ æquatur reliquo angulo ΕΔΖ.

QUIN & rursum, sint latera quæ æqualibus angulis subtenduntur æqualia, latus scilicet ΑΒ lateri ΔΕ: dico rursus, quod & reliqua latera reliquis lateribus æquabuntur, nempe ΑΓ lateri ΔΖ, & ΒΓ lateri ΕΖ; & reliquus etiam angulus ΒΑΓ æquabitur reliquo angulo ΕΔΖ.

Si enim inæquale sit latus ΒΓ lateri ΕΖ, eorum alterum majus erit. sit (si fieri potest) ΒΓ majus, ponaturque [per 3. prop.] ΒΘ æquale lateri ΕΖ, & ducatur ΑΘ.

Et quoniam latus ΒΘ æquale est lateri ΕΖ, & latus ΑΒ lateri ΔΕ, duo nempe latera ΑΒ, ΒΘ æqualia duobus ΔΕ, ΕΖ, alterum alteri, & angulos comprehendunt æquales: basis igitur ΑΘ [per 4. prop.] æquatur basi ΔΖ, & triangulum ΑΒΘ æquatur triangulo ΔΕΖ, & reliqui anguli reliquis angulis æquabuntur, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur: angulus igitur ΒΘΑ æquatur angulo ΕΖΔ. sed [ex hyp.] angulus ΕΖΔ æqualis est angulo ΒΓΑ: est igitur ΒΘΑ angulus æqualis angulo ΒΓΑ; trianguli nempe ΑΓΘ exterior angulus ΒΘΑ æqualis interiori & opposito ΒΓΑ, quod [per 16. prop.] fieri non potest: latus igitur ΒΓ non est inæquale lateri ΕΖ, igitur æquale. est autem ΑΒ æquale lateri ΔΕ; duo idcirco latera ΑΒ, ΒΓ æquantur duobus lateribus ΔΕ, ΕΖ, alterum alteri, & comprehendunt angulos æquales: basis igitur ΑΓ [per 4. prop.] æquatur basi ΔΖ, & triangulum

lum ABΓ æquatur triangulo ΔEZ, & reliquus angulus BAΓ æquatur reliquo EΔZ.

Si igitur duo triangula duos angulos duobus angulis habeant æquales, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale; vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum subtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt. quod erat demonstrandum.

τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστί, καὶ ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

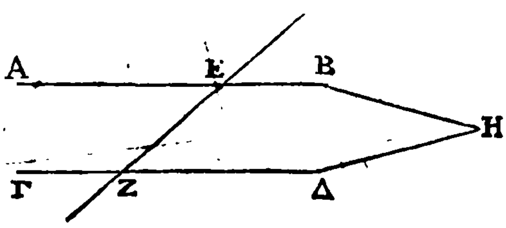
Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἔχῃ, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXVII. Theor.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ erunt rectæ lineæ.

In duas enim rectas lineas AB, ΓΔ recta linea EZ incidens alternos angulos AEZ, EZΔ æquales inter se faciat: dico rectam lineam AB rectæ ΓΔ parallelam esse.

Si enim non est parallela, productæ AB, ΓΔ, vel ad partes BΔ convenient, vel ad partes AΓ. producantur, conveniantque ad partes BΔ in puncto H.



Jam, angulus AEZ, qui extra est triangulum EHZ, major est [per 16. prop.] interiore & opposito EZH: sed & [ex hyp.] æqualis, quod fieri non potest: non igitur AB, ΓΔ, productæ ad partes BΔ, convenient. similiter demonstrabitur neque convenire ad partes AΓ: quæ vero in neutras partes conveniunt, sunt [per 35. def.] inter se parallelæ; parallela igitur est AB ipsi ΓΔ.

Quare si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, rectæ lineæ erunt parallelæ. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζʹ.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ, τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἀλλήλαις ποιείτω· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ εὐθείᾳ.

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ συμπεσοῦνται, ἤτοι ἐπὶ τὰ ΒΔ μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ ΑΓ. ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ ΒΔ μέρη κατὰ τὸ Η.

Τριγώνου δὴ τοῦ ΕΗΖ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΖ μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίας, τῆς ὑπὸ ΕΖΗ· ἀλλὰ καὶ ἴση, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα αἱ ΑΒ, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ Α, Γ· αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι, παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXVIII. Theor.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori & opposito & ad easdem partes æqualem fecerit; vel interiores & ad easdem partes duobus rectis æquales: rectæ lineæ erunt inter se parallelæ.

In duas enim rectas lineas AB, ΓΔ recta linea EZ incidens exteriorem angulum EHB interiori & opposito & ad easdem partes HΘΔ æqualem faciat; vel interiores & ad easdem partes BHΘ, HΘΔ duobus rectis æquales: dico rectam lineam AB rectæ ΓΔ parallelam esse.

Quoniam enim EHB angulus æqualis est angulo HΘΔ, angulus autem EHB æqualis [per 15. prop.] angulo AHΘ; erit & angulus AHΘ angulo HΘΔ æqualis: & sunt alterni; parallela igitur est [per 27. prop.] AB ipsi ΓΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κηʹ.

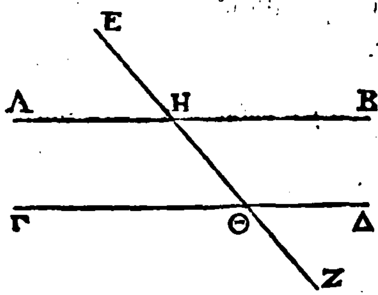
Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ· παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσην ποιείτω, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

ΠΑΛΙΝ

ΠΑΛΙΝ, ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσί. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΘ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.



Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Rursus, quoniam anguli BHΘ, HΘΔ duobus rectis sunt æquales, & sunt [per 13. prop.] AHΘ, BHΘ æquales duobus rectis: erunt anguli AHΘ, BHΘ angulis BHΘ, HΘΔ æquales. communis auferatur BHΘ, reliquus igitur AHΘ est æqualis reliquo HΘΔ; & sunt alterni: ergo AB ipsi ΓΔ [per 27. prop.] est parallela.

Si igitur in duas rectas recta linea incidens exteriorem angulum interiori & opposito & ad easdem partes æqualem fecerit; vel interiores & ad easdem partes duobus rectis æquales: rectæ lineæ erunt inter se parallelæ. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

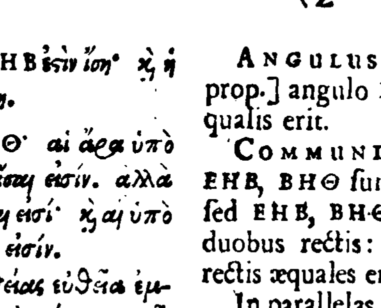
Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Prop. XXIX. Theor.

In parallelas rectas lineas recta linea incidens & alternos angulos inter se æquales, & exteriorem interiori & opposito & ad easdem partes æqualem, & interiores & ad easdem partes duobus rectis æquales efficit.

ΕΙΣ γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπιπτέτω ἡ ΕΖ· λέγω ὅτι τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΗΘ, ΗΘΔ ἴσας ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΗΘ. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῆς ὑπὸ ΗΘΔ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ τῶν ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. αἱ δὲ ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπεσοῦνται. οὐ συμπίπτουσι δὲ, διὰ τὸ παραλλήλους αὐτὰς ὑποκεῖσθαι· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, ἴση ἄρα.



ΑΛΛΑ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΕΗΒ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση.

ΚΟΙΝΗ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· καὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἡ ἄρα εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

In parallelas enim rectas lineas AB, ΓΔ recta linea incidat EZ: dico illam alternos angulos AHΘ, HΘΔ inter se æquales efficere, & exteriorem EHB interiori & opposito & ad easdem partes HΘΔ æqualem, & interiores & ad easdem partes BHΘ, HΘΔ duobus rectis æquales.

Si enim inæqualis est AHΘ ipsi HΘΔ, unus ipsorum major est. sit major AHΘ. & quoniam angulus AHΘ major est angulo HΘΔ, communis apponatur BHΘ: anguli igitur AHΘ, BHΘ angulis BHΘ, HΘΔ majores sunt. sed anguli AHΘ, BHΘ sunt [per 13. prop.] æquales duobus rectis: ergo BHΘ, HΘΔ anguli sunt duobus rectis minores. quæ vero à minoribus, quàm sunt duo recti, in infinitum producuntur rectæ lineæ [per 11. ax.] inter se convenient: ergo rectæ lineæ AB, ΓΔ in infinitum productæ convenient inter se. atqui non conveniunt, cum parallelæ ponantur: non igitur inæqualis est AHΘ angulus angulo HΘΔ, ideo æqualis.

Angulus autem AHΘ æqualis est [per 15. prop.] angulo EHB: ergo & EHB ipsi HΘΔ æqualis erit.

Communis apponatur BHΘ: anguli igitur EHB, BHΘ sunt æquales angulis BHΘ, HΘΔ. sed EHB, BHΘ æquales sunt [per 13. prop.] duobus rectis: ergo & BHΘ, HΘΔ duobus rectis æquales erunt.

In parallelas igitur rectas lineas recta linea incidens & alternos angulos inter se æquales, & exteriorem interiori & opposito & ad easdem partes æqualem, & interiores & ad easdem partes duobus rectis æquales efficit. quod erat demonstrandum.

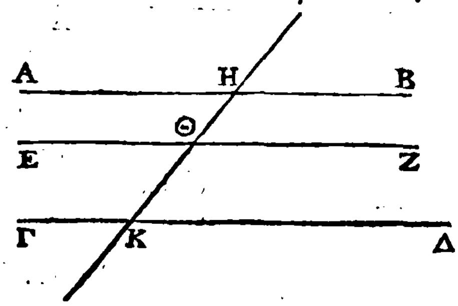
PROP. XXX. THEOR.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ & inter se sunt parallelæ.

SIT utraque ipsarum AB, ΓΔ ipsi EZ parallela: dico & AB ipsi ΓΔ parallelam esse.

Incidat enim in ipsas recta linea HK.

Et quoniam in parallelas rectas lineas AB, EZ recta linea HK incidit, angulus AHΘ [per 27. prop.] angulo HΘZ est æqualis. rursus, quoniam in parallelas rectas lineas EZ, ΓΔ recta linea incidit HK, æqualis est HΘZ angulus [per 28. prop.] angulo HKΔ. ostensus autem est & angulus AHK angulo HΘZ æqualis: ergo & AHK ipsi HKΔ æqualis erit; & sunt alterni: parallela igitur est AB [per 29. prop.] ipsi ΓΔ.



Ergo quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ & inter se sunt parallelæ. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ΄.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἔστω ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τῇ ΕΖ παράλληλος· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ ἐστὶ παράλληλος.

Ἐμπιπτέτω γὰρ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ ΗΚ.

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΕΖ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. πάλιν, ἐπεὶ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΕΖ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΘΖ τῇ ὑπὸ ΗΚΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΚΔ ἐστὶν ἴση· καὶ εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

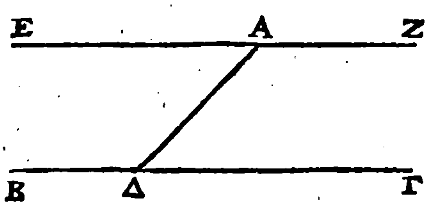
Αἱ ἄρα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXXI. PROBL.

Per datum punctum, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

SIT datum quidem punctum A, data vero recta linea BΓ: oportet, per A punctum, ipsi BΓ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

Sumatur in BΓ quodvis punctum Δ, & jungatur AΔ; constituaturq; [per 23. prop.] ad rectam lineam ΔA, & ad punctum in ipsa A, angulo AΔΓ æqualis angulus ΔAE; & in directum ipsi EA recta linea AZ producatur.



Quoniam igitur in duas rectas lineas BΓ, EZ recta linea AΔ incidens alternos angulos EAΔ, AΔΓ inter se æquales efficit, EZ ipsi BΓ [per 27. prop.] parallela erit.

Per datum igitur punctum A, datæ rectæ lineæ BΓ parallela ducta est recta linea EAZ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα΄.

Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δή, διὰ τοῦ Α σημείου, τῇ ΓΒ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ· καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΑ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, τῇ ὑπὸ ΑΔΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΔΑΕ· καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ ΑΕ εὐθεῖα ἡ ΑΖ.

Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΑΔ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΑΔ, ΑΔΓ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκε, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ.

Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ Α, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΕΑΖ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. XXXII. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto, exterior angulus duobus interioribus & oppositis est æqualis; & trianguli tres interiores anguli duobus rectis sunt æquales.

SIT triangulum ABΓ, & unum ipsius latus BΓ producatur in Δ: dico angulum exteriorem AΓΔ duobus interioribus & oppositis ΓAB, ABΓ æqualem esse; & trianguli tres in-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ΄.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστί· καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστὶ ταῖς δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ· καὶ αἱ ἐντὸς

τοῦ

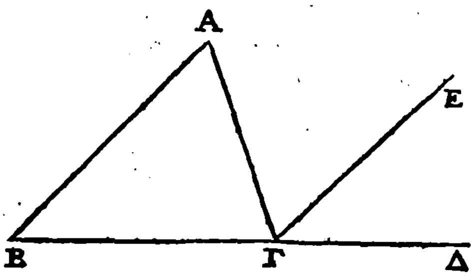
τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἤχθω γὰρ, διὰ τοῦ Γ σημείου, τῇ ΑΒ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΓΕ.

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΑΓ· αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΔ· ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΕΓΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ ἐκτὸς γωνία ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ.

ΚΟΙΝΗ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί.

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστί· καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



teriores angulos ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ duobus rectis esse æquales.

Ducatur enim, per punctum Γ, [per 31. prop.] ipsi ΑΒ rectæ parallela ΓΕ.

Et quoniam ΑΒ ipsi ΓΕ parallela est, & in ipsas incidit ΑΓ: alterni anguli ΒΑΓ, ΑΓΕ [per 29. prop.] inter se æquales sunt. rursus, quoniam ΑΒ parallela est ipsi ΓΕ, & in ipsas incidit recta linea ΒΔ: exterior angulus ΕΓΔ interiori & opposito ΑΒΓ est æqualis. ostensus autem est angulus ΑΓΕ æqualis angulo ΒΑΓ: quare totus ΑΓΔ exterior angulus æqualis est duobus interioribus & oppositis ΒΑΓ, ΑΒΓ.

Communis addatur ΑΓΒ: anguli igitur ΑΓΔ, ΑΓΒ tribus ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ sunt æquales. sed [per 13. prop.] anguli ΑΓΔ, ΑΓΒ sunt æquales duobus rectis: ergo & ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ duobus rectis sunt æquales.

Omnis igitur trianguli uno latere producto, exterior angulus duobus interioribus & oppositis est æqualis; & trianguli tres interiores anguli duobus rectis sunt æquales. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγʹ.

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Ἔστωσαν ἴσαι τε καὶ παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐπιζευγνύτωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ· λέγω ὅτι καὶ αἱ ΑΓ, ΒΔ ἴσαι καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΒΓ.

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ· αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΓΔ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΔ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΔ. καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΑΓ, ΒΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΒΓ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ. ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση.

Αἱ ἄρα τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXIII. Theor.

Quæ æquales & parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, ipsæ etiam sunt æquales & parallelæ.

Sint æquales & parallelæ ΑΒ, ΓΔ, & ipsas conjungant ad easdem partes rectæ lineæ ΑΓ, ΒΔ: dico ΑΓ, ΒΔ æquales & parallelas esse.

Jungatur enim ΒΓ.

Et quoniam ΑΒ parallela est ipsi ΓΔ, & in ipsas incidit ΒΓ: alterni anguli ΑΒΓ, ΒΓΔ [per 29. prop.] æquales sunt. rursus, quoniam ΑΒ est æqualis ΓΔ, communis autem ΒΓ, duæ ΑΒ, ΒΓ duabus ΓΔ, ΒΓ sunt æquales; & angulus ΑΒΓ æqualis angulo ΒΓΔ: basis igitur ΑΓ [per 4. prop] basi ΒΔ est æqualis, triangulumque ΑΒΓ æquale triangulo ΒΓΔ, & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur: ergo angulus ΑΓΒ angulo ΓΒΔ est æqualis. & quoniam in duas rectas lineas ΑΓ, ΒΔ recta ΒΓ incidens alternos angulos ΑΓΒ, ΓΒΔ æquales inter se efficit: parallela est [per 27. prop.] ΑΓ ipsi ΒΔ, ostensa autem est & eidem æqualis.

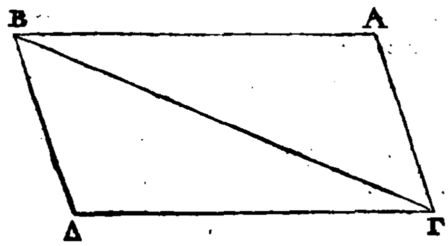
Quæ igitur æquales & parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, ipsæ etiam sunt æquales & parallelæ. quod erat demonstrandum.

Prop. XXXIV. Theor.

Parallelogrammorum spatiorum tam latera opposita quam anguli oppositi inter se æquantur, & illa diameter bifariam secat.

SIT parallelogrammum ΑΓΔΒ, ejus autem diameter ΒΓ: dico ΑΓΔΒ parallelogrammi latera opposita & angulos oppositos inter se æquari, & diametrum ΒΓ ipsum bifariam secare.

Quoniam enim parallela est ΑΒ ipsi ΓΔ, & in ipsas incidit recta linea ΒΓ; anguli alterni ΑΒΓ, ΒΓΔ [per 29. prop.] inter se sunt æquales. rursus, quoniam ΑΓ ipsi ΒΔ parallela est, & in ipsas incidit ΒΓ, alterni anguli ΑΓΒ, ΓΒΔ sunt inter se æquales: duo igitur triangula sunt ΑΒΓ, ΓΒΔ, quæ duos angulos ΑΒΓ, ΒΓΑ duobus angulis ΒΓΔ, ΓΒΔ æquales habent, alterum alteri; & unum latus uni lateri æquale, quod æqualibus adjacet angulis, utrique commune ΒΓ: ergo & reliqua latera [per 26. prop.] reliquis lateribus æqualia habebunt, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem: æquale igitur est latus quidem ΑΒ lateri ΓΔ, latus vero ΑΓ ipsi ΒΔ, & angulus ΒΑΓ angulo ΒΔΓ. & quoniam angulus ΑΒΓ est æqualis angulo ΒΓΔ, & angulus ΓΒΔ angulo ΑΓΒ: erit totus angulus ΑΒΔ æqualis toti ΑΓΔ. ostensus autem est & angulus ΒΑΓ angulo ΒΔΓ æqualis.



Parallelogrammorum igitur spatiorum latera opposita & anguli oppositi inter se æquantur.

DICO etiam diametrum eas bifariam secare. quoniam enim æqualis est ΑΒ ipsi ΓΔ, communis autem ΒΓ; duæ ΑΒ, ΒΓ duobus ΔΓ, ΓΒ sunt æquales, altera alteri, & angulus ΑΒΓ æqualis est angulo ΒΓΔ: basis igitur ΑΓ [per 4. prop.] basi ΒΔ æqualis est, ideoque triangulum ΑΒΓ triangulo ΒΓΔ æquale erit.

Ergo diameter ΒΓ parallelogrammum ΑΓΔΒ bifariam secat. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΓΔΒ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΓΔΒ παραλληλογράμμου αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ ἡ ΒΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει.

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΓ· αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ, ΓΒΔ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΒΔ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν τῇ μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΓ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΑΒ πλευρὰ τῇ ΓΔ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΔΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστίν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΒΔΓ ἴση.

Τῶν ἄρα παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

ΛΕΓΩ δὲ ὅτι καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΓ, ΓΒ ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστί· καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστί, καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν.

Ἡ ἄρα ΒΓ διάμετρος δίχα τέμνει τὸ ΑΓΔΒ παραλληλόγραμμον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXV. Theor.

Parallelogramma, super eadem basi & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

SInt parallelogramma ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ super eadem basi ΒΓ & in eisdem parallelis ΑΖ, ΒΓ constituta: dico ΑΒΓΔ parallelogrammum ΕΒΓΖ parallelogrammo esse æquale.

Quoniam enim parallelogrammum est ΑΒΓΔ, ΑΔ [per 34. prop.] æqualis est ΒΓ. eadem quoque ratione & ΕΖ est æqualis ΒΓ: quare & ΑΔ æqualis erit ΕΖ. & communis ΔΕ: tota igitur ΑΕ toti ΔΖ [per 2. ax.] est æqualis. est autem

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

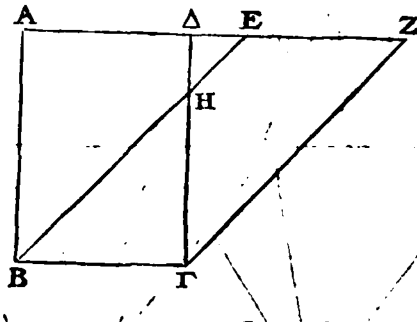
Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΖ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΕΒΓΖ.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, τῇ ΒΓ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ ἴση ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΕΖ ἴση ἐστί. καὶ κοινὴ ἡ ΔΕ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΕ ὅλῃ τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ

τῇ

τῇ ΔΓ ἴση· δύο δὴ αἱ ΕΑ, ΑΒ δυσὶ ταῖς ΖΔ, ΔΓ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΔΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΒ ἴση ἐστὶν, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντός· βάσις ἄρα ἡ ΕΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΕΑΒ τρίγωνον τῷ ΖΔΓ τριγώνῳ ἴσον ἐστί, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΔΗΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒΗΔ τραπέζιον λοιπῷ τῷ ΕΗΓΖ τραπεζίῳ ἴσον ἐστί. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΗΒΓ τρίγωνον· ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ὅλῳ τῷ ΕΒΓΖ παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστί.

Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



& AB [per 34. prop.] æqualis ΔΓ; ergo duæ EA, AB duabus ZΔ, ΔΓ sunt æquales, altera alteri, & angulus ZΔΓ [per 29. prop.] æqualis angulo EAB, exterior interiori: basis igitur EB [per 4. prop.] basi ZΓ est æqualis, & triangulum EAB æquale triangulo ZΔΓ. commune auferatur ΔHE: reliquum igitur trapezium ABHΔ [per 3. ax.] reliquo trapezio EHΓZ est æquale. commune addatur HBΓ triangulum: ergo totum parallelogrammum ABΓΔ toti parallelogrammo EBΓZ æquale erit.

Parallelogramma igitur, super eadem basi & in eisdem parallelis constituta, sunt inter se æqualia. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ'.

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΒΓ, ΖΗ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΘ, ΒΗ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΗ, ἀλλὰ καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΕΘ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα τῇ ΕΘ ἐστὶν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ παράλληλοι καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΒΕ, ΓΘ, αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι· καὶ αἱ ΕΒ, ΓΘ ἄρα ἴσαι τέ εἰσι καὶ παράλληλοι· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΓΘ, καὶ ἐστιν ἴσον τῷ ΑΒΓΔ· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει τὴν ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶν αὐτῷ, ταῖς ΒΓ, ΑΘ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΖΗΘ τῷ αὐτῷ τῷ ΕΒΓΘ ἐστὶν ἴσον· ὥστε καὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ ἴσον ἐστί.

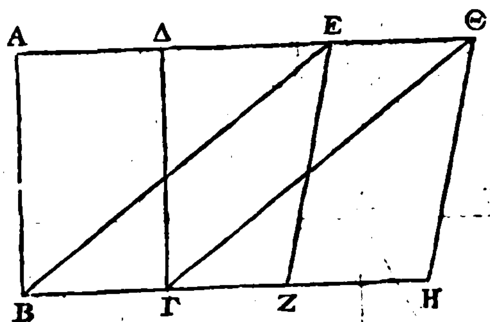
Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXXVI. THEOR.

Parallelogramma, super æqualibus basibus & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

SInt parallelogramma ABΓΔ, EZHΘ super æqualibus basibus BΓ, ZH & in eisdem parallelis AΘ, BH constituta: dico parallelogrammum ABΓΔ parallelogrammo EZHΘ esse æquale.

Conjungantur enim BE, ΓΘ.



Et quoniam æqualis est BΓ ipsi ZH, & ZH ipsi EΘ; erit & BΓ ipsi EΘ æqualis. sunt autem & parallelæ & ipsas conjungunt BE, ΓΘ; quæ autem æquales & parallelas ad easdem partes conjungunt [per 33. prop.] sunt æquales & parallelæ: ergo EB, ΓΘ & æquales sunt & parallelæ: quare EBΓΘ parallelogrammum est, & [per 35. prop.] æquale parallelogrammo ABΓΔ; basim enim eandem habet BΓ & in eisdem parallelis BΓ, AΘ constituitur. simili ratione & EZHΘ eidem EBΓΘ est æquale: ergo & parallelogrammum ABΓΔ est æquale parallelogrammo EZHΘ.

Parallelogramma igitur, super æqualibus basibus & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ'.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΔ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ.

PROP. XXXVII. THEOR.

Triangula, super eadem basi & in eisdem parallelis constituta, sunt inter se æqualia.

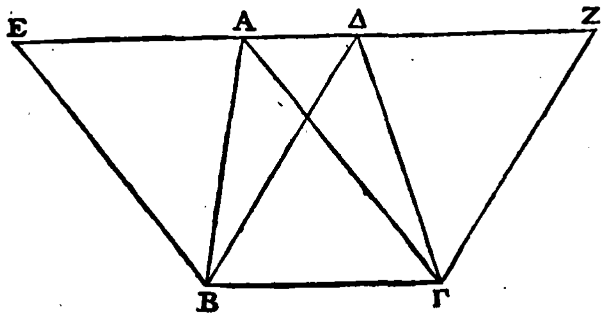
SInt triangula ABΓ, ΔBΓ super eadem basi BΓ & in eisdem parallelis AΔ, BΓ constituta: dico triangulum ABΓ triangulo ΔBΓ esse æquale.

Producatur ΑΔ ex utraque parte in Ε, Ζ puncta, & per Β quidem ipsi ΓΑ [per 31. prop.] parallela ducatur ΒΕ, per Γ vero ipsi ΒΔ parallela ducatur ΓΖ.

Parallelogrammum igitur est utrumq; ipsorum ΕΒΓΑ, ΔΒΓΖ: & parallelogrammum ΕΒΓΑ [per 35. prop.] est æquale parallelogrammo ΔΒΓΖ; etenim super eadem sunt basi ΒΓ & in eisdem parallelis ΒΓ, ΕΖ: estque parallelogrammi quidem ΕΒΓΑ dimidium ΑΒΓ triangulum; diameter enim ΑΒ ipsum bifariam secat: parallelogrammi vero ΔΒΓΖ dimidium triangulum ΔΒΓ; diameter enim ΔΓ [per 34. prop.] ipsum bifariam secat. æqualium autem dimidia inter se sunt æqualia: ergo triangulum ΑΒΓ triangulo ΔΒΓ est æquale.

Triangula igitur, super eadem basi & in eisdem parallelis constituta, sunt inter se æqualia. quod erat demonstrandum.

Ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Ε, Ζ σημεῖα, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΕ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΒΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΖ.



Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΕΒΓΑ, ΔΒΓΖ· καὶ ἴσον τὸ ΕΒΓΑ τῷ ΔΒΓΖ, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΕΖ· καί ἐστι τοῦ μὲν ΕΒΓΑ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ ΔΒΓΖ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΔΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXXVIII. THEOR.

Triangula, super basibus æqualibus & in eisdem parallelis constituta, sunt inter se æqualia.

Sint triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ super æqualibus basibus ΒΓ, ΕΖ & in eisdem parallelis ΒΖ, ΑΔ constituta: dico ΑΒΓ triangulum esse æquale triangulo ΔΕΖ.

Producatur enim ΑΔ ex utraque parte in Η, Θ puncta, & per Β quidem ipsi ΓΑ [per 31. prop.] parallela ducatur ΒΗ, per Ζ vero ducatur ΖΘ parallela ipsi ΔΕ.

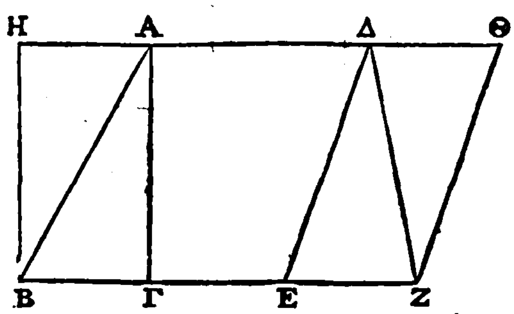
Parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum ΗΒΓΑ, ΔΕΖΘ: atque est ΗΒΓΑ [per 36. prop.] æquale ΔΕΖΘ; super æqualibus enim sunt basibus ΒΓ, ΕΖ & in eisdem parallelis ΒΖ, ΗΘ: parallelogrammi vero ΗΒΓΑ dimidium est ΑΒΓ triangulum, nam [per 34. prop.] diameter ΑΒ ipsum bifariam secat: & parallelogrammi ΔΕΖΘ dimidium est triangulum ΖΕΔ; diameter enim ΔΖ ipsum secat bifariam. æqualium autem dimidia sunt inter se æqualia: ergo ΑΒΓ triangulum triangulo ΔΕΖ est æquale.

Triangula igitur, super æqualibus basibus & in eisdem parallelis constituta, sunt inter se æqualia. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη'.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν ΒΓ, ΕΖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΑΔ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.



Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΑΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Η, Θ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΗ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΘ.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΗΒΓΑ, ΔΕΖΘ· καὶ ἴσον τὸ ΗΒΓΑ τῷ ΔΕΖΘ, ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΓ, ΕΖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΗΘ· καί ἐστι τοῦ μὲν ΗΒΓΑ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος δίχα αὐτὸ τέμνει· τοῦ δὲ ΔΕΖΘ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΖΕΔ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΖΔ διάμετρος δίχα αὐτὸ τέμνει. τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

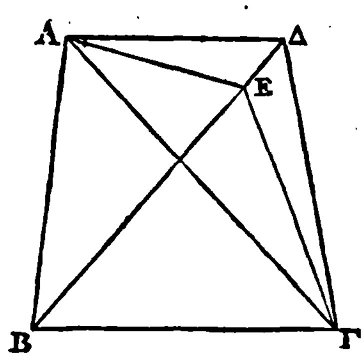
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθʹ.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνα ἴσα τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς ΒΓ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· λέγω ὅτι ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ.

Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ.

Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΕ. ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τῷ ΔΒΓ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΔΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΕΒΓ ἴσον ἐστίν, τὸ μεῖζον τῷ ἐλάττονι, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ· ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶ παράλληλος.



Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXIX. Theor.

Triangula æqualia, super eadem basi & ad easdem partes constituta, sunt in eisdem parallelis.

Sint æqualia triangula ΑΒΓ, ΔΒΓ, super eadem basi ΒΓ constituta & ad easdem partes: dico in eisdem esse parallelis. ducatur enim ΑΔ: dico ΑΔ parallelam esse ΒΓ.

Si enim non, ducatur per Α punctum [per 31. prop.] rectæ ΒΓ parallela recta ΑΕ, & ducatur ΕΓ.

Æquale igitur est [per 37. prop.] ΑΒΓ triangulum triangulo ΕΒΓ; super eadem enim est basi ΒΓ & in eisdem parallelis ΒΓ, ΑΕ. sed [ex hyp.] ΑΒΓ triangulum triangulo ΔΒΓ est æquale: ergo & triangulum ΔΒΓ æquale est ipsi ΕΒΓ triangulo, majus minori, quod fieri non potest: non est igitur ΑΕ ipsi ΒΓ parallela. similiter ostendemus neque ullam aliam parallelam esse præter ipsam ΑΔ: ergo ΑΔ ipsi ΒΓ est parallela.

Triangula igitur æqualia, super eadem basi & ad easdem partes constituta, sunt in eisdem parallelis. quod erat demonstrandum.

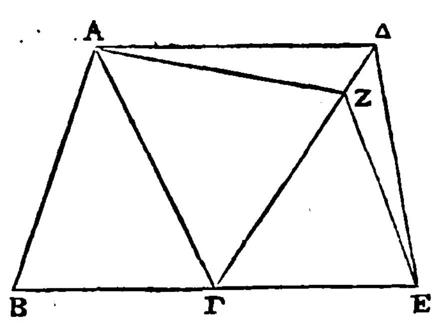
ΠΡΟΤΑΣΙΣ μʹ.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνα ἴσα τὰ ΑΒΓ, ΓΔΕ, ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν ΒΓ, ΓΕ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· λέγω ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΒΕ.

Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ Α τῇ ΒΕ παράλληλος ἡ ΖΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΕ.

Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΓΕ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΓ, ΓΕ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΕ, ΑΖ. ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΓΕ τριγώνῳ· καὶ τὸ ΔΓΕ τρίγωνον ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΖΓΕ τριγώνῳ, τὸ μεῖζον τῷ ἐλάσσονι, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΒΕ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ· ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΕ παράλληλός ἐστι.



Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστὶ παραλλήλοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XL. Theor.

Triangula æqualia, super basibus æqualibus & ad easdem partes constituta, sunt in eisdem parallelis.

Sint triangula æqualia ΑΒΓ, ΓΔΕ, super æqualibus basibus ΒΓ, ΓΕ & ad easdem partes constituta: dico etiam in eisdem esse parallelis. ducatur enim ΑΔ: dico ΑΔ ipsi ΒΕ parallelam esse.

Nam si non est, ducatur per Α ipsi ΒΕ parallela ΖΑ, & ΖΕ ducatur.

Triangulum igitur ΑΒΓ [per 38. prop.] triangulo ΖΓΕ est æquale; nam & super æqualibus basibus ΒΓ, ΓΕ & in eisdem parallelis ΒΕ, ΑΖ constituuntur. sed triangulum ΑΒΓ æquale est triangulo ΔΓΕ: ergo & triangulum ΔΓΕ triangulo ΖΓΕ æquale erit, majus minori, quod fieri non potest: non est igitur ΑΖ ipsi ΒΕ parallela. similiter demonstrabimus neque ullam aliam parallelam esse præter ΑΔ: ergo ΑΔ ipsi ΒΕ parallela erit.

Æqualia igitur triangula, super basibus æqualibus & ad easdem partes constituta, sunt in eisdem parallelis. quod erat demonstrandum.

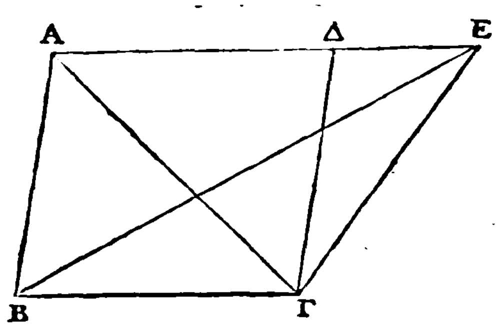
Prop. XLI. Theor.

Si parallelogrammum & triangulum eandem habeant basim, sintque in eisdem parallelis: parallelogrammum ipsius trianguli duplum erit.

Parallelogrammum enim ΑΒΓΔ & triangulum ΕΒΓ basim habeant eandem ΒΓ, & sint in eisdem parallelis ΒΓ, ΑΕ: dico parallelogrammum ΑΒΓΔ trianguli ΒΕΓ duplum esse.

Ducatur enim ΑΓ.

Triangulum igitur ΑΒΓ triangulo ΕΒΓ [per 37. prop.] est æquale; namque super eadem basi ΒΓ, & in eisdem parallelis ΒΓ, ΑΕ constituitur. sed ΑΒΓΔ parallelogrammum duplum est trianguli ΑΒΓ, diameter enim ΑΓ [per 34. prop.] ipsum bifariam secat: quare & ΑΒΓΔ parallelogrammum ipsius ΕΒΓ trianguli duplum erit.



Si igitur parallelogrammum & triangulum eandem habeant basim, & sint in eisdem parallelis: parallelogrammum ipsius trianguli duplum erit. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μα΄.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ· διπλάσιον ἔσται τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.

Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ τριγώνῳ τῷ ΕΒΓ βάσιν τε ἐχέτω τὴν αὐτὴν τὴν ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἔστω παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΕ· λέγω ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τοῦ ΒΕΓ τριγώνου.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΓ.

Ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΕ. ἀλλὰ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ἡ γὰρ ΑΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· ὥστε τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τοῦ ΕΒΓ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον.

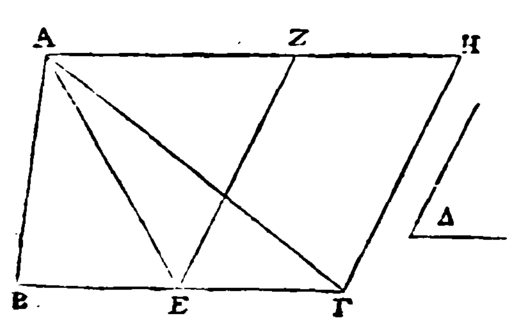
Ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ· διπλάσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XLII. Probl.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum triangulum ΑΒΓ, datus autem rectilineus angulus Δ: oportet itaque dato triangulo ΑΒΓ æquale parallelogrammum constituere in angulo rectilineo ipsi Δ æquali.

Secetur ΒΓ [per 10. prop.] bifariam in Ε, & ducatur ΑΕ, & ad rectam lineam ΕΓ atque ad punctum in ea Ε constituatur [per 23. prop.] angulus ΓΕΖ æqualis ipsi Δ, & per Α quidem ipsi ΕΓ [per 31. prop.] parallela ducatur ΑΗ, per Γ vero ipsi ΖΕ ducatur parallela ΓΗ: parallelogrammum igitur est ΖΕΓΗ.



Et quoniam ΒΕ est æqualis ΕΓ, erit & ΑΒΕ triangulum [per 38. prop.] triangulo ΑΕΓ æquale; super æqualibus enim sunt basibus ΒΕ, ΕΓ, & in eisdem parallelis ΒΓ, ΑΗ: ergo triangulum ΑΒΓ trianguli ΑΕΓ est duplum. est autem [per 41. prop.] parallelogrammum ΖΕΓΗ duplum

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ΄.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι *ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία Δ· δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν ἴσῃ τῇ Δ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΕΓ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε τῇ Δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΓΕΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Α τῇ ΕΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΗ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΖΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΗ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΕΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΕ, ΕΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΗ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τοῦ ΑΕΓ τριγώνου. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμ-

* Legendum videtur, ἐν ἴσῃ τῇ δοθείσῃ. sic Proclus in 44. prop.

μον

μον διπλάσιον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου· βάσιν τε γὰρ αὐτοῦ τὴν αὐτὴν ἔχει καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστὶν αὐτῷ παραλλήλοις· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, καὶ ἔχει τὴν ὑπὸ ΓΕΖ γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ Δ.

Τῷ ἄρα δοθέντι τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ ἴσον παραλληλόγραμμον συνέσταται τὸ ΖΕΓΗ, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΕΖ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

trianguli ΑΕΓ; basim enim eandem habet, & in eisdem est parallelis: æquale igitur est [per 6. ax.] ΖΕΓΗ parallelogrammum triangulo ΑΒΓ, habetque ΓΕΖ angulum æqualem angulo dato Δ.

Dato igitur triangulo ΑΒΓ æquale parallelogrammum ΖΕΓΗ constitutum est, in angulo ΓΕΖ, qui angulo Δ est æqualis. quod erat faciendum.

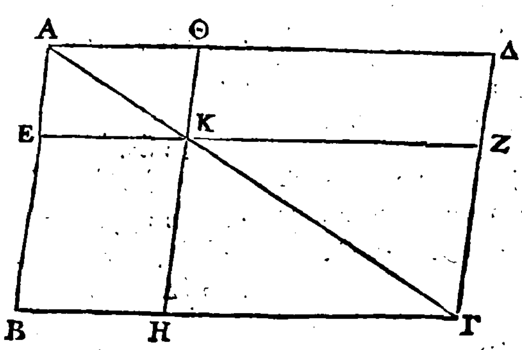
ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ'.

Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ ΕΘ, ΖΗ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΒΚ, ΚΔ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΚ παραπλήρωμα τῷ ΚΔ παραπληρώματι.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ ΕΚΘΑ παραλληλόγραμμόν ἐστι, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΚ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΚΖΓ τρίγωνον τῷ ΚΗΓ ἐστὶν ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΚΖΓ τῷ ΚΗΓ, τὸ ΑΕΚ τρίγωνον μετὰ τοῦ ΚΗΓ ἐστὶν ἴσον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ μετὰ τοῦ ΚΖΓ τριγώνου· ἔστι δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὅλῳ τῷ ΑΔΓ ἴσον· λοιπῷ ἄρα τῷ ΚΔ παραπληρώματι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΚ παραπλήρωμα.

Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



PROP. XLIII. THEOR.

In omni parallelogrammo complementa eorum quæ circa diametrum sunt parallelogrammorum inter se sunt æqualia.

SIT parallelogrammum ΑΒΓΔ, cujus diameter ΑΓ, & circa ipsam ΑΓ parallelogramma quidem sint ΕΘ, ΖΗ, quæ vero dicuntur complementa ΒΚ, ΚΔ: dico ΒΚ complementum complemento ΚΔ esse æquale.

Quoniam enim parallelogrammum est ΑΒΓΔ, & ejus diameter ΑΓ, æquale est [per 34. prop.] triangulum ΑΒΓ triangulo ΑΔΓ. rursus, quoniam ΕΚΘΑ parallelogrammum est, cujus diameter ΑΚ, triangulum ΑΕΚ triangulo ΑΘΚ æquale erit. eadem etiam ratione & triangulum ΚΖΓ triangulo ΚΗΓ est æquale. cum igitur triangulum quidem ΑΕΚ æquale sit triangulo ΑΘΚ, triangulum vero ΚΖΓ ipsi ΚΗΓ, triangulum ΑΕΚ una cum triangulo ΚΗΓ æquale est triangulo ΑΘΚ una cum ΚΖΓ triangulo: est autem & totum triangulum ΑΒΓ æquale toti ΑΔΓ: reliquum igitur ΒΚ complementum [per 3. ax.] reliquo complemento ΚΔ est æquale.

In omni igitur parallelogrammo complementa eorum quæ circa diametrum sunt parallelogrammorum inter se sunt æqualia. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ'.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, * ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ Γ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ, τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν ἴσῃ τῇ Δ γωνίᾳ.

Συνεστάτω τῷ Γ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕΖΗ, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΒΗ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ· καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΒΕ τῇ

* ἐν γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ δοθείσῃ. *Proclus.*

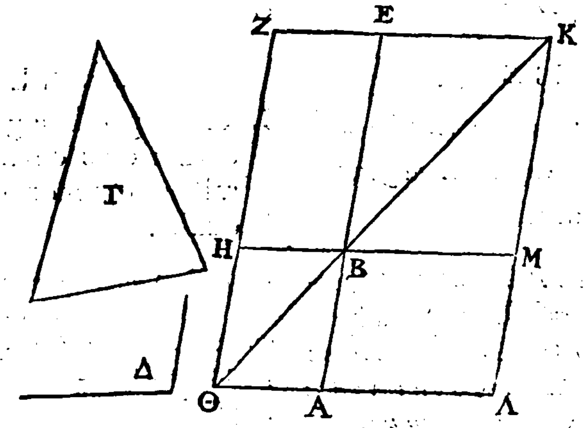
PROP. XLIV. PROBL.

Ad datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare, in dato angulo rectilineo.

SIT data quidem recta linea ΑΒ, datum vero triangulum Γ, & datus angulus rectilineus Δ: oportet quidem ad datam rectam lineam ΑΒ, dato triangulo Γ æquale parallelogrammum applicare, in angulo ipsi Δ æquali.

Constituatur [per 42. prop.] triangulo Γ æquale parallelogrammum ΒΕΖΗ, in angulo ΕΒΗ, qui est æqualis angulo Δ; & ponatur ΒΕ in directum ipsi AB, producaturque ZH ad Θ, & per A alterutri ipsarum BH, EZ [per 31. prop.] parallela ducatur AΘ, & jungatur ΘB. & quoniam in parallelas AΘ, EZ recta linea ΘZ incidit, anguli AΘZ, ΘZE [per 29. prop.] duobus rectis sunt æquales; quare BΘH, HZE duobus rectis sunt minores: quæ vero à minoribus, quàm sunt duo recti, in infinitum producuntur [per 11. ax.] conveniunt inter se: ergo ΘB, ZE productæ convenient. producantur [per 2. post.] & conveniant in K; perque K alterutri ipsarum EA, ZΘ [per 31. prop.] parallela ducatur KΛ; & AΘ, HB ad Λ, M puncta producantur.

ΑΒ. καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΖΗ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΗ, ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΒ. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΘ, ΕΖ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΘΖ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΘΖ, ΘΖΕ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΘΗ, ΗΖΕ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων, ἢ δύο ὀρθῶν, εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ ΘΒ, ΖΕ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΕΑ, ΖΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΛ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΘΑ, ΗΒ ἐπὶ τὰ Λ, Μ σημεῖα.



Parallelogrammum igitur est ΘΛKZ, cujus diameter ΘK, & circa ΘK parallelogramma quidem sunt AH, ME; ea vero quæ dicuntur complementa AB, BZ: ergo [per 43. prop.] AB ipsi BZ est æquale. est autem BZ æquale triangulo Γ: quare & AB triangulo Γ æquale erit. & quoniam HBE angulus æqualis est [per 15. prop.] angulo ABM, & æqualis est etiam HBE angulo Δ: erit & angulus ABM angulo Δ æqualis.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΛΚΖ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΘΚ, περὶ δὲ ΘΚ παραλληλόγραμμα μὲν τὰ ΑΗ, ΜΕ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα ΑΒ, ΒΖ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ τῷ ΒΖ. ἀλλὰ καὶ τὸ ΒΖ τῷ Γ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΑΒ ἄρα τῷ Γ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΜ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΗΒΕ τῇ Δ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΜ τῇ Δ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση.

Ad datam igitur rectam lineam AB, dato triangulo Γ æquale parallelogrammum constituitur AB, in angulo ABM, qui est æqualis angulo Δ. quod erat faciendum.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ, τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΑΒ, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΜ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XLV. Probl.

Rectilineo dato æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ με'.

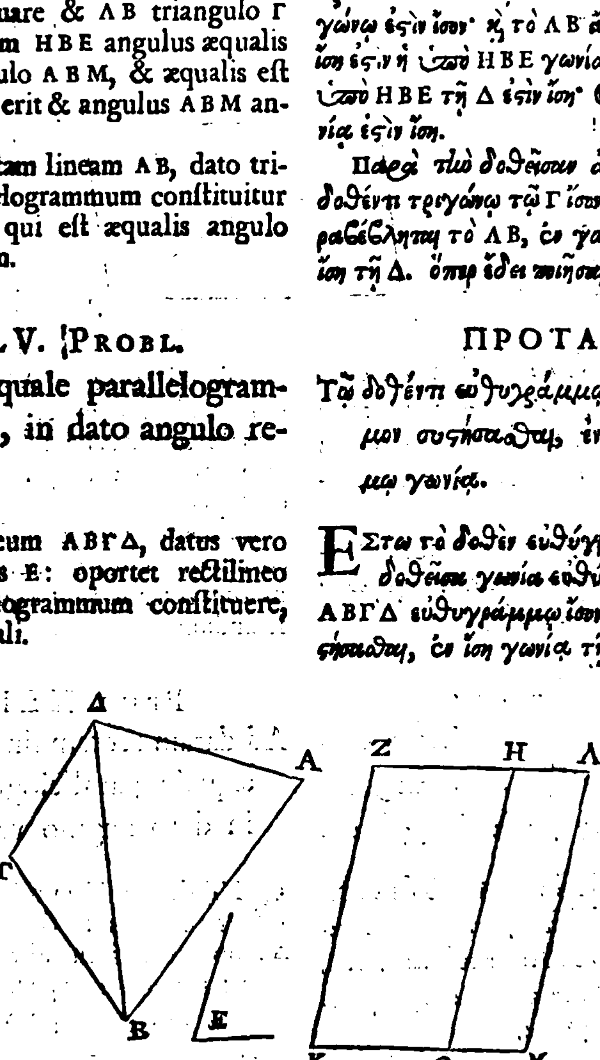
Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

SIT datum rectilineum ABΓΔ, datus vero angulus rectilineus E: oportet rectilineo ABΓΔ æquale parallelogrammum constituere, in angulo ipsi E æquali.

Ἔστω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Ε· δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓΔ εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν ἴσῃ γωνίᾳ τῇ Ε.

Ducatur enim ΔB, & constituatur [per 42. prop.] triangulo AΔB æquale parallelogrammum ZΘ, in angulo ΘKZ, qui est æqualis angulo E: deinde ad rectam lineam HΘ applicetur triangulo ΔBΓ æquale parallelogrammum HM, in angulo HΘM, qui angulo E est æqualis.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΔΒ, καὶ συνεστάτω τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΖΘ, ἐν τῇ ὑπὸ ΘΚΖ γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Ε· καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΗΘ εὐθεῖαν τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΜ, ἐν τῇ ὑπὸ ΗΘΜ γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Ε.



Et quoniam angulus E æqualis est utrique ipsorum ΘKZ, HΘM: erit & ΘKZ angulo HΘM æqualis. communis addatur KΘH: angu-

Καὶ ἐπεὶ ἡ Ε γωνία ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘΚΖ, ΗΘΜ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ἄρα ὑπὸ ΘΚΖ τῇ ὑπὸ ΗΘΜ ἴση ἐστίν. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΚΘΗ· αἱ ἄρα ὑπὸ

ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ τῇ ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΘΜ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΘΜ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΗΘ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ, δύο εὐθεῖαι αἱ ΚΘ, ΘΜ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν, ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ τῇ ΘΜ. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΚΜ, ΖΗ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘΗ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΖ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΘΗΛ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ ταῖς ὑπὸ ΘΗΖ, ΘΗΛ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, καὶ αἱ ὑπὸ ΘΗΖ, ΘΗΛ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΛ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΚΖ τῇ ΘΗ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΜΛ, καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῇ ΜΛ ἴση τε, καὶ παράλληλός ἐστιν· καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ ΚΜ, ΖΛ, καὶ αἱ ΚΜ, ΖΛ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΖΛΜ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΘΖ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ ΑΒΓ τῷ ΗΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ εὐθύγραμμον ὅλῳ τῷ ΚΖΛΜ παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστί.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΑΒΓΔ ἴσον παραλληλόγραμμον συνίσταται τὸ ΚΖΛΜ, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΚΜ, ἥ ἐστιν ἴση δοθείσῃ τῇ Ε. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

li igitur ΖΚΘ, ΚΘΗ [angulis ΚΘΗ, ΗΘΜ sunt æquales. sed ΖΚΘ, ΚΘΗ [per 29. prop.] sunt æquales duobus rectis: ergo & ΚΘΗ, ΗΘΜ duobus rectis æquales erunt. itaque quoniam ad rectam lineam ΗΘ, & ad punctum in ea Θ, duæ rectæ lineæ ΚΘ, ΘΜ, non ad easdem partes positæ, angulos deinceps duobus rectis æquales efficiunt, [per 14. prop.] in directum est ΚΘ ipsi ΘΜ. & quoniam in parallelas ΚΜ, ΖΗ recta linea ΘΗ incidit, alterni anguli ΜΘΗ, ΘΗΖ [per 29. prop.] æquales sunt. communis addatur ΘΗΛ: anguli igitur ΜΘΗ, ΘΗΛ angulis ΘΗΖ, ΘΗΛ sunt æquales. at anguli ΜΘΗ, ΘΗΛ [per 29. prop.] sunt æquales duobus rectis: quare & anguli ΘΗΖ, ΘΗΛ duobus rectis æquales erunt: in directum igitur est ΖΗ ipsi ΗΛ. & quoniam ΚΖ ipsi ΘΗ & æqualis est & parallela, & ΘΗ etiam ipsi ΜΛ, erit [per 1. ax. & 30. prop.] ΚΖ ipsi ΜΛ & æqualis & parallela; ipsasque conjungunt rectæ lineæ ΚΜ, ΖΛ: ergo & ΚΜ, ΖΛ [per 33. prop.] sunt æquales & parallelæ: parallelogrammum igitur est ΚΖΛΜ. cum autem triangulum quidem ΑΒΔ æquale sit parallelogrammo ΘΖ, triangulum vero ΑΒΓ parallelogrammo ΗΜ; erit totum ΑΒΓΔ rectilineum toti parallelogrammo ΚΖΛΜ æquale.

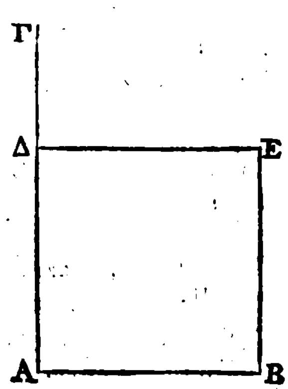
Dato igitur rectilineo ΑΒΓΔ æquale parallelogrammum constitutum est ΚΖΛΜ, in angulo ΖΚΜ, qui est æqualis angulo Ε dato. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μϛ'.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἤχθω τῇ ΑΒ εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ Α, πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΓ· καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ σημείου τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕ· διὰ δὲ τοῦ Β σημείου τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΕ.



Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΒΕ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση, αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΔ, ΔΕ, ΒΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ παραλληλόγραμμον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΒ, ΔΕ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΑΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΔΕ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΕ. τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ ΑΒΕ, ΒΕΔ γωνιῶν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον.

Τετράγωνον ἄρα ἐστί, καί ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας ἀναγεγραμμένον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XLVI. Probl.

A data recta linea quadratum describere.

SIT data recta linea ΑΒ: oportet ab ipsa ΑΒ quadratum describere.

Ducatur [per 11. prop.] rectæ lineæ ΑΒ, à puncto in ea dato Α, ad rectos angulos ΑΓ; & ipsi ΑΒ æqualis [per 3. prop.] ponatur ΑΔ; perque punctum Δ ducatur [per 31. prop.] ΔΕ ipsi ΑΒ parallela; & per Β ipsi ΑΔ parallela ducatur ΒΕ.

Parallelogrammum igitur est ΑΔΕΒ. ideo & ΑΒ quidem est æqualis ΔΕ, ΑΔ vero ipsi ΒΕ. sed & ΑΒ ipsi ΑΔ est æqualis: quatuor igitur ΒΑ, ΑΔ, ΔΕ, ΕΒ inter se sunt æquales: ideoque æquilaterum est ΑΔΕΒ parallelogrammum. dico etiam rectangulum esse. quoniam enim in parallelas ΑΒ, ΔΕ recta linea incidit ΑΔ: anguli ΒΑΔ, ΑΔΕ [per 29. prop.] duobus rectis sunt æquales. rectus autem est [per construct.] ΒΑΔ: ergo & ΑΔΕ rectus erit. parallelogrammorum autem tam latera quam anguli oppositi [per 34. prop.] æquantur: rectus igitur est uterque oppositorum ΑΒΕ, ΒΕΔ angulorum; & ob id rectangulum est ΑΔΕΒ. ostensum autem est & æquilaterum esse.

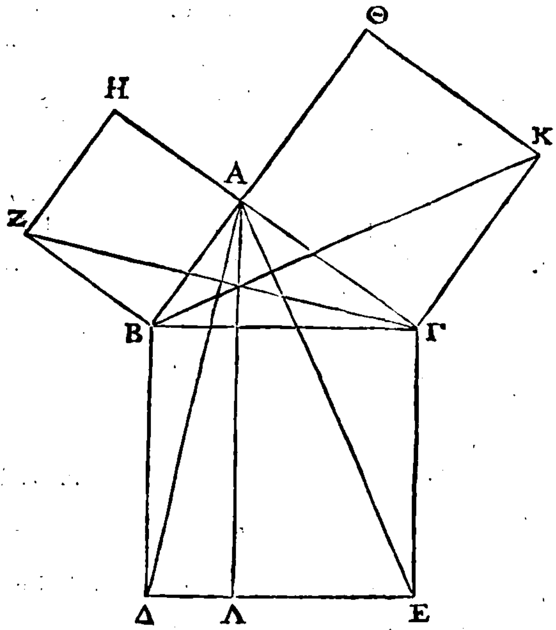
Quadratum igitur sit necesse est; atque à recta linea ΑΒ describitur. quod erat faciendum.

Prop. XLVII. Theor.

In rectangulis triangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum comprehendentibus describuntur.

SIT triangulum rectangulum ABΓ, rectum habens BAΓ angulum: dico quadratum, descriptum à recta BΓ, æquale esse quadratis, quæ ab ipsis BA, AΓ describuntur.

Describatur enim à BΓ quidem quadratum BΔEΓ; ab ipsis vero BA, AΓ quadrata HB, ΘΓ; perque A alterutri ipsarum BΔ, ΓE parallela ducatur AΛ; & ducantur AΔ, ZΓ.



Quoniam igitur uterque angulorum BAΓ, BAH rectus est; & ad eandem rectam lineam BA, & ad punctum in ea A, duæ rectæ lineæ AΓ, AH, non ad easdem partes positæ, faciunt angulos deinceps duobus rectis æquales: ΓA recta est in directum ipsi AH. eadem ratione, & AB est in directum ipsi AΘ. & quoniam angulus ΔBΓ [per 10. ax.] est æqualis angulo ZBA, rectus enim est uterque, communis addatur ABΓ: totus igitur ΔBA angulus toti ZBΓ est æqualis. cum autem duæ ΔB, BA duabus ΓB, BZ sint æquales, altera alteri, & angulus ΔBA æqualis angulo ZBΓ: erit [per 4. prop.] & basis AΔ basi ZΓ æqualis, & ABΔ triangulum triangulo ZBΓ æquale. estque trianguli quidem ABΔ [per 41. prop.] duplum BΛ parallelogrammum; basim enim eandem habent BΔ, & sunt in eisdem parallelis BΔ, AΛ: trianguli vero ZBΓ duplum est HB quadratum; rursus enim basim habent eandem ZB, & sunt in eisdem parallelis ZB, HΓ; æqualium autem dupla sunt inter se æqualia: æquale est igitur parallelogrammum BΛ ipsi HB quadrato. similiter, ductis AE, BK, ostendetur etiam ΓΛ parallelogrammum æquale quadrato ΘΓ: totum igitur BΔEΓ quadratum duobus quadratis HB, ΘΓ est æquale. & est quidem BΔEΓ quadratum à recta linea BΓ descriptum; quadrata vero HB, ΘΓ ab ipsis BA, AΓ: quadratum igitur BE, à latere BΓ descriptum, æquale est quadratis, quæ describuntur à lateribus BA, AΓ.

Ergo in rectangulis triangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum comprehendentibus describuntur. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζʹ.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΒΔΕΓ· ἀπὸ δὲ τῶν ΒΑ, ΑΓ τὰ ΗΒ, ΘΓ· καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΔ, ΓΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΛ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΖΓ.

Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΒΑΗ γωνιῶν· πρὸς δή τινι τῇ ΒΑ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΑΗ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΑΘ ἐστὶν ἐπ' εὐθείας. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΑ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΑ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΔΒ, ΒΑ δυσὶ ταῖς ΓΒ, ΒΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΒΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἔστι τοῦ μὲν ΑΒΔ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον, βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΒΔ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΒΔ, ΑΛ· τοῦ δὲ ΖΒΓ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΗΒ τετράγωνον, βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΖΒ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις εἰσὶ ταῖς ΖΒ, ΗΓ· τὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΒ τετραγώνῳ. ὁμοίως δὴ, ἐπιζευγνυμένων τῶν ΑΕ, ΒΚ, δειχθήσεται καὶ τὸ ΓΛ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΘΓ τετραγώνῳ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΒΓΕ τετράγωνον δυσὶ τοῖς ΗΒ, ΘΓ τετραγώνοις ἴσον ἐστί. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΒΔΕΓ τετράγωνον ἀπὸ τῆς ΒΓ ἀναγραφὲν, τὰ δὲ ΗΒ, ΘΓ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ΒΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μη'.

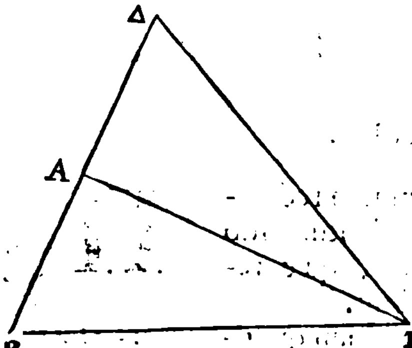
Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις· ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστι.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις· λέγω ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα ἡ ΑΔ, καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ, ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ὑπόκειται γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΔΓ τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΑΔ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΒΑ, ΑΓ ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἐστὶν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις· ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



PROP. XLVIII. THEOR.

Si quadratum, quod describitur ab uno laterum trianguli, æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur: angulus à reliquis duobus trianguli lateribus comprehensus rectus erit.

Trianguli enim ABΓ quod ab uno latere BΓ describitur quadratum æquale sit quadratis quæ à reliquis trianguli lateribus BA, AΓ describuntur: dico angulum BAΓ rectum esse.

Ducatur enim [per 11. prop.] à puncto A ipsi AΓ ad rectos angulos AΔ, ponaturque AΔ ipsi BA æqualis, & ducatur ΔΓ.

Quoniam igitur ΔA est æqualis AB; erit & quadratum, quod describitur ex ΔA, æquale quadrato rectæ AB. commune addatur quadratum. quod ex AΓ: ergo quadrata quæ ex ΔA, AΓ æqualia sunt quadratis quæ ex BA, AΓ describuntur. sed quadratis quidem quæ ex ΔA, AΓ æquale est [per 47. prop.] quod ex ΔΓ quadratum, rectus enim angulus est ΔAΓ; quadratis vero quæ ex BA, AΓ æquale ponitur quadratum quod ex BΓ: quadratum igitur quod ex ΔΓ æquale est ei quod ex BΓ quadrato: ergo & latus ΔΓ lateri ΓB est æquale. & quoniam AΔ est æqualis AB, communis autem AΓ; duæ AΔ, AΓ duabus BA, AΓ æquales sunt; & basis ΔΓ est æqualis basi ΓB: angulus igitur ΔAΓ [per 8. prop.] angulo BAΓ est æqualis. rectus autem est ΔAΓ: ergo & BAΓ rectus erit.

Si igitur quadratum, quod describitur ab uno laterum trianguli, æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur: angulus à reliquis duobus trianguli lateribus comprehensus rectus erit. quod erat demonstrandum.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER SECUNDUS.

DEFINITIONES.

1. OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub duabus rectis lineis, quæ rectum angulum comprehendunt.

2. Omnis parallelogrammi unumquodque eorum quæ circa diametrum ipsius sunt parallelogrammorum cum duobus complementis Gnomon vocetur.

ΟΡΟΙ.

α΄. ΠΑΝ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν.

β΄. Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ ἓν παραλληλόγραμμον ὁποιονοῦν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι Γνώμων καλείσθω.

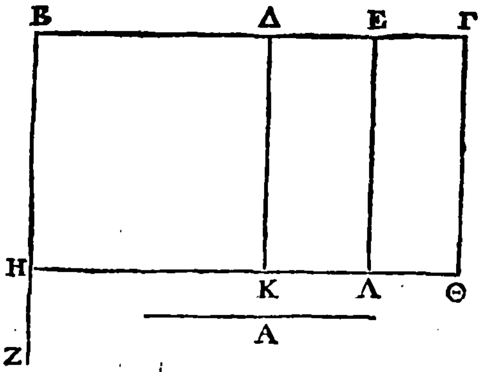
POPOSITIO I. THEOREMA.

Si sint duæ rectæ lineæ, altera autem ipsarum secta fuerit in quotcunque partes: rectangulum sub duabus rectis comprehensum æquale est eis rectangulis, quæ sub recta linea non secta & singulis alterius segmentis comprehenduntur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α΄.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὅσα δηποτοῦν τμήματα· τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

SInt duæ rectæ lineæ A, BΓ, & secta sit BΓ utcunque in punctis Δ, E: dico rectangulum comprehensum sub rectis lineis A, BΓ æquale esse rectangulo quod continetur sub A, BΔ, & rectangulo quod sub A, ΔE, & ei quod sub A, EΓ continetur.



Ducatur enim [per 11. prop. lib. 1.] à puncto B ipsi BΓ ad rectos angulos BZ, atque ipsi A ponatur æqualis BH, & per H quidem ipsi BΓ [per 31. 1.] parallela ducatur HΘ; per puncta vero Δ, E, Γ ducantur ΔK, EΛ, ΓΘ parallelæ ipsi BH.

Rectangulum igitur BΘ est æquale rectangulis BK, ΔΛ, EΘ. atque est quidem BΘ rectangulum, quod sub A, BΓ continetur; etenim con-

ΕΣτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ Α, ΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ ὡς ἔτυχε κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῶν Α, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ, καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ τῶν Α, ΕΓ.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΖ, καὶ κείσθω τῇ Α ἴση ἡ ΒΗ, καὶ διὰ τοῦ Η τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ, διὰ δὲ τῶν Δ, Ε, Γ τῇ ΒΗ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΔΚ, ΕΛ, ΓΘ.

Ἴσον δή ἐστι τὸ ΒΘ τοῖς ΒΚ, ΔΛ, ΕΘ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΒΘ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ ΗΒ, ΗΒ, ΒΓ, ἴση δὲ ἡ ΒΗ τῇ Α· τὸ δὲ ΒΚ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΔ· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΗΒ, ΒΔ, ἴση δὲ ἡ ΗΒ τῇ Α· τὸ δὲ ΔΛ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ, ἴση γὰρ ἡ ΔΚ, τουτέστιν ἡ ΒΗ, τῇ Α· καὶ ἔτι ὁμοίως τὸ ΕΘ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΕΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ Α, ΒΔ, καὶ τῷ ὑπὸ Α, ΔΕ, καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ Α, ΕΓ.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὅσα δηποτοῦν τμήματα· τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

tinetur sub HB, BΓ, & BH ipsi A est æqualis: rectangulum autem BK est quod continetur sub ipsis A, BΔ; continetur enim sub HB, BΔ, quarum HB est æqualis A: & rectangulum ΔΛ est quod continetur sub rectis A, ΔE, quoniam ΔK, hoc est BH, ipsi A est æqualis: & similiter rectangulum EΘ est quod sub rectis A, EΓ continetur: ergo rectangulum contentum sub rectis A, BΓ est æquale rectangulo contento sub rectis A, BΔ, & contento sub rectis A, ΔE, & adhuc contento sub A, EΓ.

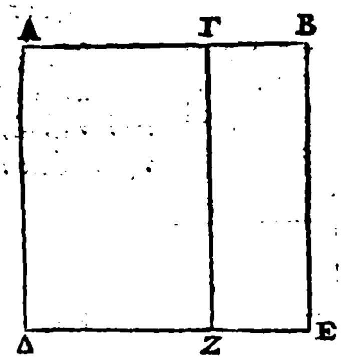
Si igitur sint duæ rectæ lineæ, quarum altera secta fuerit in quotcunque partes: rectangulum sub duabus rectis lineis comprehensum est æquale eis rectangulis, quæ sub recta linea non secta, & singulis alterius segmentis comprehenduntur. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ περιεχομένου ὀρθογωνίου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΕ παράλληλος ἡ ΓΖ.



Ἴσον δὴ τὸ ΑΕ τοῖς ΑΖ, ΓΕ· καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον, τὸ δὲ ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ· τὸ δὲ ΓΕ τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΒΕ τῇ ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. II. Theor.

Si recta linea secetur utcunque, rectangula sub tota & utroque segmento comprehensa æquantur quadrato totius.

Recta enim linea AB secetur utcunque in puncto Γ: dico rectangulum quod sub rectis AB, BΓ comprehenditur, una cum rectangulo comprehenso sub BA, AΓ, æquari quadrato rectæ AB.

Describatur enim [per 46. 1.] ex AB quadratum AΔEB, & per Γ ducatur [per 31. 1.] alterutri ipsarum AΔ, BE parallela ΓZ.

Est igitur AE æquale rectangulis AZ, ΓE: est autem AE quadratum rectæ AB; AZ vero rectangulum comprehenditur sub rectis BA, AΓ, comprehenditur enim sub rectis ΔA, AΓ, quarum AΔ æquatur ipsi AB: & rectangulum ΓE comprehenditur sub rectis AB, BΓ, cum recta BE sit æqualis rectæ AB: rectangulum igitur comprehensum sub rectis BA, AΓ, una cum rectangulo sub AB, BΓ, æquatur quadrato rectæ AB.

Si igitur recta linea secetur utcunque, rectangula sub tota & utroque segmento comprehensa æquantur quadrato totius. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ὡς ἔτυχε τμηθῇ, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΓ τετραγώνου.

Prop. III. Theor.

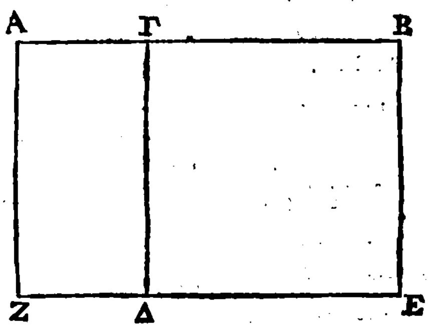
Si recta linea secetur utcunque, rectangulum sub tota & uno segmento comprehensum æquatur rectangulo sub segmentis comprehenso, & prædicti segmenti quadrato.

Recta enim linea AB secta sit utcunque in puncto Γ: dico rectangulum sub AB, BΓ æquale esse rectangulo sub AΓ, ΓB, una cum quadrato rectæ BΓ.

Describa-

Describatur enim [per 46. 1.] ex ΒΓ quadratum ΓΔΕΒ, producaturque ΕΔ in Ζ, & per Α alterutri ipsarum ΓΔ, ΒΕ [per 31. 1.] parallela ducatur ΑΖ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΓΔΕΒ, καὶ ἤχθω ἡ ΕΔ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, ΒΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΖ.



Æquale utique erit rectangulum ΑΕ ipsis ΑΔ, ΓΕ: & est ΑΕ [quidem rectangulum contentum sub rectis ΑΒ, ΒΓ; continetur etenim sub rectis ΑΒ, ΒΕ, quarum ΒΕ est æqualis ΒΓ: rectangulum vero ΑΔ est quod continetur sub rectis ΑΓ, ΓΒ, cum ΔΓ ipsi ΓΒ sit æqualis: & ΔΒ est quadratum quod fit ex ex ΒΓ: ergo rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ, est æquale rectangulo sub ΑΓ, ΓΒ, una cum quadrato quod ex ΒΓ.

Ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΕ τοῖς ΑΔ, ΓΕ· καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΕ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ, ἴση δὲ ἡ ΒΕ τῇ ΒΓ· τὸ δὲ ΑΔ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἴση γὰρ ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ· τὸ δὲ ΔΒ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΓΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνου.

Si igitur recta linea secetur utcunque, rectangulum sub tota & uno segmento comprehensum æquatur rectangulo sub segmentis comprehenso, & prædicti segmenti quadrato. quod erat demonstrandum.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. IV. Theor.

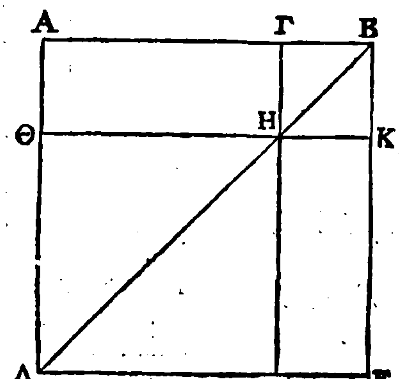
Si recta linea secetur utcunque, quadratum totius æquatur quadratis segmentorum & rectangulo bis comprehenso sub segmentis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δʹ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Recta enim linea ΑΒ secta sit utcunque in Γ: dico quadratum quod fit ex ΑΒ æquale esse & quadratis ex ΑΓ, ΓΒ & ei rectangulo quod bis comprehenditur sub segmentis ΑΓ, ΓΒ.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



Describatur enim [per 46. 1.] ex ΑΒ quadratum ΑΔΕΒ, jungaturque ΒΔ, & per Γ quidem alterutri ipsarum ΑΔ, ΒΕ [per 31. 1.] parallela ducatur ΓΗΖ, per Η vero alterutri ipsarum ΑΒ, ΔΕ ducatur parallela ΘΚ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΗΖ,* διὰ δὲ τοῦ Η ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΚ.

Et quoniam ΓΖ est parallela ipsi ΑΔ, & in ipsas incidit ΒΔ, erit exterior angulus ΒΗΓ [per 29. 1.] interiori & opposito ΑΔΒ æqualis. angulus autem ΑΔΒ [per 5. 1.] est æqualis angulo ΑΒΔ, quod & latus ΒΑ æquale est lateri ΑΔ: quare ΓΗΒ angulus angulo ΗΒΓ est æqualis: ac propterea latus ΒΓ [per 6. 1.] lateri ΓΗ æquale. sed & latus ΓΒ æquale est [per 34. 1.] lateri ΗΚ, & ΓΗ ipsi ΒΚ: ergo & ΗΚ est æquale ΚΒ: & ΓΗΚΒ est æquilaterum. dico insuper etiam rectangulum esse. quoniam enim ΓΗ est parallela ipsi ΒΚ, & in ipsas incidit ΓΒ; anguli ΚΒΓ, ΗΓΒ [per 29. 1.] duobus rectis sunt æquales. rectus autem est [per 30. def. 1.] ΚΒΓ angulus: ergo & rectus ΗΓΒ: quare & anguli oppositi ΓΗΚ, ΗΚΒ [per 34. 1.] recti erunt: rectangulum igitur est ΓΗΚΒ. sed ostensum fuit & æquilaterum esse: quadratum

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΖ τῇ ΑΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΗΓ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΔΒ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΗΒΓ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΓ πλευρᾷ τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ καὶ ἡ ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΒΚ, καὶ ἡ ΗΚ ἄρα τῇ ΚΒ ἐστὶν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ. λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΗ τῇ ΒΚ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐνέπεσεν ἡ ΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΚΒΓ, ΗΓΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΚΒΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΗΓΒ. ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον, αἱ ὑπὸ ΓΗΚ, ΗΚΒ ὀρθαί εἰσιν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τε-

* Videtur deesse ad sensum explendum, τέμνουσα τὴν ΒΔ κατὰ τὸ Η σημεῖον. & sic non raro in sequentibus, quod semel admonuisse sat esto.

τράγωνον

τετράγωνον ἄρα ἐστὶ, καὶ ἔστιν ἀπὸ τῆς ΒΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΘΖ τετράγωνόν ἐστι, καὶ ἔστιν ἀπὸ τῆς ΘΗ, τουτέστιν ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ΘΖ, ΓΚ τετράγωνα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ εἰσί. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ, καὶ ἔστι τὸ ΑΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἴση γὰρ ἡ ΗΓ τῇ ΓΒ· καὶ τὸ ΗΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἔστι δὲ καὶ τὰ ΘΖ, ΓΚ τετράγωνα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα τέσσαρα τὰ ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἀλλὰ τὰ ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ, ὅ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΤΕΡΑ ΔΕΙΞΙΣ.

Λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ· καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· τοῦ ΑΒΔ ἄρα τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΔΒ, ΒΑΔ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΔΒ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσί· καί εἰσιν ἴσαι, ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΔΒ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τὸ Α, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΗ, ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΓ τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση. ἀλλ' ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΚΗ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΒΚ· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΚ. ἔχει δὲ ὀρθὴν τὴν ὑπὸ ΓΒΚ γωνίαν· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΚ, καὶ ἔστιν ἀπὸ τῆς ΓΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΘΖ τετράγωνόν ἐστι, καὶ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ΓΚ, ΘΖ τετράγωνά ἐστι, καὶ ἔστιν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΕΗ, καὶ ἔστι τὸ ΑΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἴση γὰρ ἡ ΓΗ τῇ ΓΒ, καὶ τὸ ΕΗ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἔστι δὲ καὶ τὰ ΓΚ, ΘΖ ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα ΓΚ, ΘΖ, ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἀλλὰ τὰ ΓΚ, ΘΖ καὶ τὰ ΑΗ, ΗΕ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΕ, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον·

Τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτων φανερόν ἐστιν, ὅτι ἐν τοῖς τετραγώνοις χωρίοις τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα τετράγωνά ἐστιν.

igitur eſt, & eſt ex ΒΓ. eadem ratione & ΘΖ eſt quadratum, & eſt ex ΘΗ, hoc eſt ex ΑΓ: ergo ΘΖ, ΓΚ ex ipſis ΑΓ, ΓΒ quadrata ſunt. & quoniam rectangulum ΑΗ [per 43. 1.] eſt æquale rectangulo ΗΕ, atque eſt ΑΗ quod ſub rectis ΑΓ, ΓΒ continetur, eſt enim ΗΓ ipſi ΓΒ æqualis: erit & ΗΕ æquale ei quod continetur ſub ΑΓ, ΓΒ: quare rectangula ΑΗ, ΗΕ æqualia ſunt ei quod bis continetur ſub rectis ΑΓ, ΓΒ. ſunt autem & ΘΖ, ΓΚ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ: quatuor igitur ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ ſunt æqualia & quadratis ex ΑΓ, ΓΒ & ei rectangulo quod bis continetur ſub rectis ΑΓ, ΓΒ. ſed ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ ſunt totum ΑΔΕΒ, quod eſt quadratum ex ΑΒ: quadratum igitur ex ΑΒ æquale eſt & quadratis ex ΑΓ, ΓΒ & ei rectangulo quod bis continetur ſub rectis ΑΓ, ΓΒ.

Quare ſi recta linea ſecetur utcunque, quadratum totius æquatur quadratis ſegmentorum & rectangulo bis comprehenſo ſub ſegmentis. quod erat demonſtrandum.

ALITER.

Dico quadratum ex ΑΒ æquale eſſe & quadratis ex ΑΓ, ΓΒ & ei rectangulo quod bis ſub ΑΓ, ΓΒ continetur.

Quoniam enim, in eadem figura, æqualis eſt ΒΑ ipſi ΑΔ, & angulus ΑΒΔ [per 5. 1.] angulo ΑΔΒ æqualis erit: & cum [per 32. 1.] omnis trianguli tres anguli duobus rectis ſint æquales, erunt trianguli ΑΒΔ tres anguli ΑΒΔ, ΑΔΒ, ΒΑΔ æquales duobus rectis. rectus autem eſt angulus ΒΑΔ; ergo reliqui ΑΒΔ, ΑΔΒ ſunt uni recto æquales: & ſunt æquales inter ſe; uterque igitur ipſorum ΑΒΔ, ΑΔΒ eſt recti dimidius. ſed rectus eſt ΒΓΗ, æqualis namque eſt angulo interiori & oppoſito qui ad Α, reliquus igitur ΓΗΒ dimidius eſt recti: ac propterea ΓΗΒ angulus angulo ΓΒΗ eſt æqualis, & latus ΒΓ [per 6. 1.] æquale lateri ΓΗ. ſed ΓΒ [per 34. 1.] eſt æqualis ΚΗ, & ΓΗ ipſi ΒΚ; æquilaterum igitur eſt ΓΚ. habet autem rectum angulum ΓΒΚ: igitur eſt quadratum, & fit ex ΓΒ. eadem ratione & ΘΖ quadratum eſt, & æquale quadrato quod ex ΑΓ: quadrata igitur ſunt ΓΚ, ΘΖ, & quadratis ex ΑΓ, ΓΒ æqualia. rurſus quoniam [per 43. 1.] rectangulum ΑΗ eſt æquale ipſi ΕΗ, atque eſt ΑΗ id quod ſub rectis ΑΓ, ΓΒ continetur, eſt enim ΓΗ ipſi ΓΒ æqualis: erit & ΕΗ æquale contento ſub rectis ΑΓ, ΓΒ: quare ΑΗ, ΗΕ æqualia ſunt ei quod bis continetur ſub rectis ΑΓ, ΓΒ. ſunt autem & ΓΚ, ΘΖ æqualia quadratis ex ΑΓ, ΓΒ: ergo ΓΚ, ΘΖ, ΑΗ, ΗΕ æqualia ſunt & quadratis ex ΑΓ, ΓΒ & ei quod bis continetur ſub rectis ΑΓ, ΓΒ. ſed ΓΚ, ΘΖ & ΑΗ, ΗΕ ſunt totum ΑΕ, quod eſt quadratum ex ΑΒ:

Quadratum igitur ex ΑΒ eſt æquale quadratis ex ΑΓ, ΓΒ & ei rectangulo quod bis continetur ſub rectis ΑΓ, ΓΒ. quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

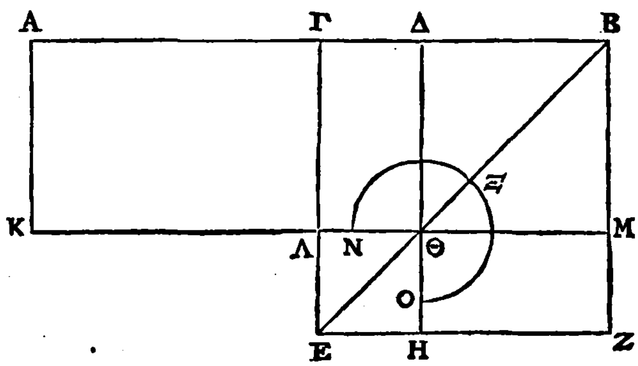
Ex his manifeſtum eſt, in quadratis parallelogramma quæ ſunt circa diametrum eſſe quadrata.

PROP. V. THEOR.

Si recta linea secetur in æqualia & inæqualia, rectangulum sub inæqualibus totius segmentis comprehensum una cum quadrato rectæ inter puncta sectionum æquatur quadrato dimidiæ.

Recta enim linea quæcunque AB secta sit in partes æquales ad punctum Γ, & in partes inæquales ad Δ: dico rectangulum comprehensum sub rectis AΔ, ΔB una cum quadrato quod fit ex ΓΔ æquale esse ei quod fit ex ΓB quadrato.

Describatur enim [per 46. 1.] ex BΓ quadratum ΓEZB, jungaturque BE; & per Δ quidem alterutri ipsarum ΓE, BZ [per 31. 1.] parallela ducatur ΔΘH, per Θ vero ducatur KΛM parallela alterutri ipsarum ΓB, EZ: & rursus per A ducatur alterutri ΓΛ, BM parallela AK.



Et quoniam [per 43. 1.] ΓΘ complementum æquale est complemento ΘZ, commune addatur ΔM: totum igitur ΓM toti ΔZ est æquale. sed ΓM [per 36. 1.] est æquale AΛ, quoniam AΓ æquatur ipsi ΓB: ergo & AΛ æquale est ΔZ. commune addatur ΓΘ: totum igitur AΘ ipsis ΔZ, ΔΛ æquale erit. sed AΘ quidem est quod sub rectis AΔ, ΔB continetur, est enim ΔΘ ipsi ΔB æqualis; ZΔ, ΔΛ vero est gnomon NΞO: gnomon igitur NΞO æqualis est ei quod sub rectis AΔ, ΔB continetur. commune addatur ΛH, quod æquale est [per cor. 4. 2.] quadrato ex ΓΔ: ergo NΞO gnomon & ΛH æqualia sunt rectangulo quod continetur sub rectis AΔ, ΔB & ei quod fit ex ΓΔ quadrato. sed NΞO gnomon & ΛH sunt totum quadratum ΓEZB, quod quidem fit ex ΓB: ergo rectangulum sub AΔ, ΔB una cum quadrato quod ex ΓΔ æquale est ei quod ex ΓB quadrato.

Si igitur recta linea secetur in æqualia & inæqualia, rectangulum sub inæqualibus totius segmentis comprehensum una cum quadrato rectæ inter puncta sectionum æquatur quadrato dimidiæ. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ έ.

Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ AB τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν AΔ, ΔB περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓB τετραγώνῳ.

Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς BΓ τετράγωνον τὸ ΓEZB, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ BE· καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ ὁποτέρᾳ τῶν ΓE, BZ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΘH, διὰ δὲ τοῦ Θ ὁποτέρᾳ τῶν ΓB, EZ παράλληλος ἤχθω πάλιν ἡ KΛM· καὶ πάλιν διὰ τοῦ A ὁποτέρᾳ τῶν ΓΛ, BM παράλληλος ἤχθω ἡ AK.

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΘ παραπλήρωμα τῷ ΘZ παραπληρώματι, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΔM· ὅλον ἄρα τὸ ΓM ὅλῳ τῷ ΔZ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ΓM τῷ AΛ ἴσον ἐστὶν, ἐπεὶ καὶ ἡ AΓ τῇ ΓB ἴση ἐστί· καὶ τὸ AΛ ἄρα τῷ ΔZ ἴσον ἐστί. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΘ· ὅλον ἄρα τὸ AΘ τῷ ΔZ καὶ ΔΛ ἴσον ἐστί. ἀλλὰ τὸ μὲν AΘ τὸ ὑπὸ τῶν AΔ, ΔB ἐστὶν, ἴση γὰρ ἡ ΔΘ τῇ ΔB· τὸ δὲ ZΔ, ΔΛ ἐστὶν ὁ NΞO γνώμων· καὶ ὁ NΞO ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ AΔ, ΔB. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΛH, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ὁ ἄρα NΞO γνώμων καὶ τὸ ΛH ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AΔ, ΔB περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ. ἀλλὰ ὁ NΞO γνώμων καὶ τὸ ΛH ὅλον ἐστὶ τὸ ΓEZB τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΓB· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AΔ, ΔB περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓB τετραγώνῳ.

Εὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. VI. THEOR.

Si recta linea secetur bifariam & illi recta quæcunque linea in directum adjiciatur, rectangulum comprehensum sub composita ex tota cum adjecta

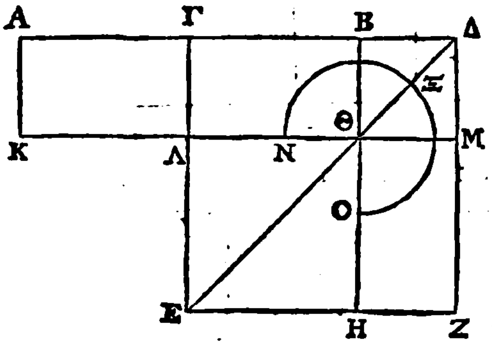
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ς′.

Εὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας· τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας σίας τετραγώνῳ ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

& adjecta una cum quadrato dimidiæ æquatur quadrato compositæ ex dimidia & adjecta tanquam una linea.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ σημεῖον, προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετράγωνον τὸ ΓΕΖΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΓΕ, ΔΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΘΗ· διὰ δὲ τοῦ Θ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΛΜ· καὶ ἔτι διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΛ, ΔΜ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, ἴσον ἐςὶ καὶ τὸ ΑΛ τῷ ΓΘ. ἀλλὰ καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΘΖ ἴσον ἐςί· καὶ τὸ ΑΛ ἄρα τῷ ΘΖ ἴσον ἐςί. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΜ τῷ ΝΞΟ γνώμονί ἐςιν ἴσον. ἀλλὰ τὸ ΑΜ ἐςὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ἴση γάρ ἐςιν ἡ ΔΜ τῇ ΔΒ· καὶ ὁ ΝΞΟ ἄρα γνώμων ἴσος ἐςὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΛΗ, ὅ ἐςιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνου ἴσον ἐςὶ τῷ ΝΞΟ γνώμονι καὶ τῷ ΛΗ. ἀλλὰ ὁ ΝΞΟ γνώμων καὶ τὸ ΛΗ ὅλον ἐςὶ τὸ ΓΕΖΔ τετράγωνον, ὅ ἐςιν ἀπὸ τῆς ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνου ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας· τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Recta enim linea quæcunque AB secetur bifariam in puncto Γ, adjiciaturque ipsi in directum recta quæcunque BΔ: dico rectangulum sub AΔ, ΔB una cum quadrato à ΓB æquale esse ei quod fit ex ΓΔ quadrato.

Describatur enim [per 46. 1.] ex ΓΔ quadratum ΓEZΔ, & jungatur ΔE; perque B [per 31. 1.] alterutri ipsarum ΓE, ΔZ parallela ducatur BΘH: & per Θ ducatur KΛM parallela alterutri ipsarum AΔ, EZ: & adhuc per A alterutri ΓΛ, ΔM parallela AK.

Itaque quoniam AΓ est æqualis ΓB, erit & rectangulum AΛ [per 36. 1.] rectangulo ΓΘ æquale. sed ΓΘ [per 43. 1.] æquale est ΘZ: ergo & AΛ ipsi ΘZ æquale erit. commune addatur ΓM: totum igitur AM gnomoni NΞO est æquale. atqui est AM, quod continetur sub rectis AΔ, ΔB, etenim ΔM [per cor. 4. 2.] est æqualis ΔB: ergo & gnomon NΞO æqualis est rectangulo comprehenso sub rectis AΔ, ΔB. rursus commune addatur ΛH, æquale scilicet quadrato quod ex ΓB: rectangulum igitur comprehensum sub rectis AΔ, ΔB una cum quadrato quod ex BΓ æquale est gnomoni NΞO & ipsi ΛH. sed gnomon NΞO & ΛH totum sunt ΓEZΔ quadratum; quod quidem fit ex ΓΔ: ergo rectangulum sub AΔ, ΔB una cum quadrato ex BΓ æquale est ei quod fit ex ΓΔ quadrato.

Si igitur recta linea secetur bifariam, & illi recta quæcunque linea in directum adjiciatur; rectangulum comprehensum sub composita ex tota cum adjecta & adjecta una cum quadrato dimidiæ æquatur quadrato compositæ ex dimidia & adjecta tanquam una linea. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, ἴσα ἐςὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα ἴσα ἐςὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ.

Prop. VII. Theor.

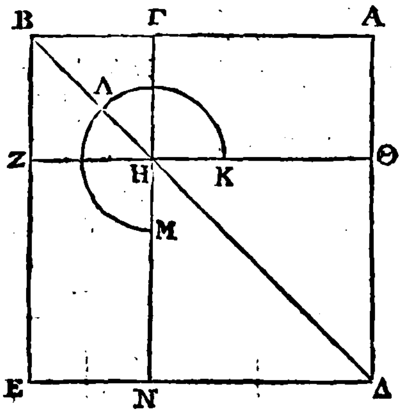
Si recta linea secetur utcunque, quadrata totius & unius è segmentis simul sumpta æquantur rectangulo bis comprehenso sub tota & dicto segmento una cum quadrato reliqui segmenti.

Recta enim linea quæcunque AB secta sit utcunque in puncto Γ: dico quadrata ex AB, BΓ æqualia esse & rectangulo quod bis sub rectis AB, BΓ continetur & ei quod fit ex AΓ quadrato.

 Describatur

Describatur enim [per 46. 1.] ex AB quadratum ΑΔΕΒ, & figura construatur.

Itaque quoniam ΑΗ rectangulum æquale est [per 43. 1.] rectangulo ΗΒ, commune addatur ΓΖ: quare totum ΑΖ toti ΓΕ est æquale: rectangula igitur ΑΖ, ΓΕ dupla sunt rectanguli ΑΖ. sed ΑΖ, ΓΕ sunt ΚΛΜ gnomon & quadratum ΓΖ: ergo ΚΛΜ gnomon & quadratum ΓΖ dupla erunt rectanguli ΑΖ. est autem id quod bis continetur sub rectis ΑΒ, ΒΓ duplum ipsius ΑΖ; etenim [per cor. 4. 2.] ΒΖ est æqualis ΒΓ: gnomon igitur ΚΛΜ & quadratum ΓΖ æqualia sunt ei quod bis sub rectis ΑΒ, ΒΓ continetur. commune addatur ΘΝ, quod est ex ΑΓ quadratum: ergo gnomon ΚΛΜ & quadrata ΓΖ, ΘΝ æqualia sunt ei quod bis sub rectis ΑΒ, ΒΓ continetur & quadrato ex ΑΓ. at gnomon ΚΛΜ & quadrata ΓΖ, ΘΝ totum sunt ΑΔΕΒ, & ΓΖ; quæ sunt ex ΑΒ, ΒΓ quadrata: quadrata igitur ex ΑΒ, ΒΓ æqualia sunt rectangulo quod bis sub rectis ΑΒ, ΒΓ continetur una cum eo quod fit ex ΑΓ quadrato.



Si igitur recta linea secetur utcunque, quadrata totius & unius è segmentis simul sumpta æquantur rectangulo bis comprehenso sub tota & dicto segmento una cum quadrato reliqui segmenti. quod erat demonstrandum.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ· καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΖ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΖ ὅλῳ τῷ ΓΕ ἐστὶν ἴσον· τὰ ἄρα ΑΖ, ΓΕ διπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΖ. ἀλλὰ τὰ ΑΖ, ΓΕ ὁ ΚΛΜ ἐστὶ γνώμων καὶ τὸ ΓΖ τετράγωνον· ὁ ΚΛΜ ἄρα γνώμων καὶ τὸ ΓΖ διπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΖ. ἔστι δὲ τοῦ ΑΖ διπλάσιον καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΒΖ τῇ ΒΓ· ὁ ἄρα ΚΛΜ γνώμων καὶ τὸ ΓΖ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΘΝ, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον· ὁ ἄρα ΚΛΜ γνώμων καὶ τὰ ΓΖ, ΘΝ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ. ἀλλ᾽ ὁ ΚΛΜ γνώμων καὶ τὰ ΓΖ, ΘΝ τετράγωνα ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ καὶ τὸ ΓΖ, ἅ ἐστιν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ᾽ ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VIII. Theor.

Si recta linea secetur utcunque, rectangulum quater comprehensum sub tota & uno è segmentis una cum quadrato reliqui segmenti æquatur quadrato compositæ ex tota & prædicto segmento tanquam ex una linea.

Recta enim linea ΑΒ secta sit utcunque in Γ: dico rectangulum quater sub rectis ΑΒ, ΒΓ contentum una cum quadrato quod ex ΑΓ æquale esse quadrato quod ex ΑΒ, ΒΓ tanquam ex una linea describitur.

Producatur enim in directum rectæ ΑΒ recta ΒΔ, & ipsi ΓΒ ponatur æqualis ΒΔ, describaturque [per 46. 1.] ex ΑΔ quadratum ΑΕΖΔ, & dupla figura construatur.

Quoniam igitur ΓΒ est æqualis ΒΔ, atque est ΓΒ [per 34. 1.] ipsi ΗΚ æqualis, ΒΔ vero ipsi ΚΝ, erit & ΗΚ æqualis ΚΝ. eadem ratione & ΠΡ ipsi ΡΟ est æqualis. & quoniam ΓΒ est æqualis ΒΔ, & ΗΚ ipsi ΚΝ; erit [per 36. 1.] rectangulum quidem ΓΚ æquale rectangulo ΒΝ, rectangulum vero ΗΡ ipsi ΡΝ. sed ΓΚ est [per 43. 1.] æquale ΡΝ, complementa enim sunt parallelogrammi ΓΟ: ergo & ΒΝ æquale est ΗΡ, & quatuor rectangula ΒΝ, ΚΓ,

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η΄.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ΒΓ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ᾽ εὐθείας τῇ ΑΒ εὐθεῖα ἡ ΒΔ, καὶ κείσθω τῇ ΓΒ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΔ τετράγωνον τὸ ΑΕΖΔ, καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα.

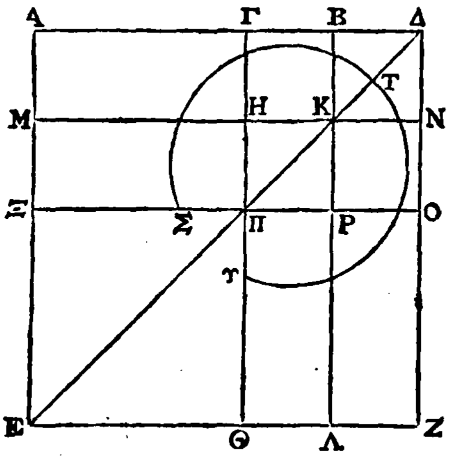
Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΒΔ τῇ ΚΝ, καὶ ἡ ΗΚ τῇ ΚΝ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΠΡ τῇ ΡΟ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΒΔ, ἡ δὲ ΗΚ τῇ ΚΝ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ΓΚ τῷ ΒΝ, τὸ δὲ ΗΡ τῷ ΡΝ. ἀλλὰ τὸ ΓΚ τῷ ΡΝ ἐστὶν ἴσον, παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΓΟ παραλληλογράμμου· καὶ τὸ ΒΝ ἄρα τῷ ΗΡ ἐστὶν ἴσον· τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ ΒΝ, ΚΓ,

ΗΡ,

ΗΡ, ΡΝ ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· τὰ τέσσαρα ἄρα τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ΓΚ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΒΔ τῇ ΒΚ, τουτέστι τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΓΒ τῇ ΗΚ, τουτέστι τῇ ΗΠ ἴση ἐστί· καὶ ἡ ΓΗ ἄρα τῇ ΗΠ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΓΗ τῇ ΗΠ, ἡ δὲ ΠΡ τῇ ΡΟ· ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ μὲν ΑΗ τῷ ΜΠ, τὸ δὲ ΠΛ τῷ ΡΖ. ἀλλὰ τὸ ΜΠ τῷ ΠΛ ἐστὶν ἴσον, παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΜΛ παραλληλογράμμου· καὶ τὸ ΑΗ ἄρα τῷ ΡΖ ἴσον ἐστί· τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ ΑΗ, ΜΠ, ΠΛ, ΡΖ ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· τὰ τέσσαρα ἄρα τοῦ ΑΗ ἐστὶ τετραπλάσια. ἐδείχθη δὲ καὶ τὰ τέσσαρα τὰ ΓΚ, ΒΝ, ΗΡ, ΡΝ τοῦ ΓΚ τετραπλάσια· τὰ ἄρα ὀκτὼ ἃ περιέχει τὸν ΣΤΥ γνώμονα τετραπλάσια τοῦ ΑΚ ἐστί. καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΚ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ ἐστίν, ἴση γὰρ ἐστὶν ἡ ΒΚ τῇ ΒΔ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΚ. ἐδείχθη δὲ τοῦ ΑΚ τετραπλάσιος ἐστὶν ὁ ΣΤΥ γνώμων· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤΥ γνώμονι. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΞΘ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤΥ γνώμονι καὶ τῷ ΞΘ. ἀλλὰ ὁ ΣΤΥ γνώμων καὶ τὸ ΞΘ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΕΖΔ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ καὶ ΒΓ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΗΡ, ΡΝ sunt inter se æqualia, ideoque quadrupla sunt rectanguli ΓΚ. rursus quoniam ΓΒ est æqualis ΒΔ, & ΒΔ quidem ipsi ΒΚ, hoc est [per 34. 1.] ipsi ΓΗ æqualis; ΓΒ vero ipsi ΗΚ, hoc est ΗΠ: est igitur ΓΗ æqualis ΗΠ. est autem & ΠΡ ipsi ΡΟ æqualis: rectangulum igitur ΑΗ [per 36. 1.] rectangulo ΜΠ, & rectangulum ΠΛ ipsi ΡΖ æquale erit. sed ΜΠ est [per 43. 1.] æquale ΠΛ; complementa enim sunt ΜΛ parallelogrammi; quare & ΑΗ ipsi ΡΖ est æquale: quatuor igitur ΑΗ, ΜΠ, ΠΛ, ΡΖ inter se sunt æqualia, ac propterea ipsius ΑΗ quadrupla. ostensum autem est & quatuor ΓΚ, ΒΝ, ΗΡ, ΡΝ quadrupla esse ΓΚ: quare octo quæ gnomonem ΣΤΥ constituunt ΑΚ quadrupla sunt. & quoniam ΑΚ est quod sub rectis ΑΒ, ΒΔ continetur; etenim ΒΚ est [per cor. 4. 2.] æqualis ΒΔ: erit contentum quater sub rectis ΑΒ, ΒΔ ipsius ΑΚ quadruplum. at demonstratus est gnomon ΣΤΥ quadruplus ipsius ΑΚ: quod igitur quater continetur sub rectis ΑΒ, ΒΔ æquale est gnomoni ΣΤΥ. commune addatur ΞΘ, quod quidem [per cor. 4. 2.] quadrato ex ΑΓ est æquale: ergo quod quater continetur sub rectis ΑΒ, ΒΔ una cum quadrato ex ΑΓ æquale est ipsi ΣΤΥ gnomoni & quadrato ΞΘ. sed ΣΤΥ gnomon & ΞΘ constituunt totum ΑΕΖΔ quadratum, quod describitur à recta ΑΔ: rectangulum igitur quater sub rectis ΑΒ, ΒΓ comprehensum una cum quadrato ex ΑΓ æquale est ei quod ex ΑΔ, hoc est ex ΑΒ, ΒΓ tanquam ex una linea, describitur quadrato.



Si igitur recta linea secetur utcunque, rectangulum quater comprehensum sub tota & uno è segmentis una cum quadrato reliqui segmenti æquatur quadrato compositæ ex tota & prædicto segmento tanquam ex una linea. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θʹ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΕ, καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρᾳ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ, ΕΒ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ τῇ ΕΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΖ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ.

PROP. IX. THEOR.

Si recta linea secetur in æqualia & inæqualia, quadrata inæqualium segmentorum sunt dupla quadratorum à dimidia & à recta inter puncta sectionum.

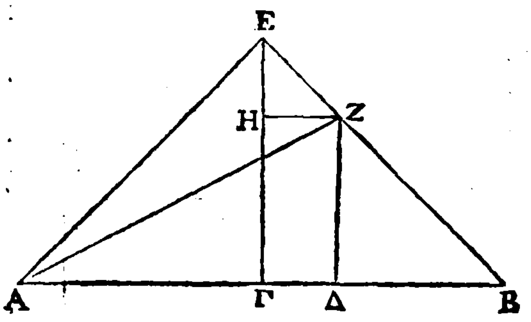
Recta enim linea quæcunque ΑΒ secta sit in partes æquales ad Γ & in partes inæquales ad Δ: dico quadrata ex ΑΔ, ΔΒ quadratorum ex ΑΓ, ΓΔ dupla esse.

Ducatur enim [per 11. 1.] à puncto Γ ipsi ΑΒ ad rectos angulos ΓΕ, & ponatur æqualis alterutri ipsarum ΑΓ, ΓΒ, junganturque ΕΑ, ΕΒ; ac per Δ quidem [per 31. 1.] ipsi ΕΓ parallela ducatur ΔΖ, per Ζ vero ipsi ΑΒ parallela ΖΗ, & ΑΖ jungatur.

Itaque

Itaque quoniam ΑΓ est æqualis ΓΕ, erit & angulus ΕΑΓ [per 5. 1.] angulo ΑΕΓ æqualis. & cum rectus sit angulus ad Γ, reliqui ΑΕΓ, ΕΑΓ [per 32. 1.] uni recto æquales erunt, & sunt æquales inter se: uterque igitur ipsorum ΑΕΓ, ΕΑΓ est recti dimidius. eadem ratione & recti dimidius est uterque ipsorum ΓΕΒ, ΕΒΓ: ergo totus angulus ΑΕΒ rectus est. & quoniam angulus ΗΕΖ dimidius est recti, rectus autem ΕΗΖ; æqualis enim est [per 29. 1.] interiori & opposito ΕΓΒ: erit & reliquus ΕΖΗ recti dimidius: æqualis igitur est ΗΕΖ angulus ipsi ΕΖΗ: quare & latus ΕΗ [per 6. 1.] lateri ΗΖ est æquale. rursus quoniam angulus ad Β dimidius est recti, rectus autem ΖΔΒ quod sit [per 29. 1.] æqualis interiori & opposito ΕΓΒ, reliquus ΒΖΔ recti erit dimidius: angulus igitur ad Β æqualis est angulo ΔΖΒ: ideoque latus ΔΖ [per 6. 1.] lateri ΔΒ æquale. & quoniam ΑΓ est æqualis ΓΕ, erit & ex ΑΓ quadratum æquale quadrato ex ΓΕ: quadrata igitur ex ΑΓ, ΓΕ dupla sunt quadrati ex ΑΓ. quadratis autem ex ΑΓ, ΓΕ, æquale est [per 47. 1.] quadratum ex ΕΑ, siquidem rectus est angulus ΑΓΕ: ergo quadratum ex ΕΑ quadrati ex ΑΓ est duplum. rursus quoniam ΕΗ æqualis est ΗΖ, & quadratum ex ΕΗ quadrato ex ΗΖ est æquale: quadrata igitur ex ΕΗ, ΗΖ dupla sunt quadrati ex ΗΖ. at quadratis ex ΕΗ ΗΖ æquale est [per 47. 1.] quod ex ΕΖ quadratum: ergo quadratum ex ΕΖ quadrati ex ΗΖ duplum erit. æqualis autem est ΗΖ [per 34. 1.] ipsi ΓΔ: quadratum igitur ex ΕΖ duplum est quadrati ex ΓΔ. sed & quadratum ex ΑΕ quadrati ex ΑΓ est duplum: ergo quadrata ex ΑΕ, ΕΖ dupla sunt quadratorum ex ΑΓ, ΓΔ. quadratis vero ex ΑΕ, ΕΖ æquale est [per 47. 1.] ex ΑΖ quadratum; quoniam angulus ΑΕΖ rectus est: quadratum igitur ex ΑΖ quadratorum ex ΑΓ, ΓΔ est duplum. sed quadrato ex ΑΖ [per 47. 1.] æqualia sunt ex ΑΔ, ΔΖ quadrata; rectus enim est angulus qui ad Δ: ergo ex ΑΔ, ΔΖ quadrata dupla sunt quadratorum ex ΑΓ, ΓΔ. est autem ΔΖ ipsi ΔΒ æqualis: quadrata igitur ex ΑΔ, ΔΒ quadratorum ex ΑΓ, ΓΔ dupla erunt.

Si igitur recta linea secetur in æqualia & inæqualia, quadrata inæqualium segmentorum sunt dupla quadratorum à dimidia & à recta inter puncta sectionum. quod erat demonstrandum.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΓ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ πρὸς τῷ Γ, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΕΓ, ΕΑΓ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΕΓ, ΕΑΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΒ, ΕΒΓ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΒ ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΗΕΖ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΕΗΖ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΓΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΖΗ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΗ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΕΗ πλευρᾷ τῇ ΗΖ ἐστὶν ἴση. πάλιν ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ Β γωνία ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΖΔΒ, ἴση γὰρ πάλιν ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΓΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΖΔ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΒ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΔΖ πλευρᾷ τῇ ΔΒ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ τετράγωνον, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΑ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραγώνου. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ. ἴση δὲ ἡ ΗΖ τῇ ΓΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΕΖ γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. ἴση δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. X. Theor.

Si recta linea secetur bifariam & illi recta quæcunque linea in directum adjiciatur, quadratum compositæ ex tota

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

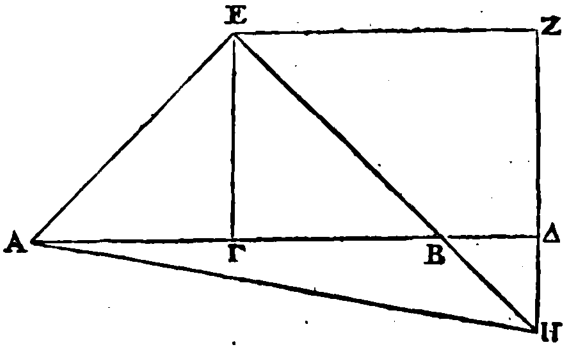
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας· τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης

κειμένης, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΕ, καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρᾳ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Ε τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ, διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ ΓΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΖ. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΕΓ, ΖΔ εὐθεῖά τις ἐνέπεσεν ἡ ΕΖ, αἱ ὑπὸ ΓΕΖ, ΕΖΔ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΖΕΒ, ΕΖΔ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα ΕΒ, ΖΔ ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ ΒΔ μέρη συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῇ ὑπὸ ΕΑΓ, καὶ ὀρθὴ ἡ πρὸς τὸ Γ· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΕΑΓ, ΑΕΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΒ, ΕΒΓ ἡμίσειά ὀρθῆς ἐστιν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ. καὶ ἐπεὶ ἡμίσειά ὀρθῆς ἐστιν ἡ ὑπὸ ΕΒΓ, ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΗ. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΗ ὀρθή, ἴση γάρ ἐστι τῇ ὑπὸ ΔΓΕ, ἐναλλὰξ γάρ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΗΒ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΗΒ τῇ ὑπὸ ΔΒΗ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΔ πλευρᾷ τῇ ΗΔ ἐστὶν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΖ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Ζ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ Γ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΕΗ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΗ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΗΖ πλευρᾷ τῇ ΕΖ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΓΑ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΓ, ΓΑ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνου. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΑ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΖ τῇ ΕΖ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΖΕ τετραγώνῳ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΖΗ, ΖΕ διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΗΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΓΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΗ τετράγωνα



& adjecta & quadratum adjectæ simul sumpta sunt dupla & quadrati ex dimidia & quadrati compositæ ex dimidia & adjecta tanquam una linea.

Recta enim AB secetur bifariam in Γ, & ipsi in directum adjiciatur quæcunque recta linea BΔ: dico quadrata ex AΔ, ΔB quadratorum ex AΓ, ΓΔ dupla esse.

Ducatur enim à puncto Γ [per 11.1.] ipsi AB ad rectos angulos ΓE, & ponatur æqualis alterutri ipsarum AΓ, ΓB; junganturque AE, EB, & per E quidem ipsi AΔ [per 31.1.] parallela ducatur EZ, per Δ vero ducatur ΔZ parallela ipsi ΓE. & quoniam in parallelas EΓ, ZΔ recta quædam linea EZ incidit, anguli ΓEZ, EZΔ [per 29.1.] æquales sunt duobus rectis: anguli igitur ZEB, EZΔ duobus rectis sunt minores. quæ autem rectæ à minoribus angulis, quam sunt duo recti, in infinitum producuntur [per ax.11.] conveniunt inter se: ergo EB, ZΔ productæ ad partes BΔ convenient. producantur, & conveniant in puncto H, & AH jungatur.

Itaque quoniam AΓ est æqualis ΓE, angulus AEΓ [per 5.1.] angulo EAΓ æqualis erit, atque est rectus qui ad Γ: uterque igitur ipsorum EAΓ, AEΓ [per 32.1.] est recti dimidius. eadem ratione & recti dimidius est uterque ΓEB, EBΓ: ergo AEB est rectus. & quoniam EBΓ est dimidius recti: erit & recti dimidius ΔBH [per 15.1.] sed & BΔH [per 29.1.] rectus est, etenim est æqualis ipsi ΔΓE alterno: reliquus ideo ΔHB dimidius est recti, igitur & angulus ΔHB ipsi ΔBH æqualis: ergo & latus BΔ [per 6.1.] æquale lateri HΔ. rursus, quoniam EHZ dimidius recti, rectus autem qui ad Z, est enim [per 34.1.] angulo opposito qui ad Γ æqualis; erit & reliquus ZEH recti dimidius: igitur EHZ angulus æqualis ipsi ZEH; quare & latus HZ [per 6.1.] lateri EZ est æquale. & cum EΓ sit æqualis ΓA, & quadratum ex EΓ æquale est ei quod ex AΓ quadrato: ergo quadrata ex EΓ, ΓA dupla sunt quadrati ex ΓA. quadratis autem ex EΓ, ΓA æquale est [per 47.1.] quadratum ex EA: quadratum igitur ex EA duplum est quadrati ex AΓ. rursus, quoniam HZ est æqualis EZ, æquale est & ex ZH quadratum quadrato ex ZE: quadrata igitur ex ZH, ZE quadrati ex EZ sunt dupla. at quadratis ex HZ, ZE æquale est [per 47.1.] quod ex EH quadratum: ergo quadratum ex EH duplum est quadrati ex EZ. æqualis autem est EZ ipsi ΓΔ: quadratum igitur ex EH quadrati ex ΓΔ duplum erit. sed ostensum est quadratum ex EA duplum esse quadrati ex AΓ: ergo quadrata ex AE, EH sunt

sunt dupla quadratorum ex ΑΓ, ΓΔ. quadratis vero ex ΑΕ, ΕΗ æquale est [per 47. 1.] quod ex ΑΗ quadratum: quadratum igitur ex ΑΗ duplum est quadratorum ex ΑΓ, ΓΔ. at quadrato ex ΑΗ æqualia sunt [per 47. 1.] ex ΑΔ, ΔΗ quadrata: ergo quadrata ex ΑΔ, ΔΗ sunt dupla quadratorum ex ΑΓ, ΓΔ. sed ΔΗ est æqualis ΔΒ: quadrata igitur ex ΑΔ, ΔΒ sunt dupla quadratorum ex ΑΓ, ΓΔ.

Si igitur recta linea secetur bifariam & illi recta quæcunque linea in directum adjiciatur, quadratum compositæ ex tota & adjecta & quadratum adjectæ simul sumpta sunt dupla & quadrati ex dimidia & quadrati compositæ ex dimidia & adjecta tanquam una linea. quod erat demonstrandum.

διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΗ τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΗ διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΗ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΗ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. ἴση δὲ ἡ ΔΗ τῇ ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.

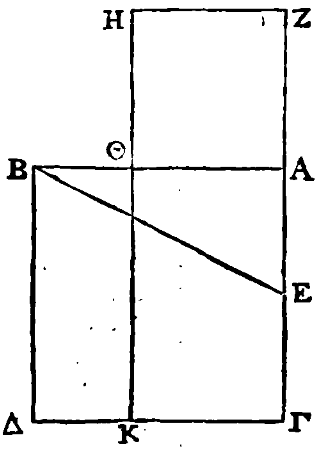
Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας· τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XI. Probl.

Datam rectam lineam ita secare, ut rectangulum sub tota & altero segmento æquetur quadrato reliqui segmenti.

SIT data recta linea ΑΒ: oportet ipsam ΑΒ ita secare, ut quod sub tota & altera parte continetur rectangulum æquale sit ei quod à reliqua parte fit quadrato.

Describatur enim [per 46. 1.] ex ΑΒ quadratum ΑΒΔΓ, seceturque [per 10. 1.] ΑΓ bifariam in Ε, & ΒΕ jungatur; deinde, producta ΓΑ in Ζ [per 3. 1.] ponatur ipsi ΒΕ æqualis ΕΖ, describaturque ex ΑΖ quadratum ΖΘ, & ΗΘ ad Κ producatur: dico ΑΒ ita sectam esse in Θ, ut rectangulum sub ΑΒ, ΒΘ æquale sit quadrato ex ΑΘ.



Quoniam enim recta linea ΑΓ bifariam secatur in Ε, adjiciturque ipsi in directum ΑΖ; rectangulum sub ΓΖ, ΖΑ una cum quadrato ex ΑΕ æquale erit [per 6. 2.] quadrato ex ΕΖ. sed ΕΖ est æqualis ΕΒ: rectangulum igitur sub ΓΖ, ΖΑ una cum quadrato ex ΑΕ æquale est ei quod fit ex ΕΒ quadrato. quadrato autem ex ΕΒ æqualia sunt [per 47. 1.] quadrata ex ΒΑ, ΑΕ, etenim angulus ad Α rectus est: ergo rectangulum sub ΓΖ, ΖΑ una cum quadrato ex ΑΕ æquale est quadratis ex ΒΑ, ΑΕ. commune auferatur quod ex ΑΕ quadratum: reliquum igitur rectangulum sub ΓΖ, ΖΑ æquale est quadrato ex ΑΒ. est autem sub ΓΖ, ΖΑ quidem rectangulum ΖΚ, siquidem ΑΖ est æqualis ΖΗ; quadratum autem ex ΑΒ est ipsum ΑΔ: rectangulum igitur ΖΚ æquale est quadrato ΑΔ. commune auferatur ΑΚ: ergo reliquum ΖΘ reliquo ΘΔ est æquale. atque est ΘΔ rectangulum sub ΑΒ, ΒΘ, cum ΑΒ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιαʹ.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΒΔΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ, καὶ διήχθω ἡ ΓΑ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον τὸ ΖΘ, καὶ διήχθω ἡ ΗΘ ἐπὶ τὸ Κ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ τέτμηται κατὰ τὸ Θ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ τετραγώνῳ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Ε, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΑΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ τετραγώνῳ. ἴση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Α γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΑ τὸ ΖΚ, ἴση γὰρ ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ· τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ ΑΔ· τὸ ἄρα ΖΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΑΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΘ τῷ ΘΔ ἴσον ἐστί. καί ἐστι τὸ μὲν ΘΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ, ἴση γὰρ ἡ ΑΒ

τῇ

τῇ ΒΔ· τὸ δὲ ΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ τετραγώνῳ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ τέτμηται κατὰ τὸ Θ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΘΑ τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

sit æqualis ΒΔ; & ΖΘ est quadratum ex ΑΘ: rectangulum igitur sub ΑΒ, ΒΘ quadrato ex ΑΘ æquale erit.

Quare data recta linea ΑΒ ita secatur in puncto Θ, ut rectangulum sub ΑΒ, ΒΘ æquale sit quadrato ex ΑΘ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ἐφ' ἣν ἐκβληθεῖσαν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ.

Prop. XII. Theor.

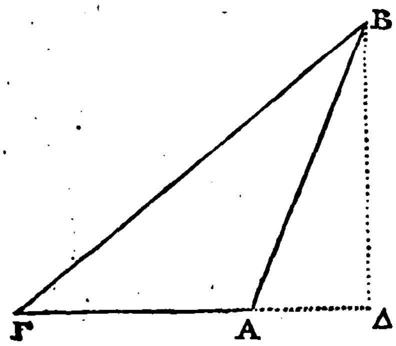
In triangulis amblygoniis quadratum lateris subtendentis angulum obtusum majus est quam quadrata laterum angulum obtusum comprehendentium, rectangulo bis comprehenso sub uno laterum circa angulum obtusum in quod productum perpendicularis cadit, & recta extra intercepta à perpendiculari ad angulum obtusum.

Ἔστω ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἀμβλεῖαν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὴν ΓΑ ἐκβληθεῖσαν κάθετος ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνων, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΓΔ τέτμηται ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Α σημεῖον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τῶν ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ τετραγώνων μεῖζόν ἐστι, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐν ἄρα τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SIT amblygonium triangulum ΑΒΓ obtusum angulum habens ΒΑΓ, & ducatur à puncto Β ad ΓΑ productam perpendicularis ΒΔ: dico quadratum ex ΒΓ majus esse quam quadrata ex ΒΑ, ΑΓ, rectangulo quod bis sub rectis ΓΑ, ΑΔ continetur.



Quoniam enim recta linea ΓΔ secta est utcunque in puncto Α: erit [per 4. 2.] quadratum ex ΓΔ æquale & quadratis ex ΓΑ, ΑΔ & ei rectangulo quod bis continetur sub rectis ΓΑ, ΑΔ. commune addatur ex ΔΒ quadratum: quadrata igitur ex ΓΔ, ΔΒ æqualia sunt & quadratis ex ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ & rectangulo quod bis continetur sub rectis ΓΑ, ΑΔ. sed quadratis ex ΓΔ, ΔΒ æquale est [per 47. 1.] quadratum ex ΓΒ; rectus enim est angulus ad Δ: quadratis vero ex ΑΔ, ΔΒ æquale est quadratum ex ΑΒ: quadratum igitur ex ΓΒ æquale est & quadratis ex ΓΑ, ΑΒ & rectangulo bis contento sub rectis ΓΑ, ΑΔ: ergo quadratum ex ΓΒ majus est quam quadrata ex ΓΑ, ΑΒ, rectangulo quod bis continetur sub rectis ΓΑ, ΑΔ.

In triangulis igitur amblygoniis quadratum lateris subtendentis angulum obtusum majus est quam quadrata laterum angulum obtusum comprehendentium, rectangulo bis comprehenso sub uno laterum circa angulum obtusum in quod productum perpendicularis cadit, & recta extra intercepta à perpendiculari ad angulum obtusum. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

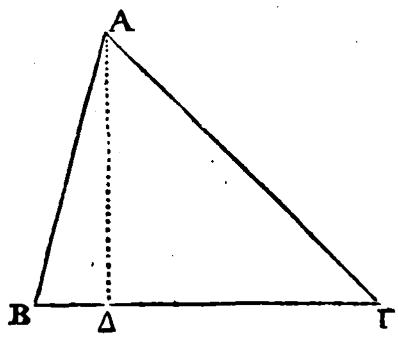
Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον

Prop. XIII. Theor.

In triangulis oxygoniis quadratum lateris subtendentis angulum acutum

minus est quam quadrata laterum comprehendentium angulum acutum, rectangulo bis comprehenso sub uno laterum circa angulum acutum in quod perpendicularis cadit, & recta intus intercepta à perpendiculari ad angulum acutum.

SIT oxygonium triangulum ΑΒΓ acutum habens angulum ad Β, & ducatur à puncto Α ad ΒΓ perpendicularis ΑΔ: dico quadratum quod fit ex ΑΓ minus esse quam quadrata quæ fiunt ex ΓΒ, ΒΑ, rectangulo quod bis continetur sub rectis ΓΒ, ΒΔ.



Quoniam enim recta linea ΓΒ secta est utcunque in Δ: erunt [per 7. 2.] quadrata ex ΓΒ, ΒΔ æqualia & rectangulo quod bis continetur sub rectis ΓΒ, ΒΔ & quadrato ex ΔΓ. commune addatur ex ΑΔ quadratum: quadrata igitur ex ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ æqualia sunt & rectangulo bis contento sub rectis ΓΒ, ΒΔ & quadratis ex ΑΔ, ΔΓ. sed quadratis ex ΒΔ, ΔΑ æquale est [per 47. 1.] ex ΑΒ quadratum, rectus enim est angulus qui ad Δ; quadratis vero ex ΑΔ, ΔΓ æquale est quadratum ex ΑΓ: quadrata igitur ex ΓΒ, ΒΑ sunt æqualia quadrato ex ΑΓ & ei rectangulo quod bis continetur sub rectis ΓΒ, ΒΔ: quare solum quadratum ex ΑΓ minus est quam quadrata ex ΓΒ, ΒΑ, rectangulo quod bis continetur sub rectis ΓΒ, ΒΔ.

In triangulis igitur oxygoniis, quadratum lateris subtendentis angulum acutum minus est quam quadrata laterum comprehendentium angulum acutum, rectangulo bis comprehenso sub uno laterum circa angulum acutum in quod perpendicularis cadit, & recta intus intercepta à perpendiculari ad angulum acutum. quod erat demonstrandum.

ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ἐφ᾽ ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

Ἔστω ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ὀξεῖαν ἔχον τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ τετραγώνων, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΓΒ τέτμηται ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Δ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΓ τετραγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΒΔ, ΔΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ὀρθὴ γάρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ ἴσα ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ΑΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ· ὥστε μόνον ἀπὸ τῆς ΑΓ ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ τετραγώνων, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ἐφ᾽ ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XIV. Probl.

Dato rectilineo æquale quadratum constituere.

SIT datum rectilineum Α: oportet ipsi Α rectilineo æquale quadratum constituere.

Constituatur rectilineo Α [per 45. 1.] æquale parallelogrammum rectangulum ΒΔ. si igitur ΒΕ est æqualis ΕΔ, factum jam erit quod proponebatur: etenim rectilineo Α æquale quadratum constitutum est ΒΔ. sin minus, una ipsarum ΒΕ, ΕΔ major est. sit ΒΕ major; & producatur ad Ζ, ponaturque ipsi ΕΔ [per 3. 1.] æqualis ΕΖ: deinde secta ΖΒ bifariam in Η, centro quidem Η, intervallo autem æquali uni ipsarum ΗΒ, ΗΖ [per 3. post.] semicirculus describatur ΒΘΖ, producaturque ΔΕ in Θ, & ΗΘ jungatur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ΄.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

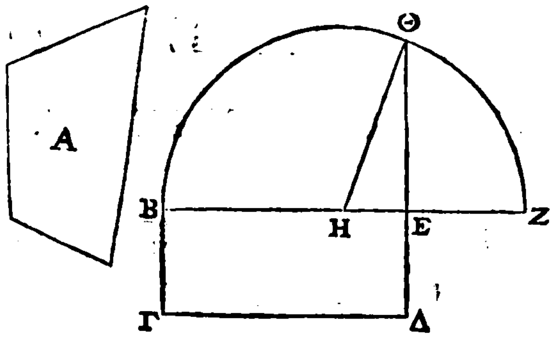
Ἔστω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ Α· δεῖ δὴ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Συνεστάτω τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΒΔ· εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· συνέσταται γὰρ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον τὸ ΒΔ· εἰ δὲ οὔ, μία τῶν ΒΕ, ΕΔ μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΒΕ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΕΔ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ τετμήσθω ἡ ΖΒ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΗΒ, ΗΖ ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ ΒΘΖ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΕ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΘ.

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΒΖ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ,ΕΖ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΗ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραγώνῳ. ἴση δὲ ἡ ΗΖ τῇ ΗΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ,ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΘ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΘΕ,ΗΕ τετράγωνα· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΕ, ΗΕ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΗΕ τετράγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ,ΕΖ τὸ ΒΔ ἐστὶν, ἴση γὰρ ἡ ΕΖ τῇ ΕΔ· τὸ ἄρα ΒΔ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΕ τετραγώνῳ. ἴσον δὲ τὸ ΒΔ τῷ Α εὐθυγράμμῳ· τὸ Α ἄρα εὐθύγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφομένῳ τετραγώνῳ.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Α ἴσον τετράγωνον συνίσταται, τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφησόμενον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Quoniam igitur recta linea BZ secta est in partes æquales ad H & inæquales ad E, erit [per 5. 2.] rectangulum sub BE, EZ una cum quadrato quod fit ex EH æquale quadrato ex HZ. est autem HZ æqualis HΘ: rectangulum igitur sub BE, EZ una cum quadrato ex HE æquale est quadrato ex HΘ. sed quadrato ex HΘ æqualia sunt [per 47. 1.] ex ΘE, HE quadrata: ergo rectangulum sub BE, EZ una cum quadrato ex HE æquale est quadratis ex ΘE, HE. commune auferatur ex HE quadratum: reliquum igitur rectangulum sub BE, EZ est æquale quadrato ex EΘ. sed rectangulum sub BE, EZ est ipsum BΔ parallelogrammum, quoniam EZ est æqualis EΔ: ergo BΔ parallelogrammum quadrato ex ΘE est æquale. parallelogrammum autem BΔ, est [per constr.] æquale rectilineo A: rectilineum igitur A quadrato ex EΘ descripto æquale erit.

Dato igitur rectilineo A æquale quadratum à recta EΘ descriptum constituitur. quod erat faciendum.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER TERTIUS.

DEFINITIONES.

1. ÆQUALES circuli ſunt, quorum diametri ſunt æquales: vel quorum quæ ex centris ſunt æquales.

2. Recta linea circulum contingere dicitur, quæ contingens circulum & producta ipſum non ſecat.

3. Circuli contingere ſeſe dicuntur, qui contingentes ſe mutuo non ſecant.

4. In circulo æqualiter diſtare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipſas perpendiculares ductæ ſunt æquales.

5. Magis autem diſtare à centro dicitur ea in quam major perpendicularis cadit.

6. Segmentum circuli eſt figura, quæ recta linea & circuli circumferentia comprehenditur.

7. Angulus ſegmenti eſt, qui recta linea & circuli circumferentia comprehenditur.

8. Angulus in ſegmento eſt, quando in circumferentia ſegmenti ſumitur aliquod punctum atque ab ipſo ad terminos lineæ ejus quæ baſis eſt ſegmenti rectæ lineæ ducuntur, angulus à ductis lineis comprehenſus.

9. Quando autem comprehendentes angulum rectæ lineæ aſſumunt circumferentiam, illi inſiſtere angulus dicitur.

10. Sector circuli eſt, quando angu-

ΟΡΟΙ.

α'. ΙΣΟΙ κύκλοι εἰσὶν, ὧν αἱ διάμετροι ἴσαι εἰσίν· ἢ ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσίν.

β'. Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον.

γ'. Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἵτινες ἁπτόμενοι ἀλλήλων οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους.

δ'. Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσι.

ε'. Μεῖζον δὲ ἀπέχειν λέγεται, ἐφ' ἣν ἡ μείζων κάθετος πίπτει.

ϛ'. Τμῆμα κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

ζ'. Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

η'. Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστὶν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος ληφθῇ τι σημεῖον καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας ἥτις ἐστὶ βάσις τοῦ τμήματος ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν.

θ'. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσί τινα περιφέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία.

ι'. Τομεὺς δὲ κύκλου ἐστὶν, ὅταν πρὸς τῷ κέν-

τρῳ

περὶ αὐτῇ τοῦ κύκλου σταθῇ ἡ γωνία, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν περιφερείας.

ια. Ὅμοια τμήματα κύκλου ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας· ἢ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

lus ad centrum constiterit, figura contenta rectis lineis angulum comprehendentibus & circumferentia ab ipsis assumpta.

11. Similia circulorum segmenta sunt, quæ angulos capiunt æquales: vel in quibus anguli sunt inter se æquales.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Τοῦ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ· δεῖ δὴ τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Διήχθω τις εἰς αὐτὸν ὡς ἔτυχεν εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔΓ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ τετμήσθω ἡ ΓΕ δίχα κατὰ τὸ Ζ· λέγω ὅτι τὸ Ζ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν ἔστω τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΑ, ΗΔ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΗ, δύο δὴ αἱ ΑΔ, ΔΗ δυσὶ ταῖς ΗΔ, ΔΒ ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΗΑ βάσει τῇ ΗΒ ἴση ἐστίν, ἐκ κέντρου γὰρ τοῦ Η· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΔΒ ἐστὶν ἴση. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΔΒ. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΔΒ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΔΒ τῇ ὑπὸ ΗΔΒ, ἡ μείζων τῇ ἐλάττονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ Η κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλο τι πλὴν τοῦ Ζ.

Τὸ Ζ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

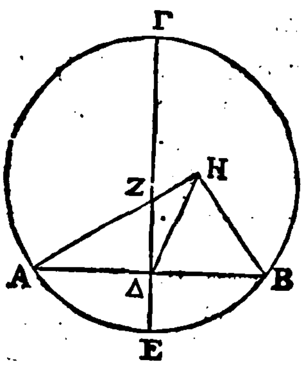
Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἐν κύκλῳ τις εὐθεῖα εὐθεῖάν τινα δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Dati circuli centrum invenire.

SIT datus circulus ABΓ: oportet circuli ABΓ centrum invenire.

Ducatur in ipso quædam recta linea AB utcunque, & in puncto Δ [per 10. 1.] bifariam secetur, à puncto autem Δ ipsi AB ad rectos angulos [per 11. 1.] ducta ΔΓ producatur in E, & secetur ΓE bifariam in Z: dico punctum Z centrum esse circuli ABΓ.



Non sit enim Z, sed, si fieri potest, sit H, & ducantur HA, HΔ, HB. itaque quoniam AΔ est æqualis ΔB, communis autem ΔH, erunt duæ AΔ, ΔH duabus HΔ, ΔB æquales, altera alteri, & basis HA [per 15. def. 1.] æqualis est basi HB, sunt enim ex centro H: angulus igitur AΔH [per 8. 1.] angulo HΔB est æqualis. cum autem recta linea super rectam lineam insistens angulos qui sunt deinceps æquales inter se fecerit, [per 10. def. 1.] rectus est uterque æqualium angulorum: ergo angulus HΔB est rectus. sed & rectus ZΔB: æqualis igitur est angulus ZΔB angulo HΔB, major minori, quod fieri non potest. quare H non est circuli ABΓ centrum. similiter ostendemus, neque aliud esse præter ipsum Z.

Ergo punctum Z centrum est circuli ABΓ. quod erat faciendum.

Corollarium.

Ex hoc perspicuum est, si in circulo recta linea rectam bifariam & ad angulos rectos secet, circuli centrum esse in secante.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ εἰλήφθω τυχόντα δύο σημεῖα τὰ ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ ΑΕΒ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΒ, καὶ διήχθω ἡ ΔΖ ἐπὶ τὸ Ε.

PROP. II. THEOR.

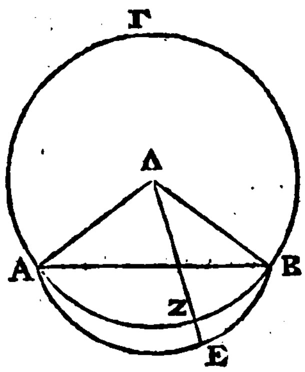
Si in circumferentia circuli duo quælibet puncta sumantur, quæ ipsa conjungit recta linea intra circulum cadet.

SIT circulus ABΓ, & in circumferentia ipsius sumantur duo quælibet puncta AB; dico rectam lineam, quæ à puncto A ad B ducitur, intra circulum cadere.

Si enim non, fieri si potest, cadat extra, ut AEB; & sumatur [per 1. 3.] circuli ABΓ centrum, & sit Δ, junganturque AΔ, ΔB, & producatur ΔZ in E.

 Quoniam

Quoniam igitur ΔA est æqualis ΔB, erit & angulus ΔAE [per 5. 1.] angulo ΔBE æqualis: & quoniam trianguli ΔAE unum latus AEB producitur, angulus ΔEB [per 16. 1.] angulo ΔAE major erit. angulus autem ΔAE æqualis est angulo ΔBE: ergo ΔEB angulus angulo ΔBE est major. sed majori angulo [per 18. 1.] majus latus subtenditur: major igitur est ΔB ipsa ΔE. est autem rectæ ΔB æqualis ΔZ: ergo ΔZ est major ΔE, minor majore, quod fieri non potest. recta igitur linea à puncto A ad B ducta non cadet extra circulum. similiter ostendemus, neque in ipsam cadere circumferentiam: ergo intus cadat necesse est.



Si igitur in circumferentia circuli duo quælibet puncta sumantur, quæ ipsa conjungit recta linea intra circulum cadet. quod erat demonstrandum.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ, ἴση ἄρα καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΕ τῇ ὑπὸ ΔΒΕ· καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΔΑΕ μία πλευρὰ προσεκβέβληται ἡ ΑΕΒ, μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΒ γωνία τῆς ὑπὸ ΔΑΕ. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΕ τῇ ὑπὸ ΔΒΕ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΒ τῆς ὑπὸ ΔΒΕ. ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα ἡ ΔΒ τῆς ΔΕ. ἴση δὲ ἡ ΔΒ τῇ ΔΖ· μείζων ἄρα ἡ ΔΖ τῆς ΔΕ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐπ' αὐτῆς τῆς περιφερείας· ἐντὸς ἄρα.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

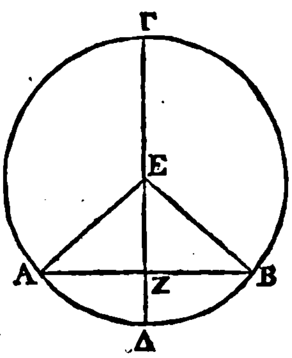
PROP. III. THEOR.

Si in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam non ductam per centrum bifariam secet, & ad angulos rectos ipsam secabit: quod si ad angulos rectos ipsam secet, & bifariam secabit.

SIT circulus ABΓ, & in ipso recta linea per centrum ducta ΓΔ rectam lineam AB non ductam per centrum bifariam secet in puncto Z: dico quod etiam ad angulos rectos ipsam secat.

Sumatur enim [per 1. 3.] circuli ABΓ centrum, & sit E, junganturque EA, EB.

Quoniam igitur AZ est æqualis ZB, communis autem ZE, duæ duabus æquales sunt, & basis EA basi EB est æqualis; ergo & angulus AZE [per 8. 1.] angulo BZE æqualis erit. cum autem recta linea super rectam insistens angulos qui sunt deinceps æquales inter se fecerit, rectus est uterque æqualium angulorum: uterque igitur AZE, BZE est rectus. quare recta linea ΓΔ per centrum ducta rectam lineam AB non ductam per centrum bifariam secans, & ad angulos rectos ipsam secat.



QUOD si recta ΓΔ rectam AB ad rectos angulos secet: dico quod etiam bifariam ipsam secat, hoc est, quod AZ ipsi ZB æqualis est.

Iisdem enim constructis, quoniam EA quæ ex centro æqualis est EB, & angulus EAZ ipsi EBZ [per 5. 1.] æqualis erit. est autem & AZE rectus, æqualis recto BZE: duo igitur triangula sunt EAZ, EBZ, duos angulos duobus angulis æquales habentia, unumque latus uni lateri æquale EZ, commune sci-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γʹ.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ· καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐν αὐτῷ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΓΔ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΒ δίχα τεμνέτω κατὰ τὸ Ζ σημεῖον· λέγω ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ, ΕΒ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΕ, δύο δὴ δυσὶν ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ ΕΑ βάσει τῇ ΕΒ ἴση, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΖΕ ἴση ἐστίν. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἐστιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν· ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΑΖΕ, ΒΖΕ ὀρθή ἐστιν. ἡ ΓΔ ἄρα διὰ τοῦ κέντρου οὖσα τὴν ΑΒ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαν δίχα τέμνουσα, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει.

ΑΛΛΑ δὴ καὶ ἡ ΓΔ τὴν ΑΒ πρὸς ὀρθὰς τεμνέτω· λέγω ὅτι καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει, τουτέστιν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΖ τῇ ὑπὸ ΕΒΖ. ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΖΕ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΒΖΕ ἴση· δύο ἄρα τρίγωνά ἐστι τὰ ΕΑΖ, ΕΒΖ τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΕΖ, ὑπο-

τείνουσαν

τείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει· ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΒΖ.

Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ· καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

licet utrique, quod uni angulorum æqualium subtenditur: ergo & reliqua latera reliquis lateribus [per 26. 1.] æqualia habebunt; æqualis igitur est AZ ipsi BZ.

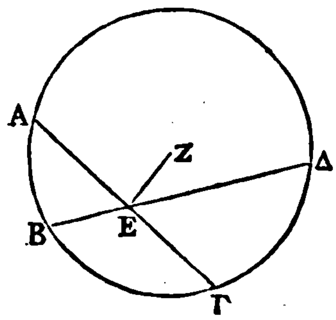
Si igitur in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam non ductam per centrum bifariam secet, & ad angulos rectos ipsam secabit: & si ad angulos rectos ipsam secet, & bifariam secabit. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· λέγω ὅτι οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, τεμνέτωσαν ἀλλήλας δίχα, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, τὴν δὲ ΒΕ τῇ ΕΔ· καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΕ.



Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΕ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένην τὴν ΑΓ δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ· ὀρθὴ ἔστιν ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΕΑ. πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖά τις ἡ ΖΕ εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΔ μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΕΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΑ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΕΑ τῇ ὑπὸ ΖΕΒ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα αἱ ΑΓ, ΒΔ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. IV. THEOR.

Si in circulo duæ rectæ lineæ, non ductæ per centrum, se invicem secent; sese bifariam non secabunt.

SIT circulus ΑΒΓΔ; & in ipso duæ rectæ lineæ ΑΓ, ΒΔ, non ductæ per centrum, se invicem secent in puncto Ε: dico eas sese bifariam non secare.

Si enim fieri potest, secent sese bifariam, ita ut ΑΕ sit æqualis ΕΓ, & ΒΕ ipsi ΕΔ: sumaturque [per 1. 3.] centrum circuli ΑΒΓΔ, & sit Ζ, jungaturque ΖΕ.

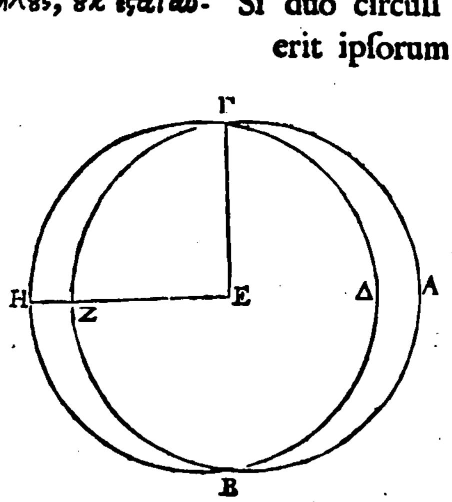
Quoniam igitur recta linea ΖΕ per centrum ducta rectam lineam ΑΓ non ductam per centrum bifariam secat, [per 3. 3.] & ad rectos angulos ipsam secabit: quare rectus est ΖΕΑ angulus. rursus, quoniam recta linea ΖΕ rectam lineam ΒΔ non ductam per centrum bifariam secat, & ad angulos rectos ipsam secabit: rectus igitur angulus est ΖΕΒ. ostensus autem est rectus & ΖΕΑ: ergo ΖΕΑ angulus ipsi ΖΕΒ æqualis erit, minor majori, quod fieri non potest. non igitur ΑΓ, ΒΔ sese bifariam secant.

Quare si in circulo duæ rectæ lineæ, non ductæ per centrum, se invicem secent; sese bifariam non secabunt. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔΗ τεμνέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὰ Β, Γ σημεῖα· λέγω ὅτι οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.



Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ, καὶ διήχθω ἡ ΕΖΗ ὡς ἔτυχε.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΕΖ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΗ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΕΗ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΕΓ τῇ ΕΖ ἴση· καὶ ἡ ΕΖ ἄρα τῇ ΕΗ ἴση ἐστὶν, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον.

PROP. V. THEOR.

Si duo circuli se invicem secent, non erit ipsorum idem centrum.

DUO enim circuli ΑΒΓ, ΓΔΗ se invicem secent in punctis Β, Γ: dico ipsorum idem centrum non esse.

Si enim fieri potest, sit illud Ε, jungaturque ΕΓ, & ΕΖΗ utcunque ducatur.

Et quoniam Ε centrum est circuli ΑΒΓ, erit ΕΓ [per 15. def. 1.] ipsi ΕΖ æqualis. rursus, quoniam Ε centrum est ΓΔΗ circuli, æqualis est ΕΓ ipsi ΕΗ. sed ostensa est ΕΓ æqualis ΕΖ: ergo ΕΖ ipsi ΕΗ æqualis erit, minor majori, quod fieri non potest. non est igitur punctum E centrum circulorum ABΓ, ΓΔH.

Quare si duo circuli se invicem secent, non erit ipsorum idem centrum: quod erat demonstrandum.

οὐκ ἄρα τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν ΑΒΓ, ΓΔΗ κύκλων.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VI. Theor.

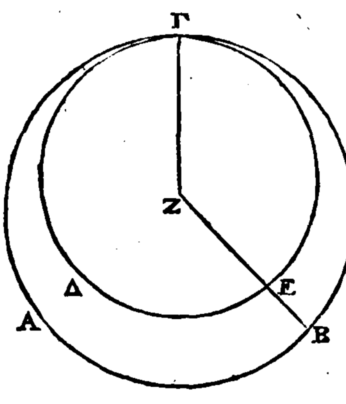
Si duo circuli sese intra contingant, ipsorum idem centrum non erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντός, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

DUO enim circuli ABΓ, ΓΔE sese intra contingant in puncto Γ: dico ipsorum non esse idem centrum.

Si enim fieri potest, sit Z, jungaturque ZΓ, & ducatur utcunque ZEB.



Quoniam igitur Z centrum est circuli ABΓ, æqualis est ZΓ ipsi ZB. rursus, quoniam Z centrum est circuli ΓΔE, erit ZΓ æqualis ZE. ostensa autem est ZΓ æqualis ZB: ergo & ZE ipsi ZB est æqualis, minor majori, quod fieri non potest. non est igitur Z punctum centrum circulorum ABΓ, ΓΔE.

Quare si duo circuli sese intra contingant, ipsorum idem centrum non erit. quod erat demonstrandum.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔΕ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι οὐκ ἔστιν αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ, καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν ἡ ΖΕΒ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΓ τῇ ΖΕ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ ἴση· καὶ ἡ ΖΕ ἄρα τῇ ΖΒ ἴση ἐστίν, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν ΑΒΓ, ΓΔΕ κύκλων.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντός, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VII. Theor.

Si in circuli diametro aliquod punctum sumatur quod non sit centrum circuli, & ab eo in circulum cadant quædam rectæ lineæ; maxima quidem erit in qua centrum, reliqua vero minima: aliarum autem, semper propinquior ei quæ per centrum major est remotiore; duæque tantum æquales ab eodem puncto in circulum cadent, ex utraque parte minimæ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τι σημεῖον ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες πρὸς τὸν κύκλον· μεγίστη μὲν ἔσται ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστί· δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

SIT circulus ABΓΔ, ejus autem diameter sit AΔ, & in ipsa AΔ sumatur aliquod punctum Z quod non sit centrum circuli, sit autem circuli centrum E, & à puncto Z in circulum ABΓΔ cadant rectæ lineæ ZB, ZΓ, ZH: dico ZA maximam esse, ZΔ vero minimam; aliarum autem, ZB quidem majorem quam ZΓ, & ZΓ quam ZH.

Jungantur enim BE, ΓE, HE.

Et quoniam omnis trianguli duo latera [per 20. 1.] reliquo sunt majora, erunt EB, EZ majores quam BZ. est autem AE æqualis BE, ergo BE, EZ ipsi AZ sunt æquales: major igitur est AZ quam BZ. rursus, quoniam BE est æqualis ΓE, communis autem ZE, duæ BE, EZ duabus ΓE, EZ sunt æquales. sed BEZ

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Ζ, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, κέντρον δὲ τοῦ κύκλου ἔστω τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον προσπιπτέτωσαν εὐθεῖαί τινες αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΗ· λέγω ὅτι μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΖΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ· τῶν δὲ ἄλλων, ἡ μὲν ΖΒ τῆς ΖΓ μείζων, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΕ, ΗΕ.

Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν, αἱ ἄρα ΕΒ, ΕΖ τῆς ΒΖ μείζονές εἰσιν. ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΒΕ, αἱ ἄρα ΒΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶ τῇ ΑΖ· μείζων ἄρα ἡ ΑΖ τῆς ΒΖ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΓΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΕ, δύο δὴ αἱ ΒΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ

ὑπὸ

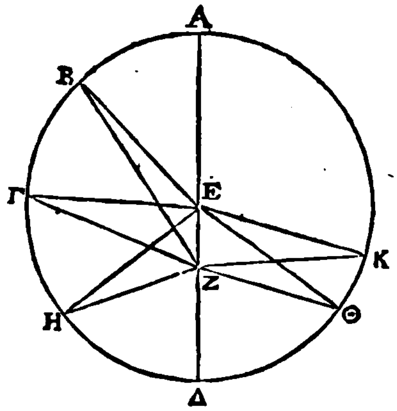
ὑπὸ ΒΕΖ γωνίας τῆς ὑπὸ ΓΕΖ μείζων· βάσις ἄρα ἡ ΒΖ βάσεως τῆς ΓΖ μείζων ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΗ μείζων.

ΠΑΛΙΝ, ἐπεὶ αἱ ΗΖ, ΖΕ τῆς ΕΗ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ΕΗ τῇ ΕΔ· αἱ ἄρα ΗΖ, ΖΕ τῆς ΕΔ μείζονές εἰσι. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΕΖ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΗΖ λοιπῆς τῆς ΖΔ μείζων ἐστί. μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΖΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ· μείζων δὲ ἡ μὲν ΖΒ τῆς ΖΓ, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΗ.

ΛΕΓΩ ὅτι καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου δύο μόνον ἴσαι εὐθεῖαι προσπεσοῦνται πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΖΔ ἐλαχίστης. συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε, τῇ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΕΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΕΘ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΗΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΘΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΕΖ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΘ ἴση ἐστίν. λέγω δὴ ὅτι τῇ ΖΗ ἄλλη ἴση οὐ προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου. εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπτέτω ἡ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΚ τῇ ΖΗ ἴση ἐστίν, ἀλλὰ ἡ ΖΘ τῇ ΖΗ ἴση ἐστί· καὶ ἡ ΖΚ ἄρα τῇ ΖΘ ἴση ἐστίν, ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῇ ἀπώτερον ἴση, ὅπερ ἀδύνατον.

Η ΚΑΙ ΟΥΤΩΣ. ἐπεζεύχθω ἡ ΕΚ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΕΚ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΕ, καὶ βάσις ἡ ΗΖ βάσει τῇ ΖΚ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΕΖ ἴση ἐστίν. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΕΖ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΕΖ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΕΖ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἑτέρα τις προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἴση τῇ ΗΖ· μία ἄρα μόνη.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



angulus major est angulo ΓEZ: basis igitur BZ [per 24. 1.] basi ΓZ est major. eadem ratione & ΓZ major est quam ZH.

Rursus, quoniam HZ, ZE majores sunt quam EH, æqualis autem EH ipsi EΔ: erunt HZ, ZE majores quam EΔ. communis auferatur EZ: ergo reliqua HZ major est quam reliqua ZΔ. maxima igitur est ZA, & ZΔ minima: major vero ZB quam ZΓ, & ZΓ quam ZH.

Dico etiam à puncto Z duas tantum æquales rectas cadere in circulum ABΓΔ, ex utraque parte minimæ ZΔ. constituatur enim [per 23. 1.] ad lineam EZ, atque ad datum in ea punctum E, angulo HEZ æqualis angulus ZEΘ, & ducatur ZΘ. quoniam igitur HE est æqualis EΘ, communis autem EZ, duæ HE, EZ duabus ΘE, EZ sunt æquales, & angulus HEZ [per constr.] æqualis angulo ΘEZ: basis igitur ZH [per 4. 1.] basi ZΘ æqualis erit. dico à puncto Z in circulum non cadere aliam ipsi ZH æqualem. si enim fieri potest, cadat ZK. & quoniam ZK est æqualis ZH, estque ipsi ZH æqualis ZΘ: erit & ZK ipsi ZΘ æqualis, videlicet propinquior ei quæ per centrum æqualis remotiori, quod fieri non potest.

Vel hoc modo. jungatur EK. & quoniam HE ipsi EK est æqualis, communis autem ZE, & basis HZ æqualis basi ZK; erit & angulus HEZ [per 8. 1.] æqualis angulo KEZ. sed angulus HEZ angulo ΘEZ est æqualis: angulus igitur ΘEZ ipsi KEZ æqualis erit, minor majori, quod fieri non potest. quare à puncto Z in circulum non cadet alia recta linea æqualis ipsi HZ: ergo una tantum cadet.

Si igitur in circuli diametro aliquod punctum sumatur, & quæ sequuntur. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχε· τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἡ διὰ τοῦ κέντρου· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστί· τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων. δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι προσπεσοῦνται ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν

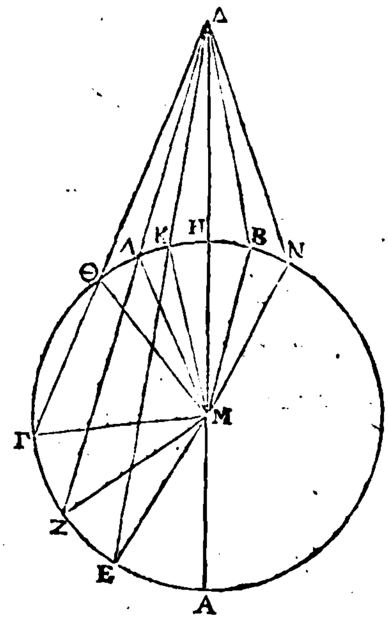
Prop. VIII. Theor.

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, atque ab eo ad circulum ducantur quædam rectæ lineæ, quarum una per centrum transeat, reliquæ vero utcunque. earum quidem, quæ in concavam circumferentiam cadunt, maxima est quæ per centrum transit: aliarum autem, semper propinquior ei quæ per centrum major est remotiore: earum vero, quæ in convexam circumferentiam cadunt, minima est quæ inter punctum & diametrum interjicitur: aliarum autem, semper quæ propinquior minimæ minor est remotiore: duæque tantum æquales à puncto in circulum cadunt, ex utraque parte minimæ.

SIT circulus ABΓ, & extra circulum sumatur aliquod punctum Δ, ab eo autem in circulum ducantur rectæ lineæ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, sitque ΔΑ per centrum: dico earum quidem, quæ in ΑΕΖΓ concavam circumferentiam cadunt, maximam esse ΔΑ, quæ per centrum transit; & quæ propinquior est ei quæ per centrum semper erit major remotiore, videlicet ΔΕ quam ΔΖ, & ΔΖ quam ΔΓ; earum vero, quæ in convexam circumferentiam ΘΛΚΗ cadunt, minima est ΔΗ, quæ inter Δ & diametrum ΑΗ interjicitur; & quæ propinquior minimæ semper est minor remotiore, videlicet ΔΚ quam ΔΛ, & ΔΛ quam ΔΘ.

Sumatur enim [per 1. 3.] centrum circuli ΑΒΓ, quod sit Μ; junganturque ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΘ.

Et quoniam ΑΜ est æqualis ΕΜ, communis addatur ΜΔ: ergo ΑΔ est æqualis ipsis ΕΜ, ΜΔ. sed ΕΜ, ΜΔ [per 20. 1.] sunt majores quam ΕΔ: ergo & ΑΔ quam ΕΔ est major. rursus, quoniam æqualis est ΜΕ ipsi ΜΖ, ΜΔ vero communis; erunt ΕΜ, ΜΔ ipsis ΜΖ, ΜΔ æquales, & angulus ΕΜΔ major est angulo ΖΜΔ: basis igitur ΕΔ [per 24. 1.] basi ΖΔ major erit. similiter demonstrabimus & ΖΔ majorem esse quam ΓΔ: ergo maxima est ΔΑ; major autem ΔΕ quam ΔΖ, & ΔΖ quam ΔΓ.



Præterea quoniam ΜΚ, ΚΔ [per 20. 1.] sunt majores quam ΜΔ, & ΜΗ est æqualis ΜΚ, erit reliqua ΚΔ major reliqua ΗΔ: quare ΗΔ minor quam ΚΔ, & idcirco minima est. & quoniam super trianguli ΜΛΔ uno latere ΜΔ duæ rectæ lineæ ΜΚ, ΚΔ intus constituuntur, erunt ΜΚ, ΚΔ [per 21. 1.] minores ipsis ΜΛ, ΛΔ, quarum ΜΚ est æqualis ΜΛ: reliqua igitur ΔΚ minor est quam reliqua ΔΛ. similiter ostendemus & ΔΛ quam ΔΘ minorem esse: est ergo ΔΗ minima, minor vero ΔΚ quam ΔΛ, & ΔΛ quam ΔΘ.

Dico etiam duas tantum æquales à puncto Δ in circulum cadere, ex utraque parte minimæ constitutor [per 23. 1.] ad rectam lineam ΜΔ, & ad datum in ea punctum Μ, angulo ΚΜΔ æqualis angulus ΔΜΒ, & ΔΒ jungatur. itaque quoniam ΜΚ est æqualis ΜΒ, communis autem ΜΔ, duæ ΚΜ, ΜΔ duabus ΒΜ, ΜΔ æquales sunt, utraque utrique, & angulus ΚΜΔ æqualis angulo ΒΜΔ: basis igitur ΔΚ [per 4. 1.] basi ΔΒ est æqualis. dico autem à puncto Δ nullam aliam ipsi ΔΚ æqualem in circulum cadere. si enim fieri potest, cadat ΔΝ. & quoniam ΔΚ est æqualis ΔΝ, & ΔΒ ipsi ΔΚ æqualis; erit & ΔΒ æqualis ΔΝ, propinquior scilicet minimæ æqualis remotiori, quod fieri non posse ostensum est.

εὐθεῖαί τινες πρὸς τὸν κύκλον αἱ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, ἔστω δὲ ἡ ΔΑ διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι μὲν τῶν πρὸς τὴν ΑΕΖΓ κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΔΑ· ἀεὶ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστί, ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ· τῶν δὲ πρὸς τὴν ΘΛΚΗ κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἡ ΔΗ, ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου Δ καὶ τῆς διαμέτρου ΑΗ· ἀεὶ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἀπώτερον, ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Μ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΜ τῇ ΕΜ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΜΔ· ἡ ἄρα ΑΔ ἴση ἐστὶ ταῖς ΕΜ, ΜΔ. ἀλλ' αἱ ΕΜ, ΜΔ τῆς ΕΔ μείζονές εἰσι· καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΕΔ μείζων ἐστί. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΕ τῇ ΜΖ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, αἱ ΕΜ, ΜΔ ἄρα ταῖς ΜΖ, ΜΔ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΜΔ γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΜΔ μείζων ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΕΔ βάσεως τῆς ΖΔ μείζων ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΖΔ τῆς ΓΔ μείζων ἐστί· μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΔΑ, μείζων δὲ ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ.

ΚΑΙ ἐπεὶ αἱ ΜΚ, ΚΔ τῆς ΜΔ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ΜΗ τῇ ΜΚ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΔ λοιπῆς τῆς ΗΔ μείζων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ ΗΔ τῆς ΚΔ ἐλάσσων ἐστίν, ἐλαχίστη ἄρα ἐστί. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΜΛΔ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ΜΔ δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάθησαν αἱ ΜΚ, ΚΔ, αἱ ἄρα ΜΚ, ΚΔ τῶν ΜΛ, ΛΔ ἐλάττονές εἰσιν, ὧν ἐστὶν ἴση ἡ ΜΚ τῇ ΜΛ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΚ λοιπῆς τῆς ΔΛ ἐλάττων ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΔΛ τῆς ΔΘ ἐλάττων ἐστίν· ἐλαχίστη μὲν ἄρα ἡ ΔΗ, ἐλάττων δὲ ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

ΛΕΓΩ ὅτι καὶ δύο μόνον ἴσαι εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ Δ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΔΗ ἐλαχίστης. συνεστάτω πρὸς τῇ ΜΔ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Μ, τῇ ὑπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ ἴση γωνία ἡ ὑπὸ ΔΜΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΚ τῇ ΜΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, δύο δὴ αἱ ΚΜ, ΜΔ δυσὶ ταῖς ΒΜ, ΜΔ ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΜΔ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΔΚ βάσει τῇ ΔΒ ἴση ἐστί. λέγω δὴ ὅτι τῇ ΔΚ εὐθείᾳ ἄλλη ἴση οὐ προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Δ σημείου. εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπτέτω, καὶ ἔστω ἡ ΔΝ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΚ τῇ ΔΝ ἐστὶν ἴση, ἀλλ' ἡ ΔΚ τῇ ΔΒ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΔΒ ἄρα τῇ ΔΝ ἴση ἐστίν, ἡ ἔγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης τῇ ἀπώτερον ἐστὶν ἴση, ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη.

Η ΚΑΙ ΑΛΛΩΣ. ἐπεζεύχθω ἡ ΜΝ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΜ τῇ ΜΝ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, καὶ βάσις ἡ ΔΚ βάσει τῇ ΔΝ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΜΝ ἴση ἐστίν. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΚΜΔ τῇ ὑπὸ ΒΜΔ ἴση ἐστί· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΜΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΝΜΔ ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΗΔ ἐλαχίστης προσπεσοῦνται.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Vel Aliter. jungatur MN: & quoniam æqualis est KM ipsi MN, communis autem MΔ, & basis ΔK basi ΔN æqualis: angulus KMΔ æqualis erit [per 8. 1.] angulo ΔMN. sed KMΔ angulus est æqualis angulo BMΔ: angulus igitur BMΔ angulo NMΔ æqualis erit, minor majori, quod fieri non potest. quare non plures quam duæ rectæ lineæ à puncto Δ in circulum ABΓ cadent, ex utraq; parte minimæ HΔ.

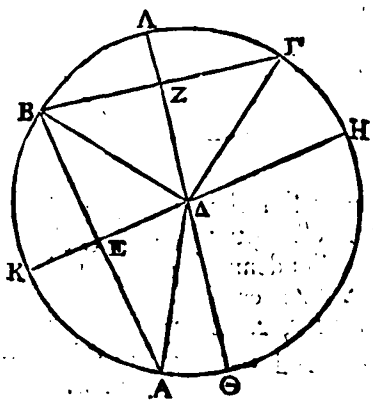
Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, & quæ sequuntur, quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἐντὸς δὲ αὐτοῦ σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι, αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ· λέγω ὅτι τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ σημεῖα, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΔ, ΔΖ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Η, Κ, Θ, Λ σημεῖα.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΔ· δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΔ δυσὶ ταῖς ΒΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσί. καὶ βάσις ἡ ΔΑ βάσει τῇ ΔΒ ἴση ἐστί· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΕΔ, ΒΕΔ γωνιῶν· ἡ ΗΚ ἄρα τὴν ΑΒ δίχα τέμνουσα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει. καὶ ἐπεὶ, ἐὰν ἐν κύκλῳ τις εὐθεῖα εὐθεῖάν τινα δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ἐπὶ τῆς ΗΚ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐπὶ τῆς ΘΛ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ. καὶ οὐδὲν ἕτερον κοινὸν ἔχουσιν αἱ ΗΚ, ΘΛ εὐθεῖαι, ἢ τὸ Δ σημεῖον· τὸ Δ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεῖαι πλείους ἢ δύο ἴσαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΛΛΩΣ.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐντὸς τὸ Δ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ· λέγω ὅτι τὸ ληφθὲν σημεῖον τὸ Δ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν ἔστω τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ διήχθω ἐπὶ τὰ Ζ, Η σημεῖα, ἡ δὲ ΖΗ διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ

Prop. IX. Theor.

Si intra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales, punctum quod sumitur erit centrum circuli.

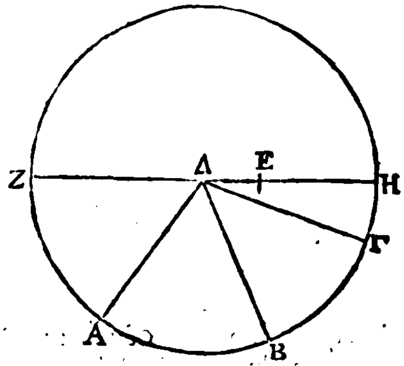
Sit circulus ABΓ, & intra ipsum sumatur punctum Δ, à quo in circulum cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales, videlicet ΔA, ΔB, ΔΓ: dico punctum Δ centrum esse circuli ABΓ.

Jungantur enim AB, BΓ, secenturque bifariam [per 10. 1.] in punctis E, Z, & junctæ EΔ, ΔZ ad puncta H, K, Θ, Λ producantur.

Quoniam igitur AE est æqualis EB, communis autem EΔ: erunt duæ AE, EΔ duabus BE, EΔ æquales. & basis ΔA est æqualis basi ΔB: angulus igitur AEΔ angulo BEΔ [per 8. 1.] æqualis erit: & idcirco [per 10. def. 1.] uterque angulorum AEΔ, BEΔ est rectus: ergo HK bifariam secans AB, & ad angulos rectos ipsam secat. & quoniam, si in circulo recta linea rectam lineam bifariam & ad rectos angulos secet, circuli centrum est [per cor. 1. 3.] in secante: erit in HK centrum circuli ABΓ. eadem ratione & in ΘΛ erit centrum circuli ABΓ. nullum autem aliud commune habent rectæ lineæ HK, ΘΛ præter punctum Δ: est ergo Δ centrum circuli ABΓ.

Si igitur intra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales, punctum quod sumitur erit centrum circuli. quod erat demonstrandum.

Aliter.



Sumatur enim intra circulum ABΓ punctum aliquod Δ, atque à puncto Δ in circulum ABΓ cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales ΔA, ΔB, ΔΓ: dico assumptum punctum Δ centrum esse circuli ABΓ.

Si enim non sit, fieri si potest, sit E, & juncta ΔE producatur in Z, H: ergo ZH diameter est circuli ABΓ. itaque quoniam in

ZH diametro circuli ABΓ sumptum est aliquod punctum Δ, quod non est centrum circuli; [per 7. 3.] maxima quidem erit ΔH, major autem ΔΓ quam ΔB, & ΔB quam ΔA. sed & æquales, quod fieri non potest: non est igitur E centrum circuli ABΓ. similiter ostendemus neque aliud punctum centrum esse præter ipsum Δ: erit igitur Δ centrum circuli ABΓ.

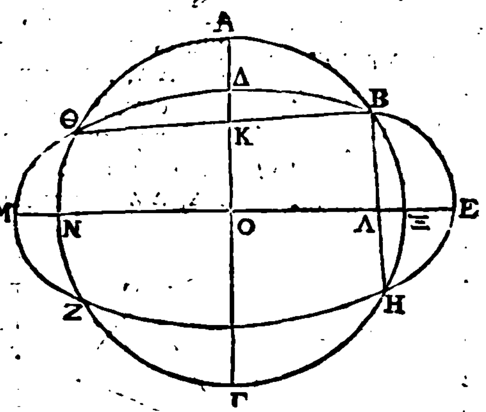
ἐπὶ τῆς ZH διαμέτρου εἴληπταί τι σημεῖον, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, τὸ Δ, μεγίστη μὲν ἔσται ἡ ΔH, μείζων δὲ ἡ μὲν ΔΓ τῆς ΔB, ἡ δὲ ΔB τῆς ΔA. ἀλλὰ καὶ ἴση, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὸ E κέντρον ἐστὶ τοῦ ABΓ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλό τι πλὴν τοῦ Δ· τὸ Δ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ABΓ κύκλου.

Prop. X. Theor.

Circulus circulum in pluribus quam duobus punctis non secat.

Si enim fieri potest, circulus ABΓ circulum ΔEZ secet in pluribus punctis quam duobus, videlicet in B, H, Θ, & junctæ BH, BΘ bifariam secentur in K, Λ, atque à punctis K, Λ ipsis BH, BΘ ad rectos angulos ductæ KΓ, ΛM in puncta A, E producantur.

Quoniam igitur in circulo ABΓ, recta linea AΓ rectam lineam BΘ bifariam & ad angulos rectos secat, in ipsa AΓ [per cor. 1. 3.] erit centrum circuli ABΓ. rursus, quoniam in eodem circulo ABΓ recta linea NΞ rectam lineam BH bifariam secat & ad angulos rectos, in ipsa NΞ centrum erit circuli ABΓ. ostensum autem est & in ipsa AΓ centrum esse, & in nullo alio puncto conveniunt inter se rectæ lineæ AΓ, NΞ, præterquam in O: est igitur O centrum circuli ABΓ. similiter ostendemus punctum O centrum esse circuli ΔEZ: ergo duorum circulorum sese secantium ABΓ, ΔEZ idem erit centrum O, quod [per 5. 3.] fieri non potest.



Circulus igitur non secat circulum in pluribus punctis quam duobus. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι′.

Κύκλος οὐ τέμνει κύκλον κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, κύκλος ὁ ABΓ κύκλον τὸν ΔEZ τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, τὰ B, H, Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ BH, BΘ δίχα τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ K, Λ σημεῖα. καὶ ἀπὸ τῶν K, Λ ταῖς BH, BΘ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσαι αἱ KΓ, ΛM ἐπὶ τὰ A, E διήχθωσαν σημεῖα.

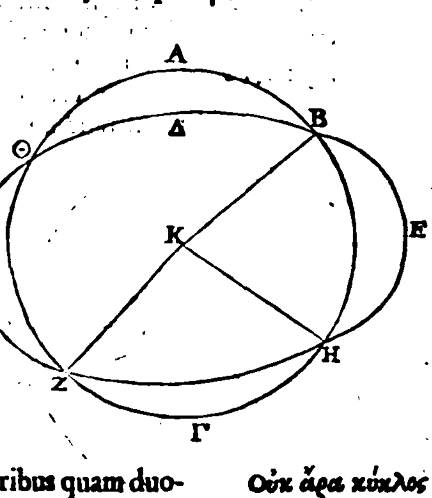
Ἐπεὶ οὖν ἐν κύκλῳ τῷ ABΓ εὐθεῖά τις ἡ AΓ εὐθεῖάν τινα τὴν BΘ δίχα τέμνει καὶ πρὸς ὀρθὰς, ἐπὶ τῆς AΓ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ABΓ κύκλου. πάλιν, ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τῷ αὐτῷ τῷ ABΓ εὐθεῖά τις ἡ NΞ εὐθεῖάν τινα τὴν BH δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς NΞ ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ ABΓ κύκλου. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῆς AΓ, καὶ κατ᾽ οὐδὲν συμβάλλουσιν αἱ AΓ, NΞ εὐθεῖαι ἀλλήλαις ἢ κατὰ τὸ O· τὸ O ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ABΓ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τοῦ ΔEZ κύκλου κέντρον ἐστὶ τὸ O· δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους, τῶν ABΓ, ΔEZ, τὸ αὐτό ἐστι κέντρον τὸ O, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Aliter.

Circulus enim ABΓ rursus circulum ΔEZ secet in pluribus punctis quam duobus, nempe in B, H, Z, & circuli ABΓ centrum sumatur quod sit K, & KZ, KH, KB jungantur.

Quoniam igitur intra circulum ΔEZ sumptum est punctum K, à quo in circulum ΔEZ incidunt plures quam duæ rectæ lineæ æquales, KB, KZ, KH, punctum K erit [per 9. 3.] centrum circuli ΔEZ. est autem K centrum circuli ABΓ: duorum igitur circulorum, qui sese secant, erit idem centrum K, quod [per 5. 3.] fieri non potest.



Quare circulus circulum in pluribus quam duobus punctis non secat. quod erat demonstrandum.

ΑΛΛΩΣ.

Κύκλος γὰρ πάλιν ὁ ABΓ κύκλον τὸν ΔEZ τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, τὰ B, H, Z, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ABΓ κύκλου, τὸ K, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ KZ, KH, KB.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΔEZ εἴληπταί τι σημεῖον ἐντὸς, τὸ K, καὶ ἀπὸ τοῦ K πρὸς τὸν ΔEZ κύκλον προσπεπτώκασι πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, αἱ KB, KZ, KH· τὸ K ἄρα σημεῖόν ἐστι κέντρον τοῦ ΔEZ κύκλου. ἔστι δὲ καὶ τοῦ ABΓ κύκλου κέντρον τὸ K· δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους τὸ αὐτὸ κέντρον ἐστὶ τὸ K, ὅπερ ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια΄.

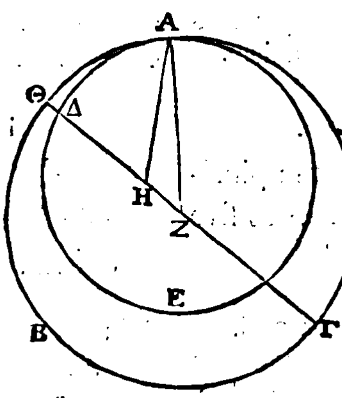
Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΔΕ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐντὸς κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ Α σημεῖον πεσεῖται.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν πιπτέτω ὡς ἡ ΖΗΔΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΑΗ.

Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗ, ΗΖ τῆς ΖΑ τουτέστι τῆς ΖΘ (ἴση γὰρ ἡ ΖΑ τῇ ΖΘ, ἀπὸ κέντρου γὰρ ἄμφω) μείζονές εἰσι, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΗ λοιπῆς τῆς ΗΘ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ ΑΗ τῇ ΗΔ· καὶ ἡ ΗΔ ἄρα τῆς ΗΘ μείζων ἐστίν, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς τῆς κατὰ τὸ Α συναφῆς πεσεῖται· ἐπ' αὐτὴν ἄρα.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα καὶ ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ΑΛΛΩΣ.

Ἀλλὰ δὴ πιπτέτω ὡς ἡ ΗΖΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἡ ΓΖΗ ἐπὶ τὸ Θ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΑΖ.

Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗ, ΗΖ μείζους εἰσὶ τῆς ΑΖ, ἀλλὰ ἡ ΑΖ ἴση ἐστὶ τῇ ΓΖ, τουτέστι τῇ ΖΘ, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΗ λοιπῆς τῆς ΗΘ μείζων ἐστὶ, τουτέστιν ἡ ΗΔ τῆς ΗΘ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ὁμοίως κἂν ἐκτὸς ᾖ τοῦ μικροῦ τὸ κέντρον τοῦ μείζονος κύκλου, δείξομεν τὸ αὐτὸ ἄτοπον.

PROP. XI. THEOR.

Si duo circuli sese intus contingant, & sumantur centra ipsorum; recta linea ipsorum centra conjungens producta in circulorum contactum cadet.

Duo enim circuli ABΓ, AΔE sese intus contingant in puncto A, & sumatur circuli quidem ABΓ centrum, quod sit Z, circuli vero AΔE centrum H: dico rectam lineam à puncto H ad Z ductam, si producatur, in punctum A cadere.

Si enim non, fieri si potest, cadat ut ZHΔΘ, & jungantur AZ, AH.

Quoniam igitur AH, HZ majores sunt [per 20. 1.] quam ZA, hoc est quam ZΘ, (est enim ZA æqualis ZΘ, ambæ ab eodem centro) communis auferatur ZH, reliqua igitur AH major est quam reliqua HΘ. sed AH est æqualis HΔ: ergo HΔ major est ipsa HΘ, minor majore, quod fieri non potest. non igitur à puncto Z ad H ducta recta linea extra contactum A cadet: quare in ipsum cadat necesse est.

Si igitur duo circuli sese intus contingant, recta linea ipsorum centra conjungens, si producatur, in contactum circulorum cadet. quod erat demonstrandum.

ALITER.

Sed cadat ut HZΓ, & producatur in directum ΓZH ad punctum Θ, junganturque AH, AZ.

Quoniam igitur AH, HZ majores sunt quam AZ, & AZ est æqualis ΓZ, hoc est ipsi ZΘ, communis auferatur ZH: reliqua igitur AH reliqua HΘ est major; hoc est HΔ major ipsa HΘ, minor majore, quod fieri non potest. similiter & si extra circulum parvum sit centrum majoris circuli, idem sequi absurdum ostendemus.

Hæc demonstratio vix differt à priori, adeo ut videatur non esse Euclidis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ΄.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἅπτωνται ἀλλήλων ἐκτὸς, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΔΕ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐκτὸς κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΓ κύκλου κέντρον, τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν ἐρχέσθω ὡς αἱ ΖΓΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΑΗ.

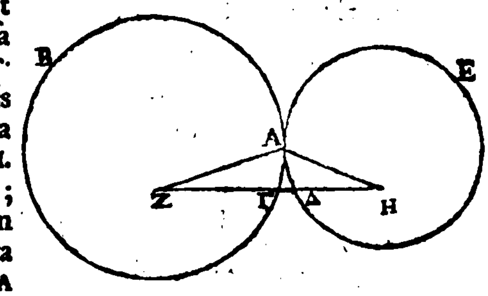
PROP. XII. THEOR.

Si duo circuli sese extra contingant, recta linea ipsorum centra conjungens per contactum transibit.

Duo enim circuli ABΓ, AΔE sese extra contingant in puncto A; & sumatur circuli quidem ABΓ centrum quod sit Z, circuli vero AΔE centrum H: dico rectam lineam, quæ à puncto Z ad H ducitur, per contactum A transire.

Si enim non, fieri si potest, cadat ut ZΓΔH, & AZ, AH jungantur.

Quoniam igitur Z centrum est circuli ABΓ, erit ZA æqualis ZΓ. rursus, quoniam H centrum est AΔE circuli, erit AH ipsi HΔ æqualis. ostensa est autem & ZA æqualis ZΓ: sunt igitur ZA, AH ipsis ZΓ, ΔH æquales: ergo tota ZH major est quam ZA, AH. sed & [per 20. 1.] minor; quod fieri non potest. non igitur à puncto Z ad H ducta recta linea per contactum A non transibit: quare per ipsum transeat necesse est.



Ἐπεὶ οὖν τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ABΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ZA τῇ ZΓ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ H σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ AΔE κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ AH τῇ HΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ZA τῇ ZΓ ἴση· αἱ ἄρα ZA, AH τῶν ZΓ, ΔH ἴσαι εἰσίν· ὥστε ὅλη ἡ ZH τῶν ZA, AH μείζων ἐστίν. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ H ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ A ἐπαφῆς οὐκ ἐλεύσεται· δι᾽ αὐτῆς ἄρα.

Si igitur duo circuli sese extra contingant, recta linea ipsorum centra conjungens per contactum transibit. quod erat demonstrandum.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτός, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XIII. Theor.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγʹ.

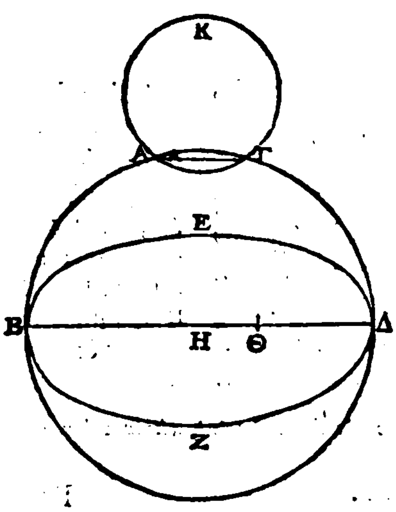
Circulus circulum non contingit in pluribus punctis quam uno, sive intus sive extra contingat.

Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ καθ᾽ ἕν, ἐάν τε ἐντὸς ἐάν τε ἐκτὸς ἐφάπτηται.

SI enim fieri potest, circulus ABΔΓ circulum EBZΔ contingat primum intus in pluribus punctis quam uno, videlicet in B, Δ.

Et sumatur [per 1. 3.] circuli quidem ABΔΓ centrum H, circuli vero EBZΔ centrum Θ.

Ergo recta linea, quæ à puncto H ad Θ ducitur, [per 11. 3.] in puncta B, Δ cadet. cadat ut BHΘΔ. & quoniam H centrum est circuli ABΔΓ, erit BH ipsi HΔ æqualis: major est igitur BH quam ΘΔ, & BΘ quam ΘΔ multo major. rursus, quoniam Θ centrum est EBZΔ circuli, æqualis est BΘ ipsi ΘΔ. atqui ostensa est ipsa multo major, quod fieri non potest: non igitur circulus circulum intus contingit in pluribus punctis quam uno.



Dico etiam neque extra. si enim fieri potest, circulus AΓK circulum ABΔΓ extra contingat in pluribus punctis quam uno, videlicet in A, Γ, & ducatur AΓ.

Quoniam igitur in circumferentia circulorum ABΔΓ, AΓK sumpta sunt duo quælibet puncta A, Γ; recta linea quæ ipsa conjungit [per 2. 3.] intra utrumq; ipsorum cadet. sed [per 3. def. 3.] quæ intra circulum quidem ABΔΓ cadit, extra circulum AΓK cadet, quod absurdum: circulus igitur non contingit circulum extra in pluribus punctis quam uno. ostensum autem est neque intus contingere.

Circulus igitur circulum non contingit in pluribus punctis quam uno, sive intus sive extra contingat. quod erat demonstrandum.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ ABΔΓ κύκλου τοῦ EBZΔ ἐφαπτέσθω πρότερον ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν, τὰ B, Δ.

Καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ABΔΓ κύκλου κέντρον, τὸ H· τοῦ δὲ EBZΔ, τὸ Θ.

Ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ H ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐπὶ τὰ B, Δ πεσεῖται. πιπτέτω ὡς ἡ BHΘΔ. καὶ ἐπεὶ τὸ H σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ABΔΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ BH τῇ HΔ· μείζων ἄρα ἡ BH τῆς ΘΔ· πολλῷ ἄρα μείζων ἡ BΘ τῆς ΘΔ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Θ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ EBZΔ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ BΘ τῇ ΘΔ. ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῷ μείζων, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν.

ΛΕΓΩ δὴ ὅτι οὐδὲ ἐκτός. εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ AΓK κύκλου ἡ ABΔΓ ἐφαπτέσθω ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν, τὰ A, Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AΓ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλων τῶν ABΔΓ, AΓK εἴληπται ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑκατέρου δύο τυχόντα σημεῖα τὰ A, Γ, ἡ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς ἑκατέρου πεσεῖται. ἀλλὰ τοῦ μὲν ABΔΓ ἐντὸς ἔπεσε, τοῦ δὲ AΓK ἐκτός, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἐντός.

Κύκλος ἄρα κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν, ἐάν τε ἐντὸς ἐάν τε ἐκτὸς ἐφάπτηται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

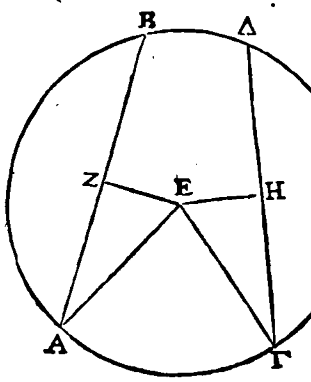
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΔΓ, καὶ ἐν αὐτῷ ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ· λέγω ὅτι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΔΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΓΔ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΓ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΖ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΒ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει· ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, διπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΑΖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΔ τῆς ΓΗ ἐστὶ διπλῆ, καὶ ἐστιν ἴση ΑΒ τῇ ΓΔ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΓ, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΕ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Ζ γωνία· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Η γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΕ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ, ἴση γὰρ ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον ἐστίν, ἴση ἄρα ἡ ΖΕ τῇ ΕΗ. ἐν δὲ κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσιν· αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.



Ἀλλὰ δὴ αἱ ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖαι ἴσον ἀπεχέτωσαν ἀπὸ τοῦ κέντρου, τοῦτ' ἔστιν, ἴση ἔστω ἡ ΖΕ τῇ ΕΗ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι διπλῆ ἐστιν ἡ μὲν ΑΒ τῆς ΑΖ, ἡ δὲ ΓΔ τῆς ΓΗ· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΓ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΑ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστίν. ἴση γὰρ ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ, καὶ ἐστι τῆς μὲν ΑΖ διπλῆ ἡ ΑΒ, τῆς δὲ ΓΗ διπλῆ ἡ ΓΔ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XIV. THEOR.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro; & quæ æqualiter distant à centro sunt inter se æquales.

SIT circulus ΑΒΔΓ, & in ipso æquales rectæ lineæ ΑΒ, ΓΔ: dico eas à centro æqualiter distare.

Sumatur enim circuli ΑΒΔΓ centrum quod sit Ε, & ab ipso ad ΑΒ, ΓΔ perpendiculares ducantur ΕΖ, ΕΗ, & jungantur ΑΕ, ΕΓ.

Quoniam igitur recta linea per centrum ducta ΕΖ rectam lineam ΑΒ non ductam per centrum ad rectos angulos secat, & bifariam [per 3. 3.] ipsam secat: quare ΑΖ est æqualis ΖΒ, ideoque ΑΒ ipsius ΑΖ dupla. eadem ratione & ΓΔ dupla est ΓΗ, atque est ΑΒ ipsi ΓΔ æqualis: æqualis igitur & ΑΖ ipsi ΓΗ. & quoniam ΑΕ est æqualis ΕΓ, erit & quadratum ex ΑΕ quadrato ex ΕΓ æquale. sed quadrato ex ΑΕ æqualia sunt [per 47. 1.] ex ΑΖ, ΖΕ quadrata, rectus est enim angulus ad Ζ: quadrato autem ex ΕΓ æqualia sunt quadrata ex ΕΗ, ΗΓ, cum angulus ad Η sit rectus: quadrata igitur ex ΑΖ, ΖΕ æqualia sunt quadratis ex ΓΗ, ΗΕ, è quibus quadratum ex ΑΖ quadrato ex ΓΗ est æquale; æqualis enim est ΑΖ ipsi ΓΗ: reliquum igitur quod fit ex ΖΕ quadratum æquale est reliquo ex ΕΗ; ac propterea ΖΕ ipsi ΕΗ est æqualis. in circulo autem æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, [per 4. def. 3.] quando à centro ad ipsas perpendiculares ductæ sunt æquales: ergo ΑΒ, ΓΔ à centro æqualiter distant.

SED ΑΒ, ΓΔ æqualiter distent à centro, hoc est, sit ΖΕ æqualis ipsi ΕΗ: dico ΑΒ ipsi ΓΔ æqualem esse.

Iisdem enim constructis similiter ostendemus, ΑΒ duplam esse ipsius ΑΖ, & ΓΔ duplam ipsius ΓΗ: & quoniam æqualis est ΑΕ ipsi ΕΓ, erit & ex ΑΕ quadratum quadrato ex ΕΓ æquale. sed quadrato quidem ex ΑΕ æqualia sunt [per 47. 1.] quadrata ex ΕΖ, ΖΑ, quadrato autem ex ΕΓ æqualia quadrata ex ΕΗ, ΗΓ: quadrata igitur ex ΕΖ, ΖΑ quadratis ex ΕΗ, ΗΓ sunt æqualia, è quibus quadratum ex ΕΗ æquale est quadrato ex ΕΖ. est autem ΕΖ ipsi ΕΗ æqualis: reliquum igitur ex ΑΖ quadratum æquale est reliquo ex ΓΗ; ergo ΑΖ ipsi ΓΗ est æqualis. atque est ΑΒ ipsius ΑΖ dupla, & ΓΔ dupla ipsius ΓΗ: quare ΑΒ ipsi ΓΔ æqualis erit.

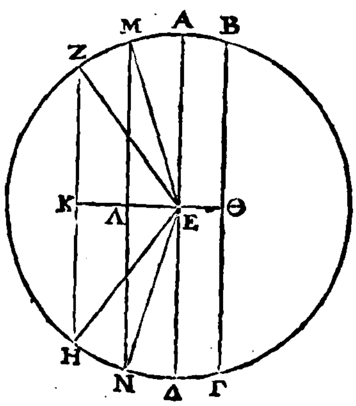
In circulo igitur æquales rectæ lineæ æqualiter à centro distant, & quæ æqualiter à centro distant inter se sunt æquales. quod erat demonstrandum.

PROP. XV. THEOR.

In circulo maxima quidem est diameter: aliarum vero, semper propinquior centro major est remotiore.

SIT circulus ΑΒΓΔ, cujus diameter ΑΔ, centrum Ε, & propinquior quidem centro Ε sit ΒΓ, remotior vero ΖΗ: dico ΑΔ maximam esse, & ΒΓ majorem quam ΖΗ.

Ducantur enim à centro ad ΒΓ, ΖΗ perpendiculares ΕΘ, ΕΚ. & quoniam ΒΓ propinquior est centro, remotior autem ΖΗ; erit [per 5. def. 3.] ΕΚ major quam ΕΘ. ponatur ipsi ΕΘ æqualis ΕΛ, & per Λ ipsi ΕΚ ad rectos angulos ducta ΛΜ producatur in Ν, & jungantur ΕΜ, ΕΝ, ΕΖ, ΕΗ.



Quoniam igitur ΕΘ est æqualis ΕΛ, erit [per 14. 3.] & ΒΓ ipsi ΜΝ æqualis. rursus, quoniam æqualis est ΑΕ ipsi ΕΜ, & ΕΔ ipsi ΕΝ: erit ΑΔ ipsis ΜΕ, ΕΝ æqualis. sed ΜΕ, ΕΝ majores sunt quam ΜΝ: ergo & ΑΔ major est quam ΜΝ. at ΜΝ est æqualis ΒΓ: est igitur ΑΔ major quam ΒΓ. & quoniam duæ ΜΕ, ΕΝ duabus ΖΕ, ΕΗ sint æquales, angulusque ΜΕΝ major angulo ΖΕΗ; & basis ΜΝ [per 24. 1.] basi ΖΗ major erit. ostensa autem est ΜΝ æqualis ΒΓ: ergo & ΒΓ est major quam ΖΗ. maxima igitur est ΑΔ diameter, & ΒΓ est major quam ΖΗ.

Quare in circulo maxima est diameter: aliarum vero, semper propinquior centro major est remotiore. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε΄.

Ἐν κύκλῳ μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διάμετρος· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν.

ΕΣτω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἔγγιον μὲν τοῦ Ε κέντρου ἔστω ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ· λέγω ὅτι μεγίστη μὲν ἐστιν ἡ ΑΔ, μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ.

Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΖΗ κάθετοι αἱ ΕΘ, ΕΚ. καὶ ἐπεὶ ἔγγιον μὲν τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ, μείζων ἄρα ἡ ΕΚ τῆς ΕΘ. κείσθω τῇ ΕΘ ἴση ἡ ΕΛ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΕΚ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ ΛΜ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΜ, ΕΝ, ΕΖ, ΕΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΕΛ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΜΝ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΜ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΕΝ, ἡ ἄρα ΑΔ ταῖς ΜΕ, ΕΝ ἴση ἐστίν. ἀλλ᾽ αἱ ΜΕ, ΕΝ τῆς ΜΝ μείζονές εἰσι, καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΜΝ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ ΜΝ τῇ ΒΓ, ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΒΓ μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΜΕ, ΕΝ δυσὶ ταῖς ΖΕ, ΕΗ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΜΕΝ, γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΕΗ μείζων ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΜΝ βάσεως τῆς ΖΗ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΒΓ ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ μείζων ἐστίν. μεγίστη ἄρα ἡ ΑΔ διάμετρος, μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ.

Ἐν κύκλῳ ἄρα μεγίστη μὲν ἐστιν ἡ διάμετρος· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XVI. THEOR.

Recta diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducta cadit extra circulum: & in locum qui inter rectam lineam & circumferentiam interjicitur altera recta linea non cadet: & semicirculi angulus major est quovis angulo rectilineo acuto: reliquus autem minor.

SIT circulus ΑΒΓ circa centrum Δ & diametrum ΑΒ: dico rectam lineam, quæ à puncto Α ipsi ΑΒ ad rectos angulos ducitur, extra circulum cadere.

Si enim non, fieri si potest, cadat intus ut ΑΓ, & jungatur ΔΓ.

Quoniam igitur æqualis est ΔΑ ipsi ΔΓ, erit & angulus ΔΑΓ [per 5. 1.] angulo ΑΓΔ æqualis. rectus autem est ΔΑΓ, ergo & ΑΓΔ est rectus: ac propterea anguli ΔΑΓ, ΑΓΔ duobus rectis sunt æquales, quod [per 17. 1.] fieri

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ΄.

Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου· καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται· καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἁπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν· ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων.

ΕΣτω κύκλος ὁ ΑΒΓ περὶ κέντρον τὸ Δ καὶ διάμετρον τὴν ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Μὴ γὰρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατὸν πιπτέτω ἐντὸς, ὡς ἡ ΑΓ καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

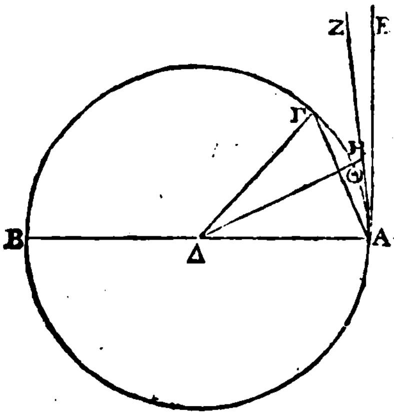
Ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΑΓ, ΑΓΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α σημείου, τῇ ΒΑ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ᾽ ἐπὶ τῆς περιφερείας· ἐκτὸς ἄρα πιπτέτω, ὡς ἡ ΑΕ.

ΛΕΓΩ ὅτι εἰς τὸν μεταξὺ τόπον, τῆς τε ΑΕ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, παρεμπιπτέτω ὡς ἡ ΖΑ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐπὶ τὴν ΖΑ κάθετος ἡ ΔΗ.

Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΔ, ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ ὑπὸ ΔΑΗ· μείζων ἄρα ἡ ΑΔ τῆς ΔΗ. ἴση δὲ ἡ ΔΑ τῇ ΔΘ· μείζων ἄρα ἡ ΔΘ τῆς ΔΗ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον, τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.



ΛΕΓΩ ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας, ἁπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν· ἡ δὲ λοιπὴ, ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας, ἁπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου ἐλάττων ἐστίν.

Εἰ γάρ ἐστί τις γωνία εὐθύγραμμος, μείζων μὲν τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας, ἐλάττων δὲ τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας, εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας παρεμπεσεῖται εὐθεῖα, ἥ τις ποιήσει μείζονα μὲν τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένην, ἐλάττονα δὲ τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας. οὐ παρεμπίπτει δέ· οὐκ ἄρα τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ἔσται μείζων ὀξεῖα ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένη, οὐδὲ μὴν ἐλάττων τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· καὶ ὅτι εὐθεῖα κύκλου καθ᾽ ἓν μόνον ἐφάπτεται σημεῖον. ἐπειδήπερ καὶ ἡ κατὰ δύο αὐτῷ συμβάλλουσα ἐντὸς αὐτοῦ πίπτουσα ἐδείχθη.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ΄.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ ΒΓΔ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τοῦ ΒΓΔ κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ε διαστήματι δὲ τῷ ΕΑ κύ-

non potest. recta igitur à puncto A ipsi BA ad rectos angulos ducta non cadet intra circulum. similiter ostendemus neque in circumferentiam cadere: extra igitur cadat necesse est, ut AE.

DICO in locum, qui inter rectam lineam AE & circumferentiam ΓΘA interjicitur, alteram rectam lineam non cadere.

Si enim fieri potest, cadat ut ZA, & à puncto Δ ad ZA perpendicularis ducatur ΔH.

Et quoniam rectus est angulus AHΔ, minor autem recto ΔAH, erit AΔ [per 19. 1.] major quam ΔH. æqualis autem est ΔA ipsi ΔΘ: major igitur est ΔΘ ipsa ΔH, minor majore, quod fieri non potest. in locum igitur, qui inter rectam lineam & circumferentiam interjicitur, altera recta linea non cadet.

DICO præterea angulum semicirculi, qui à recta linea BA & circumferentia ΓΘA comprehenditur, quovis angulo acuto rectilineo majorem esse; reliquum vero, comprehensum à circumferentia ΓΘA & recta linea AE, quovis angulo acuto rectilineo esse minorem.

Si enim est aliquis angulus rectilineus major comprehenso à recta linea BA & circumferentia ΓΘA, vel aliquis minor comprehenso à ΓΘA circumferentia & recta linea AE; in locum, qui inter circumferentiam ΓΘA & rectam lineam AE interjicitur, cadet aliqua recta linea quæ faciet angulum majorem quidem comprehenso à recta linea BA & ΓΘA circumferentia, qui scilicet rectis lineis comprehenditur, minorem vero comprehenso à circumferentia ΓΘA & AE recta linea. non cadit autem: angulus igitur acutus, qui à rectis lineis comprehenditur, non est major angulo comprehenso à recta linea BA & ΓΘA circumferentia, neque minor comprehenso à circumferentia ΓΘA & AE recta linea. quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Ex his manifestum est, quod recta linea, quæ ad rectos angulos ducitur diametro circuli ab extremitate ejusdem, circulum contingit: & quod recta linea circulum contingit in unico tantum puncto. quoniam quæ circulo in duobus punctis occurrit [per 2. 3.] intra ipsum cadere ostendebatur.

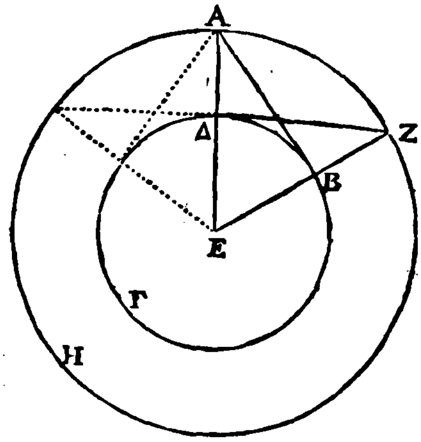
PROP. XVII. PROBL.

A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum circulum contingat.

SIT datum quidem punctum A, datus autem circulus BΓΔ: oportet à puncto A rectam lineam ducere, quæ circulum BΓΔ contingat.

Sumatur enim centrum circuli E, & jungatur AE, & centro quidem E intervallo autem EA [per 3. post.]

post.] circulus AZH describatur; & à puncto Δ ipsi EA ad rectos angulos [per 11. 1.] ducatur ΔZ, junganturque EBZ, AB: dico à puncto A ductam esse AB, quæ circulum BΓΔ contingit.



Quoniam enim E centrum est circulorum BΓΔ, AZH, erit EA æqualis EZ, & EΔ ipsi EB: duæ igitur AE, EB duabus ZE, EΔ sunt æquales, & angulum communem continent, qui est ad E: basis igitur ΔZ [per 4. 1.] basi AB est æqualis, triangulumque ΔEZ æquale triangulo EBA, & reliqui anguli reliquis angulis: æqualis igitur est angulus EBA angulo EΔZ. rectus autem est EΔZ, quare & EBA rectus. atque est EB ex centro: quæ autem diametro circuli ab extremitate ad rectos angulos ducitur [per 16. 3.] circulum contingit: ergo AB contingit circulum.

A dato igitur puncto A ducta est recta linea AB, quæ circulum BΓΔ contingit. quod erat faciendum.

κλος γεγράφθω ὁ AZH, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ EA πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔZ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ EBZ, AB· λέγω ὅτι ἀπὸ τοῦ A σημείου τοῦ BΓΔ κύκλου ἐφαπτομένη ἦκται ἡ AB.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ E κέντρον ἐστὶ τῶν BΓΔ, AZH κύκλων, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν EA τῇ EZ, ἡ δὲ EΔ τῇ EB· δύο δὴ αἱ AE, EB δυσὶ ταῖς ZE, EΔ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι, τὴν πρὸς τῷ E· βάσις ἄρα ἡ ΔZ βάσει τῇ AB ἴση ἐστί. καὶ τὸ ΔEZ τρίγωνον τῷ EBA τριγώνῳ ἴσον ἐστί, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις· ἴση ἄρα τῇ ὑπὸ EΔZ ἡ ὑπὸ EBA. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ EΔZ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ EBA. καί ἐστιν ἡ EB ἐκ τοῦ κέντρου· ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· ἡ AB ἄρα ἐφάπτεται τοῦ κύκλου.

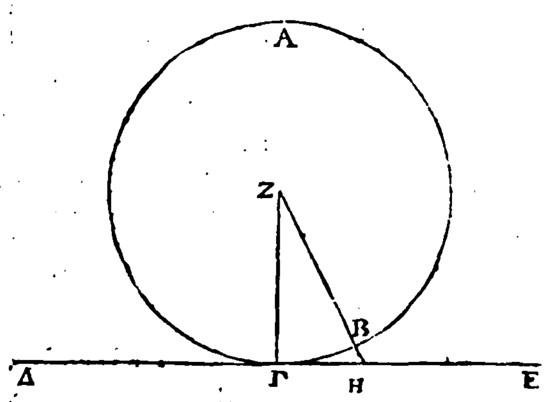
Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ A τοῦ δοθέντος κύκλου τοῦ BΓΔ ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ AB. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XVIII. Theor.

Si recta linea circulum contingat, à centro autem ad contactum recta linea ducatur, ea perpendicularis erit tangenti.

Circulum enim ABΓ contingat recta linea ΔE in puncto Γ, & circuli ABΓ centrum sumatur Z, à quo ad Γ ducatur ZΓ: dico ZΓ perpendicularem esse ad ipsam ΔE.

Si enim non sit ita, ducatur [per 12. 1.] à puncto Z ad ΔE perpendicularis ZH.



Quoniam igitur angulus ZHΓ rectus est, erit [per 17. 1.] HΓZ acutus: majorem autem angulum [per 19. 1.] majus latus subtendit, major igitur est ZΓ quam ZH. est autem ZΓ æqualis ipsi ZB: ergo ZB est major ipsa ZH, minor majore, quod fieri non potest. non est igitur ZH perpendicularis rectæ ΔE. similiter ostendemus neque aliam quampiam esse præter ipsam ZΓ: ergo ZΓ ad ΔE est perpendicularis.

Si igitur recta linea circulum contingat, à centro autem ad contactum recta linea ducatur, ea perpendicularis erit tangenti. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην.

Κύκλου γὰρ τοῦ ABΓ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔE κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ABΓ κύκλου τὸ Z, καὶ ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ Γ ἐπεζεύχθω ἡ ZΓ· λέγω ὅτι ἡ ZΓ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔE.

Εἰ γὰρ μή, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὴν ΔE κάθετος ἡ ZH.

Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ZHΓ γωνία ὀρθή ἐστιν, ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ HΓZ· ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, μείζων ἄρα ἡ ZΓ τῆς ZH. ἴση δὲ ἡ ZΓ τῇ ZB· μείζων ἄρα ἡ ZB τῆς ZH, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ZH κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔE. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ZΓ· ἡ ZΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔE.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΔΕ ἤχθω ἡ ΓΑ· λέγω ὅτι ἐπὶ τῆς ΑΓ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΖ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπέζευκται ἡ ΖΓ, ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΕ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ ὀρθή· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΕ τῇ ὑπὸ ΑΓΕ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ Ζ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλο τι πλὴν ἐπὶ τῆς ΑΓ.

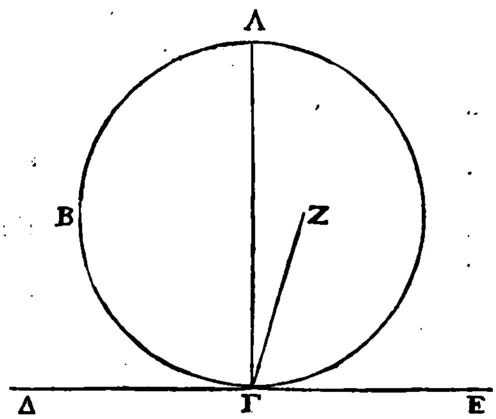
Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XIX. THEOR.

Si recta linea circulum contingat, à contactu autem recta linea ducatur ad angulos rectos tangenti, centrum circuli erit in eadem.

Circulum enim ABΓ contingat quædam recta linea ΔE in Γ, & à puncto Γ ipsi ΔE ad rectos angulos ducatur ΓA: dico circuli centrum esse in ipsa AΓ.

Si enim non, fieri si potest, sit Z centrum, & jungatur ΓZ.



Quoniam igitur circulum ABΓ contingit quædam recta linea ΔE, & à centro ad contactum ducta est ZΓ, erit [per 18.3.] ZΓ ad ipsam ΔE perpendicularis: rectus igitur est angulus ZΓE. est autem & AΓE rectus: ergo ZΓE angulus est æqualis angulo AΓE, minor majori, quod fieri non potest. non est igitur Z centrum circuli ABΓ. similiter ostendemus neque aliud aliquod esse, præterquam in ipsa AΓ.

Quare si recta linea circulum contingat, à contactu autem recta linea ducatur ad angulos rectos tangenti, centrum circuli erit in eadem. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐν κύκλῳ, ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ αὐτοῦ γωνία ἔστω ἡ ὑπὸ ΒΕΓ, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, ἐχέτωσαν δὲ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν τὴν ΒΓ· λέγω ὅτι διπλασίων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΕΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

Ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ ΑΕ διήχθω ἐπὶ τὸ Ζ.

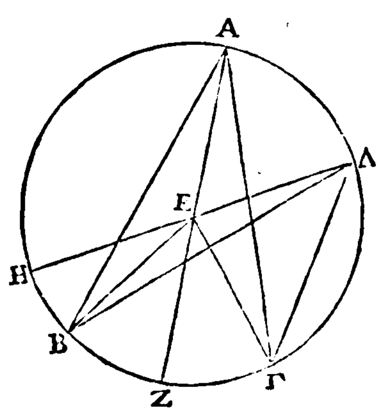
Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΒ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ ἴση ἐστίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΑΒ, ΕΒΑ γωνίαι τῆς ὑπὸ ΕΑΒ διπλάσιαί εἰσιν. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΕΖ ταῖς ὑπὸ ΕΑΒ, ΕΒΑ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΖ ἄρα τῆς ὑπὸ ΕΑΒ ἐστὶ διπλῆ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τῆς ὑπὸ ΕΑΓ ἐστὶ διπλῆ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΓ ὅλης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ ἐστὶ διπλῆ.

Κεκλάσθω δὴ πάλιν, καὶ ἔστω γωνία ἑτέρα ἡ

PROP. XX. THEOR.

In circulo, angulus qui ad centrum duplus est ejus qui ad circumferentiam, quando circumferentiam eandem habent pro basi.

Sit circulus ABΓ, ad cujus centrum sit angulus BEΓ, ad circumferentiam vero BAΓ, & eandem circumferentiam BΓ habeant pro basi: dico angulum BEΓ anguli BAΓ duplum esse.



Jungatur enim AE & ad Z producatur.

Itaque quoniam EA est æqualis EB, erit & angulus EAB [per 5. 1.] angulo EBA æqualis: anguli igitur EAB, EBA dupli sunt ipsius anguli EAB. sed angulus BEZ est [per 32. 1.] æqualis angulis EAB, EBA: ergo angulus BEZ duplus est anguli EAB. eadem ratione & angulus ZEΓ duplus est ipsius EAΓ: totus igitur BEΓ totius BAΓ duplus erit.

Rursus inclinetur, & sit alter angulus BΔΓ, junctaque ΔE ad H producatur. similiter ostendemus angulum HEΓ anguli HΔΓ duplum esse, è quibus HEB duplus est ipsius HΔB: ergo reliquus BEΓ reliqui BΔΓ est duplus.

In circulo igitur, angulus qui ad centrum duplus est ejus qui ad circumferentiam, quando circumferentiam eandem habent pro basi. quod erat demonstrandum.

ὑπὸ ΒΔΓ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΗΕΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΗΔΓ, ὧν ἡ ὑπὸ ΗΕΒ διπλῆ ἐστι τῆς ὑπὸ ΗΔΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΓ διπλῆ ἐστι τῆς ὑπὸ ΒΔΓ.

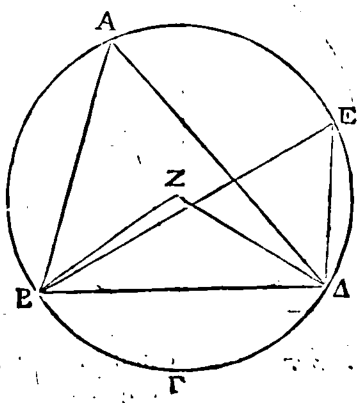
Ἐν κύκλῳ ἄρα ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXI. Theor.

Anguli in eodem circuli segmento sunt inter se æquales.

SIT circulus ABΓΔ, & in eodem segmento BAEΔ anguli sint BAΔ, BEΔ: dico eos inter se esse æquales.

Sumatur enim [per 1. 3.] circuli ABΓΔ centrum quod sit Z, junganturque BZ, ZΔ.



Quoniam autem angulus BZΔ est ad centrum, angulus vero BAΔ ad circumferentiam, & circumferentiam eandem BΓΔ habent pro basi, erit [per 20. 3.] angulus BZΔ duplus anguli BAΔ. eadem ratione angulus BZΔ duplus est etiam anguli BEΔ: ergo angulus BAΔ [per 7. ax.] angulo BEΔ æqualis erit.

Anguli igitur in eodem circuli segmento sunt inter se æquales. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα′.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

ΕΣτω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν τῷ τμήματι τῷ ΒΑΕΔ γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΕΔ· λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΕΔ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Εἰλήφθω γὰρ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου τὸ κέντρον, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΖ, ΖΔ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΔ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΔ πρὸς τῇ περιφερείᾳ, καὶ ἔχουσι τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν, τὴν ΒΓΔ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΖΔ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ὑπὸ ΒΖΔ καὶ τῆς ὑπὸ ΒΕΔ ἐστὶ διπλασίων· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ.

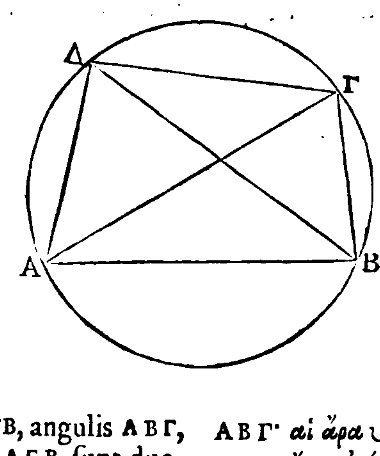
Ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXII. Theor.

Quadrilaterorum, quæ circulis inscribuntur, anguli oppositi sunt duobus rectis æquales.

SIT circulus ABΓΔ, & in ipso quadrilaterum ABΓΔ: dico angulos ipsius oppositos duobus rectis esse æquales.

Jungantur AΓ, BΔ.



Quoniam igitur omnis trianguli tres anguli sunt [per 32. 1.] duobus rectis æquales, erunt trianguli ABΓ tres anguli ΓAB, ABΓ, BΓA æquales duobus rectis. sed angulus ΓAB est [per 21. 3.] æqualis angulo BΔΓ, in eodem enim sunt segmento BAΔΓ, & angulus AΓB æqualis ipsi AΔB, quod sint in eodem AΔΓB segmento: totus igitur angulus AΔΓ angulis BAΓ, AΓB est æqualis. communis apponatur ABΓ angulus: sunt igitur anguli ABΓ, BAΓ, AΓB, angulis ABΓ, AΔΓ æquales. sed ABΓ, BAΓ, AΓB sunt duobus rectis æquales: ergo & anguli ABΓ, AΔΓ sunt duobus rectis æquales. similiter ostendemus angulos quoque BAΔ, ΔΓB duobus rectis esse æquales.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ′.

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

ΕΣτω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ τετράπλευρον ἔστω τὸ ΑΒΓΔ· λέγω ὅτι αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΒΔ.

Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, τοῦ ΑΒΓ αἱ τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΑΒ τῇ ὑπὸ ΒΔΓ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματί εἰσι τῷ ΒΑΔΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματί εἰσι τῷ ΑΔΓΒ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ ἴση ἐστί. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΔΓΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί.

Τῶν

Τῶν ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Quadrilaterorum igitur, quæ circulis inſcribuntur, anguli oppoſiti ſunt duobus rectis æquales. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ΄.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα οὐ συσταθήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα συνεστάτω ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ ΑΓΒ, ΑΔΒ, καὶ διήχθω ἡ ΑΔΓ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΒ, ΔΒ.

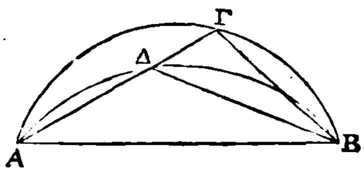
Ἐπεὶ οὖν ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΓΒ τμῆμα τῷ ΑΔΒ τμήματι, ὅμοια δὲ τμήματα κύκλων ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα συσταθήσεται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXIII. Theor.

Super eadem recta linea duo circulorum ſegmenta ſimilia & inæqualia ex eadem parte non conſtituentur.

Si enim fieri poteſt, ſuper eadem recta linea AB duo circulorum ſegmenta ſimilia & inæqualia conſtituantur ex eadem parte AΓB, AΔB, ducaturque AΔΓ, & jungantur ΓB, ΔB.



Quoniam igitur ſegmentum AΓB ſimile eſt ſegmento AΔB, ſimilia autem circulorum ſegmenta ſunt [per 11. def. 3] quæ angulos capiunt æquales; erit AΓB angulus æqualis angulo AΔB, exterior interiori, quod [per 16. 1] fieri non poteſt.

Non igitur ſuper eadem recta linea duo circulorum ſegmenta ſimilia & inæqualia ex eadem parte conſtituentur. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ΄.

Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

Ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕΒ τμῆμα τῷ ΓΖΔ τμήματι.

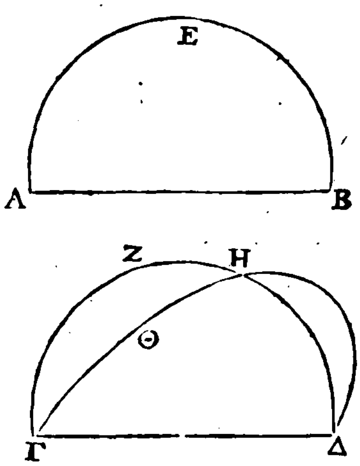
Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΕΒ τμήματος ἐπὶ τὸ ΓΖΔ, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Γ, τῆς δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΓΔ· ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ ΑΕΒ τμῆμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ. εἰ γὰρ ἡ ΑΒ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐφαρμόσει, τὸ δὲ ΑΕΒ τμῆμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ μὴ ἐφαρμόσει, ἀλλὰ παραλλάξει ὡς τὸ ΓΘΗΔ. κύκλος δὲ κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο· ἀλλὰ καὶ τέμνει ὁ ΓΘΗΔ τὸν ΓΖΔ κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, τὰ Γ, Η, Δ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ οὐκ ἐφαρμόσει καὶ τὸ ΑΕΒ τμῆμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ· ἐφαρμόσει ἄρα, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται.

Τὰ ἄρα ἐπὶ τῶν ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXIV. Theor.

Super æqualibus rectis lineis ſimilia circulorum ſegmenta ſunt inter ſe æqualia.

Sint enim ſuper æqualibus rectis lineis AB, ΓΔ ſimilia circulorum ſegmenta AEB, ΓZΔ: dico ſegmentum AEB ſegmento ΓZΔ eſſe æquale.



Segmento enim AEB congruente ſegmento ΓZΔ, & poſito puncto quidem A ſuper Γ, recta vero linea AB ſuper ΓΔ, congruet & B punctum puncto Δ, propterea quod AB ipſi ΓΔ ſit æqualis: congruente autem recta linea AB rectæ ΓΔ, congruet & AEB ſegmentum ſegmento ΓZΔ. ſi enim AB congruat ipſi ΓΔ, ſegmentum vero AEB ſegmento ΓZΔ non congruat, ſitum mutet ut ΓΘHΔ. ſed circulus circulum in pluribus quam duobus punctis [per 10. 3.] non ſecat: at vero circulus ΓΘHΔ circulum ΓZΔ ſecat in pluribus punctis quam duobus, videlicet in punctis Γ, H, Δ, quod fieri non poteſt. congruente igitur recta linea AB rectæ ΓΔ, non poteſt non congruere AEB ſegmento ΓZΔ: quare congruet, & proinde ipſi æquale erit.

Super æqualibus igitur rectis lineis ſimilia circulorum ſegmenta ſunt inter ſe æqualia. quod erat demonſtrandum.

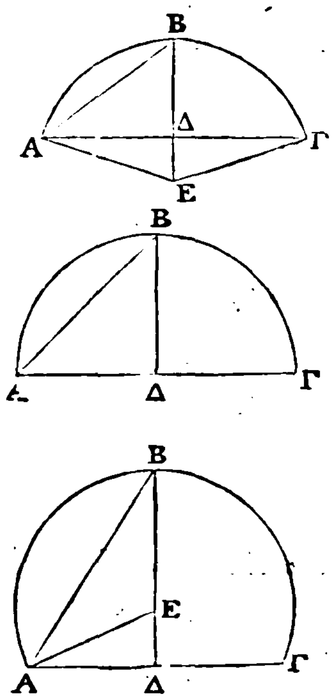
Prop. XXV. Probl.

Dato circuli ſegmento, deſcribere circulum cujus eſt ſegmentum.

SIT datum circuli ſegmentum ΑΒΓ: oportet autem circulum deſcribere, cujus ΑΒΓ eſt ſegmentum.

Secetur ΑΓ [per 10. 1.] biſariam in Δ, & à puncto Δ ipſi ΑΓ ad rectos angulos [per 11. 1.] ducatur ΔΒ, & jungatur ΑΒ: angulus igitur ΑΒΔ vel major eſt angulo ΒΑΔ, vel æqualis, vel minor.

Sit primum major, & ad rectam lineam ΒΑ, atque ad datum in ea punctum Α, conſtituatur [per 23. 1.] angulus ΒΑΕ æqualis angulo ΑΒΔ, & ΔΒ producatur ad Ε, jungaturque ΕΓ. quoniam igitur angulus ΑΒΕ eſt æqualis angulo ΒΑΕ, erit recta linea ΒΕ [per 6. 1.] ipſi ΕΑ æqualis. & quoniam ΑΔ eſt æqualis ΔΓ, communis autem ΔΕ, duæ ΑΔ, ΔΕ duabus ΓΔ, ΔΕ ſunt æquales, altera alteri; & angulus ΑΔΕ æqualis angulo ΓΔΕ, rectus enim eſt uterque: ergo & baſis ΑΕ [per 4. 1.] baſi ΕΓ eſt æqualis. ſed oſtenſa eſt ΑΕ æqualis ΕΒ: quare & ΒΕ ipſi ΕΓ eſt æqualis, ac propterea tres rectæ lineæ ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ inter ſe ſunt æquales: centro igitur Ε intervallo autem æquali uni ipſarum ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta, & circulus deſcriptus erit. quare circuli ſegmento dato deſcriptus eſt [per 9. 3.] circulus, cujus eſt ſegmentum. ſed & illud conſtat, ſegmentum ΑΒΓ ſemicirculo minus eſſe; propterea quod Ε centrum ipſius cadit extra.



Similiter & ſi angulus ΑΒΔ ſit æqualis angulo ΒΑΔ, facta ΑΔ æquali utrivis ipſarum ΒΔ, ΔΓ, erunt tres rectæ lineæ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ inter ſe æquales, atque erit [per 9. 3.] Δ circuli completi centrum, & ſegmentum ΑΒΓ ſemicirculus.

Si vero angulus ΑΒΔ minor ſit angulo ΒΑΔ, & conſtituatur ad rectam lineam ΒΑ & ad punctum in ea datum Α angulus ΒΑΕ æqualis angulo ΑΒΔ, intra ſegmentum ΑΒΓ erit centrum Ε, in ipſa ΔΒ, atque erit ΑΒΓ ſegmentum ſemicirculo majus.

Circuli igitur ſegmento dato, deſcriptus eſt circulus cujus eſt ſegmentum. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε΄.

Κύκλου τμήματος δοθέντος, προσαναγράψαι τὸν κύκλον οὗπέρ ἐστι τμῆμα.

Ἔστω τὸ δοθὲν τμῆμα κύκλου, τὸ ΑΒΓ· δεῖ δὴ προσαναγράψαι τὸν κύκλον, οὗπερ ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τμῆμα.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ· ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ἄρα γωνία τῆς ὑπὸ ΒΑΔ ἤτοι μείζων ἐστὶν, ἢ ἴση, ἢ ἐλάττων.

Ἔστω πρότερον μείζων, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΑ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, τῇ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΕ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε ἡ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΕ, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΕ εὐθεῖα τῇ ΕΑ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΕ, δύο δὴ αἱ ΑΔ, ΔΕ δυσὶ ταῖς ΓΔ, ΔΕ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἴση ἐστὶν, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΕ βάσει τῇ ΓΕ ἴση ἐστίν. ἀλλὰ ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ ΒΕ ἄρα τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ε, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ, κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται προσαναγεγραμμένος. κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος, προσαναγέγραπται ὁ κύκλος. καὶ δῆλον ὡς τὸ ΑΒΓ τμῆμα ἔλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίου, διὰ τὸ, τὸ Ε κέντρον αὐτοῦ ἐκτὸς τυγχάνειν.

Ὁμοίως δὲ κἂν ᾖ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ΒΑΔ, τῆς ΑΔ ἴσης γενομένης ἑκατέρᾳ τῶν ΒΔ, ΔΓ, αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται, καὶ ἔσται τὸ Δ κέντρον τοῦ προσαναπεπληρωμένου κύκλου, καὶ δηλαδὴ ἔσται τὸ ΑΒΓ ἡμικύκλιον.

Ἐὰν δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ἐλάττων ᾖ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ, καὶ συστησόμεθα πρὸς τῇ ΒΑ εὐθείᾳ, καὶ τῷ Α σημείῳ, τῇ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίᾳ ἴσην, ἐντὸς τοῦ ΑΒΓ τμήματος πεσεῖται τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΔΒ, καὶ ἔσται δηλαδὴ τὸ ΑΒΓ τμῆμα μεῖζον ἡμικυκλίου.

Κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος, προσαναγέγραπται ὁ κύκλος, οὗπέρ ἐστι τὸ τμῆμα. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XXVI. Theor.

In æqualibus circulis æquales anguli æqualibus inſiſtunt circumferentiis, ſive ad centra ſive ad circumferentias inſiſtant.

SInt æquales circuli ΑΒΓ, ΔΕΖ, & in ipſis æquales anguli, ad centra quidem ΒΗΓ,

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ΄.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

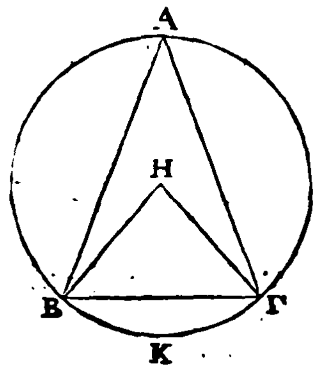
Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι γωνίαι ἔστωσαν, πρὸς μὲν τοῖς κέντροις αἱ

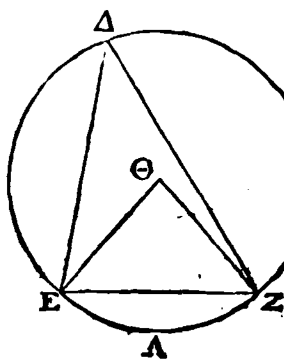
ὑπὸ

ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΚΓ περιφέρεια τῇ ΕΛΖ περιφερείᾳ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΓ, ΕΖ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλοι, ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ ΒΗ, ΗΓ δυσὶ ταῖς ΕΘ, ΘΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Η γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ Θ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Α γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΑΓ τμῆμα τῷ ΕΔΖ τμήματι, καί εἰσιν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν ΒΓ, ΕΖ· τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα τὸ ΒΑΓ τμῆμα τῷ ΕΔΖ τμήματι. ἔστι δὲ καὶ ὅλος ὁ ΑΒΓ κύκλος ὅλῳ τῷ ΔΕΖ κύκλῳ ἴσος, λοιπὸν ἄρα ΒΚΓ τμῆμα λοιπῷ ΕΛΖ ἴσον· ἡ ἄρα ΒΚΓ περιφέρεια τῇ ΕΛΖ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση.





Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΘΖ, ad circumferentias vero ΒΑΓ, ΕΔΖ: dico ΒΚΓ circumferentiam circumferentiæ ΕΛΖ æqualem esse.

Jungantur enim ΒΓ, ΕΖ.

Et quoniam æquales sunt ΑΒΓ, ΔΕΖ circuli, erunt & quæ ex centris æquales: duæ igitur ΒΗ, ΗΓ duabus ΕΘ, ΘΖ sunt æquales, & angulus ad Η æqualis angulo ad Θ: ergo & basis ΒΓ [per 4. 1.] basi ΕΖ est æqualis. & quoniam æqualis est angulus ad Α angulo ad Δ, segmentum ΒΑΓ simile erit [per 11. def. 3.] segmento ΕΔΖ, & sunt super æquales rectas lineas ΒΓ, ΕΖ; quæ autem super æquales rectas lineas similia sunt circulorum segmenta [per 24. 3.] sunt inter se æqualia: segmentum igitur ΒΑΓ segmento ΕΔΖ est æquale. sed & totus ΑΒΓ circulus æqualis est toti ΔΕΖ: reliquum igitur segmentum ΒΚΓ reliquo ΕΛΖ est æquale, circumferentia igitur ΒΚΓ circumferentiæ ΕΛΖ æqualis erit.

In æqualibus igitur circulis, æquales anguli æqualibus insistunt circumferentiis, sive ad centra sive ad circumferentias insistant. quod erat demonstrandum.

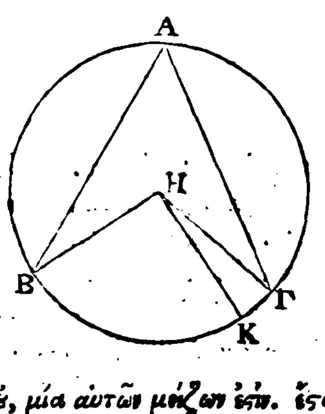
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

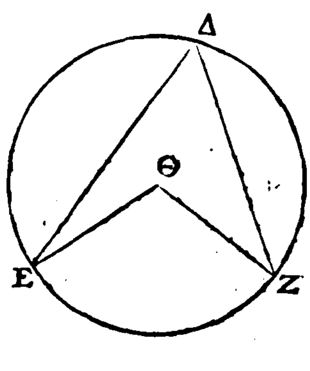
Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

Prop. XXVII. Theor.

In æqualibus circulis anguli qui æqualibus insistunt circumferentiis sunt inter se æquales, sive ad centra sive ad circumferentias insistant.

Ἐν γὰρ ἴσοις κύκλοις τοῖς ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τῶν ΒΓ, ΕΖ, πρὸς μὲν τοῖς Η, Θ κέντροις γωνίαι βεβηκέτωσαν αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΒΗΓ τῇ ὑπὸ ΕΘΖ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ.



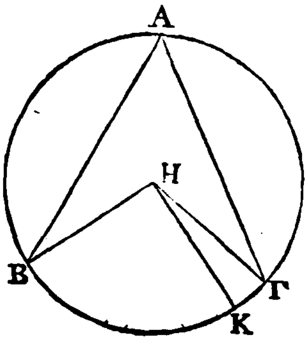


Εἰ μὲν οὖν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΕΘΖ, φανερὸν ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν. εἰ δὲ οὔ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΒΗΓ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΗ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Η, τῇ ὑπὸ ΕΘΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΗΚ· αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις

In æqualibus enim circulis ΑΒΓ, ΔΕΖ æqualibus circumferentiis ΒΓ, ΕΖ insistant anguli ad centra quidem ΒΗΓ, ΕΘΖ, ad circumferentias vero ΒΑΓ, ΕΔΖ: dico angulum ΒΗΓ angulo ΕΘΖ, & angulum ΒΑΓ angulo ΕΔΖ æqualem esse.

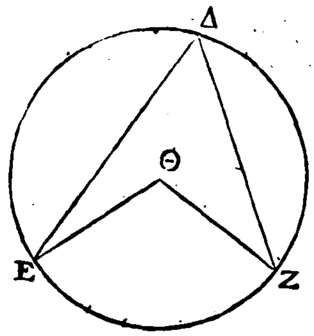
Si enim angulus ΒΗΓ æqualis sit angulo ΕΘΖ, manifestum est [per 20. 3.] angulum quoque ΒΑΓ angulo ΕΔΖ esse æqualem. sin minus, unus ipsorum est major. sit major ΒΗΓ, & constituatur [per 23. 1.] ad rectam lineam ΒΗ, & ad punctum in ipsa Η angulo ΕΘΖ æqualis angulus ΒΗΚ; æquales autem anguli [per 26. 3.] æqualibus insistunt circumferentiis, quando ad centra

centra fuerint: ergo circumferentia BK æqualis est circumferentiæ EZ. sed circumferentia EZ æqualis est ipsi BΓ: ergo & BK ipsi BΓ est æqualis, minor majori, quod fieri non potest. non est igitur inæqualis angulus BHΓ angulo EΘZ: ergo est æqualis. est autem angulus ad A [per 20. 3.] dimidius anguli BHΓ, anguli vero EΘZ dimidius qui ad Δ: angulus igitur qui ad A angulo qui ad Δ est æqualis.



In æqualibus igitur circulis anguli qui æqualibus insistunt circumferentiis sunt inter se æquales, sive ad centra sive ad circumferentias insistant. quod erat demonstrandum.

ὦσιν· ἴση ἄρα ἡ BK περιφέρεια τῇ EZ περιφερείᾳ. ἀλλ' ἡ EZ τῇ BΓ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ BK ἄρα τῇ BΓ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ BHΓ γωνία τῇ ὑπὸ EΘZ· ἴση ἄρα. καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ὑπὸ BHΓ ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ A, τῆς δὲ ὑπὸ EΘZ ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ Δ· ἴση ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ A γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ.



Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἐάντε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάντε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

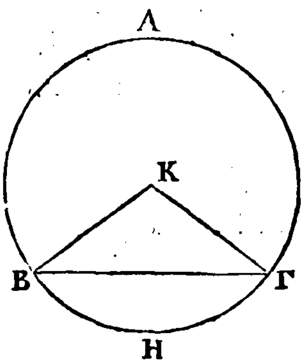
Prop. XXVIII. Theor.

In æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori.

Sint æquales circuli ABΓ, ΔEZ, & in ipsis æquales rectæ lineæ BΓ, EZ, quæ circumferentias quidem auferant majores BAΓ, EΔZ, minores vero BHΓ, EΘZ: dico circumferentiam BAΓ majorem majori circumferentiæ EΔZ, & minorem circumferentiam BHΓ minori EΘZ æquales esse.

Sumantur enim [per 1. 3.] centra circulorum K, Λ, junganturque BK, KΓ, EΛ, ΛZ.

Quoniam autem circuli sunt æquales, erunt & quæ ex centris æquales: duæ igitur BK, KΓ sunt æquales duabus EΛ, ΛZ, & basis BΓ æqualis est basi EZ: ergo angulus BKΓ [per 8. 1.] angulo EΛZ est æqualis. æquales autem anguli [per 26. 3.] æqualibus insistunt circumferentiis, quando ad centra fuerint: quare circumferentia BHΓ æqualis est circumferentiæ EΘZ. sed & totus ABΓ circulus toti ΔEZ est æqualis: reliqua igitur circumferentia BAΓ reliquæ EΔZ æqualis erit.



Ergo in æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori. quod erat demonstrandum.

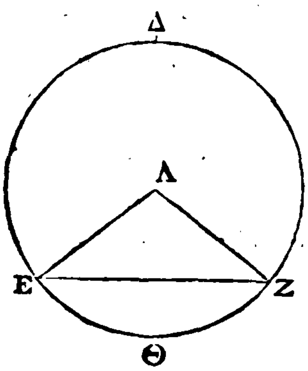
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ABΓ, ΔEZ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ BΓ, EZ, τὰς μὲν BAΓ, EΔZ περιφερείας μείζονας ἀφαιροῦσαι, τὰς δὲ BHΓ, EΘZ ἐλάττονας· λέγω ὅτι ἡ μὲν BAΓ μείζων περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ EΔZ μείζονι περιφερείᾳ, ἡ δὲ BHΓ ἐλάττων περιφέρεια ἴση τῇ EΘZ ἐλάττονι.

Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, τὰ K, Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ BK, KΓ, EΛ, ΛZ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ BK, KΓ δυσὶ ταῖς EΛ, ΛZ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ BΓ βάσει τῇ EZ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ BKΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ EΛZ ἴση ἐστίν. αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ὦσιν· ἴση ἄρα ἡ περιφέρεια BHΓ τῇ EΘZ περιφερείᾳ. ἔστι δὲ καὶ ὅλος ὁ ABΓ κύκλος ὅλῳ τῷ ΔEZ κύκλῳ ἴσος· λοιπὴ ἄρα ἡ BAΓ περιφέρεια λοιπῇ τῇ EΔZ περιφερείᾳ ἴση ἐστίν.



Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις ὑπὸ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσι.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν αἱ ΒΗΓ, ΕΘΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖαι· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ εὐθεῖα τῇ ΕΖ.

Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, τὰ Κ, Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗΓ περιφέρεια τῇ ΕΘΖ περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΚΓ τῇ ὑπὸ ΕΛΖ. καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλοι, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ ΒΚ, ΚΓ δυσὶ ταῖς ΕΛ, ΛΖ ἴσαι εἰσί, καὶ ἴσας γωνίας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν.

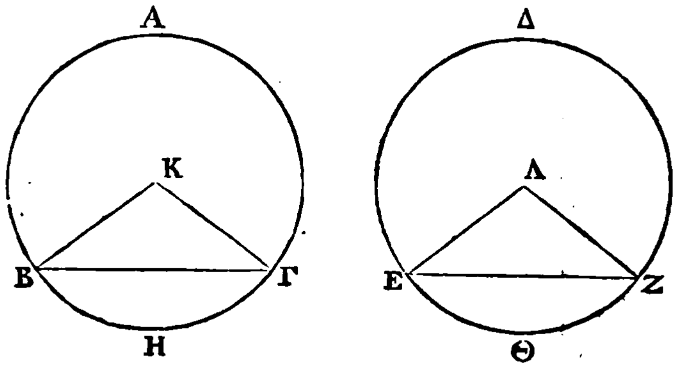
Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις ὑπὸ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXIX. THEOR.

In æqualibus circulis æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt.

Sint æquales circuli ΑΒΓ, ΔΕΖ, & in ipsis æquales sumantur circumferentiæ ΒΗΓ, ΕΘΖ, & ΒΓ, ΕΖ jungantur: dico rectam lineam ΒΓ rectæ ΕΖ æqualem esse.

Sumantur enim centra circulorum Κ, Λ, & jungantur ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ.



Quoniam igitur circumferentia ΒΗΓ est æqualis circumferentiæ ΕΘΖ, erit [per 27. 3.] & angulus ΒΚΓ angulo ΕΛΖ æqualis. & quoniam circuli ΑΒΓ, ΔΕΖ sunt æquales, & quæ ex centris æquales erunt: duæ igitur ΒΚ, ΚΓ sunt æquales duabus ΕΛ, ΛΖ, & æquales angulos continent: quare basis ΒΓ [per 4. 1.] basi ΕΖ est æqualis.

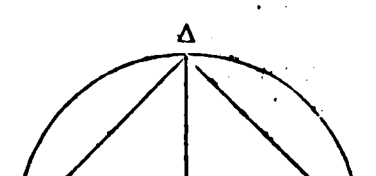
In æqualibus igitur circulis æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τεμεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα περιφέρεια ἡ ΑΔΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΔΒ περιφέρειαν δίχα τεμεῖν.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΒ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ· δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΔ δυσὶ ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσί. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· καὶ βάσις ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΔΒ ἴση ἐστίν. αἱ δὲ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι· καί ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΑΔ, ΔΒ περιφερειῶν ἐλάττων ἡμικυκλίου· ἴση ἄρα ἡ ΑΔ περιφέρεια τῇ ΔΒ περιφερείᾳ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα περιφέρεια δίχα τέτμηται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. XXX. PROBL.

Datam circumferentiam bifariam secare.

Sit data circumferentia ΑΔΒ: oportet ΑΔΒ circumferentiam bifariam secare.

Jungatur ΑΒ, & [per 10. 1.] bifariam secetur in Γ: à puncto autem Γ ipsi ΑΒ [per 11. 1.] ad rectos angulos ducatur ΓΔ, & jungantur ΑΔ, ΔΒ.

Quoniam igitur ΑΓ est æqualis ΓΒ, communis autem ΓΔ, duæ ΑΓ, ΓΔ duabus ΒΓ, ΓΔ sunt æquales. & angulus ΑΓΔ æqualis angulo ΒΓΔ, rectus enim est uterque: ergo basis ΑΔ [per 4. 1.] basi ΔΒ est æqualis. æquales autem rectæ lineæ [per 28. 3.] circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori; & est utraque ipsarum ΑΔ, ΔΒ circumferentiarum semicirculo minor: quare circumferentia ΑΔ circumferentiæ ΔΒ æqualis erit.

Data igitur circumferentia bifariam secta est. quod erat faciendum.

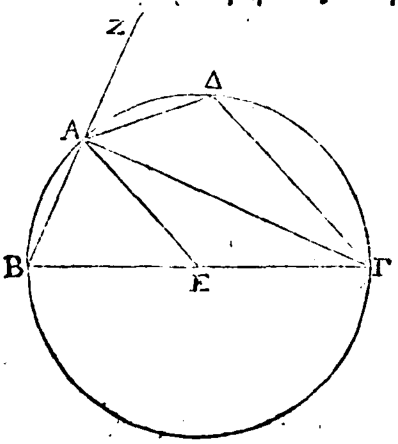
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

Ἐν κύκλῳ ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν· ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς· ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι μείζων ὀρθῆς.

PROP. XXXI. THEOR.

In circulo, angulus qui in semicirculo rectus est: qui vero in majori segmento minor est recto: & qui in minori major recto. & insuper majoris quidem segmenti angulus recto major est; minoris vero segmenti angulus recto minor.

SIT circulus ΑΒΓΔ, cujus diameter ΒΓ, centrum autem Ε, & jungantur ΒΑ, ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ: dico angulum quidem, qui est in semicirculo ΒΑΓ, rectum esse; qui vero in segmento ΑΒΓ majore semicirculo, videlicet angulum ΑΒΓ, minorem esse recto; & qui in segmento ΑΔΓ minore semicirculo, [hoc est angulum ΑΔΓ] recto majorem esse.



Jungatur ΑΕ, & ΒΑ ad Ζ producatur.

Itaque quoniam ΒΕ est æqualis ΕΑ, erit & angulus ΕΑΒ [per 5. 1.] angulo ΕΒΑ æqualis. rursus, quoniam ΕΑ est æqualis ΕΓ, & angulus ΑΓΕ angulo ΓΑΕ æqualis erit: totus igitur angulus ΒΑΓ est æqualis duobus angulis ΑΒΓ, ΑΓΒ. est autem & angulus ΖΑΓ, extra triangulum ΑΒΓ, [per 32. 1.] duobus ΑΒΓ, ΑΓΒ æqualis: angulus igitur ΒΑΓ est æqualis angulo ΖΑΓ, ac propterea [per 10. def. 1.] uterque ipsorum rectus: quare in semicirculo ΒΑΓ angulus ΒΑΓ rectus est.

ET quoniam trianguli ΑΒΓ duo anguli ΑΒΓ, ΒΑΓ [per 17. 1.] duobus rectis sunt minores, rectus autem ΒΑΓ; erit ΑΒΓ angulus recto minor, atque est in segmento ΑΒΓ majore semicirculo.

CUM autem in circulo quadrilaterum sit ΑΒΓΔ, quadrilaterorum vero, qui in circulis describuntur, anguli oppositi [per 22. 3.] duobus rectis sint æquales; erunt ΑΒΓ, ΑΔΓ anguli æquales duobus rectis. & angulus ΑΒΓ minor est recto: reliquus igitur ΑΔΓ recto major erit; atque est in segmento ΑΔΓ minore semicirculo.

DICO præterea majoris segmenti angulum, comprehensum à circumferentia ΑΒΓ & recta linea ΑΓ, recto esse majorem; angulum vero minoris segmenti, comprehensum à circumferentia ΑΔΓ & recta linea ΑΓ, recto minorem. quod quidem perspicue apparet. Quoniam enim angulus à rectis lineis ΒΑ, ΑΓ comprehensus rectus est, erit & comprehensus à circumferentia ΑΒΓ & recta linea ΑΓ major recto. rursus, quoniam angulus comprehensus à rectis lineis ΓΑ, ΑΖ rectus est; erit angulus, qui comprehenditur à recta ΓΑ & ΑΔΓ circumferentia, minor recto.

In circulo igitur, angulus qui in semicirculo rectus est: qui vero in majore segmento minor est recto; & qui in minore major. & insuper majoris segmenti angulus est recto major, minoris vero segmenti minor. quod erat demonstrandum.

ALITER.

Demonstratur angulum ΒΑΓ rectum esse.

καὶ ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία μείζων ἐστὶν ὀρθῆς· ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΒΓ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΑ, ΑΓ, ΑΔ, ΔΓ. λέγω ὅτι ἡ μὲν ἐν τῷ ΒΑΓ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν· ἡ δὲ ἐν τῷ ΑΒΓ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία, ἡ ὑπὸ ΑΒΓ, ἐλάττων ὀρθῆς· ἡ δὲ ἐν τῷ ΑΔΓ ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία μείζων ἐστὶν ὀρθῆς.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ διήχθω ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Ζ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΑ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΒ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ ΕΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΓΑΕ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΑΓ ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ γωνίαις ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΑΓ, ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα· ἡ ἄρα ἐν τῷ ΒΑΓ ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ὀρθή ἐστι.

ΚΑΙ ἐπεὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία· ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία, καί ἐστιν ἐν τῷ ΑΒΓ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

ΚΑΙ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, τῶν δὲ ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΔΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. καί ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἐλάττων ὀρθῆς· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, καί ἐστιν ἐν τῷ ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

ΛΕΓΩ δὴ ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς ΑΒΓ περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς· ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς ΑΔΓ περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. καί ἐστιν αὐτόθεν φανερόν. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εὐθειῶν περιεχομένη ὀρθὴ γωνία ἐστίν, ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς ΑΒΓ περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας περιεχομένη μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΖ εὐθειῶν ὀρθή ἐστιν· ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς ΓΑ εὐθείας καὶ τῆς ΑΔΓ περιφερείας ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς.

Ἐν κύκλῳ ἄρα, ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν· ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς· ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. καὶ ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία μείζων ἐστὶν ὀρθῆς· ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΛΛΩΣ.

Ἀπόδειξις τοῦ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ. ἐπεὶ διπλῆ

διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΕ, ἴση γὰρ δυσὶ τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον· ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΒ διπλῆ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΕΒ, ΑΕΓ διπλασίονές εἰσι τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΑΕΒ, ΑΕΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΓ ὀρθή ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

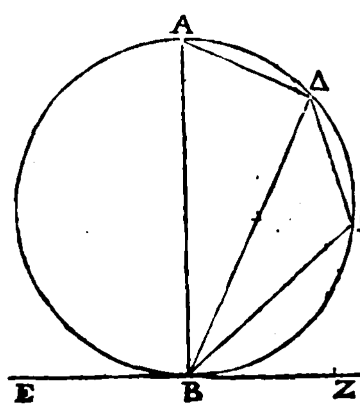
Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τριγώνου ἡ μία γωνία δυσὶν ἴση ᾖ, ὀρθή ἐστι· διὰ τὸ καὶ τὴν ἐκείνης ἐφεξῆς ταῖς αὐταῖς ἴσην εἶναι. ὅταν δὲ αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ἴσαι ὦσιν, ὀρθαί εἰσιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓΔ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Β σημείου διήχθω τις εὐθεῖα ἐπὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τέμνουσα αὐτὸν ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι ἃς ποιεῖ γωνίας ἡ ΒΔ μετὰ τῆς ΕΖ ἐφαπτομένης ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τμήμασι τοῦ κύκλου γωνίαις, τουτέστιν, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΑΒ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΒΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΓΒ τμήματι.



Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΕΖ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΑ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΔ περιφερείας τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ.

Καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ ΑΒΓΔ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Β ἁφῆς ἦκται τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΑ, ἐπὶ τῆς ΒΑ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΔΒ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ οὖσα ὀρθή ἐστι· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΒΔ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΖ ὀρθή· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΖ ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΒΔ. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΔ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΖ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι τοῦ κύκλου γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ ΒΑΔ. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΖ, ΔΒΕ ταῖς ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΓΔ ἴσαι εἰσὶν, ὧν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ ὑπὸ ΔΒΖ ἐδείχθη ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΕ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ ΔΓΒ, τῇ ὑπὸ ΔΓΒ γωνίᾳ, ἐστὶν ἴση.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

quoniam enim angulus AEΓ duplus est anguli BAE, etenim duobus interioribus & oppositis [per 32. 1.] est æqualis: est autem & AEB duplus ipsius BAΓ: anguli AEB, AEΓ dupli erunt anguli BAΓ. sed AEB, AEΓ anguli [per 13. 1.] duobus rectis sunt æquales: ergo angulus BAΓ rectus est. quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Hinc manifestum est, quod si unus angulus trianguli sit æqualis duobus reliquis, est rectus: propterea quod ejus angulus deinceps iisdem est æqualis. quando autem anguli deinceps sunt æquales, [per 10. def. 1.] sunt recti.

PROP. XXXII. THEOR.

Si recta linea circulum contingat, à contactu autem ducatur recta linea circulum secans; anguli quos hæc cum contingente facit æquales erunt iis qui in alternis circuli segmentis consistunt.

Circulum enim ABΓΔ contingat recta linea EZ in B, & à puncto B per circulum ABΓΔ ducatur recta linea BΔ secans illum utcunque: dico angulos quos BΔ cum contingente EZ facit æquales esse iis qui in alternis circuli segmentis consistunt; hoc est, angulum ZBΔ esse æqualem angulo qui constituitur in ΔAB segmento, angulum vero EBΔ æqualem angulo qui in segmento ΔΓB constituitur.

Ducatur enim [per 11. 1.] à puncto B ipsi EZ ad rectos angulos BA, & in circumferentia BΔ sumatur quodvis punctum Γ, junganturque AΔ, ΔΓ, ΓB.

Quoniam igitur circulum ABΓΔ contingit recta linea EZ in puncto B, & à contactu B ad rectos angulos contingenti ducta est BA, erit [per 19. 3.] in ipsa BA centrum circuli ABΓΔ: angulus igitur AΔB in semicirculo [per 31. 3.] est rectus; reliqui igitur anguli BAΔ, ABΔ uni recto sunt æquales. est autem [per constr.] ABZ rectus: ergo [per 10. ax.] angulus ABZ æqualis est angulis BAΔ, ABΔ. communis auferatur ABΔ: reliquus igitur ΔBZ ei qui in alterno circuli segmento consistit, videlicet angulo BAΔ, est æqualis. & quoniam in circulo quadrilaterum est ABΓΔ, anguli ejus oppositi [per 22. 3.] æquales sunt duobus rectis; erunt igitur ΔBZ, ΔBE anguli [per 13. 1.] angulis BAΔ, BΓΔ æquales, è quibus BAΔ ostensus est æqualis ipsi ΔBZ: ergo reliquus ΔBE ei qui in alterno circuli segmento ΔΓB constituitur, videlicet angulo ΔΓB, æqualis erit.

Si igitur recta linea circulum contingat, à contactu autem ducatur recta linea secans; anguli quos hæc cum contingente facit æquales erunt iis qui in alternis circuli segmentis consistunt. quod erat demonstrandum.

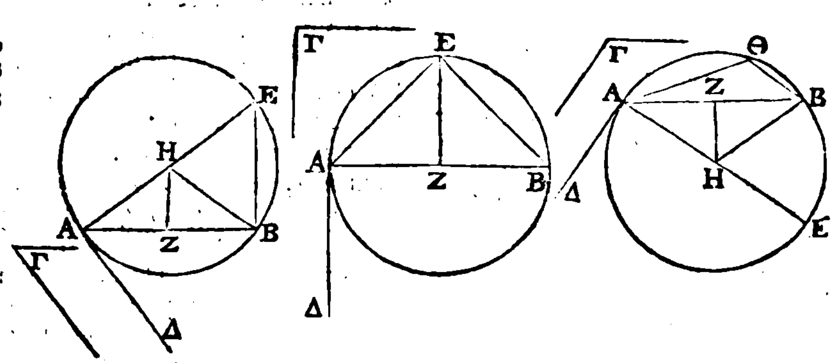
Prop. XXXIII. Theor.

Super data recta linea describere segmentum circuli, quod capiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

SIT data recta linea AB, datus autem angulus rectilineus qui ad Γ: itaque oportet super data recta linea AB describere segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem angulo qui est ad Γ. angulus igitur ad Γ vel est acutus, vel rectus, vel obtusus.

Sit primum acutus, ut in prima figura, & ad rectam lineam AB & ad punctum in ea A constituatur [per 23. 1.] angulus BAΔ angulo qui est ad Γ æqualis: acutus igitur angulus est BAΔ. & à puncto A ipsi AΔ [per 11. 1.] ad rectos angulos ducatur AE, secetur autem [per 10. 1.] AB bifariam in Z, atque à puncto Z ducatur ZH ad rectos angulos ipsi AB, & HB jungatur. quoniam igitur AZ est æqualis ZB, communis autem ZH, duæ AZ, ZH duabus ZB, ZH sunt æquales, & angulus AZH æqualis angulo HZB: ergo basis AH [per 4. 1.] basi HB est æqualis. itaque centro H, intervallo autem AH, circulus descriptus transibit etiam per B. describatur, & sit ABE, jungaturque EB. Quoniam igitur à puncto A extremitate diametri AE ipsi AE ad rectos angulos ducta est AΔ, ipsa AΔ [per 16. 3.] circulum continget. & quoniam circulum ABE contingit recta linea AΔ, & à contactu qui est ad A in circulum ABE ducta est recta linea AB; erit [per 32. 3.] angulus ΔAB æqualis angulo qui in alterno circuli segmento constituitur, videlicet ipsi AEB. sed angulus ΔAB angulo qui ad Γ est æqualis: ergo & angulus ad Γ angulo AEB æqualis erit. Super data igitur recta linea AB segmentum circuli descriptum est AEB, quod capiat angulum AEB, dato angulo qui ad Γ æqualem.

Sit deinde angulus qui ad Γ rectus: & oporteat rursus super rectam lineam AB describere circuli segmentum, quod capiat angulum æqualem recto angulo qui est ad Γ. Constituatur enim rursus angulo recto qui ad Γ [per 23. 1.] æqualis angulus BAΔ, ut in secunda figura; seceturque AB [per 10. 1.] bifariam in Z, & centro Z intervallo autem æquali alterutri ipsarum AZ, ZB circulus describatur AEB. Ergo AΔ recta linea [per 16. 3.] circulum ABE contingit, propterea quod rectus est qui ad A angulus. & angulus BAΔ æqualis angulo, qui est in segmento AEB; rectus enim & ipse est [per



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγʹ.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμῆμα κύκλου, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Γ· δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς AB γράψαι τμῆμα κύκλου, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ. ἡ γὰρ πρὸς τῷ Γ ἤτοι ὀξεῖά ἐστιν, ἢ ὀρθὴ, ἢ ἀμβλεῖα.

Ἔστω πρότερον ὀξεῖα, ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ A σημείῳ τῇ πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ BAΔ· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ BAΔ. καὶ ἤχθω τῇ AΔ ἀπὸ τοῦ A σημείου πρὸς ὀρθὰς ἡ AE, καὶ τετμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Z, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Z σημείου τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ ZH, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ HB. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZB, κοινὴ δὲ ἡ ZH, δύο δὴ αἱ AZ, ZH δυσὶ ταῖς ZB, ZH ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ AZH τῇ ὑπὸ HZB ἴση· βάσις ἄρα ἡ AH βάσει τῇ HB ἴση ἐστίν. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ H, διαστήματι δὲ τῷ AH, κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ B. γεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ ABE, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ EB. ἐπεὶ οὖν ἀπ' ἄκρας τῆς AE διαμέτρου, ἀπὸ τοῦ A, τῇ AE πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἡ AΔ, ἡ AΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ κύκλου. Καὶ ἐπεὶ τοῦ ABE κύκλου ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ AΔ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ A ἁφῆς ἐπὶ τὸν ABE κύκλον διῆκταί τις εὐθεῖα ἡ AB· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔAB γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ AEB. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΔAB τῇ πρὸς τῷ Γ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ πρὸς τῷ Γ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ AEB. Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς AB τμῆμα κύκλου γέγραπται τὸ AEB, δεχόμενον γωνίαν τὴν ὑπὸ AEB ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ πρὸς τῷ Γ.

Ἀλλὰ δὴ ὀρθὴ ἔστω ἡ πρὸς τῷ Γ· καὶ δέον πάλιν ἔστω ἐπὶ τῆς AB γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ ὀρθῇ. Συνεστάτω γὰρ πάλιν τῇ πρὸς τῷ Γ ὀρθῇ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ BAΔ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ τετμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Z, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Z, διαστήματι δὲ ὁποτέρῳ τῶν AZ, ZB, κύκλος γεγράφθω ὁ AEB· ἐφάπτεται ἄρα ἡ AΔ εὐθεῖα τοῦ ABE κύκλου, διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν πρὸς τῷ A γωνίαν. καὶ ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ BAΔ γωνία τῇ ἐν τῷ AEB τμήματι ἴση, ὀρθὴ γὰρ καὶ αὐτὴ ἐν ἡμικυ-

κλίῳ

κλίῳ οὔσα. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ πρὸς τῷ Γ ἐστὶν ἴση. Γέγραπται ἄρα πάλιν ἐπὶ τῆς ΑΒ τμῆμα κύκλου τὸ ΑΕΒ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ.

Ἀλλὰ δὴ ἡ πρὸς τῷ Γ ἀμβλεῖα ἔστω, καὶ συνεστάτω αὐτῇ ἴση πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ Α σημείῳ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ τῇ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΑΕ, καὶ τετμήσθω πάλιν ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΒ. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, καὶ κοινὴ ἡ ΖΗ, δύο δὴ αἱ ΖΗ, ΑΖ δυσὶ ταῖς ΒΖ, ΖΗ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΖΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΖΗ ἴση. βάσις ἄρα ἡ ΑΗ βάσει τῇ ΗΒ ἴση ἐστίν. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΑΗ, κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Β. γεγράφθω ὡς ὁ ΑΕΒ. καὶ ἐπεὶ τῇ ΑΕ διαμέτρῳ ἀπ' ἄκρας πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ ΑΔ, ἡ ΑΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΕΒ κύκλου. καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΑΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ ΑΘΒ συνισταμένῃ γωνίᾳ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία τῇ πρὸς τῷ Γ ἴση ἐστί· καὶ ἡ ἐν τῷ ΑΘΒ ἄρα τμήματι γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Γ. Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ γέγραπται τμῆμα κύκλου τὸ ΑΘΒ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

[per 31.3.] in semicirculo consistens. sed anguli ΒΑΔ æqualis est ei qui ad Γ. Descripta igitur est rursus super recta linea ΑΒ segmentum circuli ΑΕΒ, quod capiat angulum angulo recto qui ad Γ æqualem.

Denique sit angulus ad Γ obtusus, & ad rectam lineam ΑΒ & ad punctum Α constituatur [per 23. 1.] ipsi æqualis angulus ΒΑΔ, ut in tertia figura; & ipsi ΑΔ rectæ lineæ ad rectos angulos [per 11. 1.] ducatur ΑΕ, seceturque rursus ΑΒ [per 10. 1.] bifariam in Ζ, ipsi vero ΑΒ ducatur ad rectos angulos ΖΗ, & jungatur ΗΒ. quoniam autem ΑΖ est æqualis ΖΒ, communis autem ΖΗ, duæ ΖΗ, ΑΖ duabus ΒΖ, ΖΗ sunt æquales, & angulus ΑΖΗ angulo ΒΖΗ æqualis: basis igitur ΑΗ [per 4. 1.] est æqualis basi ΗΒ. quare centro Η, intervallo autem ΑΗ, circulus descriptus etiam per Β transibit. transeat ut ΑΕΒ. Et quoniam diametro ΑΕ, ab extremitate ad rectos angulos ducta est ΑΔ, ipsa ΑΔ [per 16. 3.] circulum ΑΕΒ continget. & à contactu qui est ad Α ducta est ΑΒ: quare angulus ΒΑΔ ei qui in alterno circuli segmento ΑΘΒ constituitur est æqualis. sed ΒΑΔ angulus æqualis est angulo qui ad Γ: angulus igitur qui in segmento ΑΘΒ angulo qui ad Γ æqualis erit. Ergo super data recta linea ΑΒ descriptum est ΑΘΒ circuli segmentum, quod capiat angulum æqualem ei qui est ad Γ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

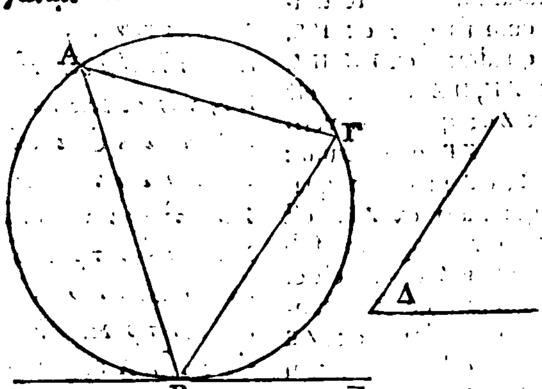
Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Prop. XXXIV. Probl.

A dato circulo segmentum abscindere, quod capiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Δ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Δ γωνίᾳ.

Ἤχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β τῇ πρὸς τῷ Δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΒΓ.



Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Β ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΒΓ· ἡ ὑπὸ ΖΒΓ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΒΑΓ ἐναλλὰξ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ πρὸς τῷ Δ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ἐν τῷ ΒΑΓ ἄρα τμήματι γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Δ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα κύκλου τοῦ ΑΒΓ τμῆμα ἀφῄρηται τὸ ΒΑΓ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ Δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Sit datus circulus ΑΒΓ, datus autem angulus rectilineus qui ad Δ: oportet à circulo ΑΒΓ segmentum abscindere, quod capiat angulum angulo qui ad Δ æqualem.

Ducatur [per 17. 3.] recta linea ΕΖ contingens circulum ΑΒΓ in puncto Β, & ad rectam lineam ΖΒ: & ad punctum in ea Β constituatur [per 23. 1.] angulus ΖΒΓ angulo qui est ad Δ æqualis.

Quoniam igitur circulum ΑΒΓ contingit recta linea ΕΖ, & à contactu Β ducta est ΒΓ, erit [per 32. 3.] angulus ΖΒΓ æqualis ei qui in ΒΑΓ alterno circuli segmento constituitur. sed ΖΒΓ angulus angulo qui ad Δ est æqualis: ergo & angulus qui in segmento ΒΑΓ angulo qui ad Δ æqualis erit.

A dato igitur circulo ΑΒΓ abscissum est segmentum ΒΑΓ, quod capiat angulum dato angulo rectilineo qui est ad Δ æqualem. quod erat faciendum.

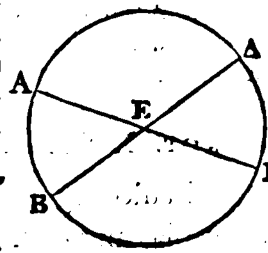
Prop. XXXV. Theor.

Si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secent, rectangulum sub segmentis unius comprehensum æquale est ei quod sub alterius segmentis comprehenditur.

In circulo enim ΑΒΓΔ duæ rectæ lineæ ΑΓ, ΒΔ sese mutuo secent in puncto Ε: dico rectangulum comprehensum sub ΑΕ, ΕΓ æquale esse ei quod comprehenditur sub ΔΕ, ΕΒ.

Si igitur ΑΓ, ΒΔ per centrum transeant, ita ut Ε sit centrum circuli ΑΒΓΔ; manifestum est, æqualibus existentibus ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ, ΕΒ, & rectangulum comprehensum sub ΑΕ, ΕΓ æquale esse ei quod sub ΔΕ, ΕΒ comprehenditur.

Rectæ autem ΑΓ, ΔΒ non transeant per centrum, & sumatur [per 1. 3.] centrum circuli ΑΒΓΔ quod sit Ζ, & à Ζ ad rectas lineas ΑΓ, ΔΒ [per 12. 1.] perpendiculares ducantur ΖΗ, ΖΘ, junganturque ΖΒ, ΖΓ, ΖΕ.



Quoniam igitur recta linea ΗΖ per centrum ducta rectam lineam ΑΓ non ductam per centrum ad rectos angulos secat, [per 3. 3.] & bifariam ipsam secabit: quare ΑΗ ipsi ΗΓ est æqualis. & quoniam recta linea ΑΓ secta est in partes æquales in puncto Η, & in partes inæquales in Ε, erit [per 5. 2.] rectangulum sub ΑΕ, ΕΓ comprehensum una cum ipsius ΗΕ quadrato æquale quadrato ex ΗΓ. commune addatur ex ΗΖ quadratum: ergo rectangulum sub ΑΕ, ΕΓ una cum iis quæ ex ΗΕ, ΗΖ quadratis æquale est quadratis ex ΓΗ, ΗΖ. sed quadratis quidem ex ΕΗ, ΗΖ æquale est [per 47. 1.] quadratum ex ΖΕ; quadratis vero ex ΓΗ, ΗΖ æquale quod ex ΖΓ quadratum: rectangulum igitur sub ΑΕ, ΕΓ una cum quadrato ex ΖΕ æquale est quadrato ex ΖΓ. est autem ΖΓ æqualis ΖΒ: ergo rectangulum sub ΑΕ, ΕΓ una cum quadrato ex ΕΖ æquale est ei quod ex ΖΒ quadrato. eadem ratione & rectangulum sub ΔΕ, ΕΒ una cum quadrato ex ΖΕ æquale est quadrato ex ΖΒ. ostensum autem est & rectangulum sub ΑΕ, ΕΓ una cum quadrato ex ΖΕ æquale ei quod ex ΖΒ quadrato: ergo rectangulum sub ΑΕ, ΕΓ una cum quadrato ex ΖΕ æquale est rectangulo sub ΔΕ, ΕΒ una cum quadrato ex ΖΕ. commune auferatur quod ex ΖΕ quadratum: reliquum igitur rectangulum sub ΑΕ, ΕΓ reliquo sub ΔΕ, ΕΒ rectangulo æquale erit.

Quare si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secent, rectangulum sub segmentis unius

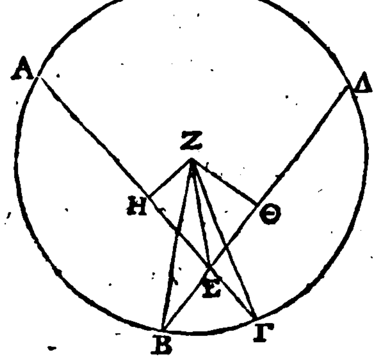
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε΄.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐν γὰρ τῷ κύκλῳ τῷ ΑΒΓΔ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Εἰ μὲν οὖν αἱ ΑΓ, ΒΔ διὰ τοῦ κέντρου εἰσὶν, ὥστε τὸ Ε κέντρον εἶναι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· φανερὸν ὅτι, ἴσων οὐσῶν τῶν ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ, ΕΒ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἔστωσαν δὴ αἱ ΑΓ, ΔΒ μὴ διὰ τοῦ κέντρου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὰς ΑΓ, ΔΒ εὐθείας κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΖΗ, ΖΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΕ.



Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΗΖ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει· ἴση ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΗΓ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΗΕ, ΗΖ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΖ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΓ. ἴση δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ. ἐδείχθη δὲ ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

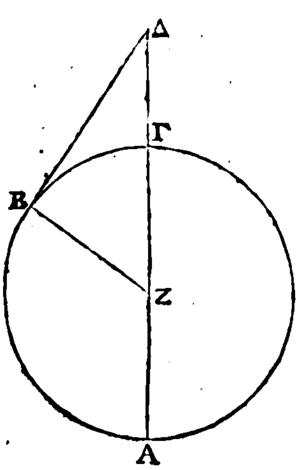
Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον μένον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ'.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται· ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓΑ, ΔΒ, καὶ ἡ μὲν ΔΓΑ τεμνέτω τὸν ΑΒΓ κύκλον, ἡ δὲ ΔΒ ἐφαπτέσθω· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετραγώνῳ. ἡ ΔΓΑ ἤτοι διὰ τοῦ κέντρου ἐστὶν, ἢ οὔ.

Ἔστω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω τὸ Ζ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΒΔ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΑΓ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ζ, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. ἴση δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΔ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΖΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ ἐφαπτομένης.



Ἀλλὰ δὴ ἡ ΔΓΑ μὴ ἔστω διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἤχθω ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΔ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΖ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει· ἡ ΑΖ ἄρα τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Ζ, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. κοινὸν προσ-

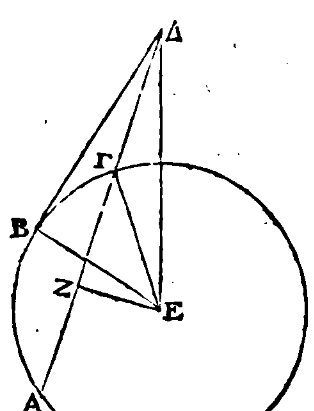
comprehensum æquale est ei quod sub alterius segmentis comprehenditur. quod erat demonstrandum.

PROP. XXXVI. THEOR.

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, & ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum secet, altera vero contingat; rectangulum, comprehensum sub tota secante & exteriore segmento inter punctum & convexam circumferentiam, æquale erit ei quod à contingente fit quadrato.

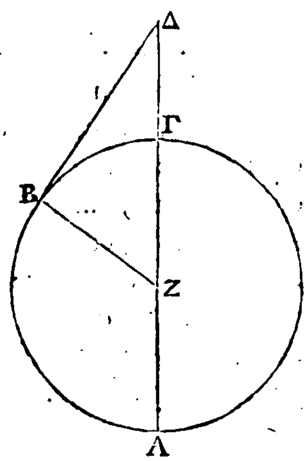
Extra circulum enim ΑΒΓ sumatur aliquod punctum Δ, & ab eo ad dictum circulum cadant duæ rectæ lineæ ΔΓΑ, ΔΒ; & ΔΓΑ quidem circulum ΑΒΓ secet; ΔΒ vero contingat: dico rectangulum sub ΑΔ, ΔΓ æquale esse quadrato quod fit ex ΔΒ. vel igitur ΔΓΑ per centrum transit, vel non.

Transeat primum per centrum circuli ΑΒΓ, quod sit Ζ, & jungatur ΖΒ: erit igitur [per 18. 3.] angulus ΖΒΔ rectus. itaque, quoniam recta linea ΑΓ bifariam secta est in Ζ & ipsi adjicitur ΓΔ, rectangulum sub ΑΔ, ΔΓ una cum quadrato ex ΖΓ æquale erit [per 6. 2.] ei quod fit ex ΖΔ quadrato. æqualis autem est ΖΓ ipsi ΖΒ: ergo rectangulum sub ΑΔ, ΔΓ una cum quadrato ex ΖΒ æquale est quadrato ex ΖΔ. sed quadratum ex ΖΔ [per 47. 1.] est æquale quadratis ipsarum ΖΒ, ΒΔ, rectus enim est angulus ΖΒΔ: rectangulum igitur sub ΑΔ, ΔΓ una cum quadrato ex ΖΒ æquale est ipsarum ΖΒ, ΒΔ quadratis. commune auferatur quadratum ex ΖΒ: ergo reliquum sub ΑΔ, ΔΓ rectangulum æquale erit quadrato quod fit à contingente ΔΒ.



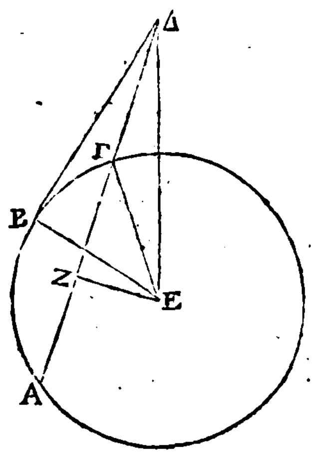
Sed ΔΓΑ non transeat per centrum circuli ΑΒΓ, sumaturque centrum Ε, & ab ipso Ε ad ΑΓ [per 12. 1.] perpendicularis agatur ΕΖ, & jungantur ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ: rectus igitur est ΕΖΔ angulus. & quoniam recta linea ΕΖ per centrum ducta rectam lineam ΑΓ non ductam per centrum ad rectos angulos secat, [per 3. 3.] & bifariam ipsam secabit: quare ΑΖ ipsi ΖΓ est æqualis. rursus, quoniam recta linea ΑΓ bifariam secta est in Ζ atque ipsi adjicitur ΓΔ, erit [per 6. 2.] rectangulum sub ΑΔ, ΔΓ una cum quadrato ex ΖΓ æquale quadrato ex ΖΔ. commune

mune addatur ex ΖΕ quadratum: rectangulum igitur sub ΑΔ, ΔΓ una cum quadratis ex ΓΖ, ΖΕ est æquale quadratis ex ΔΖ, ΖΕ. sed quadratis quidem ex ΔΖ, ΖΕ æquale est [per 47. 1.] ex ΔΕ quadratum, etenim rectus est angulus ΕΖΔ; quadratis vero ex ΓΖ, ΖΕ æquale est quadratum ex ΓΕ: ergo rectangulum sub ΑΔ, ΔΓ una cum quadrato ex ΓΕ est æquale quadrato ex ΕΔ. æqualis autem est ΓΕ ipsi ΕΒ: rectangulum igitur sub ΑΔ, ΔΓ una cum quadrato ex ΕΒ æquale est ei quod ex ΕΔ fit quadrato. sed quadrato ex ΕΔ æqualia sunt [per 47. 1.] quadrata ex ΕΒ, ΒΔ, siquidem rectus est angulus ΕΒΔ: ergo rectangulum sub ΑΔ, ΔΓ una cum quadrato ex ΕΒ æquale est eis quæ ex ΕΒ, ΒΔ fiunt quadratis. commune auferatur quadratum ex ΕΒ: reliquum igitur sub ΑΔ, ΔΓ rectangulum quadrato quod fit ex ΔΒ æquale erit.



Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, & quæ sequuntur. quod erat demonstrandum.

κείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΔΖ, ΖΕ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΕΖΔ· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΔ. ἴση δὲ ἡ ΓΕ τῇ ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΔ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΔ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΒ, ΒΔ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΕΒΔ γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΒ, ΒΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ.



Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXVII. Theor.

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero in eum incidat, sit autem rectangulum comprehensum sub tota secante & exteriore segmento inter punctum & convexam circumferentiam æquale ei quod ab incidente fit quadrato; incidens linea circulum continget.

Extra circulum enim ΑΒΓ sumatur aliquod punctum Δ, atque à puncto Δ in circulum ΑΒΓ cadant duæ rectæ lineæ ΔΓΑ, ΔΒ, & ΔΓΑ quidem circulum secet, ΔΒ vero in illum incidat, sitque rectangulum sub ΑΔ, ΔΓ æquale quadrato quod fit ex ΔΒ: dico ipsam ΔΒ circulum ΑΒΓ contingere.

Ducatur enim [per 17. 3.] recta linea ΔΕ contingens circulum ΑΒΓ, & sumatur [per 1. 3.] circuli ΑΒΓ centrum quod sit Ζ, junganturque ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ: ergo [per 18. 3.] angulus ΖΕΔ rectus est.

Et quoniam ΔΕ circulum ΑΒΓ contingit, secat autem ΔΓΑ, rectangulum sub ΑΔ, ΔΓ æquale erit [per 36. 3.] quadrato ex ΔΕ. sed rectangulum sub ΑΔ, ΔΓ ponitur æquale quadrato ex Δ Β: quadratum igitur

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζʹ.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ᾖ δὲ τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης· ἡ προσπίπτουσα ἐφάψεται τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓΑ, ΔΒ, καὶ ἡ μὲν ΔΓΑ τεμνέτω τὸν κύκλον, ἡ δὲ ΔΒ προσπιπτέτω, ἔστω δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· λέγω ὅτι ἡ ΔΒ ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

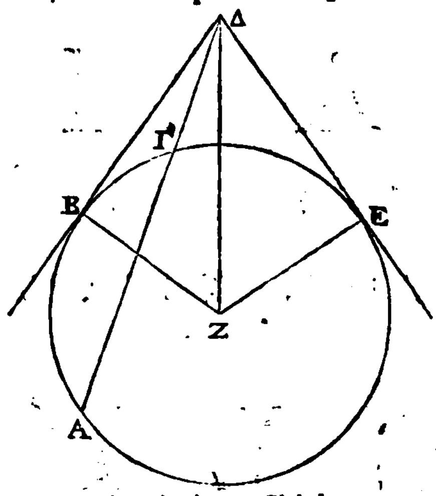
Ἤχθω γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτομένη ἡ ΔΕ, καὶ εἰλήφθω τὸ Ζ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΖΕΔ ὀρθή ἐστι.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΔΕ ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου, τέμνει δὲ ἡ ΔΓΑ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΕ. ὑπόκειται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς

ΔΕ

ΔΕ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· ἴση ἄρα ἡ ΔΒ τῇ ΔΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΖΒ ἴση, δύο δὴ αἱ ΔΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΔΒ, ΒΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΖΔ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΒΖ ἐστὶν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΕΖ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΖ. καὶ ἔστιν ἡ ΖΒ ἐκβαλλομένη διάμετρος, ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται κἂν τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΑΓ τυγχάνῃ.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ex ΔΒ quadrato ex ΔΒ æquale erit, ac propterea linea ΔΕ ipsi ΔΒ æqualis. est autem & ΖΕ æqualis ΖΒ: duæ igitur ΔΕ, ΕΖ duabus ΔΒ, ΒΖ sunt æquales, & basis ipsarum communis ΖΔ: angulus igitur ΔΕΖ [per 8. 1.] est æqualis angulo ΔΒΖ. rectus autem est ΔΕΖ: ergo & ΔΒΖ est rectus. atque ΖΒ producta est diameter: quæ vero diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur [per 16. 3.] contingit circulum ΑΒΓ. similiter etiam demonstrabitur si centrum sit in ipsa ΑΓ.

Si igitur extra circulum sumatur aliquod punctum, & quæ sequuntur. quod erat demonstrandum.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER QUARTUS.

DEFINITIONES.

1. FIGURA rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, quando unusquisque figuræ inscriptæ angulus contingit unumquodque latus ejus in qua inscribitur.

2. Figura similiter circa figuram circumscribi dicitur, quando unumquodque latus circumscriptæ contingit unumquemque angulum ejus circa quam circumscribitur.

3. Figura rectilinea in circulo inscribi dicitur, quando unusquisque inscriptæ figuræ angulus circuli circumferentiam contingit.

4. Figura rectilinea circa circulum circumscribi dicitur, quando unumquodque latus circumscriptæ circuli circumferentiam contingit.

5. Circulus similiter in figura rectilinea inscribi dicitur, quando circuli circumferentia unumquodque latus ejus in qua inscribitur contingit.

6. Circulus circa figuram rectilineam circumscribi dicitur, quando circuli circumferentia unumquemque angulum ejus circa quam circumscribitur contingit.

7. Recta linea in circulo aptari dicitur, quando ejus termini in circuli circumferentia fuerint.

ΟΡΟΙ.

α'. ΣΧΗΜΑ εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἅπτηται.

β'. Σχῆμα δὲ ὁμοίως περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἑκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἅπτηται.

γ'. Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

δ'. Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται.

ε'. Κύκλος δὲ ὁμοίως εἰς σχῆμα λέγεται ἐγγράφεσθαι, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἅπτηται.

ϛ'. Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἅπτηται.

ζ'. Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ᾖ τοῦ κύκλου.

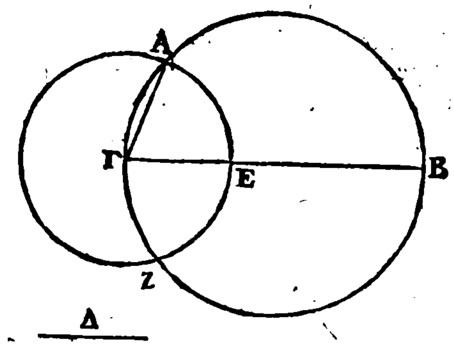
ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα μὴ μείζων τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου ἡ Δ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῇ Δ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

Ἤχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου διάμετρος ἡ ΒΓ. εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ Δ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. ἐνήρμοσται γὰρ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῇ Δ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΒΓ. εἰ δὲ οὔ, μείζων ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς Δ, καὶ κείσθω τῇ Δ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ διαστήματι δὲ τῷ ΓΕ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΑ.



Ἐπεὶ οὖν τὸ Γ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΓΕ. ἀλλ' ἡ Δ τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ Δ ἄρα τῇ ΓΑ ἐστὶν ἴση.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον τὸν ΑΒΓ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, τῇ Δ, ἴση ἐνήρμοσται ἡ ΓΑ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

In dato circulo datæ rectæ lineæ, quæ diametro ejus major non sit, æqualem rectam lineam aptare.

SIT datus circulus ΑΒΓ, data autem recta linea Δ non major circuli diametro: oportet in circulo ΑΒΓ rectæ lineæ Δ æqualem rectam lineam aptare.

Ducatur circuli ΑΒΓ diameter ΒΓ. si igitur ΒΓ sit æqualis ipsi Δ, factum jam erit quod proponebatur. etenim in circulo ΑΒΓ aptata est ΒΓ rectæ lineæ Δ æqualis. sin minus, major est ΒΓ quam Δ, ponaturque [per 3. 1.] ipsi Δ æqualis ΓΕ, & centro quidem Γ intervallo autem ΓΕ [per 3. post.] circulus describatur ΑΕΖ, & [per 1. post.] ΓΑ jungatur.

Itaque quoniam punctum Γ centrum est ΑΕΖ circuli, erit ΓΑ ipsi ΓΕ æqualis. sed Δ est æqualis rectæ ΓΕ: ergo & Δ ipsi ΓΑ æqualis erit.

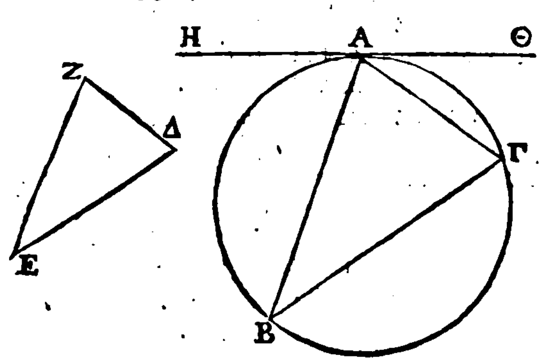
In dato igitur circulo ΑΒΓ, datæ rectæ lineæ Δ, non majore circuli diametro, æqualis aptata est ΓΑ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

Ἤχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ ΗΑΘ κατὰ τὸ Α, καὶ συνεστάτω πρὸς μὲν τῇ ΑΘ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΘΑΓ· πρὸς δὲ τῇ ΗΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΖΔΕ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ.



Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΘΑΗ, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς διῆκταί τις ἡ ΑΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΘΑΓ ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΔ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΖΔΕ ἐστὶν ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον.

PROP. II. PROBL.

In dato circulo inscribere triangulum, æquiangulum dato triangulo.

SIT datus circulus ΑΒΓ, datum autem triangulum ΔΕΖ: oportet in circulo ΑΒΓ inscribere triangulum, triangulo ΔΕΖ æquiangulum.

Ducatur recta linea ΗΑΘ contingens circulum ΑΒΓ in puncto Α, & ad rectam lineam ΑΘ & ad punctum in ea Α constituatur [per 23. 1.] angulus ΘΑΓ æqualis angulo ΔΕΖ: rursus, ad rectam lineam ΗΑ & ad punctum in ipsa Α constituatur angulus ΗΑΒ æqualis angulo ΖΔΕ, & ΒΓ jungatur.

Quoniam igitur circulum ΑΒΓ contingit recta ΘΑΗ, à contactu autem ducta est ΑΓ, ΘΑΓ angulus [per 32. 3.] æqualis ei qui in alterno circuli segmento consistit, videlicet ipsi ΑΒΓ. sed ΘΑΓ angulus æqualis est angulo ΔΕΖ: ergo & angulus ΑΒΓ angulo ΔΕΖ est æqualis. eadem ratione & angulus ΑΓΒ est æqualis angulo ΖΔΕ: reliquus igitur ΒΑΓ angulus reliquo ΕΖΔ [per 32. 1.] æqualis erit: ergo triangulum ΑΒΓ triangulo ΔΕΖ est æquiangulum, & inscriptum est [per 3. def. 4.] in circulo ΑΒΓ.

In dato igitur circulo inscriptum est triangulum æquiangulum dato triangulo. quod erat faciendum.

Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. III. Probl.

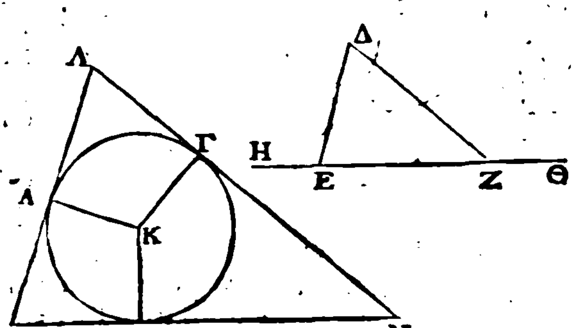
Circa datum circulum circumscribere triangulum, æquiangulum dato triangulo.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γʹ.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

SIT datus circulus ABΓ, datum autem triangulum ΔEZ: oportet circa circulum ABΓ circumscribere triangulum, æquiangulum triangulo ΔEZ.

Protrahatur [per 2. post.] EZ ex utraque parte ad puncta Θ, H, & sumatur [per 1. 3.] circuli ABΓ centrum K, & recta linea KB utcunque ducatur, constituaturque [per 23. 1.] ad lineam KB & ad punctum in ea K angulus BKA æqualis angulo ΔEH, angulo autem ΔZΘ æqualis angulus BKΓ, & per A, B, Γ puncta ducantur [per 17. 3.] rectæ lineæ ΛAM, MBN, NΓΛ circulum ABΓ contingentes.



Quoniam igitur circulum ABΓ contingunt ΛM, MN, NΛ in punctis A, B, Γ, à centro autem K ad puncta A, B, Γ ducantur rectæ KA, KB, KΓ; erunt [per 18. 3.] anguli ad puncta A, B, Γ recti. & quoniam quadrilateri AMBK anguli quatuor [per 32. 1.] quatuor rectis sunt æquales (etenim in duo triangula dividitur quadrilaterum AMBK) è quibus anguli KAM, KBM sunt recti; erunt reliqui AKB, AMB duobus rectis æquales. sunt autem [per 13. 1.] & ΔEH, ΔEZ æquales duobus rectis: anguli igitur AKB, AMB angulis ΔEH, ΔEZ sunt æquales, è quibus AKB ipsi ΔEH est æqualis: ergo reliquus AMB reliquo ΔEZ æqualis erit. similiter demonstrabitur angulus ΛNM ipsi ΔZE æqualis; ergo & reliquus MΛN [per 32. 1.] est æqualis reliquo EΔZ. est igitur ΛMN triangulum æquiangulum triangulo ΔEZ, & [per 4. def. 4.] circumscribitur circa circulum ABΓ.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· δεῖ δὴ περὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἡ ΕΖ ἐπὶ τὰ Θ, Η σημεῖα, καὶ εἰλήφθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Κ, καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν εὐθεῖα ἡ ΚΒ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΚΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Κ τῇ μὲν ὑπὸ ΔΕΗ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΚΑ, τῇ δὲ ὑπὸ ΔΖΘ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΚΓ, καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ ΑΒΓ κύκλου αἱ ΛΑΜ, ΜΒΝ, ΝΓΛ.

Καὶ ἐπεὶ ἐφάπτονται τοῦ ΑΒΓ κύκλου αἱ ΛΜ, ΜΝ, ΝΛ κατὰ τὰ Α, Β, Γ, ἀπὸ δὲ τοῦ Κ κέντρου ἐπὶ τὰ Α, Β, Γ σημεῖα ἐπεζευγμέναι εἰσὶν αἱ ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ· ὀρθαὶ ἄρα εἰσὶν αἱ πρὸς τοῖς Α, Β, Γ σημείοις γωνίαι. καὶ ἐπεὶ τοῦ ΑΜΒΚ τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν (ἐπειδήπερ καὶ εἰς δύο τρίγωνα διαιρεῖται τὸ ΑΜΒΚ τετράπλευρον) ὧν αἱ ὑπὸ ΚΑΜ, ΚΒΜ γωνίαι δύο ὀρθαί εἰσι· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΚΒ, ΑΜΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔΕΗ, ΔΕΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· καὶ αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΚΒ, ΑΜΒ ταῖς ὑπὸ ΔΕΗ, ΔΕΖ ἴσαι εἰσίν, ὧν ἡ ὑπὸ ΑΚΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΗ ἐστιν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΜΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΛΝΜ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστιν ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΛΝ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΜΝ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον.

Circa datum igitur circulum circumscriptum est triangulum, æquiangulum dato triangulo. quod erat faciendum.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. IV. Probl.

In dato triangulo circulum inscribere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δʹ.

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

SIT datum triangulum ABΓ: oportet in triangulo ABΓ circulum inscribere.

Secentur [per 9. 1.] anguli ABΓ, BΓA bifariam à rectis lineis BΔ, ΓΔ, quæ conveniant inter se in puncto Δ, & à puncto Δ ad rectas lineas AB, BΓ, ΓA [per 12. 1.] perpendiculares ducantur ΔE, ΔZ, ΔH.

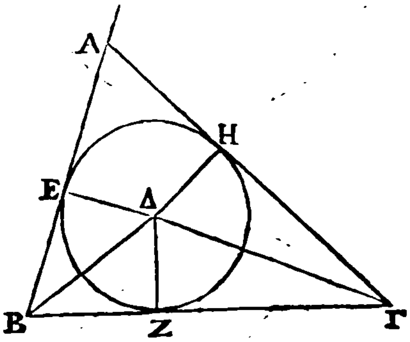
Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθωσαν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ γωνίαι δίχα ταῖς ΒΔ, ΓΔ εὐθείαις, καὶ συμβαλλέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθείας κάθετοι αἱ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ.

Καὶ

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΔ, δίχα γὰρ τέτμηται ἡ ὑπὸ ΑΒΓ, ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΕΔ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΒΖΔ ἴση, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΕΒΔ, ΔΒΖ, τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΔ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν· ἴση ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΔΖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΔΖ ἐστιν ἴση· ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Δ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐφάψεται τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Ε, Ζ, Η σημείοις γωνίας. εἰ γὰρ τεμεῖ αὐτάς, ἔσται ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐντὸς πίπτουσα τοῦ κύκλου, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ Δ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθείας· ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν, καὶ ἔσται κύκλος ἐγγεγραμμένος ἐπὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ κύκλος ἐγγέγραπται ὁ ΕΖΗ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Et quoniam angulus ΑΒΔ est æqualis angulo ΓΒΔ, bifariam enim sectus est angulus ΑΒΓ; estque etiam ΒΕΔ rectus æqualis recto ΒΖΔ; erunt ΕΒΔ, ΔΒΖ duo triangula habentia duos angulos duobus angulis æquales & unum latus uni lateri æquale & utrique commune ΒΔ, quod scilicet uni æqualium angulorum subtenditur: ergo [per 26. 1.] & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, eritque ΔΕ æqualis ΔΖ. eadem ratione erit etiam ΔΗ æqualis ΔΖ: quare centro Δ intervallo autem æquali uni ipsarum ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, & rectas lineas ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ continget; propterea quod recti sunt ad Ε, Ζ, Η anguli. si enim ipsas secet, quæ diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur intra circulum cadet, quod [per 16. 3.] est absurdum: circulus igitur centro Δ intervallo autem æquali uni ipsarum ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ descriptus non secabit rectas lineas ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ: quare ipsas continget, atque circulus erit [per 5. def. 4.] inscriptus in triangulo ΑΒΓ.

In dato igitur triangulo ΑΒΓ inscriptus est circulus ΕΖΗ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε΄.

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· δεῖ δὴ περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ κύκλον περιγράψαι.

Τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΑΓ δίχα κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα, καὶ ἀπὸ τῶν Δ, Ε σημείων ταῖς ΑΒ, ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΔΖ, ΕΖ· συμπεσοῦνται δὴ ἤτοι ἐντὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ἢ ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας, ἢ ἐκτὸς * τῆς ΒΓ.

Συμπιπτέτωσαν πρότερον ἐντὸς κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΖ, ΖΓ, ΖΑ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ· βάσις ἄρα ἡ ΑΖ βάσει τῇ ΖΒ ἴση ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΖΑ ἐστιν ἴση, ὥστε καὶ ἡ ΒΖ τῇ ΖΓ ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος ὁ κύκλος περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. καὶ περιγεγράφθω ὡς ὁ ΑΒΓ.

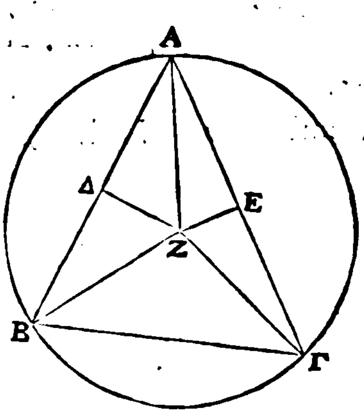
* Legimus τοῦ ΑΒΓ τριγώνου.

Prop. V. Probl.

Circa datum triangulum circulum circumscribere.

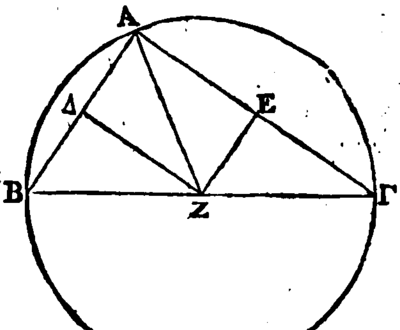
SIT datum triangulum ΑΒΓ: oportet circa datum triangulum ΑΒΓ circulum circumscribere.

Secentur ΑΒ, ΑΓ [per 10. 1.] bifariam in Δ, Ε punctis, & a punctis Δ, Ε ipsis ΑΒ, ΑΓ [per 11. 1.] ad rectos angulos ducantur ΔΖ, ΕΖ; quæ vel intra triangulum ΑΒΓ convenient, vel in recta linea ΒΓ, vel extra triangulum ΑΒΓ.

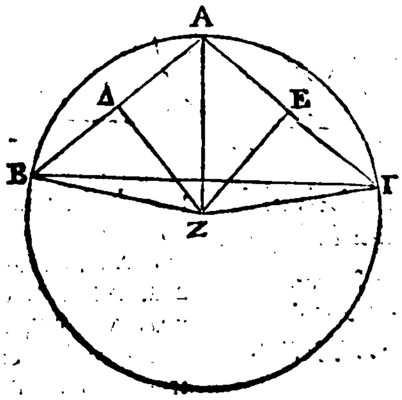


Conveniant primum intra triangulum in puncto Ζ; & ΒΖ, ΖΓ, ΖΑ jungantur. quoniam igitur ΑΔ est æqualis ΔΒ, communis autem & ad rectos angulos ΔΖ; erit [per 4. 1.] basis ΑΖ basi ΖΒ æqualis. similiter ostendetur & ΓΖ æqualis ΖΑ: ergo & ΒΖ est æqualis ΖΓ: tres igitur ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ inter se sunt æquales. quare centro Ζ, intervallo autem æquali uni ipsarum ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit: atque erit [per 6. def. 4.] circulus circumscriptus circa triangulum ΑΒΓ. circumscribatur igitur ut ΑΒΓ.

Sed ΔZ, EZ conveniant in recta linea BΓ, in puncto Z, ut in secunda figura, & AZ jungatur. similiter demonstrabimus punctum Z centrum esse circuli circa triangulum ABΓ circumscripti.



Postremo ΔZ, EZ conveniant extra triangulum ABΓ rursus in Z puncto, ut in tertia figura; & jungantur AZ, ZB, ZΓ. & quoniam AΔ est æqualis ΔB, communis autem & ad rectos angulos ΔZ; basis AZ [per 4. 1.] basi ZB æqualis erit. similiter demonstrabimus & ΓZ ipsi ZA æqualem esse; quare & BZ est æqualis ZΓ; rursus igitur centro Z, intervallo autem æquali uni ipsarum ZA, ZB, ZΓ circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta; atque erit circa triangulum ABΓ circumscriptus. describatur igitur ut ABΓ.



Ἀλλὰ δὴ αἱ ΔΖ, ΕΖ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας κατὰ τὸ Ζ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον περιγραφομένου κύκλου.

Ἀλλὰ δὴ αἱ ΔΖ, ΕΖ συμπιπτέτωσαν ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, κατὰ τὸ Ζ πάλιν, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΖΒ, ΖΓ. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ· βάσις ἄρα ἡ ΑΖ βάσει τῇ ΖΒ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΖΑ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ ἡ ΒΖ τῇ ΖΓ ἴση· ὁ ἄρα πάλιν κέντρῳ τῷ Ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγραφόμενος περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. καὶ γεγράφθω ὡς ὁ ΑΒΓ.

Circa datum igitur triangulum circulus est circumscriptus. quod erat faciendum.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τρίγωνον κύκλος περιγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Corollarium.

Et manifestum est, quod, si centrum circuli intra triangulum ceciderit, angulus BAΓ existens in segmento semicirculo majore minor est recto: si autem ceciderit in recta linea BΓ, angulus in semicirculo rectus erit: & si extra triangulum ABΓ, angulus in segmento minore semicirculo erit major recto. Quare si datum triangulum sit oxygonium, ΔZ, EZ intra triangulum convenient: sin in eo sit angulus rectus BAΓ, in ipsa BΓ: & si sit major recto, extra ABΓ.

Πόρισμα.

Καὶ φανερὸν, ὅτι, ὅτι μὲν ἐντὸς τοῦ τριγώνου πίπτει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία, ἐν μείζονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς· ὅτι δὲ ἐπὶ τῆς ΒΓ, ἐν ἡμικυκλίῳ τυγχάνουσα, ὀρθὴ ἔσται· ὅταν δὲ ἐκτὸς * τῆς ΒΓ εὐθείας τὸ κέντρον πίπτῃ, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, ἐν ἐλάττονι τμήματι ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. ὥστε καὶ ὅταν † ἐλάττων ὀρθῆς τυγχάνῃ ἡ διδομένη γωνία, ἐντὸς τοῦ τριγώνου συμπεσοῦνται αἱ ΔΖ, ΕΖ· ὅταν δὲ ὀρθή, ἐπὶ τῆς ΒΓ· ὅταν δὲ μείζων ὀρθῆς, ἐκτὸς τῆς ΒΓ.

PROP. VI. PROBL.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

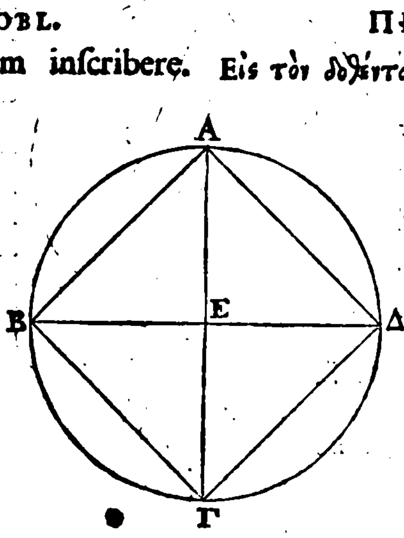
In dato circulo quadratum inscribere.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

SIT datus circulus ABΓΔ: oportet in circulo ABΓΔ quadratum inscribere.

Ducantur [per 11. 1.] circuli ABΓΔ diametri ad rectos angulos inter se AΓ, BΔ; & AB, BΓ, ΓΔ, ΔA jungantur.

Quoniam igitur BE est æqualis EΔ, est enim E centrum, communis autem & ad rectos angulos EA; erit [per 4. 1.] basis AB æqualis basi AΔ. & eadem ratione utraque ipsarum BΓ, ΓΔ utrique BA, AΔ est æqualis: æquila-



Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ εἰς ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

Ἤχθωσαν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ, ΒΔ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, κέντρον γὰρ τὸ Ε, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΑ· βάσις ἄρα ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΑΔ ἴση ἐστί. κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ ἑκατέρᾳ τῶν ΒΑ, ΑΔ ἴση ἐστίν· ἰσό-

* Legimus τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. † Hic locus in omnibus (quos vidimus) codicibus Græcis, tam MSS. quam impresso, male se habet. Nos in versione (pauculis immutatis) restituimus; quod & antea fecerunt *Campanus* & *Clavius*.

πλευρον

ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράπλευρον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΒΔ εὐθεῖα διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΑΔ· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΔ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ ὀρθή ἐστιν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράπλευρον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστί. καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν δοθέντα ΑΒΓΔ κύκλον.

Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τὸν ΑΒΓΔ τετράγωνον ἐγγέγραπται τὸ ΑΒΓΔ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

terum igitur est ΑΒΓΔ quadrilaterum. dico & rectangulum esse. quoniam enim recta linea ΒΔ diameter est ΑΒΓΔ circuli, erit ΒΑΔ semicirculus: quare [per 31. 3.] angulus ΒΑΔ rectus est. & eadem ratione unusquisque ipsorum ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ rectus erit: rectangulum igitur est ΑΒΓΔ quadrilaterum. ostensum autem est æquilaterum esse: igitur quadratum est. & inscriptum est in circulo ΑΒΓΔ.

In dato igitur ΑΒΓΔ circulo inscriptum est quadratum ΑΒΓΔ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

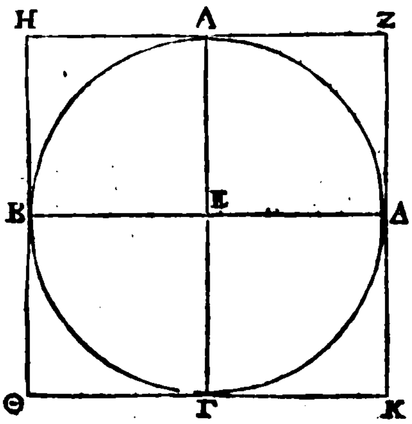
Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

Ἤχθωσαν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ, ΒΔ, καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου αἱ ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΖ.

Ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ΖΗ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ Ε κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ Α ἐπαφὴν ἐπέζευκται ἡ ΕΑ· αἱ ἄρα πρὸς τῷ Α γωνίαι ὀρθαί εἰσι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ αἱ πρὸς τοῖς Β, Γ, Δ σημείοις γωνίαι ὀρθαί εἰσι. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία, ἔστι δὲ ὀρθὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΒΗ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΑΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΖΚ παράλληλός ἐστι. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΗΖ, ΘΚ τῇ ΒΕΔ ἐστὶ παράλληλος. παραλληλόγραμμα ἄρα ἐστὶ τὰ ΗΚ, ΗΓ, ΑΚ, ΖΒ, ΒΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΗΖ τῇ ΘΚ, ἡ δὲ ΗΘ τῇ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, ἀλλ' ἡ μὲν ΑΓ ἑκατέρᾳ τῶν ΗΘ, ΖΚ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΒΔ ἑκατέρᾳ τῶν ΗΖ, ΘΚ ἐστὶν ἴση· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΗΘ, ΖΚ ἑκατέρᾳ τῶν ΗΖ, ΘΚ ἐστὶν ἴση. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗΘΚ τετράπλευρον. λέγω ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΗΒΕΑ, καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΕΒ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΒ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ πρὸς τοῖς Θ, Κ, Ζ γωνίαι ὀρθαί εἰσιν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗΘΚ τετράπλευρον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστί. καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τετράγωνον περιγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Prop. VII. Probl.

Circa datum circulum quadratum circumscribere.

SIT datus circulus ΑΒΓΔ: oportet circa ΑΒΓΔ circulum quadratum circumscribere.

Ducantur circuli ΑΒΓΔ duæ diametri ΑΓ, ΒΔ ad rectos inter se angulos, & per puncta Α, Β, Γ, Δ ducantur [per 17. 3.] rectæ ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΖ contingentes circulum ΑΒΓΔ.

Quoniam igitur ΖΗ contingit circulum ΑΒΓΔ, à centro autem Ε ad contactum qui est ad Α ducitur ΕΑ; erunt [per 18. 3.] anguli ad Α recti. eadem ratione & anguli ad puncta Β, Γ, Δ sunt recti. & quoniam angulus ΑΕΒ est rectus, & ΕΒΗ etiam rectus; erit [per 28. 1.] ΗΘ ipsi ΑΓ parallela. eadem ratione & ΑΓ parallela est ΖΚ. similiter demonstrabimus & utramque ipsarum ΗΖ, ΘΚ ipsi ΒΕΔ parallelam esse. parallelogramma igitur sunt ΗΚ, ΗΓ, ΑΚ, ΖΒ, ΒΚ; ac propterea ΗΖ est [per 34. 1.] æqualis ΘΚ; ΗΘ vero ipsi ΖΚ. & quoniam ΑΓ æqualis est ΒΔ; sed & ΑΓ quidem utrique ipsarum ΗΘ, ΖΚ est æqualis, ΒΔ vero æqualis utrique ΗΖ, ΘΚ; & utraque ΗΘ, ΖΚ utrique ΗΖ, ΘΚ æqualis erit. æquilaterum igitur est ΖΗΘΚ quadrilaterum. dico & rectangulum esse. quoniam enim parallelogrammum est ΗΒΕΑ, atque est rectus ΑΕΒ angulus, & ipse ΑΗΒ [per 34. 1.] rectus erit. similiter demonstrabimus angulos etiam, qui ad puncta Θ, Κ, Ζ, rectos esse: rectangulum igitur est quadrilaterum ΖΗΘΚ. demonstratum autem est & æquilaterum: igitur quadratum est. & circumscriptum est circa circulum ΑΒΓΔ.

Igitur circa datum circulum circumscriptum est quadratum. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθω ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΑΔ δίχα κατὰ τὰ

Prop. VIII. Probl.

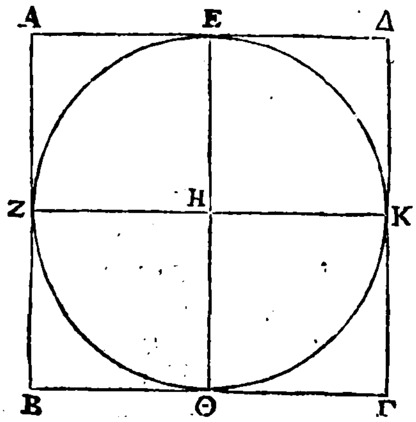
In dato quadrato circulum inscribere.

SIT datum quadratum ΑΒΓΔ: oportet in ΑΒΓΔ quadrato circulum inscribere.

Secetur [per 10. 1.] utraque ipsarum ΑΒ, ΑΔ bifariam

bifariam in punctis Z, E, & per E alterutri ipsarum AB, ΓΔ [per 31. 1.] parallela ducatur EΘ, per Z vero ducatur ZK parallela alterutri AΔ, BΓ: parallelogrammum igitur est unumquodque ipsorum AK, KB, AΘ, ΘΔ, AH, HΓ, BH, HΔ; & latera ipsorum opposita [per 34. 1.] sunt æqualia. & quoniam AΔ est æqualis AB, & ipsius quidem AΔ dimidia est AE, ipsius vero AB dimidia AZ; erit AE ipsi AZ æqualis: & latera etiam ipsis opposita sunt æqualia, ergo ZH est æqualis HE. similiter demonstrabimus & utramque ipsarum HΘ, HK utrique ZH, HE æqualem esse. quatuor igitur HE, HZ, HΘ, HK inter se sunt æquales. itaque centro quidem H intervallo autem æquali uni ipsarum HE, HZ, HΘ, HK circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta; & rectas lineas AB, BΓ, ΓΔ, ΔA continget, propterea quod anguli ad E, Z, Θ, K sunt recti. si enim circulus secat rectas lineas AB, BΓ, ΓΔ, ΔA, quæ diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur intra circulum cadet, quod [per 16. 3.] est absurdum. non igitur centro quidem H intervallo autem æquali uni ipsarum HE, HZ, HΘ, HK circulus descriptus rectas lineas AB, BΓ, ΓΔ, ΔA secabit. ipsas igitur continget, atque erit [per 5. def. 4.] inscriptus in quadrato ABΓΔ.

In dato igitur quadrato circulus est inscriptus. quod erat faciendum.



Ζ, Ε σημεῖα, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ε ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΘ, διὰ δὲ τοῦ Ζ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΚ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἕκαστον τῶν ΑΚ, ΚΒ, ΑΘ, ΘΔ, ΑΗ, ΗΓ, ΒΗ, ΗΔ, καὶ αἱ ἀπεναντίον αὐτῶν πλευραὶ δηλονότι ἴσαι εἰσί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ, καὶ ἔστι τῆς μὲν ΑΔ ἡμίσεια ἡ ΑΕ, τῆς δὲ ΑΒ ἡμίσεια ἡ ΑΖ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΖ· ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον ἴσαι εἰσίν, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΗΕ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΗΘ, ΗΚ ἑκατέρᾳ τῶν ΖΗ, ΗΕ ἐστὶν ἴση. αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Η διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΗΕ, ΗΖ ΗΘ, ΗΚ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων· καὶ ἐφάψεται τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Ε, Ζ, Θ, Κ γωνίας. εἰ γὰρ τεμεῖ ὁ κύκλος τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ τῷ Η διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΗΕ, ΗΖ, ΗΘ, ΗΚ κύκλος γραφόμενος τέμνει τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εὐθείας. ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν καὶ ἔσται ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον.

Εἰς τὸ δοθὲν ἄρα τετράγωνον κύκλος ἐγγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

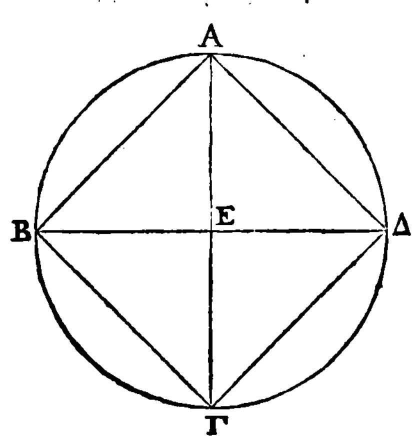
Prop. IX. Probl.

Circa datum quadratum circulum circumscribere.

SIT datum quadratum ABΓΔ: oportet circa quadratum ABΓΔ circulum circumscribere.

Jungantur enim AΓ, BΔ, quæ se invicem in puncto E secent.

Et quoniam ΔA est æqualis AB, communis autem AΓ, duæ ΔA, AΓ duabus BA, AΓ sunt æquales, & basis ΔΓ æqualis basi BΓ, erit [per 8. 1.] & angulus ΔAΓ æqualis angulo BAΓ: angulus igitur ΔAB bifariam sectus est à recta linea AΓ. similiter demonstrabimus unumquemque angulorum ABΓ, BΓΔ, ΓΔA bifariam secari à rectis lineis AΓ, ΔB. quoniam igitur angulus ΔAB angulo ABΓ est æqualis, est autem anguli ΔAB dimidium angulus EAB, anguli vero ABΓ dimidium EBA: & EAB angulus angulo EBA æqualis erit; quare [per 6. 1.] & latus EA lateri EB est æquale. similiter demonstrabimus & utramque rectarum EΓ, EΔ utrique EA, EB



ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ περὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΔ τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΒΑ, ΑΓ ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση· ἡ ἄρα γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἐστὶν ἴση· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΔΒ εὐθειῶν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΑΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, καί ἐστι τῆς μὲν ὑπὸ ΔΑΒ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΕΑΒ, τῆς δὲ ὑπὸ ΑΒΓ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΕΒΑ· καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΕΒΑ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΕΑ πλευρᾷ τῇ ΕΒ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΓ, ΕΔ εὐθειῶν ἑκατέρα τέρᾳ τ̃ ΕΑ, ΕΒ ἴση ἐστὶν· αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ε καὶ διαστήματι ἑνὶ τ̃ ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τ̃ λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος περὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον. περιγεγράφθω ὡς ὁ ΑΒΓΔ.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τετράγωνον κύκλος περιγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

æqualem esse; ergo quatuor rectæ lineæ ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ inter se sunt æquales. centro igitur Ε intervallo autem æquali uni ipsarum ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit, atque erit circumscriptus circa quadratum ΑΒΓΔ. describatur ut ΑΒΓΔ.

Circa datum igitur quadratum circulus est circumscriptus. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι΄.

Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι, ἔχον ἑκατέραν τ̃ πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς.

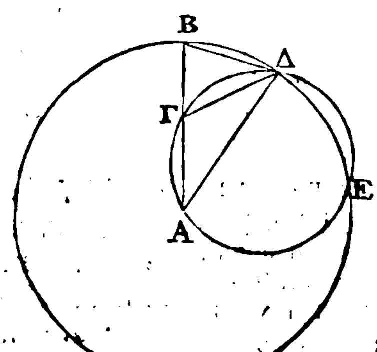
Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ὥστε τὸ ὑπὸ τ̃ ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τ̃ ΓΑ τετραγώνῳ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΔΕ, καὶ ἐνηρμόσθω εἰς τ̃ ΒΔΕ κύκλον τῇ ΑΓ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὔσῃ τ̃ τ̃ ΒΔΕ κύκλου διαμέτρου, ἴση εὐθεῖα ἡ ΒΔ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΓ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον κύκλος ὁ ΑΓΔ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τ̃ ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τ̃ ΑΓ, ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τ̃ ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τ̃ ΒΔ. καὶ ἐπεὶ κύκλου τ̃ ΑΓΔ εἴληπταί τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Β, καὶ ἀπὸ τ̃ Β πρὸς τ̃ ΑΓΔ κύκλον προσπεπτώκασι δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓΑ, ΒΔ, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνει, ἡ δὲ προσπίπτει, καί ἐστι τὸ ὑπὸ τ̃ ΑΒ, ΒΓ, ἴσον τῷ ἀπὸ τ̃ ΒΔ· ἡ ΒΔ ἄρα ἐφάπτεται τ̃ ΑΓΔ κύκλου. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τ̃ κατὰ τὸ Δ ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΔΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΔΓ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τ̃ κύκλου τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΓ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΓΔΑ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ. ἀλλὰ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ ἴση ἐστὶν ἡ ἐκτὸς ἡ ὑπὸ ΒΓΔ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΒΔΑ τῇ ὑπὸ ΓΒΔ ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἐστὶν ἴση. αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ, ἴση ἐστὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΔ πλευρᾷ τῇ ΔΓ. ἀλλ' ἡ ΒΔ τῇ ΓΑ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῇ ΓΔ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΑ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶν ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ τ̃ ὑπὸ ΔΑΓ διπλασίους εἰσίν. ἴση δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ τ̃ ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἄρα διπλῆ ἐστι τ̃ ὑπὸ ΔΑΓ. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἑκατέρᾳ τ̃ ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τ̃ ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ τ̃ ὑπὸ ΔΑΒ ἐστὶ διπλῆ.

Prop. X. Probl.

Isosceles triangulum constituere, habens alterutrum angulorum qui sunt ad basim duplum reliqui.

Ponatur recta quædam linea ΑΒ, quæ secetur [per 11.2.] in puncto Γ, ita ut rectangulum comprehensum sub ΑΒ, ΒΓ æquale sit quadrato ex ΓΑ; & centro quidem Α intervallo autem ΑΒ [per 3. post.] circulus describatur ΒΔΕ; apteturque [per 1.4.] in ΒΔΕ circulo recta linea ΒΔ, æqualis ipsi ΑΓ, quæ non est major diametro circuli ΒΔΕ; & junctis ΔΑ, ΔΓ, triangulo ΑΓΔ [per 5.4.] circumscribatur circulus ΑΓΔ.



Itaque quoniam rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ æquale est quadrato quod fit ex ΑΓ; æqualis autem est ΑΓ ipsi ΒΔ; erit sub ΑΒ, ΒΓ rectangulum quadrato quod ex ΒΔ æquale. & quoniam extra circulum ΑΓΔ sumptum est punctum Β, & à puncto Β in circulum ΑΓΔ cadunt duæ rectæ lineæ ΒΓΑ, ΒΔ, quarum altera quidem secat, reliqua vero in eum incidit, & rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ est æquale quadrato quod ex ΒΔ; recta linea ΒΔ [per 37. 3.] circulum ΑΓΔ continget. quoniam igitur ΒΔ contingit, & à contactu Δ ducta est ΔΓ; erit [per 32. 3.] ΒΔΓ angulus æqualis ei qui in alterno circuli segmento constituitur, videlicet angulo ΔΑΓ. cum autem angulus ΒΔΓ æqualis sit ipsi ΔΑΓ, communis addatur ΓΔΑ: totus igitur ΒΔΑ est æqualis duobus angulis ΓΔΑ, ΔΑΓ. sed ipsis ΓΔΑ, ΔΑΓ exterior angulus ΒΓΔ [per 32.1.] est æqualis: ergo & ΒΔΑ æqualis est ipsi ΒΓΔ. sed ΒΔΑ angulus [per 5. 1.] est æqualis angulo ΓΒΔ, quoniam & latus ΑΔ lateri ΑΒ est æquale: ergo & ΔΒΑ ipsi ΒΓΔ æqualis erit. tres igitur anguli ΒΔΑ, ΔΒΑ, ΒΓΔ inter se sunt æquales. & quoniam angulus ΔΒΓ æqualis est angulo ΒΓΔ, latus ΒΔ lateri ΔΓ [per 6. 1.] est æquale. sed ΒΔ ponitur æqualis ipsi ΓΑ: ergo & ΑΓ est æqualis ΓΔ: quare & angulus ΓΔΑ [per 5.1.] æqualis est angulo ΔΑΓ: anguli igitur ΓΔΑ, ΔΑΓ simul ipsius anguli ΔΑΓ dupli sunt. est autem [per 32.1.] & ΒΓΔ angulus æqualis angulis ΓΔΑ, ΔΑΓ; ergo & ΒΓΔ duplus est ipsius ΔΑΓ. sed ΒΓΔ est æqualis alterutri ipsorum ΒΔΑ, ΔΒΑ: quare & alteruter ipsorum ΒΔΑ, ΔΒΑ ipsius ΔΑΒ est duplus.

N Isosceles

Isosceles igitur triangulum ΑΔΒ constitutum est, habens alterutrum eorum angulorum qui sunt ad basim ΒΔ duplum reliqui. quod erat faciendum.

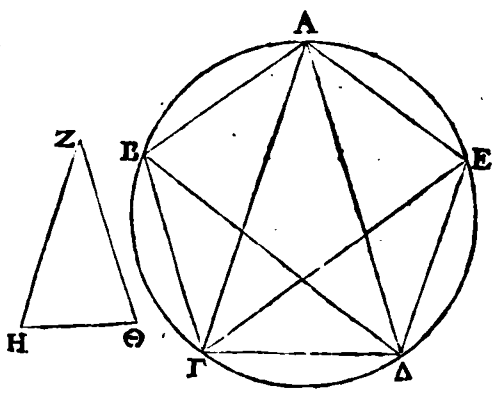
Ἰσοσκελὲς ἄρα τρίγωνον συνίσταται τὸ ΑΔΒ, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ ΒΔ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XI. Probl.

In dato circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum inscribere.

SIT datus circulus ΑΒΓΔΕ: oportet in ΑΒΓΔΕ circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum inscribere.

Ponatur [per 10. 4.] triangulum isosceles ΖΗΘ, habens alterutrum angulorum ad Η, Θ duplum anguli qui est ad Ζ: & inscribatur [per 2. 4.] in circulo ΑΒΓΔΕ triangulo ΖΗΘ æquiangulum triangulum ΑΓΔ; ita ut angulo quidem qui est ad Ζ æqualis sit angulus ΓΑΔ, utrique vero ipsorum qui ad Η, Θ sit æqualis uterque ΑΓΔ, ΓΔΑ: alteruter igitur ΑΓΔ, ΓΔΑ duplus est anguli ΓΑΔ. secetur [per 9. 1.] uterque ipsorum ΑΓΔ, ΓΔΑ bifariam à rectis lineis ΓΕ, ΔΒ, & ducantur ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΑ.



Quoniam igitur uterque ipsorum ΑΓΔ, ΓΔΑ duplus est ipsius ΓΑΔ, & secti sunt bifariam à rectis lineis ΓΕ, ΔΒ; quinque anguli ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ sunt inter se æquales. æquales autem anguli [per 26. 3.] æqualibus circumferentiis insistunt: quinque igitur circumferentiæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ æquales sunt inter se. sed [per 29. 3.] æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt: ergo & quinque rectæ lineæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ inter se sunt æquales: æquilaterum est igitur ΑΒΓΔΕ pentagonum. dico & æquiangulum esse. quoniam enim circumferentia ΑΒ æqualis est circumferentiæ ΔΕ, communis addatur ΒΓΔ: tota igitur ΑΒΓΔ circumferentia toti circumferentiæ ΕΔΓΒ est æqualis. & circumferentiæ quidem ΑΒΓΔ insistit angulus ΑΕΔ, circumferentiæ vero ΕΔΓΒ insistit angulus ΒΑΕ: ergo & ΒΑΕ angulus [per 27. 3.] est æqualis angulo ΑΕΔ. eadem ratione & unusquisque angulorum ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ alterutri ipsorum ΒΑΕ, ΑΕΔ est æqualis: æquiangulum igitur est ΑΒΓΔΕ pentagonum. ostensum autem est & æquilaterum esse.

In dato igitur circulo inscriptum est pentagonum æquilaterum & æquiangulum. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

ΕΣτω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἐκκείσθω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΖΗΘ, διπλασίονα ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τοῖς Η, Θ γωνιῶν τῆς πρὸς τῷ Ζ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον τῷ ΖΗΘ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΓΔ, ὥστε τῇ μὲν πρὸς τῷ Ζ γωνίᾳ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΓΑΔ, ἑκατέραν δὲ τῶν πρὸς τοῖς Η, Θ ἴσην ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ τῆς ὑπὸ ΓΑΔ ἐστὶ διπλῆ. τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ δίχα ὑπὸ τῶν ΓΕ, ΔΒ εὐθειῶν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΑ.

Ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ γωνιῶν διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΑΔ, καὶ τετμημέναι εἰσὶ δίχα ὑπὸ τῶν ΓΕ, ΔΒ εὐθειῶν· αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ πέντε ἄρα περιφέρειαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΔΕ περιφερείᾳ ἴση ἐστί, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΒΓΔ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια ὅλῃ τῇ ΕΔΓΒ περιφερείᾳ ἴση ἐστί. καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς ΑΒΓΔ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΔ, ἐπὶ δὲ τῆς ΕΔΓΒ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΕ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία ἄρα τῇ ὑπὸ ΑΕΔ ἴση ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΒΑΕ, ΑΕΔ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XII. Probl.

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum & æquiangulum circumscribere.

SIT datus circulus ΑΒΓΔΕ: oportet circa circulum ΑΒΓΔΕ pentagonum æquilaterum & æquiangulum circumscribere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ΄.

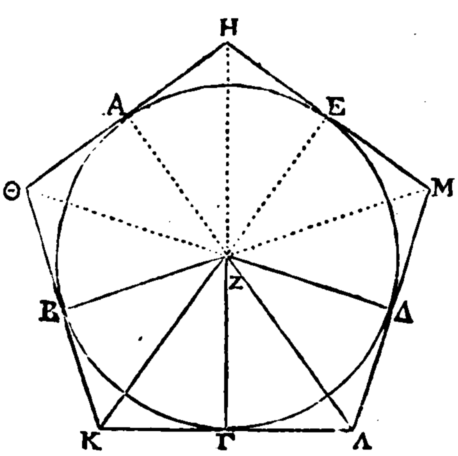
Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

ΕΣτω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ περὶ τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Νενοήσθω

Νενοήσθω τοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου τῶν γωνιῶν σημεῖα, τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, ὥστε ἴσας εἶναι τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ περιφερείας· καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε ἤχθωσαν τοῦ κύκλου ἐφαπτόμεναι αἱ ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ· καὶ εἰλήφθω τοῦ ΑΒΓΔΕ κύκλου κέντρον τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ, ΖΛ, ΖΔ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΚΛ εὐθεῖα ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓΔΕ κύκλου κατὰ τὸ Γ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ζ κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ Γ ἐπαφὴν ἐπέζευκται ἡ ΖΓ· ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΚΛ· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν πρὸς τῷ Γ γωνιῶν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς Β, Δ σημείοις γωνίαι ὀρθαί εἰσι. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΖΓΚ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΖΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΓ, ΓΚ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΚ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΚ ἴσον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΖΓ, ΓΚ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΚ ἐστὶν ἴσα, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἐστὶν ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΚ ἐστὶν ἴσον, ἴση ἄρα ἡ ΒΚ τῇ ΓΚ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ, καὶ κοινὴ ἡ ΖΚ, δύο δὴ αἱ ΒΖ, ΖΚ δυσὶ ταῖς ΓΖ, ΖΚ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΒΚ βάσει τῇ ΓΚ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΚ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΖΓ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΚΖ τῇ ὑπὸ ΖΚΓ ἐστὶν ἴση· διπλῆ ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΓ τῆς ὑπὸ ΚΖΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΚΓ τῆς ὑπὸ ΖΚΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΖΔ τῆς ὑπὸ ΓΖΛ ἐστὶ διπλῆ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΛΔ τῆς ὑπὸ ΓΛΖ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ περιφέρεια τῇ ΓΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΖΓ τῇ ὑπὸ ΓΖΔ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΓ τῆς ὑπὸ ΚΖΓ διπλῆ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΓ διπλῆ τῆς ὑπὸ ΛΖΓ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΚΖΓ τῇ ὑπὸ ΓΖΛ. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΖΚΓ, ΖΛΓ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΖΓ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΚΓ εὐθεῖα τῇ ΓΛ, ἡ δὲ ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΓ τῇ ΓΛ, διπλῆ ἄρα ἡ ΚΛ τῆς ΚΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, καὶ ἡ ΘΚ τῆς ΒΚ διπλῆ. καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ἴση ἡ ΒΚ τῇ ΚΓ, καὶ ἔστι διπλῆ ἡ μὲν ΚΛ τῆς ΚΓ, ἡ δὲ ΘΚ τῆς ΒΚ· καὶ ΘΚ ἄρα τῇ ΚΛ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν ΗΘ, ΗΜ, ΜΛ ἑκατέρᾳ τῶν ΘΚ, ΚΛ ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΛΜ πεντάγωνον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΓ, καὶ ἐδείχθη τῆς μὲν ὑπὸ ΖΚΓ διπλῆ ἡ ὑπὸ ΘΚΛ, τῆς δὲ ὑπὸ ΖΛΓ διπλῆ ἡ ὑπὸ ΚΛΜ· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΛ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΛΜ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΚΘΗ, ΘΗΜ, ΗΜΛ ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘΚΛ,



Intelligantur pentagoni in circulo [per 11. 4.] descripti angulorum puncta Α, Β, Γ, Δ, Ε, ita ut circumferentiæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ sint æquales; & per puncta Α, Β, Γ, Δ, Ε ducantur [per 17. 3.] circulum contingentes ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ: & sumpto circuli ΑΒΓΔΕ centro Ζ, jungantur ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ, ΖΛ, ΖΔ.

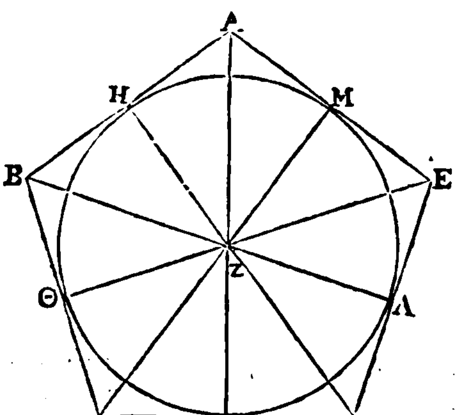
Quoniam igitur recta linea ΚΛ contingit circulum ΑΒΓΔΕ in puncto Γ, & à centro Ζ ad contactum qui est ad Γ ducta est ΖΓ; erit [per 18. 3.] ΖΓ ad ipsam ΚΛ perpendicularis: rectus igitur est uterque angulorum qui sunt ad Γ. eadem ratione & anguli qui ad puncta Β, Δ sunt recti. & quoniam rectus est angulus ΖΓΚ, quadratum quod fit ex ΖΚ [per 47. 1.] æquale est quadratis ex ΖΓ, ΓΚ. & ob eandem causam quadratis ex ΖΒ, ΒΚ æquale est ex ΖΚ quadratum: quadrata igitur ex ΖΓ, ΓΚ quadratis ex ΖΒ, ΒΚ sunt æqualia; è quibus quod fit ex ΖΓ ei quod fit ex ΖΒ est æquale: ergo reliquum quod fit ex ΓΚ reliquo ex ΒΚ æquale erit; æqualis igitur est ΒΚ ipsi ΓΚ. & quoniam ΖΒ est æqualis ΖΓ, communis autem ΖΚ; duæ ΒΖ, ΖΚ duabus ΓΖ, ΖΚ sunt æquales, & basis ΒΚ est æqualis basi ΓΚ; erit igitur [per 8. 1.] angulus ΒΖΚ æqualis angulo ΚΖΓ, & angulus ΒΚΖ angulo ΖΚΓ æqualis: duplus igitur est angulus ΒΖΓ anguli ΚΖΓ, & angulus ΒΚΓ duplus ipsius ΖΚΓ. eadem ratione & angulus ΓΖΔ duplus est anguli ΓΖΛ, angulus vero ΓΛΔ duplus anguli ΓΛΖ. & quoniam circumferentia ΒΓ circumferentiæ ΓΔ est æqualis, & angulus ΒΖΓ [per 27. 3.] angulo ΓΖΔ æqualis erit. atque est angulus quidem ΒΖΓ anguli ΚΖΓ duplus, angulus vero ΔΖΓ duplus ipsius ΛΖΓ: æqualis igitur est angulus ΚΖΓ angulo ΓΖΛ. sunt igitur ΖΚΓ, ΖΛΓ duo triangula habentia duos angulos duobus angulis æquales alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, quod ipsis commune est nempe ΖΓ; ergo [per 26. 1.] & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habent, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem: recta igitur linea ΚΓ est æqualis rectæ ΓΛ, & angulus ΖΚΓ æqualis angulo ΖΛΓ. & quoniam ΚΓ est æqualis ΓΛ, erit ΚΛ ipsius ΚΓ dupla. eadem ratione & ΘΚ ipsius ΒΚ dupla ostendetur. rursus, quoniam ΒΚ ostensa est æqualis ipsi ΚΓ, atque est ΚΛ quidem dupla ΚΓ, ΘΚ vero ipsius ΒΚ dupla; erit & ΘΚ ipsi ΚΛ æqualis. similiter & unaquæque ipsarum ΗΘ, ΗΜ, ΜΛ ostendetur æqualis alterutri ΘΚ, ΚΛ: æquilaterum igitur est ΗΘΚΛΜ pentagonum. dico etiam æquiangulum esse. quoniam enim angulus ΖΚΓ est æqualis angulo ΖΛΓ, & ostensus est ipsius quidem ΖΚΓ duplus angulus ΘΚΛ; ipsius vero ΖΛΓ duplus ΚΛΜ: erit & ΘΚΛ angulus angulo ΚΛΜ æqualis. simili ratione ostendetur & unusquisque ipsorum ΚΘΗ, ΘΗΜ, ΗΜΛ alterutri ΘΚΛ, KAM æqualis: quinque igitur anguli HΘK, ΘKΛ, KAM, ΛMH, MHΘ inter se sunt æquales. ergo æquiangulum est HΘKΛM pentagonum. ostensum autem est etiam æquilaterum: & circumscriptum est circa ΑΒΓΔΕ circulum. quod erat faciendum.

Prop. XIII. Probl.

In dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inscribere.

SIT datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum ΑΒΓΔΕ: oportet in ΑΒΓΔΕ pentagono circulum inscribere.

Secetur [per 9. 1.] uterque angulorum ΒΓΔ, ΓΔΕ bifariam à rectis lineis ΓΖ, ΔΖ; & à puncto Ζ, in quo conveniunt inter se ΓΖ, ΔΖ, ducantur rectæ lineæ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. quoniam autem ΒΓ est æqualis ΓΔ, communis autem ΓΖ, duæ ΒΓ, ΓΖ duabus ΔΓ, ΓΖ sunt æquales, & angulus ΒΓΖ est æqualis angulo ΔΓΖ: basis igitur ΒΖ basi ΔΖ [per 4. 1.] est æqualis, & ΒΖΓ triangulum æquale triangulo ΔΓΖ, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur: angulus igitur ΓΒΖ angulo ΓΔΖ æqualis erit. & quoniam angulus ΓΔΕ anguli ΓΔΖ est duplus, & angulus quidem ΓΔΕ angulo ΑΒΓ æqualis, angulus vero ΓΔΖ angulo ΓΒΖ æqualis; erit & ΓΒΑ angulus duplus anguli ΓΒΖ; ac propterea angulus ΑΒΖ angulo ΖΒΓ æqualis: angulus igitur ΑΒΓ bifariam secatur à recta linea ΒΖ. similiter demonstrabitur & unumquemque angulorum ΒΑΕ, ΑΕΔ à rectis lineis ΖΑ, ΖΕ bifariam secari. itaque à puncto Ζ ad rectas lineas ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ducantur perpendiculares ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ. & quoniam angulus ΘΓΖ est æqualis angulo ΚΓΖ, est autem & rectus ΖΘΓ recto ΖΚΓ æqualis: erunt ΖΘΓ, ΖΚΓ duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, commune scilicet utrique ΖΓ, quod uni æqualium angulorum subtenditur: ergo [per 26. 1.] & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, atque erit perpendicularis ΖΘ perpendiculari ΖΚ æqualis. similiter ostendetur & unaquæque ipsarum ΖΛ, ΖΜ, ΖΗ æqualis alterutri ΖΘ, ΖΚ: quinque igitur rectæ lineæ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ inter se sunt æquales. quare centro Ζ intervallo autem æquali uni ipsarum ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, & rectas lineas ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ continget, propterea quod anguli ad Η, Θ, Κ, Λ, Μ sunt recti. si enim ipsas non contingit, sed secat; quæ diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate du-



ΚΑΜ ἴση· αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΗΘΚ, ΘΚΛ, ΚΛΜ, ΛΜΗ, ΜΗΘ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΛΜ πεντάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγʹ.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψαι.

ΕΣτω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθω γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑφ' ἑκατέρας τῶν ΓΖ, ΔΖ εὐθειῶν· καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ ΓΖ, ΔΖ εὐθεῖαι, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ εὐθεῖαι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, δύο δὴ αἱ ΒΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΔΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΓΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΖ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΒΖ βάσει τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΒΖΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστί, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσίν, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΖ. καὶ ἐπεὶ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῆς ὑπὸ ΓΔΖ διπλῆ, ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΑ ἄρα τῆς ὑπὸ ΓΒΖ ἐστὶ διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΒΖ εὐθείας. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΕ, ΑΕΔ δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΖΑ, ΖΕ εὐθειῶν. ἤχθωσαν δὴ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εὐθείας κάθετοι αἱ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΘΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΓΖ, ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΖΘΓ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΖΚΓ ἴση, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΖΘΓ, ΖΚΓ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΖΓ ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει· ἴση ἄρα ἡ ΖΘ κάθετος τῇ ΖΚ καθέτῳ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΛ, ΖΜ, ΖΗ ἑκατέρᾳ τῶν ΖΘ, ΖΚ ἴση ἐστίν· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐφάψεται τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Η, Θ, Κ, Λ, Μ σημείοις γωνίας. εἰ γὰρ οὐκ ἐφάψεται αὐτῶν ἀλλὰ τεμεῖ αὐτάς, συμβήσεται τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐντὸς πίπτει τοῦ κύκλου, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ τῷ Ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ εὐθειῶν γραφόμενος τεμεῖ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εὐθείας· ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν. γεγράφθω ὡς ὁ ΗΘΚΛΜ.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος ἐγγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

citur intra circulum cadet, quod absurdum esse [per 16. 3.] ostensum est. centro igitur Z & intervallo æquali uni rectarum ZH, ZΘ, ZK, ZΛ, ZM circulus descriptus rectas lineas AB, BΓ, ΓΔ, ΔE, EA non secabit: ipsas igitur continget. describatur ut HΘKΛM.

In dato igitur pentagono æquilatero & æquiangulo circulus est inscriptus. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅπερ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον περιγράψαι.

Τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΓΖ, ΖΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν εὐθεῖαι, ἐπὶ τὰ Β, Α, Ε σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. ὁμοίως δὴ τῷ πρὸ τούτου δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΕ, ΑΕΔ γωνιῶν δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκάστης τῶν ΒΖ, ΖΑ, ΖΕ εὐθειῶν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΓΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΕ, καί ἐστι τῆς μὲν ὑπὸ ΒΓΔ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΖΓΔ, τῆς δὲ ὑπὸ ΓΔΕ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΓΔΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΖΓΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΖΓ πλευρᾷ τῇ ΖΔ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΖΓ, ΖΔ ἐστὶν ἴση· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον. περιγεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ ΑΒΓΔΕ.

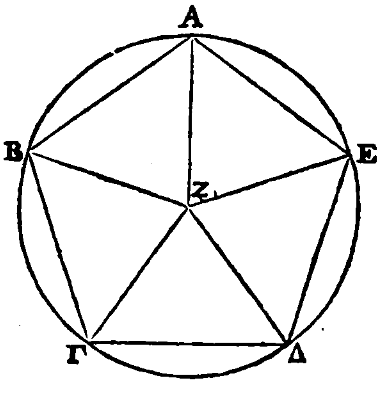
Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος περιγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XIV. Probl.

Circa datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum circulum circumscribere.

SIT datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum ABΓΔE: oportet circa pentagonum ABΓΔE circulum circumscribere.

Secetur [per 9. 1.] uterque ipsorum BΓΔ, ΓΔE angulorum bifariam à rectis lineis ΓZ, ZΔ; & à puncto Z, in quo conveniunt rectæ lineæ, ad puncta B, A, E ducantur ZB, ZA, ZE. similiter ut in antecedenti demonstrabitur unumquemque angulorum ΓBA, BAE, AEΔ à rectis lineis BZ, ZA, ZE bifariam secari. & quoniam angulus BΓΔ angulo ΓΔE est æqualis, atque est anguli BΓΔ dimidius angulus ZΓΔ, anguli vero ΓΔE dimidius ΓΔZ; erit ZΓΔ angulus æqualis angulo ZΔΓ: quare [per 6. 1.] & latus ZΓ lateri ZΔ est æquale. similiter demonstrabitur unaquæque ipsarum ZB, ZA, ZE æqualis alterutri ZΓ, ZΔ: quinque igitur rectæ lineæ ZA, ZB, ZΓ, ZΔ, ZE sunt inter se æquales. ergo centro Z & intervallo æquali uni ipsarum, ZA, ZB, ZΓ, ZΔ, ZE circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, eritque circumscriptus circa pentagonum æquilaterum & æquiangulum ABΓΔE. describatur, & sit ABΓΔE.



Circa datum igitur pentagonum æquilaterum & æquiangulum circumscriptus est circulus. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕΖ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕΖ κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἤχθω τοῦ ΑΒΓΔΕΖ κύκλου διάμετρος ἡ ΑΔ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Η, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Δ διαστήματι δὲ τῷ ΔΗ κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΗΓΘ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΗ, ΓΗ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Β, Ζ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ,

Prop. XV. Probl.

In dato circulo hexagonum æquilaterum & æquiangulum inscribere.

SIT datus circulus ABΓΔEZ: oportet in circulo ABΓΔEZ hexagonum æquilaterum & æquiangulum inscribere.

Ducatur circuli ABΓΔEZ diameter AΔ, sumaturque centrum circuli H, & centro Δ intervallo autem ΔH [per 3. post.] circulus describatur EHΓΘ, junctæque EH, ΓH ad puncta B, Z producantur, & jungantur AB, BΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ: dico hexagonum ΑΒΓΔΕΖ æquilaterum esse & æquiangulum.

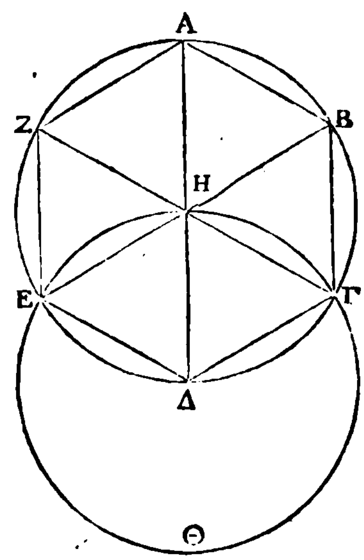
Quoniam enim Η punctum centrum est circuli ΑΒΓΔΕΖ, erit ΗΕ ipsi ΗΔ æqualis. rursus, quoniam Δ centrum est circuli ΕΗΓΘ, erit ΔΕ æqualis ΔΗ. sed ΗΕ ipsi ΗΔ æqualis ostensa est, ergo ΗΕ ipsi ΕΔ est æqualis: æquilaterum igitur est ΕΗΔ triangulum, ideoque tres ipsius anguli ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ sunt inter se æquales, quoniam [per 5. 1.] triangulorum isoscelium anguli ad basim sunt inter se æquales. & sunt [per 32. 1.] trianguli tres anguli æquales duobus rectis: angulus igitur ΕΗΔ est tertia pars duorum rectorum. similiter ostendetur & ΔΗΓ duorum rectorum pars tertia. & quoniam [per 13.1.] recta linea ΓΗ super rectam ΕΒ insistens angulos qui deinceps sunt ΕΗΓ, ΓΗΒ duobus rectis æquales efficit, erit & reliquus ΓΗΒ pars tertia duorum rectorum: anguli igitur ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ inter se sunt æquales. & qui ipsis ad verticem sunt anguli ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ æquales sunt [per 15. 1.] angulis ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ: quare sex anguli ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ sunt inter se æquales. sed [per 26. 3.] æquales anguli æqualibus circumferentiis insistunt: sex igitur circumferentiæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ inter se sunt æquales. æquales autem circumferentias [per 29. 3.] æquales rectæ lineæ subtendunt: ergo & sex rectæ lineæ inter se æquales sunt, ac propterea æquilaterum est ΑΒΓΔΕΖ hexagonum. dico & æquiangulum esse. quoniam enim circumferentia ΑΖ circumferentiæ ΕΔ est æqualis, communis addatur circumferentia ΑΒΓΔ: tota igitur ΖΑΒΓΔ circumferentia æqualis est toti circumferentiæ ΕΔΓΒΑ, & circumferentiæ ΖΑΒΓΔ angulus ΖΕΔ insistit, circumferentiæ vero ΕΔΓΒΑ insistit angulus ΑΖΕ: angulus igitur ΑΖΕ [per 27. 3.] angulo ΔΕΖ est æqualis. similiter ostendentur & reliqui anguli hexagoni ΑΒΓΔΕΖ sigillatim æquales alterutri ipsorum ΑΖΕ, ΖΕΔ: est igitur æquiangulum ΑΒΓΔΕΖ hexagonum. ostensum autem est & æquilaterum esse: & inscriptum est in circulo ΑΒΓΔΕΖ.

In dato igitur circulo inscriptum est hexagonum æquilaterum & æquiangulum. quod erat faciendum.

Corollarium.

Ex hoc manifestum est hexagoni latus circuli semidiametro æquale esse.

Et si per puncta Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ ducamus contingentes circulum, circa circulum circumscribetur hexagonum æquilaterum & æquiangulum, ad modum eorum, quæ de pentagono dicta sunt. ad quorum modum etiam dato hexagono circulum inscribemus & circumscribemus.



ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ἰσογώνιον.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΗΔ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΕΗΓΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΔΗ. ἀλλ' ἡ ΗΕ τῇ ΗΔ ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ ΗΕ ἄρα τῇ ΕΔ ἐστὶν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗΔ τρίγωνον, καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αὐτοῦ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἐπειδήπερ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καί εἰσιν αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΗΔ γωνία τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΔΗΓ τρίτον δύο ὀρθῶν. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΗ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΕΒ σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΗΓ, ΓΗΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὥστε καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν αὐταῖς αἱ ὑπὸ ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ· αἱ ἓξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ ἓξ ἄρα περιφέρειαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· αἱ ἓξ ἄρα εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ περιφέρεια τῇ ΕΔ περιφερείᾳ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια· ὅλη ἄρα ἡ ΖΑΒΓΔ περιφέρεια ὅλῃ τῇ ΕΔΓΒΑ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση, καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς ΖΑΒΓΔ περιφερείας ἡ ὑπὸ ΖΕΔ γωνία, ἐπὶ δὲ τῆς ΕΔΓΒΑ ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ΑΒΓΔΕΖ ἑξαγώνου κατὰ μίαν ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΑΖΕ, ΖΕΔ γωνιῶν· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒΓΔΕΖ κύκλον.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

ΚΑΙ ἐὰν διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, ἀκολούθως τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις. καὶ ἔτι διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις, εἰς τὸ δοθὲν ἑξάγωνον κύκλον ἐγγράψομέν τε καὶ περιγράψομεν.

ΠΡΟ-

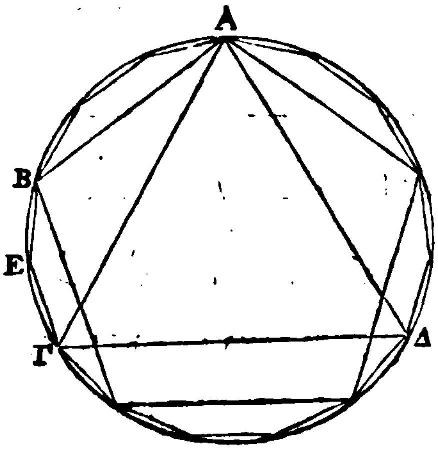
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛʹ.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τριγώνου μὲν ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένου πλευρὰ ἡ ΑΓ, πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ ΑΒ· οἵων ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἴσων τμημάτων δεκαπέντε, τοιούτων ἡ μὲν ΑΒΓ περιφέρεια τρίτον οὖσα τοῦ κύκλου ἔσται πέντε. ἡ δὲ ΑΒ περιφέρεια, πέμπτον οὖσα τοῦ κύκλου, ἔσται τριῶν· λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΓ τῶν ἴσων δύο. τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, ἑκατέρα ἄρα τῶν ΒΕ, ΕΓ περιφερειῶν πεντεκαιδέκατόν ἐστι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. ἐὰν ἄρα ἐπιζεύξαντες τὰς ΒΕ, ΕΓ εὐθείας, ἴσας αὐταῖς κατὰ τὸ συνεχὲς εὐθείας ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ἔσται εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΟΜΟΙΩΣ δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου, ἐὰν διὰ τῶν κατὰ κύκλου διαιρέσεων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. ἔτι δὲ διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις, καὶ εἰς τὸ δοθὲν πεντεκαιδεκάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψομέν τε καὶ περιγράψομεν.



PROP. XVI. PROBL.

In dato circulo quindecagonum æquilaterum & æquiangulum inſcribere.

SIT datus circulus ΑΒΓΔ: oportet in circulo ΑΒΓΔ quindecagonum æquilaterum & æquiangulum inſcribere.

Inſcribatur circulo ΑΒΓΔ trianguli quidem æquilateri ipſi inſcripti latus ΑΓ, pentagoni vero æquilateri latus ΑΒ: qualium igitur partium circulus ΑΒΓΔ eſt quindecim, talium circumferentia ΑΒΓ (tertia exiſtens circuli) erit quinque. circumferentia vero ΑΒ, quæ quinta eſt circuli, erit trium: ergo reliqua ΒΓ eſt duarum. ſecetur [per 30. 3.] ΒΓ bifariam in puncto Ε: quare utraque ipſarum ΒΕ, ΕΓ circumferentiarum quintadecima pars eſt ΑΒΓΔ circuli. ſi igitur jungentes ΒΕ, ΕΓ æquales ipſis in continuum rectas lineas circulo ΑΒΓΔ [per 1. 4.] aptemus, erit in ipſo inſcriptum quindecagonum æquilaterum & æquiangulum. quod erat faciendum.

AD MODUM autem eorum quæ dicta ſunt de pentagono, ſi per circuli diviſiones ducamus rectas lineas circulum contingentes, circa ipſum circumſcribetur quindecagonum æquilaterum & æquiangulum. & inſuper, ad modum eorum quæ dicta ſunt de pentagono, dato quindecagono æquilatero & æquiangulo, circulum inſcribemus & circumſcribemus.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER QUINTUS.

DEFINITIONES.

1. PArs est magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando minor majorem metitur.

2. Multiplex est major minoris, quando minor majorem metitur.

3. * Ratio est duarum magnitudinum ejusdem generis secundum quantuplicitatem mutua quædam habitudo.

4. Rationem inter se magnitudines habere dicuntur, quæ multiplicatæ se invicem superare possunt.

5. In eadem ratione magnitudines esse dicuntur, prima ad secundam & tertia ad quartam; quando primæ & tertiæ æque multiplices secundæ & quartæ æque multiplices, juxta quamvis multiplicationem, utraque utramque vel una superant, vel una æquales sunt, vel una deficiunt inter se comparatæ.

6. Magnitudines quæ eandem rationem habent, proportionales vocentur.

7. Quando autem æque multiplicium, multiplex primæ superaverit multiplicem secundæ, multiplex autem tertiæ non superaverit multiplicem quartæ: tunc prima ad secundam majorem habere dicitur rationem, quam tertia ad quartam.

ΟΡΟΙ.

α΄. ΜΕΡΟΣ ἐστὶ μέγεθος μεγέθους, τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.

β΄. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.

γ΄. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις.

δ΄. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

ε΄. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον· ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων, καθ᾽ ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμόν, ἑκατέρου ἢ ἅμα ἐλλείπῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ληφθέντα κατάλληλα.

ϛ΄. Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα μεγέθη λόγον, ἀνάλογον καλείσθω.

ζ΄. Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων, τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου· τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

* *i.e.* Ratio est ea magnitudinum homogenearum inter se relatio (seu habitudo) qua innuitur quomodo se habet altera ad alteram, secundum quantuplicitatem considerata. Vide Cl. *Wallisii* opera Mathematica, Vol. 2. p. 665.

η΄. Ἀναη΄. Ἀναλογία δὲ ἐστιν ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης.

θ΄. Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστοις ἐστί.

ι΄. Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον.

ια΄. Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον· καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλεῖον, ἕως ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.

ιβ΄. Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται εἶναι, τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις, τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις.

ιγ΄. Ἐναλλὰξ λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον.

ιδ΄. Ἀνάπαλιν λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἑπομένου ὡς ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον ὡς ἑπόμενον.

ιε΄. Σύνθεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου ὡς ἑνὸς πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

ις΄. Διαίρεσις δὲ λόγου ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

ιζ΄. Ἀναστροφὴ λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχήν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου.

ιη΄. Δι' ἴσου λόγος ἐστί, πλειόνων ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων ἴσων αὐτοῖς τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανομένων καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅταν ᾖ ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον. Η ΑΛΛΩΣ. Λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

ιθ΄. Τεταγμένη ἀναλογία ἐστίν, ὅταν ᾖ ὡς ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον οὕτως ἡγούμενον πρὸς τὸ ἑπόμενον, ᾖ δὲ καὶ ὡς ἑπόμενον πρὸς ἄλλό τι οὕτως ἑπόμενον πρὸς ἄλλό τι.

κ΄. Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστίν, ὅταν, τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων ἴσων αὐτοῖς τὸ πλῆθος, γίνηται, ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον· ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον πρὸς ἄλλό τι, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλό τι πρὸς ἡγούμενον.

8. Proportio est rationum similitudo.

9. Proportio in tribus ad minimum terminis consistit.

10. Si tres magnitudines sint proportionales, prima ad tertiam duplicatam habere dicitur rationem ejus quam habet ad secundam.

11. Si quatuor magnitudines sint proportionales, prima ad quartam triplicatam habere dicitur rationem ejus quam habet ad secundam; & sic deinceps uno amplius, quamdiu proportio exstiterit.

12. Homologæ magnitudines dicuntur, antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

13. Alterna ratio est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

14. Inversa ratio est sumptio consequentis ut antecedentis ad antecedentem ut ad consequentem.

15. Compositio rationis est sumptio antecedentis una cum consequente tanquam unius ad ipsam consequentem.

16. Divisio rationis est sumptio excessus, quo antecedens superat consequentem, ad ipsam consequentem.

17. Conversio rationis est sumptio antecedentis ad excessum, quo antecedens ipsam consequentem superat.

18. Ex æqualitate ratio est, quando, pluribus existentibus magnitudinibus & aliis ipsis numero æqualibus, fuerit ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ita in secundis magnitudinibus prima ad ultimam. VEL ALITER. Sumptio extremarum per substractionem mediarum.

19. Ordinata proportio est, quando fuerit ut antecedens ad consequentem ita antecedens ad consequentem; ut autem consequens ad aliam quampiam, ita consequens ad aliam quampiam.

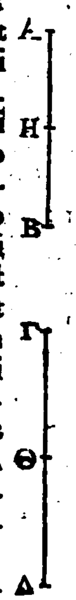
20. Perturbata vero proportio est, quando, tribus existentibus magnitudinibus & aliis ipsis numero æqualibus, fuerit ut in primis magnitudinibus antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem: ut autem in primis magnitudinibus consequens ad aliam quampiam, ita in secundis magnitudinibus alia quæpiam ad antecedentem.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Si fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices; quam multiplex est una magnitudo unius, tam multiplices erunt & omnes omnium.

Sint quotcunque magnitudines A B, Γ Δ quotcunque magnitudinum E, Z æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices: dico quam multiplex est A B ipsius E, tam multiplices esse & A B, Γ Δ ipsarum E, Z.

Quoniam enim A B æque multiplex est ipsius E, atque Γ Δ ipsius Z; quot magnitudines sunt in A B æquales ipsi E, tot erunt & in Γ Δ æquales ipsi Z. dividatur A B quidem in partes ipsi E æquales, quæ sint A H, H B; Γ Δ vero dividatur in partes æquales ipsi Z, videlicet Γ Θ, Θ Δ: erit igitur multitudo partium Γ Θ, Θ Δ æqualis multitudini ipsarum A H, H B. & quoniam A H est æqualis E, & Γ Θ æqualis Z; erunt & A H, Γ Θ æquales ipsis E, Z. eadem ratione H B est æqualis E, & Θ Δ ipsi Z; erunt igitur & H B, Θ Δ æquales ipsis E, Z: quot igitur sunt in A B æquales ipsi E, tot sunt & in A B, Γ Δ æquales ipsis E, Z: ergo quam multiplex est A B ipsius E, tam multiplices erunt & A B, Γ Δ ipsarum E, Z.



Si igitur fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices; quam multiplex est una magnitudo unius, tam multiplices erunt & omnes omnium. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον· ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνὸς, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων.

Ἔστω ὁποσαοῦν μεγέθη τὰ A B, Γ Δ ὁποσωνοῦν μεγεθῶν τῶν E, Z ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον· λέγω ὅτι ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ A B τοῦ E, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ A B, Γ Δ τῶν E, Z.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ A B τοῦ E, καὶ τὸ Γ Δ τοῦ Z· ὅσα ἄρα μεγέθη ἐστὶν ἐν τῷ A B ἴσα τῷ E, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ Γ Δ ἴσα τῷ Z. διῃρήσθω τὸ μὲν A B εἰς τὰ τῷ E μεγέθη ἴσα τὰ A H, H B, τὸ δὲ Γ Δ εἰς τὰ τῷ Z ἴσα τὰ Γ Θ, Θ Δ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Γ Θ, Θ Δ τῷ πλήθει τῶν A H, H B. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν A H τῷ E, τὸ δὲ Γ Θ τῷ Z· ἴσα ἄρα καὶ τὰ A H, Γ Θ τοῖς E, Z. διὰ τὰ αὐτὰ δή ἐστι ἴσον τὸ H B τῷ E, καὶ τὸ Θ Δ τῷ Z· ἴσα ἄρα καὶ τὰ H B, Θ Δ τοῖς E, Z· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ A B ἴσα τῷ E, τοσαῦτα καὶ ἐν τοῖς A B, Γ Δ ἴσα τοῖς E, Z· ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ A B τοῦ E, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ A B, Γ Δ τῶν E, Z.

Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου πολλαπλάσιον· ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνὸς, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. II. PROBL.

Si prima secundæ æque multiplex fuerit atque tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex atque sexta quartæ; erunt etiam prima & quinta, simul sumptæ, secundæ æque multiplices atque tertia & sexta quartæ.

Prima enim A B secundæ Γ æque multiplex sit atque tertia Δ E quartæ Z; sit autem & quinta B H secundæ Γ æque multiplex atque sexta E Θ quartæ Z: dico primam & quintam simul sumptas A, H secundæ Γ æque multiplices esse atque tertiam & sextam Δ Θ quartæ Z.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

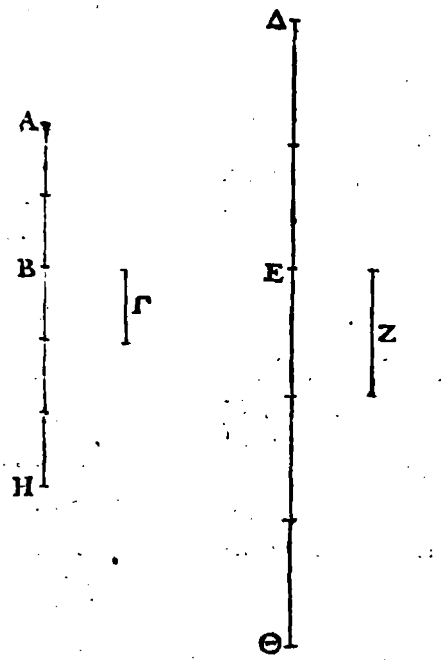
Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τετάρτου· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου.

Πρῶτον γὰρ τὸ A B δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ Δ E τετάρτου τοῦ Z, ἔστω δὲ καὶ πέμπτον τὸ B H δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ E Θ τετάρτου τοῦ Z· λέγω ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ A, H δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ Δ Θ τετάρτου τοῦ Z.

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ, καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μεγέθη ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ ἴσα τῷ Ζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὅσα ἐστὶν ἐν τῷ ΒΗ ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΕΘ ἴσα τῷ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν ὅλῳ τῷ ΑΗ ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν ὅλῳ τῷ ΔΘ ἴσα τῷ Ζ· ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΗ τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ ΔΘ τοῦ Ζ· καὶ συντεθὲν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΑΗ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ τετάρτου τοῦ Ζ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τετάρτου· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Quoniam enim A B æque multiplex est ipsius Γ atque Δ E ipsius Z; quot magnitudines sunt in A B æquales Γ, tot erunt & in Δ E æquales Z. eadem ratione & quot sunt in B H æquales Γ, tot & in E Θ erunt æquales Z: quot igitur sunt in tota A H æquales Γ, tot erunt & in tota Δ Θ æquales Z: ergo quam multiplex est A H ipsius Γ, tam multiplex est & Δ Θ ipsius Z: prima igitur & quinta simul sumptæ A H secundæ Γ æque multiplices erunt atque tertia & sexta Δ Θ quartæ Z.

Quare si prima secundæ æque multiplex fuerit atque tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex atque sexta quartæ; erunt prima & quinta simul sumptæ æque multiplices secundæ atque tertia & sexta quartæ. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γʹ.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου· καὶ δι᾽ ἴσου τῶν ληφθέντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, τὸ μὲν τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

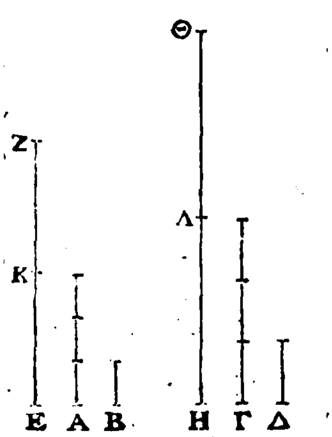
Πρῶτον γὰρ τὸ Α δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ Γ τετάρτου τοῦ Δ, καὶ εἰλήφθω τῶν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΕΖ, ΗΘ· λέγω ὅτι ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΖ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Δ.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΖ τοῦ Α καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Γ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΕΖ ἴσα τῷ Α, τοσαῦτα δὴ καὶ ἐν τῷ ΗΘ ἴσα τῷ Γ. διῃρήσθω τὸ ΕΖ εἰς τὰ τῷ Α μεγέθη ἴσα τὰ ΕΚ, ΚΖ, τὸ δὲ ΗΘ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΗΛ, ΛΘ· ἔσται δὲ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΕΚ, ΚΖ τῷ πλήθει τῶν ΗΛ, ΛΘ. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Α τοῦ Β καὶ τὸ Γ τοῦ Δ· ἴσον δὲ τὸ μὲν ΕΚ τῷ Α, τὸ δὲ ΗΛ τῷ Γ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΚ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΛ τοῦ Δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΚΖ τοῦ Β, καὶ τὸ ΛΘ τοῦ Δ. ἐπεὶ οὖν πρῶτον τὸ ΕΚ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΗΛ τετάρτου τοῦ Δ, ἔστι δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΚΖ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ ΛΘ τετάρτου τοῦ Δ· καὶ συντεθὲν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΕΖ

PROP. III. THEOR.

Si prima secundæ æque multiplex fuerit atque tertia quartæ, sumantur autem æque multiplices primæ & tertiæ; erit & ex æquo sumptarum utraque utriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ.

PRima enim A secundæ B æque multiplex sit atque tertia Γ quartæ Δ: & sumantur ipsarum A, Γ æque multiplices E Z, H Θ: dico E Z æque multiplicem esse ipsius B atque H Θ ipsius Δ.



Quoniam enim E Z æque multiplex est ipsius A, atque H Θ ipsius Γ; quot magnitudines sunt in E Z æquales A, tot erunt & in H Θ æquales Γ. dividatur E Z quidem in magnitudines ipsi A æquales E K, K Z; H Θ vero dividatur in magnitudines æquales ipsi Γ, videlicet H Λ, Λ Θ: erit igitur ipsarum E K, K Z multitudo æqualis multitudini ipsarum H Λ, Λ Θ. & quoniam æque multiplex est A ipsius B atque Γ ipsius Δ, æqualis autem E K ipsi A, & H Λ ipsi Γ; erit E K æque multiplex ipsius B atque H Λ ipsius Δ. eadem ratione æque multiplex erit K Z ipsius B atque Λ Θ ipsius Δ. quoniam igitur prima E K secundæ B æque multiplex est atque tertia H Λ quartæ Δ; est autem & quinta K Z secundæ B æque multiplex atque sexta Λ Θ quartæ Δ: erit [per 2. 5.] & composita è prima & quinta E Z ſecundæ B æque multiplex atque tertia & ſexta HΘ quartæ Δ.

Si igitur prima ſecundæ æque fuerit multiplex atque tertia quartæ, ſumantur autem æque multiplices primæ & tertiæ; erit & ex æquo ſumptarum utraque utriuſque æque multiplex, altera quidem ſecundæ, altera vero quartæ. quod erat demonſtrandum.

δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΗΘ τετάρτου τοῦ Δ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου· καὶ δίισου τῶν ληφθέντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, τὸ μὲν τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ τοῦ τετάρτου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. IV. Theor.

Si prima ad ſecundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; & æque multiplices primæ & tertiæ ad æque multiplices ſecundæ & quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem rationem habebunt inter ſe comparatæ.

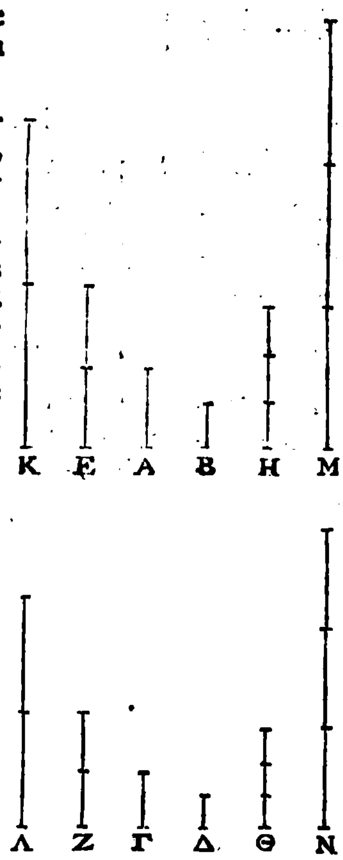
ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον· καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου, καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ληφθέντα κατάλληλα.

Prima enim A ad ſecundam B eandem rationem habeat quam tertia Γ ad quartam Δ, & ſumantur ipſarum quidem A, Γ utcunque æque multiplices E, Z, ipſarum vero B, Δ aliæ utcunque æque multiplices H Θ: dico E ad H ita eſſe, ut Z ad Θ.

Sumantur enim ipſarum quidem E, Z æque multiplices K, Λ, & ipſarum H, Θ æque multiplices M, N.

Quoniam igitur E æque multiplex eſt ipſius A atque Z ipſius Γ, ſumuntur autem ipſarum E, Z æque multiplices K, Λ: erit [per 3. 5.] K æque multiplex ipſius A atque Λ ipſius Γ. eadem ratione M æque multiplex erit ipſius B atque N ipſius Δ. & quoniam eſt ut A ad B ita Γ ad Δ, ſumptæ autem ſunt ipſarum A, Γ æque multiplices K, Λ, & ipſarum B, Δ aliæ utcunque æque multiplices M, N: ſi K ſuperat M, ſuperabit [per 5. def. 5.] & Λ ipſam N; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor erit. ſuntque K, Λ quidem ipſarum E, Z æque multiplices; M, N vero ipſarum H, Θ aliæ utcunque æque multiplices: ut igitur E ad H, ita erit [per 5. def. 5.] Z ad Θ.



Πρῶτον γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, καὶ εἰλήφθω τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ· λέγω ὅτι ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η ἐστὶν, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Θ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Ε, Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, τῶν δὲ Η, Θ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ μὲν Ε τοῦ Α, τὸ δὲ Ζ τοῦ Γ, καὶ εἴληπται τῶν Ε, Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Κ τοῦ Α καὶ τὸ Λ τοῦ Γ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Μ τοῦ Β καὶ τὸ Ν τοῦ Δ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Κ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Λ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καὶ ἔστι τὰ μὲν Κ, Λ τῶν Ε, Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Μ, Ν τῶν Η, Θ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Θ.

Quare ſi prima ad ſecundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; æque multiplices primæ & tertiæ ad æque multiplices ſecundæ & quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem rationem habebunt inter ſe comparatæ. quod erat demonſtrandum.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον· καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου, καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ληφθέντα κατάλληλα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Corollarium.

Quoniam igitur demonſtratum eſt, ſi K ſuperat M, & Λ ipſam N ſuperare; & ſi æqualis,

Πόρισμα.

Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὅτι, εἰ ὑπερέχει τὸ Κ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Λ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον·

ἔλασσον· δηλονότι καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Μ τοῦ Κ, ὑπερέχει καὶ τὸ Ν τοῦ Λ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον· καὶ διὰ τοῦτο ἔσται καὶ ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Ε, οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Ζ. * Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ἔσται.

æqualem esse; & si minor, minorem: constat etiam si M superat K, & N superare ipsam Λ; & si æqualis, æqualem esse; & si minor, minorem: ac propterea ut H ad E, ita erit Θ ad Z. Ex hoc manifestum est, si quatuor magnitudines sint proportionales, & inverse proportionales esse.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος· καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.

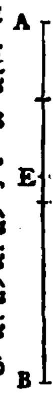
Prop. V. Theor.

Si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit atque ablata ablatæ; erit & reliqua reliquæ æque multiplex atque tota totius.

Μέγεθος γὰρ τὸ ΑΒ μεγέθους τοῦ ΓΔ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΕ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

Ὁσαπλάσιον γάρ ἐστι τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΓΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΗΖ, κεῖται δὲ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ ἑκατέρου τῶν ΗΖ, ΓΔ· ἴσον ἄρα τὸ ΗΖ τῷ ΓΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΓ λοιπῷ τῷ ΔΖ ἴσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΗΓ, ἴσον δὲ τῷ ΗΓ τὸ ΔΖ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ. ἰσάκις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιον ἐστιν ὅλον τὸ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.



Ἐὰν ἄρα μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος· καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Magnitudo enim AB magnitudinis ΓΔ æque multiplex sit atque ablata AE ablatæ ΓZ: dico & reliquam EB reliquæ ZΔ æque multiplicem esse atque totam AB totius ΓΔ.

Quam multiplex enim est AE ipsius ΓZ, tam multiplex fiat & EB ipsius ΓH.

Et quoniam [per 1. 5.] AB æque multiplex est ipsius ΓZ atque AB ipsius HZ, ponitur autem AE æque multiplex ΓZ atque AB ipsius ΓΔ; æque multiplex est AB utriusque HZ, ΓΔ: ac propterea HZ ipsi ΓΔ est æqualis. communis auferatur ΓZ: reliqua igitur HΓ æqualis est reliquæ ΔZ. itaque quoniam AE æque multiplex est ΓZ atque EB ipsius HΓ, estque HΓ æqualis ΔZ; erit AE æque multiplex ΓZ atque EB ipsius ZΔ. æque multiplex autem ponitur AE ipsius ΓZ atque AB ipsius ΓΔ: ergo EB est æque multiplex ipsius ZΔ atque AB ipsius ΓΔ: & reliqua igitur EB reliquæ ZΔ æque multiplex est atque tota AB totius ΓΔ.

Quare si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit atque ablata ablatæ; erit & reliqua reliquæ æque multiplex atque tota totius. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια· καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἤτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.

Prop. VI. Theor.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices sint, & ablatæ quædam sint earundem æque multiplices: erunt & reliquæ vel eisdem æquales, vel ipsarum æque multiplices.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ δύο μεγεθῶν τῶν Ε, Ζ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τὰ ΑΗ, ΓΘ τῶν αὐτῶν τῶν Ε, Ζ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσια· λέγω ὅτι καὶ λοιπὰ τὰ ΗΒ, ΘΔ τοῖς Ε, Ζ ἤτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.

Ἔστω γὰρ πρότερον τὸ ΗΒ τῷ Ε ἴσον· λέγω ὅτι καὶ τὸ ΘΔ τῷ Ζ ἴσον ἐστί. κείσθω γὰρ τῷ Ζ ἴσον τὸ ΓΚ.

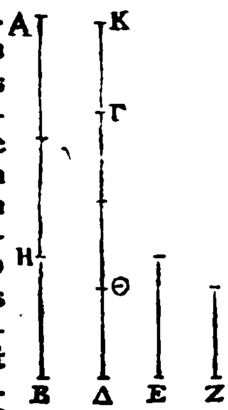
Duæ enim magnitudines AB, ΓΔ, duarum magnitudinum E, Z sint æque multiplices, & ablatæ AH, ΓΘ earundem E, Z sint æque multiplices: dico & reliquas HB, ΘΔ vel ipsis E, Z æquales esse, vel ipsarum æque multiplices.

Sit enim primum HB æqualis E: dico & ΘΔ ipsi Z esse æqualem. ponatur enim ipsi Z æqualis ΓK.

* Aliis in libris Corollarium incipit ad hæc verba, Ἐκ δὴ τούτου, &c.

Et

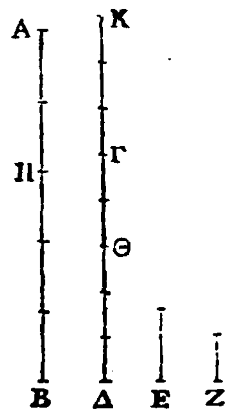
Et quoniam AH æque multiplex est ipsius E atque ΓΘ ipsius Z, estque HB quidem æqualis E; ΓK vero æqualis Z: erit [per 2. 5.] AB æque multiplex ipsius E, atque KΘ ipsius Z. æque autem multiplex ponitur AB ipsius E atque ΓΔ ipsius Z: ergo KΘ æque multiplex est ipsius Z atque ΓΔ ipsius Z. quoniam igitur utraque ipsarum KΘ, ΓΔ est æque multiplex ipsius Z, erit KΘ æqualis ΓΔ. communis auferatur ΓΘ: ergo reliqua KΓ reliquæ ΘΔ est æqualis. sed KΓ est æqualis Z: ΘΔ igitur ipsi Z est æqualis. si igitur HB ipsi E æqualis fuerit, etiam ΘΔ ipsi Z æqualis erit.



Similiter demonstrabimus si HB [ut in fig. 2.] multiplex fuerit ipsius E, & ΘΔ ipsius Z æque multiplicem esse.

Si igitur duæ magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices sint, & ablatæ quædam sint earundem æque multiplices: erunt & reliquæ vel iisdem æquales, vel ipsarum æque multiplices. quod erat demonstrandum.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΗ τοῦ Ε καὶ τὸ ΓΘ τοῦ Ζ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΗΒ τῷ Ε, τὸ δὲ ΓΚ τῷ Ζ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε, καὶ τὸ ΚΘ τοῦ Ζ. ἰσάκις δὲ (ὑπόκειται) πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε, καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΚΘ τοῦ Ζ, καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ. ἐπεὶ οὖν ἑκάτερον τῶν ΚΘ, ΓΔ τοῦ Ζ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΘ τῷ ΓΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΓ λοιπῷ τῷ ΘΔ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ΚΓ τῷ Ζ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΘΔ ἄρα τῷ Ζ ἐστὶν ἴσον. ὥστε ὅτι τὸ ΗΒ τῷ Ε ἴσον ἐστὶ, καὶ τὸ ΘΔ ἴσον ἔσται τῷ Ζ.



Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν πολλαπλάσιον ᾖ τὸ ΗΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ ΘΔ τοῦ Ζ.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια· καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἤτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

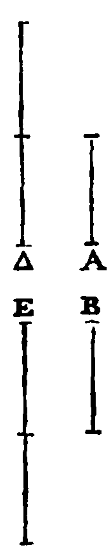
Prop. VII. Theor.

Æquales magnitudines eandem habent rationem ad eandem, & eadem ad æquales.

Sint æquales magnitudines A, B, alia autem quævis magnitudo Γ: dico utramque ipsarum A, B ad Γ eandem habere rationem; & etiam Γ ad utramque A, B eandem habere rationem.

Sumantur enim ipsarum A, B æque multiplices Δ, E, & ipsius Γ alia utcunque multiplex Z.

Quoniam igitur æque multiplex est Δ ipsius A atque E ipsius B, estque A ipsi B æqualis; erit & Δ æqualis E. alia autem est Z utcunque multiplex ipsius Γ: ergo si Δ superat Z, & E ipsam Z superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. & sunt Δ, E quidem ipsarum A, B æque multiplices, Z vero alia utcunque multiplex ipsius Γ: erit igitur [per 5. def. 5.] ut A ad Γ, ita B ad Γ.



Dico insuper Γ ad utramque ipsarum A, B eandem habere rationem.

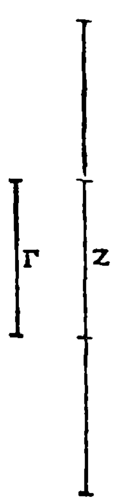
Iisdem enim constructis similiter ostendemus Δ ipsi E æqualem esse, aliam vero quandam Z. si igitur Z superat Δ, ipsam quoque E superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. atque est Z quidem ipsius Γ multiplex, Δ, E vero aliæ utcunque æque multiplices ipsarum A, B: ergo [per 5. def. 5.] ut Γ ad A ita erit Γ ad B.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ.

Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Ἔστω ἴσα μεγέθη τὰ Α, Β, ἄλλο δέ ὃ ἔτυχε μέγεθος τὸ Γ· λέγω ὅτι ἑκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Δ, Ε, τοῦ δὲ Γ ἄλλο ὃ ἔτυχε πολλαπλάσιον τὸ Ζ.



Ἐπεὶ οὖν ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Δ τοῦ Α καὶ τὸ Ε τοῦ Β, ἴσον δὲ τὸ Α τῷ Β· ἴσον ἄρα καὶ τὸ Δ τῷ Ε. ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε τὸ Ζ τοῦ Γ πολλαπλάσιον· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Δ τοῦ Ζ, ὑπερέχει καὶ τὸ Ε τοῦ Ζ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν Δ, Ε τῶν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια, τὸ δὲ Ζ τοῦ Γ ἄλλο ὃ ἔτυχε πολλαπλάσιον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Γ.

ΛΕΓΩ δὴ ὅτι καὶ τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Δ τῷ Ε, ἄλλο δέ τι τὸ Ζ. εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Ζ τοῦ Δ, ὑπερέχει καὶ τοῦ Ε· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὸ μὲν Ζ τοῦ Γ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ Δ, Ε τῶν Α, Β ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Β.

Τὰ

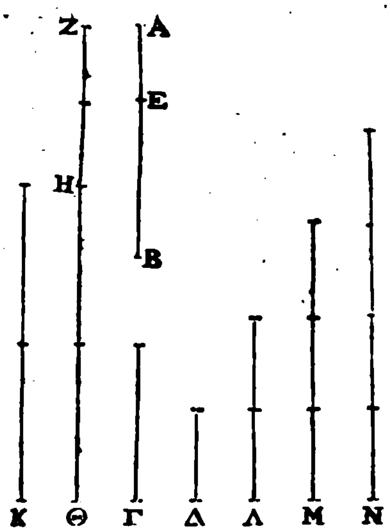
Τὰ ἴσα ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν, τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον· καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον.

Ἔστω ἄνισα μεγέθη τὰ ΑΒ, Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τὸ ΑΒ τοῦ Γ, ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε τὸ Δ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ Γ, κείσθω τῷ Γ ἴσον τὸ ΒΕ, τὸ δὴ ἔλασσον τῶν ΑΕ, ΕΒ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ Δ μεῖζον. ἔστω πρότερον τὸ ΑΕ ἔλαττον τοῦ ΕΒ, καὶ πεπολλαπλασιάσθω τὸ ΑΕ ἕως οὗ τὸ γινόμενον μεῖζον ἔσται τοῦ Δ. καὶ ἔστω αὐτοῦ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ μεῖζον ὂν τοῦ Δ, καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ μὲν ΗΘ τοῦ ΕΒ, τὸ δὲ Κ τοῦ Γ· καὶ εἰλήφθω τοῦ Δ διπλάσιον μὲν τὸ Λ, τριπλάσιον δὲ τὸ Μ, καὶ ἑξῆς ἑνὶ πλεῖον ἕως ἂν τὸ λαμβανόμενον πολλαπλάσιον μὲν γένηται τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ Κ. εἰλήφθω, καὶ ἔστω τὸ Ν τετραπλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ Κ.



Ἐπεὶ οὖν τὸ Κ τοῦ Ν πρώτως ἐστὶν ἔλαττον, τὸ Κ ἄρα τοῦ Μ οὐκ ἔστιν ἔλαττον. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ. ἰσάκις δέ ἐστι πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ, καὶ τὸ Κ τοῦ Γ· τὰ ΖΘ, Κ ἄρα τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ, ἴσον δὲ τὸ ΕΒ τῷ Γ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΗΘ τῷ Κ. τὸ δὲ Κ τοῦ Μ οὐκ ἔστιν ἔλαττον· οὐδ' ἄρα τὸ ΗΘ τοῦ Μ ἔλαττόν ἐστι. μεῖζον δὲ ΖΗ τοῦ Δ· ὅλον ἄρα τὸ ΖΘ συναμφοτέρων τῶν Δ, Μ μεῖζόν ἐστιν. ἀλλὰ συναμφότερα τὰ Δ, Μ τῷ Ν ἐστὶν ἴσα· τὸ ΖΘ ἄρα τοῦ Ν ὑπερέχει, τὸ δὲ Κ τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει. καὶ ἔστι τὰ μὲν ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὸ δὲ Ν τοῦ Δ ἄλλο ὃ ἔτυχε πολλαπλάσιον· τὸ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ.

ΛΕΓΩ δὴ, ὅτι καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν, ὅτι τὸ μὲν Ν τοῦ Κ ὑπερέχει, τοῦ δὲ ΖΘ οὐχ ὑπερέχει. καὶ ἔστι τὸ μὲν Ν τοῦ Δ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλα-

Æquales igitur ad eandem eandem habent rationem, & eadem ad æquales. quod erat demonſtrandum.

PROP. VIII. THEOR.

Inæqualium magnitudinum, major ad eandem majorem habet rationem quam minor: & eadem ad minorem majorem habet rationem quam ad majorem.

SInt inæquales magnitudines AB, Γ, & ſit AB major Γ, alia vero utcunque Δ: dico AB ad Δ majorem habere rationem quam Γ ad Δ; & Δ ad Γ majorem habere rationem quam ad AB.

Quoniam enim AB major eſt quam Γ, ponatur [per 3.1.] ipſi Γ æqualis BE; minor igitur ipſarum AE, EB multiplicata major aliquando erit [per 4. def. 5.] quam Δ. ſit primum AE minor quam EB, & multiplicetur AE quoad fiat major quam Δ: ſitque ZH ipſius AE multiplex, quæ ipſa Δ eſt major. quam multiplex autem eſt ZH ipſius AE, tam multiplex fiat & HΘ ipſius EB, & K ipſius Γ: ſumaturque ipſius Δ dupla quidem Λ, tripla vero M, & deinceps una major, quoad ea quæ ſumitur multiplex fiat ipſius Δ, & primo major quam K. ſumatur, ſitque N ipſius Δ quadrupla, & primo major quam K.

Quoniam igitur K primo minor eſt quam N, non erit K minor quam M. & cum æque multiplex ſit ZH ipſius AE atque HΘ ipſius EB, erit [per 1. 5.] & ZH æque multiplex ipſius AE atque ZΘ ipſius AB. æque autem multiplex eſt ZH ipſius AE atque K ipſius Γ: ergo ZΘ æque multiplex eſt ipſius AB atque K ipſius Γ; ac propterea ZΘ, K ipſarum AB, Γ ſunt æque multiplices. rurſus, quoniam HΘ æque multiplex eſt ipſius EB atque K ipſius Γ, eſtque EB æqualis Γ; erit & HΘ ipſi K æqualis. ſed K non eſt minor quam M: non eſt igitur HΘ minor quam M. major autem eſt [per conſtr.] ZH quam Δ: ergo tota ZΘ utriſque ſimul Δ, M major erit. ſed utræque ſimul Δ, M ſunt æquales N: quare ZΘ ſuperat N; K vero ipſam N non ſuperat. & ſunt ZΘ, K æque multiplices ipſarum AB, Γ; & N ipſius Δ alia quædam multiplex: ergo [per 7. def. 5.] AB ad Δ majorem rationem habet quam Γ ad Δ.

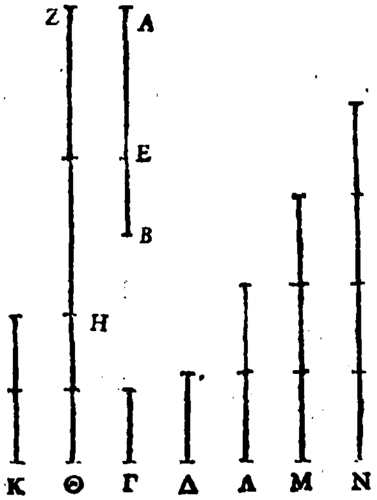
DICO præterea & Δ ad Γ majorem habere rationem, quam Δ ad AB.

Iiſdem enim conſtructis, ſimiliter oſtendemus N ſuperare K, ipſam vero ZΘ non ſuperare. atque eſt N multiplex ipſius Δ, & ZΘ, K aliæ quædam ipſarum AB, Γ æque multiplices;

tiplices;

tiplices; ergo [per 7. def. 5.] Δ ad Γ majorem rationem habet, quam Δ ad AB.

Sed ſit AE major quam EB: erit igitur [per 4. def. 5.] minor EB multiplicata aliquando major quam Δ. multiplicetur, & ſit HΘ multiplex quidem ipſius EB, major vero quam Δ. & quam multiplex eſt HΘ ipſius EB, tam multiplex fiat ZH ipſius AE, & K ipſius Γ. ſimili ratione qua prius oſtendemus ZΘ, K ipſarum AB, Γ æque multiplices eſſe. ſumaturque ſimiliter N multiplex ipſius Δ, primo autem major quam ZH: ergo rurſus ZH non eſt minor quam M. major autem HΘ quam Δ: tota igitur ZΘ ſuperat Δ & M ſimul, hoc eſt N. at K ipſam N non ſuperat, quoniam ZH, quæ major eſt quam HΘ, hoc eſt quam K, non ſuperat N. & ſimiliter ut in iis, quæ ſuperius dicta ſunt, demonſtrationem abſolvemus.



Inæqualium igitur magnitudinum major ad eandem majorem habet rationem, quam minor: & eadem ad minorem majorem rationem habet, quam ad majorem. quod erat demonſtrandum.

πλάσια· τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ AB.

Ἀλλὰ δὴ τὸ AE μεῖζον ἔστω τοῦ EB· τὸ δὴ ἔλαττον τὸ EB πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ Δ μεῖζον. πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ HΘ πολλαπλάσιον μὲν τοῦ EB, μεῖζον δὲ τοῦ Δ· καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ HΘ τοῦ EB, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ μὲν ZH τοῦ AE, τὸ δὲ K τοῦ Γ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι τὰ ZΘ, K τῶν AB, Γ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. καὶ εἰλήφθω ὁμοίως τὸ N πολλαπλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ ZH· ὥστε πάλιν τὸ ZH τοῦ M οὐκ ἔστιν ἔλασσον. μεῖζον δὲ τὸ HΘ τοῦ Δ· ὅλον ἄρα τὸ ZΘ τῶν Δ, M τουτέστι τοῦ N ὑπερέχει, τὸ δὲ K τοῦ N οὐχ ὑπερέχει, ἐπειδήπερ καὶ τὸ ZH μεῖζον ὂν τοῦ HΘ, τουτέστι τὸ K, τοῦ N οὐχ ὑπερέχει. καὶ ὡσαύτως κατακολουθοῦντες τοῖς ἐπάνω περανοῦμεν τὴν ἀπόδειξιν.

Τῶν ἄρα ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον· καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. IX. Theor.

Quæ eandem rationem habent ad eandem, ſunt inter ſe æquales: & ad quas eadem eandem habet rationem, ipſæ etiam ſunt inter ſe æquales.

HAbeat enim utraque ipſarum A, B ad Γ eandem rationem: dico A ipſi B æqualem eſſe.

Si enim non eſſet æqualis, non haberet [per 8. 5.] utraque ipſarum A, B ad Γ eandem rationem. habet autem: æqualis igitur eſt A ipſi B.

Habeat rurſus Γ ad utramque ipſarum A, B eandem rationem: dico A æqualem eſſe ipſi B.

Si enim non ſit, [per 8. 5.] non haberet Γ ad utramque A, B eandem rationem. habet autem: ergo A ipſi B eſt æqualis.

Quæ igitur eandem rationem habent ad eandem, ſunt inter ſe æquales: & ad quas eadem eandem habet rationem, ipſæ etiam ſunt inter ſe æquales. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θʹ.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, κἀκεῖνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

ΕΧέτω γὰρ ἑκάτερον τῶν A, B πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ A τῷ B.

Εἰ γὰρ μή, οὐκ ἂν ἑκάτερον τῶν A, B πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δέ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ A τῷ B.

ΕΧΕΤΩ δὴ πάλιν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν A, B τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ A τῷ B.

Εἰ γὰρ μή, οὐκ ἂν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν A, B τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δέ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ A τῷ B.

Τὰ ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, κἀκεῖνα ἴσα ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. X. Theor.

Magnitudinum rationem habentium ad eandem, quæ majorem habet rationem, eſt major; ad quam vero eadem majorem habet rationem, illa eſt minor.

HAbeat enim A ad Γ majorem rationem, quam B ad Γ: dico A majorem eſſe quam B.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιʹ.

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι· πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν.

ΕΧέτω γὰρ τὸ A πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον, ἤπερ τὸ B πρὸς τὸ Γ· λέγω ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ A τοῦ B.

Εἰ

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β, ἢ ἔλασσον. ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἔστι τὸ Α τῷ Β, ἑκάτερον γὰρ ἂν τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. οὐκ ἔχει δέ, οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. οὐδὲ μὴν ἔλασσόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β, τὸ Α γὰρ ἂν πρὸς τὸ Γ ἐλάσσονα λόγον εἶχεν ἤπερ τὸ Β πρὸς τὸ Γ. οὐκ ἔχει δέ, οὐκ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴσον, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τοῦ Β.


Β Α

ΕΧΕΤΩ δὴ πάλιν τὸ Γ πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Α· λέγω ὅτι ἔλασσόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴσον ἐστὶν, ἢ μεῖζον. ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἔστι τὸ Β τῷ Α, τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. οὐκ ἔχει δέ, οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. οὐδὲ μὴν μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α, τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς τὸ Β ἐλάσσονα λόγον εἶχεν ἤπερ πρὸς τὸ Α. οὐκ ἔχει δέ, οὐκ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴσον, ἔλαττον ἄρα ἐστὶ τὸ Β τοῦ Α.

Τῶν ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ μείζονα λόγον ἔχον μεῖζόν ἐστι· καὶ πρὸς ὃ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσόν ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si enim non est major, vel æqualis est, vel minor. æqualis autem non est A ipsi B, utraque enim ipsarum A, B ad Γ [per 7. 5.] eandem haberet rationem. atqui eandem non habet: non est igitur A æqualis ipsi B. sed neque minor est A quam B, haberet enim A ad Γ [per 8. 5.] minorem rationem quam B ad Γ. atqui non habet minorem: non est igitur A minor quam B. ostensum autem est neque esse æqualem: ergo A quam B major erit.


Γ

Habeat rursus Γ ad B majorem rationem quam Γ ad A: dico B minorem esse quam A.

Si enim non est minor, vel æqualis est, vel major. æqualis utique non est B ipsi A, etenim Γ ad utramque ipsarum A, B [per 7. 5.] eandem rationem haberet. non habet autem: ergo A ipsi B non est æqualis. sed neque major est B quam A, haberet enim [per 8. 5.] Γ ad B minorem rationem quam ad A. atqui non habet: non est igitur B major quam A. ostensum autem est neque æqualem esse: ergo B minor erit quam A.

Magnitudinum igitur rationem habentium ad eandem, quæ majorem habet rationem illa major est: & ad quam eadem majorem habet rationem, illa est minor. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Οἱ τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.

Ἔστωσαν γὰρ ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

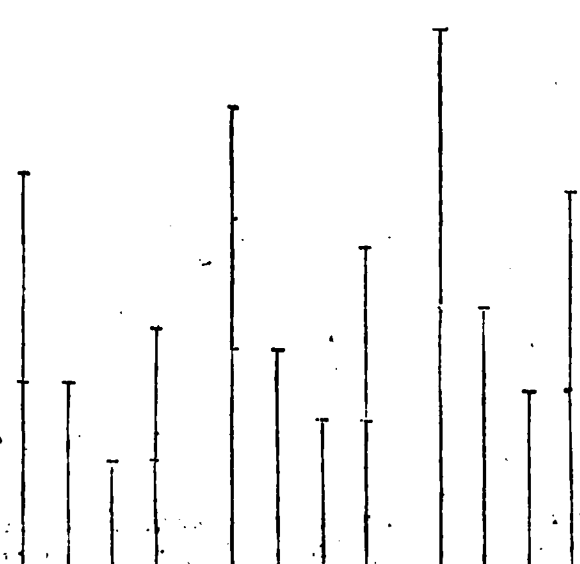
Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια ἃ ἔτυχε τὰ Λ, Μ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἴληπται τῶν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Θ, Κ, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ

Prop. XI. Theor.

Quæ eidem eædem sunt rationes, & inter se sunt eædem.

Sint enim ut A ad B ita Γ ad Δ, ut autem Γ ad Δ ita E ad Z: dico ut A ad B ita esse E ad Z.

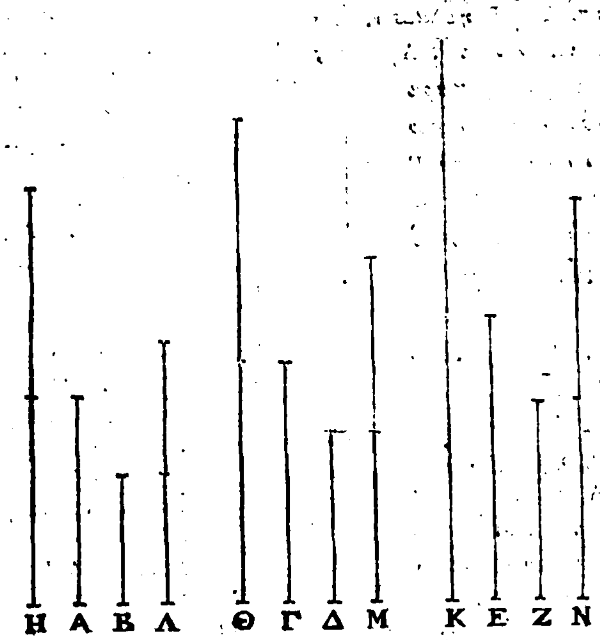

Η Α Β Λ Θ Γ Δ Μ Κ Ε Ζ Ν

Sumantur enim ipsarum quidem A, Γ, E æque multiplices H, Θ, K; ipsarum vero B, Δ, Z aliæ utcunque æque multiplices Λ, M, N.

Quoniam igitur est ut A ad B ita Γ ad Δ, & sumptæ sunt ipsarum A, Γ æque multiplices H, Θ, & ipsarum B, Δ aliæ utcunque æque multiplices Λ, M: si H superat Λ, [per 5. def. 5.] & Θ ipsam M superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. rursus, quoniam est ut Γ ad Δ ita E ad Z, & sumptæ sunt ipsarum Γ, E æque multiplices Θ, K; ipsarum vero Δ, Z aliæ utcunque æque multiplices M, N: si Θ superat M, & K ipsam N superabit;

perabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. sed si Θ superat M, & H superabit Λ; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor: quare si H superat Λ, & K ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. & sunt H, K quidem ipsarum A, E æque multiplices, Λ, N vero ipsarum B, Z aliæ utcunque æque multiplices: ergo [per 5. def. 5.] ut A ad B ita erit E ad Z.

Quæ igitur eidem eædem sunt rationes, & inter se sunt eædem. quod erat demonstrandum.



Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. ἀλλ' εἰ ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Η τοῦ Λ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον· ὥστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν Η, Κ τῶν Α, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Λ, Ν τῶν Β, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

Οἱ ἄρα τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοί, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XII. Theor.

Si quotcunque magnitudines proportionales fuerint; ut una antecedentium ad unam consequentium, ita erunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Sint quotcunque magnitudines proportionales A, B, Γ, Δ, E, Z; & ut A ad B ita sit Γ ad Δ, & E ad Z: dico ut A ad B ita esse A, Γ, E ad B, Δ, Z.

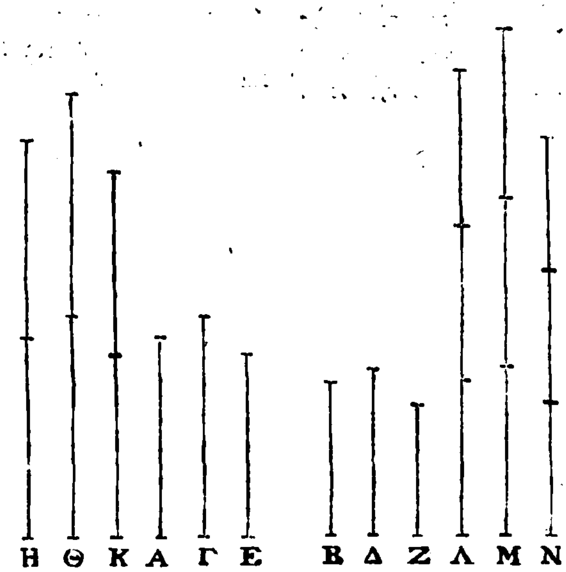
Sumantur enim ipsarum A, Γ, E æque multiplices H, Θ, K, & ipsarum B, Δ, Z aliæ utcunque æque multiplices Λ, M, N.

Quoniam igitur ut A ad B ita est Γ ad Δ, & E ad Z; & sumptæ sunt ipsarum quidem A, Γ, E æque multiplices H, Θ, K, ipsarum vero B, Δ, Z aliæ utcunque æque multiplices Λ, M, N: si H superat Λ, [per 5. def. 5.] & Θ ipsam M superabit, & K ipsam N; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. quare & si H superat Λ, superabunt & H, Θ, K ipsas Λ, M, N; & si æqualis, æquales; & si minor, minores. suntque H & H, Θ, K ipsarum A & A, Γ, E æque multiplices: quoniam [per 1.5.] si fuerint quotcunq; magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices, quam multiplex est una magnitudo unius, tam multiplices erunt &

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβʹ.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα.

Ἔστωσαν ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὰ Α, Γ, Ε πρὸς τὰ Β, Δ, Ζ.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. ὥστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὰ Η, Θ, Κ τῶν Λ, Μ, Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσα· καὶ εἰ ἔλασσον, ἐλάσσονα. καί ἐστι τὸ μὲν Η καὶ τὰ Η, Θ, Κ τοῦ Α καὶ τῶν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια· ἐπειδήπερ ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσια, ὁσαπλάσιόν ἐστι ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλά-

σια

σια ἐστὶ καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ Α καὶ τὰ Α, Μ, Ν τοῦ Β καὶ τῶν Β, Δ, Ζ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Α, Γ, Ε πρὸς τὰ Β, Δ, Ζ.

Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον· ἔσται ὡς τὸ ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

omnes omnium. eadem ratione A & A, M, N ipsarum B & B, Δ, Z sunt æque multiplices: est igitur [per 5. def. 5.] ut A ad B, ita A, Γ, E ad B, Δ, Z.

Quare si quotcunque magnitudines proportionales fuerint; ut una antecedentium ad unam consequentium, ita erunt omnes antecedentes ad omnes consequentes. quod erat demonstrandum.

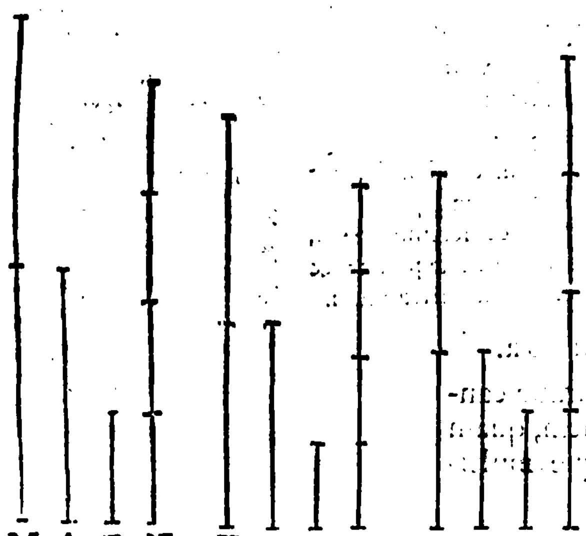
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον· καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον.

Πρῶτον γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, τρίτον δὲ τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ πρῶτον τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ἔστι τινὰ τῶν μὲν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· καὶ τὸ μὲν τοῦ Γ πολλαπλάσιον ὑπερέχει τοῦ τοῦ Δ πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ Ε πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Ζ πολλαπλασίου οὐχ ὑπερέχει. εἰλήφθω, καὶ ἔστω τῶν μὲν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, ὥστε τὸ μὲν Η τοῦ Κ ὑπερέχειν, τὸ δὲ Θ τοῦ Λ μὴ ὑπερέχειν· καὶ ὁσαπλάσιον μέν ἐστι τὸ Η τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ Μ τοῦ Α· ὁσαπλάσιον δὲ τὸ Κ τοῦ Δ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ Ν τοῦ Β.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Η, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ν, Κ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Μ τοῦ Ν, ὑπερέχει καὶ τὸ Η τοῦ Κ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. ὑπερέχει δὲ τὸ Η τοῦ Κ, ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ Μ τοῦ Ν. τὸ δὲ Θ τοῦ Λ οὐχ ὑπερέχει· καὶ ἔστι τὰ μὲν Μ, Θ τῶν Α, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Ν, Λ τῶν Β, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· τὸ ἄρα Α πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.



Prop. XIII. Theor.

Si prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam majorem habeat rationem quam quinta ad sextam: & prima ad secundam majorem habebit rationem quam quinta ad sextam.

PRima enim A ad secundam B eandem rationem habeat quam tertia Γ ad quartam Δ; tertia autem Γ ad quartam Δ majorem habeat rationem quam quinta E ad sextam Z: dico & primam A ad secundam B majorem habere rationem quam quintam E ad sextam Z.

Quoniam enim Γ ad Δ majorem habet rationem quam E ad Z, sunt [per 7. def. 5.] quædam ipsarum Γ, E æque multiplices, & ipsarum Δ, Z aliæ quædam æque multiplices; & multiplex quidem ipsius Γ superat multiplicem ipsius Δ, multiplex vero ipsius E non superat multiplicem ipsius Z. sumantur, & sint ipsarum Γ, E æque multiplices H, Θ & ipsarum Δ, Z aliæ quædam æque multiplices K, Λ, ita ut H quidem superet K, Θ vero ipsam Λ non superet: & quam multiplex est H ipsius Γ, tam multiplex sit & M ipsius A; quam multiplex autem K ipsius Δ, tam multiplex sit & N ipsius B.

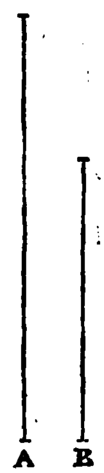
Et quoniam est ut A ad B ita Γ ad Δ, & sumptæ sunt ipsarum A, Γ æque multiplices M, H, & ipsarum B, Δ aliæ æque multiplices N, K: [per 5. def. 5.] si M superat N, & H ipsam K superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. sed H superat K: ergo & M ipsam N superabit. Θ vero non superat Λ; suntque M, Θ ipsarum A, E æque multiplices, & N, Λ ipsarum B, Z aliæ quædam æque multiplices: ergo [per 7. def. 5.] A ad B majorem rationem habebit quam E ad Z.

Si igitur prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam majorem rationem habeat quam quinta ad sextam: & prima ad secundam majorem habebit rationem quam quinta ad sextam. quod erat demonstrandum.

PROP. XIV. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam, prima autem major sit quam tertia: & secunda quam quarta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

PRima enim A ad secundam B eandem rationem habeat quam tertia Γ ad quartam Δ, major autem sit A quam Γ: dico & B quam Δ majorem esse.



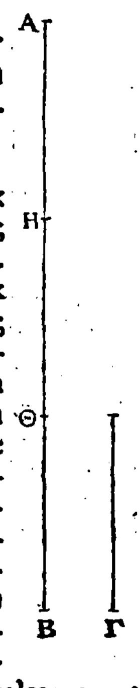
Quoniam enim A major est quam Γ, & alia utcunque magnitudo B; habebit [per 8. 5.] A ad B majorem rationem quam Γ ad B. sed ut A ad B ita Γ ad Δ: ergo & Γ ad Δ majorem habebit rationem [per 13. 5.] quam Γ ad B. ad quam vero eadem majorem habet rationem [per 10. 5.] illa minor est; quare Δ est minor quam B: ac propterea B quam Δ major erit.

SIMILITER demonstrabimus & si A æqualis sit ipsi Γ; & B ipsi Δ esse æqualem: & si A sit minor quam Γ, & B quam Δ minorem esse.

Si igitur prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; prima autem major sit quam tertia: & secunda quam quarta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. quod erat demonstrandum.

PROP. XV. THEOR.

Partes inter se comparatæ eandem habent rationem, quam habent earum æque multiplices inter se.



SIT enim AB æque multiplex ipsius Γ atque ΔE ipsius Z; dico ut Γ ad Z ita esse AB ad ΔE.

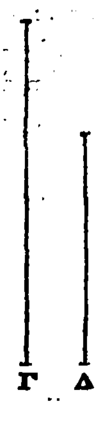
Quoniam enim æque multiplex est AB ipsius Γ atque ΔE ipsius Z; quot sunt magnitudines in AB æquales ipsi Γ, totidem erunt & in ΔE æquales Z. dividatur AB in magnitudines ipsi Γ æquales, quæ sint AH, HΘ, ΘB; & ΔE dividatur in magnitudines æquales Z, videlicet in ΔK, KΛ, ΛE: erit igitur ipsarum AH, HΘ, ΘB multitudo æqualis multitudini ipsarum ΔK, KΛ, ΛE. & quoniam æquales sunt inter se AH, HΘ, ΘB, suntque ΔK, KΛ, ΛE etiam inter se æquales; erunt

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον· καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδʹ.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

ΠΡῶτον γὰρ τὸ A πρὸς δεύτερον τὸ B τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, μεῖζον δὲ ἔστω τὸ A τοῦ Γ· λέγω ὅτι καὶ τὸ B τοῦ Δ μεῖζόν ἐστιν.



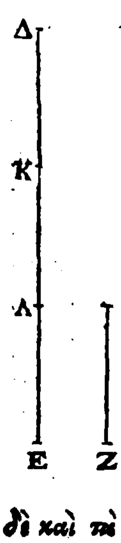
Ἐπεὶ γὰρ τὸ A τοῦ Γ μεῖζόν ἐστιν, ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε μέγεθος τὸ B· τὸ A ἄρα πρὸς τὸ B μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ B. ὡς δὲ τὸ A πρὸς τὸ B, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ B. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν· ἔλαττον ἄρα τὸ Δ τοῦ B· ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ B τοῦ Δ.

ΟΜΟΙΩΣ δὴ δείξομεν ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ A τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ B τῷ Δ· κἂν ἔλασσον ᾖ τὸ A τοῦ Γ, ἔλασσον ἔσται τὸ B τοῦ Δ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιεʹ.

Τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ληφθέντα καταλλήλα.



ΕΣτω γὰρ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ AB τοῦ Γ καὶ τὸ ΔE τοῦ Z· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Z οὕτως τὸ AB πρὸς τὸ ΔE.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ AB τοῦ Γ καὶ τὸ ΔE τοῦ Z· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ AB μεγέθη ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔE ἴσα τῷ Z. διῃρήσθω τὸ μὲν AB εἰς τὰ τῷ Γ μεγέθη ἴσα, τὰ AH, HΘ, ΘB, τὸ δὲ ΔE εἰς τὰ τῷ Z ἴσα, τὰ ΔK, KΛ, ΛE· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν AH, HΘ, ΘB τῷ πλήθει τῶν ΔK, KΛ, ΛE. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ AH, HΘ, ΘB ἀλλήλοις, ἔστι δὲ καὶ τὰ ΔK, KΛ, ΛE ἴσα ἀλλήλοις· ἔστιν ἄρα ὡς ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΚ οὕτως τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΚΛ, καὶ τὸ ΘΒ πρὸς τὸ ΛΕ· ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΚ οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΗ τῷ Γ, τὸ δὲ ΔΚ τῷ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ.

Τὰ ἄρα μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[per 7. 5.] ut ΑΗ ad ΔΚ ita ΗΘ ad ΚΛ, & ΘΒ ad ΛΕ: & erit [per 12. 5.] ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes: est igitur ut ΑΗ ad ΔΚ ita ΑΒ ad ΔΕ. sed ΑΗ ipsi Γ est æqualis, & ΔΚ ipsi Ζ: ergo ut Γ ad Ζ ita erit ΑΒ ad ΔΕ.

Partes igitur inter se comparatæ eandem habent rationem, quam habent earum æque multiplices inter se. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ΄.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται.

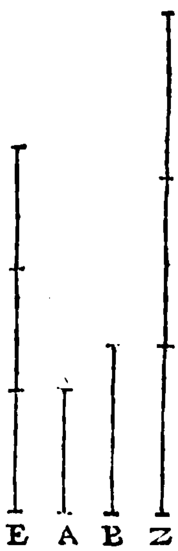
Prop. XVI. Theor.

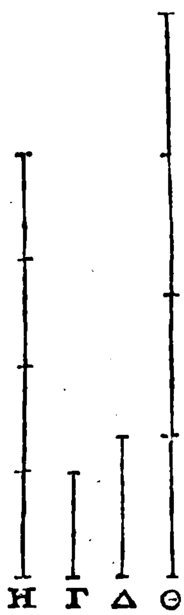
Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & alterne proportionales erunt.

Ἔστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τῶν δὲ Γ, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Ε τοῦ Α καὶ τὸ Ζ τοῦ Β, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ληφθέντα κατάλληλα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. πάλιν, ἐπεὶ τὰ Η, Θ τῶν Γ, Δ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Ε τοῦ Η, ὑπερέχει καὶ τὸ Ζ τοῦ Θ· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν Ε, Ζ τῶν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Η, Θ τῶν Γ, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ.





Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Sint quatuor magnitudines Α, Β, Γ, Δ proportionales, sitque ut Α ad Β ita Γ ad Δ: dico & alterne proportionales esse; videlicet ut Α ad Γ ita esse Β ad Δ.

Sumantur enim ipsarum Α, Β æque multiplices Ε, Ζ, ipsarum vero Γ, Δ aliæ utcunque æque multiplices Η, Θ.

Et quoniam æque multiplex est Ε ipsius Α atque Ζ ipsius Β; partes autem inter se comparatæ [per 15. 5.] eandem habent rationem, quam habent earum æque multiplices inter se: erit ut Α ad Β ita Ε ad Ζ. ut autem Α ad Β ita Γ ad Δ: ergo [per 11. 5.] ut Γ ad Δ ita Ε ad Ζ. rursus, quoniam Η, Θ sunt ipsarum Γ, Δ æque multiplices; erit ut Γ ad Δ ita Η ad Θ. ut autem Γ ad Δ ita Ε ad Ζ: ergo [per 11. 5.] ut Ε ad Ζ ita Η ad Θ. quod si quatuor magnitudines proportionales sint, prima autem major sit quam tertia; [per 14. 5.] & secunda quam quarta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. si igitur Ε superat Η, & Ζ ipsam Θ superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. suntque Ε, Ζ ipsarum Α, Β æque multiplices, & Η, Θ ipsarum Γ, Δ aliæ utcunque æque multiplices: ergo [per 5. def. 5.] ut Α ad Γ ita erit Β ad Δ.

Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, & alterne proportionales erunt. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ΄.

Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Prop. XVII. Theor.

Si compositæ magnitudines sint proportionales, & divisæ proportionales erunt.

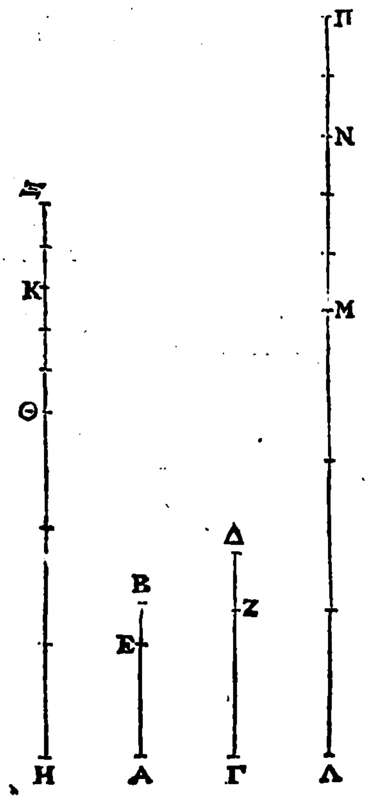
Ἔστω συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον τὰ ΑΒ, ΒΕ, ΓΔ, ΔΖ, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως

Sint compositæ magnitudines ΑΒ, ΒΕ, ΓΔ, ΔΖ proportionales, sitque ut ΑΒ ad ΒΕ ita

ΓΔ ad ΔZ: dico etiam divisas proportionales esse; videlicet ut AE ad EB ita esse ΓZ ad ZΔ.

Sumantur enim ipsarum quidem AE, EB, ΓZ, ZΔ æque multiplices HΘ, ΘK, ΛM, MN; ipsarum vero EB, ZΔ aliæ utcunque æque multiplices KΞ, NΠ.

Et quoniam æque multiplex est HΘ ipsius AE atque ΘK ipsius EB; erit [per 1. 5.] HΘ ipsius AE æque multiplex atque HK ipsius AB. æque autem multiplex est HΘ ipsius AE atque ΛM ipsius ΓZ: ergo HK æque multiplex est ipsius AB atque ΛM ipsius ΓZ. rursus, quoniam æque multiplex est ΛM ipsius ΓZ atque MN ipsius ZΔ; erit ΛM æque multiplex ipsius ΓZ atque ΛN ipsius ΓΔ. sed æque multiplex erat ΛM ipsius ΓZ atque HK ipsius AB: æque igitur multiplex est HK ipsius AB atque ΛN ipsius ΓΔ: quare HK, ΛN ipsarum AB, ΓΔ æque multiplices erunt. rursus, quoniam æque multiplex est ΘK ipsius EB atque MN ipsius ZΔ; est autem & KΞ ipsius EB æque multiplex atque NΠ ipsius ZΔ: etiam [per 2. 5.] composita ΘΞ ipsius EB æque multiplex est atque MΠ ipsius ZΔ. cum autem sit ut AB ad BE ita ΓΔ ad ΔZ, & sumptæ sint ipsarum quidem AB, ΓΔ æque multiplices HK, ΛN, ipsarum vero EB, ZΔ aliæ utcunque æque multiplices ΘΞ MΠ: igitur [per 5. def. 5.] si HK superat ΘΞ, & ΛN superabit MΠ; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. superet igitur HK ipsam ΘΞ, communique ablata ΘK, & HΘ ipsam KΞ superabit. sed si HK superat ΘΞ, & ΛN superat MΠ: superat itaque ΛN ipsam MΠ; communique MN ablata, & ΛM superabit NΠ: quare si HΘ superat KΞ, & ΛM ipsam NΠ superabit. similiter demonstrabimus & si HΘ sit æqualis KΞ, & ΛM ipsi NΠ esse æqualem; & si minor, minorem. sunt autem HΘ, ΛM ipsarum AE, ΓZ æque multiplices, & ipsarum EB, ZΔ aliæ utcunque æque multiplices KΞ, NΠ: ergo [per 5. def. 5.] ut AE ad EB ita erit ΓZ ad ZΔ.



Si igitur compositæ magnitudines sint proportionales, & divisæ proportionales erunt. quod erat demonstrandum.

Prop. XVIII. Theor.

Si divisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt.

Sint divisæ magnitudines AE, EB, ΓZ, ZΔ proportionales, & ut AE ad EB ita ΓZ

τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ· λέγω ὅτι καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΗΘ, ΘΚ, ΛΜ, ΜΝ· τῶν δὲ ΕΒ, ΖΔ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ ΚΞ, ΝΠ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΘΚ τοῦ ΕΒ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ. ἰσάκις δὲ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΛΜ, τοῦ ΓΖ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ. πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΓΔ. ἰσάκις δὲ ἦν πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ. ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΓΔ· τὰ ΗΚ, ΛΝ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΘΚ τοῦ ΕΒ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΚΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ τὸ ΝΠ τοῦ ΖΔ· καὶ συντεθὲν τὸ ΘΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τὸ ΜΠ τοῦ ΖΔ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΗΚ, ΛΝ, τῶν δὲ ΕΒ, ΖΔ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΘΞ, ΜΠ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. ὑπερεχέτω δὴ τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΘΚ, ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΚΞ. ἀλλ' εἰ ὑπερέχει τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ· ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΜΝ ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΝΠ· ὥστε εἰ ὑπερέχει τὸ ΗΘ τοῦ ΚΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΝΠ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ ΗΘ τῷ ΚΞ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ ΛΜ τῷ ΝΠ· κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. καὶ ἔστι δὲ τὰ μὲν ΗΘ, ΛΜ τῶν ΑΕ, ΓΖ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ ΚΞ, ΝΠ τῶν ΕΒ, ΖΔ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ.

Ἐὰν ἄρα συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη΄.

Ἐὰν διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Ἔστω διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς

πρὸς τὸ ΖΔ· λέγω ὅτι καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ.

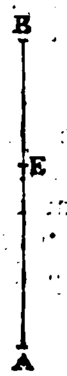
Εἰ γὰρ μὴ ἔστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ· ἔσται ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ, ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΖΔ, ἢ πρὸς μεῖζον.

Ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον, τὸ ΔΗ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΗ, συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν· ὥστε καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ. μεῖζον δὲ τὸ πρῶτον τὸ ΓΗ τοῦ τρίτου τοῦ ΓΖ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ δεύτερον τὸ ΗΔ τοῦ τετάρτου τοῦ ΖΔ. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς ἔλασσον τοῦ ΖΔ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεῖζον· πρὸς αὐτὸ ἄρα.

Ἐὰν ἄρα διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ad ΖΔ: dico etiam compositas proportionales esse; videlicet ut ΑΒ ad ΒΕ ita esse ΓΔ ad ΖΔ.

Si enim non est ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad ΖΔ; erit ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ vel ad minorem quam ΖΔ, vel ad majorem.



Sit primum ad minorem, nempe ad ΔΗ. & quoniam est ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad ΔΗ, compositæ magnitudines sunt proportionales: ergo [per 17. 5.] & divisæ proportionales erunt: est igitur ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΗ ad ΗΔ. ponitur autem & ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad ΖΔ: quare [per 11. 5.] & ut ΓΗ ad ΗΔ ita ΓΖ ad ΖΔ. at prima ΓΗ major est quam tertia ΓΖ: ergo [per 14. 5.] & secunda ΗΔ major erit quam quarta ΖΔ. sed & minor, quod fieri non potest: non est igitur ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad minorem quam ΖΔ. Similiter ostendemus neque esse ad majorem: est igitur ad ipsam.

Quare si divisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθʹ.

Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

Ἔστω γὰρ ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΕ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ οὕτως τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΒΑ πρὸς τὸ ΑΕ οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΖ. καὶ ἐπεὶ συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστι, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ὡς ἄρα τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΕΑ οὕτως τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΔΖ οὕτως τὸ ΕΑ πρὸς τὸ ΖΓ. ὡς δὲ τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ οὕτως ὑπόκειται ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

* Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ ΕΒ πρὸς τὸ ΖΔ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς

Prop. XIX. Theor.

Si fuerit ut tota ad totam ita ablata ad ablatam; erit reliqua ad reliquam ut tota ad totam.

Sit enim ut tota ΑΒ ad totam ΓΔ ita ablata ΑΕ ad ablatam ΓΖ: dico & reliquam ΕΒ ad reliquam ΖΔ ita esse ut tota ΑΒ ad totam ΓΔ.

Quoniam enim est ut tota ΑΒ ad totam ΓΔ ita ΑΕ ad ΓΖ; & alterne erit [per 16. 5.] ut ΒΑ ad ΑΕ ita ΔΓ ad ΓΖ. & quoniam compositæ magnitudines sunt proportionales, & [per 17. 5.] divisæ proportionales erunt: ut igitur ΒΕ ad ΕΑ ita ΔΖ ad ΓΖ; rursusque alterne, ut ΒΕ ad ΔΖ ita ΕΑ ad ΖΓ. sed ut ΑΕ ad ΓΖ ita posita est ΑΒ ad ΓΔ: & igitur [per 11. 5.] reliqua ΕΒ erit ad reliquam ΖΔ ut tota ΑΒ ad totam ΓΔ.

Quare si fuerit ut tota ad totam ita ablata ad ablatam; erit reliqua ad reliquam ut tota ad totam. quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Et quoniam ostensum est [per 16. 5.] ut ΑΒ ad ΓΔ ita esse ΕΒ ad ΖΔ; si fuerit alterne ut

* *Corruptissimus est hic locus; nec ope veterum exemplarium restitui potest: versionem ideo mutavimus, ut sensus constaret. Magis legitima tamen demonstratio conversionis rationis est hæc.* Si sit ΑΒ ad ΒΕ ut ΓΔ ad ΔΖ, erit, dividendo, ΑΕ ad ΒΕ ut ΓΖ ad ΔΖ: &, invertendo, ΒΕ ad ΑΕ ut ΔΖ ad ΓΖ: &, componendo, erit ΑΒ ad ΑΕ, ut ΓΔ ad ΓΖ, quod est per conversionem rationis.

ΑΒ

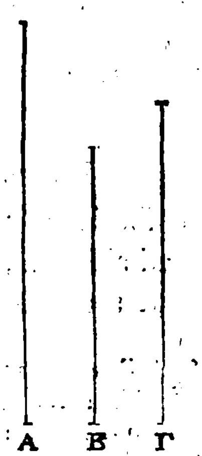
AB ad BE ita ΓΔ ad ΔZ, nempe compositæ magnitudines proportionales. ostensum autem est [per 16. & 19. 5.] ut AB ad AE ita esse ΓΔ ad ΓZ, quod [per 17. def. 5.] est per conversionem rationis. Ex hoc igitur perspicuum est si compositæ magnitudines sint proportionales, & per conversionem rationis proportionales esse. quod erat demonstrandum.

τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ· συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν. ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΑΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΓΖ. καί ἐστιν ἀναστρέψαντι. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀναστρέψαντι ἀνάλογον ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XX. Theor.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem ratione, ex æquo autem prima major sit quam tertia: & quarta quam sexta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

Sint tres magnitudines A, B, Γ, & aliæ ipsis numero æquales Δ, E, Z, binæ sumptæ in eadem ratione, sitque ut A ad B ita Δ ad E, & ut B ad Γ ita E ad Z, ex æquo autem major sit A quam Γ: dico & Δ quam Z majorem esse; & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem.



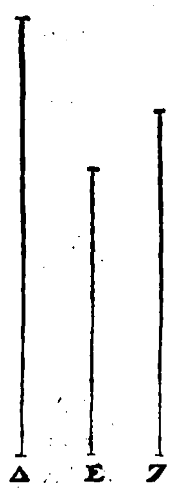
Quoniam enim A major est quam Γ, alia vero utcunque B, & [per 8. 5.] major ad eandem majorem habet rationem quam minor; habebit A ad B majorem rationem quam Γ ad B. sed ut A ad B ita Δ ad E; & invertendo ut Γ ad B ita Z ad E: ergo & Δ ad E majorem habet rationem quam Z ad E. ad eandem vero rationem habentium, quæ majorem habet rationem illa [per 10. 5.] major est; major igitur est Δ quam Z. Similiter ostendemus, & si A sit æqualis Γ & Δ ipsi Z æqualem esse; & si minor, minorem.

Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem ratione, ex æquo autem prima major sit quam tertia: & quarta quam sexta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, δι' ἴσου δὲ μεῖζον ἔστω τὸ Α τοῦ Γ· λέγω ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Ζ μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.



Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Γ, ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε τὸ Β, τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. ἀλλὰ ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Β ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε· καὶ τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Ε μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε. τῶν δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι· μεῖζον ἄρα τὸ Δ τοῦ Ζ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ· κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXI. Theor.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur & in eadem ratione; sit autem perturbata earum proportio, & ex æquo prima major sit quam tertia: & quarta quam sexta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

Sint tres magnitudines A, B, Γ, & aliæ ipsis numero æquales Δ, E, Z, binæ sumptæ &

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

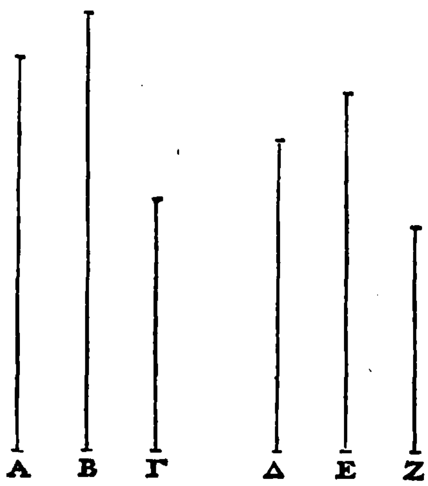
Ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ σύνδυο λαμβανόμενα

βανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, δίισου δὲ τὸ Α τοῦ Γ μεῖζον ἔστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Ζ μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Γ, ἄλλο δέ τι τὸ Β· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. ἀλλὰ ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Β ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Ε ἄρα πρὸς τὸ Ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Δ. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσόν ἐστιν· ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ Ζ τοῦ Δ· μεῖζον ἄρα τὸ Δ τοῦ Ζ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν ἴσον, ἴσον· δηλονότι κἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ δίισου τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

in eadem ratione; sit autem perturbata earum proportio, videlicet ut A ad B ita E ad Z, ut vero B ad Γ ita Δ ad E, & ex æquo A major sit quam Γ: dico & Δ quam Z majorem esse; & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem.



Quoniam enim major est A quam Γ, alia vero B; habebit [per 8. 5.] A ad B majorem rationem quam Γ ad B. sed ut A ad B ita E ad Z, & invertendo ut Γ ad B ita E ad Δ: quare & E ad Z majorem habebit rationem quam E ad Δ. ad quam vero eadem majorem habet rationem [per 10. 5.] illa minor est: minor igitur est Z quam Δ: ac propterea Δ quam Z major erit. Similiter ostendemus & si æqualis, æqualem: *viz.* si A sit æqualis Γ, & Δ ipsi Z esse æqualem; & si minor, minorem.

Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ sumantur & in eadem ratione; sit autem perturbata earum proportio, & ex æquo prima major sit quam tertia: & quarta quam sexta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

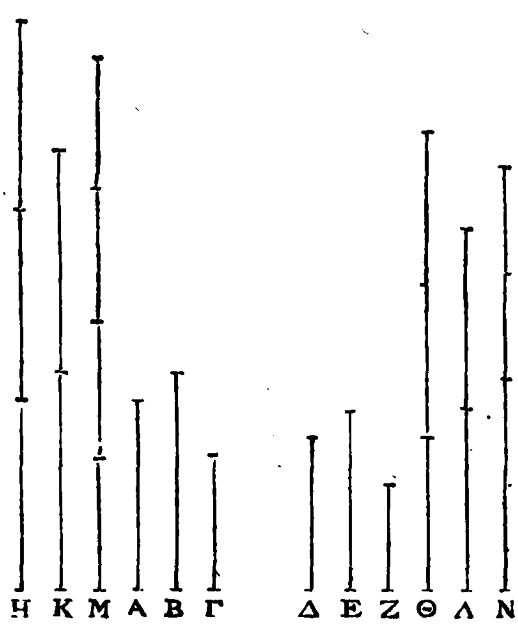
Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ δίισου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Prop. XXII. Theor.

Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem ratione; & ex æquo in eadem ratione erunt.

Ἔστω ὁποσαοῦν μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ δίισου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Ε ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, καὶ ἔτι τῶν Γ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν.



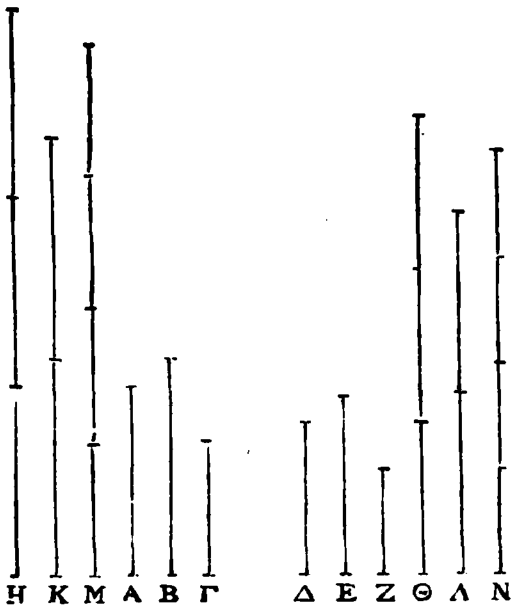
Sint quotcunque magnitudines A, B, Γ, & aliæ ipsis numero æquales Δ, E, Z binæ sumptæ in eadem ratione, ut A quidem ad B ita Δ ad E, ut autem B ad Γ ita E ad Z: dico & ex æquo in eadem ratione esse ut A ad Γ ita Δ ad Z.

Sumantur enim ipsarum quidem A, Δ æque multiplices H, Θ, ipsarum vero B, E aliæ utcunque æque multiplices K, Λ, & ipsarum Γ, Z aliæ utcunque æque multiplices M, N.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια

Quoniam igitur est ut A ad B ita Δ ad E, & sumptæ sunt ipsarum A, Δ æque multiplices

H, Θ, & ipsarum B, E aliæ utcunque æque multiplices K, Λ; erit [per 4. 5.] ut H ad K ita Θ ad Λ. eadem quoque ratione erit ut K ad M ita Λ ad N. & cum sint tres magnitudines H, K, M, & aliæ ipsis numero æquales Θ, Λ, N binæ sumptæ & in eadem ratione: ex æquo igitur [per 20. 5.] si H superat M & Θ ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. suntque H, Θ ipsarum A, Δ æque multiplices, & M, N ipsarum Γ, Z aliæ utcunque æque multiplices: ut igitur A ad Γ ita erit [per 5. def. 5.] Δ ad Z.



Quare si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem ratione; & ex æquo in eadem ratione erunt. quod erat demonstrandum.

τὰ H, Θ, τῶν δὲ B, E ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ K, Λ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ H πρὸς τὸ K οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Λ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ K πρὸς τὸ M οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ N. ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶ τὰ H, K, M, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος Θ, Λ, N σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· διίσου ἄρα εἰ ὑπερέχει τὸ H τοῦ M, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ N· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν H, Θ τῶν A, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ M, N τῶν Γ, Z ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Z.

Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ διίσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

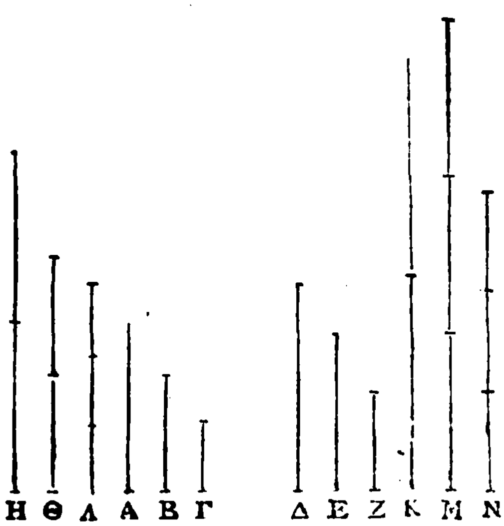
Prop. XXIII. Theor.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem ratione, sit autem perturbata earum proportio; & ex æquo in eadem ratione erunt.

Sint tres magnitudines A, B, Γ, & aliæ ipsis numero æquales binæ sumptæ in eadem ratione Δ, E, Z, sit autem perturbata earum proportio, *viz.* ut A ad B ita E ad Z, & ut B ad Γ ita Δ ad E: dico ut A ad Γ ita esse Δ ad Z.

Sumantur ipsarum quidem A, B, Δ æque multiplices H, Θ, K, ipsarum vero Γ, E, Z aliæ utcunque æque multiplices Λ, M, N.

Et quoniam H, Θ æque multiplices sunt ipsarum A, B; partes autem [per 15. 5.] eandem habent rationem quam earum æque multiplices; erit ut A ad B ita H ad Θ. & simili ratione ut E ad Z ita M ad N: atque est ut A ad B ita E ad Z. ut igitur H ad Θ ita [per 11. 5.] M ad N. &, quoniam est ut B ad Γ ita Δ ad E, & sumptæ sunt ipsarum quidem B, Δ æque multiplices Θ, K, ipsarum vero



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία· καὶ διίσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ A, B, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τὰ Δ, E, Z, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z, ὡς δὲ τὸ B πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ E· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Z.

Εἰλήφθω τῶν μὲν A, B, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ H, Θ, K, τῶν δὲ Γ, E, Z ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, M, N.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τὰ H, Θ τῶν A, B, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ H πρὸς τὸ Θ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ E πρὸς τὸ Z οὕτως τὸ M πρὸς τὸ N· καὶ ἔστιν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z. καὶ ὡς ἄρα τὸ H πρὸς τὸ Θ οὕτως τὸ M πρὸς τὸ N. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ B πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ E, καὶ εἴληπται τῶν μὲν B, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Θ, K,

τῶν

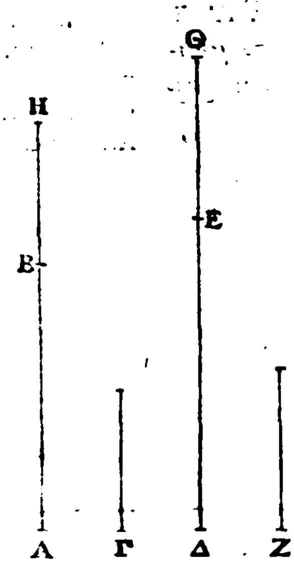
τῶν δὲ Γ, Ε ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Θ πρὸς τὸ Λ οὕτως τὸ Κ πρὸς τὸ Μ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Θ οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν· * ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶ, τὰ Η, Θ, Λ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, τὰ Κ, Μ, Ν, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔστιν αὐτῶν τεταραγμένη ἡ ἀναλογία· δι᾽ ἴσου ἄρα εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καὶ ἔστι τὰ μὲν Η, Κ τῶν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Λ, Ν τῶν Γ, Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία· καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

Πρῶτον γὰρ τὸ ΑΒ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ ΔΕ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ· ἐχέτω δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΒΗ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον τὸ ΕΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ συντεθὲν τὸ πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΑΗ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ.



Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ΒΗ πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ ΒΗ οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ ΒΗ οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΗ οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΘ. καὶ ἐπεὶ διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστι, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ὡς ἄρα τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΗΒ οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΘΕ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ΗΒ πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ Ζ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

* Antea fuit ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶν ἀνάλογον.

Γ, Ε aliæ utcunque æque multiplices Λ, Μ; erit [per 15. 5.] ut Θ ad Λ ita Κ ad Μ. ostensum autem est & ut Η ad Θ ita esse Μ ad Ν: quoniam igitur tres sunt magnitudines Η, Θ, Λ, & aliæ ipsis numero æquales Κ, Μ, Ν binæ sumptæ in eadem ratione, estque perturbata earum proportio, ex æquo [per 21. 5.] si Η superat Λ, & Κ ipsam Ν superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. sunt autem Η, Κ ipsarum Α, Δ æque multiplices, & Λ, Ν æque multiplices ipsarum Γ, Ζ: ut igitur Α ad Γ ita erit [per 5. def. 5.] Δ ad Ζ.

Quare si fuerint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem ratione, sit autem perturbata earum proportio; & ex æquo in eadem ratione erunt. quod erat demonstrandum.

PROP. XXIV. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; habeat autem & quinta ad secundam eandem rationem quam sexta ad quartam: & composita è prima & quinta ad secundam eandem rationem habebit quam composita è tertia & sexta ad quartam.

Prima enim ΑΒ ad secundam Γ eandem habeat rationem quam tertia ΔΕ ad quartam Ζ: habeat autem & quinta ΒΗ ad secundam Γ rationem eandem quam sexta ΕΘ ad quartam Ζ: dico & compositam è prima & quinta ΑΗ ad secundam Γ eandem habere rationem quam composita è tertia & sexta ΔΘ ad quartam Ζ.

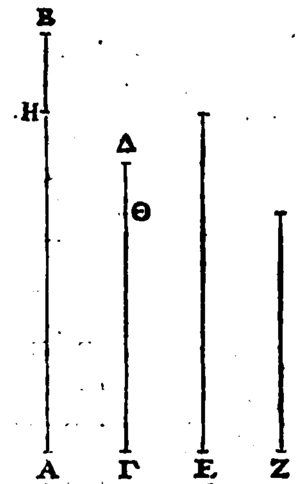
Quoniam enim est ut ΒΗ ad Γ ita ΕΘ ad Ζ; erit invertendo [per cor. 4. 5.] ut Γ ad ΒΗ ita Ζ ad ΕΘ. & quoniam ut ΑΒ ad Γ ita est ΔΕ ad Ζ, ut autem Γ ad ΒΗ ita Ζ ad ΕΘ; erit ex æquo [per 22. 5.] ut ΑΒ ad ΒΗ ita ΔΕ ad ΕΘ. cum autem divisæ magnitudines sint proportionales, & [per 18. 5.] compositæ proportionales erunt: ut igitur ΑΗ ad ΗΒ ita est ΔΘ ad ΘΕ. ut autem ΗΒ ad Γ ita ΕΘ ad Ζ: ergo ex æquo [per 22. 5.] ut ΑΗ ad Γ ita erit ΔΘ ad Ζ.

Si igitur prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; habeat autem & quinta ad secundam eandem rationem quam sexta ad quartam: & composita è prima & quinta ad secundam eandem rationem habebit quam composita è tertia & sexta ad quartam. quod erat demonstrandum.

Prop. XXV. Theor.

Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum & minima duabus reliquis majores erunt.

Ἔστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ἔστω δὲ μέγιστον αὐτῶν τὸ ΑΒ, ἐλάχιστον δὲ τὸ Ζ· λέγω ὅτι τὰ ΑΒ, Ζ τῶν ΓΔ, Ε μείζονά ἐστι.



Κείσθω γὰρ τῷ μὲν Ε ἴσον τὸ ΑΗ, τῷ δὲ Ζ ἴσον τὸ ΓΘ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ἴσον δὲ τῷ μὲν Ε τὸ ΑΗ, τῷ δὲ Ζ τὸ ΓΘ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΘ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΗ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΓΘ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΘΔ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ. μεῖζον δὲ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΗΒ τοῦ ΘΔ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΗ τῷ Ε, τὸ δὲ ΓΘ τῷ Ζ· τὰ ἄρα ΑΗ, Ζ ἴσα ἐστὶ τοῖς ΓΘ, Ε. καὶ ἐπεὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα· ἐὰν ἄρα τῶν ΗΒ, ΘΔ ἀνίσων ὄντων, καὶ μείζονος τοῦ ΗΒ, τῷ ΗΒ προστεθῇ τὰ ΑΗ, Ζ, τῷ δὲ ΘΔ προστεθῇ τὰ ΓΘ, Ε, συνάγεται τὰ ΑΒ, Ζ μείζονα τῶν ΓΔ, Ε.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον αὐτῶν καὶ τὸ ἐλάχιστον δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν.

Sint quatuor magnitudines proportionales AB, ΓΔ, E, Z, & sit ut AB ad ΓΔ ita E ad Z; sit autem maxima ipsarum AB, & Z minima: dico AB & Z ipsis ΓΔ & E majores esse.

Ponatur enim ipsi quidem E æqualis AH, ipsi vero Z æqualis ΓΘ.

Quoniam igitur est ut AB ad ΓΔ ita E ad Z, estque AH æqualis E, & ΓΘ æqualis Z; erit ut AB ad ΓΔ ita AH ad ΓΘ. & quoniam est ut tota AB ad totam ΓΔ ita ablata AH ad ablatam ΓΘ; erit [per 19. 5.] & reliqua HB ad reliquam ΘΔ ut tota AB ad totam ΓΔ. major autem est [ex hyp.] AB quam ΓΔ; ergo & HB major est quam ΘΔ. cum autem AH sit æqualis ipsi E, & ΓΘ ipsi Z; erunt AH & Z æquales ipsis ΓΘ & E. si autem inæqualibus æqualia addantur, tota erunt inæqualia: cum igitur HB, ΘΔ sint inæqualia, sitque major HB, si ipsi quidem HB addantur AH & Z, ipsi vero ΘΔ addantur ΓΘ & E, fient AB & Z ipsis ΓΔ & E majores.

Si igitur quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum & minima duabus reliquis majores erunt. quod erat demonstrandum.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER SEXTUS.

ΟΡΟΙ.

α'. ΟΜΟΙΑ σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τάς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.

β'. Ἀντιπεπονθότα δὲ σχήματά ἐστιν, ὅταν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι ὅροι ὦσιν.

γ'. Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ᾖ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα οὕτως τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλασσον.

δ'. Ὕψος ἐστὶ παντὸς σχήματος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη.

ε'. Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσι * τινά.

DEFINITIONES.

1. SIMILES figuræ rectilineæ sunt, quæ & singulos angulos singulis æquales habent, & circa æquales angulos latera proportionalia.

2. Reciprocæ figuræ sunt, quando in utraque figura antecedentes & consequentes rationum termini fuerint.

3. Secundum extremam ac mediam rationem recta linea secta esse dicitur, quando ut tota ad majus segmentum ita majus segmentum ad minus se habuerit.

4. Altitudo cujusque figuræ est linea perpendicularis à vertice ad basim ducta.

5. Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum † quantitates inter se multiplicatæ illius faciunt quantitatem.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστω τρίγωνα μὲν τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, παραλληλόγραμμα δὲ τὰ ΕΓ, ΓΖ, ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, τὴν ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετον ἀγομένην· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, καὶ τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

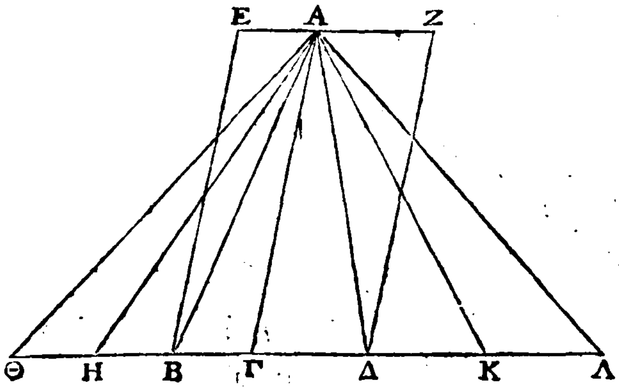
Triangula & parallelogramma, quæ eandem habent altitudinem, sunt inter se ut bases.

SInt triangula quidem ΑΒΓ, ΑΓΔ, parallelogramma vero ΕΓ, ΓΖ, quæ eandem habent altitudinem, videlicet perpendicularem à puncto Α ad ΒΔ ductam: dico ut basis ΒΓ ad ΓΔ basim ita esse triangulum ΑΒΓ ad triangulum ΑΓΔ, & parallelogrammum ΕΓ ad ΓΖ parallelogrammum.

* Ita cum *Theone.* in libb. vulgatis *τινάς.* † Rectius *exponentes* vertit *Cl. Wallisius*; cum *rationis exponens* sit *mensura quantitatis ejusdem.* vide *Opera ejus mathematica*, vol. 2. p. 666.

Producatur enim BΔ ex utraque parte ad puncta Θ, Λ, & ipsi quidem basi BΓ æquales quotcunque ponantur BH, HΘ, ipsi vero basi ΓΔ ponantur quotcunque æquales ΔK, KΛ, & AH, AΘ, AK, AΛ jungantur.

Quoniam igitur ΓB, BH, HΘ inter se sunt æquales, erunt [per 38. 1.] & triangula AHΘ, AHB, ABΓ inter se æqualia: ergo quam multiplex est basis ΘΓ ipsius BΓ basis, tam multiplex est AΘΓ triangulum trianguli ABΓ. eadem ratione quam multiplex est basis ΛΓ ipsius basis ΓΔ, tam multiplex est & triangulum AΛΓ ipsius AΓΔ trianguli; & [per 38. 1.] si æqualis est basis ΘΓ basi ΓΛ, & triangulum AΘΓ triangulo AΛΓ est æquale; & si basis ΘΓ basim ΓΛ superat, & triangulum AΘΓ superabit triangulum AΛΓ; & si minor, minus erit. quatuor igitur magnitudinibus existentibus, videlicet duabus basibus BΓ, ΓΔ & duobus triangulis ABΓ, AΓΔ, sumpta sunt æque multiplicia, basis quidem BΓ & ABΓ trianguli, videlicet ΘΓ basis & AΘΓ triangulum; basis vero ΓΔ & trianguli AΓΔ alia utcunque æque multiplicia, nempe ΓΛ basis & AΛΓ triangulum atque ostensum est, si basis ΘΓ basim ΓΛ superat, & triangulum AΘΓ superare triangulum AΛΓ; & si æqualis, æquale; & si minor, minus: est igitur [per 5. def. 5.] ut BΓ basis ad basim ΓΔ ita triangulum ABΓ ad AΓΔ triangulum.



Et quoniam [per 41. 1.] trianguli ABΓ duplum est parallelogrammum EΓ, & trianguli AΓΔ parallelogrammum ZΓ duplum, partes autem [per 15. 5.] eandem inter se rationem habent quam earum æque multiplices; erit ut ABΓ triangulum ad triangulum AΓΔ ita parallelogrammum EΓ ad ZΓ parallelogrammum. quoniam igitur ostensum est, ut basis BΓ ad ΓΔ basim ita esse ABΓ triangulum ad triangulum AΓΔ; ut autem ABΓ triangulum ad triangulum AΓΔ ita parallelogrammum EΓ ad ZΓ parallelogrammum: erit [per 11. 5.] ut BΓ basis ad basim ΓΔ ita parallelogrammum BΓ ad ZΓ parallelogrammum.

Triangula igitur & parallelogramma, quæ eandem habent altitudinem, sunt inter se ut bases. quod erat demonstrandum.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ BΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ τὰ Θ, Λ σημεῖα, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν BΓ βάσει ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ BH, HΘ, τῇ δὲ ΓΔ βάσει ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΔK, KΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AH, AΘ, AK, AΛ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΓB, BH, HΘ ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ AHΘ, AHB, ABΓ τρίγωνα ἀλλήλοις· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΓ βάσις τῆς BΓ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ AΘΓ τρίγωνον τοῦ ABΓ τριγώνου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΛΓ βάσις τῆς ΓΔ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ AΛΓ τρίγωνον τοῦ AΓΔ τριγώνου· καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΘΓ βάσις τῇ ΓΛ βάσει, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ AΘΓ τρίγωνον τῷ AΛΓ τριγώνῳ· καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΓΛ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ AΘΓ τρίγωνον τοῦ AΛΓ τριγώνου· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων τῶν BΓ, ΓΔ δύο δὲ τριγώνων τῶν ABΓ, AΓΔ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν BΓ βάσεως καὶ τοῦ ABΓ τριγώνου, ἥ τε ΘΓ βάσις καὶ τὸ AΘΓ τρίγωνον· τῆς δὲ ΓΔ βάσεως καὶ τοῦ AΓΔ τριγώνου ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια, ἥ τε ΓΛ βάσις καὶ τὸ AΛΓ τρίγωνον. καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΓΛ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ AΘΓ τρίγωνον τοῦ AΛΓ τριγώνου· καὶ εἰ ἴση, ἴσον· καὶ εἰ ἐλάσσων, ἔλαττον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ BΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν οὕτως τὸ ABΓ τρίγωνον πρὸς τὸ AΓΔ τρίγωνον.

ΚΑΙ ἐπεὶ τοῦ μὲν ABΓ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ EΓ παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ AΓΔ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ZΓ παραλληλόγραμμον, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ABΓ τρίγωνον πρὸς τὸ AΓΔ τρίγωνον οὕτως τὸ EΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ZΓ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς ἡ μὲν BΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ABΓ τρίγωνον πρὸς τὸ AΓΔ, ὡς δὲ τὸ ABΓ πρὸς τὸ AΓΔ οὕτως τὸ EΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ZΓ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα ἡ BΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν οὕτως τὸ EΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ZΓ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. II. Theor.

Si uni laterum trianguli parallela recta linea ducatur, hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera: & si trian-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώ-

νου

τοῦ πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευρὰν παράλληλος.

guli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones conjungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ παράλληλος μιᾷ τῶν πλευρῶν τῇ ΒΓ ἤχθω ἡ ΔΕ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.

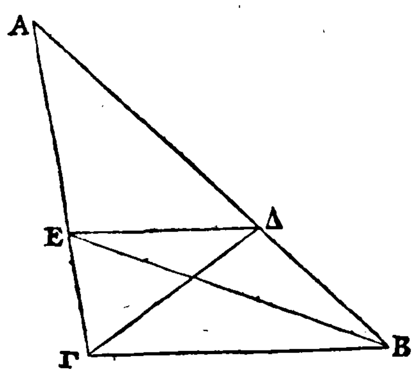
Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΔ.

Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΔΕ τριγώνῳ, ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τῆς ΔΕ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΔΕ, ΒΓ. ἄλλο δέ τι τὸ ΑΔΕ τρίγωνον· τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ· ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, τὴν ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετον ἀγομένην, πρὸς ἄλληλά εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. διὰ τὰ αὐτὰ δή, ὡς τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.

Ἀλλὰ δὴ αἱ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΓ ἀνάλογον τετμήσθωσαν κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα, ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ, ὡς δὲ ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΒΔΕ, ΓΔΕ τριγώνων πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΔΕ τριγώνῳ· καὶ εἰσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΔΕ. τὰ δὲ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστί. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευρὰν παράλληλος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Trianguli enim ΑΒΓ uni laterum ΒΓ parallela ducatur ΔΕ: dico ut ΒΔ ad ΔΑ ita esse ΓΕ ad ΕΑ.

Jungantur enim ΒΕ, ΓΔ.

Triangulum igitur ΒΔΕ [per 37.1.] triangulo ΓΔΕ est æquale; in eadem enim sunt basi ΔΕ & intra easdem parallelas ΔΕ, ΒΓ. aliud autem triangulum est ΑΔΕ; & [per 7.5.] æqualia ad idem eandem habent rationem: ergo ut triangulum ΒΔΕ ad triangulum ΑΔΕ ita est ΓΔΕ triangulum ad triangulum ΑΔΕ. ut autem triangulum ΒΔΕ ad triangulum ΑΔΕ ita est ΒΔ ad ΔΑ: nam cum eandem altitudinem habeant, videlicet perpendicularem à puncto Ε ad ΑΒ ductam [per 1. 6.] inter se sunt ut bases. & ob eandem causam ut ΓΔΕ triangulum ad triangulum ΑΔΕ ita ΓΕ ad ΕΑ: ut igitur ΒΔ ad ΔΑ ita est [per 11. 5.] ΓΕ ad ΕΑ.

Sed trianguli ΑΒΓ latera ΑΒ, ΑΓ proportionaliter secta sint in punctis Δ, Ε, ut ΒΔ ad ΔΑ ita sit ΓΕ ad ΕΑ, & jungatur ΔΕ: dico ΔΕ ipsi ΒΓ parallelam esse.

Iisdem enim constructis, quoniam est ut ΒΔ ad ΔΑ ita ΓΕ ad ΕΑ; ut autem ΒΔ ad ΔΑ ita [per 1. 6.] ΒΔΕ triangulum ad triangulum ΑΔΕ; & ut ΓΕ ad ΕΑ ita ΓΔΕ triangulum ad triangulum ΑΔΕ: erit [per 11. 5.] ut triangulum ΒΔΕ ad triangulum ΑΔΕ ita ΓΔΕ triangulum ad triangulum ΑΔΕ. utrumque igitur triangulorum ΒΔΕ, ΓΔΕ ad triangulum ΑΔΕ eandem habet rationem. ideo [per 9. 5.] triangulum ΒΔΕ triangulo ΓΔΕ æquale est: & sunt super eadem basi ΔΕ. æqualia autem triangula & super eadem basi constituta [per 39. 1.] etiam intra easdem sunt parallelas. ergo ΔΕ ipsi ΒΓ parallela est.

Si igitur uni laterum trianguli parallela recta linea ducta fuerit, hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera: & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones conjungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς· καὶ ἐὰν τὰ βάσεως

Prop. III. Theor.

Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea secet etiam basim; basis segmenta eandem rationem habebunt quam reliqua trianguli latera: & si basis segmenta

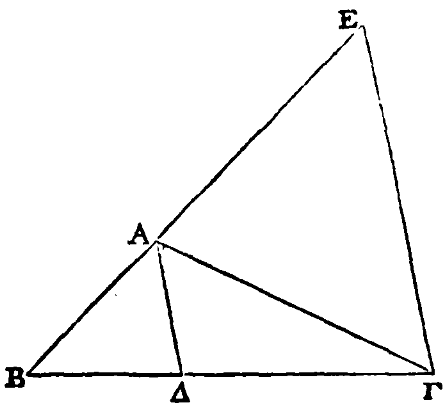
menta eandem habeant rationem, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea trianguli angulum bifariam secabit.

SIT triangulum ΑΒΓ, & secetur angulus ΒΑΓ bifariam à recta linea ΑΔ: dico ut ΒΔ ad ΔΓ ita esse ΒΑ ad ΑΓ.

Ducatur enim [per 31. 1.] per Γ ipsi ΔΑ parallela ΓΕ, & producta ΒΑ conveniat cum ipsa in puncto Ε.

Quoniam igitur in parallelas ΑΔ, ΕΓ incidit recta linea ΑΓ; erit [per 29. 1.] ΑΓΕ angulus angulo ΓΑΔ æqualis. sed ΓΑΔ angulus ponitur æqualis angulo ΒΑΔ: ergo & ΒΑΔ ipsi ΑΓΕ angulo æqualis erit. rursus, quoniam in parallelas ΑΔ, ΕΓ recta linea ΒΑΕ incidit, exterior angulus ΒΑΔ æqualis est [per 29. 1.] interiori ΑΕΓ. ostensus autem est & angulus ΑΓΕ angulo ΒΑΔ æqualis; ergo & ΑΓΕ ipsi ΑΕΓ æqualis erit: & propterea [per 6. 1.] latus ΑΕ æquale lateri ΑΓ. & quoniam uni laterum trianguli ΒΓΕ, videlicet ipsi ΕΓ, parallela ducta est ΑΔ; erit [per 2. 6.] ut ΒΔ ad ΔΓ ita ΒΑ ad ΑΕ. æqualis autem est ΑΕ ipsi ΑΓ: est igitur [per 7. 5.] ut ΒΔ ad ΔΓ ita ΒΑ ad ΑΓ.

Sit autem ut ΒΔ ad ΔΓ ita ΒΑ ad ΑΓ; & ΑΔ jungatur: dico angulum ΒΑΓ bifariam sectum esse à recta linea ΑΔ.



Iisdem enim constructis, quoniam est ut ΒΔ ad ΔΓ ita ΒΑ ad ΑΓ; est autem [per 2. 6.] ut ΒΔ ad ΔΓ ita ΒΑ ad ΑΕ (etenim uni laterum trianguli ΒΓΕ, videlicet ipsi ΕΓ, parallela ducta est ΑΔ) erit ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΒΑ ad ΑΕ: ergo [per 9. 5.] ΑΓ est æqualis ΑΕ, ac propterea [per 5. 1.] & angulus ΑΕΓ angulo ΑΓΕ æqualis. sed angulus quidem ΑΕΓ [per 29. 1.] est æqualis angulo exteriori ΒΑΔ, angulus vero ΑΓΕ æqualis alterno ΓΑΔ: quare & ΒΑΔ angulus ipsi ΓΑΔ æqualis erit. angulus igitur ΒΑΓ bifariam sectus est à recta linea ΑΔ.

Ergo si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea secet etiam basim; basis segmenta eandem rationem habebunt quam reliqua trianguli latera: & si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea trianguli angulum bifariam secabit. quod erat demonstrandum.

τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.

ΕΣτω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.

Ηχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ τῇ ΔΑ παράλληλος ἡ ΓΕ, καὶ διαχθεῖσα ἡ ΒΑ συμπιπτέτω αὐτῇ κατὰ τὸ Ε.

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΔ, ΕΓ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΑΓ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΓΕ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΓΑΔ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΑΓΕ ἐστὶν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΔ, ΕΓ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΒΑΕ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς τῇ ὑπὸ ΑΕΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΑΕΓ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΑΕ πλευρᾷ τῇ ΑΓ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΓ ἦκται ἡ ΑΔ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ. ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.

ΑΛΛΑ δὴ ἔστω ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι δίχα τέτμηται ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ· τριγώνου γὰρ τοῦ ΒΓΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΓ ἦκται παράλληλος ἡ ΑΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ· ἴση ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΑΕ, ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΕ ἐστὶν ἴση. ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΓ τῇ ἐκτὸς τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἐστὶν ἴση, ἴση δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ἐναλλὰξ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΓΑΔ ἐστὶν ἴση. ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΓ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας.

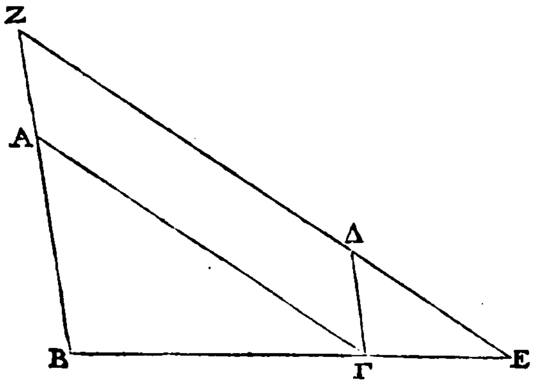
Εὰν ἄρα τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα αὐτὴν εὐθεῖα τέμνει καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς· καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τέμνει τὴν γωνίαν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί.

Ἔστωσαν ἰσογώνια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ, ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΔΓΕ, τὴν δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ· λέγω ὅτι τῶν ΑΒΓ, ΔΓΕ τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί.

Κείσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΓ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ ΒΑ, ΕΔ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Ζ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΖ τῇ ΓΔ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΖΕ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΑΓΔ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΖΑ τῇ ΓΔ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΖΔ. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΖΒΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΖΕ ἤκται ἡ ΑΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΖ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ. ἴση δὲ ἡ ΑΖ τῇ ΓΔ· ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΒΖ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ. ἴση δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΑΓ· ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΕΔ, ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ.

Τῶν ἄρα ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα· καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν ΑΒ πρὸς τὴν

PROP. IV. THEOR.

Æquiangulorum triangulorum proportionalia sunt latera quæ circum æquales angulos; & homologa sunt latera quæ æqualibus angulis subtenduntur.

Sint æquiangula triangula ΑΒΓ, ΔΓΕ, quæ angulum quidem ΑΒΓ angulo ΔΓΕ, angulum vero ΑΓΒ angulo ΔΕΓ æqualem habeant, & præterea angulum ΒΑΓ angulo ΓΔΕ: dico triangulorum ΑΒΓ, ΔΓΕ proportionalia esse latera, quæ sunt circa æquales angulos; & homologa esse latera quæ æqualibus angulis subtenduntur.

Ponatur enim ΒΓ in directum ipsi ΓΕ. & quoniam [per 17. 1.] anguli ΑΒΓ, ΑΓΒ duobus rectis sunt minores, æqualis autem est angulus ΑΓΒ angulo ΔΕΓ; erunt ΑΒΓ, ΔΕΓ anguli duobus rectis minores: quare [per 11. ax.] ΒΑ, ΕΔ productæ inter se convenient. producantur, & conveniant in puncto Ζ.

Et quoniam angulus ΔΓΕ æqualis est angulo ΑΒΓ; erit [per 28. 1.] ΒΖ ipsi ΓΔ parallela. rursus, quoniam æqualis est angulus ΑΓΒ angulo ΔΕΓ, parallela erit ΑΓ ipsi ΖΕ: parallelogrammum igitur est ΖΑΓΔ: ac propterea [per 34. 1.] ΖΑ quidem ipsi ΓΔ; ΑΓ vero ipsi ΖΔ est æqualis. & quoniam uni laterum trianguli ΖΒΕ, videlicet ipsi ΖΕ, parallela ducta est ΑΓ; erit [per 2. 6.] ut ΒΑ ad ΑΖ ita ΒΓ ad ΓΕ. æqualis autem est ΑΖ ipsi ΓΔ: ut igitur ΒΑ ad ΓΔ ita [per 7. 5.] ΒΓ ad ΓΕ, & alterne [per 16. 5.] ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΔΓ ad ΓΕ. rursus, quoniam ΓΔ parallela est ΒΖ, erit ut ΒΓ ad ΓΕ ita ΖΔ ad ΔΕ. sed ΔΖ est æqualis ΑΓ: ergo ut ΒΓ ad ΓΕ ita ΑΓ ad ΕΔ, & alterne ut ΒΓ ad ΓΑ ita ΓΕ ad ΕΔ. itaque quoniam ostensum est, ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΔΓ ad ΓΕ, ut autem ΒΓ ad ΓΑ ita ΓΕ ad ΕΔ; erit ex æquo [per 22. 5.] ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΓΔ ad ΔΕ.

Æquiangulorum igitur triangulorum proportionalia sunt latera quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera quæ æqualibus angulis subtenduntur. quod erat demonstrandum.

PROP. V. THEOR.

Si duo triangula latera habeant proportionalia, æquiangula erunt triangula; & æquales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur.

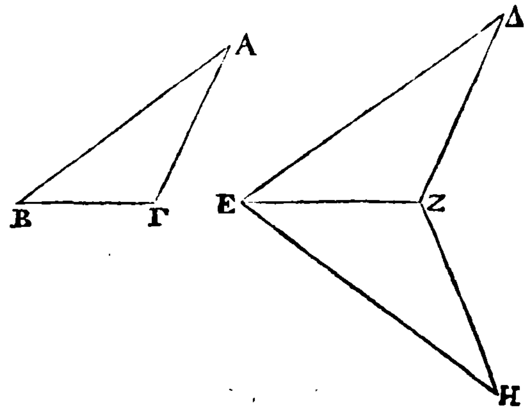
Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, quæ latera proportionalia habeant; sitque ut ΑΒ quidem

dem ad ΒΓ ita ΔΕ ad ΕΖ; ut autem ΒΓ ad ΓΑ ita ΕΖ ad ΖΔ; & adhuc ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΕΔ ad ΔΖ: dico triangulum ΑΒΓ triangulo ΔΕΖ æquiangulum eſſe, & æquales habere angulos quibus homologa latera ſubtenduntur; angulum quidem ΑΒΓ angulo ΔΕΖ, angulum vero ΒΓΑ angulo ΕΖΔ; & præterea angulum ΒΑΓ angulo ΕΔΖ.

Conſtituatur enim [per 23. 1.] ad rectam lineam ΕΖ, & ad puncta in ipſa Ε, Ζ, angulo quidem ΑΒΓ æqualis angulus ΖΕΗ; angulo autem ΒΓΑ angulus ΕΖΗ: quare [per 32. 1.] reliquus ΒΑΓ angulus reliquo ΕΗΖ eſt æqualis.

Ideoque æquiangulum eſt triangulum ΑΒΓ triangulo ΕΗΖ; triangulorum igitur ΑΒΓ, ΕΗΖ [per 4. 6.] proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa quæ æqualibus angulis ſubtenduntur: ergo ut ΑΕ ad ΒΓ ita ΗΕ ad ΕΖ. ſed ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΔΕ ad ΕΖ: ut igitur ΔΕ ad ΕΖ ita [per 11. 5.] ΗΕ ad ΕΖ: utraque igitur ipſarum ΔΕ, ΗΕ eandem habet rationem ad ΕΖ; & idcirco [per 9. 5.] erit ΔΕ ipſi ΗΕ æqualis. eadem ratione & ΔΖ æqualis erit ΗΖ. itaque quoniam ΔΕ eſt æqualis ΕΗ, communis autem ΕΖ: duæ ΔΕ, ΕΖ duabus ΗΕ, ΕΖ ſunt æquales, & baſis ΔΖ baſi ΗΖ æqualis: angulus igitur ΔΕΖ eſt [per 8. 1.] æqualis angulo ΗΕΖ. & ΔΕΖ triangulum æquale triangulo ΗΕΖ, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera ſubtenduntur: angulus igitur ΔΖΕ quidem eſt æqualis angulo ΗΖΕ, angulus vero ΕΔΖ æqualis angulo ΕΗΖ. & quoniam angulus ΔΕΖ eſt æqualis angulo ΗΕΖ, & [per conſtruct.] angulus ΗΕΖ æqualis angulo ΑΒΓ; erit & angulus ΑΒΓ angulo ΔΕΖ æqualis. eadem ratione & angulus ΑΓΒ æqualis eſt angulo ΔΖΕ, & etiam angulus ad Α angulo ad Δ: ergo ΑΒΓ triangulum eſt æquiangulum triangulo ΔΕΖ.

Si igitur duo triangula latera habeant proportionalia, æquiangula erunt triangula; & æquales habebunt angulos, quibus homologa latera ſubtenduntur. quod erat demonſtrandum.



ΒΓ οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὡς δὲ τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ ἔτι ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως τὴν ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· λέγω ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἴσας ἕξουσι τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσι, τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ.

Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Ε, Ζ, τῇ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΕΗ, τῇ δὲ ὑπὸ ΒΓΑ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΗΖ ἐστὶν ἴση.

Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΗΖ τριγώνῳ· τῶν ἄρα ΑΒΓ, ΕΗΖ τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ὑπόκειται ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ· ὡς ἄρα ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΔΕ, ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΗΕ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΗΖ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΔΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΗΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΗΖ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΕΖ ἐστὶν ἴση. καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΗΕΖ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΕ, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΔΖ τῇ ὑπὸ ΕΗΖ. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔΕΖ τῇ ὑπὸ ΗΕΖ ἐστὶν ἴση, ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΗΕΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴση, καὶ ἔτι ἡ πρὸς τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα· καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VI. Theor.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, quibus homologa latera ſubtenduntur.

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, unum angulum ΒΑΓ uni angulo ΕΔΖ æqualem

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, μίαν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ μιᾷ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην

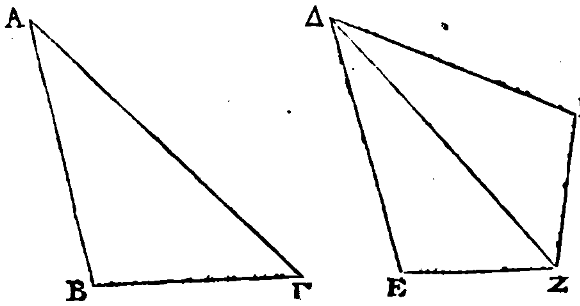
ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως τὴν ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· λέγω ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἴσην ἕξει τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Συνεστάτω γὰρ πρὸς μὲν τῇ ΔΖ εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Δ, Ζ, ὁποτέρᾳ μὲν τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ γωνιῶν ἴση ἡ ὑπὸ ΖΔΗ, τῇ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἡ ὑπὸ ΔΖΗ.

Λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Η ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΗΖ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ· ἴση ἄρα ἡ ΕΔ τῇ ΔΗ, καὶ κοινὴ ἡ ΔΖ· δύο δὴ αἱ ΕΔ, ΔΖ δυσὶ ταῖς ΗΔ, ΔΖ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΔΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΔΖ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΕΖ βάσει τῇ ΖΗ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΔΗΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστί, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ, ἡ δὲ πρὸς τῷ Η τῇ πρὸς τῷ Ε. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴση. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ε ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

habentia, circa æquales autem angulos latera proportionalia, ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΕΔ ad ΔΖ: dico triangulum ΑΒΓ triangulo ΔΕΖ æquiangulum esse, & angulum quidem ΑΒΓ habere æqualem angulo ΔΕΖ, angulum vero ΑΓΒ angulo ΔΖΕ.



Constituatur enim [per 23. 1.] ad rectam lineam ΔΖ, & ad puncta in ipsa Δ, Ζ, alterutri angulorum ΒΑΓ, ΕΔΖ æqualis angulus ΖΔΗ, angulo autem ΑΓΒ æqualis ΔΖΗ.

Reliquus igitur qui ad Β [per 32. 1.] reliquo qui ad Η est æqualis: ergo triangulum ΑΒΓ triangulo ΔΗΖ æquiangulum est; ac propterea [per 4. 6.] ut ΒΑ ad ΑΓ ita est ΗΔ ad ΔΖ. ponitur autem ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΕΔ ad ΔΖ: ut igitur ΕΔ ad ΔΖ ita [per 11. 5.] ΗΔ ad ΔΖ: igitur [per 9. 5.] ΕΔ æqualis est ipsi ΔΗ, & communis ΔΖ: ergo duæ ΕΔ, ΔΖ duabus ΗΔ, ΔΖ sunt æquales, & angulus ΕΔΖ angulo ΗΔΖ est æqualis: basis igitur ΕΖ [per 4. 1.] est æqualis basi ΖΗ, triangulumque ΔΕΖ æquale triangulo ΗΔΖ, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur: angulus igitur ΔΖΗ est æqualis angulo ΔΖΕ; angulus vero ad Η angulo ad Ε. sed angulus ΔΖΗ æqualis est [per constr.] angulo ΑΓΒ: angulus igitur ΑΓΒ angulo ΔΖΕ est æqualis. ponitur autem & ΒΑΓ angulus æqualis angulo ΕΔΖ: ergo [per 32. 1.] & reliquus qui ad Β æqualis reliquo qui ad Ε: æquiangulum igitur est triangulum ΑΒΓ triangulo ΔΕΖ.

Quare si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ὡς τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, τῶν δὲ λοιπῶν τῶν πρὸς τοῖς Γ, Ζ πρότερον ἑκατέραν ἅμα ἐλάσσονα

Prop. VII. Theor.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, reliquorum vero utrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, circa quos latera sunt proportionalia.

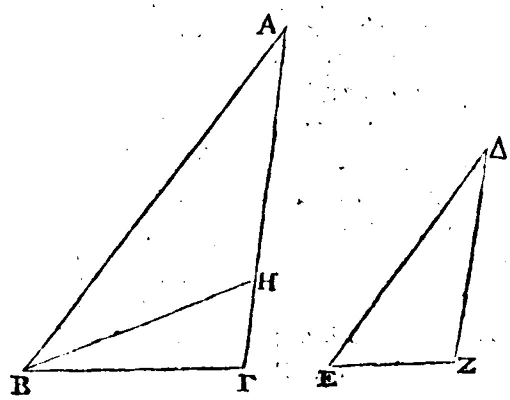
Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum ΒΑΓ angulo ΕΔΖ æqualem, circa alios autem angulos ΑΒΓ, ΔΕΖ latera proportionalia, ut sit ΔΕ ad ΕΖ sicut ΑΒ ad ΒΓ, & reliquorum qui ad Γ, Ζ primo utrumque simul minorem

norem

norem recto: dico triangulum ABΓ triangulo ΔEZ æquiangulum esse, angulumque ABΓ æqualem angulo ΔEZ, & reliquum videlicet qui ad Γ reliquo qui ad Z æqualem.

Si enim inæqualis est angulus ABΓ angulo ΔEZ, unus ipsorum major erit. sit major ABΓ, & constituatur [per 23. 1.] ad rectam lineam AB & ad punctum in ipsa B angulo ΔEZ æqualis angulus ABH.

Et quoniam angulus quidem A est æqualis angulo Δ, angulus vero ABH angulo ΔEZ; erit [per 32. 1.] reliquus AHB reliquo ΔZE æqualis: æquiangulum igitur est ABH triangulum triangulo ΔEZ; quare [per 4. 6.] ut AB ad BH sic ΔE ad EZ. ut vero ΔE ad EZ sic ponitur AB ad BΓ: ut igitur AB ad BΓ, [per 11. 5.] sic AB ad BH, ideo AB ad utramque BΓ, BH eandem habet rationem; erit igitur BΓ ipsi BH æqualis; ac propterea [per 5. 1.] angulus BHΓ est æqualis angulo BΓH. minor autem recto ponitur angulus qui ad Γ: ergo & BHΓ minor est recto, & ob id [per 13. 1.] qui ei deinceps est AHB major recto. atque ostensus est angulus AHB æqualis angulo qui ad Z: angulus igitur qui ad Z recto major est. atqui ponitur minor recto; quod est absurdum: non est igitur angulus ABΓ inæqualis angulo ΔEZ; ergo ipsi est æqualis. est autem & angulus ad A æqualis ei qui ad Δ: quare & reliquus qui ad Γ æqualis reliquo qui ad Z: æquiangulum igitur est ABΓ triangulum triangulo ΔEZ.



Sed rursus ponatur uterque angulorum qui ad Γ, Z non minor recto: dico rursus & sic triangulum ABΓ triangulo ΔEZ æquiangulum esse.

Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus BΓ æqualem ipsi BH, angulumque ad Γ angulo BHΓ æqualem. sed angulus qui ad Γ non est minor recto: non est igitur minor recto BHΓ. quare trianguli BHΓ duo anguli non sunt duobus rectis minores; quod [per 17. 1.] fieri non potest: non igitur rursus est ABΓ angulus inæqualis angulo ΔEZ; ergo æqualis. est autem & qui ad A æqualis ei qui ad Δ: reliquus igitur qui ad Γ [per 32. 1.] reliquo ad Z est æqualis; ac propterea triangulum ABΓ triangulo ΔEZ æquiangulum est.

Si igitur duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, reliquorum vero utrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, circa quos latera sunt proportionalia. quod erat demonstrandum.

ὀρθῆς· λέγω ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ, καὶ ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ABΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ, καὶ λοιπὴ δηλονότι ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Z ἴση.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ABΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ABΓ· καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ B, τῇ ὑπὸ ΔEZ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ABH.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν A γωνία τῇ Δ, ἡ δὲ ὑπὸ ABH γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AHB λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔZE ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABH τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BH οὕτως ἡ ΔE πρὸς τὴν EZ. ὡς δὲ ἡ ΔE πρὸς τὴν EZ οὕτως ὑπόκειται ἡ AB πρὸς τὴν BΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ AB πρὸς τὴν BΓ οὕτως ἡ AB πρὸς τὴν BH, ἡ AB ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν BΓ, BH τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἡ BΓ τῇ BH· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ BHΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ BΓH ἐστὶν ἴση. ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ὑπόκειται ἡ πρὸς τὸ Γ· ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ BHΓ, ὥστε ἡ ἐφεξῆς αὐτῇ γωνία ἡ ὑπὸ AHB μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. καὶ ἐδείχθη ἴση οὖσα τῇ πρὸς τῷ Z, καὶ ἡ πρὸς τῷ Z ἄρα μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. ὑπόκειται δὲ ἐλάσσων ὀρθῆς, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ABΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ, ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ A ἴση τῇ πρὸς τῷ Δ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Z ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ὑποκείσθω ἑκατέρα τῶν πρὸς τοῖς Γ, Z μὴ ἐλάσσων ὀρθῆς· λέγω πάλιν ὅτι καὶ οὕτως ἐστὶν ἰσογώνιον τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ BΓ τῇ BH· ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Γ τῇ ὑπὸ BHΓ ἴση ἐστίν. οὐκ ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ πρὸς τῷ Γ, οὐκ ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς οὐδὲ ἡ ὑπὸ BHΓ. τριγώνου δὲ τοῦ BHΓ αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν οὐκ εἰσὶν ἐλάττονες, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα πάλιν ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ABΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ, ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ A τῇ πρὸς τῷ Δ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Z ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ.

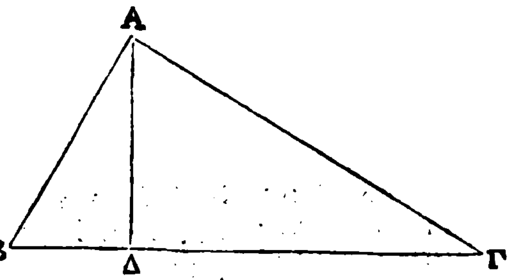
Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η΄.

Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ· τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι ὅμοιόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ τριγώνων ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἔτι ἀλλήλοις.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ΑΒΓ καὶ τοῦ ΑΒΔ ἡ πρὸς τῷ Β· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΑ ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΒ ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Γ γωνίαν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΔ ὑποτείνουσαν τὴν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ, τὴν ὑπὸ ΒΑΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου. καὶ ἔτι ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν, κοινὴν τῶν δύο τριγώνων· τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἰσογώνιόν τέ ἐστι, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τὸ ΑΔΓ τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ τριγώνων ὅλῳ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστιν.



ΛΕΓΩ δὴ, ὅτι καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ τρίγωνα.

Ἐπεὶ γὰρ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ ἐστὶν ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ πρὸς τῷ Γ ἐδείχθη ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, ὑποτείνουσα τὴν ὑπὸ ΒΑΔ, πρὸς τὴν ΔΑ τοῦ ΑΔΓ τριγώνου ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ Γ γωνίαν, ἴσην τῇ ὑπὸ ΒΑΔ, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν, πρὸς τὴν ΔΓ ὑποτείνουσαν τὴν ὑπὸ ΔΑΓ τοῦ ΑΔΓ τριγώνου, ἴσην τῇ πρὸς τῷ Β. καὶ ἔτι ἡ ΒΑ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ ΑΔΒ, πρὸς τὴν ΑΓ ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ ΑΔΓ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VIII. Theor.

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem sunt triangula & toti & inter se sunt similia.

SIT triangulum rectangulum ABΓ, rectum habens angulum BAΓ; & à puncto A ad BΓ perpendicularis ducatur AΔ: dico triangula ABΔ, AΔΓ toti triangulo ABΓ & inter se similia esse.

Quoniam enim angulus BAΓ est æqualis angulo AΔB, rectus enim est uterque, & angulus qui ad B communis duobus triangulis ABΓ, ABΔ; erit [per 32. 1.] reliquus AΓB reliquo BAΔ æqualis: æquiangulum igitur est triangulum ABΓ triangulo ABΔ. quare [per 4. 6.] ut BΓ quæ subtendit angulum rectum trianguli ABΓ ad BA subtendentem angulum rectum trianguli ABΔ, sic ipsa AB subtendens angulum qui ad Γ trianguli ABΓ ad BΔ subtendentem angulum æqualem angulo qui ad Γ, videlicet BAΔ ipsius ABΔ trianguli. & sic etiam AΓ ad AΔ subtendentem angulum qui ad B communem duobus triangulis: ergo triangulum ABΓ triangulo ABΔ æquiangulum est, & circa æquales angulos latera habet proportionalia: simile igitur est [per 1. def. 6.] triangulum ABΓ triangulo ABΔ. eadem ratione demonstrabimus etiam AΔΓ triangulum triangulo ABΓ simile esse: quare utrumque ipsorum ABΔ, AΔΓ, toti triangulo ABΓ est simile.

Dico insuper triangula ABΔ, AΔΓ etiam inter se similia esse.

Quoniam enim angulus BΔA rectus est æqualis recto AΔΓ; sed & BAΔ ostensus æqualis ei qui ad Γ; erit [per 32. 1.] reliquus qui ad B reliquo ΔAΓ æqualis: æquiangulum igitur est triangulum ABΔ triangulo AΔΓ. ergo [per 4. 6.] ut BΔ trianguli ABΔ, subtendens BAΔ angulum, ad ΔA trianguli AΔΓ subtendentem angulum qui ad Γ, æqualem angulo BAΔ; sic ipsa AΔ trianguli ABΔ, subtendens angulum qui ad B, ad ΔΓ trianguli AΔΓ subtendentem angulum ΔAΓ, ei qui ad B æqualem. & sic etiam BA subtendens rectum angulum AΔB, ad AΓ subtendentem angulum rectum AΔΓ: est igitur [per 1. def. 6.] ABΔ triangulum simile triangulo AΔΓ.

Quare si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem sunt triangula & toti & inter se sunt similia. quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Ex hoc manifeſtum eſt, in triangulo rectangulo perpendicularem ab angulo recto ad baſim ductam mediam proportionalem eſſe inter ſegmenta baſis: & præterea inter baſim & baſis ſegmentum utrumlibet, latus ſegmento conterminum medium eſſe proportionale.

Πόρισμα.

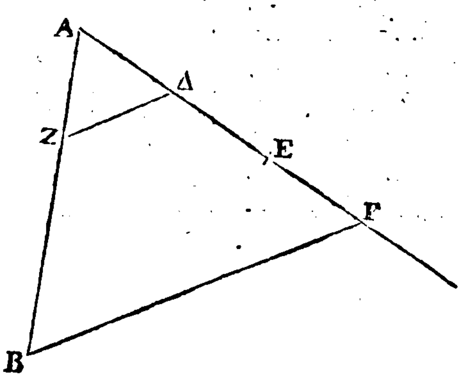
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστι· καὶ ἔτι τῆς βάσεως καὶ ἑνὸς ὁποτερουοῦν τῶν τμημάτων ἡ πρὸς τῷ τμήματι πλευρὰ μέση ἀνάλογόν ἐστι.

Prop. IX. Probl.

A data recta linea imperatam partem abſcindere.

SIT data recta linea AB: oportet ab ipſa AB imperatam partem abſcindere.

Imperetur pars tertia; & ducatur à puncto A quælibet recta linea AΓ, quæ cum ipſa AB angulum quemlibet contineat; ſumaturque in AΓ quodvis punctum Δ, & ipſi AΔ [per 3. 1.] æquales ponantur ΔE, EΓ; deinde jungatur BΓ, & per Δ ipſi BΓ [per 31. 1.] parallela ducatur ΔZ.



Itaque quoniam uni laterum trianguli ABΓ, videlicet ipſi BΓ, parallela ducta eſt ZΔ; erit [per 2. 6.] ut ΓΔ ad ΔA ita BZ ad ZA. dupla autem eſt ΓΔ ipſius ΔA; ergo & BZ ipſius ZA dupla: tripla igitur eſt BA ipſius AZ.

Quare à data recta linea AB imperata pars tertia AZ abſciſſa eſt. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τῆς ΑΒ τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸ τρίτον· καὶ διήχθω τις εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ Α ἡ ΑΓ, γωνίαν περιέχουσα μετὰ τῆς ΑΒ τυχοῦσαν· καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς ΑΓ τὸ Δ, καὶ κείσθωσαν τῇ ΑΔ ἴσαι αἱ ΔΕ, ΕΓ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος ἤχθω τῇ ΒΓ ἡ ΔΖ.

Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΓ ἦκται ἡ ΖΔ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΖΑ. διπλῆ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΑ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΒΖ τῆς ΖΑ· τριπλῆ ἄρα ἡ ΒΑ τῆς ΑΖ.

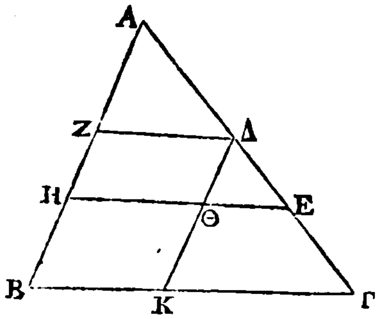
Τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ τὸ ἐπιταχθὲν τρίτον μέρος ἀφῄρηται τὸ ΑΖ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. X. Probl.

Datam rectam lineam inſectam ſimiliter ſecare, ut data recta ſecta eſt.

SIT data recta linea inſecta AB, ſecta vero AΓ: oportet rectam lineam AB inſectam ſimiliter ſecare ut AΓ ſecta eſt.

Sit AΓ ſecta in punctis Δ, E, & ponantur ita ut angulum quemvis comprehendant, jungaturque BΓ, & per puncta Δ, E ipſi BΓ [per 31. 1.] parallelæ ducantur ΔZ, EH, per Δ vero ipſi AB ducatur parallela ΔΘK.



Parallelogrammum igitur eſt utrumque ipſorum ZΘ, ΘB: ac propterea [per 34. 1.] ΔΘ eſt æqualis ZH; ΘK vero ipſi HB. & quoniam uni laterum trianguli ΔKΓ, ipſi ſcilicet KΓ, parallela ducta eſt ΘE; erit [per 2. 6.] ut ΓE ad EΔ ita KΘ ad ΘΔ. æqualis autem eſt KΘ quidem ipſi BH; ΘΔ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄτμητον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ ὁμοίως τεμεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμητος ἡ ΑΒ, ἡ δὲ τετμημένη ἡ ΑΓ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ ἄτμητον τῇ ΑΓ τετμημένῃ ὁμοίως τεμεῖν.

Ἔστω τετμημένη ἡ ΑΓ κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα, καὶ κείσθωσαν ὥστε γωνίαν τυχοῦσαν περιέχειν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τῶν Δ, Ε τῇ ΒΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΔΖ, ΕΗ, διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΘΚ.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΖΘ, ΘΒ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΔΘ τῇ ΖΗ, ἡ δὲ ΘΚ τῇ ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΔΚΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΚΓ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΘΕ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΔ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΚΘ τῇ ΒΗ, ἡ δὲ ΘΔ

τῇ

τῇ ΗΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ. πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΗΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΗ ἦκται ἡ ΖΔ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ· ἔστιν ἄρα ὡς μὲν ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ, ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ.

Η ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμητος ἡ ΑΒ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ τῇ ΑΓ ὁμοίως τέτμηται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

vero ipsi HZ: est igitur ut ΓE ad EΔ ita BH ad HZ. rursus, quoniam uni laterum trianguli AHE, nimirum ipsi EH, parallela ducta est ZΔ; ut EΔ ad ΔA ita erit HZ ad ZA. sed ostensum est ut ΓE ad EΔ ita esse BH ad HZ: ut igitur ΓE ad EΔ ita est BH ad HZ, & ut EΔ ad ΔA ita HZ ad ZA.

Ergo data recta linea insecta AB similiter secta est ut data recta AΓ. quod erat faciendum

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Εστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ, καὶ κείσθωσαν γωνίαν περιέχουσαι τυχοῦσαν· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΑΓ τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Εκβεβλήσθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΑΓ ἐπὶ τὰ Δ, Ε σημεῖα, καὶ κείσθω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ ΔΕ.

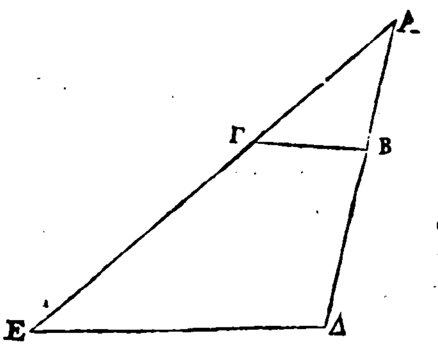
Επεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΑΔΕ, παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΔΕ ἦκται ἡ ΒΓ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ. ἴση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΑΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΑΓ, τρίτη ἀνάλογον αὐταῖς προσεύρηται ἡ ΓΕ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. XI. PROBL.

Duabus datis rectis lineis, tertiam proportionalem invenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ AB, AΓ, & ponantur ita ut angulum quemvis comprehendant: oportet ipsis AB, AΓ tertiam proportionalem invenire.



Producantur enim AB, AΓ ad puncta Δ, E, ponaturque ipsi AΓ æqualis BΔ, & jungatur BΓ, ducaturque [per 31. 1.] per Δ ipsi BΓ parallela ΔE.

Quoniam igitur uni laterum trianguli AΔE, videlicet ipsi ΔE, parallela ducta est BΓ; erit [per 2. 6.] ut AB ad BΔ ita AΓ ad ΓE. æqualis autem est BΔ ipsi AΓ: ut igitur AB ad AΓ ita est AΓ ad ΓE.

Quare duabus datis rectis lineis AB, AΓ, tertia proportionalis inventa est ΓE. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Εστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ τῶν Α, Β, Γ εὐθειῶν τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

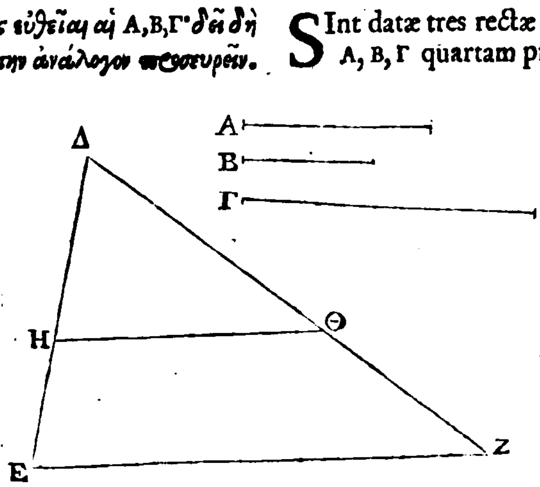
Εκκείσθωσαν δύο εὐθεῖαι, αἱ ΔΕ, ΔΖ, γωνίαν περιέχουσαι τυχοῦσαν τὴν ὑπὸ ΕΔΖ· καὶ κείσθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΗ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΗΕ, καὶ ἔτι τῇ Γ ἴση ἡ ΔΘ· καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΗΘ, παράλληλος αὐτῇ ἤχθω διὰ τοῦ Ε ἡ ΕΖ.

Επεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΔΕΖ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΖ ἦκται ἡ ΗΘ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΕ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΖ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΔΗ τῇ Α, ἡ δὲ ΗΕ τῇ Β, ἡ δὲ ΔΘ τῇ Γ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν ΘΖ.

PROP. XII. PROBL.

Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem invenire.

Sint datæ tres rectæ lineæ A, B, Γ: oportet ipsis A, B, Γ quartam proportionalem invenire.



Exponantur duæ rectæ lineæ ΔE, ΔZ, angulum quemvis EΔZ comprehendentes; & ponatur ipsi quidem A æqualis ΔH, ipsi vero B æqualis HE, & ipsi Γ æqualis ΔΘ; junctaque HΘ, per E ipsi parallela ducatur EZ.

Itaque quoniam uni laterum trianguli ΔEZ, nimirum ipsi EZ, parallela ducta est HΘ; erit [per 2. 6.] ut ΔH ad HE ita ΔΘ ad ΘZ. est autem ΔH ipsi A æqualis, HE vero æqualis B, & ΔΘ æqualis Γ: ut igitur A ad B ita Γ ad ΘZ.

Quare

Quare datis tribus rectis lineis Α, Β, Γ, quarta proportionalis inventa est ΘΖ. quod erat faciendum.

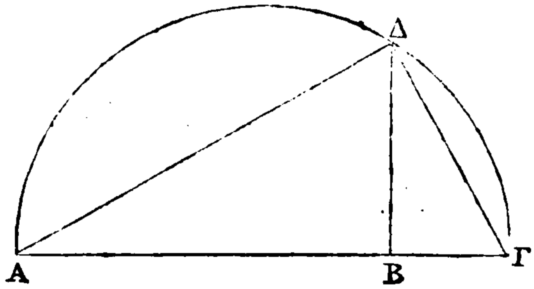
Τριῶν ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν Α, Β, Γ, τετάρτη ἀνάλογον προσεύρηται ἡ ΘΖ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XIII. Probl.

Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem invenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ ΑΒ, ΒΓ: oportet inter ipsas mediam proportionalem invenire.

Ponantur in directum, & super ipsa ΑΓ describatur semicirculus ΑΔΓ, ducaturque [per 11. 1.] à puncto Β ipsi ΑΓ ad rectos angulos ΒΔ, & ΑΔ, ΔΓ jungantur.



Quoniam igitur angulus ΑΔΓ est in semicirculo, is [per 31. 3.] rectus est. & quoniam in triangulo rectangulo ΑΔΓ ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est ΔΒ; erit [per cor. 8. 6.] ΔΒ media proportionalis inter segmenta basis ΑΒ, ΒΓ.

Duabus igitur datis rectis lineis ΑΒ, ΒΓ, media proportionalis inventa est ΔΒ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, αἱ ΑΒ, ΒΓ· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΑΓ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ.

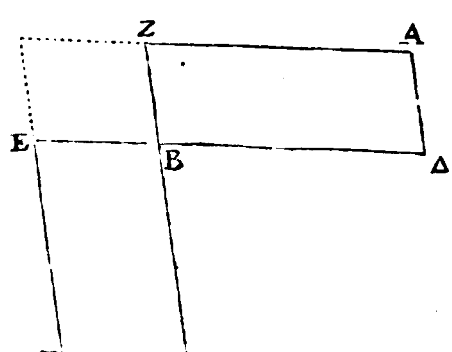
Καὶ ἐπεὶ ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΔΓ, ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΑΔΓ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΔΒ· ἡ ΔΒ ἄρα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν ΑΒ, ΒΓ μέση ἀνάλογόν ἐστιν.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ, μέση ἀνάλογον προσεύρηται ἡ ΔΒ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XIV. Probl.

Parallelogrammorum æqualium & unum angulum uni æqualem habentium reciproce proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos: & quorum parallelogrammorum unum angulum uni æqualem habentium reciproce proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa inter se sunt æqualia.

Sint æqualia parallelogramma ΑΒ, ΒΓ, æquales habentia angulos ad Β, & ponantur in directum ΔΒ, ΒΕ; ergo [per 14. 1.] & in directum erunt ΖΒ, ΒΗ: dico parallelogrammorum ΑΒ, ΒΓ latera, quæ sunt circa æquales angulos, esse reciproce proportionalia; hoc est ut ΔΒ ad ΒΕ ita esse ΗΒ ad ΒΖ.



Compleatur enim parallelogrammum ΖΕ.

Et quoniam parallelogrammum ΑΒ æquale est parallelogrammo ΒΓ, est autem ΖΕ parallelogrammum aliud: erit [per 7. 5.] ut ΑΒ ad ΖΕ ita ΒΓ ad ΖΕ. sed [per 1. 6.] ut ΑΒ quidem ad ΖΕ ita est ΔΒ ad ΒΕ, ut autem ΒΓ ad ΖΕ ita ΗΒ ad ΒΖ: erit igitur [per 11. 5.] ut ΔΒ ad ΒΕ ita

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Τῶν ἴσων τε καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν παραλληλογράμμων, μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Ἔστω ἴσα παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒ, ΒΓ, ἴσας ἔχοντα τὰς πρὸς τῷ Β γωνίας, καὶ κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας αἱ ΔΒ, ΒΕ, ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΖΒ, ΒΗ· λέγω ὅτι τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτέστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ, ἄλλο δέ τι τὸ ΖΕ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ οὕτως τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, ὡς δὲ τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ

ΗΒ

ἡ Η Β πρὸς τὴν Β Ζ. τῶν ἄρα Α Β, Β Γ παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

Ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ἔστω ὡς ἡ Δ Β πρὸς τὴν Β Ε οὕτως ἡ Η Β πρὸς τὴν Β Ζ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Α Β παραλληλόγραμμον τῷ Β Γ παραλληλογράμμῳ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Δ Β πρὸς τὴν Β Ε οὕτως ἡ Η Β πρὸς τὴν Β Ζ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ Δ Β πρὸς τὴν Β Ε οὕτως τὸ Α Β παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ Ζ Ε παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ Η Β πρὸς τὴν Β Ζ οὕτως τὸ Β Γ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ Ζ Ε· καὶ ὡς ἄρα τὸ Α Β πρὸς τὸ Ζ Ε οὕτως τὸ Β Γ πρὸς τὸ Ζ Ε· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Α Β παραλληλόγραμμον τῷ Β Γ παραλληλογράμμῳ.

Τῶν ἄρα ἴσων τε καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν παραλληλογράμμων, μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

H B ad B Z. ergo parallelogrammorum A B, B Γ latera, quæ circum æquales angulos, sunt reciproce proportionalia.

SINT autem latera, quæ circum æquales angulos, reciproce proportionalia; sitque ut Δ B ad B E ita H B ad B Z: dico parallelogrammum A B esse æquale parallelogrammo B Γ.

Quoniam enim est ut Δ B ad B E ita H B ad B Z, ut autem Δ B ad B E ita [per 1. 6.] A B parallelogrammum ad parallelogrammum Z E, & ut H B ad B Z ita B Γ parallelogrammum ad parallelogrammum Z E; erit [per 11. 5.] ut A B ad Z E ita B Γ ad Z E: æquale igitur est [per 9. 5.] A B parallelogrammum parallelogrammo B Γ.

Ergo parallelogrammorum æqualium & unum angulum uni æqualem habentium reciproce proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos: & quorum parallelogrammorum unum angulum uni æqualem habentium reciproce proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa inter se sunt æqualia. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

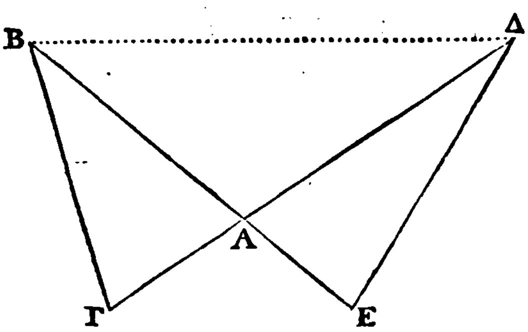
Τῶν ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν, μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

PROP. XV. THEOR.

Triangulorum æqualium & unum angulum uni æqualem habentium reciproce proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos: & quorum triangulorum unum angulum uni æqualem habentium reciproce proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa inter se sunt æqualia.

Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ Α Β Γ, Α Δ Ε, μίαν μιᾷ ἴσην ἔχοντα γωνίαν, τὴν ὑπὸ Β Α Γ τῇ ὑπὸ Δ Α Ε· λέγω ὅτι τῶν Α Β Γ, Α Δ Ε τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτέστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ Γ Α πρὸς τὴν Α Δ οὕτως ἡ Ε Α πρὸς τὴν Α Β.

Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν Γ Α τῇ Α Δ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ Ε Α τῇ Α Β. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Β Δ.



Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ Α Β Γ τρίγωνον τῷ Α Δ Ε τριγώνῳ, ἄλλο δέ τι τὸ Α Β Δ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ Α Β τρίγωνον πρὸς τὸ Β Α Δ τρίγωνον οὕτως τὸ Α Δ Ε τρίγωνον πρὸς τὸ Β Α Δ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ Γ Α Β πρὸς τὸ Β Α Δ οὕτως ἡ Γ Α πρὸς τὴν Α Δ, ὡς δὲ τὸ Ε Α Δ τρίγωνον πρὸς τὸ Β Α Δ οὕτως ἡ Ε Α πρὸς τὴν Α Β· καὶ ὡς ἄρα ἡ Γ Α πρὸς τὴν Α Δ οὕτως ἡ Ε Α πρὸς τὴν Α Β· τῶν Α Β Γ, Α Δ Ε τριγώνων ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

Ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ πλευραὶ τῶν Α Β Γ, Α Δ Ε τριγώνων, καὶ ἔστω ὡς ἡ Γ Α πρὸς τὴν Α Δ οὕτως ἡ Ε Α πρὸς τὴν Α Β· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Α Β Γ τρίγωνον τῷ Α Δ Ε τριγώνῳ.

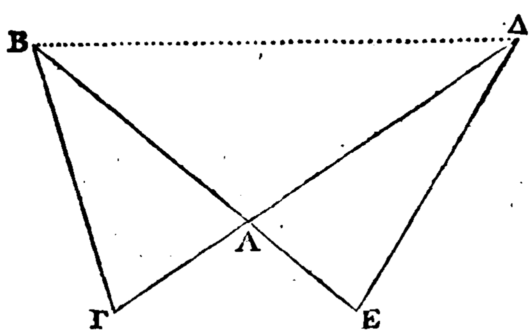
SInt æqualia triangula A B Γ, A Δ E, unum angulum uni æqualem habentia, angulum scilicet B A Γ angulo Δ A E: dico triangulorum A B Γ, A Δ E latera, quæ circum æquales angulos, esse reciproce proportionalia, hoc est ut Γ A ad A Δ ita esse E A ad A B.

Ponantur enim ita ut in directum sit Γ A ipsi A Δ: ergo [per 14. 1.] & E A ipsi A B in directum erit. & jungatur B Δ.

Quoniam igitur triangulum A B Γ æquale est triangulo A Δ E, est autem aliud triangulum A B Δ; erit [per 7. 5.] ut Γ A B triangulum ad triangulum B A Δ ita triangulum A Δ E ad triangulum B A Δ. sed [per 1. 6.] ut triangulum quidem Γ A B ad B A Δ triangulum ita Γ A ad A Δ, ut autem triangulum E A Δ ad ipsum B A Δ ita E A ad A B: erit igitur [per 11. 5.] Γ A ad A Δ ut E A ad A B: quare triangulorum A B Γ, A Δ E latera, quæ circum æquales angulos, sunt reciproce proportionalia.

SINT autem latera triangulorum A B Γ, A Δ E reciproce proportionalia; & sit ut Γ A ad A Δ ita E A ad A B: dico triangulum A B Γ triangulo A Δ E esse æquale.

Juncta enim rursus ΒΔ, quoniam ut ΓΑ ad ΑΔ ita est ΕΑ ad ΑΒ; ut autem ΓΑ ad ΑΔ ita [per 1. 6.] ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΒΑΔ, & ut ΕΑ ad ΑΒ ita triangulum ΕΑΔ ad ΒΑΔ triangulum: erit [per 11. 5.] ut ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΒΑΔ ita triangulum ΕΑΔ ad ΒΑΔ triangulum: utrumque igitur triangulorum ΑΒΓ, ΑΔΕ ad triangulum ΒΑΔ eandem habet rationem; ac propterea [per 9. 5.] æquale est ΑΒΓ triangulum triangulo ΕΑΔ.



Ἐπιζευχθείσης γὰρ πάλιν τῆς ΒΔ, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον· ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ πρὸς τὸ ΒΑΔ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΑΔ τριγώνῳ.

Æqualium igitur & unum angulum uni æqualem habentium triangulorum reciproce proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos: & quorum triangulorum unum angulum uni æqualem habentium reciproce proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa inter se sunt æqualia. quod erat demonstrandum.

Τῶν ἄρα ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν, μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν, τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἐκεῖνα ἴσα ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XVI. Theor.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛʹ.

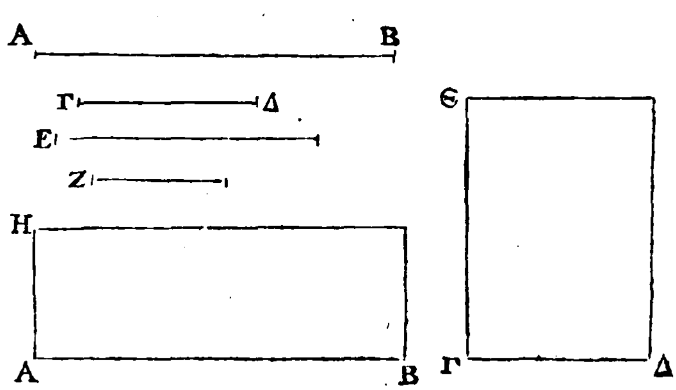
Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis comprehensum æquale est rectangulo quod sub mediis comprehenditur: & si rectangulum sub extremis comprehensum æquale fuerit ei quod sub mediis comprehenditur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· καὶ εἰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ; ut quidem ΑΒ ad ΓΔ ita Ε ad Ζ: dico rectangulum comprehensum sub rectis lineis ΑΒ, Ζ æquale esse ei quod sub ipsis ΓΔ, Ε comprehenditur.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ ἀνάλογον, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ducantur enim [per 11. 1.] à punctis Α, Γ ipsis ΑΒ, ΓΔ ad rectos angulos ΑΗ, ΓΘ; ponaturque ipsi Ζ æqualis ΑΗ; ipsi vero Ε æqualis ΓΘ; & compleantur ΒΗ, ΔΘ parallelogramma.



Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Α, Γ σημείων ταῖς ΑΒ, ΓΔ εὐθείαις πρὸς ὀρθὰς αἱ ΑΗ, ΓΘ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Ζ ἴση ἡ ΑΗ, τῇ δὲ Ε ἴση ἡ ΓΘ, καὶ συμπεπληρώσθωσαν τὰ ΒΗ, ΔΘ παραλληλόγραμμα.

Quoniam igitur est ut ΑΒ ad ΓΔ ita Ε ad Ζ; est autem Ε quidem æqualis ΓΘ, & Ζ ipsi ΑΗ; erit [per 7. 5.] ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΓΘ ad ΑΗ: parallelogrammorum igitur ΒΗ, ΔΘ reciproce proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos. quorum autem æquiangulorum parallelogrammorum reciproce proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos,

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ, ἴση δὲ ἡ μὲν Ε τῇ ΓΘ, ἡ δὲ Ζ τῇ ΑΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΑΗ· τῶν ΒΗ, ΔΘ παραλληλογράμμων ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ὧν δὲ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας

γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΔΘ παραλληλογράμμῳ. καί ἐστι τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ, ἴση γὰρ ἡ ΑΗ τῇ Ζ· τὸ δὲ ΔΘ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἴση γάρ ἡ ΓΘ τῇ Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

ΑΛΛΑ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ ΓΔ, Ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· λέγω ὅτι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε, καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ τὸ ΒΗ, ἴση γάρ τῇ Ζ ἡ ΑΗ· τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε τὸ ΔΘ, ἴση γάρ ἡ ΓΘ τῇ Ε· τὸ ἄρα ΒΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΘ. καί εἰσιν ἰσογώνια. τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΑΗ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΓΘ τῇ Ε, ἡ δὲ ΑΗ τῇ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· καὶ εἰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ea [per 14. 6.] inter se sunt æqualia; parallelogrammum igitur BH æquale est parallelogrammo ΔΘ. est autem parallelogrammum BH sub rectis lineis AB, Z comprehensum, est enim AH æqualis Z; parallelogrammum vero ΔΘ comprehenditur sub ipsis ΓΔ, E, cum ΓΘ ipsi E sit æqualis: rectangulum igitur comprehensum sub rectis AB, Z est æquale ei quod sub ipsis ΓΔ, E comprehenditur.

SED rectangulum comprehensum sub AB, Z sit æquale ei quod comprehenditur sub ipsis ΓΔ, E: dico quatuor rectas lineas proportionales esse, videlicet ut AB ad ΓΔ ita E ad Z.

Iisdem enim constructis, quoniam rectangulum comprehensum sub rectis AB, Z est æquale ei quod sub rectis ΓΔ, E comprehenditur, est autem rectangulum BH comprehensum sub rectis AB, Z, etenim AH est æqualis Z; comprehensum vero sub rectis ΓΔ, E est rectangulum ΔΘ, quod ΓΘ ipsi E sit æqualis: erit parallelogrammum BH æquale parallelogrammo ΔΘ; & sunt æquiangula. æqualium autem & æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos [per 14. 6.] sunt reciproce proportionalia: quare ut AB ad ΓΔ ita ΓΘ ad AH. æqualis autem est ΓΘ ipsi E, & AH ipsi Z: ut igitur AB ad ΓΔ ita E ad Z.

Ergo si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis comprehensum æquale est ei quod sub mediis comprehenditur: & si rectangulum sub extremis comprehensum æquale fuerit ei quod sub mediis comprehenditur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζʹ.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· καὶ εἰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

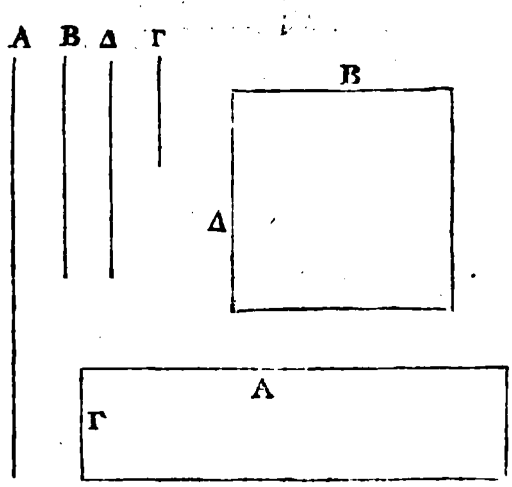
PROP. XVII. THEOR.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis comprehensum æquale est ei quod à media fit quadrato: & si rectangulum sub extremis comprehensum æquale fuerit ei quod à media fit quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τῆς Β τετραγώνῳ.

Κείσθω τῇ Β ἴση ἡ Δ.

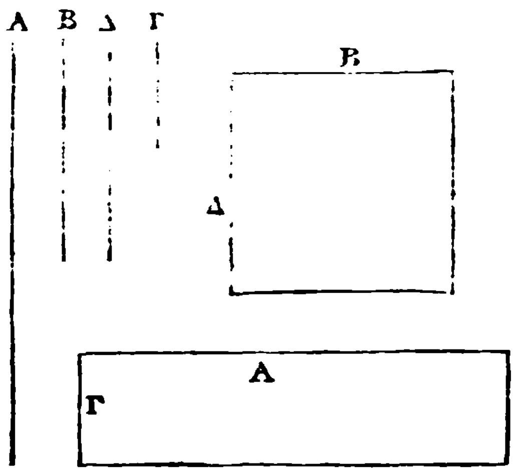
Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ Β τῇ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιε-



SInt tres rectæ lineæ proportionales A, B, Γ, ut quidem A ad B ita B ad Γ: dico rectangulum comprehensum sub rectis A, Γ æquale esse ei quod à media B fit quadrato.

Ponatur ipsi B æqualis Δ.

Et quoniam ut A ad B ita B ad Γ, æqualis autem est B ipsi Δ; erit ut A ad B ita Δ ad Γ. si autem quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis comprehensum [per 16. 6.] est æquale ei quod sub mediis comprehenditur: ergo rectangulum comprehensum sub rectis A, Γ æquale est ei quod comprehenditur sub rectis B, Δ. sed rectangulum comprehensum sub rectis B, Δ est æquale quadrato quod fit ex ipsa B; etenim B est æqualis Δ: rectangulum igitur comprehensum sub rectis A, Γ est æquale ei quod ex B fit quadrato.



Sed rectangulum comprehensum sub rectis A, Γ æquale sit quadrato quod fit ex B: dico ut A ad B ita esse B ad Γ.

Iisdem enim constructis, quoniam rectangulum comprehensum sub rectis A, Γ æquale est quadrato quod fit ex B; at quadratum quod fit ex B est rectangulum quod sub ipsis B, Δ comprehenditur, est enim B æqualis ipsi Δ: erit rectangulum comprehensum sub rectis A, Γ æquale ei quod sub rectis B, Δ comprehenditur. si autem rectangulum sub extremis comprehensum æquale fuerit ei quod sub mediis comprehenditur, quatuor rectæ lineæ [per 16. 6.] proportionales erunt: est igitur ut A ad B ita Δ ad Γ. sed B æqualis est Δ: ut igitur A ad B ita B ad Γ.

Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis comprehensum est æquale ei quod à media fit quadrato: & si rectangulum sub extremis comprehensum æquale fuerit ei quod à media fit quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt. quod erat demonstrandum.

χομένῳ ὀρθογωνίῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Δ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν Β, Δ τῷ ἀπὸ τῆς Β ἐστὶν ἴσον, ἴση γάρ ἡ Β τῇ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β τετραγώνῳ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς Β· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ.

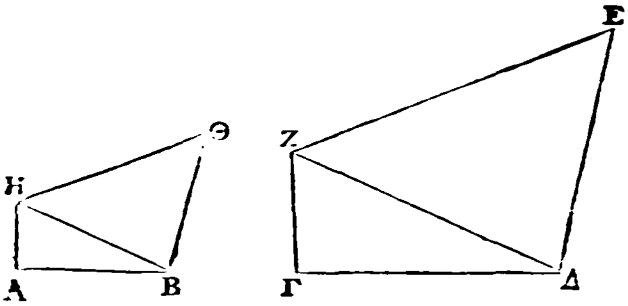
Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς Β τῷ ὑπὸ τῶν Β, Δ, ἴση γάρ ἡ Β τῇ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Β, Δ. ἐὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον εἰσίν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. ἴση δὲ ἡ Β τῇ Δ· ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ.

Ἐὰν ἄρα τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XVIII. Probl.

A data recta linea rectilineo simile & similiter positum rectilineum describere.

Sit data recta linea AB, datum autem rectilineum ΓE: oportet à recta linea AB rectilineo ΓE simile & similiter positum rectilineum describere.



Jungatur ΔZ; & [per 23. 1.] ad rectam lineam AB & ad puncta in ipsa A, B angulo quidem Γ æqualis angulus constituatur HAB, angulo autem ΓΔZ angulus ABH: reliquus igitur ΓZΔ angulus [per 32. 1.] reliquo AHB est æqualis: ergo æquiangulum est ZΓΔ triangulum triangulo HAB; ac propterea [per 4. 6.] ut ZΔ ad HB ita ZΓ ad HA & ΓΔ ad

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΓΕ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας τῷ ΓΕ εὐθυγράμμῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΔΖ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Α, Β τῇ μὲν πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ ἡ ὑπὸ ΗΑΒ ἴση, τῇ δὲ ὑπὸ ΓΔΖ ἡ ὑπὸ ΑΒΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΖΔ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΗΒ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΓΔ τρίγωνον τῷ ΗΑΒ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ.

ΑΒ. πάλιν, συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΗ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Β, Η τῇ μὲν ὑπὸ ΔΖΕ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΗΘ, τῇ δὲ ὑπὸ ΖΔΕ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΒΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Ε λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Θ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΔΕ τρίγωνον τῷ ΗΒΘ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ καὶ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ οὕτως ἔτι ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἔτι ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΓΖΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΗΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΗΘ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΖΕ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΒΘ ἐστὶν ἴση, ἔστι δὲ καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ Γ τῇ πρὸς τῷ Α ἴση, ἡ δὲ πρὸς τῷ Ε τῇ πρὸς τῷ Θ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΘ τῷ ΓΕ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας αὐτῶν πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΘ εὐθύγραμμον τῷ ΓΕ εὐθυγράμμῳ.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ΓΕ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγέγραπται τὸ ΑΘ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΑΒ. rursus, constituatur ad rectam lineam ΒΗ & ad puncta in ipsa Β, Η angulo quidem ΔΖΕ æqualis angulus ΒΗΘ, angulo autem ΖΔΕ æqualis ΗΒΘ: ergo reliquus qui ad Ε reliquo qui ad Θ est æqualis: æquiangulum igitur est triangulum ΖΔΕ triangulo ΗΒΘ: quare [per 4. 6.] ut ΖΔ ad ΗΒ ita ΖΕ ad ΗΘ & ΕΔ ad ΘΒ. ostensum autem est & ut ΖΔ ad ΗΒ ita esse ΖΓ ad ΗΑ & ΓΔ ad ΑΒ: & igitur [per 11. 5.] ut ΖΓ ad ΗΑ ita ΓΔ ad ΑΒ & ΖΕ ad ΗΘ, & adhuc ΕΔ ad ΘΒ. itaque quoniam angulus ΓΖΔ est [per constr.] æqualis angulo ΑΗΒ, angulus autem ΔΖΕ angulo ΒΗΘ: erit totus ΓΖΕ angulus toti ΑΗΘ æqualis. eadem ratione & ΓΔΕ est æqualis ipsi ΑΒΘ, & præterea angulus ad Γ angulo ad Α æqualis, angulus vero ad Ε angulo ad Θ; æquiangulum igitur est ΑΘ ipsi ΓΕ, & latera circum æquales angulos habet proportionalia: ergo [per 1. def. 6.] rectilineum ΑΘ rectilineo ΓΕ simile erit.

A data igitur recta linea ΑΒ dato rectilineo ΓΕ simile & similiter positum rectilineum ΑΘ descriptum est. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

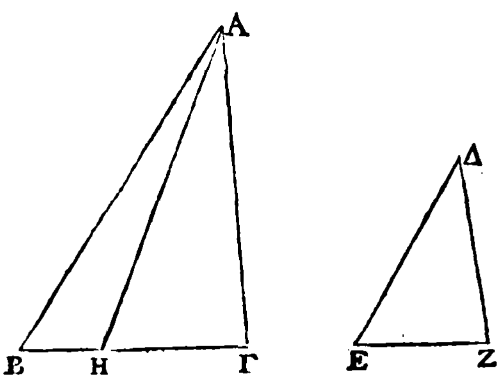
Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Prop. XIX. Theor.

Similia triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

Ἔστω ὅμοια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἴσην ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν τῇ πρὸς τῷ Ε, ὡς δὲ τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὥστε ὁμόλογον εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν ΒΓ, ΕΖ τρίτη ἀνάλογον ἡ ΒΗ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΑ.

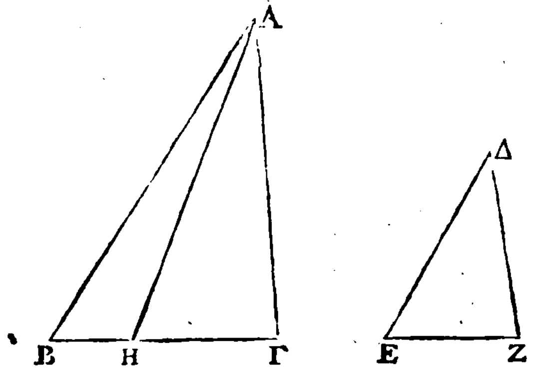


Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἀλλ' ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· τῶν ΑΒΗ, ΔΕΖ τριγώνων ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ὧν δὲ, μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην διπλασίονα λόγον

Sint similia triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, habentia angulum ad Β æqualem angulo ad Ε; & sit ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΔΕ ad ΕΖ, ita ut latus ΒΓ homologum sit [per 12. def. 5.] lateri ΕΖ: dico ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΔΕΖ duplicatam rationem habere ejus quam habet ΒΓ ad ΕΖ.

Sumatur enim [per 11. 6.] ipsis ΒΓ, ΕΖ tertia proportionalis ΒΗ, ut sit sicut ΒΓ ad ΕΖ ita ΕΖ ad ΒΗ: & jungatur ΗΑ.

Quoniam igitur ut ΑΒ ad ΒΓ ita est ΔΕ ad ΕΖ; erit permutando [per 16. 5.] ut ΑΒ ad ΔΕ ita ΒΓ ad ΕΖ. sed ut ΒΓ ad ΕΖ ita ΕΖ ad ΒΗ, & igitur [per 11. 5.] ut ΑΒ ad ΔΕ ita ΕΖ ad ΒΗ: quare triangulorum ΑΒΗ, ΔΕΖ latera, quæ circum æquales angulos, reciproce sunt proportionalia. quorum autem triangulorum, unum angulum uni æqualem habentium, latera, quæ circum æquales angulos, reciproce sunt proportionalia, ea [per 15. 6.] inter se sunt æqualia: æquale igitur est ΑΒΗ triangulum triangulo ΔΕΖ. & quoniam est ut ΒΓ ad ΕΖ ita ΕΖ ad ΒΗ; si autem tres rectæ lineæ proportionales sint [per 10. def. 5.] prima ad tertiam duplicatam rationem habet ejus quam habet ad secundam; habebit ΒΓ ad ΒΗ duplicatam rationem ejus quam habet ΒΓ ad ΕΖ. ut autem ΒΓ ad ΒΗ ita [per 1. 6.] ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΑΒΗ: ergo & ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΑΒΗ duplicatam rationem habet ejus quam habet ΒΓ ad ΕΖ. est autem ΑΒΗ triangulum triangulo ΔΕΖ æquale: & igitur [per 7. 5.] triangulum ΑΒΓ ad triangulum ΔΕΖ duplicatam rationem habebit ejus quam habet ΒΓ ad ΕΖ.



Similia igitur triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum. quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Ex hoc manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam ita esse triangulum quod fit à prima ad triangulum à secunda simile & similiter descriptum: quoniam ostensum est ut ΓΒ ad ΒΗ ita ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΑΒΗ, hoc est ad triangulum ΔΕΖ.

ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς τὴν δευτέραν· ἡ ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΒΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ τρίγωνον· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἴσον δὲ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Τὰ ἄρα ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι κἂν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τρίγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ἐπείπερ ἐδείχθη, ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ τρίγωνον, τουτέστι τὸ ΔΕΖ.

Prop. XX. Theor.

Similia polygona in similia triangula dividuntur & numero æqualia & homologa totis: & polygonum ad polygonum duplicatam rationem habet ejus quam latus homologum habet ad latus homologum.

Sint similia polygona ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, & sit latus ΑΒ homologum ipsi ΖΗ: dico polygona ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ in similia triangula dividi & numero æqualia & homologa totis; & polygonum ΑΒΓΔΕ ad polygonum ΖΗΘΚΛ duplicatam rationem habere ejus quam habet ΑΒ ad ΖΗ.

Jungantur ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

Et quoniam simile est ΑΒΓΔΕ polygonum polygono ΖΗΘΚΛ; angulus ΒΑΕ angulo ΗΖΛ est æqualis: atque est ut ΒΑ ad ΑΕ ita ΗΖ ad ΖΛ. quoniam igitur ΑΒΕ, ΖΗΛ sunt duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia; erit [per 6. 6.] triangulum ΑΒΕ triangulo ΖΗΛ æquiangulum; ergo [per 4. 6.] & simile; angulus igitur ΑΒΕ æqualis est angulo ΖΗΛ. est autem & totus ΑΒΓ angulus æqualis toti ΖΗΘ, propter similitudinem polygonorum: ergo reliquus ΕΒΓ reliquo ΛΗΘ est æqualis. & quoniam ob similitudinem triangulorum ΑΒΕ, ΖΗΛ est ut ΕΒ ad ΒΑ ita ΛΗ ad ΗΖ; sed & propter similitudinem polygonorum ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΖΗ ad

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις· καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἔστω ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ ΑΒ τῇ ΖΗ· λέγω ὅτι τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ πολύγωνα εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον τῷ ΖΗΘΚΛ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΛ· καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΛ. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΕ, ΖΗΛ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ, ὥστε καὶ ὅμοιον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΛ. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΗΘ ἴση, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΒΓ γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΛΗΘ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΕ, ΖΗΛ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς τὴν ΗΖ, ἀλλὰ μὴν καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς τὴν

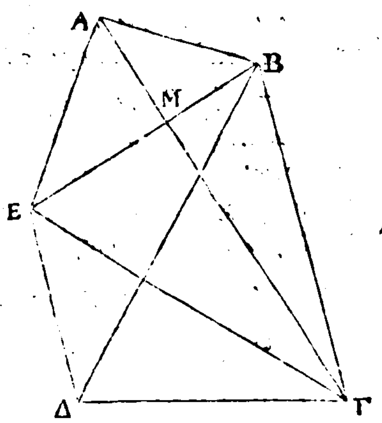
ΗΘ·

ΗΘ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ περὶ τὰς ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΒΓ, ΛΗΘ αἱ πλευραὶ ἀνάλογον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ, ὥστε καὶ ὅμοιον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΓΔ τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ ΛΘΚ τριγώνῳ· τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διῄρηται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος.

Λέγω ὅτι καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις· τουτέστιν, ὥστε ἀνάλογον εἶναι τὰ τρίγωνα, καὶ ἡγούμενα μὲν εἶναι τὰ ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΔ, ἑπόμενα δὲ αὐτῶν τὰ ΖΗΛ, ΛΗΘ, ΛΘΚ, καὶ ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΖΘ.

Καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΘ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΘ· ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΗΘ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΗΖΘ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΜ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΝ, ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΜ τῇ ὑπὸ ΖΗΝ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΜΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΖΝΗ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΜ τρίγωνον τῷ ΖΗΝ τριγώνῳ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ



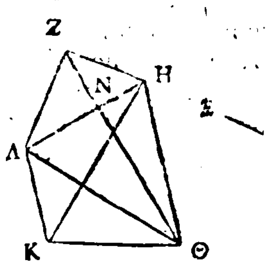
ΒΜΓ τρίγωνον ἰσογώνιον ἐστι τῷ ΗΝΘ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστίν, ὡς μὲν ἡ ΑΜ πρὸς τὴν ΜΒ οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς τὴν ΝΗ, ὡς δὲ ἡ ΒΜ πρὸς τὴν ΜΓ οὕτως ἡ ΗΝ πρὸς τὴν ΝΘ· ὥστε καὶ δι' ἴσου, ὡς ἡ ΑΜ πρὸς τὴν ΜΓ οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς τὴν ΝΘ. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΜ πρὸς τὴν ΜΓ οὕτως τὸ ΑΒΜ τρίγωνον πρὸς τὸ ΜΒΓ, καὶ τὸ ΑΜΕ πρὸς ΕΜΓ, πρὸς ἄλληλα γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις· καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὡς ἄρα τὸ ΑΜΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΜΓ οὕτως τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΓΒΕ. ἀλλ' ὡς τὸ ΑΜΒ πρὸς τὸ ΒΜΓ οὕτως ἡ ΑΜ πρὸς τὴν ΜΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΜ πρὸς τὴν ΜΓ οὕτως τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΒΓ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΖΝ πρὸς τὴν ΝΘ οὕτως τὸ ΖΗΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΜ πρὸς τὴν ΜΓ οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς τὴν ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΓ τρίγωνον οὕτως τὸ ΖΗΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΛ τρίγωνον, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον οὕτως τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΒΔ, ΗΚ, ὅτι καὶ ὡς

ΗΘ: erit [per 22. 5.] ex æquo ut ΕΒ ad ΒΓ ita ΛΗ ad ΗΘ; nempe circum æquales angulos ΕΒΓ, ΛΗΘ latera sunt proportionalia: æquiangulum igitur est [per 6. 6.] ΕΒΓ triangulum triangulo ΛΗΘ, quare [per 4. 6.] & simile. eadem ratione & ΕΓΔ triangulum simile est triangulo ΛΘΚ: similia igitur polygona ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ in similia triangula dividuntur & numero æqualia.

Dico & homologa totis: hoc est, ut proportionalia sint triangula, & antecedentia quidem esse ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΔ, consequentia autem ipsorum ΖΗΛ, ΛΗΘ, ΛΘΚ; & ΑΒΓΔΕ polygonum ad polygonum ΖΗΘΚΛ duplicatam rationem habere ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est ΑΒ ad ΖΗ.

Jungantur enim ΑΓ, ΖΘ.

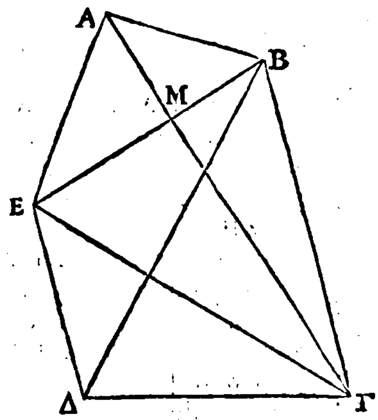
Et quoniam, propter similitudinem polygonorum, angulus ΑΒΓ est æqualis angulo ΖΗΘ, atque est ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΖΗ ad ΗΘ; erit [per 6. 6.] triangulum ΑΒΓ triangulo ΖΗΘ æquiangulum: æqualis igitur est angulus quidem ΒΑΓ angulo ΗΖΘ, angulus vero ΒΓΑ angulo ΗΘΖ. præterea quoniam æqualis est ΒΑΜ angulus angulo ΗΖΝ, ostensus autem est & ΑΒΜ angulus æqualis angulo ΖΗΝ; erit [per 32. 1.] & reliquus ΑΜΒ reliquo ΖΝΗ æqualis: ergo æquiangulum est ΑΒΜ triangulum triangulo ΖΗΝ. similiter ostendemus & triangulum ΒΜΓ

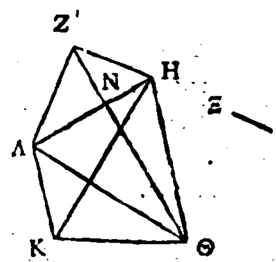


triangulo ΗΝΘ æquiangulum esse; igitur [per 4. 6.] ut ΑΜ ad ΜΒ ita est ΖΝ ad ΝΗ, & ut ΒΜ ad ΜΓ ita ΗΝ ad ΝΘ: quare & ex æquo [per 22. 5.] ut ΑΜ ad ΜΓ ita ΖΝ ad ΝΘ. sed ut ΑΜ ad ΜΓ ita ΑΒΜ triangulum ad triangulum ΜΒΓ, & triangulum ΑΜΕ ad ipsum ΕΜΓ, inter se enim sunt [per 1. 6.] ut bases: & [per 12. 5.] ut unum antecedentium ad unum consequentium ita omnia antecedentia ad omnia consequentia: ut igitur ΑΜΒ triangulum ad triangulum ΒΜΓ ita triangulum ΑΒΕ ad ipsum ΓΒΕ. sed ut ΑΜΒ ad ΒΜΓ ita ΑΜ ad ΜΓ; & igitur [per 11. 5.] ut ΑΜ ad ΜΓ ita ΑΒΕ triangulum ad triangulum ΕΒΓ. eadem ratione & ut ΖΝ ad ΝΘ ita ΖΗΛ triangulum ad triangulum ΗΛΘ. atque est ut ΑΜ ad ΜΓ ita ΖΝ ad ΝΘ: ergo [per 11. 5.] ut triangulum ΑΒΕ ad triangulum ΒΕΓ ita triangulum ΖΗΛ ad ΗΛΘ triangulum; & permutando [per 16. 5.] ut ΑΒΕ triangulum ad triangulum ΖΗΛ ita triangulum ΒΕΓ ad triangulum ΗΛΘ. similiter ostendemus, junctis ΒΔ, ΗΚ, ut

ΒΕΓ

BEΓ triangulum ad triangulum HΛΘ ita esse triangulum EΓΔ ad triangulum ΛΘK. & quoniam est ut ABE triangulum ad triangulum ZHΛ ita triangulum EBΓ ad triangulum ΛHΘ, & adhuc ita triangulum EΓΔ ad ipsum ΛΘK; erit [per 12. 5.] & ut unum antecedentium ad unum consequentium sic omnia antecedentia ad omnia consequentia: ergo ut triangulum ABE ad triangulum ZHΛ ita ABΓΔE polygonum ad polygonum ZHΘKΛ. sed ABE triangulum ad triangulum ZHΛ duplicatam rationem habet ejus quam latus homologum AB habet ad homologum latus ZH; similia enim triangula sunt [per 19. 6.] in duplicata ratione laterum homologorum: ergo & ABΓΔE polygonum ad polygonum ZHΘKΛ duplicatam rationem habet ejus quam AB latus homologum habet ad ZH homologum latus.





Similia igitur polygona in similia triangula dividuntur, & numero æqualia & homologa totis: & polygonum ad polygonum duplicatam habet rationem ejus quam habet latus homologum ad latus homologum. quod erat demonstrandum.

Corollarium 1.

Eodem modo & in similibus quadrilateris ostendetur, ea esse in duplicata ratione laterum homologorum. ostensum autem est [ad corol. 19. 6.] & in triangulis: quare universe similes rectilineæ figuræ inter se sunt in duplicata ratione homologorum laterum.

Corollarium 2.

Et si ipsis AB, ZH tertiam proportionalem sumamus, quæ sit Ξ; habebit [per 10. def. 5.] AB ad Ξ duplicatam rationem ejus quam habet AB ad ZH. habet autem & polygonum ad polygonum, & quadrilaterum ad quadrilaterum duplicatam rationem ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est quam AB ad ZH: atque ostensum est hoc in triangulis. universe igitur manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam ita esse figuram rectilineam, quæ fit à prima, ad similem & similiter descriptam à secunda.

ALITER.

Ostendemus etiam & aliter expeditius homologa esse triangula.

Exponantur enim rursus polygona ABΓΔE, ZHΘKΛ, & jungantur BE, EΓ, HΛ, ΛΘ: dico ut ABE triangulum ad triangulum ZHΛ ita esse triangulum EBΓ ad triangulum ΛHΘ, & triangulum ΓΔE ad ipsum ΘKΛ.

τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον οὕτως τὸ ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ τρίγωνον. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ, καὶ ἔτι ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ· καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον. ἀλλὰ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΗ ὁμόλογον πλευράν· τὰ γὰρ ὅμοια τρίγωνα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ ἄρα πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΗ ὁμόλογον πλευράν.

Τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται, καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις· καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα α΄.

Ὡσαύτως δὴ καὶ ἐπὶ τῶν ὁμοίων τετραπλεύρων δειχθήσεται, ὅτι ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων· ὥστε καθόλου τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Πόρισμα β΄.

Καὶ ἐὰν τῶν ΑΒ, ΖΗ τρίτην ἀνάλογον λάβωμεν τὴν Ξ, ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ξ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ. ἔχει δὲ καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, καὶ τὸ τετράπλευρον πρὸς τὸ τετράπλευρον διπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον, τουτέστιν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ· ἐδείχθη δὲ τοῦτο καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων. ὥστε καὶ καθόλου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον.

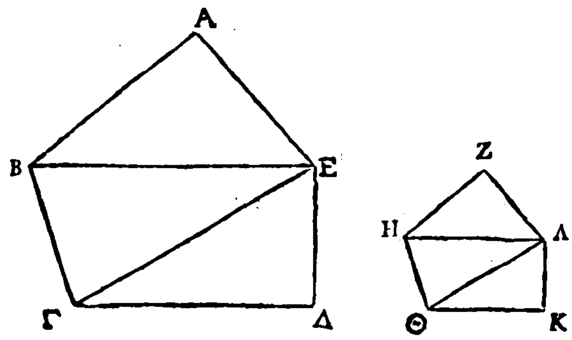
ΑΛΛΩΣ.

Δείξομεν δὴ καὶ ἑτέρως προχειρότερον ὁμόλογα τὰ τρίγωνα.

Ἐκκείσθωσαν γὰρ πάλιν τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ πολύγωνα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ καὶ τὸ ΓΔΕ πρὸς τὸ ΘΚΛ.

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ, τὸ ΑΒΕ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΗΛ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΗΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ. πάλιν, ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ· τὸ ΕΒΓ ἄρα πρὸς τὸ ΛΗΘ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΕ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΘΛ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΘΚ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΘΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΕΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΗΘ οὕτως τὸ ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ οὕτως τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΖΗΛ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΖΗΛ οὕτως τὸ ΒΕΓ πρὸς τὸ ΗΛΘ καὶ τὸ ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ· καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα, καὶ τὰ λοιπὰ ὡς ἐν τῇ προτέρᾳ δείξει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



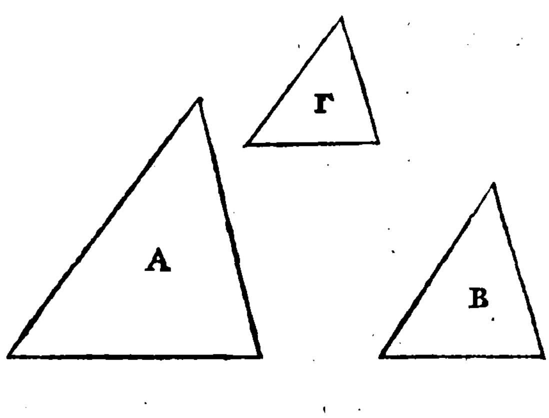
Quoniam enim simile est ABE triangulum triangulo ZHΛ, habet ABE triangulum ad ZHΛ [per 19. 6.] duplicatam rationem ejus quam habet BE ad HΛ. eadem ratione & triangulum BEΓ ad HΛΘ triangulum duplicatam rationem habet ejus quam BE ad HΛ: est igitur [per 11. 5.] ut ABE triangulum ad triangulum ZHΛ ita triangulum EBΓ ad ΛHΘ triangulum. rursus, quoniam simile est triangulum EBΓ triangulo ΛHΘ, habet [per 19. 6.] EBΓ triangulum ad triangulum ΛHΘ duplicatam rationem ejus quam recta linea ΓE habet ad rectam ΘΛ. eadem ratione & EΓΔ triangulum ad triangulum ΛΘK duplicatam rationem habet ejus quam ΓE ad ΘΛ: est igitur [per 11. 5.] ut triangulum EBΓ ad triangulum ΛHΘ ita EΓΔ triangulum ad triangulum ΛΘK. ostensum autem est & ut EBΓ triangulum ad triangulum ΛHΘ ita triangulum ABE ad triangulum ZHΛ: ergo & ut triangulum ABE ad triangulum ZHΛ ita triangulum BEΓ ad HΛΘ triangulum, & triangulum EΓΔ ad ipsum ΛΘK: & igitur [per 12. 5.] ut unum antecedentium ad unum consequentium ita omnia antecedentia ad omnia consequentia, & reliqua ut in priori demonstratione. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα΄.

Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια.

Ἔστω γὰρ ἑκάτερον τῶν Α, Β εὐθυγράμμων τῷ Γ ὅμοιον· λέγω ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἐστὶν ὅμοιον.

Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὅμοιον τὸ Α τῷ Γ, ἰσογώνιόν τε ἐστὶν αὐτῷ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. πάλιν, ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ Β τῷ Γ, ἰσογώνιόν τε ἐστὶν αὐτῷ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ἑκάτερον ἄρα τῶν Α, Β τῷ Γ ἰσογώνιόν τε ἐστὶ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὥστε καὶ τὸ Α τῷ Β ἰσογώνιόν τε ἐστὶ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



PROP. XXI. THEOR.

Quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia.

SIT enim utrumque rectilineorum A, B simile rectilineo Γ: dico & rectilineum A rectilineo B simile esse.

Quoniam enim simile est A rectilineum rectilineo Γ, & ipsi [per 1. def. 6.] æquiangulum erit, & circum æquales angulos latera habebit proportionalia. rursus, quoniam simile est rectilineum B rectilineo Γ, æquiangulum ipsi erit & circum æquales angulos latera proportionalia habebit; utrumque igitur rectilineorum A, B ipsi Γ æquiangulum est, & circum æquales angulos latera habet proportionalia: quare & rectilineum A ipsi B est [per 1. ax.] æquiangulum, lateraque circum æquales angulos [per 11. 5.] proportionalia habet; ac propterea [per 1. def. 6.] A ipsi B est simile. quod erat demonstrandum.

Prop. XXII. Theor.

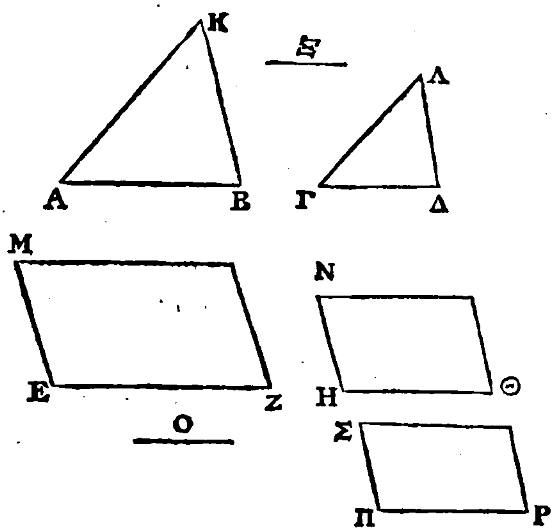
Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; & rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta, proportionalia erunt: & si rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta proportionalia fuerint; & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales AB, ΓΔ, EZ, HΘ, ut AB ad ΓΔ ita EZ ad HΘ; describanturque ab ipsis quidem AB, ΓΔ similia & similiter posita rectilinea KAB, ΛΓΔ, ab ipsis vero EZ, HΘ describantur rectilinea similia & similiter posita MZ, NΘ: dico ut KAB rectilineum ad rectilineum ΛΓΔ ita esse rectilineum MZ ad ipsum NΘ rectilineum.

Sumatur enim [per 11. 6.] ipsis quidem AB, ΓΔ tertia proportionalis Ξ; ipsis vero EZ, HΘ tertia proportionalis O. & quoniam est ut AB ad ΓΔ ita EZ ad HΘ, ut autem ΓΔ ad Ξ ita HΘ ad O: erit ex æquo [per 22. 5.] ut AB ad Ξ ita EZ ad O. sed [per 2. cor. 20. 6.] ut AB ad Ξ ita est rectilineum KAB ad ΛΓΔ rectilineum, ut autem EZ ad O ita rectilineum MZ ad rectilineum NΘ: igitur [per 11. 5.] ut KAB ad ΛΓΔ ita MZ ad NΘ.

Sed sit ut KAB rectilineum ad rectilineum ΛΓΔ ita rectilineum MZ ad rectilineum NΘ: dico ut AB ad ΓΔ ita esse EZ ad HΘ.

Fiat enim [per 12. 6.] ut AB ad ΓΔ ita EZ ad ΠP, & describatur [per 18. 6.] ab ipsa ΠP alterutri rectilineorum MZ, NΘ simile & similiter positum rectilineum ΣP.



Quoniam igitur est ut AB ad ΓΔ ita EZ ad ΠP, & descripta sunt ab ipsis quidem AB, ΓΔ similia & similiter posita KAB, ΛΓΔ rectilinea, ab ipsis vero EZ, ΠP similia & similiter posita rectilinea MZ, ΣP; est [per part. prior. huj.] ut KAB ad rectilineum ΛΓΔ ita rectilineum MZ ad ΣP rectilineum. ponitur autem & ut rectilineum KAB ad rectilineum ΛΓΔ ita MZ rectilineum ad rectilineum NΘ; rectilineum igitur MZ [per 11. 5.] ad utrumque ipsorum NΘ, ΣP eandem habet rationem: ergo [per 9. 5.] rectilineum NΘ est ipsi ΣP æquale. est autem ipsi simile & similiter positum: ergo [per lemma sequens] HΘ est æqualis ΠP. & quoniam ut AB ad ΓΔ ita est EZ ad ΠP, æqualis autem ΠP ipsi HΘ; erit [per 7. 5.] ut AB ad ΓΔ ita EZ ad HΘ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀνάλογον ἔσται· κἂν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ μὲν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΚΑΒ, ΛΓΔ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΗΘ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΜΖ, ΝΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν ΑΒ, ΓΔ τρίτη ἀνάλογον ἡ Ξ, τῶν δὲ ΕΖ, ΗΘ τρίτη ἀνάλογον ἡ Ο. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μὲν ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, ὡς δὲ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν Ξ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν Ο· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ξ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ο. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ξ οὕτως καὶ τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ο οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· ὡς ἄρα τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

Γεγονέτω γὰρ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΠΡ ὁποτέρῳ τῶν ΜΖ, ΝΘ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ ΣΡ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ ΚΑΒ, ΛΓΔ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΠΡ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ ΜΖ, ΣΡ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· τὸ ΜΖ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΝΘ καὶ ΣΡ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΝΘ τῷ ΣΡ. ἔστι δὲ αὐτῷ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΠΡ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, ἴση δὲ ἡ ΠΡ τῇ ΗΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

Ἐὰν

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται· κἂν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; & rectilinea quæ ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta, proportionalia erunt: & si rectilinea quæ ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta, proportionalia fuerint; & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt. quod erat demonstrandum.

ΛΗΜΜΑ.

Ὅτι δὲ, ἐὰν εὐθύγραμμα ἴσα καὶ ὅμοια ᾖ, αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, δείξομεν οὕτως.

Ἔστω ἴσα καὶ ὅμοια εὐθύγραμμα τὰ ΝΘ, ΣΡ, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ οὕτως ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΡΠ τῇ ΘΗ.

Εἰ γὰρ ἄνισοί εἰσι, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΡΠ τῆς ΘΗ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΘΗ οὕτως ἡ ΠΣ πρὸς τὴν ΗΝ. μείζων δὲ ἡ ΠΡ τῆς ΘΗ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΠΣ τῆς ΗΝ· ὥστε καὶ τὸ ΡΣ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΘΝ· ἀλλὰ καὶ ἴσον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΠΡ τῆς ΗΘ, ἴση ἄρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

LEMMA.

At vero, si rectilinea æqualia & similia sint, homologa ipsorum latera inter se æqualia esse hoc modo demonstrabimus.

Sint æqualia & similia rectilinea ΝΘ, ΣΡ; & sit ut ΘΗ ad ΗΝ ita ΡΠ ad ΠΣ: dico ΡΠ ipsi ΘΗ esse æqualem.

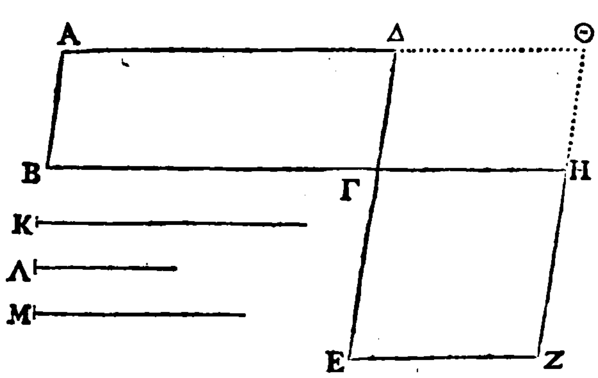
Si enim inæquales sint, una ipsarum major erit. sit ΡΠ major quam ΘΗ. & quoniam est ut ΡΠ ad ΠΣ ita ΘΗ ad ΗΝ: & permutando erit [per 16. 5.] ut ΡΠ ad ΘΗ ita ΠΣ ad ΗΝ. major autem est ΠΡ quam ΗΘ; ergo & ΠΣ quam ΗΝ major erit: quare [per 20. 6.] & rectilineum ΡΣ rectilineo ΘΝ est majus: sed & æquale, quod fieri non potest: non est igitur ΠΡ inæqualis ipsi ΗΘ; ergo æqualis. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Ἔστω ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΓ, ΓΖ, ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΗ· λέγω ὅτι τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, τοῦ τε ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ.

Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΓΗ, ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ· καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον, καὶ ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ Κ, καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ.



Οἱ ἄρα λόγοι τοῦ τε Κ πρὸς τὴν Λ καὶ τοῦ Λ πρὸς τὴν Μ οἱ αὐτοί εἰσι τοῖς λόγοις τῶν πλευρῶν, τοῦ τε ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τοῦ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. ἀλλ' ὁ τοῦ Κ πρὸς τὸν Μ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τοῦ Κ πρὸς τὸν Λ λόγου καὶ τοῦ τοῦ Λ πρὸς τὴν Μ· ὥστε καὶ ἡ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ· ἀλλ' ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ

Prop. XXIII. Theor.

Æquiangula parallelogramma inter se rationem habent *ex lateribus compositam.

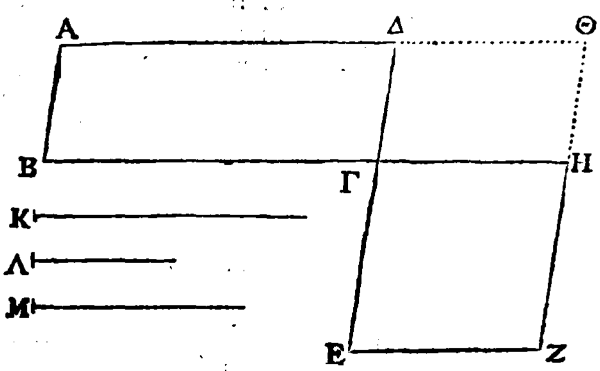
Sint æquiangula parallelogramma ΑΓ, ΓΖ, æqualem habentia ΒΓΔ angulum angulo ΕΓΗ: dico parallelogrammum ΑΓ ad parallelogrammum ΓΖ rationem habere compositam ex lateribus; hoc est, compositam ex ratione quam habet ΒΓ ad ΓΗ, & ex ratione quam ΔΓ habet ad ΓΕ.

Ponatur enim ΒΓ in directum ipsi ΓΗ, ergo [per 14. 1.] & ΔΓ ipsi ΓΕ in directum erit: & compleatur ΔΗ parallelogrammum, exponaturque recta linea quædam Κ, & fiat [per 12. 6.] ut ΒΓ ad ΓΗ ita Κ ad Λ, ut autem ΔΓ ad ΓΕ ita Λ ad Μ.

Rationes igitur ipsius Κ ad Λ & Λ ad Μ eædem sunt quæ rationes laterum, videlicet ΒΓ ad ΓΗ & ΔΓ ad ΓΕ. sed [per 5. def. 6.] ratio Κ ad Μ composita est ex ratione Κ ad Λ & ratione Λ ad Μ: quare & Κ ad Μ rationem habet ex lateribus compositam. & quoniam est [per 1. 6.] ut ΒΓ ad ΓΗ ita ΑΓ parallelogrammum ad parallelogrammum ΓΘ; sed ut ΒΓ ad ΓΗ

* Rectius ex laterum rationibus.

ita K ad Λ: erit igitur [per 11. 5.] & ut K ad Λ ita parallelogrammum ΑΓ ad ΓΘ parallelogrammum. rursus, quoniam [per 1. 6.] est ut ΔΓ ad ΓΕ ita ΓΘ parallelogrammum ad parallelogrammum ΓΖ; ut autem ΔΓ ad ΓΕ ita Λ ad Μ: ut igitur Λ ad Μ ita erit [per 11. 5.] parallelogrammum ΓΘ ad ΓΖ parallelogrammum. itaque cum ostensum sit, ut K quidem ad Λ ita esse ΑΓ parallelogrammum ad parallelogrammum ΓΘ; ut autem Λ ad Μ ita parallelogrammum ΓΘ ad ΓΖ parallelogrammum: erit ex æquo [per 22. 5.] ut K ad Μ ita ΑΓ parallelogrammum ad ipsum ΓΖ. habet autem K ad Μ rationem ex lateribus compositam: ergo & ΑΓ parallelogrammum ad parallelogrammum ΓΖ rationem habet compositam ex lateribus.



Æquiangula igitur parallelogramma inter se rationem habent ex lateribus compositam. quod erat demonstrandum.

οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Κ πρὸς τὴν Λ οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΘ. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ. ἀλλ' ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Λ πρὸς τὴν Μ οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς μὲν ἡ Κ πρὸς τὴν Λ οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ Λ πρὸς τὴν Μ οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Μ οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ. ἡ δὲ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· καὶ τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΖ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Τὰ ἄρα ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXIV. THEOR.

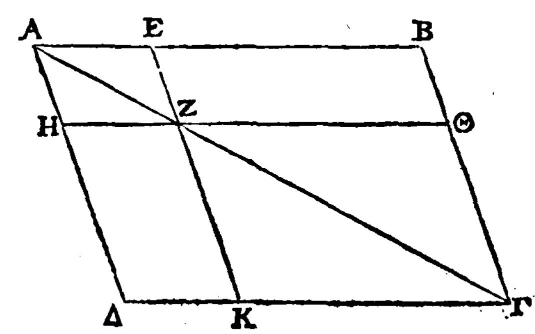
Omnis parallelogrammi quæ circa diametrum sunt parallelogramma sunt similia toti & inter se.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

SIT parallelogrammum ΑΒΓΔ, cujus diameter ΑΓ; circa diametrum vero ΑΓ parallelogramma sint ΕΗ, ΘΚ: dico parallelogramma ΕΗ, ΘΚ & toti ΑΒΓΔ & inter se similia esse.

Quoniam enim uni laterum trianguli ΑΒΓ, videlicet ipsi ΒΓ, parallela ducta est ΕΖ, erit [per 2. 6.] ut ΒΕ ad ΕΑ ita ΓΖ ad ΖΑ. rursus, quoniam uni laterum trianguli ΑΓΔ, nempe ipsi ΓΔ, ducta est parallela ΖΗ, ut ΓΖ ad ΖΑ ita erit ΔΗ ad ΗΑ. sed ut ΓΖ ad ΖΑ, ita ostensa est & ΒΕ ad ΕΑ: ergo [per 11. 5.] ut ΒΕ ad ΕΑ ita ΔΗ ad ΗΑ; componendoque [per 18. 5.] ut ΒΑ ad ΑΕ ita ΔΑ ad ΑΗ; & permutando [per 16. 5.] ut ΒΑ ad ΑΔ ita ΑΕ ad ΑΗ: parallelogrammorum igitur ΑΒΓΔ, ΕΗ latera quæ circa communem angulum ΒΑΔ proportionalia sunt. & quoniam paral-



Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα ἔστω τὰ ΕΗ, ΘΚ· λέγω ὅτι ἑκάτερον τῶν ΕΗ, ΘΚ παραλληλογράμμων ὅμοιόν ἐστιν ὅλῳ τῷ ΑΒΓΔ καὶ ἀλλήλοις.

Ἐπεὶ γὰρ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΓ ἦκται ἡ ΕΖ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ. πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΓΔ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΓΔ ἦκται ἡ ΖΗ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ. ἀλλ' ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ οὕτως ἐδείχθη καὶ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ, καὶ συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΗ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΑΗ· τῶν ΑΒΓΔ, ΕΗ ἄρα παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὴν κοινὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΔ. καὶ ἐπεὶ παραλπαράλληλός ἐστιν ἡ ΗΖ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΖΑ τῇ ὑπὸ ΔΓΑ, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τῶν ΑΔΓ, ΑΗΖ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΖ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ ΑΖΕ τριγώνῳ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΖ. ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ, καὶ ἔτι ὡς ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΕ· τῶν ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τῷ ΚΘ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστιν· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΕΗ, ΘΚ παραλληλογράμμων τῷ ΑΒΓΔ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστι. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστιν.

Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

lela est ΗΖ ipsi ΔΓ, angulus quidem ΑΗΖ [per 29. 1.] est æqualis angulo ΑΔΓ, angulus vero ΗΖΑ æqualis angulo ΔΓΑ, & angulus ΔΑΓ communis est duobus triangulis ΑΔΓ, ΑΗΖ; erit igitur triangulum ΑΔΓ triangulo ΑΗΖ æquiangulum. eadem ratione & triangulum ΑΒΓ æquiangulum est triangulo ΑΖΕ; totum igitur parallelogrammum ΑΒΓΔ parallelogrammo ΕΗ est æquiangulum: ergo [per 4. 6.] ut ΑΔ ad ΔΓ ita ΑΗ ad ΗΖ. ut autem ΔΓ ad ΓΑ ita ΗΖ ad ΖΑ, & ut ΑΓ ad ΓΒ ita ΑΖ ad ΖΕ; & præterea ut ΓΒ ad ΒΑ ita ΖΕ ad ΕΑ: itaque quoniam ostensum est ut ΔΓ ad ΓΑ ita esse ΗΖ ad ΖΑ, ut autem ΑΓ ad ΓΒ ita ΑΖ ad ΖΕ; erit ex æquo [per 22. 5.] ut ΔΓ ad ΓΒ ita ΗΖ ad ΖΕ: ergo parallelogrammorum ΑΒΓΔ, ΕΗ proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos; ac propterea [per 1. def. 6.] parallelogrammum ΑΒΓΔ parallelogrammo ΕΗ est simile. eadem ratione & parallelogrammum ΑΒΓΔ simile est parallelogrammo ΚΘ: utrumque igitur ipsorum ΕΗ, ΘΚ parallelogrammorum parallelogrammo ΑΒΓΔ est simile. quæ autem eidem rectilineo sunt similia [per 21. 6.] & inter se sunt similia: parallelogrammum igitur ΕΗ simile est parallelogrammo ΘΚ.

Quare omnis parallelogrammi quæ circa diametrum sunt parallelogramma & toti & inter se sunt similia. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ὅμοιον συστήσασθαι, τὸ ΑΒΓ, ᾧ δὲ ἴσον, τὸ Δ· δεῖ δὴ τῷ μὲν ΑΒΓ ὅμοιον, τῷ δὲ Δ ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

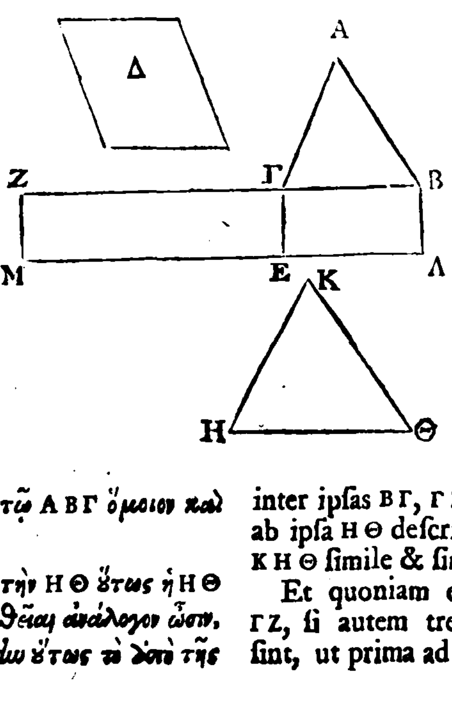
Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ μὲν τὴν ΒΓ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕ, παρὰ δὲ τὴν ΓΕ τῷ Δ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΜ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΓΕ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ ὑπὸ ΓΒΛ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΒΓ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΛΕ τῇ ΕΜ. καὶ εἰλήφθω τῶν ΒΓ, ΓΖ μέση ἀνάλογον ἡ ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΗΘ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ ΚΗΘ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΗΘ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΓΖ, ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς

PROP. XXV. PROBL.

Dato rectilineo simile, & alteri dato æquale idem constituere.

SIT datum quidem rectilineum, cui oportet simile constituere, ΑΒΓ; cui autem æquale, sit Δ: oportet ipsi ΑΒΓ simile, & ipsi Δ æquale idem constituere.



Applicetur enim [per 44. & 45. 1.] ad rectam quidem lineam ΒΓ triangulo ΑΒΓ æquale parallelogrammum ΒΕ; ad rectam vero ΓΕ applicetur parallelogrammum ΓΜ æquale ipsi Δ in angulo ΖΓΕ, qui ΓΒΛ angulo est æqualis: in directum igitur est [per 14. 1.] ΒΓ ipsi ΓΖ; & ΛΕ ipsi ΕΜ. sumaturque [per 13. 6.] inter ipsas ΒΓ, ΓΖ media proportionalis ΗΘ, & ab ipsa ΗΘ describatur [per 18. 6.] rectilineum ΚΗΘ simile & similiter positum rectilineo ΑΒΓ.

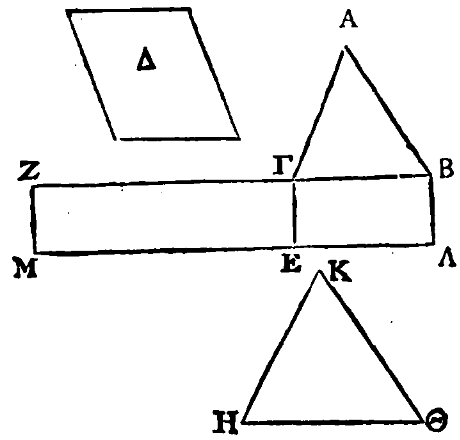
Et quoniam est ut ΒΓ ad ΗΘ ita ΗΘ ad ΓΖ, si autem tres rectæ lineæ proportionales sint, ut prima ad tertiam ita [per 2. cor. 20. 6.] est

est figura rectilinea quæ fit à prima ad similem & similiter descriptam à secunda: erit igitur ut ΒΓ ad ΓΖ ita ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΚΗΘ. sed [per 1.6.] ut ΒΓ ad ΓΖ ita parallelogrammum ΒΕ ad ΕΖ parallelogrammum: & igitur ut triangulum ΑΒΓ ad triangulum ΚΗΘ ita ΒΕ parallelogrammum ad parallelogrammum ΕΖ: quare permutando [per 16. 5.] ut ΑΒΓ triangulum ad parallelogrammum ΒΕ ita triangulum ΚΗΘ ad ΕΖ parallelogrammum. est autem [per constr.] triangulum ΑΒΓ æquale parallelogrammo ΒΕ: æquale igitur est & ΚΗΘ triangulum parallelogrammo ΕΖ. sed ΕΖ parallelogrammum æquale est rectilineo Δ: ergo & triangulum ΚΗΘ ipsi Δ est æquale. est autem [per constr.] ΚΗΘ simile triangulo ΑΒΓ.

Dato igitur rectilineo ΑΒΓ simile, & alteri dato æquale idem constitutum est ΚΗΘ. quod erat faciendum.

πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον οὕτως τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον οὕτως τὸ ΚΗΘ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον. ἴσον δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΕ παραλληλογράμμῳ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΚΗΘ τρίγωνον τῷ ΕΖ παραλληλογράμμῳ. ἀλλὰ τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον τῷ Δ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΚΗΘ ἄρα τῷ Δ ἐστὶν ἴσον. ἔστι δὲ τὸ ΚΗΘ καὶ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συνίσταται τὸ ΚΗΘ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



PROP. XXVI. THEOR.

Si à parallelogrammo parallelogrammum auferatur, simile toti & similiter positum, communem cum ipso angulum habens; circa eandem diametrum est cum toto.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ, ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ· περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ.

A parallelogrammo enim ΑΒΓΔ parallelogrammum ΑΕΖΗ auferatur, simile ipsi ΑΒΓΔ & similiter positum, communemque cum ipso angulum habens ΔΑΒ: dico parallelogrammum ΑΒΓΔ circa eandem esse diametrum cum parallelogrammo ΑΕΖΗ.

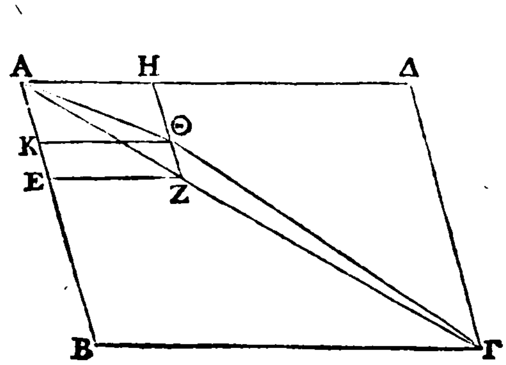
Non enim, sed, si fieri potest, sit ipsorum diameter ΑΘΓ, ducaturque per Θ alterutri ipsarum ΑΔ, ΒΓ parallela ΘΚ.

Quoniam igitur circa eandem diametrum est ΑΒΓΔ parallelogrammum cum parallelogrammo ΚΗ, erit [per 24. 6.] parallelogrammum ΑΒΓΔ parallelogrammo ΚΗ simile: ergo [per 1.def.6.] ut ΔΑ ad ΑΒ ita ΗΑ ad ΑΚ. est autem & propter similitudinem parallelogrammorum ΑΒΓΔ, ΕΗ, ut ΔΑ ad ΑΒ ita ΗΑ ad ΑΕ: & igitur [per 11. 5.] ut ΗΑ ad ΑΒ ita ΗΑ ad ΑΚ: & proinde ΗΑ ad utramque ipsarum ΑΚ, ΑΕ eandem ra-

Ἀπὸ γὰρ παραλληλογράμμου τοῦ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ἀφῃρήσθω τὸ ΑΕΖΗ, ὅμοιον τῷ ΑΒΓΔ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ τὴν ὑπὸ ΔΑΒ· λέγω ὅτι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΑΕΖΗ.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν ἔστω αὐτῶν ἡ διάμετρος ἡ ΑΘΓ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΓ παράλληλος ἡ ΘΚ.

Ἐπεὶ οὖν περὶ τὴν διάμετρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ, ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ. ἔστι δὲ καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΓΔ, ΕΗ ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ· ἡ ΗΑ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΑΚ, ΑΕ τὸν αὐτὸν ἔχει



ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΚ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶ περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα ἐστὶ διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΕΖΗ παραλληλογράμμῳ.

Ἐὰν ἄρα ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ, ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν ἔχον γωνίαν αὐτῷ· περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

tionem habet; erit igitur [per 9. 5.] AE ipsi AK æqualis, minor majori, quod fieri non potest: non igitur circa eandem diametrum est ABΓΔ parallelogrammum cum parallelogrammo KH: igitur circa eandem diametrum erit parallelogrammum ABΓΔ cum parallelogrammo AEZH.

Si igitur à parallelogrammo parallelogrammum auferatur, simile toti & similiter positum, communem cum ipso angulum habens; circa eandem diametrum est cum toto. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ΄.

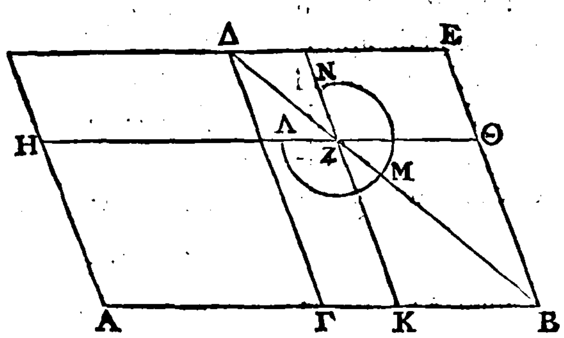
Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ, μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον, ὅμοιον ὂν τῷ ἐλλείμματι.

Prop. XXVII. Theor.

Omnium parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis, similibus & similiter positis ei quæ à dimidia describitur, maximum est quod ad dimidiam est applicatum, simile existens defectui.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΓΕ, ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφέντι τῆς ΑΒ, τουτέστι τῆς ΒΓ· λέγω ὅτι πάντων τῶν παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ΓΕ, μέγιστόν ἐστι τὸ ΑΔ. παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΚΘ, ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ΓΕ· λέγω ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΔ τοῦ ΑΖ.

SIT recta linea AB, seceturque bifariam in Γ; & ad AB rectam lineam applicetur parallelogrammum AΔ deficiens figura parallelogramma ΓE, simili & similiter posita ei quæ à dimidia ipsius AB descripta est, hoc est à BΓ: dico omnium parallelogrammorum ad rectam lineam AB applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis, similibus & similiter positis ipsi ΓE, maximum esse AΔ. applicetur enim ad rectam lineam AB parallelogrammum AZ, deficiens figura parallelogramma KΘ, simili & similiter posita ipsi ΓE; dico AΔ parallelogrammum parallelogrammo AZ majus esse.



Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΓΕ παραλληλόγραμμον τῷ ΚΘ παραλληλογράμμῳ, περὶ τὴν αὐτὴν εἰσι διάμετρον. ἤχθω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΔΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΖ τῷ ΖΕ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΚΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΘ ὅλῳ τῷ ΚΕ ἐστὶν ἴσον. ἀλλὰ τὸ ΓΘ τῷ ΓΗ ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἐστὶν ἴση· καὶ τὸ ΗΓ ἄρα τῷ ΕΚ ἴσον ἐστί. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΖ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΖ τῷ ΛΜΝ γνώμονί ἐστιν ἴσον· ὥστε καὶ τὸ ΓΕ παραλληλόγραμμον, τουτέστι τὸ ΑΔ, τοῦ ΑΖ παραλληλογράμμου μεῖζόν ἐστιν.

* Ἔστω γὰρ πάλιν ἡ ΑΒ τμηθεῖσα δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ παραβληθὲν τὸ ΑΛ ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ΓΜ, καὶ

Quoniam enim simile est parallelogrammum ΓE parallelogrammo KΘ, [per 26. 6.] circa eandem diametrum sunt. ducatur eorum diameter ΔB, & describatur figura.

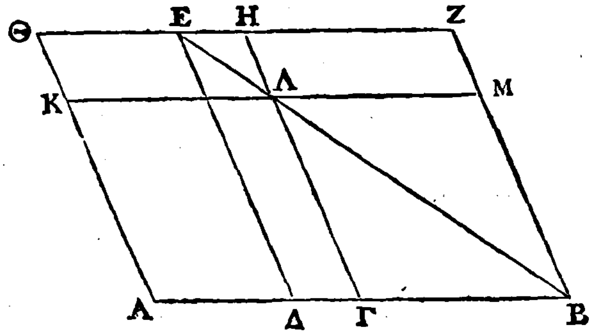
Quoniam igitur [per 43. 1.] ΓZ est æquale ipsi ZE, commune apponatur KΘ: totum igitur ΓΘ toti KE est æquale. sed ΓΘ [per 36. 1.] est æquale ΓH, quoniam recta linea AΓ ipsi ΓB est æqualis: ergo & HΓ ipsi EK æquale erit. commune apponatur ΓZ: totum igitur AZ est æquale gnomoni ΛMN; quare & ΓE, hoc est [per 36. 1.] AΔ parallelogrammum, parallelogrammo AZ est majus.

Sit enim rursus AB secta bifariam in puncto Γ, & applicatum sit AΛ deficiens figura ΓM; &

* Hic est hujus theorematis casus secundus, (viz. cum AΔ minor est quam AΓ, cum primus sit ille, quando AΔ major est quam AΓ,) & non altera propositionis demonstratio: & ideo conclusionem universalem in codicibus tam MSS. quam impressis casui primo subnexam ad secundi finem apposuimus.

rursus

rursus ad rectam lineam AB applicetur parallelogrammum AE deficiens figura ΔZ, simili & similiter posita ei quæ à dimidia AB describitur, videlicet ΓM: dico parallelogrammum AΛ, quod ad dimidiam est applicatum, majus esse parallelogrammo AE.



Quoniam enim simile est ΔZ ipsi ΓM; [per 26. 6.] circa eandem sunt diametrum: sit ipsorum diameter EB, & describatur figura.

Et quoniam [per 36. 1.] ΛZ æquale est ΛΘ, etenim ZH ipsi HΘ est æqualis: erit ΛZ ipso EK majus. est autem [per 43. 1.] ΛZ æquale ΔΛ: majus igitur est & ΔΛ ipso EK. commune apponatur KΔ: ergo totum AΛ toto AE est majus.

Omnium igitur parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis, similibus & similiter positis ei quæ à dimidia describitur, maximum est quod ad dimidiam est applicatum. quod erat demonstrandum.

παραβεβλήσθω πάλιν παρὰ τὴν AB τὸ AE παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον τῷ ΔZ, ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς AB, τῷ ΓM· λέγω ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβληθὲν τὸ AΛ τοῦ AE.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΔZ τῷ ΓM, περὶ τὴν αὐτήν εἰσι διάμετρον· ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ EB, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΛZ τῷ ΛΘ, ἐπεὶ καὶ ἡ ZH τῇ HΘ· μεῖζον ἄρα τὸ ΛZ τοῦ EK. ἴσον δὲ τὸ ΛZ τῷ ΔΛ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ EK. κοινὸν ἔστω τὸ KΔ· ὅλον ἄρα τὸ AΛ ὅλου τοῦ AE μεῖζόν ἐστιν.

Πάντων ἄρα τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ, μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβληθέν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXVIII. Probl.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri datæ: oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non majus esse eo, quod ad dimidiam applicatur, similibus existentibus defectibus & ejus quod ad dimidiam & ejus cui oportet simile deficere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι· δεῖ δὴ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν, μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τούτου ἐλλείματος τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν παραλληλογράμμου.

SIT data quidem recta linea AB; datum autem rectilineum, cui oportet æquale ad datam rectam lineam AB applicare, sit Γ, non majus existens eo quod ad dimidiam applicatum est, similibus existentibus defectibus; cui autem oportet simile deficere sit Δ: oportet ad datam rectam lineam AB dato rectilineo Γ æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit ipsi Δ.

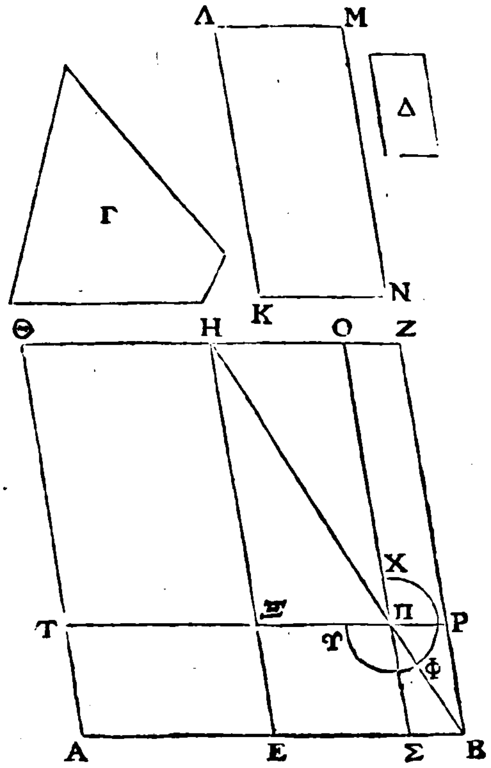
Secetur [per 10. 1.] AB bifariam in E, & ab ipsa EB [per 18. 6.] describatur simile & similiter positum ipsi Δ, quod sit EBZH, & compleatur AH parallelogrammum: itaque AH vel æquale est ipsi Γ, vel eo majus, ob determinationem. & siquidem AH sit æquale Γ, factum jam erit quod proponebatur; etenim ad rectam lineam AB dato rectilineo Γ æquale parallelogrammum AH applicatum est, deficiens figura parallelogramma EZ, ipsi Δ simili. si autem non est æquale, erit ΘE majus quam Γ.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν AB παραβαλεῖν, τὸ Γ, μὴ μεῖζον ὂν τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τῶν ἐλλειμμάτων, ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν τὸ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν AB τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ.

Τετμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ E σημεῖον, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς EB τῷ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ EBZH, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ AH παραλληλόγραμμον· τὸ δὴ AH ἤτοι ἴσον ἐστὶ τῷ Γ, ἢ μεῖζον αὐτοῦ, διὰ τὸν διορισμόν. εἰ μὲν οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ AH τῷ Γ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· παραβέβληται γὰρ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν AB τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ AH, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ EZ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ. εἰ δὲ οὔ, μεῖζόν ἐστι τὸ ΘE τοῦ Γ.

ἴσον

ἴσον δὲ τὸ ΘΕ τῷ ΕΖ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΕΖ τοῦ Γ. ᾧ δὴ μεῖζόν ἐστι τὸ ΕΖ τοῦ Γ, ταύτῃ τῇ ὑπεροχῇ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ ΚΛΜΝ. ἀλλὰ τὸ Δ τῷ ΕΖ ἐστὶν ὅμοιον· καὶ τὸ ΚΜ ἄρα τῷ ΕΖ ἐστὶν ὅμοιον. ἔστω οὖν ὁμόλογος ἡ μὲν ΛΚ τῇ ΗΕ, ἡ δὲ ΛΜ τῇ ΗΖ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΖ τοῖς Γ, ΚΜ, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΖ τοῦ ΚΜ· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΗΕ τῆς ΚΛ, ἡ δὲ ΗΖ τῆς ΛΜ. κείσθω μὲν τῇ ΛΚ ἴση ἡ ΗΞ, τῇ δὲ ΛΜ ἴση ἡ ΗΟ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΞΗΟΠ παραλληλόγραμμον· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΞΟ τῷ ΚΜ. ἀλλὰ τὸ ΚΜ τῷ ΕΖ ὅμοιόν ἐστι· καὶ τὸ ΞΟ ἄρα τῷ ΕΖ ὅμοιόν ἐστι· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὸ ΞΟ τῷ ΕΖ. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΗΠΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.



Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΖ τοῖς Γ, ΚΜ, ὧν τὸ ΞΟ τῷ ΚΜ ἐστὶν ἴσον· λοιπὸς ἄρα ὁ ΥΦΧ γνώμων λοιπῷ τῷ Γ ἴσος ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΟΡ τῷ ΞΣ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΡΣ· ὅλον ἄρα τὸ ΟΒ ὅλῳ τῷ ΞΒ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ΞΒ τῷ ΤΕ ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΕ πλευρᾷ τῇ ΕΒ ἐστὶν ἴση· καὶ τὸ ΤΕ ἄρα τῷ ΟΒ ἐστὶν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΞΣ· ὅλον ἄρα τὸ ΤΣ ὅλῳ τῷ ΥΦΧ γνώμονι ἴσον ἐστίν. ἀλλ' ὁ ΥΦΧ γνώμων τῷ Γ ἐδείχθη ἴσος· καὶ τὸ ΤΣ ἄρα τῷ Γ ἐστὶν ἴσον.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΤΣ, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΡΣ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ, ἐπειδήπερ τὸ ΡΣ τῷ ΟΞ ὅμοιόν ἐστιν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

atque est ΘΕ æquale ΕΖ: ergo & ΕΖ quam Γ est majus. quo autem ΕΖ superat Γ, ei excessui æquale, ipsi vero Δ simile & similiter positum idem [per 25. 6.] constituatur ΚΛΜΝ. sed Δ est simile ΕΖ: quare & ΚΜ ipsi ΕΖ simile erit. sit igitur recta linea quidem ΛΚ homologa ipsi ΗΕ, ΛΜ vero ipsi ΗΖ. & quoniam æquale est ΕΖ ipsis Γ, ΚΜ, erit ΕΖ ipso ΚΜ majus: major igitur est [per 1. cor. 20. 6.] ΗΕ ipsa ΚΛ, & ΗΖ ipsa ΛΜ. ponatur [per 3. 1.] ΗΞ æqualis ΛΚ, & ΗΟ æqualis ΛΜ, & compleatur [per 31. 1.] ΞΗΟΠ parallelogrammum: æquale igitur est & simile [per 24. 6.] ΞΟ ipsi ΚΜ. sed ΚΜ simile est ΕΖ: ergo [per 21. 6.] & ΞΟ ipsi ΕΖ est simile: igitur [per 26. 6.] circa eandem diametrum est ΞΟ cum ipso ΕΖ. sit ipsorum diameter ΗΠΒ, & figura describatur.

Itaque quoniam ΕΖ est æquale ipsis Γ, ΚΜ, quorum ΞΟ est æquale ΚΜ, erit reliquus ΥΦΧ gnomon æqualis reliquo Γ. & quoniam [per 43. 1.] ΟΡ est æquale ΞΣ, commune apponatur ΡΣ: totum igitur ΟΒ toti ΞΒ est æquale. sed ΞΒ est [per 36. 1.] æquale ΤΕ, quoniam & latus ΑΕ æquale lateri ΕΒ: quare & ΤΕ ipsi ΟΒ æquale est. commune apponatur ΞΣ: ergo totum ΤΣ est æquale toti gnomoni ΥΦΧ. at ΥΦΧ gnomon ipsi Γ ostensus est æqualis: & igitur ΤΣ ipsi Γ æquale erit.

Ad datam igitur rectam lineam ΑΒ dato rectilineo Γ æquale parallelogrammum ΤΣ applicatum est, deficiens figura parallelogramma ΡΣ ipsi Δ simili, quoniam & ΡΣ simile est ipsi ΟΞ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθʹ.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλεῖν, τὸ Γ, ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ὑπερβαλεῖν, τὸ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τῷ Γ εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ Δ.

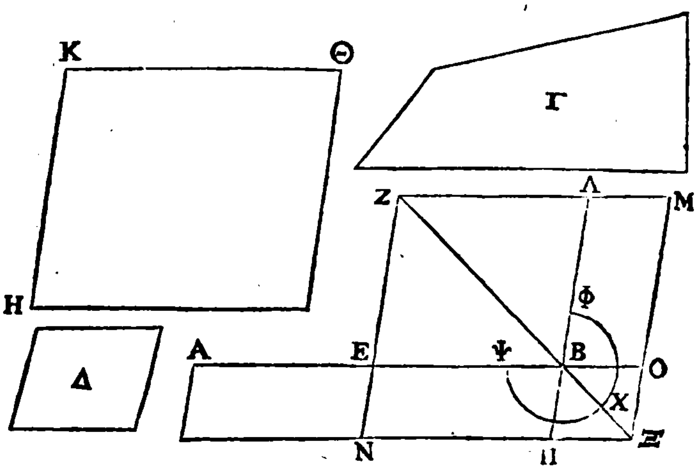
Τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΕΒ τῷ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον

Prop. XXIX. Probl.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri datæ.

SIT data recta linea ΑΒ, datum vero rectilineum, cui oportet æquale ad ipsam ΑΒ applicare, sit Γ; cui autem oportet simile excedere, sit Δ: itaque oportet ad ΑΒ rectam lineam dato rectilineo Γ æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma simili ipsi Δ.

Secetur [per 9. 1.] ΑΒ bifariam in Ε, atque [per 18. 6.] à recta ΕΒ ipsi Δ simile & similiter positum parallelogrammum describatur E Λ, & utrisque quidem E Λ, Γ æquale, ipsi vero Δ simile & similiter positum [per 25. 6.] idem constituatur H Θ: simile igitur est H Θ ipsi E Λ. sitque K Θ quidem latus homologum lateri Z Λ; K H vero ipsi Z E. & quoniam parallelogrammum H Θ majus est ipso E Λ, erit recta linea K Θ major quam Z Λ, & K H major quam Z E. producantur Z Λ, Z E, & ipsi quidem K Θ [per 3. 1.] æqualis sit Z Λ M, ipsi vero K H æqualis Z E N, & compleatur M N parallelogrammum: ergo M N æquale est & simile ipsi H Θ. sed H Θ est simile E Λ: & M N igitur [per 21. 6.] ipsi E Λ simile erit; ac propterea [per 26. 6.] circa eandem diametrum est E Λ cum ipso M N. ducatur ipsorum diameter Z Ξ, & figura describatur.



Itaque quoniam H Θ ipsis E Λ, Γ est æquale, sed & H Θ æquale M N; erit & M N æquale ipsis E Λ, Γ. commune auferatur E Λ: reliquus igitur Ψ X Φ gnomon ipsi Γ est æqualis. & quoniam E A est æqualis E B, æquale erit [per 36. 1.] & A N parallelogrammum parallelogrammo N B, hoc est [per 43. 1.] ipsi Λ O. commune apponatur E Ξ: totum igitur A Ξ æquale est gnomoni Φ X Ψ. sed Φ X Ψ gnomon est æqualis Γ: ergo & A Ξ ipsi Γ æquale est.

Ad datam igitur rectam lineam A B dato rectilineo Γ æquale parallelogrammum applicatum est A Ξ, excedens figura parallelogramma Π O ipsi Δ simili, quoniam & E Λ simile est O Π. quod erat faciendum.

παραλληλόγραμμον τὸ ΕΛ, καὶ συναμφοτέροις μὲν τοῖς ΕΛ, Γ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ ΗΘ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘ τῷ ΕΛ. ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ μὲν ΚΘ τῇ ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῇ ΖΕ. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΗΘ τοῦ ΕΛ, μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΚΘ τῆς ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῆς ΖΕ. ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΖΛ, ΖΕ, καὶ τῇ μὲν ΚΘ ἴση ἔστω ἡ ΖΛΜ, τῇ δὲ ΚΗ ἴση ἡ ΖΕΝ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΜΝ· τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΗΘ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον. ἀλλὰ τὸ ΗΘ τῷ ΕΛ ἐστὶν ὅμοιον· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΕΛ ὅμοιόν ἐστι· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὸ ΕΛ τῷ ΜΝ. ἤχθω αὐτῶν ἡ διάμετρος ἡ ΖΞ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΘ τοῖς ΕΛ, Γ, ἀλλὰ τὸ ΗΘ τῷ ΜΝ ἴσον ἐστί· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τοῖς ΕΛ, Γ ἴσον ἐστί. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΕΛ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΨΧΦ γνώμων τῷ Γ ἴσος ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΝ τῷ ΝΒ, τουτέστι τῷ ΛΟ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΕΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ΦΧΨ γνώμονι. ἀλλὰ ὁ ΦΧΨ γνώμων τῷ Γ ἴσος ἐστί· καὶ τὸ ΑΞ ἄρα τῷ Γ ἴσον ἐστί.

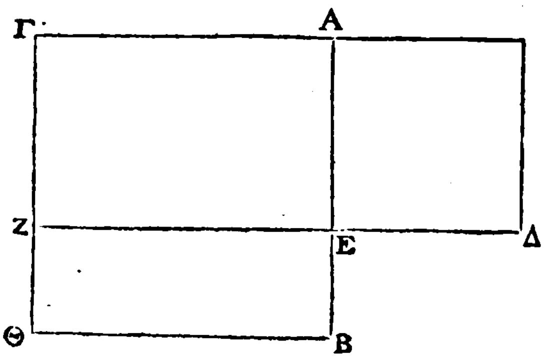
Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΑΞ, ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΠΟ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ, ἐπεὶ καὶ τὸ ΕΛ ἐστὶν ὅμοιον τῷ ΟΠ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XXX. Probl.

Datam rectam lineam terminatam secundum extremam ac mediam rationem secare.

SIT data recta linea terminata A B: oportet ipsam A B secundum extremam ac mediam rationem secare.

Describatur enim [per 46. 1.] ex A B quadratum B Γ; & [per 29. 6.] ad A Γ ipsi B Γ æquale parallelogrammum applicetur Γ Δ, excedens figura A Δ ipsi B Γ simili.



Quadratum autem est B Γ: ergo & A Δ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν·

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΒΓ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΑΓ τῷ ΒΓ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΔ, ὑπερβάλλον εἴδει τῷ ΑΔ ὁμοίῳ τῷ ΒΓ.

Τετράγωνον δέ ἐστι τὸ ΒΓ· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ καὶ

καὶ τὸ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΓ τῷ ΓΔ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΖ λοιπῷ τῷ ΑΔ ἐστὶν ἴσον. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον· τῶν ΒΖ, ΑΔ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΕ τῇ ΑΓ, τουτέστι τῇ ΑΒ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΑΕ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΕ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ. μείζων δὲ ἡ ΑΒ τῆς ΑΕ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ.

Ἡ ἄρα ΑΒ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ε, καὶ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστι τὸ ΑΕ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

quadratum erit. & quoniam BΓ est æquale ΓΔ, commune auferatur ΓE: reliquum igitur BZ reliquo AΔ est æquale. est autem & ipsi æquiangulum: ergo [per 14. 6.] ipsorum BZ, AΔ latera quæ circum æquales angulos sunt reciproce proportionalia: ut igitur ZE ad EΔ ita est AE ad EB. est autem [per 34. 1.] ZE æqualis AΓ, hoc est ipsi AB; & EΔ ipsi AE: quare ut AB ad AE ita AE ad EB. sed AB major est quam AE: ergo AE quam EB est major.

Recta igitur linea AB secundum extremam ac mediam rationem secta est in E, & majus ipsius segmentum est AE. quod erat faciendum.

ΑΛΛΩΣ.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ἡ ἄρα ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Aliter.

Sit data recta linea AB: oportet ipsam AB secundum extremam ac mediam rationem secare.

Secetur enim [per 11. 2.] AB in Γ, ita ut rectangulum, quod comprehenditur sub AB, BΓ, æquale sit quadrato ex AΓ.

Quoniam igitur rectangulum quod comprehenditur sub AB, BΓ æquale est quadrato ex AΓ; erit [per 17. 6.] ut AB ad AΓ ita AΓ ad ΓB. ergo [per 3. def. 6.] AB secundum extremam & mediam rationem secta est. quod erat faciendum.

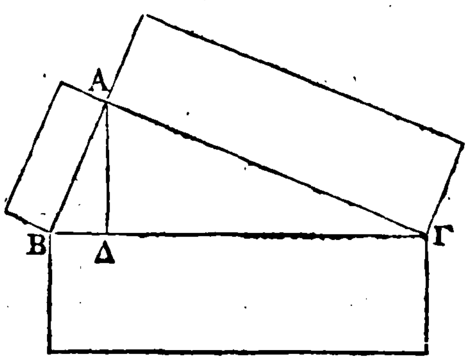
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Ἤχθω κάθετος ἡ ΑΔ.

Ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ, ἀπὸ τῆς πρὸς τῷ Α ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ΒΓ βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΑΔ· τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ ἄρα πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΑΒΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ. καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἔστιν ὡς πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς



Prop. XXXI. Theor.

In rectangulis triangulis, figura quæ fit à latere rectum angulum subtendente æqualis est eis quæ à lateribus rectum angulum comprehendentibus fiunt, similibus & similiter descriptis.

SIT triangulum rectangulum ABΓ, rectum habens angulum BAΓ: dico figuram quæ fit à BΓ æqualem esse eis quæ à BA, AΓ fiunt, similibus & similiter descriptis.

Ducatur perpendicularis AΔ.

Quoniam igitur in triangulo ABΓ ab angulo recto qui est A ad BΓ basim perpendicularis ducta est AΔ; erunt [per 8. 6.] triangula ABΔ, AΔΓ, quæ sunt ad perpendicularem, similia toti ABΓ & inter se. & quoniam simile est ABΓ triangulum triangulo ABΔ, erit ut ΓB ad BA ita AB ad BΔ. atqui cum tres rectæ lineæ proportionales sint; ut prima ad tertiam ita erit [per 2. cor. 20. 6.] figura quæ fit à prima ad similem & similiter descriptam à secunda: ut igitur ΓB ad BΔ ita figura quæ fit à ΓB ad similem & similiter descriptam à BA. eadem ratione & ut BΓ ad ΓΔ ita figura quæ fi fit à ΒΓ ad eam quæ fit à ΓΑ: quare & ut ΒΓ ad ipsas ΒΔ, ΔΓ ita figura quæ fit à ΒΓ ad eas quæ fiunt à ΒΑ, ΑΓ, similes & similiter descriptas. æqualis est autem ΒΓ ipsis ΒΔ, ΔΓ: ergo figura quæ fit à ΒΓ æqualis est eis quæ à ΒΑ, ΑΓ fiunt, similibus & similiter descriptis.

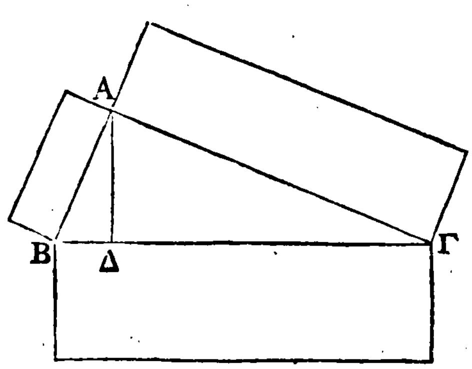
In rectangulis igitur triangulis, figura quæ fit à latere rectum angulum subtendente æqualis est eis quæ à lateribus rectum angulum comprehendentibus fiunt, similibus & similiter descriptis. quod erat demonstrandum.

ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ, ὥστε καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὰς ΒΔ, ΔΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα. ἴση δὲ ἡ ΒΓ ταῖς ΒΔ, ΔΓ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Aliter.

Quoniam [per 23. 6.] similes figuræ sunt in duplicata ratione laterum homologorum; figura quæ fit à ΒΓ ad eam quæ fit à ΒΑ duplicatam rationem habebit ejus quam habet ΒΓ ad ΒΑ. habet autem [per 1. cor. 20. 6.] & quadratum ex ΒΓ ad quadratum ex ΒΑ duplicatam rationem ejus quam habet ΒΓ ad ΒΑ: ergo [per 11. 5.] ut figura quæ fit à ΒΓ ad eam quæ fit à ΒΑ ita quadratum ex ΒΓ ad quadratum ex ΒΑ. eadem ratione & ut figura quæ fit à ΒΓ ad eam quæ fit à ΓΑ ita quadratum ex ΒΓ ad quadratum ex ΓΑ; & igitur ut figura quæ fit à ΒΓ ad eas quæ fiunt à ΒΑ, ΑΓ ita quadratum ex ΒΓ ad quadrata ex ΒΑ, ΑΓ. quadratum autem ex ΒΓ æquale est [per 47. 1.] quadratis ex ΒΑ, ΑΓ: ergo & figura quæ fit à ΒΓ est æqualis eis quæ à ΒΑ, ΑΓ fiunt, similibus & similiter descriptis. quod erat demonstrandum.



ΑΛΛΩΣ.

Ἐπεὶ τὰ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ εἶδος διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΑ. ἔχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΑ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ εἶδος οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετράγωνον· ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδη οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετράγωνα. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXII. Theor.

Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habent, componantur secundum unum angulum, ita ut homologa latera ipsorum sint parallela; reliqua triangulorum latera in directum sibi invicem erunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι· αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται.

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΓΕ, quæ duo latera ΒΑ, ΑΓ duobus lateribus ΓΔ, ΔΕ proportionalia habeant, ut quidem ΒΑ ad ΑΓ ita ΓΔ ad ΔΕ; parallela autem sit ΑΒ ipsi ΔΓ, & ΑΓ ipsi ΔΕ: dico ΒΓ ipsi ΓΕ in directum esse.

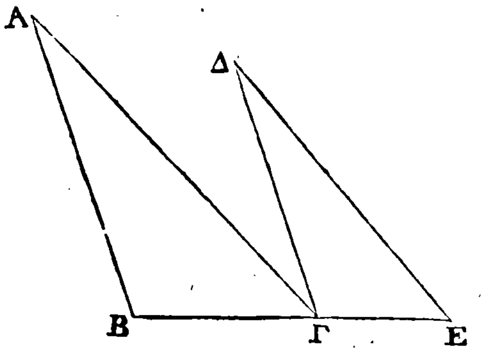
Quoniam enim ΑΒ parallela est ΔΓ, & in ipsas incidit recta linea ΑΓ; erunt [per 29. 1.] anguli alterni ΒΑΓ, ΑΓΔ æquales inter se. ea-

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΒΑ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΓΔ, ΔΕ ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως τὴν ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ, παράλληλον δὲ τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΓ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΕ· λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ.

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΑΓ, καὶ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. διὰ

τὰ

τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο τρίγωνά ἐστι ΑΒΓ, ΔΓΕ μίαν γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Α μιᾷ γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ Δ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως τὴν ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΕ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΕ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ ἴση ἐστί. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ, ΑΒΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΑΓ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Γ, δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΓΕ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ.



Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι· αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

dem ratione & angulus ΓΔΕ æqualis eſt angulo ΑΓΔ: quare & ΒΑΓ ipſi ΓΔΕ eſt æqualis. & quoniam ΑΒΓ, ΔΓΕ ſunt duo triangula unum angulum qui ad Α uni angulo qui ad Δ æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia, ſcilicet ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΓΔ ad ΔΕ; erit [per 6. 6.] triangulum ΑΒΓ triangulo ΔΓΕ æquiangulum: ergo ΑΒΓ angulus eſt æqualis angulo ΔΓΕ. oſtenſus autem eſt & angulus ΑΓΔ æqualis angulo ΒΑΓ: totus igitur ΑΓΕ duobus ΑΒΓ, ΒΑΓ eſt æqualis. communis apponatur ΑΓΒ: ergo anguli ΑΓΕ, ΑΓΒ angulis ΒΑΓ, ΑΓΒ, ΑΒΓ æquales ſunt. ſed [per 32. 1.] ΒΑΓ, ΑΓΒ, ΑΒΓ anguli duobus rectis ſunt æquales: & igitur anguli ΑΓΕ, ΑΓΒ duobus rectis æquales erunt. itaque ad quandam rectam lineam ΑΓ, & ad punctum in ipſa Γ, duæ rectæ lineæ ΒΓ, ΓΕ, non ad eaſdem partes poſitæ, angulos qui ſunt deinceps ΑΓΕ, ΑΓΒ duobus rectis æquales faciunt: ergo [per 14. 1.] ΒΓ ipſi ΓΕ in directum erit.

Si igitur duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habent, ita componantur ſecundum unum angulum, ut homologa latera ipſorum ſint parallela; reliqua triangulorum latera in directum ſibi invicem erunt. quod erat demonſtrandum.

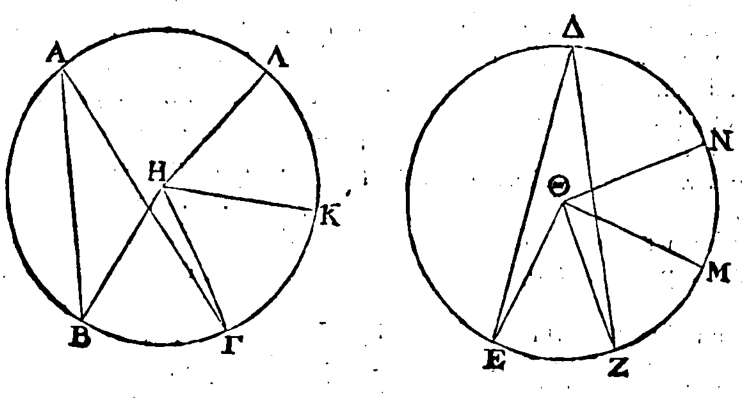
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγʹ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι· ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ πρὸς μὲν τοῖς κέντροις αὐτῶν τοῖς Η, Θ γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν οὕτως ἥτε ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ· καὶ ἔτι ὁ ΗΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομέα.

Prop. XXXIII. Theor.

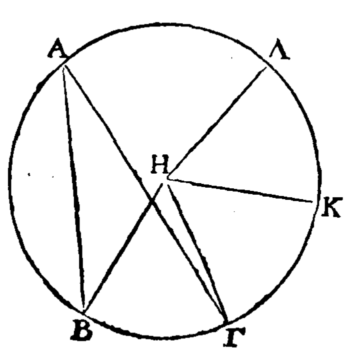
In circulis æqualibus anguli eandem habent rationem quam circumferentiæ quibus inſiſtunt, ſive ad centra ſive ad circumferentias inſiſtant: adhuc etiam & ſectores, quippe qui ad centra ſunt conſtituti.

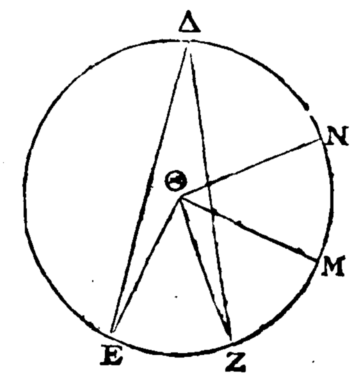


Sint æquales circuli ΑΒΓ, ΔΕΖ, & ad centra quidem ipſorum Η, Θ ſint anguli ΒΗΓ, ΕΘΖ, ad circumferentias vero anguli ΒΑΓ, ΕΔΖ: dico ut circumferentia ΒΓ ad ΕΖ circumferentiam ita eſſe & ΒΗΓ angulum ad angulum ΕΘΖ, & angulum ΒΑΓ ad angulum ΕΔΖ: & adhuc ſectorem ΗΒΓ ad ΘΕΖ ſectorem.

Ponantur enim circumferentiæ quidem ΒΓ æquales quotcumque deinceps ΓΚ, ΚΛ, circumferentiæ vero ΕΖ rursus æquales quotcumque ΖΜ, ΜΝ, & jungantur ΗΚ, ΗΛ, ΘΜ, ΘΝ.

Quoniam igitur circumferentiæ ΒΓ, ΓΚ, ΚΛ inter se sunt æquales, & anguli ΒΗΓ, ΓΗΚ, ΚΗΛ [per 27. 3.] inter se æquales erunt: quam multiplex igitur est circumferentia ΒΛ circumferentiæ ΒΓ tam multiplex est & ΒΗΛ angulus anguli ΒΗΓ. eadem ratione & quam multiplex est circumferentia ΕΝ circumferentiæ ΕΖ tam multiplex & ΕΘΝ angulus anguli ΕΘΖ. & si æqualis est ΒΛ circumferentia circumferentiæ ΕΝ, & angulus ΒΗΛ angulo ΕΘΝ [per 27. 3.] erit æqualis; & si circumferentia ΒΛ major est circumferentia ΕΝ, major erit & ΒΗΛ angulus angulo ΕΘΝ; & si minor, minor: quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus nimirum circumferentiis ΒΓ, ΕΖ & duobus angulis ΒΗΓ, ΕΘΖ, sumpta sunt circumferentiæ quidem ΒΓ & ΒΗΓ anguli æque multiplicia *viz.* circumferentia ΒΛ & ΒΗΛ angulus; circumferentiæ vero ΕΖ & ΕΘΖ anguli æque multiplicia, nempe circumferentia ΕΝ & angulus ΕΘΝ. atque ostensum est si circumferentia ΒΛ superat circumferentiam ΕΝ, & ΒΗΛ angulum superare angulum ΕΘΝ; & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem esse: igitur [per 5. def. 5.] ut circumferentia ΒΓ ad ΕΖ circumferentiam ita angulus ΒΗΓ ad angulum ΕΘΖ. sed [per 15. 5.] ut ΒΗΓ angulus ad angulum ΕΘΖ, ita angulus ΒΑΓ ad ΕΔΖ angulum; uterque enim [per 20. 3.] utriusque est duplus: & igitur ut ΒΓ circumferentia ad circumferentiam ΕΖ ita & angulus ΒΗΓ ad angulum ΕΘΖ, & angulus ΒΑΓ ad ΕΔΖ angulum.





In circulis igitur æqualibus anguli eandem habent rationem quam circumferentiæ quibus insistunt, sive ad centra sive ad circumferentias insistant. quod erat demonstrandum.

DICO insuper & ut ΒΓ circumferentia ad circumferentiam ΕΖ ita esse sectorem ΗΒΓ ad ΘΕΖ sectorem.

Jungantur enim ΒΓ, ΓΚ, & sumptis in circumferentiis ΒΓ, ΓΚ punctis Ξ, Ο, jungantur & ΒΞ, ΞΓ, ΓΟ, ΟΚ.

Itaque quoniam duæ ΒΗ, ΗΓ duabus ΓΗ, ΗΚ æquales sunt & angulos æquales comprehendunt; erit & basis ΒΓ basi ΓΚ æqualis: æquale igitur est [per 4. 1.] & ΗΒΓ triangulum triangulo ΗΓΚ. & quoniam circumferentia ΒΓ circumferentiæ ΓΚ est æqualis, & re-

Κείσθωσαν γὰρ τῇ μὲν ΒΓ περιφερείᾳ ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν κατὰ τὸ ἑξῆς αἱ ΓΚ, ΚΛ, τῇ δὲ ΕΖ περιφερείᾳ ὁσαιδηποτοῦν ἴσαι αἱ ΖΜ, ΜΝ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΚ, ΗΛ, ΘΜ, ΘΝ.

Ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ ΒΓ, ΓΚ, ΚΛ περιφέρειαι ἀλλήλαις, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΓΗΚ, ΚΗΛ γωνίαι ἀλλήλαις· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΒΓ τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΗΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΕΝ περιφέρεια τῆς ΕΖ τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΘΝ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΖ. καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῇ ΕΝ περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΗΛ τῇ ὑπὸ ΕΘΝ· καὶ εἰ μείζων ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΝ γωνίας· καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων· τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν περιφερειῶν τῶν ΒΓ, ΕΖ, δύο δὲ γωνιῶν τῶν ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, εἴληπται τῆς μὲν ΒΓ περιφερείας καὶ τῆς ὑπὸ ΒΗΓ γωνίας ἰσάκις πολλαπλασίων, ἥτε ΒΛ περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία, τῆς δὲ ΕΖ περιφερείας καὶ τῆς ὑπὸ ΕΘΖ γωνίας ἥτε ΕΝ περιφέρεια, καὶ ἡ ὑπὸ ΕΘΝ γωνία. καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΝ· καὶ εἰ ἴση, ἴση· καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων· ἔστιν ἄρα ὡς ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ. ἀλλ' ὡς ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ οὕτως ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ, διπλασίων γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν οὕτως ἥτε ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ.

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς περιφερείαις ἐφ' ὧν βεβήκασιν· ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

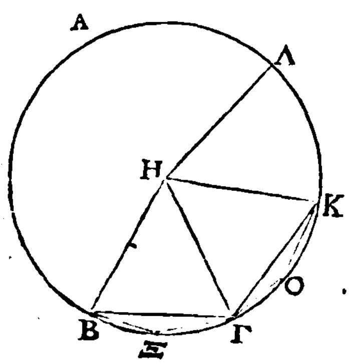
ΛΕΓΩ ὅτι καὶ ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν οὕτως ὁ ΗΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομέα.

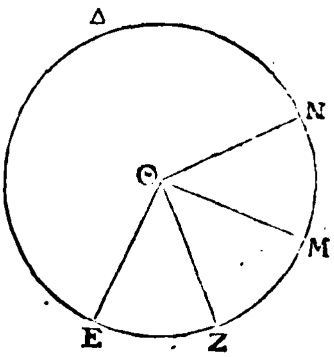
Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΓ, ΓΚ, καὶ ληφθέντων ἐπὶ τῶν ΒΓ, ΓΚ περιφερειῶν τῶν Ξ, Ο σημείων, ἐπεζεύχθωσαν καὶ αἱ ΒΞ, ΞΓ, ΓΟ, ΟΚ.

Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΗ, ΗΓ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΚ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, καὶ βάσις ἡ ΒΓ τῇ ΓΚ ἐστιν ἴση· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΒΗΓ τρίγωνον τῷ ΗΓΚ τριγώνῳ· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ περιφέρεια τῇ ΓΚ περιφερείᾳ, καὶ ἡ λοιπὴ

ἡ εἰς

ἡ εἰς τὸ ὅλον ΑΒΓ κύκλον περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ λοιπῇ τῇ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον περιφερείᾳ· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΞΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΟΚ ἐστὶν ἴση· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΞΓ τμῆμα τῷ ΓΟΚ τμήματι· καί εἰσιν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν ΒΓ, ΓΚ. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΞΓ τμῆμα τῷ ΓΟΚ τμήματι. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΒΗΓ τρίγωνον τῷ ΓΗΚ τριγώνῳ ἴσον· καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΗΒΓ τομεὺς ὅλῳ τῷ ΗΓΚ τομεῖ ἴσος ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΗΚΛ τομεὺς ἑκατέρῳ τῶν ΗΚΓ, ΗΓΒ ἴσος ἐστίν· οἱ τρεῖς ἄρα τομεῖς οἱ ΗΒΓ, ΗΓΚ, ΗΚΛ ἴσοι ἀλλήλοις εἰσί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ ΘΕΖ, ΘΖΜ, ΘΜΝ τομεῖς ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΓΒ περιφερείας, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς τοῦ ΗΒΓ τομέως. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΕΝ περιφέρεια τῆς ΕΖ περιφερείας, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΘΕΝ τομεὺς τοῦ ΘΕΖ τομέως· καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῇ ΕΝ, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς τῷ ΘΕΝ τομεῖ· καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς τοῦ ΘΕΝ τομέως· καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν τῶν ΒΓ, ΕΖ περιφερειῶν, δύο δὲ τῶν ΗΒΓ, ΘΕΖ τομέων, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΒΓ περιφερείας καὶ τοῦ ΗΒΓ τομέως ἥτε ΒΛ περιφέρεια καὶ ὁ ΗΒΛ τομεύς, τῆς δὲ ΕΖ περιφερείας καὶ τοῦ ΘΕΖ τομέως ἰσάκις πολλαπλάσια ἥτε ΕΝ περιφέρεια καὶ ὁ ΘΕΝ τομεύς. καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς τοῦ ΘΕΝ τομέως· καὶ εἰ ἴση, ἴσος· καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ὁ ΗΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομέα.





liqua circumferentia quæ complet totum circulum ΑΒΓ æqualis est [per 3. ax.] reliquæ quæ eundem circulum complet; quare [per 27. 3.] & angulus ΒΞΓ angulo ΓΟΚ est æqualis: simile igitur est [per 11. def. 3.] ΒΞΓ segmentum segmento ΓΟΚ: & sunt super æquales rectas lineas ΒΓ, ΓΚ. quæ autem super æquales rectas lineas sunt similia circulorum segmenta [per 24. 3.] & inter se æqualia sunt: ergo segmentum ΒΞΓ est æquale segmento ΓΟΚ. est autem & ΒΗΓ triangulum triangulo ΓΗΚ æquale: & totus igitur sector ΗΒΓ [per 2. ax.] toti sectori ΗΓΚ æqualis erit. eadem ratione & ΗΚΛ sector utrivis ipsorum ΗΚΓ, ΗΓΒ est æqualis: tres igitur sectores ΗΒΓ, ΗΓΚ, ΗΚΛ æquales sunt inter se. similiter & sectores ΘΕΖ, ΘΖΜ, ΘΜΝ inter se sunt æquales: quam multiplex igitur est ΒΛ circumferentia circumferentiæ ΒΓ, tam multiplex est & ΗΒΛ sector sectoris ΗΒΓ. eadem ratione & quam multiplex est circumferentia ΕΝ circumferentiæ ΕΖ, tam multiplex est & ΘΕΝ sector sectoris ΘΕΖ; & [ex modo ostensis] si circumferentia ΒΛ circumferentiæ ΕΝ est æqualis, & sector ΗΒΛ æqualis est sectori ΘΕΝ; & si circumferentia ΒΛ superat circumferentiam ΕΝ, superat & ΗΒΛ sector sectorem ΘΕΝ; & si minor, minor. quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem circumferentiis ΒΓ, ΕΖ, duobus vero sectoribus ΗΒΓ, ΘΕΖ; sumpta sunt circumferentiæ quidem ΒΓ & ΗΒΓ sectoris æque multiplicia, *viz.* circumferentia ΒΛ & ΗΒΛ sector; circumferentiæ vero ΕΖ & sectoris ΘΕΖ æque multiplicia, nempe circumferentia ΕΝ & ΘΕΝ sector. atque ostensum est si ΒΛ circumferentia superat circumferentiam ΕΝ, & sectorem ΗΒΛ superare sectorem ΘΕΝ; & si æqualis æqualem esse; & si minor, minorem: est igitur [per 5. def. 5.] ut ΒΓ circumferentia ad circumferentiam ΕΖ ita sector ΗΒΓ ad ΘΕΖ sectorem.

Πόρισμα.

Καὶ δῆλον ὅτι καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸν τομέα οὕτως καὶ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν.

Corollarium.

Perspicuum etiam est [per 11. 5.] & ut sector ad sectorem ita esse angulum ad angulum.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER SEPTIMUS.

DEFINITIONES.

1. UNITAS est, secundum quam unumquodque eorum quæ sunt unum dicitur.

2. Numerus autem, ex unitatibus constans multitudo.

3. Pars est numerus numeri, minor majoris, cum minor metitur majorem.

4. Partes autem, quando non metitur.

5. Multiplex est major minoris, quando minor majorem metitur.

6. Par numerus est qui bifariam dividitur.

7. Impar vero, qui bifariam non dividitur: vel qui à pari numero unitate differt.

8. Pariter par numerus est, quem par numerus per parem numerum metitur.

9. Pariter vero impar est, quem par numerus per numerum imparem metitur.

10. Impariter vero impar numerus est, quem impar numerus per numerum imparem metitur.

11. Primus numerus est, quem unitas sola metitur.

12. Primi inter se numeri sunt, quos sola unitas communis mensura metitur.

13. Compositus numerus est, quem numerus aliquis metitur.

ΟΡΟΙ.

α'. ΜΟΝΑΣ ἐστι, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται.

β'. Ἀριθμὸς δὲ, τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

γ'. Μέρος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸν μείζονα.

δ'. Μέρη δὲ, ὅταν μὴ καταμετρῇ.

ε'. Πολλαπλάσιος δὲ, ὁ μείζων τοῦ ἐλάττονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.

ϛ'. Ἄρτιος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος.

ζ'. Περισσὸς δὲ, ὁ μὴ διαιρούμενος δίχα· ἢ ὁ μονάδι διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ.

η'. Ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν, ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν.

θ'. Ἀρτιάκις δὲ περισσός ἐστιν, ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν ἀριθμόν.

ι'. Περισσάκις δὲ περισσός ἐστιν ἀριθμὸς, ὁ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν ἀριθμόν.

ια'. Πρῶτος ἀριθμός ἐστιν, ὁ μονάδι μόνῃ μετρούμενος.

ιβ'. Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν, οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

ιγ'. Σύνθετος ἀριθμός ἐστιν, ὁ ἀριθμῷ τινι μετρούμενος.

ιδ'. Σύνθετοι

ιδʹ. Σύνθετοι δὲ πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν, οἱ ἀριθμῷ τινι μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

14. Compositi inter se numeri sunt, quos numerus aliquis communis mensura metitur.

ιεʹ. Ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάζειν λέγεται, ὅταν ὅσαι ἴσαι εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες τοσαυτάκις συντεθῇ ὁ πολλαπλασιαζόμενος, καὶ γένηταί τις.

15. Numerus numerum multiplicare dicitur, quando quot unitates sunt in ipso toties componitur multiplicatus, & aliquis gignitur.

ιϛʹ. Ὅταν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος ἐπίπεδος καλεῖται· πλευραὶ δὲ αὐτοῦ, οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

16. Quando duo numeri sese multiplicantes aliquem fecerint, qui factus est planus appellatur; latera vero ipsius numeri sese multiplicantes.

ιζʹ. Ὅταν δὲ τρεῖς ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος στερεὸς καλεῖται· πλευραὶ δὲ αὐτοῦ, οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

17. Quando autem tres numeri sese multiplicantes aliquem fecerint, factus solidus appellatur: latera vero ipsius, numeri sese multiplicantes.

ιηʹ. Τετράγωνος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἰσάκις ἴσος, ἢ ὁ ὑπὸ δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.

18. Quadratus numerus est qui æqualiter æqualis; vel qui sub duobus æqualibus numeris continetur.

ιθʹ. Κύβος δὲ ὁ ἰσάκις ἴσος ἰσάκις, ἢ ὁ ὑπὸ τριῶν ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.

19. Cubus vero, qui æqualiter æqualis æqualiter; vel qui sub tribus æqualibus numeris continetur.

κʹ. Ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιος, ἢ τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦσιν.

20. Numeri proportionales sunt, quando primus secundi & tertius quarti æque multiplex est, vel eadem pars, vel eædem partes.

καʹ. Ὅμοιοι ἐπίπεδοι καὶ στερεοὶ ἀριθμοί εἰσιν, οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς.

21. Similes plani & solidi numeri sunt, qui latera habent proportionalia.

κβʹ. Τέλειος ἀριθμός ἐστιν, ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος ὤν.

22. Perfectus numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ αʹ.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἐκκειμένων ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρῇ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ ἕως οὗ ληφθῇ μονάς· οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Propositio I. Theorema.

Si duobus numeris inæqualibus expositis detracto semper minore de majore, reliquus minime metiatur præcedentem quoad assumpta fuerit unitas; numeri à principio positi primi inter se erunt.

Δύο γὰρ ἀνίσων ἀριθμῶν τῶν ΑΒ, ΓΔ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρείτω τὸν πρὸ ἑαυτοῦ ἕως οὗ ληφθῇ μονάς· λέγω ὅτι οἱ ΑΒ, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί, τουτέστιν, ὅτι τοὺς ΑΒ, ΓΔ μονὰς μόνη μετρεῖ.

A . Θ . . Z . . . . B
Γ . . H . . . Δ
E —

Duobus enim inæqualibus numeris A B, Γ Δ detracto semper minore de majore, reliquus minime metiatur præcedentem, quoad assumpta fuerit unitas: dico numeros A B, Γ Δ inter se primos esse, hoc est, ipsos A B, Γ Δ unitatem solam metiri.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ ΑΒ, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Ε, καὶ ὁ μὲν ΓΔ τὸν ΑΒ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΖΑ, ὁ δὲ ΑΖ τὸν ΔΓ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΗΓ, ὁ δὲ ΗΓ τὸν ΖΑ μετρῶν λειπέτω μονάδα τὴν ΘΑ.

Si enim A B, Γ Δ non sint primi inter se, metietur eos aliquis numerus. metiatur, sitque E, & Γ Δ quidem ipsum A B metiens relinquat seipso minorem Z A; A Z vero metiens Δ Γ relinquat seipso minorem H Γ; & H Γ metiens Z A unitatem Θ A relinquat.

Ἐπεὶ οὖν ὁ Ε τὸν ΓΔ μετρεῖ, ὁ δὲ ΓΔ τὸν ΒΖ μετρεῖ· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν ΒΖ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ

Quoniam igitur numerus E ipsum Γ Δ metitur, Γ Δ vero metitur B Z; & E ipsum B Z metitur. metitur

Euclides in hoc libro literas adhibet alphabeticas pro numerorum symbolis: Nos, alios editores secuti, tot adjecimus puncta, elucidandi gratia, quot numeris istis respondeant.

titur autem & totum BA: ergo & reliquum AZ metietur. sed AZ metitur ΔH: quare & E ipsum ΔH metietur. metitur autem & totum ΔΓ: ergo & reliquum ΓH metietur. at ΓH metitur ZΘ; & igitur E ipsum ZΘ metietur. sed & metitur totum ZA; & igitur numerus E metietur reliquam AΘ unitatem, quod [per 3. def. 7.] fieri non potest: non igitur ipsos AB, ΓΔ metietur aliquis numerus: ergo AB, ΓΔ primi inter se sunt. quod erat demonstrandum.

A . Θ . . Z . . . . B
Γ . . H . . . Δ
E ——

καὶ ὅλον τὸν ΒΑ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΑΖ μετρήσει ὁ Ε. ὁ δὲ ΑΖ τὸν ΔΗ μετρεῖ· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν ΔΗ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΔΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓΗ μετρήσει ὁ Ε. ὁ δὲ ΓΗ τὸν ΖΘ μετρεῖ· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν ΖΘ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΖΑ· καὶ λοιπὴν ἄρα τὴν ΑΘ μονάδα μετρήσει, ἀριθμὸς ὤν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΓΔ ἀριθμοὺς μετρήσει τις ἀριθμός· οἱ ΑΒ, ΓΔ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. II. Probl.

Duobus numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram invenire.

Sint dati duo numeri non primi inter se AB, ΓΔ, quorum minor sit ΓΔ: oportet ipsorum AB, ΓΔ maximam communem mensuram invenire.

Si igitur ΓΔ metitur AB, cum etiam seipsum metiatur, erit ΓΔ ipsorum ΓΔ, AB communis mensura. & perspicuum est eam maximam esse; nullus enim major quam ΓΔ ipsum ΓΔ metietur.

A . . . . B
Γ . . . . Δ

Si vero ΓΔ non metitur AB, ipsorum AB, ΓΔ detracto semper minore de majore, relinquetur aliquis numerus, qui metietur praecedentem. unitas quidem non relinquetur. * si enim non, erunt AB, ΓΔ primi inter se, † quod non ponitur; relinquetur igitur quidem numerus qui metietur praecedentem. & ΓΔ quidem ipsum AB metiens relinquat seipso minorem AE; AE vero metiens ΓΔ relinquat seipso minorem ΓZ; ΓZ vero ipsum AE metiatur. itaque quoniam ΓZ ipsum AE metitur, AE vero ipsum ΔZ; & ΓZ ipsum ΔZ metietur. sed & metitur seipsum; & igitur metietur totum ΓΔ. at ΓΔ ipsum BE metitur: ergo & ΓZ metitur BE. metitur autem & EA: & igitur totum BA metietur. sed & metitur ΓΔ: ergo ΓZ ipsos AB, ΓΔ metitur; ac propterea ΓZ ipsorum AB, ΓΔ est communis mensura. dico etiam maximam esse. si enim ΓZ non est maxima communis mensura ipsorum AB, ΓΔ, ipsos AB, ΓΔ metietur aliquis numerus major ipso ΓZ. metiatur, sitque H. & quoniam H ipsum ΓΔ metitur; ΓΔ vero ipsum BE: & H ipsum BE metitur. metitur autem & totum BA: & reliquum igitur AE metietur. sed AE metitur ΔZ: ergo & H ipsum ΔZ metietur. metitur autem & totum ΔΓ: quare & reliquum ΓZ metietur, major minorem, quod fieri non potest: non igitur ipsos AB, ΓΔ numeros metietur numerus aliquis major ipso ΓZ: ergo ΓZ est ipsorum AB, ΓΔ maxima communis mensura. quod erat demonstrandum.

A . . . . E . . . . . . B
Γ . . Z . . . . Δ
H ——

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἔστω ἐλάσσων ὁ ΓΔ· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Εἰ μὲν οὖν ὁ ΓΔ τὸν ΑΒ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ ΓΔ ἄρα τῶν ΓΔ, ΑΒ κοινὸν μέτρον ἐστί. καὶ φανερὸν ὅτι καὶ μέγιστον, οὐδεὶς γὰρ μείζων τοῦ ΓΔ τὸν ΓΔ μετρήσει.

Εἰ δὲ οὐ μετρεῖ ὁ ΓΔ τὸν ΑΒ, τῶν ΑΒ, ΓΔ ἀνθυφαιρουμένων ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, λειφθήσεταί τις ἀριθμὸς, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. μονὰς μὲν γὰρ οὐ λειφθήσεται. εἰ δὲ μὴ, ἔσονται οἱ ΑΒ, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται, λειφθήσεται ἄρα τις ἀριθμὸς, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. καὶ ὁ μὲν ΓΔ τὸν ΑΒ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΑΕ, ὁ δὲ ΑΕ τὸν ΓΔ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ τὸν ΓΖ, ὁ δὲ ΓΖ τὸν ΑΕ μετρείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ ΓΖ τὸν ΑΕ μετρεῖ, ὁ δὲ ΑΕ τὸν ΔΖ μετρεῖ· καὶ ὁ ΓΖ ἄρα τὸν ΔΖ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΓΔ μετρήσει. ὁ δὲ ΓΔ τὸν ΒΕ μετρεῖ· καὶ ὁ ΓΖ ἄρα τὸν ΒΕ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΕΑ· καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΒΑ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΓΔ· ὁ ΓΖ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΓΔ μετρεῖ· ὁ ΓΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστί. λέγω δὴ ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ ΓΖ τῶν ΑΒ, ΓΔ μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς ΑΒ, ΓΔ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ ΓΖ. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Η. καὶ ἐπεὶ ὁ Η τὸν ΓΔ μετρεῖ, ὁ δὲ ΓΔ τὸν ΒΕ μετρεῖ· καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΒΕ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΒΑ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΑΕ μετρήσει. ὁ δὲ ΑΕ τὸν ΔΖ μετρεῖ· καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΔΖ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΔΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓΖ μετρήσει, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΓΔ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει, μείζων ὢν τοῦ ΓΖ· ὁ ΓΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

* Sc. si enim non non relinquatur, i. e. si relinquatur. † i. e. quod est contra hypothesin.

Πό-

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

Corollarium.

Ex hoc manifestum est, si numerus duos numeros metiatur, & maximam eorum communem mensuram metiri.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γʹ.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Α . . . .
Β . . . . . .
Γ . . . .
Δ . .
Ε ----

Εἰλήφθω γὰρ δύο τῶν Α, Β τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ· ὁ δὴ Δ τὸν Γ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον, μετρεῖ δὲ καὶ τοὺς Α, Β· ὁ Δ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ· ὁ Δ ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινὸν μέτρον ἐστί. λέγω ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ Δ τῶν Α, Β, Γ κοινὸν μέγιστον μέτρον, μετρήσει τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ Δ. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Ε. ἐπεὶ οὖν ὁ Ε τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τοὺς Α, Β ἄρα μετρήσει, καὶ τὸ τῶν Α, Β ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ δὲ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ Δ· ὁ Ε ἄρα τὸν Δ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ Δ· ὁ Δ ἄρα τῶν Α, Β, Γ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον.

Μὴ μετρείτω δὴ ὁ Δ τὸν Γ. λέγω πρῶτον, ὅτι οἱ Δ, Γ οὐκ εἰσὶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β, Γ οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός· ὁ δὴ τοὺς Α, Β, Γ μετρῶν καὶ τοὺς Α, Β μετρήσει καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον τὸ Δ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· τοὺς Δ, Γ ἄρα ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ Δ, Γ ἄρα οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. εἰλήφθω οὖν αὐτῶν τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, ὁ Ε. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, ὁ δὲ Δ τοὺς Α, Β μετρεῖ· καὶ ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ· ὁ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινόν ἐστι μέτρον. λέγω δὴ ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ Ε τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ Ε. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Ζ. καὶ ἐπεὶ ὁ Ζ τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τοὺς Α, Β μετρεῖ, καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ δὲ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ Δ· ὁ Ζ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ζ ἄρα τοὺς Δ, Γ μετρεῖ· καὶ τὸ τῶν Δ, Γ ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρεῖ. τὸ δὲ τῶν Γ, Δ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ Ε· ὁ Ζ ἄρα τὸν Ε μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμός τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ Ε· ὁ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ μέγιστόν ἐστιν κοινὸν μέτρον.

PROP. III. PROBL.

Tribus numeris datis non primis inter se, maximam ipsorum communem mensuram invenire.

Sint dati tres numeri non primi inter se A, B, Γ: oportet ipsorum A, B, Γ maximam communem mensuram invenire.

Sumatur enim duorum A, B maxima communis mensura Δ: itaque Δ vel ipsum Γ metitur, vel non metitur. metiatur primum, metitur autem & ipsos A, B: ergo Δ numeros A, B, Γ metitur: & ob id ipsorum est communis mensura. dico & maximam esse. si enim Δ non est ipsorum A, B, Γ maxima communis mensura, metietur eos aliquis numerus major ipso Δ. metiatur, & sit E. quoniam igitur E metitur numeros A, B, Γ, & ipsos A, B metietur, & [per cor. 2. 7.] ipsorum A, B maximam communem mensuram. sed ipsorum A, B maxima communis mensura est Δ: ergo E ipsum Δ metitur, major minorem, quod fieri non potest: non igitur A, B, Γ numeros numerus aliquis major ipso Δ metietur: ergo Δ ipsorum A, B, Γ maxima est communis mensura.

Non metiatur autem Δ ipsum Γ. dico primum numeros Δ, Γ non esse primos inter se. quoniam enim A, B, Γ non sunt inter se primi, metietur eos aliquis numerus; & qui metitur ipsos A, B, Γ & ipsos A, B metietur, & [per cor. 2. 7.] ipsorum A, B maximam communem mensuram, videlicet Δ, metietur.

A . . . .
B . . . .
Γ . . . .
Δ . . . . . .
E . .
Z ---

metitur autem & ipsum Γ: ergo ipsos Δ, Γ numerus aliquis metietur; ideoque Δ, Γ non sunt inter se primi. sumatur ipsorum maxima communis mensura E. & quoniam E ipsum Δ metitur, & Δ metitur ipsos A, B, & E ipsos A, B metietur. metitur autem & Γ; ergo & ipsos A, B, Γ metietur: eritque E ipsorum A, B, Γ communis mensura. dico & maximam esse. si enim E non est ipsorum A, B, Γ maxima communis mensura, metietur A, B, Γ numeros numerus aliquis major ipso E. metiatur, sitque Z. & quoniam Z metitur numeros A, B, Γ; & ipsos A, B & ipsorum A, B maximam communem mensuram metietur. sed ipsorum A, B maxima communis mensura est Δ: ergo Z ipsum Δ metitur. metitur autem & ipsum Γ: quare Z & ipsos Δ, Γ; & igitur ipsorum Δ, Γ maximam communem mensuram metietur. sed ipsorum Γ, Δ maxima communis mensura est E: ergo Z ipsum E metitur, major minorem, quod fieri non potest: non igitur A, B, Γ numeros numerus aliquis major ipso E metietur; ergo E ipsorum A, B, Γ maxima est communis mensura.

Tribus igitur numeris datis non primis inter se, eorum maxima communis mensura inventa est. quod erat faciendum.

Τριῶν ἄρα ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, εὕρηται τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Corollarium.

Ex his manifestum est, si numerus numeros tres metiatur, & ipsorum maximam communem mensuram metiri.

Eodem modo & pluribus numeris datis, maximam communem mensuram inveniemus.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτων φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοὺς τρεῖς μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ πλειόνων ἀριθμῶν δοθέντων, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρήσομεν.

Prop. IV. Theor.

Omnis numerus omnis numeri, minor majoris, vel pars est vel partes.

Sint duo numeri A, BΓ, quorum BΓ sit minor: dico BΓ ipsius A vel partem esse vel partes.

Numeri enim A, BΓ vel primi sunt inter se, vel non. sint prius inter se primi, & diviso BΓ in unitates, quæ in ipso sunt, erit [per 1. & 2. def. 7.] unaquæque unitas earum quæ in BΓ pars aliqua ipsius A: ergo BΓ ipsius A partes est.

A.........
B.....Γ

Sed non sint A, BΓ inter se primi: itaque BΓ vel ipsum A metitur vel non. &, siquidem metitur, erit BΓ pars ipsius A.

A.........
B....Γ

Si vero non. sumatur [per 2. 7.] ipsorum A, BΓ maxima communis mensura Δ; & dividatur BΓ in numeros ipsi Δ æquales BE, EZ, ZΓ. quoniam igitur Δ numerum A metitur, erit Δ pars ipsius A. æqualis autem est Δ unicuique ipsorum BE, EZ, ZΓ: ergo & unusquisque ipsorum BE, EZ, ZΓ pars est ipsius A: ac propterea BΓ ipsius A partes est.

A.........
B..E..Z..Γ
Δ..

Omnis igitur numerus omnis numeri, minor majoris, vel pars est vel partes. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ΄.

Πᾶς ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ἤτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ, οἱ A, BΓ, καὶ ἔστω ἐλάσσων ὁ BΓ· λέγω ὅτι ὁ BΓ τοῦ A ἤτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη.

Οἱ A, BΓ πρότερον γὰρ ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὔ. ἔστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, διαιρεθέντος δὴ τοῦ BΓ εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἔσται ἑκάστη μονὰς τῶν ἐν τῷ BΓ μέρος τι τοῦ A· ὥστε μέρη ἐστὶν ὁ BΓ τοῦ A.

Μὴ ἔστωσαν δὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ A, BΓ· ὁ δὴ BΓ τὸν A ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. εἰ μὲν οὖν ὁ BΓ τὸν A μετρεῖ, μέρος ἐστὶν ὁ BΓ τοῦ A.

Εἰ δὲ οὔ. εἰλήφθω τῶν A, BΓ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ, καὶ διῃρήσθω ὁ BΓ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους, τοὺς BE, EZ, ZΓ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν A μετρεῖ, μέρος ἐστὶν ὁ Δ τοῦ A. ἴσος δὲ ὁ Δ ἑκατέρῳ τῶν BE, EZ· καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν BE, EZ, ZΓ τοῦ A μέρος ἐστίν· ὥστε μέρη ἐστὶν ὁ BΓ τοῦ A.

Ἅπας ἄρα ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ἤτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. V. Theor.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars; & uterque utriusque eadem pars erit, quæ unus unius.

Numerus A numeri BΓ pars sit, & alter Δ alterius EZ eadem pars quæ est A ipsius BΓ: dico & utrumque A, Δ utriusque BΓ, EZ eandem partem esse, quæ est A ipsius BΓ.

Quoniam enim quæ pars est A ipsius BΓ eadem est & Δ ipsius EZ, quot numeri sunt in BΓ æquales ipsi A tot erunt & in EZ numeri æquales ipsi Δ. dividatur BΓ quidem in numeros æquales ipsi A, videlicet in BH, HΓ; EZ vero dividatur in numeros ipsi Δ æquales, hoc est EΘ, ΘZ; erit utique æqualis multitudo numerorum BH, HΓ multitudini ipsorum EΘ, ΘZ. & quoniam æqualis est BH ipsi A, & EΘ ipsi Δ; erunt BH, EΘ ipsis A, Δ,

A...
B...H...Γ
Δ....
E....Θ....Z

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε΄.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος· καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ εἷς τοῦ ἑνός.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ A ἀριθμοῦ τοῦ BΓ μέρος ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ Δ ἑτέρου τοῦ EZ τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ὁ A τοῦ BΓ· λέγω ὅτι καὶ συναμφότερος ὁ A, Δ συναμφοτέρου τοῦ BΓ, EZ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὁ A τοῦ BΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ A τοῦ BΓ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Δ τοῦ EZ· ὅσοι ἄρα ἀριθμοί εἰσιν ἐν τῷ BΓ ἴσοι τῷ A, τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ EZ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Δ. διῃρήσθω ὁ μὲν BΓ εἰς τοὺς τῷ A ἴσους τοὺς BH, HΓ· ὁ δὲ EZ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους τοὺς EΘ, ΘZ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν BH, HΓ τῷ πλήθει τῶν EΘ, ΘZ. καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ μὲν BH τῷ A, ὁ δὲ EΘ τῷ Δ· ὁ BH ἄρα καὶ EΘ τοῖς A, Δ

ἴσοι

ἴσοι εἰσί. καὶ διὰ ταῦτα ὁ ΗΓ τῷ Α ἴσος ἐστί, καὶ ὁ ΘΖ τῷ Δ· καὶ οἱ ΗΓ, ΘΖ ἄρα τοῖς Α, Δ ἴσοι εἰσίν· ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Α, τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τοῖς ΒΓ, ΕΖ ἴσοι τοῖς Α, Δ· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ὁ ΒΓ τῷ Α, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΒΓ, ΕΖ συναμφοτέρου τοῦ Α, Δ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ ΒΓ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ Α, Δ συναμφοτέρου τοῦ ΒΓ, ΕΖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

æquales. & eadem ratione cum HΓ sit æqualis ipsi A, & ΘZ ipsi Δ; & HΓ, ΘZ ipsis A, Δ æquales erunt: quot igitur numeri sunt in BΓ, æquales ipsi A tot sunt & in BΓ, EZ æquales ipsis A, Δ: ergo quotuplex est BΓ ipsius A totuplex erit & uterque BΓ, EZ utriusque A, Δ: quæ igitur pars est A ipsius BΓ, eadem pars erit & uterque A, Δ utriusque BΓ, EZ. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ᾖ· καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ εἷς τοῦ ἑνός.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ ΑΒ ἀριθμοῦ τοῦ Γ μέρη ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ ΔΕ ἑτέρου τοῦ Ζ τὰ αὐτὰ μέρη ἅπερ ὁ ΑΒ τοῦ Γ· λέγω ὅτι καὶ συναμφότερος ὁ ΑΒ, ΔΕ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν, ἅπερ ὁ ΑΒ τοῦ Γ.

Ἐπεὶ γὰρ ἃ μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ Γ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μέρη τοῦ Γ τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ ΔΕ μέρη τοῦ Ζ. διῃρήσθω ὁ μὲν ΑΒ εἰς τὰ τοῦ Γ μέρη τὰ ΑΗ, ΗΒ, ὁ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τοῦ Ζ μέρη τὰ ΔΘ, ΘΕ.

A . . . H . . . B
Γ . . . .
Δ . . . . Θ . . . . E
Z . . . .

Ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ πλήθει τῶν ΔΘ, ΘΕ. καὶ ἐπεὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ Γ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΔΘ τοῦ Ζ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ Γ αὐτὸ τὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΑΗ, ΔΘ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΗΒ τοῦ Γ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΗΒ, ΘΕ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ· ἃ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ Γ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΑΒ, ΔΕ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. VI. THEOR.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes; & uterque utriusque eædem partes erit, quæ unus unius.

NUmerus enim AB numeri Γ partes sit, & alter ΔE alterius Z eædem partes quæ AB ipsius Γ: dico & utrumque AB, ΔE utriusque Γ, Z easdem partes esse, quæ AB ipsius Γ.

Quoniam enim quæ partes est AB ipsius Γ eædem est ΔE ipsius Z, quot sunt in AB partes ipsius Γ tot erunt & in ΔE partes ipsius Z. dividatur AB quidem in partes ipsius Γ, videlicet AH, HB; ΔE vero dividatur in in partes ipsius Z, hoc est ΔΘ, ΘE.

Erit ipsorum AH, HB multitudo æqualis multitudini ipsorum ΔΘ, ΘE. & quoniam quæ pars est AH ipsius Γ eadem est pars & ΔΘ ipsius Z, quæ pars est AH ipsius Γ eadem pars erit [per 5.7.] & uterque AH, ΔΘ utriusque Γ, Z. simili ratione & quæ pars est HB ipsius Γ eadem pars erit & uterque HB, ΘE utriusque Γ, Z: quæ igitur partes est AB ipsius Γ eædem partes est & uterque AB, ΔE utriusque Γ, Z. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, ὅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος· καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ ΑΒ ἀριθμοῦ τοῦ ΓΔ μέρος ἔστω, ὅπερ ἀφαιρεθεὶς ὁ ΑΕ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ ὁ λοιπὸς ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν, ὅπερ ὁ ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

Ὃ γὰρ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ τὸ αὐτὸ μέρος ἔστω καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΓΗ. καὶ ἐπεὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΓΗ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΗΖ, ὃ δὲ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ τὸ αὐτὸ μέρος ὑπόκειται καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΗΖ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ὁ ΑΒ ἄρα ἑκατέρου τῶν ΗΖ, ΓΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΗΖ τῷ ΓΔ. κοινὸς ἀφῃρήσθω ὁ ΓΖ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΗΓ λοιπῷ τῷ ΖΔ ἴσος ἐστί. καὶ ἐπεὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΗΓ, ἴσος

A . . . . E . . B
H . . . . Γ . . . . Z . . . . Δ

PROP. VII. THEOR.

Si numerus numeri fuerit pars, quæ ablatus ablati; & reliquus reliqui eadem pars erit, quæ totus totius.

NUmerus enim AB numeri ΓΔ pars sit, quæ ablatus AE ablati ΓZ: dico & reliquum EB reliqui ZΔ eandem partem esse, quæ est totus AB totius ΓΔ.

Quæ enim pars est AE ipsius ΓZ eadem pars sit & EB ipsius ΓH. & quoniam quæ pars est AE ipsius ΓZ eadem pars est & EB ipsius ΓH; quæ pars est AE ipsius ΓZ eadem pars est [per 5.7.] & AB ipsius HZ. quæ autem pars est AE ipsius ΓZ eadem pars ponitur & AB ipsius ΓΔ: quæ igitur pars est AB ipsius HZ eadem est & AB ipsius ΓΔ: quare AB utriusque HZ, ΓΔ eadem est pars: æqualis igitur est HZ ipsi ΓΔ. communis auferatur ΓZ: ergo reliquus HΓ reliquo ZΔ est æqualis. & quoniam quæ pars est AE ipsius ΓZ eadem est & EB ipsius HΓ; æqualis autem est HΓ ipsi ZΔ, quæ pars est AE ipsius ΓZ eadem erit & EB ipsius ZΔ. sed quæ pars est AE ipsius ΓZ eadem est [ex hyp.] & AB ipsius ΓΔ: ergo quæ pars est EB ipsius ZΔ eadem est & AB ipsius ΓΔ: & reliquus igitur EB reliqui ZΔ eadem pars erit quæ totus AB totius ΓΔ. quod erat demonstrandum.

A....E..B

H....Γ.........Z....Δ

δὲ ὁ HΓ τοῦ ZΔ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ AB τοῦ ΓZ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ EB τοῦ ZΔ. ἀλλὰ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ AE τοῦ ΓZ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ AB τοῦ ΓΔ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ EB τοῦ ZΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ AB τοῦ ΓΔ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ EB λοιποῦ τοῦ ZΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὁ ὅλος ὁ AB ὅλου τοῦ ΓΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VIII. Theor.

Si numerus numeri fuerit partes, quæ ablatus ablati; & reliquus reliqui eædem partes erit, quæ totus totius.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, ἅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος· καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

Numerus enim AB numeri ΓΔ sit partes, quæ ablatus AE ablati ΓZ: dico & reliquum EB reliqui ZΔ easdem partes esse, quæ totus AB totius ΓΔ.

Ponatur enim ipsi AB æqualis HΘ: quæ igitur partes est HΘ ipsius ΓΔ eædem est & AE ipsius ΓZ. dividatur HΘ quidem in partes ipsius ΓΔ, videlicet HK, KΘ; AE vero dividatur in partes ipsius ΓZ, videlicet AΛ, ΛE: erit igitur ipsarum HK, KΘ multitudo æqualis multitudini ipsarum AΛ, ΛE. & quoniam quæ pars est HK ipsius ΓΔ eadem est & AΛ ipsius ΓZ, major autem ΓΔ quam ΓZ; & HK quam AΛ est major. ponatur ipsi AΛ æqualis HM: quæ igitur pars est HK ipsius ΓΔ eadem est & HM ipsius ΓZ: quare [per 7. 7.] & reliquus MK reliqui ZΔ eadem pars est quæ totus HK totius ΓΔ. rursus quoniam quæ pars est KΘ ipsius ΓΔ eadem est & ΛE ipsius ΓZ. major autem ΓΔ quam ΓZ: erit & KΘ quam ΛE major. ponatur ipsi ΛE æqualis KN: quæ igitur pars est KΘ ipsius ΓΔ eadem est & KN ipsius ΓZ: ergo & reliquus NΘ reliqui ZΔ eadem pars est quæ totus KΘ totius ΓΔ. ostensum autem est & reliquum MK reliqui ZΔ eandem partem esse quæ totus HK totius ΔΓ: & uterque igitur simul MK, NΘ ipsius ΔZ eædem partes est quæ totus ΘH totius ΔΓ. æqualis autem est uterque simul MK, NΘ ipsi EB; ΘH vero ipsi BA: & reliquus igitur EB reliqui ZΔ eædem partes est quæ totus AB totius ΓΔ. quod erat demonstrandum.

A......Λ......E.....B

Γ....................Z.......Δ

H......M..K.......N..Θ

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ AB ἀριθμοῦ τοῦ ΓΔ μέρη ἔστω, ἅπερ ἀφαιρεθεὶς ὁ AE ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓZ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ EB λοιποῦ τοῦ ZΔ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν, ἅπερ ὅλος ὁ AB ὅλου τοῦ ΓΔ.

Κείσθω γὰρ τῷ AB ἴσος ὁ HΘ· ἃ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ HΘ τοῦ ΓΔ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ AE τοῦ ΓZ. διῃρήσθω ὁ μὲν HΘ εἰς τὰ τοῦ ΓΔ μέρη τὰ HK, KΘ, ὁ δὲ AE εἰς τὰ τοῦ ΓZ μέρη τὰ AΛ, ΛE· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν HK, KΘ τῷ πλήθει τῶν AΛ, ΛE. καὶ ἐπεὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ HK τοῦ ΓΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ AΛ τοῦ ΓZ, μείζων δὲ ὁ ΓΔ τοῦ ΓZ· μείζων ἄρα καὶ ὁ HK τοῦ AΛ. κείσθω τῷ AΛ ἴσος ὁ HM· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ HK τοῦ ΓΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ HM τοῦ ΓZ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ MK λοιποῦ τοῦ ZΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὅλος ὁ HK ὅλου τοῦ ΓΔ. πάλιν, ἐπεὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ KΘ τοῦ ΓΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΛE τοῦ ΓZ. μείζων δὲ ὁ ΓΔ τοῦ ΓZ· μείζων ἄρα καὶ ὁ KΘ τοῦ ΛE. κείσθω ἴσος τῷ ΛE ὁ KN· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ KΘ τοῦ ΓΔ τὸ αὐτὸ μέρος καὶ ὁ KN τοῦ ΓZ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ NΘ λοιποῦ τοῦ ZΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὅλος ὁ KΘ ὅλου τοῦ ΓΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ λοιπὸς ὁ MK λοιποῦ τοῦ ZΔ τὸ αὐτὸ μέρος ὢν ὅπερ ὅλος ὁ HK ὅλου τοῦ ΔΓ· καὶ συναμφότερος ἄρα ὁ MK, NΘ τοῦ ΔZ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν ἅπερ ὅλος ὁ ΘH ὅλου τοῦ ΔΓ. ἴσος δὴ συναμφότερος μὲν ὁ MK, NΘ τῷ EB, ὁ δὲ ΘH τῷ BA· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ EB λοιποῦ τοῦ ZΔ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν ἅπερ ὅλος ὁ AB ὅλου τοῦ ΓΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. IX. Theor.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars; & permutando quæ pars est vel partes primus tertii, eadem erit pars vel eædem partes & secundus quarti.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος· καὶ ἐναλλὰξ ὃ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου, τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται ἢ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου.

Numerus enim A numeri BΓ pars sit, & alter Δ alterius EZ eadem pars quæ A

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ A ἀριθμοῦ τοῦ BΓ μέρος ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ Δ ἑτέρου τοῦ EZ τὸ αὐτὸ μέρος ὅπερ ὁ A τοῦ

Α τοῦ ΒΓ, ἐλάσσων δὲ ἔστω ὁ Α τοῦ Δ· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Δ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΒΓ τοῦ ΕΖ ἢ μέρη.

Ἐπεὶ γὰρ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ ΒΓ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Δ τοῦ ΕΖ· ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Α τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ ΕΖ ἴσοι τῷ Δ. διῃρήσθω ὁ μὲν ΒΓ εἰς τοὺς τῷ Α ἴσους τοὺς ΒΗ, ΗΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους τοὺς ΕΘ, ΘΖ, ἴσον ἔσται δὴ τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΓ τῷ πλήθει τῶν ΕΘ, ΘΖ.

```
A . . . .
B . . . . H . . . . Γ
Δ . . . . . .
E . . . . . Θ . . . . . Z
```

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΒΗ, ΗΓ ἀριθμοὶ ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΘ, ΘΖ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΓ τῷ πλήθει τῶν ΕΘ, ΘΖ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΒΗ τοῦ ΕΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΓ τοῦ ΘΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ὥστε καὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΒΗ τοῦ ΕΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΒΓ συναμφοτέρου τοῦ ΕΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. ἴσος δέ ὁ μὲν ΒΗ τῷ Α, ὁ δὲ ΕΘ τῷ Δ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Δ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΒΓ τοῦ ΕΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ipsius ΒΓ, minor autem sit Α quam Δ: dico & permutando quæ pars est Α ipsius Δ vel partes, eandem partem esse & ΒΓ ipsius ΕΖ vel easdem partes.

Quoniam enim quæ pars est Α ipsius ΒΓ eadem est & Δ ipsius ΕΖ; quot numeri sunt in ΒΓ æquales ipsi Α tot sunt & in ΕΖ æquales ipsi Δ. dividatur ΒΓ quidem in numeros ipsi Α æquales, videlicet in ΒΗ, ΗΓ: ΕΖ vero dividatur in numeros ipsi Δ æquales, ΕΘ, ΘΖ; erit ipsorum ΒΗ, ΗΓ multitudo æqualis multitudini ipsorum ΕΘ, ΘΖ.

Et quoniam numeri ΒΗ, ΗΓ inter se sunt æquales, sunt autem & æquales ΕΘ, ΘΖ; atque est ipsorum ΒΗ, ΗΓ multitudo æqualis multitudini ipsorum ΕΘ, ΘΖ: quæ pars est ΒΗ ipsius ΕΘ vel partes, eadem pars erit & ΗΓ ipsius ΘΖ vel eædem partes: ergo [per 5. & 6. 7.] quæ pars est ΒΗ ipsius ΕΘ vel partes, eadem pars erit & uterque ΒΓ utriusque ΕΖ vel eædem partes. æqualis autem est ΒΗ ipsi Α, & ΕΘ ipsi Δ: quæ igitur pars est Α ipsius Δ vel partes, eadem pars erit & ΒΓ ipsius ΕΖ vel eædem partes. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι΄.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ ἐναλλὰξ ἃ μέρη ἐστὶν ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου ἢ μέρος.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ ΑΒ ἀριθμοῦ τοῦ Γ μέρη ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ ΔΕ ἑτέρου τοῦ Ζ τὰ αὐτὰ μέρη, ἔστω δὲ ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἐλάσσων· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἃ μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ μέρος.

Ἐπεὶ γὰρ ἃ μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ Γ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μέρη τοῦ Γ τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ μέρη τοῦ Ζ. διῃρήσθω ὁ μὲν ΑΒ εἰς τὰ τοῦ Γ μέρη τὰ ΑΗ, ΗΒ, ὁ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τοῦ Ζ μέρη τὰ ΔΘ, ΘΕ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ πλήθει τῶν ΔΘ, ΘΕ. καὶ ἐπεὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ Γ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΔΘ τοῦ Ζ, καὶ ἐναλλὰξ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΗΒ τοῦ ΘΕ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ὥστε καὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. ἀλλ' ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἃ μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὸ αὐτὸ μέρος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

```
A . . H . . B
Γ . . . . . .
Δ . . . . . Θ . . . . . E
Z . . . . . . . . . . . . . . .
```

Prop. X. Probl.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: & permutando quæ partes est primus tertii vel pars, eædem partes erit & secundus quarti vel eadem pars.

Numerus enim ΑΒ numeri Γ partes sit, & alter ΔΕ alterius Ζ eædem partes; sit autem ΑΒ minor quam ΔΕ: dico & permutando quæ partes est ΑΒ ipsius ΔΕ vel pars, easdem partes esse & Γ ipsius Ζ vel eandem partem.

Quoniam enim quæ partes est ΑΒ ipsius Γ eædem partes est & ΔΕ ipsius Ζ, quot sunt in ΑΒ partes ipsius Γ tot erunt & in ΔΕ partes ipsius Ζ. dividatur ΑΒ quidem in partes ipsius Γ, videlicet ΑΗ, ΗΒ; ΔΕ vero dividatur in partes ipsius Ζ, hoc est ΔΘ, ΘΕ: erit utique ipsarum ΑΗ, ΗΒ multitudo multitudini ipsarum ΔΘ, ΘΕ æqualis. & quoniam quæ pars est ΑΗ ipsius Γ eadem pars est & ΔΘ ipsius Ζ, & permutando [per 9. 7.] quæ pars est ΑΗ ipsius ΔΘ vel partes, eadem pars erit & Γ ipsius Ζ vel eædem partes. simili ratione & quæ pars est ΗΒ ipsius ΘΕ vel partes, eadem pars erit & Γ ipsius Ζ vel eædem partes: ergo [per 5. & 6. 7.] quæ pars est ΑΗ ipsius ΔΘ vel partes, eadem pars erit & ΑΒ ipsius ΔΕ vel eædem partes. sed quæ pars est ΑΗ ipsius ΔΘ vel partes, eadem pars est & Γ ipsius Ζ vel eædem partes: & igitur quæ partes est ΑΒ ipsius ΔΕ vel pars, eædem partes est & Γ ipsius Ζ vel eadem pars. quod erat demonstrandum.

PROP. XI. THEOR.

Si fuerit ut totus ad totum ita ablatus ad ablatum; & reliquus ad reliquum erit ut totus ad totum.

SIT ut totus AB ad totum ΓΔ ita ablatus AE ad ablatum ΓZ: dico & reliquum EB ad reliquum ZΔ ita esse ut totus AB ad totum ΓΔ.

Quoniam enim est ut AB ad ΓΔ ita AE ad ΓZ: [per 20. def. 7.] quæ pars est AB ipsius ΓΔ vel partes, eadem pars erit & AE ipsius ΓZ vel eædem partes: ergo [per 7. & 8. 7.] & reliquus EB reliqui ZΔ eadem pars erit vel eædem partes quæ AB ipsius ΓΔ: est igitur [per 20. def. 7.] ut EB ad ZΔ ita AB ad ΓΔ. quod erat demonstrandum.

A....E..B
Γ......Z...Δ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλος πρὸς ὅλον οὕτως ἀφαιρεθεὶς πρὸς ἀφαιρεθέντα· καὶ ὁ λοιπὸς πρὸς τὸν λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλος πρὸς ὅλον.

Ἔστω ὡς ὅλος ὁ AB πρὸς ὅλον τὸν ΓΔ οὕτως ἀφαιρεθεὶς ὁ AE πρὸς ἀφαιρεθέντα τὸν ΓZ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ EB πρὸς λοιπὸν τὸν ZΔ ἐστὶν ὡς ὅλος ὁ AB πρὸς ὅλον τὸν ΓΔ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ AB πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως ὁ AE πρὸς τὸν ΓZ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ AB τοῦ ΓΔ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ AE τοῦ ΓZ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ EB λοιποῦ τοῦ ZΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη, ἅπερ ὁ AB τοῦ ΓΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ EB πρὸς τὸν ZΔ οὕτως ὁ AB πρὸς τὸν ΓΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XII. THEOR.

Si quotcunque numeri proportionales fuerint; ut unus antecedentium ad unum consequentium, ita erunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

SInt quotcunque numeri proportionales, A, B, Γ, Δ; sitque ut A ad B ita Γ ad Δ: dico ut A ad B ita esse A, Γ ad B, Δ.

Quoniam enim est ut A ad B ita Γ ad Δ; [per 20. def. 7.] quæ pars est A ipsius B vel partes, eadem pars erit & Γ ipsius Δ vel partes: & igitur [per 5. & 6. 7.] uterque A, Γ utriusque B, Δ eadem pars est vel partes, quæ A ipsius B: ergo [per 20. def. 7.] ut A ad B ita est A, Γ ad B, Δ. quod erat demonstrandum.

A..   Γ....
B...   Δ.......

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον· ἔσται ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ A, B, Γ, Δ, ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως οἱ A, Γ πρὸς τοὺς B, Δ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ A τοῦ B ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Δ ἢ μέρη· καὶ συναμφότερος ἄρα ὁ A, Γ συναμφοτέρου τοῦ B, Δ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, ἅπερ ὁ A τοῦ B· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως οἱ A, Γ πρὸς τοὺς B, Δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XIII. THEOR.

Si quatuor numeri proportionales fuerint; & permutando proportionales erunt.

SInt quatuor numeri proportionales A, B, Γ, Δ, sitque ut A ad B ita Γ ad Δ: dico & permutando proportionales esse, videlicet ut A ad Γ ita esse B ad Δ.

Quoniam enim est ut A ad B ita Γ ad Δ, quæ pars est A ipsius B vel partes [per 20. def. 7.] eadem pars erit & Γ ipsius Δ vel eædem partes: permutando igitur [per 9. & 10. 7.] quæ pars est A ipsius Γ vel partes, eadem pars est & B ipsius Δ vel partes: ergo [per 20. def. 7.] ut A ad Γ ita est B ad Δ. quod erat demonstrandum.

A..   Γ.......
B... Δ..........

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσι· καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ A, B, Γ, Δ, ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται, ὡς ὁ A πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Δ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ A τοῦ B ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Δ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ἐναλλὰξ ἄρα ὃ μέρος ἐστὶν ὁ A τοῦ Γ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ B τοῦ Δ ἢ μέρη· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοί, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται.

Ἔστωσαν γὰρ ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, οἱ Δ, Ε, Ζ, ὡς μὲν ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· λέγω ὅτι καὶ δι' ἴσου ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ. ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

A . . . . Δ . . . . . .
B . . . . . . E . . . .
Γ . . . . Z . .

Prop. XIV. Theor.

Si fuerint quotcunque numeri, & alii ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur & in eadem ratione; etiam ex æquo in eadem ratione erunt.

Sint enim quotcumque numeri A, B, Γ, & alii ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur & in eadem ratione, sc. Δ, E, Z; sitque ut A ad B ita Δ ad E, ut autem B ad Γ ita E ad Z: dico etiam ex æquo ut A ad Γ ita esse Δ ad Z.

Quoniam enim est ut A ad B ita Δ ad E; erit permutando [per 13. 7.] ut A ad Δ ita B ad E. rursus, quoniam est ut B ad Γ ita E ad Z; permutando ut B ad E ita erit Γ ad Z ut autem B ad E ita est A ad Δ: & igitur ut A ad Δ ita Γ ad Z: ergo permutando ut A ad Γ ita Δ ad Z. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Ἐὰν μονὰς ἀριθμόν τινα μετρῇ, ἰσάκις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν μετρῇ· καὶ ἐναλλὰξ ἰσάκις ἡ μονὰς τὸν τρίτον ἀριθμὸν μετρήσει καὶ ὁ δεύτερος τὸν τέταρτον.

Μονὰς γὰρ ἡ Α ἀριθμόν τινα τὸν ΒΓ μετρείτω, ἰσάκις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ Δ ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν τὸν ΕΖ μετρείτω· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἰσάκις ἡ Α μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ ΒΓ τὸν ΕΖ.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἡ Α μονὰς τὸν ΒΓ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν ΕΖ· ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ μονάδες τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ ΕΖ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Δ. διῃρήσθω ὁ μὲν ΒΓ εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας τὰς ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους, τοὺς ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ τῷ πλήθει τῶν ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ. καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ μονάδες ἀλλήλαις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ μονάδων τῷ πλήθει τῶν ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ ἀριθμῶν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΗ μονὰς πρὸς τὸν ΕΚ ἀριθμὸν οὕτως ἡ ΗΘ μονὰς πρὸς τὸν ΚΛ ἀριθμόν, καὶ ἡ ΘΓ μονὰς πρὸς τὸν ΛΖ ἀριθμόν. ἔσται ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΗ μονὰς πρὸς τὸν ΕΚ οὕτως ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΒΗ μονὰς τῇ Α μονάδι, ὁ δὲ ΕΚ ἀριθμὸς τῷ Δ ἀριθμῷ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν οὕτως ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΕΖ· ἰσάκις ἄρα ἡ Α μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ ΒΓ τὸν ΕΖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

A . Δ . .
B . H . Θ . Γ E . . K . . Λ . . Z

Prop. XV. Theor.

Si unitas numerum aliquem metiatur, alter autem numerus æqualiter metiatur alium aliquem; & permutando unitas tertium numerum æqualiter metietur atque secundus quartum.

Unitas enim A numerum aliquem BΓ metiatur, alter autem numerus Δ æqualiter metiatur alium aliquem EZ: dico & permutando unitatem A æqualiter metiri numerum Δ atque BΓ ipsum EZ.

Quoniam enim A unitas æqualiter metitur numerum BΓ atque Δ ipsum EZ, quot unitates sunt in BΓ tot sunt & in EZ numeri æquales ipsi Δ. dividatur BΓ quidem in unitates quæ in ipso sunt, videlicet BH, HΘ, ΘΓ; EZ vero dividatur in numeros ipsi Δ æquales EK, KΛ, ΛZ: erit igitur ipsorum BH, HΘ ΘΓ multitudo æqualis multitudini ipsorum EK, KΛ, ΛZ. & quoniam BH, HΘ, ΘΓ unitates inter se æquales sunt, suntque numeri EK, KΛ, ΛZ inter se æquales, & unitatum BH, HΘ, ΘΓ multitudo æqualis multitudini numerorum EK, KΛ, ΛZ: erit ut BH unitas ad numerum EK, ita HΘ unitas ad numerum KΛ, & unitas ΘΓ ad ΛZ numerum. & [per 12. 7.] ut unus antecedentium ad unum consequentium ita omnes antecedentes ad omnes consequentes: est igitur ut unitas BH ad numerum EK ita BΓ ad EZ. æqualis autem est BH unitas unitati A, & EK numerus numero Δ: quare ut unitas A ad numerum Δ ita est BΓ ad EZ: igitur [per 20. def. 7.] unitas A numerum Δ æqualiter metitur atque BΓ ipsum EZ. quod erat demonstrandum.

Prop. XVI. Theor.

Si duo numeri sese multiplicantes fecerint aliquos; facti ex ipsis inter se æquales erunt.

Sint duo numeri A, B, & A quidem ipsum B multiplicans faciat Γ; B vero multiplicans A faciat Δ: dico Γ ipsi Δ æqualem esse.

Quoniam enim A ipsum B multiplicans fecit Γ [per 15. def. 7.] metietur B ipsum Γ per unitates quæ sunt in A. metitur autem & E unitas numerum A per unitates quæ in ipso sunt: igitur E unitas numerum A æqualiter metitur atque B ipsum Γ: quare permutando [per 15. 7.] unitas E numerum B æqualiter metitur atque A ipsum Γ. rursus, quoniam B ipsum A multiplicans fecit Δ; A metietur ipsum Δ per unitates quæ sunt in B. metitur autem & E unitas numerum B per unitates quæ in ipso sunt: ergo E unitas numerum B æqualiter metitur atque A ipsum Δ. sed E unitas numerum B æqualiter metitur atque A ipsum Γ: igitur A utrumque ipsorum Γ, Δ æqualiter metitur: erit ergo Γ ipsi Δ æqualis. quod erat demonstrandum.

A • •
Γ • • • • • •
E •
B • • •
Δ • • • • • •

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛʹ.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινας· οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν ἴσοι ἀλλήλοις ἔσονται.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α Β, καὶ ὁ μὲν Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω, ὁ δὲ Β τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Γ τῷ Δ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Γ· ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Γ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Β τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ Α ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Β μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Β κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Δ. ἰσάκις δὲ ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Γ· ἰσάκις ἄρα ὁ Α ἑκάτερον τῶν Γ, Δ μετρεῖ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ τῷ Δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XVII. Theor.

Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos: facti ex ipsis eandem rationem habebunt quam multiplicati.

Numerus enim A duos numeros B, Γ multiplicans faciat ipsos Δ, E: dico ut B ad Γ ita esse Δ ad E.

Quoniam enim A ipsum B multiplicans fecit Δ, [per 15. def. 7.] metietur B ipsum Δ per unitates quæ sunt in A. metitur autem & Z unitas numerum A per unitates quæ in ipso sunt: igitur Z unitas numerum A æqualiter metitur atque B ipsum Δ: ergo [per 20. def. 7.] ut Z unitas ad numerum A ita est B ad Δ. eadem ratione & ut Z unitas ad numerum A ita Γ ad E: & igitur ut B ad Δ ita Γ ad E; & permutando [per 13. 7.] ut B ad Γ ita Δ ad E. quod erat demonstrandum.

Z •
A • •
B • • •
Δ • • • • • •
Γ • • • •
E • • • • • • • •

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζʹ.

Ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσας ποιῇ τινας· οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἕξουσι τοῖς πολλαπλασιασθεῖσιν.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α δύο ἀριθμοὺς τοὺς Β, Γ πολλαπλασιάσας τοὺς Δ, Ε ποιείτω· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ Β ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ζ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ζ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ζ μονὰς πρὸς τὸν Α ἀριθμὸν οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ Ζ μονὰς πρὸς τὸν Α ἀριθμὸν οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Β πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XVIII. Theor.

Si duo numeri numerum aliquem multiplicantes fecerint aliquos; facti ex ipsis eandem rationem habebunt quam multiplicantes.

Duo enim numeri A, B numerum aliquem Γ multiplicantes faciant ipsos Δ, E: dico ut A ad B ita esse Δ ad E.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιηʹ.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας· οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον τοῖς πολλαπλασιάσασι.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀριθμόν τινα τὸν Γ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Δ, Ε ποιείτωσαν· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε.

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν· ἀριθμὸς δὴ ὁ Γ δύο ἀριθμοὺς τοὺς Α, Β πολλαπλασιάσας τοὺς Δ, Ε πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

A . . .
B . . . .
Γ . .
Δ . . . . . .
E . . . .

Quoniam enim A ipsum Γ multiplicans fecit Δ, & Γ multiplicans A [per 16. 7.] ipsum Δ fecit. eadem ratione & Γ ipsum B multiplicans fecit E: numerus igitur Γ duos numeros A, B multiplicans ipsos Δ, E fecit: est igitur [per 17.7.] ut A ad B ita Δ ad E. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθʹ.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐκ τοῦ πρώτου καὶ τετάρτου γινόμενος ἀριθμὸς ἴσος ἔσται τῷ ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου γινομένῳ ἀριθμῷ· καὶ ἐὰν ὁ ἐκ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου γινόμενος ἀριθμὸς ἴσος ᾖ τῷ ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται.

Prop. XIX. Theor.

Si quatuor numeri proportionales fuerint, qui ex primo & quarto fit numerus æqualis erit ei qui fit ex secundo & tertio: & si numerus qui fit ex primo & quarto æqualis fuerit ei qui ex secundo & tertio, quatuor numeri proportionales erunt.

Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ μὲν Α τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Ε τῷ Ζ.

Ὁ γὰρ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκε, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν· ἀριθμὸς δὴ ὁ Α δύο ἀριθμοὺς τοὺς Γ, Δ πολλαπλασιάσας τοὺς Η, Ε πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε. ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκε· δύο δὴ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀριθμόν τινα τὸν Γ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Η, Ζ πεποιήκασιν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ· ὁ Η ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν Ε, Ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Ε τῷ Ζ.

Ἔστω δὴ πάλιν ἴσος ὁ Ε τῷ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Γ, Δ πολλαπλασιάσας τοὺς Η, Ε πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε. ἴσος δὲ ὁ Ε τῷ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ὁ Η πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. ὡς δὲ ὁ Η πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

A . . . . . .
B . . . .
Γ . . .
Δ . .
E . . . .
Z . . . .
H . . . .

Sint quatuor numeri proportionales A, B, Γ, Δ; sitque ut A ad B ita Γ ad Δ; & A quidem ipsum Δ multiplicans faciat E; B vero multiplicans ipsum Γ faciat Z: dico E esse æqualem ipsi Z.

A enim multiplicans Γ faciat H. quoniam igitur A ipsum quidem Γ multiplicans fecit H, ipsum vero Δ multiplicans fecit E; numerus A duos numeros Δ, Γ multiplicans fecit ipsos H, E: est igitur [per 17.7.] ut Γ ad Δ ita H ad E. ut autem Γ ad Δ ita A ad B: quare & ut A ad B ita H ad E. rursus, quoniam A ipsum Γ multiplicans fecit H; sed & B ipsum Γ multiplicans fecit Z: duo numeri A, B numerum quendam Γ multiplicantes fecerunt ipsos H, Z; igitur [per 18. 7.] ut A ad B ita est H ad Z. sed & ut A ad B ita H ad E: ergo & ut H ad E ita est H ad Z: igitur H ad utrumque ipsorum E, Z eandem rationem habet; erit igitur E ipsi Z æqualis.

Sed sit E æqualis ipsi Z: dico ut A ad B ita esse Γ ad Δ.

Iisdem enim constructis, quoniam A ipsos Γ, Δ multiplicans fecit H, E; erit ut Γ ad Δ ita H ad E. est autem E ipsi Z æqualis: ut igitur H ad E ita H ad Z. sed ut H ad E ita Γ ad Δ: ergo & ut Γ ad Δ ita H ad Z. ut autem H ad Z ita [per 18. 7.] A ad B: & igitur ut A ad B ita Γ ad Δ. quod erat demonstrandum.

Prop. XX. Theor.

Si tres numeri proportionales fuerint, qui ab extremis fit numerus æqualis erit ei qui fit à medio: si autem qui ab extremis fit æqualis fuerit ei qui à medio, tres numeri proportionales erunt.

Sint tres numeri proportionales A, B, Γ; sitque ut A ad B ita B ad Γ: dico numerum qui fit ex A, Γ æqualem esse ei qui fit ex B.

Ponatur enim ipsi B æqualis Δ: est igitur ut A ad B ita Δ ad Γ: ergo [per 19.7.] qui fit ex A, Γ æqualis est ei qui ex B, Δ. qui autem fit ex B, Δ est æqualis ei qui fit ex B; æqualis etenim est B ipsi Δ: qui igitur fit ex A, Γ ipsi qui fit ex B est æqualis.

A..........
B.......
Δ.......
Γ....

Sed qui fit ex A, Γ æqualis sit ei qui ex B: dico ut A ad B ita esse B ad Γ.

Quoniam enim qui ex A, Γ fit æqualis est ei qui fit ex B; qui autem fit ex B est æqualis ei qui ex B, Δ: erit [per 19. 7.] ut A ad B ita Δ ad Γ. sed B ipsi Δ est æqualis: ut igitur A ad B ita est B ad Γ. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου· ἐὰν δὲ ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ᾖ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου, οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· λέγω ὅτι ὁ ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β.

Κείσθω γὰρ τῷ Β ἴσος ὁ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Δ. ὁ δὲ ἐκ τῶν Β, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β· ἴσος γὰρ ὁ Β τῷ Δ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β.

Ἀλλὰ δὴ ὁ ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἔστω τῷ ἀπὸ τοῦ Β· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ Β ἴσος τῷ ἀπὸ τῶν Β, Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. ἴσος δὲ ὁ Β τῷ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXI. Probl.

Minimi numeri eandem cum ipsis rationem habentium eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, major majorem & minor minorem.

Sint ΓΔ, EZ enim minimi numeri eandem cum A, B rationem habentium: dico ΓΔ æqualiter metiri ipsum A atque EZ ipsum B.

Numerus enim ΓΔ ipsius A non est partes. si enim fieri potest, sit ΓΔ partes ipsius A: ergo [per 20. def. 7.] EZ ipsius B eædem partes erit quæ ΓΔ ipsius A: quot igitur sunt in ΓΔ partes ipsius A tot erunt & in EZ partes ipsius B. dividatur ΓΔ quidem in ipsius A partes ΓH, HΔ; EZ vero dividatur in ipsius B partes EΘ, ΘZ: erit igitur ipsarum ΓH, HΔ multitudo æqualis multitudini ipsarum EΘ, ΘZ. & quoniam ΓH, HΔ æquales inter se sunt: sunt autem & EΘ, ΘZ inter se æquales; atque est ipsarum ΓH, HΔ multitudo multitudini ipsarum EΘ, ΘZ æqualis: erit ut ΓH ad EΘ ita HΔ ad ΘZ: erit igitur [per 12. 7.] ut unus antecedentium ad unum consequentium ita omnes antecedentes ad omnes consequentes: quare ut ΓH ad EΘ ita est ΓΔ ad EZ: ac propterea ΓH, EΘ in eadem sunt ratione in qua ΓΔ, EZ, minores ipsis existentes, quod fieri non potest; ponuntur enim ΓΔ, EZ minimi numeri eandem quam ipsi rationem habentium: non igitur ΓΔ ipsius A partes est: ergo est pars: & EZ ipsius B pars eadem est

A...........
B.......
Γ...H..Δ
E..Θ.Z

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα.

Ἔστωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β οἱ ΓΔ, ΕΖ· λέγω ὅτι ἰσάκις ὁ ΓΔ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ ΕΖ τὸν Β.

Ὁ ΓΔ γὰρ τοῦ Α οὐκ ἐστι μέρη. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ ὁ ΕΖ ἄρα τοῦ Β τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν ἅπερ ὁ ΓΔ τοῦ Α· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΓΔ μέρη τοῦ Α τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ ΕΖ μέρη τοῦ Β. διῃρήσθω ὁ μὲν ΓΔ εἰς τὰ τοῦ Α μέρη τὰ ΓΗ, ΗΔ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τὰ τοῦ Β μέρη τὰ ΕΘ, ΘΖ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΓΗ, ΗΔ τῷ πλήθει τῶν ΕΘ, ΘΖ. καὶ ἐπεὶ οἱ ΓΗ, ΗΔ ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΘ, ΘΖ ἀλλήλοις ἴσοι, καὶ ἔστιν ἴσον πλῆθος τῶν ΓΗ, ΗΔ τῷ πλήθει τῶν ΕΘ, ΘΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν ΕΘ οὕτως ὁ ΗΔ πρὸς τὸν ΘΖ· ἔσται ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν ΕΘ οὕτως ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΕΖ· οἱ ΓΗ, ΕΘ ἄρα τοῖς ΓΔ, ΕΖ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν, ἐλάττονες ὄντες αὐτῶν, ὅπερ ἀδύνατον· ὑπόκεινται γὰρ οἱ ΓΔ, ΕΖ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οὐκ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ ΓΔ τοῦ Α· μέρος ἄρα· καὶ ὁ ΕΖ τοῦ Β αὐτὸ τὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὁ ΓΔ ὁ Γ Δ τοῦ Α· ἰσάκις ἄρα ὁ Γ Δ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Ε Ζ τὸν Β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

quæ Γ Δ ipsius A: æqualiter igitur Γ Δ ipsum A metitur atque E Z ipsum B. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Ἐὰν ὦσι τρεῖς ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία· καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται.

Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ, οἱ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, οἱ Δ, Ε, Ζ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· λέγω ὅτι καὶ δι' ἴσου ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ.

A . . . . . .
B . . . .
Γ . . .

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Ζ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Ε. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Γ, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Ε. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Ζ ἴσος τῷ ἐκ τῶν Β, Ε· καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Ζ ἄρα ἴσος τῷ ἐκ τῶν Γ, Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXII. Theor.

Si sint tres numeri, & alii ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur & in eadem ratione; sit autem perturbata eorum proportio: etiam ex æquo in eadem ratione erunt.

Sint tres numeri A, B, Γ, & alii ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur & in eadem ratione sc. Δ, E, Z; sitque perturbata eorum proportio, ut A quidem ad B ita sit E ad Z, ut autem B ad Γ ita Δ ad E: dico etiam ex æquo ut A ad Γ ita esse Δ ad Z.

Δ . . . .
E . . . .
Z . . . . . .

Quoniam enim est ut A ad B ita E ad Z; qui fit ex A, Z æqualis erit [per 19. 7.] ei qui ex B, E. rursus, quoniam est ut B ad Γ ita Δ ad E; qui fit ex Γ, Δ æqualis erit ei qui ex B, E. ostensum autem est & qui fit ex A, Z æqualem esse ei qui ex B, E: ergo & qui fit ex A, Z æqualis est ei qui fit ex Γ, Δ: igitur [per 19. 7.] ut A ad Γ ita Δ ad Z. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Ἔστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· λέγω ὅτι οἱ Α, Β ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Α, Β ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, ἔσονταί τινες τῶν Α, Β ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β. ἔστωσαν οἱ Γ, Δ.

Ἐπεὶ οὖν οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα, τουτέστιν ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ἰσάκις ἄρα ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν Β. ὁσάκις δὴ ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε· καὶ ὁ Δ ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν Α, Β ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β· οἱ Α, Β ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXIII. Theor.

Numeri primi inter se minimi sunt omnium eandem cum ipsis rationem habentium.

Sint numeri A, B primi inter se: dico eos minimos esse omnium eandem cum ipsis rationem habentium.

Si enim A, B non sint minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium, erunt minimi numeri omnium eandem cum A, B rationem habentium, minores quam A, B. sint Γ, Δ.

A . . . . .   B . . . .
Γ -----   Δ ----
E ----

Quoniam igitur [per 21. 7.] minimi numeri eandem cum ipsis rationem habentium, eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, major majorem & minor minorem, hoc est antecedens antecedentem & consequens consequentem; numerus Γ ipsum A æqualiter metietur atque Δ ipsum B. quoties autem Γ metitur ipsum A tot unitates sint in E: ergo & Δ ipsum B metitur per unitates quæ sunt in E. & quoniam Γ metitur ipsum A per unitates quæ sunt in E, numerus E ipsum A per unitates quæ sunt in Γ metietur. & eadem ratione E metietur B per unitates quæ sunt in Δ: ergo E ipsos A, B metitur, primos inter se existentes, quod fieri non potest: non igitur erunt aliqui numeri minores ipsis A, B, eandem habentes rationem cum ipsis A, B: ergo A, B minimi sunt omnium eandem cum ipsis rationem habentium. quod erat demonstrandum.

Prop. XXIV. Theor.

Minimi numeri eorum qui eandem cum ipsis rationem habent, primi inter se sunt.

Sint A, B minimi numeri eorum qui eandem cum ipsis rationem habent: dico A, B primos inter se esse.

A . . . . . .
B . . . . .
Γ ------
Δ -----
E ---

Si enim non sunt A, B inter se primi, eos aliquis numerus metietur. metiatur, sitque Γ. & quoties Γ ipsum quidem A metitur tot unitates sint in Δ; quoties vero Γ metitur ipsum B tot unitates sint in E.

Et quoniam Γ ipsum A metitur per unitates quæ sunt in Δ; Γ multiplicans ipsum Δ fecit A. eadem ratione & Γ multiplicans E ipsum B fecit: itaque cum numerus Γ duos numeros Δ, E multiplicans fecerit A, B, erit [per 17. 7.] ut Δ ad E ita A ad B: ergo Δ, E in eadem sunt ratione in qua A, B, minores ipsis existentes, quod [ex hyp.] fieri non potest: non igitur A, B numeros numerus aliquis metietur; ac propterea A, B primi inter se sunt. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδʹ.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Ἔστωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ Α, Β· λέγω ὅτι οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μή εἰσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Γ. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Δ, ὁσάκις δὲ ὁ Γ τὸν Β μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε.

Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Γ ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ἀριθμὸς δὴ ὁ Γ δύο ἀριθμοὺς τοὺς Δ, Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Α, Β πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· οἱ Δ, Ε ἄρα τοῖς Α, Β ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν, ἐλάσσονες ὄντες αὐτῶν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ Α, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXV. Theor.

Si duo numeri primi inter se fuerint, qui unum ipsorum metitur numerus ad reliquum primus erit.

Sint duo numeri primi inter se A, B, & aliquis numerus Γ ipsum A metiatur: dico & B, Γ inter se primos esse.

A . . . . . .
B . . . . .
Γ . . .
Δ —

Si enim B, Γ non sint inter se primi, metietur eos aliquis numerus. metiatur, sitque Δ. & quoniam Δ ipsum Γ metitur, & Γ ipsum A; & Δ ipsum A metietur. metitur autem & ipsum B: ergo Δ numeros A, B metitur primos inter se existentes, quod [per 12. def. 7.] fieri non potest: non igitur numeros Γ, B numerus aliquis metietur; ideoque Γ, B inter se primi sunt. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κεʹ.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ τὸν ἕνα αὐτῶν μετρῶν ἀριθμὸς πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, τὸν δὲ Α μετρείτω τις ἀριθμὸς ὁ Γ· λέγω ὅτι καὶ οἱ Β, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Β, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ, ὁ δὲ Γ τὸν Α μετρεῖ· καὶ ὁ Δ ἄρα τὸν Α μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Β· ὁ Δ ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ Γ, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXVI. Theor.

Si duo numeri ad aliquem numerum primi fuerint, & qui fit ex ipsis ad eum primus erit.

Duo enim numeri A, B ad aliquem numerum Γ primi sint, & A ipsum B multiplicans faciat Δ: dico Γ, Δ inter se primos esse.

Si enim Γ, Δ non sint inter se primi, metietur eos aliquis numerus. metiatur, sitque E. & quoniam Γ, A primi inter se sunt, & ipsum

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛʹ.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτοι ὦσιν, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν αὐτὸν πρῶτος ἔσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρός τινα ἀριθμὸν τὸν Γ ἔστωσαν πρῶτοι, καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· λέγω ὅτι οἱ Γ, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Γ, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Ε. καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, Α πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί, τὸν δὲ

Γ με-

Γ μετρεῖ τις ἀριθμὸς ὁ Ε· οἱ Ε, Α ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὁσάκις δὲ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ζ· καὶ ὁ Ζ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Ε, Ζ τῷ ἐκ τῶν Α, Β. ἐὰν δὲ ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον εἰσίν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ζ. οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ὁ Ε ἄρα τὸν Β μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Β, Γ μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς Γ, Δ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ Γ, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

A . . B . . .
Γ . . . . .
Δ . . . .
E ——
Z —

Γ metitur aliquis numerus E; erunt [per 25.7.] E, A inter se primi. quoties autem E ipsum Δ metitur tot unitates sint in Z: quare & Z metitur ipsum Δ per unitates quæ sunt in E: ergo E ipsum Z multiplicans fecit Δ. sed & A multiplicans B ipsum Δ fecit: qui igitur fit ex E, Z est æqualis ei qui ex A, B. si vero qui fit ex extremis æqualis fuerit ei qui ex mediis, [per 19.7.] quatuor numeri proportionales erunt: est igitur ut E ad A ita B ad Z. sunt autem A, E inter se primi, & qui primi etiam [per 23.7.] minimi sunt; minimi vero eandem cum ipsis rationem habentium eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, [per 21.7.] major majorem, minor minorem, hoc est antecedens antecedentem & consequens consequentem: ergo E ipsum B metitur. metitur autem & ipsum Γ: quare E ipsos B, Γ metitur, primos inter se existentes: quod fieri non potest. non igitur Γ, Δ numeros numerus aliquis metietur; ac propterea Γ, Δ inter se primi sunt. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ΄.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ ἐκ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι οἱ Β, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί.

Κείσθω γὰρ τῷ Α ἴσος ὁ Δ. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ἴσος δὲ ὁ Α τῷ Δ· καὶ οἱ Δ, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ἑκάτερος ἄρα τῶν Α, Δ πρὸς τὸν Β πρῶτός ἐστι· καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Δ ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν Β πρῶτος ἔσται. ὁ δὲ ἐκ τῶν Α, Δ γενόμενος ἀριθμός ἐστιν ὁ Γ· οἱ Γ, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXVII. THEOR.

Si duo numeri primi inter se fuerint, qui fit ab uno ipsorum ad reliquum primus erit.

Sint duo numeri inter se primi A, B, & A seipsum multiplicans faciat Γ: dico B, Γ inter se primos esse.

A . . B . . .
Γ . . . .
Δ . .

Ponatur enim ipsi A æqualis Δ. & quoniam A, B sunt primi inter se, æqualis autem A ipsi Δ; & Δ, B inter se primi erunt: uterque igitur ipsorum A, Δ ad B primus est: ergo & qui ex A, Δ fit [per 26.7.] primus erit ad B. sed qui fit ex A, Δ est numerus Γ: quare Γ, B inter se primi sunt. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη΄.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς δύο ἀριθμοὺς, ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον, πρῶτοι ὦσι· καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν γενόμενοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρὸς δύο ἀριθμοὺς τοὺς Γ, Δ, ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον, πρῶτοι ἔστωσαν, καὶ ὁ μὲν Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· λέγω ὅτι οἱ Ε, Ζ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Ἐπεὶ γὰρ ἑκάτερος τῶν Α, Β πρὸς τὸν Γ πρῶτός ἐστι, καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Β ἄρα γενόμενος πρῶτός ἐστι πρὸς τὸν Γ. ὁ δὲ ἐκ τῶν Α, Β γενόμενός ἐστιν ὁ Ε· οἱ Ε, Γ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ Ε, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλή-

A . . . B . . . . .
E . . . .
Γ . . Δ . . . .
Z . . . .

PROP. XXVIII. THEOR.

Si duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrumque, primi fuerint; & qui fiunt ex ipsis inter se primi erunt.

Duo enim numeri A, B ad duos numeros Γ, Δ, uterque ad utrumque, primi sint; & A quidem ipsum B multiplicans faciat E; Γ vero multiplicans Δ faciat Z: dico E, Z inter se primos esse.

Quoniam enim uterque ipsorum A, B ad Γ primus est, & qui fit ex A, B [per 26.7.] ad Γ primus erit. qui autem fit ex A, B est E: ergo E, Γ primi inter se sunt. eadem ratione & E, Δ primi sunt inter

inter se: uterque igitur ipsorum Γ, Δ ad E primus est: ac propterea [per 26. 7.] qui fit ex Γ, Δ primus erit ad E. qui vero ex Γ, Δ fit est numerus Z: ergo E, Z primi inter se erunt. quod erat demonstrandum.

λους εἰσίν· ἑκάτερος ἄρα τῶν Γ, Δ πρὸς τὸν Ε πρῶτός ἐστι· καὶ ὁ ἐκ τῶν Γ, Δ ἄρα γινόμενος πρὸς τὸν Ε πρῶτος ἔσται. ὁ δὲ ἐκ τῶν Γ, Δ γινόμενος ἐστὶν ὁ Ζ· οἱ Ε, Ζ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXIX. Theor.

Si duo numeri primi inter se fuerint, & uterque seipsum multiplicans faciat aliquos; facti ex ipsis primi inter se erunt: & si numeri à principio positi eos qui facti sunt multiplicantes aliquos faciant; & ipsi inter se primi erunt: & semper circa extremos hoc continget.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ πολλαπλασιάσας ἑκάτερος ἑαυτὸν ποιῇ τινα, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται· κἂν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γενομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, κἀκεῖνοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται· καὶ ἀεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει.

Sint duo numeri inter se primi A, B, & A seipsum quidem multiplicans faciat Γ, multiplicans vero Γ faciat E; & B seipsum multiplicans faciat Δ, multiplicans autem Δ faciat ipsum Z: dico Γ, Δ & E, Z inter se primos esse.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω, τὸν δὲ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· λέγω ὅτι οἵ τε Γ, Δ καὶ οἱ Ε, Ζ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Quoniam enim A, B primi inter se sunt; & A seipsum multiplicans fecit Γ; erunt [per 27. 7.] Γ, B primi inter se. & quoniam Γ, B inter se primi sunt, & B seipsum multiplicans fecit Δ; erunt Γ, Δ inter se primi. Rursus quoniam A, B primi sunt inter se, & B seipsum multiplicans fecit Δ; A, Δ inter se primi erunt: cum igitur duo numeri A, Γ ad duos numeros B, Δ uterque ad utrumque primi sint; & qui ex A, Γ fit ad eum qui fit ex B, Δ [per 28. 7.] primus erit. sed qui fit ex A, Γ est numerus E, qui vero ex B, Δ fit est Z: ergo E, Z primi inter se sunt. quod erat demonstrandum.

A . . B . . .
Γ . . . . Δ . . . .
E . . . . Z . . . .

Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· οἱ Γ, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. ἐπεὶ ἄρα οἱ Γ, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί, καὶ ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, οἱ Γ, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Πάλιν, ἐπεὶ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί, καὶ ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· οἱ Α, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ἐπεὶ οὖν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Γ πρὸς δύο ἀριθμοὺς τοὺς Β, Δ ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον πρῶτοί εἰσι· καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Γ ἄρα γινόμενος πρὸς τὸν ἐκ τῶν Β, Δ πρῶτός ἐστι. καί ἐστιν ὁ μὲν ἐκ τῶν Α, Γ ὁ Ε, ὁ δὲ ἐκ τῶν Β, Δ ὁ Ζ· οἱ Ε, Ζ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXX. Theor.

Si duo numeri primi inter se fuerint, & uterque simul ad utrumque ipsorum primus erit: quod si uterque simul ad unum aliquem ipsorum sit primus, & numeri à principio positi inter se primi erunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ συναμφότερος πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν πρῶτος ἔσται· καὶ ἐὰν συναμφότερος πρὸς ἕνα τινὰ αὐτῶν πρῶτος ᾖ, καὶ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Componantur enim duo numeri inter se primi, AB, BΓ: dico & utrumque simul, videlicet AΓ, ad utrumque ipsorum AB, BΓ primum esse.

Si enim non sint ΓA, AB inter se primi, metietur eos numerus aliquis. metiatur, & sit Δ. quoniam igitur Δ metitur ipsos ΓA, AB; & reliquum BΓ metietur. metitur autem & BA: ergo Δ ipsos AB, BΓ metitur, primos inter se existentes; quod fieri non potest: non igitur

A . . . . . B . . . . Γ
Δ ——

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ συναμφότερος ὁ ΑΓ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΒΓ πρῶτός ἐστιν.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ ΓΑ, ΑΒ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τοὺς ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΒΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΒΑ· ὁ Δ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς ΓΑ, ΓΑ, ΑΒ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ ΑΒ, ΑΓ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὁ ΓΑ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΒΓ πρῶτός ἐστι.

ΕΣΤΩΣΑΝ δὴ πάλιν οἱ ΓΑ, ΑΒ πρὸς ἀλλήλους πρῶτοι· λέγω ὅτι καὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μή εἰσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ ΑΒ, ΒΓ, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ· καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΓΑ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΑΒ· ὁ Δ ἄρα τοὺς ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΒΓ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ ΑΒ, ΒΓ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΓΑ, ΑΒ numeros numerus aliquis metietur; ac propterea ΑΒ, ΑΓ inter se primi sunt: ergo ΓΑ ad utrumque ipsorum ΑΒ, Β,Γ est primus.

SINT rursus ΓΑ, ΑΒ primi inter se: dico & ipsos ΑΒ, ΒΓ inter se primos esse.

Si enim ΑΒ, ΒΓ non sint inter se primi, metietur eos aliquis numerus. metiatur, sitque Δ. & quoniam Δ metitur utrumque ipsorum ΑΒ, ΒΓ, & totum ΓΑ metietur. metitur autem & ΑΒ: ergo Δ ipsos ΓΑ, ΑΒ metitur, primos inter se existentes, quod fieri non potest: non igitur ipsos ΑΒ, ΒΓ numeros numerus aliquis metietur, ideoque ΑΒ, ΒΓ inter se primi sunt. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

Ἅπας πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν, ὃν μὴ μετρεῖ, πρῶτός ἐστι.

ΕΣΤΩ πρῶτος ἀριθμὸς ὁ Α, καὶ τὸν Β μὴ μετρείτω· λέγω ὅτι οἱ Β, Α πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Β, Α πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Γ· ὁ Γ ἄρα οὐκ ἔστι μονάς. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Β μετρεῖ, ὁ δὲ Α τὸν Β οὐ μετρεῖ· ὁ Γ ἄρα τῷ Α οὐκ ἔστιν ὁ αὐτός. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τοὺς Β, Α μετρεῖ· καὶ τὸν Α ἄρα μετρεῖ πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς Β, Α μετρήσει τις ἀριθμός· οἱ Α, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXXI. THEOR.

Omnis primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus est.

SIT primus numerus Α, & numerum Β non metiatur: dico Β, Α inter se primos esse.

Α . . . . .   Β . . . . . .
Γ . . .

Si enim non sint Β, Α inter se primi, metietur eos aliquis numerus. metiatur, & sit Γ: ergo [per 11. def. 7.] Γ non est unitas. & quoniam Γ ipsum Β metitur, Α vero non metitur ipsum Β; non erit Γ idem qui Α. & quoniam Γ ipsos Β, Α metitur, & metietur ipsum Α primum existentem, licet non sit idem cum eo, quod fieri non potest: non igitur ipsos Β, Α numeros numerus aliquis metietur: quare Α, Β inter se primi sunt. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, τὸν δὲ γενόμενον ἐξ αὐτῶν μετρῇ τις πρῶτος ἀριθμός· καὶ ἕνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει.

ΔΥΟ γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πολλαπλασιάσαντες τὸν Γ ποιείτωσαν, τὸν δὲ Γ μετρείτω τις πρῶτος ἀριθμὸς ὁ Δ· λέγω ὅτι ὁ Δ ἕνα τῶν Α, Β μετρεῖ.

Τὸν γὰρ Α μὴ μετρείτω, καί ἐστι πρῶτος ὁ Δ· οἱ Α, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. καὶ ὁσάκις ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε. ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας, ὁ Δ ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ, Ε τῷ ἐκ τῶν Α, Β· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε. οἱ δὲ Δ, Α πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ὁ Δ ἄρα τὸν Β

PROP. XXXII. THEOR.

Si duo numeri sese multiplicantes aliquem faciant; eum vero, qui ex ipsis fit, metiatur aliquis numerus primus: & unum ipsorum, qui à principio positi sunt, metietur.

DUO enim numeri Α, Β se invicem multiplicantes faciant Γ, ipsum vero Γ metiatur aliquis numerus primus, qui sit Δ: dico Δ unum ipsorum Α, Β metiri.

Α . .   Β . . . . . .
Γ . . . .
Δ . . .
Ε . . . .

Ipsum enim Α non metiatur, atque est Δ numerus primus: ergo [per 31. 7.] Α, Δ primi inter se sunt. & quoties Δ ipsum Γ metitur, tot unitates sint in Ε. quoniam igitur Δ metitur ipsum Γ per eas quæ sunt in Ε unitates; numerus Δ ipsum Ε multiplicans fecit Γ. sed & Α multiplicans Β ipsum Γ fecit: ergo qui fit ex Δ, Ε æqualis est ei qui ex Α, Β: est igitur [per 19. 7.] ut Δ ad Α ita Β ad Ε. & sunt Δ, Α primi inter se; primi vero [per 23. 7.] sunt & minimi, sed [per 21. 7.] minimi eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, major majorem & minor minorem, hoc est antecedens antecedentem & consequens consequentem; ergo Δ ipsum Β metitur

tur. Similiter demonstrabimus si Δ non metiatur B, metiri ipsum A: quare Δ metitur unum ipsorum A, B. quod erat demonstrandum.

μετρεῖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἐὰν ὁ Δ τὸν B μὴ μετρῇ, τὸν A μετρήσει· ὁ Δ ἄρα ἕνα τῶν A, B μετρεῖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXIII. Theor.

Omnem numerum compositum primus aliquis numerus metitur.

SIT compositus numerus A: dico primum aliquem numerum metiri ipsum A.

Quoniam enim A est compositus numerus, [per 13. def. 7.] metietur ipsum aliquis numerus. metiatur, & sit B. & si quidem primus est B, manifestum est quod quæritur. si vero compositus, ipsum aliquis numerus metietur. metiatur, sitque Γ. & quoniam Γ metitur ipsum B, B vero ipsum A; & Γ ipsum A metitur. & si quidem primus est Γ, manifestum est quod quæritur. si vero compositus, eum aliquis numerus metitur, & hac consideratione facta relinquetur tandem aliquis numerus primus, & qui ipsum A metietur. si enim non relinquitur, metientur ipsum A infiniti numeri, quorum alter altero est minor, quod [per 2. def. 7.] in numeris fieri non potest; ergo relinquetur aliquis qui & præcedentem metietur & ipsum A.

A ....
B ....
Γ ..

Omnem igitur numerum compositum primus aliquis numerus metitur. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ′.

Ἅπας σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Ἔστω σύνθετος ἀριθμὸς ὁ A· λέγω ὅτι ὁ A ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Ἐπεὶ γὰρ σύνθετός ἐστιν ὁ A, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ B. καὶ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ B, δῆλον ἂν εἴη τὸ ζητούμενον. εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Γ. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν B μετρεῖ, ὁ δὲ B τὸν A μετρεῖ· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν A μετρεῖ. καὶ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ Γ, δῆλον ἂν εἴη τὸ ζητούμενον. εἰ δὲ σύνθετος μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός, τοιαύτης δὴ γινομένης ἐπισκέψεως ληφθήσεταί τις πρῶτος ἀριθμός, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ὃς καὶ τὸν A μετρήσει. εἰ γὰρ οὐ ληφθήσεται, μετρήσουσι τὸν A ἀριθμὸν ἄπειροι ἀριθμοί, ὧν ὁ ἕτερος τοῦ ἑτέρου ἐλάσσων ἐστίν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον ἐν ἀριθμοῖς· ληφθήσεταί τις ἄρα, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ὃς καὶ τὸν A μετρήσει.

Ἅπας ἄρα σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Aliter.

SIT compositus numerus A: dico primum aliquem numerum ipsum metiri.

Quoniam enim A compositus est [per 13. def. 7.] metietur ipsum aliquis numerus. sit B minimus eorum, qui ipsum A metiuntur: dico B primum esse.

Si enim non; erit compositus: ergo eum aliquis numerus metietur. metiatur, sitque Γ metiens ipsum: erit igitur Γ minor quam B. & quoniam Γ ipsum B metitur, sed & B ipsum A; & Γ ipsum A metietur, minor existens ipso B, qui est minimus omnium qui metiuntur A, quod est absurdum: igitur B non est compositus numerus: ergo est primus. quod erat demonstrandum.

A ....
B ...
Γ --

ΑΛΛΩΣ.

ΕΣΤΩ σύνθετος ἀριθμὸς ὁ A· λέγω ὅτι ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Ἐπεὶ γὰρ σύνθετός ἐστιν ὁ A, μετρηθήσεται ὑπὸ ἀριθμοῦ. καὶ ἔστω ἐλάχιστος τῶν μετρούντων αὐτὸν ὁ B· λέγω ὅτι ὁ B πρῶτός ἐστιν.

Εἰ γὰρ μή, σύνθετός ἐστι· μετρηθήσεται ἄρα ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος. μετρείσθω, καὶ ἔστω ὁ Γ ὁ μετρῶν αὐτόν· ὁ Γ ἄρα τοῦ B ἐλάσσων ἐστί. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν B μετρεῖ, ἀλλὰ καὶ ὁ B τὸν A μετρεῖ· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν A μετρεῖ, ἐλάσσων ὢν τοῦ B, ἐλαχίστου ὄντος τῶν μετρούντων A, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ B σύνθετος ἀριθμός ἐστι· πρῶτος ἄρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι

Prop. XXXIV. Theor.

Omnis numerus vel primus est, vel eum primus aliquis numerus metitur.

SIT numerus A: dico A vel primum esse, vel primum aliquem numerum ipsum A metiri.

Si quidem igitur primus est, manifestum est quod quæritur. si vero compositus, [per 33. 7.] ipsum aliquis primus numerus metietur.

Omnis igitur numerus vel primus est, vel eum primus aliquis numerus metitur. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ′.

Ἅπας ἀριθμὸς ἤτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Ἔστω ἀριθμὸς ὁ A· λέγω ὅτι ὁ A ἤτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Εἰ μὲν οὖν πρῶτός ἐστιν ὁ A, δῆλον ἂν εἴη τὸ ζητούμενον. εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν πρῶτος ἀριθμός.

Ἅπας ἄρα ἀριθμὸς ἤτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε΄.

Ἀριθμῶν δοθέντων ὁποσωνοῦν, εὑρεῖν τοὺς ἐλαχίστους τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ, οἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ εὑρεῖν τοὺς ἐλαχίστους τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, Γ.

Οἱ Α, Β, Γ γὰρ ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὔ. εἰ μὲν οὖν οἱ Α, Β, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Εἰ δὲ οὔ. εἰλήφθω τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ, καὶ ὁσάκις ὁ Δ ἕκαστον τῶν Α, Β, Γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν ἑκάστῳ τῶν Ε, Ζ, Η· καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν Ε, Ζ, Η ἕκαστον τῶν Α, Β, Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα τοὺς Α, Β, Γ ἰσάκις μετροῦσιν· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα τοῖς Α, Β, Γ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Ε, Ζ, Η ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς τοῖς Α, Β, Γ, ἔσονταί τινες τῶν Ε, Ζ, Η ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β, Γ. ἔστωσαν οἱ Θ, Κ, Λ· ἰσάκις ἄρα ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ καὶ ἑκάτερος τῶν Κ, Λ ἑκάτερον τῶν Β, Γ. ὁσάκις δὲ ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Μ· καὶ ἑκάτερος ἄρα τῶν Κ, Λ ἑκάτερον τῶν Β, Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Μ μονάδας. καὶ ἐπεὶ ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Μ μονάδας· καὶ ὁ Μ ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Θ μονάδας. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Μ ἑκάτερον τῶν Β, Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν ἑκατέρῳ τῶν Κ, Λ μονάδας· ὁ Μ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ. καὶ ἐπεὶ ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Μ μονάδας· ὁ Θ ἄρα τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Ε, Δ τῷ ἐκ τῶν Θ, Μ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Δ. μείζων δὲ ὁ Ε τοῦ Θ· μείζων ἄρα καὶ ὁ Μ τοῦ Δ, καὶ μετρεῖ τοὺς Α, Β, Γ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, ὑπόκειται γὰρ ὁ Δ τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον· οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν Ε, Ζ, Η ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β, Γ· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, Γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXV. Probl.

Numeris quotcunque datis, invenire minimos omnium qui eandem cum ipsis rationem habeant.

Sint dati quotcunque numeri A, B, Γ: oportet invenire minimos omnium qui eandem cum ipsis A, B, Γ rationem habeant.

Vel igitur A, B, Γ primi inter se sunt, vel non. si quidem primi, & minimi erunt [per 23. 7.] omnium eandem cum ipsis rationem habentium.

Si vero non. sumatur [per 3. 7.] ipsorum A, B, Γ maxima communis mensura Δ, & quoties Δ unumquemque ipsorum A, B, Γ metitur, tot unitates sint in unoquoque horum E, Z, H: & unusquisque igitur ipsorum E, Z, H unumquemq; ipsorum A, B, Γ metitur per eas quæ sunt in Δ unitates: ergo E, Z, H ipsos A, B, Γ æqualiter metiuntur, ac propterea [per 18. 7.] E, Z, H in eadem sunt ratione in qua ipsi A, B, Γ. dico eos etiam minimos esse. si enim E, Z, H non sint minimi eandem cum ipsis A, B, Γ rationem habentium, erunt aliqui ipsis E, Z, H minores in eadem ratione in qua A, B, Γ. sint Θ, K, Λ: æqualiter igitur [per 21. 7.] Θ metitur ipsum A ac uterque ipsorum K, Λ utrumque B, Γ metitur. quoties autem Θ metitur ipsum A, tot unitates sint in M: & uterque igitur K, Λ utrumque B, Γ metitur per eas quæ sunt in M unitates. & quoniam Θ ipsum A metitur per unitates quæ sunt in M; & M ipsum A per unitates quæ sunt in Θ metietur. eadem ratione & M utrumque ipsorum B, Γ metietur per unitates quæ sunt in utroque K, Λ: ergo M ipsos A, B, Γ metitur. rursus, quoniam Θ ipsum A metitur per unitates quæ sunt in M; Θ ipsum M multiplicans fecit A eadem ratione & E multiplicans Δ ipsum A fecit: ergo qui ex E, Δ fit ei qui fit ex Θ, M est æqualis: ut igitur E ad Θ ita [per 19. 7.] M ad Δ. major autem est E quam Θ: ergo & M quam Δ est major, & ipsos A, B, Γ metitur, quod fieri non potest; ponitur enim Δ ipsorum A, B, Γ maxima communis mensura: non igitur erunt aliqui numeri minores ipsis E, Z, H in eadem ratione in qua A, B, Γ: ergo E, Z, H minimi sunt eorum qui eandem cum ipsis A, B, Γ rationem habent. quod erat demonstrandum.

A . . . . . .   B . . . .   Γ . . . .
                        Δ . .
E . . .   Z . . . .   H . . . . .
Θ —   K ——   Λ ——
                        M —

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ΄.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων, εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ, οἱ Α, Β· δεῖ δὴ εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.

Οἱ Α, Β γὰρ ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὔ. ἔστωσαν πρότερον οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· καὶ ὁ Β ἄρα

Prop. XXXVI. Probl.

Duobus numeris datis, invenire minimum numerum quem metiantur.

Sint dati duo numeri A, B: oportet invenire minimum numerum quem metiantur.

Numeri enim A, B vel primi inter se sunt, vel non. sint primum A, B inter se primi, & A ipsum B multiplicans faciat Γ; ergo [per 16. 7.]

7.] & B multiplicans A ipsum Γ fecit; ac propterea numeri A, B ipsum Γ metiuntur. dico etiam Γ minimum esse. si enim non ita sit, metientur A, B numerum aliquem minorem quam Γ. metiantur ipsum Δ. & quoties A ipsum Δ metitur tot unitates sint in E, quoties autem B metitur Δ tot unitates sint in Z: ergo A quidem ipsum E multiplicans fecit Δ; B vero multiplicans Z ipsum Δ fecit: quare numerus qui ex A, E fit est æqualis ei qui fit ex B, Z: ut igitur A ad B ita est [per 19. 7.] Z ad E. & sunt A, B primi, primi autem [per 23. 7.] & minimi: sed [per 21. 7.] minimi eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, major majorem & minor minorem: ergo B ipsum E metitur, consequens consequentem. & quoniam A numeros B, E multiplicans fecit Γ, Δ, erit [per 18. 7.] ut B ad E ita Γ ad Δ. metitur autem B ipsum E: ergo & Γ ipsum Δ metitur, major minorem, quod fieri non potest: non igitur A, B metiuntur aliquem numerum minorem ipso Γ, quando A, B primi inter se fuerint: ergo numerus Γ est minimus quem A, B metiantur.

A . . .   B . . . .
Γ . . . .
Δ ————————
E ---   Z ——

Sed non sint A, B primi inter se; & sumantur [per 35. 7.] minimi numeri eandem quam A, B rationem habentium, qui sint Z, E: æqualis igitur est [per 19. 7.] qui ex A, E fit ei qui ex B, Z. & A ipsum E multiplicans faciat Γ: ergo & B multiplicans Z ipsum Γ fecit: quare A, B ipsum Γ metiuntur. dico & minimum esse. nisi enim ita sit, metientur A, B aliquem numerum minorem quam Γ. metiantur ipsum Δ. & quoties A ipsum Δ metitur tot unitates sint in H, quoties autem B metitur Δ tot unitates sint in Θ: ergo A quidem ipsum H multiplicans fecit Δ, B vero multiplicans Θ ipsum Δ fecit: qui igitur ex A, H fit est æqualis ei qui fit ex B, Θ: ut igitur A ad B ita [per 19. 7.] Θ ad H. sed ut A ad B ita Z ad E: ergo & ut Z ad E ita Θ ad H. & [per constr.] sunt Z, E minimi; minimi vero eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, [per 21. 7.] major majorem & minor minorem: quare E ipsum H metitur. & quoniam A numeros E, H multiplicans ipsos Γ, Δ fecit, ut E ad H ita erit [per 17. 7.] Γ ad Δ. sed E metitur ipsum H: ergo [per 20. def. 7.] & Γ ipsum Δ metitur, major minorem, quod fieri non potest: non igitur metiuntur A, B aliquem numerum minorem quam Γ: ergo Γ est minimus quem A, B metiantur. quod erat demonstrandum.

A . . . .   B . . . . . .
Z . .   E . . .
Γ . . . .
Δ ————————
H —   Θ —

τὸν A πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· οἱ A, B ἄρα τὸν Γ μετροῦσι. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστον. εἰ γὰρ μή, μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν οἱ A, B ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ. μετρείτωσαν τὸν Δ. καὶ ὁσάκις ὁ A τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ E. ὁσάκις δὲ ὁ B τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Z· ὁ μὲν A ἄρα τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ δὲ B τὸν Z πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν A, E τῷ ἐκ τῶν B, Z· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν E. οἱ δὲ A, B πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα· ὁ B ἄρα τὸν E μετρεῖ, ὡς ἑπόμενος ἑπόμενον. καὶ ἐπεὶ ὁ A τοὺς B, E πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ B πρὸς τὸν E οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· μετρεῖ δὲ ὁ B τὸν E· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ A, B μετροῦσί τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ, ὅταν οἱ A, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν· ὁ Γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν A, B μετρεῖται.

Μὴ ἔστωσαν δὴ οἱ A, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς A, B, οἱ Z, E· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν A, E τῷ ἐκ τῶν B, Z. καὶ ὁ A τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· καὶ ὁ B ἄρα τὸν Z πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· οἱ A, B ἄρα τὸν Γ μετροῦσι. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστον. εἰ γὰρ μή, μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν οἱ A, B, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ. μετρείτωσαν τὸν Δ. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ A τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ H, ὁσάκις δὲ ὁ B τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Θ· ὁ μὲν A ἄρα τὸν H πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ δὲ B τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν A, H τῷ ἐκ τῶν B, Θ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν H. ὡς δὲ ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν E· καὶ ὡς ἄρα ὁ Z πρὸς τὸν E οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν H. οἱ δὲ Z, E ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα· ὁ E ἄρα τὸν H μετρεῖ. καὶ ἐπεὶ ὁ A τοὺς E, H πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ E πρὸς τὸν H οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ὁ δὲ E τὸν H μετρεῖ· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ A, B μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα τοῦ Γ· ὁ Γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν A, B μετρεῖται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXVII. Theor.

Si duo numeri metiantur numerum aliquem, & minimus quem illi metiuntur eundem metietur.

DUO enim numeri A, B numerum aliquem ΓΔ metiantur, minimum autem ipsum E: dico & E ipsum ΓΔ metiri.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα μετρῶσι, καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπ' αὐτῶν μετρούμενος τὸν αὐτὸν μετρήσει.

ΔΥΟ γὰρ ἀριθμοὶ οἱ A, B ἀριθμόν τινα τὸν ΓΔ μετρείτωσαν, ἐλάχιστον δὲ τὸν E· λέγω ὅτι καὶ ὁ E τὸν ΓΔ μετρεῖ.

Εἰ

Εἰ γὰρ οὐ μετρεῖ ὁ Ε τὸν ΓΔ, ὁ Ε τὸν ΖΔ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΓΖ. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β τὸν Ε μετροῦσιν, ὁ δὲ Ε τὸν ΔΖ μετρεῖ· καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν ΔΖ μετρήσουσι. μετροῦσι δὲ καὶ ὅλον τὸν ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓΖ μετρήσουσιν, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Ε, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οὐ μετρεῖ ὁ Ε τὸν ΓΔ, μετρεῖ ἄρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

A . .   B . . .
Γ . . . . . . Z ——— Δ
E . . . . . .

Si enim E non metitur ΓΔ, E metiens ZΔ relinquat seipso minorem ΓZ. & quoniam A, B ipsum E metiuntur, E vero ipsum ΔZ, & A, B metientur ΔZ. sed & metiuntur totum ΓΔ: ergo & reliquum ΓZ minorem ipso E metientur, quod [ex hyp.] fieri non potest: non igitur E non metitur ipsum ΓΔ, metitur igitur. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη'.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.

Εἰλήφθω γὰρ ὑπὸ δύο τῶν Α, Β ἐλάχιστος μετρούμενος ὁ Δ. ὁ δὴ Γ τὸν Δ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον. μετροῦσι δὲ καὶ οἱ Α, Β τὸν Δ· οἱ ἄρα Α, Β, Γ τὸν Δ μετροῦσι. λέγω ὅτι καὶ ἐλάχιστον. εἰ γὰρ μή, μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν οἱ Α, Β, Γ, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Δ. μετρείτωσαν τὸν Ε. ἐπεὶ οὖν οἱ Α, Β, Γ τὸν Ε μετροῦσι, καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν Ε μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β μετρούμενος τὸν Ε μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Α, Β μετρούμενός ἐστιν ὁ Δ· ὁ Δ ἄρα τὸν Ε μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Α, Β, Γ μετροῦσί τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Δ· οἱ Α, Β, Γ ἄρα ἐλάχιστον τὸν Δ μετροῦσι.

A . .   B . . . .   Γ . . . . . .
Δ . . . .
E ———————

Μὴ μετρείτω δὴ πάλιν ὁ Γ τὸν Δ, καὶ εἰλήφθω ὑπὸ τῶν Γ, Δ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμός, ὁ Ε. ἐπεὶ οὖν οἱ Α, Β τὸν Δ μετροῦσιν, ὁ δὲ Δ τὸν Ε μετρεῖ· καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν Ε μετροῦσι. μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Γ τὸν Ε· καὶ οἱ Α, Β, Γ ἄρα τὸν Ε μετροῦσι. λέγω ὅτι καὶ ἐλάχιστον. εἰ γὰρ μή, μετρήσουσί τινα οἱ Α, Β, Γ, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Ε. μετρείτωσαν τὸν Ζ. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β, Γ τὸν Ζ μετροῦσι· καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν Ζ μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β μετρούμενος τὸν Ζ μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Α, Β μετρούμενός ἐστιν ὁ Δ· ὁ Δ ἄρα τὸν Ζ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Γ τὸν Ζ· οἱ Δ, Γ ἄρα τὸν Ζ μετροῦσιν· ὥστε καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν Δ, Γ μετρούμενος μετρήσει τὸν Ζ. ὁ δὲ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν Δ, Γ μετρούμενός ἐστιν ὁ Ε· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Α, Β, Γ μετροῦσί τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Ε· ὁ Ε ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ μετρεῖται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

A . .   B . . .   Γ . . . .
Δ . . . . . .
E . . . .
Z ———————

Prop. XXXVIII. Probl.

Tribus numeris datis, invenire minimum numerum quem metiantur.

Sint dati numeri A, B, Γ: oportet invenire minimum numerum quem metiantur.

Sumatur enim [per 36. 7.] numerus Δ minimus quem duo A, B metiuntur. itaque Γ vel metitur Δ, vel non metitur. metiatur primum. sed & A, B metiuntur ipsum Δ: ergo A, B, Γ ipsum Δ metientur. dico illum esse minimum. si enim non, metientur A, B, Γ quendam numerum minorem ipso Δ. metiantur E. quoniam igitur A, B, Γ metiuntur ipsum E, & A, B ipsum E metiuntur: ergo [per 37. 7.] & minimus quem metiuntur A, B ipsum E metietur. minimus autem quem metiuntur A, B est Δ: quare Δ metitur ipsum E, major minorem, quod fieri non potest: non igitur A, B, Γ metiuntur aliquem numerum ipso Δ minorem: ergo Δ est minimus quem A, B, Γ metiuntur.

Non metiatur autem Γ ipsum Δ, & sumatur [per 36. 7.] minimus numerus E, quem Γ, Δ metiantur. itaque quoniam A, B metiuntur ipsum Δ, Δ vero ipsum E; & A, B ipsum E metientur. metitur autem & Γ ipsum E: ergo A, B, Γ ipsum E metiuntur. dico illum etiam esse minimum. si enim non, metientur A, B, Γ numerum minorem ipso E. metiantur Z. & quoniam A, B, Γ metiuntur Z, & A, B ipsum Z metientur: ergo [per 37. 7.] & minimus quem A, B metiuntur metietur ipsum Z. minimus autem quem A, B metiuntur est Δ: quare Δ ipsum Z metitur. sed & Γ metitur ipsum Z: ergo Δ, Γ ipsum Z metiuntur; ac propterea minimus quem metiuntur Δ, Γ metietur & Z. sed [per constr.] minimus quem metiuntur Δ, Γ, est E: ergo E ipsum Z metitur, major minorem, quod fieri non potest: non igitur A, B, Γ metiuntur aliquem numerum minorem ipso E: ergo numerus E est minimus quem ipsi A, B, Γ metiuntur. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ'.

Ἐὰν ἀριθμὸς ὑπό τινος ἀριθμοῦ μετρῆται, ὁ μετρούμενος ὁμώνυμον μέρος ἕξει τῷ μετροῦντι.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α ὑπό τινος ἀριθμοῦ τοῦ Β μετρείσθω· λέγω ὅτι ὁ Α ὁμώνυμον μέρος ἔχει τῷ Β.

Prop. XXXIX. Theor.

Si numerum numerus aliquis metiatur, ille quem metitur partem habebit à metiente denominatam.

Numerum enim A numerus aliquis B metiatur: dico A partem habere ab ipso B denominatam.

Quoties

Quoties enim B ipsum A metitur, tot unitates sint in Γ: & quoniam B metitur ipsum A per eas quæ sunt in Γ unitates; metitur autem & unitas Δ ipsum Γ per unitates quæ in ipso sunt: & Δ unitas ipsum Γ numerum æqualiter metietur atque B ipsum A: quare permutando [per 15. 7.] unitas Δ ipsum B numerum æqualiter metietur atque Γ ipsum A: quæ igitur pars est unitas Δ ipsius B numeri, eadem pars est & Γ ipsius A. sed unitas Δ ipsius B numeri pars est ab eo denominata: ergo & Γ ipsius A pars est denominata ab ipso B: quare A partem habet sc. Γ ab ipso B denominatam. quod erat demonstrandum.

A . . . .
B . . .
Γ . . . .
Δ .

Οσάκις γὰρ ὁ B τὸν A μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Γ· καὶ ἐπεὶ ὁ B τὸν A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ B τὸν A· ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ Δ μονὰς τὸν B ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Γ τὸν A· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ Δ μονὰς τοῦ B ἀριθμοῦ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ A. ἡ δὲ Δ μονὰς τοῦ B ἀριθμοῦ μέρος ἐστὶν ὁμώνυμον αὐτῷ· καὶ ὁ Γ ἄρα τοῦ A μέρος ἐστὶν ὁμώνυμον τῷ B· ὥστε ὁ A μέρος ἔχει τὸ Γ ὁμώνυμον ὄντα τῷ B. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XL. Theor.

Si numerus partem quamcumque habeat, eum numerus à parte denominatus metietur.

NUmerus enim A partem habeat quamcumque B, & ab ipsa parte B denominatus sit numerus Γ: dico Γ ipsum A metiri

Quoniam enim B ipsius A pars est & denominata ab ipso Γ, est autem & unitas Δ ipsius Γ numeri pars ab ipso denominata: quæ igitur pars est unitas Δ ipsius Γ numeri eadem pars est & B ipsius A: ergo unitas Δ æqualiter metitur ipsum Γ numerum atque B ipsum A; & permutando [per 15. 7.] unitas Δ ipsum B numerum æqualiter metitur atque Γ ipsum A: ergo Γ ipsum A metitur. quod erat demonstrandum.

A . . . .
B . .
Γ . . . . . .
Δ .

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ′.

Εὰν ἀριθμὸς μέρος ἔχῃ ὁτιοῦν, ὑπὸ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται τῷ μέρει.

ΑΡιθμὸς γὰρ ὁ A μέρος ἐχέτω ὁτιοῦν τὸ B, καὶ τῷ B μέρει ὁμώνυμος ἔστω ἀριθμὸς ὁ Γ· λέγω ὅτι ὁ Γ τὸν A μετρεῖ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ B τοῦ A μέρος ἐστὶ καὶ ὁμώνυμον τῷ Γ, ἔστι δὲ καὶ ἡ Δ μονὰς τοῦ Γ μέρος ὁμώνυμον αὐτῷ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ Δ μονὰς τοῦ Γ ἀριθμοῦ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ B τοῦ A· ἰσάκις ἄρα ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ B τὸν A· ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ Δ μονὰς τὸν B ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Γ τὸν A· ὁ Γ ἄρα τὸν A μετρεῖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XLI. Probl.

Numerum invenire, qui minimus cum sit datas partes habeat.

SInt datæ partes A, B, Γ: oportet numerum invenire, qui cum minimus sit habeat datas partes A, B, Γ.

Sint ab ipsis A, B, Γ partibus denominati numeri Δ, E, Z, & sumatur [per 38. 7.] minimus numerus H, quem ipsi Δ, E, Z metiuntur. quoniam igitur Δ, E, Z metiuntur ipsum H; habebit [per 39. 7.] H partes ab ipsis Δ, E, Z denominatas. partes autem denominatæ ab ipsis Δ, E, Z [per constr.] sunt A, B, Γ; ergo H partes A, B, Γ habet. dico & minimum esse. si enim H non sit minimus, partes habens A, B, Γ, erit numerus aliquis minor ipso H, qui easdem partes habeat. sit Θ. quoniam igitur Θ partes habet A, B, Γ; eum [per 40. 7.] metientur numeri ab ipsis A, B, Γ partibus denominati. sunt autem hi numeri Δ, E, Z: ergo Δ, E, Z ipsum Θ metientur minorem ipso H, quod [per constr.] fieri non potest: non igitur erit aliquis numerus minor ipso H, qui partes A, B, Γ habeat. quod erat demonstrandum.

A $\frac{1}{2}$ Δ . .
B $\frac{1}{3}$ E . . .
Γ $\frac{1}{4}$ Z . . . .
H . . . .
Θ - - - - - - - - - - - - - -

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μα′.

Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ὢν ἕξει τὰ δοθέντα μέρη.

ΕΣτω τὰ δοθέντα μέρη τὰ A, B, Γ· δεῖ δὴ ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ὢν ἕξει τὰ δοθέντα μέρη τὰ A, B, Γ.

Ἔστωσαν τοῖς A, B, Γ μέρεσιν ὁμώνυμοι ἀριθμοὶ, οἱ Δ, E, Z, καὶ εἰλήφθω ὁ ὑπὸ τῶν Δ, E, Z ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, ὁ H. ἐπεὶ οὖν ὁ H ὑπὸ τῶν Δ, E, Z μετρεῖται, ὁ H ὁμώνυμα μέρη ἔχει τοῖς Δ, E, Z. τοῖς δὲ Δ, E, Z ὁμώνυμα μέρη ἐστὶ τὰ A, B, Γ· ὁ H ἄρα ἔχει τὰ A, B, Γ μέρη. λέγω δὴ ὅτι ἐλάχιστος ὤν. εἰ γὰρ μὴ ὁ H ἐλάχιστος ὢν ἔχει τὰ A, B, Γ μέρη, ἔσται τοῦ H ἐλάσσων ἀριθμὸς ὃς ἕξει τὰ A, B, Γ μέρη. ἔστω ὁ Θ. ἐπεὶ ὁ Θ ἔχει τὰ A, B, Γ μέρη· ὁ Θ ἄρα ὑπὸ ὁμωνύμων ἀριθμῶν μετρηθήσεται τοῖς A, B, Γ μέρεσι. τοῖς δὲ A, B, Γ μέρεσιν ὁμώνυμοι ἀριθμοί εἰσιν οἱ Δ, E, Z· ὁ Θ ἄρα ὑπὸ τῶν Δ, E, Z μετρεῖται, καὶ ἔστιν ἐλάσσων τοῦ H, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσται τις τοῦ H ἐλάσσων ἀριθμὸς, ὃς ἕξει τὰ A, B, Γ μέρη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΥΚΛΕΙ-

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER OCTAVUS.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν· ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ A, B, Γ, Δ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οἱ A, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω ὅτι οἱ A, B, Γ, Δ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Εἰ γὰρ μὴ, ἔστωσαν ἐλάττονες τῶν A, B, Γ, Δ οἱ E, Z, H, Θ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες αὐτοῖς. καὶ ἐπεὶ οἱ A, B, Γ, Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς E, Z, H, Θ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν A, B, Γ, Δ τῷ πλήθει τῶν E, Z, H, Θ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ A πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Θ. οἱ δὲ A, Δ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ,τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ A τὸν E, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ E, Z, H, Θ ἐλάσσονες ὄντες τῶν A, B, Γ, Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν αὐτοῖς· οἱ A, B, Γ, Δ ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

A, * 8. B, 12. Γ, 18. Δ, 27.
E — Z — H — Θ —

Prop. I. Theor.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, quorum extremi sint inter se primi; minimi erunt omnium eandem cum ipsis rationem habentium.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, Γ, Δ, quorum extremi A, Δ primi inter se sint: dico A, B, Γ, Δ minimos esse omnium eandem cum ipsis rationem habentium.

Si enim non, sint minores ipsis A, B, Γ, Δ numeri E, Z, H, Θ & in eadem ratione. & quoniam A, B, Γ, Δ sunt in eadem ratione in qua E, Z, H, Θ, atque est ipsorum A, B, Γ, Δ multitudo æqualis multitudini ipsorum E, Z, H, Θ: erit ex æquo [per 14. 7.] ut A ad Δ ita E ad Θ. & sunt A, Δ primi; primi autem & minimi numeri æqualiter metiuntur eos qui eandem rationem habent, [per 21. 7.] antecedens antecedentem & consequens consequentem: ergo A ipsum E metitur, major minorem, quod fieri non potest: non igitur E, Z, H, Θ minores ipsis A, B, Γ, Δ existentes in eadem sunt ratione cum ipsis: ac propterea A, B, Γ, Δ minimi sunt omnium eandem cum ipsis rationem habentium. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους, ὅσους ἐπιτάξῃ τις, ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ.

Ἔστω ὁ δοθεὶς λόγος ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς, ὁ τοῦ A πρὸς τὸν B· δεῖ δὴ ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς

Prop. II. Probl.

Numeros invenire deinceps proportionales minimos, quotcunque quis imperaverit, in data ratione.

Sit data ratio in minimis numeris, ea sc. quam habet A ad B: oportet numeros invenire dein-

* *In hoc & sequenti libro Literis adjecimus numeros illis respondentes; ne ingens punctorum multitudo, quandoque ex necessitate adhibenda, molestiam crearet lectoribus.*

ceps

ceps proportionales minimos, quotcumque quis imperaverit, in ratione A ad B.

Imperentur quatuor, & A seipsum multiplicans faciat Γ, multiplicans vero B faciat Δ, & B seipsum multiplicans faciat E; & adhuc A multiplicans Γ, Δ, E ipsos Z, H, Θ faciat, B vero multiplicans E faciat K.

Quoniam igitur A seipsum multiplicans fecit Γ, multiplicans vero B ipsum Δ fecit, numerus A duos numeros A, B multiplicans fecit Γ, Δ: est igitur [per 17. 7.] ut A ad B ita Γ ad Δ. rursus, quoniam A ipsum B multiplicans fecit Δ, & B seipsum multiplicans fecit E; uterque ipsorum A, B multiplicans B utrumque ipsorum Δ, E fecit: ut igitur A ad B ita [per 18. 7.] Δ ad E. sed ut A ad B, ita Γ ad Δ: ergo & ut Γ ad Δ ita Δ ad E. & quoniam A numeros Γ, Δ multiplicans ipsos Z, H fecit: ut Γ ad Δ ita erit Z ad H. ut autem Γ ad Δ ita erat A ad B: & igitur ut A ad B ita Z ad H. rursus, quoniam A numeros Δ, E multiplicans fecit H, Θ: erit ut Δ ad E ita H ad Θ. sed ut Δ ad E ita A ad B: ergo & ut A ad B ita H ad Θ. & quoniam A, B ipsum E multiplicantes fecerunt Θ, K; erit ut A ad B ita Θ ad K. ostensum autem est & ut A ad B ita esse & Z ad H & H ad Θ: ergo ut Z ad H ita H ad Θ & Θ ad K: numeri igitur Γ, Δ, E & etiam Z, H, Θ, K proportionales sunt in ratione quam habet A ad B. dico etiam & minimos esse. quoniam enim [ex hyp.] A, B minimi sunt omnium eandem cum ipsis rationem habentium; minimi vero eandem cum ipsis rationem habentium [per 23. 7.] & primi sunt inter se: erunt ipsi A, B inter se primi. & uterque quidem ipsorum A, B seipsum multiplicans utrumque Γ, E fecit; utrumque vero Γ, E multiplicans fecit utrumque Z, K: ergo [per 29. 7.] Γ, E & Z, K primi inter se sunt. si autem sint quotcunque numeri deinceps proportionales, & eorum extremi sint inter se primi; [per 1. 8.] minimi erunt omnium eandem cum ipsis rationem habentium: ergo & Γ, Δ, E & etiam Z, H, Θ, K minimi sunt omnium eandem cum ipsis A, B rationem habentium. quod erat demonstrandum.

A, 2.	B, 3.		
Γ, 4.	Δ, 6.	E, 9.	
Z, 8.	H, 12.	Θ. 18.	K, 27.

ἀνάλογον ἐλαχίστους, ὅσους ἄν τις ἐπιτάξῃ, ἐν τῷ τοῦ A πρὸς τὸν B λόγῳ.

Ἐπιτετάχθωσαν δὴ τέσσαρες, καὶ ὁ A ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω, τὸν δὲ B πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω, καὶ ἔτι ὁ B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν E ποιείτω, καὶ ἔτι ὁ A τοὺς Γ, Δ, E πολλαπλασιάσας τοὺς Z, H, Θ ποιείτω, ὁ δὲ B τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν K ποιείτω.

Καὶ ἐπεὶ ὁ A ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκε, τὸν δὲ B πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ἀριθμὸς δὴ ὁ A δύο τοὺς A, B πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ δὲ B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν E πεποίηκεν· ἑκάτερος ἄρα τῶν A, B τὸν B πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Δ, E πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν E. ἀλλ' ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν E. καὶ ἐπεὶ ὁ A τοὺς Γ, Δ πολλαπλασιάσας τοὺς Z, H πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν H. ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ἦν ὁ A πρὸς τὸν B· καὶ ὡς ἄρα ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν H. πάλιν, ἐπεὶ ὁ A τοὺς Δ, E πολλαπλασιάσας τοὺς H, Θ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν E οὕτως ὁ H πρὸς τὸν Θ. ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν E οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B· καὶ ὡς ἄρα ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ H πρὸς τὸν Θ. καὶ ἐπεὶ οἱ A, B τὸν E πολλαπλασιάσαντες τοὺς Θ, K πεποιήκασιν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν K. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὅ, τε Z πρὸς τὸν H καὶ ὁ H πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Z πρὸς τὸν H οὕτως ὅ, τε H πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν K· οἱ Γ, Δ, E ἄρα καὶ οἱ Z, H, Θ, K ἀνάλογόν εἰσιν, ἐν τῷ τοῦ A πρὸς τὸν B λόγῳ. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. ἐπεὶ γὰρ οἱ A, B ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ δὲ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· οἱ A, B ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ἑκάτερος μὲν τῶν A, B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Γ, E πεποίηκεν, ἑκάτερον δὲ τῶν Γ, E πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Z, K πεποίηκεν· οἱ Γ, E ἄρα καὶ οἱ Z, K πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἐὰν δὲ ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οἱ Γ, Δ, E ἄρα καὶ οἱ Z, H, Θ, K ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς A, B. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Corollarium.

Ex hoc manifestum est, si tres numeri deinceps proportionales minimi fuerint omnium eandem cum ipsis rationem habentium, extremos eorum quadratos esse; si vero quatuor, esse cubos.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι ὦσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ ἄκροι αὐτῶν τετράγωνοί εἰσιν· ἐὰν δὲ τέσσαρες, κύβοι.

Prop. III. Theor.

Si sint quotcunque numeri deinceps pro-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον,

ἐλάχιστοι

ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

portionales, minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium; eorum extremi primi inter se erunt.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ Α, Β, Γ, Δ· λέγω ὅτι οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰλήφθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ μὲν ἐλάχιστοι ἐν τῷ τῶν Α, Β, Γ, Δ λόγῳ, οἱ Ε, Ζ, τρεῖς δὲ οἱ Η, Θ, Κ, καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλείους, ἕως οὗ τὸ λαμβανόμενον πλῆθος ἴσον γένηται τῷ πλήθει τῶν Α, Β, Γ, Δ. εἰλήφθωσαν, καὶ ἔστωσαν οἱ Λ, Μ, Ν, Ξ.

Α, 8.	Β, 12.	Γ, 18,	Δ, 27.
Ε, 2.	Ζ, 3.		
Η, 4.	Θ, 6.	Κ, 9.	
Λ, 8.	Μ, 12.	Ν. 18.	Ξ, 27.

Οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἐπεὶ γὰρ οἱ Ε, Ζ πρῶτοί εἰσιν, ἑκάτερος δὲ αὐτῶν ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Η, Κ πεποίηκεν, ἑκάτερον δὲ τῶν Η, Κ πολλαπλασιάσας τὸν ἑκάτερον τῶν Λ, Ξ πεποίηκεν· οἱ Η, Κ ἄρα πρῶτοι καὶ οἱ Λ, Ξ. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ Λ, Μ, Ν, Ξ ἐλάχιστοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β, Γ, Δ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ, Δ τῷ πλήθει τῶν Λ, Μ, Ν, Ξ· ἕκαστος ἄρα τῶν Α, Β, Γ, Δ ἑκάστῳ τῶν Λ, Μ, Ν, Ξ ἴσος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν Α τῷ Λ, ὁ δὲ Δ τῷ Ξ. καὶ ἐπεὶ οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ἴσος δὲ ὁ μὲν Λ τῷ Α, ὁ δὲ Ξ τῷ Δ· καὶ οἱ Α, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, Δ, minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium: dico eorum extremos Α, Δ inter se primos esse.

Sumantur enim [per 2. 8.] duo numeri minimi in ratione ipsorum Α, Β, Γ, Δ, qui sint Ε, Ζ, tres vero Η, Θ, Κ, & semper deinceps uno plures, quoad assumpta multitudo æqualis fuerit multitudini ipsorum Α, Β, Γ, Δ. sumantur & sint Λ, Μ, Ν, Ξ.

Extremi igitur ipsorum Λ, Ξ primi inter se sunt. quoniam enim Ε, Ζ primi inter se sunt, & uterque ipsorum seipsum multiplicans utrumque Η, Κ fecit; utrumque vero Η, Κ multiplicans fecit utrumque Λ, Ξ: erunt [per 29. 7.] & Η, Κ & Λ, Ξ primi. & quoniam Α, Β, Γ, Δ minimi sunt eorum eandem cum ipsis rationem habentium; sunt autem & Λ, Μ, Ν, Ξ minimi in eadem ratione in qua Α, Β, Γ, Δ; estque ipsorum Α, Β, Γ, Δ multitudo æqualis multitudini ipsorum Λ, Μ, Ν, Ξ: erit unusquisque ipsorum Α, Β, Γ, Δ unicuique ipsorum Λ, Μ, Ν, Ξ æqualis: ergo Α quidem est æqualis Λ, & Δ ipsi Ξ. & quoniam Λ, Ξ primi sunt inter se, Λ vero ipsi Α æqualis, & Ξ ipsi Δ; & Α, Δ inter se primi erunt. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Prop. IV. Probl.

Λόγων δοθέντων ὁποσωνοῦν ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς, ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἐλαχίστους ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις.

Rationibus datis quotcunque in minimis numeris, numeros invenire deinceps minimos in datis rationibus.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες λόγοι ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς, ὅ, τε τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ ὁ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ὁ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ· δεῖ δὴ ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἐλαχίστους, ἔν τε τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ, καὶ ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ.

Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμός, ὁ Η. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ Β τὸν Η μετρεῖ τοσαυτάκις ὁ Α τὸν Θ μετρείτω, ὁσάκις δὲ ὁ Γ τὸν Η μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ ὁ Δ τὸν Κ μετρείτω· ὁ δὲ Ε τὸν Κ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον. καὶ ὁσάκις ὁ Ε τὸν Κ μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ ὁ Ζ τὸν Λ μετρείτω. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ὁ Α τὸν Θ μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Η· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Κ, καὶ ἔτι ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ· οἱ Θ, Η, Κ, Λ ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἔν τε τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγῳ. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι.

Α, 2.	Β, 5.	Γ, 3.	Δ, 4.	Ε, 5,	Ζ, 6.
Θ, 6.	Η, 15.	Κ, 20.	Λ, 24.		
Ν —	Ξ ——	Μ ——	Ο ———		

Sint datæ rationes in minimis numeris, videlicet ratio Α ad Β, & ratio Γ ad Δ, & ratio Ε ad Ζ: oportet numeros invenire deinceps minimos in ratione Α ad Β, & in ratione Γ ad Δ; & adhuc in ratione Ε ad Ζ.

Sumatur enim [per 36. 7.] minimus numerus, quem Β, Γ metiuntur; sitque Η. & quoties Β metitur Η toties Α ipsum Θ metiatur: quoties vero Γ ipsum Η metitur toties & Δ metiatur Κ: itaque Ε ipsum Κ vel metitur, vel non metitur. metiatur primum. & quoties Ε metitur Κ, toties Ζ ipsum Λ metiatur. & quoniam Α æqualiter metitur Θ atque Β ipsum Η; erit [per 13. 7.] ut Α ad Β ita Θ ad Η. eadem ratione & ut Γ ad Δ ita Η ad Κ, & adhuc ut Ε ad Ζ ita Κ ad Λ: ergo Θ, Η, Κ, Λ deinceps proportionales sunt in ratione Α ad Β, & in ratione Γ ad Δ, & adhuc in ratione Ε ad Ζ. dico etiam minimos esse. si

enim

enim non sint Θ, H, K, Λ deinceps minimi in rationibus A ad B, & Γ ad Δ, & E ad Z; erunt aliqui numeri minores ipsis Θ,H,K,Λ deinceps minimi in rationibus A ad B, & Γ ad Δ, & E ad Z. sint N,Ξ,M,O. & quoniam est ut A ad B ita N ad Ξ; & sunt A, B minimi; minimi autem eos qui eandem habent rationem [per 21. 7.] æqualiter metiuntur, major majorem & minor minorem, hoc est antecedens antecedentem & consequens consequentem: metietur B ipsum Ξ. eadem ratione & Γ ipsum Ξ metietur: quare B, Γ metiuntur Ξ: ac propterea [per 37. 7.] minimus, quem metiuntur B, Γ, ipsum Ξ metietur. minimus autem quem metiuntur B, Γ [ex hyp.] est H: ergo H metietur Ξ, major minorem, quod fieri non potest: non igitur erunt aliqui numeri minores ipsis Θ, H, K, Λ deinceps minimi in rationibus A ad B, & Γ ad Δ, & E ad Z.

A, 2. B, 5. Γ, 3. Δ, 4. E, 5. Z, 6.
Θ, 6. H, 15. K, 20. Λ, 24.
N — Ξ — M — O —

Sed non metiatur E ipsum K. & sumatur [per 36. 7.] minimus numerus, quem ipsi E, K metiuntur; sitque M. quoties autem K metitur M toties & uterque ipsorum Θ, H utrumque N, Ξ metiatur, & quoties E metitur M toties & Z metiatur O. quoniam igitur Θ ipsum N æqualiter metitur atque H ipsum Ξ; erit [per 13. 7.] ut Θ ad H ita N ad Ξ. ut autem Θ ad H ita A ad B: & igitur ut A ad B ita N ad Ξ. eadem ratione & ut Γ ad Δ ita Ξ ad M. rursus, quoniam E ipsum M æqualiter metitur atque Z ipsum O; erit ut E ad Z ita M ad O: quare N, Ξ, M, O deinceps proportionales sunt in rationibus A ad B, & Γ ad Δ, & E ad Z. dico minimos quoque esse. si enim non sint N, Ξ, M, O deinceps minimi in rationibus A ad B, & Γ ad Δ, & E ad Z, erunt aliqui numeri minores ipsis N, Ξ, M, O deinceps minimi in rationibus A ad B, & Γ ad Δ, & E ad Z. sint Π, P, Σ, T. & cum sit ut Π ad P ita A ad B; sintque A, B minimi; minimi vero eos qui eandem habent rationem [per 21. 7.] æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem & consequens consequentem: numerus B ipsum P metietur. eadem ratione & Γ metietur ipsum P: ergo B, Γ ipsum P metiuntur: & ob id [per 37. 7.] minimus, quem metiuntur B, Γ, ipsum P metietur. minimus autem, quem metiuntur B, Γ, est H: ergo H metitur ipsum P. atque est [per 13. 7.] ut H ad P ita K ad Σ: quare [per 20. def. 7.] & K ipsum Σ metitur. metitur autem & E ipsum Σ; ideoque E, K ipsum Σ metiuntur: & minimus igitur, quem metiuntur E, K, metietur ipsum Σ. sed minimus, quem metiuntur E, K, [ex hyp.] est M: ergo M ipsum Σ metietur, major minorem, quod fieri non potest: non

A, 4. B, 5. Γ, 2. Δ, 3. E, 4. Z, 3.
Θ, 8. H, 10. K, 15.
N, 32. Ξ, 40. M, 60. O, 45.
Π — P — Σ — T —

εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Θ, Η, Κ, Λ ἑξῆς ἐλάχιστοι, ἔντε τοῖς τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις, ἔσονταί τινες τῶν Θ, Η, Κ, Λ ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἔντε τοῖς τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις. ἔστωσαν οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ, οἱ δὲ Α, Β ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα, τουτέστιν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ὁ Β ἄρα τὸν Ξ μετρεῖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Ξ μετρεῖ· οἱ Β, Γ ἄρα τὸν Ξ μετροῦσι, καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα τῶν ὑπὸ Β, Γ μετρούμενος τὸν Ξ μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Β, Γ μετρούμενός ἐστιν, ὁ Η· ὁ Η ἄρα τὸν Ξ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάττονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν Θ, Η, Κ, Λ ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἑξῆς, ἔντε τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγῳ.

Μὴ μετρείτω δὴ ὁ Ε τὸν Κ. καὶ εἰλήφθω ὁ ὑπὸ τῶν Ε, Κ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, ὁ Μ. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ Κ τὸν Μ μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ ἑκάτερος τῶν Θ, Η ἑκάτερον τῶν Ν, Ξ μετρείτω, ὁσάκις δὲ ὁ Ε τὸν Μ μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ ὁ Ζ τὸν Ο μετρείτω. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ὁ Θ τὸν Ν μετρεῖ καὶ ὁ Η τὸν Ξ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. ὡς δὲ ὁ Θ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ξ πρὸς τὸν Μ. πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ὁ Ε τὸν Μ μετρεῖ καὶ ὁ Ζ τὸν Ο, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Ο· οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἐν τοῖς τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο ἑξῆς ἐλάχιστοι ἐν τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ λόγοις, ἔσονταί τινες τῶν Ν, Ξ, Μ, Ο ἐλάττονες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐν τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ λόγοις. ἔστωσαν οἱ Π, Ρ, Σ, Τ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Π πρὸς τὸν Ρ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, οἱ δὲ Α, Β ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ὁ Β ἄρα τὸν Ρ μετρεῖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Ρ μετρεῖ· οἱ Β, Γ ἄρα τὸν Ρ μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Β, Γ μετρούμενος τὸν Ρ μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Β, Γ μετρούμενός ἐστιν ὁ Η· ὁ Η ἄρα τὸν Ρ μετρεῖ. καὶ ἔστιν ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Ρ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Σ· καὶ ὁ Κ ἄρα τὸν Σ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Ε τὸν Σ· οἱ Ε, Κ ἄρα τὸν Σ μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Ε, Κ μετρούμενος τὸν Σ μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Ε, Κ μετρούμενός ἐστιν ὁ Μ· ὁ Μ ἄρα τὸν Σ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάττονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ

ἄρα

ἄρα ἔσονταί τινες τῶν Ν, Ξ, Μ, Ο ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἔν τε τοῖς τοῦ Α πρὸς τὸν Β καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις· οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο ἄρα ἑξῆς ἐλάχιστοί εἰσιν ἐν τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ λόγοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

igitur erunt aliqui numeri minores ipsis N, Ξ, M, O deinceps minimi in rationibus A ad B & Γ ad Δ & E ad Z; ergo N, Ξ, M, O deinceps minimi sunt in rationibus A ad B & Γ ad Δ & E ad Z. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Οἱ ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσι, τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Prop. V. Theor.

Plani numeri inter se rationem habent * ex lateribus compositam.

Ἔστωσαν ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευραὶ ἔστωσαν οἱ Γ, Δ ἀριθμοί, τοῦ δὲ Β οἱ Ε, Ζ· λέγω ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Λόγων γὰρ δοθέντων, τοῦ τε ὃν ἔχει ὁ Γ πρὸς τὸν Ε καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, εἰλήφθωσαν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐλάχιστοι ἐν τοῖς Γ, Ε, Δ, Ζ λόγοις, οἱ Η, Θ, Κ, ὥστε εἶναι ὡς μὲν τὸν Γ πρὸς τὸν Ε οὕτως τὸν Η πρὸς τὸν Θ, ὡς δὲ τὸν Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως τὸν Θ πρὸς τὸν Κ. [† οἱ ἄρα Η, Θ, Κ πρὸς ἀλλήλους ἔχουσι τοὺς τῶν πλευρῶν λόγους. ἀλλ' ὁ τοῦ Η πρὸς τὸν Κ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τοῦ Η πρὸς τὸν Θ καὶ τοῦ τοῦ Θ πρὸς τὸν Κ· ὁ Η ἄρα πρὸς τὸν Κ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· λέγω οὖν ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Κ.] ὁ Δ γὰρ τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Λ ποιείτω. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Λ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Λ. ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Λ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Λ πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν Β. ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Θ πρὸς τὸν Κ οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν Β. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Λ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Κ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. ὁ δὲ Η πρὸς τὸν Κ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

A, 6.		B, 20.	
	Λ, 12.		
Γ, 2.	Δ, 3.	E, 4.	Z, 5.
H, 3.	Θ. 6.	K, 10.	

Sint plani numeri A, B, & ipsius quidem A latera sint Γ, Δ numeri: ipsius vero B latera sint E, Z: dico A ad B rationem habere ex lateribus compositam.

Rationibus enim datis, videlicet quam habet Γ ad E & quam Δ ad Z, sumantur [per 4. 8.] numeri deinceps minimi H, Θ, K in rationibus Γ ad E & Δ ad Z, sitque ut Γ ad E ita H ad Θ: ut autem Δ ad Z ita Θ ad K. [ergo H, Θ, K inter se rationes habent laterum. sed [per 5. def. 6.] ratio H ad K composita est ex ratione H ad Θ & ratione Θ ad K: quare H ad K rationem habet ex lateribus compositam: dico igitur ut A ad B ita esse H ad K.] numerus Δ ipsum E multiplicans faciat Λ. & quoniam [per 16. def. 7.] Δ multiplicans Γ ipsum A fecit, multiplicans vero E fecit Λ: erit [per 17. 7.] ut Γ ad E ita A ad Λ. ut autem Γ ad E ita [per constr.] H ad Θ: ergo & ut H ad Θ ita A ad Λ. rursus, quoniam E ipsum quidem Δ multiplicans fecit Λ, multiplicans vero Z ipsum B fecit; ut Δ ad Z ita erit Λ ad B. sed ut Δ ad Z ita est Θ ad K: & igitur ut Θ ad K ita Λ ad B. ostensum autem est & ut H ad Θ ita A ad Λ: quare ex æquo [per 14. 7.] ut H ad K ita A ad B. sed [per 5. def. 6.] H ad K rationem habet compositam ex lateribus: ergo & A ad B rationem habebit ex lateribus compositam. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ς'.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν δεύτερον μὴ μετρῇ· οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει.

Prop. VI. Theor.

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur: neque alius aliquis ullum metietur.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, ὁ δὲ Α τὸν Β μὴ μετρείτω· λέγω ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, Γ, Δ, E, & A ipsum B non metiatur. dico neque alium aliquem ullum metiri.

* Rectius ex laterum rationibus. † Quæ uncis inclusa dedimus in quibusdam exemplaribus desiderantur; & commode quidem abesse possunt. Deinde eadem exemplaria pro ὁ Δ γὰρ τὸν habent ἔστω ὁ Δ τὸν &c.

Et quidem numeros A, B, Γ, Δ, E deinceps sese non metiri, perspicuum est. neque enim A ipsum B metitur. dico neque alium aliquem ullum metiri. dico enim A, ex. gr. non metiri ipsum Γ. nam quot sunt A, B, Γ, tot sumantur [per 35. 7.] minimi numeri eandem cum ipsis A, B, Γ rationem habentes, & sint Z, H, Θ. quoniam igitur Z, H, Θ in eadem sunt ratione in qua A, B, Γ, atque est ipsorum A, B, Γ multitudo æqualis multitudini ipsorum Z, H, Θ; erit ex æquo [per 14. 7.] ut A ad Γ ita Z ad Θ. & quoniam est ut A ad B ita Z ad H, non metitur autem A ipsum B, neque [per 20. def. 7.] Z ipsum H metietur: non igitur Z unitas est; unitas enim [per 1. def. 7.] omnem numerum metitur, & sunt Z, Θ primi inter se: ergo [per 12. def. 7.] neque Z metitur ipsum Θ. atque est ut Z ad Θ ita A ad Γ: neque igitur A ipsum Γ metietur. similiter demonstrabimus neque alium ullum aliquem metiri. quod erat demonstrandum.

A, 16. B, 24. Γ, 36. Δ, 54. E, 81.
Z, 4. H, 6. Θ, 9.

Ὅτι μὲν οὖν οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε ἑξῆς ἀλλήλους οὐ μετροῦσι, φανερόν. οὐδὲ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει. λέγω γὰρ ὅτι οὐ μετρεῖ ὁ Α τὸν Γ. ὅσοι γάρ εἰσιν οἱ Α, Β, Γ τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, Γ, οἱ Ζ, Η, Θ. καὶ ἐπεὶ οἱ Ζ, Η, Θ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς Α, Β, Γ, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ τῷ πλήθει τῶν Ζ, Η, Θ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Β· οὐ μετρεῖ ἄρα οὐδὲ ὁ Ζ τὸν Η· οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ Ζ, ἡ γὰρ μονὰς πάντα μετρεῖ ἀριθμόν, καί εἰσιν οἱ Ζ, Θ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· οὐδὲ ὁ Ζ ἄρα τὸν Θ μετρεῖ. καί ἐστιν ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ· οὐδὲ ὁ Α ἄρα τὸν Γ μετρεῖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρεῖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VII. Theor.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem metiatur extremum; & secundum metietur.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν ἔσχατον μετρῇ· καὶ τὸν δεύτερον μετρήσει.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, Γ, Δ, & A ipsum Δ metiatur: dico A ipsum quoque B metiri.

Si enim A non metitur ipsum B [per 6. 8.] neque alius aliquis ullum metietur, quod est absurdum: ponitur enim A ipsum Δ metiri. metitur autem A ipsum Δ: ergo & A ipsum B metietur. quod erat demonstrandum.

A, 2. B, 4. Γ, 8. Δ, 16.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ Α τὸν Δ μετρείτω· λέγω ὅτι καὶ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ.

Εἰ γὰρ μὴ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β, οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ὁ Α τὸν Δ μετρεῖν. μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VIII. Theor.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Si inter duos numeros numeri deinceps proportionales ceciderint; quot inter eos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter alios eandem cum ipsis rationem habentes cadent.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί· ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Inter duos numeros A, B cadant numeri deinceps proportionales Γ, Δ; & fiat ut A ad B ita E ad Z: dico quot numeri deinceps proportionales cadunt inter A, B, totidem & inter E, Z deinceps proportionales cadere.

Quot enim numeri sunt A, Γ, Δ, B, totidem sumantur [per 35. 7.] minimi numeri eandem cum ipsis A, Γ, Δ, B rationem habentium H, Θ, K, Λ: ergo [per 3. 8.] extremi ipsorum H, Λ primi inter se sunt. & quoniam A, Γ, Δ, B

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν ἀριθμοί, οἱ Γ, Δ, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· λέγω ὅτι ὅσοι εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Ε, Ζ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Ὅσοι γάρ εἰσι τῷ πλήθει οἱ Α, Γ, Δ, Β, τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, Δ, Β, οἱ Η, Θ, Κ, Λ· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Η, Λ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. καὶ ἐπεὶ οἱ

Α, Γ, Δ, Β

Α, Γ, Δ, Β τοῖς Η, Θ, Κ, Λ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Γ, Β, Δ τῷ πλήθει τῶν Η, Θ, Κ, Λ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Λ. ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Λ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. οἱ δὲ Η, Λ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα· ἰσάκις ἄρα τὸν Ε μετρεῖ ὁ Η καὶ ὁ Λ τὸν Ζ. ὁσάκις δὲ ὁ Η τὸν Ε μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ ἑκάτερος τῶν Θ, Κ ἑκάτερον τῶν Μ, Ν μετρείτω· οἱ Η, Θ, Κ, Λ ἄρα τοὺς Ε, Μ, Ν, Ζ ἰσάκις μετροῦσιν· οἱ Η, Θ, Κ, Λ ἄρα τοῖς Ε, Μ, Ν, Ζ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. ἀλλὰ οἱ Η, Θ, Κ, Λ τοῖς Α, Γ, Δ, Β ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν· οἱ Α, Γ, Δ, Β ἄρα τοῖς Ε, Μ, Ν, Ζ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. οἱ δὲ Α, Γ, Δ, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι· καὶ οἱ Ε, Μ, Ν, Ζ ἄρα ἀνάλογόν εἰσιν ἑξῆς· ὅσοι ἄρα εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Ε, Ζ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

A, 2.	Γ, 4.	Δ, 8.	B, 16.
H, 1.	Θ, 2.	K, 4.	Λ, 8.
E, 3.	M, 6.	N, 12.	Z, 24.

ad ipsos H, Θ, K, Λ in eadem sunt ratione, atque est ipsorum A, Γ, Δ, B multitudo æqualis multitudini ipsorum H, Θ, K, Λ; erit ex æquo [per 14. 7.] ut A ad B ita H ad Λ. ut autem A ad B ita E ad Z: & igitur ut H ad Λ ita E ad Z. & sunt H, Λ primi; sed primi [per 23. 7.] sunt & minimi; minimi vero eos qui eandem rationem habent [per 21. 7.] æqualiter metiuntur, major majorem & minor minorem: ergo H æqualiter metitur ipsum E atque Λ ipsum Z. quoties autem H metitur ipsum E toties & uterque ipsorum Θ, K utrumque M, N metiatur: numeri igitur H, Θ, K, Λ ipsos E, M, N, Z æqualiter metiuntur: ideoque [per 20. def. 7.] H, Θ, K, Λ in eadem sunt ratione in qua ipsi E, M, N, Z. at H, Θ, K, Λ similiter in eadem sunt ratione in qua A, Γ, Δ, B: ergo A, Γ, Δ, B in eadem ratione erunt in qua E, M, N, Z. sed [ex hyp.] A, Γ, Δ, B sunt deinceps proportionales: ergo & E, M, N, Z deinceps proportionales erunt: quot igitur deinceps proportionales cadunt inter A, B, totidem deinceps proportionales & inter E, Z cadent. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί· ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος ἑξῆς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

PROP. IX. THEOR.

Si duo numeri inter se primi fuerint, & inter ipsos numeri deinceps proportionales ceciderint; quot inter ipsos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter utrumque ipsorum & unitatem deinceps proportionales cadent.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ Α, Β, καὶ εἰς αὐτοὺς κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν οἱ Γ, Δ, καὶ ἐκκείσθω ἡ Ε μονάς· λέγω ὅτι ὅσοι εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου τῶν Α, Β καὶ τῆς Ε μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Εἰλήφθωσαν γὰρ δύο μὲν ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῷ τῶν Α, Γ, Δ, Β λόγῳ ὄντες, οἱ Ζ, Η, τρεῖς δὲ οἱ Θ, Κ, Λ, καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλείους ἕως ἂν ἴσον γένηται τὸ πλῆθος αὐτῶν τῷ πλήθει τῶν Α, Γ, Δ, Β, εἰλήφθωσαν, καὶ ἔστωσαν οἱ Μ, Ν, Ξ, Ο· φανερὸν δὴ ὅτι ὁ μὲν Ζ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποίηκε, τὸν δὲ Θ πολλαπλασιάσας τὸν Μ πεποίηκε, καὶ ὁ Η ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Λ πεποίηκε, τὸν δὲ Λ πολλαπλασιάσας τὸν Ο πεποίηκε. καὶ ἐπεὶ οἱ Μ, Ν, Ξ, Ο ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Ζ, Η, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ Α, Γ, Δ, Β ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Ζ, Η, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Μ, Ν, Ξ, Ο τῷ πλήθει τῶν

A, 8.	Γ, 12.	Δ, 18.	B, 27.
	E, 1.		
	Z, 2.	H, 3.	
Θ, 4.	K, 6.	Λ, 9.	
M, 8.	N, 12.	Ξ, 18.	O, 27.

Sint duo numeri inter se primi A, B, & inter ipsos deinceps proportionales cadant Γ, Δ; exponaturque unitas E: dico quot numeri deinceps proportionales cadunt inter ipsos A, B, totidem & inter utrumque ipsorum A, B & unitatem E numeros deinceps proportionales cadere.

Sumantur enim [per 2. 8.] duo quidem numeri minimi Z, H in eadem ratione in qua sunt A, Γ, Δ, B; tres vero Θ, K, Λ, & semper deinceps uno plures, quoad fiat ipsorum multitudo æqualis multitudini ipsorum A, Γ, Δ, B, sumantur, & sint M, N, Ξ, O: itaque manifestum est [per constr. 2. 8.] Z seipsum quidem multiplicantem fecisse Θ, multiplicantem vero Θ fecisse M, & H seipsum multiplicantem fecisse Λ, multiplicantem vero Λ fecisse O. & quoniam M, N, Ξ, O minimi sunt eandem cum ipsis Z, H rationem habentium; sunt autem & A, Γ, Δ, B minimi eandem quam Z, H rationem habentium; atque est ipsorum M, N, Ξ, O multitudo æqualis multitudini ipsorum A, Γ, Δ, B: erit unusquisque ipsorum M, N, Ξ, O unicuique ipsorum A, Γ, Δ, B æqualis: æqualis igitur est M ipsi A & O ipsi B. & quoniam Z seipsum multiplicans fecit Θ, metitur Z ipsum Θ per unitates quæ sunt in Z. metitur autem & E unitas numerum Z per unitates quæ in ipso sunt: ergo E unitas numerum Z æqualiter metitur atque Z ipsum Θ: est igitur [per 20. def. 7.] ut E unitas ad numerum Z ita Z ad Θ. rursus, quoniam Z multiplicans Θ fecit M; metitur Θ ipsum M per unitates quæ sunt in Z. metitur autem & E unitas numerum Z per unitates quæ in ipso sunt: æqualiter igitur E unitas numerum Z metitur atque Θ ipsum M: ergo ut E unitas ad numerum Z ita Θ ad M. ostensum est autem & ut E unitas ad numerum Z ita esse Z ad Θ: & igitur ut E unitas ad numerum Z ita Z ad Θ & Θ ad M. sed M est æqualis ipsi A: quare ut E unitas ad numerum Z ita Z ad Θ & Θ ad A. eadem ratione & ut E unitas ad numerum H ita H ad Λ & Λ ad B: quot igitur numeri deinceps proportionales cadunt inter A, B totidem & inter utrumque ipsorum A, B & unitatem E numeri deinceps proportionales cadent. quod erat demonstrandum.

A, 8. Γ, 12. Δ, 18. B, 27.
E, 1.
Z, 2. H, 3.
Θ, 4. K, 6. Λ, 9.
M, 8. N, 12. Ξ, 11. O, 27.

A, Γ, Δ, B· ἕκαστος ἄρα τῶν M, N, Ξ, O ἑκάστῳ τῶν A, Γ, Δ, B ἴσος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν M τῷ A, ὁ δὲ O τῷ B. καὶ ἐπεὶ ὁ Z ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποίηκεν· ὁ Z ἄρα τὸν Θ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Z μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ E μονὰς τὸν Z κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ E μονὰς τὸν Z ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Z τὸν Θ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ E μονὰς πρὸς τὸν Z ἀριθμὸν οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν Θ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Z πρὸς τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν M πεποίηκεν· ὁ Θ ἄρα τὸν M μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ E μονὰς τὸν Z ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ E μονὰς τὸν Z ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Θ τὸν M· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ E μονὰς πρὸς τὸν Z ἀριθμὸν οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν M. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ E μονὰς πρὸς τὸν Z ἀριθμὸν οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ἡ E μονὰς πρὸς τὸν Z ἀριθμὸν οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν M. ὁ δὲ M τῷ A ἴσος ἐστίν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ E μονὰς πρὸς τὸν Z ἀριθμὸν οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν A. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ E μονὰς πρὸς τὸν H ἀριθμὸν οὕτως ὁ H πρὸς τὸν Λ καὶ ὁ Λ πρὸς τὸν B· ὅσοι ἄρα εἰς τοὺς A, B μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου τῶν A, B καὶ μονάδος τῆς E μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. X. Theor.

Si inter duos numeros & unitatem deinceps proportionales numeri ceciderint; quot inter utrumque ipsorum & unitatem cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter ipsos numeri proportionales cadent.

Inter duos enim numeros A, B & unitatem Γ numeri deinceps proportionales cadant Δ, E & Z, H: dico quot inter utrumque ipsorum A, B & unitatem Γ cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter ipsos A, B numeros deinceps proportionales cadere.

Numerus enim Δ ipsum Z multiplicans faciat Θ: uterque autem ipsorum Δ, Z ipsum Θ multiplicans faciat utrumque K, Λ.

Et quoniam est ut Γ unitas ad numerum Δ ita Δ ad E, unitas Γ ipsum Δ numerum æqualiter metietur atque Δ ipsum E. sed unitas Γ numerum Δ metitur per unitates quæ sunt in Δ: ergo & numerus Δ ipsum E per unitates quæ sunt in Δ metitur: ac propterea numerus Δ seipsum multiplicans fecit E. rursus, quoniam ut unitas Γ ad Δ numerum ita est E ad A; unitas Γ ipsum Δ nu-

A, 8. K, 12. Λ, 18. B, 27.
E, 4. Θ, 6. H, 9.
Δ, 2. Z, 3.
Γ, 1.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι΄.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν καὶ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί· ὅσοι ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος ἑξῆς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν A, B καὶ μονάδος τῆς Γ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν ἀριθμοὶ οἱ Δ, E καὶ οἱ Z, H· λέγω ὅτι ὅσοι ἑκατέρου τῶν A, B καὶ μονάδος τῆς Γ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς A, B μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Ὁ Δ γὰρ τὸν Z πολλαπλασιάσας τὸν Θ ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Δ, Z τὸν Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν K, Λ ποιείτω.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Γ μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν E, ἰσάκις ἄρα ἡ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν E. ἡ δὲ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· καὶ ὁ Δ ἄρα τὸν E μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Δ ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν E πεποίηκε. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Γ μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν οὕτως ὁ E πρὸς τὸν A· ἰσάκις ἄρα ἡ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ

μετρεῖ καὶ ὁ Ε τὸν Α. ἡ δὲ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Δ ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μὲν Ζ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκε, τὸν δὲ Η πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε, καὶ ἐπεὶ ὁ Δ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκε, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Θ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. καὶ ὡς ἄρα ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑκάτερον τῶν Ε, Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Α, Κ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ. ἀλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ. πάλιν, ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν Δ, Ζ τὸν Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Κ, Λ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Κ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. ἔτι ἐπεὶ ὁ Ζ ἑκάτερον τῶν Η, Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Λ, Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν Β. ὡς δὲ ὁ Θ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν Β. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὅ,τε Α πρὸς τὸν Κ, καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Λ, καὶ ὁ Λ πρὸς τὸν Β· οἱ Α, Κ, Λ, Β ἄρα κατὰ τὸ συνεχὲς ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον· ὅσοι ἄρα ἑκατέρου τῶν Α, Β καὶ τῆς Γ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

merum æqualiter metitur atque E ipsum A. sed unitas Γ ipsum Δ numerum metitur per unitates quæ sunt in Δ: quare & E ipsum A per unitates quæ sunt in Δ metitur: ideoque Δ ipsum E multiplicans fecit A. eadem ratione & Z seipsum multiplicans fecit H, multiplicans vero H ipsum B fecit, & quoniam Δ seipsum multiplicans fecit E, multiplicans vero Z fecit Θ; erit [per 17. 7.] ut Δ ad Z ita E ad Θ. & ob eandem causam ut Δ ad Z ita Θ ad H. ut igitur E ad Θ ita Θ ad H. rursus, quoniam Δ utrumque ipsorum E, Θ multiplicans fecit utrumque A, K, erit [per 17.7.] ut E ad Θ ita A ad K. sed ut E ad Θ ita Δ ad Z: & igitur ut Δ ad Z ita A ad K. rursus, quoniam uterque Δ, Z ipsum Θ multiplicans utrumque K, Λ fecit; [per 18. 7.] ut Δ ad Z ita est K ad Λ. ut autem Δ ad Z ita est A ad K: & igitur ut A ad K ita K ad Λ. præterea cum Z utrumque Θ, H multiplicans utrumque Λ, B faciat, erit ut Θ ad H ita Λ ad B. sed ut Θ ad H ita Δ ad Z: ergo & ut Δ ad Z ita Λ ad B. ostensum autem est & ut Δ ad Z ita A ad K & K ad Λ & Λ ad B: quare A, K, Λ, B numeri deinceps proportionales sunt: quot igitur inter utrumque ipsorum A, B & unitatem Γ cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter A, B numeri deinceps proportionales cadent. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιαʹ.

Δύο τετραγώνων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

Ἔστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω ὅτι τῶν Α, Β εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

Ὁ Γ γὰρ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω. καὶ ἐπεὶ τετράγωνός ἐστιν ἀριθμὸς ὁ Α, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ἐστιν ὁ Γ· ὁ Γ ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ἐπεὶ οὖν ὁ Γ ἑκάτερον τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Α, Ε πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε, δύο δὴ ἀριθμοὶ οἱ Γ, Δ ἕνα ἀριθμὸν καὶ τὸν αὐτὸν τὸν Δ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Ε, Β πεποιήκασιν· ἔστιν ἄρα

Prop. XI. Theor.

Inter duos numeros quadratos unus medius proportionalis cadit; & quadratus ad quadratum duplicatam rationem habet ejus quam latus habet ad latus.

Sint quadrati numeri A, B & ipsius quidem A latus sit Γ, ipsius vero B latus Δ: dico inter ipsos A, B unum medium proportionalem cadere, & A ad B duplicatam rationem habere ejus quam habet Γ ad Δ.

Numerus enim Γ multiplicans Δ faciat E. & quoniam A numerus quadratus est cujus latus Γ; [per 18. def. 7.] numerus Γ seipsum multiplicans fecit A. eadem ratione & Δ seipsum multiplicans fecit B: quoniam igitur Γ utrumque ipsorum Γ, Δ multiplicans utrumque A, E fecit, ut Γ ad Δ ita erit [per 17. 7.] A ad E. rursus, quoniam Γ multiplicans Δ ipsum E fecit, & Δ seipsum multiplicans fecit B; duo numeri Γ, Δ unum & eundem numerum Δ multiplicantes ipsos E, B fecerunt: est igitur [per 18. 7.] ut Γ ad

A, 4. E, 6. B, 9.
Γ, 2. Δ, 3.

ad Δ ita E ad B. sed ut Γ ad Δ ita est A ad E: ergo & ut A ad E ita E ad B. inter numeros igitur A, B unus medius proportionalis E cadit.

Dico etiam A ad B duplicatam habere rationem ejus quam habet Γ ad Δ. quoniam enim tres numeri proportionales sunt A, E, B, habebit A ad B duplicatam rationem ejus quam habet A ad E. ut autem A ad E ita Γ ad Δ: ergo A ad B duplicatam rationem habet ejus quam latus Γ habet ad latus Δ. quod erat demonstrandum.

A, 4. E, 6. B, 9.
Γ, 2. Δ, 3.

ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Β. ἀλλ' ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Β. τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς ὁ Ε.

ΛΕΓΩ δὴ ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ἐπεὶ γὰρ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, οἱ Α, Ε, Β· ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Α πρὸς τὸν Ε. ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ πλευρὰ πρὸς τὴν Δ πλευράν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XII. Theor.

Inter duos numeros cubos duo medii proportionales cadunt; & cubus ad cubum triplicatam habet rationem ejus quam latus habet ad latus.

Sint numeri cubi A, B; & ipsius quidem A latus sit Γ, ipsius vero B latus Δ: dico inter ipsos A, B duos numeros medios proportionales cadere; & A ad B triplicatam habere rationem ejus quam Γ habet ad Δ.

Numerus enim Γ seipsum multiplicans faciat E, multiplicans vero Δ ipsum Z faciat; & Δ seipsum multiplicans faciat H, & uterque ipsorum Γ, Δ multiplicans Z utrumque Θ, K faciat.

Quoniam igitur A cubus est, & ejus latus Γ, numerus Γ seipsum multiplicans fecit E; multiplicans vero E [per 19. def. 7.] ipsum A fecit. similiter & Δ seipsum multiplicans fecit H, multiplicans vero H fecit ipsum B. & quoniam Γ utrumque ipsorum Γ, Δ multiplicans utrumque E, Z fecit, [per 17. 7.] ut Γ ad Δ ita est E ad Z. eadem ratione & ut Γ ad Δ ita Z ad H. rursus, quoniam Γ utrumque ipsorum E, Z multiplicans fecit utrumque A, Θ, erit ut E ad Z ita A ad Θ. ut autem E ad Z ita Γ ad Δ; & igitur ut Γ ad Δ ita A ad Θ. rursus, quoniam uterque ipsorum Γ, Δ multiplicans Z utrumque Θ, K fecit, [per 18. 7.] ut Γ ad Δ ita erit Θ ad K. rursus, quoniam Δ utrumque Z, H multiplicans fecit utrumque K, B, erit ut Z ad H ita K ad B. ut autem Z ad H ita Γ ad Δ: & igitur ut Γ ad Δ ita K ad B. ostensum autem est ut Γ ad Δ ita esse A ad Θ & Θ ad K & K ad B: ac propterea inter ipsos numeros A, B duo numeri medii proportionales Θ, K cadunt.

A, 8. Θ, 12. K, 18. B, 27.
E, 4. Z, 6. H, 9.
Γ, 2. Δ, 3.

Dico etiam A ad B triplicatam rationem habere ejus quam habet Γ ad Δ. quoniam enim quatuor numeri A, Θ, K, B proportionales sunt, habe-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ.

Δύο κύβων ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, καὶ ὁ κύβος πρὸς τὸν κύβον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

ΕΣτωσαν κύβοι ἀριθμοὶ, οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω ὅτι τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

Ο γὰρ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Γ, Δ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Θ, Κ ποιείτω.

Καὶ ἐπεὶ κύβος ἐστὶν ὁ Α, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ὁ Γ· ὁ Γ ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκε, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Δ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκε, τὸν δὲ Η πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ ἑκάτερον τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ε, Ζ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ ἑκάτερον τῶν Ε, Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Α, Θ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ. ὡς δὲ ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ. πάλιν, ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν Γ, Δ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Θ, Κ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑκάτερον τῶν Ζ, Η πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Κ, Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Β. ὡς δὲ ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Β. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὅ, τε Α πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Κ καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Β· τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, οἱ Θ, Κ.

ΛΕΓΩ δὴ ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, οἱ Α, Θ, Κ, Β· ὁ Α ἄρα πρὸς

πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Α πρὸς τὸν Θ. ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

bit A ad B triplicatam rationem ejus quam habet A ad Θ. ut autem A ad Θ ita Γ ad Δ: ergo A ad B triplicatam habet rationem ejus quam Γ habet ad Δ. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, καὶ πολλαπλασιάσας ἕκαστος ἑαυτὸν ποιῇ τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν ἀνάλογον ἔσονται· καὶ ἐὰν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γενομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, καὶ αὐτοὶ ἀνάλογον ἔσονται, καὶ ἀεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ, καὶ οἱ Α, Β, Γ ἑαυτοὺς μὲν πολλαπλασιάσαντες τοὺς Δ, Ε, Ζ ποιείτωσαν, τοὺς δὲ Δ, Ε, Ζ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Η, Θ, Κ ποιείτωσαν· λέγω ὅτι οἵ τε Δ, Ε, Ζ καὶ οἱ Η, Θ, Κ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν.

Ὁ μὲν γὰρ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Λ ποιείτω· ἑκάτερος δὲ τῶν Α, Β τὸν Λ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Μ, Ν ποιείτω. καὶ πάλιν, ὁ μὲν Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ξ ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Β, Γ τὸν Ξ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ο, Π ποιείτω.

		A, 2.	B, 4.	Γ, 8.		
	Δ, 4.	Λ, 8.	E, 16.	Ξ, 32.	Z, 64.	
H, 8.	M, 16.	N, 32.	Θ, 64.	O, 128.	Π, 256.	K. 512.

Ὁμοίως δὴ τοῖς ἐπάνω δείξομεν ὅτι οἱ Δ, Λ, Ε καὶ οἱ Η, Μ, Ν, Θ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ, καὶ ἔτι οἱ Ε, Ξ, Ζ καὶ οἱ Θ, Ο, Π, Κ ἑξῆς εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Β πρὸς τὸν Γ λόγῳ. καὶ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· καὶ οἱ Δ, Λ, Ε ἄρα τοῖς Ε, Ξ, Ζ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί, καὶ ἔτι οἱ Η, Μ, Ν, Θ τοῖς Θ, Ο, Π, Κ. καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν τῶν Δ, Λ, Ε πλῆθος τῷ τῶν Ε, Ξ, Ζ πλήθει. τὸ δὲ τῶν Η, Μ, Ν, Θ τῷ τῶν Θ, Ο, Π, Κ· δίισου ἄρα ἐστὶν ὡς μὲν ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ὡς δὲ ὁ Η πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XIII. Theor.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, & unusquisque seipsum multiplicans faciat aliquos, facti ex ipsis proportionales erunt: & si positi à principio numeri factos multiplicantes alios faciant, & ipsi proportionales erunt; & semper circa extremos hoc contingit.

Sint quotcunque numeri proportionales A, B, Γ, sitque ut A ad B ita B ad Γ, & ipsi A, B, Γ seipsos multiplicantes faciant Δ, E, Z, ipsos vero Δ, E, Z multiplicantes faciant H, Θ, K: dico numeros Δ, E, Z & H, Θ, K deinceps proportionales esse.

Numerus enim A ipsum B multiplicans faciat Λ; uterque autem ipsorum A, B multiplicans Λ faciat utrumque M N. & rursus, B quidem multiplicans Γ ipsum Ξ faciat; uterque vero ipsorum B, Γ multiplicans Ξ faciat utrumque O, Π.

Eodem modo quo prius ostendemus Δ, Λ, E & H, M, N, Θ deinceps proportionales esse in ratione A ad B: & adhuc E, Ξ, Z & Θ, O, Π, K deinceps esse proportionales in ratione B ad Γ. atque est ut A ad B ita B ad Γ: ergo & Δ, Λ, E in eadem sunt ratione in qua E, Ξ, Z; & præterea H, M, N, Θ in eadem ratione in qua Θ, O, Π, K. estque ipsorum quidem Δ, Λ, E multitudo multitudini ipsorum E, Ξ, Z æqualis. multitudo autem ipsorum H, M, N, Θ æqualis multitudini ipsorum Θ, O, Π, K: ex æquo igitur [per 14.7.] ut Δ ad E ita E ad Z, & ut H ad Θ ita Θ ad K. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἐὰν τετράγωνος τετράγωνον μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει.

Ἔστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, πλευραὶ δὲ αὐτῶν οἱ Γ, Δ, ὁ δὲ Α τὸν Β μετρείτω· λέγω ὅτι καὶ ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ.

Ὁ Γ γὰρ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω· οἱ Α, Ε, Β ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Ε, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ μετρεῖ ὁ Α

A, 4.	E, 8.	B, 16.
Γ, 2.	Δ, 4.	

Prop. XIV. Theor.

Si numerus quadratus metiatur quadratum numerum, & latus latus metietur: & si latus metiatur latus, & quadratus quadratum metietur.

Sint quadrati numeri A, B, quorum latera Γ, Δ, & A ipsum B metiatur: dico & latus Γ ipsum Δ metiri.

Numerus enim Γ multiplicans Δ ipsum E faciat: ergo A, E, B deinceps proportionales sunt in ratione Γ ad Δ. & quoniam A, B, B deinceps sunt proportionales, metiturque A ipsum B; & [per 7. 8.] A ipsum E metietur. atque est ut A ad E ita Γ ad Δ: ergo [per 20. def. 7.] & Γ metitur ipsum Δ.

A, 4. E, 8. B, 16.
Γ, 2. Δ, 4.

SED Γ metiatur ipsum Δ: dico & A ipsum B metiri.

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus A, E, B deinceps proportionales esse in ratione Γ ad Δ. & quoniam est ut Γ ad Δ ita A ad B, metitur autem Γ ipsum Δ; & A ipsum E metietur. & sunt A, E, B deinceps proportionales; metitur igitur & A ipsum B.

Si igitur numerus quadratus metiatur quadratum numerum, & latus latus metietur: & si latus metiatur latus, & quadratus quadratum metietur. quod erat demonstrandum.

τὸν B· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ A τὸν E. καὶ ἔστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν E οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ.

ΑΛΛΑ δὴ μετρείτω ὁ Γ τὸν Δ· λέγω ὅτι καὶ ὁ A τὸν B μετρεῖ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι οἱ A, E, B ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ A πρὸς τὸν E, μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ A τὸν E. καί εἰσιν οἱ A, E, B ἑξῆς ἀνάλογον· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ A τὸν B.

Ἐὰν ἄρα τετράγωνος τετράγωνον μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XV. THEOR.

Si numerus cubus metiatur cubum numerum, & latus latus metietur: & si latus latus metiatur, & cubus cubum metietur.

NUmerus enim cubus A cubum numerum B metiatur, & ipsius quidem A latus sit Γ, ipsius vero B latus Δ: dico Γ ipsum Δ metiri.

Numerus enim Γ seipsum multiplicans faciat E, & multiplicans Δ faciat Z; Δ vero seipsum multiplicans faciat H, & uterque ipsorum Γ, Δ multiplicans Z utrumque Θ, K faciat. manifestum autem est E, Z, H & A, Θ, K, B deinceps proportionales esse in ratione Γ ad Δ; & quoniam A, Θ, K, B deinceps proportionales sunt, metiturque A ipsum B; [per 7. 8.] & A ipsum Θ metietur. est autem ut A ad Θ ita Γ ad Δ: ergo [per 20. def. 7.] Γ ipsum Δ metietur.

A, 8. Θ, 16. K, 32. B, 64.
E, 4. Z, 8. H, 16.
Γ, 2. Δ, 4.

SED Γ metiatur Δ: dico & A ipsum B metiri.

Iisdem enim constructis, similiter ostendemus A, Θ, K, B deinceps proportionales esse in ratione Γ ad Δ. & quoniam Γ ipsum Δ metitur, estque ut Γ ad Δ ita A ad Θ; & A metitur ipsum Θ: quare & A ipsum B metietur. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσει.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ A κύβον ἀριθμὸν τὸν B μετρείτω, καὶ τοῦ μὲν A πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ B ὁ Δ· λέγω ὅτι ὁ Γ τὸν Δ μετρήσει.

Ὁ Γ γὰρ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν E ποιείτω, καὶ ἔτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Z ποιείτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν H ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Γ, Δ τὸν Z πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Θ, K ποιείτω. φανερὸν δὲ ὅτι οἱ E, Z, H καὶ οἱ A, Θ, K, B ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ, καὶ ἐπεὶ οἱ A, Θ, K, B ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι καὶ μετρεῖ ὁ A τὸν B· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸν Θ. καὶ ἔστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ.

ΑΛΛΑ δὴ μετρείτω ὁ Γ τὸν Δ· λέγω ὅτι καὶ ὁ A τὸν B μετρήσει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οἱ A, Θ, K, B ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. ἐπεὶ γὰρ ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ, καὶ ἔστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Θ· καὶ ὁ A ἄρα τὸν Θ μετρεῖ· ὥστε καὶ τὸν B μετρεῖ ὁ A. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XVI. THEOR.

Si numerus quadratus non metiatur quadratum numerum, neque latus latus metietur: & si latus non metiatur latus, neque hic quadratus quadratum.

SInt quadrati numeri A, B, quorum latera Γ, Δ & A non metiatur ipsum B: dico neque Γ ipsum Δ metiri.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις'.

Ἐὰν τετράγωνος ἀριθμὸς τετράγωνον ἀριθμὸν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· κἂν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει.

Ἔστωσαν τετράγωνοι οἱ A, B, πλευραὶ δὲ αὐτῶν οἱ Γ, Δ, καὶ μὴ μετρείτω ὁ A τὸν B· λέγω ὅτι οὐδ' ὁ Γ τὸν Δ μετρήσει.

Εἰ

Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Γ τὸν Δ, μετρήσει καὶ ὁ Α τὸν Β. οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Β· οὐδ' ἄρα ὁ Γ τὸν Δ μετρήσει.

Α, 9. Γ, 3.

Μὴ μετρείτω δὴ πάλιν ὁ Γ τὸν Δ· λέγω ὅτι οὐδ' ὁ Α τὸν Β μετρήσει.

Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β, μετρήσει καὶ ὁ Γ τὸν Δ. οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· οὐδ' ἄρα ὁ Α τὸν Β μετρήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si enim metitur Γ ipsum Δ, [per 14. 8.] & A ipsum B metietur. non metitur autem A ipsum B: non igitur Γ ipsum Δ metietur.

B, 16. Δ, 4.

Sed non metiatur Γ ipsum Δ: dico neque A ipsum B metiri.

Si enim A metitur ipsum B, [per 14. 8.] & Γ ipsum Δ metietur. atqui Γ non metitur Δ; neque igitur A ipsum B metietur. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μὴ μετρῇ, οὐδ' ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· κἂν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρῇ, οὐδ' ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσει.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον ἀριθμὸν τὸν Β μὴ μετρείτω, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω ὅτι ὁ Γ τὸν Δ οὐ μετρήσει.

Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Γ τὸν Δ, καὶ ὁ Α τὸν Β μετρήσει. οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Β· οὐδ' ἄρα ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ.

Α, 8. Γ, 2.

Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρείτω ὁ Γ τὸν Δ· λέγω ὅτι οὐδ' ὁ Α τὸν Β μετρήσει.

Εἰ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ, καὶ ὁ Γ τὸν Δ μετρήσει. οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· οὐδ' ἄρα ὁ Α τὸν Β μετρήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XVII. Theor.

Si numerus cubus non metiatur cubum numerum, neque latus latus metietur: & si latus non metiatur latus, neque cubus cubum metietur.

Numerus enim cubus A cubum numerum B non metiatur; & ipsius quidem A latus sit Γ, ipsius vero B latus Δ: dico Γ ipsum Δ non metiri.

B, 27. Δ, 3.

Si enim Γ metitur ipsum Δ, [per 15. 8.] & A ipsum B metietur. atqui non metitur A ipsum B: non igitur Γ ipsum Δ metietur.

Sed non metiatur Γ ipsum Δ: dico neque A ipsum B metiri.

Si enim A ipsum B metitur, [per 15. 8.] & Γ metietur ipsum Δ. non metitur autem Γ ipsum Δ: neque igitur A ipsum B metietur. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Δύο ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός· καὶ ὁ ἐπίπεδος πρὸς τὸν ἐπίπεδον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοι οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευραὶ ἔστωσαν οἱ Γ, Δ ἀριθμοί, τοῦ δὲ Β οἱ Ε, Ζ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. λέγω οὖν ὅτι τῶν Α, Β εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ ὁ Γ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν Ε, ἢ ὁ Δ πρὸς τὴν Ζ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. καὶ ἐπεὶ ἐπίπεδός ἐστιν ὁ Α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ Γ, Δ· ὁ Δ ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν, ὁ Δ δὴ τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η. ἀλλ' ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν

A, 6. H, 12. B, 24.
Γ, 2. Δ, 3. E, 4. Z, 6.

Prop. XVIII. Theor.

Inter duos similes planos numeros unus medius proportionalis cadit: & planus ad planum duplicatam rationem habet ejus quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint duo numeri plani inter se similes A, B, & ipsius quidem A latera sint Γ, Δ, ipsius vero B latera E, Z. & quoniam [per 21. def. 7.] similes plani sunt qui latera habent proportionalia; erit ut Γ ad Δ ita E ad Z. dico inter ipsos A, B unum medium proportionalem cadere, & A ad B duplicatam rationem habere ejus quam latus homologum Γ habet ad homologum latus E, vel Δ ad Z.

Quoniam enim est ut Γ ad Δ ita E ad Z; & permutando [per 13. 7.] ut Γ ad E ita erit Δ ad Z. & quoniam planus numerus est A, cujus latera Γ, Δ; numerus Δ ipsum Γ multiplicans fecit A. eadem ratione & E multiplicans Z ipsum B fecit; numerus autem Δ ipsum E multiplicans faciat H. & cum Δ ipsum quidem Γ multiplicans faciat A; multiplicans vero E faciat H, erit [per 17. 7.] ut Γ ad E ita A ad H. sed ut Γ ad E ita Δ ad Z: & igitur ut Δ ad Z ita A ad H. rursus, quoniam E ipsum Δ multiplicans fecit H, multiplicans vero Z ipsum B fecit; ut Δ ad Z ita erit H ad B. ostensum est autem & ut Δ ad Z ita esse A ad H: & igitur ut A ad H ita H ad B: ergo A, H, B deinceps proportionales sunt: ac propterea inter A, B unus medius proportionalis cadit.

A, 6. H, 12. B, 24.

Γ, 2. Δ, 3. E, 4. Z, 6.

Dico & A ad B duplicatam rationem habere ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est quam Γ ad E vel Δ ad Z. quoniam enim A, H, B deinceps proportionales sunt, A ad B duplicatam rationem habebit ejus quam habet ad H. atque est ut A ad H ita Γ ad E & Δ ad Z: ergo & A ad B duplicatam rationem habet ejus quam Γ habet ad E vel Δ ad Z. quod erat demonstrandum.

E οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Z· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Z οὕτως ὁ A πρὸς τὸν H. πάλιν, ἐπεὶ ὁ E τὸν μὲν Δ πολλαπλασιάσας τὸν H πεποίηκε, τὸν δὲ Z πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Z οὕτως ὁ H πρὸς τὸν B. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Z οὕτως ὁ A πρὸς τὸν H· καὶ ὡς ἄρα ὁ A πρὸς τὸν H οὕτως ὁ H πρὸς τὸν B· οἱ A, H, B ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι· τῶν A, B ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός.

ΛΕΓΩ δὴ ὅτι καὶ ὁ A πρὸς τὸν B διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν E ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Z. ἐπεὶ γὰρ οἱ A, H, B ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ A πρὸς τὸν B διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸν H. καὶ ἔστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν H οὕτως ὅ,τε Γ πρὸς τὸν E καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Z· καὶ ὁ A ἄρα πρὸς τὸν B διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν E ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Z. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XIX. Theor.

Inter duos similes solidos numeros duo medii proportionales cadunt; & solidus ad similem solidum triplicatam rationem habet ejus quam latus homologum habet ad homologum latus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθʹ.

Δύο ὁμοίων στερεῶν ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογοι ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί· καὶ ὁ στερεὸς πρὸς τὸν ὅμοιον στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Sint duo numeri solidi inter se similes A, B, & ipsius quidem A latera sint Γ, Δ, E, ipsius vero latera Z, H, Θ. & quoniam [per 21. def. 7.] similes solidi sunt qui latera habent proportionalia: erit ut Γ ad Δ ita Z ad H, ut autem Δ ad E ita H ad Θ. dico inter ipsos A, B duos medios proportionales cadere, & A ad B triplicatam rationem habere ejus quam habet Γ ad Z & Δ ad H & adhuc E ad Θ.

Numerus enim Γ ipsum Δ multiplicans faciat K, Z vero multiplicans H ipsum Λ faciat. & quoniam Γ, Δ in eadem sunt ratione in qua Z, H, & ex ipsis Γ, Δ fit K, ex ipsis vero Z, H fit Λ; erunt K, Λ similes plani numeri: quare [per 18. 8.] inter ipsos unus medius proportionalis cadit. sit is numerus M: ergo M fit ex Δ, Z, ut ostensum est in præcedenti theoremate: est igitur ut K ad M ita M ad Λ. & quoniam Δ ipsum Γ multiplicans fecit K, multiplicans vero Z fecit M; erit [per 17. 7.] ut Γ ad Z ita K ad M. sed ut K ad M ita M ad Λ: ergo K, M, Λ deinceps proportionales sunt in ratione Γ ad Z. & quoniam ut Γ ad Δ ita Z ad H, erit [per 13. 7.] permutando ut Γ ad Z ita Δ ad H. rursus, quoniam ut Δ ad E ita H ad Θ; & permutando erit ut Δ ad H ita E ad Θ: ergo K, M, Λ dein-

A, 30. N, 60. Ξ, 120. B, 240.

K, 6. M, 12. Λ, 24.

Γ, 2. Δ, 3. E, 5. Z, 4. H, 6. Θ, 10.

Ἔστωσαν δύο ὅμοιοι στερεοὶ οἱ A, B, καὶ τοῦ μὲν A πλευραὶ ἔστωσαν οἱ Γ, Δ, E, τοῦ δὲ B οἱ Z, H, Θ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιοι στερεοί εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ μὲν Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν H, ὡς δὲ ὁ Δ πρὸς τὸν E οὕτως ὁ H πρὸς τὸν Θ. λέγω ὅτι τῶν A, B δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, καὶ ὁ A πρὸς τὸν B τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Z καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν H καὶ ἔτι ὁ E πρὸς τὸν Θ.

Ὁ Γ γὰρ τὸν μὲν Δ πολλαπλασιάσας τὸν K ποιείτω, ὁ δὲ Z τὸν H πολλαπλασιάσας τὸν Λ ποιείτω. καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, Δ τοῖς Z, H ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί, καὶ ἐκ μὲν τῶν Γ, Δ ἐστὶν ὁ K, ἐκ δὲ τῶν Z, H ὁ Λ· οἱ K, Λ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί· τῶν K, Λ ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός. ἔστω ὁ M· ὁ M ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ, Z ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου θεωρήματι ἐδείχθη· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ K πρὸς τὸν M οὕτως ὁ M πρὸς τὸν Λ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας τὸν K πεποίηκε, τὸν δὲ Z πολλαπλασιάσας τὸν M πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Z οὕτως ὁ K πρὸς τὸν M. ἀλλ' ὡς ὁ K πρὸς τὸν M οὕτως ὁ M πρὸς τὸν Λ· οἱ K, M, Λ ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Z λόγῳ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν H· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Z οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν H. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν E οὕτως ὁ H πρὸς τὸν Θ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν H οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Θ· οἱ K, M, Λ ἄρα

Α ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἔν τε τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ τῷ τοῦ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Θ λόγῳ. ἑκάτερος δὴ τῶν Ε, Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ν, Ξ ποιείτω. καὶ ἐπεὶ στερεός ἐστιν ὁ Α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Γ, Δ, Ε· ὁ Ε ἄρα τὸν ἐκ τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, ὁ δὲ ἐκ τῶν Γ, Δ ἐστὶν ὁ Κ· ὁ Ε ἄρα τὸν Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Θ τὸν Λ πολλαπλασιάσας τὸν ἐκ τῶν Ζ, Η τὸν Β πεποίηκε. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Ν πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Μ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ν. ὡς δὲ ὁ Κ πρὸς τὸν Μ οὕτως ὅ, τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ν. πάλιν, ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν Ε, Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ν, Ξ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. ἀλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὅ, τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὅ, τε Α πρὸς τὸν Ν καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Ξ πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Λ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Μ πρὸς τὸν Λ οὕτως ὁ Ξ πρὸς τὸν Β. ἀλλ' ὡς ὁ Μ πρὸς τὸν Λ οὕτως ὅ, τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως οὐ μόνον ὁ Ξ πρὸς τὸν Β ἀλλὰ καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Ν καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ· οἱ Α, Ν, Ξ, Β ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τοῖς εἰρημένοις τῶν πλευρῶν λόγοις.

ΛΕΓΩ ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἤπερ ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ζ ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν οἱ Α, Ν, Ξ, Β· ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Α πρὸς τὸν Ν. ἀλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ν οὕτως ἐδείχθη ὅ, τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἤπερ ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ceps proportionales sunt in ratione Γ ad Z & Δ ad H & E ad Θ. uterque autem ipsorum E, Θ multiplicans M faciat utrumque N, Ξ. & quoniam solidus est A, latera autem ipsius Γ, Δ, E, numerus E eum qui fit ex Γ, Δ multiplicans fecit A, qui vero fit ex Γ, Δ est K: ergo E multiplicans K ipsum A fecit. eadem ratione & Θ multiplicans Λ, qui fit ex Z, H, fecit ipsum B. & quoniam E ipsum K multiplicans fecit A, sed & multiplicans M fecit N; erit [per 17. 7.] ut K ad M ita A ad N. ut autem K ad M ita Γ ad Z & Δ ad H & adhuc E ad Θ: ergo ut Γ ad Z & Δ ad H & E ad Θ ita A ad N. rursus, quoniam uterque ipsorum E, Θ multiplicans M fecit utrumque N, Ξ, erit ut E ad Θ ita N ad Ξ. sed ut E ad Θ ita Γ ad Z & Δ ad H: est igitur ut Γ ad Z & Δ ad H ita & A ad N & N ad Ξ. rursus, quoniam Θ multiplicans M fecit ipsum Ξ, sed & multiplicans Λ fecit B: erit ut M ad Λ ita Ξ ad B. sed ut M ad Λ ita Γ ad Z & Δ ad H & E ad Θ: & igitur ut Γ ad Z & Δ ad H & E ad Θ ita non solum Ξ ad B sed & A ad N & N ad Ξ; ergo A, N, Ξ, B deinceps proportionales sunt in dictis laterum rationibus.

DICO & A ad B triplicatam rationem habere ejus quam habet latus homologum ad homologum latus, hoc est quam habet numerus Γ ad Z vel Δ ad H vel E ad Θ. quoniam enim quatuor numeri proportionales sunt A, N, Ξ, B, habebit A ad B triplicatam rationem ejus quam habet A ad N. sed ut A ad N ita ostensus est & Γ ad Z & Δ ad H & E ad Θ: ergo A ad B triplicatam habet rationem ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est quam Γ habet ad Z & Δ ad H & E ad Θ. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτῃ ἀριθμός, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται ἀριθμοί.

ΔΥΟ γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπιπτέτω ἀριθμὸς ὁ Γ· λέγω ὅτι οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί.

Εἰλήφθωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, οἱ Δ, Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ. ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Β· ἰσάκις ἄρα ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Ε τὸν Γ. ὁσάκις δὴ ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ζ·

A, 8. Γ, 12. B, 18.
Δ, 2. E, 3. Z, 4. H, 6.

PROP. XX. THEOR.

Si inter duos numeros unus medius proportionalis cadat; numeri similes plani erunt.

INter duos enim numeros A, B unus medius proportionalis cadat Γ: dico numeros A, B similes planos esse.

Sumantur enim [per 35. 7.] Δ, E minimi omnium eandem cum ipsis A, Γ, rationem habentium: est igitur ut Δ ad E ita A ad Γ. ut autem A ad Γ ita Γ ad B: æqualiter igitur Δ ipsum A metitur atque E ipsum Γ. & quoties Δ metitur A, tot unitates sint in in Z; proptereaque Z multiplicans Δ ipsum A fecit, multiplicans vero E fecit Γ: quare A planus numerus est, cujus latera Δ, Z. rursus, quoniam Δ, E sunt minimi omnium eandem cum Γ, B rationem habentium; Δ æqualiter ipsum Γ metitur atque E ipsum B. quoties autem B ipsum B metitur, tot unitates sint in H: ergo E ipsum B metitur per eas quæ sunt in H unitates: quare H ipsum E multiplicans fecit B: ideoque B numerus planus est, cujus latera E, H: ergo numeri A, B sunt plani. dico & similes esse. quoniam enim uterque ipsorum Z, H multiplicans E utrumque Γ, B fecit, [per 18. 7.] ut Z ad H ita erit Γ ad B. ut autem Γ ad B ita Δ ad E: & igitur ut Δ ad E ita Z ad H: quare [per 21. def. 7.] A, B similes plani sunt; cum ipsorum latera sint proportionalia. quod erat demonstrandum.

A, 8. Γ, 12, B, 18,
Δ, 2. E, 3. Z, 4. H, 6.

ὁ Z ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκε, τὸν δὲ E πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὥστε ὁ A ἐπίπεδός ἐστιν, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ Δ, Z. πάλιν, ἐπεὶ οἱ Δ, E ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Γ, B· ἰσάκις ἄρα ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ καὶ ὁ E τὸν B. ὁσάκις δὴ ὁ E τὸν B μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ H· ὁ E ἄρα τὸν B μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ H μονάδας· ὁ H ἄρα τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν· ὁ B ἄρα ἐπίπεδός ἐστι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ E, H· οἱ A, B ἄρα ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί. λέγω δὴ ὅτι καὶ ὅμοιοι. ἐπεὶ γὰρ ἑκάτερος τῶν Z, H τὸν E πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Γ, B πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Z πρὸς τὸν H οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν B. ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν E· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν E οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν H· οἱ A, B ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί εἰσιν, αἱ γὰρ αὐτῶν πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXI. Probl.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα΄.

Si inter duos numeros duo medii proportionales cadant; numeri similes solidi erunt.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅμοιοι στερεοί εἰσιν οἱ ἀριθμοί.

Inter duos enim numeros A, B duo medii proportionales cadant Γ, Δ: dico ipsos A, B similes solidos esse.

Sumantur enim [per 35. 7.] numeri tres minimi omnium eandem cum A, Γ, Δ rationem habentium, qui sint E, Z, H: extremi igitur ipsorum E, H [per 3. 8.] primi inter se sunt. & quoniam inter E, H unus medius proportionalis Z cecidit, erunt [per 20. 8.] numeri E, H similes plani. sint ipsius quidem E latera Θ, K, ipsius vero H latera Λ, M: manifestum igitur est ex antecedente E, Z, H deinceps proportionales esse in ratione Θ ad Λ & in ratione K ad M. & quoniam E, Z, H minimi sunt eandem quam A, Γ, Δ rationem habentium, erit ex æquo [per 14. 7.] ut E ad H ita A ad Δ. sunt autem E, H primi, sed [per 23. 7.] primi sunt & minimi, minimi vero eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, [per 21. 7.] major majorem & minor minorem, hoc est antecedens antecedentem & consequens consequentem: ergo E ipsum A æqualiter metitur atque H ipsum Δ. quoties autem E metitur A, tot unitates sint in N: ergo N ipsum E multiplicans fecit A. sed E fit ex Θ, K: ac propterea N eum qui fit ex Θ, K multiplicans ipsum A fecit: solidus igitur est A, cujus latera Θ, K, N. rursus, quoniam E, Z, H minimi sunt eandem quam ipsi Γ, Δ, B rationem habentium, E ipsum Γ æqualiter metitur atque H ipsum B. & quoties H metitur B tot unitates sint in Ξ: ergo H ipsum B metitur per eas quæ sunt in Ξ unitates; ideoque Ξ mul-

A, 24. Γ, 72. Δ, 216. B, 648.
E, 1. Z, 3. H, 9.
Θ, 1. K, 1. N, 24. Λ, 3. M, 3. Ξ, 72.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν A, B δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν ἀριθμοί, οἱ Γ, Δ· λέγω ὅτι οἱ A, B ὅμοιοι στερεοί εἰσιν.

Εἰλήφθωσαν γὰρ τρεῖς ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς A, Γ, Δ, οἱ E, Z, H· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ E, H πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. καὶ ἐπεὶ τῶν E, H εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπέπτωκεν ἀριθμὸς ὁ Z· οἱ E, H ἄρα ἀριθμοὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί. ἔστωσαν οὖν τοῦ μὲν E πλευραὶ οἱ Θ, K, τοῦ δὲ H οἱ Λ, M· φανερὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τούτου ὅτι οἱ E, Z, H ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἔν τε τῷ τοῦ Θ πρὸς τὸν Λ λόγῳ καὶ τῷ τοῦ K πρὸς τὸν M. καὶ ἐπεὶ οἱ E, Z, H ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς A, Γ, Δ· δίϊσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ E πρὸς τὸν H οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Δ. οἱ δὲ E, H πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ἰσάκις ἄρα ὁ E τὸν A μετρεῖ καὶ ὁ H τὸν Δ. ὁσάκις δὴ ὁ E τὸν A μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ N· ὁ N ἄρα τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκεν. ὁ δὲ E ἐστιν ὁ ἐκ τῶν Θ, K· ὁ N ἄρα τὸν ἐκ τῶν Θ, K πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκε· στερεὸς ἄρα ἐστὶν ὁ A, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Θ, K, N. πάλιν, ἐπεὶ οἱ E, Z, H ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Γ, Δ, B· ἰσάκις ἄρα ὁ E τὸν Γ μετρεῖ καὶ ὁ H τὸν B. ὁσάκις δὴ ὁ H τὸν B μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ξ· ὁ H ἄρα τὸν B μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ξ μονάδας· ὁ Ξ ἄρα

ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. ὁ δὲ Η ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Λ, Μ· ὁ Ξ ἄρα τὸν ἐκ τῶν Λ, Μ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν [* τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν] στερεὸς ἄρα ἐστὶν ὁ Β, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Λ, Μ, Ξ· οἱ Α, Β ἄρα στερεοί εἰσι. λέγω δὴ ὅτι καὶ ὅμοιοι. ἐπεὶ γὰρ οἱ Ν, Ξ τὸν Ε πολλαπλασιάσαντες τοὺς Α, Γ πεποιήκασιν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ, τουτέστιν ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. ἀλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Λ καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Μ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Θ πρὸς τὸν Λ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Μ καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. καί εἰσιν οἱ μὲν Θ, Κ, Ν πλευραὶ τοῦ Α, οἱ δὲ Ξ, Λ, Μ πλευραὶ τοῦ Β· οἱ Α, Β ἄρα ὅμοιοι στερεοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

tiplicans H ipsum B fecit. at H fit ex Λ, M: ergo Ξ eum qui fit ex Λ, M multiplicans fecit B; [multiplicans vero E ipsum Γ fecit.] solidus igitur est B, & ejus latera Λ, M, Ξ: quare A, B solidi sunt. dico etiam eos similes esse. quoniam enim N, Ξ multiplicantes E ipsos A, Γ fecerunt, [per 17. 7.] ut N ad Ξ ita erit A ad Γ, hoc est E ad Z. sed ut E ad Z ita Θ ad Λ & K ad M: & igitur ut Θ ad Λ ita K ad M & N ad Ξ. sunt autem Θ, K, N latera ipsius A, & Λ, M, Ξ latera ipsius B: ergo A, B similes solidi erunt. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾖ· καὶ ὁ τρίτος τετράγωνος ἔσται.

Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, ὁ δὲ πρῶτος ὁ Α τετράγωνος ἔστω· λέγω ὅτι καὶ ὁ τρίτος ὁ Γ τετράγωνός ἐστι.

Ἐπεὶ γὰρ τῶν Α, Γ εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς ὁ Β· οἱ Α, Γ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι. τετράγωνος δὲ ὁ Α· τετράγωνος ἄρα καὶ ὁ Γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Α, 4. Β, 6. Γ, 9.

PROP. XXII. THEOR.

Si tres numeri deinceps proportionales fuerint, primus autem sit quadratus; & tertius quadratus erit.

Sint tres numeri deinceps proportionales A, B, Γ, sitque primus A quadratus: dico & tertium Γ quadratum esse.

Quoniam enim inter A, Γ unus medius proportionalis cadit B, erunt [per 20. 8.] A, Γ similes plani. sed A est quadratus: ergo & Γ quadratus erit. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ· καὶ ὁ τέταρτος κύβος ἔσται.

Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ Α κύβος ἔστω· λέγω ὅτι καὶ ὁ Δ κύβος ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ τῶν Α, Δ δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, οἱ Β, Γ· οἱ Α, Δ ἄρα ὅμοιοί εἰσι στερεοὶ ἀριθμοί. κύβος δὲ ὁ Α· κύβος ἄρα καὶ ὁ Δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Α, 8. Β, 12. Γ, 18. Δ, 27.

PROP. XXIII. THEOR.

Si quatuor numeri deinceps proportionales fuerint, primus autem sit cubus; & quartus cubus erit.

Sint quatuor numeri deinceps proportionales A, B, Γ, Δ, & A sit cubus: dico & Δ cubum esse.

Quoniam enim inter A, Δ duo medii proportionales cadunt B, Γ, erunt [per 21. 8.] A, Δ similes solidi. est autem A cubus: ergo & Δ cubus erit. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾖ· καὶ ὁ δεύτερος τετράγωνος ἔσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρὸς ἀλλήλους λόγον ἐχέτωσαν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς τε-

PROP. XXIV. THEOR.

Si duo numeri inter se rationem habeant quam numerus quadratus ad quadratum numerum, primus autem sit quadratus; & secundus quadratus erit.

Duo enim numeri A, B inter se rationem habeant quam numerus quadratus

* Illa uncis inclusa desunt in MS. Bodl. & commode abesse possunt.

Γ ad

Γ ad quadratum numerum Δ, sitque A quadratus: dico & B quadratum esse.

Quoniam enim Γ, Δ quadrati sunt, erunt Γ, Δ similes plani: ideoque [per 18. 8.] inter ipsos Γ, Δ unus medius proportionalis cadit. est autem ut Γ ad Δ ita A ad B: quare [per 8. 8.] etiam inter A, B cadit unus medius proportionalis. estque A quadratus: ergo [per 22. 8.] & B quadratus erit. quod erat demonstrandum.

A, 4. B, 9.
Γ, 16. Δ, 36.

τράγωνον ἀριθμὸν τὸν Δ, ὁ δὲ A τετράγωνος ἔστω· λέγω ὅτι καὶ ὁ B τετράγωνός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ Γ, Δ τετράγωνοί εἰσιν· οἱ Γ, Δ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι· τῶν Γ, Δ ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. καί ἐστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B· καὶ τῶν A, B ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. καί ἐστιν ὁ A τετράγωνος· καὶ ὁ B ἄρα τετράγωνός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXV. Theor.

Si duo numeri inter se rationem habeant quam numerus cubus ad cubum numerum, primus autem sit cubus; & secundus cubus erit.

DUO enim numeri A, B inter se rationem habeant quam cubus numerus Γ ad numerum cubum Δ, sitque A cubus: dico & B cubum esse.

Quoniam enim Γ, Δ cubi sunt, erunt Γ, Δ similes solidi: idcirco [per 19. 8.] inter ipsos duo medii proportionales cadent. quot autem inter Γ, Δ cadunt medii proportionales, totidem [per 8. 8.] cadent & inter eos qui eandem quam ipsi rationem habent: ergo inter A, B duo medii cadent proportionales. cadant E, Z. quoniam igitur quatuor numeri A, E, Z, B deinceps proportionales sunt, estque A cubus; & [per 23. 8.] B cubus erit. quod erat demonstrandum.

A, 8. E, 12. Z, 18. B, 27.
Γ, 64. Δ, 216.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ· καὶ ὁ δεύτερος κύβος ἔσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ A, B πρὸς ἀλλήλους λόγον ἐχέτωσαν ὃν κύβος ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς κύβον ἀριθμὸν τὸν Δ, κύβος δὲ ἔστω ὁ A· λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ B κύβος ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ Γ, Δ κύβοι εἰσίν, οἱ Γ, Δ ὅμοιοι στερεοί εἰσι· τῶν Γ, Δ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. ὅσοι δὲ εἰς τοὺς Γ, Δ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς· ὥστε καὶ τῶν A, B δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. ἐμπιπτέτωσαν οἱ E, Z. ἐπεὶ οὖν τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱ A, E, Z, B ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καί ἐστι κύβος ὁ A· κύβος ἄρα καὶ ὁ B. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXVI. Theor.

Similes plani numeri inter se rationem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum.

SInt similes plani numeri A, B: dico A ad B rationem habere quam numerus quadratus ad quadratum numerum.

Quoniam enim A, B similes plani sunt, [per 18. 8.] inter eos cadit unus medius proportionalis. cadat, sitque Γ, & sumantur [per 35. 7.] minimi numeri eandem quam A, Γ, B rationem habentium, sc. Δ, E, Z: ergo [per coroll. 2. 8.] ipsorum extremi Δ, Z quadrati sunt. & quoniam est ut Δ ad Z ita A ad B, & sunt Δ, Z quadrati; habebit A ad B rationem quam numerus quadratus ad quadratum numerum. quod erat demonstrandum.

A, 6. Γ, 12. B, 24.
Δ, 1. E, 2. Z, 4.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Ἔστωσαν ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ A, B· λέγω ὅτι ὁ A πρὸς τὸν B λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ A, B ἐπίπεδοί εἰσι· τῶν A, B ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. ἐμπιπτέτω, καὶ ἔστω ὁ Γ, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς A, Γ, B, οἱ Δ, E, Z· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Δ, Z τετράγωνοί εἰσι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Z οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B καί εἰσιν οἱ Δ, Z τετράγωνοι· ὁ A ἄρα πρὸς τὸν B λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζʹ.

Οἱ ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν.

Ἔστωσαν ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοί, οἱ Α, Β· λέγω ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β ὅμοιοι στερεοί εἰσι· τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. ἐμπιπτέτωσαν οἱ Γ, Δ, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, Δ, Β ἴσοι αὐτοῖς τὸ πλῆθος, οἱ Ε, Ζ, Η, Θ· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Ε, Θ κύβοι εἰσί. καὶ ἔστιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXVII. Theor.

Similes ſolidi numeri inter ſe rationem habent, quam numerus cubus ad cubum numerum.

Sint ſimiles ſolidi numeri A, B: dico A ad B rationem habere quam numerus cubus ad cubum numerum.

A, 16.	Γ, 24.	Δ, 36.	B, 54.
E, 8.	Z, 12.	H, 18.	Θ, 27.

Quoniam enim A, B ſimiles ſolidi ſunt, [per 19. 8.] inter ipſos duo medii proportionales cadent. cadant Γ, Δ; & ſumantur [per 2. 8.] minimi numeri, qui eandem quam A, Γ, Δ, B rationem habeant, ipſis multitudine æquales E, Z, H, Θ: ergo [per corol. 2. 8.] eorum extremi E, Θ cubi ſunt. atque eſt ut E ad Θ ita A ad B: habet igitur A ad B rationem quam numerus cubus ad cubum numerum. quod erat demonſtrandum.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER NONUS.

Prop. I. Theor.

Si duo similes plani numeri sese multiplicantes aliquem fecerint, factus quadratus erit.

SINT duo similes plani numeri A, B, & A ipsum B multiplicans faciat Γ: dico Γ quadratum esse.

Numerus enim A seipsum multiplicans faciat Δ: ergo Δ quadratus est. quoniam igitur A seipsum multiplicans fecit Δ, multiplicans vero B ipsum Γ fecit; ut A ad B ita erit [per 17. 7.] Δ ad Γ. & quoniam A, B similes plani sunt, [per 18. 8.] inter ipsos unus medius proportionalis cadet. si autem inter duos numeros numeri deinceps proportionales ceciderint, quot inter ipsos cadunt [per 8. 8.] totidem cadent & inter eos qui eandem habent rationem: quare & inter Δ, Γ unus medius proportionalis cadit. atque est Δ quadratus: ergo & Γ quadratus erit. quod erat demonstrandum.

A, 6.
Δ, 36.
B, 54.
Γ, 324.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος τετράγωνος ἔσται.

ΕΣΤΩΣΑΝ δύο ὅμοιοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν.

Ὁ γὰρ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστι. καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί· τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. ἐὰν δὲ δύο μεταξὺ ἀριθμῶν κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς ἐμπίπτουσι τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας· ὥστε καὶ τῶν Δ, Γ εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. καὶ ἔστι τετράγωνος ὁ Δ· τετράγωνος ἄρα καὶ ὁ Γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. II. Theor.

Si duo numeri sese multiplicantes quadratum numerum efficiant, similes plani erunt.

DUO enim numeri A, B sese multiplicantes quadratum numerum Γ efficiant: dico A, B similes planos esse.

Numerus enim A seipsum multiplicans faciat Δ: ergo Δ quadratus est. quoniam igitur A seipsum multiplicans fecit Δ, multiplicans vero B ipsum Γ fecit; ut A ad B [per 17. 7.] ita erit Δ ad Γ. & quoniam Δ quadratus

A, 3.
Δ, 9.
B, 12.
Γ, 36.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσι τετράγωνον, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι.

ΔΥΟ γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους τετράγωνον τὸν Γ ποιείτωσαν· λέγω ὅτι οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί.

Ὁ γὰρ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστι. καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τετράγωνος τετράγωνός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ὁ Γ· οἱ Δ, Γ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι· τῶν Δ, Γ ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. καί ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί· οἱ Α, Β ἄρα ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

est, sed & Γ etiam; erunt Δ, Γ similes plani: quare [per 18. 8.] inter Δ, Γ unus medius proportionalis cadit. atque est ut Δ ad Γ ita A ad B: ergo [per 8. 8.] & inter A, B cadet unus medius proportionalis. si autem inter duos numeros unus medius proportionalis cadat, [per 20. 8.] erunt similes plani: ergo A, B similes plani sunt. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Β κύβος ἐστίν.

Εἰλήφθω γὰρ τοῦ Α πλευρά, ὁ Γ, καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· φανερὸν δή ἐστιν ὅτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ Γ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν· ὁ Δ ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Α. ἀλλ' ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Α· τῆς ἄρα μονάδος καὶ τοῦ Α ἀριθμοῦ δύο μέσοι ἀνάλογον κατὰ τὸ συνεχὲς ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, οἱ Γ, Δ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. τῆς δὲ μονάδος καὶ τοῦ Α δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί· καὶ τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ, καὶ ὁ τέταρτος κύβος ἔσται. καί ἐστιν ὁ Α κύβος· καὶ ὁ Β ἄρα κύβος ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. III. Theor.

Si cubus numerus seipsum multiplicans faciat aliquem, factus cubus erit.

Cubus enim numerus A seipsum multiplicans faciat B: dico B cubum esse.

A, 8.
Δ, 4.
Γ, 2.
I.
B, 64.

Sumatur enim ipsius A latus Γ, & Γ seipsum multiplicans faciat Δ: manifestum igitur est [per 19. def. 7.] Γ multiplicantem Δ facere ipsum A. & quoniam Γ seipsum multiplicans fecit Δ, metitur Γ ipsum Δ per unitates quæ in ipso sunt. sed & unitas metitur Γ per eas quæ in ipso sunt unitates: est igitur [per 20. def. 7.] ut unitas ad Γ ita Γ ad Δ. rursus, quoniam Γ multiplicans Δ ipsum A fecit, metitur Δ ipsum A per unitates quæ sunt in Γ. metitur autem & unitas ipsum Γ per unitates quæ in ipso sunt: ergo ut unitas ad Γ ita Δ ad A. sed ut unitas ad Γ ita Γ ad Δ: ut igitur unitas ad Γ ita Γ ad Δ & Δ ad A: ideoque inter unitatem & numerum A duo medii deinceps proportionales cadunt Γ, Δ. rursus, quoniam A seipsum multiplicans fecit B, & A ipsum B metitur per unitates quæ in ipso sunt. metitur autem & unitas ipsum A per unitates quæ sunt in ipso: est igitur [per 20. def. 7.] ut unitas ad A ita A ad B. sed inter unitatem & A cadunt duo medii proportionales: ergo [per 8. 8.] & inter A & B duo medii proportionales cadent. quod si inter duos numeros cadant duo medii proportionales, primus autem sit cubus [per 23. 8.] & quartus cubus erit. atque est A cubus: ergo & B cubus erit. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον ἀριθμὸν τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ κύβος ἐστίν.

Ὁ Α γὰρ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· ὁ Δ ἄρα κύβος ἐστί. καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. καὶ ἐπεὶ οἱ

Prop. IV. Theor.

Si numerus cubus cubum numerum multiplicans faciat aliquem, factus cubus erit.

Cubus enim numerus A cubum numerum B multiplicans ipsum Γ faciat: dico Γ cubum esse.

A, 8.
Δ, 64.
B, 27.
Γ, 216.

Numerus enim A seipsum multiplicans faciat Δ: ergo [per 3. 9.] Δ cubus est. & quoniam A seipsum multiplicans fecit Δ; multiplicans vero B ipsum Γ fecit: ut A ad B [per 17. 7.] ita erit Δ ad Γ. & quoniam

A, B cubi sunt, erunt similes solidi numeri: ac propterea [per 19. 8.] inter A, B cadent duo medii proportionales: quare [per 8. 8.] & inter Δ, Γ duo medii proportionales cadent. estque Δ cubus: ergo [per 23. 8.] & Γ cubus erit. quod erat demonstrandum.

A, 8. B, 27. Γ, 216. Δ, 64.

Α, Β κύβοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοί εἰσι· τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί· ὥστε καὶ τῶν Δ, Γ δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί. καί ἐστι κύβος ὁ Δ· κύβος ἄρα καὶ ὁ Γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. V. Theor.

Si cubus numerus numerum aliquem multiplicans faciat cubum, & multiplicatus cubus erit.

Cubus enim A numerum aliquem B multiplicans faciat cubum Γ: dico B cubum esse.

Numerus enim A seipsum multiplicans faciat Δ: ergo [per 3. 9.] Δ cubus est. & quoniam A seipsum quidem multiplicans fecit Δ, multiplicans vero B ipsum Γ fecit; ut A ad B ita erit [per 17. 7.] Δ ad Γ. & quoniam Δ, Γ cubi sunt, similes sunt solidi; ac propterea [per 19. 8.] inter ipsos cadunt duo medii proportionales. atque est ut Δ ad Γ ita A ad B: ergo [per 8. 8.] & inter A, B duo medii proportionales cadent. estque A cubus; ergo [per 23. 8.] & B cubus erit. quod erat demonstrandum.

A, 8. Δ, 64. B, 27. Γ, 216.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ ὁ πολλαπλασιασθεὶς κύβος ἔσται.

Κύβος γὰρ ὁ Α ἀριθμόν τινα τὸν Β πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Β κύβος ἐστίν.

Ὁ γὰρ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· κύβος ἄρα ἐστὶν ὁ Δ. καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. καὶ ἐπεὶ οἱ Δ, Γ κύβοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοί εἰσι· τῶν Δ, Γ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. καί ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. καί ἐστι κύβος ὁ Α· κύβος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ Β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VI. Theor.

Si numerus seipsum multiplicans cubum faciat, & ipse cubus erit.

Numerus enim A seipsum multiplicans cubum B faciat: dico & A cubum esse.

Numerus enim A multiplicans B faciat Γ. quoniam igitur A seipsum multiplicans fecit B, multiplicans vero B ipsum Γ fecit, erit [per 19. def. 7.] Γ cubus. & quoniam A seipsum quidem multiplicans fecit B, multiplicans vero B fecit Γ, ut A ad B [per 17. 7.] ita erit B ad Γ. & quoniam B, Γ cubi sunt, similes solidi erunt: ideoque [per 19. 8.] inter B, Γ, duo medii proportionales cadunt. & est ut B ad Γ ita A ad B: quare [per 8. 8.] & inter A, B duo medii proportionales cadunt. atque est B cubus: ergo [per 23. 8.] & A cubus erit. quod erat demonstrandum.

A, 8. B, 64. Γ, 512.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ς'.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Β ποιείτω· λέγω ὅτι καὶ ὁ Α κύβος ἐστίν.

Ὁ γὰρ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Γ ἄρα κύβος ἐστί. καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. καὶ ἐπεὶ οἱ Β, Γ κύβοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοί εἰσι· τῶν Β, Γ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί. καί ἐστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί. καί ἐστι κύβος ὁ Β· κύβος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ Α. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VII. Theor.

Si compositus numerus numerum aliquem multiplicans quempiam faciat, factus solidus erit.

Compositus enim numerus A numerum aliquem B multiplicans ipsum Γ faciat: dico Γ solidum esse.

Quoniam enim A compositus est, [per 13. def. 7.] eum numerus aliquis metietur. metiatur Δ. &

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Ἐὰν σύνθετος ἀριθμὸς ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος στερεὸς ἔσται.

Σύνθετος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἀριθμόν τινα τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ στερεός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α σύνθετός ἐστιν, ὑπὸ ἀριθμοῦ τινὸς μετρηθήσεται. μετρείσθω ὑπὸ τοῦ Δ. καὶ ὁσάκις ὁ Δ ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ τοσαῦται μονάδες εἰσὶν ἐν τῷ Ε· ὁ Ε ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. καὶ ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ὁ δὲ Α ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ, Ε· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Δ, Ε τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Β ἄρα τὸν ἐκ τῶν Δ, Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Γ ἄρα στερεός ἐστι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Δ, Ε, Β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

A, 6. B, 7. Γ, 42.
Δ, 3. E, 2.

quoties Δ ipsum A metitur tot unitates sint in E: ergo E multiplicans Δ fecit A. & quoniam A ipsum B multiplicans fecit Γ, estque A qui fit ex Δ, E, numerus qui fit ex Δ, E ipsum B multiplicans fecit Γ: ergo [per 16. 7.] B multiplicans eum qui fit ex Δ, E ipsum Γ fecit: ac propterea [per 17. def. 7.] Γ solidus est, cujus latera Δ, E, B. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος τετράγωνός ἐστι καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ τέταρτος κύβος καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ ἕβδομος κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ· λέγω ὅτι ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Β τετράγωνός ἐστι καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ τέταρτος ὁ Γ κύβος καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ ἕβδομος ὁ Ζ κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος καὶ οἱ πέντε διαλείποντες ἅπαντες.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Β. ἡ δὲ μονὰς τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας· ὁ Α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε· τετράγωνος ἄρα ἐστὶν ὁ Β. καὶ ἐπεὶ οἱ Β, Γ, Δ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ Β τετράγωνός ἐστι· καὶ ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ζ τετράγωνός ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες τετράγωνοί εἰσι. λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Γ κύβος ἐστί, καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Γ. ἡ δὲ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας· ὁ Α ἄρα τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ἐπεὶ οὖν ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκε· κύβος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ. καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, Δ, Ε, Ζ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ Γ κύβος· καὶ ὁ Ζ ἄρα κύβος ἐστίν. ἐδείχθη δὲ καὶ τετράγωνος· ὁ ἄρα ἕβδομος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Ζ κύβος τέ ἐστι καὶ τετράγωνος. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ πέντε διαλείποντες ἅπαντες κύβοι τέ εἰσι καὶ τετράγωνοι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VIII. Theor.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, tertius quidem ab unitate quadratus est, & unum intermittentes omnes; quartus autem est cubus, & duos intermittentes omnes; septimus vero cubus simul & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

Sint ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, Γ, Δ, E, Z: dico tertium quidem ab unitate sc. B quadratum esse, & unum intermittentes omnes; quartum autem Γ cubum, & duos intermittentes omnes; septimum vero Z cubum simul & quadratum, & quinque intermittentes omnes.

Quoniam enim ut unitas ad A ita A ad B, unitas æqualiter metitur numerum A [per 20. def. 7.] atque A ipsum B. sed unitas metitur A per unitates quæ in ipso sunt: ergo & A ipsum B per unitates quæ sunt in A metitur: quare A seipsum multiplicans fecit B; quadratus igitur est B. & quoniam B, Γ, Δ deinceps proportionales sunt, estque B quadratus; [per 22. 8.] & Δ quadratus erit. eadem ratione erit & Z quadratus. similiter demonstrabimus & unum intermittentes omnes quadratos esse. Dico & quartum ab unitate, videlicet Γ, esse cubum, & duos intermittentes omnes. quoniam enim est ut unitas ad A ita B ad Γ: unitas numerum A æqualiter metitur [per 20. def. 7.] atque B ipsum Γ. sed unitas numerum A metitur per unitates quæ in A sunt: ergo & B metitur Γ per unitates quæ sunt in A; & ob id A multiplicans B ipsum Γ fecit. quoniam igitur A seipsum multiplicans fecit B, multiplicans vero B fecit Γ; erit [per 19. def. 7.] Γ cubus. quod cum Γ, Δ, E, Z deinceps proportionales sint, sitque Γ cubus, [per 23. 8.] & Z cubus erit. ostensum autem est quadratum esse: septimus igitur ab unitate Z & cubus est & quadratus. similiter quoque demonstrabimus quinque intermittentes omnes & cubos & quadratos esse. quod erat demonstrandum.

I. A, 3. B, 9. Γ, 27. Δ, 81. E, 243. Z, 729.

Prop. IX. Theor.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post unitatem sit quadratus; & reliqui omnes quadrati erunt. si post unitatem sit cubus; & reliqui omnes cubi erunt.

Sint ab unitate numeri quotcunque deinceps proportionales A, B, Γ, Δ, E, Z, & qui post unitatem A sit quadratus: dico & reliquos omnes quadratos esse.

Tertium quidem ab unitate B esse quadratum, & unum intermittentes omnes demonstratum jam est [in præc.]: dico & reliquos omnes quadratos esse. quoniam enim A, B, Γ deinceps sunt proportionales estque A quadratus; [per 22. 8.] & Γ quadratus erit. rursus, quoniam B, Γ, Δ, deinceps proportionales sunt; est autem B quadratus: & Δ quadratus erit. similiter ostendemus & reliquos omnes quadratos esse.

1. A, 4. B, 16. Γ, 64. Δ, 256. E, 1024. Z, 4096.

Sit autem A cubus: dico & reliquos cubos esse.

Quartum quidem ab unitate Γ esse cubum, & duos intermittentes omnes, jam demonstratum est [in præc.]: dico & reliquos omnes cubos esse. quoniam enim est ut unitas ad A ita A ad B [per 20. def. 7.] unitas numerum A æqualiter metitur atque A ipsum B. sed unitas metitur numerum A per unitates quæ sunt in ipso: quare & A numerum B metitur per unitates quæ in ipso sunt: ergo A seipsum multiplicans fecit B, atque est A cubus. si autem cubus numerus seipsum multiplicans fecerit aliquem, [per 3. 9.] factus cubus erit; ergo B est cubus. & quoniam quatuor numeri A, B, Γ, Δ deinceps proportionales sunt, estque A cubus; [per 23. 8.] & Δ cubus erit. eadem ratione & E est cubus, & similiter reliqui omnes cubi sunt. quod erat demonstrandum.

1. A, 8. B, 64. Γ, 512. Δ, 4096. E, 32768. Z, 262144.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θʹ.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα τετράγωνος ᾖ· καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται. καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος ᾖ· καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι ἔσονται.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀνάλογον ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ, οἱ A, B, Γ, Δ, E, Z, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ A τετράγωνος ἔστω· λέγω ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται.

Ὅτι μὲν οὖν ὁ τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ B τετράγωνός ἐστι, καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες, δέδεικται· λέγω ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοί εἰσιν. ἐπεὶ γὰρ οἱ A, B, Γ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστιν ὁ A τετράγωνος· καὶ ὁ Γ ἄρα τετράγωνός ἐστι. πάλιν, ἐπεὶ οἱ B, Γ, Δ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστιν ὁ B τετράγωνος· καὶ ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοί εἰσιν.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὁ A κύβος· λέγω ὅτι οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν.

Ὅτι μὲν οὖν ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Γ κύβος ἐστὶ καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, δέδεικται· λέγω δὴ ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν A οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν A μετρεῖ καὶ ὁ A τὸν B. ἡ δὲ μονὰς τὸν A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ A ἄρα τὸν B μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ὁ A ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκε, καὶ ἔστιν ὁ A κύβος. ἐὰν δὲ κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἐστί· καὶ ὁ B ἄρα κύβος ἐστί. καὶ ἐπεὶ τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱ A, B, Γ, Δ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστιν ὁ A κύβος· καὶ ὁ Δ ἄρα κύβος ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ E κύβος ἐστί, καὶ ὁμοίως οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. X. Theor.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post unitatem non sit quadratus; neque alius ullus quadratus erit præter tertium ab unitate & unum intermittentes omnes. si qui post unitatem non sit cubus; neque alius ullus cubus erit, præter quartum ab unitate & duos intermittentes omnes.

Sint ab unitate deinceps proportionales numeri A, B, Γ, Δ, E, Z, & qui post unitatem ipse A non sit quadratus: dico neque alium ullum

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιʹ.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα μὴ ᾖ τετράγωνος· οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος ἔσται, χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἕνα διαλειπόντων πάντων. καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος μὴ ᾖ· οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται, χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων πάντων.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀνάλογον ἀριθμοὶ οἱ A, B, Γ, Δ, E, Z, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ A μὴ ἔστω τετράγωνος· λέγω ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος

τετράγωνος ἔσται, πλὴν τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἕνα διαλειπόντων.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω ὁ Γ τετράγωνος. ἔστι δὲ καὶ ὁ Β τετράγωνος· οἱ Β, Γ ἄρα πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ ἔστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· οἱ Α, Β ἄρα πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὥστε οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι. καὶ ἔστι τετράγωνος ὁ Β· τετράγωνος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ Α, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδ᾽ ἄλλος οὐδεὶς, χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἕνα διαλειπόντων.

1. A, 2. B, 4. Γ, 8. Δ, 16. E, 32. Z, 64.

ΑΛΛΑ δὴ μὴ ἔστω ὁ Α κύβος. λέγω δὴ ὅτι οὐδ᾽ ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται, χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω ὁ Δ κύβος. ἔστι δὲ καὶ ὁ Γ κύβος, τέταρτος γάρ ἐστιν ἀπὸ τῆς μονάδος, καὶ ἔστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· καὶ ὁ Β ἄρα πρὸς τὸν Γ λόγον ἔχει ὃν κύβος πρὸς κύβον· οἱ Β, Γ ἄρα ὅμοιοι στερεοί. καὶ ἔστιν ὁ Γ κύβος· καὶ ὁ Β ἄρα κύβος ἐστί. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, ἡ δὲ μονὰς τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Β πεποίηκεν. ἐὰν δὲ ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται· κύβος ἄρα καὶ ὁ Α, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ὁ Δ κύβος ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδ᾽ ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἐστὶ, χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

quadratum esse, præter tertium ab unitate & unum intermittentes omnes.

Si enim fieri potest, sit Γ quadratus. est autem [per 8. 9.] & B quadratus: ergo B, Γ inter se rationem habent quam numerus quadratus ad quadratum numerum. atque est ut B ad Γ ita A ad B: habent igitur A, B inter se rationem eam quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ideoque [per 21. def. 1.] A, B similes plani sunt. & est B quadratus: ergo & A quadratus est, * quod non supponitur; non igitur Γ quadratus erit. similiter ostendemus neque alium ullum quadratum esse, præter tertium ab unitate & unum intermittentes omnes.

SED non sit A cubus. dico neque alium ullum cubum esse, præter quartum ab unitate, & duos intermittentes omnes.

Si enim fieri potest sit Δ cubus. est autem [per 8. 9.] & cubus Γ, quartus enim est ab unitate; & ut Γ ad Δ ita est B ad Γ: ergo & B ad Γ rationem habet quam cubus ad cubum; ac propterea [per 21. def. 7.] B, Γ similes solidi sunt. atque est Γ cubus; ergo & B cubus erit. & quoniam est ut unitas ad numerum A ita A ad B, unitas autem numerum A metitur per unitates quæ sunt in ipso; & A metietur B [per 20. def. 7.] per unitates quæ in ipso sunt: quare A seipsum multiplicans cubum B fecit. si autem numerus seipsum multiplicans cubum faciat, [per 6. 9.] & ipse cubus erit: cubus igitur est A, quod non supponitur: ergo neque Δ est cubus. similiter demonstrabimus neque alium ullum cubum esse, præter quartum ab unitate & duos intermittentes omnes. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια′.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐλάττων τὸν μείζονα μετρεῖ κατά τινα τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος τῆς Α ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ Β, Γ, Δ, Ε· λέγω ὅτι τῶν Β, Γ, Δ, Ε ὁ ἐλάσσων ὁ Β τὸν Ε μείζονα μετρεῖ κατά τινα τῶν Γ, Δ.

A, 1. B, 3. Γ, 9. Δ, 27. E, 81.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α μονὰς πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ἰσάκις ἄρα ἡ Α μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν Ε· ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ Α μονὰς τὸν Δ μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Ε. ἡ δὲ Α μονὰς τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Ε μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ὥστε ὁ ἐλάσσων ὁ Β τὸν μείζονα τὸν Ε μετρεῖ κατά τινα ἀριθμὸν τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XI. THEOR.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, minor majorem metitur per aliquem eorum qui sunt in numeris proportionalibus.

SInt ab unitate A quotcunque numeri deinceps proportionales B, Γ, Δ, E: dico horum B, Γ, Δ, E minorem numerum B majorem E metiri per aliquem ipsorum Γ, Δ.

Quoniam enim est ut A unitas ad B ita Δ ad E; A unitas numerum B æqualiter metitur [per 20. def. 7.] atque Δ ipsum E: quare permutando [per 15. 7.] A unitas numerum Δ æqualiter metitur atque B ipsum E. sed A unitas metitur Δ per eas quæ sunt in ipso Δ unitates: ergo & B metitur E per unitates quæ sunt in Δ: minor igitur B majorem E metitur per aliquem eorum qui sunt in numeris proportionalibus. quod erat demonstrandum.

* i. e. *Quod est contra Hypothesim.* Atque hoc sæpius in decursu.

Prop. XII. Theor.

Si ab unitate quotlibet numeri deinceps proportionales fuerint: quicunque primorum numerorum metiuntur ultimum, iidem & eum qui unitati proximus est metientur.

Sint ab unitate quotlibet numeri deinceps proportionales A, B, Γ, Δ: dico quicunque primorum numerorum metiuntur Δ, eosdem & ipsum A metiri.

Metiatur enim aliquis primus numerus E ipsum Δ: dico E ipsum quoque A metiri. non enim metiatur E ipsum A, atque E est primus; omnis autem primus numerus [per 31. 7.] ad omnem numerum quem non metitur primus est: ergo E, A numeri inter se primi sunt. & cum E metitur ipsum Δ, metiatur per unitates quæ sunt in Z: ergo E multiplicans Z ipsum Δ fecit. rursus, quoniam [per 11. 9.] A metitur ipsum Δ per eas quæ sunt in Γ unitates, A multiplicans Γ ipsum Δ fecit. sed & E multiplicans Z fecit Δ: qui igitur fit ex A, Γ ei qui fit ex E, Z est æqualis: ergo [per 19. 7.] ut A ad E ita Z ad Γ. suntque A, E primi, primi autem [per 23. 7.] & minimi, minimi vero eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, [per 21. 7.] antecedens antecedentem & consequens consequentem: metitur igitur E ipsum Γ. metiatur per H: ergo E ipsum H multiplicans fecit Γ. sed & A multiplicans B ipsum Γ fecit: qui igitur fit ex A, B æqualis est ei qui ex E, H: ergo ut A ad E ita H ad B. & sunt A, E primi, sed primi etiam & minimi, minimi vero eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur [per 21. 7.] antecedens antecedentem & consequens consequentem: quare & E ipsum B metitur. metiatur per Θ: multiplicans igitur E ipsum Θ fecit B. sed & A seipsum multiplicans fecit B; ergo qui fit ex Θ, E est æqualis ei qui fit ab ipso A: est igitur [per 20.7.] ut E ad A ita A ad Θ. suntque A, E primi, sed primi etiam & minimi, minimi vero æqualiter metiuntur eos qui eandem quam ipsi rationem habent, [per 21. 7.] major majorem & minor minorem, hoc est antecedens antecedentem & consequens consequentem: ergo E metitur ipsum A. sed & non metitur, quod fieri non potest: non igitur A, E sunt inter se primi: ergo compositi erunt. compositos vero [per 14. def. 7.] primus aliquis numerus metitur: quare ipsos A, E metietur aliquis numerus primus. & quoniam E primus ponitur, primum autem non metitur alius numerus [per 11. def. 7.] præter seipsum: metitur igitur E ipsos A, E: ideoque E ipsum A metitur. metitur autem & ipsum Δ: ergo E ipsos A, Δ metietur. similiter demonstrabimus quicunque primorum nu-

I. A, 4. B, 16. Γ, 64. Δ, 256.
E, 2. Θ, 8. H, 32. Z, 128.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν· ὑφ' ὅσων ἂν ὁ ἔσχατος πρώτων ἀριθμῶν μετρεῖται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ παρὰ τὴν μονάδα μετρηθήσεται.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ A, B, Γ, Δ· λέγω ὅτι ὑφ' ὅσων ἂν ὁ Δ πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ A μετρηθήσεται.

Μετρείσθω γὰρ ὁ Δ ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ, τοῦ E· λέγω ὅτι ὁ E καὶ τὸν A μετρεῖ. μὴ γὰρ μετρείτω ὁ E τὸν A, καί ἐστιν ὁ E πρῶτος, ἅπας δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν ὃν μὴ μετρεῖ πρῶτός ἐστιν· οἱ E, A ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. καὶ ἐπεὶ ὁ E τὸν Δ μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Z· ὁ E ἄρα τὸν Z πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε. πάλιν, ἐπεὶ ὁ A τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας· ὁ A ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ E τὸν Z πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν A, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν E, Z· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν E οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν Γ. οἱ δὲ A, E πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ E τὸν Γ. μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν H· ὁ E ἄρα τὸν H πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν διὰ τὸ πρὸ τούτου καὶ ὁ A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν A, B ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν E, H· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν E οὕτως ὁ H πρὸς τὸν B. οἱ δὲ A, E πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ E τὸν B. μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Θ· ὁ E ἄρα τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ A ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὁ ἐκ τῶν Θ, E ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ A· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ E πρὸς τὸν A οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Θ. οἱ δὲ A, E πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα, τουτέστιν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ E τὸν A. * ἀλλὰ μὴν καὶ οὐ μετρεῖ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ A, E πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί· σύνθετοι ἄρα. οἱ δὲ σύνθετοι ὑπὸ πρώτου ἀριθμοῦ τινος μετροῦνται· οἱ A, E ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετροῦνται. καὶ ἐπεὶ ὁ E πρῶτος ὑπόκειται, ὁ δὲ πρῶτος ὑπὸ ἑτέρου ἀριθμοῦ οὐ μετρεῖται ἢ ὑφ' ἑαυτοῦ· ὁ E ἄρα τοὺς A, E μετρεῖ· ὥστε καὶ ὁ E τὸν A μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Δ· ὁ E ἄρα τοὺς A, Δ μετρεῖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ὑφ' ὅσων ἂν ὁ Δ πρώ-

* In quibusdam codicibus quæ sequuntur rectius absunt, scriturque οὐκ ἄρα οὐ μετρεῖ ὁ E τὸν A· μετρεῖ ἄρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

των

τῶν ἀριθμῶν μετρεῖται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ Α μετρηθήσεται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα πρῶτος ᾖ· ὁ μέγιστος ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, οἱ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α πρῶτος ἔστω· λέγω ὅτι ὁ μέγιστος αὐτῶν ὁ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν Α, Β, Γ.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, μετρείσθω ὑπὸ τοῦ Ε, καὶ ὁ Ε μηδενὶ τῶν Α, Β, Γ ἔστω ὁ αὐτός· φανερὸν δὴ ὅτι ὁ Ε πρῶτος οὐκ ἔστιν. εἰ γὰρ ὁ Ε πρῶτός ἐστι καὶ μετρεῖ τὸν Δ, καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ Ε πρῶτός ἐστι· σύνθετος ἄρα· ἅπας δὲ σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. λέγω δὴ ὅτι ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται πρώτου, πλὴν τοῦ Α. εἰ γὰρ ὑφ' ἑτέρου μετρεῖται ὁ Ε, ὁ δὲ Ε τὸν Δ μετρεῖ· κἀκεῖνος ἄρα τὸν Δ μετρήσει· ὥστε καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ὁ Α ἄρα τὸν Ε μετρεῖ. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ. λέγω ὅτι ὁ Ζ οὐδενὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. εἰ γὰρ ὁ Ζ ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστὶν ὁ αὐτὸς, καὶ μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὸν Ε· καὶ εἷς ἄρα τῶν Α, Β, Γ μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὸν Ε. ἀλλὰ εἷς τῶν Α, Β, Γ τὸν Δ μετρεῖ κατά τινα τῶν Α, Β, Γ· καὶ ὁ Ε ἄρα ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστὶν ὁ αὐτὸς, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ὁ Ζ ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι μετρεῖται ὁ Ζ ὑπὸ τοῦ Α, δεικνύντες πάλιν ὅτι οὐκ ἔστιν ὁ Ζ πρῶτος. εἰ γάρ ἐστι πρῶτος καὶ μετρεῖ τὸν Δ, καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα πρῶτός ἐστιν ὁ Ζ· σύνθετος ἄρα· ὑπὸ πρώτου ἄρα τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. λέγω δὴ ὅτι ὑφ' ἑτέρου πρώτου οὐ μετρηθήσεται πλὴν τοῦ Α. εἰ γὰρ ἕτερός τις πρῶτος τὸν Ζ μετρεῖ, ὁ δὲ Ζ τὸν Δ μετρεῖ· κἀκεῖνος ἄρα τὸν Δ μετρήσει· ὥστε καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ὁ Α ἄρα τὸν Ζ μετρεῖ. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ε, Ζ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Γ. ὁ δὲ Α τὸν Ε μετρεῖ· καὶ ὁ Ζ ἄρα τὸν Γ μετρεῖ. μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Η. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ὁ Η οὐδενὶ τῶν Α, Β ἐστὶν ὁ αὐτὸς, καὶ ὅτι μετρεῖται ὑπὸ τοῦ Α. καὶ ἐπεὶ ὁ Ζ τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὸν Η· ὁ Ζ ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν

1.	Α, 5.	Β, 25.	Γ, 125.	Δ, 625.
	Ε ——	Θ ——	Η ——	Ζ ——

merorum metiuntur ipsum Δ, eosdem & ipsum A metiri. quod erat demonstrandum.

Prop. XIII. Theor.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post unitatem primus sit; maximum nullus alius metietur, præter eos qui sunt in numeris proportionalibus.

Sint quotcunque numeri ab unitate deinceps proportionales A, B, Γ, Δ, & qui post unitatem videlicet A sit primus: dico maximum Δ nullum alium metiri, præter ipsos A, B, Γ.

Si enim fieri potest, metiatur E ipsum Δ, & non sit E idem qui aliquis ipsorum A, B, Γ: manifestum est E primum non esse. si enim primus sit, & metiatur Δ; [per 12. 9.] ipsum quoque A metietur primum existentem, cum non sit idem qui A, quod fieri non potest: non igitur E primus est; ergo compositus: omnem autem compositum numerum [per 33. 7.] primus aliquis numerus metitur. dico nullum alium primum metiri ipsum E, præterquam A. si enim alius metitur E, & E metitur Δ, & alius ille ipsum Δ metietur: quare [per 12. 9.] & ipsum A primum existentem, cum non sit idem qui A, quod fieri non potest: ergo A ipsum E metitur. & quoniam E metitur Δ, metiatur ipsum per Z. dico non esse Z eundem cum aliquo ipsorum A, B, Γ. si enim est idem, metiturque ipsum Δ per E; & unus ipsorum A, B, Γ ipsum Δ per E metietur. sed [per 11. 9.] quilibet ipsorum A, B, Γ metitur Δ per aliquem ipsorum A, B, Γ: quare & E idem erit qui unus ipsorum A, B, Γ, quod non supponitur: non igitur est Z idem qui unus ipsorum A, B, Γ. similiter ostendemus A metiri ipsum Z, rursus ostendentes non esse Z primum numerum. si enim est primus, & metitur ipsum Δ, [per 12. 9.] ipsum quoque A metietur primum existentem, cum non sit idem qui A, quod fieri non potest: non igitur Z primus est: ergo compositus, & [per 33. 7.] eum aliquis primus metietur. dico nullum alium metiri ipsum Z præterquam A. si enim alius metitur Z, & Z metitur Δ; & alius ille ipsum Δ metietur: quare [per 12. 9.] & ipsum A primum existentem, cum non sit idem qui A, quod fieri non potest: ergo A ipsum Z metitur. & quoniam E metitur Δ per Z; & E multiplicans Z ipsum Δ fecit. sed [ex hyp.] & A multiplicans Γ fecit Δ: qui igitur fit ex A, Γ est æqualis ei qui ex E, Z: ergo [per 19. 7.] ut A ad E ita est Z ad Γ. sed A metitur E: quare [per 20. def. 7.] & Z ipsum Γ metitur. metiatur per H. similiter demonstrabimus H non esse eundem qui unus ipsorum A, B, & A ipsum H metiri. & quoniam Z ipsum Γ metitur per H, multiplicans Z ipsum H fecit Γ. sed & A multiplicans B ipsum Γ fecit: ergo qui

qui fit ex A, B ei qui ex Z, H est æqualis: ut igitur A ad Z ita est H ad B. metitur autem A ipsum Z: ergo & H ipsum B metietur. metiatur per Θ. similiter demonstrabimus Θ non esse eundem qui A. & quoniam H ipsum B per Θ metitur, H multiplicans Θ ipsum B fecit. sed & A seipsum multiplicans [ex hyp.] fecit B: qui igitur fit ex Θ, H est æqualis quadrato qui ex A: ergo [per 20.7.] ut Θ ad A ita A ad H. metitur autem A ipsum H; quare & Θ ipsum A metietur, primum existentem, cum non sit idem qui A; quod est absurdum: non igitur aliquis alius metietur ipsum Δ maximum, præter ipsos A, B, Γ. quod erat demonstrandum.

I. A, 5. B, 25. Γ, 125. Δ, 625.
E —— Θ —— H —— Z ——

Α, Β ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ζ, Η· ἀνάλογον ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Β. μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Ζ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Η τὸν Β. μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Θ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ὁ Θ τῷ Α οὐκ ἔστιν ὁ αὐτός. καὶ ἐπεὶ ὁ Η τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὸν Θ· ὁ Η ἄρα τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Θ, Η ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Α τετραγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η. μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Η· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Θ τὸν Α πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ μέγιστος ὁ Δ ὑφ' ἑτέρου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν Α, Β, Γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XIV. Theor.

Si minimum numerum primi numeri metiantur: nullus alius numerus metietur ipsum, præter eos qui à principio metiebantur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἐὰν ἐλάχιστος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται· ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρούντων.

Minimum enim numerum A primi numeri B, Γ, Δ metiantur: dico nullum alium primum numerum metiri ipsum A, præter ipsos B, Γ, Δ.

Si enim fieri potest, metiatur E ipsum A; & non sit E idem qui aliquis ipsorum B, Γ, Δ. & quoniam E metitur A, ipsum per Z metiatur: ergo E multiplicans Z ipsum A fecit. & metiuntur A primi numeri B, Γ, Δ. si autem duo numeri sese multiplicantes aliquem faciant, & factum ex ipsis metiatur aliquis primus numerus, [per 32. 7.] & unum eorum qui à principio positi sunt metietur: ergo numeri B, Γ, Δ metientur unum ipsorum E, Z. ipsum quidem E non metientur, etenim [ex hyp.] E primus est; & non idem qui aliquis ipsorum B, Γ, Δ: ergo metientur ipsum Z qui est minor quam A, quod fieri non potest; ponitur enim A minimus eorum quos B, Γ, Δ metiantur: non igitur ipsum A metietur aliquis primus numerus, præter ipsos B, Γ, Δ. quod erat demonstrandum.

A, 30.
B, 2. Γ, 3. Δ, 5.
E —— Z ——

Ἐλάχιστος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν τῶν Β, Γ, Δ μετρείσθω· λέγω ὅτι ὁ Α ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου πρώτου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν Β, Γ, Δ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρείσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ Ε, καὶ ὁ Ε μηδενὶ τῶν Β, Γ, Δ ἔστω ὁ αὐτός. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. καὶ μετρεῖται ὁ Α ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν τῶν Β, Γ, Δ. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, τὸν δὲ γενόμενον ἐξ αὐτῶν μετρῇ τις πρῶτος ἀριθμός, καὶ ἕνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει· οἱ Β, Γ, Δ ἄρα ἕνα τῶν Ε, Ζ μετρήσουσι. τὸν μὲν οὖν Ε οὐ μετρήσουσιν, ὁ γὰρ Ε πρῶτός ἐστι, καὶ οὐδενὶ τῶν Β, Γ, Δ ὁ αὐτός· τὸν Ζ ἄρα μετρήσουσιν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Α, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, ὁ γὰρ Α ὑπόκειται ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν Β, Γ, Δ μετρούμενος· οὐκ ἄρα τὸν Α μετρήσει πρῶτος ἀριθμός, πάρεξ τῶν Β, Γ, Δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XV. Theor.

Si tres numeri deinceps proportionales fuerint, minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium; duo quilibet compositi ad reliquum primi erunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· δύο ὁποιοιοῦν συντεθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσιν.

Sint A, B, Γ tres numeri deinceps proportionales, minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium: dico duos quoslibet compositos ad reliquum primos esse, videlicet A, B ad Γ, & B, Γ ad A, & A, Γ ad B.

Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ Α, Β, Γ· λέγω ὅτι δύο ὁποιοιοῦν συντεθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσιν, οἱ μὲν Α, Β πρὸς τὸν Γ, οἱ δὲ Β, Γ πρὸς τὸν Α, καὶ ἔτι οἱ Α, Γ πρὸς τὸν Β.

Εἰλήφθω-

Εἰλήφθωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, Γ δύο οἱ ΔΕ, ΕΖ. φανερὸν δὴ ὅτι ὁ μὲν ΔΕ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε, τὸν δὲ ΕΖ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε, καὶ ἔτι ὁ ΕΖ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκε. καὶ ἐπεὶ οἱ ΔΕ, ΕΖ ἐλάχιστοί εἰσι, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ συναμφότερος πρὸς ἑκάτερον πρῶτός ἐστιν· καὶ ὁ ΔΖ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτός ἐστιν· οἱ ΔΖ, ΔΕ ἄρα πρῶτοί εἰσι πρὸς τὸν ΕΖ· καὶ ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ ἄρα πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτός ἐστιν. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν· ὥστε ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ καὶ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρῶτός ἐστιν. ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ ὁ ἀπὸ τοῦ ΔΕ ἐστὶ μετὰ τοῦ ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ· ὁ ἄρα ἀπὸ τοῦ ΔΕ μετὰ τοῦ ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρῶτός ἐστι. καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ ΔΕ ὁ Α, ὁ δὲ ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ ὁ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ΕΖ ὁ Γ· οἱ Α, Β ἄρα συντεθέντες πρὸς τὸν Γ πρῶτοί εἰσιν· ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ Β, Γ πρὸς τὸν Α πρῶτοί εἰσι. λέγω δὴ ὅτι καὶ οἱ Α, Γ πρὸς τὸν Β πρῶτοί εἰσιν. ἐπεὶ γὰρ ὁ ΔΖ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν· ὥστε καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΔΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν. ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τοῦ ΔΖ ἴσοι εἰσὶν οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ· καὶ οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα μετὰ τοῦ δὶς ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσι. διελόντι οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἅπαξ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσιν· ἔτι διελόντι οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσι. καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ ΔΕ ὁ Α, ὁ δὲ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ὁ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ΕΖ ὁ Γ· οἱ Α, Γ ἄρα συντεθέντες πρὸς τὸν Β πρῶτοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Sumantur enim duo minimi numeri eandem cum ipsis Α, Β, Γ rationem habentes, ΔΕ, ΕΖ. manifestum est [per 2. 8.] ΔΕ seipsum quidem multiplicantem facere Α; multiplicantem vero ΕΖ facere Β, & ΕΖ seipsum multiplicantem facere Γ. & quoniam ΔΕ, ΕΖ minimi sunt, [per 24. 7.] primi erunt inter se. si autem duo numeri primi inter se fuerint, [per 30. 7.] & uterque simul ad utrumque primus erit: ergo ΔΖ ad utrumque ipsorum ΔΕ, ΕΖ primus est. sed & ΔΕ ad ΕΖ est primus: quare ΔΖ, ΔΕ ad ΕΖ primi sunt: ac propterea [per 26. 7.] qui fit ex ΖΔ, ΔΕ primus est ad ΕΖ. si autem duo numeri primi inter se fuerint [per 27. 7.] qui fit ex uno ipsorum ad reliquum primus erit: ergo qui fit ex ΖΔ, ΔΕ ad eum qui fit ex ΕΖ est primus. sed * qui ex ΖΔ, ΔΕ est is qui fit ex ΔΕ una cum eo qui ex ΔΕ, ΕΖ: qui igitur ex ΔΕ una cum eo qui ex ΔΕ, ΕΖ primus est ad eum qui ex ΕΖ. sed qui fit ex ΔΕ est Α; qui vero ex ΔΕ, ΕΖ est Β, & qui ex ΕΖ est Γ: ergo Α, Β compositi ad ipsum Γ primi sunt: similiter ostendemus & Β, Γ ad Α esse primos. Dico & Α, Γ ad Β primos esse. quoniam enim [per 30. 7.] ΔΖ ad utrumque ipsorum ΔΕ, ΕΖ est primus; & [per 26. & 27. 7.] qui fit ex ΔΖ ad eum qui ex ΔΕ, ΕΖ primus erit. sed [per 4. 2.] ei qui fit ex ΔΖ æquales sunt qui ex ΔΕ & ΕΖ fiunt una cum eo qui bis fit ex ΔΕ, ΕΖ: qui igitur ex ΔΕ & ΕΖ fiunt una cum eo qui bis ex ΔΕ, ΕΖ primi sunt ad eum qui ex ΔΕ, ΕΖ: ergo & dividendo qui fiunt ex ΔΕ & ΕΖ una cum eo qui semel fit ex ΔΕ, ΕΖ primi sunt ad eum qui ex ΔΕ, ΕΖ; & rursus dividendo, qui fiunt ex ΔΕ & ΕΖ ad eum qui fit ex ΔΕ, ΕΖ primi sunt. sed qui fit ex ΔΕ est Α; qui vero ex ΔΕ, ΕΖ est Β; & qui ex ΕΖ est Γ: ergo Α, Γ compositi ad ipsum Β primi erunt. quod erat demonstrandum.

Α, 9. Β, 12. Γ, 16.

Δ . . . Ε . . . . Ζ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛʹ.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον οὕτως ὁ δεύτερος πρὸς ἄλλον τινά.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω ὅτι οὐκ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς ἄλλον τινά.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. οἱ δὲ Α, Β πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὅ,τι ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Β, ὡς ἡγούμενος ἡγούμενον. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ Α ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἄτοπον ἐστιν· οὐκ ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β ἐστὶν οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XVI. THEOR.

Si duo numeri primi inter se fuerint; non erit ut primus ad secundum ita secundus ad alium ullum.

DUO enim numeri Α, Β primi inter se sint: dico non esse ut Α ad Β ita Β ad alium ullum.

Si enim fieri potest, sit ut Α ad Β ita Β ad Γ. & sunt Α, Β primi, primi vero sunt [per 23. 7.] & minimi, minimi vero eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, [per 21. 7.] antecedens antecedentem & consequens consequentem; metitur igitur Α ipsum Β, ut antecedens antecedentem. sed & ipse seipsum metitur: ergo Α metitur ipsos Α, Β primos inter se existentes, quod est absurdum: non igitur est ut Α ad Β ita Β ad Γ. quod erat demonstrandum.

Α, 5. Β, 8. Γ ——

* Hoc ab *Euclide* demonstratur in lineis ad *prop. 3. lib. 2.* sed in numeris à *Barlaam Monacho Theor. 3.* Nos, in similibus casibus, solas *Euclidis* correspondentes propositiones *libri 2.* posthac citabimus.

Prop. XVII. Theor.

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorum primi inter se sint; non erit ut primus ad secundum ita ultimus ad alium ullum.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, Γ, Δ, extremi autem ipsorum A, Δ primi sint inter se: dico non esse ut A ad B ita Δ ad alium ullum.

Si enim fieri potest, sit ut A ad B ita Δ ad E: quare permutando ut A ad Δ ita erit [per 13. 7.] B ad E. & etiam [ex hyp.] sunt A, Δ primi, [per 23. 7.] primi etiam & minimi, minimi vero eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, [per 21. 7.] antecedens antecedentem & consequens consequentem: metitur igitur A ipsum B. atque est ut A ad B ita B ad Γ: ergo & B metitur ipsum Γ, & ob id A quoque ipsum Γ metitur. & quoniam est ut B ad Γ ita Γ ad Δ, metitur autem B ipsum Γ; & Γ ipsum Δ metitur. sed A metitur Γ; quare & A metitur ipsum Δ. metitur autem & seipsum: ergo A ipsos A, Δ primos inter se existentes metitur; quod fieri non potest: non igitur erit ut A ad B ita Δ ad alium ullum. quod erat demonstrandum.

A, 8. B, 12. Γ, 18. Δ, 27. E ———

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν· οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον οὕτως ὁ ἔσχατος πρὸς ἄλλον τινά.

Ἔστωσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω ὅτι οὐκ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς ἄλλον τινά.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε. οἱ δὲ Α, Δ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὅ,τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Β. καὶ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ, ὥστε καὶ ὁ Α τὸν Γ μετρεῖ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, μετρεῖ δὲ ὁ Β τὸν Γ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ. ἀλλ' ὁ Α τὸν Γ μετρεῖ· ὥστε καὶ ὁ Α τὸν Δ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ Α ἄρα τοὺς Α, Δ μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσται ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς ἄλλον τινά. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XVIII. Theor.

Duobus numeris datis considerare, an tertius ipsis proportionalis inveniri possit.

Sint dati duo numeri A, B, & oporteat considerare, an possit tertius ipsis proportionalis inveniri.

Itaque A, B vel primi inter se sunt, vel non primi. si quidem primi, jam ostensum est [ad 16. 9.] fieri non posse, ut tertius ipsis proportionalis inveniatur.

A, 4. B, 7.

Sed non sint A, B inter se primi, & B seipsum multiplicans faciat Γ. vel igitur A metitur Γ, vel non metitur. metiatur primum per Δ: ergo A multiplicans Δ ipsum Γ fecit. sed & B seipsum multiplicans fecit Γ: qui igitur fit ex A, Δ est æqualis ei qui ex B: ergo [per 20. 7.] ut A ad B ita B ad Δ; ac propterea ipsis A, B tertius proportionalis Δ inventus est.

A, 4. B, 6. Δ, 9. Γ, 36.

Sed non metiatur A ipsum Γ: dico fieri non posse, ut ipsis A, B tertius proportionalis inveniatur. si enim fieri potest, inventus sit Δ: ergo [per 20. 7.] qui fit ex A, Δ æqualis est ei qui fit ex B, sed qui fit ex B est Γ; qui igitur fit ex A, Δ ipsi Γ est æqualis: ergo A ipsum Δ multiplicans fecit

A, 6. B, 4. Δ ——— Γ, 16.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ δέον ἔστω ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Οἱ δὴ Α, Β ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὔ. εἰ μὲν οὖν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, δέδεικται ὅτι ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστωσαν οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω. ὁ Α δὴ τὸν Γ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον κατὰ τὸν Δ· ὁ Α ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τοῦ Β· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ· τοῖς Α, Β ἄρα τρίτος ἀριθμὸς προσηύρηται, ὁ Δ.

Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρείτω ὁ Α τὸν Γ· λέγω ὅτι τοῖς Α, Β ἀδύνατόν ἐστι τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν. εἰ γὰρ δυνατὸν, προσευρήσθω ὁ Δ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ Β ἐστὶν ὁ Γ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ Γ· ὥστε ὁ Α τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν·

ὁ Α

ὁ Α ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὸν Δ. ἀλλὰ μὴν ὑπόκειται καὶ μὴ μετρῶν, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα δυνατόν ἐστι τοῖς Α, Β τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν, ὅταν ὁ Α τὸν Γ μὴ μετρῇ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Γ, & ob id A ipſum Γ per Δ metitur. ſed & non metiri poſitum eſt, quod eſt abſurdum: non igitur fieri poteſt, ut ipſis A, B tertius inveniatur proportionalis, quando A ipſum Γ non metitur. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ΄.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Prop. XIX. Probl.

Tribus numeris datis conſiderare, an quartus ipſis proportionalis inveniri poſſit.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, καὶ δέον ἔστω ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Οἱ δὴ Α, Β, Γ ἤτοι ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ἢ οὔ [*ἀνάλογον μὲν ἑξῆς εἰσιν, οἱ ἄκροι δὲ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ἢ ἀνάλογον μὲν ἑξῆς, οὐ πρῶτοι δὲ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ἢ οὔτε ἀνάλογον ἑξῆς, οὔτε οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.]

Εἰ μὲν οὖν οἱ Α, Β, Γ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί, δέδεικται ὅτι ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν.

A, 4. B, 6. Γ, 9.

[Εἰ δ᾽ οὐκ ἀνάλογον μὲν ἑξῆς εἰσι, ἄκροι δὲ οἱ πρῶτοι· λέγω ὅτι τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἐστιν ἀδύνατον. εἰ γὰρ μή, προσευρήσθω, καὶ ἔστω ὁ Δ· ὡς οὖν ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· καὶ δι᾽ ἴσου γοῦν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε. ἀλλὰ μὴν οἱ Α, Γ πρῶτοί εἰσι, πρῶτοι δὲ ἐλάχιστοι, οἱ ἐλάχιστοι δὲ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Γ, ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ Α ἄρα τοὺς Α, Γ μετρεῖ πρώτους πρὸς ἀλλήλους ὄντας, ὅπερ ἀδύνατον· τοῖς Α, Β, Γ ἄρα τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀδύνατον.]

A, 4. B, 6. Γ, 5. Δ —— E ——

Πάλιν, οἱ Α, Β, Γ ἀνάλογον ἑξῆς ἔστωσαν μέν, οἱ δὲ Α, Γ ἄκροι οὐ πρῶτοι· λέγω ὅτι τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν δυνατόν ἐστι. ὁ Β γὰρ τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· ὁ δὴ Α τὸν Δ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον κατὰ τὸν Ε· ὁ Α ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Ε ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Γ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε· τοῖς Α, Β, Γ ἄρα τέταρτος προσεύρηται ἀνάλογον ὁ Ε.

A, 8. B, 12. Γ, 18. E, 27. Δ, 216.

Sint dati tres numeri A, B, Γ, & oporteat conſiderare, an poſſit quartus ipſis proportionalis inveniri.

Itaque A, B, Γ vel deinceps ſunt proportionales, & eorum extremi primi inter ſe ſunt; vel non [*deinceps proportionales, & eorum extremi ſunt primi inter ſe; vel proportionales quidem deinceps, non autem extremi ipſorum inter ſe primi; vel neque proportionales deinceps, neque eorum extremi inter ſe ſunt.]

Si quidem igitur A, B, Γ deinceps ſunt proportionales, & eorum extremi A, Γ primi inter ſe; jam demonſtratum eſt [ad 17. 9.] fieri non poſſe ut quartus ipſis proportionalis inveniatur.

[Si vero non ſunt deinceps proportionales, & extremi ipſorum ſunt primi: dico quartum proportionalem inveniri non poſſe. ſi enim inveniri poteſt, ſit Δ: ut igitur A ad B ita Γ ad Δ, & ut B ad Γ ita ſit Δ ad E: ergo ex æquo [per 14. 7.] ut A ad Γ ita Γ ad E. ſed ſunt A, Γ primi, primi autem [per 23. 7.] & minimi, minimi vero eos qui eandem rationem habent æqualiter metiuntur, [per 21. 7.] antecedens antecedentem & conſequens conſequentem: ergo A ipſum Γ metitur, antecedens antecedentem. metitur autem & ſeipſum: quare A ipſos A, Γ primos inter ſe exiſtentes metitur; quod fieri non poteſt: ipſis igitur A, B, Γ non poteſt quartus proportionalis inveniri.]

Rurſus A, B, Γ proportionales quidem ſint deinceps, non autem extremi eorum primi: dico quartum proportionalem inveniri poſſe. multiplicans enim B ipſum Γ faciat Δ: itaque vel A metitur ipſum Δ vel non metitur. metiatur primum per E: ergo A multiplicans E fecit Δ. ſed & B multiplicans Γ ipſum Δ fecit: qui igitur fit ex A, E eſt æqualis ei qui ex B, Γ: proptereaque [per 19. 7.] ut A ad B ita eſt Γ ad E: ipſis igitur A, B, Γ quartus proportionalis E inventus eſt.

* Corruptiſſima eſt hæc propoſitio. Nos ex auctoritate Codicum MSS. ita corrigendam cenſemus, ut quæ uncis ſunt incluſa pro deletis habeantur. In univerſum datis tribus numeris quartus proportionalis inveniri poteſt, quando primus metitur eum qui fit cum ſecundus multiplicat tertium; alioquin ἀδύνατον: & quartus eſt numerus per quem primus metitur numerum ita creatum. Ideoque Propoſitionis diviſio in quatuor caſus non eſt neceſſaria, certe *Euclidis* concinnitati minime reſpondet: immo caſus ſecundus paralogiſmus merus eſt, cum quod falſum probat, tum quod ἀλογίστως: Patet enim tribus numeris 4, 8, 9 poſſe quartum proportionalem inveniri nempe 18, licet non ſunt deinceps proportionales, & eorum extremi ſunt inter ſe primi.

Sed non metiatur A ipsum Δ: dico fieri non posse, ut ipsis A, B, Γ inveniatur quartus proportionalis. si enim inveniri potest, inveniatur, sitque E: ergo [per 19.7.] qui fit ex A, E est æqualis ei qui ex B, Γ. sed qui fit ex B, Γ est Δ; quare qui fit ex A, E ipsi Δ est æqualis, & ob id A ipsum E multiplicans fecit Δ: metitur igitur A ipsum Δ per E; quare A ipsum Δ metitur. sed & non metitur; quod est absurdum: non igitur fieri potest, ut ipsis A, B, Γ inveniatur quartus proportionalis, quando A ipsum Δ non metitur.

A, 20. B, 30. Γ, 45. E —— Δ, 1350.

[Sed non sint A, B, Γ neque deinceps proportionales, neque A, Γ inter se primi, & B ipsum Γ multiplicans faciat Δ, similiter demonstrabimus si A ipsum Δ metiatur, inveniri posse quartum proportionalem: sin minus, inveniri non posse.] quod erat demonstrandum.

A, 3. B, 4. Γ, 9. E, 12. Δ, 36.

A, 4. B, 5. Γ, 14. E —— Δ, 70.

Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρείτω ὁ A τὸν Δ· λέγω ὅτι ἀδύνατόν ἐστι τοῖς A, B, Γ τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν. εἰ γὰρ δυνατόν, προσευρήσθω ὁ E· ὁ ἄρα ἐκ τῶν A, E ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν B, Γ. ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν B, Γ ἐστὶν ὁ Δ· καὶ ὁ ἐκ τῶν A, E ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ Δ· ὁ A ἄρα τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ A ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὸν E· ὥστε μετρεῖ ὁ A τὸν Δ. ἀλλὰ καὶ οὐ μετρεῖ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα δυνατόν ἐστι τοῖς A, B, Γ τέταρτον ἀνάλογον ἀριθμὸν προσευρεῖν, ὅταν ὁ A τὸν Δ μὴ μετρῇ.

[Ἀλλὰ μὴν οὔτ' ἀνάλογον ἑξῆς οἱ A, B, Γ, οὔτε πρῶτοι οἱ A, Γ ἄκροι ἔστωσαν, καὶ ὁ B τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω, ὁμοίως δείξομεν ἐὰν ὁ A τὸν Δ μετρῇ ὅτι τέταρτον ἀνάλογον εὑρεῖν δυνατόν ἐστιν· ἐὰν δὲ μὴ μετρῇ, ὅτι ἀδύνατον.] ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XX. Theor.

Primi numeri plures sunt omni proposita multitudine primorum numerorum.

Sint propositi primi numeri A, B, Γ: dico ipsis A, B, Γ plures esse primos numeros.

Sumatur enim [per 38.7.] minimus, quem ipsi A, B, Γ metiantur, sitque ΔE, & ipsi ΔE apponatur unitas ΔZ: ergo EZ vel primus est, vel non. sit primum primus: inventi igitur sunt primi numeri A, B, Γ, EZ plures quam ipsi A, B, Γ.

A, 2. B, 3. Γ, 5.

E —30.— Δ. Z.

Sed non sit EZ primus: ergo [per 33.7.] eum primus metitur. metiatur H: dico H nulli ipsorum A, B, Γ eundem esse. si enim H idem sit qui unus ipsorum A, B, Γ, ipsi autem A, B, Γ metiantur ΔE; & H ipsum ΔE metietur. metitur autem & EZ; & reliquam igitur ΔZ unitatem metietur H numerus existens, quod est absurdum: ergo H non est idem qui unus ipsorum A, B, Γ. & ponitur primus. inventi igitur sunt primi numeri A, B, Γ, H plures proposita multitudine primorum numerorum A, B, Γ. quod erat demonstrandum.

A, 2. B, 3. Γ, 7.

E —105.— Δ. Z

H, 53.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν.

Ἔστωσαν οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοί, οἱ A, B, Γ· λέγω ὅτι τῶν A, B, Γ πλείους εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοί.

Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν A, B, Γ ἐλάχιστος μετρούμενος, καὶ ἔστω ὁ ΔE, προσκείσθω τῷ ΔE μονὰς ἡ ΔZ· ὁ δὴ EZ ἤτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ οὔ. ἔστω πρότερον πρῶτος· εὑρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ A, B, Γ, E, Z πλείους τῶν A, B, Γ.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ EZ πρῶτος· ὑπὸ πρώτου ἄρα τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. μετρείσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ H· λέγω ὅτι ὁ H οὐδενὶ τῶν A, B, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. εἰ γὰρ ὁ H ἑνὶ τῶν A, B, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός, οἱ δὲ A, B, Γ τὸν ΔE μετροῦσι· καὶ ὁ H ἄρα τὸν ΔE μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν EZ· καὶ λοιπὴν ἄρα τὴν ΔZ μονάδα μετρήσει ὁ H ἀριθμὸς ὤν, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ H ἑνὶ τῶν A, B, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. καὶ ὑπόκειται πρῶτος· εὑρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους τοῦ προτεθέντος πλήθους τῶν A, B, Γ, οἱ A, B, Γ, H. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXI. Theor.

Si pares numeri quotcunque componantur, totus par erit.

Componantur enim pares numeri quotcunque AB, BΓ, ΓΔ, ΔE: dico totum AE parem esse.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Ἐὰν ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, ὁ ὅλος ἄρτιός ἐστι.

Συγκείσθωσαν γὰρ ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν, οἱ AB, BΓ, ΓΔ, ΔE· λέγω ὅτι ὅλος ὁ AE ἄρτιός ἐστιν.

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ ἄρτιός ἐστιν, ἔχει μέρος ἥμισυ· ὥστε καὶ ὅλος ὁ ΑΕ ἔχει μέρος ἥμισυ. ἄρτιος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΕ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Α . . . . Β . . . . . . Γ . . Δ . . . . Ε

Quoniam enim unusquisque ipsorum ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ par est, [per 6. def. 7.] habet partem dimidiam: quare & totus ΑΕ partem dimidiam habebit. par autem numerus est qui bifariam dividitur: ergo ΑΕ par est. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν ἄρτιον ᾖ· ὅλος ἄρτιος ἔσται.

Συγκείσθωσαν γὰρ περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁσοιδηποτοῦν ἄρτιοι τὸ πλῆθος, οἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ· λέγω ὅτι ὅλος ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ περιττός ἐστιν, ἀφαιρεθείσης μονάδος ἀφ' ἑκάστου, ἕκαστος ἄρα τῶν λοιπῶν ἄρτιος ἔσται· ὥστε καὶ ὁ συγκείμενος ἐξ αὐτῶν ἄρτιος ἔσται. ἔστι δὲ καὶ τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἄρτιον· καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Α . . . Β . . . . . Γ . . . . Δ . . . . Ε

Prop. XXII. Theor.

Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit par; totus par erit.

Componantur enim impares numeri quotcunque multitudine pares ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ: dico totum ΑΕ parem esse.

Quoniam enim unusquisque ipsorum ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ impar est, detracta ab unoquoque unitate, erit unusquisque reliquorum par; quare [per 21. 9.] & compositus ex ipsis par erit. est autem par & unitatum multitudo: & totus igitur ΑΕ par est. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ᾖ· καὶ ὅλος περισσὸς ἔσται.

Συγκείσθωσαν γὰρ ἀριθμοὶ περισσοὶ ὁποσοιοῦν, ὧν τὸ πλῆθος περισσὸν ἔστω, οἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ὅλος ὁ ΑΔ περισσός ἐστιν.

Ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ΓΔ μονὰς ἡ ΔΕ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΓΕ ἄρτιός ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ὁ ΑΓ ἄρτιος· καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστι. καὶ ἔστιν ἡ μονὰς ἡ ΔΕ· περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Α . . . . . Β . . . . Γ . . . . Ε . Δ

Prop. XXIII. Theor.

Si impares numeri quotcunque componantur, & multitudo ipsorum sit impar; & totus impar erit.

Componantur enim numeri impares quotcunque, quorum multitudo sit impar, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ: dico & totum ΑΔ imparem esse.

Auferatur ab ipso ΓΔ unitas ΔΕ: reliquus igitur ΓΕ [per 7. def. 7.] par est. est autem [per 22. 9.] & ΑΓ par; ergo [per 21. 9.] & totus ΑΕ par erit. atque est ΔΕ unitas: impar igitur est ΑΔ. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, καὶ ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται.

Ἀπὸ γὰρ ἀρτίου τοῦ ΑΒ ἄρτιος ἀφῃρήσθω ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ ΑΒ ἄρτιός ἐστιν, ἔχει μέρος ἥμισυ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΒΓ ἔχει μέρος ἥμισυ· ὥστε καὶ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἔχει μέρος ἥμισυ· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Α . . . . . . Γ . . . . Β

Prop. XXIV. Theor.

Si à pari numero par auferatur, & reliquus par erit.

A Pari enim numero ΑΒ par auferatur ΒΓ: dico & reliquum ΓΑ parem esse.

Quoniam enim ΑΒ par est, habet partem dimidiam. eadem ratione & ΒΓ habet partem dimidiam: quare & reliquus ΓΑ partem habet dimidiam: par igitur est ΑΓ. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ περισσὸς ἀφαιρεθῇ, καὶ ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται.

Ἀπὸ γὰρ ἀρτίου τοῦ ΑΒ περισσὸς ἀφῃρήσθω ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ περισσός ἐστιν.

Prop. XXV. Theor.

Si à pari numero impar auferatur, & reliquus impar erit.

A Pari enim numero ΑΒ impar ΒΓ auferatur: dico & reliquum ΓΑ imparem esse.

Auferatur ab ipso ΒΓ unitas ΓΔ: ergo [per 7. def. 7.] ΔΒ par est. est autem par & ΑΒ: & reliquus igitur ΑΔ [per 24. 9.] est par. atque est ΓΔ unitas: ergo ΓΑ impar est. quod erat demonstrandum.

Α . . . . Γ . Δ . . . . Β

Ἀφῃρήσθω γὰρ ἀπὸ τοῦ ΒΓ μονὰς ἡ ΓΔ· ὁ ΔΒ ἄρα ἄρτιός ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ὁ ΑΒ ἄρτιος· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΔ ἄρτιός ἐστι. καί ἐστι μονὰς ἡ ΓΔ· ὁ ΓΑ ἄρα περισσός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXVI. THEOR.

Si ab impari numero impar auferatur, & reliquus par erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ′.

Ἐὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ περισσὸς ἀφαιρεθῇ, καὶ ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται.

Ab impari enim numero ΑΒ impar ΒΓ auferatur: dico reliquum ΓΑ parem esse. Quoniam enim ΑΒ impar est, auferatur unitas ΒΔ: reliquus ΑΔ igitur est par. eadem ratione & ΓΔ est par: quare [per 24. 9.] & reliquus ΑΓ par est. quod erat demonstrandum.

Α . . . . Γ . . . . Δ . Β

Ἀπὸ γὰρ περισσοῦ τοῦ ΑΒ περισσὸς ἀφῃρήσθω ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ ὁ ΑΒ περισσός ἐστιν, ἀφῃρήσθω μονὰς ἡ ΒΔ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΔ ἄρτιός ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΓΔ ἄρτιός ἐστιν· ὥστε καὶ λοιπὸς ὁ ΑΓ ἄρτιός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXVII. THEOR.

Si ab impari numero par auferatur, reliquus impar erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ′.

Ἐὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται.

Ab impari enim numero ΑΒ par auferatur ΒΓ: dico reliquum ΓΑ imparem esse. Auferatur enim unitas ΑΔ: ergo ΔΒ par est. est autem par & ΒΓ: & reliquus igitur ΓΔ [per 24. 9.] est par. atque est ΔΑ unitas: ergo [per 7. def. 7.] ΓΑ impar est. quod erat demonstrandum.

Α . Δ . . . . Γ . . . . Β

Ἀπὸ γὰρ περισσοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ΑΒ ἄρτιος ἀφῃρήσθω ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ περισσός ἐστιν. Ἀφῃρήσθω γὰρ μονὰς ἡ ΑΔ· ὁ ΔΒ ἄρα ἄρτιός ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ὁ ΒΓ ἄρτιος· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΓΔ ἄρτιός ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ μονὰς ἡ ΔΑ· περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ ΓΑ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXVIII. THEOR.

Si impar numerus parem multiplicans faciat aliquem, factus par erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη′.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος ἄρτιος ἔσται.

Impar enim numerus Α parem numerum Β multiplicans faciat Γ: dico Γ parem esse. Quoniam enim Α multiplicans Β ipsum Γ fecit, componitur Γ ex tot numeris æqualibus ipsi Β quot unitates sunt in Α. atque est Β par: ergo Γ ex paribus numeris componitur. si autem pares numeri quotcunque componantur, [per 21. 9.] totus par erit: ergo Γ est par. quod erat demonstrandum.

Α . . .   Β . . . .
Γ . . . .

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἄρτιον τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ ἄρτιός ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἴσων τῷ Β ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Α μονάδες. καί ἐστιν ὁ Β ἄρτιος· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐξ ἀρτίων. ἐὰν δὲ ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, ὁ ὅλος ἄρτιός ἐστιν· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXIX. THEOR.

Si impar numerus imparem numerum multiplicans faciat aliquem, factus impar erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ′.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς περισσὸν ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος περισσὸς ἔσται.

Impar enim numerus Α numerum imparem Β multiplicans faciat Γ: dico Γ imparem esse.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α περισσὸν τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ περισσός ἐστιν.

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἴσων τῷ Β ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Α μονάδες. καί ἐστιν ἑκάτερος τῶν Α, Β περισσός· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν. ὁ δὲ συγκείμενος ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσὸν, περισσός ἐστιν· ὥστε ὁ Γ περισσός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

A . . . B . . . . .
Γ . . . .

Quoniam enim A multiplicans B ipsum Γ fecit, componitur Γ ex tot numeris æqualibus ipsi B quot sunt in A unitates. atque est uterque ipsorum A, B impar: ergo Γ ex imparibus numeris componitur, quorum multitudo est impar. qui autem componitur ex imparibus numeris, quorum multitudo impar, [per 23. 9.] & ipse impar erit: ergo Γ est impar. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἄρτιον τὸν Β μετρείτω· λέγω ὅτι καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Γ· λέγω ὅτι ὁ Γ οὐκ ἔστι περισσός. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω. καὶ ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὸν Γ· ὁ Α ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ὁ ἄρα Β σύγκειται ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν ἐστιν· ὁ Β ἄρα περισσός ἐστιν, ὅπερ ἄτοπον, ὑπόκειται γὰρ ἄρτιος· οὐκ ἄρα ὁ Γ περισσός ἐστιν· ἄρτιος ἄρα ὁ Γ· ὥστε ὁ Α τὸν Β μετρεῖ ἀρτιάκις, διὰ δὴ τοῦτο καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXX. THEOR.

Si impar numerus parem numerum metiatur, & dimidium ejus metietur.

Impar enim numerus A parem numerum B metiatur: dico & dimidium ejus metiri.

A . . . B . . . .
Γ . . . .

Quoniam enim A metitur B, metiatur ipsum per Γ: dico Γ non esse imparem. nam si fieri potest, sit impar. & quoniam A ipsum B metitur per Γ; A multiplicans ipsum Γ fecit B: ergo B componitur ex imparibus numeris, quorum multitudo est impar; ac propterea impar est B, quod est absurdum, par enim ponitur: non igitur Γ est impar: ergo par: quare A ipsum B pariter metitur, & ob id ejus quoque dimidium metietur. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτος ᾖ, καὶ πρὸς τὸν διπλάσιον αὐτοῦ πρῶτος ἔσται.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α πρός τινα ἀριθμὸν τὸν Β πρῶτος ἔστω, τοῦ δὲ Β διπλάσιος ἔστω ὁ Γ· λέγω ὅτι ὁ Α καὶ πρὸς τὸν Γ πρῶτός ἐστιν.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Α, Γ πρῶτοι, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. καί ἐστιν ὁ Α περισσός· περισσὸς ἄρα καὶ ὁ Δ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ περισσὸς ὢν τὸν Γ μετρεῖ, καὶ ἔστιν ὁ Γ ἄρτιος· καὶ τὸν ἥμισυν ἄρα τοῦ Γ μετρήσει ὁ Δ. τοῦ δὲ Γ ἥμισύς ἐστιν ὁ Β· ὁ Δ ἄρα τὸν Β μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Α· ὁ Δ ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Γ πρῶτος οὐκ ἔστιν· οἱ Α, Γ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXXI. THEOR.

Si impar numerus ad aliquem numerum sit primus, & ad ipsius duplum primus erit.

Impar enim numerus A ad aliquem numerum B sit primus, & sit Γ ipsius B duplus: dico A etiam ad Γ primum esse.

A . . . B . . . . .
Γ . . . .
Δ ——

Si enim non sint A, Γ primi, eos aliquis numerus metietur. metiatur, sitque Δ. & est A impar: impar igitur est & Δ. & quoniam Δ impar existens metitur ipsum Γ, atque est Γ par; & Δ [per 30. 9.] ipsius Γ dimidium metietur. sed ipsius Γ dimidium est B: ergo Δ ipsum B metitur. metitur autem & ipsum A: quare Δ ipsos A, B metitur, primos inter se existentes, quod fieri non potest: non igitur A ad Γ primus non est: ergo A, Γ inter se primi sunt. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

Τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ἀριθμῶν ἕκαστος ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον.

Ἀπὸ γὰρ δυάδος τοῦ Α δεδιπλασιάσθωσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ, οἱ Β, Γ, Δ· λέγω ὅτι οἱ Β, Γ, Δ ἀρτιάκις ἄρτιοί εἰσι μόνον.

PROP. XXXII. THEOR.

Numerorum à binario duplatorum unusquisque pariter par est tantum.

A binario enim A duplentur quotlibet numeri B, Γ, Δ: dico B, Γ, Δ pariter pares esse tantum.

At vero unumquemque ipsorum B, Γ, Δ pariter parem esse [per 8. def. 7.] manifesto constat: à binario namque duplatus est. dico & tantum. exponatur enim unitas E. quoniam igitur ab unitate quotlibet numeri deinceps proportionales sunt, & post unitatem A primus est; maximum ipsorum numerorum A, B, Γ, Δ, videlicet Δ, nullus alius metietur [per 13. 9.] præter ipsos A, B, Γ. atque est unusquisque ipsorum A, B, Γ par; ergo Δ pariter par est tantum. similiter demonstrabimus & unumquemque ipsorum A, B, Γ pariter parem esse tantum. quod erat demonstrandum.

E, 1. A, 2. B, 4. Γ, 8. Δ, 16.

Ὅτι μὲν οὖν ἕκαστος τῶν B, Γ, Δ ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι, φανερόν· ἀπὸ γὰρ δυάδος ἐστὶ διπλασιασθείς. λέγω δὴ ὅτι καὶ μόνον. ἐκκείσθω γὰρ μονὰς ἡ E. ἐπεὶ οὖν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ A πρῶτός ἐστιν, ὁ μέγιστος τῶν A, B, Γ, Δ ὁ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται παρὲξ τῶν A, B, Γ. καὶ ἐστιν ἕκαστος τῶν A, B, Γ ἄρτιος· ὁ Δ ἄρα ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκάτερος τῶν A, B, Γ ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXIII. Theor.

Si numerus dimidium habeat imparem, pariter impar est tantum.

Numerus enim A dimidium imparem habeat: dico A pariter imparem esse tantum.

At vero pariter imparem esse [per 9. def. 7.] perspicuum est: dimidium enim ipsius impar existens ipsum pariter metitur. dico & tantum. nam si A sit etiam pariter par, [* dimidius ipsius par erit; atque] eum par numerus [per 8. def. 7.] per parem numerum metietur: ergo dimidium ipsius parem numerum metitur, impar existens, quod est absurdum: quare A pariter impar est tantum. quod erat demonstrandum.

A ....

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Ἐὰν ἀριθμὸς τὸ ἥμισυ ἔχῃ περισσόν, ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ A τὸν ἥμισυν ἐχέτω περισσόν· λέγω ὅτι ὁ A ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον.

Ὅτι μὲν οὖν ἀρτιάκις περισσός ἐστι, φανερόν· ὁ γὰρ ἥμισυς αὐτοῦ περισσὸς ὢν μετρεῖ αὐτὸν ἀρτιάκις. λέγω δὴ ὅτι καὶ μόνον. εἰ γὰρ ἔσται ὁ A καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος, [* ὁ ἥμισυς αὐτοῦ ἄρτιός ἐστι, καὶ] μετρηθήσεται ὑπ' ἀρτίου κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν· ὥστε καὶ ὁ ἥμισυς αὐτοῦ μετρηθήσεται ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ, περισσὸς ὤν, ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον· ὁ A ἄρα ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXIV. Theor.

Si par numerus neque sit à binario duplatus, neque dimidium imparem habeat; pariter par est & pariter impar.

Numerus enim A neque sit à binario duplatus, neque dimidium imparem habeat: dico A & pariter parem & pariter imparem esse.

At vero A pariter parem esse [per 8. def. 7.] manifestum est; dimidium enim imparem non habet. dico etiam pariter imparem esse. nam si A bifariam secemus, & dimidium ipsius bifariam, & hoc semper faciamus, tandem incidemus in aliquem imparem qui ipsum A per numerum parem metietur. si enim non incidemus in aliquem imparem qui ipsum A per numerum parem metietur, incidemus in binarium, atque erit A à binario duplatus; quod non ponitur: quare A pariter impar est. ostensum autem est & pariter esse parem: est igitur A & pariter par & pariter impar. quod erat demonstrandum.

A ....

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Ἐὰν ἄρτιος ἀριθμὸς μήτε τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ᾖ, μήτε τὸ ἥμισυ ἔχῃ περισσόν· ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἐστι, καὶ ἀρτιάκις περισσός.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ A μήτε τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ἔστω, μήτε τὸν ἥμισυν ἐχέτω περισσόν· λέγω ὅτι ὁ A ἀρτιάκις τε ἐστὶν ἄρτιος, καὶ ἀρτιάκις περισσός.

Ὅτι μὲν οὖν ὁ A ἀρτιάκις ἐστὶν ἄρτιος, φανερόν· τὸν γὰρ ἥμισυν οὐκ ἔχει περισσόν. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἀρτιάκις ἐστὶ περισσός. ἐὰν γὰρ τὸν A τέμωμεν δίχα, καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιῶμεν, καταντήσομεν εἴς τινα περισσόν, ὃς μετρήσει τὸν A κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν. εἰ γὰρ οὐ καταντήσομεν εἴς τινα περισσὸν ὃς μετρήσει τὸν A κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν, καταντήσομεν εἰς δυάδα, καὶ ἔσται ὁ A τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· ὥστε ὁ A καὶ ἀρτιάκις περισσός ἐστιν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος· ὁ A ἄρα ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἐστι, καὶ ἀρτιάκις περισσός. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXV. Theor.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, auferantur autem à secundo & ultimo æquales primo; erit ut secundi excessus ad primum ita ul-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἀφαιρεθῶσι δὲ ἀπό τε τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ ἐσχάτου ἴσοι τῷ πρώτῳ· ἔσται ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπερο-

* Illa uncis inclusa non agnoscunt Codd. MSS. & rectius quidem abesse possunt.

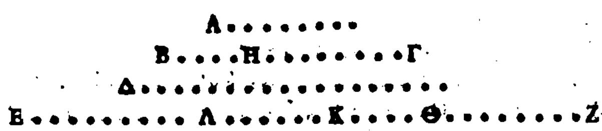
καὶ πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ ἅπαντας.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α, ΒΓ, Δ, ΕΖ, ἀρχόμενοι ἀπὸ ἐλαχίστου τοῦ Α, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ΒΓ καὶ τοῦ ΕΖ τῷ Α ἴσος, ἑκάτερος τῶν ΗΓ, ΖΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΒΗ πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ ΕΘ πρὸς τοὺς Α, ΒΓ, Δ.

Κείσθω γὰρ τῷ μὲν ΒΓ ἴσος ὁ ΖΚ, τῷ δὲ Δ ἴσος ὁ ΖΛ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΖΚ τῷ ΒΓ ἴσος ἐστὶν, ὧν ὁ ΖΘ τῷ ΗΓ ἴσος· λοιπὸς ἄρα ὁ ΘΚ λοιπῷ τῷ ΗΒ ἐστὶν ἴσος. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν ΒΓ καὶ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν Α, ἴσος δέ ἐστιν ὁ μὲν Δ τῷ ΖΛ, ὁ δὲ ΒΓ τῷ ΖΚ, ὁ δὲ Α τῷ ΖΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΖ πρὸς τὸν ΛΖ οὕτως ὁ ΛΖ πρὸς τὸν ΖΚ, καὶ ὁ ΖΚ πρὸς τὸν ΖΘ· διελόντι, ὡς ὁ ΕΛ πρὸς τὸν ΛΖ οὕτως ὁ ΛΚ πρὸς τὸν ΖΚ, καὶ ὁ ΚΘ πρὸς τὸν ΖΘ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΚΘ πρὸς τὸν ΖΘ οὕτως οἱ ΕΛ, ΛΚ, ΚΘ πρὸς τοὺς ΛΖ, ΚΖ, ΘΖ. ἴσος δέ ἐστιν ὁ μὲν ΚΘ τῷ ΒΗ, ὁ δὲ ΖΘ τῷ Α, οἱ δὲ ΛΖ, ΚΖ, ΘΖ τοῖς Δ, ΒΓ, Α· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΒΗ πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ ΕΘ πρὸς τοὺς Δ, ΒΓ, Α· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

timi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales A, BΓ, Δ, EZ incipientes à minimo A, & auferatur ab ipso BΓ & ab EZ æqualis ipsi A, videlicet HΓ, ZΘ: dico ut BH ad A ita esse EΘ ad A, BΓ, Δ.



Ponatur enim ipsi quidem BΓ æqualis ZK; ipsi vero Δ æqualis ZΛ. quoniam igitur ZK est æqualis ipsi BΓ, quorum ZΘ est æqualis HΓ; erit reliquus ΘK reliquo HB æqualis. & quoniam est ut EZ ad Δ ita Δ ad BΓ & BΓ ad A; æqualis autem est Δ ipsi ZΛ, & BΓ ipsi ZK, & A ipsi ZΘ: erit ut EZ ad ΛZ ita ΛZ ad ZK & ZK ad ZΘ: quare dividendo ut EΛ ad ΛZ ita ΛK ad ZK & KΘ ad ZΘ, & ut unus antecedentium ad unum consequentium ita [per 12. 7.] omnes antecedentes ad omnes consequentes: est igitur ut KΘ ad ZΘ ita EΛ, ΛK, KΘ ad ΛZ, KZ, ΘZ. atque est KΘ quidem æqualis BH; ZΘ vero ipsi A, & ΛZ, KZ, ΘZ æquales ipsis Δ, BΓ, A: ergo ut BH ad A ita est EΘ ad Δ, BΓ, A: est igitur ut secundi excessus ad primum ita excessus ultimi ad omnes ipsum antecedentes. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ'.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐκτεθῶσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπας συντεθεὶς πρῶτος γένηται, καὶ ὁ σύμπας ἐπὶ τὸν ἔσχατον πολλαπλασιασθεὶς ποιῇ τινα· ὁ γενόμενος τέλειος ἔσται.

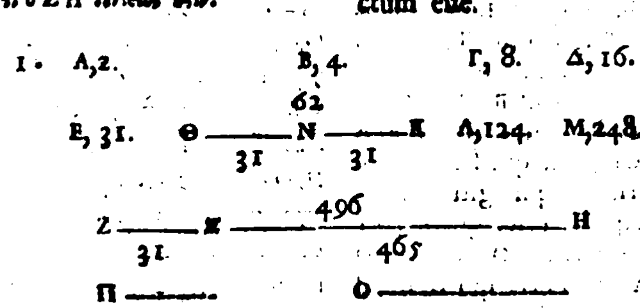
Ἀπὸ γὰρ μονάδος ἐκκείσθωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπας συντεθεὶς πρῶτος γένηται, οἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ τῷ σύμπαντι ἴσος ἔστω ὁ Ε, καὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν ΖΗ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ ΖΗ τέλειός ἐστιν.

Ὅσοι γάρ εἰσιν οἱ Α, Β, Γ, Δ τῷ πλήθει τοσοῦτοι ἀπὸ τοῦ Ε εἰλήφθωσαν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, οἱ Ε, ΘΚ, Λ, Μ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Μ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Ε, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Α, Μ. καί ἐστιν ὁ ἐκ τῶν Ε, Δ ὁ ΖΗ· καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Μ ἄρα ἐστὶν ὁ ΖΗ· ὁ Α ἄρα τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν ΖΗ πεποίηκεν· ὁ Μ ἄρα τὸν ΖΗ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. καί ἐστι δυὰς ὁ Α· διπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ ΖΗ τοῦ Μ. εἰσὶ δὲ καὶ οἱ Μ, Λ, ΘΚ, Ε ἑξῆς διπλάσιοι ἀλλή-

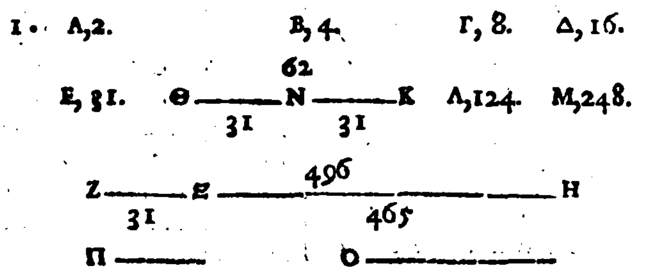
PROP. XXXVI. THEOR.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales exponantur in dupla analogia, quoad totus compositus primus fiat, & totus in ultimum multiplicatus faciat aliquem; factus perfectus erit.

Ab unitate enim exponantur quotcunque numeri deinceps proportionales in dupla analogia, sc. A, B, Γ, Δ, quoad totus compositus primus fiat, & toti æqualis sit E, & E ipsum Δ multiplicans faciat ZH: dico ZH perfectum esse.



Quot enim sunt A, B, Γ, Δ multitudine tot sumantur ab ipso E in dupla analogia, qui sint E, ΘK, Λ, M: ergo ex æquo ut A ad Δ ita erit E ad M: ac propterea [per 19. 7.] qui fit ex E, Δ est æqualis ei qui ex A, M. est autem qui ex E, Δ ipse ZH: quare ZH est qui fit ex A, M: multiplicans igitur A ipsum M fecit ZH: & M metitur ZH per unitates quæ sunt in A: atque est A binarius: duplus igitur est ZH ipsius M. sunt autem & M, Λ, ΘK, E deinceps dupli inter se: ergo E, ΘK, Λ, M, ZH deinceps proportionales sunt in dupla analogia. auferatur à secundo ΘK, & ab ultimo ZH ipsi primo E æqualis uterque ΘN, ZΞ: est igitur [per 35. 9.] ut secundi numeri excessus ad primum ita excessus ultimi ad omnes ipsum antecedentes: quare ut NK ad E ita ΞH ad M, Λ, ΘK, E. atque est [per construct.] NK ipsi E æqualis: ergo & ΞH est æqualis ipsis M, Λ, ΘK, E. est autem [per constr.] ZΞ æqualis ipsi E; atque E ipsis A, B, Γ, Δ & unitati æqualis: totus igitur ZH æqualis est [per 2. ax.] & ipsis E, ΘK, Λ, M & ipsis A, B, Γ, Δ & unitati, omnesque [per 11. 9.] ipsum ZH metiuntur. dico nullum alium metiri ZH præter ipsos A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M, & unitatem. si enim fieri potest, metiatur aliquis numerus ipsum ZH, qui sit O: sitque O nulli ipsorum A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M idem. & quoties O ipsum ZH metitur tot unitates sint in Π: ergo Π ipsum O multiplicans fecit ZH. sed [per constr.] & E multiplicans Δ ipsum ZH fecit: est igitur [per 19. 7.] ut E ad Π ita O ad Δ. & quoniam ab unitate deinceps proportionales sunt A,B,Γ,Δ, & qui unitatem sequitur A primus est; non metietur ipsum Δ aliquis alius numerus præter ipsos A,B,Γ [per 13.9.]: & ponitur O nulli ipsorum A,B,Γ idem: non igitur O ipsum Δ metietur. ut autem O ad Δ ita E ad Π: ergo [per 20. def. 7.] neque E metietur ipsum Π. atque [ex hyp.] est E primus, omnis autem primus numerus ad omnem numerum quem non metitur [per 31. 7.] primus est: quare E, Π primi inter se sunt. sed [per 23. 7.] primi etiam & minimi, minimi vero eos qui eandem quam ipsi rationem habent æqualiter metiuntur, [per 21. 7.] antecedens antecedentem & consequens consequentem, atque est ut E ad Π ita O ad Δ: ergo E æqualiter metitur ipsum O atque Π ipsum Δ. sed nullus alius metitur numerum Δ præter ipsos A, B, Γ: quare Π idem est qui unus ipsorum A, B, Γ. sit idem qui B, & quot sunt B, Γ, Δ multitudine tot ab ipso E sumantur E, ΘK, Λ: suntque [per constr.] E, ΘK, Λ in eadem ratione in qua B, Γ, Δ: ex æquo igitur ut B ad Δ ita est E ad Λ; ergo [per 19. 7.] qui fit ex B, Λ est æqualis ei qui ex Δ, E. sed qui fit ex Δ, E est æqualis ei qui ex Π, O: qui igitur fit ex Π, O ei qui ex B, Λ æqualis erit: quare [per 19. 7.] ut Π ad B ita est Λ ad O. estque Π idem qui B: ergo & Λ idem erit qui O, quod fieri non potest, etenim O nulli ipsorum expositorum idem ponitur: non igitur ipsum ZH metitur aliquis numerus præter ipsos A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M, & unitatem. atque ostensus est ZH æqualis ipsis A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M, & unitati, perfectus autem numerus est [per 22. def. 7.] qui suis ipsius partibus est æqualis: ergo ZH perfectus est. quod erat demonstrandum.



λων· οἱ E, ΘK, Λ, M, ZH ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ. ἀφῃρήσθω δὴ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τοῦ ΘK καὶ τοῦ ἐσχάτου τοῦ ZH τῷ πρώτῳ τῷ E ἴσος, ἑκάτερος τῶν ΘN, ZΞ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ NK πρὸς τὸν E οὕτως ὁ ΞH πρὸς τοὺς M, Λ, ΘK, E. καὶ ἔστιν ὁ NK ἴσος τῷ E· καὶ ὁ ΞH ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς M, Λ, ΘK, E. ἔστι δὲ καὶ ὁ ZΞ τῷ E ἴσος, ὁ δὲ E τοῖς A, B, Γ, Δ καὶ τῇ μονάδι· ὅλος ἄρα ὁ ZH ἴσος ἐστὶ τοῖς τε E, ΘK, Λ, M καὶ τοῖς A, B, Γ, Δ καὶ τῇ μονάδι, καὶ μετρεῖται ὑπ' αὐτῶν. λέγω ὅτι ὁ ZH ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται παρὲξ τῶν A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M καὶ τῆς μονάδος. εἰ γὰρ δυνατὸν μετρείτω τις τὸν ZH ὁ O, καὶ ὁ O μηδενὶ τῶν A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M ἔστω ὁ αὐτός. καὶ ὁσάκις ὁ O τὸν ZH μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Π· ὁ Π ἄρα τὸν O πολλαπλασιάσας τὸν ZH πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ E τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν ZH πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ E πρὸς τὸν Π οὕτως ὁ O πρὸς τὸν Δ. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν οἱ A, B, Γ, Δ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ A πρῶτός ἐστιν· ὁ Δ ἄρα ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται παρὲξ τῶν A, B, Γ, καὶ ὑπόκειται ὁ O οὐδενὶ τῶν A, B, Γ ὁ αὐτός· οὐκ ἄρα μετρήσει ὁ O τὸν Δ. ἀλλ' ὡς ὁ O πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Π· οὐδὲ ὁ E ἄρα τὸν Π μετρεῖ. καὶ ἔστιν ὁ E πρῶτος, πᾶς δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν ὃν μὴ μετρεῖ πρῶτός ἐστιν· οἱ E, Π ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον, καὶ ἔστιν ὡς ὁ E πρὸς τὸν Π οὕτως ὁ O πρὸς τὸν Δ· ἰσάκις ἄρα ὁ E τὸν O μετρεῖ καὶ ὁ Π τὸν Δ. ὁ δὲ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρεῖται παρὲξ τῶν A, B, Γ· ὁ Π ἄρα ἑνὶ τῶν A, B, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. ἔστω τῷ B ὁ αὐτός. καὶ ὅσοι εἰσὶν οἱ B, Γ, Δ τῷ πλήθει τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἀπὸ τοῦ E, οἱ E, ΘK, Λ, καί εἰσιν οἱ E, ΘK, Λ τοῖς B, Γ, Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ B πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Λ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν B, Λ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Δ, E. ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν Δ, E ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Π, O· καὶ ὁ ἐκ τῶν Π, O ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν B, Λ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Π πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν O. καὶ ἔστιν ὁ Π τῷ B ὁ αὐτός· καὶ ὁ Λ ἄρα τῷ O ἐστὶν ὁ αὐτός, ὅπερ ἀδύνατον, ὁ γὰρ O ὑπόκειται μηδενὶ τῶν ἐκκειμένων ὁ αὐτός· οὐκ ἄρα τὸν ZH μετρεῖ τις ἀριθμὸς παρὲξ τῶν A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M καὶ τῆς μονάδος. καὶ ἐδείχθη ὁ ZH τοῖς A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M, καὶ τῇ μονάδι ἴσος, τέλειος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος ὤν· τέλειος ἄρα ἐστὶν ὁ ZH. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER DECIMUS.

ΟΡΟΙ.

α'. ΣΥΜΜΕΤΡΑ μεγέθη λέγεται, τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα.

β'. Ἀσύμμετρα δὲ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

γ'. Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροί εἰσιν, ὅταν τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα τῷ αὐτῷ χωρίῳ μετρῆται.

δ'. Ἀσύμμετροι δὲ, ὅταν τοῖς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνοις μηδὲν ἐνδέχηται χωρίον κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

ε'. Τούτων ὑποκειμένων, δείκνυται ὅτι τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι πλήθει ἄπειροι σύμμετροί τε καὶ ἀσύμμετροι, αἱ μὲν μήκει καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει μόνον. καλείσθω οὖν ἡ μὲν προτεθεῖσα εὐθεῖα, ῥητή.

ϛ'. Καὶ αἱ ταύτῃ σύμμετροι, εἴτε μήκει καὶ δυνάμει εἴτε δυνάμει μόνον, ῥηταί.

ζ'. Αἱ δὲ ταύτῃ ἀσύμμετροι ἄλογοι καλείσθωσαν.

η'. Καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς προτεθείσης εὐθείας τετράγωνον, ῥητόν.

θ'. Καὶ τὰ τούτῳ σύμμετρα, ῥητά.

ι'. Τὰ δὲ τούτῳ ἀσύμμετρα, ἄλογα καλείσθω.

ια'. Καὶ αἱ δυνάμεναι αὐτὰ, ἄλογοι· εἰ μὲν τετράγωνον εἴη, αὐταὶ αἱ πλευραί·

DEFINITIONES.

1. COMMENSURABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

2. Incommensurabiles autem, quarum nullam esse communem mensuram contingit.

3. Rectæ lineæ potentia commensurabiles sunt, cum ea quæ ab ipsis fiunt quadrata, idem spatium metitur.

4. Incommensurabiles autem, cum quadrata quæ ab ipsis fiunt nullum commune spatium metiri contingit.

5. His positis ostenditur, cuicunque rectæ lineæ propositæ rectas lineas multitudine infinitas & commensurabiles esse & incommensurabiles, alias quidem longitudine & potentia, alias vero potentia solum. vocetur autem proposita recta linea, rationalis.

6. Et huic commensurabiles, sive longitudine & potentia sive potentia solum, rationales.

7. Incommensurabiles vero irrationales vocentur.

8. Et quadratum quod à recta linea proposita fit, dicatur rationale.

9. Et huic commensurabilia quidem, rationalia.

10. Incommensurabilia vero dicantur irrationalia.

11. Et lineæ, quæ incommensurabilia possunt, vocentur irrationales: si quidem ea quadrata sint, ipsorum latera;

tera; si vero alia quæpiam rectilinea, ipsæ à quibus æqualia quadrata describuntur.

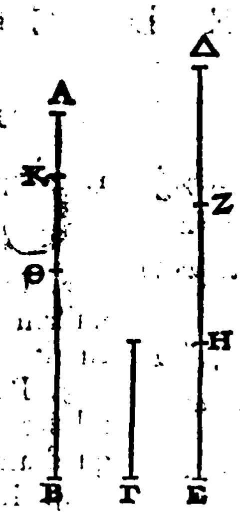
εἰ δὲ ἕτερά τινα εὐθύγραμμα, αἷς ἴσα αὐτοῖς τετράγωνα ἀναγράφονται.

Prop. I. Theor.

Duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si à majori auferatur majus quam dimidium, & ab eo quod reliquum est rursus auferatur majus quam dimidium, & hoc semper fiat; relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minori magnitudine exposita minor erit.

Sint duæ magnitudines inæquales AB, Γ, quarum major AB: dico si ab ipsa AB auferatur majus quam dimidium, & ab eo quod reliquum est rursus auferatur majus quam dimidium, atque hoc semper fiat; relinqui tandem magnitudinem quandam quæ magnitudine Γ minor erit.

Etenim Γ multiplicata fiet aliquando major magnitudine AB. multiplicetur, & sit ΔE ipsius quidem Γ multiplex, major autem quam AB, dividaturque ΔE in partes ipsi Γ æquales ΔZ, ZH, HE, & ab ipsa AB auferatur majus quam dimidium BΘ, ab ipsa vero AΘ rursus majus quam dimidium auferatur ΘK, atque hoc semper fiat quoad divisiones quæ sunt in AB multitudine æquales fiant divisionibus quæ in ΔE: sint igitur divisiones AK, KΘ, ΘB divisionibus ΔZ, ZH, HE multitudine æquales.



Et quoniam major est ΔE quam AB, & ablatum est ab ipsa quidem ΔE minus quam dimidium, sc. EH, ab ipsa vero AB majus quam dimidium, sc. BΘ; erit reliquum HΔ reliquo ΘA majus. rursus, quoniam major est HΔ quam ΘA, & ablatum est ab ipsa quidem HΔ dimidium HZ, ab ipsa vero ΘA majus quam dimidium ΘK; reliquum ΔZ reliquo AK majus erit. estque ΔZ æqualis ipsi Γ: ergo Γ quam AK est major. minor igitur est AK quam Γ: ergo ex magnitudine AB relicta est magnitudo AK exposita minori magnitudine Γ minor. quod erat demonstrandum.

Similiter autem demonstrabitur, etiam si dimidia ablata fuerint.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α΄.

Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται· λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους.

Ἔστω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ΑΒ, Γ, ὧν μεῖζον τὸ ΑΒ· λέγω ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ ΑΒ ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ ἀπὸ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ Γ μεγέθους.

Τὸ γὰρ Γ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ ΑΒ μεγέθους μεῖζον. πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ ΔΕ τοῦ μὲν Γ πολλαπλάσιον, τοῦ δὲ ΑΒ μεῖζον, καὶ διῃρήσθω τὸ ΔΕ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ μὲν τοῦ ΑΒ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΒΘ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΘ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΘΚ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω ἕως ἂν αἱ ἐν τῷ ΑΒ διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς γένωνται ταῖς ἐν τῷ ΔΕ διαιρέσεσιν· ἔστωσαν οὖν αἱ ΑΚ, ΚΘ, ΘΒ διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς οὖσαι ταῖς ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ.

Καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΔΕ τοῦ ΑΒ, καὶ ἀφῄρηται ἀπὸ μὲν τοῦ ΔΕ ἔλασσον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΕΗ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΒ μεῖζον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΒΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΔ λοιποῦ τοῦ ΘΑ μεῖζόν ἐστι. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΗΔ τοῦ ΘΑ, καὶ ἀφῄρηται τοῦ μὲν ΗΔ ἥμισυ τὸ ΗΖ, τοῦ δὲ ΘΑ μεῖζον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΘΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΔΖ λοιποῦ τοῦ ΑΚ μεῖζόν ἐστιν. ἴσον δὲ τὸ ΔΖ τῷ Γ· καὶ τὸ Γ ἄρα τοῦ ΑΚ μεῖζόν ἐστιν. ἔλασσον ἄρα τὸ ΑΚ τοῦ Γ. καταλείπεται ἄρα ἀπὸ τοῦ ΑΒ μεγέθους τὸ ΑΚ μέγεθος ἔλασσον ὂν τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους τοῦ Γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, κἂν ἡμίσεα ᾖ τὰ ἀφαιρούμενα.

Aliter.

Exponantur duæ magnitudines inæquales AB, Γ, sitque Γ minor; & quoniam minor est Γ, multiplicata erit aliquando magnitudine AB major. fiat ut ZM, dividaturque in partes ipsi Γ æquales MΘ, ΘH, HZ; & ab ipsa AB auferatur majus quam dimidium BE, & ab EA majus quam dimidium EΔ; atque hoc semper fiat, quoad divisiones quæ sunt in AB numero æquales fiant divisionibus quæ in ZM. fiant igitur ut BE, EΔ, ΔA, & ipsi ΔA una-

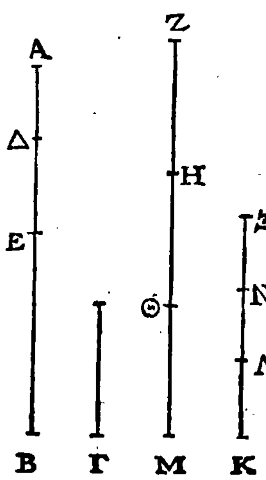
ΑΛΛΩΣ.

Ἐκκείσθω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ΑΒ, Γ, ἔστω δὲ τὸ Γ ἔλασσον, καὶ ἐπεὶ ἔλασσόν ἐστι τὸ Γ, πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ ΑΒ μεγέθους μεῖζον. γεγονέτω ὡς τὸ ΖΜ, καὶ διῃρήσθω εἰς τὰ ἴσα τῷ Γ τὰ ΜΘ, ΘΗ, ΗΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ ΑΒ ἀφῃρήσθω μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΒΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ ΕΑ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΕΔ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω ἕως αἱ ἐν τῷ ΑΒ διαιρέσεις ἴσαι γένωνται ταῖς ἐν τῷ ΖΜ διαιρέσεσι. γεγονέτωσαν ὡς αἱ ΒΕ, ΕΔ, ΔΑ, καὶ τῷ ΔΑ ἑκα-

στον

στον τῶν ΚΛ, ΛΝ, ΝΞ ἔστω ἴσον, καὶ τοῦτο γιγνέσθω ἕως ἂν αἱ διαιρέσεις τοῦ ΚΞ ἴσαι γένωνται ταῖς τοῦ ΖΜ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ΒΕ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισύ ἐστι τοῦ ΑΒ, τὸ ΒΕ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΕΑ· πολλῷ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΔΑ. ἀλλὰ τῷ ΔΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ΞΝ· τὸ ΒΕ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΞΝ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ ΕΔ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισύ ἐστι τοῦ ΕΑ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ΔΑ. ἀλλὰ τῷ ΔΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ΝΛ· τὸ ΕΔ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΝΛ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΒ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΞΛ. ἀλλὰ καὶ τῷ ΔΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ΛΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΒ μεῖζόν ἐστιν ὅλου τοῦ ΞΚ. ἀλλὰ τοῦ ΒΑ μεῖζόν ἐστι τὸ ΜΖ· πολλῷ ἄρα τὸ ΜΖ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΞΚ. καὶ ἐπεὶ τὰ ΞΝ, ΝΛ, ΛΚ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν, ἔστι δὲ καὶ τὰ ΜΘ, ΘΗ, ΗΖ ἴσα ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ἐν τῷ ΜΖ τῷ πλήθει τῶν ἐν τῷ ΞΚ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΚΛ πρὸς τὸ ΖΗ οὕτως τὸ ΞΚ πρὸς τὸ ΖΜ. μεῖζον δὲ τὸ ΖΜ τοῦ ΞΚ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΖΗ τοῦ ΛΚ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΖΗ ἴσον τῷ Γ, τὸ δὲ ΚΛ τῷ ΑΔ· τὸ Γ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΑΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



quæque ipsarum ΚΛ, ΛΝ, ΝΞ sit æqualis, atque hoc fiat quoad divisiones ipsius ΚΞ numero æquales sint divisionibus ipsius ΖΜ.

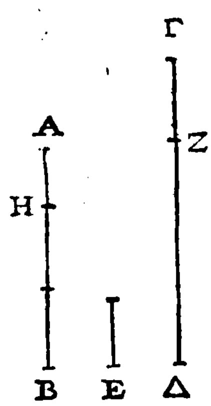
Et quoniam ΒΕ major est quam dimidium ipsius ΑΒ, erit ΒΕ major quam ΕΑ: multo igitur major est ΒΕ quam ΔΑ. sed ipsi ΔΑ æqualis est ΞΝ: ergo ΒΕ major est quam ΞΝ. rursus, quoniam ΕΔ major est quam dimidium ΕΑ, erit ΕΔ major quam ΔΑ. sed ipsi ΔΑ est æqualis ΝΛ: quare ΕΔ quam ΝΛ est major: tota igitur ΔΒ major est quam ΞΛ. ipsi vero ΔΑ æqualis est ΛΚ: quare tota ΑΒ quam tota ΞΚ major erit. sed ΜΖ major est quam ΒΑ: multo igitur ΜΖ quam ΞΚ est major. & quoniam ΞΝ, ΝΛ, ΛΚ inter se æquales sunt; sunt autem & ΜΘ, ΘΗ, ΗΖ inter se æquales, atque est multitudo earum quæ sunt in ΜΖ æqualis multitudini ipsarum quæ in ΞΚ: erit [per 12. 5.] ut ΚΛ ad ΖΗ ita ΞΚ ad ΖΜ. major autem est ΖΜ quam ΞΚ: ergo [per 14. 5.] & ΖΗ quam ΛΚ est major. atque est ΖΗ ipsi Γ æqualis; & ΚΛ æqualis ipsi ΑΔ: ergo Γ quam ΑΔ major erit. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἐὰν δύο μεγεθῶν ἐκκειμένων ἀνίσων, ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγεθῶν ἐκκειμένων ἀνίσων τῶν ΑΒ, ΓΔ, καὶ ὄντος ἐλάσσονος τοῦ ΑΒ, ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ περιλειπόμενον μηδέποτε καταμετρείτω τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· λέγω ὅτι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη.

Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω εἰ δυνατόν, καὶ ἔστω τὸ Ε, καὶ τὸ μὲν ΑΒ τὸ ΔΖ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΓΖ, τὸ δὲ ΓΖ τὸ ΒΗ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΑΗ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω, ἕως οὗ λειφθῇ τι μέγεθος, ὅ ἐστιν ἔλασσον τοῦ Ε. γεγονέτω, καὶ λελείφθω τὸ ΑΗ ἔλασσον τοῦ Ε. ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ ΑΒ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΔΖ μετρεῖ· καὶ τὸ Ε ἄρα τὸ ΔΖ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΖ μετρήσει. ἀλλὰ τὸ ΓΖ τὸ ΒΗ μετρεῖ· καὶ τὸ Ε ἄρα τὸ ΒΗ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΗ μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη.



Prop. II. Theor.

Si duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, detracta semper minore de majore, reliqua minime præcedentem metiatur; magnitudines incommensurabiles erunt.

Duabus enim magnitudinibus inæqualibus expositis ΑΒ, ΓΔ, quarum minor sit ΑΒ, & detracta semper minore de majore, reliqua minime metiatur præcedentem: dico magnitudines ΑΒ, ΓΔ incommensurabiles esse.

Si enim commensurabiles sint, eas magnitudo quædam metietur. metiatur, si fieri potest; sitque Ε; & ΑΒ quidem metiens ΔΖ relinquat seipsa minorem ΓΖ; ΓΖ vero metiens ΒΗ relinquat seipsa minorem ΑΗ; & hoc semper fiat quoad relinquatur quædam magnitudo quæ sit minor ipsa Ε. itaque fiat, & relinquatur ΑΗ ipsa Ε minor. quoniam igitur Ε metitur ΑΒ, ΑΒ vero metitur ΔΖ; & Ε ipsam ΔΖ metitur. sed & metitur totam ΓΔ: ergo & reliquam ΓΖ metietur. at ΓΖ metitur ΒΗ: quare & Ε ipsam ΒΗ metitur. metitur autem & totam ΑΒ: & reliquam igitur ΑΗ metietur, major minorem, quod fieri non potest: non igitur magnitudines ΑΒ, ΓΔ aliqua magnitudo metietur: ergo ΑΒ, ΓΔ magnitudines incommensurabiles erunt.

Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, detracta semper minore de majore, reliqua minime præcedentem metiatur; magnitudines incommensurabiles erunt. quod erat demonstrandum.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγεθῶν ἐκκειμένων ἀνίσων, ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. III. Probl.

Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram invenire.

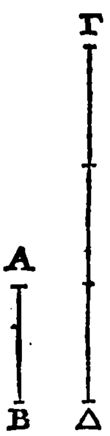
ΠΡΟΤΑΣΙΣ γʹ.

Δύο μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

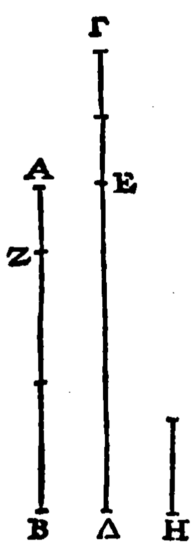
Sint datæ duæ magnitudines commensurabiles AB, ΓΔ, quarum minor AB: oportet ipsarum AB, ΓΔ maximam communem mensuram invenire.

Vel igitur AB metitur ΓΔ, vel non metitur. & si quidem AB metitur ΓΔ, metitur autem & seipsam; erit AB ipsarum AB, ΓΔ communis mensura. & perspicuum est maximam esse; magnitudo enim major magnitudine AB ipsam AB non metietur.

Si vero AB non metitur ΓΔ; detracta semper minore de majore, relinquetur tandem [per 2. 10.] quædam magnitudo quæ præcedentem metietur, propterea quod AB, ΓΔ non sint incommensurabiles; & AB quidem metiens ΓΔ relinquat seipsa minorem EΓ, EΓ vero metiens ZB relinquat seipsa minorem AZ; & AZ ipsam ΓE metiatur.



Quoniam igitur AZ metitur ΓE, sed ΓE metitur ZB: & AZ ipsam ZB metitur. metitur autem & seipsam: & totam igitur AB metietur. sed AB metitur ΔE: ergo AZ ipsam ΔE metitur. metitur autem & ΓE; & totam igitur ΓΔ metietur: ergo AZ ipsas AB, ΓΔ metitur: ac propterea AZ ipsarum AB, ΓΔ est communis mensura. dico & maximam esse. nisi enim ita sit, erit aliqua magnitudo major ipsa AZ quæ ipsas AB, ΓΔ metietur. itaque metiatur, & sit H. & quoniam H metitur AB, AB vero metitur EΔ; & H ipsam EΔ metitur. metitur autem & totam ΓΔ: ergo & reliquam ΓE metietur. sed ΓE metitur ZB: quare H ipsam ZB metitur. metitur autem & totam AB: & reliquam igitur AZ metietur, major minorem, quod fieri non potest: non igitur magnitudo quædam major ipsa AZ magnitudines AB, ΓΔ metietur: ergo AZ ipsarum AB, ΓΔ maxima erit communis mensura.



Duabus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis AB, ΓΔ, maxima ipsarum communis mensura AZ inventa est. quod erat faciendum.

Ἔστω τὰ δοθέντα δύο σύμμετρα μεγέθη τὰ AB, ΓΔ, ὧν ἔλασσον τὸ AB· δεῖ δὴ τῶν AB, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Τὸ AB γὰρ ἤτοι μετρεῖ τὸ ΓΔ ἢ οὔ. εἰ μὲν οὖν τὸ AB τὸ ΓΔ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό· τὸ AB ἄρα κοινὸν μέτρον ἐστὶ τῶν AB, ΓΔ. καὶ φανερὸν ὅτι μέτρον ἐστὶ μέγιστον· μεῖζον γὰρ τοῦ AB μεγέθους τὸ AB οὐ μετρήσει.

Μὴ μετρείτω δὴ τὸ AB τὸ ΓΔ· ἀνθυφαιρουμένου ἄρα τοῦ ἐλάττονος ἀεὶ ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ περιλειπόμενον μετρήσει ποτὲ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, διὰ τὸ μὴ εἶναι ἀσύμμετρα τὰ AB, ΓΔ, καὶ τὸ μὲν AB τὸ ΓΔ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ EΓ, τὸ δὲ EΓ τὸ ZB καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ AZ, τὸ δὲ AZ τὸ ΓE μετρείτω.

Ἐπεὶ οὖν τὸ AZ τὸ ΓE μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΓE τὸ ZB μετρεῖ· καὶ τὸ AZ ἄρα τὸ ZB μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό· καὶ ὅλον ἄρα τὸ AB μετρήσει τὸ AZ. ἀλλὰ τὸ AB τὸ ΔE μετρεῖ· καὶ τὸ AZ ἄρα τὸ ΔE μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΓE· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΓΔ μετρεῖ· τὸ AZ ἄρα τὰ AB, ΓΔ μετρεῖ· τὸ AZ ἄρα τῶν AB, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστί. λέγω δὴ ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή, ἔσται τι μέγεθος μεῖζον τοῦ AZ, ὃ μετρήσει τὰ AB, ΓΔ. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ H. ἐπεὶ οὖν τὸ H τὸ AB μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ AB τὸ EΔ μετρεῖ· καὶ τὸ H ἄρα τὸ EΔ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΓE μετρήσει τὸ H. ἀλλὰ τὸ ΓE τὸ ZB μετρεῖ· καὶ τὸ H ἄρα τὸ ZB μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ AB· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ AZ μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα μεῖζόν τι μέγεθος τοῦ AZ τὰ AB, ΓΔ μεγέθη μετρήσει· τὸ AZ ἄρα τῶν AB, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστί.

Δύο ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τῶν AB, ΓΔ, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὕρηται τὸ AZ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Corollarium.

Ex hoc manifestum est, si magnitudo duas magnitudines metiatur, & maximam ipsarum communem mensuram metiri.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν μέγεθος δύο μεγέθη μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

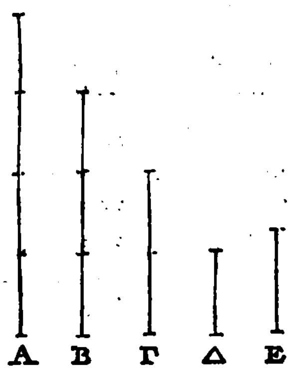
ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Τριῶν μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Ἔστω τὰ δοθέντα τρία μεγέθη σύμμετρα τὰ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν Α, Β τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Δ· τὸ δὴ Δ τὸ Γ ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὸ Γ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ τὰ Α, Β· τὸ Δ ἄρα τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ· τὸ Δ ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινὸν μέτρον ἐστί. καὶ φανερὸν ὅτι καὶ μέγιστον, μεῖζον γὰρ τοῦ Δ μεγέθους τὰ Α, Β, Γ οὐ μετρήσει. εἰ γὰρ δυνατὸν, μετρείτω τὰ Α, Β, Γ μεῖζον τοῦ Δ μεγέθους, τὸ Ε. καὶ ἐπεὶ τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τὰ Α, Β μετρήσει, καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει τὸ Δ, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον, ὅπερ ἀδύνατον.



Μὴ μετρείτω δὴ τὸ Δ τὸ Γ. λέγω πρῶτον ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ Γ, Δ. ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β, Γ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος, ὃ δηλαδὴ καὶ τὰ Α, Β μετρήσει· ὥστε καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον τὸ Δ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· ὥστε τὸ εἰρημένον μέγεθος μετρήσει τὰ Γ, Δ· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ Γ, Δ. εἰλήφθω αὐτῶν τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Ε. ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ Δ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ Δ τὰ Α, Β μετρεῖ· καὶ τὸ Ε ἄρα τὰ Α, Β μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· τὸ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινὸν μέτρον ἐστί. λέγω δὴ ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω τι τοῦ Ε μεῖζον μέγεθος τὸ Ζ, καὶ μετρείτω τὰ Α, Β, Γ. καὶ ἐπεὶ τὸ Ζ τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τὰ Α, Β μετρήσει· καὶ τὸ τῶν Α, Β ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ δὲ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ Δ· τὸ Ζ ἄρα τὸ Δ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· τὸ Ζ ἄρα τὰ Γ, Δ μετρεῖ· καὶ τὸ τῶν Γ, Δ ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει τὸ Ζ. τὸ δὲ τῶν Γ, Δ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ Ε· τὸ Ζ ἄρα τὸ Ε μετρεῖ, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα μεῖζόν τι τοῦ Ε μεγέθους μέγεθος τὰ Α, Β, Γ μεγέθη μετρεῖ· τὸ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν, ἐὰν μὴ μετρῇ τὸ Δ τὸ Γ· ἐὰν δὲ μετρῇ, αὐτὸ τὸ Δ.

Τριῶν ἄρα μεγεθῶν δοθέντων συμμέτρων, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὕρηται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν μέγεθος τρία με-

Prop. IV. Probl.

Tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam ipsarum communem mensuram invenire.

Sint datæ tres magnitudines commensurabiles A, B, Γ: oportet ipsarum A, B, Γ maximam communem mensuram invenire.

Sumatur enim [per 3.10.] duarum A, B maxima communis mensura quæ sit Δ; itaque Δ ipsam Γ vel metitur, vel non metitur. metiatur primum. & quoniam Δ ipsam Γ metitur, metitur autem & A, B, & ipsas A, B, Γ metietur: quare Δ ipsarum A, B, Γ communis est mensura. & manifestum est maximam esse; magnitudo enim major magnitudine Δ ipsas A, B, Γ non metietur. nam si fieri potest, metiatur eas magnitudo major ipsa Δ, quæ sit E. quoniam igitur E magnitudines A, B, Γ metitur, & ipsas A, B metietur, & [per coroll. 3. 10.] ipsarum A, B maximam communem mensuram Δ, major minorem, quod fieri non potest.

Sed non metiatur Δ ipsam Γ. dico primum Γ, Δ commensurabiles esse. quoniam enim commensurabiles sunt A, B, Γ, metitur eas aliqua magnitudo, quæ scilicet & ipsas A, B metitur; ergo & ipsarum A, B maximam communem mensuram Δ. metitur autem & ipsam Γ: quare dicta magnitudo ipsas Γ, Δ metitur: ideoque [per 1. def. 1.] Γ, Δ commensurabiles sunt. sumatur [per 3.10.] ipsarum maxima communis mensura; & sit E. quoniam igitur E metitur Δ, Δ vero metitur A, B, & E ipsas A, B metietur. metitur autem & Γ: ergo E ipsarum A, B, Γ communis est mensura. dico & maximam esse. si enim fieri potest, sit aliqua magnitudo Z major ipsa E, quæ magnitudines A, B, Γ metiatur. & quoniam Z metitur A, B, Γ, & ipsas A, B metietur; & igitur [per coroll. 3. 10.] ipsarum A, B maximam communem mensuram metietur. sed Δ est maxima communis mensura ipsarum A, B; ergo Z metitur Δ. metitur autem & Γ: quare Z ipsas Γ, Δ metitur; & igitur Z metitur ipsarum Γ, Δ maximam communem mensuram. sed ipsarum Γ, Δ maxima communis mensura est E: ergo Z ipsam E metietur, major minorem, quod fieri non potest: non igitur magnitudo major ipsa E magnitudines A, B, Γ metietur: ergo E ipsarum A, B, Γ maxima erit communis mensura, si Δ ipsam Γ non metiatur; si vero metiatur, erit ipsa Δ.

Tribus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis, maxima ipsarum communis mensura inventa est. quod erat faciendum.

Corollarium.

Ex hoc perspicue constat, si magnitudo tres metiatur magnitudines, & ipsarum maximam communem mensuram metiri.

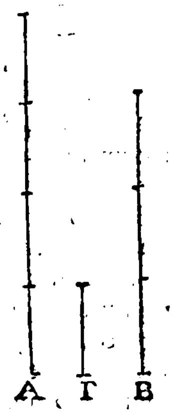
Similiter & in pluribus magnitudinibus maxima communis mensura invenietur, & corollarium procedet.

Prop. V. Theor.

Commensurabiles magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

Sint commensurabiles magnitudines A, B: dico magnitudinem A ad B rationem habere quam numerus ad numerum.

Quoniam enim A, B commensurabiles sunt, metietur ipsas aliqua magnitudo. metiatur, & sit Γ. & quoties Γ ipsam A metitur tot unitates sint in Δ; quoties autem Γ metitur B tot unitates sint in E.



Quoniam igitur Γ ipsam A metitur per unitates quæ sunt in Δ, metitur autem & unitas numerum Δ per unitates quæ in ipso sunt; unitas æqualiter metietur numerum Δ atque magnitudo Γ ipsam A: ergo ut Γ ad A ita est unitas ad Δ, & convertendo ut A ad Γ ita Δ ad unitatem. rursus, quoniam Γ ipsam B metitur per unitates quæ sunt in E, metiturque unitas numerum E per unitates quæ in ipso sunt; unitas numerum E æqualiter metietur atque Γ ipsam B: est igitur ut Γ ad B ita unitas ad E. ostensum autem est & ut A ad Γ ita esse Δ ad unitatem: quare ex æquo ut A ad B ita numerus Δ ad E numerum.

Commensurabiles igitur magnitudines A, B inter se rationem habent quam Δ numerus ad numerum E. quod erat demonstrandum.

Prop. VI. Theor.

Si duæ magnitudines inter se rationem habeant quam numerus ad numerum, magnitudines erunt commensurabiles.

Duæ enim magnitudines A, B inter se rationem habeant quam Δ numerus ad numerum E: dico A, B magnitudines commensurabiles esse.

Quot enim unitates sunt in Δ, in tot partes æquales dividatur magnitudo A, & uni ipsarum æqualis sit Γ: quot autem unitates sunt in E, ex tot magnitudinibus æqualibus ipsi Γ componatur magnitudo Z.

Quoniam igitur quot sunt in Δ unitates tot magnitudines sunt in A ipsi Γ æquales; quæ pars est unitas ipsius Δ eadem pars erit & Γ ipsius A: ut igitur Γ ad A ita est unitas ad Δ. [metitur autem unitas ipsum Δ numerum: ergo

μέγεθη μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μετρήσει μέτρον.

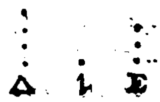
Ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ πλειόνων τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ληφθήσεται, καὶ τὸ πόρισμα προχωρήσει.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Τὰ σύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Ἔστω σύμμετρα μεγέθη τὰ A, B· λέγω ὅτι τὸ A πρὸς τὸ B λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ A, B, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Γ. καὶ ὁσάκις τὸ Γ τὸ A μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Δ, ὁσάκις δὲ τὸ Γ τὸ B μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ E.



Ἐπεὶ οὖν τὸ Γ τὸ A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Δ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Δ μετρεῖ καὶ τὸ Γ μέγεθος τὸ A· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ A οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ· ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Γ τὸ B μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ E μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν E κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν E μετρεῖ καὶ τὸ Γ τὸ B· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ B οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν E. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν E.

Τὰ ἄρα σύμμετρα μεγέθη τὰ A, B πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει ὃν ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν τὸν E. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγέθη πρὸς ἄλληλα τὰ A, B λόγον ἐχέτω ὃν ἀριθμὸς ὁ Δ πρὸς ἀριθμὸν τὸν E· λέγω ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ A, B μεγέθη.

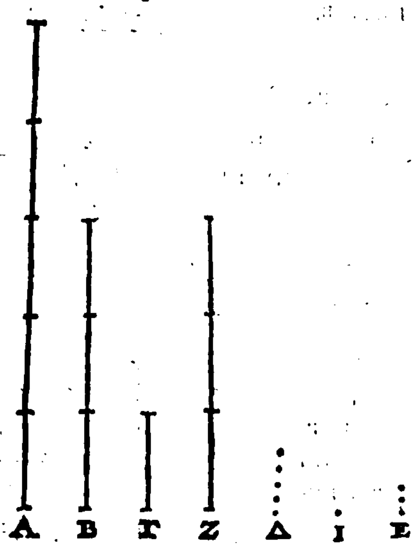
Ὅσαι γάρ εἰσιν ἐν τῷ Δ μονάδες εἰς τοσαῦτα ἴσα διῃρήσθω τὸ A, καὶ ἑνὶ αὐτῶν ἴσον ἔστω τὸ Γ· ὅσαι δὲ εἰσιν ἐν τῷ E μονάδες, ἐκ τοσούτων μεγεθῶν ἴσων τῷ Γ συγκείσθω τὸ Z.

Ἐπεὶ οὖν ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Δ μονάδες τοσαῦτά εἰσι καὶ ἐν τῷ A μεγέθη ἴσα τῷ Γ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ μονὰς τοῦ Δ ταὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ τὸ Γ τοῦ A· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ A οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ. [* μετρεῖ δὲ ἡ μονὰς τὸν Δ ἀριθμόν· μετρεῖ ἄρα

* Illa uncis inclusa desiderantur in utroque Cod. MS.

καὶ

καὶ τὸ Γ τὸ Α. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμόν·] ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὴν μονάδα. πάλιν, ἐπεὶ ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Ε μονάδες τοσαῦτά εἰσι καὶ ἐν τῷ Ζ μεγέθη ἴσα τῷ Γ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Ε ἀριθμόν. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Ζ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. ἀλλ᾽ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως τὸ Α πρὸς τὸ Β· καὶ ὡς ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως καὶ τὸ Α πρὸς τὸ Ζ· τὸ Α ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν Β, Ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Β τῷ Ζ. μετρεῖ δὲ τὸ Γ τὸ Ζ· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Β. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ Α· τὸ Γ ἄρα τὰ Α, Β μετρεῖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

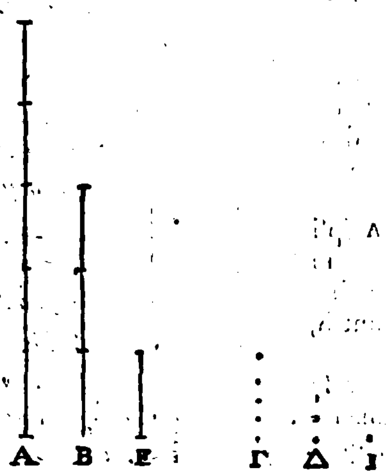


Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΛΛΩΣ.

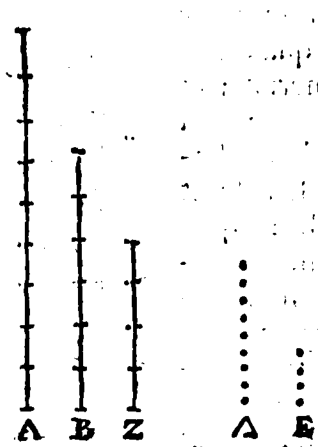
Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω ὃν ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Δ· λέγω ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ μεγέθη.

Ὅσαι γὰρ εἰσὶν ἐν τῷ Γ μονάδες εἰς τοσαῦτα ἴσα διῃρήσθω τὸ Α, καὶ ἑνὶ αὐτῶν ἴσον ἔστω τὸ Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ ἀριθμὸν οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Α. ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως τὸ Α πρὸς τὸ Β· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸν Β. μετρεῖ δὲ ἡ μονὰς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Ε τὸ Β. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Ε τὸ Α, ἐπεὶ καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ· τὸ Ε ἄρα ἑκάτερον τῶν Α, Β μετρεῖ· τὰ Α, Β ἄρα σύμμετρά ἐστι, καὶ ἔστιν αὐτῶν κοινὸν μέτρον τὸ Ε.



Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοὶ ὡς οἱ Δ, Ε, καὶ εὐθεῖα ὡς ἡ Α, δυνατόν ἐστι ποιῆσαι ὡς τὸν Δ ἀριθμὸν πρὸς τὸν Ε ἀριθμὸν οὕτως τὴν εὐθεῖαν πρὸς εὐθεῖαν. ἐὰν δὲ καὶ τῶν Α, Ζ μέση ἀνάλογον ληφθῇ ὡς ἡ Β, ἔσται ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ζ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, τουτέστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ἀλλ᾽ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ζ οὕτως ἐστὶν ὁ Δ ἀριθμὸς



& Γ ipsam A metietur. & quoniam est ut Γ ad A ita unitas ad Δ numerum:] erit igitur convertendo ut A ad Γ ita Δ numerus ad unitatem. rursus, quoniam quot unitates sunt in E tot sunt & in Z magnitudines ipsi Γ æquales; ut Γ ad Z ita erit unitas ad E numerum. ostensum autem est & ut A ad Γ ita Δ esse ad unitatem: ergo ex æquo ut A ad Z ita Δ ad E. sed ut Δ ad E ita A ad B: & igitur ut A ad B ita A ad Z. quod cum A ad utramque ipsarum B, Z eandem habeat rationem, erit [per 9. 5.] B ipsi Z æqualis. metitur autem Γ ipsam Z: ergo & ipsam B metietur. sed & metitur A: quare Γ ipsas A, B metitur: commensurabilis igitur est [per 1. def. 10.] A ipsi B.

Quare si duæ magnitudines inter se rationem habeant quam numerus ad numerum, magnitudines erunt commensurabiles. quod erat demonstrandum.

ALITER.

Duæ enim magnitudines A, B inter se rationem habeant quam numerus Γ ad numerum Δ: dico magnitudines commensurabiles esse.

Quot enim unitates sunt in Γ, in tot partes æquales dividatur A, & uni ipsarum æqualis sit E: est igitur ut unitas ad Γ numerum ita E ad A. est autem & ut Γ ad Δ ita A ad B: ergo ex æquo ut unitas ad Δ numerum ita E ad B. sed unitas metitur Δ: ergo & E ipsam B metitur. metitur autem & E ipsam A, quoniam & unitas metitur Γ: quare E utramque ipsarum A, B metietur; ideoque A, B commensurabiles sunt; atque est E communis ipsarum mensura.

Corollarium.

Ex hoc manifestum est, si sint duo numeri ut Δ, E & recta linea ut A, fieri posse, ut Δ numerus ad numerum E ita esse rectam lineam A ad aliam rectam lineam. si autem inter ipsas A, Z media proportionalis sumatur ut B, erit [per cor. 20. 6.] ut A ad Z ita quod fit ex A ad id quod ex B, hoc est ut prima ad tertiam ita figura quæ fit à prima ad eam quæ à secunda similem & similiter descriptam. sed ut A ad Z ita Δ numerus ad numerum E: factum igitur est & ut A numerus ad numerum E ita quod fit ex recta linea A ad id quod ex recta linea B.

πρὸς τ̀ Ε ἀριθμόν· γέγονεν ἄρα καὶ ὡς ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τ̀ Ε ἀριθμὸν ὕτως τὸ ἀπὸ τ̀ Α εὐθείας πρὸς τὸ ἀπὸ τ̀ Β εὐθείας.

Prop. VII. Theor.

Incommensurabiles magnitudines inter se rationem non habent quam numerus ad numerum.

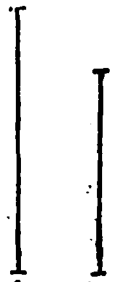
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Sint commensurabiles magnitudines A, B: dico A ad B rationem non habere quam numerus ad numerum.

Si enim A ad B rationem habet quam numerus ad numerum; commensurabilis erit [per 6. 10.] A ipsi B. atqui non est commensurabilis: non igitur A ad B rationem habet quam numerus ad numerum.

Quare incommensurabiles magnitudines inter se rationem non habent quam numerus ad numerum. quod erat demonstrandum.



A B

Ἔστω ἀσύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β· λέγω ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Εἰ γὰρ ἔχει τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρον ἔςαι τὸ Α τῷ Β. ὐκ ἔςι δέ· ὐκ ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Τὰ ἄρα ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VIII. Theor.

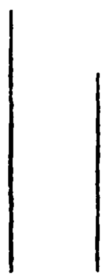
Si duæ magnitudines inter se rationem non habeant quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχῃ ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, ἀσύμμετρα ἔςαι τὰ μεγέθη.

Duæ enim magnitudines A, B inter se rationem non habeant quam numerus ad numerum: dico magnitudines A, B incommensurabiles esse.

Si enim commensurabilis est A ipsi B, rationem habet [per 5. 10.] quam numerus ad numerum. atqui non habet: incommensurabiles igitur sunt A, B magnitudines.



A B

Ergo si duæ magnitudines inter se rationem non habeant quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt. quod erat demonstrandum.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἐχέτω ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· λέγω ὅτι ἀσύμμετρα ἐςὶ τὰ Α, Β μεγέθη.

Εἰ γὰρ σύμμετρόν ἐςι τὸ Α τῷ Β, λόγον ἔχει ὅνπερ ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ὐκ ἔχει δέ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐςὶ τὰ Α, Β μεγέθη.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχῃ ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, ἀσύμμετρα ἔςαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. IX. Theor.

Quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & quadrata inter se rationem habentia quam quadratus numerus ad quadratum numerum & latera habebunt longitudine commensurabilia: quadrata vero quæ à longitudine incommensurabilibus rectis lineis fiunt inter se rationem non habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & quadrata inter se rationem non habentia quam quadratus

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

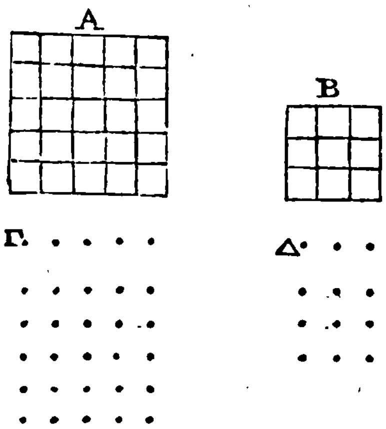
Τὰ ἀπὸ τ̀ μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν καὶ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρυς· τὰ δὲ ἀπὸ τ̀ μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ὐκ ἔχει ὅνπερ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχοντα ὅνπερ τετράγωνος

ἀριθμὸς

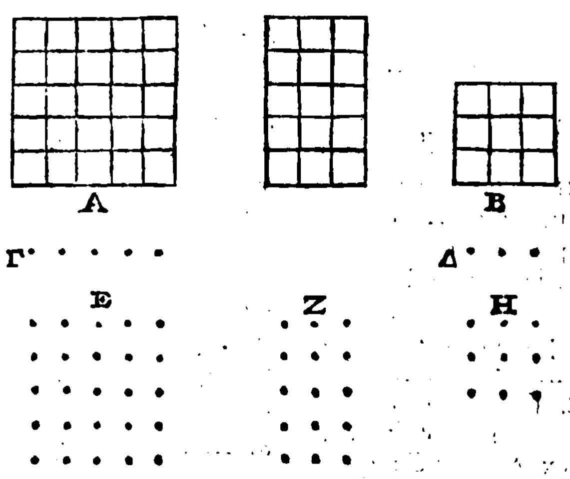
ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν οὐδὲ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους.

Ἔστωσαν αἱ Α, Β μήκει σύμμετροι· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον λόγον ἔχει ὅνπερ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει· ἡ Α ἄρα πρὸς τὴν Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Δ ἀριθμόν, ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον (τὰ γὰρ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν) τοῦ δὲ τοῦ Γ ἀριθμοῦ πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τοῦ Γ τετραγώνου πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετράγωνον, δύο γὰρ τετραγώνων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ ἀριθμοῦ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ ἀριθμοῦ τετράγωνον ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ΑΛΛΩΣ. Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει, λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκε, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, τουτέστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκε, τὸν δὲ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, τουτέστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β οὕτως ἦν ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ



numerus ad quadratum numerum neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

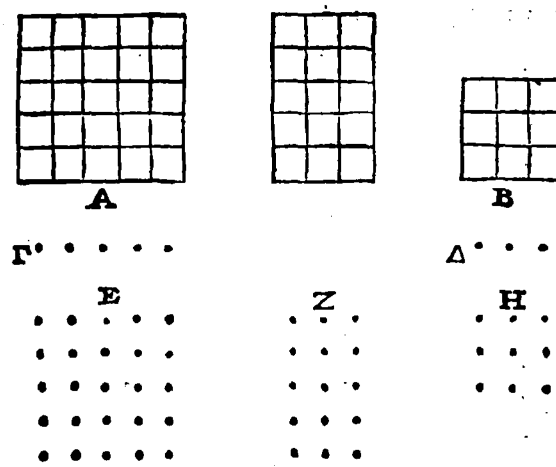
Sint rectæ lineæ A, B longitudine commensurabiles: dico quadratum quod fit ex A ad quadratum quod ex B eam rationem habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Quoniam enim A ipsi B longitudine est commensurabilis, habebit [per 5. 10.] A ad B rationem quam numerus ad numerum. habeat eam quam numerus Γ ad numerum Δ. quoniam igitur est ut A ad B ita Γ numerus ad numerum Δ, & rationis quidem quam habet A ad B duplicata est ratio quadrati quod fit ex A ad quadratum quod ex B, similes enim figuræ [per 20. 6.] in duplicata sunt ratione homologorum laterum; rationis vero quam habet numerus Γ ad numerum Δ duplicata est ratio quadrati ipsius Γ ad ipsius Δ quadratum, nam [per 11. 8.] inter duos numeros quadratos unus medius proportionalis est numerus; & quadratus ad quadratum duplicatam rationem habet ejus quam latus habet ad latus: erit ut quadratum quod fit ex A ad quadratum quod ex B ita quadratus numerus qui fit ex Γ numero ad quadratum numerum qui ex Δ. quod erat demonstrandum. ALITER. Quoniam enim commensurabilis est A ipsi B longitudine, [per 5. 10.] rationem habet quam numerus ad numerum. habeat quam Γ ad Δ, & Γ seipsum quidem multiplicans faciat E, multiplicans vero Δ faciat Z, & Δ seipsum multiplicans faciat H. itaque quoniam Γ seipsum quidem multiplicans fecit E, multiplicans vero Δ fecit Z; erit [per 17. 7.] ut Γ ad Δ, hoc est [per constr.] ut A ad B ita E ad Z. sed [per 1. 6.] ut A ad B ita quadratum quod fit ex A ad rectangulum quod fit sub A, B: est igitur ut quadratum quod ex A ad rectangulum sub A, B ita E ad Z. rursus, quoniam Δ seipsum multiplicans fecit H, multiplicans vero Γ ipsum Z fecit, ut Γ ad Δ, hoc est ut A ad B, ita erit [per 17. 7.] Z ad H. ut autem A ad B ita rectangulum quod fit sub A, B ad quadratum quod fit ex B: ergo ut rectangulum sub A, B ad quadratum quod ex B ita Z ad H. sed ut quadratum quod fit ex A ad rectangulum sub A, B, ita erat E ad Z: ex æquo igitur ut quadratum

quadratum ex A ad quadratum ex B ita E ad H; est autem uterque ipsorum E, H quadratus, & E quidem est à numero Γ, H vero ab ipso Δ: quadratum igitur quod fit ex A ad quadratum quod ex B rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum. quod erat demonstrandum.

SED sit ut quadratum quod fit ex A ad quadratum quod ex B ita quadratus numerus qui est à numero Γ ad quadratum numerum qui à numero Δ: dico A ipsi B longitudine commensurabilem esse. quoniam enim est ut quadratum quod fit ex A ad quadratum quod ex B ita quadratus numerus qui est à numero Γ ad quadratum numerum qui à numero Δ, sed [per 20. 6.] ratio quidem quadrati quod fit ex A ad quadratum quod ex B duplicata est rationis quam habet A ad B; ratio vero quadrati numeri qui est à numero Γ ad quadratum numerum qui à numero Δ [per 11. 8.] itidem duplicata est rationis quam habet Γ numerus ad numerum Δ: est igitur ut A ad B ita Γ ad Δ: ergo A ad B rationem habet quam numerus Γ ad Δ numerum: ac propterea [per 6. 10.] A ipsi B longitudine est commensurabilis. quod erat demonstrandum. ALITER. Sed quadratum quod fit ex A ad quadratum quod ex B rationem habeat quam quadratus numerus E ad quadratum numerum H: dico A ipsi B longitudine commensurabilem esse. Sit enim ipsius quidem E latus Γ, ipsius vero H latus Δ, & Γ ipsum Δ multiplicans faciat Z: ergo [per 17. 7.] E, Z, H deinceps proportionales sunt in ratione ipsius Γ ad Δ. & quoniam [per 1. 6.] inter quadrata quæ fiunt ex A, B medium proportionale est rectangulum sub A, B: inter numeros vero quadratos E, H [per 11. 8.] medius proportionalis est Z, erit ut quadratum quod fit ex A ad rectangulum sub A, B ita E ad Z. [* ut autem rectangulum sub A, B ad quadratum ex B ita Z ad H;] sed ut quadratum ex A ad rectangulum sub A, B ita A ad B: ergo A, B commensurabiles sunt; rationem enim habent quam numerus E ad numerum Z, hoc est quam Γ ad Δ. [ut enim Γ ad Δ ita E ad Z: nam Γ seipsum quidem multiplicans fecit E, multiplicans autem Δ ipsum Z fecit: est igitur [per 17. 7.] ut Γ ad Δ ita E ad Z. quod erat demonstrandum.]

SED incommensurabilis sit A ipsi B longitudine: dico quadratum ex A ad quadratum ex B rationem non habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Si enim quadratum ex A ad quadratum ex



τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως ἐστὶν ὁ Ε πρὸς τὸν Η. ἔστι δὲ ἑκάτερος τῶν Ε, Η τετράγωνος, ὁ μὲν γὰρ Ε ἀπὸ τοῦ Γ ἐστίν, ὁ δὲ Η ἀπὸ τοῦ Δ· τὸ ἀπὸ τῆς Α ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΛΛΑ δὴ ἔστω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετράγωνον· λέγω ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετράγωνον, ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον λόγος διπλασίων τοῦ τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγου, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τοῦ Γ ἀριθμοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ ἀριθμοῦ τετράγωνον ἀριθμὸν λόγος διπλασίων ἐστὶ τοῦ τοῦ Γ ἀριθμοῦ πρὸς τὸν τοῦ Δ ἀριθμοῦ λόγον· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Δ ἀριθμόν· ἡ Α ἄρα πρὸς τὴν Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Δ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Β μήκει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ΑΛΛΩΣ. Ἀλλὰ δὴ ἐχέτω τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Ε πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν τὸν Η· λέγω ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει. Ἔστω γὰρ τοῦ μὲν Ε πλευρὰ, ὁ Γ, τοῦ δὲ Η, ὁ Δ, καὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν Α, Β μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, τῶν δὲ Ε, Η ὁ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. [* ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η,] ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β οὕτως ἡ Α πρὸς τὴν Β· αἱ Α, Β ἄρα σύμμετροί εἰσι, λόγον γὰρ ἔχουσιν ὃν ἀριθμὸς ὁ Ε πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ζ, τουτέστιν ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. [† ὡς γὰρ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ὁ γὰρ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκε, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ.] ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΛΛΑ δὲ ἀσύμμετρος ἔστω ἡ Α τῇ Β μήκει· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Εἰ γὰρ ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ

* Desiderantur in Codd. MSS. † Illa uncis inclusa non agnoscunt Codd. MSS. Videntur glossemata, & commode abesse possunt.

ἀπὸ

ἀπὸ τοῦ B τετράγωνον λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, σύμμετρος ἔσται ἡ A τῇ B μήκει. οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα τὸ ἀπὸ τοῦ A τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ B τετράγωνον λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

ΠΑΛΙΝ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ B τετράγωνον λόγον μὴ ἐχέτω ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· λέγω ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ A τῇ B μήκει. Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρος ἡ A τῇ B μήκει, ἕξει τὸ ἀπὸ τοῦ A πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ B λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ A τῇ B μήκει.

Τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Καὶ φανερὸν ἔστω ἐκ τῶν δεδειγμένων ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει σύμμετροι οὐ πάντως καὶ μήκει, καὶ αἱ μήκει ἀσύμμετροι οὐ πάντως καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει.

Εἴπερ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, τὰ δὲ λόγον ἔχοντα ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν σύμμετρά ἐστιν· ὥστε αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι οὐ μόνον εἰσὶ μήκει σύμμετροι ἀλλὰ καὶ δυνάμει.

Πάλιν, ἐπεὶ ὅσα τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν μήκει ἐδείχθη σύμμετρα, καὶ δυνάμει ὄντα σύμμετρα, τῷ τὰ τετράγωνα λόγον ἔχειν ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ὅσα ἄρα τετράγωνα λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀλλ᾽ ἁπλῶς ὃν ἕτερός τις ἀριθμὸς πρὸς ἕτερόν τινα ἀριθμόν, σύμμετρά ἐστι τὰ τετράγωνα, τουτέστιν αἱ εὐθεῖαι ἀφ᾽ ὧν ἀνεγράφησαν δυνάμει, οὐκέτι δὲ καὶ μήκει· ὥστε αἱ μὲν μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει, εἰ μὴ καὶ λόγον ἔχοιεν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ αἱ μήκει ἀσύμμετροι οὐ πάντως καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι· ἐπειδήπερ αἱ δυνάμει σύμμετροι δύνανται λόγον μὴ ἔχειν ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, καὶ διὰ τοῦτο

B rationem habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, [ex demonstratis] commensurabilis erit A ipsi B longitudine. non est autem: non igitur quadratum ex A ad quadratum ex B rationem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Rursus quadratum ex A ad quadratum ex B rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum: dico A ipsi B longitudine incommensurabilem esse. Si enim commensurabilis sit A ipsi B longitudine, habebit quadratum ex A ad quadratum ex B rationem quam quadratus numerus ad quadratum numerum. atqui non habet: non igitur A ipsi B longitudine est commensurabilis.

Ergo quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata inter se rationem habent quam numerus quadratus ad quadratum numerum, & quæ sequuntur. quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Et manifestum est ex jam demonstratis, lineas quæ longitudine sunt commensurabiles omnino & potentia commensurabiles esse; quæ vero potentia commensurabiles non semper & longitudine; & quæ longitudine incommensurabiles sunt non semper & potentia incommensurabiles; quæ vero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

Quoniam enim quadrata quæ fiunt à rectis lineis longitudine commensurabilibus rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum; quæ vero rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum commensurabilia sunt: erunt rectæ lineæ longitudine commensurabiles, non solum longitudine sed & etiam potentia commensurabiles.

Rursus, quoniam quæcunque quadrata inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum latera habent longitudine commensurabilia, ut ostensum est, quæ etiam latera potentia commensurabilia sunt, cum eorum quadrata rationem habeant quam numerus ad numerum: quæcunque igitur quadrata rationem non habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed simpliciter quam aliquis alius numerus ad alium numerum, commensurabilia sunt, hoc est rectæ lineæ, à quibus ipsa describuntur, commensurabiles sunt potentia, non autem & longitudine: ergo rectæ lineæ longitudine quidem commensurabiles omnino & potentia commensurabiles sunt; potentia vero commensurabiles non semper & longitudine, nisi earum quadrata rationem habeant quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Dico & longitudine incommensurabiles non semper potentia incommensurabiles esse. quoniam potentia commensurabiles possunt rationem non habere quam numerus ad numerum, ideoque

ideoque cum potentia commensurabiles sint, longitudine sunt incommensurabiles: ergo non quæ longitudine incommensurabiles sunt, omnino & potentia: sed longitudine incommensurabiles existentes possunt potentia & incommensurabiles & commensurabiles esse.

Potentia vero incommensurabiles omnino & longitudine incommensurabiles sunt: si enim longitudine sint commensurabiles, [ex hactenus ostensis] & potentia commensurabiles erunt. atqui ponuntur incommensurabiles, quod est absurdum: potentia igitur incommensurabiles omnino & longitudine incommensurabiles erunt.

δυνάμει ἔσονται σύμμετροι μήκει εἰσὶν ἀσύμμετροι· ὥστε οὐχ αἱ μήκει ἀσύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, ἀλλὰ καὶ δύνανται μήκει οὖσαι ἀσύμμετροι δυνάμει εἶναι καὶ ἀσύμμετροι καὶ σύμμετροι.

Αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι, πάντως καὶ μήκει ἀσύμμετροι· εἰ γὰρ εἰσιν σύμμετροι, ἔσονται καὶ δυνάμει σύμμετροι. ὑπόκεινται δὲ καὶ ἀσύμμετροι, ὅπερ ἄτοπον· αἱ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει.

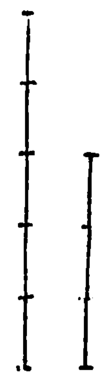
*Prop. X. Theor.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero secundæ fuerit commensurabilis; & tertia quartæ commensurabilis erit. & si prima secundæ fuerit incommensurabilis; & tertia quartæ incommensurabilis erit.

Sint quatuor magnitudines proportionales, A, B, Γ, Δ; sitque ut A ad B ita Γ ad Δ, & sit A ipsi B commensurabilis: dico & Γ ipsi Δ commensurabilem esse.

Quoniam enim A commensurabilis est ipsi B, habebit [per 5. 10.] A ad B rationem quam numerus ad numerum. atque est ut A ad B ita Γ ad Δ: ergo & Γ ad Δ rationem habet quam numerus ad numerum: commensurabilis igitur [per 6. 10.] est Γ ipsi Δ.

Sed A ipsi B sit incommensurabilis: dico & Γ ipsi Δ incommensurabilem esse. quoniam enim incommensurabilis est A ipsi B, non habebit [per 7. 10.] A ad B rationem quam numerus ad numerum. est autem ut A ad B ita Γ ad Δ: ergo neque Γ ad Δ rationem habet quam numerus ad numerum. si enim Γ ad Δ rationem habeat quam numerus ad numerum; & A ad B [per 11. 5.] eam quam numerus ad numerum rationem habebit: atque [per 6. 10.] erit A ipsi B commensurabilis, quod est absurdum; incommensurabilis enim ponitur: ergo Γ ad Δ rationem non habet quam numerus ad numerum; ideoq; [per 8. 10.] Γ ipsi Δ est incommensurabilis.



A B

Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, & quæ sequuntur. quod erat demonstrandum.

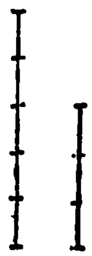
*ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι΄.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ δὲ πρῶτον τῷ δευτέρῳ σύμμετρον ᾖ· καὶ τὸ τρίτον τῷ τετάρτῳ σύμμετρον ἔσται. κἂν τὸ πρῶτον τῷ δευτέρῳ ἀσύμμετρον ᾖ· καὶ τὸ τρίτον τῷ τετάρτῳ ἀσύμμετρον ἔσται.

Ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ A, B, Γ, Δ, ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, τὸ A δὲ τῷ B σύμμετρον ἔστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ Γ τῷ Δ σύμμετρόν ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ A τῷ B, τὸ A ἄρα πρὸς τὸ B λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. καὶ ἔστιν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Γ τῷ Δ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ A τῷ B ἀσύμμετρον ἔστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ Γ τῷ Δ ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ A τῷ B· τὸ A ἄρα πρὸς τὸ B λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. καὶ ἔστιν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· οὐδὲ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. εἰ γὰρ ἔχει λόγον ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ A πρὸς τὸ B λόγον ἕξει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, καὶ ἔσται σύμμετρον τὸ A τῷ B, ὅπερ ἄτοπον, ὑπόκειται γὰρ ἀσύμμετρον· τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Γ τῷ Δ.



Γ Δ

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

LEMMA.

Ostensum est in arithmeticis [ad 26. 8.] numeros planos similes inter se rationem habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & si duo numeri inter se rationem habeant quam quadratus numerus ad quadratum numerum, eos similes planos esse. & manifestum est ex his, dissimiles planos numeros, hoc est non habentes latera inter se propor-

ΛΗΜΜΑ.

Δέδεικται ἐν τοῖς ἀριθμητικοῖς, ὅτι οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι. καὶ δῆλον ἐκ τούτων, ὅτι οἱ μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ, τουτέστιν οἱ μὴ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς

πλευρὰς

* Codd. MSS. hanc undecimam, sequentem vero decimam faciunt.

πλευρὰς πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. εἰ γὰρ ἕξουσιν, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οἱ ἄρα μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

tionalia) rationem non habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum. si enim haberent, similes plani essent, contra hypothesin: ergo dissimiles plani inter se rationem non habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιαʹ.

Τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.

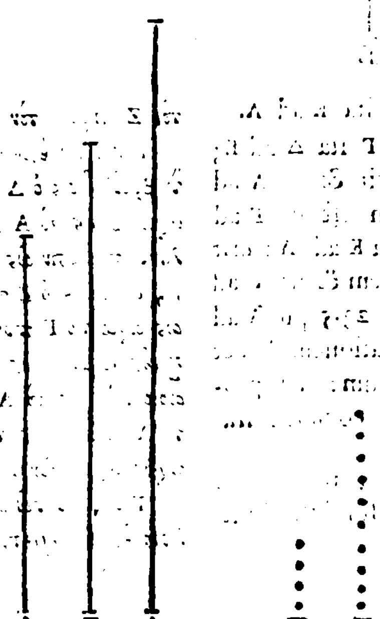
Ἔστω ἡ προτεθεῖσα εὐθεῖα ἡ Α· δεῖ δὴ τῇ Α προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.

Ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ οἱ Β, Γ, πρὸς ἀλλήλους λόγον μὴ ἔχοντες ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, τουτέστι μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ τετράγωνον, ἐμάθομεν γάρ· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Δ. καὶ ἐπεὶ ὁ Β πρὸς τὸν Γ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Δ μήκει. εἰλήφθω τῶν Α, Δ μέση ἀνάλογον ἡ Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Δ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε. ἀσύμμετρος δέ ἐστιν ἡ Α τῇ Δ μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς Ε τετραγώνῳ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Ε δυνάμει· τῇ ἄρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ *τῇ ῥητῇ, ἀφ᾽ ἧς ἔφαμεν τὰ μέτρα λαμβάνεσθαι, οἱονεὶ τῇ Α, δυνάμει μὲν σύμμετρος ἡ Δ, τουτέστι ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος, ἄλογος δὲ ἡ Ε. [† ἀλόγους γὰρ καθόλου καλεῖ τὰς καὶ μήκει καὶ δυνάμει ἀσυμμέτρους τῇ ῥητῇ.] ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XI. Probl.

Propositæ rectæ lineæ invenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia.

SIT proposita recta linea A: oportet ipsi A invenire duas rectas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia.



A E Δ

B. Γ.

Exponantur enim duo numeri B, Γ, inter se rationem non habentes quam quadratus numerus ad quadratum numerum, hoc est dissimiles plani; & [per coroll. 6. 10.] fiat ut B ad Γ, ita quadratum ex A ad quadratum ex Δ, hoc enim ante traditum est: ergo quadratum ex A commensurabile est quadrato ex Δ. & quoniam B ad Γ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque quadratum ex A ad quadratum ex Δ rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum: incommensurabilis igitur [per 9. 10.] est A ipsi Δ longitudine. sumatur inter ipsas A, Δ media proportionalis E: est igitur [per coroll. 2. 20. 6.] ut A ad Δ ita quadratum ex A ad quadratum ex E; sed A ipsi Δ longitudine est incommensurabilis: ergo [per 10. 10.] & quadratum ex A quadrato ex E incommensurabile erit: incommensurabilis igitur est A ipsi E potentia: ergo propositæ rectæ lineæ rationali, à qua [in 5. def. 10.] dicebamus mensuras sumi, nempe A, potentia quidem commensurabilis inventa est Δ, hoc est rationalis potentia tantum commensurabilis, irrationalis vero E. [† irrationales enim universe appellantur quæ rationali & longitudine & potentia incommensurabiles sunt.] quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβʹ.

Τὰ τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα.

Ἑκάτερον γὰρ τῶν Α, Β τῷ Γ ἔστω σύμμετρον· λέγω ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἐστὶ σύμμετρον.

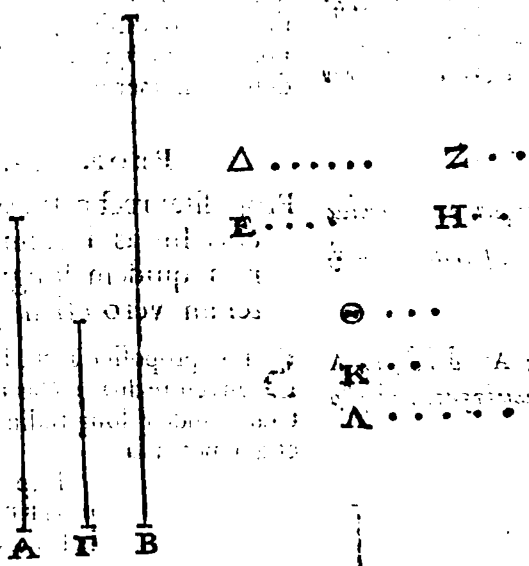
Prop. XII. Theor.

Quæ eidem magnitudini sunt commensurabiles & inter se commensurabiles sunt.

UTraque enim ipsarum A, B ipsi Γ sit commensurabilis: dico & A ipsi B commensurabilem esse.

* Rectius in Codd. MSS. τῇ Α προσευρήσονται δύο εὐθεῖαι ἀσύμμετροι, αἱ Δ, Ε, μήκει μὲν μόνον ἡ Δ, δυνάμει δὲ καὶ μήκει δηλαδὴ ἡ Ε.
† Videtur Scholion.

Quoniam enim A commensurabilis est ipsi Γ, habebit [per 5. 10.] A ad Γ rationem quam numerus ad numerum. habeat quam numerus Δ ad ipsum E. Rursus, quoniam commensurabilis est B ipsi Γ, habebit Γ ad B rationem quam numerus ad numerum. habeat quam Z ad H. & rationibus datis quibuscunque, videlicet quam habet Δ ad E & quam habet Z ad H, sumantur numeri deinceps proportionales Θ, K, Λ in datis rationibus; sitque ut Δ ad E ita Θ ad K, ut autem Z ad H ita K ad Λ.



Quoniam igitur est ut A ad Γ ita Δ ad E; sed ut Δ ad E ita Θ ad K: erit & ut A ad Γ ita Θ ad K. rursus, quoniam est ut Γ ad B ita Z ad H, sed ut Z ad H ita K ad Λ; erit & ut Γ ad B ita K ad Λ. est autem & ut A ad Γ ita Θ ad K: ex æquo igitur [per 23.5.] ut A ad B ita Θ ad Λ; ergo A ad B rationem habet quam numerus Θ ad Λ numerum: ac propterea [per 6. 10.] A ipsi B est commensurabilis.

Quæ igitur eidem magnitudini sunt commensurabiles & inter se commensurabiles sunt. quod erat demonstrandum.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Γ, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Γ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω ὃν ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ Β τῷ Γ, τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω ὃν ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, καὶ λόγων δοθέντων ὁποσωνοῦν, τοῦ τε ὃν ἔχει ὁ Δ πρὸς τὸν Ε καὶ ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, εἰλήφθωσαν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις, οἱ Θ, Κ, Λ· ὥστε εἶναι ὡς μὲν ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως τὸν Θ πρὸς τὸν Κ, ὡς δὲ τὸν Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως τὸν Κ πρὸς τὸν Λ.

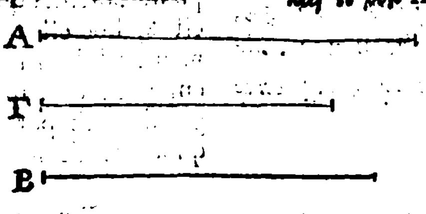
Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἀλλ᾽ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ἀλλ᾽ ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Β οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Λ· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς ὁ Θ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Λ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Τὰ ἄρα τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XIII. THEOR.

Si sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis, altera vero incommensurabilis; magnitudines inter se incommensurabiles erunt.

Sint enim duæ magnitudines A, B, alia autem sit Γ, & A quidem ipsi Γ commensurabilis sit, B vero eidem incommensurabilis: dico & A ipsi B incommensurabilem esse.



Si enim commensurabilis est A ipsi B, est autem & Γ commensurabilis ipsi A; erit [per 12. 10.] & Γ ipsi B commensurabilis quod est contra hypothesin.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν ᾖ δύο μεγέθη, καὶ τὸ μὲν σύμμετρον ᾖ τῷ αὐτῷ, τὸ δὲ ἕτερον ἀσύμμετρον· ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Ἔστω γὰρ δύο μεγέθη τὰ Α, Β, ἄλλο δὲ τὸ Γ, καὶ τὸ μὲν Α τῷ Γ σύμμετρον ἔστω, τὸ δὲ Β τῷ Γ ἀσύμμετρον· λέγω ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρον τὸ Α τῷ Β, ἔστι δὲ καὶ τὸ Γ τῷ Α· καὶ τὸ Γ ἄρα τῷ Β σύμμετρόν ἐστιν. ὅπερ οὐχ ὑπόκειται.

PROP. XIV. THEOR.

Si duæ magnitudines commensurabiles sint, altera autem ipsarum alicui magnitudini sit incommensurabilis; &

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

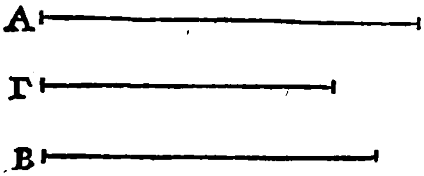
Ἐὰν ᾖ δύο μεγέθη σύμμετρα, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν μεγέθει τινὶ ἀσύμμετρον ᾖ· καὶ

τὸ

τὸ λοιπὸν τῷ αὐτῷ ἀσύμμετρον ἔσται.

Ἔστω δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ Α, Β, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν τὸ Α ἑτέρῳ τινὶ τῷ Γ ἀσύμμετρον ἔστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ λοιπὸν τὸ Β τῷ Γ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρον τὸ Β τῷ Γ, ἀλλὰ καὶ τὸ Α τῷ Β σύμμετρον· καὶ τὸ Α ἄρα τῷ Γ σύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ καὶ ἀσύμμετρον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα σύμμετρόν ἐστι τὸ Β τῷ Γ· ἀσύμμετρον ἄρα.



Ἐὰν ἄρα ᾖ δύο μεγέθη σύμμετρα, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν μεγέθει τινὶ ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὸ λοιπὸν τῷ αὐτῷ ἀσύμμετρον ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

reliqua eidem incommenſurabilis erit.

Sint duæ magnitudines commenſurabiles A, B: altera vero ipſarum A alicui magnitudini Γ ſit incommenſurabilis: dico & reliquam B ipſi Γ incommenſurabilem eſſe.

Si enim commenſurabilis eſt B ipſi Γ, eſt autem & A commenſurabilis ipſi B; & [per 12. 10.] A ipſi Γ commenſurabilis erit. ſed & incommenſurabilis, quod fieri non poteſt: non igitur commenſurabilis eſt B ipſi Γ: ergo eſt incommenſurabilis.

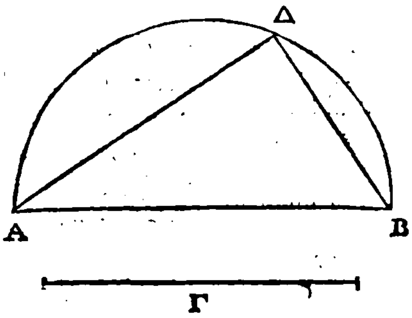
Si igitur duæ magnitudines commenſurabiles ſint, altera autem ipſarum alicui magnitudini ſit incommenſurabilis; & reliqua eidem incommenſurabilis erit. quod erat demonſtrandum.

ΛΗΜΜΑ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, εὑρεῖν τίνι μεῖζον δύναται ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο ἄνισοι εὐθεῖαι, αἱ ΑΒ, Γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ εὑρεῖν τίνι μεῖζον δύναται ἡ ΑΒ τῆς Γ.

Γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον, τὸ ΑΔΒ, καὶ εἰς αὐτὸ ἐνηρμόσθω τῇ Γ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ. Φανερὸν δὴ ὅτι ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ γωνία, καὶ ὅτι ἡ ΑΒ τῆς ΑΔ, τουτέστι τῆς Γ, μεῖζον δύναται τῇ ΔΒ.



ΟΜΟΙΩΣ δὲ καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, ἡ δυναμένη αὐτὰς εὑρίσκεται οὕτως.

Ἔστωσαν αἱ δύο δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ· καὶ δέον ἔστω εὑρεῖν τὴν δυναμένην αὐτάς. ἐκκείσθωσαν γάρ, ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν ὑπὸ ΑΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ· φανερὸν πάλιν, ὅτι ἡ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυναμένη ἐστὶν ἡ ΑΒ.

LEMMA.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus, invenire id quo major plus poteſt quam minor.

Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB, Γ, quarum major ſit AB: oportet invenire id quo AB plus poteſt quam Γ.

Deſcribatur ſuper rectam lineam AB ſemicirculus AΔB, & [per 1.4.] in eo aptetur recta linea AΔ ipſi Γ æqualis, & ΔB jungatur. perſpicuum eſt [per 31.3.] angulum AΔB rectum eſſe & ipſam AB [per 47.1.] plus poſſe quam AΔ, hoc eſt quam Γ, quantum eſt rectæ lineæ ΔB quadratum.

Similiter autem & datis duabus rectis lineis, quæ ipſas poteſt hoc modo invenietur.

Sint duæ datæ rectæ lineæ AΔ, ΔB, & oporteat invenire rectam lineam quæ ipſas poſſit. exponantur enim ita ut rectum angulum AΔB contineant, & AB jungatur: patet rurſus [per 47.1.] rectam lineam AB ipſas AΔ, ΔB poſſe.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, δύνηται δὲ ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μεῖζον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἐὰν ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μεῖζον δύνηται, τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Ἔστωσαν δὴ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν

Prop. XV. Theor.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima vero tanto plus poſſit quam ſecunda quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine; & tertia tanto plus poterit quam quarta quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. quod ſi prima tanto plus poſſit quam ſecunda quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine; & tertia quam quarta tanto plus poterit quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

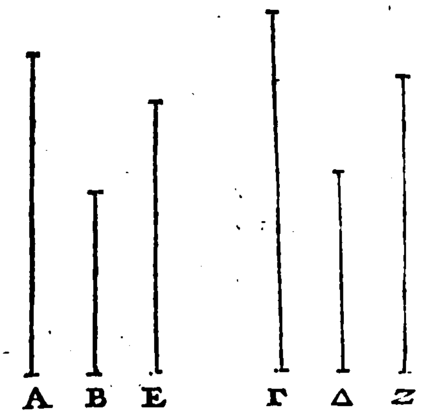
Sint quatuor rectæ lineæ proportionales A, B, Γ, Δ, ſitque ut A ad B ita Γ ad Δ;

&

& A quidem plus possit quam B quadrato quod fit ex E; Γ vero plus possit quam Δ quadrato ex Z: dico si A ipsi E sit commensurabilis, & Γ ipsi Z commensurabilem esse; si vero A ipsi E sit incommensurabilis, & Γ ipsi Z incommensurabilem esse.

Quoniam enim est ut A ad B ita Γ ad Δ, erit [per 1. cor. 22. 6.] ut quadratum ex A ad quadratum ex B ita quadratum ex Γ ad id quod ex Δ fit quadratum. sed quadrato quidem quod fit ex A æqualia sunt [ex hyp.] quadrata quæ ex ipsis E, B; quadrato autem ex Γ æqualia sunt quadrata ex Z, Δ: igitur ut quadrata quæ fiunt ex E, B ad quadratum ex B ita quadrata quæ fiunt ex Z, Δ ad quadratum ex Δ: & dividendo [per 17. 5.] ut quadratum ex E ad quadratum ex B ita quadratum ex Z ad quadratum ex Δ: quare [per 22. 6.] ut E ad B ita est Z ad Δ, & [per 4. 5.] convertendo ut B ad E ita Δ ad Z. est autem & ut A ad B ita Γ ad Δ: ex æquo igitur [per 22. 5.] ut A ad E ita est Γ ad Z: ergo [per 10. 10.] si A est commensurabilis ipsi E, & Γ ipsi Z erit commensurabilis; si vero incommensurabilis est A ipsi E, & Γ ipsi Z incommensurabilis erit.

Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales sint, & quæ sequuntur. quod erat demonstrandum.



Δ, καὶ ἡ Α μὲν τῆς Β μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ τῆς Ε, ἡ δὲ Γ τῆς Δ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ τῆς Ζ· λέγω ὅτι εἰ σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ, εἰ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν Ε, Β, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Γ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν Ζ, Δ· ἔστιν ἄρα ὡς τὰ ἀπὸ τῶν Ε, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν Ζ, Δ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ Ε πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Ζ πρὸς τὴν Δ· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Ε οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ε οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Ζ· εἰ μὲν οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ, εἰ ἀσύμμετρος ἡ Α τῇ Ε ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

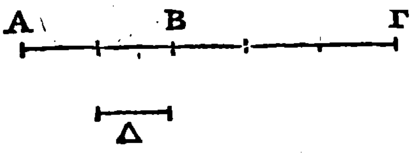
Prop. XVI. Probl.

Si duæ magnitudines commensurabiles componantur; & tota magnitudo utrique ipsarum commensurabilis erit. quod si tota magnitudo uni ipsarum sit commensurabilis; & quæ à principio magnitudines commensurabiles erunt.

Componantur enim duæ magnitudines commensurabiles AB, BΓ: dico & totam magnitudinem AΓ utrique ipsarum AB, BΓ commensurabilem esse.

Quoniam enim commensurabiles sunt AB, BΓ, [per 1. def. 10.] metietur eas aliqua magnitudo. metiatur, sitque Δ. & quoniam Δ metitur ipsas AB, BΓ, & totam AΓ metietur. metitur autem & AB, BΓ: ergo Δ magnitudines AB, BΓ & ipsam AΓ metitur: commensurabilis igitur est AΓ utrique ipsarum AB, BΓ.

Sed AΓ uni ipsarum AB, BΓ sit commensurabilis, videlicet ipsi AB: dico & AB, BΓ commensurabiles esse.



Quoniam enim commensurabiles sunt AΓ, AB, metietur eas aliqua magnitudo. metiatur, & sit

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛʹ.

Ἐὰν δύο μεγέθη σύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν σύμμετρον ἔσται. κἂν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν σύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη σύμμετρα ἔσται.

Συγκείσθω γὰρ δύο μεγέθη σύμμετρα, τὰ ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ ὅλον τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ ΑΒ, ΒΓ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ, καὶ ὅλον τὸ ΑΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ καὶ τὸ ΑΓ μετρεῖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΓ ἑνὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἔστω σύμμετρον, ἔστω δὴ τῷ ΑΒ· λέγω δὴ ὅτι καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ σύμμετρά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ ΑΓ, ΑΒ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. ἐπεὶ

ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΑΓ, ΑΒ μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρήσει· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη σύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν σύμμετρον ἔσται, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Δ. itaque quoniam Δ metitur ipsas ΑΓ, ΑΒ, & reliquam ΒΓ metietur. metitur autem & ΑΒ: ergo Δ ipsas ΑΒ, ΒΓ metietur: ac propterea ΑΒ, ΒΓ commensurabiles sunt.

Si igitur duæ magnitudines commensurabiles componantur, & tota magnitudo utrique ipsarum commensurabilis erit, & quæ sequuntur. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζʹ.

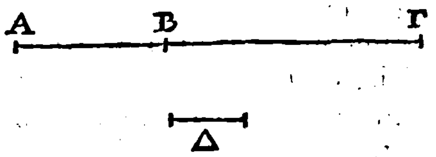
Ἐὰν δύο μεγέθη ἀσύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν ἀσύμμετρον ἔσται. κἂν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται.

Prop. XVII. Theor.

Si duæ magnitudines incommensurabiles componantur; & tota magnitudo utrique ipsarum incommensurabilis erit. quod si tota magnitudo uni ipsarum sit incommensurabilis; & quæ à principio magnitudines incommensurabiles erunt.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μεγέθη ἀσύμμετρα, τὰ ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ ὅλον τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ἀσύμμετρα τὰ ΓΑ, ΑΒ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω, εἰ δυνατὸν, τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΒΑ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ. ὑπόκειται δὲ καὶ ἀσύμμετρα, ὅπερ ἀδύνατόν ἐστιν· οὐκ ἄρα τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΑ, ΑΒ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τὰ ΑΓ, ΓΒ ἀσύμμετρά ἐστι· τὸ ΑΓ ἄρα ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρόν ἐστιν.



ΑΛΛΑ δὴ τὸ ΑΓ ἑνὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρον ἔστω, καὶ πρῶτον τῷ ΑΒ· λέγω ὅτι καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρά ἐστιν. εἰ γὰρ ἐστι σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ, καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΑ, ΑΒ. ὑπόκειται δὲ καὶ ἀσύμμετρα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν * ὅτι εἰ τὸ ΑΓ τῷ ΓΒ ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρα ἔσται.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη ἀσύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Componantur enim duæ magnitudines incommensurabiles ΑΒ, ΒΓ: dico & totam magnitudinem ΑΓ utrique ipsarum ΑΒ, ΒΓ incommensurabilem esse.

Si enim non sunt incommensurabiles ΓΑ, ΑΒ, metietur eas aliqua magnitudo. metiatur, sitq; Δ, si fieri potest. quoniam igitur Δ metitur ipsas ΓΑ, ΑΒ, & reliquam ΒΓ metietur. metitur autem & ΒΑ: ergo Δ ipsas ΑΒ, ΒΓ metitur; ac propterea [per 1. def. 10.] commensurabiles sunt ΑΒ, ΒΓ. ponuntur autem & incommensurabiles, quod fieri non potest: non igitur ipsas ΓΑ, ΑΒ metietur aliqua magnitudo: quare ΓΑ, ΑΒ incommensurabiles sunt. similiter & ΑΓ, ΓΒ incommensurabiles esse demonstrabimus: ergo ΑΓ utrique ipsarum ΑΒ, ΒΓ est incommensurabilis.

Sed ΑΓ uni ipsarum ΑΒ, ΒΓ incommensurabilis sit; & primum ipsi ΑΒ: dico & ΑΒ, ΒΓ incommensurabiles esse. si enim sunt commensurabiles, [per 1. def. 10.] eas aliqua magnitudo metietur. metiatur, & sit Δ. quoniam igitur Δ metitur ipsas ΑΒ, ΒΓ, & totam ΑΓ metietur. metitur autem & ΑΒ: ergo Δ ipsas ΓΑ, ΑΒ metitur: ideoque ΓΑ, ΑΒ commensurabiles sunt. ponuntur autem & incommensurabiles, quod fieri non potest: non igitur ipsas ΑΒ, ΒΓ metietur aliqua magnitudo: quare ΑΒ, ΒΓ incommensurabiles erunt. similiter demonstrabimus, si ΑΓ incommensurabilis sit ipsi ΓΒ, etiam ΑΒ, ΒΓ incommensurabiles esse.

Si igitur duæ magnitudines incommensurabiles componantur, & quæ sequuntur. quod erat demonstrandum.

ΛΗΜΜΑ.

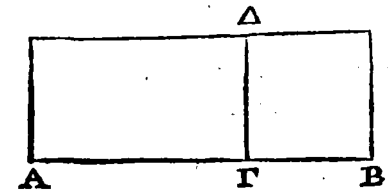
Ἐὰν παρά τινα εὐθεῖαν παραβληθῇ παραλληλόγραμμον, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ· τὸ παραβληθὲν ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ἐκ τῆς παραβολῆς γενομένων τμημάτων τῆς εὐθείας.

LEMMA.

Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum, deficiens figura quadrata; parallelogrammum applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub partibus rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

* Ita restituimus ex Codd. MSS. antea in Editis erat ὅτι τὸ ΑΓ καὶ λοιπῷ τῷ ΒΓ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Ad aliquam enim rectam AB applicetur AΔ parallelogrammum, deficiens figura quadrata ΔB: dico parallelogrammum AΔ rectangulo sub AΓ, ΓB æquale esse.



Atque hoc per se patet: quoniam enim quadratum est ΔB, erit ΔΓ ipsi ΓB æqualis; atq; AΔ est parallelogrammum quod sub AΓ, ΓB continetur.

Si igitur ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum, & quæ sequuntur. quod erat demonstrandum.

Παρὰ γάρ τινα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ παραβεβλήσθω τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τῷ ΔΒ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΔ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.

Καί ἐστιν αὐτόθεν φανερόν· ἐπεὶ γὰρ τετράγωνόν ἐστι τὸ ΔΒ, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ, καί ἐστι τὸ ΑΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.

Ἐὰν ἄρα παρά τινα εὐθεῖαν παραβληθῇ παραλληλόγραμμον, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

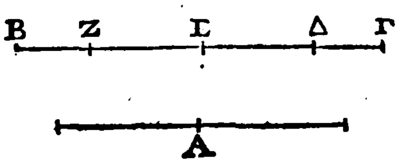
Prop. XVIII. Theor.

Si sint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati quod fit à minori æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam dividat; major tanto plus poterit quam minor quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. quod si major tanto plus possit quam minor quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati quod fit à minori æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figura quadrata; in partes longitudine commensurabiles ipsam dividet.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκει· ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ· εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ μήκει.

Sint duæ rectæ lineæ inæquales A, BΓ, quarum major BΓ, quartæ autem parti quadrati quod fit à minori A (hoc est ei quod fit à dimidia ipsius A) æquale parallelogrammum ad BΓ applicetur deficiens figura quadrata, & sit quod continetur sub BΔ, ΔΓ, sitque BΔ ipsi ΔΓ commensurabilis longitudine: dico BΓ plus posse quam A quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis.



Secetur enim BΓ bifariam in puncto E, & ipsi ΔE æqualis ponatur BZ: reliqua igitur ΔΓ est æqualis BZ. & quoniam recta linea BΓ secatur in partes quidem æquales ad E punctum, in partes vero inæquales ad punctum Δ; erit [per 5. 2.] rectangulum sub BΔ, ΔΓ una cum quadrato ex EΔ æquale quadrato ex EΓ; & eorum quadrupla: quod igitur quater sub BΔ, ΔΓ continetur una cum quadrato quod quater fit ex BΔ æquale est quadrato quod quater fit ex EΓ. sed ei quidem quod quater sub BΔ, ΔΓ continetur æquale est [ex hyp.] quadratum ex A, ei vero quod quater fit ex ΔE æquale est quadratum ex ΔZ; etenim ΔZ ipsius ΔE est dupla; & ei quod quater fit ex EΓ æquale est quadratum ex BΓ; rursus enim BΓ dupla est ipsius EΓ: ergo quadrata quæ fiunt ex A, ΔZ æqualia sunt ei quod fit ex BΓ quadrato: ac propterea quadratum quod fit ex BΓ

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ Α, ΒΓ, ὧν μείζων ἡ ΒΓ, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς Α, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς Α, ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραλληλόγραμμον παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ, σύμμετρος δὲ ἔστω ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει· λέγω ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ κείσθω τῷ ΔΕ ἴση ἡ ΕΖ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΓ ἴση ἐστὶ τῇ ΒΖ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΒΓ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Ε, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΓ τετραγώνῳ, καὶ τὰ τετραπλάσια· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετράκις ἀπὸ τῆς ΕΔ ἴσον ἐστὶ τῷ τετράκις ἀπὸ τῆς ΕΓ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τῷ μὲν τετράκις ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον, τῷ δὲ τετράκις ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ τετράγωνον, διπλασίων γάρ ἐστι ἡ ΔΖ τῆς ΔΕ· τῷ δὲ τετράκις ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον, διπλασίων γάρ ἐστι πάλιν ἡ ΒΓ τῆς ΕΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν Α, ΔΖ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ

τοῦ

τῦ ἀπὸ τῆς Α μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μεῖζον δυνάται τῇ ΔΖ. δεικτέον ὅτι καὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΔΖ. ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει, σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΔΓ μήκει. ἀλλὰ ἡ ΔΓ ταῖς ΓΔ, ΒΖ ἐστὶ σύμμετρος μήκει, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΒΖ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα ταῖς ΒΖ, ΓΔ ἐστὶ σύμμετρος μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ τῇ ΖΔ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΒ μήκει· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μεῖζον δυνάται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

ἈΛΛΑ δὴ ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ. δεικτέον ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δυνάται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. δυνάται δὲ ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ συναμφοτέρῳ τῇ ΒΖ, ΔΓ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει. ἀλλὰ συναμφότερος ἡ ΒΖ, ΔΓ τῇ ΔΓ σύμμετρός ἐστι μήκει, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΒΖ τῇ ΔΓ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ΔΓ· δηλονότι ἄρα ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ ἐστὶ σύμμετρος μήκει.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ΄.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκει· ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ· εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ μήκει.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ Α, ΒΓ, ὧν μείζων ἡ ΒΓ, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ,

majus est quam quadratum quod ex A quadrato ex ΔZ: recta igitur linea BΓ tanto plus potest quam A quantum est ipsius ΔZ quadratum. ostendendum est & BΓ ipsi ΔZ commensurabilem esse. quoniam enim [ex hyp.] BΔ commensurabilis est ipsi ΔΓ longitudine, erit [per 16. 10.] & BΓ ipsi ΔΓ longitudine commensurabilis. sed [per 6.10.] ΔΓ ipsis ΓΔ, BZ est commensurabilis longitudine, æqualis enim est ΓΔ ipsi BZ: quare & BΓ ipsis BZ, ΓΔ longitudine est commensurabilis: & reliquæ igitur ZΔ [per 16. 10.] longitudine commensurabilis erit: ergo BΓ plus potest quam A quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

SED BΓ plus possit quam A quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati quod fit ex A æquale parallelogrammum ad BΓ applicetur deficiens figura quadrata; & sit quod continetur sub BΔ, ΔΓ. ostendendum est BΔ ipsi ΔΓ longitudine commensurabilem esse.

Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus BΓ plus posse quam A quadrato rectæ lineæ ZΔ. sed [ex hyp.] BΓ plus potest quam A quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis: ergo BΓ commensurabilis est ipsi ZΔ longitudine; & reliquæ igitur, utrique scilicet BZ, ΔΓ, [per 16. 10.] longitudine est commensurabilis. sed utraque BZ, ΔΓ ipsi ΔΓ commensurabilis est longitudine, etenim BZ est æqualis ΔΓ; ergo & BΓ ipsi ΔΓ longitudine est commensurabilis: constat igitur [per 16.10.] BΔ ipsi ΔΓ longitudine commensurabilem esse.

Si igitur duæ rectæ lineæ inæquales sint, quartæ autem parti quadrati quod fit à minori æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, & quæ sequuntur. quod erat demonstrandum.

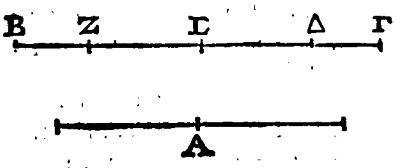
PROP. XIX. THEOR.

Si sint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati quod fit à minori æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine ipsam dividat; major tanto plus poterit quam minor quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. quod si major tanto plus possit quam minor quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati quod fit à minori æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figura quadrata; in partes longitudine incommensurabiles ipsam dividet.

SInt duæ rectæ lineæ inæquales A, BΓ, quarum major BΓ, quartæ autem parti quadrati quod fit à minori A æquale parallelogrammum ad ipsam BΓ applicetur, deficiens figura quadrata, & sit quod continetur sub BΔ, ΔΓ, sitque

sitque ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine incommensurabilis: dico ΒΓ plus posse quam Α, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

Iisdem enim quæ supra constructis, similiter ostendemus ipsam ΒΓ plus posse quam Α quadrato rectæ lineæ ΔΖ. ostendendum igitur est ΒΓ ipsi ΔΖ longitudine incommensurabilem esse. quoniam enim incommensurabilis est ΒΔ ipsi ΔΓ, erit [per 17. 10.] & ΒΓ ipsi ΔΓ longitudine incommensurabilis. sed ΔΓ commensurabilis est utrisque ΒΖ, ΔΓ: ergo [per 14.10.] & ΒΓ utrisque ΒΖ, ΔΓ longitudine est incommensurabilis: ac propterea ΒΓ [per 17.10.] reliquæ ΖΔ incommensurabilis est longitudine, & ΒΓ plus potest quam Α quadrato ex ΖΔ: igitur ΒΓ plus potest quam Α quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.



Sed ΒΓ rursus plus possit quam Α quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, quartæ autem parti quadrati quod fit ex Α æquale parallelogrammum ad ΒΓ applicetur deficiens figura quadrata; & sit quod sub ΒΔ, ΔΓ continetur. ostendendum est ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine incommensurabilem esse.

Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus ΒΓ plus posse quam Α quadrato rectæ lineæ ΔΖ. sed [ex hyp.] ΒΓ plus potest quam Α quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis: incommensurabilis igitur est ΒΓ ipsi ΔΖ longitudine: quare [per 17.10.] & reliquæ, videlicet utrique ΒΖ, ΔΓ, est incommensurabilis. sed [per 6. 10.] utraque ΒΖ, ΔΓ commensurabilis est longitudine ipsi ΔΓ: ergo [per 14. 10.] & ΒΓ ipsi ΔΓ est incommensurabilis longitudine; ac propterea dividendo [per 17.10.] ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine incommensurabilis erit.

Si igitur duæ rectæ lineæ inæquales sint, & quæ sequuntur. quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM 1.

Quoniam demonstratum est [ad cor.9.10.] longitudine commensurabiles omnino & potentia commensurabiles esse, potentia vero commensurabiles non semper & longitudine, sed posse & longitudine commensurabiles esse & incommensurabiles; manifestum est, si expositæ rationali aliqua commensurabilis fuerit longitudine, illam rationalem vocari, & ipsi commensurabilem non solum longitudine sed etiam potentia: longitudine enim commensurabiles omnino & potentia commensurabiles sunt. si vero expositæ rationali aliqua fuerit potentia commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic rationalis & commensurabilis ipsi longitudine & potentia. quod si expositæ rationali rursus aliqua commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic rationalis potentia tantum commensurabilis.

SCHOLIUM 2.

Rationales vocat eas, quæ expositæ rationali vel longitudine & potentia commensurabiles sunt, vel potentia tantum. sunt autem &

ἀσύμμετρος δὲ ἔστω ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει· λέγω ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται, τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων τῷ πρότερῳ, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ. δεικτέον οὖν ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΔΖ μήκει. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΔΓ μήκει. ἀλλὰ ἡ ΔΓ σύμμετρός ἐστι συναμφοτέραις ταῖς ΒΖ, ΔΓ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα ἀσύμμετρός ἐστι συναμφοτέραις ταῖς ΒΖ, ΔΓ· ὥστε καὶ λοιπῇ τῇ ΖΔ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει, καὶ ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

ΔΥΝΑΣΘΩ δὴ πάλιν ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ. δεικτέον ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ. ἀλλ' ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΔΖ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ συναμφοτέρῳ τῇ ΒΖ, ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ. ἀλλὰ συναμφότερος ἡ ΒΖ, ΔΓ τῇ ΔΓ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα τῇ ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει· ὥστε καὶ διελόντι ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΧΟΛΙΟΝ α'.

Ἐπειδὴ δέδεικται ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει, ἀλλὰ δηλαδὴ δύνανται καὶ μήκει σύμμετροι εἶναι καὶ ἀσύμμετροι· φανερὸν ὅτι ἐὰν τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ᾖ μήκει, λέγεται ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ οὐ μόνον μήκει ἀλλὰ καὶ δυνάμει, αἱ γὰρ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. ἐὰν δὲ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ᾖ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει λέγεται, καὶ οὕτως ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ μήκει καὶ δυνάμει. εἰ δὲ τῇ ἐκκειμένῃ πάλιν ῥητῇ σύμμετρός τις οὖσα δυνάμει μήκει ᾖ ἀσύμμετρος, λέγεται καὶ οὕτως ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος.

*ΣΧΟΛΙΟΝ β'.

Ῥητὰς καλεῖ τὰς τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ ἤτοι μήκει καὶ δυνάμει συμμέτρους, ἢ δυνάμει μόνον. εἰσὶ δὲ καὶ

* In editis Πρόκλου σχόλιον dicitur: sed in MSS. nulla mentio Procli. Non tamen ideo Euclidis esse arbitramur: nam & hoc Scholium & præcedens, ut & alia pleraque Scholia & Lemmata hujusce libri, Euclidi abjudicanda esse censemus.

ἄλλαι

ἄλλαι εὐθεῖαι, αἱ μήκει μὲν ἀσύμμετροί εἰσι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καὶ διὰ τοῦτο πάλιν λέγονται ῥηταὶ καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας καθ' ὃ ῥηταί, ἀλλὰ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, ἤτοι μήκει δηλαδὴ καὶ δυνάμει ἢ δυνάμει μόνον. καὶ εἰ μὲν μήκει, λέγονται καὶ αὐταὶ ῥηταὶ μήκει σύμμετροι, ἐπακουομένου ὅτι καὶ δυνάμει· εἰ δὲ δυνάμει μόνον πρὸς ἀλλήλας εἰσὶ σύμμετροι, λέγονται καὶ αὐταὶ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. ὅτι δὲ αἱ ῥηταὶ σύμμετροί εἰσιν, ἐντεῦθεν δῆλον· ἐπεὶ γὰρ ῥηταί εἰσιν αἱ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετροι, τὰ δὲ τῷ αὐτῷ σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα· αἱ ἄρα ῥηταὶ σύμμετροί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

aliæ rectæ lineæ, quæ longitudine quidem expositæ rationali incommensurabiles sunt, potentia autem solum commensurabiles, atque ob id rursus dicuntur rationales & commensurabiles inter se quatenus rationales; sed commensurabiles inter se, vel longitudine & potentia vel potentia solum. & si quidem longitudine, dicuntur & ipsæ rationales longitudine commensurabiles, ut intelligatur etiam potentia commensurabiles esse: si vero potentia solum inter se sunt commensurabiles, dicuntur ipsæ quoque rationales potentia solum commensurabiles. at vero rationales commensurabiles esse, ex his constat: quoniam enim rationales sunt quæ expositæ rationali sunt commensurabiles, quæ vero eidem commensurabiles [per 12. 10.] etiam inter se commensurabiles sunt; sequitur rationales commensurabiles esse. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κʹ.

Τὸ ὑπὸ ῥητῶν μήκει συμμέτρων κατά τινα τῶν προειρημένων τρόπων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ῥητόν ἐστιν.

Ὑπὸ γὰρ ῥητῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι ῥητόν ἐστι τὸ ΑΓ.

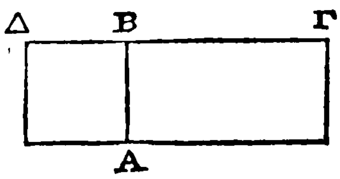
Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, ἴση δὲ ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ μήκει. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ, σύμμετρος δὲ ἐστὶν ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ΔΑ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΑΓ.

Τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῶν, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XX. Theor.

Quod sub rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis secundum aliquem prædictorum modorum continetur rectangulum, rationale est.

Sub rationalibus enim longitudine commensurabilibus rectis lineis ΑΒ, ΒΓ contineatur rectangulum ΑΓ: dico ΑΓ rationale esse.



Describatur ex ΑΒ quadratum ΑΔ: ergo ΑΔ est rationale. & quoniam ΑΒ commensurabilis est ipsi ΒΓ longitudine, atque est ΑΒ æqualis ΒΔ; erit ΒΔ ipsi ΒΓ longitudine commensurabilis. est autem [per 1. 6.] & ut ΒΔ ad ΒΓ ita ΔΑ ad ΑΓ, & commensurabilis est ΒΔ ipsi ΒΓ: ergo [per 10. 10.] & ΔΑ ipsi ΑΓ commensurabile erit. estque rationale ΔΑ: quare & ΑΓ est rationale.

Quod igitur sub rationalibus, & quæ sequuntur. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ καʹ.

Ἐὰν ῥητὸν παρὰ ῥητὴν παραβληθῇ· πλάτος ποιεῖ ῥητὴν, καὶ σύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει.

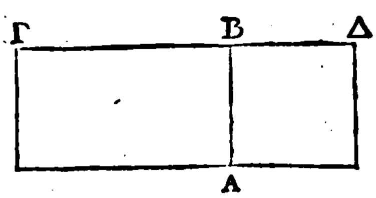
Ῥητὸν γὰρ τὸ ΑΓ παρὰ ῥητὴν κατά τινα πάλιν τῶν εἰρημένων τρόπων τὴν ΑΒ παραβεβλήσθω, πλάτος ποιοῦν τὴν ΒΓ· λέγω ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ ΒΓ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΒ μήκει.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. ῥητὸν δὲ καὶ τὸ ΑΓ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ τῷ ΑΓ. καὶ ἔστιν ὡς τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ· σύμμετρος ἄρα

Prop. XXI. Theor.

Si rationale ad rationalem applicetur, latitudinem efficit rationalem, & ei ad quam applicatum est longitudine commensurabilem.

Rationale enim ΑΓ ad rationalem secundum aliquem rursus dictorum modorum nempe ΑΒ applicetur, latitudinem faciens ΒΓ: dico ΒΓ rationalem esse, & ipsi ΑΒ longitudine commensurabilem.



Describatur enim ex ΑΒ quadratum ΑΔ: ergo ΑΔ rationale est. sed & rationale est ΑΓ: ergo [per 1. schol. 19. 10.] ΑΔ ipsi ΑΓ est commensurabile. atque [per 1. 6.] est ut ΔΑ ad ΑΓ ita ΔΒ ad ΒΓ: commensurabilis

mensurabilis igitur est ΔB ipsi BΓ. est autem BΔ æqualis BA: quare AB ipsi BΓ commensurabilis est. sed AB est rationalis: rationalis igitur est & BΓ, & ipsi BA longitudine commensurabilis.

Si igitur rationale ad rationalem applicetur, & quæ sequuntur. quod erat demonstrandum.

ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ. ἴση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΒΑ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ. ῥητὴ δὲ ἐστὶν ἡ ΑΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ, καὶ σύμμετρος τῇ ΒΑ μήκει.

Ἐὰν ἄρα ῥητὸν παρὰ ῥητὴν, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

LEMMA.

Recta linea quæ potest irrationale spatium, irrationalis est.

Possit enim recta linea A spatium irrationale, hoc est quadratum quod fit ab A irrationali spatio sit æquale: dico A irrationalem esse.

Si enim A sit rationalis, erit quod ab ipsa fit quadratum rationale; sic enim in definitionibus ponitur. atqui rationale non est: ergo A irrationalis sit necesse est. quod erat demonstrandum.

ΛΗΜΜΑ.

Ἡ δυναμένη ἄλογον χωρίον, ἄλογός ἐστι.

Δυνάσθω γὰρ ἡ Α ἄλογον χωρίον, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον ἴσον ἔστω ἀλόγῳ χωρίῳ· λέγω ὅτι ἡ Α ἄλογός ἐστιν.

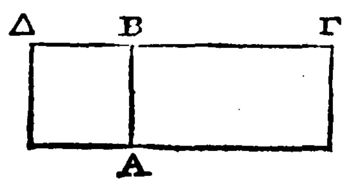
Εἰ γάρ ἐστι ῥητὴ ἡ Α, ῥητὸν ἔσται καὶ τὸ ἀπ᾽ αὐτῆς τετράγωνον, οὕτως γὰρ ἐν τοῖς ὅροις. οὐκ ἔστι δέ· ἄλογος ἄρα ἡ Α ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXII. Theor.

Quod sub rationalibus potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum irrationale est; & recta linea ipsum potens est irrationalis, vocetur autem media.

SUB rationalibus enim potentia solum commensurabilibus rectis lineis AB, BΓ contineatur rectangulum AΓ: dico AΓ irrationale esse, & rectam lineam quæ ipsum potest irrationalem esse, vocetur autem media.

Describatur enim ex AB quadratum AΔ: ergo AΔ rationale est. & quoniam AB incommensurabilis est ipsi BΓ longitudine, potentia enim solum ponuntur commensurabiles, atque est AB æqualis BΔ: incommensurabilis igitur est ΔB ipsi BΓ longitudine. est autem [per 1. 6.] ut ΔB ad BΓ ita AΔ ad AΓ: ergo AΔ ipsi AΓ est incommensurabile. sed AΔ rationale est: irrationale igitur est AΓ: quare [per 11. def. 10.] & recta linea quæ ipsum AΓ potest, videlicet quæ potest quadratum ipsi æquale, est irrationalis. vocetur autem media; propterea quod ipsius quadratum est æquale rectangulo quod sub AB, BΓ continetur, & inter ipsas AB, BΓ media sit proportionalis. quod erat demonstrandum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Τὸ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μέση.

ΥΠΟ γὰρ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι ἄλογόν ἐστι τὸ ΑΓ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μέση.

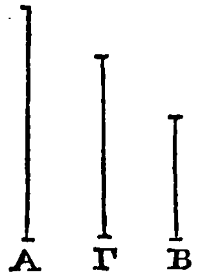
Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον ὑπόκεινται σύμμετροι, ἴση δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ μήκει. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΑΔ πρὸς τὸ ΑΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ τῷ ΑΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ΑΔ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ· ὥστε καὶ ἡ δυναμένη τὸ ΑΓ, τουτέστιν ἡ ἴσον αὐτῷ τετράγωνον δυναμένη, ἄλογός ἐστι. καλείσθω δὲ μέση, διὰ τὸ ἀπ᾽ αὐτῆς τετράγωνον ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ μέσην ἀνάλογον αὐτὴν γίνεσθαι τῶν ΑΒ, ΒΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

*SCHOLIUM.

Media est irrationalis quæ potest spatium contentum sub rationalibus potentia solum commensurabilibus.

Sub rationalibus enim potentia solum commensurabilibus rectis lineis A, B spatium contineatur. ostendendum est hujusmodi spatium irrationale esse.

Sumatur enim inter ipsas A, B media proportionalis Γ; ergo [per 17. 6.] quod fit sub A, B est æquale quadrato ex Γ; ac propterea Γ potest rectangulum quod sub ipsis A, B continetur: est igitur ut A



*ΣΧΟΛΙΟΝ.

Μέση ἐστὶν ἄλογος ἡ δυναμένη χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων.

Ὑπὸ ῥητῶν γὰρ δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν Α, Β περιεχέσθω χωρίον. δεικτέον ὅτι ἄλογόν ἐστι τὸ τοιοῦτον χωρίον.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν Α, Β μέση ἀνάλογον ἡ Γ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Γ· ὥστε ἡ Γ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν

* In MSS. non reperitur.

Β οὕτως

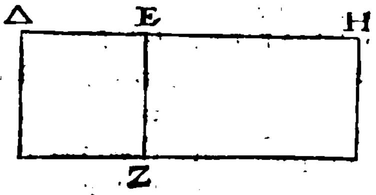
Β οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Γ, ὡς γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ πορίσματι τοῦ ιθʹ τοῦ ϛʹ στοιχείου. ἀσύμμετρος δὲ ἡ Α τῇ Β μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Γ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ἄλογον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Γ. μέση δὲ ἐκλήθη, ὅτι ἄλογος οὖσα μέση δύο ῥητῶν τῶν Α, Β ἀνάλογόν ἐστι.

ad B ita quadratum ex A ad id quod fit ex Γ quadratum, nam ut prima ad tertiam ita quadratum quod fit ex prima ad quadratum ex secunda, quod demonstratum est in corollario prop. 28. sexti Elementorum. incommensurabilis autem est A ipsi B longitudine: ergo [per 10. 10.] & quadratum ex A quadrato ex Γ est incommensurabile. sed quadratum ex A rationale est: irrationale igitur est quod sub rectis lineis A, B continetur: ergo Γ est irrationalis. media autem idcirco vocatur, quod irrationalis existens inter ipsas A, B rationales media est proportionalis.

ΛΗΜΜΑ.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΖΕ, ΕΗ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΖΕ τετράγωνον τὸ ΔΖ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΗΖ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως τὸ ΖΔ πρὸς τὸ ΖΗ, καί ἐστι τὸ μὲν ΖΔ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, τὸ δὲ ΖΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΗ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ. ὁμοίως δὲ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΕ, ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ, τουτέστιν ὡς τὸ ΗΖ πρὸς τὸ ΔΖ, οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ.

LEMMA.

Si sint duæ rectæ lineæ, erit ut prima ad secundam ita quadratum quod fit à prima ad rectangulum quod sub duabus rectis lineis continetur.

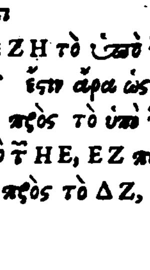
Sint duæ rectæ lineæ ZE, EH: dico ut ZE ad EH ita esse quadratum ex ZE ad rectangulum sub ZE, EH.

Describatur ex ZE quadratum ΔZ, & HZ compleatur. quoniam igitur [per 1. 6.] est ut ΔE ad EH ita ZΔ ad ZH, atque est ZΔ quidem quadratum ex ZE, ZH vero quod sub ΔE, EH continetur, hoc est rectangulum sub ZE, EH: erit ut ZE ad EH ita quadratum ex ZE ad rectangulum sub ZE, EH. similiter autem & ut rectangulum sub HE, EZ ad quadratum ex EZ, hoc est ut HZ ad ΔZ, ita est HE ad EZ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγʹ

Τὸ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητήν, καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει.

Ἔστω μέση μὲν ἡ Α, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΒ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω χωρίον τὸ ΒΔ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΔ· λέγω ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ ΓΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει.

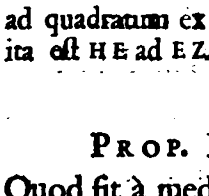


Ἐπεὶ γὰρ μέση ἐστὶν ἡ Α, δύναται χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων. δυνάσθω τὸ ΗΖ. δύναται δὲ καὶ τὸ ΒΔ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔ τῷ ΗΖ. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον, τῶν δὲ ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ. σύμ-

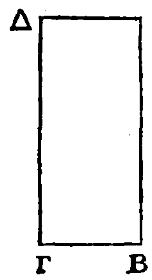
PROP. XXIII. THEOR.

Quod fit à media ad rationalem applicatum latitudinem efficit rationalem, & ei ad quam applicatum est longitudine incommensurabilem.

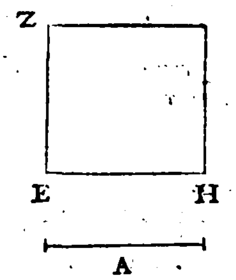
SIT media quidem A, rationalis autem ΓB; & ad ΓB ei quod fit ex A æquale spatium applicetur BΔ latitudinem faciens ΓΔ: dico ΓΔ rationalem esse, & ipsi BΓ longitudine incommensurabilem.



Quoniam enim media est A, [per 22. 10.] potest spatium contentum sub rationalibus potentia solum commensurabilibus. possit HZ. sed potest & BΔ: æquale igitur est BΔ ipsi HZ. atque est illi æquiangulum, æqualium autem & æquiangulorum parallelogrammorum latera quæ circum æquales angulos [per 14. 6.] sunt reciproce proportionalia: ergo ut recta BΓ ad EH rectam ita est EZ ad ΓΔ: est igitur & ut quadratum ex BΓ ad quadratum ex EH ita [per 22. 6.] quadratum ex EZ ad id quod fit ex ΓΔ quadratum. sed quadratum ex B Γ commensurabile est quadrato ex E H, utraque enim ipsarum est rationalis: commensurabile igitur est [per 10. 10.] & quadratum ex E Z quadrato ex Γ Δ. est autem quadratum ex E Z rationale: ergo & rationale est quadratum ex Γ Δ; ac propterea recta linea Γ Δ est rationalis. itaque quoniam Z E incommensurabilis est ipsi E H longitudine, potentia enim solum [per 22. 10] commensurabiles sunt, ut autem Z E ad E H ita [per lem. præc.] quadratum ex E Z ad rectangulum sub Z E, E H: erit [per 10. 10.] quadratum ex E Z incommensurabile rectangulo sub Z E, E H. sed quadrato quidem ex E Z commensurabile est quadratum ex Γ Δ, rationales enim sunt potentia; rectangulo vero sub E Z, E H est commensurabile rectangulum sub Δ Γ, Γ B, utrumque enim est æquale quadrato ex A: ergo [per 13. 10.] quadratum ex Γ Δ incommensurabile est rectangulo sub Δ Γ, Γ B. sed ut quadratum ex Γ Δ ad rectangulum sub Δ Γ, Γ B ita est [per lem. præc.] Δ Γ ad Γ B: ergo Δ Γ ipsi Γ B incommensurabilis est longitudine; & [per 6. def. 10.] ob id Δ Γ est rationalis & ipsi Γ B longitudine incommensurabilis. quod erat demonstrandum.



μετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς B Γ τῷ ἀπὸ τῆς E H, ῥητὴ γάρ ἐστιν ἑκατέρα αὐτῶν· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς E Z τῷ ἀπὸ τῆς Γ Δ. ῥητὸν δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς E Z· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Γ Δ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Γ Δ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ E Z τῇ E H μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ὡς δὲ ἡ E Z πρὸς τὴν E H οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς E Z πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Z E, E H· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς E Z τῷ ὑπὸ τῶν Z E, E H. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς E Z σύμμετρον τὸ ἀπὸ τῆς Γ Δ, ῥηταὶ γάρ εἰσι δυνάμει, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Z E, E H σύμμετρόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν Δ Γ, Γ B, ἴσα γάρ εἰσι τῷ ἀπὸ τῆς A· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Γ Δ τῷ ὑπὸ τῶν Δ Γ, Γ B περιεχομένῳ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Γ Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ Γ, Γ B οὕτως ἐστὶν ἡ Δ Γ πρὸς τὴν Γ B· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Δ Γ τῇ Γ B μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Γ Δ καὶ ἀσύμμετρος τῇ Γ B μήκει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

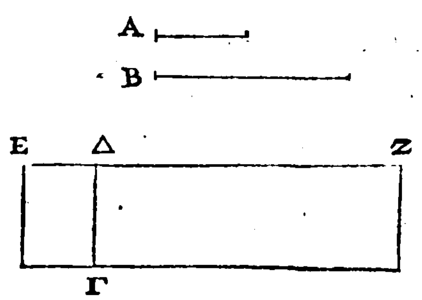


Prop. XXIV. Theor.

Mediæ commensurabilis media est.

SIT media A, & ipsi A commensurabilis sit B: dico & B mediam esse.

Exponatur enim rationalis Γ Δ, & quadrato quidem ex A æquale ad Γ Δ applicetur spatium rectangulum Γ E latitudinem efficiens E Δ: rationalis igitur est E Δ [per 23. 10.] & ipsi Γ Δ longitudine incommensurabilis. quadrato autem ex B æquale ad Δ Γ applicetur spatium rectangulum Γ Z latitudinem efficiens Δ Z. quoniam igitur A commensurabilis est ipsi B, erit [per cor. 9. 10.] quadratum ex A quadrato ex B commensurabile. sed [per constr.] quadrato quidem ex A æquale est rectangulum E Γ; quadrato autem ex B æquale Γ Z: commensurabile igitur est rectangulum E Γ rectangulo Γ Z. atque est [per 1. 6.] ut E Γ ad Γ Z ita E Δ ad Δ Z: ergo E Δ ipsi Δ Z longitudine est commensurabilis est autem [per 23. 10.] E Δ rationalis, & longitudine incommensurabilis ipsi Δ Γ: ergo [per 13. 10.] & Δ Z rationalis est & ipsi Δ Γ longitudine incommensurabilis: rationales igitur sunt Γ Δ, Δ Z potentia solum commensurabiles. quod autem sub rationalibus potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum irrationale est; & recta linea ipsum potens [per 22. 10.] est irrationalis, vocaturque



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Η τῇ μέσῃ σύμμετρος μέση ἐστί.

ΕΣτω μέση ἡ A, καὶ τῇ A σύμμετρος ἔστω ἡ B· λέγω ὅτι καὶ ἡ B μέση ἐστίν.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ Γ Δ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς A ἴσον παρὰ τὴν Γ Δ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον τὸ Γ E πλάτος ποιοῦν τὴν E Δ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ E Δ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ Γ Δ μήκει. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς B ἴσον παρὰ τὴν Δ Γ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον τὸ Γ Z πλάτος ποιοῦν τὴν Δ Z. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ A τῇ B, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς A τῷ ἀπὸ τῆς B. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς A ἴσον ἐστὶ τὸ E Γ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς B ἴσον τὸ Γ Z· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ E Γ τῷ Γ Z. καὶ ἔστιν ὡς τὸ E Γ πρὸς τὸ Γ Z οὕτως ἡ E Δ πρὸς τὴν Δ Z· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ E Δ τῇ Δ Z μήκει. ῥητὴ δ' ἐστὶν ἡ E Δ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ Δ Γ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ Δ Z, καὶ ἀσύμμετρος τῇ Δ Γ μήκει· αἱ Γ Δ, Δ Z ἄρα ῥηταί εἰσι, δυνάμει μόνον σύμμετροι. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ ἡ δυναμένη μέση· ἡ

ἄρα

ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΖ δυναμένη μέση ἐστί, καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΖ ἡ Β· μέση ἄρα ἐστὶν ἡ Β.

media: ergo recta linea quæ potest rectangulum sub ΓΔ, ΔΖ est media. sed Β potest rectangulum sub ΓΔ, ΔΖ: quare Β media erit.

Πόρισμα.

Ἐκ δὲ τούτου φανερὸν, ὅτι τὸ τῷ μέσῳ χωρίῳ σύμμετρον μέσον ἐστίν. δύνανται γὰρ αὐτὰ εὐθεῖαι αἵ εἰσι δυνάμει σύμμετροι, ὧν ἡ ἑτέρα μέση· ὥστε καὶ ἡ λοιπὴ μέση ἐστίν. ὡσαύτως δὲ τοῖς ἐπὶ τῶν ῥητῶν εἰρημένοις καὶ ἐπὶ τῶν μέσων ἐξακολουθεῖ τὴν τῇ μέσῃ μήκει σύμμετρον λέγεσθαι μέσην, καὶ σύμμετρον αὐτῇ μὴ μόνον μήκει ἀλλὰ καὶ δυνάμει, ἐπειδήπερ καθόλου αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. ἐὰν δὲ τῇ μέσῃ σύμμετρός τις ᾖ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει, λέγονται καὶ οὕτως μέσαι καὶ μήκει καὶ δυνάμει σύμμετροι. εἰ δὲ δυνάμει μόνον, λέγονται μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι. * Εἰσὶ δὲ πάλιν καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἱ μήκει μὲν ἀσύμμετροί εἰσι τῇ μέσῃ, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καὶ λέγονται πάλιν μέσαι, διὰ τὸ σύμμετροι εἶναι δυνάμει τῇ μέσῃ καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, καθὸ μέσαι ἄλλαι σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας ἤτοι μήκει δηλαδὴ καὶ δυνάμει, ἢ δυνάμει μόνον. καὶ εἰ μὲν μήκει, λέγονται καὶ αὗται μέσαι μήκει σύμμετροι, ἑπομένου τοῦ ὅτι καὶ δυνάμει. εἰ δὲ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, λέγονται καὶ οὕτως δυνάμει μόνον σύμμετροι. [† ὅτι δὲ αἱ μέσαι σύμμετροί εἰσιν, οὕτω δεικτέον. ἐπεὶ αἱ μέσαι μέσῃ τινὶ σύμμετροί εἰσι, τὰ δὲ τῷ αὐτῷ σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα· αἱ ἄρα μέσαι σύμμετροί εἰσιν.

Corollarium.

Ex hoc manifestum est spatium medio spatio commensurabile medium esse. possunt enim ipsa rectæ lineæ quæ sunt potentia commensurabiles, quarum altera media est: ergo & reliqua media erit. quemadmodum autem & in rationalibus dictum est ita & in mediis dicemus, rectam lineam mediæ longitudine commensurabilem dici mediam, & ipsi commensurabilem non solum longitudine sed & potentia; universe enim quæ longitudine commensurabiles sunt etiam potentia sunt commensurabiles. si vero mediæ commensurabilis quædam recta linea fuerit potentia, siquidem etiam longitudine, dicuntur & sic mediæ & longitudine & potentia commensurabiles. si autem potentia solum, dicuntur mediæ potentia solum commensurabiles. * Rursus sunt & aliæ rectæ, longitudine quidem incommensurabiles mediæ, & potentia tantum illi commensurabiles, & hæ etiam mediæ dicuntur; quoniam potentia commensurabiles mediæ sunt & inter se commensurabiles: nam mediæ aliæ sunt inter se commensurabiles vel longitudine & potentia vel potentia tantum. & siquidem longitudine, dicuntur mediæ longitudine commensurabiles, & consequenter etiam & potentia. si vero sunt potentia tantum commensurabiles, dicuntur potentia tantum commensurabiles. [† quod vero mediæ sint inter se commensurabiles sic ostenditur. quoniam enim mediæ sunt cuidam mediæ commensurabiles, & quæ eidem sunt commensurabiles inter se sunt commensurabiles, erunt mediæ inter se commensurabiles.]

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Τὸ ὑπὸ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μέσον ἐστίν.

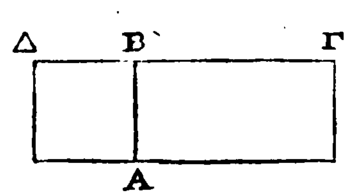
Ὑπὸ γὰρ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχέσθω ὀρθογώνιον τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι τὸ ΑΓ μέσον ἐστίν.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, ἴση δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ μήκει· ὥστε καὶ τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ σύμμετρόν ἐστι. μέσον δὲ τὸ ΑΔ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΑΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXV. Theor.

Quod sub mediis longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur, rectangulum medium est.

Sub mediis enim longitudine commensurabilibus rectis lineis ΑΒ, ΒΓ contineatur rectangulum ΑΓ: dico ΑΓ medium esse.



Describatur enim ex ΑΒ quadratum ΑΔ: ergo ΑΔ medium est. & quoniam commensurabilis est ΑΒ ipsi ΒΓ longitudine, æqualis autem ΑΒ ipsi ΒΔ; erit ΔΒ ipsi ΒΓ longitudine commensurabilis: quare ΔΑ commensurabile est ipsi ΑΓ. sed ΑΔ est medium: ergo [per coroll. 24. 10.] & ΑΓ medium erit. quod erat demonstr.

* Quæ sequuntur desunt in quibusdam exemplaribus, nec ea agnoscit *Commandinus*. † Illa uncis inclusa futilia videntur & scioli alicujus glossemata.

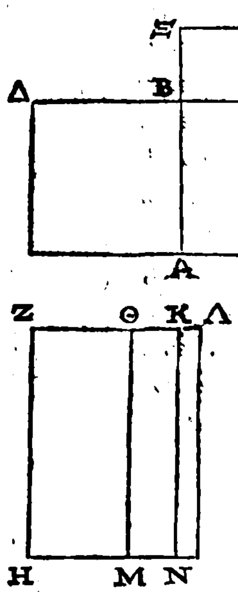
Prop. XXVI. Theor.

Quod sub mediis potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel rationale est vel medium.

Sub mediis enim potentia solum commensurabilibus rectis lineis AB, BΓ contineatur rectangulum AΓ: dico AΓ vel rationale esse vel medium.

Describantur enim ex AB, BΓ quadrata AΔ, BE: utrumque igitur ipsorum AΔ, BE medium est. exponatur rationalis ZH, & [per 45. 1.] ipsi quidem AΔ æquale ad ZH applicetur parallelogrammum rectangulum HΘ latitudinem faciens ZΘ, ipsi vero AΓ æquale ad ΘM applicetur rectangulum MK latitudinem faciens ΘK; & insuper ipsi BE æquale similiter ad KN applicetur NΛ latitudinem faciens KΛ: in recta igitur linea [per 14. 1.] sunt ZΘ, ΘK, KΛ. quoniam igitur medium est utrumque ipsorum AΔ, BE, atque est AΔ quidem æquale ipsi HΘ, BE vero ipsi NΛ; erit & utrumque ipsorum HΘ, NΛ medium, & ad rationalem ZH applicata sunt: ergo [per 23. 10.] & utraque ipsarum ZΘ, KΛ est rationalis, & ipsi ZH longitudine incommensurabilis. & quoniam commensurabile est [ex hyp.] AΔ ipsi BE, erit & HΘ ipsi NΛ commensurabile. sed [per 1. 6.] est ut HΘ ad NΛ ita ZΘ ad KΛ: ergo [per 10. 10.] ZΘ ipsi KΛ est commensurabilis longitudine; ac propterea ZΘ, KΛ rationales sunt longitudine commensurabiles: rationale igitur est rectangulum quod sub ZΘ, KΛ continetur. & quoniam BΔ quidem ipsi BA est æqualis, ΞB vero ipsi BΓ; erit ut ΔB ad BΓ ita AB ad BΞ. sed [per 1. 6.] ut ΔB ad BΓ ita ΔA quadratum ad rectangulum AΓ. ut autem AB ad BΞ ita AΓ rectangulum ad quadratum ΓΞ: est igitur ut ΓΞ ad AΓ ita AΓ ad AΔ. æquale autem est AΔ ipsi HΘ, & AΓ ipsi MK, & ΓΞ ipsi NΛ; quare ut HΘ ad MK ita MK ad NΛ; & igitur ut ZΘ ad ΘK ita ΘK ad KΛ: ideoque [per 17. 6.] quod sub ZΘ, KΛ continetur est æquale quadrato quod fit ex ΘK. est autem [per 20. 10.] quod continetur sub ZΘ, KΛ rationale: ergo & rationale est quadratum ex ΘK; ac propterea recta linea ΘK rationalis. & si quidem ΘK commensurabilis est ipsi ΘM, hoc est ipsi ZH, longitudine, erit rectangulum NΘ rationale. si vero ΘK est incommensurabilis ipsi ZH longitudine, KΘ, ΘM rationales erunt potentia solum commensurabiles, & ob id [per 22. 10.] rectangulum ΘN medium erit: ergo ΘN vel rationale est vel medium. sed ΘN est æquale ipsi AΓ: quare AΓ vel rationale vel medium est.

Quod igitur sub mediis potentia solum com-



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛʹ.

Τὸ ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν.

Ὑπὸ γὰρ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν AB, BΓ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ AΓ· λέγω ὅτι τὸ AΓ ἤτοι ῥητόν ἐστιν ἢ μέσον.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῶν AB, BΓ τετράγωνα τὰ AΔ, BE· μέσον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν AΔ, BE. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ZH, καὶ τῷ μὲν AΔ ἴσον παρὰ τὴν ZH παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ HΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ZΘ, τῷ δὲ AΓ ἴσον παρὰ τὴν ΘM παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ MK πλάτος ποιοῦν τὴν ΘK, καὶ ἔτι τῷ BE ἴσον ὁμοίως παρὰ τὴν KN παραβεβλήσθω τὸ NΛ πλάτος ποιοῦν τὴν KΛ· ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶν αἱ ZΘ, ΘK, KΛ. ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν AΔ, BE, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν AΔ τῷ HΘ, τὸ δὲ BE τῷ NΛ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκάτερον τῶν HΘ, NΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ZH παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν ZΘ, KΛ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ZH μήκει. ἐπεὶ οὖν σύμμετρόν ἐστι τὸ AΔ τῷ BE· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ HΘ τῷ NΛ. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ HΘ πρὸς τὸ NΛ οὕτως ἡ ZΘ πρὸς τὴν KΛ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ZΘ τῇ KΛ μήκει· αἱ ZΘ, KΛ ἄρα ῥηταί εἰσι μήκει σύμμετροι· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ZΘ, KΛ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν BΔ τῇ BA, ἡ δὲ ΞB τῇ BΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔB πρὸς τὴν BΓ οὕτως ἡ AB πρὸς τὴν BΞ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΔB πρὸς τὴν BΓ οὕτως τὸ ΔA πρὸς τὸ AΓ. ὡς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν BΞ οὕτως τὸ AΓ πρὸς τὸ ΓΞ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΞ πρὸς τὸ AΓ οὕτως τὸ AΓ πρὸς τὸ AΔ. ἴσον δέ ἐστι τὸ μὲν AΔ τῷ HΘ, τὸ δὲ AΓ τῷ MK, τὸ δὲ ΓΞ τῷ NΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ HΘ πρὸς τὸ MK οὕτως τὸ MK πρὸς τὸ NΛ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ZΘ πρὸς τὴν ΘK οὕτως ἡ ΘK πρὸς τὴν KΛ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ZΘ, KΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘK. ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ZΘ, KΛ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘK· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘK. καὶ εἰ μὲν ἡ ΘK σύμμετρός ἐστι τῇ ΘM, τουτέστι τῇ ZH, μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ NΘ. εἰ δὲ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ZH μήκει, αἱ KΘ, ΘM ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘN· τὸ ΘN ἄρα ἤτοι ῥητόν ἐστιν ἢ μέσον. ἴσον δὲ τὸ ΘN τῷ AΓ· τὸ AΓ ἄρα ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστί.

Τὸ ἄρα ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων περι-

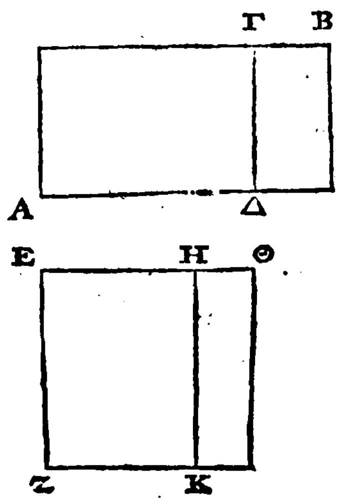
περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἤτοι ῥητόν ἢ μέσον ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

mensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum vel rationale est vel medium. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

Μέσον μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μέσον τὸ ΑΒ μέσου τοῦ ΑΓ ὑπερεχέτω ῥητῷ τῷ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τῷ ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΖΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ, τῷ δὲ ΑΓ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΖΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΔ λοιπῷ τῷ ΚΘ ἴσον ἐστί. ῥητὸν δέ ἐστι τὸ ΒΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΚΘ. ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΑΓ, καί ἐστι τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΖΘ ἴσον, τὸ δὲ ΑΓ τῷ ΖΗ· μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΖΘ, ΖΗ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΕΘ, ΕΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ ΔΒ, καί ἐστιν ἴσον τῷ ΚΘ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΚΘ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ, καὶ σύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΗ ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΗΘ μήκει. καί ἐστιν ὡς ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΗΘ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΕΗ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ τετράγωνα, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ, διπλάσιον γάρ ἐστιν· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· καὶ συναμφότερα ἄρα τά τε ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ, ἀσύμμετρά ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ. ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ. ἀλλὰ καὶ ῥητή, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.



Οὐκ ἄρα μέσον μέσου ὑπερέχει ῥητῷ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXVII. Theor.

Medium non superat medium rationali.

SI enim fieri potest, medium AB superet medium AΓ rationali ΔB, & exponatur rationalis EZ, atque [per 45. 1.] ipsi quidem AB æquale ad EZ applicetur parallelogrammum rectangulum ZΘ latitudinem faciens EΘ, ipsi vero AΓ æquale auferatur ZH: reliquum igitur BΔ reliquo KΘ est æquale. rationale autem est BΔ: ergo & KΘ est rationale. quoniam igitur medium est utrumque ipsorum AB, AΓ, estque AB æquale ZΘ, & AΓ æquale ZH; erit & utrumque ipsorum ZΘ, ZH medium. & ad rationalem EZ applicata sunt: rationalis igitur est utraque earum EΘ, EH [per 23. 10.] & ipsi EZ longitudine incommensurabilis. & quoniam rationale est ΔB, & ipsi KΘ æquale; & KΘ rationale erit. est autem ad EZ applicatum: rationalis igitur est HΘ [per 21. 10.] & ipsi EZ commensurabilis longitudine. sed & EH est rationalis, & ipsi EZ longitudine incommensurabilis: ergo [per 13. 10.] EH incommensurabilis est ipsi HΘ longitudine. atque est [per 1. 6.] ut EH ad HΘ ita quadratum ex EH ad rectangulum quod sub EH, HΘ continetur: incommensurabile igitur [per 10. 10.] est quadratum ex EH rectangulo sub EH, HΘ. sed quadrato quidem ex EH commensurabilia sunt ex EH, HΘ quadrata, utraque enim sunt rationalia, rectangulo autem sub EH, HΘ commensurabile est quod bis sub EH, HΘ continetur, est enim ipsius duplum: ergo [per 14. 10.] quadrata ex EH, HΘ incommensurabilia sunt ei quod bis sub EH, HΘ continetur: & utraq; igitur videlicet quadrata ex EH, HΘ & quod bis continetur sub EH, HΘ, hoc est [per 4. 2.] quadratum ex EΘ, incommensurabilia sunt [per 17. 10.] quadratis ex EH, HΘ. sunt autem rationalia quæ fiunt ex EH, HΘ quadrata: irrationale igitur [per 10. def. 10.] est quadratum ex EΘ: ac propterea EΘ est irrationalis. sed & rationalis, quod fieri non potest.

Non igitur medium superat medium rationali. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Μέσας εὑρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους, ῥητὸν περιεχούσας.

Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, καὶ εἰλήφθω τῶν Α, Β μέση ἀνάλογον ἡ Γ, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ.

Prop. XXVIII. Probl.

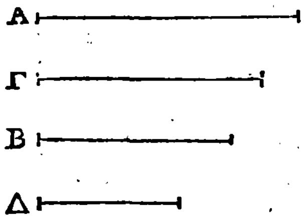
Medias invenire potentia solum commensurabiles, quæ rationale contineant.

EXponantur duæ rationales potentia solum commensurabiles A, B, & sumatur inter ipsas A, B [per 13. 6.] media proportionalis Γ, fiatque [per 12. 6.] ut A ad B ita Γ ad Δ.

Quoniam

Quoniam igitur A, B rationales sunt potentia solum commensurabiles, erit [per 22. 10.] quod sub ipsis A, B continetur rectangulum, hoc est [per 17. 6.] quadratum ex Γ, medium: ergo recta linea Γ media est. & quoniam ut A ad B ita est Γ ad Δ, suntque A, B potentia solum commensurabiles; & [per 10. 10.] Γ, Δ potentia solum commensurabiles erunt. est autem recta linea Γ media: media igitur [per 24. 10.] est & Δ: quare Γ, Δ mediæ sunt potentia solum commensurabiles. dico etiam ipsas rationale continere. quoniam enim est ut A ad B ita Γ ad Δ, erit permutando [per 16. 5.] ut A ad Γ ita B ad Δ. sed ut A ad Γ ita Γ ad B: ergo & ut Γ ad B ita B ad Δ: quod igitur sub ipsis Γ, Δ continetur [per 17. 6.] quadrato ex B est æquale. rationale autem est quadratum ex B: ergo & quod continetur sub Γ, Δ rationale erit.

Inventæ igitur sunt mediæ potentia solum commensurabiles, quæ rationale continent. quod erat faciendum.



Καὶ ἐπεὶ αἱ Α, Β ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς Γ, μέσον ἐστί· μέση ἄρα ἡ Γ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, αἱ δὲ Α, Β δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ Γ, Δ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καὶ ἔστι μέση ἡ Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ Δ· αἱ Γ, Δ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω δὴ ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Δ. ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Β· καὶ ὡς ἄρα ἡ Γ πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Γ, Δ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Β· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ.

Εὕρηνται ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XXIX. Probl.

Medias invenire potentia solum commensurabiles, quæ medium contineant.

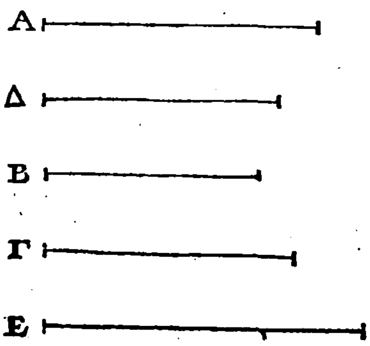
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Μέσας εὑρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους, μέσον περιεχούσας.

Exponantur tres rationales potentia solum commensurabiles A, B, Γ, sumaturque [per 13. 6.] inter ipsas A, B media proportionalis Δ, & [per 12. 6.] fiat ut B ad Γ ita Δ ad E.

Quoniam igitur A, B rationales sunt potentia solum commensurabiles, erit [per 22. 10.] quod sub A, B continetur rectangulum, hoc est [per 17. 6.] quadratum ex Δ, medium: ergo Δ media est. & quoniam B, Γ sunt rationales potentia solum commensurabiles, atque est ut B ad Γ ita Δ ad E; rectæ lineæ Δ, E [per 10. 10.] potentia solum commensurabiles erunt. est autem Δ media: ergo [per 24. 10.] & E media est; ac propterea Δ, E mediæ sunt potentia solum commensurabiles. dico ipsas etiam medium continere. quoniam enim est ut B ad Γ ita Δ ad E, erit permutando ut B ad Δ ita Γ ad E. ut autem B ad Δ ita est Δ ad A: ergo & ut Δ ad A ita Γ ad E: quod igitur sub A, Γ continetur rectangulum [per 16. 6.] est æquale contento sub Δ, E. est autem [per 22. 10.] quod continetur sub A, Γ medium: ergo & quod continetur sub Δ, E medium erit.

Inventæ igitur sunt mediæ potentia solum commensurabiles, quæ medium continent. quod erat faciendum.



Ἐκκείσθωσαν τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, Γ, καὶ εἰλήφθω τῶν Α, Β μέση ἀνάλογον ἡ Δ, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε.

Ἐπεὶ αἱ Α, Β ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς Δ, μέσον ἐστί· μέση ἄρα ἡ Δ. καὶ ἐπεὶ αἱ Β, Γ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, καί ἐστιν ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε· αἱ Δ, Ε ἄρα σύμμετροι δυνάμει μόνον εἰσί. μέση δὲ ἡ Δ· μέση ἄρα καὶ ἡ Ε· αἱ Δ, Ε ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω δὴ ὅτι καὶ μέσον περιέχουσιν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε, ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Δ οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Ε. ὡς δὲ ἡ Β πρὸς τὴν Δ οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Α, καὶ ὡς ἄρα ἡ Δ πρὸς τὴν Α οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε.

Εὕρηνται ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

LEMMA.

Invenire duos numeros quadratos, ita ut qui ex ipsis componitur etiam quadratus sit.

ΛΗΜΜΑ.

Εὑρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμούς, ὥστε καὶ τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν εἶναι τετράγωνον.

Ἐκκείσθωσαν

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ, ἔστωσαν δὴ ἤτοι ἄρτιοι ἢ περιττοί. καὶ ἐπεὶ ἐάντε ἀπὸ ἀρτίου ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ἐάντε ἀπὸ περιττοῦ περιττός, ὁ λοιπὸς ἄρτιός ἐστιν· ὁ λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΓ ἄρτιός ἐστι. τετμήσθω ὁ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ. ἔστωσαν δὲ καὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ ἤτοι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἢ τετράγωνοι, οἳ καὶ αὐτοὶ ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι· ὁ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΔ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΔ τετραγώνῳ. καί ἐστι τετράγωνος ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐπειδήπερ ἐδείχθη ὅτι ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος τετράγωνός ἐστιν· εὕρηνται ἄρα δύο τετράγωνοι ἀριθμοί, ὅ, τε ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, οἳ συντεθέντες ποιοῦσι τὸν ἀπὸ τοῦ ΒΔ τετράγωνον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Α . . . . . Δ . . . . . . Γ . . . . Β

Exponantur duo numeri ΑΒ, ΒΓ, qui vel pares sint vel impares. & quoniam sive à pari par auferatur, sive ab impari impar [per 24, & 26. 9.] reliquus par est; erit ΑΓ numerus par. secetur ΑΓ bifariam in Δ. sint autem ΑΒ, ΒΓ vel similes plani vel quadrati, qui & ipsi similes plani sunt: ergo [per 6. 2.] qui fit sub ΑΒ, ΒΓ una cum quadrato ex ΓΔ est æqualis ei qui fit ex ΒΔ quadrato. atque qui fit ex ΑΒ, ΒΓ est quadratus; ostensum enim est [ad 1. 9.] si duo similes plani sese multiplicantes aliquem faciant, factum quadratum esse: inventi igitur sunt duo quadrati numeri, videlicet qui fit sub ΑΒ, ΒΓ & qui fit ex ΓΔ, qui quidem inter se compositi quadratum numerum faciunt, nempe eum qui fit ex ΒΔ. quod erat faciendum.

Πόρισμα.

Καὶ φανερὸν ὅτι εὕρηνται πάλιν δύο τετράγωνοι, ὅ, τε ἀπὸ τοῦ ΒΔ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὴν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι τετράγωνον, ὅταν οἱ ΑΒ, ΒΓ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ὦσιν. ὅταν δὲ μὴ ὦσιν ὅμοιοι ἐπίπεδοι, εὕρηνται δύο τετράγωνοι, ὅ, τε ἀπὸ τοῦ ΒΔ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, ὧν ἡ ὑπεροχή, ὁ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, οὐκ ἔστι τετράγωνος.

Corollarium.

Et manifestum est rursus inventos esse duos numeros quadratos, & qui fit ex ΒΔ & qui ex ΓΔ, ita ut ipsorum excessus, videlicet qui fit sub ΑΒ, ΒΓ, sit quadratus, quando ΑΒ, ΒΓ similes plani sunt. quando autem non sunt similes plani, inventi sunt duo quadrati, & qui fit ex ΒΔ & qui ex ΓΔ, quorum excessus, nempe qui sub ΑΒ, ΒΓ, non est quadratus.

ΛΗΜΜΑ β'.

Εὑρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμούς, ὥστε τὸν ἐξ αὐτῶν συγκείμενον μὴ εἶναι τετράγωνον.

Ἔστω γὰρ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὡς ἔφαμεν, τετράγωνος, καὶ ἄρτιος ὁ ΓΑ, καὶ τετμήσθω ὁ ΓΑ δίχα κατὰ τὸ Δ· φανερὸν δὴ ὅτι ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΔ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΔ τετραγώνῳ. ἀφῃρήσθω μονὰς ἡ ΔΕ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΒΔ τετραγώνου. λέγω οὖν ὅτι ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ οὐκ ἔσται τετράγωνος.

Εἰ γὰρ ἔσται τετράγωνος, ἤτοι ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΕ ἢ ἐλάσσων, οὐκέτι δὲ καὶ μείζων, ἵνα μήτε τμηθῇ ἡ μονάς, μήτε ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, ὅς ἐστιν ὁ ἀπὸ τοῦ ΒΔ, ἴσος ᾖ τῷ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ. ἔστω εἰ δυνατὸν πρότερον ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΕ, καὶ ἔστω διπλασίων ὁ ΗΑ τῆς ΔΕ μονάδος. ἐπεὶ οὖν ὅλος ὁ ΑΓ ὅλου τοῦ ΓΔ ἐστὶ διπλασίων, ὧν ὁ ΑΗ ἐστὶ διπλασίων τοῦ ΔΕ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΓΗ λοιποῦ τοῦ ΕΓ ἐστὶ διπλασίων. δίχα ἄρα τέτμηται ὁ ΗΓ τῷ Ε· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΗΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΕ τετραγώνῳ. ἀλλὰ καὶ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ ἴσος ὑπόκειται τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΕ τετραγώνῳ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΗΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ. καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ, συνάγεται ὁ ΑΒ ἴσος τῷ ΗΒ, ὅπερ ἄτ-

Α . . Η . . Θ . Δ . Ε . Ζ . . . Γ . . . . Β

LEMMA 2.

Invenire duos quadratos numeros, ita ut qui ex ipsis componitur non sit quadratus.

Sit enim qui sub ΑΒ, ΒΓ quadratus, ut dictum est [ad lem. præc.] & par numerus ΓΑ; seceturque ΓΑ bifariam in Δ: perspicuum est [per 6. 2.] quadratum factum ex ΑΒ, ΒΓ una cum quadrato ex ΓΔ æqualem esse ei qui fit ex ΒΔ quadrato. auferatur unitas ΔΕ; ergo quadratus ex ΑΒ, ΒΓ una cum quadrato ex ΓΕ minor est quadrato ex ΒΔ. dico igitur quadratum factum ex ΑΒ, ΒΓ una cum quadrato ex ΓΕ quadratum non esse.

Si enim est quadratus, vel æqualis est quadrato ex ΒΕ vel eo minor, non autem major, ut ne unitas secetur, neve qui ex ΑΒ, ΒΓ una cum quadrato ex ΓΔ, qui est æqualis quadrato ex ΒΔ, æqualis sit quadrato facto ex ΑΒ, ΒΓ una cum quadrato ex ΓΕ. sit primum, si fieri potest, qui ex ΑΒ, ΒΓ una cum quadrato ex ΓΕ æqualis quadrato ex ΒΕ; & sit ΗΑ duplus ipsius ΔΕ unitatis. quoniam igitur totus ΑΓ totius ΓΔ est duplus, quorum ΑΗ est duplus ΔΕ; erit & reliquus ΓΗ reliqui ΕΓ duplus. ergo ΗΓ in Ε bifariam secatur: ac propterea qui ex ΗΒ, ΒΓ una cum quadrato ex ΓΕ æqualis [per 6. 2.] ei qui fit ex ΒΕ quadrato. sed & qui ex ΑΒ, ΒΓ una cum quadrato ex ΓΕ æqualis ponitur quadrato ex ΒΕ: ergo qui ex ΗΒ, ΒΓ una cum quadrato ex ΓΕ est æqualis ei qui sub ΑΒ, ΒΓ una cum quadrato ex ΓΕ. & communi detracto quadrato ex ΓΕ, concludetur ΑΒ ipsi ΗΒ æqualis, quod est absurdum: non igitur qui ex AB, BΓ una cum quadrato ex ΓE æqualis est quadrato ex BE. dico neque quadrato ex BE minorem esse. si enim fieri potest, sit quadrato ex BZ æqualis, & ipsius ΔZ duplus ponatur ΘA. concludetur rursus ΘΓ duplus ΓZ, ita ut & ΘΓ in Z bifariam dividatur; ac propterea qui ex ΘB, BΓ una cum quadrato ex ΓZ [per 6. 2.] æqualis sit quadrato ex BZ. ponitur autem & qui ex AB, BΓ una cum quadrato ex ΓE æqualis quadrato ex ZB: ergo sequitur qui ex AB, BΓ una cum quadrato ex ΓE æqualem esse ei qui ex ΘB, BΓ una cum quadrato ex ΓZ, quod est absurdum: non igitur qui ex AB, BΓ una cum quadrato ex ΓE est æqualis minori quam sit quadratus ex BE. ostensum est autem neque ipsi quadrato ex BE, neque majori eo æqualem esse: ergo qui fit ex AB, BΓ una cum quadrato ex ΓE non est quadratus. & cum fieri possit, ut idem pluribus modis ostendatur, unus qui proxime dictus est nobis sufficiat, ne longam tractationem longius producamus.

A . . H . . Θ . . Δ . E . Z . . . Γ . . . . B

πον· οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν AB, BΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓE ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ BE. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων τοῦ ἀπὸ τοῦ BE. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω τῷ ἀπὸ τοῦ BZ ἴσος, καὶ τοῦ ΔZ διπλάσιος κείσθω ὁ ΘA. συναχθήσεται πάλιν διπλάσιος ὁ ΘΓ τοῦ ΓZ, ὥστε καὶ τὸν ΘΓ δίχα τετμῆσθαι κατὰ τὸ Z· καὶ διὰ τοῦτο τὸν ἐκ τῶν ΘB, BΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓZ ἴσον γίνεσθαι τῷ ἀπὸ τοῦ BZ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὁ ἐκ τῶν AB, BΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓE ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ ZB· συναχθήσεται ἄρα ἴσος ὁ ἐκ τῶν AB, BΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓE τῷ ἐκ τῶν ΘB, BΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓZ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν AB, BΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓE ἴσος ἐστὶ τῷ ἐλάττονι τοῦ ἀπὸ BE. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ αὐτῷ τῷ ἀπὸ τοῦ BE, οὐδὲ μείζονι αὐτοῦ· οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν AB, BΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓE τετράγωνός ἐστι. δυνατοῦ δὲ ὄντος καὶ κατὰ πλείονας τρόπους τὸ εἰρημένον ἐπιδεικνύναι, ἀρκείσθω ἡμῖν ὁ εἰρημένος, ἵνα μὴ μακροτέρας οὔσης τῆς πραγματείας ἐπιπλέον αὐτὴν μηκύνωμεν.

Prop. XXX. Probl.

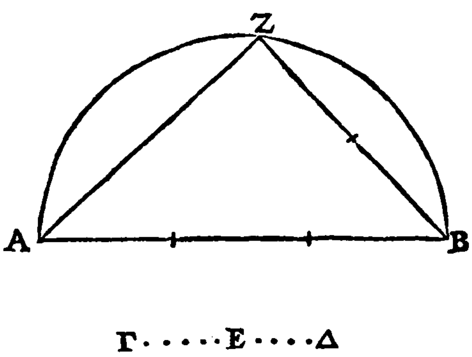
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ′.

Invenire duas rationales potentia solum commensurabiles, ita ut major plus possit quam minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

Εὑρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάττονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Exponatur enim quædam rationalis AB, & [per cor. lem. 1.] duo quadrati numeri ΓΔ, ΔE, ita ut ipsorum excessus ΓE non sit quadratus: describatur autem super rectam lineam AB semicirculus AZB, fiatque [per cor. 6. 10.] ut ΔΓ ad ΓE ita ex AB quadratum ad quadratum ex AZ; & ZB jungatur.

Quoniam igitur est ut quadratum ex BA ad quadratum ex AZ ita ΔΓ ad ΓE, habebit quadratum ex BA ad quadratum ex AZ rationem eam quam numerus ΔΓ ad ΓE numerum: ergo [per 6. 10.] quadratum ex BA quadrato ex AZ est commensurabile. sed [per 8. def. 10.] rationale est quadratum ex AB: ergo [per 9. def. 10.] & quadratum ex AZ rationale erit; ac propterea [per 6. def. 10.] recta linea AZ est rationalis. & quoniam [per constr.] ΔΓ ad ΓE rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque quadratum ex BA ad quadratum ex AZ rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum: incommensurabilis igitur est [per 9. 10.] recta linea BA ipsi AZ longitudine: ergo [per 3. def. 10.] AB, AZ rationales sunt potentia solum commensurabiles. quod cum sit ut ΔΓ ad ΓE ita



Γ . . . . E . . . . Δ

Ἐκκείσθω γάρ τις ῥητὴ ἡ AB, καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΓΔ, ΔE, ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὴν ΓE μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ AZB, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓE οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ZB.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς BA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ οὕτως ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓE, τὸ ἀπὸ τῆς BA ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς ὁ ΔΓ πρὸς ἀριθμὸν τὸν ΓE· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BA τῷ ἀπὸ τῆς AZ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AB· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AZ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ AZ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓE λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς BA ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ BA τῇ AZ μήκει· αἱ AB, AZ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓE οὕτως

οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΑ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ. ὁ δὲ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΖ μήκει. καὶ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΒ· ἡ ΑΒ ἄρα τῆς ΑΖ μεῖζον δύναται τῇ ΒΖ συμμέτρῳ ἑαυτῇ μήκει.

Εὕρηνται ἄρα δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΒΑ, ΑΖ, ὥστε τὴν μείζονα τὴν ΒΑ τῆς ἐλάσσονος τῆς ΑΖ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ συμμέτρῳ ἑαυτῇ μήκει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

quadratum ex BA ad quadratum ex ZA, erit per conversionem rationis [per 19. 5. & 47. 1.] ut ΓΔ ad ΔE ita quadratum ex AB ad quadratum ex BZ. sed ΓΔ ad ΔE rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ergo & quadratum ex AB ad quadratum ex BZ rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & ob id recta linea AB [per 9. 10.] ipsi BZ longitudine est commensurabilis. atque est [per 47. 1.] quadratum ex AB æquale quadratis ex AZ, ZB: ergo AB plus potest quam AZ quadrato rectæ lineæ BZ sibi commensurabilis longitudine.

Inventæ igitur sunt duæ rationales potentia solum commensurabiles BA, AZ, ita ut major BA plus possit quam minor AZ quadrato ipsius ZB sibi longitudine commensurabilis. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

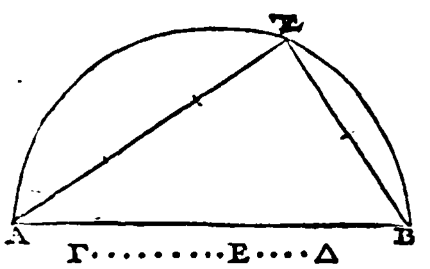
Εὑρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΑΒ, καὶ δύο τετράγωνοι οἱ ΓΕ, ΕΔ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΓΔ μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΒ, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ· ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου, ὅτι αἱ ΑΒ, ΑΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ. ὁ δὲ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΖ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΑΒ τῆς ΑΖ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ· αἱ ΑΒ, ΒΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΒ τῆς ΑΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. XXXI. PROBL.

Invenire duas rationales potentia solum commensurabiles, ita ut major plus possit quam minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

Exponatur rationalis AB, & [per 2. lem. 30. 10.] duo numeri quadrati ΓE, EΔ, ita ut ΓΔ qui ex ipsis componitur non sit quadratus; atque super rectam lineam AB semicirculus AZB describatur, & fiat [per cor. 6. 10.] ut ΔΓ ad ΓE ita quadratum ex AB ad quadratum ex AZ, & jungatur ZB: similiter quidem ostendemus, ut in antecedente, AB, AZ rationales esse potentia solum commensurabiles. & quoniam est ut ΔΓ ad ΓE ita quadratum ex BA ad id quod ex AZ quadratum; erit per conversionem rationis ut ΓΔ ad ΔE ita quadratum ex AB ad quadratum ex BZ. sed [per constr.] ΓΔ ad ΔE rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum: non igitur quadratum ex AB ad quadratum ex BZ rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ergo [per 9. 5.] AB ipsi BZ longitudine est incommensurabilis. & AB plus potest quam AZ quadrato rectæ lineæ BZ sibi incommensurabilis longitudine: quare AB, BZ rationales sunt potentia solum commensurabiles, & AB plus potest quam AZ quadrato rectæ lineæ ZB sibi longitudine incommensurabilis. quod erat faciendum.



*ΛΗΜΜΑ.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινί, ἔσται ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς εὐθεῖαν οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν δύο πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστωσαν δὴ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ ἐν λόγῳ τινί· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ

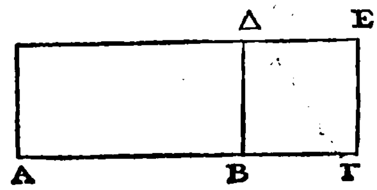
LEMMA.

Si sint duæ rectæ lineæ in ratione aliqua, erit ut recta linea ad rectam lineam ita rectangulum sub duabus rectis lineis contentum ad quadratum minoris.

Sint duæ rectæ lineæ AB, BΓ in ratione aliqua: dico ut AB ad BΓ ita esse re-

* Lemma hoc non agnoscunt pleraque exemplaria.

ctangulum sub A B, B Γ ad quadratum ex B Γ. describatur enim ex B Γ quadratum B Δ E Γ, & compleatur A Δ parallelogrammum. manifestum est [per 1. 6.] ut A B ad B Γ ita esse A Δ parallelogrammum ad parallelogrammum B E. atque est A Δ quidem quod sub A B, B Γ continetur, est enim B Γ ipsi B Δ æqualis, B E vero est quadratum ex B Γ: ut igitur A B ad B Γ ita rectangulum sub A B, B Γ ad quadratum ex B Γ. quod erat demonstrandum.

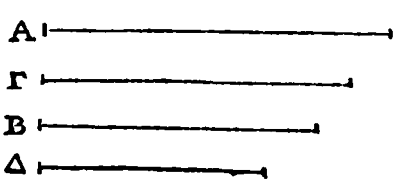


ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ. ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΒΔΕΓ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον. φανερὸν δὴ ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον. καί ἐστι τὸ μὲν ΑΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΒΓ τῇ ΒΔ, τὸ δὲ ΒΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXII. Probl.

Invenire duas medias potentia solum commensurabiles, quæ rationale contineant; ita ut major plus possit quam minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

Exponantur enim [per 30. 10.] duæ rationales potentia solum commensurabiles A, B, ita ut A major plus possit quam B minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. & sit rectangulo sub A, B æquale quadratum quod fit à recta linea Γ. medium autem est [per 22. 10.] quod sub A, B: ergo & quadratum ex Γ medium erit; ideoque ipsa Γ media. quadrato vero quod fit ex B æquale sit rectangulum sub Γ, Δ; rationale autem est quod ex B: ergo & rectangulum sub Γ, Δ est rationale. & quoniam est [per lem. præc.] ut A ad B ita rectangulum sub A, B ad quadratum ex B, sed [per constr.] rectangulo quidem sub A, B æquale est quadratum ex Γ, quadrato autem ex B æquale rectangulum sub Γ, Δ: erit ut A ad B ita quadratum ex Γ ad rectangulum sub Γ, Δ. sed [per lem. præc.] ut quadratum ex Γ ad rectangulum sub Γ, Δ ita recta linea Γ ad ipsam Δ: ut igitur A ad B ita Γ ad Δ. commensurabilis autem est A ipsi B potentia solum: ergo [per 10. 10.] & Γ ipsi Δ potentia solum est commensurabilis. atque est Γ media: media igitur [per 24. 10.] est & Δ. & quoniam est ut A ad B ita Γ ad Δ, & A plus potest quam B quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; & Γ plus poterit quam Δ [per 15. 10.] quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.



Inventæ igitur sunt duæ mediæ potentia solum commensurabiles Γ, Δ, quæ rationale continent, & Γ plus potest quam Δ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. quod erat faciendum.

Similiter autem ostendetur *inveniri posse duas medias potentia solum commensurabiles & continentes rationale, ita ut major plus possit quam minor* quadrato *rectæ lineæ* sibi incommensurabilis *longitudine*, quando A plus possit *quam* B quadrato rectæ lineæ sibi *longitudine* incommensurabilis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

Εὑρεῖν δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέτρους, ῥητὸν περιεχούσας· ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, ὥστε τὴν Α μείζονα οὖσαν τῆς ἐλάσσονος τῆς Β μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Γ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β· μέσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ Γ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ, ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Β· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Γ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ· ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ. σύμμετρος δὲ ἡ Α τῇ Β δυνάμει μόνον· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ Γ τῇ Δ δυνάμει μόνον. καὶ ἔστι μέση ἡ Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ Δ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἡ δὲ Α τῆς Β μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· καὶ ἡ Γ ἄρα τῆς Δ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Εὕρηνται ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Γ, Δ ῥητὸν περιέχουσαι, καὶ ἡ Γ τῆς Δ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῷ μήκει. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τὸ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ Α μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

* LEMMA.

Si fuerint tres rectæ lineæ in ratione aliqua, erit ut prima ad tertiam ita rectangulum conten-

* ΛΗΜΜΑ.

Ἐὰν ὦσι τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινί, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς

* Lemma hoc non agnoscunt Codd. MSS.

πρώτης

πρώτης καὶ μέσης πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς μέσης καὶ ἐλαχίστης.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινί, αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ.

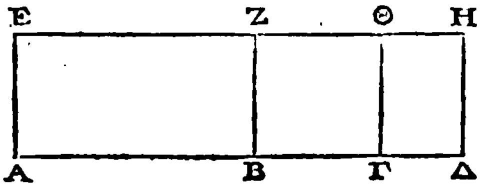
Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΕ, καὶ κείσθω τῇ ΒΓ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου τῇ ΑΔ εὐθείᾳ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΗ, διὰ δὲ τῶν Β, Γ, Δ σημείων τῇ ΑΕ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΖΒ, ΘΓ, ΗΔ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΒΘ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ΒΘ πρὸς τὸ ΓΗ· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΗ παραλληλόγραμμον. καί ἐστι τὸ μὲν ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ, τὸ δὲ ΓΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ, ἴση γὰρ ἡ ΒΓ τῇ ΓΘ.

Ἐὰν ἄρα τρεῖς ὦσιν εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινί, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης καὶ μέσης πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς μέσης καὶ τρίτης. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

tum sub prima & media ad id quod sub media & tertia continetur.

Sint tres rectæ lineæ in ratione aliqua ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ: dico ut ΑΒ ad ΓΔ ita esse rectangulum contentum sub ΑΒ, ΒΓ ad id quod sub ΒΓ, ΓΔ continetur.

Ducatur enim à puncto Α ipsi ΑΒ ad rectos angulos ΑΕ, ponaturque ΑΕ ipsi ΒΓ æqualis, & per Ε quidem ipsi ΑΔ parallela recta ducatur ΕΗ, per puncta vero Β,Γ,Δ ducantur ΖΒ, ΘΓ, ΗΔ parallelæ ipsi ΑΕ. quoniam igitur est [per 1. 6.] ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΑΖ parallelogrammum ad ΒΘ parallelogrammum, ut autem ΒΓ ad ΓΔ ita parallelogrammum ΒΘ ad ipsum ΓΗ: erit ex æquo ut ΑΒ ad ΓΔ ita ΑΖ parallelogrammum ad parallelogrammum ΓΗ. & est parallelogrammum quidem ΑΖ quod sub ΑΒ, ΒΓ continetur, namque ΑΕ est æqualis ΒΓ; parallelogrammum vero ΓΗ est quod continetur sub ΒΓ, ΓΔ, etenim ΒΓ est æqualis ΓΘ.



Si igitur fuerint tres rectæ lineæ in ratione aliqua, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum quod continetur sub prima & media ad rectangulum sub media & tertia contentum. quod erat demonstrandum.

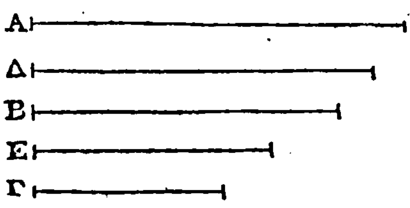
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Εὑρεῖν δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέτρους, μέσον περιεχούσας· ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάττονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Prop. XXXIII. Theor.

Invenire duas medias potentia solum commensurabiles, quæ medium contineant; ita ut major plus possit quam minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

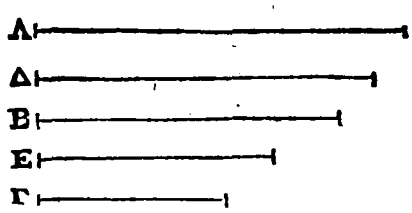
Ἐκκείσθωσαν τρεῖς ῥηταὶ αἱ Α, Β, Γ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ὥστε τὴν Α τῆς Γ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· καὶ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ, * μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β· μέσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Δ· καὶ ἡ Δ ἄρα μέση ἐστί. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Β, Γ οὕτως ἡ Α πρὸς τὴν Γ, ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Δ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε. σύμμετρος δὲ ἡ Α τῇ Γ δυνάμει μόνον· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ Δ τῇ Ε δυνάμει μόνον. μέση δὲ ἡ Δ· μέση ἄρα καὶ ἡ Ε. καὶ



Exponantur [per 30.10.] tres rationales Α, Β, Γ potentia solum commensurabiles, ita ut Α plus possit quam Γ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, & [per 14. 2.] fit rectangulo sub ipsis Α, Β æquale quadratum quod fit ex Δ, medium autem est [per 22.10.] rectangulum sub Α, Β: ergo & quadratum ex Δ medium erit; ideoque recta linea Δ media. rectangulo autem sub Β,Γ æquale sit [per 45.1.] rectangulum sub Δ, Ε. quoniam igitur est [per 1. 6.] ut rectangulum sub Α, Β ad rectangulum sub Β, Γ ita recta linea Α ad ipsam Γ, sed rectangulo quidem sub Α, Β æquale est quod fit ex Δ quadratum, rectangulo autem sub Β, Γ æquale rectangulum sub Δ, Ε; erit ut Α ad Γ ita quadratum ex Δ ad rectangulum sub Δ, Ε. sed [per lem. 32. 10] ut quadratum ex Δ ad rectangulum sub Δ, Ε ita Δ ad Ε: & igitur ut Α ad Γ ita Δ ad Ε. commensurabilis autem est [per constr.] Α ipsi Γ potentia solum: ergo [per 10. 10.] & Δ ipsi Ε potentia solum est commensurabilis. atque est Δ media: media igitur [per 24. 10.] est & Ε. itaque

* Illa μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β desiderantur in Codd. MSS.

quoniam est ut A ad Γ ita Δ ad E, & A plus potest quam Γ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; & Δ plus poterit quam E [per 15. 10.] quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. dico præterea rectangulum sub Δ, E medium esse. quoniam enim rectangulo sub B, Γ æquale est [per constr.] rectangulum sub Δ,E; medium autem est quod sub B,Γ: ergo & quod sub Δ,E medium erit.



ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε, ἡ δὲ Α τῆς Γ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· καὶ ἡ Δ ἄρα τῆς Ε μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. λέγω δὴ ὅτι καὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Γ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε, μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Β, Γ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε.

Inventæ igitur sunt duæ mediæ potentia solum commensurabiles Δ, E, quæ medium contineant; ita ut major plus possit quam minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. quod erat faciendum.

Εὕρηνται ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Δ, Ε, μέσον περιέχουσαι· ὥστε τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

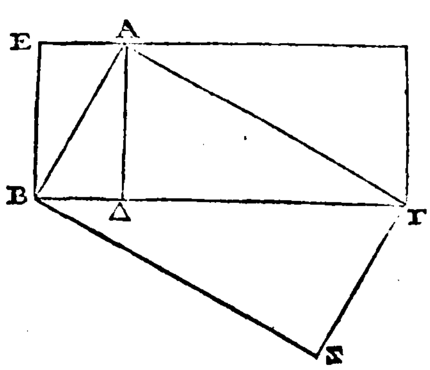
Rursus similiter ostenditur *quomodo inveniuntur duæ mediæ potentia solum commensurabiles & medium continentes, ita ut major plus possit quam minor* quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis *longitudine*; quando A scilicet plus possit quam Γ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

Ὁμοίως δὲ πάλιν δειχθήσεται καὶ τὸ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ Α τῆς Γ μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

LEMMA I.

Sit triangulum rectangulum ABΓ, rectum habens angulum BAΓ, & ducatur AΔ perpendicularis: dico rectangulum quidem sub ΓB, BΔ æquale esse quadrato quod fit ex BA, quod vero sub BΓ, ΓΔ æquale quadrato ex ΓA, & quod sub BΔ, ΔΓ æquale quadrato ΔA, & denique rectangulum sub BΓ, AΔ rectangulo sub BA, AΓ æquale esse. & primum quod rectangulum sub ΓB, BΔ æquale est quadrato ex BA.

Quoniam enim in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est AΔ, triangula ABΔ, AΔΓ [per 8. 6.] similia sunt & toti triangulo ABΓ & inter sese. & quoniam simile est ABΓ triangulum triangulo ABΔ, [per 1. def. 6.] erit ut ΓB ad BA ita BA ad BΔ: ergo [per 17.6.] rectangulum sub ΓB, BΔ quadrato ex AB est æquale. eadem ratione & rectangulum sub BΓ, ΓΔ æquale est quadrato ex AΓ.



& quoniam si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur, [per cor. 8. 6.] ducta inter segmenta basis media proportionalis est, erit ut BΔ ad ΔA ita AΔ ad ΔΓ; ac propterea rectangulum sub BΔ, ΔΓ est æquale quadrato ex AΔ. dico & rectangulum sub BΓ, AΔ ei quod sub BA, AΓ continetur æquale esse. quoniam enim, ut diximus, triangulum ABΓ triangulo ABΔ est simile, ut BΓ ad ΓA ita erit BA ad ΔA. si autem quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, [per 16. 6.] rectangulum sub extremis est æquale ei quod sub mediis: ergo rectangulum sub BΓ, AΔ rectangulo sub BA, AΓ æquale erit. dico præterea si describamus parallelogrammum re-

ΛΗΜΜΑ α'.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΑ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. καὶ πρῶτον ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΑ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΑΔ, τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ ἄρα τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. καὶ ἐπεὶ ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΑ. λέγω ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. ἐπεὶ γὰρ, ὡς ἔφαμεν, ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΑΒΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. καὶ ὅτι ἐὰν ἀναγράψωμεν τὸ ΕΓ ὀρθογώνιον

θογώνιον παραλληλόγραμμον, καὶ συμπληρώσωμεν τὸ ΑΖ, ἴσον ἔσται τὸ ΕΓ τῷ ΑΖ, ἑκάτερον γὰρ αὐτῶν διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· καί ἐστι τὸ μὲν ΕΓ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ, τὸ δὲ ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

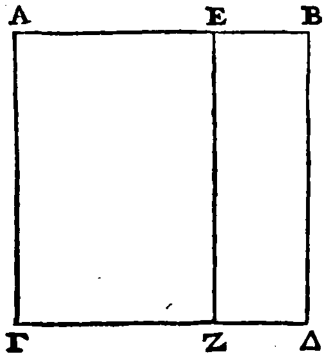
ctangulum ΕΓ, & ipsum ΑΖ compleamus, rectangulum ΕΓ ipsi ΑΖ æquale esse, utrumque enim ipsorum duplum est trianguli ΑΒΓ: atque est rectangulum quidem ΕΓ id quod sub ΒΓ, ΑΔ continetur, rectangulum vero ΑΖ id quod continetur sub ΒΑ, ΑΓ: rectangulum igitur sub ΒΓ, ΑΔ rectangulo sub ΒΑ, ΑΓ est æquale. quod erat demonstrandum.

*ΛΗΜΜΑ β'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, ἔσται ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς μείζονος πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς ἐλάττονος.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Ε· λέγω ὅτι ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΒΕ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΓΔΒ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΑΓ, ΔΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ. φανερὸν οὖν ὅτι ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΒ παραλληλόγραμμον. καί ἐστι τὸ μὲν ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ, ἴση γὰρ ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, τὸ δὲ ΖΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ, ἴση γὰρ ἡ ΔΒ τῇ ΑΒ· ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



* LEMMA 2.

Si recta linea in partes inæquales secetur, erit ut major pars ad minorem ita rectangulum sub tota & majori parte ad rectangulum sub tota & minori.

Recta enim linea ΑΒ secetur in partes inæquales ad Ε: dico ut ΑΕ ad ΕΒ ita esse rectangulum sub ΒΑ, ΑΕ ad id quod sub ΒΑ, ΒΕ continetur.

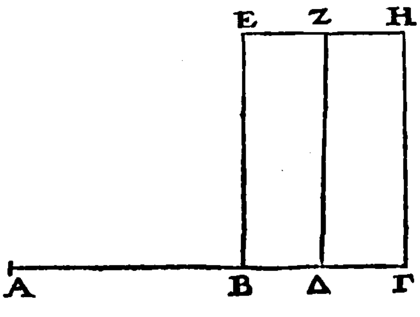
Describatur enim ex ΑΒ quadratum ΑΓΔΒ, & per Ε quidem alterutri ipsarum ΑΓ, ΔΒ parallela ducatur ΕΖ. perspicuum est [per 1. 6.] ut ΑΕ ad ΕΒ ita esse ΑΖ parallelogrammum ad parallelogrammum ΖΒ. atque est ΑΖ quidem parallelogrammum quod sub ΒΑ, ΑΕ continetur, etenim ΑΓ ipsi ΑΒ est æqualis; parallelogrammum vero ΖΒ est quod continetur sub ΑΒ, ΒΕ, æqualis enim est ΔΒ ipsi ΑΒ: ut igitur ΑΕ ad ΕΒ ita rectangulum sub ΒΑ, ΑΕ ad id quod sub ΑΒ, ΒΕ continetur. quode rat demonstrandum.

ΛΗΜΜΑ γ'.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τμηθῇ δὲ ἡ ἐλαχίστη αὐτῶν εἰς ἴσα· τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν διπλάσιον ἔσται τοῦ ὑπὸ τῆς μείζονος καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ, καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΒΕ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως τὸ ΒΖ πρὸς τὸ ΔΗ, συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως τὸ ΒΗ πρὸς τὸ ΔΗ. καί ἐστιν ἡ ΒΓ τῆς ΔΓ διπλασίων· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΗ τοῦ ΔΗ. καί ἐστι τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴση γάρ ἡ ΑΒ τῇ ΒΕ, τὸ δὲ ΔΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ, ἴση γὰρ τῇ μὲν ΒΔ ἡ ΔΓ, τῇ δὲ ΑΒ ἡ ΔΖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



LEMMA 3.

Si sint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem ipsarum in partes æquales secetur; rectangulum contentum sub duabus rectis lineis duplum erit ejus quod sub majori & dimidia minoris continetur.

Sint duæ rectæ lineæ inæquales ΑΒ, ΒΓ, quarum major ΑΒ; & secetur ΒΓ bifariam in puncto Δ: dico rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ duplum esse ejus quod sub ΑΒ, ΒΔ continetur.

Ducatur enim à puncto Β ipsi ΒΓ ad rectos angulos ΒΕ, ponaturque ΒΕ ipsi ΒΑ æqualis, & figura describatur. quoniam igitur [per 1. 6.] est ut ΔΒ ad ΔΓ ita parallelogrammum ΒΖ ad parallelogrammum ΔΗ; erit componendo ut ΒΓ ad ΔΓ ita parallelogrammum ΒΗ ad ipsum ΔΗ. est autem ΒΓ dupla ipsius ΔΓ: ergo & parallelogrammum ΒΗ parallelogrammi ΔΗ est duplum. atque est ΒΗ quidem, quod sub ΑΒ, ΒΓ continetur, etenim ΑΒ est æqualis ΒΕ; ΔΗ vero est quod continetur sub ΑΒ, ΒΔ, nam ΔΓ ipsi ΒΔ & ΔΖ ipsi ΑΒ est æqualis. quod erat demonstrandum.

* Lemmata duo sequentia desiderantur in nostris *Codd. MSS.* nec ab *Euclide* esse arbitramur.

PROP.

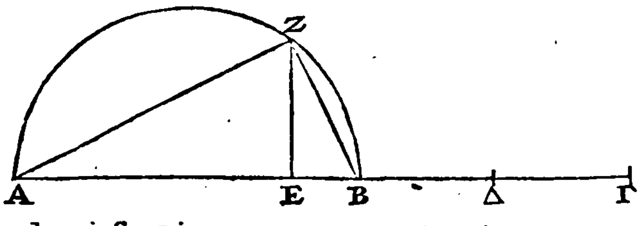
Prop. XXXIV. Probl.

Invenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum vero quod sub ipsis continetur medium.

Exponantur [per 31. 10.] duæ rationales potentia solum commensurabiles AB, BΓ, ita ut major AB plus possit quam minor BΓ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, & recta BΓ secta sit bifariam ad Δ, & quadrato quod fit ab alterutra ipsarum BΔ, ΔΓ æquale parallelogrammum ad rectam lineam AB applicetur [per 28. 6.] deficiens figura quadrata, & sit quod continetur sub AE, EB, & describatur super rectam lineam AB semicirculus AZB, ducaturque ipsi AB ad rectos angulos EZ, & AZ, ZB jungantur.

Quoniam igitur duæ rectæ lineæ AB, BΓ inæquales sunt, & AB plus potest quam BΓ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati quod fit à minori BΓ, hoc est quadrato dimidiæ ipsius, æquale parallelogrammum applicatum est ad AB, deficiens figura quadrata, quod quidem sub AE, EB continetur; erit [per 19. 10.] AE ipsi EB incommensurabilis. & quoniam est [per 1. 6.] ut AE ad EB ita rectangulum sub BA, AE ad rectangulum sub AB, BE, rectangulum autem sub AB, AE [per 1. lem. præc.] quadrato ex AZ est æquale, & rectangulum sub AB, BE æquale quadrato ex BZ: quadratum igitur ex AZ incommensurabile est quadrato ex ZB: ideoque rectæ lineæ AZ, ZB potentia sunt incommensurabiles. & quoniam AB rationalis est, & quadratum quod fit ex AB erit rationale: ergo & rationale compositum ex quadratis ipsarum AZ, ZB. Rursus, quoniam rectangulum sub AE, EB est æquale quadrato ex EZ, ponitur autem rectangulum sub AE, EB quadrato etiam ex BΔ æquale: ergo ZE est æqualis BΔ: ac propterea BΓ ipsius EZ est dupla: rectangulum igitur sub AB, BΓ [per 1. 6.] duplum est rectanguli sub AB, EZ. sed [per 22. 10.] rectangulum sub AB, BΓ est medium: ergo & medium est quod continetur sub AB, EZ. est autem [per 1. lem. præc.] quod sub AB, EZ continetur æquale contento sub AZ, ZB: contentum igitur sub AZ, ZB medium est. sed & ostensum est rationale esse quod componitur ex ipsarum quadratis.

Inventæ igitur sunt duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles AZ, ZB, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, rectangulum vero quod sub ipsis continetur medium. quod erat faciendum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον.

Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ὥστε τὴν μείζονα τὴν ΑΒ τῆς ἐλάσσονος τῆς ΒΓ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ τῷ ἀφ' ὁποτέρας τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΒ, καὶ ἤχθω τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΖΒ.

Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς ΒΓ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας αὐτῆς, ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβέβληται παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ποιεῖ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΖ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ· αἱ ΑΖ, ΖΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ῥητή ἐστι, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΒ ῥητόν ἐστι. καὶ ἐπεὶ πάλιν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΕΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ, ὑπόκειται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ ἴσον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΕ τῇ ΒΔ· διπλῆ ἄρα ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΕΖ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΕΖ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΕΖ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ῥητὸν τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων.

Εὕρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΖ, ΖΒ, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε′.

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

Ἐκκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπ' αὐτῶν, ὥστε τὴν ΑΒ τῆς ΒΓ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ ΑΔΒ ἡμικύκλιον, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΕ ἴσον παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΒ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ μήκει. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΒ.

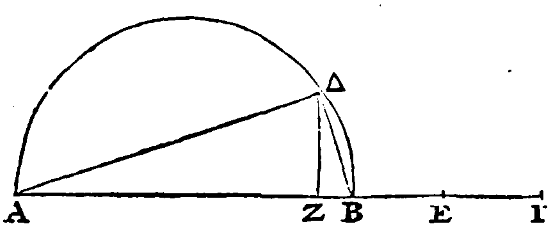
Ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΖ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΖ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· * αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, μέσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς ΔΖ· διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ· ὥστε καὶ σύμμετρον. ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὑπόκειται γὰρ οὕτως· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητόν ἐστιν.

Εὕρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΔ, ΔΒ, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. XXXV. PROBL.

Invenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, rectangulum vero quod sub ipsis continetur rationale.

Exponantur [per 32. 10.] duæ mediæ potentia solum commensurabiles A B, B Γ, quæ rationale contineant, ita ut AB plus possit quam B Γ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, & super ipsam A B describatur semicirculus AΔB, seceturq; BΓ bifariam in E, & [per 28. 6.] applicetur ad AB parallelogrammum æquale quadrato ipsius B E deficiens figura quadrata, & sit quod continetur sub A Z, Z B: incommensurabilis igitur est [per 19. 10.] A Z ipsi Z B longitudine. à puncto autem Z ipsi A B ad rectos angulos ducatur ZΔ, & AΔ, ΔB jungantur.



Itaque quoniam A Z est incommensurabilis Z B [per 1. 6. & 10. 10.] erit & rectangulum sub B A, A Z rectangulo sub A B, B Z incommensurabile. est autem [per 1. lem. 34. 10.] rectangulum quidem sub B A, A Z quadrato ipsius A Δ æquale, rectangulum vero sub A B, B Z æquale quadrato ipsius Δ B: incommensurabile igitur est quadratum ex A Δ ipsius Δ B quadrato; ac propterea rectæ lineæ AΔ, ΔB potentia sunt incommensurabiles. & quoniam est medium quadratum ipsius A B, erit & compositum ex quadratis ipsarum A Δ, Δ B medium. quod cum dupla sit B Γ ipsius ΔZ, & rectangulum sub AB, BΓ [per 1. 6.] rectanguli sub AB, ZΔ duplum erit: quare & commensurabile. rationale autem est rectangulum sub A B, B Γ, ita enim ponitur: ergo & rectangulum sub AB, ZΔ est rationale. sed rectangulo sub AB, ZΔ æquale est [per 3. lem. 34. 10.] rectangulum sub AΔ, ΔB: quare & ipsum sub A Δ, Δ B rectangulum rationale erit.

Inventæ igitur sunt duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles A Δ, Δ B, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, rectangulum vero quod sub ipsis continetur rationale. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ′.

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους, ποιούσας τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων.

Ἐκκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, μέσον περιέχουσαι, ὥστε τὴν ΑΒ τῇ ΒΓ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου

PROP. XXXVI. PROBL.

Invenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis medium, & rectangulum quod sub ipsis continetur medium, & adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis.

Exponantur [per 33. 10.] duæ mediæ potentia solum commensurabiles A B, B Γ, quæ medium contineant, ita ut A B plus possit quam B Γ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incom-

* Illud αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι abest *Codd. MSS.*

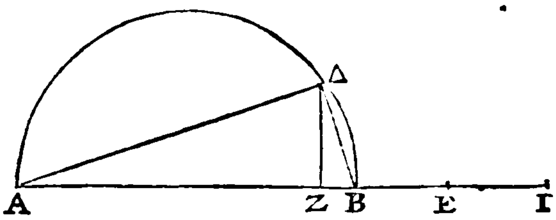
mensurabilis, & super A B semicirculus A Δ B describatur, & reliqua fiant ut in iis quæ superius dicta sunt.

Quoniam igitur A Z incommensurabilis est ipsi Z B longitudine, erit & A Δ ipsi Δ B potentia incommensurabilis. & quoniam medium est quod fit ex AB,& compositum ex quadratis ipsarum ΔA,ΔB est medium. quod cum rectangulum sub A Z, Z B æquale sit quadrato alterutrius ipsarum B E, Δ Z, erit Δ Z æqualis B E; ac propterea B Γ ipsius Z Δ dupla: rectangulum igitur sub A B, B Γ duplum est ejus quod sub A B, Z Δ continetur. medium autem est [ex hyp.] rectangulum sub A B, B Γ: ergo & quod continetur sub A B, Z Δ est medium: atque est [per 1. lem. 34. 10.] æquale contento sub A Δ, Δ B; quare & ipsum sub A Δ, Δ B rectangulum medium erit. & quoniam incommensurabilis est A B ipsi B Γ longitudine, commensurabilis autem Γ B ipsi B E; erit & A B ipsi B E longitudine incommensurabilis: ergo [per 1. 6. & 10. 10.] & quadratum ex A B incommensurabile est rectangulo sub A B, B E. sed quadrato quidem ex A B æqualia sunt quæ ex A Δ, Δ B sunt quadrata: rectangulo autem sub A B, B E æquale est rectangulum sub A B,Z Δ, hoc est rectangulum sub A Δ, ΔB: compositum igitur ex quadratis ipsarum AΔ, ΔB rectangulo sub A Δ,Δ B est incommensurabile.

Inventæ igitur sunt duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum ex ipsarum quadratis medium, & rectangulum quod sub ipsis continetur medium, & adhuc composito ex ipsarum quadratis incommensurabile. quod erat faciendum.

ἑαυτῇ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς A B ἡμικύκλιον τὸ A Δ B, καὶ τὰ λοιπὰ γεγονέτω ὁμοίως τοῖς ἐπάνω εἰρημένοις.

Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ A Z τῇ Z B μήκει, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ A Δ τῇ Δ B δυνάμει. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς A B, μέσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν A Δ, Δ B. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν A Z, Z B ἐστὶν ἴσον τῷ ἀφ᾽ ἑκατέρας τῶν B E, Δ Z, ἴση ἄρα ἡ Δ Z τῇ B E· διπλῆ ἄρα ἡ B Γ τῆς Z Δ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν A B, B Γ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν A B, Z Δ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν A B,B Γ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν A B, Z Δ· καί ἐστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν A Δ, Δ B μέσον, μέσον καὶ τὸ ὑπὸ τῶν A Δ, A B. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ A B τῇ B Γ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ Γ B τῇ B E· ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ A B τῇ B E μήκει· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς A B τῷ ὑπὸ τῶν A B, B E ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς A B ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν A Δ, Δ B, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν A B, B E ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν A B, Z Δ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν A Δ, Δ B· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ὑπὸ τῶν A Δ, Δ B τῷ ἀπὸ τῶν A Δ, Δ B.



Εὕρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Principium Senariorum per Compositionem.

Ἀρχὴ τῶν κατὰ σύνθεσιν ἑξάδων.

Prop. XXXVII. Theor.

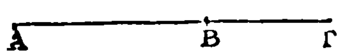
Si duæ rationales potentia solum commensurabiles componantur, tota irrationalis erit, vocetur autem ex binis nominibus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ΄.

Ἐὰν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσιν, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Componantur enim duæ rationales potentia solum commensurabiles A B, B Γ: dico A Γ irrationalem esse.

Quoniam enim incommensurabilis est A B ipsi B Γ longitudine,potentia enim solum commensurabiles sunt; & ut A B ad B Γ ita [per 1.6.] rectangulum sub AB,BΓ ad id quod fit ex BΓ quadratum: erit [per 10. 10.] rectangulum sub AB,BΓ quadrato ex BΓ incommensurabile. sed rectangulo quidem sub A B, B Γ [per 6.10.] commensurabile est id quod bis sub A B, B Γ continetur, quadrato autem ex B Γ commensurabilia sunt[per 16.10.]quadrata ex AB,BΓ: quod igitur bis sub AB,BΓ continetur incommensurabile est qua-



Συγκείσθωσαν γὰρ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, αἱ A B, B Γ· λέγω ὅτι ἡ A Γ ἄλογός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ A B τῇ B Γ μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ὡς δὲ ἡ A B πρὸς τὴν B Γ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν A B, B Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B Γ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν A B, B Γ τῷ ἀπὸ τῆς B Γ. ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν A B, B Γ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν A B, B Γ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς B Γ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν A B, B Γ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν A B, B Γ τοῖς ἀπὸ τῶν A B, B Γ ἀσύμμετρον μετρόν ἐστι, καὶ συνθέντι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὸν δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ὥστε καὶ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων.

dratis ex AB, BΓ, & componendo quod bis sub AB, BΓ continetur una cum quadratis ex AB, BΓ, hoc est [per 4. 2.] quadratum ex AΓ, incommensurabile est composito ex ipsarum AB, BΓ quadratis. rationale autem est compositum ex quadratis ipsarum AB, BΓ: ergo quadratum ex AΓ irrationale est; & ob id recta linea AΓ est irrationalis, vocetur autem ex binis nominibus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη'.

Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσι, ῥητὸν περιέχουσαι· ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ῥητὸν περιέχουσαι· λέγω ὅτι ὅλη ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν.

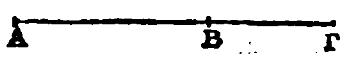
Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· συνθέντι ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ὑπόκειται δὲ ῥητὸν περιέχουσαι· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Prop. XXXVIII. Theor.

Si duæ mediæ potentia solum commensurabiles componantur, quæ rationale contineant; tota irrationalis erit, vocetur autem ex binis mediis prima.

Componantur enim duæ mediæ potentia solum commensurabiles AB, BΓ, quæ rationale contineant: dico totam AΓ irrationalem esse.

Quoniam enim incommensurabilis est AB ipsi BΓ longitudine, & quadrata ex AB, BΓ [per 13. 10.] incommensurabilia erunt rectangulo quod bis sub AB, BΓ continetur: ergo componendo, quadrata ex AB, BΓ una cum eo quod bis sub AB, BΓ continetur, quod [per 4. 2.] est ipsius AΓ quadratum, incommensurabile est rectangulo sub AB, BΓ. sed rectangulum rationale ponitur: ergo quadratum ex AΓ irrationale est: igitur & recta linea AΓ irrationalis, vocetur autem ex binis mediis prima.

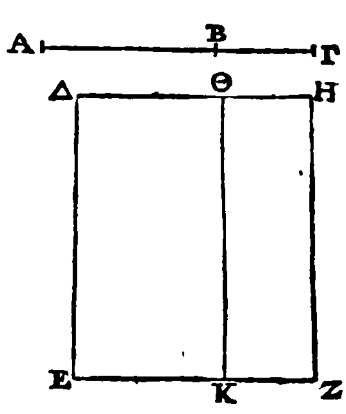


ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ'.

Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσι, μέσον περιέχουσαι· ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, μέσον περιέχουσαι· λέγω ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ ΑΓ.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, παραβεβλήσθω δὴ παρὰ τὴν ΔΕ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΕΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΘ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. καὶ ἐπεὶ μέση ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΒΓ· μέσα ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. μέσον δὲ ὑπόκειται καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἐστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΕΘ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΘΖ· μέσον ἄρα ἑκάτερον τῶν ΕΘ, ΘΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται·



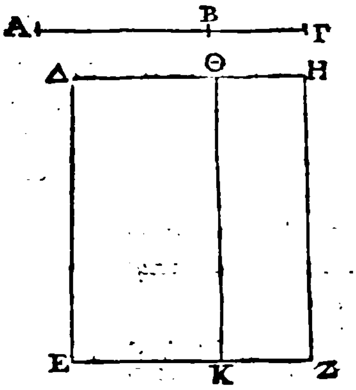
Prop. XXXIX. Theor.

Si duæ mediæ potentia solum commensurabiles componantur, quæ medium contineant; tota irrationalis erit, vocetur autem ex binis mediis secunda.

Componantur enim duæ mediæ potentia solum commensurabiles, AB, BΓ, quæ medium contineant: dico AΓ irrationalem esse.

Exponatur rationalis ΔE, & [per 45. 1.] quadrato ex AΓ æquale parallelogrammum rectangulum ΔZ ad ipsam ΔE applicetur, latitudinem faciens ΔH. itaque quoniam [per 4. 2.] quadratum ex AΓ æquale est quadratis ex AB, BΓ & rectangulo quod bis sub AB, BΓ continetur, applicetur ad ipsam ΔE quadratis ex AB, BΓ æquale parallelogrammum rectangulum EΘ: reliquum igitur ZΘ æquale est ei quod bis sub AB, BΓ continetur. & quoniam media est utraque ipsarum AB, BΓ, erunt & quadrata ex AB, BΓ media. medium autem ponitur & quod bis continetur sub AB, BΓ, atque est quadratis quidem ex AB, BΓ æquale parallelogrammum EΘ, rectangulo autem bis sub AB, BΓ contento æquale est ipsum ΘZ; medium igitur est utrumque ipsorum EΘ, ΘZ, & ad rationalem ΔE applicantur:

ergo [per 23. 10.] utraque recta linea ΔΘ, ΘΗ est rationalis, & ipsi ΔΕ longitudine incommensurabilis. & quoniam incommensurabilis est ΑΒ ipsi ΒΓ longitudine, atque est ut ΑΒ ad ΒΓ ita [per 1.6.] quadratum ex ΑΒ ad rectangulum sub ΑΒ,ΒΓ; erit [per 10.10.] quadrato ex ΑΒ rectangulum sub ΑΒ,ΒΓ incommensurabile. sed quadrato quidem ex ΑΒ commensurabile est [ex hyp.] compositum ex quadratis ipsarum ΑΒ,ΒΓ, rectangulo autem sub ΑΒ,ΒΓ est commensurabile quod bis sub ΑΒ,ΒΓ continetur: ergo per [14.10.] compositum ex quadratis ipsarum ΑΒ, ΒΓ incommensurabile erit ei quod bis continetur sub ΑΒ,ΒΓ. sed [per constr.] quadratis ex ΑΒ, ΒΓ æquale est parallelogrammum ΕΘ, & rectangulo quod bis sub ΑΒ,ΒΓ continetur æquale ΘΖ parallelogrammum: quare ΕΘ ipsi ΘΖ est incommensurabile; & ob id recta linea ΔΘ ipsi ΘΗ incommensurabilis longitudine. ostensæ autem sunt rationales: ergo ΔΘ, ΘΗ rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea [per 37.10.] ΔΗ est irrationalis. rationalis autem ΔΕ; & quod sub irrationali & rationali continetur rectangulum irrationale est: spatium igitur ΔΖ est irrationale; & ideo quæ ipsum potest est irrationalis. potest autem ipsum ΔΖ [per constr.] recta linea ΑΓ: ergo ΑΓ irrationalis erit, vocetur autem ex binis mediis secunda.



ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΔΘ, ΘΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΘ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ΘΖ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΘ τῷ ΘΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΘ τῇ ΘΗ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει. ἐδείχθησαν δὲ ῥηταί· αἱ ΔΘ, ΘΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΔΗ ἄλογός ἐστι. ῥητὴ δὲ ἡ ΔΕ, τὸ δὲ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστιν· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΖ χωρίον· ὥστε καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. δύναται δὲ τὸ ΔΖ ἡ ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

SCHOLIUM.

Vocavit illam ex binis mediis secundam, quoniam medium est, non rationale quod sub ipsis ΑΒ, ΒΓ continetur, medium enim rationali posterius est. At vero quod sub rationali & irrationali continetur irrationale esse, perspicue constat. nam si rationale sit, & ad rationalem applicetur, [per 21.10.] alterum ejus latus esset rationale. sed & irrationalis, quod est absurdum: illud igitur quod sub rationali & irrationali continetur est irrationale.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο μέσων δευτέραν, διὰ τὸ τὸ μέσον περιέχειν τὸ ὑπ' αὐτῶν, καὶ μὴ ῥητὸν, δευτερεύει δὲ τὸ μέσον τοῦ ῥητοῦ. Ὅτι δὲ τὸ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ἄλογόν ἐστι, δῆλον. εἰ γὰρ ἐστι ῥητὸν καὶ παραβέβληται παρὰ ῥητὴν, ἔσται ἂν καὶ ἡ ἑτέρα αὐτοῦ πλευρὰ ῥητή. ἀλλὰ καὶ ἄλογος, ὅπερ ἄτοπον· τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου ἄλογόν ἐστιν.

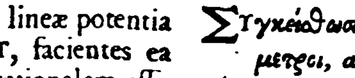
PROP. XL. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale; quod autem sub ipsis continetur medium: tota recta linea irrationalis erit, vocetur autem major.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον· ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μείζων.

Componantur enim duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles ΑΒ, ΒΓ, facientes ea quæ proposita sunt: dico ΑΓ irrationalem esse. Quoniam enim id quod sub ΑΒ,ΒΓ continetur medium est; & quod bis continetur sub ΑΒ, ΒΓ [per cor. 24. 10.] medium erit. compositum autem ex ipsarum ΑΒ, ΒΓ quadratis est rationale: ergo quod bis sub ΑΒ,ΒΓ



Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ ΑΒ, ΒΓ, ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ ΑΓ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἐστὶ, καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἐστί. τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ

τῷ

τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὸν δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ὥστε καὶ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μείζων.

continetur incommensurabile est composito ex quadratis ipsarum ΑΒ, ΒΓ: & ob id quadrata ex ΑΒ, ΒΓ una cum eo quod bis sub ΑΒ, ΒΓ continetur, quod [per 4. 2.] est quadratum ex ΑΓ, incommensurabile est [per 17.10.] quadratis ex ΑΒ, ΒΓ. rationale autem est [ex hyp.] compositum ex quadratis ΑΒ, ΒΓ: ergo quadratum ex ΑΓ irrationale erit; ac propterea recta linea ΑΓ est irrationalis, vocetur autem major.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

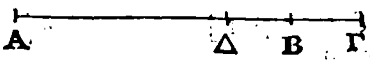
Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν μείζονα διὰ τὸ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητὰ μείζονα εἶναι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσου, καὶ δέον εἶναι ἀπὸ τῆς τῶν ῥητῶν οἰκειότητος τὴν ὀνομασίαν τίθεσθαι. ὅτι δὲ μείζονά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, οὕτω δεικτέον.

Φανερὸν μὲν οὖν ὅτι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΑΒ, ΒΓ. εἰ γὰρ ἦσαν ἴσαι, ἴσα ἂν ἦν καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἦν ἂν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· ἄνισοι ἄρα εἰσὶν αἱ ΑΒ, ΒΓ. ὑποκείσθω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ κείσθω τῇ ΒΓ ἴση ἡ ΒΔ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ καὶ τῷ ἀπὸ ΔΑ. ἴση δὲ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΑ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SCHOLIUM.

Vocavit autem ipsam majorem, propterea quod rationalia ex ΑΒ, ΒΓ majora sint medio, quod bis sub ΑΒ, ΒΓ continetur; oporteatque à rationalium proprietate nomen imponere. at vero quadrata quæ fiunt ex ΑΒ, ΒΓ majora esse eo quod bis sub ΑΒ, ΒΓ continetur, sic ostendemus.

Manifestum quidem est ΑΒ, ΒΓ inter se inæquales esse. si enim sint æquales, & quadrata quæ fiunt ex ΑΒ, ΒΓ æqualia erunt ei quod bis sub ΑΒ, ΒΓ continetur, & rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ rationale erit, quod non ponitur: inæquales igitur sunt ΑΒ, ΒΓ. supponatur major ΑΒ, & ipsi ΒΓ æqualis ponatur ΒΔ: ergo [per 7.2.] quadrata ex ΑΒ, ΒΔ æqualia sunt ei quod bis sub ΑΒ, ΒΔ continetur una cum quadrato ex ΔΑ. æqualis autem est ΔΒ ipsi ΒΓ: quadrata igitur ex ΑΒ, ΒΓ æqualia sunt ei quod bis sub ΑΒ, ΒΓ continetur una cum quadrato ex ΑΔ: ideoque quadrata ex ΑΒ, ΒΓ majora sunt quam id quod bis sub ΑΒ, ΒΓ continetur, quadrato ipsius ΔΑ. quod erat demonstrandum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ μα΄.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

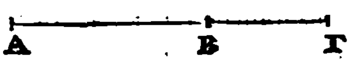
Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ ΑΓ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἐστί, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ὥστε καὶ συνθέντι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

PROP. XLI. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem sub ipsis continetur, rationale: tota recta linea irrationalis erit, vocetur autem rationale ac medium potens.

Componantur enim duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles ΑΒ, ΒΓ, facientes ea quæ proposita sunt: dico ΑΓ irrationalem esse.



Quoniam enim compositum ex ipsarum ΑΒ, ΒΓ quadratis medium est, quod autem bis sub ΑΒ, ΒΓ continetur rationale: erit compositum ex ipsarum ΑΒ, ΒΓ quadratis incommensurabile ei quod bis sub ΑΒ, ΒΓ continetur: quare componendo quadratum ex ΑΓ, est [per 17. 10.] incommensurabile ei quod bis continetur sub ΑΒ, ΒΓ. est autem rationale quod bis sub ΑΒ, ΒΓ continetur: quadratum igitur ex ΑΓ irrationale est: ideoque recta linea ΑΓ est irrationalis, vocetur autem rationale ac medium potens.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ῥητὸν δὲ καὶ μέσον δυναμένην αὐτὴν ἐκάλεσε, διὰ τὸ δύνασθαι δύο χωρία, τὸ μὲν

SCHOLIUM.

Rationale autem ac medium potentem ipsam appellat, quod possit bina spatia, unum quidem rationale, alterum vero medium: & quoniam rationale præcedit irrationale, ipsius rationalis prius mentionem fecit.

ῥητὸν, τὸ δὲ μέσον· καὶ διὰ τὴν τοῦ ῥητοῦ προϋπαρξιν, πρῶτον τὸ ῥητὸν ἐκάλεσε.

Prop. XLII. Theor.

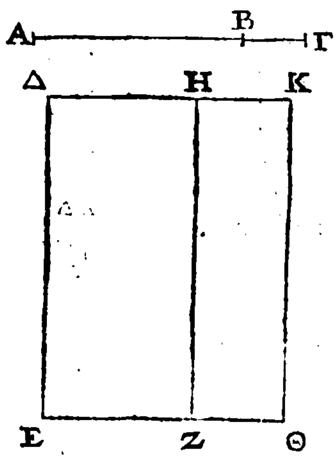
Si duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum ex ipsarum quadratis medium; & quod sub ipsis continetur medium, & adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis: tota recta linea irrationalis erit, vocetur autem bina media potens.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων· ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ δύο μέσα δυναμένη.

Componantur enim duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles ΑΒ, ΒΓ, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum ΑΒ, ΒΓ quadratis medium, & quod sub ipsis continetur medium, & adhuc incommensurabile composito ex ipsarum ΑΒ, ΒΓ quadratis: dico ΑΓ irrationalem esse.

Exponatur enim rationalis ΔΕ, & [per 45. 1.] ad ipsam applicetur parallelogrammum rectangulum ΔΖ æquale quadratis ipsarum ΑΒ, ΒΓ, & parallelogrammum ΗΘ æquale ei quod bis sub ΑΒ, ΒΓ continetur: totum igitur ΔΘ [per 4. 2.] quadrato ipsius ΑΓ est æquale. & quoniam medium est compositum ex quadratis ipsarum ΑΒ, ΒΓ, & æquale parallelogrammo ΔΖ; erit ipsum quoque ΔΖ medium, & ad rationalem ΔΕ applicatum est: rationalis igitur est ΔΗ [per 23. 10.] & ipsi ΔΕ longitudine incommensurabilis. ob eandem causam & ΗΚ est rationalis, & incommensurabilis longitudine ipsi ΖΗ, hoc est ipsi ΔΕ. & quoniam compositum ex quadratis ipsarum ΑΒ, ΒΓ incommensurabile est ei quod bis sub ΑΒ, ΒΓ continetur; erit & parallelogrammum ΔΖ ipsi ΘΗ incommensurabile: ergo & recta linea ΔΗ [per 1. 6. & 10. 10.] incommensurabilis est ipsi ΗΚ. & sunt rationales: quare ΔΗ, ΗΚ rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea [per 37. 10.] ΔΚ est irrationalis quæ ex binis nominibus appellatur. rationalis autem ΔΕ: ergo [per sch. 39. 10.] parallelogrammum ΔΘ irrationale est, & ipsum potens irrationalis. sed [per constr.] ipsum ΔΘ potest recta linea ΑΓ; quare ΑΓ irrationalis est, vocetur autem bina media potens.



Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων· λέγω ὅτι ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστι.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΔΕ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΔΖ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΗΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἴσον τῷ ΔΖ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΗΚ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ, τουτέστι τῇ ΔΕ, μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΔΖ τῷ ΘΗ· ὥστε καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΗΚ ἀσύμμετρός ἐστι. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΔΗ, ΗΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΚ ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων. ῥητὴ δὲ ἡ ΔΕ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΘ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. δύναται δὲ τὸ ΔΘ ἡ ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ δύο μέσα δυναμένη.

SCHOLIUM 1.

Vocavit ipsam bina media potentem, propterea quod potest bina spatia media, videlicet compositum ex ipsarum ΑΒ, ΒΓ quadratis, & illud quod bis sub ΑΒ, ΒΓ continetur.

ΣΧΟΛΙΟΝ α'.

Καλεῖ δὲ αὐτὴν δύο μέσα δυναμένην, διὰ τὸ δύνασθαι αὐτὴν δύο μέσα χωρία, τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ.

SCHOLIUM 2.

At vero dictas irrationales uno tantum modo dividi in rectas lineas ex quibus componuntur,

ΣΧΟΛΙΟΝ β'.

Ὅτι δὲ αἱ εἰρημέναι ἄλογοι μοναχῶς διαιροῦνται εἰς τὰς εὐθείας ἐξ ὧν σύγκεινται, ποιοῦσιν

τὰ

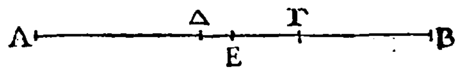
τὰ προκείμενα εἴδη, δείξομεν ἤδη, προεκθέμενοι λημμάτιον τοιῦτον.

& quæ propositas species constituunt, mox demonstrabimus, si prius lemma quoddam exposuerimus, quod hujusmodi est.

ΛΗΜΜΑ.

Ἐκκείσθω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἡ ὅλη εἰς ἄνισα καθ' ἑκάτερα τῶν Γ, Δ, ὑποκείσθω δὲ μείζων ἡ ΑΓ τῆς ΔΒ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΔΒ, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΔΓ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΔ λοιπῆς τῆς ΓΒ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ· ἐλάττων ἄρα ἡ ΔΕ τῆς ΕΓ· τὰ Γ, Δ ἄρα σημεῖα οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ. ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· ὥστε καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἔλαττόν ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μεῖζόν ἐστι τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, * ἅπερ συναμφότερα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



LEMMA.

Exponatur recta linea AB, & secetur tota in partes inæquales ad utrumque punctorum Γ, Δ; ponatur autem AΓ quam ΔB major: dico quadrata ipsarum AΓ, ΓB quadratis ipsarum AΔ, ΔB majora esse.

Secetur enim AB bifariam in E. & quoniam major est AΓ quam ΔB, communis auferatur ΔΓ: reliqua igitur AΔ major erit quam reliqua ΓB. est autem AE ipsi EB æqualis: ergo ΔE quam EΓ est minor, & puncta Γ, Δ non æqualiter distant à bipartita sectione. & quoniam [per 5.2.] rectangulum sub AΓ, ΓB una cum quadrato rectæ lineæ ΓE est æquale quadrato ipsius EB, sed & rectangulum sub AΔ, ΔB una cum quadrato rectæ lineæ ΔE est æquale ipsius EB quadrato; erit rectangulum sub AΓ, ΓB una cum quadrato ipsius EΓ æquale rectangulo sub AΔ, ΔB una cum quadrato ipsius ΔE. quorum quadratum ipsius ΔE est minus quadrato EΓ: & reliquum igitur rectangulum sub AΓ, ΓB minus est rectangulo sub AΔ, ΔB: quare & quod bis sub AΓ, ΓB continetur minus est eo quod bis continetur sub AΔ, ΔB: reliquum igitur, nempe compositum ex quadratis ipsarum AΓ, ΓB, majus est composito ex quadratis ipsarum AΔ, ΔB; * siquidem utraque tota æqualia sunt [per 4. 2.] quadrato rectæ AB. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ'.

Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

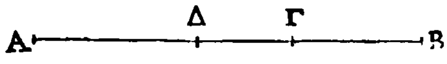
Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται εἰς δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, διῃρήσθω κατὰ τὸ Δ· ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ ῥητὰς εἶναι, δυνάμει μόνον συμμέτρους. Φανερὸν δὴ ὅτι ἡ ΑΒ τῇ ΔΒ οὐκ ἔστιν † ἡ αὐτή. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω· ἔσται δὴ καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΓΒ ἡ αὐτή· καὶ ἔσται ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, ‡ καὶ ἔσται ἡ ΑΒ κατὰ τὸ αὐτὸ τῇ κατὰ τὸ Δ διαιρέσει. διαιρεθεῖσα καὶ κατὰ τὸ Γ, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΔΒ ἐστὶν ἡ αὐτή. διὰ δὴ τοῦτο καὶ τὰ Γ, Δ σημεῖα οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας· ᾧ ἄρα διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, διὰ

Prop. XLIII. Theor.

Quæ ex binis nominibus ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

Sit ex binis nominibus AB divisa in nomina ad punctum Γ: ergo AΓ, ΓB rationales sunt potentia solum commensurabiles. dico AB ad aliud punctum non dividi in duas rationales potentia solum commensurabiles.

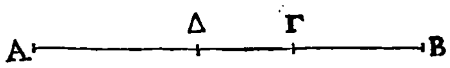


Si enim fieri potest, dividatur in Δ, ita ut AΔ, ΔB rationales sint potentia solum commensurabiles. itaque manifestum est AB non esse eandem quæ ΔB. si enim fieri potest, sit eadem: erit igitur & AΔ eadem quæ ΓB; atque erit ut AΓ ad ΓB ita BΔ ad ΔA, & AB in Δ similiter divisa erit atque in puncto Γ, quod non ponitur: ergo AΓ non est eadem quæ ΔB: & propterea puncta Γ, Δ non æqualiter distant à bipartita sectione: quo igitur differunt quadrata rectarum linearum AΓ, ΓB ab ipsarum AΔ, ΔB quadratis, hoc differt & quod bis sub AΔ, ΔB continetur ab eo quod bis continetur sub AΓ, ΓB; quo-

* Illa ἅπερ συναμφότερα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ desunt in *Codd. MSS.* † i. e. ἴση. ‡ In *MSS.* ἔσται ἡ ΑΒ κατὰ τὸ αὐτὸ τμῆμα τὸ Γ, διαιρέσει διαιρεθεῖσα κατὰ τὸ Δ.

niam

niam [per 4. 2.] & quadrata rectarum linearum ΑΓ, ΓΒ una cum eo quod bis continetur sub ΑΓ, ΓΒ & quadrata ipsarum ΑΔ, ΔΒ una cum eo quod bis sub ΑΔ, ΔΒ continetur æqualia sunt quadrato ipsius ΑΒ. sed quadrata ipsarum ΑΓ, ΓΒ à quadratis ipsarum ΑΔ, ΔΒ differunt rationali, etenim rationalia utraque sunt: ergo & quod bis sub ΑΔ, ΔΒ continetur à contento bis sub ΑΓ, ΓΒ differt rationali, cum ipsa media sint. atqui [per 27. 10.] medium non superat medium rationali: non igitur quæ ex binis nominibus ad aliud atque aliud punctum dividitur: quare ad unum duntaxat dividitur in nomina. quod erat demonstrandum.



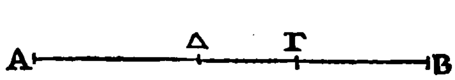
τὸ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσα εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ διαφέρει ῥητῷ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ διαφέρει ῥητῷ μέσα ὄντα. μέσον δὲ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ· οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἓν ἄρα μόνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XLIV. Theor.

Quæ ex binis mediis prima ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

SIT ex binis mediis prima ΑΒ divisa in puncto Γ, ita ut ΑΓ, ΓΒ mediæ sint potentia solum commensurabiles, quæ rationale contineant: dico ΑΒ in alio puncto non dividi.

Si enim fieri potest, dividatur etiam in Δ, ita ut ΑΔ, ΔΒ sint mediæ potentia solum commensurabiles quæ rationale contineant. quoniam igitur quo differt rectangulum contentum bis sub ΑΔ, ΔΒ ab eo quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur hoc differunt etiam quadrata rectarum linearum ΑΓ, ΓΒ ab ipsarum ΑΔ, ΔΒ quadratis, rationali autem differt contentum bis sub ΑΔ, ΔΒ ab eo quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur, utraque enim sunt rationalia; rationali igitur differunt quadrata ipsarum ΑΓ, ΓΒ à quadratis ipsarum ΑΔ, ΔΒ, existentia utraque media. illud autem [per 27. 10.] fieri non potest: non igitur quæ ex binis mediis prima in alio atque alio puncto dividitur in nomina: quare in uno duntaxat dividatur necesse est. quod erat demonstrandum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδʹ.

Ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

ΕΣτω δὴ ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, διῃρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας. ἐπεὶ οὖν ᾧ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τούτῳ διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ῥητῷ δὲ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· ῥητῷ ἄρα διαφέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσα ὄντα, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα· καθ' ἓν ἄρα μόνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XLV. Theor.

Quæ ex binis mediis secunda ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

SIT ex binis mediis secunda ΑΒ divisa in Γ, ita ut ΑΓ, ΓΒ mediæ sint potentia solum commensurabiles, quæ medium contineant: manifestum est punctum Γ non esse in bipartita sectione, quoniam non sunt longitudine commensurabiles. dico ipsam ΑΒ in alio puncto non dividi.

Si enim fieri potest, dividatur in Δ, ita ut ΑΓ non sit eadem quæ ΔΒ, sed ΑΓ major ex hyp. itaque constat quadrata ex ΑΓ, ΓΒ quadratis ex ΑΔ, ΔΒ majora esse, ut supra ostendimus [ad lem. 43. 10.] & ΑΔ, ΔΒ medias esse potentia solum commensurabiles, quæ medium contineant. exponatur rationalis ΕΖ, & quadrato quidem ex ΑΒ æquale parallelogrammum ΕΚ ad ipsam ΕΖ

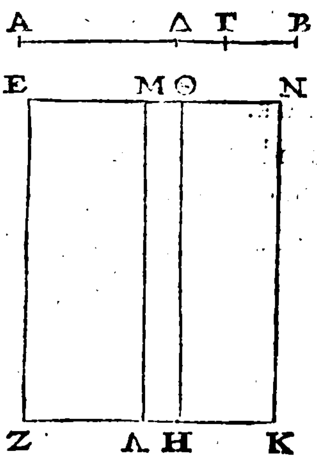
ΠΡΟΤΑΣΙΣ μεʹ.

Ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

ΕΣτω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας· φανερὸν δὴ ὅτι τὸ Γ οὐκ ἔστι κατὰ τὴν διχοτομίαν, ἐπειδήπερ οὐκ εἰσὶ μήκει σύμμετροι. λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, διῃρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥστε τὴν ΑΓ τῇ ΔΒ μὴ εἶναι τὴν αὐτὴν, ἀλλὰ μείζονα καθ' ὑπόθεσιν τὴν ΑΓ. δῆλον δὴ ὅτι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ὡς ἐπάνω ἐδείξαμεν, καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας. ἐκκείσθω ῥητὴ ΕΖ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω

βλήσθω τὸ ΕΚ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΕΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΚ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. πάλιν δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ἅπερ ἐλάσσονα ἐδείχθη τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΕΛ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΜΚ ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ μέσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· μέσον ἄρα τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΝ ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, δυνάμει γάρ εἰσι σύμμετροι αἱ ΑΓ, ΓΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἄρα ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΘΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΚ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΝ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ εἰσι ῥηταί· αἱ ΕΘ, ΘΝ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐὰν δὲ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσιν, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων· ἡ ΕΝ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσονται καὶ αἱ ΕΜ, ΜΝ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἔσται ἡ ΕΝ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο διῃρημένη, τό, τε Θ καὶ τὸ Μ, καὶ οὐκ ἔστιν ἡ ΕΘ τῇ ΜΝ ἡ αὐτή, ἐπειδήπερ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ· πολλῷ ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτέστι τὸ ΕΗ, μεῖζόν ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τουτέστι τοῦ ΜΚ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΜΝ μείζων ἐστίν· ἡ ἄρα ΕΘ τῇ ΜΝ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτή. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



applicetur, quadratis vero ex ΑΓ, ΓΒ æquale auferatur ΕΗ: reliquum igitur ΘΚ [per 4. 2.] æquale est ei quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur. rursus, quadratis ex ΑΔ, ΔΒ, quæ minora sunt quadratis ex ΑΓ, ΓΒ, ut ostensum est, æquale parallelogrammum auferatur ΕΛ: ergo reliquum ΜΚ est æquale ei quod bis continetur sub ΑΔ, ΔΒ. & quoniam media sunt quæ ex ΑΓ, ΓΒ quadrata, erit ΕΗ medium, & ad rationalem ΕΖ applicatum est: quare [per 23. 10.] ΕΘ rationalis est, & ipsi ΕΖ longitudine incommensurabilis. eadem ratione & ΘΝ est rationalis, & ipsi ΕΖ incommensurabilis longitudine. quod cum ΑΓ, ΓΒ mediæ sint potentia solum commensurabiles, erit ΑΓ ipsi ΓΒ incommensurabilis longitudine. ut autem ΑΓ ad ΓΒ ita [per 1. 6.] quadratum ex ΑΓ ad id quod sub ΑΓ, ΓΒ continetur: quadratum igitur ex ΑΓ incommensurabile est [per 10. 10.] ei quod continetur sub ΑΓ, ΓΒ. sed quadrato quidem ex ΑΓ commensurabilia sunt [per 16. 10.] quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, etenim ΑΓ, ΓΒ potentia sunt commensurabiles; ei vero quod continetur sub ΑΓ, ΓΒ commensurabile est illud quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur: ergo & quadrata ex ΑΓ, ΓΒ incommensurabilia sunt ei quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur. quadratis autem ex ΑΓ, ΓΒ æquale est parallelogrammum ΕΗ, & ei quod bis continetur sub ΑΓ, ΓΒ æquale est ΘΚ: ergo ΕΗ ipsi ΘΚ est incommensurabile; & ob id recta linea ΕΘ ipsi ΘΝ incommensurabilis longitudine, suntque rationales: ergo ΕΘ, ΘΝ rationales sunt potentia solum commensurabiles. si autem duæ rationales potentia solum commensurabiles componantur [per 37. 10.] tota irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur: quare ΕΝ ex binis nominibus est divisa in puncto Θ. eadem ratione & ΕΜ, ΜΝ ostendentur rationales potentia solum commensurabiles, & erit ΕΝ ex binis nominibus ad aliud atque aliud punctum divisa, videlicet ad Θ & ad Μ, & non est ΕΘ eadem quæ ΜΝ, quoniam [per lem. 43. 10.] quadrata ex ΑΓ, ΓΒ quadratis ex ΑΔ, ΔΒ sunt majora. quadrata autem ex ΑΔ, ΔΒ majora sunt eo quod bis sub ΑΔ, ΔΒ continetur: ergo quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, hoc est parallelogrammum ΕΗ, multo majus est eo quod bis continetur sub ΑΔ, ΔΒ, hoc est parallelogrammo ΜΚ: quare & ΕΘ quam ΜΝ est major: non igitur ΕΘ eadem est quæ ΜΝ. quod erat demonst.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μϛʹ.

Ἡ μείζων κατὰ τὸ αὐτὸ μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

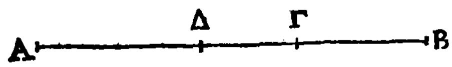
Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ᾽ ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Prop. XLVI. Theor.

Major ad idem duntaxat punctum dividitur in nomina.

SIT major ΑΒ divisa in Γ, ita ut ΑΓ, ΓΒ potentia incommensurabiles sint, facientes compositum quidem ex ipsarum ΑΓ, ΓΒ quadratis rationale, rectangulum vero quod sub ipsis continetur medium: dico ΑΒ in alio puncto non dividi.

Si enim fieri potest, dividatur in Δ, ita ut ΑΔ, ΔΒ potentia incommensurabiles sint, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale; quod autem sub ipsis continetur medium. & quoniam quo differunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ à quadratis ex ΑΔ, ΔΒ, hoc differt [per 4. 2.] & id quod bis continetur sub ΑΔ, ΔΒ ab eo quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur, sed quadrata ex ΑΓ, ΓΒ superant quadrata ex ΑΔ, ΔΒ rationali, etenim utraque rationalia sunt: ergo quod bis continetur sub ΑΔ, ΔΒ rationali superat id quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur, cum media sint, quod [per 27. 10.] est impossibile: non igitur major ad aliud atque aliud punctum dividitur: ergo ad idem duntaxat dividatur necesse est. quod erat demonstrandum.



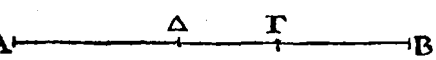
Εἰ γὰρ δυνατὸν, διῃρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπὸ αὐτῶν μέσον. καὶ ἐπεὶ ᾧ διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα ῥητῷ ὑπερέχει τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, μέσα ὄντα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ μείζων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· κατὰ τὸ αὐτὸ ἄρα διαιρεῖται μόνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XLVII. Theor.

Rationale ac medium potens ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

SIT rationale ac medium potens ΑΒ, divisa in Γ, ita ut ΑΓ, ΓΒ potentia incommensurabiles sint, faciantque compositum quidem ex ipsarum ΑΓ, ΓΒ quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur rationale: dico ΑΒ in alio puncto non dividi.

Si enim fieri potest, dividatur in Δ, ita ut etiam ΑΔ, ΔΒ potentia incommensurabiles sint, facientes compositum ex ipsarum quadratis medium; quod autem sub ipsis continetur rationale. quoniam igitur [per 4. 2.] quo differt rectangulum bis contentum sub ΑΔ, ΔΒ ab eo quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur, hoc differunt & quadrata ex ΑΓ, ΓΒ à quadratis ex ΑΔ, ΔΒ, rectangulum autem bis contentum sub ΑΔ, ΔΒ rationali superat id quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur: ergo & quadrata ex ΑΓ, ΓΒ superant quadrata ex ΑΔ, ΔΒ rationali, cum media sint, quod [per 27. 10.] est impossibile: non igitur rationale ac medium potens dividitur ad aliud atque aliud punctum: quare ad unum duntaxat punctum dividetur. quod erat demonstrandum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζʹ.

Ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

Ἔστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον, τὸ δ' ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητόν· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, διῃρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσον, τὸ δ' ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητόν. ἐπεὶ οὖν ᾧ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητῷ ὑπερέχουσι, μέσα ὄντα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἓν ἄρα σημεῖον διαιρεῖται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XLVIII. Theor.

Bina media potens ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

SIT bina media potens ΑΒ divisa in Γ, ita ut ΑΓ, ΓΒ potentia incommensurabiles sint, facientes compositum ex ipsarum ΑΓ, ΓΒ quadratis medium; & quod sub ipsis continetur medium, & adhuc compositum ex ipsarum quadratis incommensurabile composito ex binis rectangulis sub ipsis: dico ΑΒ ad aliud punctum non dividi, ita ut faciat quæ proposita sunt.

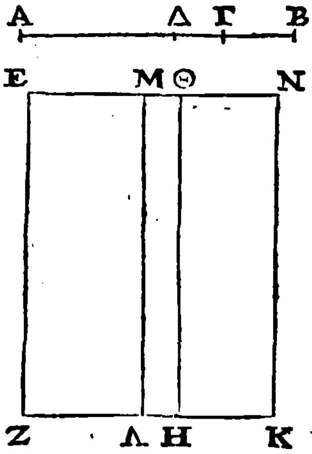
Si enim fieri potest, dividatur in Δ, ita ut rursus ΑΓ non sit eadem quæ ΑΒ, sed sit

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μηʹ.

Ἡ δύο μέσα δυναμένη καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

Ἔστω δύο μέσα δυναμένη ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ ὑπ' αὐτῶν· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται, ποιοῦσα τὰ προκείμενα.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, διῃρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥστε πάλιν δηλονότι τὴν ΑΓ τῇ ΔΒ μὴ εἶναι τὴν αὐτὴν, ἀλλὰ μείζονα καθ' ὑπόθεσιν τὴν ΑΓ, καὶ κείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΕΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΘΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΕΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. πάλιν δὴ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον τὸ ΕΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ λοιπῷ τῷ ΜΚ ἴσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ μέσον ὑπόκειται τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΕ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΝ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα τῷ ΘΚ ἀσύμμετρόν ἐστιν· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΝ ἀσύμμετρός ἐστιν. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΕΘ, ΘΝ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΕΝ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ κατὰ τὸ Μ διῄρηται, καὶ οὐκ ἔστιν ἡ ΕΘ τῇ ΜΝ ἡ αὐτή· ἡ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διῄρηται, ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ δύο μέσα δυναμένη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἓν ἄρα μόνον σημεῖον διαιρεῖται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ΑΓ ex hypothesi major; exponaturque rationalis ΕΖ, & ad ipsam ΕΖ quadratis quidem ex ΑΓ, ΓΒ æquale parallelogrammum ΕΗ applicetur; rectangulo autem bis contento sub ΑΓ, ΓΒ æquale applicetur ΘΚ: totum igitur ΕΚ [per 4. 2.] est æquale ei quod fit ex ΑΒ quadrato. rursus ad ΕΖ applicetur parallelogrammum ΕΛ æquale quadratis ex ΑΔ, ΔΒ: ergo [per 4. 2.] reliquum quod bis sub ΑΔ, ΔΒ continetur reliquo ΜΚ est æquale. & quoniam compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ medium ponitur, erit & parallelogrammum ΕΗ medium, & ad rationalem ΕΖ applicatum est: rationalis igitur est ΘΕ [per 23. 10.] & ipsi ΕΖ longitudine incommensurabilis. eadem ratione & ΘΝ est rationalis, ipsique ΕΖ incommensurabilis longitudine. & quoniam [ex hyp.] compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ incommensurabile est ei quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur, erit & parallelogrammum ΕΗ ipsi ΘΚ incommensurabile: ergo [per 10.10.] & recta linea est ΕΘ incommensurabilis rectæ ΘΝ. & sunt rationales: quare ΕΘ, ΘΝ rationales sunt potentia solum commensurabiles, & ob id ΕΝ ex binis nominibus est divisa in puncto Θ. similiter ostendemus ipsam in puncto quoque Μ dividi, & non est ΕΘ eadem quæ ΜΝ: ergo quæ ex binis nominibus ad aliud atque aliud punctum dividitur quod [per 43.10.] est absurdum: non igitur bina media potens dividitur ad aliud atque aliud punctum: quare ad unum duntaxat punctum dividetur. quod erat demonstrandum.

ΟΡΟΙ ΔΕΥΤΕΡΟΙ.

α'. Ὑποκειμένης ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα, ἧς τὸ μεῖζον ὄνομα τοῦ ἐλάττονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν μὲν τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ὅλη ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη.

β'. Ἐὰν δὲ τὸ ἔλασσον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα.

γ'. Ἐὰν δὲ μηδέτερον τῶν ὀνομάτων σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτη.

δ'. Πάλιν δὴ ἐὰν τὸ μεῖζον ὄνομα τοῦ ἐλάσσονος μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν μὲν τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτη.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

1. Exposita rationali, & quæ ex binis nominibus divisa in nomina, cujus majus nomen plus possit quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; si quidem majus nomen expositæ rationali commensurabile sit longitudine, tota dicatur ex binis nominibus prima.

2. Si vero minus nomen expositæ rationali longitudine sit commensurabile, dicatur ex binis nominibus secunda.

3. Quod si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ rationali, vocetur ex binis nominibus tertia.

4. Rursus si majus nomen plus possit quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis; si quidem majus nomen expositæ rationali sit commensurabile longitudine, dicatur ex binis nominibus quarta.

5. Si

5. Si vero minus, dicatur quinta.
6. Quod si neutrum, dicatur sexta.

έ. Ἐὰν δὲ τὸ ἔλαττον, πέμπτη.
ς'. Ἐὰν δὲ μηδέτερον, ἕκτη.

*SCHOLIUM.

Cum igitur sex rectæ lineæ ita sumantur, primas ordine facit tres, in quibus major plus potest quam minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; secundas vero tres reliquas, in quibus *major* plus potest *quam minor*, quadrato *rectæ lineæ* sibi incommensurabilis *longitudine*, propterea quod commensurabile antecedit incommensurabile: & adhuc primam quidem, in qua majus nomen commensurabile est expositæ rationali; secundam autem, in qua minus nomen, quoniam rursus majus antecedit minus, cum ipsum contineat; tertiam vero, in qua neutrum expositæ rationali est commensurabile; & in reliquis tribus eodem modo, primam dicti secundi ordinis quartam appellans, secundam quintam, & tertiam sextam.

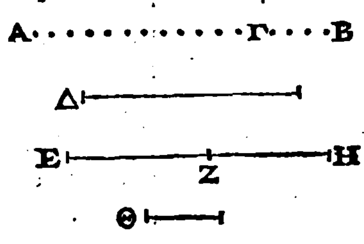
*ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐξ ὧν οὖν τῶν τ' οὕτω καταλαμβανομένων εὐθειῶν, τίθεισι πρώτας τῇ τάξει τρεῖς, ἐφ' ὧν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· δευτέρας δὲ τῇ τάξει τὰς λοιπὰς τρεῖς, ἐφ' ὧν δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, διὰ τὸ προηγεῖν τὸ σύμμετρον τοῦ ἀσυμμέτρου· καὶ ἔτι πρώτην μὲν, ἐφ' ἧς τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ· δευτέραν δὲ, ἐφ' ἧς τὸ ἔλαττον διὰ τὸ πάλιν προηγεῖν τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάττονος τῷ ἐμπεριέχειν τὸ ἔλασσον· τρίτην δὲ, ἐφ' ὧν μηδέτερον τῶν ὀνομάτων ἐστὶ σύμμετρον τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ· καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς τριῶν ὁμοίως, τὴν πρώτην τῆς εἰρημένης δευτέρας τάξεως τετάρτην καλῶν, καὶ τὴν δευτέραν πέμπτην, καὶ τὴν τρίτην ἕκτην.

PROP. XLIX. PROBL.

Invenire ex binis nominibus primam.

Exponantur [per coroll. lem. 1. 30.10.] duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut compositus ex ipsis, videlicet ΑΒ ad ipsum quidem ΒΓ rationem habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ad ipsum vero ΓΑ rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, & exponatur quædam rationalis Δ, & ipsi Δ longitudine commensurabilis sit ΕΖ: ergo [per 6.def.10.] ΕΖ est rationalis. fiat autem [per coroll. 6. 10.] ut ΒΑ numerus ad numerum ΑΓ ita ipsius ΕΖ quadratum ad quadratum ΖΗ. sed ΒΑ ad ΑΓ rationem habet quam numerus ad numerum: ergo & quadratum ipsius ΕΖ ad quadratum ΖΗ rationem habebit quam numerus ad numerum: commensurabile igitur est [per 6. 10.] quadratum ex ΕΖ quadrato ex ΖΗ. atque est ΕΖ rationalis: ergo & rationalis ΖΗ. & quoniam ΒΑ ad ΑΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque quadratum ex ΕΖ ad quadratum ex ΖΗ rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ergo [per 9. 10.] ΕΖ ipsi ΖΗ incommensurabilis est longitudine: & ob id ΕΖ, ΖΗ rationales sunt potentia solum commensurabiles: igitur [per 37. 10.] ex binis nominibus est ΕΗ. dico & primam esse.



Quoniam enim est ut ΒΑ numerus ad numerum ΑΓ ita quadratum ex ΕΖ ad id quod ex ΖΗ quadratum, major autem est ΒΑ quam ΑΓ: ergo & quadratum ex ΕΖ quadrato ex ΖΗ est majus. sint quadrato ex ΕΖ æqualia quadrata ex ΖΗ, Θ. quoniam igitur est ut ΒΑ ad ΑΓ ita quadratum ex ΕΖ ad quadratum ex ΖΗ, erit per conversionem rationis [per coroll. 19. 5.] ut ΑΒ ad ΒΓ ita quadratum ex ΕΖ ad quadratum ex Θ. sed ΑΒ ad ΒΓ rationem habet quam numerus

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μθ'.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, πρὸς δὲ τὸν ΓΑ λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΕΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ὁ δὲ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ὥστε σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ ΕΖ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΗ. λέγω ὅτι καὶ πρώτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος

* Scholium hoc reperitur in *Codice Saviliano*.

ἀριθμὸς

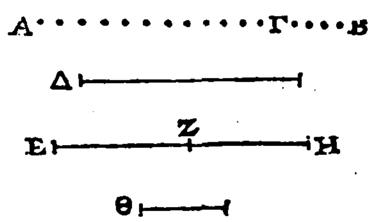
ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ἡ ΕΖ ἄρα τῆς ΖΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσι ῥηταὶ αἱ ΕΖ, ΖΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΕΖ τῇ Δ μήκει· ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

quadratus ad quadratum numerum : & quadratum igitur ex ΕΖ ad quadratum ex Θ rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum : quare [per 9. 10.] ΕΖ ipsi Θ longitudine est commensurabilis : ideoque ΕΖ plus potest quam ΖΗ quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. sunt autem ΕΖ, ΖΗ rationales, & ΕΖ ipsi Δ longitudine est commensurabilis : ergo [per 1. deff. secund. 10.] ΕΗ ex binis nominibus est prima. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ν'.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω ἡ ΖΗ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ. γεγονέτω δὴ καὶ ὡς ὁ ΓΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΕ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΕ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΓΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΖ τῇ ΖΕ μήκει· αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΗ. δεικτέον δὴ ὅτι καὶ δευτέρα.



Ἐπεὶ γὰρ ἀνάπαλίν ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἀλλ' ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ὥστε ἡ ΕΖ τῆς ΖΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσι ῥηταὶ αἱ ΕΖ, ΖΗ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ ΖΗ ἔλαττον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Δ μήκει· ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. L. Probl.

Invenire ex binis nominibus secundam.

Exponantur [per coroll. 1. lem. 30. 10.] duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut compositus ex ipsis sc. ΑΒ ad ipsum ΒΓ quidem rationem habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum, ad ΑΓ vero rationem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum, & exponatur rationalis Δ, & sit ΖΗ ipsi Δ longitudine commensurabilis : ergo ΖΗ rationalis est. fiatque [per coroll. 6. 10.] ut ΓΑ numerus ad numerum ΑΒ ita quadratum ex ΗΖ ad quadratum ex ΖΕ : commensurabile igitur est [per 6. 10.] quadratum ex ΗΖ quadrato ex ΖΕ : ergo [per 6. def. 10.] & ΖΕ est rationalis. & quoniam ΓΑ numerus ad ipsum ΑΒ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum, neque quadratum ex ΗΖ ad quadratum ex ΖΕ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum : incommensurabilis igitur est [per 9. 10.] ΗΖ ipsi ΖΕ longitudine : quare ΕΖ, ΖΗ rationales sunt potentia solum commensurabiles ; ac propterea [per 37. 10.] ex binis nominibus est ΕΗ. ostendendum est & secundam esse.

Quoniam enim convertendo est [per 16. 5.] ut ΒΑ numerus ad numerum ΑΓ ita quadratum ex ΕΖ ad quadratum ex ΖΗ, major autem est ΒΑ quam ΑΓ : ergo & quadratum ex ΕΖ quadrato ex ΖΗ est majus. sint quadrato ex ΕΖ æqualia quadrata ex ΖΗ, Θ : est igitur per conversionem rationis [per coroll. 19. 5.] ut ΑΒ ad ΒΓ ita quadratum ex ΕΖ ad quadratum ex Θ. sed ΑΒ ad ΒΓ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum : ergo & quadratum ex ΕΖ ad quadratum ex Θ rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum ; & ob id [per 9. 10.] ΕΖ ipsi Θ longitudine est commensurabilis : quare ΕΖ plus potest quam ΖΗ quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. suntque rationales ΕΖ, ΖΗ potentia solum commensurabiles, & ΖΗ minus nomen longitudine commensurabile est ipsi Δ expositæ rationali : ergo [per 2. deff. secund. 10.] ΕΗ est ex binis nominibus secunda. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ να'.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην.

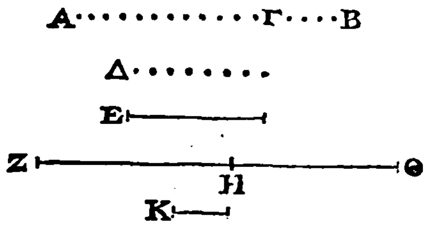
Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν

Prop. LI. Probl.

Invenire ex binis nominibus tertiam.

Exponantur duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut compositus ex ipsis videlicet ΑΒ ad ΒΓ quidem

quidem rationem habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ad ΑΓ vero rationem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum; exponatur etiam alius numerus Δ non quadratus, qui ad utrumque ipsorum ΒΑ, ΑΓ rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; denique exponatur rationalis quædam recta linea Ε; fiatque ut Δ ad ΑΒ ita quadratum ex Ε ad quadratum ex ΖΗ: quadratum igitur ex Ε quadrato ex ΖΗ est commensurabile. rationalis autem est Ε: ergo [per 6. 10.] & ΖΗ est rationalis. & quoniam Δ ad ΑΒ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque quadratum ex Ε ad quadratum ex ΖΗ rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum: incommensurabilis igitur est [per 9. 10.] Ε ipsi ΖΗ longitudine. rursus, fiat ut ΒΑ numerus ad numerum ΑΓ ita quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex ΗΘ: ergo quadratum ex ΖΗ quadrato ex ΗΘ est commensurabile. rationalis autem est ΖΗ: quare & ΗΘ est rationalis. & quoniam ΑΒ ad ΑΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex ΗΘ rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum: incommensurabilis igitur est [per 9.10.] ΖΗ ipsi ΗΘ longitudine: quare ΖΗ, ΗΘ rationales sunt potentia solum commensurabiles: ideoque [per 37. 10.] ΖΘ ex binis nominibus est. dico & tertiam esse.



Quoniam enim est ut Δ numerus ad ΑΒ ita quadratum ex Ε ad quadratum ex ΖΗ; ut autem ΒΑ ad ΑΓ ita quod fit ex ΖΗ quadratum ad quadratum ex ΗΘ: erit ex æquo [per 22.5.] ut Δ ad ΑΓ ita quadratum ex Ε ad quadratum ex ΗΘ. sed Δ ad ΑΓ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo [per 9. 10.] Ε ipsi ΗΘ incommensurabilis est longitudine. & quoniam ut ΒΑ ad ΑΓ ita quadratum ex ΖΗ ad id quod ex ΗΘ quadratum; erit quadratum ex ΖΗ majus quadrato ex ΗΘ. sint quadrato ex ΖΗ æqualia quadrata ex ΗΘ, Κ: per conversionem igitur rationis est [per coroll. 19. 5.] ut ΑΒ ad ΒΓ ita quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex Κ. sed ΑΒ ad ΒΓ rationem habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo & quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex Κ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: commensurabilis igitur est ΖΗ ipsi Κ longitudine; & ob id ΖΗ plus potest quam ΗΘ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. suntque ΖΗ, ΗΘ rationales potentia solum commensurabiles, & neutra ipsarum commensurabilis est ipsi Ε longitudine: ergo [per 3. deff. secund. 10.] ΖΘ est ex binis nominibus tertia. quod erat demonstrandum.

ΒΓ λόγον ἔχειν ὃν ἀριθμὸς τετράγωνος πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἐκκείσθω δέ τις καὶ ἄλλος μὴ τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Δ, καὶ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγον μὴ ἐχέτω ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ εὐθεῖα ἡ Ε, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ῥητὴ δὲ ἡ Ε· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΖΗ μήκει. γεγονέτω δὲ πάλιν ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ῥητὴ δὲ ἡ ΖΗ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΗΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει· αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστί. λέγω δὴ ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ὁ δὲ Δ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ Ε τῇ ΗΘ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΗΘ, Κ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει· ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ ΖΗ, ΗΘ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ Ε μήκει· ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νβ'.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην.

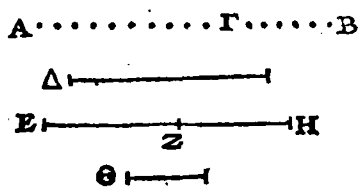
Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΕΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΖ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΕΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστί. λέγω δὴ ὅτι καὶ τετάρτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΑΒ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς τετράγωνος πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ἡ ΕΖ ἄρα τῆς ΖΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ ΕΖ, ΖΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΕΖ τῇ Δ σύμμετρός ἐστι μήκει· ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. LII. PROBL.

Invenire ex binis nominibus quartam.

Exponantur duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut ΑΒ ad utrumque ipsorum rationem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum; exponaturque rationalis Δ, & ipsi Δ commensurabilis sit ΕΖ longitudine: ergo ΕΖ est rationalis. fiat autem ut ΒΑ numerus ad numerum ΑΓ ita quadratum ex ΕΖ ad quadratum ex ΖΗ: commensurabile igitur est quadratum ex ΕΖ quadrato ex ΖΗ: ideoque recta linea ΖΗ est rationalis. & quoniam ΒΑ ad ΑΓ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum, erit [per 9. 10.] ΕΖ ipsi ΖΗ longitudine incommensurabilis: ergo ΕΖ, ΖΗ rationales sunt potentia solum commensurabiles; & ob id [per 37. 10.] ΕΗ ex binis nominibus est. dico eam & quartam esse.



Quoniam enim est ut ΒΑ ad ΑΓ ita quadratum ex ΕΖ ad quadratum ex ΖΗ; major autem est ΒΑ quam ΑΓ: erit quadratum ex ΕΖ quadrato ex ΖΗ majus. sint quadrato ex ΕΖ æqualia quadrata ex ΖΗ, Θ: per conversionem igitur rationis est ut ΑΒ numerus ad numerum ΒΓ ita quadratum ex ΕΖ ad id quod fit ex Θ quadratum. sed ΑΒ ad ΒΓ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo ΕΖ ipsi Θ longitudine est incommensurabilis: ac propterea ΕΖ plus potest quam ΖΗ quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. suntque ΕΖ, ΖΗ rationales potentia solum commensurabiles; & ΕΖ ipsi Δ commensurabilis est longitudine: ergo [per 4. deff. secund. 10.] ΕΗ ex binis nominibus est quarta. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νγ'.

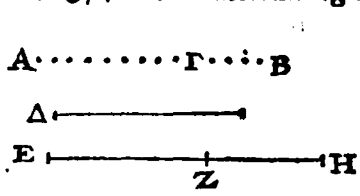
Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἡ ΖΗ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΕ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΗ. λέγω δὴ ὅτι καὶ πέμπτη.

PROP. LIII. PROBL.

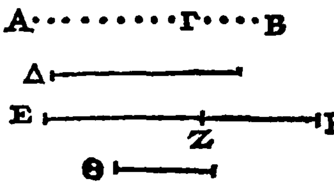
Invenire ex binis nominibus quintam.

Exponantur duo numeri ΑΓ, ΓΒ, ita ut ΑΒ ad utrumq; ipsorum rationem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum; exponaturque recta linea quædam rationalis Δ, & ipsi longitudine commensurabilis sit ΖΗ: ergo ΖΗ est rationalis. & fiat ut ΓΑ ad ΑΒ ita quadratum ex ΗΖ ad id quod fit ex ΖΕ quadratum: rationalis igitur est ΖΕ. & quoniam ΓΑ numerus ad ΑΒ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex ΗΖ ad quadratum ex ΖΕ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo [per 9. 10.] ΕΖ, ΖΗ rationales sunt potentia solum commensurabiles: & ob id [per 37. 10.] ΕΗ ex binis nominibus est. dico eam & quintam esse.



Quoniam

Quoniam enim est ut ΓA ad AB ita quadratum ex HZ ad quadratum ex ZE; erit convertendo [per 16. 5.] ut BA ad AΓ ita quadratum ex EZ ad quadratum ex ZH: ergo quadratum ex EZ quadrato ex ZH est majus. sint quadrato ex EZ æqualia quadrata ex ZH, Θ: per conversionem igitur rationis est ut AB numerus ad numerum BΓ ita quadratum ex EZ ad id quod ex Θ quadratum. sed AB ad BΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ergo neque quadratum ex EZ ad quadratum ex Θ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ac propterea EZ ipsi Θ longitudine est incommensurabilis: quare EZ plus potest quam ZH quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. suntque EZ, ZH rationales potentia solum commensurabiles, & ZH minus nomen expositæ rationali Δ commensurabilis est longitudine: ergo [per 5.deff.secund.10.] EH ex binis nominibus est quinta. quod erat faciend.

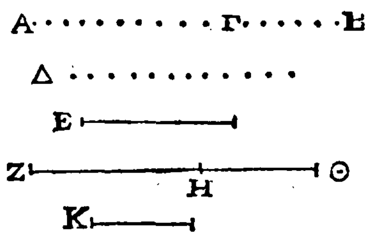


Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ὥστε ἡ ΕΖ τῆς ΖΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ ΕΖ, ΖΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ ΖΗ ἔλαττον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Δ μήκει· ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ τῶν δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. LIV. Probl.

Invenire ex binis nominibus sextam.

Exponantur duo numeri AΓ, ΓB, ita ut AB ad utrumque ipsorum rationem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum; sit etiam alius numerus Δ non quadratus, qui ad utrumque ipsorum BA, AΓ rationem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum, & exponatur rationalis quædam recta linea E, fiatque ut Δ ad AB ita quadratum ex E ad quadratum ex ZH: commensurabilis igitur est E ipsi ZH potentia. atque E est rationalis: quare [per 6. def. 10.] & rationalis est ZH. & quoniam Δ ad AB rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex E ad quadratum ex ZH rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo [per 9. 10.] E ipsi ZH longitudine est incommensurabilis. itaque rursus fiat ut BA ad AΓ sic quadratum ex ZH ad quadratum ex HΘ: quadratum igitur ex ZH quadrato ex HΘ est commensurabile. rationale autem est quadratum ex ZH: ergo & quadratum ex HΘ est rationale; & ob id recta linea HΘ est rationalis. & quoniam BA ad AΓ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex ZH ad quadratum ex HΘ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommensurabilis igitur est [per 9. 10.] ZH ipsi HΘ longitudine; & ideo ZH, HΘ rationales sunt potentia solum commensurabiles: quare [per 37. 10.] ex binis nominibus est ZΘ. ostendendum est & sextam esse.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ νδ′.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἔστω δὲ καὶ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ Δ μὴ τετράγωνος ὤν, μήδε πρὸς ἑκάτερον τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγον ἔχων ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ εὐθεῖα ἡ Ε, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΖΗ δυνάμει. καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ Ε· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ οὐκ ἔχει ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΖΗ μήκει. γεγονέτω δὴ πάλιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ῥητὴ ἄρα ἡ ΗΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει· αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΖΘ. δεικτέον δὴ ὅτι καὶ ἕκτη.

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ὁ δὲ Δ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΗΘ μήκει. ἐδείχθη δὲ καὶ τῇ ΖΗ ἀσύμμετρος· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ Ε μήκει. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΗΘ, Κ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὥστε οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει· ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰσιν αἱ ΖΗ, ΗΘ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Ε· ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Quoniam enim ut Δ ad AB ita est quadratum ex E ad quadratum ex ZH; est autem & ut BA ad AΓ ita quadratum ex ZH ad quadratum ex HΘ: ex æquo est ut Δ ad AΓ ita quadratum ex E ad quadratum ex HΘ. sed Δ ad AΓ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo neque quadratum ex E ad quadratum ex HΘ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommensurabilis igitur est E [per 9.10.] ipsi HΘ longitudine. ostensum autem est & ipsi ZH incommensurabilem esse: quare utraque ipsarum ZH, HΘ ipsi E longitudine est incommensurabilis. & quoniam est ut BA ad AΓ ita quadratum ex ZH ad quadratum ex HΘ, erit quadratum ex ZH quadrato ex HΘ majus. sint quadrato ex ZH æqualia quadrata ex HΘ, K: ergo per conversionem rationis ut AB ad BΓ ita est quadratum ex ZH ad quadratum ex K. sed AB ad BΓ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: neque igitur quadratum ex ZH ad quadratum ex K rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ac propterea ZH ipsi K longitudine est incommensurabilis: ergo ZH plus potest quam HΘ quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. suntque ZH, HΘ rationales potentia solum commensurabiles; & neutra ipsarum longitudine commensurabilis est expositæ rationali E: quare [per 6. deff. secund. 10.] ZΘ est ex binis nominibus sexta. quod erat faciendum.

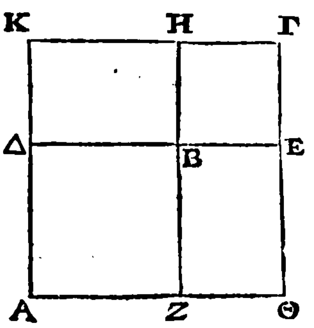
ΛΗΜΜΑ.

Ἔστω δύο τετράγωνα τὰ ΑΒ, ΒΓ, καὶ κείσθωσαν ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΔΒ τῇ ΒΕ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΒΗ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον· λέγω ὅτι τετράγωνόν ἐστι τὸ ΑΓ, καὶ ὅτι τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΗ, καὶ ἔτι τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΖΒ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΒΗ μήκει· ὅλη ἄρα ἡ ΔΕ ὅλῃ τῇ ΖΗ ἐστὶν ἴση. ἀλλ' ἡ μὲν ΔΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΚ, ΘΓ ἐστὶν ἴση· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΘ, ΚΓ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΚ, ΘΓ ἐστὶν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον. ἔστι δὲ καὶ ὀρθογώνιον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΗ, ὡς δὲ ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως τὸ ΔΗ πρὸς τὸ ΒΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΗ οὕτως τὸ ΔΗ πρὸς τὸ ΒΓ· τῶν ΑΒ, ΒΓ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΗ. λέγω δὴ ὅτι καὶ τῶν ΑΓ, ΒΓ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΓ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΚ οὕτως ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΗΓ, ἴση γάρ ἐστιν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΔ οὕτως ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΗ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΔ οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΒ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΓ πρὸς

LEMMA.

Sint duo quadrata AB, BΓ, & ponantur ita ut ΔB sit in directum ipsi BE: ergo [per 14. 1] & ZB ipsi BH in directum erit. & compleatur AΓ parallelogrammum: dico AΓ quadratum esse, & inter quadrata AB, BΓ rectangulum ΔH medium esse proportionale, itemque inter ipsa AΓ, ΓB medium proportionale esse ΔΓ.



Quoniam enim ΔB quidem est æqualis ZB, BE vero ipsi BH; erit tota ΔE toti ZH æqualis. sed ΔE æqualis est utrivis ipsarum AK, ΘΓ: ergo & utravis AΘ, KΓ utrivis AK, ΘΓ est æqualis; æquilaterum igitur est AΓ parallelogrammum. est autem & rectangulum: ergo quadratum est AΓ. & quoniam est ut ZB ad BH ita ΔB ad BE, ut autem ZB ad BH ita [per 1. 6.] AB ad ΔH, & ut ΔB ad BE ita ΔH ad BΓ: ut igitur AB ad ΔH ita est [per 11. 5.] ΔH ad BΓ: ideoque inter AB, BΓ medium proportionale est ΔH. dico præterea inter ipsa AΓ, ΓB medium proportionale esse ΔΓ. nam cum sit ut AΔ ad ΔK ita KH ad HΓ, est enim utraque utrique æqualis: & componendo erit ut AK ad KΔ ita KΓ ad ΓH. sed [per 1. 6.] ut AK ad KΔ ita AΓ ad ΓΔ, & ut KΓ ad ΓH ita ΔΓ ad ΓB: & igitur ut AΓ ad ΓΔ ita est ΔΓ ad ΓΒ: ac propterea inter ipsa ΑΓ, ΓΒ medium proportionale est ΓΔ. quod demonstrandum proponebatur.

τὸ ΓΔ ὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΒ· τ̃ ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐςι τὸ ΓΔ. ὅπερ πρὔκειτο δεῖξαι.

Prop. LV. Theor.

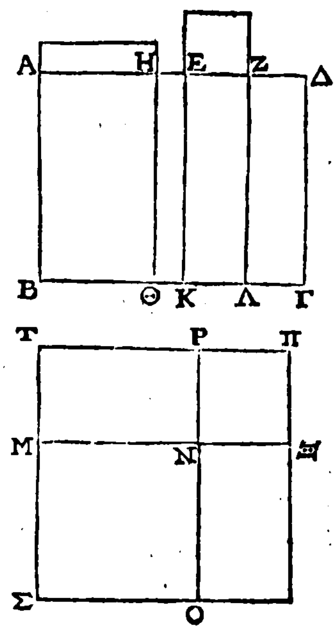
Si spatium contineatur sub rationali, & ex binis nominibus prima; recta linea spatium potens irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νε'.

Εὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

Spatium enim ΑΒΓΔ contineatur sub rationali ΑΒ, & ex binis nominibus prima ΑΔ: dico rectam lineam, quæ potest spatium ΑΓ irrationalem esse, quæ ex binis nominibus appellatur.

Quoniam enim ΑΔ est ex binis nominibus prima, dividatur in nomina ad punctum Ε; & sit ΑΕ majus nomen. manifestum est [per 1. deff. secund. 10.] ΑΕ, ΕΔ rationales esse potentia solum commensurabiles, & ΑΕ plus posse quam ΕΔ quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: & præterea ΑΕ expositæ rationali ΑΒ longitudine commensurabilem esse. secetur ΕΔ bifariam in Ζ. quoniam igitur ΑΕ plus potest quam ΕΔ quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine, si quartæ parti quadrati, quod fit à minori, hoc est quadrato ex ΕΖ, æquale parallelogrammum ad majorem ΑΕ applicetur deficiens figura quadrata, [per 18. 10.] in partes commensurabiles ipsam dividet. applicetur igitur [per 28. 6.] ad ΑΕ quadrato ipsius ΕΖ æquale rectangulum sub ΑΗ, ΗΕ: ergo ΑΗ ipsi ΗΕ longitudine est commensurabilis. deinde per puncta Η, Ε, Ζ alterutri ipsarum ΑΒ, ΔΓ parallelæ ducantur ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, & [per 14. 2.] parallelogrammo quidem ΑΘ æquale quadratum constituatur ΣΝ, parallelogrammo autem ΗΚ æquale quadratum ΝΠ, & ponantur ita ut ΜΝ sit in directum ipsi ΝΞ: ergo [per 14. 1.] ΡΝ ipsi ΝΟ in directum erit. & parallelogrammum ΣΠ compleatur: quadratum igitur [per lem. præc.] est ΣΠ. & quoniam rectangulum sub ΑΗ, ΗΕ est æquale quadrato ex ΕΖ, erit [per 17. 6.] ut ΑΗ ad ΕΖ ita ΕΖ ad ΕΗ: quare [per 1. 6.] ut ΑΘ ad ΕΛ ita est ΕΛ ad ΚΗ: ac propterea inter parallelogramma ΑΘ, ΗΚ medium proportionale est ΕΛ. sed [per constr.] parallelogrammo ΑΘ æquale est quadratum ΣΝ, & ΗΚ æquale quadrato ΝΠ: ergo inter quadrata ΣΝ, ΝΠ medium proportionale est ΕΛ. sed [per lem. præced.] inter eadem ΣΝ, ΝΠ medium proportionale est & ΜΡ: æquale igitur est ΜΡ ipsi ΕΛ. sed [per 43. 1.] ΜΡ est æquale ΟΞ, & [per 36. 1.] ΕΛ ipsi ΖΓ: ergo totum ΕΓ ipsis ΜΡ, ΟΞ est æquale. sunt autem & ΑΘ, ΗΚ æqualia ipsis ΣΝ, ΝΠ: totum igitur ΑΓ est æquale toti ΣΠ, hoc est quadrato ex ΜΞ; ideoque ipsa ΜΞ



Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστι, ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

Επεὶ γὰρ ἐστὶν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη ἡ ΑΔ, διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω τὸ μεῖζον ὄνομα τὸ ΑΕ. Φανερὸν δὴ ὅτι αἱ ΑΕ, ΕΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆ ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ, καὶ ἡ ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῆ ἐκκειμένη ῥητῆ τῆ ΑΒ μήκει. τετμήσθω δὲ ἡ ΕΔ δίχα κατὰ τὸ Ζ σημεῖον. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τῶν ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος, τουτέστι τῶν ἀπὸ τῆς ΕΖ, ἴσον παρὰ τὴν μείζονα τὴν ΑΕ παραβληθῆ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. παραβεβλήσθω οὖν παρὰ τὴν ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΕ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῆ ΕΗ μήκει. καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Η, Ε, Ζ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΔΓ παράλληλοι αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ· καὶ τῷ μὲν ΑΘ παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον συνεστάτω τὸ ΣΝ, τῷ δὲ ΗΚ ἴσον τὸ ΝΠ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΜΝ τῆ ΝΞ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΡΝ τῆ ΝΟ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΣΠ παραλληλόγραμμον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΣΠ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΕΗ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΘ πρὸς τὸ ΕΛ οὕτως τὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΚΗ· τῶν ΑΘ, ΗΚ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΛ. ἀλλὰ τῷ μὲν ΑΘ ἴσον ἐστὶ τὸ ΣΝ, τὸ δὲ ΗΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΝΠ· τῶν ΣΝ, ΝΠ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΛ. ἔστι δὲ τῶν αὐτῶν τῶν ΣΝ, ΝΠ μέσον ἀνάλογον καὶ τὸ ΜΡ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΜΡ τῷ ΕΛ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΜΡ τῷ ΟΞ ἴσον ἐστί, τὸ δὲ ΕΛ τῷ ΖΓ· ὅλον ἄρα τὸ ΕΓ τοῖς ΜΡ, ΟΞ ἴσον ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ τὰ ΑΘ, ΗΚ τοῖς ΣΝ, ΝΠ ἴσα· ὅλον ἄρα τὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ ΣΠ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΜΞ τετραγώνῳ· τὸ ΑΓ

ἄρα

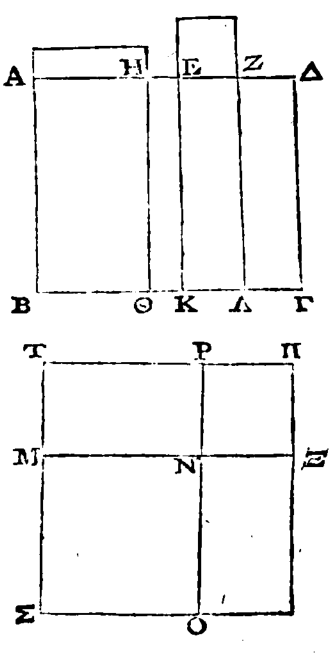
ἄρα δύναται ἡ ΜΞ· λέγω ὅτι ἡ ΜΞ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΗ, ΗΕ. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ σύμμετρος μήκει· καὶ αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα τῇ ΑΒ σύμμετροί εἰσι. καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ ΑΒ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΗ, ΗΕ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΘ, ΗΚ, καί ἐστι σύμμετρον τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἴσον ἐστί, τὸ δὲ ΗΚ τῷ ΝΠ· καὶ τὰ ΣΝ, ΝΠ ἄρα, τουτέστι τὰ ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ, ῥητά ἐστι καὶ σύμμετρα. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΑΗ ἐστὶ σύμμετρος, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρος· ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΗ τῇ ΕΖ μήκει· ὥστε καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρον. ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΕΛ τῷ ΜΡ· καὶ τὸ ΣΝ ἄρα τῷ ΜΡ ἀσύμμετρός ἐστιν. ἀλλ' ὡς τὸ ΣΝ πρὸς τὸ ΜΡ οὕτως ἡ ΟΝ πρὸς ΝΡ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΝ τῇ ΝΡ. ἴση δὴ ἡ μὲν ΟΝ τῇ ΜΝ, ἡ δὲ ΝΡ τῇ ΝΞ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ. καί ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ σύμμετρον τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ, καὶ ῥητὸν ἑκάτερον· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΜΞ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστί, καὶ δύναται τὸ ΑΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νϛʹ.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ΑΒΓΔ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα ἐστὶν ἡ ΑΔ, διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μὲν μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τὸ ἔλαττον ὄνομα ἡ ΕΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΒ μήκει. τετμήσθω ἡ ΕΔ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΕ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΕ· σύμμετρος ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει. καὶ διὰ τῶν Η, Ε, Ζ παράλληλοι ἤχθωσαν ταῖς ΑΒ, ΔΓ αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, καὶ τῷ μὲν ΑΘ παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον συνεστάτω τὸ ΣΝ, τῷ δὲ



potest parallelogrammum ΑΓ: dico ΜΞ ex binis nominibus esse. quoniam enim ΑΗ commensurabilis est ipsi ΗΕ, erit [per 16. 10.] ΑΕ utrique ipsarum ΑΗ, ΗΕ commensurabilis. ponitur autem & ΑΕ commensurabilis ipsi ΑΒ longitudine: ergo [per 12. 10.] & ΑΗ, ΗΕ ipsi ΑΒ commensurabiles sunt. atque est ΑΒ rationalis: rationalis igitur est & utraque ipsarum ΑΗ, ΗΕ; & ob id [per 20. 10.] rationale utrumque ipsorum ΑΘ, ΗΚ, & ΑΘ ipsi ΗΚ [per 10 10.] est commensurabile. sed ΑΘ est æquale ipsi ΣΝ, & ΗΚ ipsi ΝΠ: ergo & quadrata ΣΝ, ΝΠ, videlicet quæ fiunt ex ΜΝ, ΝΞ, rationalia sunt & commensurabilia. & quoniam [per 37. 10.] incommensurabilis est ΑΕ ipsi ΕΔ longitudine, & ΑΕ quidem est commensurabilis ipsi ΑΗ & ΔΕ commensurabilis ipsi ΕΖ; erit & ΑΗ ipsi ΕΖ longitudine incommensurabilis: ergo & ΑΘ est incommensurabile ipsi ΕΛ. sed ΑΘ est æquale ΣΝ, & ΕΛ ipsi ΜΡ: quare ΣΝ est incommensurabile ipsi ΜΡ. ut autem ΣΝ ad ΜΡ ita ΟΝ ad ΝΡ: incommensurabilis igitur est [per 10. 10.] ΟΝ ipsi ΝΡ. est autem ΟΝ æqualis ΜΝ, & ΝΡ ipsi ΝΞ: ergo ΜΝ ipsi ΝΞ est incommensurabilis. atque est quadratum ex ΜΝ commensurabile quadrato ex ΝΞ, & utrumque rationale: quare ΜΝ, ΝΞ rationales sunt potentia solum commensurabiles: ideoque [per 37. 10.] ΜΞ ex binis nominibus est, & potest parallelogrammum ΑΓ. quod erat demonstrandum.

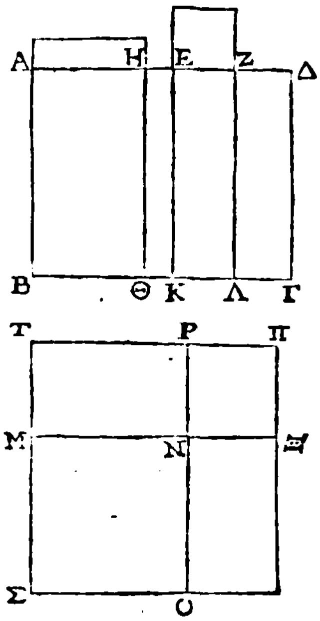
Prop. LVI. Probl.

Si spatium contineatur sub rationali, & ex binis nominibus secunda; recta linea spatium potens irrationalis est, quæ ex binis mediis prima appellatur.

Spatium enim ΑΒΓΔ contineatur sub rationali ΑΒ, & ex binis nominibus secunda ΑΔ: dico rectam lineam, quæ spatium ΑΓ potest, ex binis mediis primam esse.

Quoniam enim ΑΔ est ex binis nominibus secunda, dividatur in nomina ad punctum Ε, ita ut ΑΕ sit majus nomen: ergo [per 2. def. secund. 10.] ΑΕ, ΕΔ rationales sunt potentia solum commensurabiles, & ΑΕ plus potest quam ΕΔ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, & minus nomen ΕΔ commensurabile est ipsi ΑΒ longitudine. secetur ΕΔ bifariam in Ζ, & quadrato ipsius ΕΖ æquale parallelogrammum ad rectam lineam ΑΕ applicetur deficiens figura quadrata, rectangulum nempe sub ΑΗ, ΗΕ: commensurabilis igitur est [per 18. 10.] ΑΗ ipsi ΗΕ longitudine. & per puncta Η, Ε, Ζ ipsis ΑΒ, ΔΓ parallelæ ducantur ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, parallelogrammo autem ΑΘ æquale quadratum ΣΝ constituatur, & parallelogrammo

logrammo HK æquale quadratum NΠ, & ponatur ita ut MN sit in directum ipsi NΞ: ergo & PN ipsi NO in directum erit. & compleatur ΣΠ quadratum: manifestum igitur est ex iis quæ demonstrata sunt [in antec.] parallelogrammum MP medium esse proportionale inter quadrata ΣN, NΠ, & parallelogrammo EΛ æquale; & præterea rectam lineam MΞ posse spatium AΓ: ostendendum igitur est ipsam MΞ ex binis mediis primam esse. quoniam enim [per 37. 10.] incommensurabilis est AE ipsi EΔ longitudine, commensurabilis autem EΔ ipsi AB; erit [per 14. 10.] AE ipsi AB longitudine incommensurabilis. & quoniam AH commensurabilis est longitudine ipsi HE, erit [per 16. 10.] AE utrique ipsarum AH, HE longitudine commensurabilis. atque est AE rationalis: rationalis igitur & utraque AH, HE. quod cum AE sit incommensurabilis quidem ipsi AB longitudine, commensurabilis autem AE utrique ipsarum AH, HE; erunt AH, HE ipsi AB longitudine incommensurabiles: quare BA, AH, HE rationales sunt potentia solum commensurabiles: medium igitur est [per 22. 10.] utrumque parallelogrammorum AΘ, HK: & ob id utrumque quadratorum ΣN, NΠ est medium: ergo rectæ lineæ MN, NΞ mediæ sunt. rursus, quoniam commensurabilis est AH ipsi HE longitudine, erit [per 1.6. & 10.10] parallelogrammum AΘ parallelogrammo HK commensurabile, hoc est quadratum ΣN ipsi NΠ, hoc est quadratum ex MN quadrato ex NΞ: ergo MN, NΞ potentia commensurabiles sunt. & quoniam incommensurabilis est AE ipsi EΔ longitudine, & AE quidem est commensurabilis ipsi AH, EΔ vero ipsi EZ: erit AH ipsi EZ longitudine incommensurabilis: quare & parallelogrammum AΘ incommensurabile parallelogrammo EΛ, hoc est ΣN ipsi MP, hoc est [per 1.6.] ON ipsi NP, hoc est MN ipsi NΞ incommensurabilis est longitudine. ostensæ autem sunt MN, NΞ & mediæ & potentia commensurabiles: ergo MN, NΞ mediæ sunt potentia solum commensurabiles. dico & rationale continere. quoniam enim ΔE ponitur commensurabilis utrique ipsarum AB, EZ, erit EZ ipsi EK longitudine commensurabilis. atque est rationalis utraque ipsarum: rationale igitur est [per 20.10.] parallelogrammum EΛ, hoc est MP; estque MP quod sub MN, NΞ continetur. si autem duæ mediæ potentia solum commensurabiles componantur, quæ rationale contineant, tota [per 38. 10.] irrationalis est, quæ ex binis mediis prima appellatur: ergo MΞ ex binis mediis est prima. quod erat demonstrandum.



HK ἴσον τετράγωνον τὸ NΠ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν MN τῇ NΞ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ PN τῇ NO. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΣΠ τετράγωνον· φανερὸν δὴ ἐκ τῶν προδεδειγμένων, ὅτι τὸ MP μέσον ἀνάλογόν ἐστι τῶν ΣN, NΠ, καὶ ἴσον τῷ EΛ, καὶ ὅτι τὸ AΓ χωρίον δύναται ἡ MΞ· δεικτέον δὴ ὅτι ἡ MΞ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ AE τῇ EΔ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ EΔ τῇ AB· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ AE τῇ AB μήκει. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ AH τῇ HE, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ AE ἑκατέρᾳ τῶν AH, HE. καὶ ἐστι ῥητὴ ἡ AE· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν AH, HE. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ AE τῇ AB, σύμμετρος δὲ ἡ AE ἑκατέρᾳ τῶν AH, HE· αἱ AH, HE ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι τῇ AB μήκει· αἱ BA, AH, HE ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν AΘ, HK· ὥστε ἑκάτερον τῶν ΣN, NΠ μέσον ἐστί· καὶ αἱ MN, NΞ ἄρα μέσαι εἰσί. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ AH τῇ HE μήκει, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ AΘ τῷ HK, τουτέστι τὸ ΣN τῷ NΠ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς MN τῷ ἀπὸ τῆς NΞ· ὥστε δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι αἱ MN, NΞ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ AE τῇ EΔ μήκει, ἀλλ' ἡ μὲν AE σύμμετρός ἐστι τῇ AH, ἡ δὲ EΔ τῇ EZ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ AH τῇ EZ· ὥστε καὶ τὸ AΘ τῷ EΛ ἀσύμμετρόν ἐστι, τουτέστι τὸ ΣN τῷ MP, τουτέστιν ἡ ON τῇ NP, τουτέστιν ἡ MN τῇ NΞ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει. ἐδείχθησαν δὲ αἱ MN, NΞ καὶ μέσαι οὖσαι καὶ δυνάμει σύμμετροι· αἱ MN, NΞ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω δὴ ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΔE ὑπόκειται ἑκατέρᾳ τῶν AB, EZ σύμμετρος· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ EZ τῇ EK. καὶ ῥητὴ ἑκατέρα αὐτῶν· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ EΛ, τουτέστι τὸ MP, τὸ δὲ MP ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν MN, NΞ. ἐὰν δὲ δύο μέσαι δυνάμει σύμμετροι συντεθῶσι ῥητὸν περιέχουσαι, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη· ἡ MΞ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. LVII. Theor.

Si spatium contineatur sub rationali, & ex binis nominibus tertia; recta li-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νζ'.

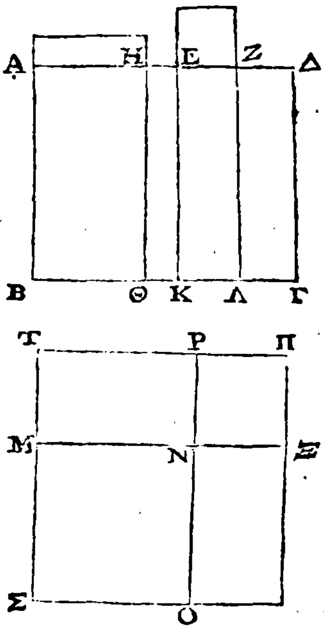
Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη

δυναμένη ἄλογός ἐστι, ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

nea spatium potens irrationalis est, quæ appellatur ex binis mediis secunda.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης τῆς ΑΔ, διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὧν μεῖζον ἔστω τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστι, ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη ἡ ΑΔ· αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΒ μήκει. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δεδειγμένοις δείξομεν ὅτι ἡ ΜΞ ἐστὶν ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη, καὶ ὅτι αἱ ΜΝ, ΝΞ ἐκ δύο μέσων εἰσί· δεικτέον δὴ ὅτι καὶ δευτέρα. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτέστι τῇ ΕΚ, σύμμετρος δὲ ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ μήκει. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΖΕ, ΕΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· ἡ ΜΞ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Spatium enim ΑΒΓΔ contineatur sub rationali ΑΒ, & ex binis nominibus tertia ΑΔ divisa in nomina ad punctum Ε, quorum majus sit ΑΕ: dico rectam lineam, quæ potest spatium ΑΓ, irrationalem esse; quæ ex binis mediis secunda appellatur.

Construantur enim eadem quæ supra. & quoniam ΑΔ ex binis nominibus tertia est; erunt [per 3. deff. secund. 10.] ΑΕ, ΕΔ rationales potentia solum commensurabiles,& ΑΕ plus poterit quam ΕΔ quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine, neutraque ipsarum ΑΕ, ΕΔ ipsi ΑΒ longitudine erit commensurabilis. similiter [atque in præc.] ostendemus ΜΞ eam esse quæ spatium ΑΓ potest,& ΜΝ,ΝΞ esse ex binis mediis: itaque ostendendum est & secundam esse. quoniam enim ΔΕ incommensurabilis est longitudine ipsi ΑΒ, hoc est ipsi ΕΚ; atque est ΔΕ commensurabilis ΕΖ: erit ΕΖ ipsi ΕΚ longitudine incommensurabilis. & sunt rationales: ergo ΖΕ, ΕΚ rationales sunt potentia solum commensurabiles; & ob id ΕΛ, hoc est ΜΡ, medium est, & continetur sub ΜΝ, ΝΞ: medium igitur est quod sub ΜΝ,ΝΞ continetur: quare [per 39. 10.] ΜΞ ex binis mediis est secunda. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νη'.

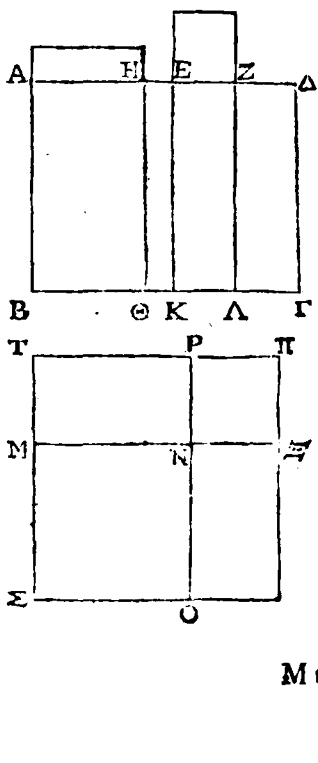
Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων.

Prop. LVIII. Theor.

Si spatium contineatur sub rationali, & ex binis nominibus quarta; recta linea spatium potens irrationalis est, quæ vocatur major.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΓ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης τῆς ΑΔ, διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὧν μεῖζον ἔστω τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστι, ἡ καλουμένη μείζων.

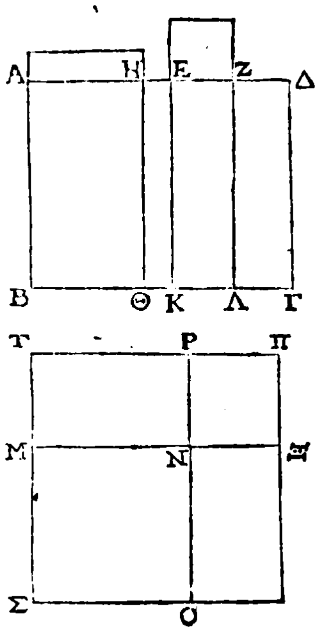
Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη, αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ σύμμετρός ἐστι μήκει. τετμήσθω δὴ ἡ ΔΕ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΕ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΕ· ἀσύμμετρος ἄρα



Spatium enim ΑΓ contineatur sub rationali ΑΒ, & ex binis nominibus quarta ΑΔ, divisa in nomina ad punctum Ε, quorum ΑΕ sit majus: dico rectam lineam, quæ spatium ΑΓ potest, irrationalem esse; quæ major appellatur.

Quoniam enim ΑΔ ex binis nominibus est quarta, erunt [per 4. deff. secund. 10.] ΑΕ, ΕΔ rationales potentia solum commensurabiles; & ΑΕ plus poterit quam ΕΔ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, & ΑΕ ipsi ΑΒ commensurabilis erit longitudine. dividatur ΔΕ bifariam in Ζ, & quadrato ipsius ΕΖ æquale parallelogrammum ad ΑΕ applicetur deficiens figura quadrata, rectangulum nempe sub ΑΗ,ΗΕ: erit igitur [per

19.10.] A H ipsi H E longitudine incommensurabilis. ducantur ipsi A B parallelæ H Θ, E K, Z Λ, & eadem fiant quæ supra: constat igitur M Ξ posse spatium A Γ. ostendendum autem est M Ξ irrationalem esse, quæ vocatur major. quoniam enim A H ipsi H E incommensurabilis est longitudine, erit [per 1.6. & 10.10.] & A Θ ipsi H K incommensurabile, hoc est [per constr.] Σ N ipsi N Π: ergo MN, NΞ potentia incommensurabiles sunt. & quoniam A E ipsi A B longitudine est commensurabilis, parallelogrammum A K rationale est, atque est æquale quadratis ipsarum MN, NΞ: ergo compositum ex quadratis ipsarum MN,NΞ est rationale. quod cum Δ E sit incommensurabilis longitudine ipsi A B, hoc est ipsi E K, sit autem Δ E commensurabilis ipsi E Z: erit E Z ipsi E K incommensurabilis longitudine: quare K E, E Z rationales sunt potentia solum commensurabiles: & ob id [per 22. 10.] medium est Λ E, hoc est M P; & continetur sub M N, N Ξ; medium igitur est quod sub M N, N Ξ continetur; estque compopositum ex quadratis ipsarum M N,N Ξ rationale; & MN ipsi N Ξ potentia incommensurabilis. si autem duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium; tota [per 40. 10.] irrationalis erit. vocatur autem major: ergo M Ξ irrationalis est, quæ major appellatur, & potest spatium A Γ. quod erat demonstrandum.



ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει. ἤχθωσαν παράλληλοι τῇ ΑΒ αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου γεγονέτω· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΜΞ. δεικτέον δὲ ὅτι ἡ ΜΞ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει, ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ, τουτέστι τὸ ΣΝ τῷ ΝΠ· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ ΑΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτέστι τῇ ΕΚ, ἀλλὰ ἡ ΔΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ΕΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ μήκει· αἱ ΚΕ, ΕΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα τὸ ΛΕ, τουτέστι τὸ ΜΡ, καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν ΜΝ,ΝΞ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ, καὶ ῥητὸν τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ, καὶ ἔστιν ἀσύμμετρος ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ δυνάμει. ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι. καλεῖται δὲ μείζων· ἡ ΜΞ ἄρα ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων, καὶ δύναται τὸ ΑΓ χωρίον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. LIX. Theor.

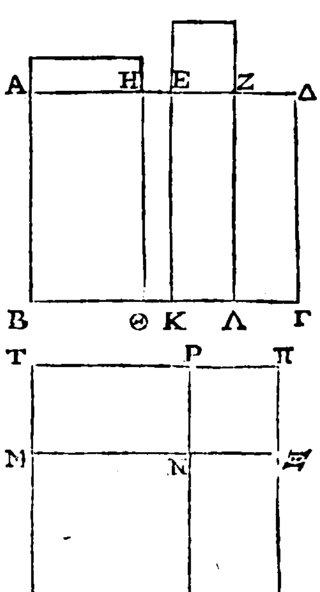
Si spatium contineatur sub rationali, & ex binis nominibus quinta; recta linea spatium potens irrationalis est, quæ vocatur rationale & medium potens.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νθ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Spatium enim A Γ contineatur sub rationali A B, & ex binis nominibus quinta A Δ, divisa in nomina ad punctum E, ita ut majus nomen sit A E: dico rectam lineam, quæ potest spatium A Γ, irrationalem esse; quæ vocatur rationale ac medium potens.

Construantur enim eadem quæ supra: manifestum igitur est M Ξ posse spatium A Γ. ostendere autem oportet MΞ esse quæ rationale ac medium potest. quoniam enim A H ipsi E H incommensurabilis est longitudine, & [per 1. 6. & 10. 10] parallelogrammum A Θ est incommensurabile parallelogrammo Θ E, hoc est quadratum ex M N quadrato ex N Ξ: ergo M N, N Ξ potentia incommensurabiles sunt. & quoniam



Χωρίον γὰρ τὸ ΑΓ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης τῆς ΑΔ, διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΜΞ. δεικτέον δὲ ὅτι ἡ ΜΞ ἐστὶν ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΕΗ, ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΘΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ἡ

ΑΔ

ΑΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐςὶ πέμπτη, καὶ ἔςω ἔλασσον αὐτῆς τμῆμα τὸ ΕΔ· σύμμετρος ἄρα ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ μήκει. ἀλλὰ ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ ἐςὶν ἀσύμμετρος μήκει, καὶ ἡ ΑΒ ἄρα τῇ ΑΕ ἐςὶν ἀσύμμετρος μήκει· αἱ ΒΑ, ΑΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐςὶ τὸ ΑΚ, τουτέςι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐςιν ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτέςι τῇ ΕΚ, ἀλλὰ ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρός ἐςι· καὶ ἡ ΕΖ ἄρα τῇ ΕΚ σύμμετρός ἐςι. ῥητὴ δὲ ἡ ΕΚ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΕΛ, τουτέςι τὸ ΜΡ, τουτέςι τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροί εἰσι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἡ ΜΞ ἄρα ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐςὶ, καὶ δύναται τὸ ΑΓ χωρίον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΔ eſt ex binis nominibus quinta, ſitque minor ipſius portio ΕΔ; erit [per 5. deff. ſecund. 10.] ΕΔ ipſi ΑΒ commenſurabilis longitudine. ſed ΑΕ ipſi ΕΔ eſt incommenſurabilis: ergo [per 13.10.] & ΑΒ incommenſurabilis eſt longitudine ipſi ΑΕ: ac propterea ΒΑ, ΑΕ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: medium igitur [per 22. 10.] eſt ΑΚ, hoc eſt compoſitum ex quadratis ipſarum ΜΝ, ΝΞ. & quoniam ΔΕ commenſurabilis eſt longitudine ipſi ΑΒ, hoc eſt ipſi ΕΚ, eſtque ΔΕ commenſurabilis ipſi ΕΖ: erit & ΕΖ ipſi ΕΚ commenſurabilis. rationalis autem eſt ΕΚ: rationale igitur eſt [per 20.10.] & ΕΛ, hoc eſt ΜΡ, hoc eſt parallelogrammum quod ſub ΜΝ, ΝΞ continetur; quare ΜΝ, ΝΞ potentia incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem ſub ipſis continetur rationale: ergo [per 41. 10.] ΜΞ eſt rationale ac medium potens, & poteſt ſpatium ΑΓ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξ'.

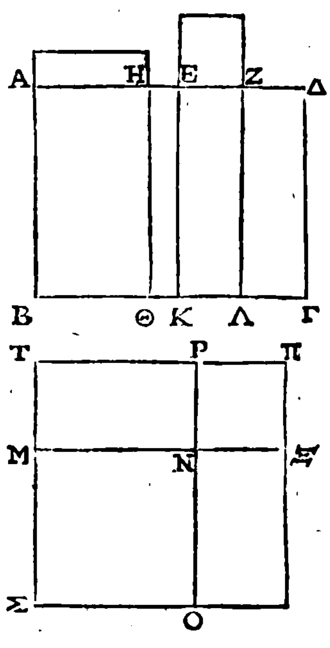
Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐςιν, ἡ καλουμένη δύο μέσα δυναμένη.

PROP. LX. THEOR.

Si ſpatium contineatur ſub rationali, & ex binis nominibus ſexta; quæ ſpatium poteſt recta linea irrationalis eſt, quæ vocatur bina media potens.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης τῆς ΑΔ, διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥςε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ δυναμένη ἡ δύο μέσα δυναμένη ἐςί.

Κατασκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. Φανερὸν δὴ ὅτι ἡ τὸ ΑΓ δυναμένη ἐςὶν ἡ ΜΞ, καὶ ὅτι ἀσύμμετρός ἐςιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ δυνάμει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐςιν ἡ ΕΑ τῇ ΑΒ μήκει· αἱ ΕΑ, ΑΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐςὶ τὸ ΑΚ, τουτέςι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ΜΝ, ΝΞ. πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐςιν ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ μήκει, ἀσύμμετρός ἐςι καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΕΚ· καὶ αἱ ΖΕ, ΕΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐςὶ τὸ ΕΛ, τουτέςι τὸ ΜΡ, τουτέςι τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐςιν ἡ ΕΑ τῇ ΕΖ, καὶ τὸ ΑΚ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐςιν. ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΚ ἐςὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ, τὸ δὲ ΕΛ ἐςὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐςὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ τῷ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. καί ἐςι μέσον ἑκάτερον αὐτῶν, καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ. καὶ ἔςι μέσον ἑκάτερον αὐτῶν, καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμ-



Spatium enim ΑΒΓΔ contineatur ſub rationali ΑΒ & ex binis nominibus ſexta ΑΔ, quæ dividatur in nomina ad punctum Ε, ita ut ΑΕ ſit majus nomen: dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium ΑΓ, eſſe bina media potentem.

Conſtruantur enim eadem quæ ſupra. manifeſtum igitur eſt ΜΞ poſſe ſpatium ΑΓ, & ΜΝ ipſi ΝΞ potentia incommenſurabilem eſſe. & quoniam ΕΑ ipſi ΑΒ incommenſurabilis eſt longitudine, erunt ΕΑ, ΑΒ rationales potentia ſolum commenſurabiles: medium igitur [per 22. 10.] eſt ΑΚ, hoc eſt compoſitum ex quadratis ipſarum ΜΝ, ΝΞ. rurſus, quoniam incommenſurabilis eſt ΕΔ ipſi ΑΒ longitudine, erit & ΖΕ ipſi ΕΚ longitudine incommenſurabilis: ergo & ΖΕ, ΕΚ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea medium eſt ΕΛ, hoc eſt ΜΡ, hoc eſt quod ſub ΜΝ, ΝΞ continetur. & quoniam ΕΑ eſt incommenſurabilis ipſi ΕΖ, & parallelogrammum ΑΚ parallelogrammo ΕΛ incommenſurabile erit. ſed ΑΚ quidem eſt compoſitum ex quadratis ipſarum ΜΝ, ΝΞ; ΕΛ vero eſt quod ſub ΜΝ, ΝΞ continetur: incommenſurabile igitur eſt compoſitum ex quadratis ipſarum ΜΝ, ΝΞ ei quod ſub ΜΝ, ΝΞ continetur. atque eſt utrumque ipſorum medium; & ΜΝ, ΝΞ potentia ſunt incommenſurabiles:

les: ergo [per 42. 10.] MΞ est bina media potens, & potest spatium ΑΓ. quod erat demonstrandum.

μετροι· ἡ ΜΞ ἄρα δύο μέσα δυναμένη ἐστί, καὶ δύναται τὸ ΑΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

LEMMA.

Si recta linea in partes inæquales secetur, ipsarum partium quadrata majora sunt rectangulo quod bis sub dictis partibus continetur.

Sit recta linea ΑΒ, & secetur in puncto Γ, & sit ΑΓ major: dico quadrata ex ΑΓ, ΓΒ majora esse rectangulo quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur.

Secetur enim ΑΒ bifariam in Δ. & quoniam recta linea ΑΒ in partes quidem æquales secatur ad Δ, in partes vero inæquales ad Γ; rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ una cum quadrato ipsius ΓΔ [per 5. 2.] est æquale ei quod fit ex ΑΔ quadrato: ergo rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ quadrato ex ΑΔ est minus: quod igitur bis continetur sub ΑΓ, ΓΒ minus est quam duplum quadrati ex ΑΔ. sed [per 9. 2.] quadrata ex ΑΓ, ΓΒ dupla sunt quadratorum ex ΑΔ, ΔΓ: ergo quadrata ex ΑΓ, ΓΒ majora sunt eo quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur. quod erat demonstrandum.

ΛΗΜΜΑ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τετράγωνα μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ἀνίσων περιεχομένου ὀρθογωνίου.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.

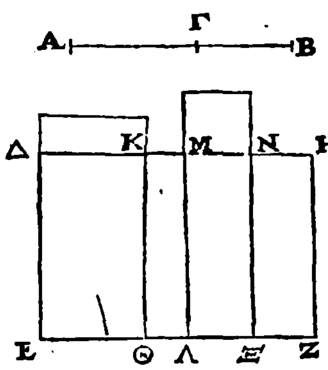
Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα γραμμὴ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Δ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Γ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἔλαττον ἢ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. LXI. THEOR.

Quadratum ejus quæ est ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam.

SIT ex binis nominibus ΑΒ divisa in nomina ad punctum Γ, ita ut ΑΓ sit majus nomen, exponaturque rationalis ΔΕ, & quadrato rectæ lineæ ΑΒ æquale ad ipsam ΔΕ applicetur rectangulum parallelogrammum ΔΕΖΗ, latitudinem faciens ΔΗ: dico ΔΗ ex binis nominibus primam esse.

Applicetur enim [per 45. 1.] ad rationalem ΔΕ quadrato quidem ipsius ΑΓ æquale parallelogrammum ΔΘ, quadrato autem ipsius ΒΓ æquale ΚΛ: reliquum igitur quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur [per 4. 2.] est æquale parallelogrammo ΜΖ. secetur ΜΗ bifariam in Ν, & alterutri ipsarum ΜΛ, ΗΖ parallela ducatur ΝΞ: utrumque igitur parallelogrammorum ΜΞ, ΝΖ est æquale ei quod semel sub ΑΓ, ΓΒ continetur. & quoniam ex binis nominibus est ΑΒ divisa in nomina ad punctum Γ, erunt [per 37. 10.] ΑΓ, ΓΒ rationales potentia solum commensurabiles: ergo quadrata ex ΑΓ, ΓΒ rationalia sunt & commensurabilia inter sese: & ob id [per 16. 10.] compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ commensurabile est ipsarum ΑΓ, ΓΒ quadratis: rationale igitur est compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ. atq; est æquale parallelogrammo ΔΛ: ergo & ΔΛ est rationale, & ad rationalem ΔΕ applicatum est: rationalis igitur est ΔΜ [per 23. 10.]



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξα'.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.

Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ, διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΕΖΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη.

Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΔΕ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον τὸ ΔΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἴσον τὸ ΚΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΖ. τετμήσθω ἡ ΜΗ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ παράλληλος ἤχθω ἡ ΝΞ ἑκατέρᾳ τῶν ΜΛ, ΗΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΜΞ, ΝΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἅπαξ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητά εἰσι καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ σύμμετρόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΔΛ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ, καὶ

σύμμετρος

σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτέστι τὸ ΜΖ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΜΛ, τουτέστι τῇ ΕΔ, μήκει. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΜΔ ῥητή, καὶ τῇ ΔΕ μήκει σύμμετρος· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ. δεικτέον δὴ ὅτι καὶ πρώτη. ἐπεὶ γὰρ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· καὶ τῶν ΔΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΜΞ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΜΞ οὕτως τὸ ΜΞ πρὸς τὸ ΚΛ, τουτέστιν ὡς ἡ ΔΚ πρὸς τὴν ΜΝ οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΜΚ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ σύμμετρός ἐστι μήκει. καὶ ἐπεὶ μείζονά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ μείζων ἐστί. καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ μήκει. ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάττονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσι ῥηταὶ αἱ ΔΜ, ΜΗ, καὶ ἡ ΔΜ μεῖζον ὄνομα οὖσα σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΕ μήκει· ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

& ipsi ΔΕ commensurabilis longitudine. rursus, quoniam ΑΓ, ΓΒ rationales sunt potentia solum commensurabiles, medium est quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur, hoc est rectangulum ΜΖ. & ad rationalem ΜΛ applicatum est: rationalis igitur est ΜΗ [per 23. 10.] & ipsi ΜΛ, hoc est ipsi ΕΔ, longitudine incommensurabilis. est autem & ΜΔ rationalis, & ipsi ΔΕ commensurabilis longitudine: ergo [per 13. 10.] ΔΜ ipsi ΜΗ longitudine est incommensurabilis. suntque rationales: ergo ΔΜ, ΜΗ rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea [per 37. 10.] ΔΗ est ex binis nominibus. ostendendum est & primam esse. quoniam enim inter quadrata ex ΑΓ, ΓΒ [per lem. 55. 10.] medium proportionale est, quod sub ΑΓ, ΓΒ continetur; erit etiam inter parallelogramma ΔΘ, ΚΛ medium proportionale ΜΞ: est igitur ut ΔΘ ad ΜΞ ita ΜΞ ad ΚΛ, hoc est [per 1. 6.] ut recta linea ΔΚ ad ΜΝ ita ΜΝ ad ΜΚ: ergo [per 17. 6.] rectangulum sub ΔΚ, ΚΜ quadrato ex ΜΝ est æquale. & quoniam quadratum ex ΑΓ commensurabile est quadrato ex ΓΒ, erit [per 14. 10.] & parallelogrammum ΔΘ parallelogrammo ΚΛ commensurabile: ergo & ΔΚ ipsi ΚΜ longitudine est commensurabilis. quod cum quadrata ex ΑΓ, ΓΒ majora sint [per lem. præc.] eo quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur; erit & parallelogrammum ΔΛ majus parallelogrammo ΜΖ: ideoque recta linea ΔΜ ipsa ΜΗ est major. atque est rectangulum sub ΔΚ, ΚΜ æquale quadrato ex ΜΝ, hoc est quartæ parti quadrati ex ΜΗ, & ΔΚ ipsi ΚΜ longitudine est commensurabilis. si autem sint duæ rectæ lineæ inæquales, & quartæ parti quadrati minoris æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes commensurabiles ipsam dividat, major plus poterit [per 18. 10.] quam minor quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. suntque rationales ΔΜ, ΜΗ; atque ΔΜ, quæ est majus nomen, expositæ rationali ΔΕ longitudine est commensurabilis: ergo [per 1. deff. secund. 10.] ΔΗ est ex binis nominibus prima. quod erat demonstrand.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξβ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ, διῃρημένη εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Γ, ὧν μείζων ἡ ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΔΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι· ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσα ἐστί· μέσον ἄρα τὸ ΔΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν παράκειται· ῥητὴ ἄρα

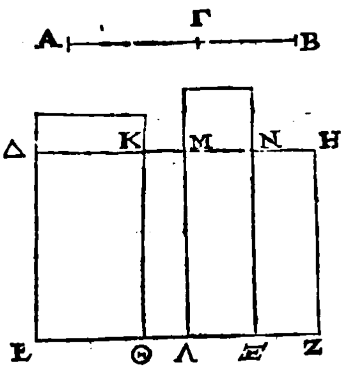
PROP. LXII. PROBL.

Quadratum ejus quæ est ex binis mediis prima ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

SIT ex binis mediis prima ΑΒ, divisa in medias ad punctum Γ, quarum ΑΓ sit major, exponaturque rationalis ΔΕ, & ad ipsam ΔΕ applicetur parallelogrammum æquale quadrato ipsius ΑΒ, quod sit ΔΖ, latitudinem faciens ΔΗ: dico ΔΗ ex binis nominibus secundam esse.

Construantur enim eadem quæ supra. & quoniam ΑΒ ex binis mediis est prima, divisa ad punctum Γ, erunt [per 38. 10.] ΑΓ, ΓΒ mediæ potentia solum commensurabiles, quæ rationale continent: quare & quæ fiunt ex ΑΓ, ΓΒ quadrata media sunt; ideoque ΔΛ est medium, & ad rationalem applicatum est: rationalis igitur

tur est [per 23. 10.] ΜΔ, & ipsi ΔΕ longitudine incommensurabilis. rursus, quoniam rationale est quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur, erit & ΜΖ rationale, & ad rationalem ΜΛ applicatum est: ergo [per 21. 10.] & ΜΗ est rationalis, & ipsi ΜΛ, hoc est ipsi ΔΕ, commensurabilis longitudine: incommensurabilis igitur est [per 13. 10.] ΔΜ ipsi ΜΗ. & sunt rationales: quare ΔΜ, ΜΗ rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea ΔΗ est ex binis nominibus. ostendendum est & secundam esse. quoniam enim [per lem. 61. 10.] quadrata ex ΑΓ, ΓΒ majora sunt eo quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur, erit & ΔΛ parallelogrammum parallelogrammo ΜΖ majus: ergo & recta linea ΔΜ major est ipsa ΜΗ. quod cum quadratum ex ΑΓ quadrato ex ΓΒ sit commensurabile, & ΔΘ parallelogrammum parallelogrammo ΚΛ commensurabile erit: quare & ΔΚ commensurabilis ipsi ΚΜ. atque est [per constr.] quod sub ΔΚ, ΚΜ continetur quadrato ipsius ΜΝ æquale: ergo [per 18. 10.] ΔΜ plus potest quam ΜΗ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. estque ΜΗ commensurabilis longitudine ipsi ΔΕ; quare [per 2. deff. secund. 10.] ΔΗ est ex binis nominibus secunda. quod erat demonstrandum.



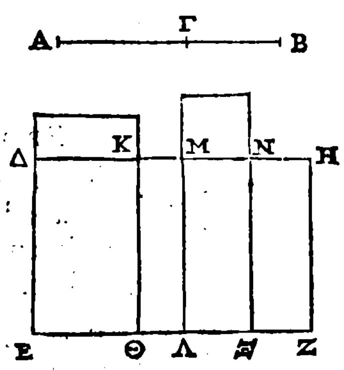
ἐστὶν ἡ ΜΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ῥητὸν καὶ τὸ ΜΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΗ, καὶ μήκει σύμμετρος τῇ ΜΛ, τουτέστι τῇ ΔΕ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ. δεικτέον δὴ ὅτι καὶ δευτέρα. ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ ΜΖ, ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ σύμμετρός ἐστι. καί ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ ἐστιν ἡ ΜΗ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει· ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. LXIII. Theor.

Quadratum ejus quæ est ex binis mediis secunda ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

SIT ex binis mediis secunda ΑΒ, divisa in medias ad Γ, ita ut ΑΓ sit major portio, rationalis autem sit ΔΕ, & ad ipsam ΔΕ quadrato ex ΑΒ æquale parallelogrammum ΔΖ applicetur, latitudinem faciens ΔΗ: dico ΔΗ ex binis nominibus tertiam esse.

Construantur enim eadem quæ supra. & quoniam ΑΒ est ex binis mediis secunda, divisa ad punctum Γ, erunt [per 39. 10.] ΑΓ, ΓΒ mediæ potentia solum commensurabiles, quæ medium continent: ergo & compositum ex ipsarum ΑΓ, ΓΒ quadratis medium est. atque est æquale ipsi ΔΛ: medium igitur est ΔΛ; & ad rationalem ΔΕ applicatur: ergo [per 23. 10.] rationalis est ΜΔ, & ipsi ΔΕ longitudine incommensurabilis. eadem ratione & ΜΗ est rationalis, & incommensurabilis ipsi ΜΛ, hoc est ipsi ΔΕ: utraque igitur ipsarum ΔΜ, ΜΗ rationalis est, & ipsi ΔΕ longitudine incommensurabilis. & quoniam incommensurabilis est ΑΓ ipsi ΓΒ longitudine, ut autem ΑΓ ad ΓΒ ita [per 1. 6.] quadratum ex ΑΓ ad rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ; erit & quadratum ex



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξγʹ.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ ΑΒ, διῃρημένη εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ μεῖζον τμῆμα εἶναι τὸ ΑΓ, ῥητὴ δέ τις ἔστω ἡ ΔΕ, καὶ παρὰ τὴν ΔΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἐστὶν ἡ ΑΒ, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἐστί. καὶ ἐστιν ἴσον τῷ ΔΛ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ· καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΜΗ ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΜΛ, τουτέστι τῇ ΔΕ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ

τῆς

τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἀσύμμετρόν ἐστι, τουτέστι τὸ ΔΛ τῷ ΜΖ· ὥστε ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ ἀσύμμετρός ἐστι. καί εἰσι ῥηταί· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ. δεικτέον δὴ ὅτι καὶ τρίτη. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον ἐπιλογιούμεθα, ὅτι μείζων ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ. καὶ ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΔΕ μήκει· ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

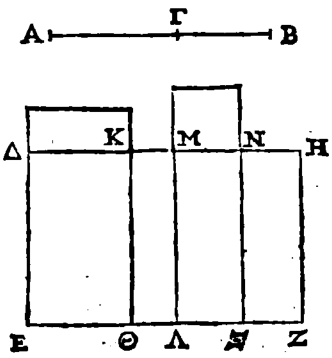
ΑΓ rectangulo sub ΑΓ, ΓΒ incommensurabile: ergo compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ incommensurabile est ei quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur; hoc est ΔΛ incommensurabile ipsi ΜΖ: & ob id recta linea ΔΜ ipsi ΜΗ est incommensurabilis. suntque rationales: ergo ΔΗ est ex binis nominibus. ostendendum est & tertiam esse. similiter enim [atque in præced.] concludemus ΔΜ ipsa ΜΗ majorem esse, & ΔΚ ipsi ΚΜ commensurabilem. atque est rectangulum sub ΔΚ, ΚΜ quadrato ipsius ΜΝ æquale: ergo [per 18. 10.] ΔΜ plus potest quam ΜΗ quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. & neutra ipsarum ΔΜ, ΜΗ est longitudine commensurabilis ipsi ΔΕ: quare [per 3. deff. secund. 10.] ΔΗ est ex binis nominibus tertia. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξδʹ.

Τὸ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην.

Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε μείζονα εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ, ῥητὴ δέ τις ἔστω ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ παραλληλόγραμμον, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον. ἐπεὶ οὖν ῥητόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΔΛ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτέστι τὸ ΜΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ. δεικτέον δὴ ὅτι καὶ τετάρτη. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον ἐπιλογιούμεθα, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ. ἐπεὶ οὖν ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΚΔ τῇ ΚΜ ἀσύμμετρός ἐστιν. ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον παραβληθῇ παρὰ τὴν μεί-



Prop. LXIV. Theor.

Quadratum majoris ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

Sit major ΑΒ, divisa in puncto Γ, ita ut ΑΓ major sit quam ΓΒ; rationalis autem quædam sit ΔΕ, & quadrato ex ΑΒ æquale ad ipsam ΔΕ applicetur parallelogrammum ΔΖ, latitudinem faciens ΔΗ: dico ΔΗ esse ex binis nominibus quartam.

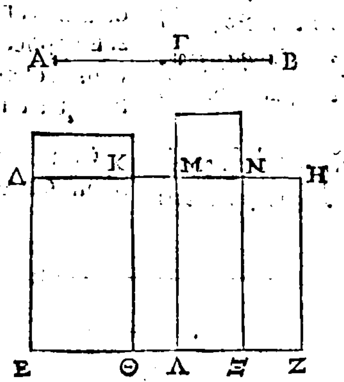
Construantur enim eadem quæ supra. & quoniam ΑΒ est major divisa in Γ, erunt [per 40. 10.] ΑΓ, ΓΒ potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium. itaque quoniam rationale est compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ, erit & parallelogrammum ΔΛ rationale: ergo [per 21. 10.] & rationalis est recta linea ΔΜ, ipsique ΔΕ longitudine commensurabilis. rursus, quoniam medium est quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur, hoc est ΜΖ, & ad rationalem ΜΛ est applicatum, erit [per 23. 10.] & ΜΗ rationalis, & ipsi ΔΕ incommensurabilis longitudine: ergo & ΔΜ ipsi ΜΗ longitudine incommensurabilis est; ac propterea ΔΜ, ΜΗ rationales sunt potentia solum commensurabiles: quare [per 37. 10.] ex duobus nominibus est ΔΗ. ostendendum est & quartam esse. similiter enim atque in superioribus concludemus ΔΜ majorem esse quam ΜΗ, & rectangulum sub ΔΚ, ΚΜ quadrato ex ΜΝ æquale. quoniam igitur quadratum ex ΑΓ incommensurabile est quadrato ex ΓΒ, erit [per 10. 10.] & ΔΘ parallelogrammum incommensurabile parallelogrammo ΚΛ: & ob id recta linea ΚΔ ipsi ΚΜ incommensurabilis. si autem sint duæ rectæ lineæ inæquales, & quartæ parti quadrati minoris æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine incommensurabiles ipsam dividat, [per 19. 10.] major plus poterit quam minor quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis: ergo ΔM plus potest quam MH quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. suntque ΔM, MH rationales potentia solum commensurabiles, atque est ΔM commensurabilis expositæ rationali ΔE: quare [per 4. deff. secund. 10.] ΔH est ex binis nominibus quarta. quod erat demonstrandum.

Prop. LXV. Theor.

Quadratum ejus quæ rationale ac medium potest ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

SIT rationale ac medium potens AB, divisa in rectas lineas ad punctum Γ, ita ut AΓ sit major; exponaturque rationalis ΔB, & quadrato ipsius AB æquale parallelogrammum ΔZ ad ipsam ΔE applicetur, latitudinem faciens ΔH: dico ΔH esse ex binis nominibus quintam.

Construantur enim quæ supra. & quoniam rationale ac medium potens est AB, divisa ad Γ punctum, erunt [per 41. 10.] AΓ ΓB potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur rationale. quoniam igitur medium est compositum ex ipsarum AΓ, ΓB quadratis, erit & parallelogrammum ΔΛ medium: ideoque [per 23. 10.] recta linea ΔM rationalis est, & ipsi ΔE longitudine incommensurabilis. rursus, quoniam rationale est quod bis sub AΓ, ΓB continetur, hoc est parallelogrammum MZ; erit [per 21. 10.] MH rationalis, & ipsi ΔE longitudine commensurabilis: incommensurabilis igitur est [per 13. 10.] ΔM ipsi MH: quare ΔM, MH rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea [per 37. 10.] ΔH est ex binis nominibus. dico & quintam esse. similiter enim demonstrabitur rectangulum sub ΔK, KM quadrato ex MN esse æquale; & ΔK ipsi KM longitudine esse incommensurabilem: quare [per 19. 10.] ΔM plus potest quam MH quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. suntque ΔM, MH rationales potentia solum commensurabiles, & minor MH commensurabilis est ipsi ΔE longitudine: ergo [per 5. deff. secund. 10.] ΔH est ex binis nominibus quinta. quod erat demonstrandum.



Prop. LXVI. Theor.

Quadratum ejus quæ bina media potest ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

SIT bina media potens AB, divisa ad punctum Γ, rationalis autem sit ΔE, & ad ipsam

ζονα ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκει, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἡ ΔM ἄρα τῆς MH μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ ΔM, MH ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔM σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔE· ἡ ΔH ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξε'.

Τὸ ἀπὸ τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην.

ΕΣτω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ AB, διῃρημένη εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ Γ, ὥστε μείζονα εἶναι τὴν AΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔE, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν ΔE παραβεβλήσθω τὸ ΔZ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔH· λέγω ὅτι ἡ ΔH ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου. ἐπεὶ οὖν ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ AB, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ· αἱ AΓ, ΓB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AΓ, ΓB· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΛ· ὥστε ῥητή ἐστιν ἡ ΔM, καὶ μήκει ἀσύμμετρος τῇ ΔE. πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AΓ, ΓB, τουτέστι τὸ MZ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ MH, καὶ σύμμετρος τῇ ΔE μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΔM τῇ MH· αἱ ΔM, MH ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔH. λέγω δὴ ὅτι καὶ πέμπτη. ὁμοίως γὰρ δειχθήσεται ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔK, KM ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς MN, καὶ ἀσύμμετρος ἡ ΔK μήκει τῇ KM· ἡ ΔM ἄρα τῆς MH μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ ΔM, MH ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ἐλάττων ἡ MH σύμμετρος τῇ ΔE μήκει· ἡ ΔH ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξϛ'.

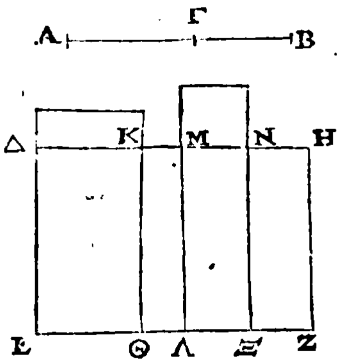
Τὸ ἀπὸ τῆς δύο μέσα δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην.

ΕΣτω δύο μέσα δυναμένη ἡ AB, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ῥητὴ δὲ ἔστω ἡ ΔE, καὶ παρὰ τὴν

ΔE

ΔΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη.

Κατασκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ δύο μέσα δυναμένη ἐστί, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῷ ὑπ' αὐτῶν· ὥστε κατὰ τὰ προδεδειγμένα μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΔΛ, ΜΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ τῷ ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ. λέγω ὅτι καὶ ἕκτη. ὁμοίως γὰρ πάλιν τοῖς πρὸ τούτου δείξομεν ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, καὶ ὅτι ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ μήκει ἐστὶν ἀσύμμετρος· καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ οὐδετέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΕ μήκει· ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ΔΕ quadrato ex AB æquale parallelogrammum ΔZ applicetur, latitudinem faciens ΔH: dico ΔH eſſe ex binis nominibus ſextam.

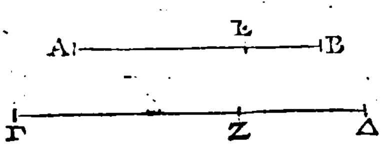
Conſtruantur enim eadem quæ ſupra. & quoniam AB eſt bina media potens: diviſa ad Γ, erunt [per 42. 10.] AΓ, ΓB potentia incommenſurabiles, facientes & compoſitum ex ipſarum quadratis medium, & quod ſub ipſis continetur medium, & adhuc incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis: ergo ex jam demonſtratis medium eſt utrumque parallelogrammorum ΔΛ, MZ, & ad rationalem ΔE applicata ſunt: rationalis igitur eſt [per 23. 10.] & utraque ΔM, MH, & ipſi ΔE longitudine incommenſurabilis. & quoniam compoſitum ex ipſarum AΓ, ΓB quadratis incommenſurabile eſt ei quod bis ſub AΓ, ΓB continetur, erit & ΔΛ parallelogrammum parallelogrammo MZ incommenſurabile; & idcirco [per 10. 10.] ΔM incommenſurabilis MH: quare ΔM, MH rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, igitur ΔH eſt ex binis nominibus. dico & ſextam eſſe. ſimiliter enim atque in præcedentibus rurſus oſtendemus rectangulum ſub ΔK, KM quadrato ex MN æquale, & ΔK ipſi KM longitudine incommenſurabilem eſſe: ergo [per 19. 10.] ΔM plus poteſt quam MH quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. & neutra ipſarum ΔM, MH longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali ΔE: quare [per 6. deff. ſecund. 10.] ΔH eſt ex binis nominibus ſexta. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξζ'.

Η τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος καὶ αὐτὴ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ, διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω μεῖζον ὄνομα τὸ ΑΕ· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. γεγονέτω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΕΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΖΔ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΕΒ τῇ ΖΔ. καί εἰσι ῥηταὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ· ῥηταὶ ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ. αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καί εἰσι ῥηταί· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων



Prop. LXVII. Theor.

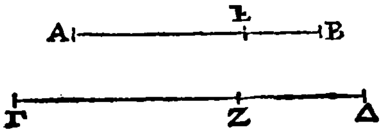
Ei quæ eſt ex binis nominibus longitudine commenſurabilis & ipſa ex binis nominibus eſt atque ordine eadem.

SIT ex binis nominibus AB, & ipſi AB longitudine commenſurabilis ſit ΓΔ: dico ΓΔ ex binis nominibus eſſe & ordine eandem ipſi AB.

Quoniam enim ex binis nominibus eſt AB, dividatur in nomina ad punctum E, & ſit AE majus nomen: ergo [per 37. 10.] AE, EB rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. fiat [per 12. 6.] ut AB ad ΓΔ ita AE ad ΓZ: & reliqua igitur EB ad reliquam ZΔ eſt [per 19. 5.] ut AB ad ΓΔ. commenſurabilis autem eſt AB ipſi ΓΔ longitudine: ergo [per 10. 10.] & AE ipſi ΓZ & EB ipſi ZΔ longitudine eſt commenſurabilis. ſuntque rationales AE, EB: rationales igitur ſunt & ΓZ, ZΔ. & quoniam eſt ut AE ad ΓZ ita EB ad ZΔ, erit permutando ut AE ad EB ita ΓZ ad ZΔ. ſunt autem AE, EB potentia ſolum commenſurabiles: ergo & ΓZ, ZΔ potentia ſolum commenſurabiles erunt. & ſunt rationales: ex binis igitur nominibus [per 37. 10.]

10.] est ΓΔ. dico & ipsi AB ordine eandem esse.

Vel enim AE plus potest quam EB quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. si quidem igitur AE plus possit quam EB quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis,& ΓZ plus poterit quam ZΔ [per 15.10.] quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. quod si AE sit commensurabilis expositæ rationali, & ΓZ [per 12.10.] eidem commensurabilis erit: & ob id utraque ipsarum AB,ΓΔ ex binis nominibus est prima, hoc est ordine eadem. si vero EB sit commensurabilis expositæ rationali, & ZΔ eidem erit commensurabilis: eamque ob caussam ΓΔ ipsi AB ordine eadem est, utraque enim est ex binis nominibus secunda. quod si neutra ipsarum AE, EB sit expositæ rationali commensurabilis, & neutra ipsarum ΓZ, ZΔ eidem commensurabilis erit; & utraque est tertia. at si AE plus possit quam EB quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, & ΓZ plus poterit quam ZΔ [per 15. 10.] quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. & si AE sit commensurabilis expositæ rationali, & ΓZ eidem commensurabilis erit, & est utraque quarta. quod si EB sit, & ipsa ZΔ erit, & est utraque quinta. si vero neutra ipsarum AE, EB sit, & neutra ΓZ, ZΔ expositæ rationali erit commensurabilis, & est utraque sexta.



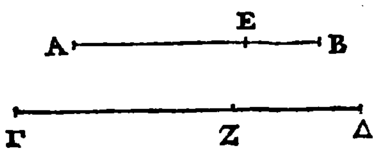
Ergo ei quæ est ex binis nominibus longitudine commensurabilis & ipsa ex binis nominibus est & ordine eadem. quod erat demonstrandum.

Prop. LXVIII. Theor.

Ei quæ est ex binis mediis longitudine commensurabilis & ipsa ex binis mediis est atque ordine eadem.

SIT ex binis mediis AB, & ipsi AB commensurabilis longitudine sit ΓΔ: dico ΓΔ ex binis mediis esse, & ipsi AB ordine eandem.

Quoniam enim AB ex binis mediis est, divisa in medias ad punctum E, erunt [per 38. & 39. 10.] & AE, EB mediæ potentia solum commensurabiles. itaque fiat ut AB ad ΓΔ ita AE ad ΓZ: ergo & reliqua EB ad reliquam ZΔ est ut AB ad ΓΔ. commensurabilis autem est [ex hyp.] AB ipsi ΓΔ longitudine: quare & AE ipsi ΓZ longitudine commensurabilis erit, & EB ipsi ZΔ. suntque mediæ AB, EB: mediæ igitur [per 24. 10.] & ΓZ, ZΔ. & quoniam est ut AE ad EB ita ΓZ ad ZΔ, & sunt AE, EB commensurabiles potentia solum; erunt & ΓZ, ZΔ potentia solum commensurabiles. ostensæ autem sunt & mediæ: ergo [per 38. & 39. 10.] ΓΔ est ex binis mediis. dico & ipsi AB ordine eandem esse.



Quoniam enim est ut AE ad EB ita ΓZ ad ZΔ, erit [per 11. 5. & 1. 6.] & ut quadratum ex AE ad rectangulum sub AE, EB ita quadratum ex ΓZ ad rectangulum sub ΓZ, ZΔ: quare

ἐστὶν ἡ ΓΔ. λέγω δὴ ὅτι τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ AB.

Ἡ γὰρ AE τῆς EB μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ AE τῆς EB μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ AE τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΓΖ σύμμετρος αὐτῇ ἐστί· καὶ διὰ τοῦτο ἑκατέρα τῶν AB, ΓΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη, τουτέστι τῇ τάξει ἡ αὐτή. εἰ δὲ ἡ EB σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΖΔ σύμμετρός ἐστιν αὐτῇ, καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τῇ τάξει ἡ αὐτὴ ἔσται τῇ AB, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἐστιν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα. εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν AE, EB σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, οὐδετέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ σύμμετρος αὐτῇ ἔσται, καί ἐστιν ἑκατέρα τρίτη. εἰ δὲ ἡ AE τῆς EB μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν ἡ AE σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΓΖ σύμμετρός ἐστιν αὐτῇ, καί ἐστιν ἑκατέρα τετάρτη. εἰ δὲ ἡ EB, καὶ ἡ ΖΔ, καὶ ἔσται ἑκατέρα πέμπτη. εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν AE, EB, καὶ τῶν ΓΖ, ΖΔ οὐδετέρα σύμμετρος ἔσται τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἔσται ἑκατέρα ἕκτη.

Ὥστε ἡ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξη'.

Ἡ τῇ ἐκ δύο μέσων μήκει σύμμετρος ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων ἡ AB, καὶ τῇ AB σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ AB.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο μέσων ἐστὶν ἡ AB, διῃρημένη εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ E· αἱ AE, EB ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ AE πρὸς τὴν ΓΖ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ EB πρὸς λοιπὴν τὴν ΖΔ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ. σύμμετρος δὲ ἡ AB τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ μὲν AE τῇ ΓΖ, ἡ δὲ EB τῇ ΖΔ. καί εἰσι μέσαι αἱ AE, EB· μέσαι ἄρα καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ AE πρὸς τὴν EB οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ, αἱ δὲ AE, EB δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. ἐδείχθησαν δὲ καὶ μέσαι· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστί. λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή ἐστι τῇ AB.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ AE πρὸς τὴν EB οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ἐναλ-

λὰξ

ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. εἴτε οὖν ῥητόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ ῥητόν ἐστι· καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ἐκ δύο μέσων πρώτη. εἴτε μέσον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, μέσον καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. καί ἐστιν ἑκατέρα δευτέρα· καὶ διὰ τοῦτο ἡ ΓΔ τῇ ΑΒ τῇ τάξει ἡ αὐτή. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξθ'.

Ἡ τῇ μείζονι σύμμετρος καὶ αὐτὴ μείζων ἐστίν.

Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΓΔ μείζων ἐστί.

Διῃρήσθω ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον. καὶ γεγονέτω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἥ τε ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ καὶ ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΓΖ, ΖΔ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ· καὶ συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ· σύμμετρα ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. καὶ ἔστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ ἅμα ῥητόν· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ ἅμα ῥητόν ἐστιν. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ σύμμετρόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. καὶ ἔστι μέσον τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον· ὅλη ἄρα ἡ ΓΔ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων.

Ἡ ἄρα τῇ μείζονι σύμμετρος μείζων ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

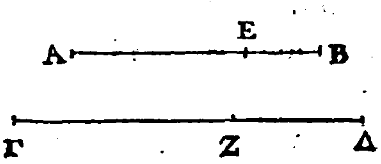
permutando ut quadratum ex AE ad quadratum ex ΓZ ita rectangulum sub AE, EB ad rectangulum sub ΓZ, ZΔ. commensurabile autem est quadratum ex AE quadrato ex ΓZ: ergo & rectangulum sub AE, EB rectangulo sub ΓZ, ZΔ est commensurabile. sive igitur rationale est rectangulum sub AE, EB, & rectangulum sub ΓZ, ZΔ rationale erit; atque ob id [per 38.10.] est ex binis mediis prima. sive vero medium est rectangulum sub AE, EB, & ipsum sub ΓZ, ZΔ erit medium. atque [per 39.10.] est utraque ex binis mediis secunda: & propterea ΓΔ ipsi AB ordine eadem est. quod erat demonstrandum.

Prop. LXIX. Theor.

Majori commensurabilis & ipsa major est.

SIT major AB: & ipsi AB commensurabilis sit ΓΔ: dico ΓΔ majorem esse.

Dividatur AB in E: ergo [per 40. 10.] AE, EB potentia sunt incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium. & fiant eadem quæ supra. quoniam igitur est ut AB ad ΓΔ ita AE ad ΓZ & EB ad ZΔ; erit [per 11. 5.] ut AE ad ΓZ ita EB ad ZΔ. commensurabilis autem est AB ipsi ΓΔ: ergo & utraque ipsarum AE, EB utrique ΓZ, ZΔ est commensurabilis. & quoniam est ut AE ad ΓZ ita EB ad ZΔ; permutandoque ut AE ad EB ita ΓZ ad ZΔ, & componendo ut AB ad BE ita ΓΔ ad ΔZ: ut igitur quadratum ex AB ad quadratum ex BE ita [per 22. 6.] quadratum ex ΓΔ ad quadratum ex ΔZ. similiter demonstrabimus & ut quadratum ex AB ad quadratum ex AE ita esse quadratum ex ΓΔ ad quadratum ex ΓZ: ergo & ut quadratum ex AB ad quadrata ex AE, EB ita quadratum ex ΓΔ ad quadrata ex ΓZ, ZΔ: permutando igitur ut quadratum ex AB ad quadratum ex ΓΔ ita quadrata ex AE, EB ad quadrata ex ΓZ, ZΔ. commensurabile autem est quadratum ex AB quadrato ex ΓΔ: ergo & quadrata ex AE, EB quadratis ex ΓZ, ZΔ sunt commensurabilia. atque est [per 40. 10.] compositum ex quadratis ipsarum AE, EB rationale: ergo [per 9.def.10.] & rationale erit compositum ex quadratis ipsarum ΓZ, ZΔ. similiter autem & quod bis continetur sub AE, EB commensurabile est ei quod bis sub ΓZ, ZΔ continetur. atque [per 40.10.] est medium quod bis continetur sub AE, EB: medium igitur [per 24 10.] est & quod bis sub ΓZ, ZΔ continetur: ergo ΓZ, ZΔ potentia sunt incommensurabiles, facientes compositum ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium: tota igitur [per 40. 10.] irrationalis est, quæ vocatur major.



Ergo majori commensurabilis & ipsa major est. quod erat demonstrandum.

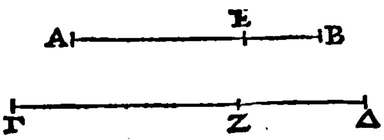
PROP.

Prop. LXX. Theor.

Rationale ac medium potenti commensurabilis & ipsa rationale ac medium potens est.

SIT rationale ac medium potens A B: & ipsi A B commensurabilis sit Γ Δ: ostendendum est & Γ Δ rationale ac medium potentem esse.

Dividatur AB in rectas suas ad punctum E: ergo [per 41. 10.] A E, E B potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum ex ipsarum quadratis medium; quod autem sub ipsis continetur rationale: & eadem quæ prius construantur. similiter [atque in præcedentibus] demonstrabimus Γ Z, Z Δ potentia esse incommensurabiles; & compositum ex quadratis ipsarum A E, E B commensurabile esse composito ex quadratis ipsarum Γ Z, Z Δ, quod autem continetur sub A E, E B commensurabile esse ei quod sub Γ Z, Z Δ continetur: ergo [per 24. 10.] & compositum ex quadratis ipsarum Γ Z, Z Δ est medium, quod autem continetur sub Γ Z, Z Δ rationale: & igitur [per 41. 10.] Γ Δ est rationale ac medium potens. quod erat dem.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ο΄.

Η τῇ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένῃ σύμμετρος καὶ αὐτὴ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.

ΕΣτω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ A B, καὶ τῇ A B σύμμετρος ἔστω ἡ Γ Δ· δεικτέον ὅτι καὶ ἡ Γ Δ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστί.

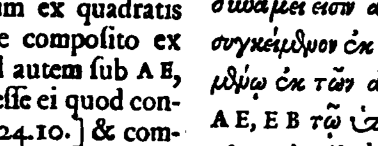
Διῃρήσθω ἡ A B εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ E· αἱ A E, E B ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω τοῖς πρότερον. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ Γ Z, Z Δ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν A E, E B τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν Γ Z, Z Δ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν A E, E B τῷ ὑπὸ τῶν Γ Z, Z Δ· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν Γ Z, Z Δ τετραγώνων ἐστὶ μέσον, τὸ δ' ὑπὸ τῶν Γ Z, Z Δ ῥητόν· ῥητὸν ἄρα καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ Γ Δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. LXXI. Theor.

Bina media potenti commensurabilis & ipsa bina media potens est.

SIT bina media potens A B, & ipsi A B commensurabilis sit Γ Δ: ostendendum est Γ Δ bina media potentem esse.

Quoniam enim bina media potens est AB, dividatur in rectas suas ad punctum E: quare [per 42. 10.] A E, E B potentia sunt incommensurabiles, quæ faciunt compositum ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur medium, & adhuc compositum ex quadratis ipsarum A E, E B incommensurabile rectangulo sub ipsis A E, E B: & construantur eadem quæ supra. similiter [atque supra] demonstrabimus Γ Z, Z Δ potentia incommensurabiles esse; & compositum ex quadratis ipsarum A E, E B commensurabile composito ex quadratis ipsarum Γ Z, Z Δ; quod autem sub A E, E B continetur commensurabile esse ei quod continetur sub Γ Z, Z Δ: quare [per 24. 10.] & compositum ex quadratis ipsarum Γ Z, Z Δ medium est; itemque medium quod sub Γ Z, Z Δ continetur; & adhuc incommensurabile est compositum ex quadratis ipsarum Γ Z, Z Δ rectangulo sub ipsis Γ Z, Z Δ: ergo [per 42. 10.] Γ Δ est bina media potens. quod erat demonstrandum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ οα΄.

Η τῇ δύο μέσα δυναμένῃ σύμμετρος δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

ΕΣτω δύο μέσα δυναμένη ἡ A B, καὶ τῇ A B σύμμετρος ἡ Γ Δ· δεικτέον δὴ ὅτι καὶ ἡ Γ Δ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ δύο μέσα δυναμένη ἐστὶν ἡ A B, διῃρήσθω εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ E· αἱ A E, E B ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν A E, E B τετραγώνων τῷ ὑπὸ τῶν A E, E B· καὶ κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ Γ Z, Z Δ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν A E, E B τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν Γ Z, Z Δ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν A E, E B τῷ ὑπὸ τῶν Γ Z, Z Δ· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν Γ Z, Z Δ τετραγώνων μέσον ἐστί, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ Z, Z Δ μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν Γ Z, Z Δ τετραγώνων τῷ ὑπὸ τῶν Γ Z, Z Δ· ἡ Γ Δ ἄρα δύο μέσα δυναμένη ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. LXXII. Theor.

Si rationale & medium componantur, quatuor irrationales fiunt, vel quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οβ΄.

Ρητοῦ καὶ μέσου συντιθεμένου, τέσσαρες ἄλογοι γίνονται ἤτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἢ ἐκ δύο

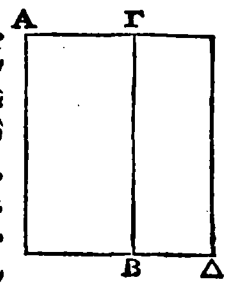
μέσων

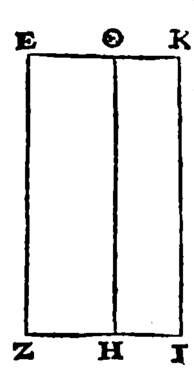
μέσων πρώτη, ἢ μείζων, ἢ ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Ἔστω ῥητὸν μὲν τὸ ΑΒ, μέσον δὲ τὸ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη, ἤτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν, ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἢ μείζων, ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Τὸ γὰρ ΑΒ τοῦ ΓΔ ἤτοι μεῖζόν ἐστιν, ἢ ἔλασσον. ἔστω πρότερον μεῖζον· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τῷ ΑΒ ἴσον τὸ ΕΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ· τῷ δὲ ΓΔ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ, τουτέστι τὴν ΘΗ, παραβεβλήσθω τὸ ΘΙ πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ. καὶ ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ ΑΒ, καί ἐστιν ἴσον τὸ ΕΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ καὶ σύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον τὸ ΓΔ, καί ἐστιν ἴσον τὸ ΘΙ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΘΙ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, τουτέστι τὴν ΘΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ΓΔ, ῥητὸν δὲ τὸ ΑΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ· ὥστε καὶ τὸ ΕΗ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ ΘΙ. ὡς δὲ τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΙ οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΚ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΚ μήκει· καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΕΘ, ΘΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΚ διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΕΗ, τὸ δὲ ΓΔ τῷ ΘΙ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΕΗ τοῦ ΘΙ· καὶ ἡ ΕΘ ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς ΘΚ. ἤτοι οὖν ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΘΕ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη, ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ. ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. ἀλλὰ δὴ δυνάσθω ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη, ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ. ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη μείζων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ δυναμένη μείζων ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἔλασσον τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα ἔλαττόν ἐστι τοῦ ΘΙ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ





mediis prima, vel major, vel rationale ac medium potens.

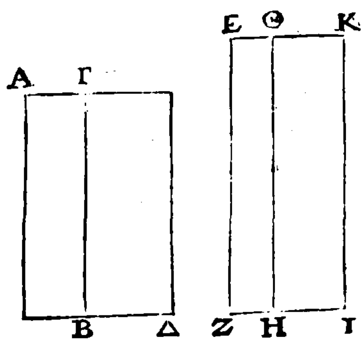
SIT rationale quidem spatium AB, medium autem ΓΔ: dico eam, quæ potest spatium AΔ, vel esse ex binis nominibus, vel ex binis mediis primam, vel majorem, vel rationale ac medium potentem.

Etenim AB vel majus est quam ΓΔ, vel minus. sit primum majus, exponaturque rationalis EZ, & ad ipsam applicetur parallelogrammum EH ipsi AB æquale, quod latitudinem faciat EΘ; ipsi vero ΓΔ æquale ad EZ, hoc est ad ΘH, applicetur ΘI latitudinem faciens ΘK. & quoniam rationale est AB, & ipsi est æquale EH, erit & EH rationale, & ad rationalem EZ applicatum est latitudinem faciens EΘ: ergo [per 21. 10.] EΘ est rationalis, & ipsi EZ longitudine commensurabilis. rursus, quoniam medium est ΓΔ, & ipsi est æquale ΘI, erit & ΘI medium; & ad rationalem EZ, hoc est ΘH, applicatum est latitudinem faciens ΘK: quare [per 23. 10.] ΘK est rationalis, & incommensurabilis ipsi EZ longitudine. quod cum medium sit ΓΔ, rationale autem AB; erit AB ipsi ΓΔ incommensurabile: ergo & EH incommensurabile est ipsi ΘI. ut autem EH ad ΘI ita est [per 1.6.] recta linea EΘ ad ΘK: ergo EΘ ipsi ΘK longitudine est incommensurabilis. & sunt ambæ rationales: quare EΘ, ΘK rationales sunt potentia solum commensurabiles; & ob id ex binis nominibus est EK, divisa ad punctum Θ. & quoniam majus est AB quam ΓΔ, æquale autem AB ipsi EH & ΓΔ ipsi ΘI; erit & EH quam ΘI majus: ergo & EΘ major est quam ΘK. vel igitur EΘ plus potest quam ΘK quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine, vel incommensurabilis. possit primum quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine, & sit major ΘE expositæ rationali EZ commensurabilis: ergo [per 1. deff. secund. 10.] EK ex binis nominibus est prima, atque est EZ rationalis. si autem spatium contineatur sub rationali & ex binis nominibus prima, recta linea spatium potens [per 55.10.] ex binis nominibus est: ergo quæ potest spatium EI est ex binis nominibus: quare & ea quæ potest spatium AΔ est ex binis nominibus. sed EΘ plus possit quam ΘK quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, & sit major EΘ expositæ rationali EZ commensurabilis longitudine: ergo [per 4. deff. secund. 10.] EK ex binis nominibus est quarta, & est rationalis EZ. si autem spatium contineatur sub rationali & ex binis nominibus quarta, recta linea spatium potens [per 58. 10.] irrationalis est, quæ major appellatur: potens igitur spatium EI major est: ergo & potens spatium AΔ major.

Sed sit spatium AB minus quam ΓΔ: erit & EH quam ΘI minus; & ob id recta linea EΘ minor

minor quam recta ΘK: vel igitur KΘ plus potest quam EΘ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. possit primum quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine, & sit minor EΘ commensurabilis expositæ rationali EZ longitudine: ergo [per 2. deff. secund. 10.] EK ex binis nominibus est secunda, rationalis autem EZ. quod si spatium contineatur sub rationali & ex binis nominibus secunda, recta linea spatium potens [per 56.10.] est ex binis mediis prima: potens igitur spatium EI est ex binis mediis prima: ergo & potens spatium AΔ. sed KΘ plus possit quam EΘ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis; sitque minor EΘ expositæ rationali EZ commensurabilis longitudine: quare [per 5. deff. secund. 10.] EK est ex binis nominibus quinta; atque est rationalis EZ. si autem spatium contineatur sub rationali & ex binis nominibus quinta, quæ spatium potest recta linea [per 59. 10.] rationale ac medium potens est: quæ igitur potest spatium EI rationale & medium potens est; ideoque rationale & medium potens est quæ potest spatium AΔ.

Si igitur rationale & medium componantur, quatuor irrationales fiunt; vel ea quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis mediis prima, vel major, vel rationale ac medium potens. quod erat demonstrandum.



ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ΘΚ· ἤτοι δὲ ἡ ΘΚ τῆς ΕΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἔστω ἡ ἐλάσσων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα, ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ. ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ἀλλὰ δὴ ἡ ΚΘ τῆς ΕΘ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστω ἡ ἐλάσσων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη, ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ. ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.

Ῥητοῦ ἄρα καὶ μέσου συντιθεμένου, τέσσαρες ἄλογοι γίνονται· ἤτοι ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων, ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἢ μείζων, ἢ ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. LXXIII. Theor.

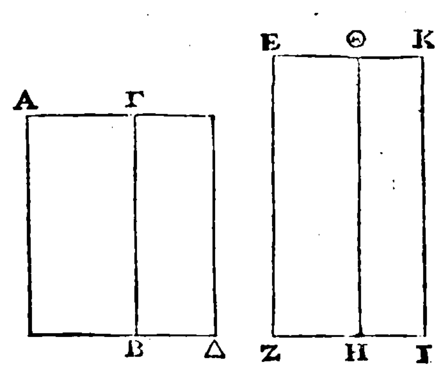
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ογ'.

Si duo media inter se incommensurabilia componantur, duæ reliquæ irrationales fiunt; vel ex binis mediis secunda, vel bina media potens.

Δύο μέσων ἀσυμμέτρων ἀλλήλοις συντιθεμένων, αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται· ἤτοι ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα, ἢ ἡ δύο μέσα δυναμένη.

Componantur enim duo media incommensurabilia inter se AB, ΓΔ: dico rectam lineam, quæ spatium AΔ potest, vel ex binis mediis secundam esse, vel bina media potentem.

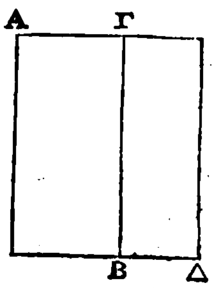
Spatium enim AB vel majus est quam ΓΔ, vel minus. sit primum majus; exponaturque rationalis EZ: & ad EZ spatio quidem AB æquale applicetur EH, latitudinem faciens EΘ; ipsi vero ΓΔ æquale applicetur ΘI latitudinem faciens ΘK. & quoniam medium est utrumque ipsorum AB, ΓΔ, erit & utrumque EH, ΘI medium; & ad rationalem EZ applicata sunt, quæ latitudinem faciunt EΘ, ΘK: ergo [per 23. 10.] utraque EΘ, ΘK rationalis est, & ipsi EZ longitudine incommensurabilis. quod cum AB



Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσα ἀσύμμετρα ἀλλήλοις τὰ ΑΒ, ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη, ἤτοι ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα, ἢ δύο μέσα δυναμένη.

Τὸ γὰρ ΑΒ τοῦ ΓΔ ἤτοι μεῖζόν ἐστιν, ἢ ἔλασσον. ἔστω πρότερον μεῖζον τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τῷ μὲν ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ, τῷ δὲ ΓΔ ἴσον τὸ ΘΙ πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΓΔ· μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΕΗ, ΘΙ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὰς ΕΘ, ΘΚ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΕΘ, ΘΚ ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν

μετρόν ἐστι τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΕΗ, τὸ δὲ ΓΔ τῷ ΘΙ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΙ. ὡς δὲ τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΙ οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΚ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΘΚ μήκει· αἱ ΕΘ, ΘΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΚ. ἤτοι δὲ ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ οὐδετέρα τῶν ΕΘ, ΘΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ΕΚ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη, ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ. ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ, τουτέστι τὸ ΑΔ δυναμένη, ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα. ἀλλὰ δὴ ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΕΘ, ΘΚ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη. ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη δύο μέσα δυναμένη ἐστίν· ὥστε ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη δύο μέσα δυναμένη ἐστίν. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι, κἂν ἔλαττον ᾖ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ, ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη, ἢ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἐστὶν, δύο ἢ μέσα δυναμένη.

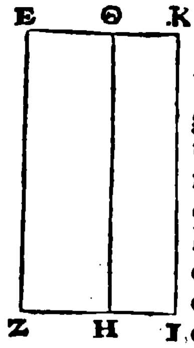


Δύο ἄρα μέσων ἀσυμμέτρων ἀλλήλοις συντιθεμένων, αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται, ἤτοι ἐκ δύο μέσων δευτέρα, ἢ δύο μέσα δυναμένη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

* Πόρισμα.

Η ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αἱ μετ᾽ αὐτὴν ἄλογοι οὔτε τῇ μέσῃ οὔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταί, τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ᾽ ἣν παράκειται μήκει, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ, τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς δύο μέσα δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην· ἐπεὶ οὖν τὰ εἰρημένα πλάτη διαφέρει τοῦ πρώτου καὶ ἀλλήλων,

incommensurabile sit ipsi ΓΔ; sitque AB quidem æquale ipsi EH; ΓΔ vero ipsi ΘI: erit & EH ipsi ΘI incommensurabile. sed ut EH ad ΘI ita est EΘ ad ΘK: incommensurabilis igitur est EΘ ipsi ΘK longitudine: ideoque EΘ, ΘK rationales sunt potentia solum commensurabiles: quare ex binis nominibus est EK. itaque vel EΘ plus potest quam ΘK quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine, vel incommensurabilis. possit primum quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; & neutra ipsarum EΘ, ΘK longitudine commensurabilis est expositæ rationali EZ: ergo EK est ex binis nominibus tertia, & est EZ rationalis. si autem spatium contineatur sub rationali & ex binis nominibus tertia, recta linea spatium potens [per 57.10.] est ex binis mediis secunda: ergo quæ potest spatium EI, hoc est AΔ, est ex binis mediis secunda. sed EΘ plus possit quam ΘK quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; & utraque ipsarum EΘ, ΘK longitudine incommensurabilis est expositæ rationali EZ: quare [per 6. deff. secund. 10.] EK est ex binis nominibus sexta. at si spatium contineatur sub rationali & ex binis nominibus sexta, quæ spatium potest recta linea [per 60. 10.] est bina media potens: ergo quæ potest spatium AΔ bina media potest. Similiter demonstrabimus, si & AB sit minus quam ΓΔ, rectam lineam, quæ spatium potest AΔ, vel ex binis mediis secundam esse, vel bina media potentem.



Si igitur duo media inter se incommensurabilia componantur, reliquæ duæ irrationales fiunt; vel ex binis mediis secunda, vel bina media potens. quod erat demonstrandum.

* *Corollarium.*

Quæ ex binis nominibus & quæ post ipsam sunt irrationales neque mediæ neque inter se eædem sunt, quadratum enim quod fit à media ad rationalem applicatum [per 23.10.] latitudinem efficit rationalem & ei ad quam applicatur longitudine incommensurabilem; quod autem fit ab ea quæ est ex binis nominibus ad rationalem applicatum [per 61.10.] latitudinem efficit ex binis nominibus primam; quod ab ea quæ est ex binis mediis prima ad rationalem applicatum [per 62.10.] latitudinem efficit ex binis nominibus secundam; quod ab ea quæ est ex binis mediis secunda ad rationalem applicatum [per 63. 10.] latitudinem efficit ex binis nominibus tertiam; quod à majori ad rationalem applicatum [per 64. 10.] latitudinem efficit ex binis nominibus quartam; quod ab ea quæ rationale ac medium potest ad rationalem applicatum [per 65.10.] latitudinem efficit ex binis nominibus quintam; quod ab ea quæ bina media potest ad rationalem applicatum [per 66. 10.] latitudinem efficit ex binis nominibus sextam: quoniam igitur dictæ latitudines differunt & à prima & inter sese,

* In quibusdam Exemplaribus perperam *Lemma* dicitur.

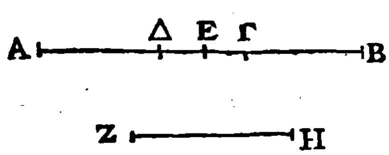
à primâ quidem quod rationalis sit, inter sese vero quod ordine non sint eædem, constat & ipsas irrationales inter se differentes esse.

τῆς μὲν πρώτης ὅτι ῥητή ἐστιν, ἀλλήλων δὴ ὅτι τῇ τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί, δῆλον ὡς καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι διαφέρουσιν ἀλλήλων.

SCHOLIUM.

Septem sunt senarii usque ad ea de quibus hactenus dictum est; quorum primus quidem ostendit [in 37. 38. 39. 40. 41. 42] ortum linearum irrationalium; secundus autem divisionem, nempe [in 43. 44. 45. 46. 47. 48.] quod ad unum duntaxat punctum dividuntur; tertius earum quæ ex binis nominibus inventionem, videlicet primæ 49, secundæ 50, tertiæ 51, quartæ 52, quintæ 53, & sextæ 54; deinceps sequitur quartus senarius, ostendens quomodo hæ lineæ inter se differant; namque usus iis quæ ex binis nominibus, ostendit [ad 55. 56. 57. 58. 59. 60.] differentiam sex irrationalium. quintum & sextum exposuit, ostendens in quinto [ad 61. 62. 63. 64. 65. 66.] quidem applicationes quadratorum quæ ex irrationalibus, videlicet quales irrationales faciant latitudines applicatorum spatiorum. in sexto autem [ad 67. 68. 69. 70. 71.] quomodo irrationalibus commensurabiles ejusdem speciei sint. rursus in septimo [in 72. 73.] manifeste ostendit differentiam ipsarum.

Apparet etiam & in his irrationalibus arithmetica analogia: & quæ sumitur media proportionalis inter portiones cujusque lineæ irrationalis juxta arithmeticam analogiam, & ipsa est ejusdem speciei cum iis, inter quarum portiones media interjicitur. atque primum arithmeticam medietatem in his esse, sic apparet. ponatur enim exempli gratia ex binis nominibus A B, & in nomina ad punctum Γ dividatur: manifestum est A Γ majorem esse quam Γ B. auferatur à recta linea A Γ ipsi Γ B æqualis A Δ, & Γ Δ bifariam in E secetur: constat igitur A E ipsi E B æqualem esse. ponatur alterutri ipsarum æqualis Z H: manifestum est quo differt A Γ ab ipsa Z H, eo differre E B ab ipsa Γ B; etenim A Γ ab ipsa Z H differt magnitudine E Γ, & eadem magnitudine differt Z H ab ipsa Γ B, quod est arithmeticæ analogiæ proprium. manifestum autem est Z H commensurabilem esse ipsi A B, est enim ejus dimidiæ æqualis; ergo [per 67. 10.] Z H ex binis nominibus est. similiter ostendetur & in aliis.



*ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἑπτά εἰσιν ἑξάδες ἄχρι τῶν ἐνταῦθα εἰρημένων· ὧν ἡ μὲν πρώτη ἐδείκνυ τὴν γένεσιν αὐτῶν· ἡ δὲ δευτέρα τὴν διαίρεσιν, ὅτι καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιροῦνται· ἡ δὲ τρίτη τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων εὕρεσιν, πρώτης, δευτέρας, τρίτης, τετάρτης, πέμπτης, ἕκτης, ἀφ' ἧς ἡ τετάρτη ἑξὰς τὴν διαφορὰν ἐπεδείκνυε τῶν ἀλόγων, πῇ διαφέρουσι· προσχρώμενος γὰρ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων ἀποδείκνυσι τὴν διαφορὰν τῶν ἓξ ἀλόγων. πέμπτην καὶ ἕκτην ἐξέθετο, δεικνύων ἐν μὲν τῇ πέμπτῃ τὰς παραβολάς, τὰς ἀπὸ τῶν ἀλόγων, τίνας ἀλόγους ποιοῦσι τὰ πλάτη τῶν παραβαλλομένων χωρίων. ἐν δὲ τῇ ἕκτῃ, πῶς αἱ σύμμετροι ταῖς ἀλόγοις ὁμοειδεῖς αὐταῖς εἰσί. πάλιν, ἐν τῇ ἑβδόμῃ σαφῶς διαφορὰν αὐτῶν ἡμῖν δείκνυσιν.

Ἀναφαίνεται δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἀλόγων τούτων ἡ ἀριθμητικὴ ἀνάλογον· καὶ ἡ μέση λαμβανομένη ἀνάλογον τῶν τμημάτων οἱασδήποτε ἀλόγου κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν, καὶ αὐτὴ ὁμοειδής ἐστιν ὧν ἐστι μέση ἀνάλογον. καὶ πρῶτον ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ μεσότης ἐν τούτοις ἐστί. κείσθω γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων εἰ τύχοι A B, καὶ διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ· φανερὸν ὅτι ἡ A Γ τῆς Γ B ἐστὶ μείζων. ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς A Γ τῇ Γ B ἴση ἡ A Δ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ Γ Δ κατὰ τὸ E· φανερὸν ὅτι ἡ A E τῇ E B ἐστὶν ἴση. κείσθω ὁποτέρᾳ αὐτῶν ἴση ἡ Z H· φανερὸν δὴ ὅτι ᾧ διαφέρει ἡ A Γ τῆς Z H τούτῳ διαφέρει καὶ ἡ E B τῆς Γ B, ἡ μὲν γὰρ A Γ τῆς Z H τῇ E Γ, τῷ αὐτῷ δὲ καὶ ἡ Z H τῆς Γ B, ὅπερ ἐστὶν ἀριθμητικῆς ἀναλογίας. δῆλον δὲ ὅτι ἡ Z H σύμμετρός ἐστι τῇ A B, τῇ γὰρ ἡμισείᾳ αὐτῆς ἐστιν ἴση· ὥστε ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. ὁμοίως δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.

Principium Senariorum per Detractionem.

Ἀρχὴ τῶν κατ' ἀφαίρεσιν ἑξάδων.

Prop. LXXIV. Theor.

Si à rationali rationalis auferatur, potentia solum commensurabilis existens toti; reliqua irrationalis est, vocetur autem apotome.

A Rationali enim A B rationalis auferatur B Γ, potentia solum commensurabilis existens

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οδʹ.

Ἐὰν ἀπὸ ῥητῆς ῥητὴ ἀφαιρεθῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἀποτομή.

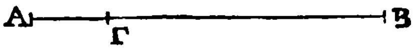
Ἀπὸ γὰρ ῥητῆς τῆς A B ῥητὴ ἀφῃρήσθω ἡ B Γ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ·

* Scholium hoc non agnoscunt nostri Codd. MSS. Atque in Editis Græcis male collocatur post Prop. LXX.

λέγω

λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ λοιπῷ ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐπεὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ἀποτομή.



toti: dico reliquam ΑΓ irrationalem esse, quæ vocatur apotome.

Quoniam enim incommensurabilis est ΑΒ ipsi ΒΓ longitudine, atque est [per 1.6.] ut ΑΒ ad ΒΓ ita quadratum ex ΑΒ ad id quod continetur sub ΑΒ, ΒΓ, erit quadratum ex ΑΒ incommensurabile ei quod sub ΑΒ,ΒΓ continetur: sed quadrato ex ΑΒ commensurabilia sunt [per 16.10.] quadrata ex ΑΒ, ΒΓ; ei vero quod continetur sub ΑΒ, ΒΓ commensurabile est quod bis sub ΑΒ, ΒΓ continetur: quadrata igitur ex ΑΒ, ΒΓ ei quod bis continetur sub ΑΒ, ΒΓ sunt incommensurabilia: ergo reliquo, nempe quadrato ex ΑΓ, incommensurabilia sunt quadrata ex ΑΒ,ΒΓ; quoniam quadrata ex ΑΒ, ΒΓ [per 7. 2.] æqualia sunt ei quod bis sub ΑΒ, ΒΓ continetur una cum quadrato ex ΑΓ. rationalia autem sunt quadrata ex ΑΒ, ΒΓ: ergo [per 11.def.10.] recta linea ΑΓ est irrationalis, vocetur autem apotome.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οε'.

Ἐὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχῃ· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

Ἀπὸ γὰρ μέσης τῆς ΑΒ μέση ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ΑΒ, μετὰ δὲ τῆς ΑΒ ῥητὸν ποιοῦσα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ μέσαι εἰσί, μέσα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἀσύμμετρα ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ λοιπῷ ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἐπεὶ κἂν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται. ῥητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

Prop. LXXV. Theor.

Si à media media auferatur potentia solum commensurabilis existens toti, quæ cum tota rationale continet: reliqua irrationalis est, vocetur autem mediæ apotome prima.

A Media enim ΑΒ auferatur media ΒΓ, potentia solum commensurabilis existens ipsi ΑΒ, & cum ea rationale faciens, videlicet quod sub ΑΒ, ΒΓ continetur: dico reliquam ΑΓ irrationalem esse, vocetur autem mediæ apotome prima.

Quoniam enim ΑΒ, ΒΓ mediæ sunt, erunt & quadrata quæ ex ΑΒ, ΒΓ media. rationale autem est [ex hyp.] quod bis continetur sub ΑΒ, ΒΓ, quadrata igitur ex ΑΒ, ΒΓ incommensurabilia sunt ei quod bis sub ΑΒ,ΒΓ continetur: ergo & reliquo, sc. [per 7.2.] quadrato ex ΑΓ, incommensurabile est id quod bis sub ΑΒ, ΒΓ continetur: quoniam si tota magnitudo uni componentium sit incommensurabilis, [per 17. 10.] & quæ à principio magnitudines incommensurabiles erunt. rationale autem est quod bis continetur sub ΑΒ, ΒΓ: irrationale igitur est quadratum ex ΑΓ: ideoque irrationalis est ΑΓ, voceturq; media apotome prima.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οϛ'.

Ἐὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχῃ· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα.

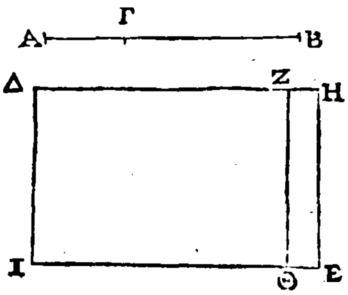
Ἀπὸ γὰρ μέσης τῆς ΑΒ μέση ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης τῆς ΑΒ μέσον περιέχουσα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα.

Prop. LXXVI. Theor.

Si à media media auferatur, potentia solum commensurabilis existens toti, quæ cum tota medium continet; & reliqua irrationalis est, vocetur autem mediæ apotome secunda.

A Media enim ΑΒ auferatur media ΒΓ potentia solum commensurabilis existens toti ΑΒ, & cum ea medium continens, videlicet quod continetur sub ΑΒ, ΒΓ: dico reliquam ΑΓ irrationalem esse, vocetur autem mediæ apotome secunda.

Exponatur enim rationalis ΔI, & quadratis quidem ex AB, BΓ æquale parallelogrammum ΔE ad ipsam ΔI applicetur, latitudinem faciens ΔH; ei vero quod bis sub AB, BΓ continetur æquale parallelogrammum ΔΘ ad eandem ΔI applicetur, latitudinem faciens ΔZ: reliquum igitur ZE [per 7. 2.] est æquale quadrato ex AΓ. & quoniam media sunt quadrata ex AB, BΓ; erit & parallelogrammum ΔE medium. & ad rationalem ΔI applicatum est, latitudinem faciens ΔH: ergo [per 23.10.] ΔH est rationalis, & ipsi ΔI longitudine incommensurabilis. rursus, quoniam medium est quod sub AB, BΓ continetur, erit & quod bis continetur sub AB, BΓ medium. atque est æquale parallelogrammo ΔΘ: ergo & ΔΘ est medium, & ad rationalem ΔI applicatum est, latitudinem faciens ΔZ: rationalis igitur est ΔZ, & ipsi ΔI longitudine incommensurabilis. & quoniam AB, BΓ potentia solum commensurabiles sunt; erit AB ipsi BΓ incommensurabilis longitudine: ergo [per 1. 6. & 10.10.] quadratum ex AB incommensurabile est ei quod sub AB, BΓ continetur. sed quadrato quidem ex AB commensurabilia sunt [per 16.10.] quæ ex AB, BΓ fiunt quadrata; ei vero quod sub AB, BΓ continetur [per 6.10.] commensurabile est id quod bis continetur sub AB, BΓ: quadrata igitur ex AB, BΓ incommensurabilia sunt ei quod bis sub AB, BΓ continetur. ΔE autem est [per constr.] æquale quadratis ex AB, BΓ; & parallelogrammum ΔΘ æquale est ei quod bis continetur sub AB, BΓ: ergo ΔE ipsi ΔΘ est incommensurabile. sed [per 1.6.] ut ΔE ad ΔΘ ita recta linea HΔ ad ΔZ: incommensurabilis igitur est HΔ ipsi ΔZ longitudine. & sunt ambæ rationales: quare HΔ, ΔZ rationales sunt potentia solum commensurabiles: ergo [per 74.10.] ZH apotome est, & ΔI est rationalis. quod autem sub rationali & irrationali continetur rectangulum [per sch. 39. 10.] irrationale est, ideo & ipsum potens est irrationalis. sed recta linea AΓ potest ZE parallelogrammum: ergo AΓ est irrationalis, vocetur autem mediæ apotome secunda.



Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΔΙ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΙ παραβεβλήσθω τὸ ΔΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΙ παραβεβλήσθω τὸ ΔΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. καὶ ἐπεὶ μέσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΔΕ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἐστί. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΔΘ· καὶ τὸ ΔΘ ἄρα μέσον ἐστί, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΖ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἴσον δὲ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ ΔΕ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ ΔΘ· ἀσύμμετρον ἄρα τὸ ΔΕ τῷ ΔΘ. ὡς δὲ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΔΘ οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΔ τῇ ΔΖ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΗΔ, ΔΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΗ ἄρα ἀποτομή ἐστι, ῥητὴ δὲ ἡ ΔΙ. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι· καὶ ἡ δυναμένη ἄρα αὐτὸ ἄλογός ἐστι. καὶ δύναται τὸ ΖΕ ἡ ΑΓ· ἡ ΑΓ ἄρα ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μέση ἀποτομὴ δευτέρα.

Prop. LXXVII. Theor.

Si à recta linea recta linea auferatur, potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium; reliqua irrationalis est, vocetur autem minor.

A Recta linea AB auferatur recta BΓ, potentia incommensurabilis existens toti, faciensque cum tota AB compositum quidem ex ipsarum AB, BΓ quadratis rationale, quod autem

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οζ´.

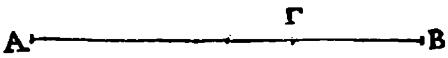
Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν ἀπ᾿ αὐτῶν ἅμα ῥητόν, τὸ δ᾿ ὑπ᾿ αὐτῶν μέσον· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἐλάσσων.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ποιοῦσα μετὰ τῆς ὅλης τῆς ΑΒ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἅμα ῥητόν, τὸ δὲ

δὶς

δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἅμα μέσον· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἐλάσσων.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων ῥητόν ἐστι, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ ἀναστρέψαντι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ἐλάσσων.



bis sub AB, BΓ continetur medium: dico reliquam AΓ irrationalem esse, quæ vocatur minor.

Quoniam enim compositum quidem ex ipsarum AB, BΓ quadratis rationale est: quod autem bis sub AB, BΓ continetur medium; erunt quadrata ipsarum AB, BΓ incommensurabilia ei quod bis continetur sub AB, BΓ: ergo [per 17. 10.] per conversionem, quadrata ex AB, BΓ quadrato ex AΓ sunt incommensurabilia. sed [ex hyp.] quadrata ex AB, BΓ rationalia sunt: irrationale igitur est quadratum ex AΓ; ideoque recta linea AΓ est irrationalis, vocetur autem minor.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οη'.

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒ, ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων μέσον ἐστί, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. καί ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ ἄλογόν ἐστιν· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

PROP. LXXVIII. THEOR.

Si à recta linea recta linea auferatur potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis bis continetur rationale; reliqua irrationalis est, vocetur autem cum rationali medium totum efficiens.

A Recta enim linea AB recta linea BΓ auferatur incommensurabilis existens toti AB, faciensque compositum quidem ex ipsarum AB, BΓ quadratis medium; quod autem bis sub AB, BΓ continetur, rationale: dico reliquam AΓ irrationalem esse, vocetur autem cum rationali medium totum efficiens.

Quoniam enim compositum ex ipsarum AB, BΓ quadratis medium est, quod autem bis continetur sub AB, BΓ rationale; erunt ex AB, BΓ quadrata incommensurabilia ei quod bis sub AB, BΓ continetur: & reliquum igitur quadratum ex AΓ incommensurabile est [per 17. 10.] ei quod bis continetur sub AB, BΓ. atque est quod bis continetur sub AB, BΓ rationale: ergo quadratum ex AΓ irrationale est: & ob id recta linea AΓ irrationalis, vocetur autem cum rationali medium totum efficiens.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οθ'.

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι τὰ ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ' αὐτῶν· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ΑΒ, ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον, ἔτι δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ

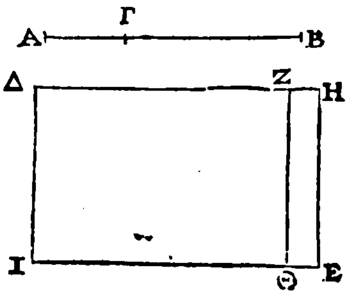
PROP. LXXIX. THEOR.

Si à recta linea recta linea auferatur potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis bis continetur medium, & adhuc ipsorum quadrata incommensurabilia ei quod bis continetur sub ipsis; reliqua irrationalis est, vocetur autem cum medio medium totum efficiens.

A Recta enim linea AB recta linea BΓ auferatur, potentia incommensurabilis existens toti AB, faciensque compositum quidem ex ipsarum AB, BΓ quadratis medium, quod autem bis sub AB, BΓ continetur medium, & adhuc quadrata ipsarum AB, BΓ incommensurabilia rectangulo quod bis continetur sub AB, BΓ: dico reliquam AΓ irratio-

irrationalem esse, vocetur autem cum medio medium totum efficiens.

Exponatur enim rationalis ΔΙ, & quadratis quidem ex ΑΒ, ΒΓ æquale parallelogrammum ΔΕ ad ipsam ΔΙ applicetur, latitudinem faciens ΔΗ; ei vero quod bis continetur sub ΑΒ, ΒΓ æquale auferatur ΔΘ, latitudinem faciens ΔΖ: ergo [per 7.2.] reliquum ΖΕ est æquale quadrato ex ΑΓ; & ob id recta linea ΑΓ ipsum ΖΕ potest. itaque quoniam compositum ex ipsarum ΑΒ, ΒΓ quadratis medium est, & parallelogrammo ΔΕ æquale; erit ipsum ΔΕ medium, & ad rationalem ΔΙ applicatum est, latitudinem faciens ΔΗ: quare [per 23. 10.] ΔΗ est rationalis, & ipsi ΔΙ longitudine incommensurabilis. rursus, quoniam id quod bis sub ΑΒ, ΒΓ continetur medium est, & æquale parallelogrammo ΔΘ, erit ΔΘ medium, & ad rationalem ΔΙ applicatum est, latitudinem faciens ΔΖ: ergo ΔΖ est rationalis, ipsique ΔΙ incommensurabilis longitudine. & quoniam quadrata ex ΑΒ, ΒΓ incommensurabilia sint ei quod bis sub ΑΒ, ΒΓ continetur, & parallelogrammum ΔΕ ipsi ΔΘ est incommensurabile. ut autem ΔΕ ad ΔΘ ita est [per 1. 6.] recta linea ΔΗ ad ipsam ΔΖ: incommensurabilis igitur est [per 10.10.] ΔΗ ipsi ΔΖ. & sunt ambæ rationales: ergo ΔΗ, ΔΖ rationales sunt potentia solum commensurabiles: apotome igitur est ΖΗ [per 74.10.], & ΖΘ est rationalis. quod autem sub rationali & apotoma continetur rectangulum [per sch.39.10.] irrationale est, ipsumque potens est irrationalis, atque ΑΓ potest parallelogrammum ΖΕ: ergo ΑΓ irrationalis est, vocetur autem cum media medium totum efficiens.



ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

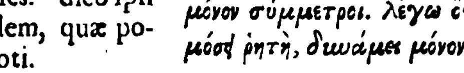
Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΔΙ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παραβεβλήσθω τὸ ΔΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΔΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ὥστε ἡ ΑΓ δύναται τὸ ΖΕ. καὶ ἐπεὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων μέσον ἐστὶ, καί ἐστιν ἴσον τῷ ΔΕ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΕ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἐστὶ, καί ἐστιν ἴσον τῷ ΔΘ· τὸ ἄρα ΔΘ μέσον ἐστὶ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΖ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΕ τῷ ΔΘ. ὡς δὲ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΔΘ οὕτως ἐστὶ καὶ ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΔΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ τῇ ΔΖ. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΔΗ, ΔΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ, ῥητὴ δὲ ἡ ΖΘ. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καὶ δύναται τὸ ΖΕ ἡ ΑΓ· ἡ ΑΓ ἄρα ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Prop. LXXX. Theor.

Apotomæ una tantum congruit recta linea potentia solum commensurabilis existens toti.

SIT apotome ΑΒ, congruens autem ipsi sit ΒΓ: ergo [per 74. 10.] ΑΓ, ΓΒ rationales sunt potentia solum commensurabiles. dico ipsi ΑΒ alteram non congruere rationalem, quæ potentia solum sit commensurabilis toti.

Si enim fieri potest, congruat ΒΔ: ergo [per 74.10.] ΑΔ, ΔΒ rationales sunt potentia solum commensurabiles. & quoniam quo excessu quadrata ex ΑΔ, ΔΒ excedunt id quod bis continetur sub ΑΔ, ΔΒ, eo & quadrata ex ΑΓ, ΓΒ excedunt id quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur; utraque enim excedunt eodem quadrato, nempe quod fit ex ΑΒ: & permutando, quo excessu quadrata ex ΑΔ, ΔΒ excedunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, eodem & id quod bis continetur sub ΑΔ, ΔΒ excedet id quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur. sed quadrata ex ΑΔ, ΔΒ excedunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ rationali:



ΠΡΟΤΑΣΙΣ π΄.

Τῇ ἀποτομῇ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΒΓ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόσει ῥητὴ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τῷ γὰρ αὐτῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἀμφότερα ὑπερέχει· ἐναλλὰξ ἄρα ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. τὸ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ·

ῥητὴ

ῥητὴ γὰρ ἑκατέρα· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, μέσα γὰρ ἀμφότερα, μέσον δὲ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ· τῇ ἄρα ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόζει ῥητὴ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.

Μία ἄρα μόνον τῇ ἀποτομῇ προσαρμόσει ῥητὴ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[ex hyp.] utraque rectarum linearum rationalis est; quod igitur bis continetur sub ΑΔ, ΔΒ excedit id quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur rationali, quod fieri non potest, ambo enim media sunt, medium autem [per 27. 10.] medium non superat rationali; ergo rectæ lineæ ΑΒ altera non congruit rationalis, potentia solum commensurabilis existens toti.

Igitur apotomæ una tantum congruit rationalis, potentia solum commensurabilis existens toti. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πα΄.

Τῇ μέσῃ ἀποτομῇ πρώτῃ μόνον μία προσαρμόζει εὐθεῖα μέση, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.

Ἔστω γὰρ μέση ἀποτομὴ πρώτη ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ προσαρμοζέτω ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόζει μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, προσαρμοζέτω καὶ ἡ ΔΒ· αἱ ἄρα ΑΔ, ΔΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ (τῷ γὰρ αὐτῷ πάλιν ὑπερέχουσι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ·) ἐναλλὰξ ἄρα ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, μέσα γὰρ ἀμφότερα, μέσον δὲ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.

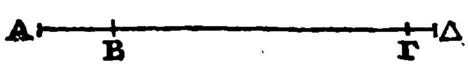
Τῇ ἄρα μέσῃ ἀποτομῇ πρώτῃ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. LXXXI. Theor.

Mediæ apotomæ primæ una tantum congruit recta linea media, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota rationale continens.

SIT enim media apotome prima ΑΒ, & ipsi ΑΒ congruat ΒΓ: ergo [per 75. 10.] ΑΓ, ΓΒ mediæ sunt potentia solum commensurabiles, quæ rationale continent, nempe quod fit sub ΑΓ, ΓΒ: dico ipsi ΑΒ alteram non congruere mediam, quæ potentia solum sit commensurabilis toti, & cum tota medium contineat.

Si enim fieri potest, congruat ΔΒ: ergo [per 75. 10.] ΑΔ, ΔΒ mediæ sunt potentia solum commensurabiles, quæ rationale continent, nempe quod fit sub ΑΔ, ΔΒ. & quoniam quo excessu quadrata ex ΑΔ, ΔΒ excedunt id quod bis continetur sub ΑΔ, ΔΒ, eodem & quadrata ex ΑΓ, ΓΒ excedunt quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur; (excedunt enim [per 7. 2.] eodem quadrato ex ΑΒ;) & permutando quo excessu quadrata ex ΑΔ, ΔΒ excedunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, eodem & quod bis continetur sub ΑΔ, ΔΒ excedit id quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur. sed quod bis continetur sub ΑΔ, ΔΒ excedit id quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur rationali; ambo enim rationalia sunt: ergo & quadrata ex ΑΔ, ΔΒ excedunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ rationali, quod fieri non potest; ambo enim [ex hyp.] sunt media, medium autem [per 27.10.] medium non superat rationali.



Quare mediæ apotomæ primæ una tantum congruit recta linea media, quæ potentia solum toti sit commensurabilis, & cum tota rationale contineat. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πβ΄.

Τῇ μέσῃ ἀποτομῇ δευτέρᾳ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα.

Ἔστω μέση ἀποτομὴ δευτέρα ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόσει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον

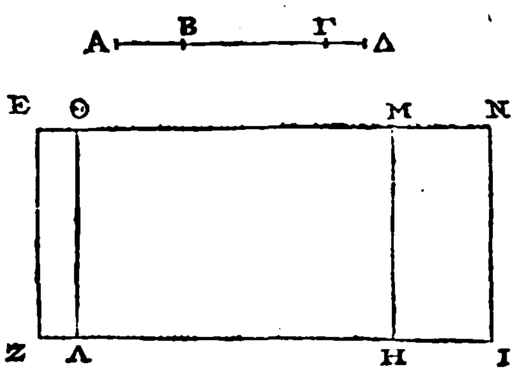
Prop. LXXXII. Theor.

Mediæ apotomæ secundæ una tantum congruit recta linea, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota medium continens.

SIT media apotome secunda ΑΒ, & ipsi ΑΒ congruat ΒΓ: ergo [per 76. 10.] ΑΓ, ΓΒ mediæ sunt potentia solum commensurabiles, mediumque continentes sub ΑΓ, ΓΒ: dico ipsi ΑΒ alteram non congruere mediam quæ potentia solum sit commensurabilis toti, & cum tota medium contineat.

Si enim fieri potest, congruat ΒΔ; quare [per 76.10.] ΑΔ, ΔΒ mediæ sunt potentia solum commensurabiles, quæ medium sub ΑΔ, ΔΒ continent. & exponatur rationalis ΕΖ, quadratisque ex ΑΓ, ΓΒ æquale parallelogrammum ΕΗ ad ipsam ΕΖ applicetur, latitudinem faciens ΕΜ; & ei quod bis continetur sub ΑΓ, ΓΒ æquale auferatur parallelogrammum ΘΗ, latitudinem faciens ΘΜ: reliquum igitur ΕΛ [per 7.2.] est æquale ei quod fit ex ΑΒ quadrato: ergo ΑΒ ipsum ΕΛ potest. rursus, quadratis ex ΑΔ, ΔΒ æquale parallelogrammum ΕΙ ad ipsam ΕΖ applicetur, latitudinem faciens ΕΝ, est autem & ΕΛ æquale quadrato ex ΑΒ: reliquum igitur ΘΙ [per 7.2.] est æquale ei quod bis sub ΑΔ, ΔΒ continetur. & quoniam mediæ sunt ΑΓ, ΓΒ, erunt & quadrata ex ΑΓ, ΓΒ media. suntque æqualia parallelogrammo ΕΗ: quare ΕΗ est medium, & ad rationalem ΕΖ applicatum est, latitudinem faciens ΕΜ: ergo [per 23.10.] ΕΜ est rationalis, & ipsi ΕΖ longitudine incommensurabilis. rursus, quoniam medium est quod continetur sub ΑΓ, ΓΒ; & quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur medium erit. atque est æquale parallelogrammo ΘΗ: ergo & ΘΗ est medium, & ad rationalem ΕΖ applicatum est latitudinem faciens ΘΜ: rationalis igitur est ΘΜ, & ipsi ΕΖ incommensurabilis longitudine. & quoniam [ex hyp.] ΑΓ, ΓΒ potentia solum sunt commensurabiles, erit ΑΓ incommensurabilis ipsi ΓΒ longitudine. ut autem ΑΓ ad ΓΒ ita [per 1.6.] quadratum ex ΑΓ ad id quod continetur sub ΑΓ, ΓΒ: incommensurabile igitur est & quadratum ex ΑΓ ei quod sub ΑΓ, ΓΒ continetur. sed quadrato quidem ex ΑΓ commensurabilia sunt [per 16. 10.] quadrata ex ΑΓ, ΓΒ; ei vero quod continetur sub ΑΓ, ΓΒ commensurabile est quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur: ergo quadrata ex ΑΓ, ΓΒ incommensurabilia sunt ei quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur. atque est [per constr.] quadratis ex ΑΓ, ΓΒ æquale parallelogrammum ΕΗ; ei vero quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur æquale ipsum ΘΗ: ergo ΕΗ ipsi ΘΗ est incommensurabile. sed ut ΕΗ ad ΘΗ ita est [per 1. 6.] recta linea ΕΜ ad ipsam ΘΜ: quare ΕΜ ipsi ΘΜ est incommensurabilis longitudine. & sunt ambæ rationales: ergo ΕΜ, ΘΜ rationales sunt potentia solum commensurabiles, ac propterea [per 74.10.] apotome est ΕΘ, & ipsi congruens ΘΜ. similiter demonstrabimus & ΘΝ ipsi congruere: apotomæ igitur alia atque alia congruit recta linea, potentia solum commensurabilis existens toti, quod [per 80.10.] fieri non potest.

Ergo mediæ apotomæ secundæ una tantum congruit recta linea media, quæ potentia solum



σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΘΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ὥστε ἡ ΑΒ δύναται τὸ ΕΛ. πάλιν δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΙ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΝ· ἔστι δὲ καὶ τὸ ΕΛ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΙ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ μέσαι εἰσὶν αἱ ΑΓ, ΓΒ, μέσα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. καὶ ἔστιν ἴσα τῷ ΕΗ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἐστί. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΘΗ· καὶ τὸ ΘΗ ἄρα μέσον ἐστὶ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΘΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. καὶ ἔστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΕΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΘΗ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΗ. ὡς δὲ τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΗ οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΜ πρὸς τὴν ΘΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ τῇ ΘΜ μήκει. καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΕΜ, ΘΜ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΜ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΘΝ αὐτῇ προσαρμόζει· τῇ ἄρα ἀποτομῇ ἄλλη καὶ ἄλλη προσαρμόζει εὐθεῖα, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Τῇ ἄρα μέσῃ ἀποτομῇ δευτέρᾳ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση, δυνάμει μόνον συμμέτρος μετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

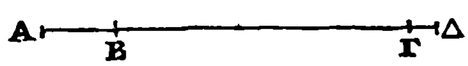
fit commenſurabilis toti, & cum tota medium contineat. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πγ'.

Τῇ ἐλάσσονι μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ποιοῦσα μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον.

Ἔστω ἐλάσσων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἔστω ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα εὐθεῖα οὐ προσαρμόσει, τὰ αὐτὰ ποιοῦσα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα ἅμα ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσον. καὶ ἐπεὶ ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, μέσα γὰρ ἀμφότερα.



Τῇ ἄρα ἐλάσσονι μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, καὶ ποιοῦσα μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. LXXXIII. Theor.

Minori una tantum congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem bis ſub ipſis continetur medium.

Sit minor A B, & ipſi A B congruat B Γ: ergo [per 77. 10.] A Γ, Γ B potentia ſunt incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem bis ſub ipſis continetur medium: dico ipſi A B alteram non congruere rectam lineam, quæ eadem faciat.

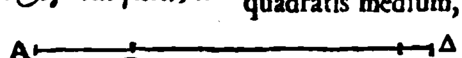
Si enim fieri poteſt, congruat B Δ: ergo [per 77. 10.] A Δ, Δ B potentia ſunt incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale; quod autem bis ſub ipſis continetur medium. & quoniam [per 7. 2.] quo exceſſu quadrata ex A Δ, Δ B excedunt quadrata ex A Γ, Γ B, eodem & quod bis continetur ſub A Δ, Δ B excedit id quod bis ſub A Γ, Γ B continetur: quadrata autem ex A Δ, Δ B excedunt quadrata ex A Γ, Γ B rationali; ambo enim [ex hyp.] rationalia ſunt: igitur & quod bis continetur ſub A Δ, Δ B id quod bis ſub A Γ, Γ B continetur rationali excedet, quod [per 27. 10] fieri non poteſt, etenim [ex hyp.] ambo ſunt media.

Ergo minori una tantum congruit recta linea, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod vero bis ſub ipſis continetur medium. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πδ'.

Τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

Ἔστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, προσαρμόζουσα δὲ ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητόν· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόσει τὰ αὐτὰ ποιοῦσα.



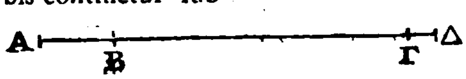
Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν

Prop. LXXXIV. Theor.

Ei quæ cum rationali medium totum facit una tantum congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem bis ſub ipſis continetur rationale.

Sit cum rationali medium totum faciens A B, congruens autem ipſi B Γ; ergo [per 78. 10.] A Γ, Γ B potentia ſunt incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex ipſarum A Γ, Γ B quadratis medium, quod autem bis ſub ipſis continetur rationale: dico ipſi A B alteram non congruere eadem facientem.

Si enim fieri poteſt, congruat B Δ: ergo [per 78. 10.] A Δ, Δ B potentia ſunt incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex ipſarum A Δ, Δ B quadratis medium, quod autem bis ſub ipsis continetur rationale. quoniam igitur [per 7. 2.] quo excessu quadrata ex AΔ, ΔB excedunt quadrata ex AΓ, ΓB, eodem quod bis continetur sub AΔ, ΔB excedit id quod bis sub AΓ, ΓB continetur; quod autem bis continetur sub AΔ, ΔB excedit id quod bis sub AΓ, ΓB continetur rationali, etenim [ex hyp.] ambo rationalia sunt: igitur & quadrata ex AΔ, ΔB rationali excedent quadrata ex AΓ, ΓB, quod [per 27. 10] fieri non potest, cum ambo sint media: non igitur ipsi AB altera congruit, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem bis sub ipsis continetur rationale: quare ei quæ cum rationali medium totum facit una tantum congruet recta linea. quod erat demonstrandum.



ΑΔ, ΔΒ ῥητόν. ἐπεὶ οὖν ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἀκολούθως τῷ πρὸ αὐτοῦ. τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ῥητὰ γάρ ἐστιν ἀμφότερα· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· μέσα γὰρ ἀμφότερα· οὐκ ἄρα τῇ ΑΒ ἑτέρα προσαρμόσει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· τῇ ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία μόνον προσαρμόσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

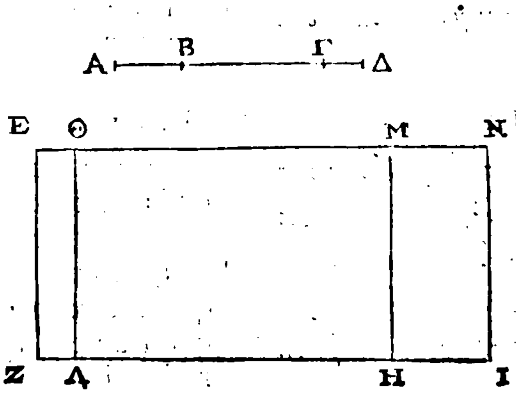
Prop. LXXXV. Theor.

Ei quæ cum medio medium totum facit una tantum congruit recta linea, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem bis sub ipsis continetur medium, & adhuc incommensurabile composito ex quadratis ipsarum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πε'.

Τῇ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν.

SIT cum medio medium totum faciens AB, ipsi vero congruens BΓ: ergo [per 79. 10.] AΓ, ΓB potentia sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem bis sub ipsis AΓ, ΓB continetur medium, & adhuc compositum ex quadratis ipsarum AΓ, ΓB incommensurabile ei quod bis continetur sub ipsis AΓ, ΓB: dico ipsi AB alteram non congruere potentia incommensurabilem toti, & cum tota facientem ea quæ proposita sunt.



Si enim fieri potest, congruat BΔ, ita ut AΔ, ΔB potentia incommensurabiles sint, faciantque compositum quidem ex ipsarum AΔ, ΔB quadratis medium; quod autem bis sub ipsis AΔ, ΔB continetur medium, & adhuc compositum ex quadratis ipsarum AΔ, ΔB incommensurabile ei quod bis continetur sub ipsis AΔ, ΔB. & exponatur rationalis EZ; & quadratis ipsarum AΓ, ΓB æquale parallelogrammum EH ad ipsam EZ applicetur, latitudinem faciens EM; ei vero quod bis continetur sub AΓ, ΓB æquale parallelogrammum auferatur ΘH, latitudinem faciens ΘM: reliquum igitur quadratum ex AB [per 7.2.] est æquale parallelogrammo EΛ: ergo AB ipsum EΛ potest. rursus, quadratis ex AΔ, ΔB æquale parallelogrammum EI ad ipsam EZ applicetur, latitudinem faciens EN. est autem & quadratum ex AB æquale parallelo-

Ἔστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον, ἔτι δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα εὐθεῖα οὐ προσαρμόσει δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὰ προκείμενα.

Εἰ γὰρ δυνατὸν προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα ἅμα μέσον, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσον, καὶ ἔτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΘΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΛ· ἡ ἄρα ΑΒ δύναται τὸ ΕΛ. πάλιν, τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΙ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΝ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τῷ

ΕΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΙ. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καί ἐστιν ἴσον τῷ ΕΗ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ· καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἴσον τὸ ΘΗ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΘΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΜ τῇ ΜΘ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΕΜ, ΜΘ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΜ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἡ ΕΘ πάλιν ἀποτομή ἐστι, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΝ· τῇ ἄρα ἀποτομῇ ἄλλη καὶ ἄλλη προσαρμόζει ῥητὴ, δυνάμει μόνον ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τῇ ΑΒ ἑτέρα προσαρμόσει εὐθεῖα· τῇ ἄρα ΑΒ μία μόνον προσαρμόσει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὰ τε ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἅμα μέσον, ἔτι τε τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ' αὐτῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

grammo ΕΛ: ergo [per 7.2.] reliquum quod bis sub ΑΔ, ΔΒ continetur ipsi ΘΙ est æquale. & quoniam [ex hyp.] compositum ex quadratis ipsarum ΑΓ, ΓΒ medium est, & [per constr.] æquale parallelogrammo ΕΗ, erit & ΕΗ medium: & ad rationalem ΕΖ applicatum est, latitudinem faciens ΕΜ; quare [per 23. 10.] ΕΜ est rationalis, & ipsi ΕΖ longitudine incommensurabilis. rursus, quoniam quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur est medium, & æquale ipsi ΘΗ; erit & ΘΗ medium, & ad rationalem ΕΖ applicatum est, latitudinem faciens ΘΜ: rationalis igitur est ΘΜ [per 23. 10.] & ipsi ΕΖ incommensurabilis longitudine. & quoniam quadrata ex ΑΓ, ΓΒ incommensurabilia sint ei quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur, erit & ΕΗ incommensurabile ipsi ΘΗ, ideoque [per 1. 6. & 10. 10.] recta linea ΕΜ rectæ ΜΘ longitudine est incommensurabilis. & sunt ambæ rationales: cum igitur ΕΜ, ΜΘ rationales sint potentia solum commensurabiles, recta linea ΕΘ [per 74. 10.] apotome est, & ipsi congruens ΘΜ. similiter demonstrabimus ΕΘ rursus apotomen esse, ipsique congruentem ΘΝ: ergo apotomæ alia atque alia congruit rationalis, potentia solum commensurabilis existens toti, quod fieri non posse [per 80. 10.] ostensum est: non igitur ipsi ΑΒ altera congruet recta linea: ipsi igitur ΑΒ una tantum congruet, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem bis sub ipsis continetur medium, & adhuc compositum ex quadratis ipsarum incommensurabile ei quod bis continetur sub ipsis. quod erat demonstrandum.

ΟΡΟΙ ΤΡΙΤΟΙ.

α'. Ὑποκειμένης ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς, ἐὰν μὲν ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καλείσθω ἀποτομὴ πρώτη.

β'. Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καλείσθω ἀποτομὴ δευτέρα.

γ'. Ἐὰν δὲ μηδετέρα σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, ἡ δὲ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καλείσθω ἀποτομὴ τρίτη.

δ'. Πάλιν, ἐὰν ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν μὲν ἡ ὅλη σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καλείσθω ἀποτομὴ τετάρτη.

ε'. Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα, πέμπτη.

ς'. Ἐὰν δὲ μηδετέρα, ἕκτη.

DEFINITIONES TERTIÆ.

1. Exposita rationali & apotoma, si quidem tota plus possit quam congruens quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine, sitque tota expositæ rationali longitudine commensurabilis; vocetur apotome prima.

2. Si vero congruens sit longitudine commensurabilis expositæ rationali, & tota plus possit quam congruens quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; vocetur apotome secunda.

3 Quod si neutra sit longitudine commensurabilis expositæ rationali, & tota plus possit quam congruens quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine; dicatur apotome tertia.

4. Rursus si tota plus possit quam congruens quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, si quidem tota sit longitudine commensurabilis expositæ rationali; vocetur apotome quarta.

5. Si vero congruens, vocetur apotome quinta.

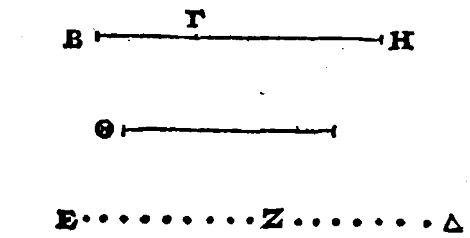
6. Quod si neutra, dicatur apotome sexta.

Prop. LXXXVI. Probl.
Invenire primam apotomen.

Exponatur rationalis A, & ipsi A longitudine commensurabilis sit BH: ergo & BH est rationalis. & [per coroll. lem. 1.30.10.] exponantur duo quadrati numeri EΔ, EZ, quorum excessus ΔZ non sit quadratus: neque igitur EΔ ad ΔZ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum. & fiat ut EΔ ad ΔZ ita quadratum ex BH ad quadratum ex HΓ.

Commensurabile igitur [per 6.10.] est quadratum ex BH quadrato ex HΓ. rationale autem est quadratum ex BH; ergo & quadratum ex HΓ est rationale: ideoque recta linea HΓ rationalis est. & quoniam EΔ ad ΔZ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque [per 9.10.] quadratum ex BH ad quadratum ex HΓ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommensurabilis igitur est BH ipsi HΓ longitudine. & sunt ambæ rationales: ergo BH, HΓ rationales sunt potentia solum commensurabiles, & ob id [per 74.10.] BΓ apotome est. dico & primam esse. sit enim quadratum ex Θ id quo quadratum ex BH excedit quadratum ex HΓ. & quoniam est ut EΔ ad ΔZ ita quadratum ex BH ad quadratum ex HΓ, erit per conversionem [per coroll. 19.5.] ut ΔE ad EZ ita quadratum ex BH ad quadratum ex Θ. sed ΔE ad EZ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; uterq; enim [per constr.] quadratus est: ergo & quadratum ex BH ad quadratum ex Θ rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum: commensurabilis igitur est [per 9.10.] BH ipsi Θ longitudine. & BH plus potest quam HΓ quadrato ex Θ: ergo BH plus poterit quam HΓ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. atque est tota BH expositæ rationali A commensurabilis longitudine: ergo [per 1. deff. tert. 10.] BH est apotome prima.

Inventa igitur est prima apotome. quod erat faciendum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ πϛʹ.
Εὑρεῖν τὴν πρώτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΒΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΕΔ, ΕΖ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ἡ ΔΖ μὴ ἔστω τετράγωνος· οὐδ' ἄρα ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ.

Σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΗΓ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἐστι. λέγω ὅτι καὶ πρώτη. ᾧ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΔΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΓ· καὶ ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶ ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἑκάτερος γὰρ τετράγωνός ἐστι· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΗΒ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καί ἐστιν ὅλη ἡ ΒΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ πρώτη ἀποτομὴ ἡ ΒΓ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. LXXXVII. Probl.
Invenire secundam apotomen.

Exponatur rationalis A; & ipsi A longitudine commensurabilis sit ΓH: ergo ΓH est rationalis. & [per coroll. lem. 1.30.10.] exponantur duo numeri quadrati ΔE, EZ, quorum excessus ΔZ non sit quadratus. fiatque ut ZΔ ad ΔE ita quadratum ex ΓH ad quadratum ex HB.

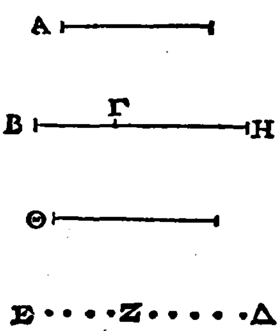
ΠΡΟΤΑΣΙΣ πζʹ.
Εὑρεῖν τὴν δευτέραν ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α σύμμετρος μήκει ἡ ΗΓ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ ἡ ΗΓ. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔΕ, ΕΖ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ ΔΖ μὴ ἔστω τετράγωνος. καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΖΔ πρὸς τὸν ΔΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ.

Σύμμετρον

Σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ τετραγώνῳ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ τῆς ΓΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΗ τῇ ΗΒ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΓΗ, ΗΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι. λέγω δὴ ὅτι καὶ δευτέρα. ᾧ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ οὕτως ὁ ΕΔ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΔΖ ἀριθμόν· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ οὕτως ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΕΖ. καὶ ἔστιν ἑκάτερος τῶν ΕΔ, ΕΖ τετράγωνος· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἔστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΓΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Εὕρηται ἄρα ἡ δευτέρα ἀποτομὴ ἡ ΒΓ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Commensurabile igitur est [per 6.10.] quadratum ex ΓΗ quadrato ex ΗΒ. sed quadratum ex ΓΗ est rationale: ergo & rationale est quadratum ex ΗΒ; ac propterea ipsa ΗΒ est rationalis. & quoniam quadratum ex ΓΗ ad quadratum ex ΗΒ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum, erit [per 9.10.] ΓΗ ipsi ΗΒ incommensurabilis longitudine. & ambæ sunt rationales: ergo ΓΗ, ΗΒ rationales sunt potentia solum commensurabiles, & ob id [per 74.10.] ΒΓ est apotome. dico & secundam esse. sit enim quadratum ex Θ illud quo quadratum ex ΒΗ excedit quadratum ex ΗΓ. quoniam igitur est ut quadratum ex ΒΗ ad quadratum ex ΗΓ ita ΕΔ numerus ad numerum ΔΖ, erit per conversionem rationis ut quadratum ex ΒΗ ad quadratum ex Θ ita ΔΕ ad ΕΖ. atque est [per constr.] uterque ipsorum ΔΕ, ΕΖ quadratus: quadratum igitur ex ΒΗ ad quadratum ex Θ rationem habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ideoque [per 9.10.] ΒΗ ipsi Θ longitudine est commensurabilis. & [per constr.] plus potest ΒΗ quam ΗΓ quadrato ex Θ: ergo ΒΗ plus potest quam ΗΓ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. atque est congruens ΓΗ expositæ rationali Α commensurabilis longitudine: ergo [per 2. deff. tert. 10.] ΒΓ est apotome secunda.

Inventa igitur est secunda apotome ΒΓ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πη'.

Εὑρεῖν τὴν τρίτην ἀποτομήν.

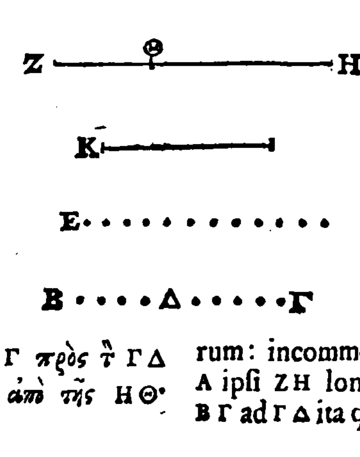
Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ ἐκκείσθωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Ε, ΒΓ, ΓΔ, λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὁ δὲ ΒΓ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον ἐχέτω ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ τετράγωνον.

Σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ ΖΗ μήκει. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ·

Prop. LXXXVIII. Probl.

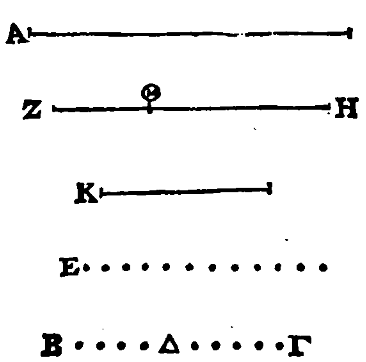
Invenire tertiam apotomen.

Exponatur rationalis Α, & exponantur tres numeri Ε, ΒΓ, ΓΔ, non habentes inter se rationem quam numerus quadratus habet ad quadratum numerum; ΒΓ vero ad ΒΔ rationem habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & fiat ut Ε ad ΒΓ ita quadratum ex Α ad quadratum ex ΖΗ, ut autem ΒΓ ad ΓΔ ita quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex ΗΘ.



Commensurabile igitur [per 6.10.] est quadratum ex Α quadrato ex ΖΗ. atque est quadratum ex Α rationale: ergo & rationale est quadratum ex ΖΗ; ac propterea recta linea ΖΗ est rationalis. & quoniam Ε ad ΒΓ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum, neque quadratum ex Α ad quadratum ex ΖΗ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommensurabilis igitur [per 9.10.] est Α ipsi ΖΗ longitudine. rursus, quoniam est ut ΒΓ ad ΓΔ ita quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex ΗΘ;

H Θ; erit quadratum ex Z H quadrato ex H Θ commensurabile. rationale autem est quadratum ex Z H; ergo & quadratum ex H Θ est rationale, & ob id recta linea H Θ rationalis. quod cum B Γ ad Γ Δ rationem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex Z H ad quadratum ex H Θ rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum: incommensurabilis igitur [per 9.10.] est Z H ipsi H Θ longitudine. & sunt ambæ rationales: ergo Z H, H Θ rationales sunt potentia solum commensurabiles: ac propterea [per 74.10.] apotome est Z Θ. dico & tertiam esse. quoniam enim est ut E quidem ad B Γ ita quadratum ex A ad quadratum ex Z H; ut autem B Γ ad Γ Δ ita quadratum ex Z H ad quadratum ex H Θ: erit ex æquo [per 22.5.] ut E ad Γ Δ ita quadratum ex A ad quadratum ex H Θ. sed [per constr.] E ad Γ Δ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum, neque igitur quadratum ex A ad quadratum ex H Θ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo [per 9. 10.] A ipsi H Θ longitudine est incommensurabilis: neutra igitur ipsarum Z H, H Θ expositæ rationali A commensurabilis est longitudine. quo autem quadratum ex Z H plus potest quam quadratum ex H Θ, sit quod ex K fit quadratum. quoniam igitur [per constr.] ut B Γ ad Γ Δ ita quadratum ex Z H ad quadratum ex H Θ; erit per conversionem rationis [per 19.5.] ut Γ B ad B Δ ita quadratum ex Z H ad quadratum ex K. at Γ B ad B Δ rationem habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo & quadratum ex Z H ad quadratum ex K rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: commensurabilis igitur [per 9. 10.] est Z H ipsi K longitudine. & plus potest Z H quam H Θ quadrato ex K: ergo Z H plus potest quam H Θ quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. & neutra ipsarum Z H, H Θ longitudine commensurabilis est expositæ rationali A: quare [per 3. deff. tert. 10.] Z Θ est apotome tertia.



Inventa igitur est tertia apotome Z Θ. quod erat faciendum.

σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΓ πρὸς ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐκ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ. λέγω δὴ ὅτι καὶ τρίτη. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ὁ δὲ Ε πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἡ Α τῇ ΗΘ μήκει· οὐδετέρα ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ Α. ᾧ οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ὁ δὲ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΖΗ τῆς ΗΘ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Κ· ἡ ἄρα ΖΗ τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ΖΘ ἄρα ἀποτομή ἐστι τρίτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ τρίτη ἀποτομή, ἡ ΖΘ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. LXXXIX. Probl.

Invenire quartam apotomen.

Exponatur rationalis A, & ipsi A longitudine commensurabilis sit B H: ergo B H est rationalis. exponantur præterea duo numeri Δ Z, Z E, ita ut totus Δ E ad utrumque ipsorum Δ Z E Z rationem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum: & fiat ut Δ E ad E Z, ita quadratum ex B H ad quadratum ex H Γ.

Commensurabile igitur [per 6.10.] est quadra-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πθ'.

Εὑρεῖν τὴν τετάρτην ἀποτομήν.

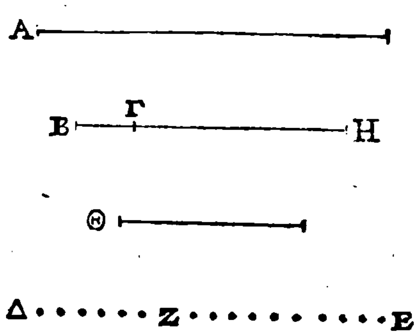
Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει σύμμετρος ἡ ΒΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ, ΖΕ· ὥστε τὸν ΔΕ ὅλον πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΖ, ΕΖ λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ.

Σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τῷ ἀπὸ

τῆς

τῆς ΗΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΓ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ. λέγω δὲ ὅτι καὶ τετάρτη. ᾧ γὰρ μεῖζον τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει· καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ἄρα ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἔστιν ἡ ὅλη ἡ ΒΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ Α· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ ΒΓ τετάρτη ἀποτομή. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



tum ex B H quadrato ex H Γ. est autem quadratum ex B H rationale: quare & rationale est quadratum ex H Γ; ideoque recta linea H Γ est rationalis. & quoniam Δ E ad E Z rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum, neque quadratum ex B H ad quadratum ex H Γ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommensurabilis igitur est [per 9. 10.] B H ipsi H Γ longitudine. & sunt ambæ rationales: ergo B H, H Γ rationales sunt potentia solum commensurabiles; & ob id [per 74.10.] B Γ est apotome. dico & quartam esse. quo enim plus potest B H quam H Γ sit illud quadratum ex Θ. & quoniam est ut Δ E ad E Z ita quadratum ex B H ad quadratum ex H Γ; erit per conversionem rationis ut E Δ ad Δ Z ita quadratum ex B H ad quadratum ex Θ. sed E Δ ad Δ Z rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: neque igitur quadratum ex B H ad quadratum ex Θ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommensurabilis igitur [per 9. 10] est B H ipsi Θ longitudine; & [ex hyp.] plus potest B H quam H Γ quadrato ex Θ: ergo B H plus potest quam H Γ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. atque est tota B H longitudine commensurabilis expositæ rationali A: ergo [per 4. deff. tert. 10.] B Γ est apotome quarta.

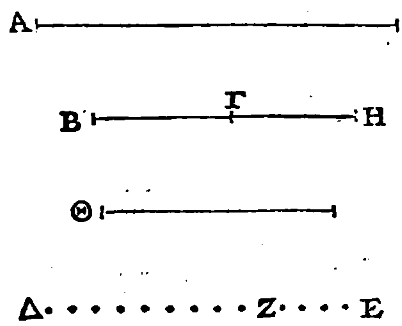
Inventa igitur est quarta apotome B Γ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϟ'.

Εὑρεῖν τὴν πέμπτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΗ. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ, ΖΕ, ὥστε τὸν ΔΕ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΖ, ΖΕ λόγον πάλιν μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΖΕ πρὸς τὸν ΕΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ.

Σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ὁ δὲ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί·



PROP. XC. PROBL.

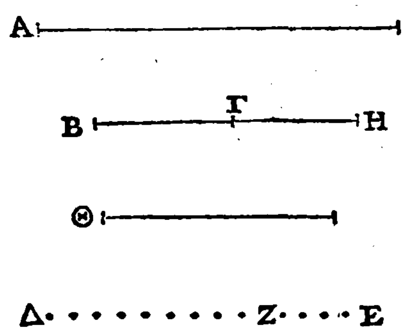
Invenire quintam apotomen.

Exponatur rationalis A, & ipsi A commensurabilis sit Γ H: ergo Γ H est rationalis. & exponantur duo numeri Δ Z, Z E, ita ut Δ E ad utrumque ipsorum Δ Z, Z E rationem rursus non habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum: fiatque ut Z E ad E Δ ita quadratum ex Γ H ad quadratum ex H B.

Ergo [per 6.10.] quadratum ex Γ H commensurabile est quadrato ex H B. est autem quadratum ex Γ H rationale: ergo & rationale est quadratum ex H B; & idcirco recta linea H B est rationalis. & quoniam ut Δ E ad E Z ita est quadratum ex B H ad quadratum ex H Γ, & Δ E ad E Z rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex B H ad quadratum ex H Γ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommensurabilis igitur [per 9. 10.] est B H ipsi H Γ longitudine. & sunt ambæ rationales:

ergo BH, HΓ rationales sunt potentia solum commensurabiles; & igitur [per 74.10.] BΓ est apotome. dico & quintam esse. quo enim majus est quadratum ex BH quam quadratum ex HΓ, sit illud quadratum ex Θ. quoniam igitur quadratum ex BH ad quadratum ex HΓ est ut ΔE ad EZ, erit per conversionem rationis ut EΔ ad ΔZ ita quadratum ex BH ad id quod fit ex Θ quadratum. sed EΔ ad ΔZ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: neque igitur quadratum ex BH ad quadratum ex Θ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ideoque [per 9. 10.] recta linea BH ipsi Θ longitudine est incommensurabilis. & plus potest BH quam HΓ quadrato ex Θ: ergo BH plus potest quam HΓ quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. atque [per constr.] est congruens ΓH expositæ rationali A longitudine commensurabilis: quare [per 5. deff. tert. 10.] BΓ est apotome quinta.

Inventa igitur est quinta apotome BΓ. quod erat faciendum.



αἱ BH, HΓ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ BΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι. λέγω δὴ ὅτι καὶ πέμπτη. ᾧ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς BH τοῦ ἀπὸ τῆς HΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς BH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HΓ οὕτως ὁ ΔE πρὸς τὸν EZ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ EΔ πρὸς τὸν ΔZ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ EΔ πρὸς τὸν ΔZ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς BH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ BH τῇ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ BH τῆς HΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ BH ἄρα τῆς HΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΓH σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ A μήκει· ἡ ἄρα BΓ ἀποτομή ἐστι πέμπτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ πέμπτη ἀποτομὴ ἡ BΓ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XCI. Probl.

Invenire sextam apotomen.

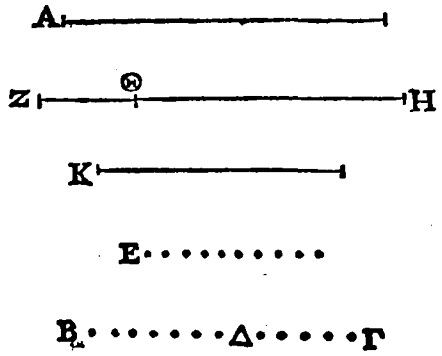
Exponatur rationalis A, & tres numeri E, BΓ, ΓΔ rationem non habentes inter se quam quadratus numerus ad quadratum numerum: & fiat ut E ad BΓ ita quadratum ex A ad quadratum ex ZH; ut autem BΓ ad ΓΔ ita quadratum ex ZH ad quadratum ex HΘ.

Quoniam igitur est ut E ad BΓ ita quadratum ex A ad quadratum ex ZH; erit quadratum ex A quadrato ex ZH commensurabile. rationale autem est quadratum ex A: ergo & quadratum ex ZH rationale erit; & ob id recta linea ZH rationalis. & quoniam [per constr.] E ad BΓ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex A ad quadratum ex ZH rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommensurabilis igitur [per 9. 10.] est A ipsi ZH longitudine. rursus, quoniam est ut BΓ ad ΓΔ ita quadratum ex ZH ad quadratum ex HΘ, erit quadratum ex ZH commensurabile quadrato ex HΘ. est autem quadratum ex ZH rationale: rationale igitur [per 6.10.] est & quadratum ex HΘ, & ipsa HΘ rationalis. quod cum BΓ ad ΓΔ rationem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 4α'.

Εὑρεῖν τὴν ἕκτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ A, καὶ τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ E, BΓ, ΓΔ λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ὁ E πρὸς τὸν BΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH, ὡς δὲ ὁ BΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HΘ.



Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ E πρὸς τὸν BΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς A τῷ ἀπὸ τῆς ZH. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς A· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ZH· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ZH. καὶ ἐπεὶ ὁ E πρὸς τὸν BΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ A τῇ ZH μήκει. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ BΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HΘ· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZH τῷ ἀπὸ τῆς HΘ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ZH· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς HΘ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ HΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ BΓ πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν·

μόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ἄρα ΖΘ ἀποτομή ἐστι. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἕκτη. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· δίισου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ὁ δὲ Ε πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ ΗΘ μήκει. καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ Α ῥητῇ μήκει. ᾧ οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ὁ δὲ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΖΗ τῆς ΗΘ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Κ· ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ Α· ἡ ἄρα ΖΘ ἀποτομή ἐστιν ἕκτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ ἕκτη ἀποτομὴ ἡ ΖΘ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

numerum; neque quadratum ex ZH ad quadratum ex HΘ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo [per 9. 10.] ZH ipsi HΘ longitudine est incommensurabilis. & sunt ambæ rationales: quare ZH, HΘ rationales sunt potentia solum commensurabiles, & igitur [per 74. 10.] ZH apotome est. dico & sextam esse. quoniam enim est ut E ad BΓ ita quadratum ex A ad quadratum ex ZH, ut autem BΓ ad ΓΔ ita quadratum ex ZH ad quadratum ex HΘ: erit ex æquo ut E ad ΓΔ ita quadratum ex A ad quadratum ex HΘ. sed E ad ΓΔ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: neque igitur quadratum ex A ad quadratum ex HΘ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo [per 9. 10] A ipsi HΘ longitudine est incommensurabilis. & neutra ipsarum ZH, HΘ expositæ rationali A commensurabilis est longitudine. quo plus potest quadratum ex ZH quam quadratum ex HΘ sit illud quadratum ex K. & quoniam est ut BΓ ad ΓΔ ita quadratum ex ZH ad quadratum ex HΘ, erit per conversionem rationis [per 19. 5.] ut ΓB ad BΔ ita quadratum ex ZH ad quadratum ex K. at ΓB ad BΔ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: neque igitur quadratum ex ZH ad quadratum ex K rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo [per 9. 10.] incommensurabilis est ZH ipsi K longitudine. & ZH plus potest quam HΘ quadrato ex K: plus igitur potest ZH quam HΘ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. & neutra ipsarum ZH, HΘ est longitudine commensurabilis expositæ rationali A: ergo [per 6. deff. tert. 10.] ZΘ est apotome sexta.

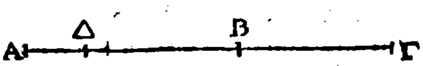
Inventa est igitur sexta apotome ZΘ. quod erat faciendum.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἔστι δὲ καὶ συντομώτερον δεῖξαι τὴν εὕρεσιν τῶν εἰρημένων ἓξ ἀποτομῶν. καὶ δὴ ἔστω εὑρεῖν τὴν πρώτην, ἐκκείσθω ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη ἡ ΑΓ, ἧς μεῖζον ὄνομα ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΒΓ ἴση κείσθω ἡ ΒΔ· αἱ ΑΒ, ΒΓ ἄρα, τουτέστιν αἱ ΑΒ, ΒΔ, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ, τουτέστι τῆς ΒΔ, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ ἡ ΑΒ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ πρώτη. Ὁμοίως δὴ καὶ τὰς λοιπὰς ἀποτομὰς εὑρήσομεν, ἐκθέμενοι τὰς ἰσαρίθμους ἐκ δύο ὀνομάτων.

SCHOLIUM.

Sed & expeditius sex dictarum linearum inventionem ostendere licet. si enim oporteat invenire primam apotomen, exponatur [per 49. 10.] ex binis nominibus prima AΓ cujus majus nomen sit AB; & ponatur BΔ ipsi BΓ æqualis.



ergo [per 1. deff. secund. 10.] AB, BΓ, hoc est AB, BΔ, rationales sunt potentia solum commensurabiles; & AB plus potest quam BΓ, hoc est quam BΔ, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, & AB est commensurabilis longitudine expositæ rationali: & igitur [per 1. deff. tert. 10.] AB est apotome prima. similiter & reliquas apotomas inveniemus, eas quæ sunt ex binis nominibus ejusdem ordinis exponentes [per 50, 51, 52, 53 & 54. lib. 10.]

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϟβ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

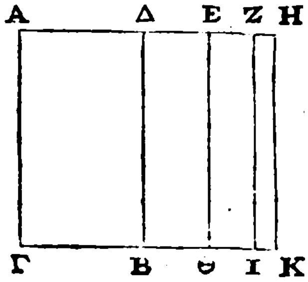
Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ΑΒ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

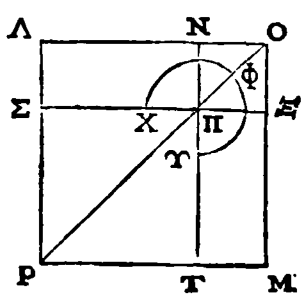
PROP. XCII. THEOR.

Si spatium contineatur sub rationali & apotoma prima, recta linea spatium potens apotome est.

Contineatur enim spatium AB sub rationali AΓ & apotoma prima AΔ: dico rectam lineam quæ potest spatium AB apotomen esse.

Quoniam enim ΑΔ prima apotome est, sit ipsi congruens ΔΗ: ergo [per 1. deff. tert. 10.] ΑΗ, ΗΔ rationales sunt potentia solum commensurabiles. & tota ΑΗ longitudine commensurabilis est expositæ rationali ΑΓ, & præterea ΑΗ plus potest quam ΗΔ quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: si igitur quartæ parti quadrati, quod fit ex ΔΗ, æquale parallelogrammum ad ΑΗ applicetur, deficiens figura quadrata, [per 18. 10.] in partes longitudine commensurabiles ipsam dividet. secetur ΔΗ bifariam in Ε, & quadrato ex ΕΗ æquale parallelogrammum ad ΑΗ applicetur, deficiens figura quadrata, quod sc. continetur sub ΑΖ, ΖΗ: commensurabilis igitur est ΑΖ ipsi ΖΗ longitudine. & per Ε, Ζ, Η puncta ipsi ΑΓ parallelæ ducantur ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. & quoniam ΑΖ ipsi ΖΗ longitudine est commensurabilis, erit [per 16. 10.] & ΑΗ utrique ipsarum ΑΖ, ΖΗ commensurabilis longitudine. sed ΑΗ commensurabilis est ipsi ΑΓ: utraque igitur ΑΖ, ΖΗ [per 12. 10.] ipsi ΑΓ longitudine est commensurabilis. atque est ΑΓ rationalis: ergo & rationalis utraque ΑΖ, ΖΗ; ac propterea [per 20. 10.] utrumque parallelogrammorum ΑΙ, ΖΚ est rationale. & quoniam ΔΕ ipsi ΕΗ longitudine est commensurabilis, erit & ΔΗ utrique ΔΕ, ΕΗ commensurabilis longitudine. estque rationalis ΔΗ, & ipsi ΑΓ longitudine incommensurabilis: ergo & utraque ΔΕ, ΕΗ rationalis est, & incommensurabilis ipsi ΑΓ longitudine; & ob id [per 22. 10.] utrumque parallelogrammorum ΔΘ, ΕΚ medium est. ponatur [per 14. 2.] ipsi quidem ΑΙ parallelogrammo æquale quadratum ΛΜ: parallelogrammo autem ΖΚ æquale quadratum auferatur ΝΞ, communem cum ipso angulum ΛΟΜ habens, scilicet ΝΞ: ergo [per 26. 6.] quadrata ΛΜ ΝΞ circa eandem sunt diametrum. sit ipsorum diameter ΟΡ, & figura describatur. itaque quoniam rectangulum sub ΑΖ, ΖΗ est æquale, quadrato ex ΕΗ erit [per 17. 6.] ut ΑΖ ad ΕΗ ita ΕΗ ad ΖΗ. sed [per 1. 6.] ut ΑΖ ad ΕΗ ita est parallelogrammum ΑΙ ad ipsum ΕΚ, & ut ΕΗ ad ΖΗ ita parallelogrammum ΕΚ ad ipsum ΖΚ: inter parallelogramma igitur ΑΙ, ΖΚ medium proportionale est ΕΚ. est autem & inter quadrata ΛΜ, ΝΞ medium proportionale ΜΝ, ut superius [ad lem. 55. 10.] ostensum est; parallelogrammumque ΑΙ [per constr.] est æquale quadrato ΛΜ, & parallelogrammum ΖΚ quadrato ΝΞ æquale: ergo & parallelogrammum ΜΝ est æquale ipsi ΕΚ. sed parallelogrammum quidem ΕΚ [per 37. 1.] est æquale parallelogrammo ΔΘ, parallelogrammum vero ΜΝ [per 43. 1.] ipsi ΛΞ: parallelogrammum igitur ΔΚ est æquale gnomoni ΥΦΧ & quadrato ΝΞ. est autem [per constr.] & parallelogrammum ΑΚ quadratis ΛΜ, ΝΞ æquale: ergo & reliquum ΑΒ est æquale quadrato ΣΤ. at quadratum ΣΤ est id quod fit ex ΛΝ: quadratum igitur ex ΛΝ est æquale parallelogrammo ΑΒ; ideoque recta linea ΛΝ ipsum ΑΒ potest.





Ἐπεὶ γὰρ ἀποτομή ἐστι πρώτη ἡ ΑΔ, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ΑΗ, ΗΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ὅλη ἡ ΑΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, καὶ ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραλληλόγραμμον παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ. καὶ διὰ τῶν Ε, Ζ, Η σημείων τῇ ΑΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει· καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΑΖ, ΖΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ἀλλὰ ἡ ΑΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΓ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΖ, ΖΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΓ μήκει. καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ ΑΓ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΖ, ΖΗ· ὥστε καὶ ἑκάτερον τῶν ΑΙ, ΖΚ ῥητόν ἐστι. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ μήκει, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΔΕ, ΕΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ ΔΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ μέσον ἐστί. κείσθω δὴ τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον τετράγωνον ἀφῃρήσθω, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, τὴν ὑπὸ ΛΟΜ, τὸ ΝΞ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ, ΝΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ, ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· τῶν ἄρα ΑΙ, ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. ἔστι δὲ καὶ τῶν ΛΜ, ΝΞ μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, ὡς ἐν τοῖς ἔμπροσθεν ἐδείχθη, καὶ ἔστι τὸ ΑΙ τῷ ΛΜ τετραγώνῳ ἴσον, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΕΚ ἴσον ἐστί. ἀλλὰ τὸ μὲν ΕΚ τῷ ΔΘ ἴσον ἐστί, τὸ δὲ ΜΝ τῷ ΛΞ· τὸ ἄρα ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΚ ἴσον τοῖς ΛΜ, ΝΞ τετραγώνοις· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ, τὸ δὲ ΣΤ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΝ ἐστὶ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΛΝ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΒ· ἡ ΛΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ.

λέγω δὴ ὅτι ἡ ΛΝ ἀποτομή ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΑΙ, ΖΚ, καί ἐστιν ἴσον τοῖς ΛΜ, ΝΞ· καὶ ἑκάτερον ἄρα τῶν ΛΜ, ΝΞ ῥητόν ἐστι, τουτέστι τὸ ἀπὸ ἑκατέρων τῶν ΛΟ, ΟΝ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΛΟ, ΟΝ ῥητή ἐστι. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ΔΘ, καί ἐστιν ἴσον τῷ ΛΞ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛΞ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΛΞ μέσον ἐστὶ, τὸ δὲ ΝΞ ῥητὸν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛΞ τῷ ΝΞ· ὡς δὲ τὸ ΛΞ πρὸς τὸ ΝΞ οὕτως ἐστὶν ἡ ΛΟ πρὸς τὴν ΟΝ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΟ τῇ ΟΝ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΛΟ ΟΝ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΝ. καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον· ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

Ἐὰν ἄρα χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

dico Λ N apotomen esse. quoniam enim rationale est utrumque parallelogrammorum A I, Z K, & sunt æqualia quadratis Λ M, N Ξ; erit & utrumque Λ M, N Ξ rationale, hoc est utrumque ipsorum quæ fiunt ex Λ O, O N: & utraque igitur Λ O, O N rationalis est. rursus, quoniam parallelogrammum Δ Θ est medium, atque est æquale ipsi Λ Ξ; erit & Λ Ξ medium. cum igitur Λ Ξ quidem medium sit, N Ξ vero rationale, incommensurabile est Λ Ξ ipsi N Ξ; utque Λ Ξ ad N Ξ ita est [per 1. 6.] recta linea Λ O ad O N: ergo [per 10.10.] Λ O ipsi O N longitudine est incommensurabilis. & sunt ambæ rationales; quare Λ O, O N rationales sunt potentia solum commensurabiles: idcirco [per 74. 10.] Λ N est apotome. & potest spatium A B: quæ igitur potest spatium A B est apotome.

Ergo si spatium contineatur sub rationali & apotoma prima, recta linea spatium potens apotome est. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϟγʹ.

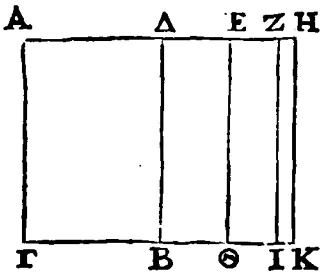
Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη.

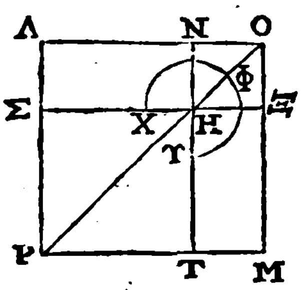
Prop. XCIII. Theor.

Si spatium contineatur sub rationali & apotoma secunda, recta linea spatium potens mediæ est apotome prima.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς δευτέρας τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη.

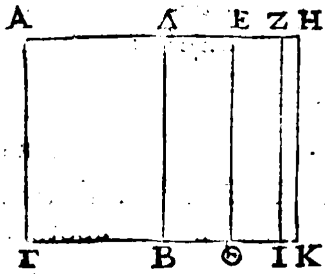
Ἔστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ΑΗ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΔ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. καὶ διὰ τῶν Ε, Ζ, Η σημείων τῇ ΑΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΘΚ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει· καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΑΖ, ΖΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ ΑΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΖ, ΖΗ ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΙ,

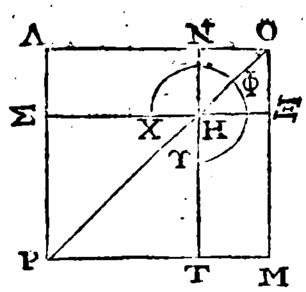




Spatium enim A B contineatur sub rationali A Γ & apotoma secunda A Δ: dico rectam lineam quæ spatium A B potest esse mediæ apotomen primam.

Sit enim ipsi A Δ congruens Δ H; ergo [per 2. deff. tert. 10.] A H, H Δ rationales sunt potentia solum commensurabiles, & congruens Δ H commensurabilis est expositæ rationali A Γ, totaque A H plus potest quam H Δ quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: quoniam igitur A H plus potest quam H Δ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, si quartæ parti quadrati ipsius H Δ æquale parallelogrammum ad A H applicetur, deficiens figura quadrata, [per 18. 10.] in partes commensurabiles ipsam dividet. Itaque secetur Δ H bifariam in E; & quadrato ipsius E H æquale parallelogrammum ad A H applicetur, deficiens figura quadrata, quod sc. continetur sub A Z, Z H: ergo commensurabilis est A Z ipsi Z H longitudine. & per puncta E, Z, H ipsi A Γ parallelæ ducantur E Θ, Z I, H K. quoniam igitur A Z ipsi Z H longitudine est commensurabilis, erit [per 16. 10.] A H utrique ipsarum A Z, Z H commensurabilis longitudine. rationalis autem est A H, & ipsi A Γ longitudine incommensurabilis: ergo & utraque A Z, Z H est rationalis, ipsique A Γ incommensurabilis longitudine; & ob id [per 22.10.] utrumque parallelogrammorum A I, Z K medium est. rursus, quoniam Δ E commensurabilis est ipsi E H, erit & Δ H utrique Δ E, E H commensurabilis. sed Δ H commensurabilis est ipsi A Γ longitudine: ergo & utraque Δ E, E H rationalis est, & ipsi A Γ longitudine commensurabilis; ac propterea utrumque parallelogrammorum Δ Θ, E K est rationale. constituatur igitur [per 14. 2.] parallelogrammo quidem A I æquale quadratum Λ M; parallelogrammo autem Z K æquale quadratum auferatur N Ξ, communem cum ipso Λ M angulum Λ O M habens: ergo [per 26. 6.] circa eandem diametrum sunt quadrata Λ M, N Ξ. sit ipsorum diameter O P, & figura describatur. cum igitur parallelogramma A I, Z K media sint, & sibi ipsis commensurabilia, & æqualia quadratis ex Λ O, O N, erunt & quadrata ex Λ O, O N media: ergo rectæ lineæ Λ O, O N mediæ sunt, potentia commensurabiles. & quoniam rectangulum sub A Z, Z H est æquale quadrato ex E H, erit [per 17. 6.] ut A Z ad E H ita E H ad H Z; sed [per 1. 6.] ut A Z ad E H ita est parallelogrammum A I ad ipsum E K. ut autem E H ad H Z ita parallelogrammum E K ad Z K: inter parallelogramma igitur A I, Z K medium proportionale est E K. est autem [per lem. 55. 10.] & inter quadrata ΛM, NΞ medium proportionale M N, & parallelogrammum A I quidem est [per constr.] æquale quadrato Λ M; parallelogrammum vero Z K æquale quadrato N Ξ: ergo M N ipsi E K est æquale. sed [per 37. 1.] Δ Θ est æquale ipsi E K, & [per 43. 1.] Λ Ξ ipsi M N: totum igitur Δ K gnomoni Υ Φ X & quadrato N Ξ æquale erit. itaque quoniam totum A K æquale est quadratis Λ M, N Ξ, quorum Δ K est æquale gnomoni Υ Φ X & quadrato N Ξ; erit reliquum A B æquale Σ T, hoc est ei quod fit ex Λ N: quadratum igitur ex Λ N est æquale spatio A B; ideoque recta linea Λ N spatium A B potest. dico Λ N mediæ apotomen esse primam. quoniam enim rationale est E K, & æquale ipsi M N, hoc est ipsi Λ Ξ; erit & Λ Ξ rationale, illud sc. quod sub Λ O, O N continetur. medium autem ostensum est N Ξ: quare Λ Ξ est incommensurabile ipsi N Ξ: & [per 1. 6.] ut Λ Ξ ad N Ξ ita Λ O ad O N: ergo Λ O, O N longitudine sunt incommensurabiles: ac propterea Λ O, O N mediæ sunt potentia solum commensurabiles quæ rationale continent: quare [per 75. 10.] Λ N est mediæ apotome prima, & potest spatium A B: recta igitur linea spatium A B potens est mediæ apotome prima. quod erat demonstrandum.





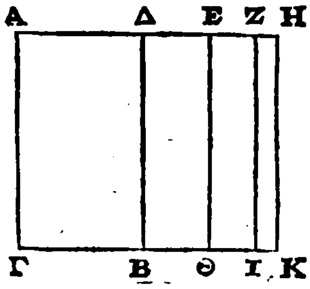
Z K μέσον ἐστί. πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ Δ E τῇ E H, καὶ ἡ Δ H ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν Δ E, E H σύμμετρός ἐστιν. ἀλλ' ἡ Δ H σύμμετρός ἐστι τῇ A Γ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν Δ E, E H, καὶ σύμμετρος τῇ A Γ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν Δ Θ, E K ῥητόν ἐστι. συνεστάτω οὖν τῷ μὲν A I ἴσον τετράγωνον τὸ Λ M, τῷ δὲ Z K ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ N Ξ, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὂν τῷ Λ M, τὴν ὑπὸ Λ O M· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ Λ M, N Ξ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ O P, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν τὰ A I, Z K μέσα ἐστί, καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις, καὶ ἐστιν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν Λ O, O N· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν Λ O, O N ἄρα μέσα ἐστί· καὶ αἱ Λ O, O N ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει σύμμετροι. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν A Z, Z H ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς E H, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ A Z πρὸς τὴν E H οὕτως ἡ E H πρὸς τὴν Z H· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ A Z πρὸς τὴν E H οὕτως τὸ A I πρὸς τὸ E K. ὡς δὲ ἡ E H πρὸς τὴν H Z, οὕτως ἐστὶ τὸ E K πρὸς τὸ Z K· τῶν ἄρα A I, Z K μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ E K. ἔστι δὲ καὶ τῶν Λ M, N Ξ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ M N, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν A I τῷ Λ M, τὸ δὲ Z K τῷ N Ξ· καὶ τὸ M N ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ E K. ἀλλὰ τῷ μὲν E K ἴσον ἐστὶ τὸ Δ Θ, τῷ δὲ M N ἴσον τὸ Λ Ξ· ὅλον ἄρα τὸ Δ K ἴσον ἐστὶ τῷ Υ Φ X γνώμονι, καὶ τῷ N Ξ. ἐπεὶ οὖν ὅλον τὸ A K ἴσον ἐστὶ τοῖς Λ M, N Ξ, ὧν τὸ Δ K ἴσον ἐστὶ τῷ Υ Φ X γνώμονι, καὶ τῷ N Ξ· λοιπὸν ἄρα τὸ A B ἴσον ἐστὶ τῷ Σ T, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς Λ N· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς Λ N ἴσον ἐστὶ τῷ A B χωρίῳ· ἡ Λ N ἄρα δύναται τὸ A B χωρίον. λέγω δὴ ὅτι ἡ Λ N μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη. ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ E K, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ M N, τουτέστι τῷ Λ Ξ· ῥητὸν ἄρα τὸ Λ Ξ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν Λ O, O N. μέσον δὲ ἐδείχθη τὸ N Ξ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Λ Ξ τῷ N Ξ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Λ Ξ πρὸς τὸ N Ξ οὕτως ἐστὶν ἡ Λ O πρὸς τὴν O N· αἱ Λ O, O N ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι μήκει· αἱ ἄρα Λ O, O N μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι· ἡ Λ N ἄρα μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη, καὶ δύναται τὸ A B χωρίον· ἡ ἄρα τὸ A B χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

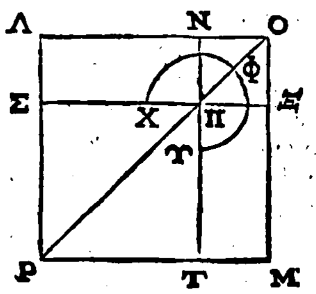
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϟδʹ.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς τρίτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ΑΗ, ΗΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα τῶν ΑΗ, ΗΔ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΔΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ. καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η σημείων τῇ ΑΓ παράλληλοι αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ· σύμμετροι ἄρα εἰσὶν αἱ ΑΖ, ΖΗ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΖ, ΖΗ σύμμετροί εἰσι μήκει, καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΑΖ, ΖΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ ΑΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΖ, ΖΗ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· καὶ ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΙ, ΖΚ μέσον ἐστί. πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ μήκει, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΔΕ, ΕΗ σύμμετρός ἐστι. ῥητὴ δὲ ἡ ΔΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ μέσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΗΔ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ μήκει ἡ ΑΗ τῇ ΗΔ. ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΗ τῇ ΑΖ σύμμετρός ἐστι μήκει, ἡ δὲ ΔΗ τῇ ΗΕ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΕΗ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΕΚ. συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΝΞ, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὂν τῷ ΛΜ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ, ΝΞ. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς



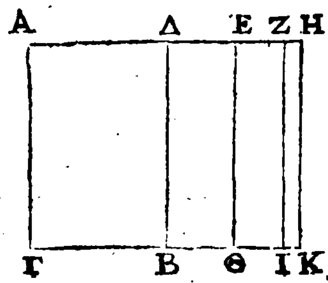


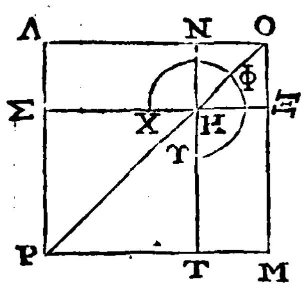
PROP. XCIV. THEOR.

Si spatium continetur sub rationali & apotome tertia, recta linea spatium potens mediæ est apotome secunda.

Spatium enim AB contineatur sub rationali AΓ & apotoma tertia AΔ: dico rectam lineam, quæ potest spatium AB, mediæ esse apotomen secundam.

Sit enim ipsi AΔ congruens ΔH: ergo [per 3. deff. tert. 10.] AH, HΔ rationales sunt potentia solum commensurabiles, & neutra ipsarum AH, HΔ longitudine commensurabilis est expositæ rationali AΓ, tota autem AH plus potest quam congruens ΔH quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. quoniam ideo recta AH plus potest quam ΔH quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis: si quartæ parti quadrati ipsius ΔH æquale parallelogrammum ad AH applicetur deficiens figura quadrata, [per 18.10.] in partes commensurabiles ipsam divide. Itaque secetur ΔH bifariam in E, & quadrato ipsius EH æquale ad AH applicetur deficiens figura quadrata, sitque quod continetur sub AZ, ZH; & per puncta E, Z, H ipsi AΓ parallelæ ducantur EΘ, ZI, HK: ergo AZ, ZH commensurabiles sunt; atque ob id parallelogrammum AI parallelogrammo ZK est commensurabile. & quoniam AZ, ZH commensurabiles sunt longitudine, erit [per 16. 10.] & AH utrique ipsarum AZ, ZH longitudine commensurabilis. est autem rationalis AH, & ipsi AΓ incommensurabilis longitudine: & utraque igitur AZ, ZH rationalis est & ipsi AΓ longitudine incommensurabilis; ac propterea [per 22.10.] utrumque parallelogrammorum AI, ZK est medium. rursus quoniam ΔE commensurabilis est ipsi EH longitudine, erit & ΔH utrique ΔE, EH commensurabilis. sed ΔH rationalis est, & ipsi AΓ incommensurabilis longitudine: rationalis igitur est & utraque ΔE, EH, & ipsi AΓ longitudine incommensurabilis: ergo [per 22. 10.] utrumque parallelogrammorum ΔΘ, EK medium est. quod cum AH, HΔ potentia solum commensurabiles sint, AH ipsi HΔ longitudine erit incommensurabilis. sed AH commensurabilis est ipsi AZ longitudine, & ΔH ipsi HE: est igitur [per 13. 10.] AZ ipsi EH longitudine incommensurabilis. ut autem AZ ad EH ita [per 1. 6.] parallelogrammum AI ad EK parallelogrammum: ergo incommensurabilis est AI ipsi EK. constituatur [per 14. 2.] ipsi quidem AI æquale quadratum ΛM; ipsi vero ZK æquale auferatur NΞ, angulum habens eundem quem ΛM: ergo [per 26. 6.] quadrata ΛM, NΞ circa eandem sunt diametrum. sit ipsorum diameter OP, & figura describatur. quoniam igitur rectangulum sub AZ, ZH est æquale quadrato ex EH, erit [per 17. 6.] ut AZ ad ad EH ita EH ad ZH, ut autem AZ ad EH ita [per 1. 6.] parallelogrammum AI ad EK parallelogrammum; & ut EH ad HZ ita EK ad ZK: ergo & ut AI ad EK ita EK ad ZK. inter parallelogramma igitur AI, ZK medium proportionale est EK. est autem & inter quadrata ΛM, NΞ medium proportionale MN; & [per constr.] parallelogrammum AI quidem æquale est quadrato ΛM, ZK vero ipsi NΞ: ergo & EK est æquale MN. sed [per 43. 1.] MN æquale est ΛΞ, & [per 37. 1.] EK ipsi ΔΘ: totum igitur ΔK gnomoni ΥΦX & quadrato NΞ est æquale. est autem & parallelogrammum AK æquale quadratis ΛM, NΞ: ergo reliquum AB est æquale ipsi ΣT, hoc est quadrato ex ΛN: & ob id recta linea ΛN ipsum AB spatium potest. dico ΛN mediæ apotomen esse secundam. quoniam enim parallelogramma AI, ZK ostensa sunt media, & sunt æqualia quadratis ex ΛO, ON, erit & utrumque quadratorum ex ΛO, ON medium; igitur utraque recta linea ΛO, ON media est. & quoniam commensurabile est AI ipsi ZK, erit & quadratum ex ΛO quadrato ex ON commensurabile. rursus, quoniam ostensum est AI incommensurabile ipsi EK, & ΛM ipsi MN incommensurabile erit, hoc est quadratum ex ΛO rectangulo sub ΛO, ON: quare & recta linea ΛO longitudine incommensurabilis est ipsi ON; sunt igitur ΛO, ON mediæ potentia solum commensurabiles. dico eas etiam medium continere. quoniam enim EK demonstratum est medium, atque est æquale rectangulo sub ΛO, ON; erit & rectangulum sub ΛO, ON medium: ergo ΛO, ON mediæ sunt potentia solum commensurabiles, quæ medium continent; ac propterea [per 76. 10.] ΛN est mediæ apotome secunda; & potest spatium AB: recta igitur linea spatium AB potens est mediæ apotome secunda. quod erat demonstrandum.





τὴν EH οὕτως ἡ EH πρὸς τὴν ZH. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AZ πρὸς τὴν EH οὕτως ἐστὶ τὸ AI πρὸς τὸ EK· ὡς δὲ ἡ EH πρὸς τὴν HZ οὕτως τὸ EK πρὸς τὸ ZK· καὶ ὡς ἄρα τὸ AI πρὸς τὸ EK οὕτως τὸ EK πρὸς τὸ ZK· τῶν ἄρα AI, ZK μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ EK. ἔστι δὲ καὶ τῶν ΛM, NΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ MN, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν AI τῷ ΛM, τὸ δὲ ZK τῷ NΞ, καὶ τὸ EK ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ MN. ἀλλὰ τὸ μὲν MN ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΞ, τὸ δὲ EK ἴσον τῷ ΔΘ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΔK ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦX γνώμονι καὶ τῷ NΞ· ἔστι δὲ καὶ τὸ AK ἴσον τοῖς ΛM, NΞ· λοιπὸν ἄρα τὸ AB ἴσον ἐστὶ τῷ ΣT, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΛN τετραγώνῳ· ἡ ΛN ἄρα δύναται τὸ AB χωρίον. λέγω ὅτι ἡ ΛN μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα. ἐπεὶ γὰρ μέσα ἐδείχθη τὰ AI, ZK, καί ἐστιν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΛO, ON· μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ἀπὸ τῶν ΛO, ON· μέση ἄρα ἑκατέρα τῶν ΛO, ON. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ AI τῷ ZK, σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛO τῷ ἀπὸ τῆς ON. πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ AI τῷ EK, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛM τῷ MN, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΛO τῷ ὑπὸ τῶν ΛO, ON· ὥστε καὶ ἡ ΛO ἀσύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ON· αἱ ΛO, ON ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω δὴ ὅτι καὶ μέσον περιέχουσιν. ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ EK, καί ἐστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΛO, ON· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΛO, ON· ὥστε καὶ αἱ ΛO, ON μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι. ἡ ΛN ἄρα μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα καὶ δύναται τὸ AB· ἡ ἄρα τὸ AB χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XCV. Theor.

Si spatium contineatur sub rationali & apotoma quarta, recta linea spatium potens minor est.

Spatium enim AB contineatur sub rationali AΓ & apotoma quarta AΔ: dico rectam lineam, quæ spatium AB potest, minorem esse.

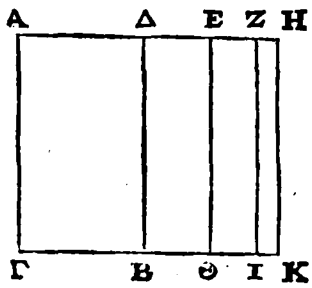
Sit enim ipsi AΔ congruens ΔH: ergo [per 4. deff. tert. 10.] AH, HΔ rationales sunt potentia solum commensurabiles, & AH longitudine commensurabilis est expositæ rationali AΓ, totaque AH plus potest quam HΔ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. quoniam igitur AH plus potest quam HΔ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis; si quartæ parti quadrati ex ΔH æquale parallelogrammum ad AH appli-

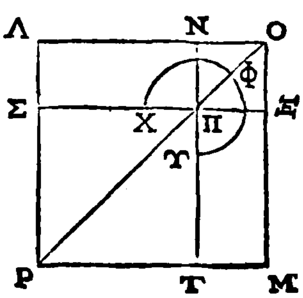
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϟε'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστί.

Χωρίον γὰρ τὸ AB περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς AΓ καὶ ἀποτομῆς τετάρτης τῆς AΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ AB χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν.

Ἔστω γὰρ τῇ AΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔH· αἱ ἄρα AH, HΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ AH σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ AΓ μήκει, ἡ δὲ ὅλη ἡ AH τῆς προσαρμοζούσης τῆς HΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ AH τῆς HΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔH ἴσον παρὰ τὴν AH παραβληθῇ, ἐκβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. ἤχθωσαν οὖν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η παράλληλοι ταῖς ΑΓ, ΒΔ αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. ἐπεὶ οὖν ῥητή ἐστιν ἡ ΑΗ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ῥητὸν ἄρα ἐστὶν ὅλον τὸ ΑΚ. πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΗ τῇ ΑΓ μήκει, καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΚ. πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ. συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΝΞ, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὂν τῷ ΛΜ, τὴν ὑπὸ ΛΟΜ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ, ΝΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΗΖ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ, ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· τῶν ἄρα ΑΙ, ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. ἔστι δὲ καὶ τῶν ΛΜ, ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΛΜ, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΕΚ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΕΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΘ, τὸ δὲ ΜΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ. ἐπεὶ οὖν ὅλον τὸ ΑΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ΛΜ, ΝΞ τετραγώνοις, ὧν τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ τετραγώνῳ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΛΝ τετραγώνῳ· ἡ ΛΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ χωρίον. λέγω δὴ ὅτι ἡ ΛΝ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ ΑΚ, καί ἐστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ τετραγώνοις· τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ ῥητόν ἐστι. πάλιν, ἐπεὶ τὸ ΔΚ μέσον ἐστὶ, καί ἐστιν ἴσον τὸ ΔΚ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ μέσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ· αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον· ἡ ΛΝ ἄρα ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάσσων, καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον· ἡ ἄρα τὸ





cetur deficiens figura quadrata, [per 18. 10.] in partes incommensurabiles ipsam dividet. itaque secetur ΔH bifariam in E, & quadrato ex EH æquale ad ipsam AH applicetur deficiens figura quadrata, quod sc. continetur sub AZ, ZH: ergo AZ ipsi ZH longitudine est incommensurabilis. ducantur per puncta E, Z, H ipsis AΓ, BΔ parallelæ EΘ, ZI, HK. quoniam igitur AH rationalis est, & ipsi AΓ longitudine commensurabilis; erit [per 20. 10.] totum parallelogrammum AK rationale. rursus, quoniam incommensurabilis est ΔH ipsi AΓ longitudine, & sunt ambæ rationales; erit [per 22. 10.] parallelogrammum ΔK medium. quod cum AZ ipsi ZH longitudine sit incommensurabilis, erit [per 1. 6.] & parallelogrammum AI incommensurabile ZK. constituatur parallelogrammo quidem AI æquale quadratum ΛM; parallelogrammo autem ZK æquale quadratum NΞ auferatur, angulum habens eundem ΛOM quem ΛM: quadrata igitur ΛM, NΞ [per 26. 6.] circa eandem sunt diametrum. sit ipsorum diameter OP, & figura describatur. itaque quoniam rectangulum sub AZ, ZH est æquale quadrato ex EH, ut AZ ad EH [per 17. 6.] ita erit EH ad HZ. sed [per 1. 6.] ut AZ quidem ad EH ita est parallelogrammum AI ad ipsum EK: ut autem EH ad ZH ita EK ad ZK: inter parallelogramma igitur AI, ZK medium proportionale est EK. est autem & inter quadrata ΛM, NΞ medium proportionale MN, atque [per constr.] est parallelogrammum AI æquale quadrato ΛM, & parallelogrammum ZK æquale est ipsi NΞ: est igitur EK æquale ipsi MN. sed [per 37. 1.] EK quidem est æquale parallelogrammo ΔΘ; MN vero [per 43. 1.] ipsi ΛΞ: totum igitur parallelogrammum gnomoni ΥΦΧ & quadrato NΞ est æquale. & quoniam totum AK æquale est quadratis ΛM, NΞ, quorum ΔK est æquale gnomoni ΥΦΧ & NΞ quadrato; erit reliquum AB æquale quadrato ΣT, hoc est quadrato ex ΛN: ergo ΛN spatium AB potest. dico ΛN irrationalem esse quæ minor appellatur. quoniam enim parallelogrammum AK rationale est, & æquale quadratis ipsarum ΛO, ON; erit & compositum ex quadratis ipsarum ΛO, ON rationale. rursus, quoniam parallelogrammum ΔK medium est, atque est æquale ei quod bis continetur sub ΛO, ON, erit & quod bis sub ΛO, ON continetur medium. & quoniam ostensum est AI incommensurabile ipsi ZK: erit & quadratum ex ΛO incommensurabile quadrato ex ON; ac propterea ΛO, ON potentia sunt incommensurabiles, quæ faciunt compositum ex ipsarum quadratis rationale, quod autem bis sub ipsis continetur medium: quare [per 77. 10.] ΛN irrationalis est, quæ minor appellatur. & potest spatium AB; recta igitur linea spatium A B potens minor est. quod erat demonstrandum.

AB χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XCVI. Theor.

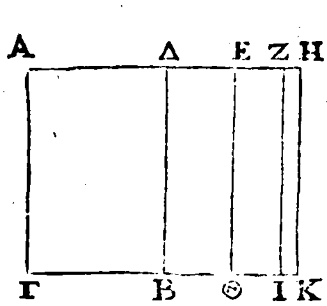
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϟϛʹ.

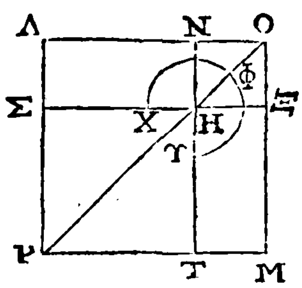
Si spatium contineatur sub rationali & apotoma quinta, recta linea spatium potens est quæ cum rationali medium totum efficit.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστι.

Spatium enim A B contineatur sub rationali A Γ & apotoma quinta A Δ: dico rectam lineam quæ spatium A B potest esse eam quæ cum rationali medium totum efficit.

Sit enim ipsi A Δ congruens Δ H: ergo [per 5. deff. tert. 10.] A H, H Δ rationales sunt potentia solum commensurabiles; & congruens Δ H longitudine commensurabilis est expositæ rationali A Γ; totaque A H plus potest quam Δ H quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: si igitur quartæ parti quadrati ex Δ H æquale parallelogrammum ad A H applicetur deficiens figura quadrata, [per 19. 10.] in partes incommensurabiles ipsam dividet. Itaque secetur Δ H bifariam in puncto E, & quadrato ex E H æquale ad ipsam A H applicetur deficiens figura quadrata, quod sc. continetur sub A Z, Z H: ergo A Z incommensurabilis est ipsi Z H longitudine. ducantur per puncta E, Z, H ipsi A Γ parallelæ E Θ, Z I, H K. & quoniam A H incommensurabilis est ipsi A Γ longitudine, & sunt ambæ rationales; erit [per 22. 10.] parallelogrammum A K medium. rursus, quoniam rationalis est Δ H, & ipsi A Γ longitudine commensurabilis; [per 20. 10.] parallelogrammum Δ K rationale erit. constituatur igitur parallelogrammo quidem A I æquale quadratum Λ M; ipsi vero Z K æquale quadratum auferatur N Ξ, angulum habens eundem quem Λ M, videlicet Λ O M: ergo [per 26. 6.] quadrata Λ M, N Ξ circa eandem sunt diametrum. sit diameter ipsorum O P, & figura describatur. similiter ostendemus rectam lineam Λ N spatium A B posse. dico Λ N esse eam, quæ cum rationali medium totum efficit. quoniam enim ostendimus parallelogrammum A K medium esse; atque est æquale quadratis ipsarum Λ O, O N; erit & compositum ex quadratis ipsarum Λ O, O N medium. rursus, quoniam Δ K rationale est, & æquale ei quod bis continetur sub Λ O, O N; erit & quod bis sub Λ O, O N continetur rationale. & quoniam A I est incommensurabile ipsi Z K, incommensurabile igitur est quadratum ex Λ O quadrato ex O N; ideoque Λ O, O N potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem sub ipsis bis





Χωρίον γὰρ τὸ AB περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς AΓ καὶ ἀποτομῆς πέμπτης τῆς AΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ AB χωρίον δυναμένη ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω γὰρ τῇ AΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔH· αἱ ἄρα AH, HΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΔH σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ AΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ AH τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔH μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔH ἴσον παρὰ τὴν AH παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔH δίχα κατὰ τὸ E σημεῖον, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς EH ἴσον παρὰ τὴν AH παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZH· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZH μήκει. καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν E, Z, H τῇ AΓ παράλληλοι αἱ EΘ, ZI, HK. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ AH τῇ AΓ μήκει, καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ AK. πάλιν, ἐπεὶ ῥητή ἐστιν ἡ ΔH, καὶ σύμμετρος τῇ AΓ μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ ΔK. συνεστάτω οὖν τῷ μὲν AI ἴσον τετράγωνον τὸ ΛM, τῷ δὲ ZK ἴσον τετράγωνον ἀφῃρήσθω περὶ τὴν αὐτὴν οὖν τῷ ΛM γωνίαν, τὴν ὑπὸ ΛOM, τὸ NΞ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛM, NΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ OP, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἡ ΛN δύναται τὸ AB. λέγω ὅτι ἡ ΛN ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ AK, καί ἐστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΛO, ON· τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΛO, ON μέσον ἐστί. πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ ΔK, καί ἐστιν ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΛO, ON· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΛO, ON ῥητόν ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ AI τῷ ZK, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛO τῷ ἀπὸ τῆς ON· αἱ ΛO, ON ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον· τὸ δὲ δὶς ὑπ'

αὐτῶν

αὐτῶν ῥητόν· λοιπὴ ἄρα ἡ ΛΝ ἄλογός ἐστι, ἡ καλουμένη μετὰ ῥητοῦ τὸ ὅλον ποιοῦσα, καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον· ἡ τὸ ΑΒ ἄρα χωρίον δυναμένη, ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

continetur rationale: ergo [per 78.10.] reliqua ΛΝ irrationalis est, quæ vocatur cum rationali medium totum efficiens, & potest spatium ΑΒ: recta igitur linea spatium ΑΒ potens est quæ cum rationali medium totum efficit. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϟζ΄.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστι.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς ἕκτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

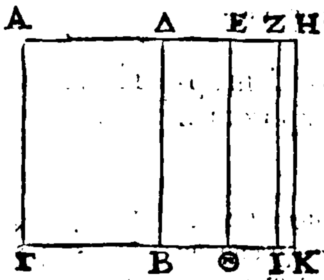
Ἔστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα τῶν ΑΗ, ΗΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ μήκει, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβάλλωμεν ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΖΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΑΓ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον ἐστὶ τὸ ΑΚ. πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΔΗ ῥηταί εἰσι καὶ ἀσύμμετροι μήκει, μέσον ἐστὶ καὶ τὸ ΔΚ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗ, ΗΔ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΔ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΔ οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΚ πρὸς τὸ ΚΔ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ τῷ ΚΔ. συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω περὶ τὴν αὐτὴν ὂν τῷ ΛΜ γωνίαν τὸ ΝΞ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ, ΝΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ὁμοίως δὴ τοῖς ἐπάνω δείξομεν ὅτι ἡ ΛΝ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον. λέγω ὅτι ἡ ΛΝ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ ΑΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ· τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ

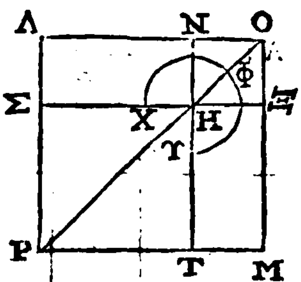
Prop. XCVII. Theor.

Si spatium contineatur sub rationali & apotoma sexta, recta linea spatium potens est quæ cum medio medium totum efficit.

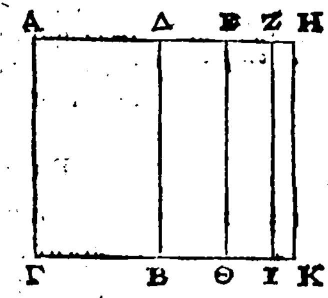
Spatium enim ΑΒ contineatur sub rationali ΑΓ & apotoma sexta ΑΔ: dico rectam lineam, quæ spatium ΑΒ potest, esse eam quæ cum medio medium totum efficit.

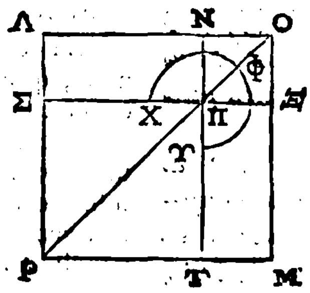
Sit enim ipsi ΑΔ congruens ΔΗ: ergo [per 6.deff.tert.10.] ΑΗ, ΗΔ rationales sunt potentia solum commensurabiles; & neutra ipsarum ΑΗ, ΗΔ commensurabilis est longitudine expositæ rationali ΑΓ, totaque ΑΗ plus potest quam congruens ΔΗ quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis. itaque quoniam ΑΗ plus potest quam ΗΔ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommmensurabilis: si quartæ parti quadrati ex ΔΗ æquale ad rectam lineam ΑΗ applicetur deficiens figura quadrata, [per 19.10.] in partes incommensurabiles ipsam dividet. itaque secetur ΔΗ bifariam in Ε, & quadrato ex ΕΗ æquale parallelogrammum ad ΑΗ applicetur deficiens figura quadrata, nempe quod continetur sub ΑΖ, ΖΗ: incommensurabilis igitur est ΑΖ ipsi ΖΗ longitudine. ut autem ΑΖ ad ΖΗ ita est [per 1.6.] ΑΙ ad ipsum ΖΚ: ergo [per 10. 10] ΑΙ ipsi ΖΚ est incommensurabile. & quoniam ΑΗ, ΑΓ rationales sunt potentia solum commensurabiles, erit [per 22.10.] ΑΚ medium. rursus, quoniam ΑΓ, ΔΗ rationales sunt & incommensurabiles longitudine, medium erit & ΔΚ. quod cum ΑΗ, ΗΔ potentia solum commensurabiles sint, erit ΑΗ ipsi ΗΔ longitudine incommensurabilis. sed ut ΑΗ ad ΗΔ ita est [per 1.6.] ΑΚ ad ΚΔ: incommensurabile igitur [per 10. 10.] est ΑΚ ipsi ΚΔ. itaque constituatur [per 14.2.] parallelogrammo ΑΙ æquale quadratum ΛΜ; parallelogrammo autem ΖΚ æquale auferatur quadratum ΝΞ, angulum habens eundem quem ΛΜ: ergo [per 26.6.] quadrata ΛΜ, ΝΞ circa eandem sunt diametrum. sit eorum diameter ΟΡ, & figura describatur. similiter ut supra ostendemus rectam lineam ΛΝ posse spatium ΑΒ. dico ΛΝ esse eam quæ cum medio medium totum efficit. quoniam enim ΑΚ ostensum est medium, atque est æquale quadratis ipsarum ΛΟ, ΟΝ, erit & compositum ex quadratis





tis ipsarum ΛΟ, ΟΝ medium. rursus, quoniam ΔΚ ostensum est medium, & est æquale ei, quod bis continetur sub ΛΟ, ΟΝ, & quod bis sub ΛΟ, ΟΝ continetur medium erit. & quoniam ostensum est ΑΚ incommensurabile ipsi ΚΔ: ergo & quadrata ex ΛΟ, ΟΝ incommensurabilia sunt ei quod bis sub ΛΟ, ΟΝ continetur. & quoniam incommensurabile est ΑΙ ipsi ΖΚ, erit & quadratum ex ΛΟ quadrato ex ΟΝ incommensurabile: ergo ΛΟ, ΟΝ potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem bis sub ipsis continetur medium, & adhuc quadrata ipsarum incommensurabilia ei quod bis sub ipsis continetur: ergo [per 79. 10.] ΛΝ irrationalis est, quæ vocatur cum medio medium totum efficiens. & potest ΑΒ spatium: recta igitur linea spatium ΑΒ potens est quæ cum medio medium totum efficit. quod erat demonstrandum.





τῷ ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ μέσον ἐστί. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐδείχθη τὸ ΔΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ μέσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ ΑΚ τῷ ΔΚ, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ τετράγωνα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ· αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον, ἔτι τε τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ' αὐτῶν· ἡ ἄρα ΛΝ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον· ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XCVIII. Theor.

Quadratum apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam.

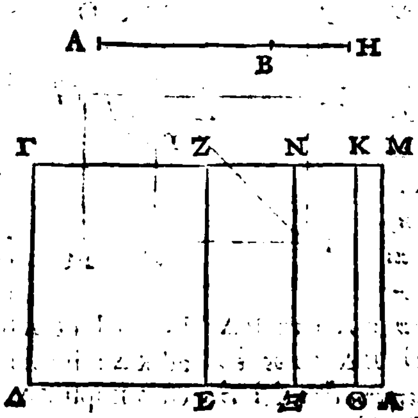
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϟη'.

Τὸ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην.

SIT apotome ΑΒ, rationalis autem ΓΔ, & quadrato ex ΑΒ æquale parallelogrammum ΓΕ ad ipsam ΓΔ applicetur latitudinem faciens ΓΖ: dico ΓΖ esse apotomen primam.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Sit enim ipsi ΑΒ congruens ΒΗ: ergo [per 74.10.] ΑΗ, ΗΒ rationales sunt potentia solum commensurabiles. & [per 45.1.] ad ipsam ΓΔ applicetur quadrato quidem ex ΑΗ æquale ΓΘ; quadrato autem ex ΒΗ æquale ΚΛ: totum igitur ΓΛ est æquale quadratis ex ΑΗ, ΗΒ. ex quibus parallelogrammum ΓΕ æquale est quadrato ex ΑΒ: ergo [per 7.2.] reliquum ΖΛ ei quod bis sub ΑΗ, ΗΒ continetur est æquale. secetur ΖΜ bifariam in Ν; & per Ν ipsi ΓΔ parallela ducatur ΝΞ: utrumque igitur ipsorum ΖΞ, ΛΝ est æquale ei quod sub ΑΗ, ΗΒ continetur. & quoniam quadrata ex ΑΗ, ΗΒ rationalia sunt, atque est quadratis ex ΑΗ, ΗΒ æquale parallelogrammum ΔΜ; erit ipsum ΔΜ rationale. & ad rationalem ΓΔ applicatum est, latitudinem faciens ΓΜ: ergo [per 21.10.] ΓΜ est rationalis, & ipsi ΓΔ commensurabilis longitudine. rursus, quoniam medium est quod bis continetur sub ΑΗ, ΗΒ; estque ei quod bis sub ΑΗ, ΗΒ continetur æquale



Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ τὸ ΚΛ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τετμήσθω ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΛΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητά ἐστι, καὶ ἔστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΔΜ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΜ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβέβληται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἔστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον

τὸ

τὸ ΑΖ· μέσον ἄρα τὸ ΑΖ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἡ ΖΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητά ἐστι, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον, ἀσύμμετρα ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἔστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστι. λέγω ὅτι καὶ πρώτη. ἐπεὶ γὰρ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΝΛ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον τὸ ΚΛ· καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ. ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· [* ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ·] τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ, καὶ ἔστι σύμμετρος ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ· ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἔστιν ἡ ΓΜ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ μήκει· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

parallelogrammum ΑΖ; erit ipsum ΑΖ medium. & applicatum est ad rationalem ΓΔ latitudinem faciens ΖΜ: quare [per 23.10.] ΖΜ est rationalis, ipsique ΓΔ longitudine incommensurabilis. & quoniam quadrata quidem ex ΑΗ, ΗΒ rationalia sunt; quod autem bis continetur sub ΑΗ, ΗΒ medium: quadrata ex ΑΗ, ΗΒ incommensurabilia sunt ei quod bis sub ΑΗ, ΗΒ continetur. sed quadratis ex ΑΗ, ΗΒ æquale est parallelogrammum ΓΛ, ei vero quod bis continetur sub ΑΗ, ΗΒ æquale est ΖΛ: ergo ΓΛ ipsi ΖΛ est incommensurabile. ut autem ΓΛ ad ΖΛ ita est [per 1. 6.] recta linea ΓΜ ad ΜΖ: incommensurabilis igitur est ΓΜ ipsi ΜΖ longitudine. & sunt ambæ rationales: ergo ΓΜ, ΜΖ rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea [per 74. 10.] ΓΖ est apotome. dico & primam esse. quoniam enim inter quadrata ex ΑΗ, ΗΒ [per lem. 55. 10.] medium proportionale est quod sub ΑΗ, ΗΒ continetur, atque [per constr.] est quadrato quidem ex ΑΗ æquale parallelogrammum ΓΘ; ei vero quod sub ΑΗ, ΗΒ continetur æquale ΝΛ, & quadrato ex ΒΗ æquale ΚΛ: erit inter ipsa ΓΘ, ΚΛ medium proportionale ΝΛ: ut igitur ΓΘ ad ΝΛ ita ΝΛ ad ΚΛ. sed ut ΓΘ ad ΝΛ ita est recta linea ΓΚ ad ipsam ΝΜ. ut autem ΝΛ ad ΚΛ ita recta linea ΝΜ ad ΜΚ: [* ergo ut ΓΚ ad ΝΜ ita est ΝΜ ad ΚΜ:] & ob id [per 17. 6.] rectangulum sub ΓΚ, ΚΜ est æquale quadrato ex ΜΝ, hoc est quartæ parti quadrati ex ΖΜ. & quoniam [ex hyp.] quadratum ex ΑΗ commensurabile est quadrato ex ΗΒ, erit & parallelogrammum ΓΘ parallelogrammo ΚΛ commensurabile. sed ut ΓΘ ad ΚΛ ita est recta linea ΓΚ ad ipsam ΚΜ; commensurabilis igitur [per 10.10.] est ΓΚ ipsi ΚΜ. itaque cum duæ rectæ lineæ inæquales sint ΓΜ, ΜΖ, & quartæ parti quadrati ex ΖΜ æquale parallelogrammum ad ipsam ΓΜ applicatum sit deficiens figura quadrata, quod scilicet sub ΓΚ, ΚΜ continetur; sitque ΓΚ commensurabilis ipsi ΚΜ: [per 18.10.] recta linea ΓΜ plus poterit quam ΜΖ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. atque est ΓΜ commensurabilis longitudine expositæ rationali ΓΔ: ergo [per 1.deff.tert.10.] ΓΖ est prima apotome.

Quadratum igitur apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϟθʹ.

Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν.

Ἔστω μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι δευτέρα,

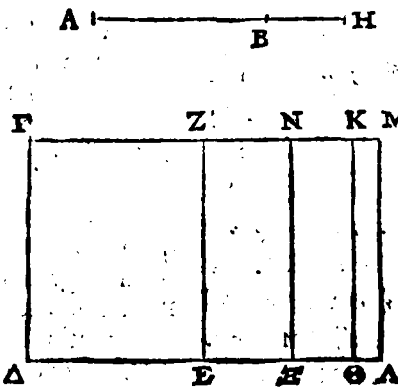
Prop. XCIX. Theor.

Quadratum mediæ apotomæ primæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam.

SIT mediæ apotome prima ΑΒ, rationalis autem ΓΔ, & quadrato ex ΑΒ æquale parallelogrammum ΓΕ ad ipsam ΓΔ applicetur, latitudinem faciens ΓΖ; dico ΓΖ esse apotomen secundam.

* Uncis inclusa desunt in Cod. MS. illa tamen retinenda censemus.

Sit enim ipsi AB congruens BH: ergo [per 75. 10.] AH, HB mediæ sunt potentia solum commensurabiles, quæ rationale continent. & [per 45. 1.] quadrato quidem ex AH æquale parallelogrammum ΓΘ ad ΓΔ applicetur, latitudinem faciens ΓK; quadrato autem ex HB æquale KΛ ad eandem applicetur, latitudinem faciens KM: totum igitur ΓΛ est æquale quadratis ex AH, HB quæ media sunt: quare & ΓΛ est medium. & ad rationalem ΓΔ applicatum est, latitudinem faciens ΓM: rationalis igitur est ΓM [per 23. 10.] & ipsi ΓΔ longitudine incommensurabilis. itaque quoniam ΓΛ est æquale quadratis ex AH, HB, ex quibus quadratum ex AB æquale est parallelogrammo ΓE; erit [per 7. 2.] reliquum, sc. quod bis continetur sub AH, HB, æquale ipsi ZΛ. est autem quod bis sub AH, HB continetur rationale: rationale igitur est & ZΛ, & ad rationalem ZE applicatum est latitudinem faciens ZM: quare [per 21. 10.] ZM est rationalis & ipsi ΓΔ commensurabilis longitudine. & quoniam quadrata quidem ex AH, HB, hoc est parallelogrammum ΓΛ, medium est; quod autem bis continetur sub AH, HB, videlicet ZΛ, est rationale: erit ΓΛ incommensurabile ipsi ZΛ. ut autem ΓΛ ad ZΛ, ita [per 1. 6.] recta linea ΓM ad MZ: ergo ΓM ipsi MZ longitudine est incommensurabilis. & sunt ambæ rationales: sunt igitur ΓM, MZ rationales potentia solum commensurabiles: ideoque [per 74. 10.] ΓZ est apotome. dico & secundam esse. secetur enim ZM bifariam in puncto N, & per N ipsi ΓΔ parallela ducatur NΞ: alterutrum igitur parallelogrammorum ZΞ, NΛ est æquale ei quod continetur sub AH, HB. & quoniam inter quadrata ex AH, HB medium proportionale est quod sub AH, HB continetur, estque quadratum ex AH æquale parallelogrammo ΓΘ, quod autem continetur sub AH, HB æquale parallelogrammo NΛ, & quadratum ex HB æquale ipsi KΛ; erit inter parallelogramma ΓΘ, KΛ medium proportionale NΛ: est igitur ut ΓΘ ad NΛ ita NΛ ad KΛ. sed ut ΓΘ ad NΛ ita est [per 1. 6.] recta linea ΓK ad ipsam NM, & ut NΛ ad KΛ ita NM ad KM: ergo ut ΓK ad NM ita est NM ad KM: ac propterea [per 17. 6.] rectangulum sub ΓK, KM est æquale quadrato ex NM; hoc est, quartæ parti quadrati ex ZM. & quoniam quadratum ex AH commensurabile est quadrato ex HB, erit & ΓΘ parallelogrammum parallelogrammo KΛ commensurabile, hoc est, recta linea ΓK commensurabilis ipsi KM. quoniam itaque duæ rectæ lineæ inæquales sunt ΓM, MZ, quartæ autem parti quadrati ex MZ æquale ad majorem ΓM applicatum sit deficiens figura quadrata, quod sc. continetur sub ΓK, KM, & in partes commensurabiles ipsam dividat; [per 18. 10.] recta linea ΓM plus poterit quam MZ quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. atq; [ex hyp.] est congruens ZM



Ἔστω γὰρ τῇ AB προσαρμόζουσα ἡ BH· αἱ ἄρα AH, HB μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓK, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς HB ἴσον τὸ KΛ, πλάτος ποιοῦν τὴν KM· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH, HB μέσοις οὖσι· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΓΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβέβληται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓM· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓM, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH, HB, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς AB ἴσον ἐστὶ τῷ ΓE· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AH, HB ἴσον ἐστὶ τῷ ZΛ. ῥητὸν δέ ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AH, HB· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ZΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ZE παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ZM· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ZM, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. ἐπεὶ οὖν τὰ μὲν ἀπὸ τῶν AH, HB, τουτέστι τὸ ΓΛ, μέσον ἐστὶ, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν AH, HB, τουτέστι τὸ ZΛ, ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ZΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ZΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓM πρὸς τὴν MZ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓM τῇ MZ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓM, MZ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓZ ἄρα ἀποτομή ἐστι. λέγω δὴ ὅτι καὶ δευτέρα. τετμήσθω γὰρ ἡ ZM δίχα κατὰ τὸ N, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ N τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ NΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ZΞ, NΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AH, HB. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν AH, HB τετραγώνων μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν AH, HB, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ἀπὸ τῆς AH τῷ ΓΘ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AH, HB τῷ NΛ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς HB τῷ KΛ· καὶ τῶν ΓΘ, KΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ NΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ NΛ οὕτως τὸ NΛ πρὸς τὸ KΛ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ NΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓK πρὸς τὴν NM, ὡς δὲ τὸ NΛ πρὸς τὸ KΛ οὕτως ἐστὶν ἡ NM πρὸς τὴν KM· ὡς ἄρα ἡ ΓK πρὸς τὴν NM οὕτως ἐστὶν ἡ NM πρὸς τὴν KM· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓK, KM ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς NM, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ZM. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς AH τῷ ἀπὸ τῆς HB, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΓΘ τῷ KΛ, τουτέστιν ἡ ΓK τῇ KM. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓM, MZ, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς MZ ἴσον παρὰ τὴν μείζονα τὴν ΓM παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΓK, KM, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ· ἡ ἄρα ΓM τῆς MZ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἔστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ZM σύμμετρος

τρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Τὸ ἄρα ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

exposită rationali ΓΔ commensurabilis: quare [per 2. deff. tert. 10.] ΓΖ est apotome secunda.

Quadratum igitur mediæ apotomæ primæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρ'.

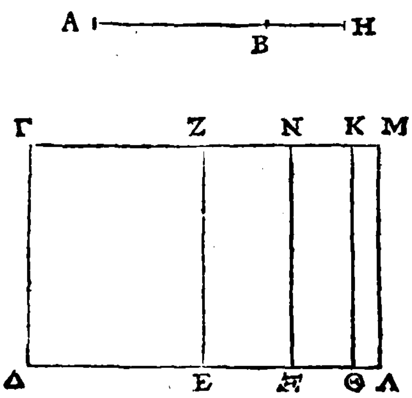
Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην.

Prop. C. Theor.

Quadratum mediæ secundæ apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam.

Ἔστω μέση ἀποτομὴ δευτέρα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι τρίτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον παρὰ τὴν ΚΘ παραβεβλήσθω τὸ ΚΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἔστι μέσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΓΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τετμήσθω οὖν ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΖΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΗΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ μήκει ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΖΜ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥη-

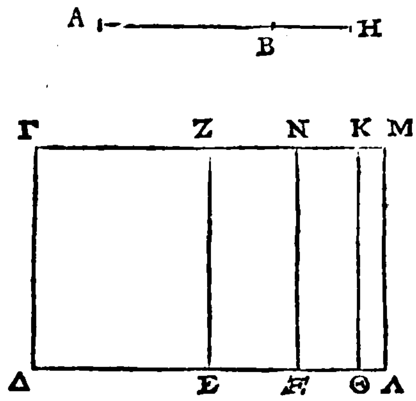


SIT mediæ apotome secunda AB, rationalis autem ΓΔ, & quadrato ex AB æquale parallelogrammum ΓE ad ipsam ΓΔ applicetur latitudinem faciens ΓZ: dico ΓZ esse apotomen tertiam.

Sit enim ipsi AB congruens BH; ergo [per 76. 10.] AH, HB mediæ sunt potentia solum commensurabiles, quæ medium continent. & [per 45. 1.] quadrato quidem ex AH æquale ad ΓΔ applicetur ΓΘ latitudinem faciens ΓK; quadrato autem ex HB æquale ad KΘ applicetur KΛ, latitudinem faciens KM: totum igitur ΓΛ est æquale quadratis ex AH, HB. & sunt quadrata ex AH, HB media: ergo & ΓΛ est medium, & ad rationalem ΓΔ applicatum est, latitudinem faciens ΓM: ergo [per 23. 10.] ΓM est rationalis, & ipsi ΓΔ incommensurabilis longitudine. & quoniam totum ΓΛ est æquale quadratis ex AH, HB, ex quibus ΓE æquale est quadrato ex AB; erit [per 7. 2.] reliquum ZΛ æquale ei quod bis continetur sub AH, HB. secetur ZM bifariam in N; & ipsi ΓΔ parallela ducatur NΞ: alterutrum igitur parallelogrammorum ZΞ, NΛ est æquale ei quod sub AH, HB continetur. est autem quod continetur sub AH, HB medium: ergo & medium est ZΛ, & ad rationalem EZ applicatum est, latitudinem faciens ZM: quare [per 23. 10.] & ZM est rationalis, & ipsi ΓΔ longitudine incommensurabilis. & quoniam AH, HB potentia solum commensurabiles sunt, erit AH ipsi HB incommensurabilis longitudine: ideoque [per 1. 6. & 10. 10.] quadratum ex AH rectangulo sub AH, HB est incommensurabile. sed quadrato quidem ex AH commensurabilia sunt ex AH, HB quadrata; rectangulo autem sub AH, HB commensurabile est quod bis sub AH, HB continetur: ergo quadrata ex AH, HB sunt incommensurabilia ei quod bis sub AH, HB continetur. at [per constr.] quadratis ex AH, HB æquale est parallelogrammum ΓΛ; ei vero quod bis continetur sub AH, HB æquale est ZΛ: incommensurabile igitur est ΓΛ ipsi ZΛ. ut autem ΓΛ ad ZΛ ita est recta linea ΓM ad ZM: ergo [per 10. 10.] ΓM ipsi ZM incommensurabilis est longitudine. & sunt ambæ rationales:

les: quare ΓΜ, ΖΜ rationales sunt potentia solum commensurabiles: & ob id [per 74. 10.] ΓΖ est apotome. dico & tertiam esse. quoniam enim quadratum ex ΑΗ commensurabile est quadrato ex ΗΒ, erit parallelogrammum ΓΘ parallelogrammo ΚΛ commensurabile: ergo & recta linea ΓΚ est commensurabilis ipsi ΚΜ. & quoniam inter quadrata ex ΑΗ, ΗΒ [per lem. 55. 10.] medium proportionale est rectangulum sub ΑΗ, ΗΒ; atque est quadrato quidem ex ΑΗ æquale parallelogrammum ΓΘ; quadrato autem ex ΗΒ æquale ΚΛ, & rectangulo sub ΑΗ, ΗΒ æquale ΝΛ; erit inter parallelogramma ΓΘ, ΚΛ medium proportionale ΝΛ: est igitur ut ΓΘ ad ΝΛ ita ΝΛ ad ΚΛ. sed [per 1. 6.] ut ΓΘ ad ΝΛ ita est recta linea ΓΚ ad ΝΜ; ut autem ΝΛ ad ΚΛ ita ΝΜ ad ΚΜ: ergo & ut ΓΚ ad ΝΜ ita ΝΜ ad ΚΜ; ac propterea [per 17. 10.] rectangulum sub ΓΚ, ΚΜ est æquale quadrato ex ΝΜ, hoc est quartæ parti quadrati ex ΖΜ. quoniam igitur duæ rectæ lineæ inæquales sunt ΓΜ, ΜΖ; & quartæ parti quadrati ex ΖΜ æquale ad ΓΜ applicatum est deficiens figura quadrata, quod in partes commensurabiles ipsam dividit; [per 18. 10.] recta linea ΓΜ plus poterit quam ΜΖ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. & neutra ipsarum ΓΜ, ΜΖ longitudine commensurabilis est expositæ rationali ΓΔ: ergo [per 3. deff. tert. 10.] ΓΖ est apotome tertia.

Quadratum igitur mediæ apotomæ secundæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam. quod erat demonstrandum.



τῇ· αἱ ἄρα ΓΜ, ΖΜ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ. λέγω δὴ ὅτι καὶ τρίτη. ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, σύμμετρον ἄρα τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΝΛ· καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ· ἡ ΓΜ ἄρα τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα τῶν ΓΜ, ΜΖ μήκει σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι τρίτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. CI. Theor.

Quadratum minoris ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam.

SIT minor ΑΒ, rationalis autem ΓΔ, & quadrato ex ΑΒ æquale parallelogrammum ΓΕ ad ipsam ΓΔ applicetur latitudinem faciens ΓΖ: dico ΓΖ esse apotomen quartam.

Sit enim ipsi ΑΒ congruens ΒΗ: ergo [per 77. 10.] ΑΗ, ΗΒ potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum ΑΗ, ΗΒ quadratis rationale, quod autem bis sub ipsis continetur medium. & [per 45. 1.] quadrato ex ΑΗ æquale ad ΓΔ applicetur ΓΘ latitudinem faciens ΓΚ: quadrato autem ex ΒΗ æquale [*ad ΚΘ applicetur] ΚΛ latitudinem faciens ΚΜ: totum igitur ΓΛ quadratis ex ΑΗ, ΗΒ est æquale. atque est compositum ex quadratis ΑΗ, ΗΒ rationale: ergo & rationale est ΓΛ; & ad rationalem ΓΔ applicatum

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρα΄.

Τὸ ἀπὸ ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην.

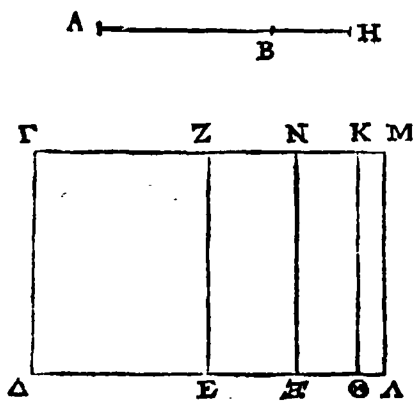
Ἔστω ἐλάσσων ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον [* παρὰ τὴν ΚΘ παραβεβλήσθω] τὸ ΚΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καί ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητόν· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΓΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παρά-

* Illa uncis inclusa rectius desiderantur in Codd. MSS.

κειται

κειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τετμήσθω οὖν ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, ΜΛ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἐστὶ, καί ἐστιν ἴσον τῷ ΛΖ· καὶ τὸ ΛΖ ἄρα μέσον ἐστὶ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητόν ἐστι, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον, ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. ἴσον δέ ἐστι τὸ ΓΛ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΖΜ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ. λέγω δὴ ὅτι καὶ τετάρτη. ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ μήκει. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καί ἐστιν ἴσον τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΝΛ· τῶν ἄρα ΓΘ, ΚΛ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΜΝ. ὡς δὲ ἡ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΜΝ οὕτως ἐστὶν ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΖ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΖ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ· ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί ἐστιν ὅλη ἡ ΓΜ σύμμετρος μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι τετάρτη.



est latitudinem faciens ΓΜ: quare [per 21. 10.] ΓΜ est rationalis & ipsi ΓΔ longitudine commensurabilis. & quoniam totum ΓΛ est æquale quadratis ex ΑΗ, ΗΒ, ex quibus ΓΕ æquale est quadrato ex ΑΒ; erit [per 7. 2.] reliquum ΖΛ æquale ei quod bis sub ΑΗ, ΗΒ continetur. itaque secetur ΖΜ bifariam in puncto Ν, & per Ν alterutri ipsarum ΓΔ, ΜΛ parallela ducatur ΝΞ: utrumque igitur parallelogrammorum ΖΞ, ΝΛ est æquale ei quod continetur sub ΑΗ, ΗΒ. & quoniam quod bis continetur sub ΑΗ, ΗΒ medium est & æquale parallelogrammo ΛΖ; erit & ΛΖ medium, & ad rationalem ΖΕ applicatum est latitudinem faciens ΖΜ: ergo [per 23. 10.] ΖΜ est rationalis, & ipsi ΓΔ longitudine incommensurabilis. & quoniam compositum ex quadratis ipsarum ΑΗ, ΗΒ est rationale, quod autem bis sub ΑΗ, ΗΒ continetur medium; erunt quadrata ex ΑΗ, ΗΒ ei quod bis continetur sub ΑΗ, ΗΒ incommensurabilia. quadratis autem ex ΑΗ, ΗΒ æquale est parallelogrammum ΓΛ, & ei quod bis sub ΑΗ, ΗΒ continetur est æquale ΖΛ: incommensurabile igitur est ΓΛ ipsi ΛΖ. sed [per 1. 6.] ut ΓΛ ad ΖΛ ita est ΓΜ ad ΖΜ: quare [per 10. 10.] ΓΜ ipsi ΖΜ longitudine est incommensurabilis. & sunt ambæ rationales: ergo ΓΜ, ΜΖ rationales sunt potentia solum commensurabiles: & igitur [per 74. 10.] ΓΖ est apotome. dico & quartam esse. quoniam enim ΑΗ, ΗΒ potentia sunt incommensurabiles; erit quadratum ex ΑΗ incommensurabile quadrato ex ΗΒ. & quadrato quidem ex ΑΗ [per constr.] æquale est parallelogrammum ΓΘ; quadrato autem ex ΗΒ est æquale ΚΛ: incommensurabile igitur est ΓΘ ipsi ΚΛ. sed ut ΓΘ ad ΚΛ ita est ΓΚ ad ΚΜ: ergo ΓΚ ipsi ΚΜ est incommensurabilis longitudine. & quoniam inter quadrata ex ΑΗ, ΗΒ [per lem. 55. 10.] medium proportionale est rectangulum sub ΑΗ, ΗΒ, atque est quadrato quidem ex ΑΗ æquale parallelogrammum ΓΘ, quadrato autem ex ΗΒ æquale ΚΛ, & rectangulo sub ΑΗ, ΗΒ æquale ΝΛ; erit ΝΛ medium proportionale inter parallelogramma ΓΘ, ΚΛ: est igitur ut ΓΘ ad ΝΛ ita ΝΛ ad ΚΛ. sed ut ΓΘ ad ΝΛ ita ΓΚ ad ΜΝ. & ut ΝΛ ad ΚΛ ita ΜΝ ad ΚΜ: ergo ut ΓΚ ad ΜΝ ita ΜΝ ad ΚΜ; ac propterea [per 17. 6.] rectangulum sub ΓΚ, ΚΜ est æquale quadrato ex ΜΝ, hoc est quartæ parti quadrati ex ΜΖ. itaque quoniam duæ rectæ lineæ inæquales sunt ΓΜ, ΜΖ, & quartæ parti quadrati ex ΜΖ æquale ad ΓΜ applicatum est deficiens figura quadrata, sc. contentum sub ΓΚ, ΚΜ, & in partes incommensurabiles ipsam dividit: recta linea ΓΜ [per 19. 10.] plus poterit quam ΜΖ quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. & est tota ΓΜ longitudine commensurabilis expositæ rationali ΓΔ: ergo [per 4. deff. tert. 10.] ΓΖ est apotome quarta.

Quadratum igitur minoris ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam. quod erat demonstrandum.

Τὸ ἄρα ἀπὸ ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. CII. Theor.

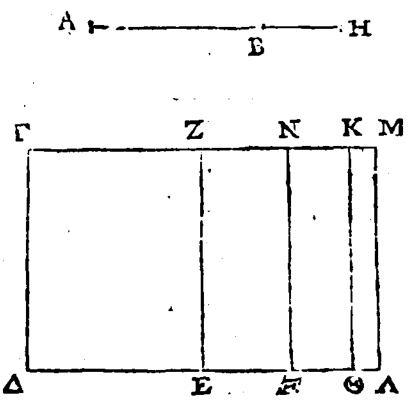
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρβ'.

Quadratum ejus quæ cum rationali medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam.

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην.

SIT quæ cum rationali medium totum efficit AB, rationalis autem ΓΔ, & quadrato ex AB æquale ad ΓΔ applicetur parallelogrammum ΓE latitudinem faciens ΓZ: dico ΓZ apotomen esse quintam.

Sit enim ipsi AB congruens BH: ergo [per 78. 10.] AH, HB rectæ lineæ potentia sunt incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem bis sub ipsis continetur rationale. & [per 45. 1.] quadrato ex AH æquale parallelogrammum ΓΘ ad ipsam ΓΔ applicetur, latitudinem faciens ΓK; quadrato autem ex HB æquale applicetur KΛ latitudinem faciens KM: totum igitur ΓΛ est æquale quadratis ex AH, HB. sed compositum ex quadratis ipsarum AH, HB est medium: ergo & medium est parallelogrammum ΓΛ. & ad rationalem ΓΔ applicatum est, latitudinem faciens ΓM: quare [per 23. 10.] ΓM est rationalis, & ipsi ΓΔ longitudine incommensurabilis. & quoniam totum ΓΛ est æquale quadratis ex AH, HB, ex quibus ΓE æquale est quadrato ex AB; erit [per 7. 2.] reliquum ZΛ æquale ei quod bis sub AH, HB continetur. Itaque secetur ZM bifariam in puncto N, & ab ipso N alterutri ipsarum ΓΔ, MΛ parallela ducatur NΞ: utrumque igitur ZΞ, NΛ est æquale ei quod sub AH, HB continetur. & quoniam quod bis continetur sub AH, HB rationale est, & æquale parallelogrammo ZΛ; erit & ZΛ rationale. & ad rationalem EZ applicatum est, latitudinem faciens ZM: ergo [per 21. 10.] ZM est rationalis, & ipsi ΓΔ commensurabilis longitudine. & quoniam parallelogrammum ΓΛ est medium, & ZΛ rationale: incommensurabile est ΓΛ ipsi ZΛ. & [per 1. 6.] ut ΓΛ ad ZΛ ita ΓM ad MZ: ergo [per 10. 10.] ΓM ipsi MZ longitudine est incommensurabilis. & sunt ambæ rationales; quare ΓM, MZ rationales sunt potentia solum commensurabiles; ideoque [per 74. 10.] ΓZ est apotome. dico & quintam esse. similiter enim [ut in præc.] demonstrabimus rectangulum sub ΓK, KM esse æquale quadrato ex NM, hoc est, quartæ parti quadrati ex ZM. quod cum quadratum ex AH incommensurabile sit quadrato ex HB; sitque quadratum ex AH parallelogrammo ΓΘ æquale, quadratum autem ex HB parallelogrammo KΛ: erit ΓΘ ipsi KΛ incommensura-



Ἔστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ AB, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓE πλάτος ποιοῦν τὴν ΓZ· λέγω ὅτι ἡ ΓZ ἀποτομή ἐστι πέμπτη.

Ἔστω γὰρ τῇ AB προσαρμόζουσα ἡ BH· αἱ ἄρα AH, HB εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς HB ἴσον τὸ KΛ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH, HB. τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AH, HB ἅμα μέσον ἐστί· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓM· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓM, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH, HB, ὧν τὸ ΓE ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB· λοιπὸν ἄρα τὸ ZΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν AH, HB. τετμήσθω οὖν ἡ ZM δίχα κατὰ τὸ N, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ N ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, MΛ παράλληλος ἡ NΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ZΞ, NΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AH, HB. καὶ ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AH, HB ῥητόν ἐστι, καί ἐστιν ἴσον τῷ ZΛ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ZΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν EZ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ZM· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ZM, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ΓΛ μέσον ἐστί, τὸ δὲ ZΛ ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ZΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ZΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓM πρὸς τὴν MZ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓM τῇ MZ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓM, MZ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓZ. λέγω δὴ ὅτι καὶ πέμπτη. ὁμοίως γὰρ δείξομεν ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΓK, KM ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς NM, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ZM. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς AH τῷ ἀπὸ τῆς HB, ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς AH τῷ ΓΘ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς HB τῷ KΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ KΛ·

ΚΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ μήκει. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα διαιρεῖ αὐτήν· ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ ἔστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΜ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι πέμπτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

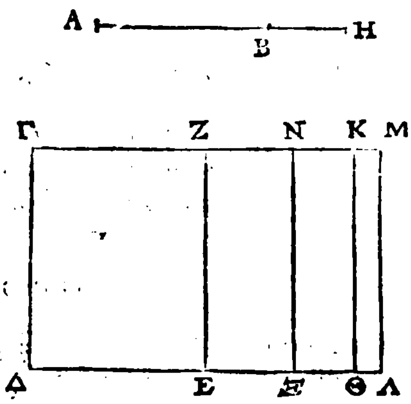
bile. sed ut ΓΘ ad ΚΛ ita ΓΚ ad ΚΜ: ergo ΓΚ ipsi ΚΜ longitudine est incommensurabilis. quoniam igitur duæ rectæ lineæ ΓΜ, ΜΖ inæquales sunt; & quartæ parti quadrati ex ΖΜ æquale ad ipsam ΓΜ applicatum est deficiens figura quadrata,, & in partes incommensurabiles ipsam dividit; [per 19. 10.] recta linea ΓΜ plus poterit quam ΜΖ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. atque est congruens ΖΜ commensurabilis longitudine expositæ rationali ΓΔ: ergo [per 5. deff. tert. 10.] ΓΖ est apotome quinta.

Quadratum igitur ejus quæ cum rationali medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ργ´.

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην.

Ἔστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστιν ἕκτη.



Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον, ἔτι δὲ ἀσύμμετρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. παραβεβλήσθω οὖν παρὰ τὴν ΓΔ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ τὸ ΚΛ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΓΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. ἐπεὶ οὖν τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἔστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον· καὶ τὸ ΖΛ ἄρα μέσον ἐστί. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἔστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμ-

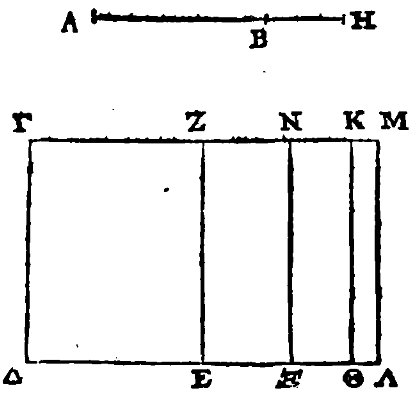
Prop. CIII. Theor.

Quadratum ejus quæ cum medio medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen sextam.

SIT quæ cum medio medium totum efficit ΑΒ, rationalis autem ΓΔ; & quadrato ex ΑΒ æquale parallelogrammum ΓΕ ad ipsam ΓΔ applicetur latitudinem faciens ΓΖ: dico ΓΖ esse apotomen sextam.

Sit enim ipsi ΑΒ congruens ΒΗ: ergo [per 79. 10.] ΑΗ, ΗΒ potentia sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem bis sub ipsis ΑΗ, ΗΒ continetur medium, & adhuc quadrata ipsarum ΑΗ, ΗΒ incommensurabilia rectangulo quod bis continetur sub ipsis ΑΗ, ΗΒ. itaque ad ΓΔ applicetur quadrato ex ΑΗ æquale parallelogrammum ΓΘ latitudinem faciens ΓΚ; quadrato autem ex ΒΗ æquale applicetur ΚΛ: totum igitur ΓΛ est æquale quadratis ex ΑΗ, ΗΒ: ac propterea ΓΛ est medium: & ad rationalem ΓΔ applicatum est latitudinem faciens ΓΜ: ergo [per 23. 10.] ΓΜ rationalis est & ipsi ΓΔ longitudine incommensurabilis. quoniam igitur ΓΛ est æquale quadratis ex ΑΗ, ΗΒ, ex quibus ΓΕ æquale est quadrato ex ΑΒ; erit [per 7. 2.] reliquum ΖΛ æquale ei quod bis sub ΑΗ, ΗΒ continetur. atque est quod bis continetur sub ΑΗ, ΗΒ medium: ergo & ΖΛ est medium. & ad rationalem ΖΕ applicatum est latitudinem faciens ΖΜ; est igitur ΖΜ rationalis, & ipsi ΓΔ longitudine incommensurabilis. & quoniam quadrata ex ΑΗ, ΗΒ incommensurabilia sunt ei quod bis sub ΑΗ, ΗΒ continetur; atque est quadratis quidem ex ΑΗ, ΗΒ æquale parallelogrammum ΓΛ, ei vero quod bis continetur sub ΑΗ, ΗΒ æquale ΖΛ; erit ΓΛ ipsi ΖΛ incommensurabile. sed [per 1. 6.] ut ΓΛ ad ΖΛ ita est ΓΜ ad ΜΖ: quare [per 10. 10.]

Γ M ipsi M Z incommensurabilis est longitudine. & sunt ambæ rationales: ergo Γ M, M Z rationales sunt potentia solum commensurabiles; & ob id [per 74.10.] Γ Z est apotome. dico & sextam esse. quoniam enim Z Λ est æquale ei quod bis continetur sub A H, H B, secetur Z M bifariam in puncto N; & per N ipsi Γ Δ parallela ducatur N Ξ: utrumque igitur parallelogrammorum ZΞ, NΛ est æquale rectangulo sub A H, H B. & quoniam AH, H B potentia sunt incommensurabiles; erit quadratum ex A H incommensurabile quadrato ex H B. sed [per constr.] quadrato quidem ex A H est æquale parallelogrammum Γ Θ, quadrato autem ex H B æquale K Λ: ergo Γ Θ ipsi K Λ est incommensurabile. ut autem ΓΘ ad KΛ ita [per 1.6.] est Γ K ad KM: incommensurabilis igitur est Γ K ipsi KM. & quoniam [per lem. 55.10.] inter quadrata ex A H, H B medium proportionale est rectangulum sub A H, H B, estque quadrato ex A H æquale Γ Θ, & quadrato ex H B æquale K Λ, rectanguloque sub A H, H B æquale N Λ; erit & inter parallelogramma Γ Θ, K Λ medium proportionale N Λ. & eadem ratione [atque in præced.] Γ M plus poterit quam M Z quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. & neutra ipsarum est commensurabilis longitudine expositæ rationali Γ Δ: ergo [per 6. deff. tert. 10.] Γ Z est sexta apotome.



μετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. καί εἰσι ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΓΜ, ΜΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἕκτη. ἐπεὶ γὰρ τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τετμήσθω δίχα ἡ ΖΜ κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΝΛ· καὶ τῶν ἄρα ΓΘ, ΚΛ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ ἡ ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἕκτη.

Quadratum igitur ejus quæ cum medio medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen sextam. quod erat demonstrandum.

Τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. CIV. THEOR.

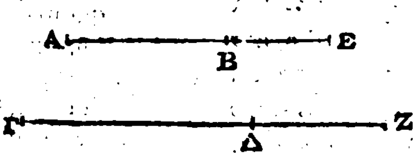
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρδ'.

Recta linea apotomæ longitudine commensurabilis & ipsa apotome est atque ordine eadem.

Η τῇ ἀποτομῇ μήκει σύμμετρος ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

SIT apotome A B, & ipsi A B longitudine commensurabilis sit Γ Δ: dico Γ Δ apotomen esse atque ordine eandem quæ A B.

Quoniam enim A B est apotome, sit ipsi congruens B E; ergo [per 74. 10.] A E, E B rationales sunt potentia solum commensurabiles. & fiat ratio B E ad Δ Z eadem quæ est A B ad Γ Δ: quare [per 12. 5.] ut una ad unam ita erunt omnes ad omnes: est igitur ut tota AE ad totam Γ Z ita A B ad ΓΔ. commensurabilis autem est A B ipsi Γ Δ longitudine: ergo [per 10. 10.] & A E ipsi Γ Z longitudine commensurabilis erit, & B E ipsi Δ Z. sunt autem A E, E B rationales potentia solum commensurabiles: ergo [per 10. 10.] & Γ Z, Z Δ rationales erunt potentia solum commensurabiles; ac propterea [per 74.10.] ΓΔ est apo-



Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ ἀποτομή ἐστιν ἡ ΑΒ, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ. αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τῷ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ λόγῳ ὁ αὐτὸς γενέσθω ὁ τῆς ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἓν ἄρα ἐστὶ πρὸς ἕν, πάντα ἐστὶ πρὸς πάντα· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ὅλη ἡ ΑΕ πρὸς ὅλην τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΔΖ. αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ.

ἡ ΓΔ. λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΖΔ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ. ἤτοι δὲ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓΖ. εἰ δὲ ἡ ΕΒ, καὶ ἡ ΔΖ. εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ. εἰ δὲ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓΖ. εἰ δὲ ἡ ΒΕ, καὶ ἡ ΖΔ. εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ, οὐδετέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

tome. dico & ordine eandem esse quæ AB. quoniam enim est ut AE ad ΓΖ ita BE ad ZΔ, erit permutando [per 16. 5.] ut AE ad EB ita ΓΖ ad ZΔ. vel igitur AE plus potest quam EB quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. si quidem AE plus potest quam EB quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, & ΓΖ plus poterit quam ZΔ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. & si quidem AE commensurabilis est longitudine expositæ rationali, & ΓΖ etiam erit. si vero EB est commensurabilis, & ΔΖ commensurabilis erit. & si neutra ipsarum AE, EB commensurabilis est longitudine expositæ rationali, & neutra ipsarum ΓΖ, ZΔ eidem longitudine erit commensurabilis. quod si AE plus possit quam EB quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, & ΓΖ plus poterit quam ZΔ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. & si quidem AE sit commensurabilis expositæ rationali longitudine, & ΓΖ eidem longitudine commensurabilis erit. si vero BE, & ZΔ. & si neutra ipsarum AE, EB, & neutra ipsarum ΓΖ, ZΔ erit expositæ rationali longitudine commensurabilis: ergo [per deff. tert.] ΓΔ apotome est & ordine eadem quæ AB. quod erat demonstr.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρε'.

Ἡ τῇ μέσης ἀποτομῇ σύμμετρος μέσης ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

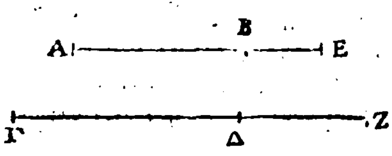
Ἔστω μέσης ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΓΔ μέσης ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ μέσης ἀποτομή ἐστιν ἡ ΑΒ, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ, αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσης ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἡ ΓΔ. δεικτέον δὴ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ὡς δὲ ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. εἴτε οὖν ῥητόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ῥητόν ἐστι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· εἴτε μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, μέσον ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· μέσης ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἡ ΓΔ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. CV. Theor.

Recta linea mediæ apotomæ commensurabilis & ipsa mediæ apotome est atque ordine eadem.

SIT mediæ apotome AB, & ipsi AB longitudine commensurabilis sit ΓΔ: dico ΓΔ mediæ apotomen esse & ordine eandem quæ AB.



Quoniam enim mediæ apotome est AB, sit BE ipsi AB congruens: ergo [per 75 & 76. 10.] AE, EB mediæ sunt potentia solum commensurabiles. & fiat ut AB ad ΓΔ ita BE ad ΔΖ, sunt autem AE, EB mediæ potentia solum commensurabiles: [*ergo & ΓΖ, ZΔ mediæ potentia solum commensurabiles erunt;] ac propterea mediæ apotome est ΓΔ. ostendendum est & ordine eandem esse quæ AB. quoniam enim ut AE ad EB ita ΓΖ ad ZΔ; ut autem AE ad EB ita [per 1. 6.] quadratum ex AE ad rectangulum sub AE, EB; & ut ΓΖ ad ZΔ ita quadratum ex ΓΖ ad rectangulum sub ΓΖ, ZΔ: erit & ut quadratum ex AE ad rectangulum sub AE, EB ita quadratum ex ΓΖ ad rectangulum sub ΓΖ, ZΔ. permutando igitur est ut quadratum ex AE ad quadratum ex ΓΖ ita rectangulum sub AE, EB ad rectangulum sub ΓΖ, ZΔ. sed quadratum ex AE commensurabile est quadrato ex ΓΖ: rectangulum igitur sub AE, EB rectangulo sub ΓΖ, ZΔ est commensurabile. & si quidem rationale est rectangulum sub AE, EB, & rectangulum sub ΓΖ, ZΔ rationale erit: si vero rectangulum sub AE, EB medium est, & medium erit rectangulum sub ΓΖ, ZΔ: mediæ igitur apotome est ΓΔ atque ordine eadem quæ AB. quod erat demonstr.

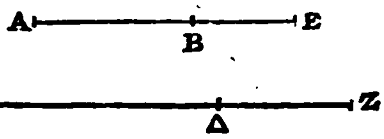
* Illa uncis inclusa non exstant in exemplaribus Græcis.

Prop. CVI. Theor.

Recta linea minori commensurabilis & ipsa minor est.

SIT minor AB, & ipsi AB commensurabilis sit ΓΔ: dico & ΓΔ minorem esse.

Fiant enim eadem quæ prius. & quoniam AE, EB potentia sunt incommensurabiles, & ΓZ, ZΔ potentia incommensurabiles erunt. quoniam autem est ut AE ad EB ita ΓZ ad ZΔ: erit [per 22.6.] & ut quadratum ex AE ad quadratum ex EB ita quadratum ex ΓZ ad quadratum ex ZΔ; & componendo [per 18. 5.] ut quadrata ex AE, EB ad quadratum ex EB ita quadrata ex ΓZ, ZΔ ad quadratum ex ZΔ, & permutando. commensurabile autem est quadratum ex BE quadrato ex ΔZ: ergo [per 10.10.] & compositum ex quadratis ipsarum AE, EB composito ex quadratis ipsarum ΓZ, ZΔ commensurabile erit. sed compositum ex quadratis ipsarum AE, EB est rationale; ergo & rationale erit compositum ex quadratis ipsarum ΓZ, ZΔ. rursus, quoniam est ut quadratum ex AE ad rectangulum sub AE, EB ita quadratum ex ΓZ ad rectangulum sub ΓZ, ZΔ, & permutando: commensurabile autem est quadratum ex AE quadrato ex ΓZ; erit igitur & rectangulum sub AE, EB rectangulo sub ΓZ, ZΔ commensurabile. sed rectangulum sub AE, EB medium est: medium igitur est [per 24.10.] & rectangulum sub ΓZ, ZΔ: quare ΓZ, ZΔ potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem sub ipsis continetur medium: ergo [per 77.10.] ΓΔ est minor. quod erat demonstrandum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛϛʹ.

Η τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος ἐλάσσων ἐστίν.

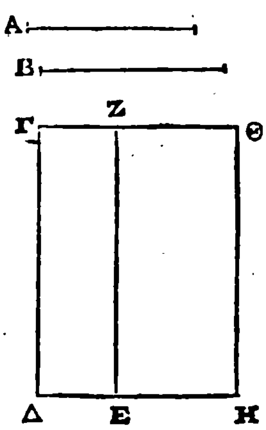
ΕΣτω ἐλάσσων ἡ AB, καὶ τῇ AB σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ἐλάσσων ἐστί.

Γεγονέτω γὰρ τὰ αὐτὰ τῷ πρότερον. καὶ ἐπεὶ αἱ AE, EB δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ αἱ ΓZ, ZΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ AE πρὸς τὴν EB οὕτως ἡ ΓZ πρὸς τὴν ZΔ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AE πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς EB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZΔ· συνθέντι ἄρα ὡς τὰ ἀπὸ τῶν AE, EB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς EB οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν ΓZ, ZΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZΔ, καὶ ἐναλλάξ. σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς BE τῷ ἀπὸ τῆς ΔZ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE, EB τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ, ZΔ τετραγώνων. ῥητὸν δέ ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ AE, EB τετραγώνων· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ, ZΔ τετραγώνων. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓZ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ, ZΔ, καὶ ἐναλλάξ· σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AE τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΓZ, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB τῷ ὑπὸ τῶν ΓZ, ZΔ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ, ZΔ· αἱ ΓZ, ZΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Aliter.

Sit minor A, & ipsi A commensurabilis sit B: dico B minorem esse.

Exponatur enim ΓΔ rationalis, & quadrato ex A æquale prallelogrammum ΓE ad ipsam ΓΔ applicetur latitudinem faciens ΓZ: apotome igitur quarta est ΓZ [per 101. 10.]. quadrato autem ex B æquale ad ZE applicetur ZH latitudinem faciens ZΘ. quoniam igitur A commensurabilis est ipsi B, erit & quadratum ex A quadrato ex B commensurabile. sed quadrato quidem ex A æquale est parallelogrammum ΓE, quadrato autem ex B æquale ZH: ergo ΓE commensurabile est ipsi ZH. ut autem ΓE ad ZH ita [per 1. 6.] ΓZ ad ZΘ: commensurabilis igitur [per 10 10.] est ΓZ ipsi ZΘ longitudine. sed ΓZ est apotome quarta: ergo [per 104.10.] & ZΘ apotome quarta est: ergo & spatium ZH sub rationali & apotoma quarta continetur: recta igitur linea spatium potens [per 95.



ΑΛΛΩΣ.

Εστω ἐλάσσων ἡ A, καὶ τῇ A σύμμετρος ἔστω ἡ B· λέγω ὅτι ἡ B ἐλάσσων ἐστίν.

Εκκείσθω γὰρ ἡ ΓΔ ῥητὴ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς A ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓE πλάτος ποιοῦν τὴν ΓZ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓZ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς B ἴσον παρὰ τὴν ZE παραβεβλήσθω τὸ ZH πλάτος ποιοῦν τὴν ZΘ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ A τῇ B· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς A τῷ ἀπὸ τῆς B. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς A ἴσον τὸ ΓE, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς B ἴσον τὸ ZH· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓE τῷ ZH. ὡς δὲ τὸ ΓE πρὸς τὸ ZH οὕτως ἡ ΓZ πρὸς τὴν ZΘ· σύμμετρος ἄρα ἡ ΓZ τῇ ZΘ μήκει. ἀποτομὴ δὲ ἐστι τετάρτη ἡ ΓZ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ZΘ τετάρτη· τὸ ZH ἄρα περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης· ἡ τὸ χωρίον ἄρα δυναμένη ἐλάσσων

ἐλάσσων ἐστί. δύναται δὲ τὸ ΖΗ ἡ Β· ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ἡ Β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

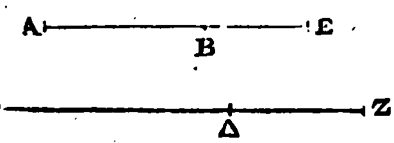
10.] minor est. potest autem spatium ZH ipsa B: ergo B est minor. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρζ'.

Η τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος καὶ αὐτὴ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ. αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω. ὁμοίως δὴ δείξομεν τοῖς πρότερον, ὅτι ἡ ΓΖ, ΖΔ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ ταῖς ΑΕ, ΕΒ, καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ὥστε καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἡ ΓΔ ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



PROP. CVII. THEOR.

Recta linea commensurabilis ei quæ cum rationali medium totum efficit & ipsa cum rationali medium totum efficiens est.

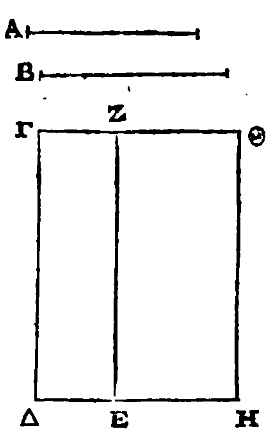
SIT cum rationali medium totum efficiens AB: & ipsi AB commensurabilis sit ΓΔ: dico ΓΔ esse eam, quæ cum rationali medium totum efficit.

Sit enim ipsi AB congruens BE. ergo [per 78. 10.] AE, EB potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem sub ipsis continetur rationale. & eadem construantur. similiter demonstrabitur atque prius, ΓZ, ZΔ in eadem esse ratione in qua AE, EB; & compositum ex quadratis ipsarum AE, EB commensurabile esse composito ex quadratis ipsarum ΓZ, ZΔ; rectangulum autem sub AE, EB rectangulo sub ΓZ, ZΔ commensurabile: quare & ΓZ, ZΔ potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum ΓZ, ZΔ medium, quod autem sub ipsis continetur rationale: ergo [per 78. 10.] ΓΔ est quæ cum rationali medium totum efficit. quod erat demonstrandum.

ΑΛΛΩΣ.

Ἔστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ Α, σύμμετρος δὲ αὐτῇ ἡ Β· λέγω ὅτι ἡ Β μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ πέμπτη ἡ ΓΖ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον παρὰ τὴν ΖΕ παραβεβλήσθω τὸ ΖΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΘ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Β. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον τὸ ΓΕ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον τὸ ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΕ τῷ ΖΗ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΖΘ μήκει. ἀποτομὴ δὲ πέμπτη ἡ ΓΖ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ πέμπτη καὶ ἡ ΖΘ, ῥητὴ δὲ ἡ ΖΕ. ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστι. δύναται δὲ τὸ ΖΗ ἡ Β· ἡ Β ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ALITER.

Sit cum rationali medium totum efficiens A, & ipsi A sit commensurabilis B: dico B esse eam quæ cum rationali medium totum efficit.

Exponatur enim rationalis ΓΔ, & quadrato quidem ex A æquale parallelogrammum ΓE ad ipsam ΓΔ applicetur latitudinem faciens ΓZ: ergo [per 102. 10.] ΓZ est apotome quinta. quadrato autem ex B æquale ZH ad ipsam ZE applicetur latitudinem faciens ZΘ. quoniam igitur A commensurabilis est ipsi B, erit & quadratum ex A quadrato ex B commensurabile. sed quadrato ex A æquale est parallelogrammum ΓE; quadrato autem ex B æquale ZH: ergo ΓE est commensurabile ipsi ZH: & ob id recta linea ΓZ ipsi ZΘ longitudine est commensurabilis. apotome autem quinta est ΓZ: ergo [per 104. 10.] & ZΘ est apotome quinta; estque ZE rationalis. si autem spatium contineatur sub rationali & apotoma quinta, recta linea spatium potens [per 96. 10.] est quæ cum rationali medium totum efficit. sed [per constr.] ipsa B potest spatium ZH: ergo ipsa B cum rationali medium totum efficiens est. quod erat demonstrandum.

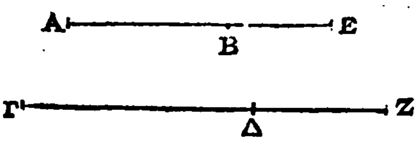
PROP.

Prop. CVIII. Theor.

Recta linea commensurabilis ei quæ cum medio medium totum efficit & ipsa cum medio medium totum efficiens est.

SIT cum medio medium totum efficiens A B, & ipsi A B commensurabilis sit Γ Δ: dico Γ Δ esse eam quæ cum medio medium totum efficit.

Sit ipsi A B congruens B E, & eadem construantur. ergo [per 79. 10.] A E, E B potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum ex quadratis ipsarum medium, quod autem sub ipsis continetur medium, & adhuc compositum ex ipsarum quadratis incommensurabile ei quod sub ipsis continetur. & sunt A E, E B commensurabiles ipsis Γ Z, Z Δ ut [supra] ostensum est; & compositum ex quadratis ipsarum A E, E B commensurabile composito ex quadratis ipsarum Γ Z, Z Δ; rectangulumque sub A E, E B rectangulo sub Γ Z, Z Δ: ergo Γ Z, Z Δ potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum medium, quod autem sub ipsis continetur medium, & adhuc compositum ex ipsarum quadratis incommensurabile ei quod sub ipsis continetur: ergo [per 79.10.] Γ Δ est quæ cum medio medium totum efficit. quod erat demonstrandum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρη'.

Η τῇ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος καὶ αὐτὴ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

ΕΣτω μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ A B, καὶ τῇ A B σύμμετρος ἡ Γ Δ· λέγω ὅτι ἡ Γ Δ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

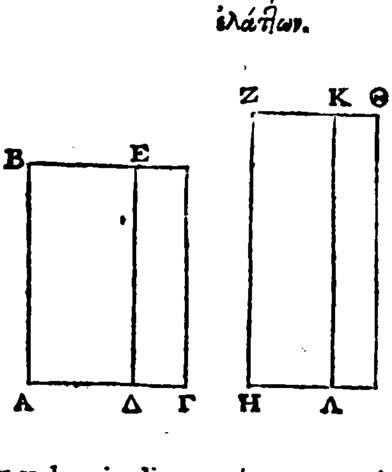
Εστω γὰρ τῇ A B προσαρμόζουσα ἡ B E, καὶ τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω. αἱ A E, E B ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῷ ὑπ' αὐτῶν. καί εἰσιν, ὡς ἐδείχθη, αἱ A E, E B σύμμετροι ταῖς Γ Z, Z Δ, καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν A E, E B τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν Γ Z, Z Δ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν A E, E B τῷ ὑπὸ τῶν Γ Z, Z Δ· καὶ αἱ Γ Z, Z Δ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῷ ὑπ' αὐτῶν· ἡ Γ Δ ἄρα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. CIX. Theor.

Medio de rationali detracto, recta linea quæ reliquum spatium potest una ex duabus irrationalibus fit, vel apotome, vel minor.

DE rationali enim B Γ medium B Δ detrahatur: dico eam quæ reliquum spatium E Γ potest unam fieri ex duabus irrationalibus, vel apotomen, vel minorem.

Exponatur enim rationalis Z H; & parallelogrammo quidem B Γ æquale H Θ ad Z H applicetur; parallelogrammo autem B Δ æquale auferatur H K: reliquum igitur Γ E est æquale Λ Θ. itaque quoniam rationale est B Γ, medium autem B Δ; atque est B Γ æquale H Θ, & B Δ ipsi H K; erit H Θ rationale, medium autem H K: & ad rationalem Z H applicatum est; rationalis igitur [per 21.10.] est Z Θ & ipsi Z H longitudine commensurabilis, Z K vero [per 23. 10.] rationalis & incommensurabilis ipsi Z H longitudine; ergo [per 13.10.] Z Θ ipsi Z K longitudine incommensurabilis est: quare Z Θ, Z K rationales sunt



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρθ'.

Απὸ ῥητοῦ μέσου ἀφαιρουμένου, ἡ τὸ λοιπὸν χωρίον δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται, ἤτοι ἀποτομή, ἢ ἐλάττων.

ΑΠΟ γὰρ ῥητοῦ τοῦ B Γ μέσον ἀφῃρήσθω τὸ B Δ· λέγω ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν χωρίον δυναμένη τὸ B Γ μία δύο ἀλόγων γίνεται, ἤτοι ἀποτομή, ἢ ἐλάττων.

Εκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ Z H, καὶ τῷ μὲν B Γ ἴσον παρὰ τὴν Z H παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ H Θ, τῷ δὲ B Δ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ H K· λοιπὸν ἄρα τὸ Γ E ἴσον ἐστὶ τῷ Λ Θ. ἐπεὶ οὖν ῥητὸν μέν ἐστι τὸ B Γ, μέσον δὲ τὸ B Δ, ἴσον δὲ τὸ B Γ τῷ H Θ, τὸ δὲ B Δ τῷ H K· ῥητὸν μὲν ἄρα ἐστὶ τὸ H Θ, μέσον δὲ τὸ H K· καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν Z H παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Z Θ καὶ σύμμετρος τῇ Z H μήκει, ῥητὴ δὲ ἡ Z K καὶ ἀσύμμετρος τῇ Z H μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ ἡ Z Θ τῇ Z K μήκει· αἱ Z Θ, Z K ἄρα ῥηταί εἰσι

δυνάμει

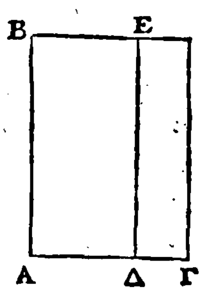
δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ, προσαρμόζουσα δ' αὐτῇ ἡ ΚΖ. ἤτοι δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου. καὶ ἔστω ὅλη ἡ ΘΖ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης ἡ δυναμένη ἀποτομή ἐστιν· ἡ ἄρα τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΓΕ, δυναμένη ἀποτομή ἐστιν. εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστω ὅλη ἡ ΘΖ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα τετάρτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιεχόμενον ἡ δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν· ἡ ἄρα τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

potentia solum commensurabiles: ac propterea [per 74. 10.] ΚΘ est apotome, ipsi vero congruens ΚΖ. vel igitur ΘΖ plus potest quam ΖΚ quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine, vel incommensurabilis. possit primum quadrato rectæ lineæ commensurabilis. atque est tota ΘΖ commensurabilis longitudine expositæ rationali ΖΗ: ergo [per 1. deff. tert. 10.] ΚΘ est apotome prima. recta autem linea quæ potest spatium sub rationali & apotoma prima contentum [per 92. 10.] est apotome: ergo quæ potest ΛΘ, hoc est ipsum ΓΕ, apotome est. quod si ΘΖ plus possit quam ΖΚ quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, estque tota ΘΖ expositæ rationali ΖΗ longitudine commensurabilis; erit [per 4. deff. tert. 10.] ΚΘ apotome quarta. & quæ potest spatium sub rationali & apotoma quarta contentum [per 95. 10.] minor est: quæ igitur potest spatium ΛΘ, hoc est ipsum ΕΓ, est minor. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρι'.

Ἀπὸ μέσου ῥητοῦ ἀφαιρουμένου, ἄλλαι δύο ἄλογοι γίνονται, ἤτοι μέσης ἀποτομὴ πρώτη, ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ μέσου τοῦ ΒΓ ῥητὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΒΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν τὸ ΕΓ δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται, ἤτοι μέσης ἀποτομὴ πρώτη, ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

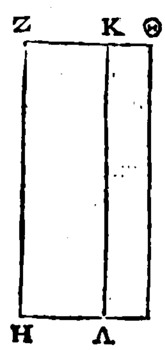


Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ παραβεβλήσθω ὁμοίως τὰ χωρία· ἔστι δὴ ἀκολούθως ῥητὴ μὲν ἡ ΖΘ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ ΖΚ, καὶ σύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΖΘ, ΖΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΖΚ. ἤτοι δὲ ἡ ΖΘ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστω ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ δευτέρα ἡ ΘΚ. ῥητὴ δὲ ἡ ΖΗ· ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΓΕ, δυναμένη, μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη. εἰ δὲ ἡ ΘΖ μεῖζον τῆς ΖΚ δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα πέμπτη ἐστὶν ἡ ΘΚ· ὥστε ἡ τὸ ΕΓ δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. CX. Theor.

Rationali de medio detracto, aliæ duæ irrationales fiunt, vel mediæ apotome prima, vel cum rationali medium totum efficiens.

De medio enim ΒΓ rationale ΒΔ detrahatur: dico rectam lineam, quæ reliquum spatium ΕΓ potest, unam duarum irrationalium fieri, vel mediæ apotomen primam, vel eam quæ cum rationali medium totum efficit.



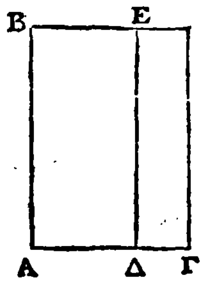
Exponatur enim rationalis ΖΗ, & ad ipsam similiter [ut in præc.] spatia applicentur; erit [per 21. 10.] rationalis quidem ΖΘ, & ipsi ΖΗ longitudine incommensurabilis. rationalis autem ΖΚ [per 23. 10.] & incommensurabilis ipsi ΖΗ longitudine: ergo ΖΘ, ΖΚ rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea [per 74. 10.] ΘΚ est apotome, & ipsi congruens ΖΚ. vel igitur ΖΘ plus potest quam ΖΚ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. & si quidem ΘΖ plus potest quam ΖΚ quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; atque est congruens ΖΚ commensurabilis expositæ rationali ΖΗ longitudine: erit [per 2. deff. tert. 10] ΘΚ apotome secunda. est autem ΖΗ rationalis: ergo [per 93. 10.] quæ potest spatium ΛΘ, hoc est ipsum ΓΕ, est mediæ apotome prima. quod si ΘΖ plus potest quam ΖΚ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis; atque est congruens ΖΚ commensurabilis expositæ rationali ΖΗ longitudine: erit [per 5. deff. tert. 10.] ΘΚ apotome quinta: recta igitur linea potens spatium ΕΓ [per 96. 10.] est quæ cum rationali medium totum efficit. quod erat demonstr.

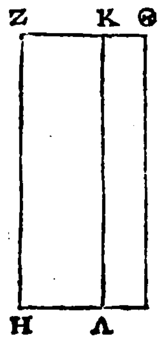
Prop. CXI. Theor.

Medio de medio detracto, quod sit incommensurabile toti, reliquæ duæ irrationales fiunt, vel mediæ apotome secunda, vel cum medio medium totum efficiens.

DEtrahatur ut in propositis figuris de medio ΒΓ medium ΒΔ, quod sit incommensurabile toti: dico rectam lineam, quæ potest spatium ΓΕ, unam esse ex duabus irrationalibus, vel mediæ apotomen secundam, vel eam quæ cum medio medium totum efficit.

Quoniam enim medium est utrumque ipsorum ΒΓ, ΒΔ, & ΒΓ incommensurabile est ipsi ΒΔ, hoc est ΗΘ ipsi ΗΚ; erit [per 1.6. & 10. 10.] ΘΖ ipsi ΖΚ incommensurabilis longitudine: ergo [per 23.10.] ΘΖ, ΖΚ rationales sunt potentia solum commensurabiles; & ob id [per 74.10.] ΘΚ est apotome, & ipsi congruens ΚΖ. itaque vel ΘΖ plus potest quam ΖΚ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis vel incommensurabilis. & si quidem ΘΖ plus potest quam ΖΚ quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & neutra ipsarum ΘΖ, ΖΚ commensurabilis est expositæ rationali ΖΗ longitudine; erit [per 3. deff. tert. 10.] ΘΚ apotome tertia. rationalis autem est ΚΛ; & [per 94. 10.] rectangulum sub rationali & apotoma tertia contentum irrationale est; & recta linea, quæ ipsum potest, est irrationalis; & vocatur mediæ apotome secunda. si vero ΘΖ plus potest quam ΖΚ quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, & neutra ipsarum ΘΖ, ΖΚ longitudine commensurabilis est expositæ rationali ΖΗ; erit [per 6. deff. tert. 10.] ΘΚ apotome sexta. at [per 97. 10.] recta linea potens quod sub rationali & apotoma sexta continetur est quæ cum medio medium totum efficit: ergo quæ potest spatium ΛΘ, hoc est ipsum ΒΓ, est cum medio medium totum efficiens. quod erat demonstrandum.





ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρια'.

Ἀπὸ μέσου μέσου ἀφαιρουμένου ἀσυμμέτρου τῷ ὅλῳ, αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται, ἤτοι μέσης ἀποτομὴ δευτέρα, ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

ΑΦῃρήσθω γὰρ ὡς ἐπὶ τῶν προκειμένων καταγραφῶν ἀπὸ μέσου τοῦ ΒΓ μέσον τὸ ΒΔ, ἀσύμμετρον τῷ ὅλῳ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΓΕ δυναμένη μία ἐστὶ δύο ἀλόγων, ἤτοι μέσης ἀποτομὴ δευτέρα, ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

* Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΒΓ, ΒΔ, καὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, τουτέστι τὸ ΗΘ τῷ ΗΚ, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΘΖ τῇ ΖΚ· αἱ ΘΖ, ΖΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ, προσαρμόζουσα δὲ ἡ ΚΖ. ἤτοι δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΘΖ, ΖΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΖΗ μήκει· ἀποτομή ἐστιν ἄρα τρίτη ἡ ΘΚ. ῥητὴ δὲ ἡ ΚΛ, τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τρίτης περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ ἀποτομὴ μέσης δευτέρα. εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ οὐδετέρα τῶν ΘΖ, ΖΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομή ἐστιν ἄρα ἕκτη ἡ ΘΚ. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς ἕκτης ἡ δυναμένη ἐστὶν ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα· ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. CXII. Theor.

Apotome non est eadem quæ ex binis nominibus.

SIT apotome ΑΒ: dico ΑΒ non esse eandem quæ ex binis nominibus.

Sit enim si fieri potest; exponaturque rationalis ΔΓ, & [per 45.1.] quadrato ex ΑΒ æquale rectangulum ΓΕ ad ipsam ΔΓ applicetur, latitudinem faciens ΔΕ. quoniam igitur ΑΒ est apotome, erit [per 98.10.] ΔΕ apotome prima. sit ipsi congruens ΕΖ: ergo [per 1. deff. tert. 10.] ΔΖ, ΖΕ rationales sunt potentia solum commen-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριβ'.

Ἡ ἀποτομὴ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

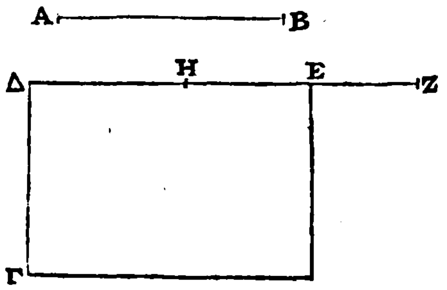
ΕΣτω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΓ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΓ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΕ. ἐπεὶ οὖν ἀποτομή ἐστιν ἡ ΑΒ, ἀποτομὴ πρώτη ἐστὶν ἡ ΔΕ. ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΕΖ· αἱ ΔΖ, ΖΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον

* Ita in *Codd. MSS.* ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΒΓ, ΒΔ, καὶ ἀσύμμετρον τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, ἔσται ἀκολούθως ῥητὴ ἑκατέρα τῶν ΖΘ, ΖΚ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ὑπόκειται τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, τουτέστι τὸ ΗΘ τῷ ΗΚ.

σύμ-

σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΖΕ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΔΖ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ μήκει. πάλιν, ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη ἡ ΔΕ. διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Η, καὶ ἔστω μεῖζον ὄνομα τὸ ΔΗ· αἱ ΔΗ, ΗΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἡ ΔΗ τῆς ΗΕ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ μείζων ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΓ μήκει· ἡ ΔΖ ἄρα τῇ ΔΗ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ λοιπῇ ἄρα τῇ ΖΗ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΖ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ, ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ μήκει, ἀσύμμετρος δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΖΕ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΖΕ μήκει. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΗΖ, ΖΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΗ. ἀλλὰ καὶ ῥητή, ὅπερ ἀδύνατον.



Ἡ ἄρα ἀποτομὴ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἡ ἀποτομὴ καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλογοι οὔτε τῇ μέσῃ οὔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταί· τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει. τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην. τὸ δὲ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν. τὸ δὲ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην. τὸ δὲ ἀπὸ ἐλάττονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην. Ἐπεὶ οὖν τὰ εἰρημένα πλάτη διαφέρει τοῦ τε πρώτου καὶ ἀλλήλων· τοῦ μὲν πρώτου, ὅτι ῥητή ἐστιν, ἀλλήλων δὲ, ὅτι τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί· δῆλον ὡς καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι διαφέρουσιν ἀλλήλων. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ ἀποτομὴ οὐκ οὖσα ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων· ποιοῦσι δὲ πλάτη παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμεναι αἱ μὲν μετὰ τὴν ἀποτομὴν ἀποτομὰς ἀκολούθως ἑκάστη τῇ τάξει καθ' αὐτήν· αἱ δὲ

ſurabiles, & ΔZ plus poteſt quam ZE quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, atque eſt ΔZ commenſurabilis expoſitæ rationali ΓΔ longitudine. rurſus, quoniam [ex hyp.] AB eſt ex binis nominibus, erit [per 61.10.] ΔE ex binis nominibus prima. dividatur in nomina ad punctum H, ſitque ΔH majus nomen: ergo [per 1. deff. ſecund. 10.] ΔH, HE rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. & ΔH plus poteſt quam HE quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, & major ΔH longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali ΔΓ: quare [per 12. 10.] ΔZ ipſi ΔH longitudine eſt commenſurabilis: & reliquæ igitur ZH commenſurabilis erit. itaque quoniam ΔZ commenſurabilis eſt ipſi ZH, atque eſt rationalis ΔZ; erit & ZH rationalis. rurſus, quoniam ΔZ commenſurabilis eſt ipſi ZH longitudine, atque eſt ΔZ ipſi ZE incommenſurabilis longitudine; erit & ZH ipſi ZE longitudine incommenſurabilis. & ſunt rationales: ergo HZ, ZE rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea [per 74.10.] EH eſt apotome. ſed & rationalis, quod fieri non poteſt.

Ergo apotome non eſt eadem quæ ex binis nominibus. quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Apotome & quæ ipſam conſequuntur irrationales neque mediæ neque inter ſe eædem ſunt: quadratum enim quod à media fit ad rationalem applicatum latitudinem facit rationalem, [per 23. 10.] & ei ad quam applicatur longitudine incommenſurabilem. quod autem ab apotoma fit ad rationalem applicatum [per 98.10.] latitudinem facit apotomen primam. quod fit à mediæ apotoma prima ad rationalem applicatum [per 99.10.] latitudinem facit apotomen ſecundam. quod fit à mediæ apotoma ſecunda ad rationalem applicatum [per 100. 10.] latitudinem facit apotomen tertiam. quod fit à minori ad rationalem applicatum [per 101. 10.] latitudinem facit apotomen quartam. quod ab ea quæ cum rationali medium totum efficit ad rationalem applicatum [per 102.10.] latitudinem facit apotomen quintam. quod ab ea quæ cum medio medium totum efficit ad rationalem applicatum [per 103. 10.] latitudinem facit apotomen ſextam. quoniam igitur dictæ latitudines differunt tum à prima tum inter ſeſe; à prima quidem, quod illa rationalis ſit, inter ſe vero, quod ordine non ſint eædem: manifeſtum eſt & ipſas haſce irrationales inter ſe differentes eſſe. & quoniam oſtenſum eſt [per 112.10.] apotomen non eſſe eandem quæ ex binis nominibus: & quadrata quidem apotomæ & earum quæ ſequuntur apotomen ad rationalem applicata [per propoſitiones modo citatas] latitudines facere apotomas ejuſdem ordinis cujus illæ ſunt quæ apotomen ſequuntur; quadrata vero ejus quæ est ex binis nominibus & earum quæ ipsam sequuntur ad rationalem applicata [per 61,62,63,64,65, & 66.10] latitudines facere eas, quæ ex binis nominibus ejusdem ordinis, cujus illæ sunt quæ sequuntur eam quæ ex binis nominibus: ergo rectæ lineæ quæ sequuntur apotomen, & quæ sequuntur eam quæ ex binis nominibus, inter se diversæ erunt, ita ut omnes irrationales sint numero tredecim,

μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ταῖς ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αὐτῇ τῇ τάξει ἀκολούθως· ἕτεραι ἄρα εἰσὶν αἱ μετὰ τὴν ἀποτομὴν, καὶ ἕτεραι αἱ μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ὡς εἶναι τῇ τάξει πάσας ἀλόγους ιγ´,

1. Media.
2. Quæ ex binis nominibus.
3. Quæ ex binis mediis prima.
4. Quæ ex binis mediis secunda.
5. Major.
6. Rationale ac medium potens.
7. Bina media potens.
8. Apotome.
9. Mediæ apotome prima.
10. Mediæ apotome secunda.
11. Minor.
12. Cum rationali medium totum efficiens.
13. Cum medio medium totum efficiens.

α´. Μέσην.
β´. Ἐκ δύο ὀνομάτων.
γ´. Ἐκ δύο μέσων πρώτην.
δ´. Ἐκ δύο μέσων δευτέραν.
ε´. Μείζονα.
ϛ´. Ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένην.
ζ´. Δύο μέσα δυναμένην.
η´. Ἀποτομήν.
θ´. Μέσην ἀποτομὴν πρώτην.
ι´. Μέσην ἀποτομὴν δευτέραν.
ια´. Ἐλάττονα.
ιβ´. Μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν.
ιγ´. Μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν.

Prop. CXIII. Theor.

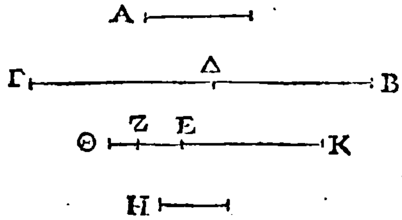
Quadratum rationalis ad eam quæ ex binis nominibus applicatum latitudinem facit apotomen, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus ejus quæ est ex binis nominibus & in eadem ratione; & adhuc apotome quæ fit eundem habet ordinem quem ea quæ est ex binis nominibus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριγ´.

Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι, καὶ ἔτι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ καὶ ἔτι ἡ γινομένη ἀποτομὴ τὴν αὐτὴν ἔχει τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

SIT rationalis Α; ea quæ est ex binis nominibus ΒΓ, cujus majus nomen ΓΔ; & quadrato ex Α æquale rectangulum sit quod sub ΒΓ, ΕΖ continetur: dico ΕΖ apotomen esse, cujus nomina commensurabilia sunt ipsis ΓΔ, ΔΒ, & in eadem ratione; & adhuc ΕΖ eundem ordinem habere, quem habet ΒΓ.

Sit enim rursus quadrato ex Α æquale rectangulum quod sub ΒΔ & Η continetur. itaque quoniam rectangulum contentum sub ΒΓ, ΕΖ est æquale ei quod sub ΒΔ, Η continetur, erit [per 16.6] ut ΓΒ ad ΒΔ ita Η ad ΕΖ. major autem est ΓΒ quam ΒΔ: ergo & Η quam ΕΖ major erit. sit ipsi Η æqualis ΕΘ: est igitur ut ΓΒ ad ΒΔ ita ΘΕ ad ΕΖ: & dividendo [per 17.5.] ut ΓΔ ad ΔΒ ita ΘΖ ad ΖΕ. fiat ut ΘΖ ad ΖΕ ita ΖΚ ad ΚΕ: ergo & tota ΘΚ ad totam ΚΖ est ut ΖΚ ad ΚΕ; ut enim unum antecedentium ad unum consequentium ita [per 12.5.]



Ἔστω ῥητὴ μὲν ἡ Α, ἐκ δύο δὲ ὀνομάτων ἡ ΒΓ, ἧς μεῖζον ὄνομα ἔστω ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΖ· λέγω ὅτι ἡ ΕΖ ἀποτομή ἐστιν, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς ΓΔ, ΔΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ ΕΖ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν τῇ ΒΓ.

Ἔστω γὰρ πάλιν τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, Η. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ, Η· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ Η πρὸς τὴν ΕΖ. μείζων δὲ ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ· μείζων ἄρα καὶ ἡ Η τῆς ΕΖ. ἔστω ἴση τῇ Η ἡ ΕΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΖ· διελόντι ἄρα ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ. γεγονέτω ὡς ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς τὴν ΕΚ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΘΚ πρὸς ὅλην τὴν ΚΖ ἐστὶν ὡς ἡ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΕ, ὡς γὰρ ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων οὕτως

ἅπαντα

ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ὡς δὲ ἡ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΕ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΖ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΖ. καὶ ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΕ, ἐπεὶ αἱ τρεῖς αἱ ΘΚ, ΚΖ, ΚΕ ἀνάλογόν εἰσι· σύμμετρος ἄρα ἡ ΘΚ τῇ ΚΕ μήκει· ὥστε καὶ ἡ ΘΕ τῇ ΕΚ σύμμετρός ἐστι μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΘΕ, ΒΔ, ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΘΕ, ΒΔ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΔ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΕ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει· ὥστε καὶ ἡ σύμμετρος αὐτῇ ἡ ΕΚ ῥητή ἐστι καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΕ, αἱ δὲ ΓΔ, ΔΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· καὶ αἱ ΖΚ, ΚΕ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΚΕ, καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΚ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει· αἱ ΖΚ, ΚΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ. ἤτοι δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΔ. εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ. εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΚ, ΚΕ. εἰ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν ἡ ΓΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΚ. εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ. εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΚ, ΚΕ· ὥστε ἀποτομή ἐστιν ἡ ΖΕ, ἧς τὰ ὀνόματα τὰ ΖΚ, ΚΕ σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι, τοῖς ΓΔ, ΔΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν τῇ ΒΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριδʹ.

Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ ἀποτομὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρα τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ἔτι δὲ ἡ γινομένη ἐκ δύο ὀνομάτων τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει τῇ ἀποτομῇ.

Ἔστω ῥητὴ μὲν ἡ Α, ἀποτομὴ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΚΘ, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς Α ῥητῆς παρὰ τὴν ΒΔ ἀποτομὴν

antecedentia omnia ad omnia consequentia. sed ut ZK ad KE ita ΓΔ ad ΔB: & igitur ut ΘK ad KZ ita ΓΔ ad ΔB. commensurabile autem [per 37.10.] est quadratum ex ΓΔ quadrato ex ΔB: ergo [per 10. 10.] & quadratum ex ΘK quadrato ex KZ est commensurabile. atque [per 2. coroll. 20. 6.] est ut quadratum ex ΘK ad quadratum ex KZ ita recta linea ΘK ad KE, quoniam tres rectæ lineæ ΘK, KZ, KE deinceps proportionales sunt: commensurabilis igitur est ΘK ipsi KE longitudine: ergo [per 16. 10.] & ΘE ipsi EK longitudine est commensurabilis. & quoniam quadratum ex A est æquale ei quod sub ΘE, BΔ continetur, rationale autem est quadratum ex A: erit & quod sub ΘE, BΔ continetur rationale. & ad rationalem BΔ applicatum est: rationalis igitur [per 21. 10.] est ΘE & ipsi BΔ longitudine commensurabilis; ideoque & EK quæ est commensurabilis ipsi ΘE rationalis erit, & ipsi BΔ commensurabilis longitudine. quoniam igitur est ut ΓΔ ad ΔB ita ZK ad KE; sunt autem ΓΔ, ΔB potentia solum commensurabiles: & ZK, KE potentia solum commensurabiles erunt. rationalis autem est KE, & ipsi BΔ commensurabilis longitudine: quare & ZK est rationalis, ipsique ΓΔ longitudine commensurabilis; sunt igitur ZK, KE rationales, & potentia solum commensurabiles; & idcirco [per 74. 10.] EZ apotome est. itaque vel ΓΔ plus potest quam ΔB quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine, vel incommensurabilis. & si quidem ΓΔ plus potest quam ΔB quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine, etiam ZK plus poterit quam KE quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. & si ΓΔ est commensurabilis expositæ rationali longitudine, & ZK eidem commensurabilis erit. si autem BΔ, & KE. & si neutra ipsarum ΓΔ, ΔB, & neutra ipsarum ZK, KE. quod si ΓΔ plus potest quam ΔB quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, & ZK plus poterit quam KE quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. & si quidem ΓΔ est longitudine commensurabilis expositæ rationali, erit & ZK eidem commensurabilis. & si BΔ, & KE. at si neutra ipsarum ΓΔ, ΔB, & neutra ipsarum ZK, KE: ergo ZE apotome est, cujus nomina ZK, KE commensurabilia sunt nominibus ΓΔ, ΔB ejus quæ est ex binis nominibus & in eadem ratione, & eundem habet ordinem quem ΓB. quod erat demonstrandum.

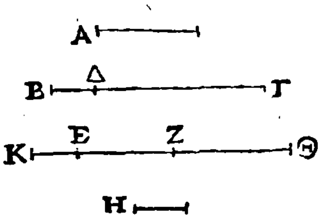
Prop. CXIV. Theor.

Quadratum rationalis ad apotomen applicatum latitudinem facit eam quæ ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt apotomæ nominibus, & in eadem ratione; & adhuc quæ ex binis nominibus fit eundem habet ordinem quem ipsa apotome.

SIT rationalis quidem A, apotome autem BΔ; & quadrato ex A æquale sit quod sub BΔ, KΘ continetur, ita ut quadratum rationalis A ad BΔ applicatum

applicatum latitudinem faciat K Θ: dico K Θ esse ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus ipsius B Δ, & in eadem ratione; & K Θ eundem habere ordinem quem habet B Δ.

Sit enim ipsi B Δ congruens Δ Γ: ergo [per 74.10.] B Γ, Γ Δ rationales sunt potentia solum commensurabiles. & quadrato ex A æquale sit quod sub B Γ, H continetur. rationale autem est quadratum ex A: ergo quod sub B Γ, H continetur est rationale. & ad rationalem B Γ applicatum est: rationalis igitur [per 21.10.] est recta linea H, ipsique B Γ longitudine commensurabilis. itaque quoniam rectangulum contentum sub B Γ, H est æquale ei quod sub B Δ, K Θ continetur, erit [per 16.6.] ut Γ B ad B Δ ita K Θ ad H. major autem est Γ B quam B Δ: ergo & K Θ quam H est major. ponatur ipsi H æqualis K E: commensurabilis igitur est K E ipsi B Γ longitudine. & quoniam est ut Γ B ad B Δ ita Θ K ad K E, erit per conversionem rationis ut B Γ ad Γ Δ ita K Θ ad Θ E. fiat ut K Θ ad Θ E ita Θ Z ad Z E: & reliqua igitur K Z ad Z Θ est [per 19.5.] ut K Θ ad Θ E, hoc est, ut B Γ ad Γ Δ. sed B Γ, Γ Δ potentia solum sunt commensurabiles: ergo & K Z, Z Θ potentia solum commensurabiles erunt. & cum sit ut K Θ ad ad Θ E ita K Z ad Z Θ; ut autem K Θ ad Θ E ita Θ Z ad Z E; erit & ut K Z ad Z Θ ita Θ Z ad Z E: quare [per 2. corol. 20.6] ut prima ad tertiam ita quadratum ex prima ad quadratum ex secunda: ut igitur K Z ad Z E ita quadratum ex K Z ad id quod fit ex Z Θ quadratum. commensurabile autem est quadratum ex K Z quadrato ex Z Θ; sunt enim K Z, Z Θ potentia commensurabiles: ergo & K Z ipsi Z E commensurabilis est longitudine: ac propterea [per 16.10.] Z K ipsi K E longitudine commensurabilis. sed K E rationalis est & ipsi B Γ longitudine commensurabilis: ergo & K Z rationalis erit & ipsi B Γ commensurabilis longitudine. & quoniam est ut B Γ ad Γ Δ ita K Z ad Z Θ, erit permutando ut B Γ ad K Z ita Δ Γ ad Z Θ. commensurabilis autem est B Γ ipsi K Z: quare [per 10.10.] & Γ Δ ipsi Z Θ est commensurabilis. suntque B Γ, Γ Δ rationales potentia solum commensurabiles; ergo & K Z, Z Θ rationales erunt potentia solum commensurabiles: ex binis igitur nominibus [per 37.10.] est K Θ. & si quidem B Γ plus potest quam Γ Δ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, & K Z plus poterit quam Z Θ quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. & si B Γ longitudine commensurabilis est expositæ rationali, & K Z eidem commensurabilis erit. si vero Γ Δ est commensurabilis longitudine expositæ rationali, erit & ipsa Z Θ eidem commensurabilis. & si neutra ipsarum B Γ, Γ Δ, & neutra ipsarum K Z, Z Θ. at si B Γ plus poterit quam Γ Δ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, & K Z plus poterit quam Z Θ quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. & siquidem B Γ



ἀπὸ τοιαύτην παραβαλλόμενον πλάτος ποιῇ τὴν K Θ· λέγω ὅτι ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ K Θ, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς B Δ ὀνόμασι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ K Θ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν τῇ B Δ.

Ἔστω γὰρ τῇ B Δ προσαρμόζουσα ἡ Δ Γ· αἱ B Γ, Γ Δ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τῷ ἀπὸ τῆς A ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν B Γ, H. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς A· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν B Γ, H. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν B Γ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ H, καὶ σύμμετρος τῇ B Γ μήκει. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν B Γ, H ἐστὶν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν B Δ, K Θ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Γ B πρὸς τὴν B Δ οὕτως ἡ K Θ πρὸς τὴν H. μείζων δὲ ἡ Γ B τῆς B Δ· μείζων ἄρα καὶ ἡ K Θ τῆς H. κείσθω τῇ H ἴση ἡ K E· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ K E τῇ B Γ μήκει. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Γ B πρὸς τὴν B Δ οὕτως ἡ Θ K πρὸς τὴν K E· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ B Γ πρὸς τὴν Γ Δ οὕτως ἡ K Θ πρὸς τὴν Θ E. γεγονέτω ὡς ἡ K Θ πρὸς τὴν Θ E οὕτως ἡ Θ Z πρὸς τὴν Z E· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ K Z πρὸς τὴν Z Θ ἐστὶν ὡς ἡ K Θ πρὸς τὴν Θ E, τουτέστιν ὡς ἡ B Γ πρὸς τὴν Γ Δ. αἱ δὲ B Γ, Γ Δ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· καὶ αἱ K Z, Z Θ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ K Θ πρὸς τὴν Θ E οὕτως ἡ K Z πρὸς τὴν Z Θ, ἀλλ' ὡς ἡ K Θ πρὸς τὴν Θ E οὕτως ἡ Θ Z πρὸς τὴν Z E· καὶ ὡς ἄρα ἡ K Z πρὸς τὴν Z Θ οὕτως ἡ Θ Z πρὸς τὴν Z E· ὥστε καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· καὶ ὡς ἄρα ἡ K Z πρὸς τὴν Z E οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς K Z πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Z Θ. σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς K Z τῷ ἀπὸ τῆς Z Θ, αἱ γὰρ K Z, Z Θ δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ K Z τῇ Z E μήκει· ὥστε ἡ Z K καὶ τῇ K E σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ K E, καὶ σύμμετρος τῇ B Γ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ K Z, καὶ σύμμετρος τῇ B Γ μήκει. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ B Γ πρὸς τὴν Γ Δ οὕτως ἡ K Z πρὸς τὴν Z Θ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ B Γ πρὸς τὴν K Z οὕτως ἡ Δ Γ πρὸς τὴν Z Θ. σύμμετρος δὲ ἡ B Γ τῇ K Z· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ Γ Δ τῇ Z Θ μήκει. αἱ δὲ B Γ, Γ Δ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ K Z, Z Θ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ K Θ. εἰ μὲν οὖν ἡ B Γ τῆς Γ Δ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ K Z τῆς Z Θ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ B Γ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ K Z. εἰ δὲ ἡ Γ Δ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ Z Θ. εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν B Γ, Γ Δ, καὶ οὐδετέρα τῶν K Z, Z Θ. εἰ δὲ ἡ B Γ τῆς Γ Δ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ K Z τῆς Z Θ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν

σύμμετρος

σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΚΖ. εἰ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἡ ΖΘ. εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΚΖ, ΖΘ· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΚΘ, ἧς τὰ ὀνόματα τὰ ΚΖ, ΖΘ σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς ΒΓ, ΓΔ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ ἔτι ἡ ΚΘ τῇ ΒΓ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

longitudine commensurabilis est expositæ rationali, & KZ eidem commensurabilis erit. si vero ΓΔ, & ipsa ZΘ. quod si neutra ipsarum ΒΓ, ΓΔ, & neutra ipsarum KZ, ZΘ: ex binis igitur nominibus est KΘ, cujus nomina KZ, ZΘ commensurabilia sunt nominibus apotomæ ΒΓ, ΓΔ, & in eadem ratione: & [per deff. secund. & tert. 10.] KΘ eundem tenet ordinem quem ipsa ΒΓ. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριε'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητή ἐστι.

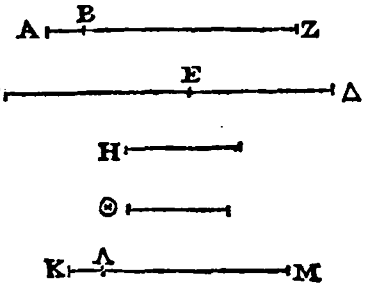
Prop. CXV. Theor.

Si spatium contineatur sub apotoma & ea quæ ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus apotomæ, & in eadem ratione; recta linea spatium potens est rationalis.

Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ, ὑπὸ ἀποτομῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τῆς ΓΔ, ἧς μεῖζον ὄνομά ἐστι τὸ ΓΕ· καὶ ἔστω τὰ ὀνόματα τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τὰ ΓΕ, ΕΔ σύμμετρά τε τοῖς ἀπὸ τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς ΑΖ, ΖΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ δυναμένη ἡ Η· λέγω ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ Η.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ Θ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Θ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΛ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΛ, ἧς τὰ ὀνόματα ἔστω τὰ ΚΜ, ΜΛ, σύμμετρα τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι τοῖς ΓΕ, ΕΔ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. ἀλλὰ καὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ σύμμετροί εἰσι ταῖς ΑΖ, ΖΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΒ οὕτως ἡ ΚΜ πρὸς τὴν ΜΛ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΚΜ οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΛΜ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΚΛ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΚΜ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΖ τῇ ΚΜ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΚΛ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΚΛ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΚΛ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΚΛ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΚΛ τῷ ἀπὸ τῆς Θ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς Θ. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Η· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η τῷ ἀπὸ τῆς Θ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Θ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Η, καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ.

Ἐὰν ἄρα χωρίον περιέχηται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητή ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Spatium enim contineatur sub AB, ΓΔ, videlicet sub apotoma AB, & quæ fit ex binis nominibus ΓΔ, cujus majus nomen ΓE: & sint nomina ejus quæ ex binis nominibus ΓE, EΔ commensurabilia nominibus apotomæ AZ, ZB, & in eadem ratione; sitque recta linea H potens spatium contentum sub AB, ΓΔ: dico ipsam H rationalem esse.

Exponatur enim rationalis Θ, & [per 45. 1.] quadrato ex Θ æquale ad ipsam ΓΔ applicetur, latitudinem faciens KΛ; apotome igitur [per 113.10.] est KΛ, cujus nomina KM, MΛ commensurabilia sint nominibus ejus quæ est ex binis nominibus sc. ΓE, EΔ, & in eadem ratione. sed [ex hyp.] ΓE, EΔ commensurabiles sunt ipsis AZ, ZB, atque in eadem ratione: est igitur [per 11. 5.] ut AZ ad ZB ita KM ad MΛ: & permutando ut AZ ad KM ita ZB ad MΛ: quare [per 19. 5.] & reliqua AB ad reliquam KΛ est ut AZ ad KM. commensurabilis autem est AZ ipsi KM: ergo [per 10.10.] & AB ipsi KΛ est commensurabilis. estq; [per 1.6.] ut AB ad KΛ ita rectangulum contentum sub ΓΔ, AB ad id quod continetur sub ΓΔ, KΛ: commensurabile igitur est rectangulum contentum sub ΓΔ, AB rectangulo quod sub ΓΔ, KΛ continetur. sed [per constr.] rectangulum contentum sub ΓΔ, KΛ est æquale quadrato ex Θ: ergo rectangulum quod continetur sub ΓΔ, AB quadrato ex Θ est commensurabile. rectangulum autem quod continetur sub ΓΔ, AB [ex hyp.] est æquale quadrato ex H: ergo quadratum ex H commensurabile est quadrato ex Θ. atqui est quadratum ex Θ rationale: rationale igitur est quadratum ex H; & idcirco ipsa H est rationalis, & potest quod sub ΓΔ, AB continetur.

Si igitur spatium contineatur sub apotoma & ea quæ ex binis nominibus, cujus nomina commensurabilia sunt nominibus apotomæ, & in eadem ratione; recta linea spatium potens est rationalis. quod erat demonstrandum.

Corol-

Corollarium.

Ex iis manifesto constat fieri posse, ut spatium rationale sub irrationalibus rectis lineis contineatur.

Πόρισμα.

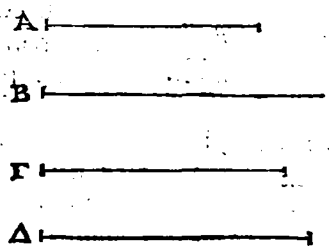
Καὶ γέγονεν ἡμῖν καὶ διὰ τούτων φανερὸν, ὅτι δυνατόν ἐστι ῥητὸν χωρίον ὑπὸ ἀλόγων εὐθειῶν περιέχεσθαι.

Prop. CXVI. Theor.

A media infinitæ irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem.

SIT media A: dico ex ipsa A infinitas irrationales fieri, & nullam alicui antecedentium eandem esse.

Exponatur rationalis B, & rectangulo contento sub A, B æquale sit quadratum ex Γ: irrationalis igitur [per 11.def.10.] est ipsa Γ: nam [per sch.39.10.] quod sub irrationali & rationali continetur irrationale est. & est eadem nulli earum quæ prius [in hoc lib.]; non enim [per 61, 62, 63, 64, 65, 66, & 98, 99, 100, 101, 102, 103. lib. 10.] quadratum alicujus antecedentium ad rationalem applicatum latitudinem efficit mediam. rursus, rectangulo quod sub B, Γ continetur æquale sit quadratum ex Δ: irrationale igitur [per schol. 39.10.] est quod fit ex Δ: & idcirco ipsa Δ est irrationalis, & nulli antecedentium eadem: neque enim quadratum alicujus earum quæ prius sunt ad rationalem applicatum latitudinem efficit ipsam Γ. similiter & eodem ordine infinite protracto, manifestum est à media infinitas irrationales fieri, & nullam alicui antecedentium eandem esse. quod erat demonstrandum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριϛ´.

Ἀπὸ μέσης ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή.

Ἔστω μέση ἡ Α· λέγω ὅτι ἀπὸ τῆς Α ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερόν ἐστιν ἡ αὐτή.

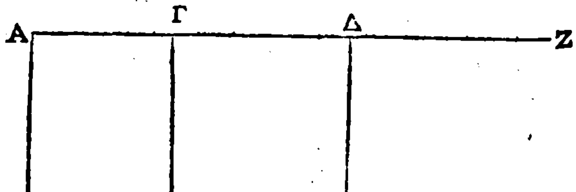
Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Β, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Γ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Γ· τὸ γὰρ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς ἄλογόν ἐστι. καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερόν ἐστιν ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπὸ οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ μέσην. πάλιν δὴ, τῷ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Δ, καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερόν ἐστιν ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν Γ. ὁμοίως δὴ τῆς τοιαύτης τάξεως ἐπ' ἄπειρον προβαινούσης, φανερὸν ὅτι ἀπὸ τῆς μέσης ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

*Aliter.

Sit media AΓ: dico ex ipsa AΓ infinitas irrationales fieri, & nullam alicui priorum eandem esse.

Ducatur ipsi AΓ ad rectos angulos AB, sitque AB rationalis, & BΓ compleatur: irrationale igitur est BΓ, & ipsum potens est irrationalis. possit autem ipsum recta linea ΓΔ; ergo ΓΔ irrationalis est, & nulli priorum eadem; non enim quadratum alicujus priorum ad rationalem applicatum latitudinem efficit mediam. rursus, compleatur EΔ, erit EΔ irrationale; & recta linea ipsum potens irrationalis. possit ipsum recta linea ΔZ: ergo ΔZ irrationalis est, & nulli priorum eadem; nullius enim priorum quadratum ad rationalem applicatum latitudinem efficit ipsam ΓΔ.

Ergo à media infinitæ irrationales fiunt, & nulla alicui priorum est eadem.



*ΑΛΛΩΣ.

Ἔστω μέση ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι ἀπὸ τῆς ΑΓ ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ πρότερον ἐστιν ἡ αὐτή.

Ἤχθω τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΒ, καὶ ἔστω ῥητὴ ἡ ΑΒ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΒΓ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΓ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. δυνάσθω αὐτὸ ἡ ΓΔ· ἄλογος ἄρα ἡ ΓΔ, καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ μέσην. πάλιν, συμπεπληρώσθω τὸ ΕΔ· ἄλογον ἄρα τὸ ΕΔ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. δυνάσθω αὐτὸ ἡ ΔΖ· ἄλογος ἄρα ἡ ΔΖ, καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ΓΔ.

Ἀπὸ τῆς μέσης ἄρα ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή.

* Demonstratio hæc, quæ pro alia habetur tam in *Codd. MSS.* quam in *Editis*, parum differt à præcedente. Illam tamen cum *Commandino* retinuimus; duas licet propositiones, quæ sequuntur in *Græcis Exemplaribus*, plane ejiciendas censuimus; utpote easdem cum propp. 106 & 107.

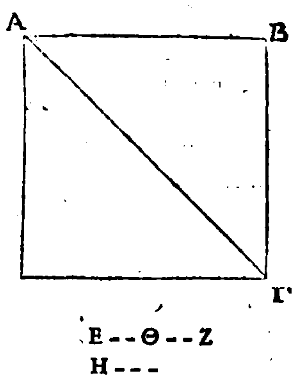
ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριζ'.

Προκείσθω ἡμῖν δεῖξαι, ὅτι ἐπὶ τῶν τετραγώνων σχημάτων ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ μήκει.

Ἔστω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι ἡ ΑΓ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ΑΒ μήκει.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω σύμμετρος· λέγω ὅτι συμβήσεται τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἄρτιον εἶναι καὶ περιττόν· φανερὸν μὲν οὖν ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω ὃν ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Η, καὶ ἔστωσαν οἱ ΕΖ, Η ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ ΕΖ. εἰ γὰρ ἔσται μονὰς ὁ ΕΖ, καὶ ἔχει λόγον πρὸς τὸν Η ὃν ἔχει ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΒ, καὶ μείζων ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΖ μονὰς τοῦ Η ἀριθμοῦ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα μονὰς ὁ ΕΖ· ἀριθμὸς ἄρα. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Η, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η. διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ· διπλασίων ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η· ἄρτιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ· ὥστε καὶ αὐτὸς ὁ ΕΖ ἄρτιός ἐστιν. εἰ γὰρ ἦν περισσὸς, καὶ ὁ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος περισσὸς ἂν ἦν, ἐπειδήπερ ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ᾖ, ὅλος περισσός ἐστι· ὁ ΕΖ ἄρα ἄρτιός ἐστι. τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Θ. καὶ ἐπεὶ οἱ ΕΖ, Η ἀριθμοὶ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. καὶ ἔστιν ὁ ΕΖ ἄρτιος· περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ Η. εἰ γὰρ ἦν ἄρτιος, τοὺς ΕΖ, Η δυὰς ἂν ἐμέτρει, πᾶς γὰρ ἄρτιος ἔχει μέρος ἥμισυ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἄρτιός ἐστιν ὁ Η· περισσὸς ἄρα. καὶ ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ὁ ΕΖ τοῦ ΕΘ, τετραπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΘ· διπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ Η τοῦ ἀπὸ τοῦ ΕΘ· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ Η· ἄρτιος ἄρα διὰ τὰ εἰρημένα ὁ Η. ἀλλὰ καὶ περισσὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ΑΛΛΩΣ.

Δεικτέον δὴ καὶ ἑτέρως, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ τοῦ τετραγώνου διάμετρος τῇ πλευρᾷ.

Ἔστω γὰρ ἀντὶ μὲν τῆς διαμέτρου ἡ Α, ἀντὶ δὲ τῆς πλευρᾶς ἡ Β· λέγω ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω σύμμετρος, καὶ γεγονέτω πάλιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ὁ ΕΖ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Η, καὶ ἔστωσαν ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οἱ ΕΖ, Η ἄρα πρῶ-

Prop. XCVII. Theor.

Propositum sit nobis ostendere in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine.

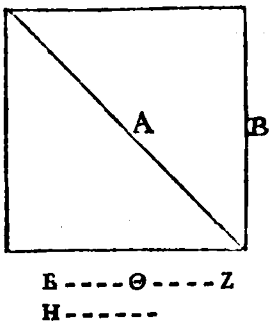
Sit quadratum ΑΒΓΔ, cujus diameter ΑΓ: dico ΑΓ ipsi ΑΒ longitudine incommensurabilem esse.

Si enim fieri potest, sit commensurabilis: dico ex hoc sequi eundem numerum parem esse & imparem: itaque manifestum est [per 47.1.] quadratum ex ΑΓ duplum esse quadrati ex ΑΒ. & quoniam ΑΓ commensurabilis est ipsi ΑΒ, habebit ΑΓ ad ΑΒ rationem eam, quam habet numerus ad numerum. habeat quam ΕΖ ad Η: sintque ΕΖ, Η numeri minimi eandem cum ipsis rationem habentium: non igitur unitas est ΕΖ. si enim est unitas, & habet ad Η rationem eam quam ΑΓ ad ΑΒ, estque ΑΓ major quam ΑΒ; & ΕΖ unitas quam Η numerus major erit, quod est absurdum: ergo ΕΖ non est unitas; quare numerus sit necesse est. & quoniam ut ΑΓ ad ΑΒ ita est ΕΖ ad Η, erit & ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΑΒ ita quadratus ex ΕΖ ad eum qui fit ex Η quadratum. duplum autem est quadratum ex ΑΓ quadrati ex ΑΒ: ergo & quadratus ex ΕΖ quadrati ex Η est duplus: ac propterea quadratus ex ΕΖ par est, & ipse ΕΖ par. si enim esset impar, & qui fit ab ipso quadratus impar esset, quoniam [per 23.9.] si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit impar; & totus impar erit: ergo ΕΖ est par. secetur bifariam in Θ. & quoniam numeri ΕΖ, Η minimi sunt eandem cum ipsis rationem habentium, inter se primi sunt. & est ΕΖ par: impar igitur est Η. si enim esset par, binarius metiretur numeros ΕΖ, Η, (omnis enim par dimidiam partem habet) primos inter se existentes, quod fieri non potest: non igitur Η est par, ergo impar. & quoniam ΕΖ duplus est ipsius ΕΘ, erit [per 11.8.] quadratus ex ΕΖ quadrati ex ΕΘ quadruplus. est autem quadratus ex ΕΖ duplus quadrati ex Η: duplus igitur est quadratus ex Η quadrati ex ΕΘ; ergo qui fit ex Η quadratus est par: ideoque ex jam dictis [ad 29.9.] ipse Η est par. sed & impar, quod fieri non potest: non igitur ΑΓ commensurabilis est ipsi ΑΒ longitudine: ergo est incommensurabilis. quod erat demonstrandum.

Aliter.

Sed & aliter ostendendum est incommensurabilem esse quadrati diametrum ipsius lateri.

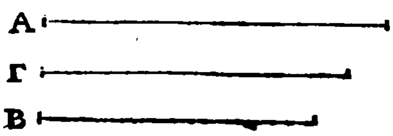
Sit enim pro diametro quidem Α, pro latere autem Β: dico Α ipsi Β longitudine incommensurabilem esse. si enim fieri potest, sit commensurabilis; & rursus, fiat ut Α ad Β ita ΕΖ numerus ad ipsum Η; sintque minimi eorum qui eandem habent rationem: ergo [per 24.7.] ΕΖ, H primi inter se sunt. dico primum H non esse unitatem. si enim fieri potest, sit H unitas. & quoniam est ut A ad B ita EZ ad H, erit & ut quadratum ex A ad quadratum ex B ita quadratus ex EZ ad eum qui fit ex H quadratum. duplum autem est quadratum ex A quadrati ex B: ergo & quadratus ex EZ quadrati ex H est duplus. atque est H unitas: binarius igitur est quadratus ex EZ, quod fieri non potest: ergo H non est unitas; igitur est numerus. & quoniam est ut quadratum ex A ad quadratum ex B ita quadratus ex EZ ad quadratum ex H, & invertendo ut quadratum ex B ad quadratum ex A ita quadratus ex H ad quadratum ex EZ. sed quadratum ex B metitur quadratum ex A: ergo & qui fit ex H quadratus metitur eum qui fit ex EZ; & propterea [per 14.8.] latus H ipsum EZ latus metitur. metitur autem & seipsum: ergo H numeros EZ, H metitur, primos inter se existentes, quod fieri non potest: non igitur A ipsi B longitudine est commensurabilis: ergo est incommensurabilis. quod erat demonstrandum.



τοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. λέγω πρῶτον ὅτι ὁ Η οὐκ ἔστι μονάς. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω μονάς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Η· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η. διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α τοῦ ἀπὸ τῆς Β· διπλάσιος ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η. καί ἐστι μονὰς ὁ Η· δυὰς ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τετράγωνος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ Η· ἀριθμὸς ἄρα. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η, καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Α οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Η πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ. μετρεῖ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Β τὸ ἀπὸ τῆς Α· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ Η τετράγωνος τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ὁ Η τὸν ΕΖ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν ὁ Η· ὁ Η ἄρα τοὺς ΕΖ, Η μετρεῖ, πρώτους ὄντας ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SCHOLIUM.

*Itaque inventis longitudine incommensurabilibus rectis lineis, ut A, B, invenientur & aliæ quamplurimæ magnitudines ex duabus dimensionibus, nimirum superficies incommensurabiles inter sese. si enim [per 13.6.] inter ipsas A, B mediam proportionalem sumamus rectam lineam Γ, erit [per 20.6.] ut A ad B ita figura quæ fit ex A ad eam quæ ex Γ similem & similiter descriptam, sive quadrata, sive alia rectilinea similia, sive circuli qui circa diametros A Γ describantur; quandoquidem circuli [per 2.12.] inter se sunt ut diametrorum quadrata: inventa sunt igitur spatia plana inter se incommensurabilia. quod erat demonstrandum.



Ostensis autem figuris diversis incommensurabilibus duarum dimensionum, ostendemus ex solidorum contemplatione dari etiam solida commensurabilia & incommensurabilia inter sese. nam si super quadrata ex A, B, vel rectilinea quæ ipsis æqualia sint, solida æque alta constituamus, sive pyramides sive prismata, erunt [per 32.11.& 5. vel 6.12.] ea inter se uti bases. & si quidem bases commensurabiles sint, [per 10.10.] erunt solida commensurabilia: si vero incommensurabiles, & ipsa incommensurabilia erunt. quod erat demonstrandum.

Sed & duobus circulis existentibus A, B, si super ipsos conos æque altos sive cylindros constituamus, erunt hi [per 11.12.] inter se uti ipsorum bases, hoc est ut A, B circuli. & si quidem circuli commensurabiles sint, [per 10.10.] commensurabiles erunt & coni inter sese & cylindri: si vero incommensurabiles, & coni & cylindri incommensurabiles erunt. ex quibus perspicuum est non solum in lineis & superficiebus esse commensurabilitatem & incommensurabilitatem, sed & in solidis figuris.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

*Εὑρημένων δὴ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν, ὡς τῶν Α, Β, εὑρίσκεται καὶ ἄλλα πλεῖστα μεγέθη ἐκ δύο διαστάσεων, λέγω δὴ ἐπίπεδα ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. ἐὰν γὰρ τῶν Α, Β μέσην ἀνάλογον λάβωμεν τὴν Γ, ἔσται ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Γ, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, εἴτε τετράγωνα εἴη τὰ ἀναγεγραμμένα, εἴτε ἕτερα εὐθύγραμμα ὅμοια, εἴτε κύκλοι περὶ διαμέτρους τὰς Α, Γ, ἐπείπερ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα· εὕρηνται ἄρα ἐπίπεδα χωρία ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Δεδειγμένων δὴ καὶ τῶν ἐκ δύο διαστάσεων διαφόρων χωρίων ἀσυμμέτρων, δείξομεν ἀπὸ τῆς τῶν στερεῶν θεωρίας, ὡς ἔστι καὶ στερεὰ σύμμετρά τε καὶ ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῶν ἀπὸ τῶν Α, Β τετραγώνων, ἢ τῶν ἴσων αὐτοῖς εὐθυγράμμων, ἀναστήσωμεν ἰσοϋψῆ στερεὰ, παραλληλεπίπεδα, ἢ πυραμίδας, ἢ πρίσματα, ἔσται τὰ ἀνασταθέντα πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις. καὶ εἰ μὲν σύμμετροί εἰσιν αἱ βάσεις, σύμμετρα ἔσται τὰ στερεά· εἰ δὲ ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀλλὰ μὴν καὶ δύο κύκλων ὄντων τῶν Α, Β, ἐὰν ἀπ' αὐτῶν ἰσοϋψεῖς κώνους, ἢ κυλίνδρους ἀναγράψωμεν, ἔσονται πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ βάσεις, τουτέστιν ὡς οἱ Α, Β κύκλοι. καὶ εἰ μὲν σύμμετροί εἰσιν οἱ κύκλοι, σύμμετροι ἔσονται οἵ τε κῶνοι ἀλλήλοις καὶ οἱ κύλινδροι· εἰ δὲ ἀσύμμετροί εἰσιν οἱ κύκλοι, ἀσύμμετροι ἔσονται καὶ οἱ κῶνοι καὶ οἱ κύλινδροι. καὶ φανερὸν ἡμῖν γέγονεν ὅτι οὐ μόνον ἐπὶ γραμμῶν ἐστι συμμετρία καὶ ἀσυμμετρία, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τῶν στερεῶν σχημάτων.

* Sequentia videntur non esse *Euclidis*. Saltem loco non suo posita sunt; quippe ex sequentibus pendentia.

ET-

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΝΔΕΚΑΤΟΝ,

Καὶ Στερεῶν πρῶτον.

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER UNDECIMUS,

Et Solidorum primus.

ΟΡΟΙ.

α'. ΣΤΕΡΕΟΝ ἐστι, τὸ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἔχον.

β'. Στερεοῦ δὲ πέρας, ἐπιφάνεια.

γ'. Εὐθεῖα πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιῇ γωνίας.

δ'. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν.

ε'. Εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστὶν, ὅταν ἀπὸ τοῦ μετεώρου πέρατος τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου καὶ ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρατος τῆς εὐθείας εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῆς ἀχθείσης καὶ τῆς ἐφεστώσης.

ϛ'. Ἐπιπέδου πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστὶν, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ ἀγομένων πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων.

ζ'. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κε-

DEFINITIONES.

1. SOLIDUM est, quod longitudinem & latitudinem & crassitudinem habet.

2. Solidi autem terminus est superficies.

3. Recta linea ad planum recta est, quando ad rectas omnes lineas, quæ ipsam contingunt & in subjecto plano jacent, rectos angulos efficiat.

4. Planum ad planum rectum est, quando rectæ lineæ, quæ communi planorum sectioni ad rectos angulos & in uno plano ducuntur, alteri plano ad angulos rectos fuerint.

5. Rectæ lineæ ad planum inclinatio est, quando à sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum acta perpendiculari, à puncto facto ad terminum lineæ, qui est in plano, recta linea juncta fuerit, angulus nempe acutus qui juncta linea & insistente continetur.

6. Plani ad planum inclinatio est angulus acutus rectis lineis contentus, quæ ad rectos angulos communi planorum sectioni ad unum ipsius punctum in utroque planorum ducuntur.

7. Planum ad planum similiter incli-

nari dicitur, atque alterum ad alterum, quando dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

8. Plana parallela sunt, quæ inter se non conveniunt.

9. Similes figuræ solidæ sunt, quæ similibus planis ac multitudine æqualibus continentur.

10. Æquales vero & similes figuræ solidæ sunt, quæ similibus planis multitudine simul & magnitudine æqualibus continentur.

11. Solidus angulus est plurium, quam duarum linearum, quæ sese contingant & non in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio. ALITER. Solidus angulus est, qui pluribus quam duobus planis angulis in eodem non jacentibus plano atque ad unum punctum constitutis comprehenditur.

12. Pyramis est figura solida planis comprehensa, quæ ab uno plano ad unum punctum constituitur.

13. Prisma est figura solida planis comprehensa, quorum adversa duo æqualia & similia parallela sunt; reliqua vero parallelogramma.

14. Sphæra est figura quidem comprehensa, cum circa manentem diametrum semicirculus convertitur, donec in eundem locum, à quo moveri cœperat, rursus restituatur.

15. Axis vero sphæræ est manens illa recta linea, circa quam semicirculus convertitur.

16. Centrum autem sphæræ est idem illud quod & semicirculi.

17. Diameter vero sphæræ est recta linea quædam per centrum ducta, & ex utraque parte à sphæræ superficie terminata.

18. Conus est figura quidem comprehensa, cum rectanguli trianguli manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum sunt, triangulum ipsum convertitur, donec in eundem locum, à quo moveri cœperat, rursus restituatur. Verum si manens recta linea æqualis fuerit reliquo lateri, quod circa rectum angulum convertitur, conus orthogonius erit: si vero minor, amblygonius: & si major, oxygonius.

19. Axis autem coni est manens illa recta linea circa quam triangulum convertitur.

κλίνεσθαι λέγεται, καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ εἰρημέναι τῶν κλίσεων γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι.

η΄. Παράλληλα ἐπίπεδά ἐστι τὰ ἀσύμπτωτα.

θ΄. Ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τὸ πλῆθος.

ι΄. Ἴσα δὲ καὶ ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει.

ια΄. Στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ οὐσῶν πρὸς πάσαις ταῖς γραμμαῖς κλίσις. ΑΛΛΩΣ. Στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο ἐπιπέδων γωνιῶν περιεχομένη, μὴ οὐσῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων.

ιβ΄. Πυραμίς ἐστι σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ἀπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνεστώς.

ιγ΄. Πρίσμα ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύο τὰ ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστι παράλληλα, τὰ δὲ λοιπὰ παραλληλόγραμμα.

ιδ΄. Σφαῖρά ἐστιν, ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα.

ιε΄. Ἄξων δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα περὶ ἣν τὸ ἡμικύκλιον στρέφεται.

ις΄. Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶ τὸ αὐτὸ ὃ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου.

ιζ΄. Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

ιη΄. Κῶνός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου τριγώνου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. κἂν μὲν ἡ μένουσα εὐθεῖα ἴση ᾖ τῇ λοιπῇ τῇ περὶ τὴν ὀρθὴν περιφερομένῃ, ὀρθογώνιος ἔσται κῶνος· ἐὰν δὲ ἐλάττων, ἀμβλυγώνιος· ἐὰν δὲ μείζων, ὀξυγώνιος.

ιθ΄. Ἄξων δὲ τοῦ κώνου ἐστὶν ἡ μένουσα περὶ ἣν τὸ τρίγωνον στρέφεται.

κ'. Βάσις δὲ, ὁ κύκλος ὁ ὑπὸ τῆς περιφερομένης εὐθείας γραφόμενος.

20. Basis vero, circulus à conversa recta linea descriptus.

κα'. Κύλινδρος δὲ, ὅταν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, περιενεχθὲν τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα.

21. Cylindrus est figura comprehensa, quando rectanguli parallelogrammi manente uno latere eorum quæ circa rectum angulum sunt, parallelogrammum ipsum convertitur, donec in eundem locum, à quo moveri cœperat, rursus restituatur.

κβ'. Ἄξων δὲ τοῦ κυλίνδρου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα περὶ ἣν τὸ παραλληλόγραμμον στρέφεται.

22. Axis vero cylindri est manens illa recta linea, circa quam parallelogrammum convertitur.

κγ'. Βάσεις δὲ, οἱ κύκλοι οἱ ὑπὸ τῶν ἀπεναντίον περιαγομένων δύο πλευρῶν γραφόμενοι.

23. Bases autem sunt circuli, qui à duobus ex adverso circumactis lateribus describuntur.

κδ'. Ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροί εἰσιν, ὧν οἵ τε ἄξονες καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων ἀνάλογόν εἰσιν.

24. Similes coni & cylindri sunt, quorum & axes & basium diametri proportionales sunt.

κε'. Κύβος ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενον.

25. Cubus est figura solida sex quadratis æqualibus contenta.

κϛ'. Τετράεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ τεσσάρων τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

26. Tetraëdrum est figura solida quatuor triangulis æqualibus & æquilateris comprehensa.

κζ'. Ὀκτάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

27. Octaëdrum est figura solida octo triangulis æqualibus & æquilateris comprehensa.

κη'. Δωδεκάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον.

28. Dodecaëdrum est figura solida quæ duodecim pentagonis æqualibus & æquilateris & æquiangulis continetur.

κθ'. Εἰκοσάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

29. Icosaëdrum est figura solida quæ viginti triangulis æqualibus & æquilateris comprehenditur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Εὐθείας γραμμῆς μέρος μέν τι οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν τῷ μετεώρῳ.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, εὐθείας γραμμῆς τῆς ΑΒΓ μέρος μέν τι τὸ ΑΒ ἔστω ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι τὸ ΒΓ ἐν μετεώρῳ.

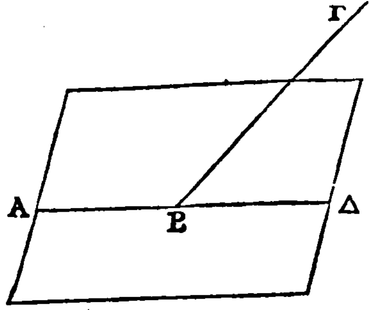
Ἔσται δή τις τῇ ΑΒ συνεχὴς εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. ἔστω ἡ ΒΔ.* δύο δὴ δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒΓ, ΑΒΔ κοινὸν τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ, ὅπερ ἀδύνατον· εὐθεῖα γὰρ εὐθείᾳ οὐ συμβάλλει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ καθ' ἕν· εἰ δὲ μὴ, ἐφαρμόσουσιν ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εὐθείας ἄρα γραμμῆς μέρος μέν τι οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν τῷ μετεώρῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. I. THEOR.

Rectæ lineæ pars quædam non est in subjecto plano, quædam vero in sublimi.

Si enim fieri potest, rectæ lineæ ΑΒΓ pars quidem ΑΒ sit in subjecto plano, pars vero ΒΓ in sublimi.



Erit igitur recta linea quædam ipsi ΑΒ in directum continuata in subjecto plano. sit ΒΔ. duabus igitur datis rectis lineis ΑΒΓ, ΑΒΔ commune segmentum est ΑΒ, quod fieri non potest: recta enim linea cum recta linea non convenit in pluribus punctis, quam uno; alias rectæ lineæ sibi ipsis congruent.

Non igitur rectæ lineæ pars quædam est in subjecto plano, quædam vero in sublimi. quod erat demonstrandum.

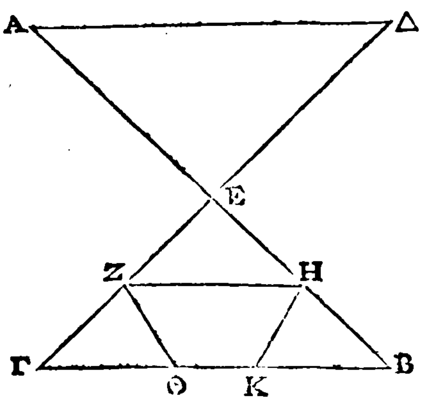
* Hic in ora Codd. MSS. adscribitur πᾶσαν γὰρ δυνατὸν εὐθεῖαν ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.

Prop. II. Theor.

Si duæ rectæ lineæ ſe invicem ſecent, in uno ſunt plano, item omne triangulum in uno plano conſiſtit.

DUÆ enim rectæ lineæ A B, Γ Δ ſe invicem in puncto E ſecent: dico ipſas A B, Γ Δ in uno eſſe plano, nec non omne triangulum in uno plano conſiſtere.

Sumantur enim in ipſis E B, E Γ quævis puncta Z, H; junganturque Γ B, Z H, atque ducantur Z Θ, H K: dico primum E B Γ triangulum conſiſtere in uno plano. ſi enim trianguli E B Γ pars quidem Z Θ Γ, vel H B K in ſubjecto plano eſt, reliqua vero in alio plano; erit & unius linearum E Γ, E B pars in ſubjecto plano, & pars in alio. quod ſi trianguli E Γ B pars Z Γ B H ſit in ſubjecto plano, reliqua vero in alio, utrarumque rectarum linearum E Γ E B quædam pars erit in ſubjecto plano, quædam vero in alio. quod abſurdum eſſe oſtendimus: triangulum igitur E B Γ in uno eſt plano. in quo autem plano eſt B Γ E triangulum in hoc eſt utraque ipſarum E Γ, E B: in quo autem utraque ipſarum E Γ, E B, in hoc [per 1.11.] ſunt & A B, Γ Δ: ergo rectæ lineæ A B, Γ Δ in uno ſunt plano, & omne triangulum in uno plano conſiſtit. quod erat demonſtrandum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ.

ΔΥΟ γὰρ εὐθεῖαι αἱ Α Β, Γ Δ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω ὅτι αἱ Α Β, Γ Δ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῶν Ε Β, Ε Γ τυχόντα σημεῖα, τὰ Ζ, Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Γ Β, Ζ Η, καὶ διήχθωσαν αἱ Ζ Θ, Η Κ· λέγω πρῶτον ὅτι τὸ Ε Β Γ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. εἰ γάρ ἐστι τοῦ Ε Β Γ τριγώνου μέρος ἤτοι τὸ Ζ Θ Γ, ἢ τὸ Η Β Κ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται καὶ μιᾶς τῶν Ε Γ, Ε Β εὐθειῶν μέρος μέν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ. εἰ δὲ τοῦ Ε Γ Β τριγώνου τὸ Ζ Γ Β Η μέρος εἴη ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται καὶ ἀμφοτέρων τῶν Ε Γ, Ε Β εὐθειῶν μέρος μέν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη· τὸ ἄρα Ε Β Γ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἐν ᾧ δέ ἐστι τὸ Β Γ Ε τρίγωνον ἐν τούτῳ καὶ ἑκατέρα τῶν Ε Γ, Ε Β, ἐν ᾧ δὲ ἑκατέρα τῶν Ε Γ, Ε Β ἐν τούτῳ καὶ αἱ Α Β, Γ Δ· αἱ Α Β, Γ Δ ἄρα εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

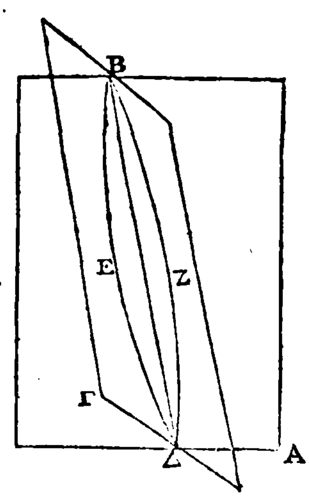
Prop. III. Theor.

Si duo plana ſe invicem ſecent, communis ipſorum ſectio eſt linea recta.

DUO enim plana A B, B Γ ſe invicem ſecent, communis autem ipſorum ſectio ſit Δ B linea: dico lineam Δ B rectam eſſe.

Si enim non ita ſit, ducatur à puncto Δ ad B in plano quidem A B recta linea Δ E B; in plano autem B Γ recta linea Δ Z B: erunt ergo duarum rectarum linearum Δ E B, Δ Z B iidem termini, & ipſæ ſpatium continebunt, quod [per 12. ax.] eſt abſurdum; non igitur Δ E B, Δ Z B rectæ lineæ ſunt. ſimiliter oſtendemus neque aliam quampiam, quæ à puncto Δ ad B ducitur rectam eſſe, præter ipſam Δ B, communem ſcilicet planorum A B, B Γ ſectionem.

Si igitur duo plana ſe invicem ſecent, communis ipſorum ſectio recta linea erit. quod erat demonſtrandum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνῃ ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεῖά ἐστι.

ΔΥΟ γὰρ ἐπίπεδα τὰ Α Β, Β Γ τεμνέτωσαν ἄλληλα, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ Δ Β γραμμή· λέγω ὅτι ἡ Δ Β γραμμὴ εὐθεῖά ἐστιν.

Εἰ γὰρ μή, ἐπεζεύχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Β, ἐν μὲν τῷ Α Β ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ Δ Ε Β, ἐν δὲ τῷ Β Γ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ Δ Ζ Β· ἔσται δὴ δύο εὐθειῶν τῶν Δ Ε Β, Δ Ζ Β τὰ αὐτὰ πέρατα, καὶ περιέξουσι δηλαδὴ χωρίον, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα αἱ Δ Ε Β, Δ Ζ Β εὐθεῖαί εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις, ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη, εὐθεῖα ἔσται, πλὴν τῆς Δ Β κοινῆς τομῆς τῶν Α Β, Β Γ ἐπιπέδων.

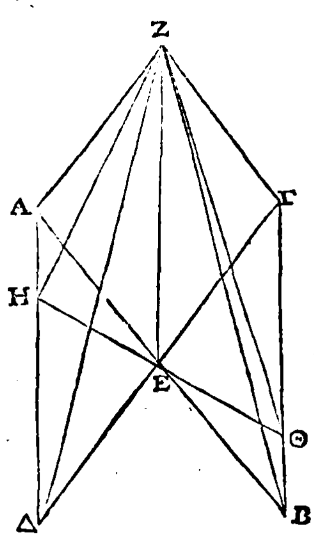
Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα τέμνῃ ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεῖά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Ἐὰν εὐθεῖα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΕΖ δύο εὐθείαις ταῖς ΑΒ, ΓΔ τεμνούσαις ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον ἀπὸ τοῦ Ε πρὸς ὀρθὰς ἐφεστάτω· λέγω ὅτι ἡ ΕΖ καὶ τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΓΕ, ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ διήχθω τις διὰ τοῦ Ε, ὡς ἔτυχεν, ἡ ΗΕΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΓΒ, καὶ ἔτι ἀπὸ τυχόντος τοῦ Ζ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΑ, ΖΗ, ΖΔ, ΖΓ, ΖΘ, ΖΒ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΕ, ΕΔ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΒ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΓΒ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΕΔ τρίγωνον τῷ ΓΕΒ ἴσον ἔσται, ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΒΓ ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΕΘ ἴση· δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΗΕ, ΒΕΘ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν ΑΕ τῇ ΕΒ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΗΕ τῇ ΕΘ, ἡ δὲ ΑΗ τῇ ΒΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΕ, βάσις ἄρα ἡ ΖΑ βάσει τῇ ΖΒ ἴση ἐστί· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΖΔ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΓΒ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΖΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΔ δυσὶ ταῖς ΖΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ βάσις ἡ ΖΔ βάσει τῇ ΖΓ ἐδείχθη ἴση· καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΑΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση ἐστίν. καὶ πάλιν ἐδείχθη ἡ ΑΗ τῇ ΒΘ ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΖΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΗ δυσὶ ταῖς ΖΒ, ΒΘ ἴσαι εἰσί. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΑΗ ἐδείχθη ἴση τῇ ὑπὸ ΖΒΘ· βάσις ἄρα ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΘ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἐδείχθη ἴση ἡ ΗΕ τῇ ΕΘ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΗΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΘΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσί. καὶ βάσις ἡ ΖΘ βάσει τῇ ΖΗ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΕΖ ἴση ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΗΕΖ, ΘΕΖ γωνιῶν· ἡ ΖΕ ἄρα πρὸς τὴν ΗΘ τυχόντως διὰ τοῦ Ε ἀχθεῖσαν ὀρθή ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἡ ΖΕ καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. εὐθεῖα δὲ πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομέ-



PROP. IV. THEOR.

Si recta linea duabus rectis lineis se invicem secantibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit.

Recta enim linea quædam E Z duabus rectis lineis A B, Γ Δ se invicem secantibus in E puncto ab ipso E ad rectos angulos insistat: dico E Z etiam plano per A B, Γ Δ ducto ad rectos angulos esse.

Sumantur enim rectæ lineæ A E, E B, Γ E, E Δ inter se æquales: perque E ducatur recta linea H E Θ utcunque, & jungantur A Δ, Γ B; deinde à quovis puncto Z ducantur Z A, Z H, Z Δ, Z Γ, Z Θ, Z B. & quoniam duæ rectæ lineæ A E, E Δ duabus rectis lineis Γ E, E B æquales sunt, & [per 15. 1.] angulos æquales continent, erit [per 4. 1.] A Δ basis basi Γ B æqualis, & triangulum A E Δ triangulo Γ E B æquale, & etiam angulus Δ A E æqualis est angulo E B Γ. est autem [per 15. 1.] & angulus A E H æqualis angulo B E Θ: duo igitur triangula sunt A H E, B E Θ duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus A E uni lateri E B æquale, quod æqualibus adjacet angulis: quare [per 26. 1.] & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt: ergo H E quidem est æqualis E Θ; A H vero ipsi B Θ. & quoniam A E est æqualis E B, communis autem & ad rectos angulos Z E; erit [per 4. 1.] basis Z A basi Z B æqualis: eadem quoque ratione & Z Γ æqualis erit ipsi Z Δ. præterea quoniam A Δ est æqualis Γ B, & Z A ipsi Z B; erunt duæ Z A, A Δ duabus Z B, B Γ æquales, altera alteri. & ostensa est basis Z Δ æqualis basi Z Γ: angulus igitur Z A Δ angulo Z B Γ [per 8. 1.] est æqualis. rursus ostensa est A H æqualis B Θ; sed & Z A ipsi Z B est æqualis: duæ igitur Z A, A H duabus Z B, B Θ æquales sunt. & angulus Z A H ostensus est æqualis angulo Z B Θ: basis igitur Z H basi Z Θ [per 4. 1.] est æqualis. & quoniam rursus H E ostensa est æqualis E Θ, communis autem E Z; erunt duæ H E, E Z æquales duabus Θ E, E Z. & basis Z Θ est æqualis basi Z H; angulus igitur H E Z angulo Θ E Z [per 8. 1.] est æqualis; & idcirco rectus est uterque angulorum H E Z, Θ E Z: ergo Z E ad H Θ utcunque per E ductam rectos efficit angulos. similiter ostendemus Z E etiam ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, & in subjecto sunt plano, rectos angulos efficere. recta autem ad planum recta est [per 3. def. 11.] quando ad omnes rectas lineas ipsam contin-

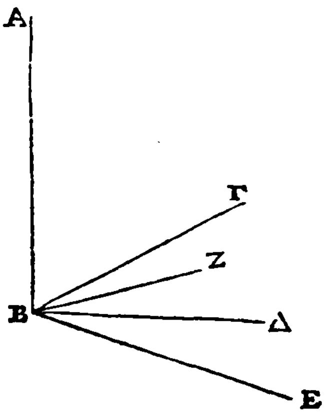
contingentes & in eodem existentes plano rectos efficit angulos: quare EZ subjecto plano ad rectos angulos insistit. at subjectum planum est quod per rectas lineas AB, ΓΔ ducitur: ergo EZ ad rectos angulos erit ducto per AB, ΓΔ plano.

Si igitur recta linea duabus rectis lineis se invicem secantibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit. quod erat demonstrandum.

Prop. V. Theor.

Si recta linea tribus rectis lineis sese tangentibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, tres illæ rectæ lineæ in uno plano erunt.

Recta enim linea quædam AB tribus rectis lineis BΓ, BΔ, BE in contactu B ad rectos angulos insistat: dico BΓ, BΔ, BE in uno plano esse.



Non enim, sed si fieri potest, sint BΔ, BE quidem in subjecto plano, BΓ vero in sublimi, & planum per AB, BΓ producatur: communem igitur sectionem in subjecto plano faciet [per 3. 11.] rectam lineam. faciat BZ. in uno igitur sunt plano per AB, BΓ ducto tres rectæ lineæ AB, BΓ, BZ. & quoniam AB utrique ipsarum BΔ, BE ad rectos angulos insistit, & ducto per ipsas ΔB, BE plano [per 4. 11.] ad rectos angulos erit. planum autem per ΔB, BE est subjectum planum: ergo AB ad subjectum planum recta est: quare [per 3. deff. 11.] & ad omnes rectas lineas ipsam contingentes, quæ in eodem plano sunt, rectos faciet angulos. sed ipsam tangit BZ in subjecto existens plano: ergo angulus ABZ rectus est. ponitur autem & angulus ABΓ rectus: æqualis igitur est angulus ABZ angulo ABΓ. & in eodem sunt plano: quod [per 9. ax.] fieri non potest: recta igitur linea BΓ non est in plano sublimi: quare tres rectæ lineæ BΓ, BΔ, BE sunt in uno plano.

Si igitur recta linea tribus rectis lineis sese tangentibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, tres illæ rectæ in uno plano erunt. quod erat demonstrandum.

Prop. VI. Theor.

Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, parallelæ erunt ipsæ rectæ lineæ.

Duæ enim rectæ lineæ AB, ΓΔ subjecto plano sint ad rectos angulos: dico AB ipsi ΓΔ parallelam esse.

νας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας· ἡ EZ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. τὸ δὲ ὑποκείμενον ἐπίπεδόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν AB, ΓΔ εὐθειῶν· ἡ EZ ἄρα πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ διὰ τῶν AB, ΓΔ ἐπιπέδῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε΄.

Ἐὰν εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ AB τρισὶν εὐθείαις ταῖς BΓ, BΔ, BE πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ B ἁφῆς ἐφεστάτω· λέγω ὅτι αἱ BΓ, BΔ, BE ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστωσαν αἱ μὲν BΔ, BE ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ BΓ ἐν μετεώρῳ, καὶ ἐκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν AB, BΓ ἐπίπεδον· κοινὴν δὴ τομὴν ποιήσει ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιείτω τὴν BZ. ἐν ἑνὶ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ τῷ διηγμένῳ διὰ τῶν AB, BΓ αἱ τρεῖς εὐθεῖαι αἱ AB, BΓ, BZ. καὶ ἐπεὶ ἡ AB ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν BΔ, BE· καὶ τῷ διὰ τῶν ΔB, BE ἄρα ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ AB. τὸ δὲ διὰ τῶν ΔB, BE ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενόν ἐστιν· ἡ AB ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· ὥστε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἡ AB. ἅπτεται δὲ ἡ BZ αὐτῆς οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ἡ ἄρα ὑπὸ ABZ γωνία ὀρθή ἐστιν. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ABΓ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ABZ γωνία τῇ ὑπὸ ABΓ. καί εἰσιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ BΓ εὐθεῖα ἐν μετεώρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ BΓ, BΔ, BE ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ΄.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι.

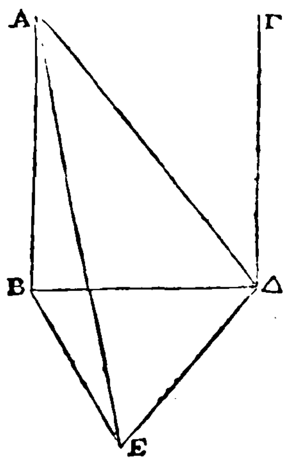
Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ AB, ΓΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστωσαν· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ ΓΔ.

Συμβαλλέ-

Συμβαλλέτωσαν γὰρ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Β, Δ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ εὐθεῖα, καὶ ἤχθω τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ ΔΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθάς, ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ τῆς ΑΒ ἑκατέρα τῶν ΒΔ, ΒΕ, οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΒΕ γωνιῶν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΔΒ, ΓΔΕ ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΔ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΔ δυσὶ τῶν ΕΔ, ΔΒ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΕ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΒΕ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΕ δυσὶ τῶν ΕΔ, ΔΒ ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΑΕ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΑ ἴση ἐστίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΔΑ· ἡ ΕΔ ἄρα πρὸς τὴν ΔΑ ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΔ, ΔΓ ὀρθή· ἡ ΕΔ ἄρα τρισὶν εὐθείαις ταῖς ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς ἁφῆς ἐφέστηκεν· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. ἐν ᾧ δὲ αἱ ΔΒ, ΔΑ, ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΑΒ, πᾶν γὰρ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ· αἱ ἄρα ΑΒ, ΒΔ, ΔΓ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΒΔΓ γωνιῶν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Occurrant enim subjecto plano in punctis B, Δ, jungaturque BΔ recta linea, cui ad rectos angulos in subjecto plano ducatur ΔE; & posita ΔE ipsi AB æquali jungantur BE, AE, AΔ.

Quoniam igitur AB recta est ad subjectum planum; & ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt & in subjecto sunt plano [per 3. def. 11.] rectos angulos efficiet. contingit autem ipsam AB utraque ipsarum BΔ, BE existens in subjecto plano: ergo uterque angulorum ABΔ, ABE rectus est. eadem ratione rectus etiam est uterque ipsorum ΓΔB, ΓΔE. quoniam autem AB æqualis est ipsi ΔE, communis autem BΔ, duæ quidem AB, BΔ duabus EΔ, ΔB sunt æquales, & rectos angulos continent: basis igitur AΔ [per 4. 1.] basi BE est æqualis. & quoniam AB est æqualis ΔE & AΔ ipsi BE, duæ quidem AB, BE duabus EΔ, ΔB æquales sunt, & basis ipsarum AE communis: ergo [per 8. 1.] angulus ABE angulo EΔA est æqualis. sed ABE rectus est: rectus igitur & EΔA; & idcirco EΔ ad ΔA est perpendicularis. sed & perpendicularis est ad utramque ipsarum BΔ, ΔΓ: quare EΔ tribus rectis lineis BΔ, ΔA, ΔΓ in contactu ad rectos insistit angulos: tres igitur rectæ lineæ BΔ, ΔA, ΔΓ [per 5. 11.] in uno sunt plano. in quo autem sunt BΔ, ΔA, in hoc est & AB, omne enim triangulum [per 2. 11.] in uno est plano: ergo AB, BΔ, ΔΓ in uno plano sunt. atque est uterque angulorum ABΔ, BΔΓ rectus: parallela igitur [per 28. 1.] est AB ipsi ΓΔ.

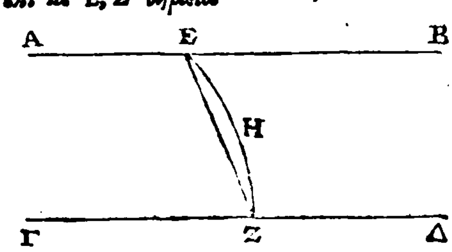
Quare si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, parallelæ erunt ipsæ rectæ lineæ. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῇ δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα· ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ Ε, Ζ· λέγω ὅτι ἡ ἐπὶ τὰ Ε, Ζ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω ἐν μετεώρῳ, ὡς ἡ ΕΗΖ, καὶ διήχθω τὸ διὰ τῆς ΕΗΖ ἐπίπεδον· τομὴν δὴ ποιήσει ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιείτω ὡς τὴν ΕΖ· δύο ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΕΗΖ, ΕΖ χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα



PROP. VII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, sumantur autem in utraque ipsarum quælibet puncta; quæ dicta puncta conjungit recta linea in eodem cum parallelis plana erit.

Sint duæ rectæ lineæ parallelæ AB, ΓΔ, & in utraque ipsarum sumantur quælibet puncta E, Z: dico rectam lineam quæ puncta E, Z conjungit in eodem plano esse cum parallelis.

Non enim sit, sed si fieri potest, sit in sublimi ut EHZ, & per EHZ planum ducatur, quod in subjecto plano [per 3. 11.] sectionem faciat rectam lineam. faciat ut EZ: ergo duæ rectæ lineæ EHZ, EZ spatium continebunt, quod [per 12. ax.] fieri non potest: non igitur

tur quæ à puncto E ad Z ducitur recta linea in sublimi est plano: quare erit in eo quod per parallelas AB, ΓΔ transit.

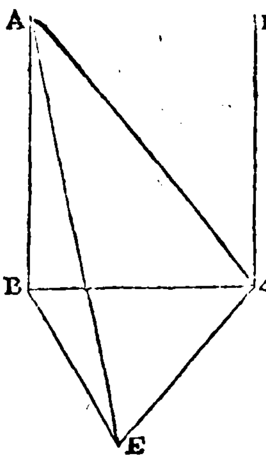
Si igitur duæ rectæ lineæ parallelæ sint, sumantur autem in utraque ipsarum quælibet puncta; quæ dicta puncta conjungit recta linea in eodem cum parallelis plano erit. quod erat demonstrandum.

PROP. VIII. THEOR.

Si fuerint duæ rectæ lineæ parallelæ, atque altera earum plano alicui sit ad rectos angulos; & reliqua quoque eidem plano ad rectos angulos erit.

Sint duæ rectæ lineæ parallelæ AB, ΓΔ, & altera ipsarum AB subjecto plano sit ad rectos angulos: dico & reliquam ΓΔ eidem plano ad rectos angulos esse.

Occurrant enim AB, ΓΔ subjecto plano in punctis B,Δ,& BΔ jungatur: ergo [per 7.11.] AB, ΔΓ, BΔ in uno sunt plano. ducatur ipsi BΔ ad rectos angulos in subjecto plano ΔE, dein ponatur ΔE ipsi AB æqualis, junganturque BE, AE, AΔ. quoniam autem AB perpendicularis est ad subjectum planum, & ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt, atque in subjecto plano sunt [per 3. deff. 11.] perpendicularis erit: rectus igitur est uterque angulorum ABΔ, ABE. quoniam vero in parallelas rectas lineas AB, ΓΔ recta incidit BΔ, erunt anguli ABΔ, ΓΔB [per 29. 1.] duobus rectis æquales. rectus autem est ABΔ: ergo & ΓΔB est rectus; quare ΓΔ perpendicularis est ad BΔ. & quoniam AB est æqualis ΔE, communis autem BΔ, duæ quidem AB, BΔ duabus EΔ, ΔB æquales sunt, & angulus AΔB est æqualis angulo EΔB, rectus enim uterque est; basis igitur AΔ [per 4. 1.] basi BE est æqualis. & quoniam AB æqualis est ΔE, & BE ipsi AΔ, duæ quidem AB, BE duabus EΔ, ΔA erunt æquales, altera alteri, & basis earum communis AE: ergo [per 8. 1.] angulus ABE est æqualis angulo EΔA. rectus autem est ABE; ergo & EΔA est rectus, adeoque EΔ ad ΔA perpendicularis. sed & perpendicularis est ad BΔ: ergo [per 4.11.] EΔ etiam ad planum per BΔ, ΔA perpendicularis erit: & ad omnes rectas lineas quæ in eodem plano ipsam contingunt rectos faciet angulos. at in plano per BA, AΔ est ΔΓ, quia in plano per BΔ, ΔA [per 2.11.] sunt AB, BΔ. in quo autem sunt AB, BΔ [per 7.11.] in eodem est & ipsa ΔΓ: quare EΔ ipsi ΔΓ est ad rectos angulos: ideoque ΓΔ ad rectos angulos est ipsi ΔE. sed & ΓΔ ipsi BΔ: ergo ΓΔ duabus rectis lineis ΔE, ΔB se mutuo secantibus in communi sectione Δ ad rectos angulos insistit; ac propterea ipsa ΓΔ [per 4.11.] plano



ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν μετεώρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· ἐν τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ ἄρα παραλλήλων ἐστὶν ἐπιπέδῳ ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῇ δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα· ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η΄.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ· καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἡ ΑΒ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω ὅτι καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΓΔ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Συμβαλλέτωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΓΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Β, Δ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ· αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ, ΒΔ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. ἤχθω τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ ΔΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ὀρθή ἐστιν ἡ ΑΒ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΒΕ γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθείας ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΔ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΔ, ΓΔΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΒ· ἡ ΓΔ ἄρα πρὸς τὴν ΒΔ ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΔ· δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΔ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΒ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΒ ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΕ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΑΔ· δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΕ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΑ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΑΕ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΑ ἐστὶν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΔΑ· ἡ ΕΔ ἄρα πρὸς τὴν ΑΔ ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ πρὸς τὴν ΒΔ ὀρθή· ἡ ΕΔ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστι· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἡ ΕΔ. ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν ΒΑ, ΑΔ ἐπιπέδῳ ἐστὶν ἡ ΔΓ, ἐπειδήπερ ἐν τῷ διὰ τῶν ΒΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ εἰσὶν αἱ ΑΒ, ΒΔ. ἐν ᾧ δὲ αἱ ΑΒ, ΒΔ ἐν τούτῳ ἐστὶ καὶ ἡ ΔΓ· ἡ ΕΔ ἄρα τῇ ΔΓ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ὥστε καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΒΔ· ἡ ΓΔ ἄρα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας ταῖς ΔΕ, ΔΒ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Δ τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν· ὥστε καὶ ἡ ΓΔ καὶ τῷ

διὰ

διὰ τῶν Δ Ε, Δ Β ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι· τὸ δὲ διὰ τῶν Δ Ε, Δ Β ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενόν ἐστι· ἡ Γ Δ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

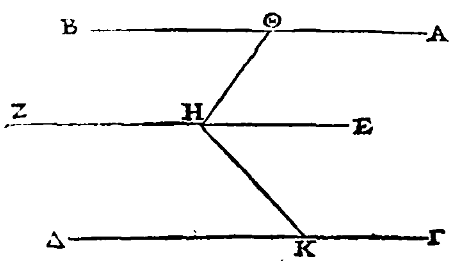
per Δ E, Δ B est ad rectos angulos. planum autem per Δ E, Δ B est subjectum planum: ergo Γ Δ subjecto plano ad rectos angulos erit. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, καὶ μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἔστω γὰρ ἑκατέρα τῶν Α Β, Γ Δ παράλληλος τῇ Ε Ζ, μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ Α Β τῇ Γ Δ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς Ε Ζ τυχὸν σημεῖον τὸ Η, καὶ ἀπ' αὐτοῦ τῇ Ε Ζ ἐν μὲν τῷ διὰ τῶν Ε Ζ, Α Β ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ Η Θ, ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν Ζ Ε, Γ Δ τῇ Ε Ζ πάλιν πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ Η Κ. καὶ ἐπεὶ ἡ Ε Ζ πρὸς ἑκατέραν τῶν Η Θ, Η Κ ὀρθή ἐστιν, ἡ Ε Ζ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν Η Θ, Η Κ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. καί ἐστιν ἡ Ε Ζ τῇ Α Β παράλληλος· καὶ ἡ Α Β ἄρα τῷ διὰ τῶν Θ, Η, Κ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ Γ Δ τῷ διὰ τῶν Θ, Η, Κ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ἑκατέρα ἄρα τῶν Α Β, Γ Δ τῷ διὰ τῶν Θ, Η, Κ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι, παράλληλοί εἰσιν αἱ εὐθεῖαι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ Α Β τῇ Γ Δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



PROP. IX. THEOR.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano, etiam inter se parallelæ sunt.

SIT enim utraque ipsarum A B, Γ Δ parallela rectæ E Z, non jacentes vero in eodem cum ipsa plano: dico A B ipsi Γ Δ parallelam esse.

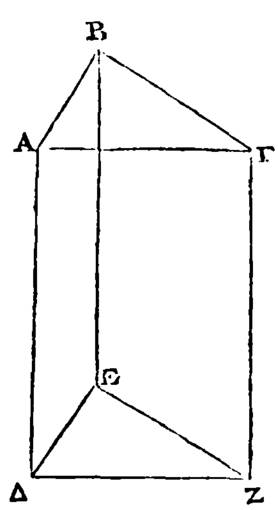
Sumatur in E Z quodvis punctum H, à quo ipsi E Z in plano quidem per E Z, A B transeunte ad rectos angulos ducatur H Θ; in plano autem transeunte per Z E, Γ Δ rursus ducatur ipsi E Z ad rectos angulos H K. quoniam ergo E Z ad utramque ipsarum H Θ, H K est perpendicularis, erit E Z [per 4. 11.] etiam ad rectos angulos plano per H Θ, H K transeunte. atque E Z ipsi A B parallela est: ergo [per 8. 11.] & A B plano per Θ, H, K ad rectos angulos est. eadem ratione & Γ Δ plano per Θ, H, K est ad rectos angulos: utraque igitur ipsarum A B, Γ Δ plano per Θ, H, K ad rectos angulos erit. si autem duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint [per 6. 11.] parallelæ erunt inter sese: ergo A B ipsi Γ Δ parallela est. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· ἴσας γωνίας περιέξουσι.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ Α Β, Β Γ παρὰ δύο εὐθείας τὰς Δ Ε, Ε Ζ ἁπτομένας ἀλλήλων ἔστωσαν, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ Α Β Γ γωνία τῇ ὑπὸ Δ Ε Ζ.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ Β Α, Β Γ, Ε Δ, Ε Ζ ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Α Δ, Γ Ζ, Β Ε, Α Γ, Δ Ζ. καὶ ἐπεὶ ἡ Β Α τῇ Ε Δ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, * καὶ ἡ Α Δ ἄρα τῇ Β Ε ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ Γ Ζ τῇ Β Ε ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος· ἑκατέρα ἄρα τῶν Α Δ, Γ Ζ τῇ Β Ε ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. αἱ δὲ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ Α Δ τῇ Γ Ζ καὶ ἴση. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ Α Γ, Δ Ζ· καὶ ἡ Α Γ



PROP. X. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; illæ æquales angulos continebunt.

DUÆ enim rectæ lineæ sese tangentes A B, B Γ duabus rectis lineis Δ E, E Z sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano: dico angulum A B Γ angulo Δ E Z æqualem esse.

Assumantur enim B A, B Γ, E Δ, E Z inter se æquales; & jungantur A Δ, Γ Z, B E, A Γ, Δ Z. quoniam igitur B A ipsi E Δ æqualis est & parallela, erit [per 33. 1.] & A Δ æqualis & parallela ipsi B E. eadem ratione & Γ Z ipsi B E æqualis & parallela erit: utraque igitur ipsarum A Δ, Γ Z ipsi B E æqualis est & parallela. quæ autem eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, [per 9. 11.] & inter se parallelæ erunt: ergo A Δ parallela est ipsi Γ Z & æqualis. & ipsas conjungunt rectæ A Γ, Δ Z; quare

* Illa καὶ ἡ Α Δ ἄρα τῇ Β Ε ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος supplevimus ex *Codd. MSS.*

ΑΓ ipsi ΔΖ æqualis est & parallela. & quoniam duæ rectæ lineæ ΑΒ, ΒΓ duabus ΔΕ, ΕΖ æquales sunt, & basis ΑΓ æqualis est basi ΔΖ; erit [per 8. 1.] angulus ΑΒΓ angulo ΔΕΖ æqualis.

Si igitur duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; illæ æquales angulos continebunt. quod erat demonstrandum.

ἄρα τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XI. Probl.

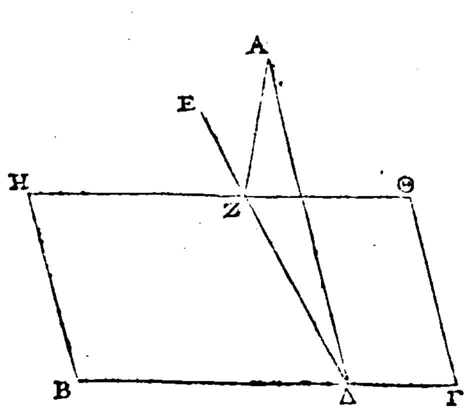
A dato puncto in sublimi ad subjectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιαʹ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου μετεώρου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

SIT datum quidem punctum in sublimi Α, datum autem planum illud quod subjectum est: oportet à puncto Α ad subjectum planum perpendicularem rectam ducere.

In subjecto plano ducatur quædam recta linea utcunque ΒΓ,& [per 12.1.] à puncto Α ad ΒΓ perpendicularis agatur ΑΔ. si igitur ΑΔ sit etiam perpendicularis ad subjectum planum; factum jam erit,quod proponebatur: sin minus,ducatur [per 11. 1.] à puncto Δ ipsi ΒΓ in subjecto plano ad rectos angulos ΔΕ; & [per 12.1.] à puncto Α ad ΔΕ perpendicularis ducatur ΑΖ; denique per Ζ ducatur ΗΘ ipsi ΒΓ parallela.



Et quoniam ΒΓ utrique ipsarum ΔΑ, ΔΕ est ad rectos angulos, erit [per 4. 11.] & ΒΓ ad rectos angulos plano per ΕΔ, ΔΑ transeunti, atque est ipsi parallela ΗΘ. si vero sint duæ rectæ lineæ parallelæ, quarum una plano alicui sit ad rectos angulos; & reliqua [per 8. 11.] eidem plano ad rectos angulos erit: quare & ΗΘ plano per ΕΔ, ΔΑ transeunti ad rectos angulos est: ac propterea [per 3.def.11.] ad omnes rectas lineas, quæ in eodem plano existentes ipsam contingunt, est perpendicularis. ipsam autem ΗΘ contingit recta ΑΖ existens in plano per ΕΔ, ΔΑ: ergo ΗΘ perpendicularis est ad ΖΑ: & ob id ΖΑ est perpendicularis ad ΗΘ. est autem[per constr.]& ΑΖ ad ΔΕ perpendicularis: ergo ΑΖ perpendicularis est ad utramque ipsarum ΗΘ, ΔΕ. si autem recta linea duabus rectis lineis sese contingentibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, [per 4.11.] etiam plano per ipsas ducto ad rectos angulos erit: quare ΖΑ plano per ΕΔ, ΗΘ ducto est ad rectos angulos. planum autem per ΕΔ, ΗΘ est subjectum planum; ergo ΑΖ ad subjectum planum est perpendicularis.

A dato igitur puncto sublimi Α ad subjectum planum perpendicularis recta linea ducta est ΑΖ. quod erat faciendum.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον μετέωρον τὸ Α, τὸ δὲ δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ συγκείμενον ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Διήχθω γάρ τις ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ὡς ἔτυχεν ἡ ΒΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ. εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΔ κάθετός ἐστι, καὶ ἐπὶ τὸ συγκείμενον ἐπίπεδον, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· εἰ δὲ οὐ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῇ ΒΓ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετος ἡ ΑΖ, καὶ διὰ τοῦ Ζ σημείου τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΓ ἑκατέρᾳ τῶν ΔΑ, ΔΕ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἡ ΒΓ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΕΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ ἔστιν αὐτῇ παράλληλος ἡ ΗΘ. ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· καὶ ἡ ΗΘ ἄρα, τῷ διὰ τῶν ΕΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν ΕΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ, ὀρθή ἐστιν ἡ ΗΘ. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΑΖ οὖσα ἐν τῷ διὰ τῶν ΕΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ· ἡ ΗΘ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν ΖΑ· ὥστε καὶ ἡ ΖΑ ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν ΗΘ. ἔστι δὲ ἡ ΑΖ καὶ πρὸς τὴν ΔΕ ὀρθή· ἡ ΑΖ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΗΘ, ΔΕ ὀρθή ἐστιν. ἐὰν δὲ εὐθεῖα δυσὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων ἐπὶ τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ἡ ΖΑ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΕΔ, ΗΘ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. τὸ δὲ διὰ τῶν ΕΔ, ΗΘ ἐπίπεδόν ἐστι τὸ ὑποκείμενον· ἡ ΑΖ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου μετεώρου τοῦ Α ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΑΖ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον, τὸ δὲ πρὸς αὐτῷ σημεῖον τὸ Α· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι.

Νενοήσθω τὸ σημεῖον μετέωρον τὸ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΔ.

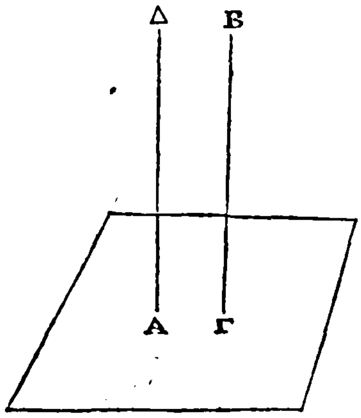
Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν αἱ ΑΔ, ΓΒ, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἡ ΒΓ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι.

Τῷ ἄρα δοθέντι ἐπιπέδῳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα γραμμὴ ἀνέσταται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XII. Probl.

Dato plano, à puncto quod in ipso datum est, ad rectos angulos rectam lineam constituere.

SIT datum quidem planum subjectum, punctum autem quod in ipso sit A: oportet à puncto A subjecto plano ad rectos angulos rectam lineam constituere.



Intelligatur aliquod punctum sublime B, à quo [per 11. 11.] ad subjectum planum agatur perpendicularis BΓ; & [per 31. 1.] per A ipsi BΓ parallela ducatur AΔ.

Quoniam igitur duæ rectæ lineæ parallelæ sunt AΔ, ΓB, una autem ipsarum BΓ subjecto plano est ad rectos angulos; & reliqua AΔ [per 8.11.] subjecto plano ad rectos angulos erit.

Dato igitur plano, à puncto quod in ipso datum est, ad rectos angulos recta linea constituta est. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

* Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου, δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς οὐκ ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

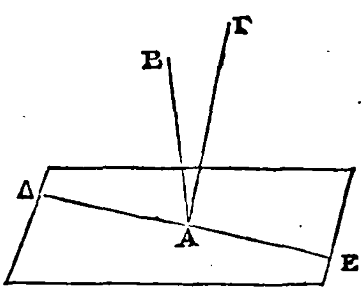
Εἰ γὰρ δυνατὸν, τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου τοῦ Α δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάθωσαν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ διήχθω τὸ διὰ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐπίπεδον, τομὴν δὴ ποιήσει διὰ τοῦ Α ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιείτω τὴν ΔΑΕ· αἱ ἄρα ΑΒ, ΑΓ, ΔΑΕ εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΑ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΔΑΕ οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΓΑΕ γωνία ὀρθή ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ ὀρθή ἐστιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΑΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ, καί εἰσιν ἐν τῷ ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου, δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XIII. Probl.

Dato plano, à puncto quod in ipso est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non constituentur ab eadem parte.

SI enim fieri possit, dato plano, à puncto A quod in ipso est, duæ rectæ lineæ AB, AΓ ad rectos angulos constituantur ab eadem parte; & ducatur planum per BA, AΓ, quod [per 3.11.] faciet sectionem per A in subjecto plano rectam lineam. faciat ΔAE: ergo rectæ lineæ AB, AΓ, ΔAE in uno sunt plano. quoniam vero ΓA subjecto plano ad rectos angulos est, [per 3. deff. 11.] & ad omnes rectas lineas, quæ in subjecto plano existentes ipsam contingunt, rectos faciet angulos. ipsam autem ΓA contingit recta ΔAE, in subjecto plano existens: angulus igitur ΓAE est rectus. eadem ratione & BAE est rectus: ergo angulus ΓAE ipsi BAE est æqualis, & in uno sunt plano, quod [per 9.ax.] fieri non potest.



Non igitur dato plano, à puncto quod in ipso est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos constituentur ab eadem parte. quod erat demonstrandum.

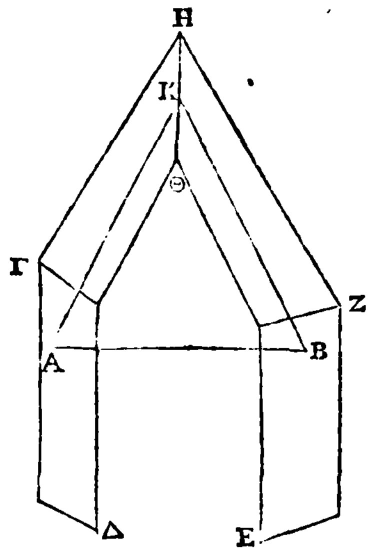
* Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι &c. melius in Codd. MSS.

Prop. XIV. Theor.

Ad quæ plana eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt.

Recta enim linea quædam AB ad utrumque ipsorum planorum ΓΔ, EZ sit perpendicularis: dico ea plana parallela esse.

Si enim non ita sit, producta convenient inter se conveniant, facient autem [per 3.11.] communem sectionem rectam lineam. faciant HΘ; & in ipsa HΘ, sumpto quovis puncto K, jungantur AK, BK. quoniam igitur AB recta est ad planum EZ, erit [per 3. def. 11.] & perpendicularis ad ipsam BK, rectam in plano EZ producto existentem: quare angulus ABK rectus est. eadem ratione & BAK est rectus; ideoque trianguli ABK duo anguli ABK, BAK duobus rectis sunt æquales; quod [per 17. 1.] fieri non potest: non igitur plana ΓΔ, EZ producta inter se convenient: parallela igitur sunt plana ΓΔ, EZ.



Ad quæ igitur plana eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστι, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΓΔ, ΕΖ ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω ὅτι παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα.

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. συμπιπτέτωσαν· ποιήσουσι δὴ κοινὴν τομὴν εὐθεῖαν. ποιείτωσαν τὴν ΗΘ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΗΘ τυχὸν σημεῖον τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΒΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ΕΖ ἐπίπεδον, καὶ πρὸς τὴν ΒΚ ἄρα εὐθεῖαν οὖσαν ἐν τῷ ΕΖ ἐκβεβλημένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ ΑΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΚ γωνία ὀρθή ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΚ ὀρθή ἐστι, τριγώνου δὴ τοῦ ΑΒΚ αἱ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΚ, ΒΑΚ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὰ ΓΔ, ΕΖ ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται· παράλληλα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΔ, ΕΖ ἐπίπεδα.

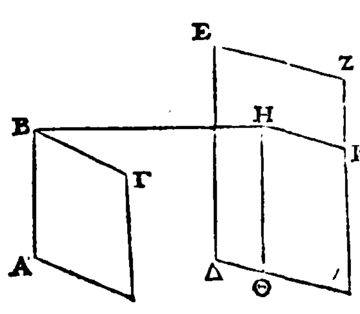
Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἄρα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστι, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XV. Theor.

Si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; & quæ per ipsas transeunt plana parallela erunt.

Duæ enim rectæ lineæ sese tangentes AB, BΓ duabus rectis lineis sese tangentibus ΔE, EZ parallelæ sint, & non in eodem plano: dico plana quæ per AB, BΓ, ΔE, EZ transeunt, si producantur, inter se non convenire.

Ducatur enim [per 11.11.] à puncto B ad planum quod per ΔE, EZ transit perpendicularis BH, quæ plano in puncto H occurrat; & per H [per 31.1.] ducatur ipsi quidem EΔ parallela HΘ, ipsi vero EZ parallela HK. itaque quoniam BH perpendicularis est ad planum per ΔE, EZ, & [per 3. def. 11.] ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt, & in eodem sunt plano, rectos faciet angulos. contingit autem illam utraque ipsarum HΘ, HK, quæ sunt in plano per ΔE, EZ: rectus igitur est uterque angulorum BHΘ,



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων παράλληλοι ὦσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι· παράλληλά ἐστι τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΑΒ, ΒΓ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΔΕ, ΕΖ ἔστωσαν, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι· λέγω ὅτι ἐκβαλλόμενα τὰ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ ἐπίπεδα οὐ συμπεσεῖται ἀλλήλοις.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΒΗ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Η σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ Η τῇ μὲν ΕΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ, τῇ δὲ ΕΖ ἡ ΗΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΗ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκατέρα τῶν ΗΘ, ΗΚ οὖσα ἐν τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΗΘ, ΒΗΚ γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΒΑ τῇ ΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΗΒΑ, ΒΗΘ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΗΒΑ· ἡ ΗΒ ἄρα τῇ ΒΑ πρὸς ὀρθάς ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΒΗ καὶ τῇ ΒΓ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΒΗ δυσὶν εὐθείαις ταῖς ΒΑ, ΒΓ τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν, ἡ ΒΗ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΑ, ΒΓ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. [* διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΒΗ καὶ τῷ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. τὸ δὲ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΚ ἐπίπεδόν ἐστι τὸ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ· ἡ ΒΗ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. ἐδείχθη δὲ ἡ ΒΗ καὶ τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς.] ἔστι δὲ καὶ τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδῳ ὀρθή· ἡ ΒΗ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδων ὀρθή ἐστι. πρὸς ἃ δὲ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστι, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα· παράλληλον ἄρα ἐστὶ τὸ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπίπεδον τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, παράλληλά ἐστι τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

BHK. & quoniam BA parallela est ipsi HΘ, [per 29. 1.] anguli HBA, BHΘ duobus rectis sunt æquales. rectus autem est BHΘ: ergo & HBA rectus erit; ideoque HB ad BA est perpendicularis. eadem ratione & BH est perpendicularis ad BΓ. quoniam igitur recta linea BH duabus rectis lineis BA, BΓ se invicem secantibus ad rectos angulos insistit, erit [per 4. 11.] BH etiam ad planum per AB, BΓ ductum perpendicularis. * [& ob eandem causam BH est perpendicularis ad planum per HΘ, HK. sed planum per HΘ, HK est illud, quod per ΔE, EZ transit: quare BH ad planum quod transit per ΔE, EZ est perpendicularis. ostensa autem est BH etiam perpendicularis ad planum per AB, BΓ.] atque est ad planum per ΔE, EZ perpendicularis: ergo BH perpendicularis est ad utrumque planorum quæ per AB, BΓ, ΔE, EZ transeunt. ad quæ vero plana eadem recta linea est perpendicularis [per 14. 11.] ea parallela sunt: parallelum igitur est planum per AB, BΓ plano per ΔE, EZ.

Quare si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; & quæ per ipsas transeunt plana parallela erunt. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

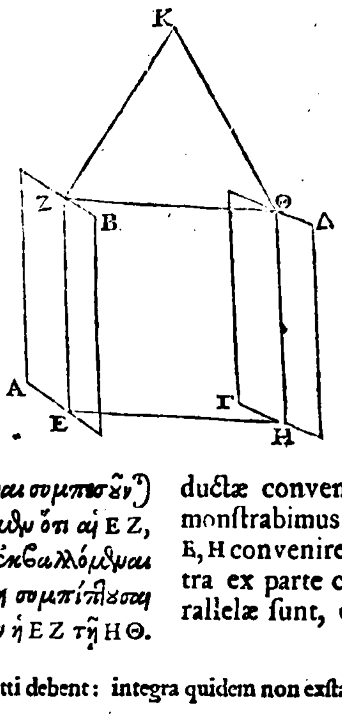
Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέμνηται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι.

Prop. XVI. Theor.

Si duo plana parallela ab aliquo plano secentur, communes ipsorum sectiones sunt etiam parallelæ.

ΔΥΟ γὰρ ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΕΖΗΘ τεμνέσθω, κοιναὶ δὲ αὐτῶν τομαὶ ἔστωσαν αἱ ΕΖ, ΗΘ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΗΘ.

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται αἱ ΕΖ, ΗΘ, ἤτοι ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ Ε, Η. ἐκβεβλήσθω πρότερον ὡς ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΖΚ ἐν τῷ ΑΒ ἐστὶν ἐπιπέδῳ, καὶ πάντα ἄρα τὰ ἐπὶ τῆς ΕΖΚ σημεῖα ἐν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ ἐστίν. ἓν δὲ τῶν ἐπὶ τῆς ΕΖΚ εὐθείας σημεῖόν ἐστι τὸ Κ· τὸ Κ ἄρα ἐν τῷ ΑΒ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ Κ καὶ ἐν τῷ ΓΔ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· τὰ ΑΒ, ΓΔ ἄρα ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. οὐ συμπίπτουσι δέ, διὰ τὸ παράλληλα ὑποκεῖσθαι· οὐκ ἄρα αἱ ΕΖ, ΗΘ εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι αἱ ΕΖ, ΗΘ εὐθεῖαι οὐδὲ ἐπὶ τὰ Ε, Η μέρη ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα μέρη συμπίπτουσαι παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΗΘ.



DUO enim plana parallela AB, ΓΔ à plano aliquo EZHΘ secentur, communes autem ipsorum sectiones sint EZ, HΘ: dico EZ ipsi HΘ parallelam esse.

Si enim non est parallela, productæ EZ, HΘ inter se convenient, vel ad partes Z, Θ, vel ad partes E, H. producantur prius, ut ad partes Z, Θ, & conveniant in K. quoniam igitur EZK est in plano AB, & omnia quæ in EZK sumuntur puncta in eodem plano erunt. unum autem punctorum quæ sunt in EZK est ipsum K punctum: ergo K est in plano AB. eadem ratione & K est in ΓΔ plano: ergo plana AB, ΓΔ producta inter se convenient. non conveniunt autem, cum parallela ponantur: non igitur EZ, HΘ rectæ lineæ productæ convenient ad partes Z, Θ. similiter demonstrabimus neque rectas EZ, HΘ ad partes E, H convenire, si producantur. quæ autem neutra ex parte conveniunt [per 35. def. 1.] parallelæ sunt, ergo EZ ipsi HΘ est parallela.

* Illa uncis inclusa omitti debent: integra quidem non exstant in *Codd. MSS.*

Si igitur duo plana parallela ab aliquo plano secentur, communes ipsorum sectiones parallelæ erunt. quod erat demonstrandum.

Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέμνηται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XVII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ à parallelis planis secentur, in eadem ratione secabuntur.

DUÆ enim rectæ lineæ ΑΒ, ΓΔ à parallelis planis ΗΘ, ΚΛ, ΜΝ secentur in punctis Α, Ε, Β, Γ, Ζ, Δ: dico ut ΑΕ recta linea ad ipsam ΕΒ ita esse ΓΖ ad ΖΔ.

Jungantur enim ΑΓ, ΒΔ, ΑΔ, & occurrat ΑΔ plano ΚΛ in puncto Ξ, & ΕΞ, ΞΖ jungantur. quoniam igitur duo plana parallela ΚΛ, ΜΝ à plano ΕΒΔΞ secantur, [per 16.11.] communes ipsorum sectiones ΕΞ, ΒΔ parallelæ sunt. eadem ratione quoniam duo plana parallela ΗΘ, ΚΛ à plano ΑΞΖΓ secantur, communes ipsorum sectiones ΑΓ, ΖΞ sunt parallelæ. quoniam autem uni laterum trianguli ΑΒΔ, videlicet ipsi ΒΔ, parallela ducta est ΕΞ, [per 2. 6.] ut ΑΕ ad ΕΒ ita erit ΑΞ ad ΞΔ. rursus quoniam uni laterum trianguli ΑΔΓ, nempe ipsi ΑΓ, parallela ducta est ΞΖ, erit ut ΑΞ ad ΞΔ ita ΓΖ ad ΖΔ. ostensum autem est & ut ΑΞ ad ΞΔ ita esse ΑΕ ad ΕΒ: erit igitur [per 11. 5.] ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad ΖΔ.

Quare si duæ rectæ lineæ à parallelis planis secentur, in eadem ratione secabuntur. quod erat demonstrandum.

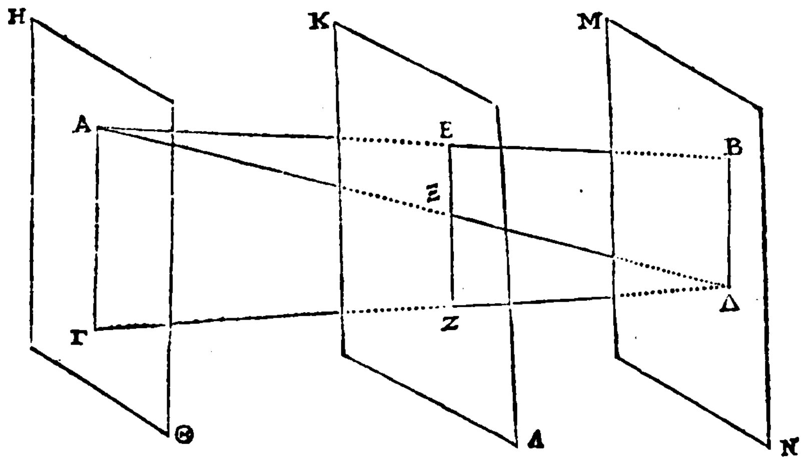
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται.

ΔΥΟ γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΗΘ, ΚΛ, ΜΝ τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ Α, Ε, Β, Γ, Ζ, Δ σημεῖα· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΔ, ΑΔ, καὶ συμβαλλέτω ἡ ΑΔ τῷ ΚΛ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ξ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΞ, ΞΖ. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΚΛ, ΜΝ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΕΒΔΞ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ΕΞ, ΒΔ παράλληλοί εἰσι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΗΘ, ΚΛ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΞΖΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ΑΓ, ΖΞ παράλληλοί εἰσι. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΔ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΔ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΕΞ, ἀνάλογον ἄρα ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΑΞ πρὸς τὴν ΞΔ. πάλιν ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΔΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΑΓ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΞΖ, ἀνάλογον ἄρα ὡς ἡ ΑΞ πρὸς τὴν ΞΔ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΞ πρὸς τὴν ΞΔ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



PROP. XVIII. THEOR.

Si recta linea plano alicui sit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipsam transeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

RECta enim linea quædam ΑΒ subjecto plano sit ad rectos angulos: dico & omnia plana, quæ per ipsam ΑΒ transeunt, subjecto plano ad rectos angulos esse.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

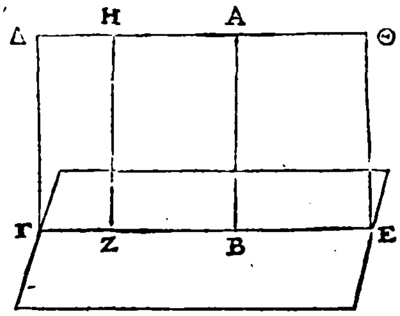
Ἐὰν εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

ΕΥΘΕΙΑ γάρ τις ἡ ΑΒ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω ὅτι καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι.

Ἐκβε-

Ἐκβεβλήσθω γὰρ διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδον τὸ ΔΕ, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τοῦ ΔΕ ἐπιπέδου καὶ τοῦ ὑποκειμένου ἡ ΓΕ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΓΕ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ τῇ ΓΕ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ ΔΕ ἐπιπέδῳ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθή ἐστι, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ ΑΒ· ὥστε καὶ πρὸς τὴν ΓΕ ὀρθή ἐστιν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΖ γωνία ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΗΖΒ ὀρθή· παράλληλος ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΖΗ. ἡ δὲ ΑΒ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι· καὶ ἡ ΖΗ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. καὶ ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῇ ΓΕ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ ΖΗ ἐδείχθη τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς· τὸ ἄρα ΔΕ ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδα ὀρθὰ τυγχάνοντα πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Producatur enim per rectam AB planum ΔE, sitque plani ΔB & subjecti plani communis sectio recta ΓE; & sumatur in ΓE quodvis punctum Z, à quo ipsi ΓE ad rectos angulos in ΔE plano ducatur ZH. quoniam igitur recta AB ad subjectum planum est perpendicularis; & [per 3. def. 11.] ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt & in subjecto plano jacent perpendicularis erit: quare etiam ad ΓE est perpendicularis: angulus igitur ABZ rectus est. sed & HZB est rectus: ergo [per 28. 1.] AB parallela est ipsi ZH. est autem AB subjecto plano ad rectos angulos: quare [per 8. 11.] etiam ZH eidem plano ad rectos angulos erit. at [per 4. def. 11.] planum ad planum rectum est, quando communi planorum sectioni ad rectos angulos ductæ in uno plano rectæ lineæ reliquo plano ad rectos angulos sunt; communi ergo planorum sectioni ΓE in uno plano ΔE ad rectos angulos ducta ZH ostensa est subjecto plano ad rectos angulos esse: ergo planum ΔE rectum est ad subjectum planum. similiter demonstrabuntur & omnia quæ per AB transeunt plana subjecto plano recta esse.

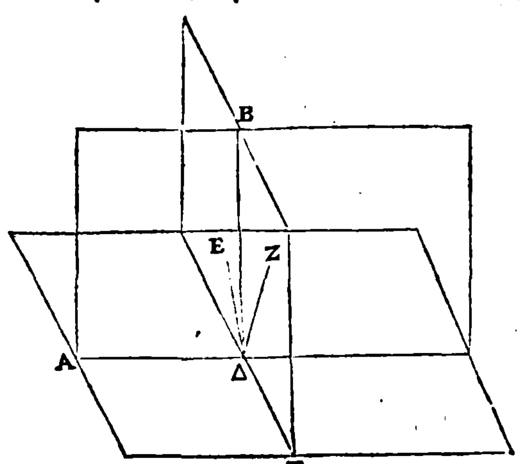
Si igitur recta linea plano alicui sit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipsam transeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθʹ.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ ΑΒ, ΒΓ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι ἡ ΒΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Μὴ γάρ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐν μὲν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ τῇ ΑΔ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ, ἐν δὲ τῷ ΒΓ ἐπιπέδῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΒ ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον, καὶ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ ἦκται ἡ ΔΕ· ἡ ΔΕ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΔΖ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ



PROP. XIX. THEOR.

Si duo plana se invicem secantia plano alicui sint ad rectos angulos, communis ipsorum sectio eidem plano ad rectos angulos erit.

DUO enim plana se invicem secantia AB, BΓ subjecto plano sint ad rectos angulos, communis autem ipsorum sectio sit BΔ: dico rectam BΔ subjecto plano ad rectos angulos esse.

Non enim sit, atque [per 11. 1.] à puncto Δ ducatur in plano quidem AB rectæ lineæ AΔ ad rectos angulos ipsa ΔE; in plano autem BΓ ducatur ipsi ΓΔ ad rectos angulos ΔZ. quoniam ergo planum AB ad subjectum planum rectum est, & communi ipsorum sectioni AΔ ad rectos angulos in plano AB ducta est ΔE; erit ΔE ad subjectum planum perpendicularis. similiter ostendemus & ΔZ perpendicularem esse ad subjectum planum: quare ab eodem puncto Δ subjecto plano duæ rectæ lineæ ad rectos angulos constitutæ sunt ex eadem parte, quod [per 13.11.] fieri non potest: non igitur subjecto plano à puncto Δ ad rectos angulos constituentur aliæ rectæ lineæ, præter ipsam ΔB communem planorum AB, BΓ sectionem.

Ergo si duo plana se invicem secantia plano alicui sint ad rectos angulos, & communis ipsorum sectio eidem plano ad rectos angulos erit. quod erat demonstrandum.

ἄρα σημείου τοῦ Δ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀνεσταμέναι εἰσὶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου πρὸς ὀρθὰς ἀνασταθήσεται πλὴν τῆς ΔB κοινῆς τομῆς τῶν AB, BΓ ἐπιπέδων.

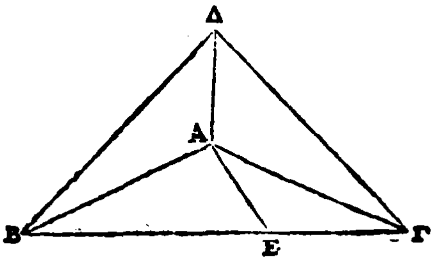
Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XX. Theor.

Si solidus angulus sub tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo majores sunt quomodocunque sumpti.

Solidus enim angulus ad A sub tribus angulis planis BAΓ, ΓAΔ, ΔAB contineatur: dico angulorum BAΓ, ΓAΔ, ΔAB duos quoslibet reliquo majores esse quomodocunque sumptos.

Si enim BAΓ, ΓAΔ, ΔAB anguli inter se æquales sint, perspicuum est duos quoslibet reliquo majores esse quomodocunque sumptos. sin aliter, sit major BAΓ, & ad rectam lineam AB & ad punctum in ipsa A [per 23. 1.] constituatur angulo ΔAB in plano per BAΓ transeunte æqualis angulus BAE; ponaturque [per 3. 1.] ipsi AΔ æqualis AE; dein per E ducta BEΓ secet rectas lineas AB, AΓ in punctis B, Γ; & ΔB, ΔΓ jungantur. itaque quoniam ΔA est æqualis AE, communis autem AB, duæ ΔA, AB duabus AE, AB æquales sunt. & angulus ΔAB æqualis est angulo BAE; basis igitur ΔB [per 4.1.] basi BE est æqualis. & quoniam duæ ΔB, ΔΓ ipsa BΓ majores sunt, ex quibus ΔB æqualis ostensa est ipsi BE; erit reliqua ΔΓ quam reliqua EΓ major. quoniam autem ΔA est æqualis AE, communis autem AΓ, & basis ΔΓ major basi EΓ; erit [per 25. 1.] angulus ΔAΓ angulo EAΓ major. ostensus autem est & ΔAB angulus æqualis ipsi BAE: quare ΔAB, ΔAΓ anguli angulo BAΓ majores sunt. similiter quoque demonstrabimus, si duo quilibet alii sumantur, eos reliquo esse majores.



Si igitur solidus angulus sub tribus angulis planis contineatur; duo quilibet reliquo majores sunt quomodocunque sumpti. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐὰν στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχηται, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Στερεὰ γὰρ γωνία ἡ πρὸς τῷ A ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ BAΓ, ΓAΔ, ΔAB περιεχέσθω· λέγω ὅτι τῶν ὑπὸ BAΓ, ΓAΔ, ΔAB γωνιῶν δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ BAΓ, ΓAΔ, ΔAB γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, φανερὸν ὅτι δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. εἰ δὲ οὔ, ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ BAΓ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ ὑπὸ ΔAB γωνίᾳ ἐν τῷ διὰ τῶν BAΓ ἐπιπέδῳ ἴση ἡ ὑπὸ BAE, καὶ κείσθω τῇ AΔ ἴση ἡ AE, καὶ διὰ τοῦ E σημείου διαχθεῖσα ἡ BEΓ τεμνέτω τὰς AB, AΓ εὐθείας, κατὰ τὰ B, Γ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔB, ΔΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔA τῇ AE, κοινὴ δὲ ἡ AB, δύο δὴ ΔA, AB δυσὶν AE, AB ἴσαι, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔAB γωνίᾳ τῇ ὑπὸ BAE ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔB βάσει τῇ BE ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΔB, ΔΓ τῆς BΓ μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ ΔB τῇ BE ἐδείχθη ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΓ λοιπῆς τῆς EΓ μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔA τῇ AE, κοινὴ δὲ ἡ AΓ, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσεως τῆς EΓ μείζων ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔAΓ γωνίας τῆς ὑπὸ EAΓ μείζων ἐστίν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΔAB τῇ ὑπὸ BAE ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔAB, ΔAΓ τῆς ὑπὸ BAΓ μείζονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ σύνδυο λαμβανόμεναι τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν.

Ἐὰν ἄρα στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχηται, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXI. Theor.

Omnis solidus angulus sub minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur.

Sit solidus angulus ad A sub planis angulis BAΓ, ΓAΔ, ΔAB contentus: dico angulos

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

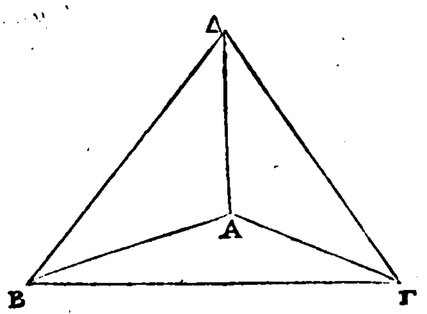
Ἅπασα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται.

Ἔστω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ A περιεχομένη ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν ὑπὸ BAΓ, ΓAΔ, ΔAB· λέγω ὅτι

ὅτι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν.

Εἰλήφθω γὰρ ἐφ' ἑκάστης τῶν ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ τυχόντα σημεῖα τὰ Β, Γ, Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΓ, ΓΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Β ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΓΒΔ, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ τῆς ὑπὸ ΓΒΔ μείζονές εἰσι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ μὲν ὑπὸ ΒΓΑ, ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΓΔ μείζονές εἰσι, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΓΔΑ, ΑΔΒ τῆς ὑπὸ ΓΔΒ μείζονές εἰσιν· αἱ ἓξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΑΔΓ, ΑΔΒ τριῶν τῶν ὑπὸ ΓΒΔ, ΒΓΔ, ΓΔΒ μείζονές εἰσιν. ἀλλ' αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ ΓΒΔ, ΒΓΔ, ΓΔΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἓξ ἄρα αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΑΔΓ, ΑΔΒ δύο ὀρθῶν μείζονές εἰσι. καὶ ἐπεὶ ἑκάστου τῶν ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΒ τριγώνων αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, αἱ ἄρα τῶν τριῶν τριγώνων ἐννέα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΓΒ, ΒΑΓ, ΑΓΔ, ΔΑΓ, ΓΔΑ, ΑΔΒ, ΔΒΑ, ΒΑΔ ἓξ ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὧν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ, ΔΒΑ ἓξ γωνίαι δύο ὀρθῶν μείζονές εἰσι· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ τρεῖς γωνίαι περιέχουσαι τὴν στερεὰν γωνίαν τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν.

Ἅπασα ἄρα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



BAΓ, ΓAΔ, ΔAB quatuor rectis esse minores.

Sumantur enim in unaquaque ipsarum AB, AΓ, AΔ quævis puncta B, Γ, Δ, & BΓ, ΓΔ, ΔB jungantur. quoniam igitur solidus angulus ad B continetur sub tribus angulis planis ΓBA, ABΔ, ΓBΔ, [per 20. 11.] duo quilibet reliquo majores sunt: anguli igitur ΓBA, ABΔ angulo ΓBΔ sunt majores. eadem ratione & anguli quidem BΓA, AΓΔ majores sunt angulo BΓΔ; & adhuc anguli ΓΔA, AΔB majores angulo ΓΔB: quare sex anguli ΓBA, ABΔ, BΓA, AΓΔ, AΔΓ, AΔB tribus angulis ΓBΔ, BΓΔ, ΓΔB sunt majores. sed tres anguli ΓBΔ, BΓΔ, ΓΔB [per 32. 1.] sunt æquales duobus rectis: sex igitur anguli ΓBA, ABΔ, BΓA, AΓΔ, AΔΓ, AΔB duobus rectis majores sunt. quoniam vero singulorum triangulorum ABΓ, AΓΔ, AΔB tres anguli sunt æquales duobus rectis, trium triangulorum novem anguli ΓBA, AΓB, BAΓ, AΓΔ, ΔAΓ, ΓΔA, AΔB, ΔBA, BAΔ sunt æquales sex rectis, ex quibus sex anguli ABΓ, BΓA, AΓΔ, ΓΔA, AΔB, ΔBA duobus rectis sunt majores: reliqui igitur tres anguli BAΓ, ΓAΔ, ΔAB, qui solidum continent angulum, quatuor rectis minores erunt.

Quare omnis solidus angulus sub minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

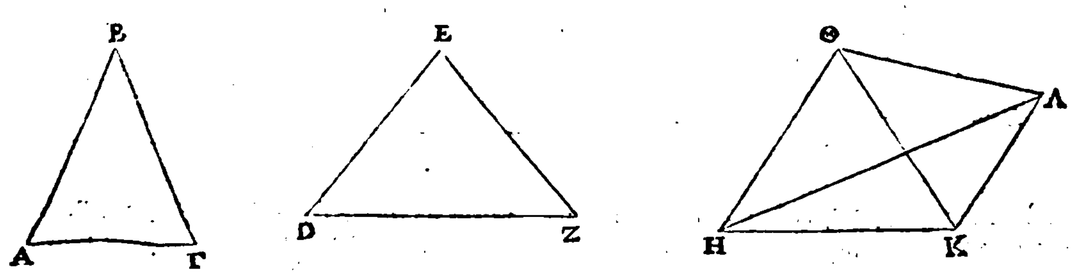
Ἐὰν ὦσι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι· δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς ἴσας εὐθείας τρίγωνον συστήσασθαι.

Ἔστωσαν τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ τῆς ὑπὸ ΗΘΚ, αἱ δὲ ὑπὸ ΔΕΖ, ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΗΘΚ, ΑΒΓ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ, καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ,

PROP. XXII. THEOR.

Si sint tres anguli plani, quorum duo reliquo sunt majores quomodocunque sumpti, contineant autem ipsos rectæ lineæ æquales; fieri potest ut ex iis, quæ rectas æquales conjungunt, triangulum constituatur.

Sint tres anguli plani ABΓ, ΔEZ, HΘK, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, videlicet anguli quidem

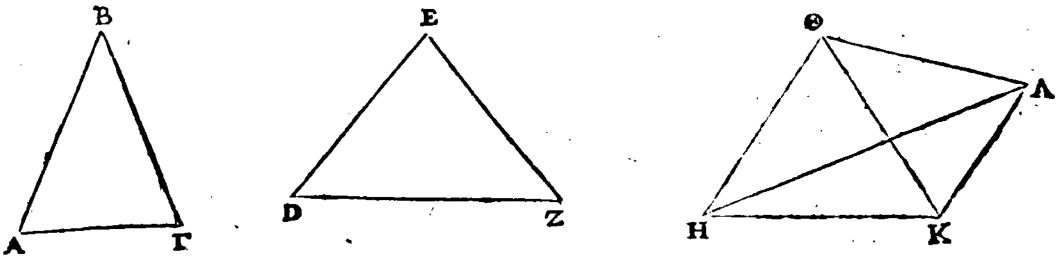


ABΓ, ΔEZ majores angulo HΘK, anguli vero ΔEZ, HΘK majores angulo ABΓ, & præterea anguli HΘK, ABΓ angulo ΔEZ majores, sintque æquales rectæ lineæ AB, BΓ, ΔE, EZ, HΘ, Η Θ, Θ Κ; atque demum Α Γ, Δ Ζ, Η Κ jungantur: dico fieri posse, ut ex æqualibus ipsis Α Γ, Δ Ζ, Η Κ triangulum constituatur; hoc est, ipsarum Α Γ, Δ Ζ, Η Κ duas quaslibet reliqua esse majores quomodocunque sumptas.

Si quidem igitur anguli Α Β Γ, Δ Ε Ζ, Η Θ Κ inter se æquales sint; manifestum est æqualibus adeo factis Α Γ, Δ Ζ, Η Κ ex æqualibus ipsis triangulum constitui posse. sin minus, sint inæquales, & ad rectam lineam Θ Κ; atque ad punctum in ipsa Θ, angulo Α Β Γ æqualis [per 23. 1.] angulus constituatur Κ Θ Λ; & ponatur uni ipsarum Α Β, Β Γ, Δ Ε, Ε Ζ, Η Θ, Θ Κ

Η Θ, Θ Κ εὐθεῖαι, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Α Γ, Δ Ζ, Η Κ· λέγω ὅτι δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς Α Γ, Δ Ζ, Η Κ τρίγωνον συστήσασθαι, τουτέστιν ὅτι τῶν Α Γ, Δ Ζ, Η Κ δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ Α Β Γ, Δ Ε Ζ, Η Θ Κ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, φανερὸν ὅτι καὶ τῶν Α Γ, Δ Ζ, Η Κ ἴσων γενομένων δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων Α Γ, Δ Ζ, Η Κ τρίγωνον συστήσασθαι. εἰ δὲ οὔ, ἔστωσαν ἄνισοι, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ Θ Κ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ, τῇ ὑπὸ Α Β Γ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ Κ Θ Λ· καὶ κείσθω μιᾷ τῶν Α Β, Β Γ, Δ Ε, Ε Ζ, Η Θ,



æqualis Θ Λ; atque Η Λ, Κ Λ jungantur. itaque quoniam duæ Α Β, Β Γ duabus Κ Θ, Θ Λ æquales sunt, & angulus ad Β angulo Κ Θ Λ æqualis; erit [per 4. 1.] basis Α Γ æqualis basi Κ Λ. & quoniam anguli Α Β Γ, Η Θ Κ angulo Δ Ε Ζ sunt majores, æqualis autem est angulus Α Β Γ angulo Κ Θ Λ: erit Η Θ Λ angulo Δ Ε Ζ major. item quoniam duæ Η Θ, Θ Λ duabus Δ Ε, Ε Ζ æquales sunt, & angulus Η Θ Λ angulo Ε major; basis Η Λ [per 24. 1.] basi Δ Ζ major erit. sed [per 20. 1.] Η Κ, Κ Λ ipsa Η Λ sunt majores: multo igitur majores sunt Η Κ, Κ Λ ipsa Δ Ζ. est autem Κ Λ æqualis Α Γ: ergo Α Γ, Η Κ reliqua Δ Ζ sunt majores. similiter demonstrabimus & ipsas quidem Α Γ, Δ Ζ majores esse Η Κ, ipsas vero Η Κ, Δ Ζ majores Α Γ: fieri igitur potest [per 22. 1.] ut ex æqualibus ipsis Α Γ, Δ Ζ, Η Κ triangulum constituatur.

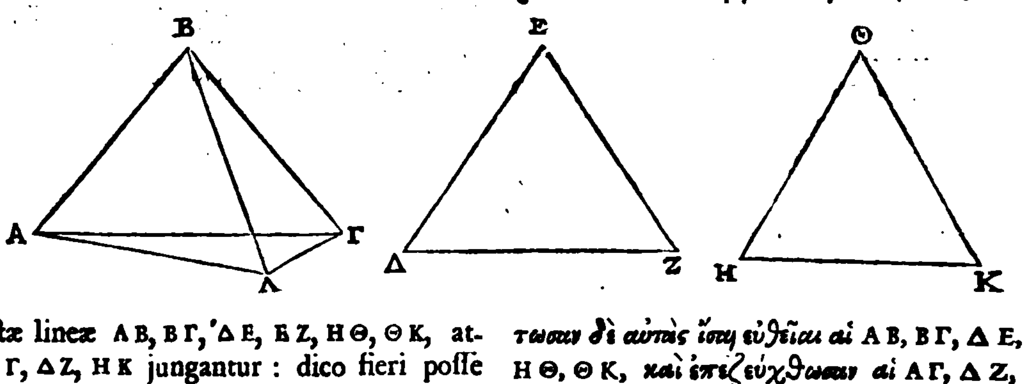
Θ Κ ἴση ἡ Θ Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Η Λ, Κ Λ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ Α Β, Β Γ δυσὶ ταῖς Κ Θ, Θ Λ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Β γωνίᾳ τῇ ὑπὸ Κ Θ Λ ἴση· βάσις ἄρα ἡ Α Γ βάσει τῇ Κ Λ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ Α Β Γ, Η Θ Κ τῆς ὑπὸ Δ Ε Ζ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ Α Β Γ τῇ ὑπὸ Κ Θ Λ· ἡ ἄρα ὑπὸ Η Θ Λ τῆς ὑπὸ Δ Ε Ζ μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ Η Θ, Θ Λ δυσὶ ταῖς Δ Ε, Ε Ζ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ Η Θ Λ γωνίας τῆς πρὸς τῷ Ε μείζων· βάσις ἄρα ἡ Η Λ βάσεως τῆς Δ Ζ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ αἱ Η Κ, Κ Λ τῆς Κ Λ μείζονές εἰσι· πολλῷ ἄρα αἱ Η Κ, Κ Λ τῆς Δ Ζ μείζονές εἰσιν. ἴση δὲ ἡ Κ Λ τῇ Α Γ· αἱ Α Γ, Η Κ ἄρα τῆς λοιπῆς τῆς Δ Ζ μείζονές εἰσιν. ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ μὲν Α Γ, Δ Ζ τῆς Η Κ μείζονές εἰσι, αἱ δὲ Η Κ, Δ Ζ τῆς Α Γ· δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς Α Γ, Δ Ζ, Η Κ τρίγωνον συστήσασθαι.

ALITER.

Sint dati tres anguli plani Α Β Γ, Δ Ε Ζ, Η Θ Κ, quorum duo reliquo sint majores quomodocunque sumpti; contineant autem ipsos æqua-

ΑΛΛΩΣ.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ Α Β Γ, Δ Ε Ζ, Η Θ Κ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιεχέ-



les rectæ lineæ Α Β, Β Γ, Δ Ε, Ε Ζ, Η Θ, Θ Κ, atque Α Γ, Δ Ζ, Η Κ jungantur: dico fieri posse ut ex æqualibus ipsis Α Γ, Δ Ζ, Η Κ triangulum constituatur; hoc est rursus duas reliqua majores esse quomodocunque sumptas. si igitur rursus anguli ad puncta Β, Ε, Θ sint æquales, &

τωσαν δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι αἱ Α Β, Β Γ, Δ Ε, Ε Ζ, Η Θ, Θ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Α Γ, Δ Ζ, Η Κ· λέγω ὅτι δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς Α Γ, Δ Ζ, Η Κ τρίγωνον συστήσασθαι, τουτέστι πάλιν ὅτι αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. εἰ μὲν οὖν πάλιν αἱ πρὸς τοῖς Β, Ε, Θ σημείοις γωνίαι ἴσαι εἰσὶν,

ἔσω

εἰσὶν) καὶ αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ ἴσαι, καὶ ἑκατέρα αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες. εἰ δὲ οὔ, ἔστωσαν ἄνισοι αἱ πρὸς τοῖς Β, Ε, Θ σημείοις γωνίαι, καὶ μείζων ἡ πρὸς τῷ Β ἑκατέρας τῶν πρὸς τοῖς Ε, Θ· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΑΓ εὐθεῖα ἑκατέρας τῶν ΔΖ, ΗΚ. καὶ φανερὸν ὅτι ἡ ΑΓ μεθ' ἑκατέρας τῶν ΔΖ, ΗΚ τῆς λοιπῆς μείζων ἐστί. λέγω ὅτι καὶ αἱ ΔΖ, ΗΚ τῆς ΑΓ μείζονές εἰσι. συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β τῇ ὑπὸ ΗΘΚ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΒΛ, καὶ κείσθω μιᾷ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ἴση ἡ ΒΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΛ, ΛΓ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΛ δυσὶ ταῖς ΗΘ, ΘΚ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΛ βάσει τῇ ΗΚ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τοῖς Ε, Θ σημείοις γωνίαι τῆς ὑπὸ ΑΒΓ μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ ὑπὸ ΗΘΚ τῇ ὑπὸ ΑΒΛ ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Ε γωνία τῆς ὑπὸ ΛΒΓ μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΛΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίας τῆς ὑπὸ ΛΒΓ μείζων ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΔΖ βάσεως τῆς ΛΓ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἐδείχθη ἡ ΗΚ τῇ ΑΛ· αἱ ἄρα ΔΖ, ΗΚ τῶν ΑΛ, ΛΓ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ αἱ ΑΛ, ΛΓ τῆς ΑΓ μείζονές εἰσι· πολλῷ ἄρα αἱ ΔΖ, ΗΚ μείζονές εἰσι τῆς ΑΓ· τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ ἄρα εὐθειῶν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· δυνατὸν ἄρα ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ [per 4. 1.] æquales erunt, & duæ reliqua majores. sin minus, sint inæquales anguli ad puncta Β, Ε, Θ, & major qui est ad Β utrovis ipsorum qui sunt ad Ε, Θ: major igitur est [per 24. 1.] & recta linea ΑΓ utravis ipsarum ΔΖ, ΗΚ. & manifestum est ipsam ΑΓ una cum alterutra ipsarum ΔΖ, ΗΚ reliqua esse majorem. dico & ΔΖ, ΗΚ ipsa ΑΓ majores esse. constituatur [per 23. 1.] ad rectam lineam ΑΒ & ad punctum in ea Β angulo ΗΘΚ æqualis angulus ΑΒΛ, & uni ipsarum ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ponatur æqualis ΒΛ, atque ΑΛ, ΛΓ jungantur. quoniam igitur duæ ΑΒ, ΒΛ duabus ΗΘ, ΘΚ æquales sunt, altera alteri, & angulos æquales continent; erit [per 4. 1.] basis ΑΛ basi ΗΚ æqualis. & quoniam anguli ad puncta Ε, Θ angulo ΑΒΓ majores sunt, ex quibus angulus ΗΘΚ est æqualis ipsi ΑΒΛ; erit reliquus qui ad Ε angulo ΛΒΓ major. item quoniam duæ ΛΒ, ΒΓ duabus ΔΕ, ΕΖ æquales sunt, altera alteri, & angulus ΔΕΖ angulo ΛΒΓ major; basis ΔΖ [per 24. 1.] basi ΛΓ major erit. ostensa est autem ΗΚ æqualis ΑΛ: ergo ΔΖ, ΗΚ ipsis ΑΛ, ΛΓ sunt majores. sed [per 20. 1.] ΑΛ, ΛΓ majores sunt ipsa ΑΓ: multo igitur ΔΖ, ΗΚ ipsa ΑΓ majores erunt: quare rectarum linearum ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ duæ reliqua majores sunt quomodocunque sumptæ: ac propterea [per 22. 1.] fieri potest, ut ex æqualibus ipsis ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ triangulum constituatur. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

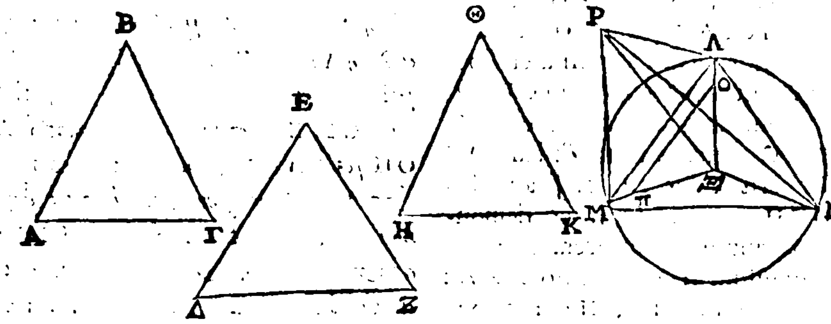
Ἐκ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι· δεῖ δὴ τὰς τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, ἔτι δὲ αἱ τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

Prop. XXIII. Probl.

Ex tribus angulis planis, quorum duo reliquo sunt majores quomodocunque sumpti, solidum angulum constituere: oportet autem tres angulos quatuor rectis esse minores.

Sint dati tres anguli plani ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, quorum duo reliquo sint majores quomodocunque sumpti, sintque tres anguli quatuor rectis minores: oportet ex æqualibus ipsis ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ solidum angulum constituere.



ἀπειλήφθωσαν ἴσαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ· δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι. συνεστάτω τὸ ΛΜΝ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΑΓ τῇ ΛΜ, τὴν δὲ ΔΖ τῇ ΜΝ, καὶ ἔτι

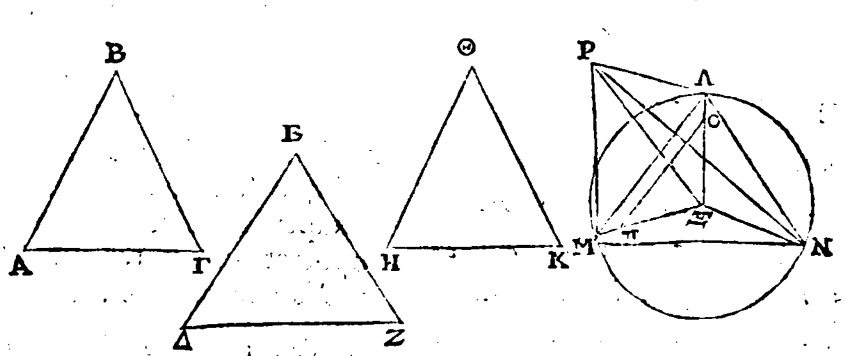
Abscindantur æquales ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ; atque ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ jungantur. igitur [per 22. 11.] fieri potest ut ex æqualibus ipsis ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ constituatur triangulum. itaque [per 22. 1.] constituatur ΛΜΝ, ita ut ΑΓ quidem sit æqualis ΛΜ, ΔΖ vero ipsi ΜΝ; & præterea

ΗΚ ipsi ΛΝ: dein [per 5.4.] circa ΛΜΝ triangulum circulus ΛΜΝ describatur; sumatur vero circuli centrum, quod vel erit intra triangulum ΛΜΝ, vel in uno ejus latere, vel extra.

Sit primum intra; sitque Ξ; atque ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ jungantur: dico ΑΒ majorem esse ipsa ΛΞ. si enim non ita sit, vel ΑΒ erit æqualis ΛΞ, vel ea minor. sit primum æqualis. quoniam igitur ΑΒ est æqualis ΛΞ, atque est ΑΒ ipsi ΒΓ æqualis; erit ΛΞ æqualis ΒΓ. est autem ΛΞ æqualis ΞΜ: duæ igitur ΑΒ, ΒΓ duabus ΛΞ, ΞΜ æquales sunt altera alteri; & ΑΓ basis basi ΛΜ æqualis ponitur: quare [per 8. 1.] angulus ΑΒΓ angulo ΛΞΜ est æqualis. eadem ratione & angulus quidem ΔΕΖ est æqualis angulo ΜΞΝ, angulus vero ΗΘΚ angulo ΝΞΛ: tres igitur anguli ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ tribus ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ æquales sunt. sed tres ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ quatuor rectis sunt æquales: ergo & tres ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ æquales erunt quatuor rectis. atqui ponuntur quatuor rectis minores, quod est absurdum: non igitur ΑΒ ipsi ΛΞ est æqualis. dico præterea neque ΑΒ minorem esse ipsa ΛΞ. si enim fieri potest, sit minor, ponaturque rectæ ΑΒ æqualis ΞΟ, ipsi vero ΒΓ æqualis ΞΠ, & ΟΠ jungatur. quoniam igitur ΑΒ est æqualis ΒΓ, & ΞΟ ipsi ΞΠ

τὴν ΗΚ τῇ ΛΝ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΛΜΝ τρίγωνον κύκλος ὁ ΛΜΝ, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον· ἔσται δὴ ἤτοι ἐντὸς τοῦ ΛΜΝ τριγώνου, ἢ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ἢ ἐκτός.

Ἔστω πρότερον ἐντὸς, καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ μείζων ἐστὶ τῆς ΛΞ. εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ, ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ, ἀλλ' ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση· ἡ ΛΞ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση. ἡ δὲ ΛΞ τῇ ΞΜ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΛΞ, ΞΜ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΛΜ ὑπόκειται ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΛΞΜ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔΕΖ τῇ ὑπὸ ΜΞΝ ἐστιν ἴση, καὶ ἔτι ἡ ὑπὸ ΗΘΚ τῇ ὑπὸ ΝΞΛ· αἱ ἄρα τρεῖς αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ γωνίαι τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὑπόκεινται δὲ καὶ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ ἐστιν ἴση. λέγω ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω· καὶ κείσθω τῇ μὲν ΑΒ ἴση ἡ ΞΟ, τῇ δὲ ΒΓ ἴση ἡ ΞΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΟΠ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΞΟ τῇ



æqualis erit: ergo & reliqua ΟΛ reliquæ ΠΜ est æqualis: quare [per 2. 6.] ΛΜ parallela est ipsi ΟΠ, & ΛΜΞ triangulum est triangulo ΟΠΞ æquiangulum: est igitur [per 4. 6.] ut ΞΛ ad ΛΜ ita ΞΟ ad ΟΠ; & permutando [per 16. 5.] ut ΛΞ ad ΞΟ ita ΛΜ ad ΟΠ. major autem est ΛΞ quam ΞΟ; ergo & ΛΜ quam ΟΠ est major. sed ΛΜ posita est [per constr.] æqualis ΑΓ; quare & ΑΓ quam ΟΠ major erit. itaque quoniam duæ rectæ lineæ ΑΒ, ΒΓ duabus ΟΞ, ΞΠ æquales sunt, & basis ΑΓ major basi ΟΠ; erit [per 24. 1.] angulus ΑΒΓ angulo ΟΞΠ major. similiter demonstrabimus & ΔΕΖ angulum majorem esse angulo ΜΞΝ, & angulum ΗΘΚ angulo ΝΞΛ: tres igitur anguli ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ tribus ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ sunt majores. at anguli ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ quatuor rectis minores ponuntur: multo igitur anguli ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ minores erunt quatuor rectis. sed & æquales, quod est absurdum: non igitur ΑΒ minor est quam ΛΞ. ostensum autem est neque esse æqualem: major ergo est ΑΒ quam ΛΞ. con-

ΞΠ· ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ΟΛ λοιπῇ τῇ ΠΜ ἐστιν ἴση· παράλληλος ἄρα ἡ ΛΜ τῇ ΟΠ, καὶ ἰσογώνιον τὸ ΛΜΞ τῷ ΟΠΞ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΞΛ πρὸς τὴν ΛΜ οὕτως ἡ ΞΟ πρὸς τὴν ΟΠ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΛΞ πρὸς τὴν ΞΟ οὕτως ἡ ΛΜ πρὸς τὴν ΟΠ. μείζων δὲ ἡ ΛΞ τῆς ΞΟ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΛΜ τῆς ΟΠ. ἀλλ' ἡ ΛΜ κεῖται τῇ ΑΓ ἴση· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῆς ΟΠ μείζων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΟΞ, ΞΠ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσεως τῆς ΟΠ μείζων ἐστί· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΟΞΠ μείζων ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔΕΖ τῆς ὑπὸ ΜΞΝ μείζων ἐστὶν, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΝΞΛ· αἱ ἄρα τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ τριῶν τῶν ὑπὸ ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ μείζονές εἰσιν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες ὑπόκεινται· πολλῷ ἄρα αἱ ὑπὸ ΛΞΜ, ΜΞΝ, ΝΞΛ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. ἀλλὰ καὶ ἴσαι, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ΛΞ. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴση· μείζων ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. ἀνεστάτω

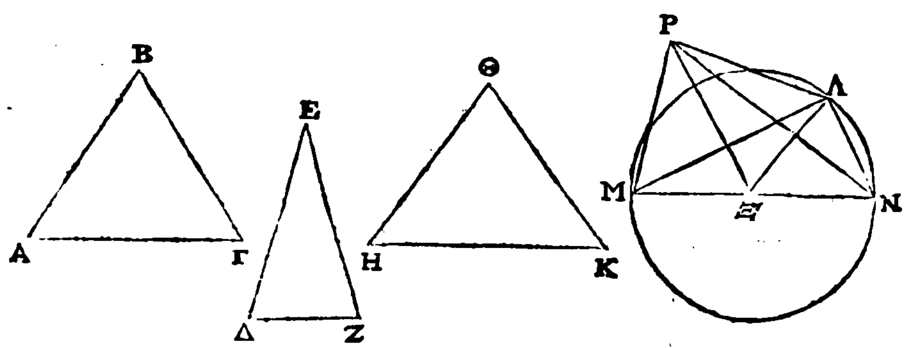
δὴ

δὴ ἀπὸ τοῦ Ξ σημείου τῷ τοῦ ΑΜΝ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΞΡ· καὶ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΞ, ἐκείνῳ ἔστω ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΡΑ, ΡΜ, ΡΝ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΞΡ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΑΜΝ κύκλου ἐπίπεδον· καὶ πρὸς ἑκάστην ἄρα τῶν ΑΞ, ΜΞ, ΝΞ ὀρθή ἐστιν ἡ ΡΞ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΞ τῇ ΞΜ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΞΡ· βάσις ἄρα ἡ ΑΡ βάσει τῇ ΡΜ ἴση ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΡΝ ἑκατέρᾳ τῶν ΡΑ, ΡΜ ἴση ἐστίν· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΡΑ, ΡΜ, ΡΝ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐπεὶ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΞ, ἐκείνῳ ἴσον ὑπόκειται τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΞ, ΞΡ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΞ, ΞΡ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΡΑ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΞΡ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΡΑ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΡΑ. ἀλλὰ τῇ μὲν ΑΒ ἴση ἐστὶν ἑκάστη τῶν ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, τῇ δὲ ΡΑ ἴση ἑκατέρα τῶν ΡΜ, ΡΝ· ἑκάστη ἄρα τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ἑκάστῃ τῶν ΡΑ, ΡΜ, ΡΝ ἴση ἐστί. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΡ, ΡΜ δυσὶ ταῖς ΑΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ ΑΜ βάσει τῇ ΑΓ ὑπόκειται ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΡΜ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΜΡΝ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΡΝ τῇ ὑπὸ ΗΘΚ· ἐκ τριῶν ἄρα γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ ΑΡΜ, ΜΡΝ, ΑΡΝ, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, στερεὰ γωνία συνίσταται ἡ πρὸς τῷ Ρ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΑΡΜ, ΜΡΝ, ΑΡΝ γωνιῶν.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τῆς ΜΝ, καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΞΑ· λέγω πάλιν ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΑΞ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΑΞ, ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση· δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ, τουτέστιν αἱ ΔΕ, ΕΖ, δυσὶ ταῖς ΜΞ, ΞΑ, τουτέστι τῇ ΜΝ, ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΔΖ κεῖται ἴση· καὶ

stituatur [per 12.11.] à puncto Ξ circuli ΑΜΝ plano ad rectos angulos recta ΞΡ; & excessui, quo quadratum ex ΑΒ superat quadratum ex ΑΞ, ponatur [per lem. subnex.] æquale quadratum quod fit ex ΞΡ, atque ΡΑ, ΡΜ, ΡΝ jungantur. quoniam igitur ΞΡ perpendicularis est ad planum ΑΜΝ circuli, & ad unumquamque ipsarum ΑΞ, ΜΞ, ΝΞ [per 3. def. 11.] erit perpendicularis. atque quoniam ΑΞ est æqualis ΞΜ, communis autem & ad rectos angulos ΞΡ, erit [per 4. 1.] basis ΑΡ æqualis basi ΡΜ. eadem ratione & ΡΝ utrique ipsarum ΡΑ, ΡΜ est æqualis: tres igitur rectæ lineæ ΡΑ, ΡΜ, ΡΝ inter se æquales sunt. & quoniam quadratum ex ΞΡ ponitur æquale excessui, quo quadratum ex ΑΒ superat quadratum ex ΑΞ; erit quadratum ex ΑΒ quadratis ex ΑΞ, ΞΡ æquale. quadratis autem ex ΑΞ, ΞΡ æquale est [per 47. 1.] quadratum ex ΡΑ, rectus enim angulus est ΑΞΡ: ergo quadratum ex ΑΒ quadrato ex ΡΑ æquale erit; ideoque ΑΒ ipsi ΡΑ est æqualis. sed ipsi quidem ΑΒ æqualis est unaquæque ipsarum ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ; ipsi vero ΡΑ æqualis utravis ipsarum ΡΜ, ΡΝ: unaquæque igitur ipsarum ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ unicuique ipsarum ΡΑ, ΡΜ, ΡΝ est æqualis. quoniam vero duæ ΑΡ, ΡΜ duabus ΑΒ, ΒΓ æquales sunt, & basis ΑΜ ponitur æqualis basi ΑΓ: erit [per 8. 1.] angulus ΑΡΜ æqualis angulo ΑΒΓ. eadem ratione & angulus quidem ΜΡΝ angulo ΔΕΖ, angulus autem ΑΡΝ angulo ΗΘΚ est æqualis: ex tribus igitur angulis planis ΑΡΜ, ΜΡΝ, ΑΡΝ, qui æquales sunt tribus datis ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, solidus angulus constitutus est ad Ρ, qui sub angulis ΑΡΜ, ΜΡΝ, ΑΖΝ continetur.

Sed sit centrum circuli in uno laterum trianguli, videlicet in ΜΝ, & sit Ξ, atque ΞΑ jungatur: dico rursus ΑΒ majorem esse ipsa ΑΞ. si enim non ita sit, vel ΑΒ est æqualis ΑΞ vel ipsa minor. sit primum æqualis: duæ igitur ΑΒ, ΒΓ, hoc est ΔΕ, ΕΖ, duabus ΜΞ, ΞΑ, hoc est ipsi ΜΝ, æquales sunt. sed ΜΝ ponitur æqualis ΔΖ; ergo



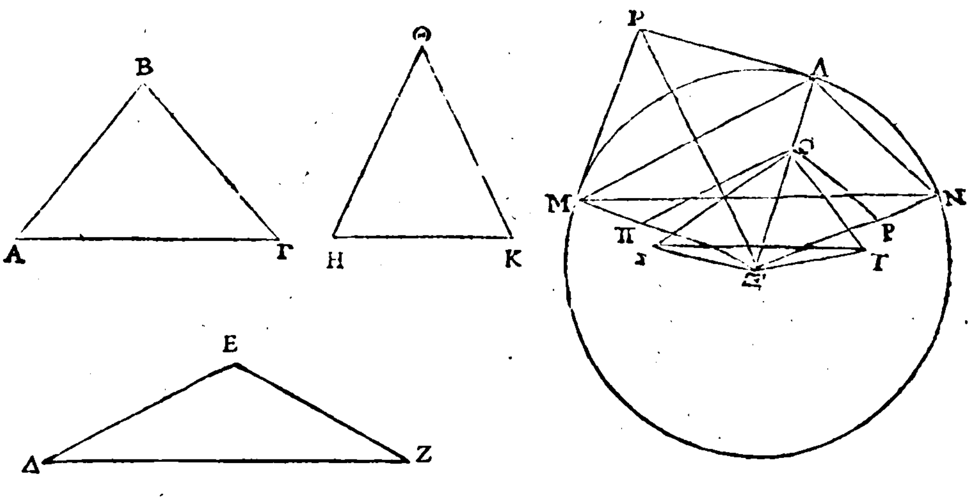
αἱ ΔΕ, ΕΖ ἄρα τῇ ΔΖ ἴσαι εἰσίν, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ ἴση τῇ ΑΞ. ὁμοίως δὲ οὐδὲ ἐλάττων, πολλῷ γὰρ τὸ ἀδύνατον μεῖζον· ἡ ἄρα ΑΒ μείζων ἐστὶ τῆς ΑΞ. καὶ ἐὰν ὁμοίως ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΞ, ἐκείνῳ ἴσον πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἀναστήσωμεν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΡΞ, συσταθήσεται τὸ πρόβλημα.

ΔΕ, ΕΖ ipsi ΔΖ sunt æquales, quod [per 20. 1.] fieri non potest: non igitur ΑΒ est æqualis ΑΞ. similiter neque minor; exinde enim majus absurdum sequeretur: ergo ΑΒ ipsa ΑΞ major est. & si, similiter atque prius, excessui quo quadratum ex ΑΒ superat quadratum ex ΑΞ, æquale ponatur [per lemma subnexum] quadratum ex ΡΞ, & ipsa ΡΞ circuli plano ad rectos angulos constituatur, fiet problema.

Deinde

Deinde vero sit centrum circuli extra triangulum ΛMN, sitque Ξ, atque ΛΞ, MΞ, NΞ jungantur: dico & sic AB ipsa ΛΞ majorem esse. si enim non ita sit, vel æqualis est, vel minor. sit primum æqualis: duæ ideo AB, BΓ duabus MΞ, ΞΛ æquales sunt altera alteri, & basis AΓ etiam æqualis basi MΛ: angulus igitur ABΓ [per 8. 1.] æqualis est angulo MΞΛ. eadem ratione & HΘK angulus ipsi ΛΞN est æqualis: quare totus MΞN est æqualis duobus ABΓ, HΘK. sed & anguli ABΓ, HΘK angulo ΔEZ majores sunt: & angulus igitur MΞN ipso ΔEZ est major. & quoniam duæ ΔE, EZ duabus MΞ, ΞN æquales sunt, & basis ΔZ æqualis basi MN; erit [per 8. 1.] MΞN angulus angulo ΔEZ æqualis. ostensus autem est major, quod est absurdum: non igitur AB est æqualis ΛΞ. deinceps vero ostendemus neque minorem esse: quare major necessario erit. & si rursus circuli plano ad rectos angulos constituamus ΞP, & ipsam æqualem ponamus [per lem. subnexum] lateri quadrati ejus, quo quadratum ex AB superat quadratum ex ΛΞ, problema constituetur. dico autem neque minorem esse AB ipsa ΛΞ. si enim fieri potest, sit minor; & ipsi quidem AB æqualis ponatur ΞO, ipsi vero BΓ æqualis ΞΠ, & OΠ jungatur. quo-

Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τοῦ ΛΜΝ τριγώνου, καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ· λέγω δὴ καὶ οὕτως ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστίν, ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση· δύο οὖν αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΜΞ, ΞΛ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΜΛ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΜΞΛ ἴση ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΗΘΚ τῇ ὑπὸ ΛΞΝ ἐστὶν ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΞΝ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζονές εἰσι· καὶ ἡ ὑπὸ ΜΞΝ ἄρα τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΔΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΜΞ, ΞΝ ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΜΝ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΞΝ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ μείζων, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἴση ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ. ἑξῆς δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων· μείζων ἄρα. καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πάλιν ἀναστήσωμεν τὴν ΞΡ, καὶ ἴσην αὐτὴν ὑποθώμεθα, ᾧ μεῖζον δύναται τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, συσταθήσεται τὸ πρόβλημα. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ κείσθω τῇ μὲν ΑΒ ἴση ἡ ΞΟ, τῇ δὲ ΒΓ ἴση ἡ ΞΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΟΠ. καὶ



niam igitur AB ipsi BΓ est æqualis, erit ΞO æqualis ΞΠ: ergo & reliqua OΛ reliquæ ΠM æqualis: parallela igitur est [per 2. 6.] ΛM ipsi ΠO, adeoque triangulum ΛMΞ triangulo ΠΞO æquiangulum: quare [per 4. 6.] ut ΛΞ ad ΛM ita ΞO ad OΠ; & permutando ut ΛΞ ad ΞO ita ΛM ad OΠ. major autem est ΛΞ quam ΞO; ergo ΛM quam OΠ est major. sed [per constr.] ΛM est æqualis AΓ; quare & AΓ ipsa OΠ major erit. itaque quoniam duæ AB, BΓ duabus OΞ, ΞΠ sunt æquales altera alteri, & basis AΓ major est basi OΠ; erit [per 25. 1.] angulus ABΓ angulo OΞΠ major. similiter & si ΞP sumatur æqualis utrivis ipsarum ΞO, ΞΠ, & jungatur OP, ostendemus angulum HΘK angulo OΞP esse majorem. constituatur ad rectam lineam ΛΞ & ad punctum in ipsa Ξ angulo quidem ABΓ æqualis angulus ΛΞΣ, angulo autem HΘK æqualis

ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΞΟ τῇ ΞΠ· ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ΟΛ λοιπῇ τῇ ΠΜ ἐστὶν ἴση· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΜ τῇ ΠΟ, καὶ ἰσογώνιον τὸ ΛΜΞ τρίγωνον τῷ ΠΞΟ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΛΞ πρὸς τὴν ΛΜ οὕτως ἡ ΞΟ πρὸς τὴν ΟΠ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΛΞ πρὸς τὴν ΞΟ οὕτως ἡ ΛΜ πρὸς τὴν ΟΠ. μείζων δὲ ἡ ΛΞ τῆς ΞΟ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΛΜ τῆς ΟΠ. ἀλλὰ ἡ ΛΜ τῇ ΑΓ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῆς ΟΠ ἐστὶ μείζων. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΟΞ, ΞΠ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσεως τῆς ΟΠ μείζων ἐστί· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΟΞΠ μείζων ἐστίν. ὁμοίως δὴ κἂν τὴν ΞΡ ἴσην ἑκατέρᾳ τῶν ΞΟ, ΞΠ ἀπολάβωμεν, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν ΟΡ, δείξομεν ὅτι ἡ ὑπὸ ΗΘΚ γωνία τῆς ὑπὸ ΟΞΡ μείζων ἐστίν. συνεστάτω δὴ πρὸς τῇ ΛΞ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ξ τῇ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΛΞΣ, τῇ δὲ ὑπὸ ΗΘΚ ἴση

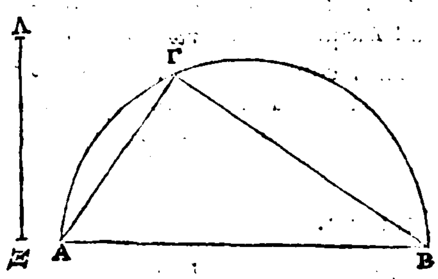
ἴση ἡ ὑπὸ ΛΞΤ, καὶ κείσθω ἑκατέρα τῶν ΞΣ, ΞΤ τῇ ΟΞ ἴση, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΟΣ, ΟΤ, ΣΤ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΟΞ, ΞΣ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΟΞΣ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ, τουτέστιν ἡ ΛΜ, βάσει τῇ ΟΣ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΛΝ τῇ ΟΤ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΜΛ, ΛΝ δυσὶ ταῖς ΟΣ, ΟΤ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΜΛΝ γωνίας τῆς ὑπὸ ΣΟΤ μείζων ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΜΝ βάσεως τῆς ΣΤ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΔΖ ἄρα τῆς ΣΤ μείζων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΔΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΣΞ, ΞΤ ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσεως τῆς ΣΤ μείζων· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίας τῆς ὑπὸ ΣΞΤ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΣΞΤ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΕΖ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων, ὅπερ ἀδύνατον.

ΛΞΤ, & ponatur utraque ΞΣ, ΞΤ ipsi ΟΞ æqualis, junganturque ΟΣ, ΟΤ, ΣΤ. quoniam autem duæ ΑΒ, ΒΓ duabus ΟΞ, ΞΣ æquales sunt, & angulus ΑΒΓ æqualis angulo ΟΞΣ, erit [per 4.1.] basis ΑΓ, hoc est ΛΜ, basi ΟΣ æqualis. eadem ratione & ΛΝ est æqualis ipsi ΟΤ. & quoniam duæ ΜΛ, ΛΝ duabus ΟΣ, ΟΤ sunt æquales, & angulus ΜΛΝ major angulo ΣΟΤ; erit [per 24.1.] & basis ΜΝ basi ΣΤ major. sed ΜΝ est æqualis ΔΖ: ergo & ΔΖ quam ΣΤ major erit. quoniam igitur duæ ΔΕ, ΕΖ duabus ΣΞ, ΞΤ æquales sunt, & basis ΔΖ major basi ΣΤ; erit [per 25.1.] angulus ΔΕΖ angulo ΣΞΤ major. æqualis autem est angulus ΣΞΤ angulis ΑΒΓ, ΗΘΚ: ergo ΔΕΖ angulus angulis ΑΒΓ, ΗΘΚ major est. sed & minor, quod fieri non potest.

ΛΗΜΜΑ.

Ὃν δὲ τρόπον ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ ἐκείνῳ ἴσον λαβεῖν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, δείξομεν οὕτως.

Ἐκκείσθωσαν αἱ ΑΒ, ΛΞ εὐθεῖαι, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ γεγράφθω ἐπ' αὐτῆς ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ, καὶ εἰς τὸ ΑΒΓ ἡμικύκλιον ἐνηρμόσθω τῇ ΛΞ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ.



Ἐπεὶ οὖν ἐν ἡμικυκλίῳ τῷ ΑΒΓ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ΑΓ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ. ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΛΞ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ. ἐὰν οὖν τῇ ΓΒ ἴσην τὴν ΞΡ ἀπολάβωμεν, ἔσται τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς ΞΡ. ὅπερ προὔκειτο ποιῆσαι.

LEMMA.

Quo autem modo sumatur quadratum ex ΞΡ æquale ei, quo quadratum ex ΑΒ superat quadratum ex ΛΞ, ita ostendemus.

Exponantur rectæ lineæ ΑΒ, ΛΞ, sitque major ΑΒ, & ab ipsa describatur semicirculus ΑΒΓ: & in ΑΒΓ aptetur recta linea ΑΓ ipsi ΛΞ æqualis, & ΒΓ jungatur.

Itaque quoniam angulus ΑΓΒ est in semicirculo ΑΒΓ, erit [per 31.3.] ΑΓΒ rectus. quadratum igitur quod fit ex ΑΒ æquale est [per 47.1.] & quadrato quod ex ΑΓ & ei quod ex ΓΒ: ergo quadratum ex ΑΒ superat quadratum ex ΑΓ quadrato ex ΓΒ. æqualis autem est ΑΓ ipsi ΛΞ: quadratum igitur ex ΑΒ superat quadratum ex ΛΞ quadrato ex ΓΒ. quare si ipsi ΓΒ æqualem sumamus ΞΡ, quadratum ex ΑΒ superabit quadratum ex ΛΞ eo quod fit ex ΞΡ quadrato. quod facere suscepimus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Ἐὰν στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχηται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστι.

Στερεὸν γὰρ τὸ ΓΔΘΗ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχέσθω τῶν ΑΓ, ΗΖ, ΑΘ, ΔΖ, ΖΒ, ΑΕ· λέγω ὅτι τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΗ, ΓΕ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ. πάλιν, ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΖ, ΔΕ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ παράλληλος· πα-

Prop. XXIV. Theor.

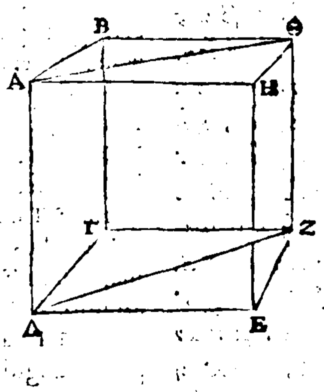
Si solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana & æqualia & parallelogramma sunt.

Solidum enim ΓΔΘΗ sub parallelis planis ΑΓ, ΗΖ, ΑΘ, ΔΖ, ΖΒ, ΑΕ contineatur: dico opposita ejus plana & æqualia & parallelogramma esse.

Quoniam enim duo plana parallela ΒΗ, ΓΕ à plano ΑΓ secantur, communes ipsorum sectiones [per 16. 11.] parallelæ sunt: ergo ΑΒ ipsi ΔΓ est parallela. rursus, quoniam duo plana parallela ΒΖ, ΑΕ secantur à plano ΑΓ, communes ipsorum sectiones parallelæ sunt: parallela igitur est ΑΔ ipsi ΒΓ. ostensa autem est & ΑΒ parallela ipsi ΔΓ: ergo ΑΓ paralle-

parallelogrammum est. similiter demonstrabimus & unumquodque ipsorum ΔZ, ZH, HB, BZ, AE parallelogrammum esse.

Jungantur AΘ, ΔZ. & quoniam parallela est AB quidem ipsi ΔΓ, BΘ vero & ipsi ΓZ; duæ quidem AB, BΘ sese tangentes duabus rectis ΔΓ, ΓZ sese tangentibus parallelæ erunt, & non in eodem plano: quare [per 10. 11.] æquales angulos continebunt: angulus igitur ABΘ angulo ΔΓZ est æqualis. & quoniam [per 34. 1.] duæ AB, BΘ duabus ΔΓ, ΓZ æquales sunt, & angulus ABΘ æqualis angulo ΔΓZ; erit [per 4. 1.] basis AΘ basi ΔZ æqualis, & ABΘ triangulum æquale triangulo ΔΓZ. & est [per 34. 1.] ipsius quidem ABΘ trianguli duplum BH parallelogrammum; ipsius vero ΔΓZ trianguli duplum parallelogrammum ΓE; erit ergo BH parallelogrammum æquale parallelogrammo ΓE. similiter demonstrabimus & AΓ parallelogrammum parallelogrammo HZ, & parallelogrammum AE parallelogrammo BZ æquale esse.



Si igitur solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana & æqualia & parallelogramma sunt. quod erat demonstrandum.

παραλληλόγραμμον ἄρα τὸ ΑΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν ΔΖ, ΖΗ, ΗΒ, ΒΖ, ΑΕ παραλληλόγραμμόν ἐστιν.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΘ, ΔΖ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΒΘ τῇ ΓΖ· δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΘ ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας τὰς ΔΓ, ΓΖ ἁπτομένας ἀλλήλων παράλληλοί εἰσιν, οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· ἴσας ἄρα γωνίας περιέχουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΖ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΘ δυσὶ ταῖς ΔΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΘ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΖ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΔΓΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστί. καὶ ἔστι τοῦ μὲν ΑΒΘ διπλάσιον τὸ ΒΗ παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ ΔΓΖ διπλάσιον τὸ ΓΕ παραλληλόγραμμον· ἴσον ἄρα τὸ ΒΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΓΕ παραλληλογράμμῳ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ μὲν ΑΓ τῷ ΗΖ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΑΕ τῷ ΒΖ.

Ἐὰν ἄρα στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχηται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXV. THEOR.

Si solidum parallelepipedum plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut basis ad basim ita solidum ad solidum.

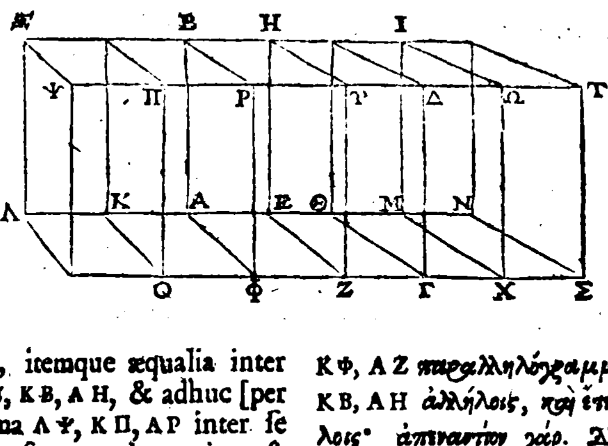
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε΄.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν οὕτω τὸ στερεὸν πρὸς τὸ στερεόν.

Solidum enim parallelepipedum ABΓΔ plano ΥE secetur oppositis planis PA, ΔΘ parallelo: dico ut basis AEZΦ ad basim EΘΓZ ita esse ABZΥ solidum ad solidum EHΓΔ.

Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΒΓΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΥΕ τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς ΡΑ, ΔΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕΖΦ βάσις πρὸς τὴν ΕΘΓΖ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒΖΥ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΗΓΔ στερεόν.

Producatur enim AΘ ex utraque parte, & ponantur ipsi quidem EΘ æquales quotcunque ΘM, MN, ipsi vero AE æquales quotcunque AK, KΛ, & compleantur parallelogramma ΛO, KΦ, ΘX, MΣ, & solida ΛΠ, KΨ, ΔM, MT. quoniam igitur æquales inter se sunt ΛK, KA, AE rectæ lineæ, erunt [per 38. 1.] & parallelogramma ΛO, KΦ, AZ inter se æqualia, itemque æqualia inter se parallelogramma KΞ, KB, AH, & adhuc [per 24. 11.] parallelogramma ΛΨ, KΠ, AP inter se æqualia; opposita enim sunt. eadem ratione & parallelogramma EΓ, ΘX, MΣ æqualia sunt inter se; itemque parallelogramma ΘH, ΘI, IN inter se



Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΑΘ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν ΕΘ ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΘΜ, ΜΝ, τῇ δὲ ΑΕ ἴσαι αἱ ΑΚ, ΚΛ, καὶ συμπεπληρώσθωσαν τὰ ΛΟ, ΚΦ, ΘΧ, ΜΣ παραλληλόγραμμα, καὶ τὰ ΛΠ, ΚΨ, ΔΜ, ΜΤ στερεά. καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΛΚ, ΚΑ, ΑΕ εὐθεῖαι ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ μὲν ΛΟ, ΚΦ, ΑΖ παραλληλόγραμμα ἀλλήλοις, τὰ δὲ ΚΞ, ΚΒ, ΑΗ ἀλλήλοις, καὶ ἔτι τὰ ΛΨ, ΚΠ, ΑΡ ἀλλήλοις· ἀπεναντίον γάρ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ ΕΓ, ΘΧ, ΜΣ παραλληλόγραμμα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, τὰ δὲ ΘΗ, ΘΙ, ΙΝ ἴσα εἰσὶν ἀλλήλοις,

καὶ

καὶ ἔτι τὰ ΔΘ, ΜΩ, ΝΤ· τρία ἄρα ἐπίπεδα τῶν ΑΠ, ΚΡ, ΑΤ στερεῶν τρισὶν ἐπιπέδοις ἐστὶν ἴσα. ἀλλὰ τὰ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἐστὶν ἴσα· τὰ ἄρα τρία στερεὰ τὰ ΑΠ, ΚΡ, ΑΤ ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ τρία στερεὰ τὰ ΕΔ, ΔΜ, ΜΤ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὁσαπλασίων ἄρα ἡ ΑΖ βάσις τῆς ΑΖ βάσεως τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΑΤ στερεὸν τοῦ ΑΤ στερεοῦ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΝΖ βάσις τῆς ΖΘ βάσεως τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΝΤ στερεὸν τοῦ ΘΤ στερεοῦ. καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ βάσις τῇ ΝΖ βάσει ἴσον καὶ τὸ ΑΤ στερεὸν τῷ ΝΤ στερεῷ, καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΑΖ βάσις τῆς ΝΖ βάσεως ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΤ στερεὸν τοῦ ΝΤ στερεοῦ, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει· τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων τῶν ΑΖ, ΖΘ, δύο δὲ στερεῶν τῶν ΑΤ, ΤΘ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΑΖ βάσεως καὶ τοῦ ΑΤ στερεοῦ, ἥτε ΑΖ βάσις καὶ τὸ ΑΤ στερεόν, τῆς δὲ ΘΖ βάσεως καὶ τοῦ ΘΤ στερεοῦ, ἥτε ΝΖ βάσις καὶ τὸ ΝΤ στερεόν· καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΑΖ βάσις τῆς ΝΖ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΤ στερεὸν τοῦ ΝΤ· καὶ εἰ ἴση, ἴσον· καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ βάσις πρὸς τὴν ΖΘ βάσιν οὕτω τὸ ΑΤ στερεὸν πρὸς τὸ ΤΘ στερεόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

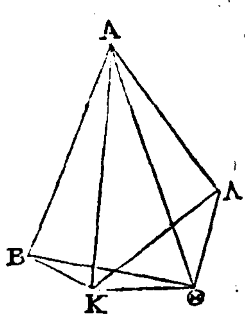
æqualia, & insuper parallelogramma ΔΘ, ΜΩ, ΝΤ: tria igitur plana solidorum ΑΠ, ΚΡ, ΑΤ tribus planis æqualia sunt. sed tria tribus oppositis sunt æqualia: ergo [per 10. def. 11.] tria solida ΑΠ, ΚΡ, ΑΤ inter se æqualia erunt. eadem ratione & tria solida ΕΔ, ΔΜ, ΜΤ sunt æqualia inter se: quotuplex igitur est basis ΑΖ ipsius ΑΖ basis totuplex est & ΑΤ solidum solidi ΑΤ. eadem ratione quotuplex est ΝΖ basis ipsius basis ΘΖ totuplex est & solidum ΝΤ ipsius ΘΤ solidi. porro si basis ΑΖ est æqualis basi ΝΖ & solidum ΑΤ solido ΝΤ erit æquale, & si ΑΖ basis superat ΝΖ basim & solidum ΑΤ solidum ΝΤ superabit, & si minor minus: quatuor igitur magnitudinibus expositis, duabus scilicet basibus ΑΖ, ΖΘ, & duobus solidis ΑΤ, ΤΘ, sumpta sunt æque multiplicia, basis quidem ΑΖ & ΑΤ solidi, videlicet basis ΑΖ & solidum ΑΤ; basis vero ΘΖ & ΘΤ solidi, nempe basis ΝΖ & solidum ΝΤ: demonstratum autem est si basis ΑΖ superat basim ΝΖ, & ΑΤ solidum solidum ΝΤ superare; & si æqualis, æquale; & si minor, minus: est igitur [per 5. def. 5.] ut ΑΖ basis ad basim ΖΘ ita ΑΤ solidum ad solidum ΤΘ. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Δ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΕΔΓ, ΕΔΖ, ΖΔΓ γωνιῶν ἐπιπέδων· δεῖ δὴ πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΔΖ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΕΔ, ΔΓ ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΖΗ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΗ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ μὲν ὑπὸ ΕΔΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΛ, τῇ δὲ ὑπὸ ΕΔΗ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΚ, καὶ κείσθω τῇ ΔΗ ἴση ἡ ΑΚ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Κ σημείου τῷ διὰ τῶν ΒΑΛ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΚΘ, καὶ κείσθω ἴση τῇ ΗΖ ἡ ΚΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΑ· λέγω ὅτι ἡ πρὸς τῷ Α στερεὰ γωνία ὑπὸ τῶν ΒΑΛ, ΒΑΘ, ΘΑΛ γωνιῶν ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Δ στερεᾷ γωνίᾳ τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν ΕΔΓ, ΕΔΖ, ΖΔΓ γωνιῶν.

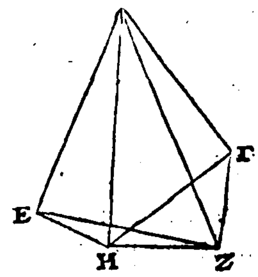


Prop. XXVI. Probl.

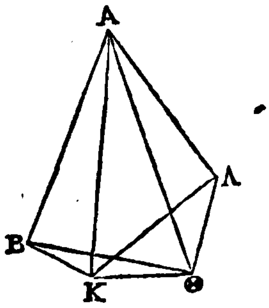
Ad datam rectam lineam & ad datum in ipsa punctum dato angulo solido æqualem angulum constituere.

Sit data quidem recta linea ΑΒ, datum autem in ipsa punctum Α, & datus solidus angulus ad Δ qui sub ΕΔΓ, ΕΔΖ, ΖΔΓ angulis planis contineatur: oportet vero ad datam rectam lineam ΑΒ & ad datum in ipsa punctum Α dato angulo solido ad Δ æqualem solidum angulum constituere.

Sumatur enim in linea ΔΖ quodvis punctum Ζ, à quo ad planum per ΕΔ, ΔΓ transiens [per 11. 11.] ducatur perpendicularis ΖΗ, quæ plano in puncto Η occurrat; jungaturque ΔΗ; dein [per 23. 1.] ad rectam lineam ΑΒ & ad datum in ipsa punctum Α angulo quidem ΕΔΓ æqualis angulus constituatur ΒΑΛ, angulo autem ΕΔΗ constituatur æqualis ΒΑΚ, deinde [per 3. 1.] ipsi ΔΗ ponatur æqualis ΑΚ, & à puncto Κ plano per ΒΑΛ [per 12. 11.] ad rectos angulos erigatur ΚΘ; ponaturque demum ipsi ΗΖ æqualis ΚΘ, & ΘΑ jungatur: dico angulum solidum ad Α, qui sub angulis ΒΑΛ, ΒΑΘ, ΘΑΛ comprehenditur, æqualem esse solido angulo ad Δ sub angulis ΕΔΓ, ΕΔΖ, ΖΔΓ comprehenso.

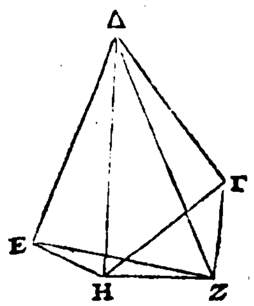


Sumantur enim æquales rectæ lineæ AB, ΔE, & jungantur ΘB, KB, ZE, HE. quoniam igitur ZH perpendicularis est ad subjectum planum; & ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt suntque in subjecto plano [per 3. def. 11.] rectos faciet angulos: uterque igitur angulorum ZHΔ, ZHE rectus est. eadem ratione & uterque ipsorum ΘKA, ΘKB est rectus. & quoniam duæ KA, AB duabus HΔ, ΔE æquales sunt altera alteri & angulos æquales continent; erit [per 4. 1.] basis BK basi EH æqualis. est autem & KΘ æqualis HZ, atque angulos rectos continent: æqualis igitur est & ΘB ipsi ZE. rursus quoniam duæ AK, KΘ duabus ΔH, HZ æquales sunt, & rectos continent angulos; erit basis AΘ ipsi ΔZ æqualis. estque AB æqualis ΔE: duæ igitur ΘA, AB duabus ZΔ, ΔE sunt æquales, & basis ΘB est æqualis basi ZE: ergo angulus BAΘ angulo EΔZ æqualis erit. eadem ratione & angulus ΘAΛ angulo ZΔΓ est æqualis: nempe si assumamus æquales AΛ, ΔΓ, & jungamus KΛ, ΘΛ, HΓ, ZΓ, quia totus angulus BAΛ est æqualis toti EΔΓ, quorum BAK ipsi EΔH ponitur æqualis; erit reliquus KAΛ æqualis reliquo HΔΓ. & quoniam duæ KA, AΛ duabus HΔ, ΔΓ æquales sunt, & angulos æquales continent; basis KΛ [per 4. 1.] basi HΓ æqualis erit. est autem & KΘ æqualis HZ; duæ igitur ΛK, KΘ duabus ΓH, HZ sunt æquales, angulosque rectos continent: ergo basis ΘΛ æqualis est basi ZΓ. rursus quoniam duæ ΘA, AΛ duabus ZΔ, ΔΓ æquales sunt, & basis ΘΛ æqualis basi ZΓ; erit [per 8. 1.] angulus ΘAΛ æqualis angulo ZΔΓ. atque est angulus BAΛ angulo EΔΓ æqualis.


A
Λ
B
K
Θ

Ad datam igitur rectam lineam & ad datum in ipsa punctum dato angulo solido æqualis angulus solidus constitutus est. quod erat faciendum.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ ἴσαι αἱ ΑΒ, ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΒ, ΚΒ, ΖΕ, ΗΕ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΗ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΖΗΔ, ΖΗΕ γωνιῶν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΘΚΑ, ΘΚΒ γωνιῶν ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΚΑ, ΑΒ δυσὶ ταῖς ΗΔ, ΔΕ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΒΚ βάσει τῇ ΕΗ ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΘ τῇ ΖΗ ἴση, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΘΒ τῇ ΖΕ. πάλιν ἐπεὶ δύο αἱ ΑΚ, ΚΘ δυσὶ ταῖς ΔΗ, ΗΖ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση· δύο δὴ αἱ ΘΑ, ΑΒ δυσὶ ταῖς ΖΔ, ΔΕ ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ ΘΒ βάσει τῇ ΖΕ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΘ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΘΑΛ τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἴση ἐστίν· ἐπειδήπερ ἐὰν ἀπολάβωμεν ἴσας τὰς ΑΛ, ΔΓ, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὰς ΚΛ, ΘΛ, ΗΓ, ΖΓ, ἐπεὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ΒΑΛ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΕΔΓ ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ΒΑΚ τῇ ὑπὸ ΕΔΗ ὑπόκειται ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΚΑΛ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΔΓ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΚΑ, ΑΛ δυσὶ τῶν ΗΔ, ΔΓ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΚΛ βάσει τῇ ΗΓ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΘ τῇ ΗΖ ἴση· δύο δὴ αἱ ΛΚ, ΚΘ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΖ εἰσὶν ἴσαι, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΘΛ βάσει τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΘΑ, ΑΛ δυσὶ τῶν ΖΔ, ΔΓ ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ ΘΛ βάσει τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΛ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΛ τῇ ὑπὸ ΕΔΓ ἴση.


Δ
Γ
Ε
Η
Ζ

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ ἴση στερεὰ γωνία συνέσταται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. XXVII. PROBL.

A data recta linea dato solido parallelepipedo simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

SIT recta quidem linea AB; datum vero solidum parallelepipedum ΔΓ: oportet autem à data recta linea AB dato solido parallelepipedo ΔΓ simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

Constituatur enim ad rectam lineam AB & ad datum in ipsa punctum A angulo solido ad Γ æqualis angulus qui sub angulis BAΘ, ΘAK,

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

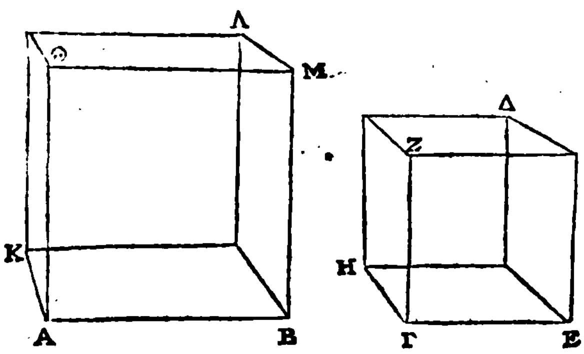
Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΔΓ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ ΔΓ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Γ στερεᾷ γωνίᾳ ἴση, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΒΑΘ, ΘΑΚ, ΚΑΒ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ ΒΑΘ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΑΚ τῇ ὑπὸ ΕΓΗ, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΚΑΘ τῇ ὑπὸ ΗΓΖ, καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΚ, ὡς δὲ ἡ ΗΓ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΑΘ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΘ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΒΘ παραλληλόγραμμον καὶ τὸ ΑΛ στερεόν.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΚ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΓΗ, ΒΑΚ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα τὸ ΗΕ παραλληλόγραμμον τῷ ΚΒ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΚΘ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΖ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστι, καὶ ἔτι τὸ ΖΕ τῷ ΘΒ· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ ΓΔ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ΑΛ στερεοῦ ὅμοιά ἐστιν. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια· ὅλον ἄρα τὸ ΓΔ στερεὸν ὅλῳ τῷ ΑΛ στερεῷ ὅμοιόν ἐστιν.

Ἀπὸ τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ ΓΔ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



KAB contineatur, ita ut angulus quidem BAΘ æqualis sit angulo EΓZ, angulus vero BAK angulo EΓH, & adhuc angulus KAΘ angulo HΓZ æqualis; dein [per 12. 6.] fiat ut EΓ ad ΓH ita BA ad AK, atque ut HΓ ad ΓZ ita KA ad AΘ: ergo ex æquo [per 22. 5.] ut EΓ ad ΓZ ita erit BA ad AΘ. compleantur deniq; parallelogrammum BΘ & AΛ solidum.

Quoniam igitur est ut EΓ ad ΓH ita BA ad AK; erunt circa æquales angulos EΓH, BAK latera proportionalia; ideoque [per 4. 6.] parallelogrammo KB parallelogrammum HE simile. eadem quoq; ratione parallelogrammum KΘ simile est parallelogrammo HZ, & parallelogrammo ΘB parallelogrammum ZE: tria igitur parallelogramma solidi ΓΔ tribus parallelogrammis solidi AΛ similia sunt. sed [per 24. 11.] tria tribus oppositis sunt æqualia & similia: ergo totum ΓΔ solidum toti solido AΛ simile erit.

A data igitur recta linea AB dato solido parallelepipedo ΓΔ simile & similiter positum solidum parallelepipedum AΛ descriptum est. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

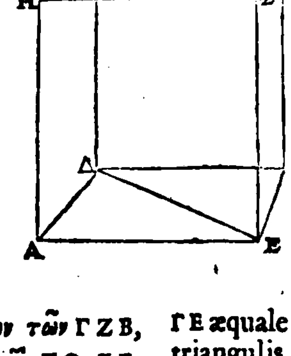
Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου.

Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΒ ἐπιπέδῳ τῷ ΓΔΕΖ τετμήσθω κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τὰς ΓΖ, ΔΕ· λέγω ὅτι δίχα τμηθήσεται τὸ ΑΒ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ΓΔΕΖ ἐπιπέδου.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΓΗΖ τρίγωνον τῷ ΓΒΖ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΑΔΕ τῷ ΔΕΘ, ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν ΓΑ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΕ ἴσον, ἀπεναντίον γάρ, τὸ δὲ ΗΕ τῷ ΓΘ· καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΓΗΖ, ΑΔΕ τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΗΕ, ΑΓ, ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΓΖΒ, ΔΕΘ τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΓΘ, ΒΕ, ΓΕ, ὑπὸ γὰρ ἴσων ἐπιπέδων περιέχονται τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει· ὥστε ὅλον τὸ ΑΒ στερεὸν δίχα τέτμηται ὑπὸ τοῦ ΓΔΕΖ ἐπιπέδου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXVIII. Theor.

Si solidum parallelepipedum plano secetur per diagonales oppositorum planorum, solidum ab ipso plano bifariam secabitur.



Solidum enim parallelepipedum AB secetur plano ΓΔEZ per diagonales oppositorum planorum, videlicet ΓZ, ΔE: dico solidum AB à plano ΓΔEZ bifariam secari.

Quoniam enim æquale est [per 34. 1.] ΓHZ triangulum triangulo ΓBZ, triangulum vero AΔE triangulo ΔEΘ; est autem [per 24. 11.] & ΓA parallelogrammum parallelogrammo BE æquale, oppositum enim est; & parallelogrammum HE æquale parallelogrammo ΓΘ: erit [per 10. def. 11.] prisma contentum sub duobus triangulis ΓHZ, AΔE & tribus parallelogrammis HE, AΓ, ΓE æquale prismati quod continetur sub duobus triangulis ΓZB, ΔEΘ & tribus parallelogrammis ΓΘ, BE, ΓE; namque sub planis & numero & magnitudine æqualibus continentur: ergo totum AB solidum à plano ΓΔEZ bifariam secatur. quod erat demonstrandum.

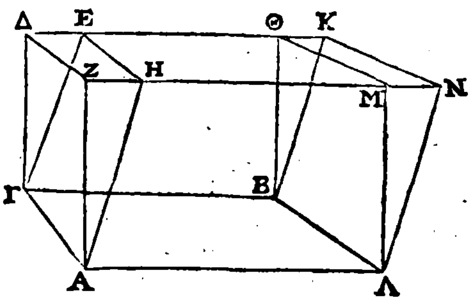
Prop. XXIX. Theor.

Solida parallelepipeda in eadem basi eademque altitudine, quorum insistentes lineæ in eisdem lineis rectis collocantur, inter se sunt æqualia.

Sint enim in eadem basi AB eademque altitudine solida parallelepipeda ΓM, ΓN, quorum lineæ insistentes AZ, AH, ΛM, ΛN, ΓΔ, ΓE, BΘ, BK sint in eisdem rectis lineis ZN, ΔK: dico solidum ΓM solido ΓN æquale esse.

Quoniam enim utrumque ipsorum ΓΘ, ΓK est parallelogrammum, erit [per 34.1.] ΓB utrique ipsarum ΔΘ, EK æqualis: ergo & ΔΘ est æqualis ipsi EK. communis auferatur EΘ: reliqua igitur ΔE æqualis est reliquæ ΘK: quare [per 8.1.] & ΔEΓ triangulum est æquale triangulo ΘKB; parallelogrammum autem ΔH [per 36.1.] est æquale parallelogrammo ΘN. eadem ratione & AZH triangulum æquale est triangulo ΛMN. est autem [per 24.11.] parallelogrammum ΓZ parallelogrammo BM, & parallelogrammum ΓH parallelogrammo BN æquale; opposita enim sunt: ergo [per 10.def.11.] & prisma contentum sub duobus triangulis AZH, ΔEΓ & tribus parallelogrammis AΔ, ΔH, HΓ est æquale prismati quod sub duobus triangulis ΛMN, ΘBK & tribus parallelogrammis BM, NΘ, BN continetur. commune apponatur solidum, cujus basis quidem parallelogrammum AB, oppositum autem ipsi HEΘM: ergo totum ΓM solidum parallelepipedum toti solido parallelepipedo ΓN est æquale.

Solida igitur parallelepipeda in eadem basi eademque altitudine, quorum insistentes lineæ in eisdem lineis rectis collocantur, inter se sunt æqualia. quod erat demonstrandum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΒ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΓΜ, ΓΝ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΖ, ΑΗ, ΛΜ, ΛΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν ἔστωσαν τῶν ΖΝ, ΔΚ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΜ στερεὸν τῷ ΓΝ στερεῷ.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΓΘ, ΓΚ, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΔΘ, ΕΚ· ὥστε καὶ ἡ ΔΘ τῇ ΕΚ ἐστὶν ἴση. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΕΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΕ λοιπῇ τῇ ΘΚ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ τὸ ΔΕΓ τρίγωνον τῷ ΘΚΒ τριγώνῳ ἴσον ἐστί, τὸ δὲ ΔΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΘΝ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΖΗ τρίγωνον τῷ ΛΜΝ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν ΓΖ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΜ παραλληλογράμμῳ ἴσον, τὸ δὲ ΓΗ τῷ ΒΝ, ἀπεναντίον γάρ· καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΑΖΗ, ΔΕΓ τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΑΔ, ΔΗ, ΗΓ ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΛΜΝ, ΘΒΚ τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΒΜ, ΝΘ, ΒΝ. κοινὸν προσκείσθω τὸ στερεὸν, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΗΕΘΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΜ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ ΓΝ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἴσον ἐστί.

Τὰ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXX. Theor.

Solida parallelepipeda in eadem basi eademque altitudine, quorum lineæ insistentes in eisdem lineis rectis non collocantur, inter se æqualia sunt.

Sint enim in eadem basi AB & eadem altitudine solida parallelepipeda ΓM, ΓN, quorum insistentes lineæ AZ, AH, ΛM, ΛN, ΓΔ, ΓE, BΘ, BK non sint in eisdem rectis lineis: dico solidum ΓM solido ΓN æquale esse.

Producantur enim NK, ΔΘ & etiam HE, ZM, atque conveniant inter se in punctis O, P, Π, Ξ: & AΞ, ΛO, ΓΠ, BP jungantur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

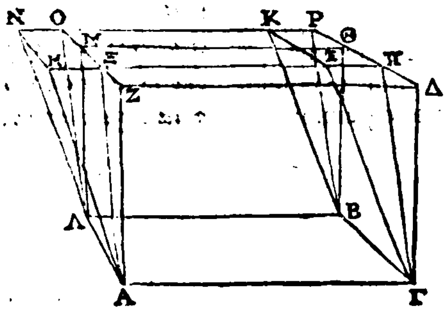
Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Ἔστω γὰρ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΒ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΓΜ, ΓΝ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΖ, ΑΗ, ΛΜ, ΛΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ μὴ ἔστωσαν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΜ στερεὸν τῷ ΓΝ στερεῷ.

Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ αἱ ΝΚ, ΔΘ καὶ ἔτι αἱ ΗΕ, ΖΜ, καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὰ Ο, Ρ, Π, Ξ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ΑΞ, ΛΟ, ΓΠ, ΒΡ.

ἴσον

ἴσον δή ἐστι ΓΜ στερεὸν, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΖΔΘΜ τῷ ΓΟ στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΞΠΡΟ, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΑΓΒΛ, καὶ αὐτῶν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΖ, ΑΞ, ΛΜ, ΛΟ, ΓΔ, ΓΠ, ΒΘ, ΒΡ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ΖΟ, ΔΡ. ἀλλὰ τὸ ΓΟ στερεὸν, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΞΠΡΟ, ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΝ στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΗΕΚΝ, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΑΓΒΛ, καὶ αὐτῶν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΗ, ΑΞ, ΓΕ, ΓΠ, ΛΝ, ΛΟ, ΒΚ, ΒΡ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ΗΠ, ΝΡ· ὥστε καὶ τὸ ΓΜ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΝ στερεῷ.



Τὰ ἄρα ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

solidum ΓΜ, cujus basis quidem ΑΓΒΛ parallelogrammum ipsi autem oppositum ΖΔΘΜ, est [per 29. 11.] æquale solido ΓΟ cujus basis parallelogrammum ΑΓΒΛ & ei oppositum ΞΠΡΟ, in eadem enim sunt basi ΑΓΒΛ, & ipsorum insistentes lineæ ΑΖ, ΑΞ, ΛΜ, ΛΟ, ΓΔ, ΓΠ, ΒΘ, ΒΡ sunt in eisdem rectis lineis ΖΟ, ΔΡ. sed solidum ΓΟ, cujus basis quidem parallelogrammum ΑΓΒΛ ipsi autem oppositum ΞΠΡΟ, est [per 29. 11.] æquale solido ΓΝ, cujus basis ΑΓΒΛ parallelogrammum & ipsi oppositum ΗΕΚΝ; etenim in eadem sunt basi ΑΓΒΛ, & eorum insistentes lineæ ΑΗ, ΑΞ, ΓΕ, ΓΠ, ΛΝ, ΛΟ, ΒΚ, ΒΡ sunt in eisdem rectis lineis ΗΠ, ΝΡ: quare & solidum ΓΜ solido ΓΝ æquale erit.

Solida igitur parallelepipeda in eadem basi eademque altitudine, quorum lineæ insistentes in eisdem rectis lineis non collocantur, inter se æqualia sunt, quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

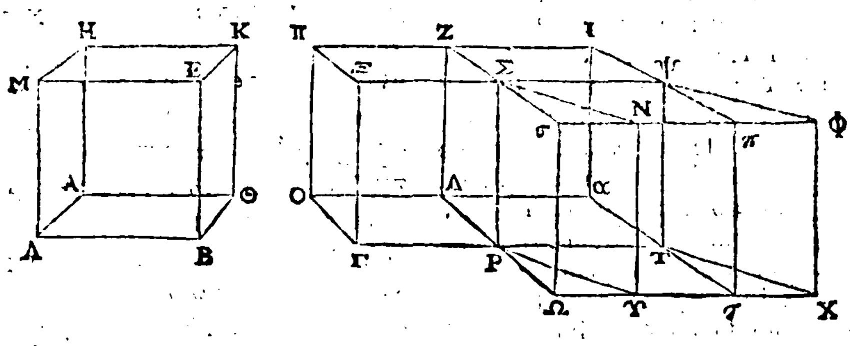
Τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Prop. XXXI. Theor.

Solida parallelepipeda, quæ in æqualibus sunt basibus & eadem altitudine, inter se sunt æqualia.

Ἔστω ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΕ, ΓΖ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕ στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ.

Sint in æqualibus basibus ΑΒ, ΓΔ solida parallelepipeda ΑΕ, ΓΖ, & in eadem altitudine: dico solidum ΑΕ solido ΓΖ æquale esse.

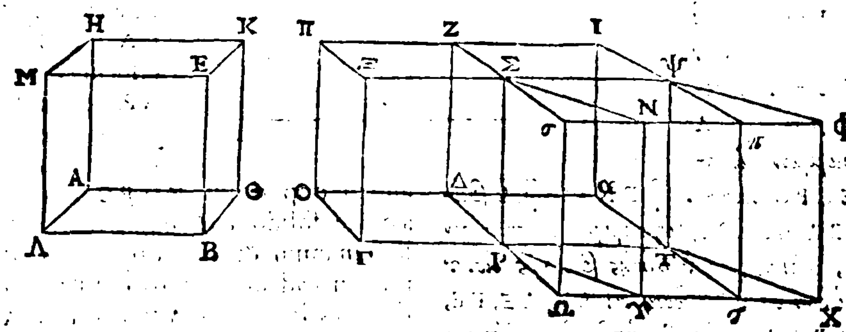


Ἐστωσαν δὴ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΘΚ, ΒΕ, ΑΗ, ΛΜ, ΟΠ, ΔΖ, ΓΞ, ΡΣ πρὸς ὀρθὰς ταῖς ΑΒ, ΓΔ βάσεσιν, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΛΒ τῇ ὑπὸ ΓΡΔ ἄνισος, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ ΓΡ εὐθεῖα ἡ ΡΤ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΡΤ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ρ τῇ ὑπὸ ΑΛΒ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΤΡΥ, καὶ κείσθω τῇ μὲν ΑΛ ἴση ἡ ΡΤ, τῇ δὲ ΛΒ ἴση ἡ ΡΥ, καὶ πρὸς τῷ Υ σημείῳ τῇ ΡΤ παράλληλος ἀνεστάτω ἡ ΥΧ, καὶ συμπεπληρώσθω ἥ τε ΡΧ βάσις καὶ τὸ ΨΥ στερεόν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΤΡ, ΡΥ δυσὶ ταῖς ΑΛ, ΛΒ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι·

Sint autem primo insistentes lineæ ΘΚ, ΒΕ, ΑΗ, ΛΜ, ΟΠ, ΔΖ, ΓΞ, ΡΣ ad rectos angulos basibus ΑΒ, ΓΔ, angulus autem ΑΛΒ angulo ΓΡΔ sit inæqualis, & producatur ipsi ΓΡ in directum ΡΤ, constituaturque [per 23. 1.] ad rectam lineam ΡΤ, & ad punctum in ipsa Ρ angulo ΑΛΒ æqualis angulus ΤΡΥ, & ponatur ipsi quidem ΑΛ æqualis ΡΤ, ipsi vero ΛΒ æqualis ΡΥ, & per punctum Υ ipsi ΡΤ parallela ducatur ΧΥ, compleanturque basis ΡΧ & ΨΥ solidum. quoniam igitur duæ ΤΡ, ΡΥ duabus ΑΛ, ΛΒ æquales sunt, & angulos continent æquales;

æquales; erit parallelogrammum P X æquale & simile parallelogrammo Θ Λ. & rursus quoniam Α Λ est æqualis Ρ Τ, & Λ Μ ipsi Ρ Σ, angulosque æquales continet; parallelogrammum Ρ Ψ parallelogrammo Λ Μ æquale & simile erit. eadem ratione Λ Ε parallelogrammum ipsi Σ Τ æquale est & simile: tria igitur parallelogramma solidi Α Ε tribus parallelogrammis solidi Ψ Τ æqualia & similia sunt. sed [per 24.11.] tria tribus opposita æqualia sunt & similia: totum igitur Α Ε solidum parallelepipedum [per 10. def.11.] toti solido parallelepipedo Ψ Τ est æquale. producantur Δ Ρ, Χ Τ conveniantque inter se in puncto Ω, & per Τ ipsi Δ Ω parallela ducatur Τ τ, & producantur Τ τ, Ο Δ donec conveniant in α, compleanturque solida Ω Ψ, Ρ Ι: solidum igitur Ψ Ω, cujus basis est Ρ Ψ parallelogrammum ipsi autem oppositum Ω π, est [per 29.11.] æquale solido Ψ Τ cujus basis est Ρ Ψ parallelogrammum & ipsi oppositum Υ Φ, in eadem enim sunt basi Ρ Ψ & eadem altitudine, & eorum insistentes lineæ Ρ Ω, Ρ Υ, Τ τ, Τ Χ, Σ σ, Σ Ν, Ψ π, Ψ Φ in eisdem sunt rectis lineis Ω Χ, σ Φ. sed solidum Ψ Τ æquale est solido Α Ε: ergo & Ψ Ω solido Α Ε est æquale. præterea quoniam parallelogrammum Ρ Υ Χ Τ [per 35. 1.] est æquale parallelogrammo Ω Τ, etenim in eadem sunt basi Ρ Τ & in eisdem parallelis Ρ Τ, Ω Χ; sed & parallelogrammum Ρ Υ Χ Τ parallelogrammo Γ Δ est æquale, quoniam & ipsi Α Β: parallelogrammum igitur Ω Τ æquale est parallelogrammo Γ Δ. aliud autem est parallelogrammum Δ Τ: est igitur [per 7.5.] ut Γ Δ basis ad basim Δ Τ ita Ω Τ ad ipsam Δ Τ. & quoniam solidum parallelepipedum Γ Ι secatur plano Ρ Ζ planis oppositis parallelo; erit [per 25. 11.] ut Γ Δ basis ad basim Δ Τ ita solidum Γ Ζ ad Ρ Ι solidum. eadem ratione quoniam solidum parallelepipedum Ω Ι secatur plano Ρ Ψ oppositis planis parallelo, ut Ω Τ basis ad basim Δ Τ ita erit solidum Ω Ψ ad Ρ Ι solidum. sed ut Γ Δ basis ad basim Δ Τ ita basis Ω Τ ad ipsam Τ Δ: ut igitur solidum Γ Ζ ad Ρ Ι solidum ita [per 11.5.] solidum Ω Ψ ad solidum Ρ Ι. quod cum utrumque solidorum Γ Ζ, Ω Ψ ad solidum Ρ Ι eandem habet rationem, solidum Γ Ζ [per 9. 5.] solido Ω Ψ est æquale. solidum autem Ω Ψ ostensum est æquale solido Α Ε: ergo & Α Ε ipsi Γ Ζ æquale erit. Sed non sint insistentes lineæ Α Η, Θ Κ, Β Ε, Λ Μ, Γ Ξ, Ο Π, Δ Ζ, Ρ Σ ad

ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον τὸ Ρ Χ παραλληλόγραμμον τῷ Θ Λ παραλληλογράμμῳ. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν Α Λ τῇ Ρ Τ, ἡ δὲ Λ Μ τῇ Ρ Σ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ Ρ Ψ παραλληλόγραμμον τῷ Λ Μ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ Λ Ε τῷ Σ Τ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ Α Ε στερεοῦ τρισὶ



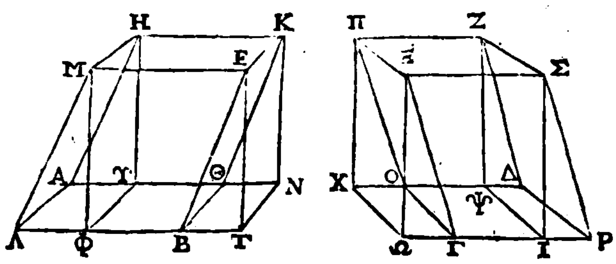
παραλληλογράμμοις τοῦ Ψ Τ στερεοῦ ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια· ὅλον ἄρα τὸ Α Ε στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ Ψ Τ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἴσον ἐστί. διήχθωσαν αἱ Δ Ρ, Χ Υ καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Ω, καὶ διὰ τοῦ Τ τῇ Δ Ω παράλληλος ἤχθω ἡ τ Τ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἡ Τ τ καὶ ἡ Ο Δ καὶ συνεζεύχθωσαν κατὰ τὸ α, καὶ συμπεπληρώσθωσαν τὰ Ω Ψ, Ρ Ι στερεά· ἴσον δή ἐστι τὸ Ψ Ω στερεὸν, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ Ρ Ψ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ Ω π τῷ Ψ Τ στερεῷ, οὗ βάσις ἐστὶ τὸ Ρ Ψ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ Υ Φ, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς Ρ Ψ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ αὐτῶν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ Ρ Ω, Ρ Υ, Τ τ, Τ Χ, Σ σ, Σ Ν, Ψ Π, Ψ Φ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν Ω Χ, σ Φ. ἀλλὰ τὸ Ψ Τ στερεὸν τῷ Α Ε ἴσον ἐστί· καὶ τὸ Ψ Ω ἄρα στερεὸν τῷ Α Ε στερεῷ ἴσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ Ρ Υ Χ Τ παραλληλόγραμμον τῷ Ω Τ παραλληλογράμμῳ, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς Ρ Τ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς Ρ Τ, Ω Χ, ἀλλὰ τὸ Ρ Υ Χ Τ τῷ Γ Δ ἐστὶν ἴσον ἐπεὶ καὶ τῷ Α Β· καὶ τὸ Ω Τ ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ Γ Δ ἐστὶν ἴσον. ἄλλο δὲ τὸ Δ Τ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Γ Δ βάσις πρὸς τὴν Δ Τ οὕτως ἡ Ω Τ πρὸς τὴν Δ Τ. καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ Γ Ι ἐπιπέδῳ τῷ Ρ Ζ τέτμηται, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἡ Γ Δ βάσις πρὸς τὴν Δ Τ βάσιν οὕτως τὸ Γ Ζ στερεὸν πρὸς τὸ Ρ Ι στερεόν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ Ω Ι ἐπιπέδῳ τῷ Ρ Ψ τέτμηται, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἡ Ω Τ βάσις πρὸς τὴν Δ Τ βάσιν οὕτως τὸ Ω Ψ στερεὸν πρὸς τὸ Ρ Ι στερεόν. ἀλλ᾽ ὡς ἡ Γ Δ βάσις πρὸς τὴν Δ Τ οὕτως ἡ Ω Τ πρὸς τὴν Τ Δ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ Ζ στερεὸν πρὸς τὸ Ρ Ι στερεὸν οὕτως τὸ Ω Ψ στερεὸν πρὸς τὸ Ρ Ι στερεόν· ἑκάτερον ἄρα τῶν Γ Ζ, Ω Ψ στερεῶν πρὸς τὸ Ρ Ι τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα τὸ Γ Ζ στερεὸν τῷ Ω Ψ στερεῷ. ἀλλὰ τὸ Ω Ψ τῷ Α Ε ἐδείχθη ἴσον· καὶ τὸ Α Ε ἄρα τῷ Γ Ζ ἐστὶν ἴσον. Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ Α Η, Θ Κ, Β Ε, Λ Μ, Γ Ξ, Ο Π, Δ Ζ, Ρ Σ

πρὸς

πρὸς ὀρθὰς ταῖς ΑΒ, ΓΔ βάσεσι· λέγω πάλιν ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕ στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ. ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Κ, Ε, Η, Μ, Π, Ζ, Ξ, Σ σημείων ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον κάθετοι αἱ ΚΝ, ΕΤ, ΗΥ, ΜΦ, ΠΧ, ΖΨ, ΞΩ, ΣΙ, καὶ συμβαλλέτωσαν τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Ν, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω, Ι σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΤ, ΥΦ, ΝΥ, ΤΦ, ΧΨ, ΧΩ, ΩΙ, ΨΙ· ἴσον δή ἐστι τὸ ΚΦ στερεὸν τῷ ΠΙ στερεῷ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΚΜ, ΠΣ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι πρὸς ὀρθάς εἰσι ταῖς βάσεσιν. ἀλλὰ τὸ μὲν ΚΦ στερεὸν τῷ ΑΕ στερεῷ ἴσον ἐστί, τὸ δὲ ΠΙ τῷ ΓΖ, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν· καὶ τὸ ΑΕ ἄρα στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ ἐστιν ἴσον.

Τὰ ἄρα ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

rectos angulos ipsis A B, Γ Δ basibus: dico rursus solidum A E æquale esse solido Γ Z. ducantur [per 11.11.] à punctis K, E, H, M, Π, Z, Ξ, Σ ad subjectum planum perpendiculares KN, ET, HY, MΦ, ΠX, ZΨ, ΞΩ, ΣI quæ plano in punctis N, T, Y, Φ, X, Ψ, Ω, I occurrant, & jungantur N T, YΦ, N Y, T Φ, X Ψ, X Ω, Ω I, Ψ I: æquale igitur est [per 31.11.] solidum solido Π I; in æqualibus enim sunt K Φ basibus K M, Π Σ & in eadem altitudine, & illorum insistentes ad rectos angulos sunt basibus. sed [per 30.11.] K Φ solidum solido A E est æquale; solidum vero Π I æquale solido Γ Z, si quidem in eadem sunt basi & in eadem altitudine, & illorum insistentes lineæ non sunt in eisdem rectis lineis: ergo & solidum A E solido Γ Z æquale erit.



Solida igitur parallelepipeda, quæ in æqualibus sunt basibus & eadem altitudine, inter se sunt æqualia. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβʹ.

Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ· λέγω ὅτι τὰ ΑΒ, ΓΔ στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις, τουτέστιν ὡς ἡ ΑΕ βάσις πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεόν.

Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΖΗ τῷ ΑΕ ἴσον τὸ ΖΘ, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς ΖΘ ὕψους δὲ αὐτοῦ τῷ ΓΔ στερεὸν παραλληλεπίπεδον συμπεπληρώσθω τὸ ΗΚ· ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΗΚ στερεῷ, ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΑΕ, ΖΘ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΚ ἐπιπέδῳ τῷ ΔΗ τέτμηται, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΖ βάσις πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν οὕτως τὸ ΘΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΔΓ στερεόν. ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΘ βάσις τῇ ΑΕ βάσει, τὸ δὲ ΗΚ στερεὸν τῷ ΑΒ στερεῷ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΑΕ βάσις πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεόν.

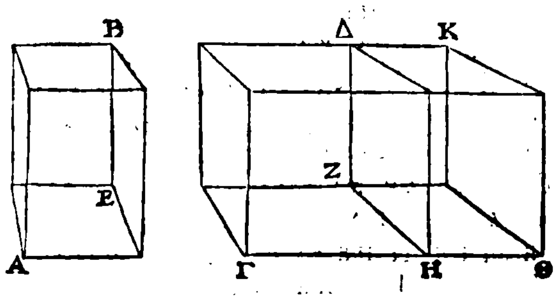
Τὰ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXXII. THEOR.

Solida parallelepipeda, quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases.

Sint solida parallelepipeda A B, Γ Δ, quæ eandem altitudinem habeant: dico inter se esse ut bases; hoc est, ut A E basis ad basim Γ Z ita solidum A B ad Γ Δ solidum.

Applicetur enim [per 45.1.] ad Z H parallelogrammo A E æquale Z Θ, à basi vero Z Θ & eadem altitudine, cum ipso Γ Δ solidum parallelepipedum H K compleatur: solidum igitur A B [per 31.11.] solido H K est æquale; in æqualibus enim sunt basibus A E, Z Θ, & in eadem altitudine. itaque quoniam solidum parallelepipedum Γ K plano Δ H secatur, oppositis planis parallelo; erit [per 25.11.] ut Θ Z basis ad basim Γ Z ita solidum Θ Δ ad Δ Γ solidum. sed basis quidem Z Θ basi A E æqualis est, solidum vero H K æquale solido A B: & igitur est ut A E basis ad basim Γ Z ita solidum A B ad solidum Γ Δ.



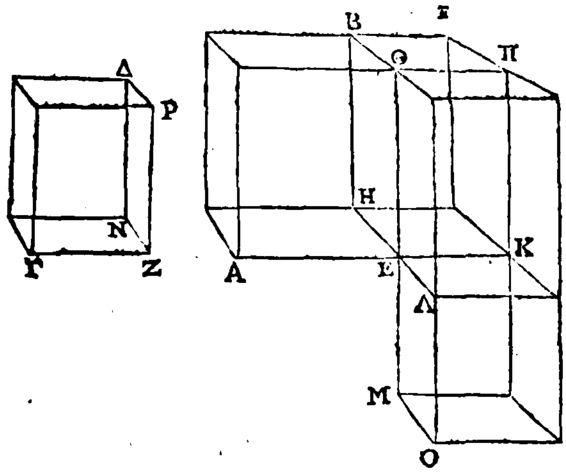
Quare solida parallelepipeda, quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases. quod erat demonstrandum.

PROP. XXXIII. THEOR.

Similia solida parallelepipeda inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.

Sint similia solida parallelepipeda AB, ΓΔ, latus autem AE homologum sit lateri ΓZ: dico solidum AB ad ΓΔ solidum triplicatam rationem habere ejus quam habet AE ad ΓZ.

Producantur enim EK, EΛ, EM in directum ipsis AE, HE, ΘE: & ipsi quidem ΓZ æqualis ponatur EK, ipsi vero ZN æqualis EΛ; & adhuc ipsi ZP æqualis EM, & KΛ parallelogrammum & KO solidum compleantur. quoniam igitur duæ EK, EΛ duabus ΓZ, ZN æquales sunt; sed & angulus KEΛ angulo ΓZN æqualis, quia & angulus AEH ipsi ΓZN æqualis est ob similitudinem solidorum AB, ΓΔ; erit & KΛ parallelogrammum æquale ac simile parallelogrammo ΓN. eadem ratione & parallelogrammum KM æquale est & simile parallelogrammo ΓP, & adhuc parallelogrammum OE ipsi ΔZ parallelogrammo: tria igitur parallelogramma solidi KO tribus parallelogrammis solidi ΓΔ æqualia & similia sunt. sed [per 24.11.] tria tribus oppositis æqualia sunt & similia; totum igitur KO solidum [per 10.def.11.] æquale est & simile toti solido ΓΔ. compleatur HK parallelogrammum, & à basibus quidem HK, KΛ parallelogrammis, altitudine vero eadem cum ipso AB solida, compleantur EΞ, ΛΠ. & quoniam ob similitudinem solidorum AB, ΓΔ est ut AE ad ΓZ ita EH ad ZN, & EΘ ad ZP, æqualis autem ZΓ ipsi EK, & ZN ipsi EΛ, & ZP ipsi EM; erit ut AE ad EK ita HE ad EΛ, & ΘE ad EM. sed [per 1. 6.] ut AE quidem ad EK ita AH parallelogrammum ad parallelogrammum HK; ut autem HE ad EΛ ita HK ad KΛ, & ut ΘE ad EM ita ΠE ad KM: & igitur ut AH parallelogrammum ad parallelogrammum HK ita HK ad KΛ, & ΠE ad KM. sed [per 32. 11.] ut AH quidem ad HK ita AB solidum ad solidum EΞ; ut autem HK ad KΛ ita solidum ΞE ad ΠΛ solidum; & ut ΠE ad KM ita ΠΛ solidum ad solidum KO: & igitur ut solidum AB ad solidum EΞ ita EΞ ad ΠΛ, & ΠΛ ad KO. si autem quatuor sint magnitudines dein-



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Τὰ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστω ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ ΑΕ τῇ ΓΖ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ.

Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ ἐπ' εὐθείας ταῖς ΑΕ, ΗΕ, ΘΕ αἱ ΕΚ, ΕΛ, ΕΜ, καὶ κείσθω τῇ μὲν ΓΖ ἴση ἡ ΕΚ, τῇ δὲ ΖΝ ἴση ἡ ΕΛ, καὶ ἔτι τῇ ΖΡ ἴση ἡ ΕΜ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΚΛ παραλληλόγραμμον, καὶ τὸ ΚΟ στερεόν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΕΚ, ΕΛ δυσὶ ταῖς ΓΖ, ΖΝ ἴσαι εἰσὶν, ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΚΕΛ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΖΝ ἐστὶν ἴση, ἐπειδήπερ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΗ τῇ ὑπὸ ΓΖΝ ἐστὶν ἴση διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ ὅμοιον τὸ ΚΛ παραλληλόγραμμον τῷ ΓΝ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΚΜ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον τῷ ΓΡ παραλληλογράμμῳ, καὶ ἔτι τὸ ΟΕ τῷ ΔΖ· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ ΚΟ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ΓΔ στερεοῦ ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια· ὅλον ἄρα τὸ ΚΟ στερεὸν ὅλῳ τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον. συμπεπληρώσθω τὸ ΗΚ παραλληλόγραμμον, καὶ ἀπὸ βάσεων μὲν τῶν ΗΚ, ΚΛ παραλληλογράμμων, ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ τῷ ΑΒ, στερεὰ συμπεπληρώσθω τὰ ΕΞ, ΛΠ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΝ, καὶ ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΖΡ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΓ τῇ ΕΚ, ἡ δὲ ΖΝ τῇ ΕΛ, ἡ δὲ ΖΡ τῇ ΕΜ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΛ, καὶ ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΜ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ οὕτως τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΚ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΛ οὕτως τὸ ΗΚ πρὸς τὸ ΚΛ, ὡς δὲ ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΜ οὕτως τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΚ οὕτως τὸ ΗΚ πρὸς τὸ ΚΛ καὶ τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΗΚ οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΞ στερεόν, ὡς δὲ τὸ ΗΚ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως τὸ ΞΕ στερεὸν πρὸς τὸ ΠΛ στερεόν, ὡς δὲ τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ οὕτως τὸ ΠΛ στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ στερεόν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΞ οὕτως τὸ ΕΞ πρὸς τὸ ΠΛ, καὶ τὸ ΠΛ πρὸς τὸ ΚΟ. ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη κατὰ τὸ

συνεχὲς

συνεχὲς ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον· καὶ τὸ ΑΒ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΞ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΞ οὕτως τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΚ, καὶ ἡ ΑΕ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΕΚ· ὥστε καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΚΟ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἡ δὲ ΕΚ εὐθεῖα τῇ ΓΖ· καὶ τὸ ΑΒ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος αὐτοῦ πλευρὰ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν ΓΖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ceps proportionales, prima [per 11. def. 5.] ad quartam triplicatam rationem habet ejus quam habet ad secundam: ergo & AB solidum ad solidum KO triplicatam habet rationem ejus quam habet AB ad EΞ. sed [per 32. 11.] ut AB ad EΞ ita AH parallelogrammum ad parallelogrammum HK, & [per 1.6.] AE recta ad ipsam EK: quare & AB solidum ad solidum KO triplicatam rationem habebit ejus quam AE habet ad EK. æquale autem est solidum KO solido ΓΔ,& recta EK rectæ ΓZ est æqualis: ergo & AB solidum ad solidum ΓΔ triplicatam habet rationem ejus quam ipsius latus homologum AE habet ad homologum latus ΓZ. quod erat demonstrandum.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης στερεὸν παραλληλεπίπεδον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ἐπείπερ καὶ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν δευτέραν.

Corollarium.

Ex hoc vero manifestum est, si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad quartam ita esse solidum parallelepipedum quod fit à prima ad solidum à secunda simile & similiter descriptum; quoniam scil. prima ad quartam triplicatam rationem habet ejus quam habet ad secundam.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Τῶν ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι· καὶ ὧν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Ἔστω ἴσα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ· λέγω ὅτι τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος.

Ἔστωσαν γὰρ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΑΗ, ΕΖ, ΑΒ, ΘΚ, ΓΜ, ΝΞ, ΟΔ, ΠΡ πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΑΗ. εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ βάσει, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον, ἔσται καὶ ἡ ΓΜ τῇ ΑΗ ἴση. εἰ γὰρ, τῶν ΕΘ, ΝΠ βάσεων ἴσων οὐσῶν, μὴ εἴη τὰ ΑΗ, ΓΜ ὕψη ἴσα· οὐδ' ἄρα τὸ ΑΒ στερεὸν ἴσον ἔσται τῷ ΓΔ. ὑπόκειται δὲ ἴσον· οὐκ ἄρα ἄνισον τὸ ΓΜ ὕψος τῷ ΑΗ ὕψει· ἴσον ἄρα, καὶ ἔσται ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΑΗ, καὶ φανερὸν ὅτι τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι.

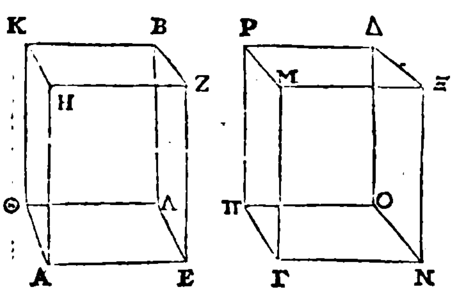
Μὴ ἔστω δὴ ἴση ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ βάσει, ἀλλ' ἔστω μείζων ἡ ΕΘ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΓΜ τῆς ΑΗ. εἰ γὰρ μὴ, οὐδ'

Prop. XXXIV. Theor.

Æqualium solidorum parallelepipedorum bases sunt reciproce proportionales altitudinibus; & quorum solidorum parallelepipedorum bases sunt reciproce proportionales altitudinibus, ea inter se sunt æqualia.

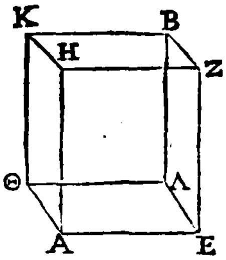
Sint æqualia solida parallelepipeda AB, ΓΔ: dico ipsorum bases esse reciproce proportionales altitudinibus; hoc est ut EΘ basis ad basim NΠ ita esse altitudinem solidi ΓΔ ad solidi AB altitudinem.

Sint enim primum insistentes AH, EZ, AB, ΘK, ΓM, NΞ, OΔ, ΠP ad rectos angulos basibus ipsorum: dico ut EΘ basis ad basim NΠ ita esse ΓM ad AH. si quidem basis EΘ basi NΠ sit æqualis, est autem & AB solidum æquale solido ΓΔ; erit & ΓM æqualis ipsi AH. si enim, basibus EΘ, NΠ æqualibus existentibus, non sint altitudines AH, ΓM æquales; neque AB solidum [per 31. 11.] solido ΓΔ æquale erit. ponitur autem æquale: non igitur inæqualis est altitudo ΓM altitudini AH; ergo est æqualis: ac propterea ut EΘ basis ad basim NΠ ita erit ΓM ad AH. unde constat solidorum parallelepipedorum AB, ΓΔ bases esse reciproce proportionales altitudinibus.



At vero non sit basis EΘ æqualis basi NΠ, sed EΘ sit major. est autem & AB solidum solido ΓΔ æquale: ergo major est ΓM ipsa AH. si enim non, neque

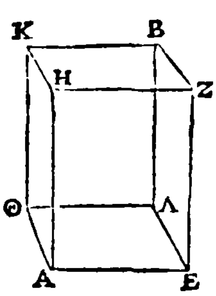
neque rursus [per 31. 11.] forent solida A B, Γ Δ æqualia. ponuntur autem æqualia: itaque ponatur Γ T æqualis ipsi A H; & à basi quidem N Π, altitudine autem Γ T, solidum parallelepipedum Φ Γ compleatur. quoniam igitur solidum A B solido Γ Δ est æquale, aliud autem est solidum Φ Γ, & [per 7. 5.] æqualia ad idem eandem habent rationem; erit ut A B solidum ad solidum Γ Φ ita Γ Δ solidum ad solidum Γ Φ. sed [per 32. 11.] ut A B solidum ad solidum Γ Φ ita basis E Θ ad N Π basim, æqualia enim sunt A B, Γ Φ solida; ut autem solidum Γ Δ ad ipsum Γ Φ [per 25. 11.] ita M Π basis ad basim Π T, & [per 1. 6.] M Γ ad Γ T: & igitur ut basis E Θ ad N Π basim ita M Γ ad Γ T. est autem Γ T æqualis A H; ergo & ut E Θ basis ad basim N Π ita M Γ ad A H: quare solidorum parallelepipedorum A B, Γ Δ bases sunt reciproce proportionales altitudinibus.



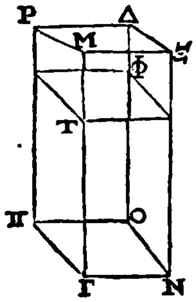
Rursus, solidorum parallelepipedorum A B, Γ Δ bases sint reciproce proportionales altitudinibus; sitque ut E Θ basis ad basim M Π ita solidi Γ Δ altitudo ad altitudinem solidi A B: dico solidum A B solido Γ Δ æqualem esse.

Sint enim rursus insistentes ad rectos angulos basibus. & si quidem basis E Θ sit æqualis basi N Π, estque ut E Θ basis ad basim N Π ita altitudo solidi Γ Δ ad solidi A B altitudinem: erit solidi Γ Δ altitudo altitudini solidi A B æqualis. solida autem parallelepipeda, quæ sunt in æqualibus basibus & eadem altitudine [per 31. 11.] inter se æqualia sunt: ergo solidum A B solido Γ Δ est æquale.

Sed non sit E Θ basis æqualis basi N Π, & sit E Θ major. major igitur est & solidi Γ Δ altitudo altitudine solidi A B, hoc est, Γ M ipsa A H. ponatur rursus ipsi A H æqualis Γ T, & similiter solidum Γ Φ compleatur. itaque quoniam est ut E Θ basis ad basim N Π ita Γ M ad ipsam A H: æqualis autem est A H ipsi Γ T; erit ut basis E Θ ad N Π basim ita M Γ ad Γ T. sed [per 32. 11.] ut basis E Θ ad N Π basim ita A B solidum ad solidum Γ Φ, æquealta enim sunt solida A B, Γ Φ; ut autem M Γ ad Γ T ita [per 1. 6.] & M Π basis ad basim Π T, & [per 25. 11.] solidum Γ Δ ad Γ Φ solidum: & igitur ut solidum A B ad solidum Γ Φ ita solidum Γ Δ ad solidum Γ Φ: igitur utrumque solidorum A B, Γ Δ ad ipsum Γ Φ eandem rationem habet; erit igitur [per 9. 5.] A B solidum solido Γ Δ æquale. quod erat demonstrandum.



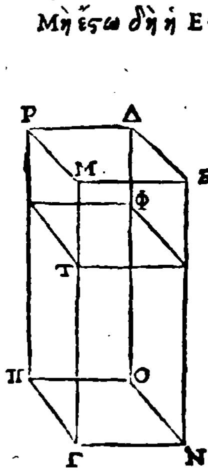
ἄρα πάλιν τὰ A B, Γ Δ στερεὰ ἴσα ἐστί· ὑπόκειν]) δὲ ἴσα. κείσθω οὖν τῇ A H ἴση ἡ Γ T, καὶ συμπεπληρώσθω ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς N Π, ὕψους δὲ τοῦ Γ T, στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ Φ Γ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ A B στερεὸν τῷ Γ Δ στερεῷ, ἄλλο δέ τι τὸ Φ Γ, τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ὡς ἄρα τὸ A B στερεὸν πρὸς τὸ Γ Φ στερεὸν οὕτως τὸ Γ Δ στερεὸν πρὸς τὸ Γ Φ στερεόν. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ A B στερεὸν πρὸς τὸ Γ Φ στερεὸν οὕτως ἡ E Θ βάσις πρὸς τὴν N Π βάσιν, ἰσοϋψῆ γὰρ τὰ A B, Γ Φ στερεά· ὡς δὲ τὸ Γ Δ στερεὸν πρὸς τὸ Γ Φ στερεὸν οὕτως ἡ M Π βάσις πρὸς τὴν Π T βάσιν, καὶ ἡ M Γ πρὸς τὴν Γ T· καὶ ὡς ἄρα ἡ E Θ βάσις πρὸς τὴν N Π βάσιν οὕτως ἡ M Γ πρὸς τὴν Γ T. ἴση δὲ ἡ Γ T τῇ A H· καὶ ὡς ἄρα ἡ E Θ βάσις πρὸς τὴν N Π βάσιν οὕτως ἡ M Γ πρὸς τὴν A H· τῶν A H, Γ Δ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.



ΠΑΛΙΝ δὴ τῶν A B, Γ Δ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ E Θ βάσις πρὸς τὴν N Π βάσιν οὕτως τὸ τοῦ Γ Δ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ A B στερεοῦ ὕψος· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ A B στερεὸν τῷ Γ Δ στερεῷ.

Ἐστωσαν γὰρ πάλιν αἱ ἐφεστηκυῖαι πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν. καὶ εἰ μὲν ἴση ἐστὶν ἡ E Θ βάσις τῇ N Π βάσει, καὶ ἔστιν ὡς ἡ E Θ βάσις πρὸς τὴν N Π βάσιν οὕτως τὸ τοῦ Γ Δ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ A B στερεοῦ ὕψος· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ τοῦ Γ Δ στερεοῦ ὕψος τῷ τοῦ A B στερεοῦ ὕψει. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ A B στερεὸν τῷ Γ Δ στερεῷ.

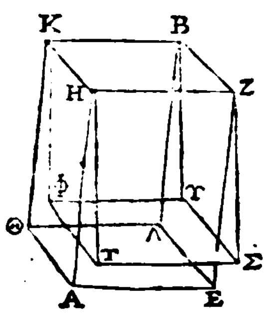
Μὴ ἔστω δὴ ἡ E Θ βάσις τῇ N Π ἴση, καὶ ἔστω μείζων ἡ E Θ· μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ τοῦ Γ Δ στερεοῦ ὕψος τοῦ A B στερεοῦ ὕψους, τουτέστιν ἡ Γ M τῆς A H. κείσθω τῇ A H ἴση πάλιν ἡ Γ T, καὶ συμπεπληρώσθω ὁμοίως τὸ Γ Φ στερεόν. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ E Θ βάσις πρὸς τὴν N Π βάσιν οὕτως ἡ Γ M πρὸς τὴν A H, ἴση δὲ ἡ A H τῇ Γ T· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ E Θ βάσις πρὸς τὴν N Π βάσιν οὕτως ἡ M Γ πρὸς τὴν Γ T. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ E Θ βάσις πρὸς τὴν N Π βάσιν οὕτως τὸ A B στερεὸν πρὸς τὸ Γ Φ στερεόν, ἰσοϋψῆ γάρ ἐστι τὰ A B, Γ Φ στερεά, ὡς δὲ ἡ M Γ πρὸς τὴν Γ T οὕτως ἥτε M Π βάσις πρὸς τὴν Π T βάσιν, καὶ τὸ Γ Δ στερεὸν πρὸς τὸ Γ Φ· καὶ ὡς ἄρα τὸ A B στερεὸν πρὸς τὸ Γ Φ οὕτως τὸ Γ Δ στερεὸν πρὸς τὸ Γ Φ στερεόν· ἑκάτερον ἄρα τῶν A B, Γ Δ πρὸς τὸ Γ Φ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα τὸ A E στερεὸν τῷ Γ Δ στερεῷ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

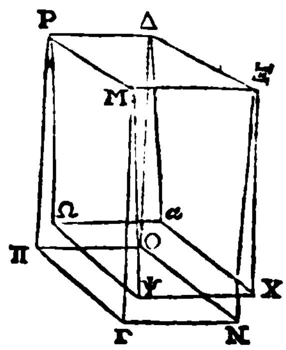


Mγ

Μὴ ἑστώτων δὴ αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΖΕ, ΒΑ, ΗΑ, ΚΘ, ΞΝ, ΔΟ, ΜΓ, ΡΠ πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Ζ, Η, Β, Κ, Ξ, Μ, Δ, Ρ σημείων ἐπὶ τὰ τῶν ΕΘ, ΝΠ βάσεων ἐπίπεδα κάθετοι, καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ τὰ Σ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, α, Ω σημεῖα, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ΖΦ, ΞΩ στερεά· λέγω ὅτι καὶ οὕτως ἴσων ὄντων τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος. ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἀλλὰ τῷ μὲν ΑΒ τὸ ΒΤ ἐστιν ἴσον, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΖΚ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, τὸ δὲ ΔΓ στερεὸν τῷ ΔΨ ἴσον, ἐπί τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΞΡ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν· καὶ τὸ ΒΤ ἄρα στερεὸν τῷ ΔΨ στερεῷ ἴσον ἐστί. τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων, ὧν τὰ ὕψη πρὸς ὀρθάς ἐστι ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος. ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΚ βάσις τῇ ΕΘ βάσει, ἡ δὲ ΞΡ βάσις τῇ ΝΠ βάσει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν ΔΨ, ΒΤ στερεῶν καὶ τῶν ΔΓ, ΒΑ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΔΓ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΑ στερεοῦ ὕψος· τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν ἄρα παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Non sint autem insistentes ZB, BA, HA, KΘ, ΞN, ΔO, MΓ, PΠ ad rectos angulos basibus ipsorum, & [per 11. 11.] à punctis Z, H, B, K, Ξ, M, Δ, P ad plana basium EΘ, NΠ ducantur perpendiculares, quæ planis in punctis Σ, T, Y, Φ, X, Ψ, α, Ω occurrant, & compleantur solida ZΦ, ΞΩ: dico & sic æqualibus existentibus solidis AB, ΓΔ bases esse reciproce proportionales altitudinibus; & ut EΘ basis ad basim NΠ ita esse altitudinem solidi ΓΔ ad solidi AB altitudinem. quoniam enim solidum AB solido ΓΔ est æquale, solido autem AB [per 30. 11.] æquale est solidum BT; in eadem namque sunt basi ZK & eadem altitudine & illorum insistentes non sunt in eisdem rectis lineis; & solidum ΔΓ est æquale solido ΔΨ, in eadem enim rursus sunt basi ΞP & eadem altitudine & illorum insistentes non sunt in eisdem rectis lineis: erit & solidum BT solido ΔΨ æquale. æqualium autem solidorum parallelepipedorum, quorum altitudines basibus ipsorum sunt ad rectos angulos, bases [per part. prior. hujus] sunt reciproce proportionales altitudinibus: est igitur ut ZK basis ad basim ΞP ita altitudo solidi ΔΨ ad altitudinem solidi BT. atque [per 24. 11.] est basis quidem ZK basi EΘ æqualis, basis vero ΞP æqualis basi NΠ: quare ut EΘ basis ad basim NΠ ita est altitudo solidi ΔΨ ad solidi BT altitudinem. eædem autem sunt altitudines solidorum ΔΨ, BT quæ solidorum ΔΓ, BA: est igitur ut EΘ basis ad basim NΠ ita solidi ΔΓ altitudo ad altitudinem solidi BA: ergo solidorum parallelepipedorum AB, ΓΔ bases sunt reciproce proportionales altitudinibus.





ΠΑΛΙΝ δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος, ἴση δὲ ἡ μὲν ΕΘ βάσις τῇ ΖΚ βάσει, ἡ δὲ ΝΠ τῇ ΞΡ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν καὶ τῶν ΒΤ, ΔΨ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος· τῶν ΒΤ, ΔΨ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων τὰ ὕψη πρὸς ὀρθάς εἰσι ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, ἀντιπεπόνθασι δὲ αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα τὸ ΒΤ στερεὸν τῷ ΔΨ στερεῷ. ἀλλὰ τῷ μὲν ΒΤ

Rursus solidorum parallelepipedorum AB, ΓΔ bases sint reciproce proportionales altitudinibus, sitque ut EΘ basis ad basim NΠ ita altitudo solidi ΓΔ ad solidi AB altitudinem: dico solidum AB solido ΓΔ æquale esse.

Iisdem namque constructis, quoniam ut EΘ basis ad basim NΠ ita solidi ΓΔ altitudo ad altitudinem solidi AB; & basis quidem EΘ est æqualis basi ZK, NΠ vero ipsi ΞP: erit ut ZK basis ad basim ΞP ita altitudo solidi ΓΔ ad solidi AB altitudinem. eædem autem sunt altitudines solidorum AB, ΓΔ quæ ipsorum BT, ΔΨ: est igitur ut ZK basis ad basim ΞP ita solidi ΔΨ altitudo ad altitudinem solidi BT: quare solidorum parallelepipedorum BT, ΔΨ bases sunt reciproce proportionales altitudinibus. quorum autem solidorum parallelepipedorum altitudines sunt ad rectos angulos basibus ipsorum, & bases reciproce proportionales altitudinibus, ea [per part. prior. hujus] inter se sunt æqualia: ergo BT solidum solido ΔΨ est æquale. sed [per 30. 11.] solido quidem BT æquale est solidum B A, etenim in eadem sunt basi Z K & eadem altitudine & illorum insistentes non sunt in eisdem rectis lineis; solidum vero Δ Ψ est æquale solido Δ Γ, siquidem in eadem sunt basi Ξ P & eadem altitudine & illorum insistentes non in eisdem rectis lineis: ergo & solidum A B solido Γ Δ est æquale. quod erat demonstrandum.

τὸ B A ἴσον ἐστίν, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς Z K καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, τὸ δὲ Δ Ψ στερεὸν τῷ Δ Γ στερεῷ ἴσον ἐστίν, ἐπί τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς Ξ P καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ οὐκ ἐν ταῖς αὐταῖς εὐθείαις· καὶ τὸ A B ἄρα στερεὸν τῷ Γ Δ στερεῷ ἐστὶν ἴσον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXV. Theor.

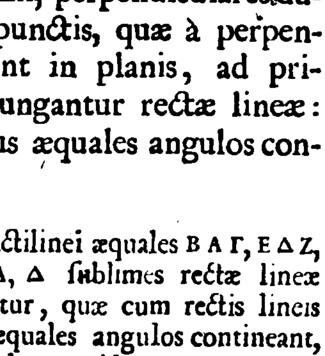
Si sint duo anguli plani æquales, & in ipsorum verticibus rectæ sublimes constituantur, quæ cum rectis lineis à principio positis angulos contineant æquales, alterum alteri; in sublimibus autem sumantur quævis puncta, atque ab ipsis ad plana, in quibus sunt anguli primi, perpendiculares ducantur; & à punctis, quæ à perpendicularibus fiunt in planis, ad primos angulos jungantur rectæ lineæ: cum sublimibus æquales angulos continebunt.

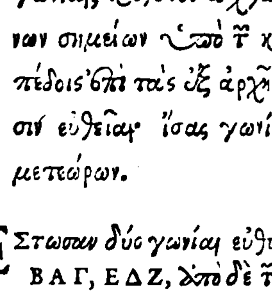
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε΄.

Ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπὶ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐπισταθῶσιν ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἐπὶ δὲ τῶν μετεώρων ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, καὶ ἀπ᾽ αὐτῶν ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, κάθετοι ἀχθῶσιν, ἀπὸ δὲ τῶν γενομένων σημείων ὑπὸ τῶν καθέτων ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἐπὶ τὰς ἐξ ἀρχῆς γωνίας ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι· ἴσας γωνίας περιέξουσι μετὰ τῶν μετεώρων.

Sint duo anguli rectilinei æquales B A Γ, E Δ Z, & à punctis A, Δ sublimes rectæ lineæ A H, Δ M constituantur, quæ cum rectis lineis à principio positis æquales angulos contineant, alterum alteri, angulum quidem M Δ E æqualem angulo H A B, angulum vero M Δ Z angulo H A Γ æqualem; & sumantur in ipsis A H, Δ M quævis puncta H, M, à quibus ad plana per B A Γ, E Δ Z ducantur perpendiculares H Λ, M N, occurrentes planis in punctis Λ, N, & Λ A, N Δ jungantur: dico angulum H A Λ angulo M Δ N æqualem esse.

Ἔστωσαν δύο γωνίαι εὐθύγραμμοι ἴσαι, αἱ ὑπὸ B A Γ, E Δ Z, ἀπὸ δὲ τῶν A, Δ σημείων μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστάτωσαν αἱ A H, Δ M ἴσας περιέχουσαι γωνίας μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ M Δ E τῇ ὑπὸ H A B, τὴν δὲ ὑπὸ M Δ Z τῇ ὑπὸ H A Γ, καὶ εἰλήφθωσαν ἐπὶ τῶν A H, Δ M τυχόντα σημεῖα, τὰ H, M, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν H, M σημείων ἐπὶ τὰ διὰ τῶν B A Γ, E Δ Z ἐπίπεδα κάθετοι αἱ H Λ, M N, καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ Λ, N, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Λ A, N Δ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ H A Λ γωνία τῇ ὑπὸ M Δ N γωνίᾳ.





Ponatur ipsi Δ M æqualis A Θ, & per Θ ipsi H Λ parallela ducatur Θ K. est autem H Λ perpendicularis ad planum per B A Γ; ergo [per 8. 11.] & Θ K ad planum per B A Γ perpendicularis erit. ducantur à punctis K, N ad rectas lineas A B, A Γ, Δ Z, Δ E perpendiculares K B, K Γ, N Z, N E; & Θ Γ, Γ B, M Z, Z E jungantur. quoniam igitur [per 47. 1.] quadratum ex Θ A æquale est quadratis ex Θ K, K A; quadrato autem ex K A æqualia sunt quadrata ex K Γ, Γ A; erit quadratum ex Θ A quadratis ex Θ K, K Γ, Γ A æquale. quadratis autem ex Θ K, K Γ æquale est quadratum ex Θ Γ: quadratum igitur ex Θ A quadratis ex Θ Γ, Γ A æquale erit: & idcirco angulus Θ Γ A est rectus. eadem ratione & angulus Δ Z M re-

Κείσθω τῇ Δ M ἴση ἡ A Θ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ σημείου τῇ H Λ παράλληλος ἡ Θ K. ἡ δὲ H Λ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν B A Γ ἐπίπεδον· καὶ ἡ Θ K ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν B A Γ ἐπίπεδον. ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν K, N σημείων ἐπὶ τὰς A B, A Γ, Δ Z, Δ E εὐθείας κάθετοι αἱ K B, K Γ, N Z, N E, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Θ Γ, Γ B, M Z, Z E. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς Θ A ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν Θ K, K A, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς K A ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν K Γ, Γ A· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Θ A ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν Θ K, K Γ, Γ A. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν Θ K, K Γ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Θ Γ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς Θ A ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν Θ Γ, Γ A· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ Θ Γ A γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ Δ Z M γωνία ὀρθή

ὀρθή ἐστι· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΜ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ὑπὸ ΜΔΖ ἴση· δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΜΔΖ, ΘΑΓ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν ΑΘ τῇ ΔΜ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· ἴση ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΔΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση ἐστίν. ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΒ, ΜΕ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΚ, ΚΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΚ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΚ, ΚΘ ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ. ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΚ, ΚΘ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΘ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΘΚΒ γωνία, διὰ τὸ καὶ τὴν ΘΚ κάθετον εἶναι ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΘ γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΕΜ γωνία ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΘ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ΕΔΜ, ὑπόκειται γάρ, καὶ ἔστιν ἡ ΑΘ τῇ ΔΜ ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΔΕ· δύο δὴ αἱ ΓΑ, ΑΒ δυσὶ ταῖς ΖΔ, ΔΕ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΑΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΔΕ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστί. καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΕ. ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΓΚ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΔΖΝ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΚ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΖΝ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΝ ἴση ἐστίν. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΓΒΚ, ΖΕΝ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν· ἴση ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΖΝ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΔΖ ἴση, δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΚ δυσὶ ταῖς ΔΖ, ΖΝ ἴσαι εἰσὶ καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΚ βάσει τῇ ΔΝ ἴση ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΘ τῇ ΔΜ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΜ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΚ, ΚΘ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΚΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΔΜ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΔΝ, ΝΜ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΔΝΜ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΚ, ΚΘ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΝ, ΝΜ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΝ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ· ἴση ἄρα ἡ ΘΚ τῇ ΜΝ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΘΑ, ΑΚ δυσὶ ταῖς ΜΔ, ΔΝ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΘΚ βάσει τῇ ΝΜ ἐδείχθη ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΚ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΜΔΝ ἐστὶν ἴση. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι ἴσαι, ἐπισταθῶσι δὲ ἀπ' αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἴσαι ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ,

ctus est: ergo angulus ΑΓΘ ipsi ΔΖΜ est æqualis. est autem & ΘΑΓ angulus æqualis angulo ΜΔΖ; duo igitur triangula sunt ΜΔΖ, ΘΑΓ duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulorum subtenditur; videlicet [per constr.] ΑΘ ipsi ΔΜ: ergo [per 26.1.] & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, alterum alteri: quare ΑΓ est æqualis ΔΖ. similiter demonstrabimus & ΑΒ ipsi ΔΕ æquale esse. jungantur ΘΒ, ΜΕ: & quoniam quadratum ex ΑΘ est æquale quadratis ex ΑΚ, ΚΘ; quadrato autem ex ΑΚ æqualia sunt quadrata ex ΑΒ, ΒΚ: erunt quadrata ex ΑΒ, ΒΚ, ΚΘ quadrato ex ΑΘ æqualia. sed quadratis ex ΒΚ, ΚΘ æquale est ex ΒΘ quadratum; rectus enim angulus est ΘΚΒ, propterea quod ΘΚ perpendicularis est ad subjectum planum: quadratum igitur ex ΑΘ æquale est quadratis ex ΑΒ, ΒΘ: quare angulus ΑΒΘ rectus est. eadem ratione & angulus ΔΕΜ est rectus. est autem & ΒΑΘ angulus æqualis angulo ΕΔΜ, ita enim ponitur; at vero ΑΘ æqualis ΔΜ: ergo & ΑΒ ipsi ΔΕ est æqualis. quoniam igitur ΑΓ quidem est æqualis ΔΖ, ΑΒ vero ipsi ΔΕ; adeoque duæ ΓΑ, ΑΒ duabus ΖΔ, ΔΕ sunt æquales. sed & angulus ΓΑΒ angulo ΖΔΕ æqualis: basis igitur ΒΓ [per 4. 1.] basi ΕΖ æqualis est. & triangulum triangulo, & reliqui anguli reliquis æquales sunt: ergo angulus ΑΓΒ æqualis est angulo ΔΖΕ. est autem [per constr.] & rectus ΑΓΚ æqualis recto ΔΖΝ: quare & reliquus ΒΓΚ reliquo ΕΖΝ est æqualis. eadem ratione & ΓΒΚ angulus est æqualis angulo ΖΕΝ. itaque ΓΒΚ, ΖΕΝ sunt duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, quod æqualibus adjacet angulis, sc. ΒΓ ipsi ΕΖ: ergo [per 26.1.] & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt: æqualis igitur est ΓΚ ipsi ΖΝ. est autem & ΑΓ ipsi ΔΖ æqualis; quare duæ ΑΓ, ΓΚ duabus ΔΖ, ΖΝ æquales sunt, & rectos continent angulos: basis igitur ΑΚ [per 4. 1.] est æqualis basi ΔΝ. & cum ΑΘ sit æqualis ΔΜ; erit & quadratum ex ΑΘ quadrato ex ΔΜ æquale. sed [per 47. 1.] quadrato ex ΑΘ æqualia sunt ex ΑΚ, ΚΘ quadrata, etenim rectus est angulus ΑΚΘ; quadrato autem ex ΔΜ æqualia sunt quadrata ex ΔΝ, ΝΜ, quia angulus ΔΝΜ est rectus: quadrata igitur ex ΑΚ, ΚΘ quadratis ex ΔΝ, ΝΜ sunt æqualia; ex quibus quadratum ex ΑΚ æquale est quadrato ex ΔΝ; ergo reliquum ex ΚΘ quadratum reliquo quadrato ex ΝΜ est æquale: & ideo recta linea ΘΚ ipsi ΜΝ æqualis. & cum duæ ΘΑ, ΑΚ duabus ΜΔ, ΔΝ æquales sint, altera alteri, & basis ΘΚ basi ΝΜ ostensa sit æqualis; [per 8.1.] angulus ΘΑΚ angulo ΜΑΝ æqualis erit. quod erat dem.

Corollarium.

Ex hoc vero manifestum est, si sint duo anguli plani rectilinei æquales, ab ipsis autem constituantur sublimes rectæ lineæ æquales, quæ cum rectis lineis à principio positis æquales contineant angulos, alterum alteri, perpendiculares,

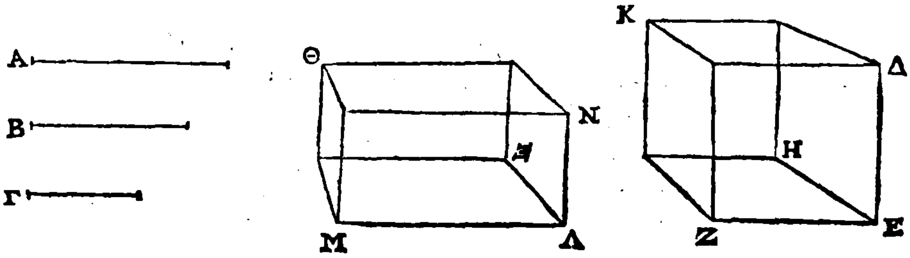
culares, quæ ab ipsis ad plana in quibus sunt primi anguli ducuntur, inter se æquales esse.

Prop. XXXVI. Theor.

Si tres rectæ lineæ proportionales sint; solidum parallelepipedum quod à tribus fit æquale est solido parallelepipedo quod fit à media, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto.

Sint tres rectæ lineæ proportionales A, B, Γ, sitque ut A ad B ita B ad Γ: dico solidum quod fit ex ipsis A, B, Γ æquale esse solido quod fit ex B, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto.

Exponatur solidus angulus ad E contentus sub tribus angulis planis ΔEH, HEZ, ZEΔ; & ipsi quidem B ponatur æqualis unaquæque ipsarum ΔE, HE, EZ, & solidum parallelepipedum EK compleatur; ipsi vero A ponatur æqualis ΛM, & ad rectam lineam ΛM & ad punctum in ipsa Λ [per 26. 11.] constituatur angulo solido ad E æqualis angulus



contentus sub NΛΞ, ΞΛM, MΛN, & ponatur ipsi quidem B æqualis ΛΞ, ipsi vero Γ æqualis ΛN. quoniam igitur est ut A ad B ita B ad Γ, æqualis autem est A ipsi ΛM, & B unicuique ipsarum ΛΞ, EZ, EH, EΔ, & Γ ipsi ΛN; erit ut ΛM ad EZ ita ΔE ad ΛN: & circum æquales angulos MΛN, ΔEZ latera sunt reciproce proportionalia: ergo [per 14.6.] MN parallelogrammum parallelogrammo ΔZ est æquale. & quoniam duo anguli plani rectilinei ΔEZ, NΛM, æquales sunt & in ipsis sublimes rectæ constituuntur ΛΞ, EH æquales inter se, & cum rectis lineis à principio positis æquales continentes angulos, alterum alteri; erunt [per cor. 35. 11.] perpendiculares, quæ à punctis H, Ξ ad plana per NΛM, ΔEZ ducuntur, inter se æquales: ergo solida ΛΘ, EK in eadem sunt altitudine. quæ vero in æqualibus basibus sunt solida parallelepipeda, & in eadem altitudine [per 31. 11.] inter se sunt æqualia: ergo solidum ΘΛ æquale est solido EK. atque ΘΛ quidem est solidum, quod fit à tribus A, B, Γ; solidum vero EK quod fit ex B: ergo solidum quod fit ex ipsis A, B, Γ æquale est solido quod fit ex B, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto.

Si igitur tres rectæ lineæ proportionales sint, solidum parallelepipedum quod à tribus fit æquale est solido parallelepipedo quod fit à media, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto. quod erat demonstrandum.

αἱ ἀπ᾽ αὐτῶν κάθετοι, ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛʹ.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ A, B, Γ, ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Γ· λέγω ὅτι τὸ ἐκ τῶν A, B, Γ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς B στερεῷ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἐκκείσθω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ E περιεχομένη ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ ΔEH, HEZ, ZEΔ, καὶ κείσθω τῇ μὲν B ἴση ἑκάστη τῶν ΔE, HE, EZ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ EK στερεὸν παραλληλεπίπεδον, τῇ δὲ A κείσθω ἴση ἡ ΛM, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΛM εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Λ τῇ πρὸς τῷ E στερεᾷ γωνίᾳ ἴση περιεχομένη ὑπὸ τῶν NΛΞ, ΞΛM, MΛN, καὶ κείσθω τῇ μὲν B ἴση ἡ ΛΞ, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ ΛN. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ μὲν A τῇ ΛM, ἡ δὲ B ἑκάστῃ τῶν ΛΞ, EZ, EH, EΔ, ἡ δὲ Γ τῇ ΛN· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΛM πρὸς τὴν EZ οὕτως ἡ ΔE πρὸς τὴν ΛN. καὶ περὶ ἴσας γωνίας, τὰς ὑπὸ MΛN, ΔEZ αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν· ἴσον ἄρα τὸ MN παραλληλόγραμμον τῷ ΔZ παραλληλογράμμῳ. καὶ ἐπεὶ δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι ἴσαι εἰσὶν αἱ ὑπὸ ΔEZ, NΛM, καὶ ἐπ᾽ αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστήκασιν αἱ ΛΞ, EH ἴσαι τε ἀλλήλαις καὶ ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· αἱ ἄρα ἀπὸ τῶν H, Ξ σημείων κάθετοι, ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ διὰ τῶν NΛM, ΔEZ ἐπίπεδα, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὥστε τὰ ΛΘ, EK στερεὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐστί. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα τὸ ΘΛ στερεὸν τῷ EK στερεῷ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΘΛ τὸ ἐκ τῶν A, B, Γ στερεὸν, τὸ δὲ EK τὸ ἀπὸ τῆς B στερεόν· τὸ ἄρα ἐκ τῶν A, B, Γ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς B στερεῷ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἐὰν ἄρα τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

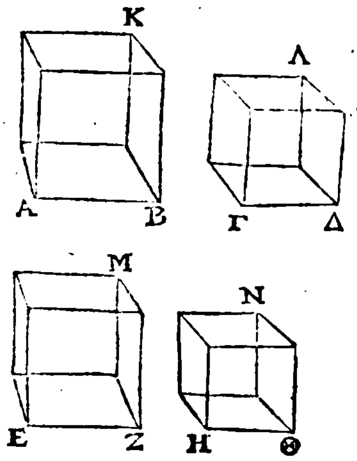
ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ'.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι· καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ἔσται. καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ᾖ· καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα παραλληλεπίπεδα τὰ ΚΑ, ΑΓ, ΜΕ, ΝΗ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΑΓ οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστι τὸ ΚΑ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τῷ ΑΓ ὅμοιον, τὸ ΚΑ ἄρα πρὸς τὸ ΑΓ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ· ὡς ἄρα τὸ ΑΚ πρὸς τὸ ΑΓ οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ.



ΑΛΛΑ δὴ ἔστω ὡς τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ ΑΓ στερεὸν οὕτως τὸ ΜΕ στερεὸν πρὸς τὸ ΝΗ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

Ἐπεὶ γὰρ πάλιν τὸ ΑΚ πρὸς τὸ ΑΓ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, ἔχει δὲ καὶ τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καί ἐστιν ὡς τὸ ΑΚ πρὸς τὸ ΑΓ οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι· καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ἔσται. καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ᾖ· καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXXVII. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales sint; & quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia & similiter descripta proportionalia erunt. & si quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia & similiter descripta proportionalia sint; & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

SInt quatuor rectæ lineæ proportionales AB, ΓΔ, EZ, HΘ, sitque ut AB ad ΓΔ ita EZ ad HΘ, & describantur ab ipsis AB, ΓΔ, EZ, HΘ similia & similiter posita solida parallelepipeda KA, AΓ, ME, NH: dico ut KA ad AΓ ita esse ME ad NH.

Quoniam enim solidum parallelepipedum KA simile est ipsi AΓ, habebit [per 33. 11.] KA ad AΓ triplicatam rationem ejus quam AB habet ad ΓΔ. eadem ratione & solidum ME ad ipsum NH triplicatam rationem habebit ejus quam habet EZ ad HΘ. atque [ex hyp.] ut AB ad ΓΔ ita EZ ad HΘ: ut igitur AK ad AΓ ita ME ad NH.

SED sit ut solidum AK ad solidum AΓ ita ME solidum ad solidum NH: dico ut recta linea AB ad rectam ΓΔ ita esse rectam EZ ad ipsam HΘ.

Quoniam enim rursus AK ad AΓ triplicatam rationem habet ejus quam AB habet ad ΓΔ; habet autem & ME ad NH triplicatam rationem ejus quam EZ ad HΘ; atque ut AK ad AΓ ita ME ad NH: erit ut AB ad ΓΔ ita EZ ad HΘ.

Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales sint; & quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia & similiter descripta proportionalia erunt. & si quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia & similiter descripta proportionalia sint; & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη'.

Ἐὰν ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν ᾖ, καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ· ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν πεσεῖται τῶν ἐπιπέδων ἡ ἀγομένη κάθετος.

Ἐπίπεδον γὰρ τὸ ΓΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΑΔ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τοῦ ΓΔ ἐπιπέδου τυχὸν σημεῖον τὸ Ε·

PROP. XXXVIII. THEOR.

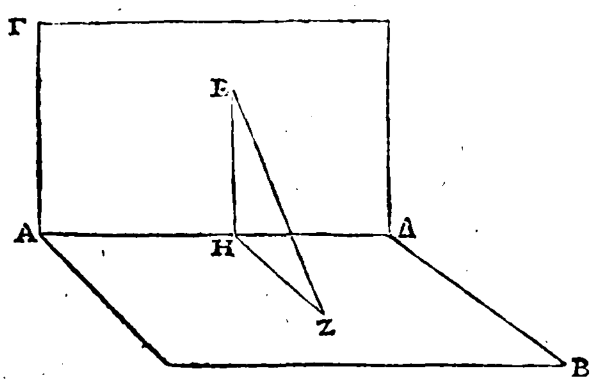
Si planum ad planum rectum sit; & ab aliquo puncto eorum quæ sunt in uno plano ad alterum planum perpendicularis ducatur: ea in communem planorum sectionem cadet.

PLanum enim ΓΔ ad planum AB rectum sit, communis autem eorum sectio sit AΔ, & in ipso ΓΔ plano quodvis punctum E sumatur: dico

dico perpendicularem, quæ à puncto Ε ad planum ΑΒ ducitur, cadere in ipsam ΑΔ.

Non enim, sed si fieri potest, cadat extra, ut ΕΖ, & plano ΑΒ in puncto Ζ occurrat: à puncto autem Ζ [per 10. 1.] ad ΔΑ in plano ΑΒ perpendicularis ducatur ΖΗ, quæ quidem [per 4. def. 11.] & plano ΓΔ ad rectos angulos erit; & ΕΗ jungatur. quoniam igitur ΖΗ plano ΓΔ est ad rectos angulos, contingit autem ipsam recta linea ΕΗ, quæ est in eodem ΓΔ plano: erit [per 3. def. 11.] angulus ΖΗΕ rectus. sed & ΕΖ plano ΑΒ ad rectos angulos est; rectus igitur est angulus ΕΖΗ. quare trianguli ΕΖΗ duo anguli duobus rectis sunt æquales; quod [per 17. 1.] est absurdum: non igitur à puncto Ε ad ΑΒ planum perpendicularis ducta extra rectam lineam ΔΑ cadet: cadet igitur in ipsam ΑΔ.

Si igitur planum ad planum rectum sit, & ab aliquo puncto eorum quæ sunt in uno plano ad alterum planum perpendicularis ducatur: ea in communem planorum sectionem cadet. quod erat demonstrandum.



λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ ΑΒ ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τῆς ΔΑ πεσεῖται.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ ΕΖ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ζ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΔΑ ἐν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΗ, ἥτις καὶ τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΗ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΗ τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΕΗ, οὖσα ἐν τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΗΕ γωνία. ἀλλὰ δὴ καὶ ἡ ΕΖ τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΖΗ ὀρθή ἐστι. τριγώνου δὴ τοῦ ΕΖΗ αἱ δύο γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ ΑΒ ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τῆς ΔΑ· ἐπὶ τὴν ΔΑ ἄρα πεσεῖται.

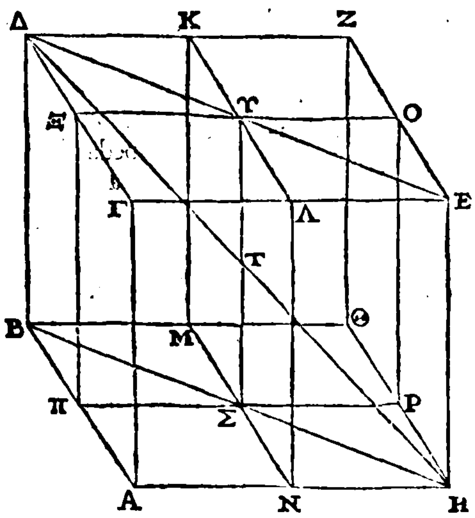
Ἐὰν ἄρα ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν ᾖ, καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ· ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς πεσεῖται τῶν ἐπιπέδων ἡ ἀγομένη κάθετος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXIX. Theor.

Si in solido parallelepipedo oppositorum planorum latera secentur bifariam, per sectiones vero plana ducantur; communis planorum sectio & solidi parallelepipedi diameter se mutuo bifariam secabunt.

In solido enim parallelepipedo ΑΖ oppositorum planorum ΓΖ, ΑΘ latera bifariam secentur in punctis Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Π, Ο, Ρ, & per sectiones plana ducantur ΚΝ, ΞΡ, communis autem planorum sectio sit ΥΣ, & solidi parallelepipedi diameter ΔΗ: dico ΥΣ, ΔΗ sese bifariam secare; hoc est, ΥΤ quidem ipsi ΤΣ; ΔΤ vero ipsi ΤΗ æqualem esse.

Jungantur enim ΔΥ, ΥΕ, ΒΣ, ΣΗ. quoniam igitur ΔΞ parallela est ipsi ΟΕ, alterni anguli ΔΞΥ, ΥΟΕ [per 29. 1.] inter se æquales sunt. & quoniam ΔΞ quidem est æqualis ΟΕ; ΞΥ vero ipsi ΥΟ, & angulos æquales continent; erit [per 4. 1.] basis ΔΥ æqualis basi ΥΕ, & triangulum ΔΞΥ trian-



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθʹ.

Ἐὰν στερεοῦ παραλληλεπιπέδου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσι, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ· ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἡ τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου διάμετρος δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας.

Στερεοῦ γὰρ παραλληλεπιπέδου τοῦ ΑΖ τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τῶν ΓΖ, ΑΘ αἱ πλευραὶ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Π, Ο, Ρ σημεῖα, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθωσαν τὰ ΚΝ, ΞΡ, κοινὴ δὲ τῶν ἐπιπέδων τομὴ ἔστω ἡ ΥΣ, τοῦ δὲ ΑΒ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου διαγώνιος ἡ ΔΗ· λέγω ὅτι αἱ ΥΣ, ΔΗ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας, τουτέστιν ὅτι ἡ μὲν ΥΤ τῇ ΤΣ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ΔΤ τῇ ΤΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΔΥ, ΥΕ, ΒΣ, ΣΗ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΞ τῇ ΟΕ, αἱ ἐναλλὰξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΞΥ, ΥΟΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΞ τῇ ΟΕ, ἡ δὲ ΞΥ τῇ ΥΟ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΔΥ βάσει τῇ ΥΕ ἴση ἐστί, τὸ δὲ ΔΞΥ τρίγωνον

γωνον τῷ ΥΟΕ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΞΥΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΟΥΕ· διὰ δὴ τοῦτο εὐθεῖά ἐστιν ἡ ΔΥΕ· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΣΗ εὐθεῖά ἐστι καὶ ἴση ἡ ΒΣ τῇ ΣΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΑ τῇ ΔΒ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, ἀλλὰ ἡ ΓΑ καὶ τῇ ΕΗ ἴση τέ ἐστι καὶ παράλληλος· καὶ ἡ ΔΒ ἄρα τῇ ΕΗ ἴση τέ ἐστι καὶ παράλληλος. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΗΒ· παράλληλος ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΒΗ. καὶ εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ Δ, Υ, Η, Σ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΗ, ΥΣ· ἐν ἑνὶ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ αἱ ΔΗ, ΥΣ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΒΗ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΤ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΗΤ, ἐναλλὰξ γάρ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΤΥ τῇ ὑπὸ ΗΤΣ ἴση· δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΔΤΥ, ΗΤΣ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν ΔΥ τῇ ΗΣ, ἡμίσειαι γάρ εἰσι τῶν ΔΕ, ΒΗ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξει· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΔΤ τῇ ΤΗ, ἡ δὲ ΥΤ τῇ ΤΣ.

Ἐὰν ἄρα στερεοῦ παραλληλεπιπέδου τῶν ἀπεναντίων ἐπιπέδων, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

gulo ΤΟΕ, & reliqui anguli reliquis angulis æquales: angulus igitur ΞΤΔ est æqualis angulo ΟΤΕ, & ob id [per 14. 1.] ΔΤΕ est recta linea: eademque ratione & ΒΣΗ recta est, atque ΒΣ æqualis ipsi ΣΗ. & quoniam [per 34. 1.] ΓΑ ipsi ΔΒ æqualis est & parallela, sed & ΓΑ æqualis & parallela ipsi ΕΗ; erit & ΔΒ ipsi ΕΗ æqualis & [per 30. 1.] parallela. & ipsas conjungunt rectæ lineæ ΔΕ, ΒΗ: parallela igitur est [per 33. 1.] ΔΕ ipsi ΒΗ. & sumpta sunt in utraque ipsarum quædam puncta Δ, Τ, Η, Σ, & junctæ sunt ΔΗ, ΤΣ: ergo [per 7. 11.] ΔΗ, ΤΣ in uno sunt plano. quoniam igitur ΔΕ parallela est ipsi ΒΗ, erit [per 29. 1.] & ΕΔΤ angulus angulo ΒΗΤ æqualis, alterni enim sunt. est autem & ΔΤΤ angulus [per 15. 1.] æqualis ipsi ΗΤΣ: duo igitur sunt triangula ΔΤΤ, ΗΤΣ duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulorum subtenditur, videlicet ΔΤ ipsi ΗΣ; dimidia enim sunt ipsorum ΔΕ, ΒΗ: ergo [per 26. 1.] & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt: quare ΔΤ quidem est æqualis ΤΗ; ΤΤ vero ipsi ΤΣ.

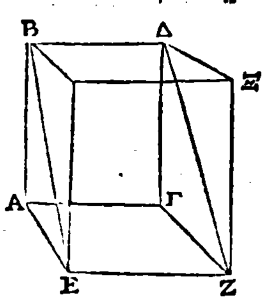
Si igitur in solido parallelepipedo, & quæ sequuntur. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

Ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου· ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα.

Ἔστω πρίσματα ἰσοϋψῆ τὰ ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚΛΜΝ, καὶ τὸ μὲν ἐχέτω βάσιν τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τὸ ΗΘΚ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ἔστω τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΘΚ τριγώνου· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα τῷ ΗΘΚΛΜΝ πρίσματι.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΑΞ, ΗΟ στερεά. καὶ ἐπεὶ διπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΘΚ τριγώνου, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΘΚ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ ΗΘΚ τριγώνου· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΞ στερεὸν τῷ ΗΟ στερεῷ. καὶ ἔστι τοῦ μὲν ΑΞ στερεοῦ ἥμισυ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα, τοῦ δὲ ΗΟ στερεοῦ ἥμισυ τὸ ΗΘΚΛΜΝ πρίσμα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα τῷ ΗΘΚΛΜΝ πρίσματι.



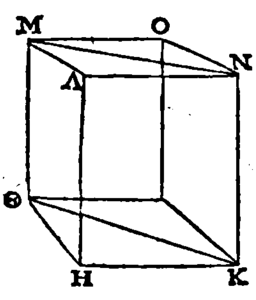
Ἐὰν ἄρα ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XL. Theor.

Si sint duo prismata æquealta, quorum unum quidem basim habeat parallelogrammum, alterum vero triangulum, & parallelogrammum duplum sit trianguli; æqualia erunt ipsa prismata.

Sint prismata æquealta ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚΛΜΝ, & unum quidem basim habeat parallelogrammum ΑΖ, alterum vero ΗΘΚ triangulum, & duplum sit ΑΖ parallelogrammum trianguli ΗΘΚ: dico prisma ΑΒΓΔΕΖ prismati ΗΘΚΛΜΝ æquale esse.

Compleantur enim ΑΞ, ΗΟ solida. & quoniam parallelogrammum ΑΖ trianguli ΗΘΚ est duplum, est autem [per 34. 1.] & ΘΚ parallelogrammum duplum trianguli ΗΘΚ; erit ΑΖ parallelogrammum parallelogrammo ΘΚ æquale. quæ vero in æqualibus sunt basibus solida parallelepipeda & eadem altitudine [per 31. 11.] inter se æqualia sunt: æquale igitur ΑΞ solidum solido ΗΟ. atque est solidi quidem ΑΞ dimidium ΑΒΓΔΕΖ prisma, solidi vero ΗΟ dimidium prisma ΗΘΚΛΜΝ: ergo ΑΒΓΔΕΖ prisma prismati ΗΘΚΛΜΝ est æquale.



Si igitur sint duo prismata æquealta, & quæ sequuntur. quod erat demonstrandum.

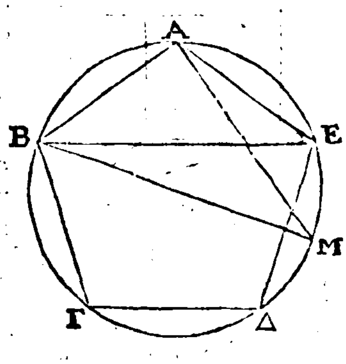
ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΥΟΔΕΚΑΤΟΝ,
Καὶ Στερεῶν δεύτερον.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER DUODECIMUS,
Et Solidorum ſecundus.

Prop. I. Theor.

Similia polygona circulis inſcripta inter ſe ſunt ut quadrata à diametris.

SINT circuli ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, & in ipſis ſimilia polygona ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ; diametri autem circulorum ſint ΒΜ, ΗΝ: dico ut quadratum ex ΒΜ ad quadratum ex ΗΝ ita eſſe ΑΒΓΔΕ polygonum ad polygonum ΖΗΘΚΛ.

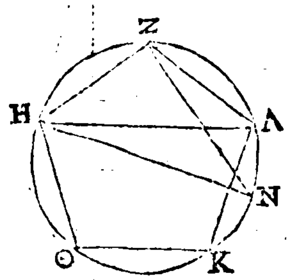


Jungantur enim ΒΕ, ΑΜ, ΗΛ, ΖΝ. & quoniam polygonum ΑΒΓΔΕ ſimile eſt polygono ΖΗΘΚΛ, & [per 1. def. 6.] ΒΑΕ angulus angulo ΗΖΛ eſt æqualis, atque eſt ut ΒΑ ad ΑΕ ita ΗΖ ad ΖΛ: igitur ΒΑΕ, ΗΖΛ ſunt duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum ΒΑΕ angulo ΗΖΛ, circa æquales autem angulos latera proportionalia: quare [per 6. 6.] triangulum ΑΒΕ triangulo ΖΗΛ æquiangulum eſt; ac propterea angulus ΑΕΒ æqualis eſt angulo ΖΛΗ. ſed [per 21. 3.]

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α΄.

Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

ΕΣΤΩΣΑΝ κύκλοι οἱ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, καὶ ἐν αὐτοῖς ὅμοια πολύγωνα ἔστω τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν αἱ ΒΜ, ΗΝ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΜ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΝ τετράγωνον οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΑΜ, ΗΛ, ΖΝ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον τῷ ΖΗΘΚΛ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΛ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΛ· δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΒΑΕ, ΗΖΛ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, τὴν ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΗΖΛ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΗ. ἀλλ᾽ ἡ μὲν ὑπὸ

ὑπὸ ΑΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΜΒ ἴση ἐστίν, ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς περιφερείας βεβήκασιν. ἡ δὲ ὑπὸ ΖΑΗ τῇ ὑπὸ ΖΝΗ· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΜΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΝΗ ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΑΜ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΗΖΝ ἴση· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΒΜ τρίγωνον τῷ ΖΗΝ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΜ πρὸς τὴν ΗΝ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΗΖ. ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς ΒΜ πρὸς τὴν ΗΝ λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΜ τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΝ τετράγωνον, τοῦ δὲ τῆς ΒΑ πρὸς τὴν ΗΖ διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ΑΒΓΔΕ πολυγώνου πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΜ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΝ οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον.

Τὰ ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

angulus quidem AEB angulo AMB est æqualis, in eadem enim circumferentia consistunt. angulus autem ZAH æqualis est angulo ZNH: ergo & AMB angulus est æqualis angulo ZNH. est autem & [per 31.3.] rectus angulus BAM æqualis recto HZN: quare & reliquus reliquo æqualis: æquiangulum igitur est triangulum ABM triangulo ZHN: ergo [per 4.6.] ut BM ad HN ita BA ad HZ. sed [per 20.6.] rationis quidem BM ad HN duplicata est ratio quadrati ex BM ad quadratum ex HN; rationis vero BA ad HZ duplicata est ratio ABΓΔE polygoni ad polygonum ZHΘKΛ: & igitur [per 11.5.] ut quadratum ex BM ad quadratum ex HN ita polygonum ABΓΔE ad ZHΘKΛ polygonum.

Quare similia polygona circulis inscripta inter se sunt, ut quadrata à diametris. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β΄.

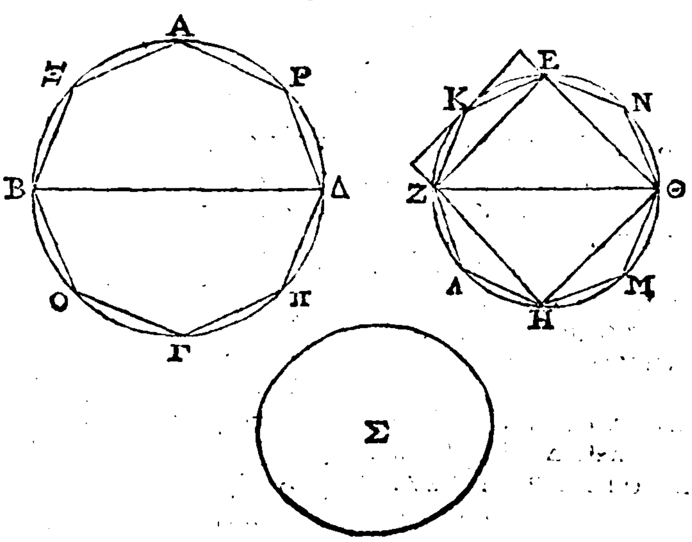
Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

Prop. II. Theor.

Circuli inter se sunt ut quadrata à diametris.

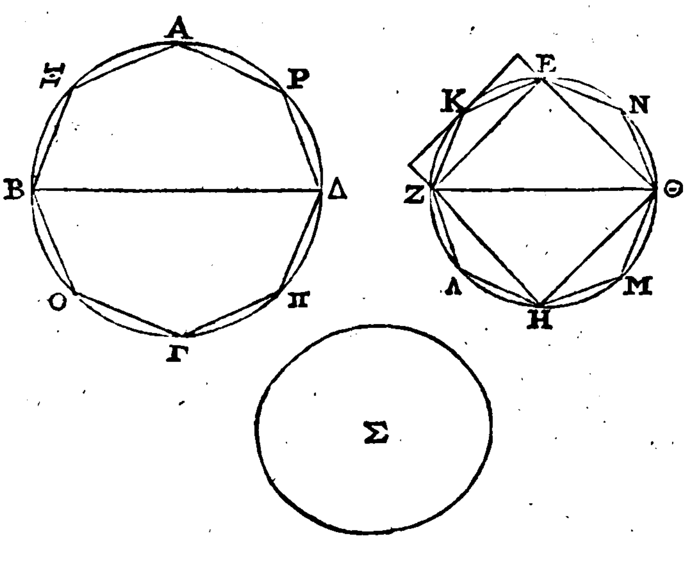
Ἔστωσαν κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, διάμετροι δὲ αὐτῶν ἔστωσαν αἱ ΒΔ, ΖΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Σ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ δὴ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου διαγάγωμεν, τοῦ περιγραφομένου ὑπὸ τὸν κύκλον τετραγώνου ἥμισύ ἐστι τὸ ΕΖΗΘ τετράγωνον. τοῦ δὲ περιγραφέντος τετραγώνου ἐλάσσων ἐστὶν ὁ κύκλος· ὥστε τὸ ΕΖΗΘ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. τετμήσθωσαν δίχα αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΘΜΗ, ΘΝΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ᾽ ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου· ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Κ, Λ, Μ, Ν



Sint circuli ABΓΔ, EZHΘ, diametri autem ipsorum sint BΔ, ZΘ: dico ut quadratum ex BΔ ad quadratum ex ZΘ ita esse circulum ABΓΔ ad EZHΘ circulum.

Si enim non ita est; erit ut quadratum ex BΔ ad quadratum ex ZΘ ita circulus ABΓΔ vel ad spatium aliquod minus circulo EZHΘ vel ad majus. Sit primum ad minus, quod sit Σ. & in circulo EZHΘ describatur quadratum EZHΘ. itaque descriptum in circulo quadratum majus est dimidio circuli EZHΘ; quoniam si per puncta E, Z, H, Θ contingentes circulum ducamus, erit [per 47.1.&31.3.] descripti circa circulum quadrati dimidium quadratum EZHΘ. descripto autem circa circulum quadrato minor est circulus: ergo quadratum EZHΘ majus est dimidio circuli EZHΘ. secentur bifariam circumferentiæ EZ, ZH, HΘ, ΘE in punctis K, Λ, M, N; & EK, KZ, ZΛ, ΛH, HM, MΘ, ΘN, NE jungantur: unumquodque igitur triangulorum EKZ, ZΛH, ΘMH, ΘNE majus est dimidio segmenti circuli in quo consistit; quoniam si per puncta K, Λ, M, N contingentes circulum ducamus, & parallelogramma quæ super rectis lineis EZ, ZH, HΘ, ΘE compleamus, erit [per 37. 1.] unumquodque triangulorum EKZ, ZΛH, HMΘ, ΘNE dimidium parallelogrammi quod ad ipsum est. sed segmentum minus est parallelogrammo: quare unumquodque triangulorum EKZ, ZΛH, HMΘ, ΘNE majus est dimidio segmenti circuli in quo consistit: reliquas igitur circumferentias bifariam secantes, & jungentes rectas lineas, atque hoc semper facientes, relinquemus tandem quædam circuli segmenta, quæ minora erunt excessu, quo circulus EZHΘ ipsum Σ spatium superat. etenim ostensum est, in primo theoremate decimi libri, duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si à majori auferatur majus quam dimidium, & ab eo quod relinquitur rursus majus quam dimidium, & hoc semper fiat, relinqui tandem magnitudinem aliquam, quæ minore magnitudine exposita sit minor. itaque relicta sint segmenta circuli EZHΘ in rectis lineis EK, KZ, ZΛ, ΛH, HM, MΘ, ΘN, NE, quæ majora sint excessu quo circulus EZHΘ ipsum Σ spatium superat: ergo reliquum EKZΛHMΘN polygonum majus erit spatio Σ. describatur etiam in ΑΒΓΔ circulo polygono EKZΛHMΘN simile polygonum ΑΞΒΟΓΠΔΡ: est igitur [per 1. 12.] ut quadratum ex ΒΔ ad quadratum ex ZΘ ita polygonum ΑΞΒΟΓΠΔΡ ad EKZΛHMΘN polygonum. sed [ex hypoth.] ut quadratum ex ΒΔ ad quadratum ex ZΘ ita ΑΒΓΔ circulus ad spatium Σ: ergo & ut circulus ΑΒΓΔ ad spatium Σ ita polygonum ΑΞΒΟΓΠΔΡ ad EKZΛHMΘN polygonum, & permutando ut circulus ΑΒΓΔ ad polygonum quod in ipso est ita spatium Σ ad polygonum EKZΛHMΘN. major autem est circulus ΑΒΓΔ eo qui in ipso est polygono: quare & spatium Σ majus est polygono EKZΛHMΘN. sed & [ex hyp.] minus; quod fieri non potest: non igitur est ut quadratum ex ΒΔ ad quadratum ex ZΘ ita ΑΒΓΔ circulus ad spatium aliquod minus circulo EZHΘ. similiter ostendemus, neque esse ut quadratum ex ZΘ ad quadratum ex ΒΔ ita circulum EZHΘ ad aliquod spatium minus circulo ΑΒΓΔ. Dico etiam neque esse ut quadratum ex ΒΔ ad quadratum ex ZΘ ita circulum ΑΒΓΔ ad aliquod spatium majus circulo EZHΘ. si enim fieri potest,



σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, καὶ ἀναπληρώσωμεν τὰ ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ εὐθειῶν παραλλήλων, ἕκαστον τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνων ἥμισυ ἔσται τοῦ καθ' ἑαυτὸ παραλληλογράμμου. ἀλλὰ τὸ καθ' ἑαυτὸ τμῆμα ἔλαττόν ἐστι τοῦ παραλληλογράμμου· ὥστε ἕκαστον τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου· τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα τμήματα τοῦ κύκλου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ ΕΖΗΘ κύκλος τοῦ Σ χωρίου. ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ θεωρήματι τοῦ ι, ὅτι δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους. λελείφθω οὖν, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ τμήματα τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς ᾗ ὑπερέχει ὁ ΕΖΗΘ κύκλος τοῦ Σ χωρίου· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ Σ χωρίου. ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολυγώνῳ ὅμοιον πολύγωνον τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον οὕτως τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Σ χωρίον· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Σ χωρίον οὕτως τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον οὕτως τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον. μείζων δὲ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τοῦ ἐν αὐτῷ πολυγώνου· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Σ χωρίον τοῦ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολυγώνου. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον. Λέγω δὴ ὅτι οὐδ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον. εἰ γὰρ δυνατόν,

ἔστω

ἴσω πρὸς μεῖζον τὸ Σ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ οὕτως τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ κύκλον· ἀλλ' ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον οὕτως ὁ ΕΖΗΘ πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον, ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον.

Οἱ ἄρα κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

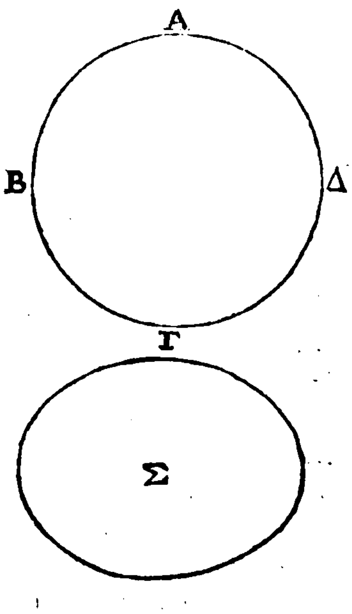
sit ad majus, nempe Σ; erit igitur invertendo ut quadratum ex ΖΘ ad quadratum ex ΒΔ ita spatium Σ ad ΑΒΓΔ circulum: sed [ut infra ostendetur] ut spatium Σ ad circulum ΑΒΓΔ ita circulus ΕΖΗΘ ad aliquod spatium minus circulo ΑΒΓΔ; ergo & ut quadratum ex ΖΘ ad quadratum ex ΒΔ ita ΕΖΗΘ circulus ad aliquod spatium minus circulo ΑΒΓΔ, quod fieri non posse ostensum est: non igitur est ut quadratum ex ΒΔ ad quadratum ex ΖΘ ita circulus ΑΒΓΔ ad spatium aliquod majus ΕΖΗΘ circulo. ostensum autem est neque ad minus: quare ut quadratum ex ΒΔ ad quadratum ex ΖΘ ita erit ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ.

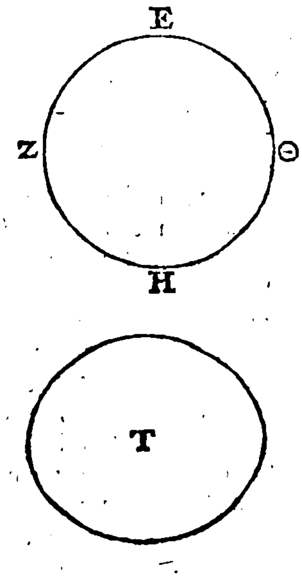
Circuli igitur inter se sunt, ut quadrata à diametris. quod erat demonstrandum.

ΛΗΜΜΑ.

Λέγω δή, ὅτι τοῦ Σ χωρίου μείζονος ὄντος τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, ἐστὶν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον οὕτως ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον.

Γεγονέτω γὰρ ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον· λέγω ὅτι ἔλασσόν ἐστι τὸ Τ χωρίον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον. μεῖζον δὲ τὸ Σ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· μείζων ἄρα καὶ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τοῦ Τ χωρίου· ὥστε ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον.





LEMMA.

Itaque dico, si spatium Σ sit majus circulo ΕΖΗΘ, esse ut spatium Σ ad circulum ΑΒΓΔ ita circulum ΕΖΗΘ ad spatium aliquod circulo ΑΒΓΔ minus.

Fiat enim ut spatium Σ ad circulum ΑΒΓΔ ita ΕΖΗΘ circulus ad spatium Τ: dico spatium Τ circulo ΑΒΓΔ minus esse. quoniam enim est ut spatium Σ ad circulum ΑΒΓΔ ita ΕΖΗΘ circulus ad spatium Τ; erit permutando [per 16.5.] ut spatium Σ ad circulum ΕΖΗΘ ita ΑΒΓΔ circulus ad spatium Τ. majus autem est [ex hyp.] spatium Σ circulo ΕΖΗΘ; ergo ΑΒΓΔ circulus spatio Τ est major; ac propterea ut spatium Σ ad circulum ΑΒΓΔ ita est ΕΖΗΘ circulus ad spatium aliquod circulo ΑΒΓΔ minus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γʹ.

Πᾶσα πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα,

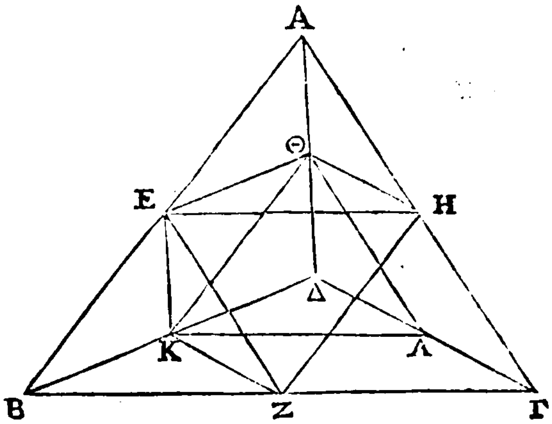
Prop. III. Theor.

Omnis pyramis triangularem habens basim dividitur in duas pyramides æquales & similes inter se quæ triangulares bases habent, easque similes toti; necnon in duo prismata æqualia,

æqualia, quæ dimidio quidem totius pyramidis sunt majora.

SIT pyramis, cujus basis quidem ΑΒΓ triangulum, vertex autem punctum Δ: dico pyramidem ΑΒΓΔ dividi in duas pyramides æquales & similes inter se triangulares bases habentes, similesque toti; necnon in duo prismata æqualia, duo vero prismata dimidio totius pyramidis esse majora.

Secentur enim ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ, ΔΓ bifariam in punctis Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ, & ΕΘ, ΕΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΘ, ΕΚ, ΚΖ, ΖΗ jungantur. quoniam igitur ΑΕ quidem est æqualis ΕΒ; ΑΘ vero ipsi ΘΔ; erit [per 2. 6.] ΕΘ ipsi ΔΒ parallela. eadem ratione & ΘΚ est parallela ipsi ΑΒ: parallelogrammum igitur est ΘΕΒΚ: quare [per 34. 1.] ΘΚ est æqualis ΕΒ. sed ΕΒ ipsi ΑΕ est æqualis: ergo & ΑΕ ipsi ΘΚ æqualis erit. est autem & ΑΘ æqualis ΘΔ: duæ igitur ΑΕ, ΑΘ duabus ΚΘ, ΘΔ æquales sunt, altera alteri, & [per 29. 1.] angulus ΕΑΘ æqualis angulo ΚΘΔ: basis igitur ΕΘ [per 4. 1.] basi ΚΔ est æqualis: quare triangulum ΑΕΘ æquale est & simile triangulo ΘΚΔ. eadem ratione & triangulum ΑΘΗ triangulo ΘΛΔ æquale est & simile. & quoniam duæ rectæ lineæ sese tangentes ΕΘ, ΘΗ duabus rectis lineis sese tangentibus ΚΔ, ΔΛ parallelæ sunt, non autem in eodem plano, [per 10. 11.] æquales angulos continebunt: ergo angulus ΕΘΗ est æqualis angulo ΚΔΛ. rursus quoniam duæ rectæ lineæ ΕΘ, ΘΗ duabus ΚΔ, ΔΛ æquales sunt altera alteri, & angulus ΕΘΗ æqualis angulo ΚΔΛ; erit basis ΕΗ basi ΚΛ æqualis; æquale igitur est & simile triangulum ΕΘΗ triangulo ΚΔΛ. eadem ratione & ΑΕΗ triangulum est æquale & simile triangulo ΘΚΛ; quare pyramis, cujus basis quidem est ΑΕΗ triangulum, vertex autem punctum Θ, æqualis & similis est pyramidi, cujus basis est triangulum ΘΚΛ, & vertex Δ punctum. & quoniam uni laterum trianguli ΑΔΒ, videlicet ipsi ΑΒ, parallela ducta est ΘΚ; erit [per 29. 1.] triangulum ΑΔΒ triangulo ΔΘΚ æquiangulum, & [per 4. 6.] latera habent proportionalia: simile igitur est ΑΔΒ triangulum triangulo ΔΘΚ. & eadem ratione triangulum quidem ΔΒΓ simile est triangulo ΔΚΛ; triangulum vero ΑΔΓ triangulo ΔΘΛ. quod cum duæ rectæ lineæ sese tangentes ΒΑ, ΑΓ duabus rectis lineis sese tangentibus ΚΘ, ΘΛ parallelæ sint, non existentes in eodem plano, [per 10. 11.] æquales angulos continebunt: angulus igitur ΒΑΓ angulo ΚΘΛ est æqualis. atque



καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

Ἔστω πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον· λέγω ὅτι ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας, καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

Τετμήσθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ, ΔΓ δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΘ, ΕΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΘ, ΕΚ, ΚΖ, ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΒ, ἡ δὲ ΑΘ τῇ ΘΔ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΔΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΑΒ παράλληλός ἐστι· παραλληλόγραμμον ἄρα τὸ ΘΕΒΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ τῇ ΕΒ. ἀλλὰ ἡ ΕΒ τῇ ΑΕ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΑΕ ἄρα τῇ ΘΚ ἐστιν ἴση. ἔστι δὴ καὶ ἡ ΑΘ τῇ ΘΔ ἴση· δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΑΘ δυσὶ ταῖς ΚΘ, ΘΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΘ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΘΔ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΕΘ βάσει τῇ ΚΔ ἐστιν ἴση· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΕΘ τρίγωνον τῷ ΘΚΔ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΘΗ τρίγωνον τῷ ΘΛΔ τριγώνῳ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΕΘ, ΘΗ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΚΔ, ΔΛ εἰσιν, οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, ἴσας γωνίας περιέχουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΘΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΔΛ γωνίᾳ. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΘ, ΘΗ δυσὶ ταῖς ΚΔ, ΔΛ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΘΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΔΛ ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΕΗ βάσει τῇ ΚΛ ἐστιν ἴση· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΘΗ τρίγωνον τῷ ΚΔΛ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΕΗ τρίγωνον τῷ ΘΚΛ τριγώνῳ ἴσον καὶ ὅμοιόν ἐστιν· ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον, ἴση καὶ ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΔΒ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΑΒ ἦκται ἡ ΘΚ, ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΔΒ τρίγωνον τῷ ΔΘΚ τριγώνῳ, καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσιν· ὅμοιον ἄρα τὸ ΑΔΒ τρίγωνον τῷ ΔΘΚ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΚΛ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστι, τὸ δὲ ΑΔΓ τῷ ΔΘΛ τριγώνῳ. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΒΑ, ΑΓ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΚΘ, ΘΛ εἰσιν, οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, ἴσας γωνίας περιέχουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΘΛ. καὶ

ἐστιν

ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΛ· ὅμοιον ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΘΚΛ τριγώνῳ· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν ἐστι τὸ ΘΚΛ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. ἀλλὰ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν ἐστι τὸ ΘΚΛ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἐδείχθη ὁμοία πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν ἐστι τὸ ΑΕΗ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον· ὥστε καὶ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν ἐστι τὸ ΑΕΗ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΕΗΘ, ΘΚΛΔ πυραμίδων ὁμοία ἐστὶ τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒΓΔ πυραμίδι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΖ τῇ ΖΓ, διπλάσιόν ἐστι τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΖΓ τριγώνου. καὶ ἐπεὶ ἐὰν δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ ὦσι, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα εἰσὶ τὰ πρίσματα· ἴσον ἄρα τὸ πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΒΚΖ, ΕΘΗ τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΕΒΖΗ, ΕΒΚΘ, ΚΘΗΖ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΗΖΓ, ΘΚΛ τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΚΖΓΛ, ΛΓΗΘ, ΘΚΖΗ. καὶ φανερὸν ὅτι ἑκάτερον τῶν πρισμάτων, οὗ τε βάσις τὸ ΕΒΗΖ παραλληλόγραμμον ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, καὶ οὗ βάσις τὸ ΗΖΓ τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΚΛΘ τρίγωνον, μεῖζόν ἐστιν ἑκατέρας τῶν πυραμίδων, ὧν βάσις μὲν τὰ ΑΕΗ, ΘΚΛ τρίγωνα κορυφαὶ δὲ τὰ Θ, Δ σημεῖα· ἐπειδήπερ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς ΕΖ, ΕΚ εὐθείας, τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΒΖ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον. ἀλλ' ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΒΖ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΕΗ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον, ὑπὸ γὰρ ἴσων καὶ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται· ὥστε καὶ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστι πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΕΗ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον. ἴσον δὲ τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, τῷ πρίσματι, οὗ βάσις μὲν τὸ ΗΖΓ τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΘΚΛ τρίγωνον· ἡ δὲ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΕΗ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΘΚΛ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον· τὰ ἄρα εἰρημένα δύο πρίσματα μείζονά ἐστι τῶν εἰρημένων δύο πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΑΕΗ, ΘΚΛ τρίγωνα κορυφαὶ δὲ τὰ Θ, Δ σημεῖα· ἡ ἄρα ὅλη πυραμὶς, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, διῄρηται εἰς δύο πυραμίδας, ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

est ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΚΘ ad ΘΛ: ergo [per 6. 6.] ΑΒΓ triangulum simile est triangulo ΘΚΛ: ideoque pyramis, cujus basis quidem triangulum ΑΒΓ vertex autem punctum Δ, similis est pyramidi, cujus triangulum ΘΚΛ & vertex punctum Δ. sed pyramis, cujus basis quidem ΘΚΛ triangulum vertex autem punctum Δ, ostensa est similis pyramidi, cujus basis triangulum ΑΕΗ & vertex Θ punctum: quare & pyramis, cujus basis triangulum ΑΒΓ & vertex punctum Δ, similis est pyramidi, cujus basis ΑΕΗ triangulum & vertex punctum Θ: utraque igitur ipsarum ΑΕΗΘ, ΘΚΛΔ pyramidum similis est toti pyramidi ΑΒΓΔ. & quoniam ΒΖ est æqualis ΖΓ, erit [per 41. 1.] ΕΒΖΗ parallelogrammum duplum trianguli ΗΖΓ. & quoniam si sint duo prismata æquealta, quorum unum quidem basim habet parallelogrammum, alterum vero triangulum, sitque parallelogrammum duplum trianguli; sunt [per 40. 11.] ea prismata inter se æqualia: ergo prisma contentum sub duobus triangulis ΒΚΖ, ΕΘΗ & tribus parallelogrammis ΕΒΖΗ, ΕΒΚΘ, ΚΘΗΖ est æquale prismati quod sub duobus triangulis ΗΖΓ, ΘΚΛ & tribus parallelogrammis ΚΖΓΛ, ΛΓΗΘ, ΘΚΖΗ continetur. & manifestum est utrumque ipsorum prismatum, & cujus basis est ΕΒΖΗ parallelogrammum opposita autem ipsi ΘΚ recta linea, & cujus basis est ΗΖΓ triangulum & oppositum ipsi triangulum ΚΛΘ, majus esse utraque pyramidum, quarum bases quidem ΑΕΗ, ΘΚΛ triangula vertices autem puncta Θ, Δ: quoniam si jungamus ΕΖ, ΕΚ rectas lineas, prisma quidem, cujus basis est ΕΒΖΗ parallelogrammum & opposita ipsi recta linea ΘΚ, majus est pyramide, cujus basis ΕΒΖ triangulum vertex autem punctum Κ. sed pyramis, cujus basis triangulum ΕΒΖ, & vertex Κ punctum, [per 10. def. 11.] est æqualis pyramidi, cujus basis ΑΕΗ triangulum & vertex punctum Θ; æqualibus enim & similibus planis continentur: quare & prisma, cujus basis parallelogrammum ΕΒΖΗ opposita autem ipsi recta linea ΘΚ, majus est pyramide, cujus basis ΑΕΗ triangulum & vertex punctum Θ. prisma vero, cujus basis parallelogrammum ΕΒΖΗ & opposita ipsi recta linea ΘΚ, est æquale prismati, cujus basis ΗΖΓ triangulum & ipsi oppositum triangulum ΘΚΛ; & pyramis, cujus basis triangulum ΑΕΗ vertex autem Θ punctum, est æqualis pyramidi, cujus basis ΘΚΛ triangulum & vertex punctum Δ: ergo duo prismata, de quibus dictum est, sunt majora duabus dictis pyramidibus, quorum bases triangula ΑΒΗ, ΘΚΛ vertices autem Θ, Δ puncta: tota igitur pyramis, cujus basis ΑΒΓ triangulum vertex autem punctum Δ, divisa est in duas pyramides æquales & similes inter se & similes toti; & in duo prismata æqualia, quæ dimidio quidem totius pyramidis sunt majora. quod erat demonstrandum.

Prop. IV. Theor.

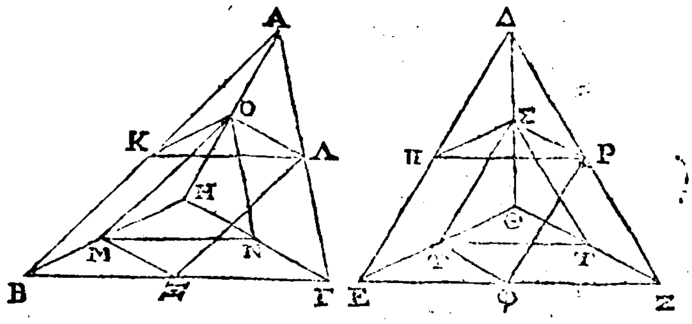
Si sint duæ pyramides æquealtæ, quæ triangulares bases habent, dividatur autem utraque ipsarum, & in duas pyramides æquales inter se similesque toti, & in duo prismata æqualia, atque ortarum pyramidum utraque eodem modo dividatur, idque semper fiat; erit ut unius pyramidis basis ad basim alterius ita prismata omnia in una pyramde ad prismata omnia in altera pyramide numero æqualia.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Ἐὰν ὦσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, διαιρεθῇ δὲ ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τῶν γενομένων πυραμίδων ἑκατέρα τὸν αὐτὸν τρόπον, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίνηται· ἔσται ὡς ἡ τῆς μιᾶς πυραμίδος βάσις πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας πυραμίδος βάσιν οὕτως καὶ τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

Sint duæ pyramides æquealtæ, quæ triangulares bases habent ΑΒΓ, ΔΕΖ, vertices autem sint puncta Η, Θ, & dividatur utraque ipsarum in duas pyramides æquales inter se similesque toti, & in duo prismata æqualia, atque ortarum pyramidum utraque eodem modo divisa intelligatur, atque hoc semper fiat: dico ut ΑΒΓ basis ad basim ΔΕΖ ita esse prismata omnia quæ sunt in pyramide ΑΒΓΗ ad prismata omnia in pyramide ΔΕΖΘ numero æqualia.

Quoniam enim ΒΞ quidem est æqualis ΞΓ, ΑΛ vero æqualis ΛΓ; erit [per 2. 6.] ΞΛ ipsi ΑΒ parallela, & [per 4. 6.] triangulum ΑΒΓ triangulo ΛΞΓ simile. eadem ratione & triangulum ΔΕΖ simile est triangulo ΡΦΖ. & quoniam ΒΓ quidem est dupla ΓΞ, & ΕΖ dupla ipsius ΖΦ, ut ΒΓ ad ΓΞ ita erit ΕΖ ad ΖΦ. & descripta sunt ab ipsis ΒΓ, ΓΞ similia & similiter pósita rectilinea ΑΒΓ, ΛΞΓ, ab ipsis vero ΕΖ, ΖΦ similia & similiter posita rectilinea ΔΕΖ, ΡΦΖ: est igitur [per 22. 6.] ut ΒΑΓ triangulum ad triangulum ΛΞΓ ita triangulum ΔΕΖ ad ΡΦΖ triangulum; & permutando ut triangulum ΑΒΓ ad triangulum ΔΕΖ ita ΛΞΓ triangulum ad triangulum ΡΦΖ. sed [ut ostendetur infra] ut ΛΞΓ triangulum ad triangulum ΡΦΖ ita prisma, cujus basis est triangulum ΛΞΓ oppositum autem ipsi ΟΜΝ, ad prisma, cujus basis ΡΦΖ triangulum & oppositum ipsi ΣΤΥ: igitur [per 11. 5.] ut ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΔΕΖ ita prisma, cujus basis est triangulum ΛΞΓ oppositum autem ipsi ΟΜΝ, ad prisma, cujus basis ΡΦΖ triangulum & oppositum ipsi ΣΤΥ. & quoniam duo prismata, quæ sunt in pyramide ΑΒΓΗ, inter se æqualia sunt, sed &



Ἔστωσαν δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφὰς δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα, καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τῶν γενομένων πυραμίδων ἑκατέρα τὸν αὐτὸν τρόπον νενοήσθω διῃρημένη, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΞ τῇ ΞΓ, ἡ δὲ ΑΛ τῇ ΛΓ· παράλληλος ἄρα ἡ ΞΛ τῇ ΑΒ, καὶ ὅμοιον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΞΓ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ ΡΦΖ τριγώνῳ. καὶ ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ μὲν ΒΓ τῆς ΓΞ, ἡ δὲ ΕΖ τῆς ΖΦ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΞ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΦ. καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν ΒΓ, ΓΞ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΑΒΓ, ΛΞΓ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΖΦ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΔΕΖ, ΡΦΖ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΞΓ τρίγωνον οὕτως τὸ ΔΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον οὕτως τὸ ΛΞΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον. ἀλλ' ὡς τὸ ΛΞΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΛΞΓ τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΛΞΓ τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ. καὶ ἐπεὶ τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, ἀλλὰ μὲν

καὶ

καὶ τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ πρίσμα οὗ βάσις μὲν τὸ ΚΛΞΒ παραλληλόγραμμον ἀπεναντίον δὲ ἡ ΜΟ εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΛΞΓ τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν ΕΠΡΦ ἀπεναντίον ἐστὶν ἡ ΣΤ εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον ἀπεναντίον ἐστὶ τὸ ΣΤΥ· συνθέντι ἄρα ὡς τὰ ΚΒΞΛΜΟ, ΛΞΓΜΝΟ πρίσματα πρὸς τὸ ΛΞΓΜΝΟ πρίσμα οὕτως τὰ ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΥ πρίσματα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὰ ΚΒΞΛΟΜ, ΛΞΓΟΜΝ πρὸς τὰ ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΥ πρίσματα οὕτως τὸ ΛΞΓΜΝΟ πρίσμα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα. ὡς δὲ ΛΞΓΜΝΟ πρίσμα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα οὕτως ἐδείχθη ἡ ΛΞΓ βάσις πρὸς τὴν ΡΦΖ βάσιν, καὶ ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι δύο πρίσματα. ὁμοίως δὲ κἂν τὰς γινομένας πυραμίδας διέλωμεν τὸν αὐτὸν τρόπον οἷον ὡς τὰ ΟΜΝΗ, ΣΤΥΘ, ἔσται ὡς ἡ ΟΜΝ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν οὕτως τὰ ἐν τῇ ΟΜΝΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΣΤΥΘ πυραμίδι δύο πρίσματα. ἀλλ' ὡς ἡ ΟΜΝ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως καὶ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τὰ ἐν τῇ ΟΜΝΗ δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΣΤΥΘ πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τέσσαρα πρὸς τέσσαρα. τὰ αὐτὰ δὲ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν γενομένων πρισμάτων ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν ΑΚΛΟ καὶ ΔΠΡΣ πυραμίδων καὶ πάντων ἁπλῶς τῶν ἰσοπληθῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

quæ in pyramide ΔΕΖΘ prismata inter se sunt æqualia; erit ut prisma, cujus basis parallelogrammum ΚΛΞΒ opposita vero ipsi recta linea ΜΟ, ad prisma, cujus basis ΛΞΓ triangulum & oppositum ipsi ΟΜΝ, ita prisma, cujus basis parallelogrammum ΕΠΡΦ & opposita recta linea ΣΤ, ad prisma, cujus basis ΡΦΖ triangulum oppositum vero ipsi ΣΤΥ: quare componendo [per 18. 5.] ut prismata ΚΒΞΛΜΟ, ΛΞΓΜΝΟ ad prisma ΛΞΓΜΝΟ ita prismata ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΥ ad prisma ΡΦΖΣΤΥ: & permutando ut prismata ΚΒΞΛΟΜ, ΛΞΓΟΜΝ ad prismata ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΥ ita prisma ΛΞΓΜΝΟ ad prisma ΡΦΖΣΤΥ. ut autem prisma ΛΞΓΜΝΟ ad prisma ΡΦΖΣΤΥ ita ostensa est basis ΛΞΓ ad ΡΦΖ basim, & ΑΒΓ basis ad basim ΔΕΖ: ergo & ut triangulum ΑΒΓ ad triangulum ΔΕΖ ita quæ in pyramide ΑΒΓΗ duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide ΔΕΖΘ. similiter autem & si factas pyramides dividamus eodem modo velut ΟΜΝΗ, ΣΤΥΘ, erit ut ΟΜΝ basis ad basim ΣΤΥ ita quæ in pyramide ΟΜΝΗ duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide ΣΤΥΘ. sed ut ΟΜΝ basis ad basim ΣΤΥ ita basis ΑΒΓ ad ΔΕΖ basim: & igitur ut ΑΒΓ basis ad basim ΔΕΖ ita quæ in pyramide ΑΒΓΗ duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide ΔΕΖΘ, & quæ in pyramide ΟΜΝΗ duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide ΣΤΥΘ, & quatuor ad quatuor. eadem autem ostendentur & in cæteris prismatum quæ oriuntur divisione pyramidum ΑΚΛΟ, & ΔΠΡΣ & omnium simpliciter multitudine æqualium. quod erat demonstrandum.

ΛΗΜΜΑ.

Ὅτι δέ ἐστιν ὡς τὸ ΛΞΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις τὸ ΛΞΓ τρίγωνον ἀπεναντίον ἐστὶ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ, οὕτως δεικτέον.

Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς νενοήσθωσαν ἀπὸ τῶν Η, Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τρίγωνα ἐπίπεδα, ἴσαι δηλαδὴ τυγχάνουσαι διὰ τὸ ἰσοϋψεῖς ὑποκεῖσθαι τὰς πυραμίδας. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι, ἥτε ΗΓ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η κάθετος ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΑΒΓ, ΟΜΝ τέμνονται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται. καὶ τέτμηται ἡ ΗΓ δίχα ὑπὸ τοῦ ΟΜΝ ἐπιπέδου κατὰ τὸ Ν· καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἄρα κάθετος ἐπὶ τὸ ΑΒΓ ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ΟΜΝ ἐπιπέδου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Θ κάθετος ἐπὶ τὸ ΔΕΖ ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ΣΤΥ ἐπιπέδου. καὶ εἰσὶν ἴσαι αἱ ἀπὸ τῶν Η, Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπίπεδα· ἴσαι ἄρα καὶ αἱ ἀπὸ τῶν ΟΜΝ, ΣΤΥ τριγώνων ἐπὶ

LEMMA.

At vero ut ΛΞΓ triangulum ad triangulum ΡΦΖ, ita esse prisma, cujus basis triangulum ΛΞΓ oppositum autem ipsi ΟΜΝ, ad prisma, cujus basis ΡΦΖ triangulum & oppositum ipsi ΣΤΥ, hoc modo ostendemus.

In eadem enim figura intelligantur ab ipsis Η, Θ punctis perpendiculares ductæ ad ΑΒΓ, ΔΕΖ triangulorum plana, quæ inter se æquales erunt; propterea quod pyramides ipsæ æquealtæ ponuntur. & quoniam duæ rectæ lineæ ΗΓ & perpendicularis à puncto Η ducta secantur à parallelis planis ΑΒΓ, ΟΜΝ, [per 17. 11.] in eadem ratione secabuntur. secatur vero ΗΓ bifariam a plano ΟΜΝ in puncto Ν: ergo & à puncto Η ducta perpendicularis ad ΑΒΓ planum bifariam secabitur à plano ΟΜΝ. eadem ratione & quæ à puncto Θ ducitur perpendicularis ad ΔΕΖ planum à plano ΣΤΥ bifariam secabitur. sunt autem æquales perpendiculares, quæ ab ipsis Η, Θ ducuntur ad plana ΑΒΓ, ΔΕΖ: ergo & æquales quæ à triangulis ΟΜΝ, ΣΤΥ ad ipsa

ΑΒΓ, ΔΕΖ perpendiculares ducuntur: æquealta igitur sunt prismata, quorum bases triangula ΛΞΓ, ΡΦΖ, opposita autem ipsis ΟΜΝ, ΣΤΥ: quare [per 32. 11.] & solida parallelepipeda quæ à dictis prismatibus describuntur æquealta inter se sunt ut bases; pariterque de illorum dimidiis, ut ΛΞΓ basis ad basim ΡΦΖ ita erunt inter se & dicta prismata. quod erat demonstrandum.

τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ κάθετοι· ἰσοϋψῆ ἄρα ἐστὶ τὰ πρίσματα, ὧν βάσεις μὲν εἰσὶ τὰ ΛΞΓ, ΡΦΖ τρίγωνα, ἀπεναντίον δὲ τὰ ΟΜΝ, ΣΤΥ· ὥστε καὶ τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα, τὰ ἀπὸ τῶν εἰρημένων πρισμάτων ἀναγραφόμενα, ἰσοϋψῆ τυγχάνοντα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις· καὶ τὰ ἡμίση ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ ΛΞΓ βάσις πρὸς τὴν ΡΦΖ βάσιν οὕτως τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἄλληλα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. V. Theor.

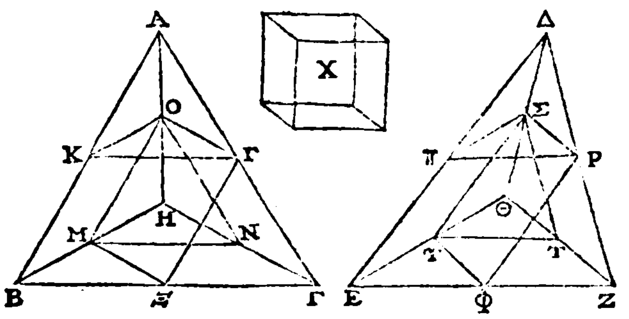
Pyramides quæ in eadem sunt altitudine & triangulares bases habent inter se sunt ut bases.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε΄.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Sint enim in eadem altitudine pyramides, quarum bases quidem triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, vertices autem puncta Η, Θ: dico ut ΑΒΓ basis ad basim ΔΕΖ sic esse pyramidem ΑΒΓΗ ad ΔΕΖΘ pyramidem.

Si enim non ita sit, erit ut ΑΒΓ basis ad basim ΔΕΖ sic ΑΒΓΗ pyramis vel ad solidum minus pyramide ΔΕΖΘ vel ad majus. esto primum ad solidum minus, sitque Χ; & dividatur pyramis ΔΕΖΘ in duas pyramides æquales inter se, & similes toti, & in duo prismata æqualia; sunt igitur [per 3. 12.] duo prismata dimidio totius pyramidis majora. & rursus pyramides ex divisione factæ similiter dividantur, atque hoc semper fiat quoad sumantur quædam pyramides à pyramide ΔΕΖΘ, quæ sint minores excessu, quo pyramis ΔΕΖΘ solidum Χ superat. itaque sumantur, & sint exempli causa pyramides ΔΠΡΣ, ΣΤΥΘ: erunt igitur reliqua in pyramide ΔΕΖΘ prismata solido Χ majora. dividatur etiam ΑΒΓΗ pyramis similiter & in totidem partes atque pyramis ΔΕΖΘ: ergo [per 4. 12.] ut ΑΒΓ basis ad basim ΔΕΖ ita quæ in pyramide ΑΒΓΗ prismata ad prismata quæ in pyramide ΔΕΖΘ. sed [ex hyp.] ut ΑΒΓ basis ad basim ΔΕΖ ita pyramis ΑΒΓΗ ad solidum Χ: & igitur ut ΑΒΓΗ pyramis ad solidum Χ ita quæ in pyramide ΑΒΓΗ prismata ad prismata quæ in pyramide ΔΕΖΘ: & permutando ut ΑΒΓΗ pyramis ad prismata quæ in ipsa sunt ita solidum Χ ad prismata quæ sunt in pyramide ΔΕΖΘ. major autem est pyramis ΑΒΓΗ prismatibus quæ in ipsa sunt: ergo & solidum Χ prismatibus quæ sunt in pyramide ΔΕΖΘ est majus. sed & minus, quod



Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα, ἔσται ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς ἤτοι πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεὸν ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλαττον τὸ Χ· καὶ διῃρήσθω ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· τὰ δὴ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος. καὶ πάλιν αἱ ἐκ τῆς διαιρέσεως γινόμεναι διῃρήσθωσαν πυραμίδες ὁμοίως, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω ἕως οὗ λειφθῶσί τινες πυραμίδες ἀπὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος, αἵ εἰσιν ἐλάσσους τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς τοῦ Χ στερεοῦ. λελήφθωσαν καὶ ἔστωσαν λόγου ἕνεκα αἱ ΔΠΡΣ, ΣΤΥΘ· λοιπὰ ἄρα τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα μείζονά ἐστι τοῦ Χ στερεοῦ. διῃρήσθω καὶ ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς ὁμοίως καὶ ἰσοπληθῶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὸ Χ στερεόν· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὸ Χ στερεὸν οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὰ ἐν αὐτῇ πρίσματα οὕτως τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα. μείζων δὲ ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῶν ἐν αὐτῇ πρισμάτων· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Χ στερεὸν τῶν ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρισμάτων. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἐστὶν

ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι οὐδὲ ὡς ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος στερεόν. λέγω δὴ ὅτι οὐκ ἔστιν οὐδὲ ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Χ· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν οὕτως τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΗ πυραμίδα. ὡς δὲ τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΗ πυραμίδα οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα.

Αἱ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

fieri non potest: non igitur ut ΑΒΓ basis ad basim ΔΕΖ ita est pyramis ΑΒΓΗ ad solidum aliquod minus pyramide ΔΕΖΘ. similiter ostendemus neque ut ΔΕΖ basis ad basim ΑΒΓ ita esse pyramidem ΔΕΖΘ ad solidum aliquod pyramide ΑΒΓΗ minus. Dico porro neque esse ut ΑΒΓ basis ad basim ΔΕΖ ita ΑΒΓΗ pyramidem ad aliquod solidum majus pyramide ΔΕΖΘ. si enim fieri potest, sit ad majus, videlicet ad solidum Χ: erit igitur invertendo ut ΔΕΖ basis ad basim ΑΒΓ ita solidum Χ ad ΑΒΓΗ pyramidem. ut autem solidum Χ ad ΑΒΓΗ pyramidem ita ΔΕΖΘ pyramis ad solidum aliquod minus pyramide ΑΒΓΗ, ut proxime ostensum fuit: & igitur ut ΔΕΖ basis ad basim ΑΒΓ ita pyramis ΔΕΖΘ ad solidum aliquod pyramide ΑΒΓΗ minus, quod est absurdum: non igitur ut ΑΒΓ basis ad basim ΔΕΖ ita est ΑΒΓΗ pyramis ad solidum aliquod majus pyramide ΔΕΖΘ. ostensum autem est neque esse ad minus: quare ut ΑΒΓ basis ad basim ΔΕΖ ita est pyramis ΑΒΓΗ ad ΔΕΖΘ pyramidem.

Pyramides igitur quæ in eadem sunt altitudine & triangulares bases habent inter se sunt ut bases. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛʹ.

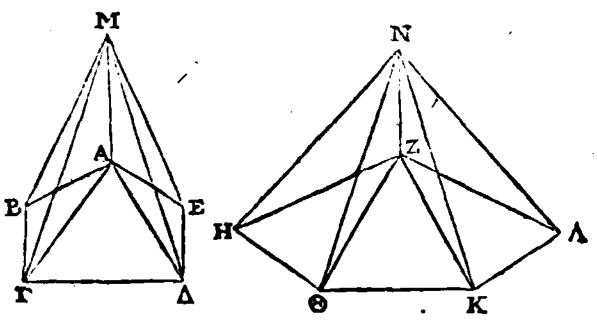
Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Prop. VI. Theor.

Pyramides quæ in eadem sunt altitudine & polygonas bases habent inter se sunt ut bases.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, κορυφὰς δὲ τὰ Μ, Ν σημεῖα· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα.

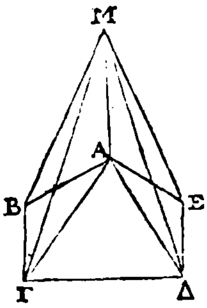
Διῃρήσθω γὰρ ἡ μὲν ΑΒΓΔΕ βάσις εἰς τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ τρίγωνα· ἡ δὲ ΖΗΘΚΛ εἰς τὰ ΖΗΘ, ΖΘΚ, ΖΚΛ τρίγωνα, καὶ νοείσθωσαν ἐφ᾽ ἑκάστου τριγώνου πυραμίδες ἰσοϋψεῖς ταῖς ἐξ ἀρχῆς πυραμίσι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον οὕτως ἡ ΑΒΓΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα, καὶ συνθέντι ὡς τὸ ΑΒΓΔ τραπέζιον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον οὕτως ἡ ΑΒΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον οὕτως ἡ ΑΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα· δίισου ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα. καὶ συνθέντι πάλιν, ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ οὕτως ἡ ΑΒΓ

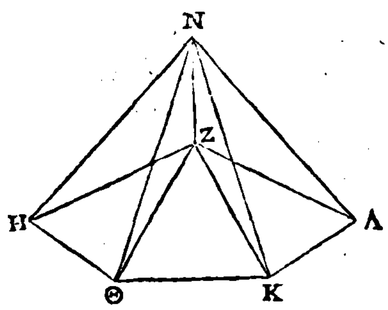


Sint in eadem altitudine pyramides, quæ polygonas bases habeant ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, vertices autem Μ, Ν puncta: dico ut ΑΒΓΔΕ basis ad basim ΖΗΘΚΛ ita esse ΑΒΓΔΕΜ pyramidem ad pyramidem ΖΗΘΚΛΝ.

Dividatur enim basis quidem ΑΒΓΔΕ in triangula ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ: basis vero ΖΗΘΚΛ dividatur in triangula ΖΗΘ, ΖΘΚ, ΖΚΛ; & super unoquoque triangulo intelligantur pyramides æquealtæ ac pyramides quæ à principio. quoniam igitur [per 5. 12.] est ut triangulum ΑΒΓ ad triangulum ΑΓΔ ita ΑΒΓΜ pyramis ad pyramidem ΑΓΔΜ: & componendo [per 18. 5.] ut ΑΒΓΔ trapezium ad triangulum ΑΓΔ ita ΑΒΓΔΜ pyramis ad pyramidem ΑΒΓΜ. sed & ut ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΑΔΕ ita pyramis ΑΓΔΜ ad ΑΔΕΜ pyramidem: ergo ex æquo [per 22. 5.] ut ΑΒΓΔ basis ad basim ΑΔΕ ita ΑΒΓΔΜ pyramis ad pyramidem ΑΔΕΜ. & rursus componendo ut ΑΒΓΔΕ basis ad basim ΑΔΕ ita ΑΒΓ ΔΕΜ

ΔΕΜ pyramis ad pyramidem ΑΔΕΜ. eadem ratione & ut ΖΗΘΚΛ basis ad basim ΖΚΛ ita & ΖΗΘΚΛΝ pyramis ad ΖΚΛΝ pyramidem. & quoniam ΑΔΕΜ, ΖΚΛΝ sunt duæ pyramides, quæ triangulares bases habent & in eadem sunt altitudine; erit ut ΑΔΕ basis ad basim ΖΚΛ ita ΑΔΕΜ pyramis ad pyramidem ΖΚΛΝ. quoniam igitur est ut ΑΒΓΔΕ basis ad basim ΑΔΕ, ita ΑΒΓΔΕΜ pyramis ad pyramidem ΑΔΕΜ; ut autem ΑΔΕ basis ad basim ΖΚΛ ita ΑΔΕΜ pyramis ad pyramidem ΖΚΛΝ: erit, ex æquo, ut basis ΑΒΓΔΕ ad ΖΚΛ basim ita ΑΒΓΔΕΜ pyramis ad pyramidem ΖΚΛΝ. sed & ut ΖΚΛ basis ad basim ΖΗΘΚΛ ita erat & ΖΚΛΝ pyramis ad pyramidem ΖΗΘΚΛΝ: quare rursus ex æquo, ut ΑΒΓΔΕ basis ad basim ΖΗΘΚΛ ita est ΑΒΓΔΕΜ pyramis ad pyramidem ΖΗΘΚΛΝ.





ΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΖΗΘΚΛ βάσις πρὸς τὴν ΖΚΛ βάσιν οὕτως καὶ ἡ ΖΗΘΚΛΝ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΚΛΝ πυραμίδα, καὶ ἐπεὶ δύο πυραμίδες εἰσὶν αἱ ΑΔΕΜ, ΖΚΛΝ τρίγωνα ἔχουσαι βάσεις, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΚΛ βάσιν οὕτως ἡ ΑΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΚΛΝ πυραμίδα. ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα, ὡς δὲ ἡ ΑΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΚΛ βάσιν οὕτως ἡ ΑΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΚΛΝ πυραμίδα· δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΚΛ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΚΛΝ πυραμίδα. ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ἡ ΖΚΛ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν οὕτως ἦν καὶ ἡ ΖΚΛΝ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα· καὶ δι᾽ ἴσου πάλιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα.

Pyramides igitur quæ in eadem sunt altitudine & polygonas bases habent inter se sunt ut bases. quod erat demonstrandum.

Πυραμίδες ἄρα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι καὶ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VII. Theor.

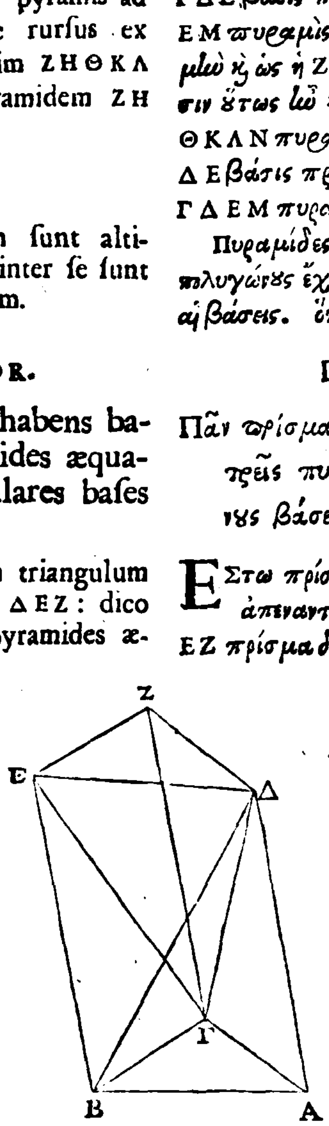
Omne prisma triangularem habens basim dividitur in tres pyramides æquales inter se, quæ triangulares bases habent.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας.

SIT prisma cujus basis quidem triangulum ΑΒΓ, oppositum autem ipsi ΔΕΖ: dico prisma ΑΒΓΔΕΖ dividi in tres pyramides æquales inter se, quæ triangulares habent bases.

Jungantur enim ΒΔ, ΕΓ, ΓΔ. & quoniam ΑΒΕΔ est parallelogrammum, cujus diameter ΒΔ, erit [per 34. 1.] ΑΒΔ triangulum triangulo ΕΔΒ æquale: ergo [per 5. 12.] pyramis, cujus basis est triangulum ΑΒΔ vertex autem punctum Γ, æqualis est pyramidi, cujus basis ΕΔΒ triangulum & vertex punctum Γ. sed pyramis, cujus basis ΕΔΒ triangulum & vertex punctum Γ, eadem est cum pyramide cujus basis triangulum ΕΒΓ & vertex Δ punctum, iisdem enim planis continetur: ergo & pyramis, cujus basis triangulum ΑΒΔ vertex autem punctum Γ, æqualis est pyramidi, cujus basis ΕΒΓ triangu-



Ἔστω πρίσμα οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΔ, ΕΓ, ΓΔ. καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΕΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΔ· ἴσον ἄρα τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΕΔΒ τριγώνῳ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΒΔ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΔΒ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον. ἀλλ᾽ ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΔΒ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΒΓ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχεται· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον

γωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΖΓΒΕ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΓΖ τρίγωνον τῷ ΓΒΕ τριγώνῳ· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΒΕΓ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΓΖ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. ἡ δὲ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΒΓΕ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐδείχθη πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΓΕΖ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον· διῄρηται ἄρα τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας. καὶ ἐπεὶ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΓΑΒ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχονται, ἡ δὲ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΒΔ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, τρίτον ἐδείχθη τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, τρίτον ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν, τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

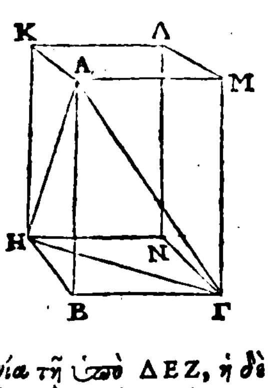
Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος, τοῦ τὴν βάσιν τὴν αὐτὴν ἔχοντος αὐτῇ καὶ τὸ ὕψος ἴσον· ἐπειδήπερ κἂν ἕτερόν τι σχῆμα εὐθύγραμμον ἔχῃ ἡ βάσις τοῦ πρίσματος καὶ τὸ αὐτὸ ἀπεναντίον, διαιρεῖται εἰς πρίσματα τριγώνους ἔχοντα βάσεις καὶ τὰς ἀπεναντίον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες, καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστωσαν ὅμοιαι καὶ ὁμοίως κείμεναι πυραμίδες, ὧν βάσεις μέν εἰσι τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τρίγωνα κορυφαὶ δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα· λέγω ὅτι ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.



Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ στερεὰ παραλληλεπίπεδα. καὶ ἐπεὶ ὁμοία ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι· ἴση ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΗ τῇ ὑπὸ ΔΕΘ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως

lum & vertex punctum Δ. rursus, quoniam ΖΓΒΕ parallelogrammum est, cujus diameter ΓΕ, triangulum ΕΓΖ [per 34.1.] triangulo ΓΒΕ est æquale: ergo [per 5.11.] & pyramis, cujus basis ΒΕΓ triangulum vertex autem punctum Δ, æqualis est pyramidi, cujus basis triangulum ΕΓΖ & vertex punctum Δ. sed pyramis, cujus basis quidem ΒΓΕ triangulum vertex autem punctum Δ, ostensa est æqualis pyramidi, cujus basis triangulum ΑΒΔ & vertex Γ punctum; quare & pyramis, cujus basis triangulum ΓΕΖ & vertex punctum Δ, æqualis est pyramidi, cujus basis triangulum ΑΒΔ & vertex Γ punctum. prisma igitur ΑΒΓΔΕΖ dividitur in tres pyramides inter se æquales, quæ triangulares bases habent. & quoniam pyramis, cujus basis ΑΒΔ triangulum vertex autem punctum Γ, eadem est cum pyramide, cujus basis triangulum ΓΑΒ & vertex Δ punctum, iisdem namque planis continentur; pyramis autem, cujus basis triangulum ΑΒΔ & vertex punctum Γ, ostensa est tertia pars prismatis, cujus basis ΑΒΓ triangulum & oppositum ipsi ΔΕΖ: & pyramis igitur, cujus basis triangulum ΑΒΓ vertex autem Δ punctum, tertia pars est prismatis eandem basim habentis, videlicet ΑΒΓ triangulum & oppositum ipsi triangulum ΔΕΖ. quod erat demonstrandum.

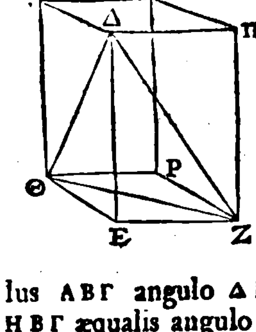
Corollarium.

Ex hoc manifestum est omnem pyramidem tertiam partem esse prismatis basim habentis eandem & altitudinem æqualem: quoniam si basis prismatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat & ipsi opposita eandem, dividitur in prismata quæ triangulares habent bases, basibusque opposita etiam triangula.

PROP. VIII. THEOR.

Similes pyramides, quæ triangulares bases habent, sunt in triplicata ratione homologorum laterum.

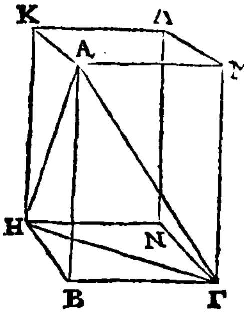
Sint similes & similiter positæ pyramides, quarum bases quidem triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, vertices autem Η, Θ puncta: dico ΑΒΓΗ pyramidem ad pyramidem ΔΕΖΘ triplicatam rationem habere ejus quam ΒΓ habet ad ΕΖ.



Compleantur enim ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ solida parallelepipeda. & quoniam pyramis ΑΒΓΗ similis est pyramidi ΔΕΖΘ, erit [per 9.def.11.] angulus ΑΒΓ angulo ΔΕΖ æqualis, angulusque ΗΒΓ æqualis angulo ΘΕΖ, & angulus ΑΒΗ angulo ΔΕΘ, atque est ut ΑΒ ad ΔΕ ita

ΒΓ

ΒΓ ad ΕΖ & ΒΗ ad ΕΘ. quoniam igitur est ut ΑΒ ad ΔΕ ita ΒΓ ad ΕΖ, & circum æquales angulos latera sunt proportionalia; parallelogrammum ΒΜ parallelogrammo ΕΠ simile erit. eadem ratione & parallelogrammum ΒΝ simile est parallelogrammo ΕΡ, & parallelogrammum ΒΚ ipsi ΕΞ parallelogrammo: tria igitur parallelogramma ΒΜ, ΚΒ, ΒΝ tribus ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ sunt similia.



sed [per 24. 11.] tria quidem ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ tribus oppositis æqualia & similia sunt, tria vero ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ tribus oppositis æqualia & similia: quare solida ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ similibus planis & numero æqualibus continentur; ac propterea [per 9. def. 11.] simile est ΒΗΜΛ solidum solido ΕΘΠΟ. similia autem solida parallelepipeda [per 33. 11.] sunt in triplicata ratione homologorum laterum: ergo solidum ΒΗΜΘ ad solidum ΕΘΠΟ triplicatam habet rationem ejus quam habet latus homologum ΒΓ ad ΕΖ homologum latus. sed [per 15. 5.] ut ΒΗΜΛ solidum ad solidum ΕΘΠΟ ita ΑΒΓΗ pyramis ad pyramidem ΔΕΖΘ; pyramis enim sexta pars est ipsius solidi, cum prisma, quod est dimidium solidi parallelepipedi, sit pyramidis triplum: quare & pyramis ΑΒΓΗ ad pyramidem ΔΕΖΘ triplicatam rationem habet ejus quam ΒΓ habet ad ΕΖ. quod erat demonstrandum.

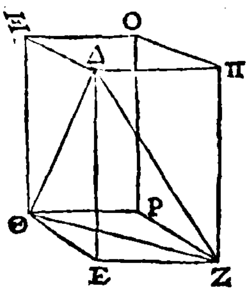
Corollarium.

Ex hoc perspicuum est similes pyramides, quæ polygonas bases habent, inter se esse in triplicata ratione homologorum laterum. ipsis enim divisis in pyramides triangulares bases habentes, quoniam [per 20.6.] similia polygona basium in similia triangula dividuntur & numero æqualia & homologa totis; erit ut una pyramis in altera pyramide triangularem habens basim ad unam pyramidem in altera triangularem basim habentem ita & omnes pyramides in pyramide altera triangulares habentes bases ad omnes in altera triangulares bases habentes; hoc est ita pyramis ipsa polygonam habens basim ad pyramidem quæ polygonam basim habet. sed pyramis triangularem habens basim ad pyramidem quæ triangularem basim habet est in triplicata ratione homologorum laterum; & igitur pyramis polygonam habens basim ad pyramidem similem basim habentem triplicatam rationem habet ejus quam latus homologum habet ad homologum latus.

Prop. IX. Theor.

Æqualium pyramidum, triangulares bases habentium, bases sunt altitudinibus reciproce proportionales. & qua-

ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ καὶ ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΕΘ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΠ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΒΝ τῷ ΕΡ ὅμοιόν ἐστι, τὸ δὲ ΒΚ τῷ ΕΞ· τὰ τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ΒΜ, ΚΒ, ΒΓ τρισὶ τοῖς ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ ὅμοιά ἐστιν. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τὰ ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τὰ ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια·



τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ ἄρα στερεὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων ἴσων τὸ πλῆθος περιέχονται· ὅμοιον ἄρα τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ. τὰ δὲ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· τὸ ΒΗΜΛ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΕΘΠΟ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν ΕΖ. ὡς δὲ τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΘΠΟ στερεὸν οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα, ἐπειδήπερ ἡ πυραμὶς ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ στερεοῦ, διὰ τὸ καὶ τὸ πρίσμα ἥμισυ ὂν τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου τριπλάσιον εἶναι τῆς πυραμίδος· καὶ ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι καὶ αἱ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. διαιρεθεισῶν γὰρ αὐτῶν εἰς τὰς ἐν αὐταῖς πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας, τῷ καὶ τὰ ὅμοια πολύγωνα τῶν βάσεων εἰς ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖσθαι, καὶ εἰς ἴσα τῷ πλήθει καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, ἔσται ὡς ἐν τῇ ἑτέρᾳ μία πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ μίαν πυραμίδα τρίγωνον βάσιν ἔχουσαν, οὕτω καὶ ἅπασαι αἱ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδες τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς τὰς ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας· τουτέστιν αὐτὴ ἡ πολύγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν πολύγωνον βάσιν ἔχουσαν. ἡ δὲ τρίγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν τρίγωνον βάσιν ἔχουσαν ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· καὶ ἡ πολύγωνον ἄρα βάσιν ἔχουσα πρὸς τὴν ὁμοίαν βάσιν ἔχουσαν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

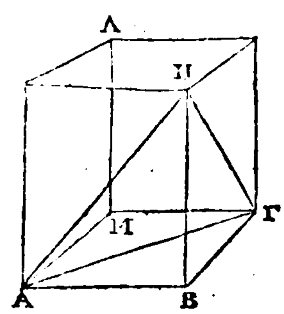
Τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ

ὧν

ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι.

Ἔστωσαν γὰρ πυραμίδες ἴσαι, τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφὰς δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα· λέγω ὅτι τῶν ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΒΗΜΑ, ΕΘΠΟ στερεὰ παραλληλεπίπεδα. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι, καὶ ἐστι τῆς μὲν ΑΒΓΗ πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ ΒΗΜΑ στερεόν, τῆς δὲ ΔΕΖΘ πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ ΕΘΠΟ στερεόν· ἴσον ἄρα τὸ ΒΗΜΑ στερεὸν τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ. τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΑ στερεοῦ ὕψος. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΑ στερεοῦ ὕψος. ἀλλὰ τὸ μὲν τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψει, τὸ δὲ τοῦ ΒΗΜΑ στερεοῦ ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τοῦ ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος· τῶν ἄρα ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.



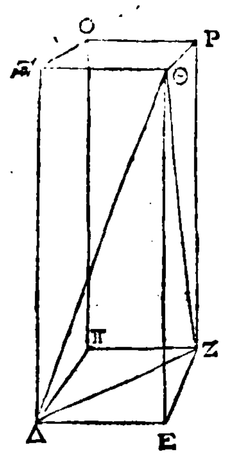
Ἀλλὰ δὴ τῶν ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ πυραμίδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος, ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΠ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΠ οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος. ἀλλὰ τὸ μὲν τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ ΕΘΠΟ παραλληλεπιπέδου ὕψει, τὸ δὲ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ

rum pyramidum triangulares bases habentium bases sunt altitudinibus reciproce proportionales, illæ inter se æquales sunt.

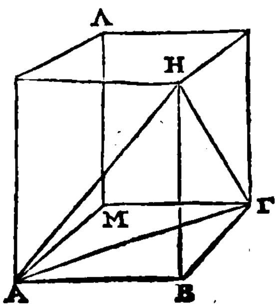
Sint enim pyramides æquales quæ triangulares bases habeant ΑΒΓ, ΔΕΖ, vertices vero Η, Θ puncta: dico pyramidum ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ bases esse reciproce proportionales altitudinibus, hoc est, ut ΑΒΓ basis ad basim ΔΕΖ ita esse pyramidis ΔΕΖΘ altitudinem ad altitudinem pyramidis ΑΒΓΗ.

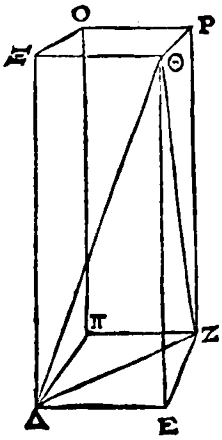
Compleantur enim ΒΗΜΑ, ΕΘΠΟ solida parallelepipeda. & quoniam pyramis ΑΒΓΗ est æqualis pyramidi ΔΕΖΘ, atque est pyramidis quidem ΑΒΓΗ sextuplum ΒΗΜΑ solidum, pyramidis vero ΔΕΖΘ sextuplum solidum ΕΘΠΟ; erit [per 15. 5.] solidum ΒΗΜΑ solido ΕΘΠΟ æquale. æqualium autem solidorum parallelepipedorum [per 34. 11.] bases sunt reciproce proportionales altitudinibus: est igitur ut ΒΜ basis ad basim ΕΠ ita ΕΘΠΟ solidi altitudo ad altitudinem solidi ΒΗΜΑ. sed ut ΒΜ basis ad basim ΕΠ ita ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΔΕΖ: ergo & ut ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΔΕΖ ita solidi ΕΘΠΟ altitudo ad altitudinem solidi ΒΗΜΑ. sed solidi quidem ΕΘΠΟ altitudo eadem est cum altitudine pyramidis ΔΕΖΘ; solidi vero ΒΗΜΑ altitudo eadem est cum altitudine pyramidis ΑΒΓΗ: est igitur ut ΑΒΓ basis ad basim ΔΕΖ ita pyramidis ΔΕΖΘ altitudo ad altitudinem pyramidis ΑΒΓΗ: quare pyramidum ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ bases sunt reciproce proportionales altitudinibus.



Deinde vero pyramidum ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ bases sint reciproce proportionales altitudinibus, sitque ut ΑΒΓ basis ad basim ΔΕΖ ita pyramidis ΔΕΖΘ altitudo ad altitudinem pyramidis ΑΒΓΗ: dico ΑΒΓΗ pyramidem pyramidi ΔΕΖΘ æqualem esse.

Iisdem enim constructis, quoniam ut ΑΒΓ basis ad basim ΔΕΖ ita est ΔΕΖΘ pyramidis altitudo ad altitudinem pyramidis ΑΒΓΗ; atque ut ΑΒΓ basis ad basim ΔΕΖ ita ΒΜ parallelogrammum ad parallelogrammum ΕΠ: erit & ut parallelogrammum ΒΜ ad ΕΠ parallelogrammum ita altitudo pyramidis ΔΕΖΘ ad altitudinem pyramidis ΑΒΓΗ. sed pyramidis quidem ΔΕΖΘ altitudo eadem est cum altitudine solidi parallelepipedi ΕΘΠΟ; pyramidis vero ΑΒΓΗ altitudo eadem est cum altitudine solidi parallelepipedi BHMA: est igitur ut BM basis ad basim EΠ ita EΘΠO solidi parallelepipedi altitudo ad altitudinem solidi parallelepipedi BHMA. quorum autem solidorum parallelepipedorum bases sunt reciproce proportionales altitudinibus [per 34. 11.] ea sunt æqualia: solidum igitur parallelepipedum BHMA æquale est solido parallelepipedo EΘΠO. atque est solidi quidem BHMA sexta pars pyramis ABΓH, solidi vero EΘΠO itidem sexta pars pyramis ΔEZΘ; ergo pyramis ABΓH pyramidi ΔEZΘ est æqualis.





τοῦ ΒΗΜΑ παραλληλεπιπέδου ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΜ πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ παραλληλεπιπέδου ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΑ. ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις ταῖς ὕψεσιν ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα τὸ ΒΗΜΑ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ. καὶ ἔστι τοῦ μὲν ΒΗΜΑ ἕκτον μέρος ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς, τοῦ δὲ ΕΘΠΟ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου ἕκτον μέρος ἡ ΔΕΖΘ πυραμίς· ἡ ἄρα ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι ἴση ἐστί.

Æqualium igitur pyramidum, triangulares bases habentium, bases sunt altitudinibus reciproce proportionales. & quarum pyramidum triangulares bases habentium bases sunt altitudinibus reciproce proportionales, illæ sunt inter se æquales. quod erat demonstrandum.

Τῶν ἄρα ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις ταῖς ὕψεσιν· καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις ταῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. X. Theor.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Omnis conus tertia pars est cylindri, qui eandem basim habet & altitudinem æqualem.

Πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον.

Habeat enim conus eandem basim quam cylindrus, videlicet circulum ABΓΔ, & altitudinem æqualem: dico conum tertiam partem esse cylindri, hoc est cylindrum coni triplum esse.

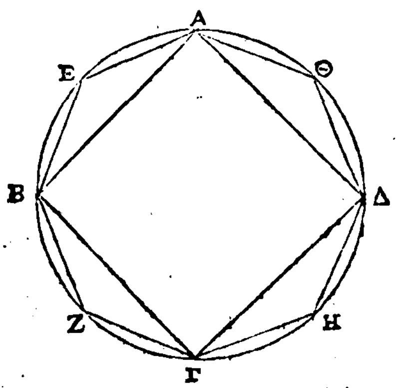
Si enim cylindrus non sit triplus coni; vel major erit quam triplus, vel minor. sit primum major quam triplus; & describatur in ABΓΔ circulo quadratum ABΓΔ: & quadratum ABΓΔ majus est quam dimidium ABΓΔ circuli. & à quadrato ABΓΔ erigatur prisma æquealtum cylindro, quod quidem prisma majus erit quam cylindri dimidium; quoniam si circa circulum ABΓΔ quadratum describatur, erit inscriptum quadratum dimidium circumscripti; & sunt ab iis basibus erecta solida parallelepipeda æquealta, nimirum prismata ipsa: quare prismata inter se sunt ut bases: & igitur prisma erectum à quadrato ABΓΔ dimidium est prismatis erecti à quadrato quod circa circulum ABΓΔ describitur; atque est cylindrus minor prismate erecto à quadrato quod describitur circa circulum ABΓΔ: prisma igitur erectum à quadrato ABΓΔ æquealtum cylindro majus est dimidio cylindri. secentur circumferentiæ AB, BΓ, ΓΔ, ΔA bifariam in punctis E, Z, H, Θ, & AE, EB, BZ, ZΓ, ΓH, HΔ, ΔΘ,

Ἐχέτω γὰρ κῶνος κυλίνδρῳ βάσιν τε τὴν αὐτὴν τὸν ΑΒΓΔ κύκλον καὶ ὕψος ἴσον· λέγω ὅτι ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου τρίτον ἐστὶ μέρος, τουτέστιν ὅτι ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλασίων ἐστί.

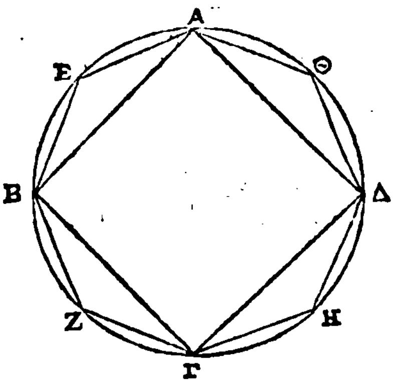
Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλασίων, ἔσται ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἤτοι μείζων ἢ τριπλασίων, ἢ ἐλάσσων ἢ τριπλασίων. ἔστω πρότερον μείζων ἢ τριπλασίων, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· τὸ δὴ ΑΒΓΔ τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πρίσμα ἰσοϋψὲς τῷ κυλίνδρῳ, τὸ δὴ ἀνεσταμένον πρίσμα μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κυλίνδρου, ἐπειδήπερ κἂν περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον περιγράψωμεν, τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον ἥμισύ ἐστι τοῦ περιγεγραμμένου, καὶ ἔστι τὰ ἀπ' αὐτῶν ἀνεσταμένα ἰσοϋψῆ στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρίσματα· τὰ ἄρα πρίσματά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις· καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓΔ ἄρα κύκλου ἀνασταθὲν πρίσμα ἥμισύ ἐστι τοῦ ἀνασταθέντος πρίσματος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου, καὶ ἔστιν ὁ κύλινδρος ἐλάττων τοῦ πρίσματος τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· τὸ ἄρα πρίσμα τὸ ἀνασταθὲν ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου ἰσοϋψὲς τῷ κυλίνδρῳ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ κυλίνδρου. τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ,

ΘΑ.

ΘΑ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν. ἀνεστάτω ἐφ' ἑκάστου τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ἀνασταθέντων πρισμάτων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κυλίνδρου, ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ σημείων παραλλήλους τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἀγάγωμεν, καὶ συμπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ παραλληλόγραμμα, καὶ ἐπ' αὐτῶν ἀναστήσωμεν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ, ἑκάστου τῶν ἀνασταθέντων ἡμίσεά ἐστι τὰ πρίσματα τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων. καὶ ἔστι τὰ τοῦ κυλίνδρου ἀποτμήματα ἐλάττονα τῶν ἀνασταθέντων στερεῶν παραλληλεπιπέδων· ὥστε καὶ τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῶν καθ' ἑαυτὰ τοῦ κυλίνδρου τμημάτων· τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κυλίνδρου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύλινδρος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· λοιπὸν ἄρα τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μεῖζόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τοῦ κώνου. ἀλλὰ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, τριπλάσιον τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν ΑΒΓΔ κύκλον. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων, ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσται ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων ἢ τριπλάσιος. Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἢ τριπλάσιός ἐστιν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἐλάττων ἢ τριπλάσιος ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· τὸ ΑΒΓΔ ἄρα τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πυραμὶς, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου, ἐπειδήπερ, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν, ὅτι ἐὰν περὶ τὸν κύλινδρον περιγράψωμεν τετράγωνον, ἔσται τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον ἥμισυ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου· καὶ ἐὰν ἀπὸ τῶν τετραγώνων στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀναστήσωμεν ἰσοϋψῆ τῷ κώνῳ, ἃ καὶ καλεῖται πρίσματα, ἔσται τὸ ἀνασταθὲν ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ



ΘΑ jungantur. unumquodque igitur triangulorum ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ majus eſt dimidio ſegmenti circuli ΑΒΓΔ, in quo conſiſtit, ut ſuperius [ad 2. 12.] oſtendimus. erigantur ab unoquoque triangulorum ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ priſmata æquealta cylindro: ergo & unumquodque erectorum priſmatum majus eſt dimidio reſpectivi ſegmenti cylindri, quoniam ſi per puncta Ε, Ζ, Η, Θ parallelæ ipſis ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ducantur, & compleantur ad ipſas ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ parallelogramma, à quibus ſolida parallelepipeda cylindro æquealta erigantur: erunt uniuſcujuſque erectorum dimidia priſmata ea quæ ſunt in triangulis ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ. & ſunt cylindri ſegmenta erectis ſolidis parallelepipedis minora; ergo & priſmata quæ in triangulis ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ majora ſunt dimidio reſpectivorum ſegmentorum cylindri. itaque reliquas circumferentias ſecantes bifariam, jungenteſque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes priſmata æquealta cylindro, & hoc ſemper facientes donec tandem [per 1. 10.] relinquantur quædam ſegmenta cylindri quæ ſint minora exceſſu, quo cylindrus ſuperat triplum ipſius coni. reliquantur jam, & ſint ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ; reliquum igitur priſma, cujus baſis quidem eſt polygonum ΑΕΒΖΓΗΔΘ altitudo autem eadem quæ cylindri, majus eſt quam triplum coni. ſed [per cor. 7.12.] priſma, cujus baſis ΑΕΒΖΓΗΔΘ polygonum & altitudo eadem quæ cylindri, triplum eſt pyramidis, cujus baſis polygonum ΑΕΒΖΓΗΔΘ vertex autem idem qui coni: & igitur pyramis, cujus baſis polygonum ΑΕΒΖΓΗΔΘ vertex autem idem qui coni, major eſt cono qui baſim habet ΑΒΓΔ circulum. ſed & minor, ab ipſo enim comprehenditur, quod fieri non poteſt: non igitur cylindrus major erit quam triplus coni. Dico inſuper neque cylindrum minorem eſſe quam triplum coni. ſi enim fieri poteſt, ſit cylindrus minor quam triplus coni: erit igitur invertendo conus major quam tertia pars cylindri. deſcribatur in ΑΒΓΔ circulo quadratum ΑΒΓΔ; ergo quadratum ΑΒΓΔ majus eſt quam dimidium circuli ΑΒΓΔ. & à quadrato ΑΒΓΔ erigatur pyramis, verticem habens eundem quem conus: pyramis igitur erecta major eſt quam coni dimidium; quoniam, ut ante demonſtravimus, ſi circa circulum quadratum deſcribatur, erit quadratum ΑΒΓΔ dimidium ejus, quod circa circulum deſcriptum eſt. & ſi à quadratis erigantur ſolida parallelepipeda æquealta cono, quæ & priſmata appellantur; erit quod à quadrato ΑΒΓΔ erigitur dimidium ejus quod erectum est à quadrato circa circulum descripto, etenim [per 32. 11.] inter se sunt ut bases: quare etiam tertiæ partes ipsarum; pyramis igitur, cujus basis quadratum ΑΒΓΔ, dimidia est ejus pyramidis quæ à quadrato circa circulum descripto erigitur. sed pyramis erecta à quadrato descripto circa circulum major est cono, ipsum namque comprehendit: ergo pyramis, cujus basis ΑΒΓΔ quadratum vertex autem idem qui coni, major est quam coni dimidium. secentur circumferentiæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ bifariam in punctis Ε, Ζ, Η, Θ, & jungantur ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ; & unumquodque igitur triangulorum ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ majus est quam dimidium respectivi segmenti circuli ΑΒΓΔ: erigantur ab unoquoque triangulorum ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ pyramides verticem habentes eundem quem conus; ergo & unaquæque pyramidum sic erectarum major est quam dimidium respectivi segmenti coni. itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, jungentesque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramidem verticem habentem eundem quem conus, & hoc semper facientes, relinquemus tandem [per 1.10.] quasdam coni portiones quæ minores erunt excessu, quo conus tertiam cylindri partem superat. relinquantur, & sint quæ in ipsis ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ: reliqua igitur pyramis, cujus basis polygonum ΑΕΒΖΓΗΔΘ & vertex idem qui coni, major est quam tertia cylindri pars. sed [per cor. 7.12.] pyramis, cujus basis polygonum ΑΕΒΖΓΗΔΘ vertex autem idem qui coni, tertia pars est prismatis, cujus basis polygonnm ΑΕΒΖΓΗΔΘ altitudo autem eadem quæ cylindri: prisma igitur, cujus basis ΑΕΒΖΓΗΔΘ polygonum & altitudo eadem quæ cylindri, majus est cylindro cujus basis est circulus ΑΒΓΔ. sed & minus; ab ipso enim comprehenditur, quod fieri non potest: non igitur cylindrus minor est quam triplus coni. ostensum autem est neque majorem esse quam triplum: ergo cylindrus coni triplus est; ac propterea conus tertia pars cylindri.



Omnis igitur conus est tertia pars cylindri eandem quam ipse basim habentis & altitudinem æqualem. quod erat demonstrandum.

Prop. XI. Theor.

Coni & cylindri, qui eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases.

Sint in eadem altitudine coni & cylindri, quorum bases circuli ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, axes

τετραγώνου ἥμισυ τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου, πρὸς ἄλληλα γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις· ὥστε καὶ τὰ τρίτα· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, ἥμισύ ἐστι τῆς πυραμίδος τῆς ἀνασταθείσης ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου. καὶ ἔστι μείζων ἡ πυραμὶς ἡ ἀνασταθεῖσα ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου τοῦ κώνου, ἐμπεριέχει γὰρ αὐτόν· ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ᾽ ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. καὶ ἀνεστάτωσαν ἀφ᾽ ἑκάστου τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πυραμίδες, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαι τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ᾽ ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐφ᾽ ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδα τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαν τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομεν τινὰ τμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ἧ ὑπερέχει ὁ κῶνος τοῦ τρίτου μέρους τοῦ κυλίνδρου. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου. ἀλλ᾽ ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ· τὸ ἄρα πρίσμα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μεῖζόν ἐστι τοῦ κυλίνδρου, οὗ βάσις ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ᾽ αὐτοῦ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μείζων ἢ τριπλάσιος· τριπλάσιος ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· ὥστε ὁ κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου.

Πᾶς ἄρα κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

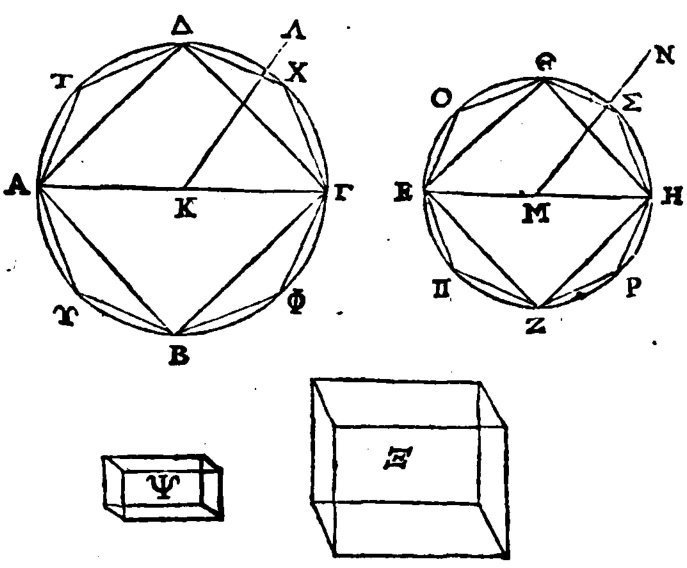
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια΄.

Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μέν εἰσιν οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, ἄξονες

ἄξονες δὲ οἱ ΚΛ, ΜΝ, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ ΑΓ, ΕΗ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΝ.

Εἰ γὰρ μή, ἔστω ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος ἢ πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεὸν ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλαττον τὸ Ξ, καὶ ᾧ ἔλασσόν ἐστι τὸ Ξ στερεὸν τοῦ ΕΝ κώνου ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ Ψ στερεόν· ὁ ΕΝ κῶνος ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς Ξ, Ψ στερεοῖς. ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ ἄρα τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κύκλου. ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου· ἐπειδήπερ ἐὰν περιγράψωμεν περὶ τὸν κύκλον τετράγωνον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀναστήσωμεν πυραμίδα ἰσοϋψῆ τῷ κώνῳ, ἡ ἐγγραφεῖσα πυραμὶς ἥμισύ ἐστι τῆς περιγραφείσης, πρὸς ἀλλήλας γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. ἐλάττων δὲ ὁ κῶνος τῆς περιγραφείσης πυραμίδος· ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις τὸ ΕΖΗΘ τετράγωνον κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ο, Π, Ρ, Σ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ· ἕκαστον ἄρα τῶν ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. ἀνεστάτω ἀφ' ἑκάστου τῶν ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ τριγώνων πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου· τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐπὶ ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας ἰσοϋψεῖς τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ Ψ στερεοῦ. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ Ξ στερεοῦ. ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολυγώνῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ, καὶ ἀνεστάτω ἐπ' αὐτοῦ πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ ΑΛ κώνῳ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ οὕτως τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, ὡς

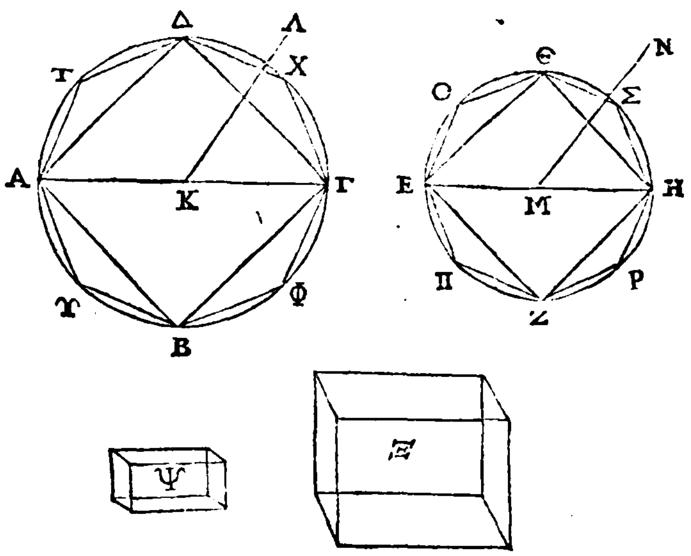


autem ΚΛ, ΜΝ, & diametri basium ΑΓ, ΕΗ: dico ut ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita esse conum ΑΛ ad ΕΝ conum.

Si enim non ita sit; erit ut ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita conus ΑΛ vel ad aliquod solidum minus cono ΕΝ vel ad majus. sit primo ad minus quod sit Ξ, & quo minus est solidum Ξ cono ΕΝ ei æquale sit Ψ solidum: conus igitur ΕΝ ipsis solidis Ξ, Ψ est æqualis. describatur in ΕΖΗΘ circulo quadratum ΕΖΗΘ: ergo istud quadratum majus est quam dimidium circuli. erigatur à quadrato ΕΖΗΘ pyramis æquealta cono: pyramis igitur erecta major est quam coni dimidium: nam si circa circulum quadratum describamus, & ab ipso erigamus pyramidem æquealtam cono; erit inscripta pyramis circumscriptæ pyramidis dimidia; etenim [per 6. 12.] inter se sunt ut bases. conus autem circumscripta pyramide est minor: ergo pyramis, cujus basis quadratum ΕΖΗΘ vertex autem idem qui coni, major est quam coni dimidium. secentur circumferentiæ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ bifariam in punctis Ο, Π, Ρ, Σ; & ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ jungantur: unumquodque igitur triangulorum ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ majus est quam dimidium respectivi segmenti circuli. erigatur ab unoquoque triangulorum ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ pyramis æquealta cono: ergo & unaquæque erectarum pyramidum major est quam dimidium respectivi segmenti coni: itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, & jungentes rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides æquealtas cono, atque hoc semper facientes, relinquemus tandem [per 1. 10.] aliqua segmenta coni quæ solido Ψ minora erunt. relinquantur, & sint quæ in ipsis ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ: reliqua igitur pyramis, cujus basis polygonum ΘΟΕΠΖΡΗΣ altitudo autem eadem quæ coni, major est solido Ξ. describatur in circulo ΑΒΓΔ polygono ΘΟΕΠΖΡΗΣ simile & similiter positum polygonum ΔΤΑΥΒΦΓΧ, & ab ipso erigatur pyramis æquealta cono ΑΛ. quoniam igitur est [per 20. 6. & 1. 12.] ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΕΗ ita ΔΤΑΥΒΦΓΧ polygonum ad polygonum ΘΟΕΠΖΡΗΣ; ut autem

autem quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΕΗ ita [per 2. 12.] ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ: erit [per 11. 5.] ut ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita polygonum ΔΤ ΑΥΒΦΓΧ ad polygonum ΘΟΕΠΖΡΗΣ. sed [per constr.] ut ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita conus ΑΛ ad Ξ solidum; & [per 6. 12.] ut polygonum ΔΤΑΥΒΦΓΧ ad polygonum ΘΟΕΠΖΡΗΣ ita pyramis, cujus basis ΔΤΑΥΒΦΓΧ polygonum vertex autem punctum Λ, ad pyramidem, cujus basis polygonum ΘΟΕΠΖΡΗΣ & vertex punctum Ν: ut igitur conus ΑΛ ad Ξ solidum ita pyramis, cujus basis polygonum ΔΤΑΥΒΦΓΧ & vertex punctum Λ, ad pyramidem, cujus basis polygonum ΘΟΕΠΖΡΗΣ & vertex Ν punctum: quare permutando, ut conus ΑΛ ad pyramidem quæ in ipso est ita solidum Ξ ad pyramidem quæ est in cono ΕΝ. conus autem ΑΛ major est pyramide quæ est in ipso: majus igitur est solidum Ξ pyramide quæ in cono ΕΝ. sed & minus, quod est absurdum: non igitur ut ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita est ΑΛ conus ad solidum aliquod minus cono ΕΝ. similiter demonstrabitur, neque ut ΕΖΗΘ circulus ad circulum ΑΒΓΔ ita esse conum ΕΝ ad aliquod solidum minus cono ΑΛ. Dico præterea neque esse ut ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita ΑΛ conum ad aliquod solidum majus cono ΕΝ. si enim fieri potest, sit ad solidum majus, quod sit Ξ: ergo invertendo, ut ΕΖΗΘ circulus ad circulum ΑΒΓΔ ita erit solidum Ξ ad ΑΛ conum. sed ut solidum Ξ ad ΑΛ conum ita conus ΕΝ ad aliquod solidum minus cono ΑΛ; & igitur ut ΕΖΗΘ circulus ad circulum ΑΒΓΔ ita conus ΕΝ ad aliquod solidum minus cono ΑΛ, quod fieri non posse ostensum est: non igitur ut ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita conus ΑΛ ad aliquod solidum majus cono ΕΝ. ostensum autem est neque esse ad minus: ergo ut ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita est conus ΑΛ ad ΕΝ conum. Sed ut conus ad conum ita est cylindrus ad cylindrum, est enim [per 10. 12.] alter alterius triplus: & igitur ut ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita in ipsis cylindri æquealti conis.

Ergo coni & cylindri, qui eandem habent



ἢ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως τὸ ΔΤΑΥΒ ΦΓΘ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον. ὡς δὲ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸ Ξ στερεὸν, ὡς δὲ τὸ ΔΤΑ ΥΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον οὕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΔΤΑΥΒ ΦΓΧ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸ Ξ στερεὸν οὕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΘΟ ΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα οὕτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὴν ἐν τῷ ΕΝ κώνῳ πυραμίδα. μείζων δὲ ὁ ΑΛ κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Ξ στερεὸν τῆς ἐν τῷ ΕΝ κώνῳ πυραμίδος. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ᾽ ὡς ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον οὕτως ὁ ΕΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΛ κώνου στερεόν. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐστιν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Ξ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον οὕτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΛ κῶνον. ἀλλ᾽ ὡς τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΛ κῶνον οὕτως ὁ ΕΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΛ κώνου στερεόν· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον οὕτως ὁ ΕΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΛ κώνου στερεὸν, ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΝ κῶνον. ἀλλ᾽ ὡς ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον οὕτως ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, τριπλασίων γὰρ ἑκάτερος ἑκατέρου· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον οὕτως οἱ ἐπ᾽ αὐτῶν ἰσοϋψεῖς τοῖς κώνοις κύλινδροι.

Οἱ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδρο δροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

altitudinem, inter se sunt ut bases. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ΄.

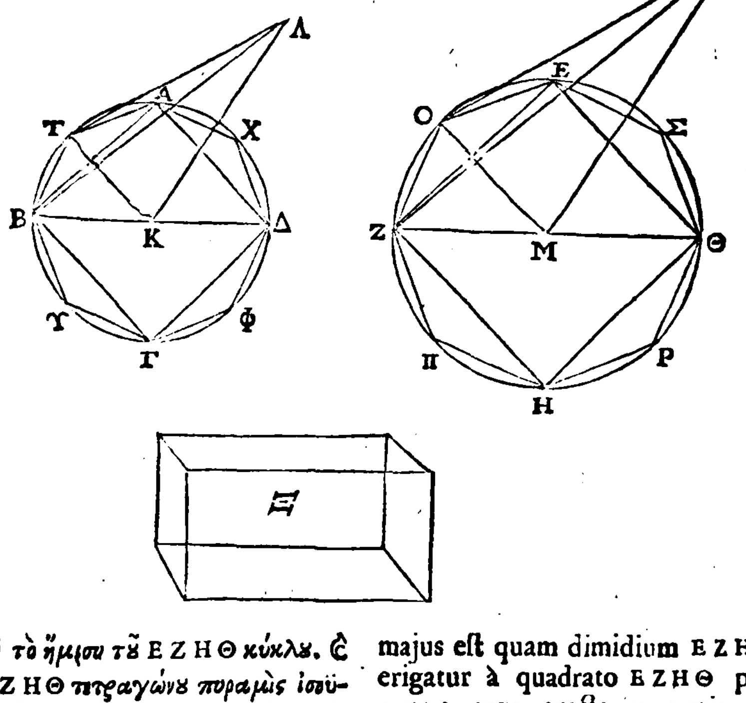
Οἱ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

PROP. XII. THEOR.

Similes coni & cylindri inter se sunt in triplicata ratione diametrorum basium.

Ἔστωσαν ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ ΒΔ, ΖΘ, ἄξονες δὲ τῶν κώνων ἢ κυλίνδρων οἱ ΚΛ, ΜΝ· λέγω ὅτι ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσις μὲν ὁ ΕΖΗΘ κύκλος κορυφὴ δὴ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

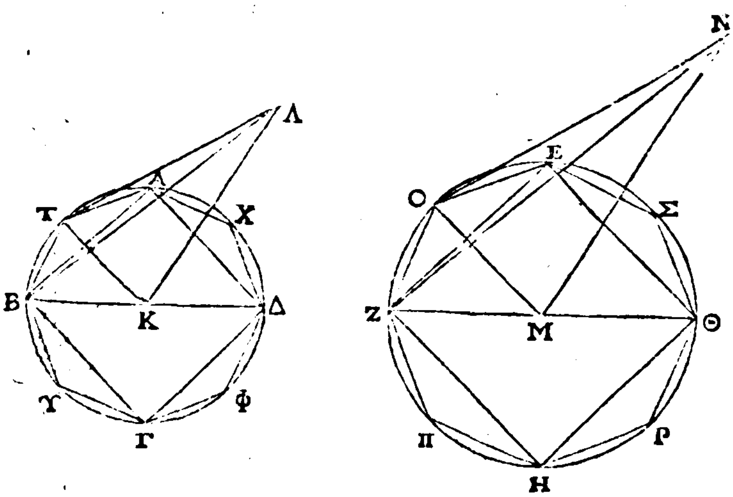
Εἰ γὰρ μὴ ἔχει ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, ἕξει ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος ἢ πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον, ἢ πρὸς μεῖζον. ἐχέτω πρὸς ἔλαττον πρότερον τὸ Ξ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ ἄρα ΕΖΗΘ τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἐπὶ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν δὴ αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ο, Π, Ρ, Σ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἐφ' ἑκάστου τῶν ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ τριγώνων πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἐχούσας τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος τοῦ Ξ στερεοῦ. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ

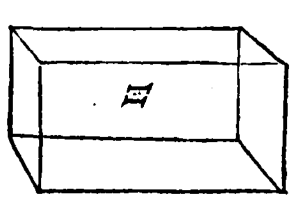


Sint similes coni & cylindri, quorum bases quidem circuli ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, diametri vero basium ΒΔ, ΖΘ, & axes conorum vel cylindrorum ΚΛ, ΜΝ: dico conum, cujus basis ΑΒΓΔ circulus vertex autem punctum Λ, ad conum, cujus basis circulus ΕΖΗΘ vertex autem Ν punctum, triplicatam habere rationem ejus quam habet ΒΔ ad ΖΘ.

Si enim non habet conus ΑΒΓΔΛ ad conum ΕΖΗΘΝ triplicatam rationem ejus quam ΒΔ habet ad ΖΘ, habebit ΑΒΓΔΛ conus triplicatam rationem, vel ad aliquod solidum minus cono ΕΖΗΘΝ, vel ad majus. habeat primum ad minus, quod sit Ξ; & describatur in ΕΖΗΘ circulo quadratum ΕΖΗΘ: quadratum igitur ΕΖΗΘ majus est quam dimidium ΕΖΗΘ circuli. dein erigatur à quadrato ΕΖΗΘ pyramis æquealta cono: ergo erecta pyramis major est quam coni dimidium. itaque secentur ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ circumferentiæ bifariam in punctis Ο, Π, Ρ, Σ, & jungantur ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ: unumquodque igitur triangulorum ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ majus est quam dimidium respectivi segmenti circuli ΕΖΗΘ. porro erigatur ab unoquoque triangulorum ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ pyramis, eundem verticem habens quem conus: ergo & unaquæque erectarum pyramidum major est quam dimidium respectivi segmenti coni. secantes igitur reliquas circumferentias bifariam, jungentesque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides eundem habentes verticem quem conus, atque hoc semper facientes, tandem relinquemus [per 1.10.] quædam coni segmenta, quæ minora erunt excessu quo conus ΕΖΗΘΝ ipsum Ξ solidum superat. relinquantur, sintque quæ super ipsa

ipsa ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ: reliqua igitur pyramis, cujus basis quidem polygonum ΕΟΖΠΗΡΘΣ vertex autem Ν punctum, major est solido Ξ. describatur etiam in circulo ΑΒΓΔ polygono ΕΟΖΠΗΡΘΣ simile & similiter positum polygonum ΑΤΒΥΓΦΔΧ; ex illo autem erigatur pyramis eundem verticem habens quem conus, & triangulorum continentium pyramidem, cujus basis quidem est polygonum ΑΤΒΥΓΦΔΧ vertex autem punctum Λ, unum sit ΛΒΤ: triangulorum vero continentium pyramidem, cujus basis ΕΟΖΠΗΡΘΣ polygonum & vertex punctum Ν, unum sit ΝΖΟ; denique jungantur ΚΤ, ΜΟ. quoniam igitur conus ΑΒΓΔΛ similis est cono ΕΖΗΘΝ; erit [per 24. def. 11.] ut ΒΔ ad ΖΘ ita ΚΛ axis ad axem ΜΝ. ut autem ΒΔ ad ΖΘ ita ΒΚ ad ΖΜ: ergo & ut ΒΚ ad ΖΜ ita ΚΛ ad ΜΝ: permutando igitur ut ΒΚ ad ΚΛ ita ΖΜ ad ΜΝ: & anguli ΒΚΛ, ΖΜΝ æquales sunt, quia recti, & circa æquales angulos ΒΚΛ ΖΜΝ, latera sunt proportionalia: simile igitur est [per 6. 6.] ΒΚΛ triangulum triangulo ΖΜΝ. rursus, quoniam est ut ΒΚ ad ΚΤ ita ΖΜ ad ΜΟ, suntque circa æquales angulos ΒΚΤ, ΖΜΟ; etenim quæ pars est angulus ΒΚΤ quatuor rectorum qui sunt ad Κ centrum, eadem est pars & angulus ΖΜΟ quatuor rectorum qui sunt ad centrum Μ: quoniam igitur circa æquales angulos latera sunt proportionalia, erit [per 6.6.] triangulum ΒΚΤ triangulo ΖΜΟ simile. rursus, quoniam ostensum est ut ΒΚ ad ΚΛ ita esse ΖΜ ad ΜΝ; æqualis autem est ΒΚ ipsi ΚΤ & ΖΜ ipsi ΜΟ: erit ut ΚΤ ad ΚΛ ita ΟΜ ad ΜΝ: & circa æquales angulos ΤΚΛ, ΟΜΝ (nempe rectos) latera sunt proportionalia; triangulum igitur ΛΚΤ simile est triangulo ΝΜΟ. quoniam vero ob similitudinem triangulorum ΒΚΛ, ΖΜΝ est ut ΛΒ ad ΒΚ ita ΝΖ ad ΖΜ; ob similitudinem vero triangulorum ΒΚΤ, ΖΜΟ ut ΚΒ ad ΒΤ ita ΜΖ ad ΖΟ: erit ex æquo [per 22. 5.] ut ΛΒ ad ΒΤ ita ΝΖ ad ΖΟ. rursus, quoniam ob similitudinem triangulorum ΛΤΚ, ΝΟΜ est ut ΛΤ ad ΤΚ ita ΝΟ ad ΟΜ; & ob similitudinem triangulorum ΚΒΤ, ΟΜΖ ut ΚΤ ad ΤΒ ita ΜΟ





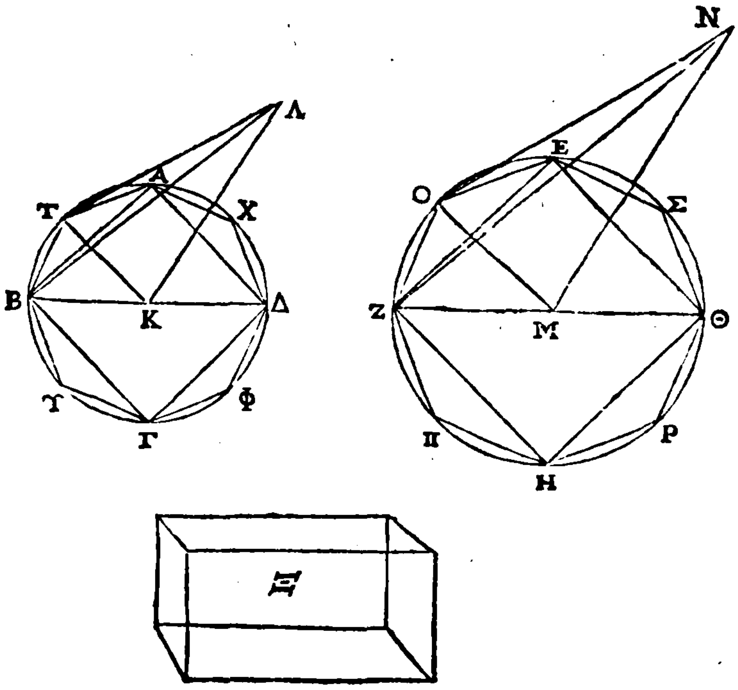
τ̃ ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μδὺ ἐςι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, μείζων ἐςὶ τοῦ Ξ ςερεοῦ. ἐγγεγράφθω ϗ εἰς τ̃ ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολυγώνῳ ὅμοιόν τε ϗ ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ, καὶ ἀνεςάτω ἀπ' αὐτοῦ πυραμὶς, τ̃ αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ, καὶ τ̃ μδὺ περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μδὺ ἐςι τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, ἓν τρίγωνον ἔςω τὸ ΛΒΤ, τ̃ δὲ περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μδὺ ἐςι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, ἓν τρίγωνον ἔςω τὸ ΝΖΟ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΤ, ΜΟ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιός ἐςιν ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος τῷ ΕΖΗΘΝ κώνῳ· ἔςιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ οὕτως ὁ ΚΛ ἄξων πρὸς τ̃ ΜΝ ἄξονα. ὡς ϗ ἡ ΒΔ πρὸς τ̃ ΖΘ οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς τ̃ ΖΜ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς τ̃ ΖΜ οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΜΝ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τ̃ ΜΝ, καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΚΛ, ΖΜΝ ἴσαι, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΒΚΛ, ΖΜΝ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα τὸ ΒΚΛ τρίγωνον τῷ ΖΜΝ τριγώνῳ. πάλιν, ἐπεί ἐςιν ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΤ οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τ̃ ΜΟ, ϗ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΒΚΤ, ΖΜΟ, ἐπειδήπερ ὃ μέρος ἐςὶν ἡ ὑπὸ ΒΚΤ γωνία τ̃ πρὸς τῷ Κ κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν, τὸ αὐτὸ μέρος ἐςὶ ϗ ἡ ὑπὸ ΖΜΟ γωνία τ̃ πρὸς τῷ Μ κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν. ἐπεὶ οὖν περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα τὸ ΒΚΤ τρίγωνον τῷ ΖΜΟ τριγώνῳ. πάλιν, ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΝ, ἴση δὲ ἡ μδὺ ΒΚ τῇ ΚΤ, ἡ δὲ ΖΜ τῇ ΜΟ· ἔςιν ἄρα ὡς ἡ ΚΤ πρὸς τὴν ΚΛ οὕτως ἡ ΟΜ πρὸς τ̃ ΜΝ. ϗ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΤΚΛ, ΟΜΝ, ὀρθαὶ γὰρ, αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα τὸ ΛΚΤ τρίγωνον τῷ ΝΜΟ τριγώνῳ. ϗ ἐπειδὴ διὰ τὴν ὁμοιότητα τ̃ ΒΚΛ, ΖΜΝ τριγώνων ἐςὶν ὡς ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΚ οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς τὴν ΖΜ, διὰ δὲ τ̃ ὁμοιότητα τ̃ ΒΚΤ, ΖΜΟ τριγώνων ἐςὶν ὡς ἡ ΚΒ πρὸς τὴν ΒΤ οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΟ· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΤ οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς τ̃ ΖΟ. πάλιν, ἐπεὶ διὰ τ̃ ὁμοιότητα τ̃ ΛΤΚ, ΝΟΜ τριγώνων ἐςὶν ὡς ἡ ΛΤ πρὸς τ̃ ΤΚ οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τ̃ ΟΜ, διὰ δὲ τ̃ ὁμοιότητα τ̃ ΚΒΤ, ΟΜΖ τριγώνων ἐςὶν ὡς ἡ ΚΤ πρὸς τ̃ ΤΒ οὕτως ἡ ΜΟ

ΜΟ πρὸς τὴν ΟΖ· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΑΤ πρὸς τὴν ΤΒ οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΖ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΤΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΟΖ πρὸς τὴν ΖΝ· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΤΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἡ ΟΝ πρὸς τὴν ΝΖ· τῶν ΑΤΒ, ΝΟΖ ἄρα τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί· ἰσογώνια ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΤΒ, ΝΟΖ τρίγωνα· ὥστε καὶ ὅμοια. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΒΚΤ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΖΜΟ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, ὑπὸ γὰρ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται ἴσων τὸ πλῆθος. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ἡ ἄρα ΒΚΤΑ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΜΟΝ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ. ὁμοίως δὴ ἐπιζευγνύντες ἀπὸ τῶν Α, Χ, Δ, Φ, Γ, Τ εὐθείας ἐπὶ τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Σ, Θ, Ρ, Η, Π ἐπὶ τὸ Μ, καὶ ἀνιστάντες ἐπὶ τῶν τριγώνων πυραμίδας τὰς αὐτὰς κορυφὰς ἐχούσας τοῖς κώνοις, δείξομεν ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὁμοταγῶν πυραμίδων πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἕξει ἤπερ ἡ ΒΚ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΜ ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. ἀλλ' ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ΒΚΤΑ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΜΟΝ πυραμίδα οὕτως ἡ ὅλη πυραμίς, ἧς βάσις τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς τὴν ὅλην πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον· ὥστε καὶ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. ὑπόκειται δὲ ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς τὸ Ξ στερεὸν, τριπλασίονα λόγον ἔχων ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς τὸ Ξ στερεὸν, οὕτως ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Α, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Ν. ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Α, οὕτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Ν. μείζων δὲ ὁ εἰρημένος κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος, ἐμπεριέχει γὰρ αὐτήν· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Ξ στερεὸν τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ κώνου στερεόν, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ὁ ΕΖΗΘ κύκλος κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὁ ΕΖΗ

ad ΟΖ: ex æquo erit ut ΑΤ ad ΤΒ ita ΝΟ ad ΟΖ. ostensum autem est & ut ΤΒ ad ΒΑ ita ΟΖ ad ΖΝ: quare rursus ex æquo ut ΤΑ ad ΑΒ ita ΟΝ ad ΝΖ: triangulorum igitur ΑΤΒ, ΝΟΖ proportionalia sunt latera: ideoque [per 5. 6.] æquiangula sunt ΑΤΒ, ΝΟΖ triangula & inter se similia: quare [per 9. def. 11.] & pyramis, cujus basis triangulum ΒΚΤ vertex autem Α punctum, similis est pyramidi, cujus basis ΖΜΟ triangulum & vertex punctum Ν; similibus enim planis continentur & multitudine æqualibus. pyramides autem similes, quæ triangulares bases habent, sunt [per 8. 12.] in triplicata ratione homologorum laterum: ergo pyramis ΒΚΤΑ ad pyramidem ΖΜΟΝ triplicatam habet rationem ejus quam ΒΚ habet ad ΖΜ. similiter à punctis quidem Α, Χ, Δ, Φ, Γ, Τ ad Κ, à punctis vero Ε, Σ, Θ, Ρ, Η, Π ad Μ ducentes rectas lineas, & à triangulis erigentes pyramides vertices eosdem habentes quos coni, ostendemus & unamquamque pyramidum ejusdem ordinis ad unamquamque alterius ordinis triplicatam rationem habere ejus quam habet ΒΚ latus homologum ad homologum latus ΖΜ, hoc est quam ΒΔ habet ad ΖΘ. sed [per 12. 5.] ut unum antecedentium ad unum consequentium ita omnia antecedentia ad omnia consequentia: est igitur & ut ΒΚΤΑ pyramis ad pyramidem ΖΜΟΝ ita tota pyramis, cujus basis ΑΤΒΥΓΦΔΧ polygonum vertex autem punctum Α, ad totam pyramidem, cujus basis polygonum ΕΟΖΠΗΡΘΣ & vertex punctum Ν: quare & pyramis, cujus basis ΑΤΒΥΓΦΔΧ polygonum vertex autem punctum Α ad pyramidem, cujus basis polygonum ΕΟΖΠΗΡΘΣ & vertex punctum Ν, triplicatam rationem habet ejus quam ΒΔ habet ad ΖΘ. ponitur autem conus, cujus basis circulus ΑΒΓΔ, vertex autem punctum Α, ad solidum Ξ triplicatam rationem habere ejus quam habet ΒΔ ad ΖΘ: ut igitur conus, cujus basis circulus ΑΒΓΔ vertex autem punctum Α, ad solidum Ξ ita est pyramis, cujus basis ΑΤΒΥΓΦΔΧ polygonum vertex autem punctum Α, ad pyramidem, cujus basis polygonum ΕΟΖΠΗΡΘΣ & vertex punctum Ν. & permutando [per 16. 5.] ut conus, cujus basis circulus ΑΒΓΔ vertex autem punctum Α, ad pyramidem quæ in ipso est, cujus basis ΑΤΒΥΓΦΔΧ polygonum vertex autem punctum Α, ita solidum Ξ ad pyramidem, cujus basis polygonum ΕΟΖΠΗΡΘΣ & vertex punctum Ν. dictus autem conus major est pyramide quæ in ipso est; etenim eam comprehendit: majus igitur est & solidum Ξ pyramide, cujus basis polygonum ΕΟΖΠΗΡΘΣ vertex autem punctum Ν. sed & minus, quod fieri non potest: non igitur conus, cujus basis ΑΒΓΔ circulus & vertex punctum Α, ad aliquod solidum minus cono, cujus basis circulus ΕΖΗΘ & vertex Ν punctum, triplicatam rationem habet ejus quam ΒΔ habet ad ΖΘ. similiter demonstrabimus neque conum ΕΖΗ

ΘΝ ad aliquod solidum minus cono ΑΒΓΔΛ triplicatam rationem habere ejus quam habet ΖΘ ad ΒΔ. Dico neque ΑΒΓΔΘ conum ad solidum majus cono ΕΖΗΘΝ triplicatam habere rationem ejus quam ΒΔ habet ad ΖΘ. si enim fieri potest, habeat ad aliquod solidum majus, quod sit Ξ: invertendo igitur, solidum Ξ ad conum ΑΒΓΔΛ triplicatam rationem habet ejus quam ΖΘ habet ad ΒΔ. ut autem solidum Ξ ad conum ΑΒΓΔΛ ita ΕΖΗΘΝ conus ad aliquod solidum minus cono ΑΒΓΔΛ: ergo & conus ΕΖΗΘΝ ad solidum aliquod minus cono ΑΒΓΔΛ triplicatam rationem habebit ejus quam ΖΘ habet ad ΒΔ, quod fieri non posse demonstratum est: non igitur ΑΒΓΔΛ conus ad solidum aliquod majus cono ΕΖΗΘΝ triplicatam rationem habet ejus quam ΒΔ habet ad ΖΘ. ostensum autem est neque ad minus: quare conus ΑΒΓΔΛ ad ΕΖΗΘΝ conum triplicatam rationem habet ejus quam ΒΔ habet ad ΖΘ. Ut autem conus ad conum ita & cylindrus ad cylindrum, cylindrus enim in eadem existens basi in qua conus, & ipsi æquealtus coni triplus est, cum [per 10. 12.] ostensum sit omnem conum tertiam partem esse cylindri eandem quam ipse basim habentis & æqualem altitudinem: ergo & cylindrus ad cylindrum triplicatam rationem habebit ejus quam ΒΔ habet ad ΖΘ.

Similes igitur coni & cylindri inter se sunt in triplicata ratione diametrorum basium. quod erat demonstrandum.



ΘΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ. Λέγω ὅτι οὐδὲ ὁ ΑΒΓΔΘ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐχέτω πρὸς μεῖζον τὸ Ξ· ἀνάπαλιν ἄρα τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΛ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ. ὡς δὲ τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΛ κῶνον οὕτως ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεόν· καὶ ΕΖΗΘΝ κῶνος ἄρα πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ, ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττον· ὁ ΑΒΓΔΛ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Ὡς δὲ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον οὕτως ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, τριπλάσιος γὰρ ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ὁ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῷ κώνῳ καὶ ἰσοϋψὴς αὐτῷ· ἐδείχθη γὰρ πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον· καὶ κύλινδρες ἄρα πρὸς τὸν κύλινδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Οἱ ἄρα ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XIII. Theor.

Si cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo; erit ut cylindrus ad cylindrum ita axis ad axem.

Cylindrus enim ΑΔ plano ΗΘ secetur oppositis planis ΑΒ, ΓΔ parallelo, & occurrat axi ΕΖ in Κ puncto: dico ut ΒΗ cylindrus ad cylindrum ΗΔ ita esse ΕΚ axem ad axem ΚΖ.

Producatur enim ΕΖ axis ex utraque parte ad puncta Λ, Μ, & ipsi quidem ΕΚ axi

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγʹ.

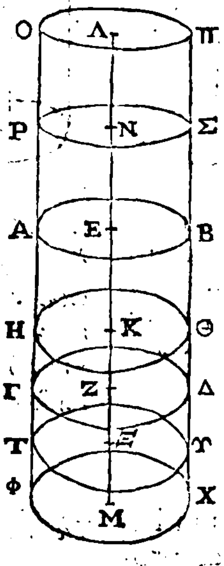
Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον οὕτως ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

Κύλινδρος γὰρ ὁ ΑΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΗΘ τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς ΑΒ, ΓΔ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ΕΖ ἄξονι κατὰ τὸ Κ σημεῖον· λέγω ὅτι ὡς ὁ ΒΗ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον οὕτως ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξονα.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ ΕΖ ἄξων ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Λ, Μ σημεῖα, καὶ ἐκκείσθωσαν τῷ μὲν ΕΚ ἄξονι

ἴσοι

ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ ΕΝ, ΝΛ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ ΖΞ, ΞΜ, καὶ διήχθωσαν διὰ τῶν Λ, Ν, Ξ, Μ σημείων ἐπίπεδα παράλληλα τοῖς ΑΒ, ΓΔ, καὶ νενοήσθωσαν ἐν τοῖς διὰ τῶν Λ, Ν, Ξ, Μ ἐπιπέδοις περὶ κέντρα τὰ Λ, Ν, Ξ, Μ κύκλοι οἱ ΟΠ, ΡΣ, ΤΥ, ΦΧ ἴσοι τοῖς ΑΒ, ΓΔ, καὶ νενοήσθωσαν κύλινδροι οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΔΤ, ΤΧ. καὶ ἐπεὶ οἱ ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις· οἱ ἄρα ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δέ εἰσιν αἱ βάσεις· ἴσοι ἄρα καὶ οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι. ἐπεὶ οὖν οἱ ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ ἄξονες ἴσοι καὶ ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ τῷ πλήθει τῶν ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ· ὁσαπλασίων ἄρα ὁ ΚΛ ἄξων τοῦ ΕΚ ἄξονος τοσαυταπλασίων ἔσται καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΒ κυλίνδρου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ὁ ΜΚ ἄξων τοῦ ΚΖ ἄξονος τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΧΗ κύλινδρος τοῦ ΗΔ κυλίνδρου. καὶ εἰ μὲν ἴσος ἐστὶν ὁ ΚΛ ἄξων τῷ ΚΜ ἄξονι, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τῷ ΗΧ κυλίνδρῳ· εἰ δὲ μείζων ὁ ΚΛ ἄξων τοῦ ΚΜ ἄξονος, μείζων καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΚ κυλίνδρου, καὶ εἰ ἐλάσσων ἐλάσσων· τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, ἀξόνων μὲν τῶν ΕΚ, ΚΖ κυλίνδρων δὲ τῶν ΒΗ, ΗΔ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια, τοῦ μὲν ΕΚ ἄξονος καὶ τοῦ ΒΗ κυλίνδρου, ὅ, τι ΚΛ ἄξων καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος, τοῦ δὲ ΚΖ ἄξονος καὶ τοῦ ΗΔ κυλίνδρου, ὅ, τι ΚΜ ἄξων καὶ ὁ ΗΧ. καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ὁ ΚΛ ἄξων τοῦ ΚΜ ἄξονος, ὑπερέχει καὶ ὁ ΒΗ κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυλίνδρου, καὶ εἰ ἴσος ἴσος, καὶ εἰ ἐλάττων ἐλάττων· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξονα οὕτως ὁ ΒΗ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



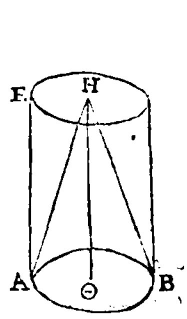
ponantur æquales quotcunque EN, NΛ; ipsi vero ZK æquales quotcunque ZΞ, ΞM; dein per puncta Λ, N, Ξ, M ducantur plana ipsis AB, ΓΔ parallela; atque in planis per Λ, N, Ξ, M circa centra Λ, N, Ξ, M intelligantur circuli OΠ, PΣ, TΥ, ΦX æquales ipsis AB, ΓΔ; cylindri denique ΠP, PB, ΔT, TX constitui intelligantur. quoniam igitur axes ΛN, NE, EK inter se sunt æquales, erunt [per 11. 12.] cylindri ΠP, PB, BH inter se ut bases. bases autem æquales sunt: ergo & cylindri ΠP, PB, BH sunt æquales. quoniam autem axes ΛN, NE, EK inter se æquales sunt, itemque cylindri ΠP, PB, BH inter se æquales, atque est ipsorum ΛN, NE, EK multitudo æqualis multitudini ipsorum ΠP, PB, BH: quotuplex igitur est axis KΛ ipsius EK axis totuplex erit & ΠH cylindrus cylindri HB. eadem ratione & quotuplex est MK axis ipsius axis KZ totuplex est & XH cylindrus cylindri HΔ. & si quidem axis KΛ sit æqualis axi KM, erit & ΠH cylindrus cylindro HX æqualis: si autem axis KΛ major sit axe KM, & cylindrus ΠH major erit cylindro HX; & si minor, minor: quatuor igitur existentibus magnitudinibus, videlicet axibus EK, KZ & cylindris BH, HΔ, sumpta sunt æquemultiplicia, axis quidem EK & BH cylindri, nempe axis KΛ & cylindrus ΠH; axis vero KZ & cylindri HΔ æquemultiplicia, axis scilicet KM & HX cylindrus. demonstratum etiam est, quod si KΛ axis superat axem KM, & ΠH cylindrus superabit cylindrum HX; & si æqualis erit, æqualis; & si minor, minor: est igitur [per 5. def. 5.] ut axis EK ad axem KZ ita cylindrus BH ad cylindrum HΔ. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη.

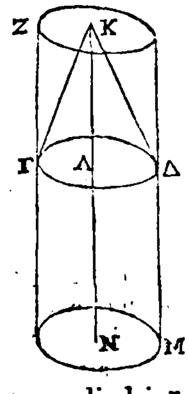
Ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΑΒ, ΓΔ κύλινδροι οἱ ΖΔ, ΕΒ· λέγω ὅτι ὡς ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον οὕτως ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ ΚΛ ἄξων ἐπὶ τὸ Ν σημεῖον, καὶ κείσθω τῷ ΗΘ ἄξονι ἴσος ὁ ΛΝ, καὶ περὶ ἄξονα τὸν ΛΝ κύλινδρος νοείσθω ὁ ΓΜ. ἐπεὶ οὖν οἱ ΕΒ, ΓΜ κύλινδροι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶ πρὸς ἀλλή-



Prop. XIV. Theor.

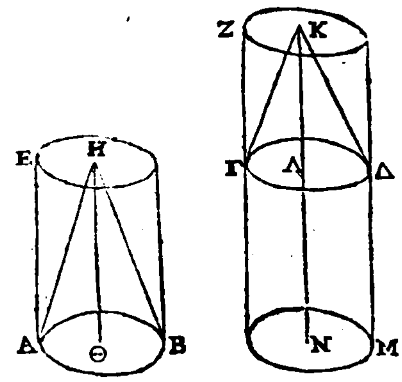
Æqualibus basibus insistentes coni aut cylindri inter se sunt ut altitudines.



Sint enim in æqualibus basibus AB, ΓΔ cylindri ZΔ, EB: dico ut EB cylindrus ad cylindrum ZΔ ita esse HΘ axem ad axem KΛ.

Producatur enim KΛ axis ad punctum N; ponaturque ipsi HΘ axi æqualis ΛN; dein circa axem ΛN intelligatur constitutus cylindrus ΓM. quoniam igitur cylindri EB, ΓM eandem habent altitudinem,

nem,[per 11.12.] inter se sunt ut bases. bases autem sunt æquales: ergo & cylindri ΕΒ, ΓΜ inter se æquales erunt. quoniam vero cylindrus ΖΜ secatur plano ΓΔ oppositis planis parallelo; erit [per 13.12.] ut ΓΜ cylindrus ad cylindrum ΖΔ ita axis ΛΝ ad ΚΛ axem. æqualis autem est cylindrus quidem ΓΜ cylindro ΕΒ, axis vero ΛΝ axi ΗΘ: est igitur ut ΕΒ cylindrus ad cylindrum ΖΔ ita axis ΗΘ ad ΚΛ axem. Ut autem ΕΒ cylindrus ad cylindrum ΖΔ ita ΑΒΗ conus ad conum ΓΔΚ; cylindri enim sunt [per 10.12.] conorum tripli: ergo & ut ΗΘ axis ad axem ΚΛ ita est ΑΒΗ conus ad conum ΓΔΚ, & cylindrus ΕΒ ad ΖΔ cylindrum. quod erat demonstrandum.



λυς εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δὲ εἰσιν αἱ βάσεις ἀλλήλαις· ἴσοι ἄρα εἰσὶ καὶ οἱ ΕΒ, ΓΜ κύλινδροι ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ κύλινδρος ὁ ΖΜ ἐπιπέδῳ τέτμηται τῷ ΓΔ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΜ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον οὕτως ὁ ΛΝ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα. ἴσος δέ ἐστιν ὁ μὲν ΓΜ κύλινδρος τῷ ΕΒ κυλίνδρῳ, ὁ δὲ ΛΝ ἄξων τῷ ΗΘ ἄξονι· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον οὕτως ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα. Ὡς δὲ ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον οὕτως ὁ ΑΒΗ κῶνος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον, τριπλάσιον γὰρ οἱ κύλινδροι τῶν κώνων· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα οὕτως ὁ ΑΒΗ κῶνος πρὸς ΓΔΚ κῶνον καὶ ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XV. Theor.

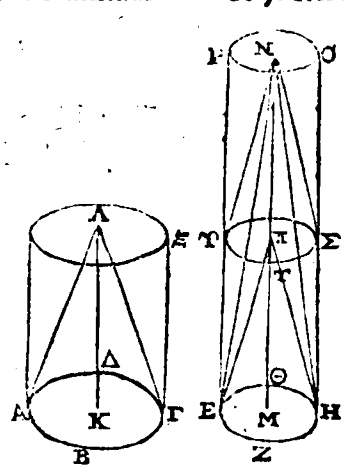
Æqualium conorum aut cylindrorum bases sunt altitudinibus reciproce proportionales: item quorum conorum aut cylindrorum bases altitudinibus reciproce proportionales sunt, illi inter se sunt æquales.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε.

Τῶν ἴσων κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν ἴσοι εἰσὶν ἐκεῖνοι.

Sint æquales coni & cylindri, quorum bases quidem ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ circuli, & diametri ipsorum ΑΓ, ΕΗ; axes vero ΚΛ, ΜΝ, qui quidem & conorum vel cylindrorum sunt altitudines, atque compleantur cylindri ΑΞ, ΕΟ: dico cylindrorum ΑΞ, ΕΟ bases esse reciproce proportionales altitudinibus, hoc est, ut ΑΒΓΔ basis ad basim ΕΖΗΘ ita esse altitudinem ΜΝ ad altitudiuem ΚΛ.

Altitudo enim ΚΛ vel æqualis est altitudini ΜΝ, vel non æqualis. sit primum æqualis. est autem ΑΞ cylindrus æqualis cylindro ΕΟ. qui vero eandem habent altitudinem coni aut cylindri [per 11.12.] inter se sunt ut bases: æqualis igitur est basis ΑΒΓΔ basi ΕΖΗΘ; ac propterea sunt reciproce proportionales, hoc est, ut basis ΑΒΓΔ ad ΕΖΗΘ basim ita ΜΝ altitudo ad altitudinem ΚΛ. Non sit autem altitudo ΚΛ altitudini ΜΝ æqualis, sed sit ΜΝ major, atque auferatur ab ipsa ΜΝ altitudini ΚΛ æqualis ΠΜ, & per Π secetur ΕΟ cylindrus plano ΤΥΣ oppositis planis circulorum ΕΖΗΘ, ΡΟ parallelo, intelligaturque constitutus cylindrus ΕΣ, cujus basis quidem ΕΖΗΘ circulus, altitudo autem ΠΜ. quoniam igitur [ex hyp.] ΑΞ



Ἔστωσαν ἴσοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΕΗ, ἄξονες δὲ οἱ ΚΛ, ΜΝ, οἵ τινες καὶ ὕψη εἰσὶ τῶν κώνων ἢ κυλίνδρων, καὶ συμπεπληρώσθωσαν οἱ ΑΞ, ΕΟ κύλινδροι· λέγω ὅτι τῶν ΑΞ, ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, τουτέστιν ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος.

Τὸ γὰρ ΚΛ ὕψος τῷ ΜΝ ὕψει ἤτοι ἴσον ἐστὶν, ἢ οὔ. ἔστω πρότερον ἴσον. ἔστι δὲ καὶ ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ ἴσος. οἱ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒΓΔ βάσις τῇ ΕΖΗΘ βάσει· ὥστε καὶ ἀντιπεπόνθασιν, ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος. Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω τὸ ΚΛ ὕψος τῷ ΜΝ ἴσον, ἀλλ᾽ ἔστω τὸ ΜΝ μεῖζον, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ΜΝ ὕψους τῷ ΚΛ ἴσον τὸ ΠΜ, καὶ διὰ τοῦ Π σημείου τετμήσθω ὁ ΕΟ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τῷ ΤΥΣ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τῶν ΕΖΗΘ, ΡΟ κύκλων, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου ὕψους δὲ τοῦ ΠΜ κύλινδρος νενοήσθω ὁ ΕΣ. καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ ΑΞ κύλινλινδρος τῷ ΞΟ κυλίνδρῳ, ἄλλος δέ τις ὁ ΕΣ κύλινδρος· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον. ἀλλ' ὡς μὲν ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ οὕτως ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν οἱ ΑΞ, ΕΣ κύλινδροι. ὡς δὲ ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΜΠ ὕψος, ὁ γὰρ ΕΟ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τέτμηται τῷ ΤΥΣ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΜΠ ὕψος. ἴσον δὲ τὸ ΜΠ ὕψος τῷ ΚΛ ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος· τῶν ἄρα ΑΞ, ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

cylindrus æqualis est cylindro ΕΟ, alius autem aliquis est cylindrus ΕΣ; erit [per 7. 5.] ut ΑΞ cylindrus ad cylindrum ΕΣ ita cylindrus ΕΟ ad ΕΣ cylindrum. sed [per 11. 12.] ut ΑΞ cylindrus ad cylindrum ΕΣ ita basis ΑΒΓΔ ad ΕΖΗΘ basim; cylindri enim ΑΞ, ΕΣ eandem habent altitudinem. ut autem cylindrus ΕΟ ad ΕΣ cylindrum ita [per 13. 12.] ΜΝ altitudo ad altitudinem ΜΠ; nam cylindrus ΕΟ secatur plano ΤΥΣ oppositis planis parallelo; est igitur ut ΑΒΓΔ basis ad basim ΕΖΗΘ ita altitudo ΜΝ ad ΜΠ altitudinem. æqualis autem est ΜΠ altitudo altitudini ΚΛ: quare ut basis ΑΒΓΔ ad ΕΖΗΘ basim ita ΜΝ altitudo ad altitudinem ΚΛ: æqualium igitur cylindrorum ΑΞ, ΕΟ bases sunt reciproce proportionales altitudinibus.

ΑΛΛΑ δὴ τῶν ΑΞ, ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος· λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ.

Sed cylindrorum ΑΞ, ΕΟ bases sint reciproce proportionales altitudinibus, sitque ut ΑΒΓΔ basis ad basim ΕΖΗΘ ita altitudo ΜΝ ad ΚΛ altitudinem: dico ΑΞ cylindrum cylindro ΕΟ æqualem esse.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος, ἴσον δὲ τὸ ΚΛ ὕψος τῷ ΜΠ ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΜΠ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον, ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσίν. ὡς δὲ τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΜΠ ὕψος οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον· ἴσος ἄρα ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ. ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν κώνων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Iisdem enim constructis, quoniam ut ΑΒΓΔ basis ad basim ΕΖΗΘ ita est altitudo ΜΝ ad ΚΛ altitudinem, altitudo autem ΚΛ est æqualis altitudini ΜΠ: erit ut ΑΒΓΔ basis ad basim ΕΖΗΘ ita ΜΝ altitudo ad altitudinem ΜΠ. sed [per 11. 12.] ut ΑΒΓΔ basis ad basim ΕΖΗΘ ita est & ΑΞ cylindrus ad cylindrum ΕΣ: eandem enim habent altitudinem. ut autem ΜΝ altitudo ad altitudinem ΜΠ ita [per 13. 12.] cylindrus ΕΟ ad ΕΣ cylindrum: est igitur ut ΑΞ cylindrus ad cylindrum ΕΣ ita cylindrus ΕΟ ad ΕΣ cylindrum: cylindrus igitur ΑΞ [per 9. 5.] cylindro ΕΟ est æqualis. similiter autem & in conis. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

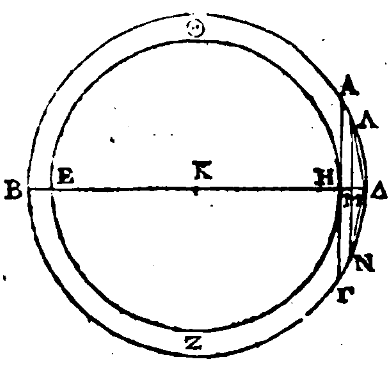
Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων, εἰς τὸν μείζονα κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου.

Prop. XVI. Probl.

Duobus circulis circa idem centrum consistentibus, in majori polygonum æqualium ac parium numero laterum describere, quod minorem circulum non tangat.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Κ· δεῖ δὴ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΑΒΓΔ πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Κ κέντρου εὐθεῖα ἡ ΒΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η σημείου τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΑΗ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Γ· ἡ ΑΓ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· τέμνοντες δὴ τὴν ΒΑΔ περιφέρειαν δίχα, καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομεν περιφέρειαν ἐλάττονα τῆς ΑΔ. λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ ΛΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετος ἤχθω



Sint dati duo circuli ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ circa idem centrum Κ: oportet in majori circulo ΑΒΓΔ polygonum æqualium ac parium numero laterum describere, non tangens minorem circulum ΕΖΗΘ.

Ducatur enim per Κ centrum recta linea ΒΔ, atque à puncto Η ipsi ΒΔ ad rectos angulos ducatur ΑΗ, & ad Γ producatur: ergo [per 16. 3.] ΑΓ circulum ΕΖΗΘ tangit: itaque circumferentiam ΒΑΔ bifariam secantes, & ejus dimidium rursus bifariam, & hoc semper facientes, tandem relinquemus [per 1. 10.] circumferentiam minorem ipsa ΑΔ. relinquatur, sitque ΛΔ, & à puncto Λ ad ΒΔ perpendicularis

agatur

agatur A M, & ad N producatur, junganturque A Δ, Δ N: ergo A Δ ipsi Δ N est æqualis. & quoniam A N parallela est ipsi A Γ, ipsa vero A Γ tangit circulum E Z H Θ; ipsa A N circulum E Z H Θ non tanget, & multo minus tangent circulum E Z H Θ rectæ lineæ A Δ, Δ N. quod si [per 1. 4.] ipsi A Δ æquales deinceps circulo A B Γ Δ aptabimus, describetur in eo polygonum æqualium ac parium numero laterum, non tangens minorem circulum E Z H Θ. quod erat faciendum.

ἡ A M, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ N, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ A Δ, Δ N, A M· ἴση ἄρα ἡ A Δ τῇ Δ N. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ A N τῇ A Γ, ἡ δὲ A Γ ἐφάπτεται τοῦ E Z H Θ κύκλου· ἡ A N ἄρα οὐκ ἐφάπτεται τοῦ E Z H Θ κύκλου· πολλῷ ἄρα αἱ A Δ, Δ N οὐκ ἐφάπτονται τοῦ E Z H Θ κύκλου. ἐὰν δὴ τῇ A Δ εὐθείᾳ ἴσας κατὰ τὸ συνεχὲς ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν A B Γ Δ κύκλον, ἐγγραφήσεται εἰς τὸν A B Γ Δ κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον, μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάττονος κύκλου τοῦ E Z H Θ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XVII. Probl.

Duabus sphæris circa idem centrum consistentibus, in majori solidum polyedrum describere, quod minoris sphæræ superficiem non tangat.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ′.

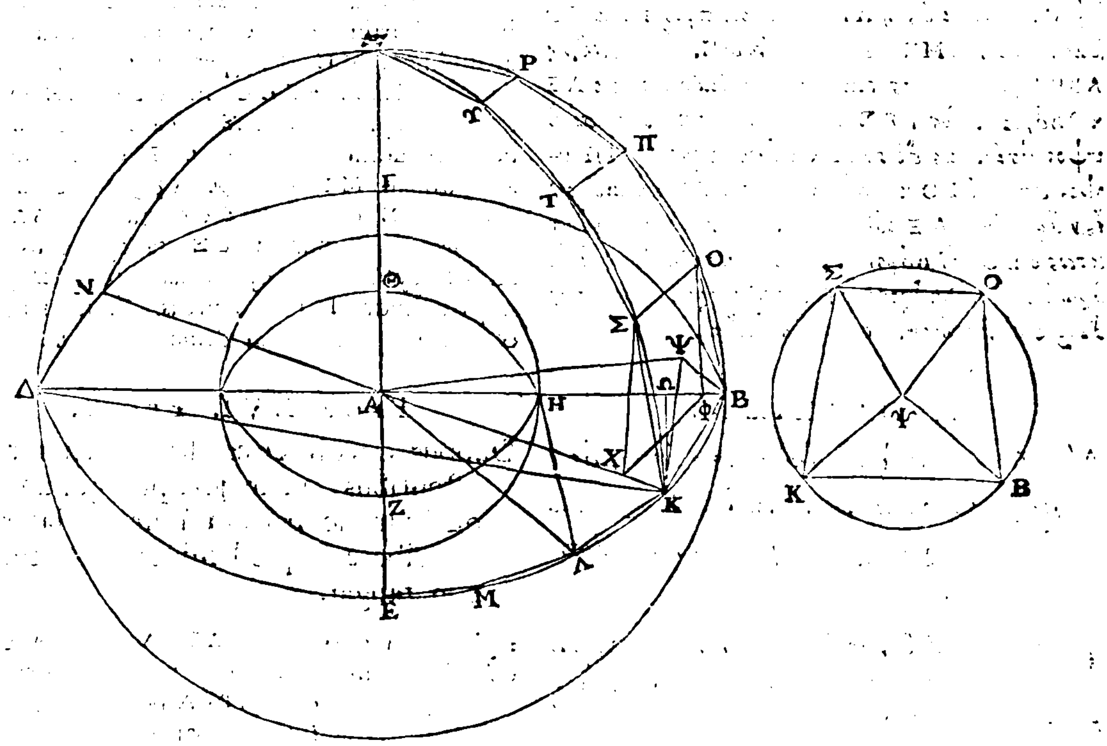
Δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν, εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Intelligantur duæ sphæræ circa idem centrum A: oportet in majori sphæra describere solidum polyedrum, quod sphæræ minoris superficiem non tangat.

Νενοήσθωσαν δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ A· δεῖ δὴ εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάττονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Secentur sphæræ plano aliquo per centrum

Τετμήσθωσαν αἱ σφαῖραι ἐπιπέδῳ τινὶ διὰ τοῦ



ducto: erunt igitur sectiones circuli, quoniam [per 14. def. 11.] diametro manente & semicirculo circumducto sphæra facta est: ergo in quacunque positione semicirculum intelligamus, quod per ipsum producitur planum in superficie sphæræ circulum efficiet. constat vero circulum maximum esse, quia diameter sphæræ, (quæ & semicirculi diameter est) major est [per 15. 3.] omnibus rectis lineis quæ in circulo vel sphæra ducuntur. sit igitur in majori quidem sphæra circulus B Γ Δ E; in minori autem circulus Z H Θ; & ducantur ipso-

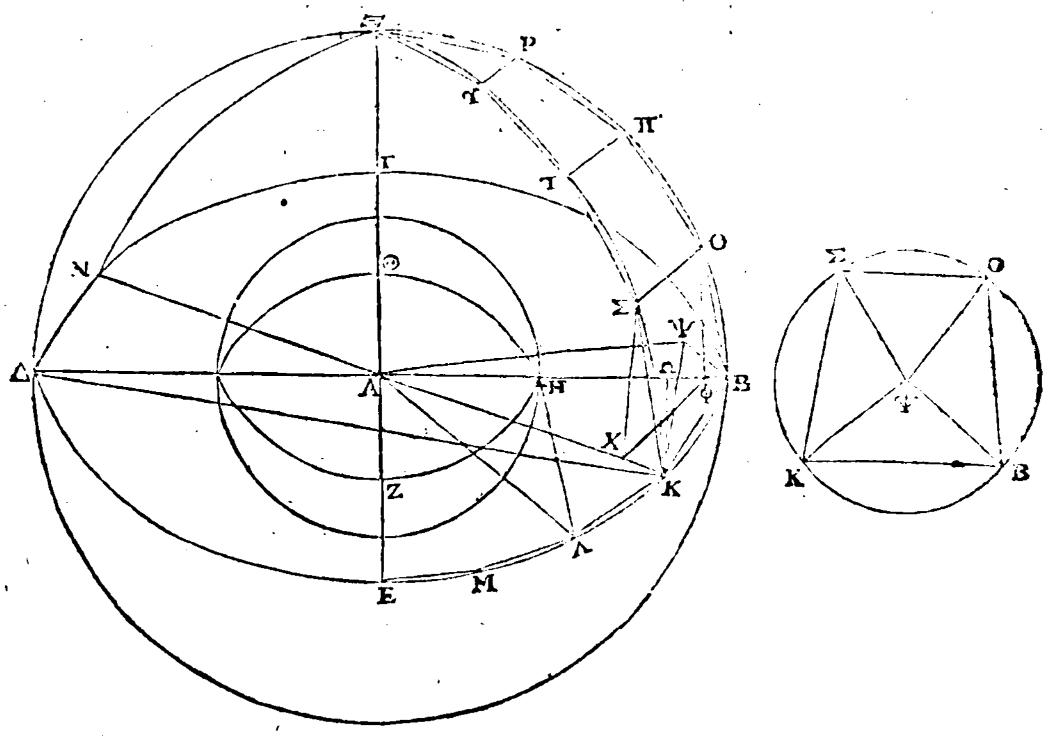
κέντρου· ἔσονται δὴ αἱ τομαὶ κύκλοι, ἐπειδήπερ μενούσης τῆς διαμέτρου καὶ περιφερομένου τοῦ ἡμικυκλίου ἐγένετο ἡ σφαῖρα· ὥστε καθ' οἵας ἂν θέσεως ἐπινοήσωμεν τὸ ἡμικύκλιον, τὸ δι' αὐτοῦ ἐκβαλλόμενον ἐπίπεδον ποιήσει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας κύκλον. καὶ φανερὸν ὅτι καὶ μέγιστον, ἐπειδήπερ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, ἥτις ἐστὶ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου διάμετρος δηλαδὴ καὶ τοῦ κύκλου, μείζων ἐστὶ πασῶν τῶν εἰς τὸν κύκλον ἢ τὴν σφαῖραν διαγομένων εὐθειῶν. ἔστω οὖν ἐν μὲν τῇ μείζονι σφαίρᾳ κύκλος ὁ B Γ Δ E, ἐν δὲ τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ κύκλος ὁ Z H Θ, καὶ ἤχθωσαν αὐτῶν

αὐτῶν δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΒΔ, ΓΕ, καὶ δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων τῶν ΒΓΔΕ, ΖΗΘ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΒΓΔΕ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγεγράφθω, μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ ΖΗΘ, οὗ πλευραὶ ἔστωσαν ἐν τῷ ΒΕ τεταρτημορίῳ αἱ ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΛ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῷ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΞ, καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὸ Ξ, καὶ διὰ τῆς ΑΞ καὶ ἑκατέρας τῶν ΒΔ, ΚΝ ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω, ποιήσουσι δὴ διὰ τὰ εἰρημένα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μεγίστους κύκλους. ποιείτωσαν, ὧν ἡμικύκλια ἔστωσαν ἐπὶ τῶν ΒΔ, ΚΝ διαμέτρων τὰ ΒΞΔ, ΚΞΝ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΞΑ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ΞΑ ἐπίπεδα ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον· ὥστε καὶ τὰ ΒΞΔ, ΚΞΝ ἡμικύκλια ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ ΒΞΕ, ΚΞΝ ἡμικύκλια, ἐπὶ γὰρ ἴσων εἰσὶ διαμέτρων τῶν ΒΔ, ΚΝ, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ ΒΕ, ΒΞ, ΚΞ τεταρτημόρια ἀλλήλοις· ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΕ τεταρτημορίῳ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου τοσαῦταί εἰσι καὶ ἐν τοῖς ΒΞ, ΚΞ τεταρτημορίοις ἴσαι ταῖς ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ εὐθείαις. ἐγγεγράφθωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ ΒΟ, ΟΠ, ΠΡ, ΡΞ, ΚΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΞ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΣΟ, ΤΠ, ΥΡ, καὶ ἀπὸ τῶν Ο, Σ ἐπὶ τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον κάθετοι ἤχθωσαν· πεσοῦνται δὴ ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων τὰς ΒΔ, ΚΝ, ἐπειδήπερ καὶ τὰ τῶν ΒΞΔ, ΚΞΝ ἐπίπεδα ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον. πιπτέτωσαν, καὶ ἔστωσαν αἱ ΟΦ, ΣΧ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΦΧ. καὶ ἐπεὶ ἐν ἴσοις ἡμικυκλίοις τοῖς ΒΞΔ, ΚΞΝ ἴσαι ἀπειλημμέναι εἰσὶν αἱ ΒΟ, ΚΣ, καὶ κάθετοι ἠγμέναι εἰσὶν αἱ ΟΦ, ΣΧ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΟΦ τῇ ΣΧ, ἡ δὲ ΒΦ τῇ ΚΧ. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ΒΑ ὅλῃ τῇ ΚΑ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΦΑ λοιπῇ τῇ ΧΑ ἐστιν ἴση· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΦ πρὸς τὴν ΦΑ οὕτως ἡ ΚΧ πρὸς τὴν ΧΑ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΦΧ τῇ ΚΒ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΟΦ, ΣΧ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΦ τῇ ΣΧ. ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση· αἱ ΧΦ, ΣΟ ἄρα ἴσαι εἰσὶ καὶ παράλληλοι. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΧΦ τῇ ΣΟ, ἀλλὰ ἡ ΧΦ τῇ ΚΒ ἐστὶ παράλληλος· καὶ ἡ ΣΟ ἄρα τῇ ΚΒ ἐστὶ παράλληλος. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΒΟ, ΚΣ· τὸ ΚΒΟΣ ἄρα τετράπλευρον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἐπειδήπερ ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, καὶ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάτερα τῶν ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ τετραπλεύρων ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἔστι δὲ τὸ ΥΡΞ τρίγωνον ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ· ἐὰν δὴ νοήσωμεν ἀπὸ τῶν Ο, Σ, Π, Τ, Ρ, Υ σημείων ἐπὶ τὸ Α ἐπιζευγνυμένας εὐθείας, συσταθήσεταί τι σχῆμα στερεὸν πολύεδρον μεταξὺ τῶν ΒΖ, ΚΞ περιφερειῶν ἐκ πυραμίδων συγκείμενον, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΚΒΟΣ, ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ

rum duæ diametri ad rectos inter se angulos ΒΔ, ΓΕ: & duobus circulis circa idem centrum consistentibus ΒΓΔΕ, ΖΗΘ in majori ΒΓΔΕ polygonum æqualium ac parium numero laterum describatur [per 16. 12.] non tangens minorem circulum ΖΗΘ; cujus latera sint in ΒΕ circuli quadrante ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ; & juncta ΚΛ producatur ad Ν; & à puncto Α plano circuli ΒΓΔΕ ad rectos angulos excitetur ΑΞ, quæ superficiei sphæræ in puncto Ξ occurrat; & per ΑΞ & utramque ipsarum ΒΔ, ΚΝ plana ducantur, quæ ex jam dictis efficient in superficie sphæræ maximos circulos. efficiant itaque, & sint à diametris ΒΔ, ΚΝ eorum semicirculi ΒΞΔ, ΚΞΝ. quoniam igitur ΞΑ recta est ad planum circuli ΒΓΔΕ, erunt [per 18. 11.] omnia plana quæ per ipsam ΞΑ transeunt ad planum circuli ΒΓΔΕ recta: quare & semicirculi ΒΞΔ, ΚΞΝ recti sunt ad idem planum. & quoniam semicirculi ΒΞΔ, ΚΞΝ æquales sunt, sunt enim super æquales diametros ΒΔ, ΚΝ; erunt & eorum quadrantes ΒΕ, ΒΞ, ΚΞ inter se æquales: quot igitur latera polygoni sunt in quadrante ΒΕ, tot erunt & in quadrantibus ΒΞ, ΚΞ æqualia ipsis ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ. describantur & sint ΒΟ, ΟΠ, ΠΡ, ΡΞ, ΚΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΞ; junganturque ΣΟ, ΤΠ, ΥΡ; & ab ipsis Ο, Σ punctis ad planum circuli ΒΓΔΕ perpendiculares ducantur: cadent quidem ipsæ [per 38. 11.] in communes planorum sectiones ΒΔ, ΚΝ, quoniam plana semicirculorum ΒΞΔ, ΚΞΝ [per constr.] ad planum circuli ΒΓΔΕ recta sunt. itaque cadant, sintque ΟΦ, ΣΧ; & ΦΧ jungatur. quoniam igitur in æqualibus semicirculis ΒΞΔ, ΚΞΝ æquales circumferentiæ sumptæ sunt ΒΟ, ΚΣ, & ductæ perpendiculares ΟΦ, ΣΧ; erit ΟΦ quidem ipsi ΣΧ æqualis, ΒΦ vero æqualis ΚΧ. est autem & tota ΒΑ æqualis toti ΚΑ; ergo & reliqua ΦΑ reliquæ ΧΑ est æqualis: ut igitur ΒΦ ad ΦΑ ita ΚΧ ad ΧΑ: ideoque [per 2. 6.] ΦΧ ipsi ΚΒ parallela est. & quoniam utraque ipsarum ΟΦ, ΣΧ recta est ad circuli ΒΓΔΕ planum, erit [per 6. 11.] ΟΦ ipsi ΣΧ parallela. ostensa autem est & ipsi æqualis: ergo [per 33. 1.] ΧΦ, ΣΟ æquales sunt & parallelæ. & quoniam ΧΦ parallela est ipsi ΣΟ, sed & parallela ipsi ΚΒ; erit [per 9. 11.] & ΣΟ ipsi ΚΒ parallela. & ipsas conjungunt ΒΟ, ΚΣ: ergo & ΚΒΟΣ quadrilaterum est in uno plano; nam [per 7. 11.] si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, & in utraque ipsarum quævis puncta sumantur, quæ dicta puncta conjungit recta linea in eodem est plano in quo parallelæ. & eadem ratione utraque ipsorum quadrilaterorum ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ in uno sunt plano. est autem [per 2. 11.] in uno plano & triangulum ΥΡΞ: si igitur à punctis Ο, Σ, Π, Τ, Ρ, Υ ad Α ductas rectas lineas intelligamus, constituetur quædam figura solida polyedra inter circumferentias ΒΞ, ΚΞ, ex pyramidibus composita, quarum bases quidem ΚΒΟΣ, ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ

ΥΠΡΥ quadrilatera & triangulum ΥΡΞ, vertex autem punctum Α. quod si in unoquoque laterum ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ, quemadmodum in ΚΒ eadem construamus & etiam in reliquis tribus quadrantibus, & in reliquo hemisphærio; constituetur figura quædam polyedra in sphæra descripta & composita ex pyramidibus, quarum bases sunt quadrilatera jam dicta & ΥΡΞ triangulum & quæ ejusdem ordinis cum illis sunt, vertex autem Α punctum: dico dictam figuram polyedram non tangere superficiem minoris sphæræ, in qua est circulus ΖΗΘ. ducatur [per 11. 11.] à puncto Α ad planum quadrilateri ΚΒΟΣ perpendicularis ΑΨ, cui in puncto Ψ occurrat, & ΒΨ, ΨΚ jungantur. itaque quoniam ΑΨ recta est ad quadrilateri ΚΒΟΣ planum, & [per 3. def. 11.] ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt & in eodem sunt plano rectos angulos faciet: ergo ΑΨ ad utramque ipsarum ΒΨ, ΨΚ est perpendicularis. quoniam autem ΑΒ est æqua-

τετράπλευρα καὶ τὸ ΥΡΞ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον. ἐὰν δὲ καὶ ἐπὶ ἑκάστης τῶν ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ πλευρῶν, καθάπερ ἐπὶ τῆς ΚΒ τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, καὶ ἔτι ἐπὶ τῶν λοιπῶν τριῶν τεταρτημορίων, καὶ ἐπὶ τοῦ λοιποῦ ἡμισφαιρίου συςαθήσεταί τι σχῆμα πολύεδρον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν ἐκ πυραμίδων συγκείμενον, ὧν βάσεις τὰ εἰρημένα τετράπλευρα καὶ τὸ ΥΡΞ τρίγωνον καὶ τὰ ὁμοταγῆ αὐτοῖς, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ εἰρημένον πολύεδρον οὐκ ἐφάψεται τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐφ᾽ ἧς ἐστιν ὁ ΖΗΘ κύκλος. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ ΚΒΟΣ τετραπλεύρου ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΑΨ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ψ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΨ, ΨΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΨ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΚΒΟΣ τετραπλεύρου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ τετραπλεύρου ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ ΑΨ· ἡ ΑΨ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΨ, ΨΚ. καὶ ἐπεὶ ἴση



lis ΑΚ; erit & quadratum ex ΑΒ quadrato ex ΑΚ æquale. & sunt quadrato quidem ex ΑΒ [per 47. 1.] æqualia quadrata ex ΑΨ, ΨΒ, etenim [per constr.] angulus ad Ψ rectus est; quadrato autem ex ΑΚ æqualia sunt ex ΑΨ, ΨΚ quadrata: ergo quadrata ex ΑΨ, ΨΒ quadratis ex ΑΨ, ΨΚ æqualia sunt. commune auferatur quadratum ex ΑΨ: reliquum igitur quod ex ΒΨ reliquo quod ex ΨΚ est æquale; ideoque recta linea ΒΨ rectæ ΨΚ æqualis. similiter ostendemus & quæ à puncto Ψ ad Ο, Σ ducuntur utrivis ipsarum ΒΨ, ΨΚ æquales esse: circulus igitur centro Ψ & intervallo æquali uni ipsarum ΨΒ, ΨΚ descriptus etiam per puncta Ο, Σ transibit, adeoque ΚΒΟΣ quadrilaterum erit in circulo. & quoniam ΚΒ major est quam ΧΦ, æqualis autem ΧΦ ipsi ΣΟ; erit & ΚΒ quam ΣΟ major. sed

ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΑΚ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ἀπὸ ΑΚ. καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΒ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Ψ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΚ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΒ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΚ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΨ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΨ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΨΚ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΒΨ τῇ ΨΚ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Ψ ἐπὶ τὰ Ο, Σ ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν ΒΨ, ΨΚ· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ψ καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν ΨΒ, ΨΚ γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν Ο, Σ, καὶ ἔσται ἐν κύκλῳ τὸ ΚΒΟΣ τετράπλευρον. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΚΒ τῆς ΧΦ, ἴση δὲ ἡ ΧΦ τῇ ΣΟ· μείζων ἄρα ἡ ΚΒ τῆς ΣΟ. ἴση

δὲ

δὲ ἡ ΚΒ ἑκατέρας τῶν ΚΣ, ΒΟ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΚΣ, ΒΟ τῆς ΣΟ μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΚΒΟΣ, καὶ ἴσαι αἱ ΚΒ, ΒΟ, ΚΣ, καὶ ἐλάσσων ἡ ΟΣ, καὶ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐστὶν ἡ ΒΨ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΚΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Κ σημείου ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετος ἡ ΚΩ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΔ τῆς ΔΩ ἐλάττων ἐστὶν ἢ διπλῆ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΩ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΩ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΩ, ΩΒ· ἀναγραφομένου δὴ ἀπὸ τῆς ΒΩ τετραγώνου καὶ συμπληρουμένου τοῦ ἐπὶ τῆς ΩΔ παραλληλογράμμου, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΩ ἄρα τοῦ ὑπὸ τῶν ΔΩ, ΩΒ ἔλαττόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. καὶ ἔτι τῆς ΑΒ ἐπιζευγνυμένης, τὸ μὲν ὑπὸ ΔΒ, ΒΩ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΚΒ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΔΩ, ΩΒ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΚΩ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΚΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΩ ἔλαττόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΚΩ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΚΑ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΑ. καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΒΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΚΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΚΩ, ΩΑ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΚΩ, ΩΑ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΚΩ μεῖζον τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΩΑ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΨΑ· μείζων ἄρα ἡ ΑΨ τῆς ΑΩ· πολλῷ ἄρα ἡ ΑΨ μείζων ἐστὶ τῆς ΑΗ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΑΨ ἐπὶ μίαν τοῦ πολυέδρου βάσιν, ἡ δὲ ΑΗ ἐπὶ τὴν τῆς ἐλάσσονος σφαίρας ἐπιφάνειαν· ὥστε τὸ πολύεδρον οὐ ψαύσει τῆς ἐλάττονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

KB est æqualis utrivis ipsarum KΣ, BO: ergo utravis KΣ, BO quam ΣO est major. cum igitur in circulo quadrilaterum sit KBOΣ, & æquales sint KB, BO, KΣ, & minor OΣ, sitque ex centro circuli ipsa BΨ; erit quadratum ex KB majus quam duplum quadrati ex BΨ. ducatur autem à puncto K ad BΔ perpendicularis KΩ. & quoniam BΔ minor est quam dupla ipsius ΔΩ, atque est [per 1. 6.] ut ΔB ad ΔΩ ita rectangulum contentum sub ΔB, BΩ ad rectangulum, quod sub ΔΩ, ΩB continetur; descripto igitur ex BΩ quadrato & completo parallelogrammo super ipso ΩΔ, erit & rectangulum contentum sub ΔB, BΩ minus quam duplum ejus quod sub ΔΩ, ΩB continetur. & adhuc juncta KΔ, quod sub ΔB, BΩ continetur est [per 8. 6.] æquale quadrato ex KB, & quod continetur sub ΔΩ, ΩB æquale quadrato ex KΩ: quadratum igitur ex KB minus est quam duplum quadrati ex KΩ. sed quadratum ex KB majus est quam duplum quadrati ex BΨ: ergo quadratum ex KΩ quadrato ex BΨ est majus. & quoniam BA est æqualis KA, erit quadratum ex BA quadrato ex KA æquale. & sunt [per 47. 1.] quadrato quidem ex BA æqualia quadrata ex BΨ, ΨA, quadrato autem ex KA æqualia quadrata ex KΩ, ΩA: quadrata igitur ex BΨ, ΨA quadratis ex KΩ, ΩA sunt æqualia; ex quibus quadratum ex KΩ majus est quadrato ex BΨ: ergo reliquum ex ΩA quadratum quadrato ex ΨA est minus; ac propterea recta linea AΨ major quam recta AΩ: multo igitur major est AΨ quam AH. at vero est AΨ quidem ad unam polyedri basim, AH vero ad superficiem minoris sphæræ: quare polyedrum minoris sphæræ superficiem non tangit.

ΑΛΛΩΣ.

Δεικτέον δὴ καὶ ἑτέρως προχειρότερον, ὅτι μείζων ἡ ΑΨ τῆς ΑΗ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Η τῇ ΑΗ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΗΛ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΛ. τέμνοντες δὴ τὴν ΕΒ περιφέρειαν δίχα, καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα περιφέρειαν, ἥ ἐστιν ἐλάσσων τῆς ὑποτεινομένης τοῦ ΒΓΔ κύκλου περιφερείας, ὑπὸ τῆς ἴσης τῇ ΗΛ. λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ ΚΒ περιφέρεια· ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ ΚΒ εὐθεῖα τῆς ΚΛ. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ ἐστὶ τὸ ΒΚΣΟ τετράπλευρον, καί εἰσιν ἴσαι αἱ ΟΒ, ΒΚ, ΚΣ, καὶ ἐλάσσων ἡ ΟΣ· ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΨΚ γωνία· μείζων ἄρα ἡ ΒΚ τῆς ΒΨ. ἀλλὰ τῆς ΒΚ μείζων ἡ ΗΛ· πολλῷ ἄρα ἡ ΗΛ μείζων τῆς ΒΨ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΛ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΛ τῇ ΑΒ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΛ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΛ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΛ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΛ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΒΨ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΨΑ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΗ· μείζων ἄρα ἡ ΑΨ τῆς ΑΗ.

ALITER.

Ostendendum autem aliter & expeditius, majorem esse AΨ quam AH. ducatur à puncto H ipsi AH ad rectos angulos HΛ, & AΛ jungatur. itaque circumferentiam EB bifariam secantes, & dimidiam ipsius bifariam, atque hoc semper facientes, tandem relinquemus [per 1, 10.] quandam circumferentiam minorem arcu circumferentiæ circuli BΓΔ quæ subtenditur arcui æquali ipsi HΛ. relinquatur, sitque circumferentia KB: minor igitur est recta linea KB quam HΛ. quoniam vero in circulo est BKΣO quadrilaterum, & sunt æquales OB, BK, KΣ, & minor OΣ; erit angulus BΨK obtusus: ideoque BK major est quam BΨ. sed HΛ [per constr.] quam BK est major: multo igitur major est HΛ quam BΨ, & quadratum ex HΛ quadrato ex BΨ majus. quoniam vero æqualis sit AΛ ipsi AB, erit & quadratum ex AΛ quadrato ex AB æquale. sed quadrato quidem ex AΛ æqualia sunt quadrata ex AH, HΛ; quadrato autem ex AB æqualia quadrata ex BΨ, ΨA: quadrata igitur ex AH, HΛ quadratis ex BΨ, ΨA æqualia sunt; ex quibus quadratum ex BΨ minus est quadrato ex HΛ: ergo reliquum ex ΨA quadratum majus est quadrato ex AH: & ob id recta linea AΨ quam recta AH est major.

Duabus igitur sphæris circa idem centrum consistentibus, in majori solidum polyedrum descriptum est, quod minoris sphæræ superficiem non tangit. quod erat faciendum.

Corollarium.

Quod si etiam solido polyedro descripto in sphæra ΒΓΔΕ simile solidum polyedrum in altera sphæra describatur, habebit solidum polyedrum in sphæra ΒΓΔΕ ad solidum polyedrum in altera sphæra triplicatam rationem ejus quam diameter sphæræ ΒΓΔΕ habet ad alterius sphæræ diametrum. divisis enim solidis in pyramides numero æquales & ejusdem ordinis, erunt pyramides similes. similes autem pyramides [per cor. 8. 12.] sunt inter se in triplicata ratione homologorum laterum: ergo pyramis, cujus basis est ΚΒΟΣ quadrilaterum vertex autem punctum Α, ad pyramidem in altera sphæra ejusdem ordinis triplicatam rationem habet ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est, quam habet ΑΒ ex centro sphæræ circa centrum Α existentis ad eam quæ est ex centro alterius sphæræ. similiter & unaquæque pyramis earum, quæ sunt in sphæra circa centrum Α, ad unamquamque pyramidum ejusdem ordinis, quæ sunt in altera sphæra, triplicatam rationem habebit ejus quam habet ΑΒ ad eam quæ est ex centro alterius sphæræ. sed [per 12. 5.] ut unum antecedentium ad unum consequentium ita sunt omnia antecedentia ad omnia consequentia: quare totum solidum polyedrum, quod est in sphæra circa centrum Α, ad totum solidum polyedrum, quod in altera sphæra, triplicatam rationem habebit ejus quam habet ΑΒ ad eam quæ est ex centro alterius sphæræ, hoc est, quam habet ΒΔ diameter ad alterius sphæræ diametrum. quod erat demonstrandum.

Prop. XVIII. Theor.

Sphæræ inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum.

Intelligantur sphæræ ΑΒΓ, ΔΕΖ, quarum diametri ΒΓ, ΕΖ: dico ΑΒΓ sphæram ad sphæram ΔΕΖ triplicatam rationem habere ejus quam habet ΒΓ ad ΕΖ.

Si enim non, sphæra ΑΒΓ vel ad sphæram minorem, vel ad majorem ipsa ΔΕΖ triplicatam rationem habebit ejus quam habet ΒΓ ad ΕΖ. habeat primo ad minorem, videlicet ad ΗΘΚ; intelligatur autem sphæra ΔΕΖ circa idem centrum, circa quod est sphæra ΗΘΚ: describaturque [per 17. 12.] in majori sphæra ΔΕΖ solidum polyedrum quod non tangat superficiem minoris sphæræ ΗΘΚ; atque in sphæra ΑΒΓ describatur solidum polyedrum simile ei quod in ΔΕΖ descriptum est: solidum igitur polyedrum, quod est in sphæra ΑΒΓ, ad solidum polyedrum, quod in sphæra ΔΕΖ, [per cor. 17. 12.] triplicatam rationem ha-

Δύο ἄρα σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγέγραπται, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάττονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ἐὰν δὲ καὶ εἰς ἑτέραν σφαῖραν τῷ ἐν τῇ ΒΓΔΕ σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον ἐγγραφῇ, τὸ ἐν τῇ ΒΓΔΕ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ τῆς ΒΓΔΕ σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας διάμετρον. διαιρεθέντων γὰρ τῶν στερεῶν εἰς τὰς ὁμοπληθεῖς καὶ ὁμοταγεῖς πυραμίδας, ἔσονται αἱ πυραμίδες ὅμοιαι. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΚΒΟΣ τετράπλευρον κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ ὁμοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τουτέστιν, ἤπερ ἡ ΑΒ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περὶ τὸ κέντρον τὸ Α πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. ὁμοίως δὲ καὶ ἑκάστη πυραμὶς τῶν ἐν τῇ περὶ τὸ κέντρον τὸ Α σφαίρᾳ πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τῶν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ τριπλασίονα λόγον ἕξει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὥστε ὅλον τὸ ἐν τῇ περὶ τὸ κέντρον τὸ Α στερεὸν πολύεδρον πρὸς ὅλον τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΒΔ διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

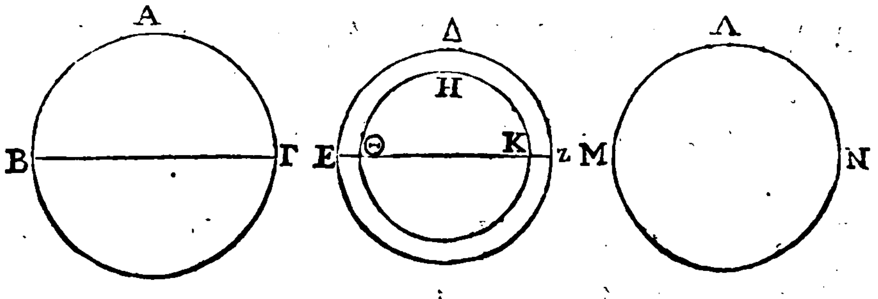
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων.

Νενοήσθωσαν σφαῖραι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΒΓ, ΕΖ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Εἰ γὰρ μὴ, ἕξει ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΔΕΖ σφαίρας ἢ πρὸς μείζονα τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἐχέτω πρότερον πρὸς ἐλάσσονα τὴν ΗΘΚ, καὶ νενοήσθω ἡ ΔΕΖ σφαῖρα τῇ ΗΘΚ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν τὴν ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον μὴ ψαῦον τῆς ἐλάττονος σφαίρας τῆς ΗΘΚ κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐγγεγράφθω δὲ καὶ εἰς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν τῷ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον· τὸ ἄρα ἐν τῇ ΑΒΓ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ

ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἔχει δὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ σφαῖραν οὕτως τὸ ἐν τῇ ΑΒΓ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν αὐτῇ πολύεδρον οὕτως ἡ ΗΘΚ σφαῖρα



πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον. μείζων δὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα τοῦ ἐν αὐτῇ πολυέδρου· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΗΘΚ σφαῖρα τοῦ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ πολυέδρου. ἀλλὰ ἐστιν ἐλάσσων, ἐμπεριέχεται γὰρ ἀπ' αὐτοῦ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ διάμετρος πρὸς τὴν ΕΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἡ ΔΕΖ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΑΒΓ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ. Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐχέτω πρὸς μείζονα τὴν ΛΜΝ· ἀνάπαλιν ἄρα ἡ ΛΜΝ σφαῖρα πρὸς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ διάμετρος πρὸς τὴν ΒΓ διάμετρον. ὡς δὲ ἡ ΛΜΝ σφαῖρα πρὸς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν οὕτως ἡ ΔΕΖ σφαῖρα πρὸς ἐλάττονά τινα τῆς ΑΒΓ σφαίρας, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη, ἐπειδήπερ μείζων ἐστὶν ἡ ΛΜΝ τῆς ΔΕΖ· καὶ ἡ ΔΕΖ ἄρα σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΑΒΓ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ, ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἐλάσσονα· ἡ ἄρα ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

bet ejus quam ΒΓ ad ΕΖ. habet autem [ex hyp.] ΑΒΓ ſphæra ad ſphæram ΗΘΚ triplicatam rationem ejus quam ΒΓ habet ad ΕΖ: ergo [per 11.5.] ut ΑΒΓ ſphæra ad ſphæram ΗΘΚ ita ſolidum polyedrum in ſphæra ΑΒΓ ad ſolidum polyedrum in ſphæra ΔΕΖ; permutando igitur ut ΑΒΓ ſphæra ad ſolidum polyedrum quod in ipſa eſt ita ΗΘΚ ſphæra ad ſolidum polyedrum quod eſt in ſphæra ΔΕΖ. major autem eſt ſphæra ΑΒΓ ſolido polyedro quod eſt in ipſa: ergo & ΗΘΚ ſphæra major eſt polyedro quod in ſphæra ΔΕΖ. ſed & minor, ab ipſo enim comprehenditur; quod fieri non poteſt: non igitur ΑΒΓ ſphæra ad ſphæram minorem ipſa ΔΕΖ triplicatam rationem habet ejus quam ΒΓ habet ad ΕΖ. ſimiliter oſtendemus neque ΔΕΖ ſphæram ad ſphæram minorem ipſa ΑΒΓ triplicatam habere rationem ejus quam habet ΕΖ ad ΒΓ. Dico inſuper ſphæram ΑΒΗ neque ad majorem ſphæram ipſa ΔΕΖ triplicatam rationem habere ejus quam ΒΓ habet ad ΕΖ. ſi enim fieri poteſt, habeat ad majorem ΛΜΝ: invertendo igitur ſphæra ΛΜΝ ad ΑΒΓ ſphæram triplicatam rationem habet ejus quam diameter ΕΖ habet ad ΒΓ diametrum. ut autem ſphæra ΛΜΝ ad ΑΒΓ ſphæram ita ſphæra ΔΕΖ ad ſphæram quandam minorem ipſa ΑΒΓ, ut ante demonſtravimus, quoniam ſphæra ΛΜΝ major eſt ipſa ΔΕΖ: ergo & ΔΕΖ ſphæra ad ſphæram minorem ipſa ΑΒΓ triplicatam rationem habet ejus quam ΕΖ habet ad ΒΓ, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt; non igitur ΑΒΓ ſphæra ad ſphæram majorem ipſa ΔΕΖ triplicatam rationem habet ejus quam ΒΓ habet ad ΕΖ. oſtenſum autem eſt neque ad minorem: ergo ΑΒΓ ſphæra ad ſphæram ΔΕΖ triplicatam rationem habebit ejus quam ΒΓ habet ad ΕΖ. quod erat demonſtrandum.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΣΚΑΙΔΕΚΑΤΟΝ,
Καὶ Στερεῶν τρίτον.

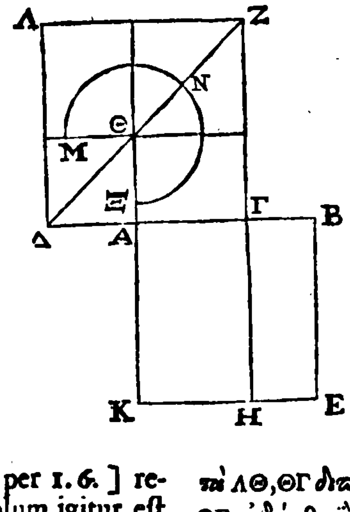
EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER DECIMUS TERTIUS,
Et Solidorum tertius.

Prop. I. Theor.

Si recta linea extrema ac media ratione secta fuerit, major portio assumens dimidiam totius quintuplum potest ejus quod à dimidia totius fit quadrati.

RECTA enim linea ΑΒ extrema ac media ratione secetur in puncto Γ; & sit ΑΓ major portio; atque producatur in directum ipsi ΑΓ recta linea ΑΔ, & ponatur ΑΔ ipsius ΑΒ dimidia: dico quadratum ex ΓΔ quadrati ΔΑ quintuplum esse.

Describantur enim ex ΑΒ, ΔΓ quadrata ΑΕ, ΔΖ, deinde in ΔΖ describatur figura, & ΖΓ ad Η producatur. itaque quoniam ΑΒ extrema ac media ratione secatur in Γ; [per 3. def. & 17. 6.] quod sub ΑΒ, ΒΓ continetur æquale erit quadrato ex ΑΓ. verum rectangulum quidem ΓΕ est quod continetur sub ΑΒ, ΒΓ; quadratum vero ex ΑΓ est ΖΘ: ergo rectangulum ΓΕ quadrato ΖΘ est æquale. quoniam vero ΒΑ dupla est ipsius ΑΔ, æqualis autem ΒΑ ipsi ΚΑ, & ΑΔ ipsi ΑΘ; erit & ΚΑ ipsius ΑΘ dupla. ut autem ΚΑ ad ΑΘ ita est [per 1. 6.] rectangulum ΚΓ ad ipsum ΓΘ: duplum igitur est ΚΓ rectangulum rectanguli ΓΘ. sunt autem [per 43. 1.] rectangula ΛΘ, ΘΓ ipsius ΓΘ dupla: ergo rectangulum ΚΓ rectangulis ΛΘ, ΘΓ est æquale. ostensum autem est & rectangulum ΓΕ æquale quadrato ΖΘ: totum igitur ΑΕ qua-



ΠΡΟΤΑΣΙΣ α΄.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ ΑΓ εὐθεῖα ἡ ΑΔ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἡμίσεια ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ.

Ἀναγεγράφθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΔΓ τετράγωνα τὰ ΑΕ, ΔΖ, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ ΔΖ τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ ΖΓ ἐπὶ τὸ Η. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ ΓΕ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΖΘ· ἴσον ἄρα τὸ ΓΕ τῷ ΖΘ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΒΑ τῇ ΚΑ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΑΘ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΚΑ τῇ ΑΘ. ὡς δὲ ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΑΘ οὕτως τὸ ΚΓ πρὸς τὸ ΓΘ· διπλάσιον ἄρα τὸ ΚΓ. εἰσὶ δὲ καὶ τὰ ΛΘ, ΘΓ διπλάσια τοῦ ΓΘ· ἴσον ἄρα τὸ ΚΓ τοῖς ΛΘ, ΘΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ΓΕ τῷ ΖΘ ἴσον· ὅλον ἄρα τὸ ΑΒ

τετρά-

τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝΞ γνώμονι. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τουτέστι τὸ ΑΕ τοῦ ΔΘ. ἴσον δὲ τὸ ΑΕ τῷ ΜΝΞ γνώμονι, καὶ ὁ ΜΝΞ ἄρα γνώμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ΔΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΖ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ΔΘ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΔΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, τὸ δὲ ΔΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

*ΣΧΟΛΙΟΝ.

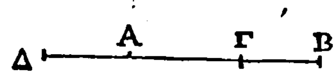
Ἀνάλυσίς ἐστι λῆψις τοῦ ζητουμένου ὡς ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολούθων ἐπί τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον.

Σύνθεσίς ἐστι λῆψις τοῦ ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολούθων ἐπὶ τὴν τοῦ ζητουμένου κατάληξιν ἢ κατάληψιν.

† Τοῦ εἰρημένου θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις ἄνευ καταγραφῆς.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς ΑΒ ἴση κείσθω ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ.

Ἐπεὶ γὰρ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΔ ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ· διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ τοῦ ΓΑ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. ἀλλὰ τῷ μὲν δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, διπλῆ γὰρ ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἐστι· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. ἔστι δέ, διπλῆ γάρ ἐστιν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ.



Σύνθεσις τοῦ αὐτοῦ.

Ἐπεὶ οὖν τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐστι μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν

dratum est æquale gnomoni ΜΝΞ. rursus, quoniam ΒΑ dupla est ipsius ΑΔ; erit [per cor. 20. 6.] quadratum ex ΒΑ quadrati ex ΑΔ quadruplum, hoc est quadratum ΑΕ quadrati ΔΘ. æquale autem quadratum ΑΕ gnomoni ΜΝΞ; ergo & ΜΝΞ gnomon quadruplus est quadrati ΔΘ; quare totum ΔΖ ipsius ΔΘ est quintuplum. atque est ΔΖ quidem quadratum ex ΓΔ; ΔΘ vero quadratum ex ΔΑ: quadratum igitur ex ΓΔ quadrati ex ΔΑ est quintuplum.

Ergo si recta linea extrema ac media ratione secta fuerit, major portio assumens dimidiam totius quintuplum potest ejus quod à dimidia totius fit quadrati. quod erat demonstrandum.

*SCHOLIUM.

Resolutio est sumptio quæsiti tanquam concessi per ea quæ consequuntur in aliquod verum concessum.

Compositio est sumptio concessi per ea quæ consequuntur in quæsiti conclusionem seu deprehensionem.

† *Antecedentis theorematis resolutio absque figurarum descriptione.*

Recta enim linea quædam ΑΒ extrema ac media ratione secetur in Γ, sitque major portio ΑΓ, & ponatur ΑΔ ipsius ΑΒ dimidiæ æqualis: dico quadratum ex ΓΔ quadrati ex ΔΑ quintuplum esse.

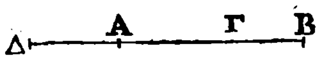
Quoniam enim quintuplum est [ex hyp.] quadratum ex ΓΔ quadrati ex ΔΑ, quadrato autem ex ΓΔ æqualia sunt [per 4. 2.] quadrata ex ΓΑ, ΑΔ una cum eo quod bis sub ΓΑ, ΑΔ continetur; erunt quadrata ex ΓΑ, ΑΔ una cum eo quod bis sub ΓΑ, ΑΔ continetur quadrati ex ΑΔ quintupla: ergo dividendo quadratum ex ΓΑ cum eo quod bis continetur sub ΓΑ, ΑΔ quadruplum est quadrati ex ΑΔ. sed ei quidem quod bis sub ΓΑ, ΑΔ continetur æquale est rectangulum sub ΒΑ, ΑΓ, est enim ΒΑ ipsius ΑΔ dupla; quadrato autem ex ΑΓ [per 17. 6.] est æquale rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ, namque [ex hyp.] ΑΒ extrema ac media ratione secta est: rectangulum igitur sub ΒΑ, ΑΓ una cum rectangulo sub ΑΒ, ΒΓ quadruplum est quadrati ex ΑΔ. sed [per 2. 2.] rectangulum sub ΒΑ, ΑΓ una cum rectangulo sub ΑΒ, ΒΓ est quadratum ex ΑΒ: ergo quadratum ex ΑΒ quadruplum est quadrati ex ΑΔ. quod quidem [per cor. 20. 6.] ita se habet; est enim ΒΑ ipsius ΑΔ dupla.

Compositio ejusdem.

Quoniam igitur quadruplum est quadratum ΒΑ quadrati ex ΑΔ; quadratum autem ex ΑΒ est [per 2. 2.] rectangulum sub ΒΑ, ΑΓ una cum rectangulo sub ΑΒ, ΒΓ: erit rectangulum sub ΒΑ, ΑΓ una cum rectangulo sub ΑΒ, ΒΓ quadrati ex ΑΔ quadruplum. sed rectangulum quidem sub ΒΑ, ΑΓ est æquale ei quod bis sub

* Deest in *Codd. MS.* † Pariter & resolutio & compositio hujus theorematis, ut & cujusvis ex quatuor sequentibus, desideratur in *Codd. MSS.*

ΔΑ, ΑΓ continetur; rectangulum autem sub ΑΒ, ΒΓ est æquale quadrato ex ΑΓ: ergo quadratum ex ΑΓ una cum eo quod bis continetur sub ΔΑ, ΑΓ quadruplum est quadrati ex ΔΑ; quare quadrata ipsarum ΔΑ, ΑΓ una cum eo quod bis sub ΔΑ, ΑΓ continetur quintuplum est quadrati ex ΔΑ. sed [per 4. 2.] quadrata ex ΔΑ, ΑΓ una cum eo quod bis continetur sub ΔΑ, ΑΓ est quadratum ex ΔΓ: quadratum igitur ex ΔΓ quadrati ex ΔΑ quintuplum est. quod erat demonstrandum.



ΔΑ, ΑΓ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ ἐστι· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

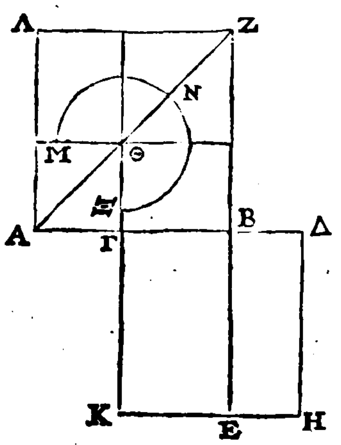
Prop. II. Theor.

Si recta linea partis sui ipsius quintuplum possit, atque duplum dictæ partis extrema ac media ratione secetur; major portio est pars reliqua ejus quæ à principio rectæ lineæ.

Recta enim linea ΑΒ partis ipsius ΑΓ quintuplum possit, & ipsius ΑΓ dupla sit ΓΔ: dico si ΓΔ extrema ac media ratione secetur, ΓΒ esse majorem ejus portionem.

Describantur enim ex utraque ipsarum ΑΒ, ΓΔ quadrata ΑΖ, ΓΗ; & in ΑΖ figura describatur, & producatur ΖΒ in Ε. quoniam igitur quadratum ipsius ΑΒ quintuplum est quadrati ipsius ΑΓ, hoc est quadratum ΑΖ quintuplum ipsius ΑΘ, erit ΜΝΞ gnomon ipsius ΑΘ quadruplus. & quoniam ΔΓ dupla est ΓΑ, quadratum ex ΔΓ [per 20.6.] quadrati ex ΓΑ quadruplum est, videlicet quadratum ΓΗ quadruplum quadrati ΑΘ. ostensus est autem ΜΝΞ gnomon quadruplus ipsius ΑΘ quadrati; ergo gnomon ΜΝΞ quadrato ΓΗ est æqualis. & quoniam ΔΓ dupla est ΓΑ, æqualis autem est ΔΓ ipsi ΓΚ, & ΑΓ ipsi ΓΘ; erit & ΚΓ ipsius ΓΘ dupla: parallelogrammum igitur ΚΒ duplum est parallelogrammi ΒΘ. & [per 43.1.] sunt parallelogramma ΑΘ, ΘΒ simul ipsius ΘΒ dupla: ergo ΚΒ æquale est ipsis ΑΘ, ΘΒ. sed & totus ΜΝΞ gnomon toti ΓΗ ostensus est æqualis: & reliquum igitur ΘΖ æquale est reliquo ΒΗ. atque est ΒΗ quidem quod sub ΓΔ, ΔΒ continetur, etenim ΓΔ est æqualis ΔΗ; ipsum vero ΘΖ est quadratum ipsius ΒΓ: ergo quod continetur sub ΓΔ, ΔΒ quadrato ex ΓΒ est æquale: & igitur [per 17.6.] ut ΔΓ ad ΓΒ ita est ΓΒ ad ΒΔ. major autem est ΔΓ quam ΓΒ: ergo & ΓΒ quam ΒΔ est major. itaque recta linea ΓΔ extrema ac media ratione secta est, & major ejus portio est ΓΒ.

Si igitur recta linea partis sui ipsius quintuplum possit, atque duplum dictæ partis extrema ac media ratione secetur; major portio est pars reliqua ejus quæ à principio rectæ lineæ. quod erat demonstrandum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύνηται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης· τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ τμήματος ἑαυτῆς τοῦ ΑΓ πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ ΑΓ διπλῆ ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι τῆς ΓΔ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΓΒ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ ἑκατέρας τῶν ΑΒ, ΓΔ τετράγωνα τὰ ΑΖ, ΓΗ, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ ΑΖ τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ ΖΒ ἐπὶ τὸ Ε. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ, τουτέστι τὸ ΑΖ τοῦ ΑΘ, τετραπλάσιος ἄρα ὁ ΜΝΞ γνώμων τοῦ ΑΘ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΔΓ τῆς ΓΑ, τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ, τουτέστι τὸ ΓΗ τοῦ ΑΘ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ ΜΝΞ γνώμων τετραπλάσιος τοῦ ΑΘ, ἴσος ἄρα ὁ ΜΝΞ γνώμων τῷ ΓΗ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΔΓ τῆς ΓΑ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΔΓ τῇ ΓΚ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΓΘ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΚΓ τῆς ΓΘ· διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ΚΒ τοῦ ΒΘ. εἰσὶ δὲ καὶ τὰ ΑΘ, ΘΒ διπλάσια τοῦ ΘΒ· ἴσον ἄρα τὸ ΚΒ τοῖς ΑΘ, ΘΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλος ὁ ΜΝΞ γνώμων ὅλῳ τῷ ΓΗ ἴσος· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΖ τῷ ΒΗ ἐστιν ἴσον. καὶ ἐστι τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ, ἴση γὰρ ἡ ΓΔ τῇ ΔΗ, τὸ δὲ ΘΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ. μείζων δὲ ἡ ΔΓ τῆς ΓΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ. τῆς ΓΔ ἄρα εὐθείας ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΓΒ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύνηται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης· τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ὅτι

ΛΗΜΜΑ.

Ὅτι δὲ ἡ διπλῆ τῆς ΑΓ μείζων ἐστὶ τῆς ΒΓ, οὕτως δεικτέον.

Εἰ γὰρ μή, ἔστω, εἰ δυνατόν, ἡ ΒΓ τῆς ΓΑ διπλῆ· τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ· πενταπλάσιον ἄρα ἑκάτερον τῶν ἀπὸ τῶν ΒΓ, ΓΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ. ὑπόκειται δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΓ, ΓΑ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ΒΓ διπλασία τῆς ΓΑ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἐλάττων τῆς ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τῆς ΓΑ, πολλῷ γὰρ μεῖζον τὸ ἄτοπον· ἡ ἄρα τῆς ΑΓ διπλῆ μείζων ἐστὶ τῆς ΒΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

LEMMA.

At vero duplam ipsius ΑΓ majorem esse quam ΓΒ, [ut in præc. assumptum est,] sic demonstrabitur.

Si enim non, sit, si fieri potest, ΒΓ ipsius ΓΑ dupla: quadratum igitur ex ΒΓ quadruplum est quadrati ex ΓΑ; quare simul utraque quadrata ipsarum ΒΓ, ΓΑ quadrati ex ΓΑ quintuplum est. sed quadratum ex ΒΑ quadrati ex ΓΑ quintuplum ponitur: ergo quadratum ex ΒΑ æquale est quadratis ex ΒΓ, ΓΑ, quod [per 4. 2.] fieri non potest: non igitur ΒΓ dupla est ipsius ΓΑ. similiter demonstrabimus quod neque minor quam ΒΓ dupla est ipsius ΓΑ; multo enim majus absurdum sequeretur: ergo dupla ipsius ΑΓ major est quam ΒΓ. quod erat demonstrandum.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τοῦ εἰρημένου θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΓΔ τμήματος ἑαυτῆς τοῦ ΔΑ πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ ΔΑ διπλῆ κείσθω ἡ ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ, ἥτις ἐστὶ τὸ λοιπὸν μέρος τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἴσον, διπλῆ γάρ ἐστιν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ, ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. τετραπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ· τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ· ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ. ἔστι δὲ διὰ τὴν ὑπόθεσιν.

SCHOLIUM.

Antecedentis theorematis resolutio.

Recta enim linea quædam ΓΔ partis ipsius ΔΑ quintuplum possit, & ipsius ΔΑ dupla ponatur ΑΒ: dico ΑΒ extrema ac media ratione sectam esse in puncto Γ, & majorem ejus portionem esse ΑΓ, quæ quidem est reliqua pars ejus quæ à principio rectæ lineæ.

Quoniam enim ΑΒ extrema ac media ratione secta est in Γ, & ΑΓ est major portio; erit [per 17. 6.] rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ quadrato ex ΑΓ æquale. est autem & rectangulum sub ΒΑ, ΑΓ æquale ei quod bis sub ΔΑ, ΑΓ continetur; etenim ΒΑ ipsius ΑΔ est dupla: ergo rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ una cum rectangulo sub ΒΑ, ΑΓ, quod quidem [per 2. 2.] est ipsius ΒΑ quadratum, æquale est ei quod bis sub ΔΑ, ΑΓ continetur una cum quadrato ex ΑΓ. quadratum autem ex ΑΒ [per 20. 6.] quadruplum est quadrati ex ΔΑ: ergo quod bis sub ΔΑ, ΑΓ continetur una cum quadrato ex ΑΓ quadruplum est quadrati ex ΑΔ: ergo & quadrata ex ΔΑ, ΑΓ una cum eo quod bis continetur sub ΔΑ, ΑΓ, hoc est [per 4. 2.] quadratum ex ΓΔ, quintupla sunt quadrati ex ΑΔ. & hoc est secundum hypothesin.

Σύνθεσις τοῦ αὐτοῦ.

Ἐπεὶ οὖν πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΔ τὰ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἐστὶ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ· διελόντι ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἅπαξ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΔΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. μεί-

Compositio ejusdem.

Quoniam igitur quadratum ex ΓΔ quintuplum est quadrati ex ΔΑ; quadrato autem ex ΓΔ æqualia sunt [per 4. 2.] quadrata ex ΔΑ, ΑΓ una cum eo quod bis sub ΔΑ, ΑΓ continetur; erunt quadrata ex ΔΑ, ΑΓ una cum eo quod bis continetur sub ΔΑ, ΑΓ quintupla quadrati ex ΔΑ: dividendo ergo, quod bis sub ΔΑ, ΑΓ continetur una cum quadrato ex ΑΓ quadrupla sunt quadrati ex ΑΔ. est autem [per 20. 6.] & quadratum ex ΑΒ quadrati ex ΑΔ quadruplum: ergo quod bis continetur sub ΔΑ, ΑΓ hoc est quod semel continetur sub ΒΑ, ΑΓ una cum quadrato ex ΑΓ, est æquale quadrato ex ΑΒ. sed [per 2. 2.] quadratum ex ΑΒ est rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ una cum rectangulo sub ΒΑ, ΑΓ: rectangulum igitur sub ΒΑ, ΑΓ una cum rectangulo sub ΑΒ, ΒΓ est æquale rectangulo sub ΒΑ, ΑΓ una cum quadrato ex ΑΓ: & ablato communi rectangulo sub ΒΑ, ΑΓ, erit reliquum rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ quadrato ex ΑΓ æquale: est igitur [per 17. 6.] ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΑΓ ad ΓΒ. major autem

autem est BA quam AΓ: ergo & AΓ quam ΓB est major: quare [per 3. def. 6.] AB extrema ac media ratione secta est in Γ, & AΓ est major ejus portio. quod erat demonstrandum.

ζων δὲ ἡ ΒΑ τῆς ΑΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ· ἡ ΑΒ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. III. Theor.

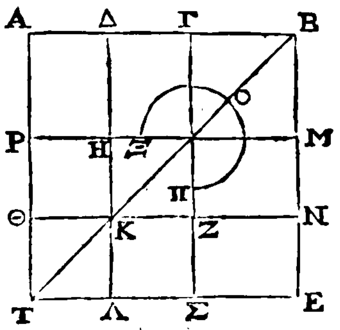
Si recta linea extrema ac media ratione secta fuerit; portio minor, assumens dimidiam majoris portionis, quintuplum potest ejus quod à dimidia majoris portionis fit quadrati.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ· τὸ ἔλασσον τμῆμα, προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος, πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου.

Recta enim linea quævis AB extrema ac media ratione secetur in Γ, sitque AΓ major portio, & secetur AΓ bifariam in Δ: dico quadratum ex BΔ quadrati ex ΔΓ quintuplum esse.

Describatur enim ex AB quadratum AE, & figura compleatur. quoniam igitur AΓ dupla est ΓΔ, erit quadratum ex AΓ quadrati ex ΓΔ quadruplum, hoc est quadratum PΣ ipsius ZH. & quoniam [per 17. 6.] rectangulum quod sub AB, BΓ continetur est æquale quadrato ex AΓ, atque est rectangulum quidem sub AB, BΓ ipsum ΓE; quadratum vero ex AΓ est PΣ; erit rectangulum ΓE quadrato PΣ æquale. quadruplum autem est quadratum PΣ quadrati ZH: ergo & ΓE rectangulum quadrati ZH quadruplum erit. rursus quoniam AΔ æqualis est ΔΓ, erit [per 34. 1.] & ΘK ipsi KZ æqualis: ideoque quadratum HZ est æquale quadrato ΘΛ: æqualis igitur est HK ipsi KΛ, hoc est MN ipsi NE: ergo [per 36. 1.] & parallelogrammum MZ parallelogrammo ZE est æquale. sed [per 43. 1.] MZ est æquale ΓH: quare & ΓH ipsi EZ æquale erit. commune apponatur ΓN: gnomon igitur ΞOΠ est æqualis parallelogrammo ΓE. ostensum autem est ΓE esse quadruplum HZ quadrati: & gnomon igitur ΞOΠ ipsius HZ quadruplus est: quare quadratum ΔN quintuplum est ipsius HZ. est autem ΔN quadratum ipsius ΔB; HZ vero quadratum ipsius ΔΓ: quadratum igitur ex ΔB quadrati ex ΔΓ est quintuplum. quod erat demonstrandum.



Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΕ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΓΔ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ, τουτέστι τὸ ΡΣ τοῦ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ ΓΕ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΡΣ· τὸ ἄρα ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ΡΣ. τετραπλάσιον δὲ τὸ ΡΣ τοῦ ΖΗ· τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ΓΕ τοῦ ΖΗ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΚΖ· ὥστε καὶ τὸ ΗΖ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΛ τετραγώνῳ· ἴση ἄρα ἡ ΗΚ τῇ ΚΛ, τουτέστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΕ· ὥστε καὶ τὸ ΜΖ τῷ ΖΕ ἐστιν ἴσον. ἀλλὰ τὸ ΜΖ τῷ ΓΗ ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ ΓΗ ἄρα τῷ ΖΕ ἐστιν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΝ· ὁ ἄρα ΞΟΠ γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ΓΕ. ἀλλὰ τὸ ΓΕ τετραπλάσιον ἐδείχθη τοῦ ΗΖ· καὶ ὁ ΞΟΠ ἄρα γνώμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ΗΖ· τὸ ἄρα ΔΝ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ΗΖ τετραγώνου. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΔΝ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ, τὸ δὲ ΗΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΒ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SCHOLIUM.

Antecedentis theorematis resolutio.

Recta enim linea AB extrema ac media ratione secetur in Γ; & sit AΓ major portio, cujus dimidia ΓΔ: dico quadratum ex BΔ quadrati ex ΓΔ quintuplum esse.

Quoniam enim [ex hyp.] quadratum ex BΔ quinplum est quadrati ex ΔΓ; quadratum autem ex BΔ est [per 6. 2.] quod continetur sub AB, BΓ

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τοῦ εἰρημένου θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ, καὶ τῆς ΑΓ ἡμίσεια ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ.

Ἐπεὶ γὰρ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐστι μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ· διελόντι ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. ἔστι δέ, διπλῆ γὰρ ἡ ΑΓ τῆς ΓΔ.

una cum quadrato ex ΔΓ: ergo quod sub AB, BΓ continetur una cum quadrato ex ΔΓ quintuplum est quadrati ex ΔΓ: dividendo igitur quod sub AB, BΓ continetur quadrati ex ΔΓ quadruplum est. ei vero quod continetur sub AB, BΓ æquale est [per 17.6.] quadratum ex AΓ, etenim [ex hyp.] AB extrema ac media ratione secta est in Γ: ergo quadratum ex AΓ quadrati ex ΓΔ quadruplum est. quod quidem ita se habet; est enim AΓ ipsius ΓΔ dupla.

Σύνθεσις τοῦ αὐτοῦ.

Ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΔΓ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ· συνθέντι ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Compositio ejusdem.

Quoniam dupla est AΓ ipsius ΔΓ, erit quadratum ex AΓ quadrati ex ΓΔ quadruplum. sed [per 17.6.] quadratum ex AΓ est æquale ei quod bis sub AB, BΓ continetur: quod igitur sub AB, BΓ continetur quadruplum est quadrati ex ΔΓ: ideoque componendo, quod continetur sub AB, BΓ una cum quadrato ex ΔΓ, quod quidem [per 6.2.] est quadratum ex ΔB, quintuplum est quadrati ipsius ΔΓ. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ΄.

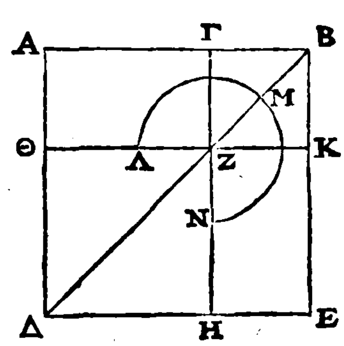
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἐλάττονος τμήματος, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου.

Prop. IV. Theor.

Si recta linea extrema ac media ratione secta fuerit; totius & minoris portionis utraque simul quadrata tripla sunt quadrati ejus quod à majori fit portione.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ ΑΚ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΘΗ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ τῷ ΘΗ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΖ τῷ ΖΕ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΚ ὅλῳ τῷ ΓΕ ἐστὶν ἴσον· τὰ ἄρα ΓΕ, ΑΚ τοῦ ΑΚ ἐστὶ διπλάσια. ἀλλὰ τὰ ΑΚ, ΓΕ ὁ ΛΜΝ γνώμων ἐστὶ καὶ τὸ ΓΚ τετράγωνον· ὁ ἄρα ΛΜΝ γνώμων καὶ τὸ ΓΚ τετράγωνον διπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΚ. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ΑΚ τῷ ΘΗ ἐδείχθη ἴσον· ὁ ἄρα ΛΜΝ γνώμων, καὶ τὸ ΓΚ τετράγωνον διπλάσιά ἐστι τοῦ ΘΗ· ὥστε καὶ ὁ ΛΜΝ γνώμων καὶ τὰ ΓΚ, ΘΗ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ΘΗ τετραγώνου. καί ἐστιν ὁ μὲν ΛΜΝ γνώμων καὶ τὰ ΓΚ, ΘΗ τετράγωνα ὅλον τὸ ΑΕ καὶ τὸ ΓΚ, ἅπερ ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα, τὸ δὲ ΗΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



SIT recta linea AB, quæ extrema ac media ratione secetur in Γ, & sit AΓ major portio: dico quadrata ex AB, BΓ quadrati ex AΓ tripla esse.

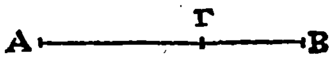
Describatur enim ex AB quadratum AΔEB, & figura compleatur. itaque quoniam AB extrema ac media ratione secta est in Γ, & major portio est AΓ: erit [per 17.6.] rectangulum contentum sub AB, BΓ quadrato ex AΓ æquale. atque est rectangulum quidem AK quod sub AB, BΓ continetur, quadratum vero ΘH est quadratum ipsius AΓ: æquale igitur est AK ipsi ΘH. & quoniam [per 43.1.] rectangulum AZ est æquale ZE, commune apponatur ΓK, erit totum AK toti ΓE æquale: ergo rectangula ΓE, AK ipsius AK sunt dupla. sed rectangula AK, ΓE sunt gnomon ΛMN & quadratum ΓK; gnomon igitur ΛMN & quadratum ΓK dupla sunt ipsius AK. rectangulum autem AK ostensum est æquale quadrato ΘH: ergo gnomon ΛMN & quadratum ΓK ipsius ΘH sunt dupla: ac propterea gnomon ΛMN & quadrata ΓK, ΘH tripla sunt quadrati ΘH. & gnomon quidem ΛMN & quadrata ΓK, ΘH sunt totum AE quadratum & quadratum ΓK, quæ quidem sunt quadrata ipsarum AB, BΓ; quadratum autem HΘ est quod fit ex AΓ: quadrata igitur ex AB, BΓ quadrati ex AΓ sunt tripla. quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Antecedentis theorematis reſolutio.

Recta enim linea A B extrema ac media ratione ſecetur in Γ, & ſit A Γ major portio: dico quadrata ex A B, B Γ tripla eſſe quadrati ex A Γ.

Quoniam enim quadrata ex A B, B Γ tripla ſunt quadrati ex A Γ; ſuntque [per 7. 2.] quadrata ex A B, B Γ æqualia rectangulo quod bis ſub A B, B Γ continetur una cum quadrato ex A Γ: erit rectangulum quod bis continetur ſub A B, B Γ una cum quadrato ex A Γ triplum quadrati ex A Γ: dividendo igitur, quod bis continetur ſub A B, B Γ duplum eſt quadrati ex A Γ; ergo quod ſemel ſub A B, B Γ continetur quadrato ex A Γ eſt æquale. quod quidem ita ſe habet, recta enim linea A B [ex hyp.] extrema ac media ratione ſecta eſt in puncto Γ.



Compoſitio ejuſdem.

Itaque quoniam A B extrema ac media ratione ſecta eſt in Γ, atque eſt A Γ major portio; erit [per 17. 6.] rectangulum quod ſub A B, B Γ continetur quadrato ex A Γ æquale: ergo quod bis continetur ſub A B, B Γ duplum eſt quadrati ex A Γ: & componendo, quod bis continetur ſub A B, B Γ una cum quadrato ex A Γ triplum eſt quadrati ex A Γ: ſed [per 7. 2.] quod bis ſub A B, B Γ continetur una cum quadrato ex A Γ eſt æquale quadratis ipſarum A B, B Γ: quadrata igitur ex A B, B Γ quadrati ex A Γ ſunt tripla.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τοῦ εἰρημένου θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ Α Β ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ.

Ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐστι μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· διελόντι ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ὥστε τὸ ἅπαξ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. ἔστι δέ, ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ.

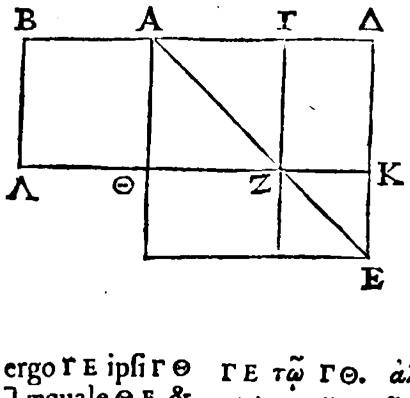
Σύνθεσις τοῦ αὐτοῦ.

Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστι μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· συνθέντι ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἀλλὰ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐστι τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ.

Prop. V. Theor.

Si recta linea extrema ac media ratione ſecetur, adjiciaturque ipſi æqualis majori portioni; erit tota linea extrema ac media ratione ſecta, & major portio erit ea quæ à principio poſita eſt recta linea.

Recta enim linea A B extrema ac media ratione ſecetur in Γ, & ſit A Γ major portio, ponaturque ipſi A Γ æqualis A Δ: dico rectam lineam Δ B extrema ac media ratione ſecari in puncto A, & majorem portionem eſſe A B, quæ à principio poſita eſt.



Deſcribatur enim ex A B quadratum A E, & figura compleatur. quoniam igitur A B extrema ac media ratione ſecta eſt in Γ, erit [per 17. 6.] rectangulum quod continetur ſub A B, B Γ quadrato ex A Γ æquale. ſed rectangulum quidem quod continetur ſub A B, B Γ eſt Γ E: quadratum vero ex A B eſt Γ Θ: ergo Γ E ipſi Γ Θ eſt æquale. ſed Γ E eſt [per 43. 1.] æquale Θ E, & Γ Θ ipſi Δ Θ: quare & Δ Θ ipſi Θ E æquale erit. commune apponatur Θ B. totum igitur Δ K toti

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, καὶ προστεθῇ ἴση τῷ μείζονι τμήματι· ὅλη ἡ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ Α Β ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τῇ ΑΓ ἴση κείσθω ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ ΔΒ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα ἡ ΑΒ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΕ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ ΓΕ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΓΘ· ἴσον ἄρα τὸ ΓΕ τῷ ΓΘ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΕ, τὸ δὲ ΓΘ ἴσον τῷ ΔΘ· καὶ τὸ ΔΘ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΕ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΘΒ. ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶν

ἐστὶν ὅλῳ τῷ ΑΕ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΔΚ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΑ, ἴση γάρ ἡ ΑΔ τῇ ΔΑ, τὸ δὲ ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. μείζων δὲ ἡ ΒΔ τῆς ΒΑ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ· ἡ ἄρα ΒΔ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

AB est æquale. atque est ΔK quidem quod sub BΔ, ΔA continetur, est enim AΔ æqualis ΔA; quadratum autem AE est æquale quadrato ex AB: ergo quod sub BΔ, ΔA continetur est æquale quadrato ex AB: quare [per 17. 6.] ut BΔ ad BA ita est BA ad AΔ. sed BΔ est major quam BA: major igitur est BA quam AΔ: ergo ΔB extrema ac media ratione secta est in A, & AB est major ejus portio. quod erat demonstrandum.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τοῦ εἰρημένου θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τῇ ΑΓ ἴση κείσθω ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΒΑ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΒΑ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· διελόντι ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ἔστι δή, ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ.

Σύνθεσις τοῦ αὐτοῦ.

Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ· συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΒΓ· ἀναστρέψαντι ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ. ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ· ἡ ἄρα ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SCHOLIUM.

Antecedentis theorematis resolutio.

Recta enim linea AB extrema ac media ratione secetur in Γ, & sit major portio AΓ, ponaturque AΔ ipsi AΓ æqualis: dico ΔB extrema ac media ratione secari in puncto A, & BA majorem esse portionem.

Quoniam enim ΔB extrema ac media ratione secta est in A, & major portio est BA; erit [per 30. 6.] ut ΔB ad BA ita BA ad AΔ. æqualis autem est AΔ ipsi AΓ: ut igitur ΔB ad BA ita BA ad AΓ; ergo per conversionem rationis [per cor. 19. 5.] ut BΔ ad ΔA ita AB ad BΓ: quare dividendo [per 17. 5.] ut BA ad AΔ ita AΓ ad ΓB. æqualis autem [per constr.] est AΔ ipsi AΓ: est igitur ut BA ad AΓ ita AΓ ad ΓB. quod quidem ita se habet; etenim [ex hyp.] AB extrema ac media ratione secatur in Γ puncto.

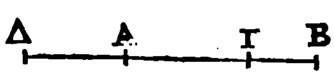
Compositio ejusdem.

Itaque quoniam AB extrema ac media ratione secatur in Γ, erit ut BA ad AΓ ita AΓ ad ΓB. æqualis autem est AΓ ipsi AΔ: ergo ut BA ad AΔ ita AΓ ad ΓB: ergo componendo [per 18. 5.] ut BΔ ad ΔA ita BA ad BΓ; & convertendo [per coroll. 19. 5.] ut ΔB ad BA ita BA ad AΓ. sed est AΓ æqualis AΔ: est igitur ut ΔB ad BA ita BA ad AΔ: quare [per 3. def. 6.] ΔB extrema ac media ratione secatur in puncto A, & AB est portio major. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛʹ.

Ἐὰν εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἔστω εὐθεῖα ῥητὴ ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι ἑκατέρα τῶν ΑΓ, ΓΒ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.



Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἡμίσεια ἡ ΑΔ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΒ τέτμηται ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ τῷ μείζονι τμήματι τῷ ΑΓ πρόσκειται ἡ ΑΔ, ἡμίσεια οὖσα τῆς ΑΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ πενταπλάσιόν ἐστι.

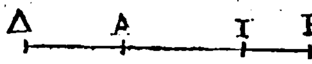
Prop. VI. Theor.

Si recta linea rationalis extrema ac media ratione secta fuerit; utraque portio irrationalis est quæ apotome appellatur.

SIT recta linea rationalis AB, & secetur extrema ac media ratione in Γ, sitque AΓ major portio: dico utramque portionem AΓ, ΓB irrationalem esse quæ apotome appellatur.

Producatur enim BA in Δ, & sit ipsius BA dimidia AΔ. itaque quoniam recta linea AB extrema ac media ratione secatur in Γ, & majori portioni AΓ adjicitur AΔ, quæ est ipsius AB dimidia: erit [per 1. 13.] quadratum ex ΓΔ quadrati ex ΔA quintuplum.

quadratum igitur ex ΓΔ ad quadratum ex ΔΑ rationem habet quam numerus ad numerum; ideoque [per 6.10.] quadratum ex ΓΔ commensurabile est quadrato ex ΔΑ. rationale autem est quadratum ex ΔΑ; etenim ΔΑ est rationalis, cum sit ipsius ΑΒ rationalis dimidia: ergo [per 6. def.10.] & quadratum ex ΓΔ est rationale; ac propterea [per 8. def.10.] ipsa ΓΔ rationalis. quoniam vero quadratum ex ΓΔ ad quadratum ex ΔΑ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, recta linea ΓΔ [per 9. 10.] ipsi ΔΑ incommensurabilis est longitudine: quare ΓΔ, ΔΑ rationales sunt potentia solum commensurabiles; & idcirco [per 74. 10.] ΑΓ apotome est. rursus, quoniam ΑΒ extrema ac media ratione secta est, & major portio est ΑΓ; erit rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ æquale quadrato ex ΑΓ: quadratum igitur apotomæ ΑΓ ad rationalem ΑΒ applicatum latitudinem facit ΒΓ. sed [per 98. 10.] quadratum apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam; ergo ΒΓ est apotome prima. ostensa est autem & ΑΓ apotome.



Si igitur recta linea rationalis extrema ac media ratione secta fuerit; utraque portio irrationalis est quæ apotome appellatur. quod erat demonstrandum.

τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΑ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ, ῥητὴ γάρ ἐστιν ἡ ΔΑ ἡμίσεια οὖσα τῆς ΑΒ ῥητῆς οὔσης· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀσύμμετρος ἄρα μήκει ἡ ΓΔ τῇ ΔΑ· αἱ ΓΔ, ΔΑ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀποτομῆς παρὰ τὴν ΑΒ ῥητὴν παραβληθὲν πλάτος ποιεῖ τὴν ΒΓ. τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἡ ΒΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΑΓ ἀποτομή.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. VII. THEOR.

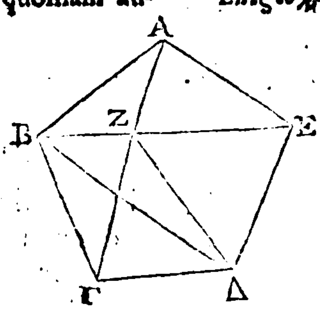
Si pentagoni æquilateri tres anguli, sive deinceps sive non deinceps, inter se fuerint æquales; æquiangulum erit pentagonum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζʹ.

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι, ἤτοι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς ἢ αἱ μὴ κατὰ τὸ ἑξῆς, ἴσαι ὦσιν· ἰσογώνιον ἔσται τὸ πεντάγωνον.

PEntagoni enim æquilateri ΑΒΓΔΕ tres anguli primum deinceps, qui ad puncta Α, Β, Γ, æquales inter se sint: dico pentagonum ΑΒΓΔΕ æquiangulum esse.

Jungantur enim ΑΓ, ΒΕ, ΖΔ. quoniam autem duæ ΓΒ, ΒΑ duabus ΒΑ, ΑΕ, æquales sunt, altera alteri, & angulus ΓΒΑ æqualis angulo ΒΑΕ, erit [per 4. 1.] basis ΑΓ æqualis basi ΒΕ, & triangulum ΑΒΓ triangulo ΑΒΕ æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquales quibus æqualia latera subtenduntur, angulus quidem ΒΓΑ angulo ΒΕΑ, angulus vero ΑΒΕ angulo ΓΑΒ: quare [per 6. 1.] & latus ΑΖ est æquale lateri ΒΖ. ostensa autem est & tota ΑΓ toti ΒΕ æqualis: ergo & reliqua ΖΓ est æqualis reliquæ ΖΕ. atque est ΓΔ æqualis ΔΕ; duæ igitur ΖΓ, ΓΔ duabus ΖΕ, ΕΔ æquales sunt, & basis ipsorum ΖΔ est communis: quare [per 8. 1.] angulus ΖΓΔ angulo ΖΕΔ est æqualis. ostensus autem est & angulus ΒΓΑ æqualis angulo ΑΕΒ: totus igitur ΒΓΔ æqualis est toti ΑΕΔ. sed [ex hyp.] angulus ΒΓΔ positus est æqualis angulis, qui sunt ad puncta Α, Β: ergo & ΑΕΔ angulus angulis qui sunt ad Α, Β æqualis erit. simili-



Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου τοῦ ΑΒΓΔΕ αἱ τρεῖς γωνίαι πρότερον αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς αἱ πρὸς τοῖς Α, Β, Γ ἴσαι ἀλλήλαις ἔστωσαν· λέγω ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΕ, ΖΔ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΓΒ, ΒΑ δυσὶ ταῖς ΒΑ, ΑΕ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΒΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΕ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΕ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΒΕΑ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΓΑΒ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΑΖ πλευρᾷ τῇ ΒΖ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλη ἡ ΑΓ ὅλῃ τῇ ΒΕ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΖΓ λοιπῇ τῇ ΖΕ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ ἴση· δύο δὴ αἱ ΖΓ, ΓΔ δυσὶ ταῖς ΖΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΖΔ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΕΔ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ ἡ ὑπὸ ΒΓΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΒ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ ἐστιν ἴση. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ὑπόκειται ταῖς πρὸς τοῖς Α, Β· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΔ ἄρα ταῖς πρὸς τοῖς Α, Β γωνίαις ἴση ἐστίν. ὁμοίως δὴ δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ γωνία ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς Α, Β γωνίαις· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

ter demonstrabimus & angulum ΓΔE angulis qui sunt ad A, B esse æqualem: æquiangulum igitur est ABΓΔE pentagonum.

ΑΛΛΑ δὴ μὴ ἔστωσαν ἴσαι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς γωνίαι, ἀλλ' ἔστωσαν ἴσαι αἱ πρὸς τοῖς Α,Γ,Δ σημείοις· λέγω ὅτι καὶ οὕτως ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

SED non sint anguli deinceps sibi ipsis æquales, sed qui sunt ad A, Γ, Δ: dico & sic æquiangulum esse ABΓΔE pentagonum.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΒΔ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΑ, ΑΕ δυσὶ ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΒΕ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΔΕ ἴση, ἐπεὶ πλευρὰ ἡ ΒΕ πλευρᾷ τῇ ΒΔ ἐστιν ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΔ γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστιν ἴση. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ ταῖς πρὸς τοῖς Α, Γ γωνίαις ὑπόκειται ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΔ ἄρα γωνία ταῖς πρὸς τοῖς Α, Γ ἴση ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς Α, Γ, Δ γωνίαις· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Jungatur enim BΔ. & quoniam duæ BA, AE duabus BΓ, ΓΔ æquales sunt, & angulos æquales continent; erit [per 4. 1.] basis BE æqualis basi BΔ, & ABE triangulum triangulo BΓΔ, & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt quibus æqualia latera subtenduntur: æqualis igitur est angulus AEB angulo ΓΔB. est autem [per 6. 1.] & BEΔ angulus ipsi BΔE æqualis, quoniam latus BE est æquale lateri BΔ: totus igitur angulus AEΔ toti ΓΔE est æqualis. sed [ex hyp.] angulus ΓΔE angulis qui sunt ad puncta A, Γ æqualis ponitur: ergo & AEΔ angulus angulis qui sunt ad A, Γ est æqualis. eadem ratione & angulus ABΓ æqualis est angulis qui sunt ad A, Γ, Δ puncta: æquiangulum igitur est ABΓΔE pentagonum. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

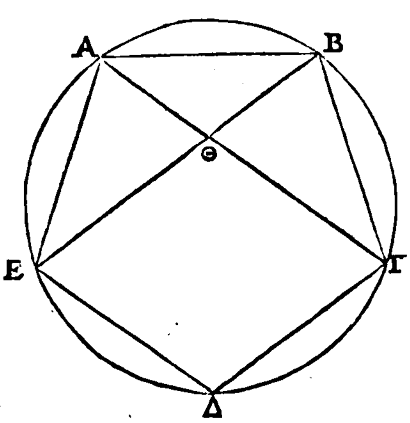
PROP. VIII. THEOR.

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τὰς κατὰ τὸ ἑξῆς δύο γωνίας ὑποτείνωσιν εὐθεῖαι, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνουσιν ἀλλήλας, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

Si pentagoni æquilateri & æquianguli duos qui deinceps sunt angulos subtendant rectæ lineæ, extrema ac media ratione se mutuo secant; & majores ipsarum portiones pentagoni lateri sunt æquales.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τοῦ ΑΒΓΔΕ δύο γωνίας, τὰς κατὰ τὸ ἑξῆς τὰς πρὸς τοῖς Α, Β, ὑποτεινέτωσαν εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΕ, τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ Θ σημεῖον· λέγω ὅτι ἑκατέρα αὐτῶν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα εἰσὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

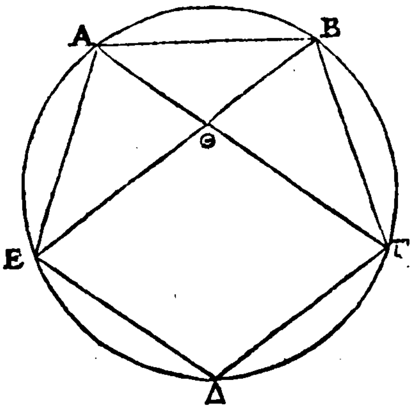
PEntagoni enim æquilateri & æquianguli ABΓΔE duos qui sunt deinceps angulos ad puncta A, B subtendant rectæ lineæ AΓ, BE, quæ sese in puncto Θ secent: dico utramque ipsarum extrema ac media ratione secari in puncto Θ; & majores earum portiones pentagoni lateri æquales esse.



Περιγεγράφθω γὰρ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΑ, ΑΒ δυσὶ ταῖς ΑΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ ΒΕ βάσει τῇ ΑΓ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΕ· διπλῆ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΘΕ τῆς ὑπὸ ΒΑΘ γωνίας, ἐκτὸς γάρ ἐστι τοῦ ΑΒΘ τριγώνου. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ διπλῆ, ἐπειδὴ καὶ περιφέρεια ἡ ΕΔΓ περιφερείας τῆς ΓΒ ἐστι διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΘΕ· ὥστε καὶ ἡ ΘΕ εὐθεῖα τῇ ΕΑ, τουτέστι

Describatur enim [per 14. 4.] circa ABΓΔE pentagonum circulus ABΓΔE. & quoniam duæ rectæ lineæ EA, AB duabus AB, BΓ æquales sunt & angulos æquales continent; erit [per 4. 1.] basis BE basi AΓ æqualis, & ABE triangulum æquale triangulo ABΓ, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur: æqualis igitur est BAΓ angulus angulo ABE: ergo [per 6 & 32. 1.] AΘE angulus anguli BAΘ est duplus; est etenim extra triangulum ABΘ. est autem [per 33. 6.] & angulus EAΓ duplus anguli BAΓ, quoniam circumferentia EΔΓ circumferentiæ ΓB est dupla: ergo ΘAE angulus æqualis est angulo AΘE; quare [per 6. 1.] recta ΘE est æqualis ipsi EA, hoc est,

est, ipsi A B. & quoniam B A est æqualis A E; erit & angulus A B E [per 5. 1.] angulo A E B æqualis. sed angulus A B E ostensus est æqualis angulo B A Θ: ergo & B E A angulus æqualis est angulo B A Θ. verum angulus A B E est communis duobus triangulis, videlicet triangulo A B E & triangulo A B Θ; reliquus igitur B A E [per 32. 1.] reliquo A Θ B est æqualis: ergo triangulum A B E æquiangulum est triangulo A B Θ; ideoque [per 4. 6.] ut E B ad B A ita est A B ad B Θ. æqualis autem est B A ipsi E Θ: & igitur ut B E ad E Θ ita E Θ ad Θ B. sed B E major est quam E Θ: ergo & E Θ quam Θ B est major: recta igitur linea B E [per 30. 6.] extrema ac media ratione secta est in Θ, & major ejus portio Θ E pentagoni lateri est æqualis. similiter demonstrabimus & A Γ extrema ac media ratione secari in Θ, & majorem ejus portionem Γ Θ pentagoni lateri æqualem esse. quod erat demonstrandum.



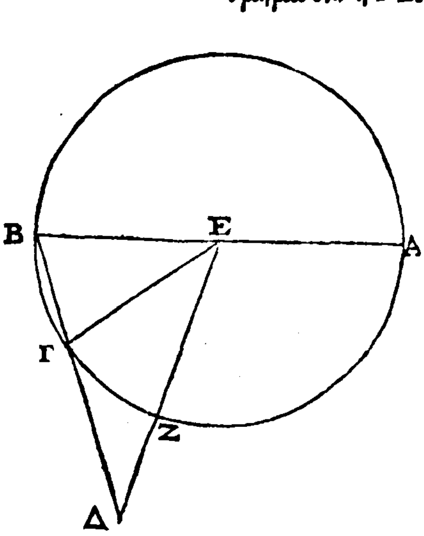
τῇ ΑΒ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ εὐθεῖα τῇ ΑΕ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΘ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΑ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΘ ἐστιν ἴση. καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ΑΒΕ καὶ τοῦ ΑΒΘ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΘΒ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΒΘ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΘ. ἴση δὲ ἡ ΒΑ τῇ ΕΘ· ὡς ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΘ οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΒ. μείζων δὲ ἡ ΒΕ τῆς ΕΘ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΘΒ· ἡ ΒΕ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ Θ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ ΘΕ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΑΓ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα τὸ ΓΘ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. IX. Theor.

Si latera hexagoni & decagoni in eodem circulo descriptorum componantur; erit tota recta extrema ac media ratione secta, & major ipsius portio erit hexagoni latus.

SIT circulus A B Γ, &, descriptarum in A B Γ circulo figurarum, sit decagoni quidem latus B Γ, hexagoni vero Γ Δ, & in directum sibi ipsis constituantur: dico totam rectam lineam B Δ extrema ac media ratione secari in Γ, & majorem ejus portionem esse Γ Δ.

Sumatur enim centrum circuli, quod sit E; junganturque E B, E Γ, E Δ, & B E ad A producatur. quoniam igitur B Γ est decagoni æquilateri latus, erit A Γ B circumferentia circumferentiæ B Γ quintupla; quare circumferentia A Γ quadrupla est circumferentiæ Γ B. ut autem circumferentia A Γ ad ipsam Γ B ita [per 33. 6.] A E Γ angulus ad angulum Γ E B: angulus igitur A E Γ anguli Γ E B quadruplus est. & quoniam [per 5. 1.] E B Γ angulus est æqualis angulo E Γ B, erit [per 32. 1.] angulus A E Γ anguli E Γ B duplus. & quoniam recta linea E Γ æqualis ipsi Γ Δ; utraque enim [per hyp. & 15. 4.] est æqualis



ΠΡΟΤΑΣΙΣ θʹ.

Ἐὰν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ καὶ ἡ τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν ἐγγραφομένων συντεθῶσιν· ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρά.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ, τῶν εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἐγγραφομένων σχημάτων, δεκαγώνου μὲν ἔστω πλευρὰ ἡ ΒΓ, ἑξαγώνου δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἔστωσαν ἐπ' εὐθείας· λέγω ὅτι ἡ ὅλη εὐθεῖα ἡ ΒΔ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΓΔ.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ε σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ, καὶ διήχθω ἡ ΒΕ ἐπὶ τὸ Α. καὶ ἐπεὶ δεκαγώνου ἰσοπλεύρου πλευρά ἐστιν ἡ ΒΓ, πενταπλασίων ἄρα ἡ ΑΓΒ περιφέρεια τῆς ΒΓ περιφερείας· τετραπλασίων ἄρα ἡ ΑΓ περιφέρεια τῆς ΓΒ. ὡς δὲ ἡ ΑΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ὑπὸ ΑΕΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΓΕΒ· τετραπλασίων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΒ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΕΓ γωνία διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΕΓΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ εὐθεῖα τῇ ΓΔ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση

ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾷ, τοῦ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἐγγραφομένου, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΕΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ· διπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΓΒ τῆς ὑπὸ ΕΔΓ. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΕΓΒ διπλασία ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΑΕΓ· τετραπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ τῆς ὑπὸ ΒΕΓ τετραπλασία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΓ τῇ ὑπὸ ΒΕΓ. κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ΒΕΓ καὶ τοῦ ΒΕΔ, ἡ ὑπὸ ΕΒΔ γωνία· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΔ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΓΒ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΕΒΔ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΓ. ἴση δὲ ἡ ΕΒ τῇ ΓΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ. μείζων δὲ ἡ ΒΔ τῆς ΔΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΔΓ τῆς ΓΒ· ἡ ΒΔ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα αὐτῆς ἐστιν ἡ ΔΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

lateri hexagoni quod in circulo ABΓ describitur: quare [per 5. 1.] & angulus ΓΕΔ æqualis est angulo ΓΔΕ: est igitur [per 32. 1.] angulus ΕΓΒ anguli ΕΔΓ duplus. sed angulus ΑΕΓ duplus ostensus est anguli ΕΓΒ: angulus igitur ΑΕΓ anguli ΕΔΓ est quadruplus. ostensus autem est & angulus ΑΕΓ quadruplus anguli ΒΕΓ: ergo ΕΔΓ angulus angulo ΒΕΓ æqualis erit. at vero angulus ΕΒΔ communis est duobus triangulis ΒΕΓ, ΒΕΔ: & reliquus igitur ΒΕΔ [per 32. 1.] reliquo ΕΓΒ est æqualis: ideoque triangulum ΕΒΔ triangulo ΕΒΓ æquiangulum est: ergo [per 4. 6.] ut ΔΒ ad ΒΕ ita ΕΒ ad ΒΓ. æqualis autem est [per 15. 4.] ΕΒ ipsi ΓΔ: ut igitur ΒΔ ad ΔΓ ita ΔΓ ad ΓΒ atque est ΒΔ major quam ΔΓ: ergo & ΔΓ quam ΓΒ est major: quare [per 3. def. 6.] recta linea ΒΔ extrema ac media ratione secta est in Γ, & ΔΓ est major ipsius portio. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

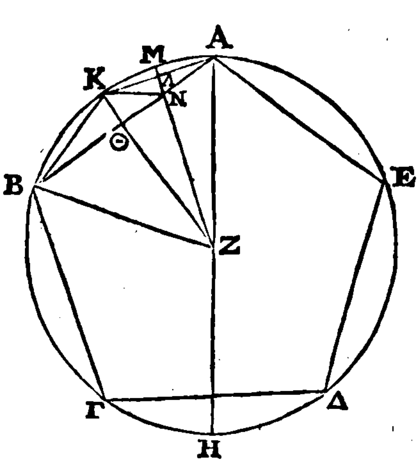
Prop. X. Theor.

Ἐὰν εἰς κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ· ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur; latus pentagoni potest & hexagoni & decagoni latus in eodem circulo descriptorum.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν πεντάγωνον ἐγγεγράφθω ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΓΔΕ· λέγω ὅτι ἡ τοῦ ΑΒΓΔΕ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου πλευράν, τῶν εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον ἐγγραφομένων.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ζ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΖ διήχθω ἐπὶ τὸ Η σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΘ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΚΒ, καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΑΚ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΛ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Μ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΝ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ περιφέρεια τῇ ΑΕΔΗ περιφερείᾳ, ὧν ἡ ΑΒΓ τῇ ΑΕΔ ἐστιν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΗ περιφέρεια λοιπῇ τῇ ΔΗ ἐστιν ἴση. πενταγώνου γάρ ἡ ΓΔ· δεκαγώνου ἄρα ἡ ΓΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, καὶ κάθετος ἡ ΖΘ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΖΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΖΒ· ὥστε καὶ περιφέρεια ἡ ΑΚ τῇ ΚΒ ἐστιν ἴση· διπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας· δεκαγώνου ἄρα πλευρά ἐστιν ἡ ΑΚ εὐθεῖα. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΚ τῆς ΚΜ ἐστὶ διπλῆ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΒ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας, ἴση δὲ ἡ ΓΔ περιφέρεια τῇ ΑΒ περιφερείᾳ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΓΔ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας. ἔστι δὲ ἡ ΓΔ περιφέρεια καὶ τῆς ΓΗ δι-

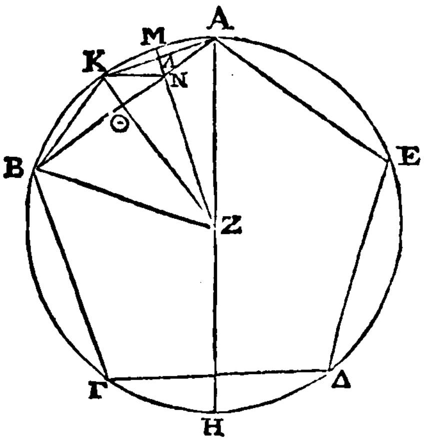


SIT circulus ABΓΔΕ, & in ipso pentagonum æquilaterum ABΓΔΕ describatur: dico pentagoni ABΓΔΕ latus posse & latus hexagoni & latus decagoni in eodem circulo descriptorum.

Sumatur enim centrum circuli Z, junctaque AZ ad H producatur, & jungatur ZB; deinde à puncto Z ad AB perpendicularis agatur ZΘ, & ad K producatur; junganturque AK, KB: & rursus à puncto Z ad AK perpendicularis agatur ZΛ, & producatur ad M, & KN jungatur. quoniam igitur circumferentia ABΓH est æqualis circumferentiæ AEΔH, ex quibus ABΓ æqualis est ipsi AEΔ; erit reliqua ΓH reliquæ HΔ æqualis. sed ΓΔ est latus pentagoni: ergo ΓH decagoni latus erit. & quoniam AZ est æqualis ZB, & ZΘ perpendicularis; erit & angulus AZK æqualis angulo KZB: quare & circumferentia AK circumferentiæ KB est æqualis: dupla igitur est circumferentia AB circumferentiæ BK; & ob id recta linea AK est decagoni latus. eadem ratione & AK est dupla KM. & quoniam circumferentia AB dupla est circumferentiæ BK, æqualis autem est ΓΔ circumferentia circumferentiæ AB; erit circumferentia ΓΔ circumferentiæ BK dupla. est autem ΓΔ dupla ipsius

ipsius ΓΗ: ergo ΓΗ est æqualis ΒΚ. sed ΒΚ ipsius ΚΜ est dupla, quoniam & ΑΚ: & ΓΗ igitur ipsius ΚΜ dupla erit. est autem & ΓΒ circumferentia circumferentiæ ΒΚ dupla; etenim ΓΒ est æqualis ΒΑ: ergo & tota ΗΒ dupla est ipsius ΒΜ, & [per 33. 6.] angulus ΗΖΒ anguli ΒΖΜ duplus. sed [per 32. 1.] & angulus ΗΖΒ est duplus anguli ΖΑΒ; etenim [per 5. 1.] ΖΑΒ angulus æqualis est angulo ΑΒΖ: ergo & angulus ΒΖΝ angulo ΖΑΒ est æqualis. communis autem duobus triangulis ΑΒΖ, ΒΖΝ est ΑΒΖ angulus: reliquus igitur ΑΖΒ [per 32. 1.] est æqualis reliquo ΒΝΖ, & triangulum ΑΒΖ triangulo ΒΖΝ æquiangulum: ergo [per 4. 6.] ut ΑΒ ad ΒΖ ita ΖΒ ad ΒΝ: rectangulum igitur sub ΑΒ, ΒΝ [per 17. 6.] est æquale quadrato ex ΖΒ. rursus quoniam ΛΑ est æqualis ΛΚ, communis autem & ad rectos angulos ΛΝ; erit [per 4. 1.] basis ΚΝ æqualis basi ΛΝ: ergo & angulus ΛΚΝ angulo ΛΑΝ est æqualis. sed [per 5. 1.] angulus ΛΑΝ est æqualis angulo ΚΒΝ: & igitur angulus ΛΚΝ est æqualis angulo ΚΒΝ. angulus autem ΝΑΚ est communis duobus triangulis ΑΚΒ & ΑΚΝ: ergo [per 32. 1.] reliquus ΑΚΒ reliquo ΚΝΑ est æqualis, & triangulum ΚΒΑ triangulo ΚΝΑ æquiangulum; igitur ut ΒΑ ad ΑΚ ita [per 4. 6.] ΚΑ ad ΑΝ; quare [per 17. 6.] rectangulum sub ΒΑ, ΑΝ est æquale quadrato ex ΑΚ. ostensum est autem & rectangulum sub ΑΒ, ΒΝ quadrato ex ΒΖ æquale: rectangulum igitur sub ΑΒ, ΒΝ una cum rectangulo sub ΒΑ, ΑΝ, quod [per 2. 2.] est quadratum ex ΑΒ, est æquale quadrato ex ΒΖ una cum quadrato ex ΑΚ. sed est ΑΒ quidem pentagoni latus, ΒΖ vero latus hexagoni, & ΑΚ latus decagoni.

Ergo pentagoni latus potest & latus hexagoni & latus decagoni in eodem circulo descriptorum. quod erat demonstrandum.



πλῆ· ἴση ἄρα ἡ ΓΗ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας. ἀλλὰ ἡ ΒΚ τῆς ΚΜ ἐστὶ διπλῆ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΚΑ· καὶ ἡ ΓΗ ἄρα τῆς ΚΜ ἐστὶ διπλῆ. ἀλλὰ ἡ ΓΒ περιφέρεια τῆς ΓΚ περιφερείας ἐστὶ διπλῆ, ἴση γὰρ ἡ ΓΒ περιφέρεια τῇ ΒΑ περιφερείᾳ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΗΒ περιφέρεια τῆς ΒΜ ἐστὶ διπλῆ· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΖΒ γωνίας τῆς ὑπὸ ΒΖΜ ἐστὶ διπλῆ. ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ ΗΖΒ καὶ τῆς ὑπὸ ΖΑΒ διπλῆ, ἴση γὰρ ἡ ὑπὸ ΖΑΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΖ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΖΝ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΑΒ ἐστιν ἴση. κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ΑΒΖ καὶ τοῦ ΒΖΝ, ἡ ὑπὸ ΑΒΖ γωνία· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΝΖ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΒΖ τρίγωνον τῷ ΒΖΝ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΒΖ οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΝ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΛ τῇ ΛΚ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΛΝ· βάσις ἄρα ἡ ΚΝ βάσει τῇ ΛΝ ἐστιν ἴση· καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΚΝ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΛΑΝ ἐστιν ἴση. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΛΑΝ τῇ ὑπὸ ΚΒΝ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΛΚΝ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΒΝ ἐστιν ἴση. καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ΑΚΒ καὶ τοῦ ΑΚΝ, ἡ ὑπὸ ΝΑΚ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΚΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΚΝΑ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΒΑ τρίγωνον τῷ ΚΝΑ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΑΚ οὕτως ἡ ΚΑ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΑΝ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΚ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΝ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΝ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΝ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΚ. καί ἐστιν ἡ μὲν ΑΒ πενταγώνου πλευρά, ἡ δὲ ΒΖ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ΑΚ δεκαγώνου.

Ἡ ἄρα τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XI. Theor.

Si in circulo rationalem diametrum habente pentagonum æquilaterum describatur; pentagoni latus est linea irrationalis quæ minor appellatur.

In circulo enim ΑΒΓΔΕ rationalem diametrum habente pentagonum æquilaterum describatur ΑΒΓΔΕ: dico pentagoni ΑΒΓΔΕ latus irrationalem esse lineam, quæ minor appellatur.

Sumatur enim circuli centrum Ζ; & junctæ ΑΖ, ΒΖ ad puncta Η, Θ producantur, & jungatur ΑΓ; ponaturque ΖΚ ipsius ΑΖ pars

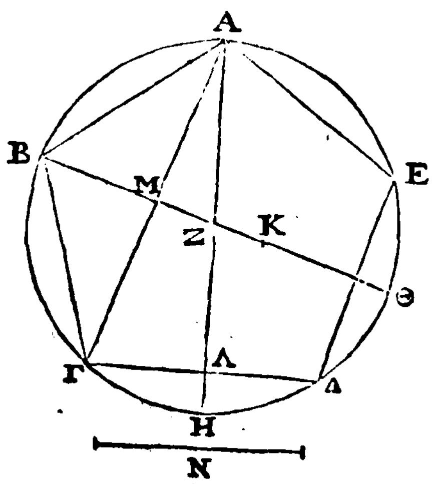
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Ἐὰν εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Εἰς γὰρ κύκλον τὸν ΑΒΓΔΕ ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ ΑΒΓΔΕ· λέγω ὅτι ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἡ ΑΒΓΔΕ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ζ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΖΒ, καὶ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ, καὶ κείσθω τῇ ΑΖ τέταρ-

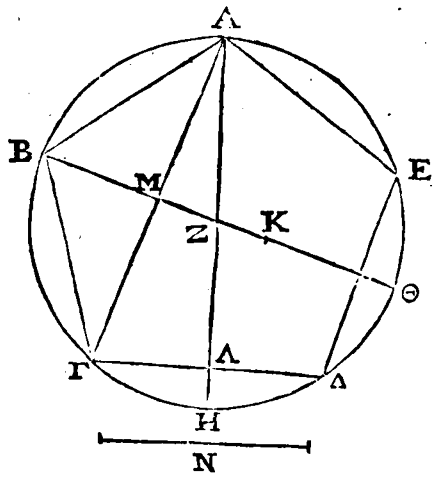
τέταρτον μέρος ἡ ΖΚ. ῥητὴ δὲ ἡ ΑΖ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΚ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΖ ῥητή· ὅλη ἄρα ἡ ΒΚ ῥητή ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓΗ περιφέρεια τῇ ΑΔΗ περιφερείᾳ, ὧν ἡ ΑΒΓ τῇ ΑΕΔ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΗ λοιπῇ τῇ ΗΔ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΑΔ, συνάγονται ὀρθαὶ αἱ πρὸς τῷ Λ γωνίαι, καὶ διπλῆ ἡ ΓΔ τῆς ΓΛ. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ αἱ πρὸς τῷ Μ ὀρθαί εἰσι, καὶ διπλῆ ἡ ΑΓ τῆς ΓΜ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΛΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΜΖ, κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ΑΛΓ καὶ τοῦ ΑΜΖ, ἡ ὑπὸ ΛΑΓ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΛ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΜΖΑ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΓΛ τρίγωνον τῷ ΑΜΖ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΛΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΑ, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια· ὡς ἄρα ἡ τῆς ΛΓ διπλῆ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ τῆς ΜΖ διπλῆ πρὸς τὴν ΖΑ. ἀλλ' ὡς ἡ τῆς ΜΖ διπλῆ πρὸς τὴν ΖΑ οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΖΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ τῆς ΛΓ διπλῆ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΖΑ, καὶ τῶν ἑπομένων τὰ ἡμίσεια· ὡς ἄρα ἡ τῆς ΛΓ διπλῆ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΓΑ οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὸ τέταρτον τῆς ΖΑ. καὶ ἔστι τῆς μὲν ΛΓ διπλῆ ἡ ΔΓ, τῆς δὲ ΓΑ ἡμίσεια ἡ ΓΜ, τῆς δὲ ΖΑ τέταρτον μέρος ἡ ΖΚ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΜ οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΚ. συνθέντι καὶ ὡς συναμφότερος ἡ ΔΓΜ πρὸς τὴν ΓΜ οὕτως ἡ ΜΚ πρὸς τὴν ΖΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΓΜ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΜ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ. καὶ ἐπεὶ τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πενταγώνου ὑποτεινούσης, οἷον τῆς ΑΓ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, τὸ μεῖζον τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ, τουτέστι τῇ ΔΓ, τὸ δὲ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης, καὶ ἔστιν ὅλης τῆς ΑΓ ἡμίσεια ἡ ΓΜ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓΜ ὡς μιᾶς πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΜ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓΜ ὡς μιᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΜ οὕτως ἐδείχθη τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ· πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΖ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ, ῥητὴ γὰρ ἡ διάμετρος· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΚ, λόγον γὰρ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ. καὶ ἐπεὶ τετραπλασία ἐστὶν ἡ ΒΖ τῆς ΖΚ, πενταπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΚ τῆς ΚΖ· εἰκοσιπενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΖ. πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΖ· πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΜ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΜ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΒΚ τῇ ΚΜ μήκει. καὶ ἔστι ῥητὴ ἑκατέρα αὐτῶν· αἱ ΒΚ, ΚΜ



quarta. rationalis autem est AZ: ergo & ZK est rationalis. sed & rationalis est BZ: tota igitur BK rationalis erit. quoniam vero circumferentia AΓH æqualis est circumferentiæ AΔH, ex quibus ABΓ est æqualis ipsi AEΔ; erit reliqua ΓH reliquæ HΔ æqualis. quod si jungamus AΔ, fient anguli ad Λ recti, & [per 3.3.] ΓΔ dupla ipsius ΓΛ. eadem ratione & anguli ad M recti sunt, & AΓ dupla ΓM. quoniam igitur angulus AΛΓ est æqualis angulo AMZ, communis autem duobus triangulis AΛΓ & AMZ est angulus ΛAΓ; reliquus AΓΛ [per 32.1.] reliquo MZA æqualis erit: ideoque triangulum AΓΛ triangulo AMZ æquiangulum: ergo [per 4. 6.] ut ΛΓ ad ΓA ita MZ ad ZA, & antecedentium dupla: quare ut dupla ipsius ΛΓ ad ΓA ita dupla ipsius MZ ad ZA. sed ut ipsius MZ dupla ad ZA ita est MZ ad dimidiam ipsius ZA: & igitur ut dupla ipsius ΛΓ ad ΓA ita MZ ad ipsius ZA dimidiam; & consequentium dimidia: quare ut dupla ΛΓ ad dimidiam ipsius ΓA ita MZ ad quartam partem ipsius ZA. atque ipsius quidem ΛΓ dupla est ΔΓ; ipsius vero ΓA dimidia ΓM, & ipsius ZA quarta pars ZK: est igitur ut ΔΓ ad ΓM ita MZ ad ZK. & componendo [per 18.5.] ut utraque * ΔΓM ad ΓM ita MK ad ZK: ergo [per 22.6.] ut quadratum quod fit ex utraque ΔΓM ad quadratum ex ΓM ita quadratum ex MK ad quadratum ex KZ. quoniam autem [per 8. 13.] recta linea, quæ duo pentagoni latera subtendit, ut AΓ, extrema ac media ratione secta, major ejus portio est æqualis lateri pentagoni, hoc est ipsi ΔΓ; & [per 1. 13.] major portio assumens dimidium totius quintuplum potest dimidiæ totius; atque est totius AΓ dimidia ΓM: erit quadratum ex ΔΓM tanquam ex una linea quintuplum quadrati ex ΓM. ut autem quadratum ex ΔΓM tanquam ex una linea ad quadratum ex ΓM ita ostendimus esse quadratum ex MK ad quadratum ex KZ: quintuplum igitur est quadratum ex MK quadrati ex KZ. est autem [per 6. def. 10.] quadratum ex KZ rationale: namq; diameter rationalis est: ergo & rationale est [per 6. 10.] quadratum ex MK, & ipsa MK rationalis, quadratum enim ex MK ad quadratum ex KZ rationem habet quam numerus ad numerum. quoniam autem BZ quadrupla est ipsius ZK, erit BK ipsius KZ quintupla: & [per cor. 20.6.] quadratum ex BK vigintiquintuplum quadrati ex KZ. quadratum autem ex MK quintuplum est quadrati ex KZ: ergo quadratum ex BK quadrati ex KM est quintuplum; ac propterea ad illud rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommensurabilis igitur est [per 9. 10.] BK ipsi KM longitudine. sed est & utraque ipsarum rationalis: ergo BK, KM rationa-

* In sequentibus frequenter enunciatur aggregatum duarum rectarum contiguarum, ut ΔΓ & ΓM per ΔΓM.

les sunt potentia solum commensurabiles. si autem à rationali rationalis auferatur potentia solum commensurabilis existens toti, [per 74. 10.] reliqua irrationalis est: quare MB est apotome, & ipsi congruens MK. dico & ipsam MB quartam esse. quo enim quadratum ex BK superat quadratum ex KM, illi sit æquale quadratum ex N: ergo BK plus potest quam KM quadrato ex N. quoniam vero commensurabilis est KZ ipsi ZB; & componendo KB commensurabilis est ipsi BZ. sed & BZ est commensurabilis ipsi BΘ longitudine; erit igitur [per 12.10.] & KB ipsi BΘ commensurabilis. quoniam autem quadratum ex BK quintuplum est quadrati ex KM, habebit quadratum ex BK ad quadratum ex KM rationem eam quam habet quinque ad unum: ergo convertendo [per cor. 19. 5.] quadratum ex BK ad N rationem habet quam quinque ad quatuor, & non eam quam quadratus numerus ad quadratum numerum: incommensurabilis igitur est [per 9. 10.] BK ipsi N: quare BK plus potest quam KM quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis. itaque quoniam tota BK plus potest quam congruens MK quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, & tota BK commensurabilis est expositæ rationali BΘ; erit [per 4. deff. tert.10.] MB apotome quarta. quod autem sub rationali & apotome quarta continetur rectangulum [per 95. 10.] irrationale est, & ipsum potens est irrationalis quæ minor appellatur. sed [per 17.6.] AB potest id quod continetur sub ΘB, BM, propterea quod, juncta AΘ, triangulum ABΘ est [per 8.6.] æquiangulum triangulo ABM, atque est [per 4. 6.] ut ΘB ad BA ita AB ad BM: ergo pentagoni latus AB est linea irrationalis quæ minor appellatur. quod erat dem.



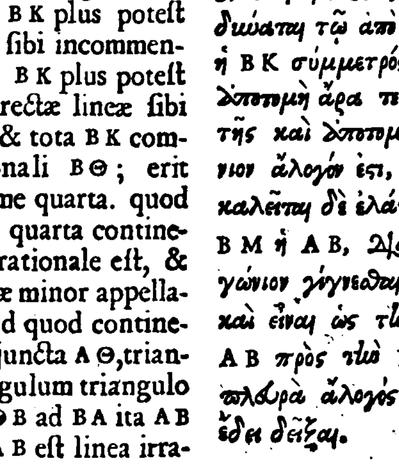
ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐὰν δὲ ἀπὸ ῥητῆς ῥητὴ ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· ἀποτομὴ ἄρα ἡ MB, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ MK. λέγω δὴ ὅτι καὶ τετάρτη. ᾧ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς BK τοῦ ἀπὸ τῆς KM, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς N· ἡ BK ἄρα τῆς KM μεῖζον δύναται τῇ N. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ KZ τῇ ZB, καὶ συνθέντι σύμμετρός ἐστιν ἡ KB τῇ BZ. ἀλλὰ ἡ BZ τῇ BΘ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ ἡ BK ἄρα τῇ BΘ σύμμετρός ἐστι. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς BK τοῦ ἀπὸ τῆς KM, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς BK πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς KM λόγον ἔχει ὃν E πρὸς A· ἀναστρέψαντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς BK πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς N λόγον ἔχει ὃν E πρὸς Δ, οὐχ ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον· ἀσύμμετρος ἄρα μήκει ἐστὶν ἡ BK τῇ N· ἡ BK ἄρα τῆς KM μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ BK τῆς προσαρμοζούσης τῆς MK μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ὅλη ἡ BK σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ BΘ· ἀποτομὴ ἄρα τετάρτη ἐστὶν ἡ MB. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ ἐλάττων. δύναται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΘB, BM ἡ AB, διὰ τὸ ἐπιζευγνυμένης τῆς AΘ ἰσογώνιον γίγνεσθαι τὸ ABΘ τρίγωνον τῷ ABM, καὶ εἶναι ὡς τὴν ΘB πρὸς τὴν BA οὕτως τὴν AB πρὸς τὴν BM· ἡ ἄρα AB τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XII. Theor.

Si in circulo triangulum æquilaterum describatur; trianguli latus potentia tripla est ejus quæ ex circuli centro.

SIT circulus ABΓ, & in ipso triangulum æquilaterum describatur ABΓ: dico trianguli ABΓ latus potentia triplum esse ejus quæ est ex circuli ABΓ centro.

Sumatur enim circuli centrum Δ, & juncta AΔ producatur ad E, & BE jungatur. itaque quoniam æquilaterum est ABΓ triangulum, erit BEΓ circumferentia tertia pars circumferentiæ circuli ABΓ: ergo circumferentia BE est



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ′.

Ἐὰν εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

ΕΣτω κύκλος ὁ ABΓ, καὶ εἰς αὐτὸν τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ ABΓ· λέγω ὅτι ἡ τοῦ ABΓ τριγώνου μία πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ABΓ κύκλου.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ AΔ διήχθω ἐπὶ τὸ E, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ BE. καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ ABΓ τρίγωνον, BEΓ ἄρα περιφέρεια τρίτον μέρος ἐστὶ τῆς τοῦ ABΓ κύκλου περιφερείας· ἡ ἄρα BE περιφέρεια

ἕκτον

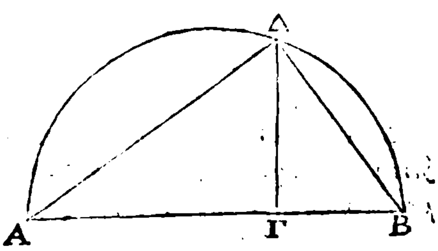
ἕκτον μέρος ἐστὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας· ἑξαγώνου ἄρα πλευρά ἐστιν ἡ ΒΕ εὐθεῖα· ἴση ἄρα ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, τῇ ΔΕ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ, τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ· διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ. ἴση δὲ ἡ ΒΕ τῇ ΔΕ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ.

Ἡ ἄρα τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγʹ.

Πυραμίδα συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ· καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ὥστε διπλασίαν εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΒΓ· καὶ γεγράφθω ἐπὶ



τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΑ· καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ ΕΖΗ, ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ΔΓ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΗΖ κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΕΖΗ· καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Θ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΘ, ΘΖ, ΘΗ· καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Θ σημείου τῷ ΕΖΗ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΘΚ· καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς ΘΚ τῇ ΑΓ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΘΚ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΕΖΗ κύκλου ἐπίπεδον· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ ΕΖΗ κύκλου ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκάστη τῶν ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ· ἡ ΘΚ ἄρα πρὸς ἑκάστην τῶν ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΘΚ, ἡ δὲ ΓΔ τῇ ΘΕ, καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΔΑ βάσει τῇ ΚΕ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ΚΖ, ΚΗ τῇ ΔΑ ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐπεὶ διπλῆ

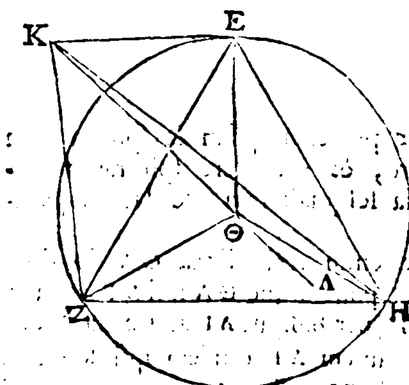
sexta pars circumferentiæ circuli: ideoque recta linea BE est latus hexagoni, & [per 15. 4.] æqualis ipsi ΔE: quæ est ex circuli centro. quoniam vero AB est dupla ipsius ΔE, erit [per cor. 20.6.] quadratum ex AE quadrati ex ΔE, hoc est quadrati ex BE, quadruplum. quadratum autem ex AE [per 47. 1.& 31.3.] est æquale quadratis ex AB, BE: ergo quadrata ex AB, BE quadrupla sunt quadrati ex BE; unde dividendo, erit quadratum ex AB quadrati ex BE triplum. at vero est BE æqualis ΔE: quadratum igitur ex AB triplum est quadrati ex ΔE.

Ergo trianguli latus est potentia triplum ejus quæ ex circuli centro. quod erat demonstrandum.

PROP. XIII. PROBL.

Pyramidem constituere, & sphæra comprehendere data; atque etiam demonstrare quod sphæræ diameter est potentia sesquialtera lateris ipsius pyramidis.

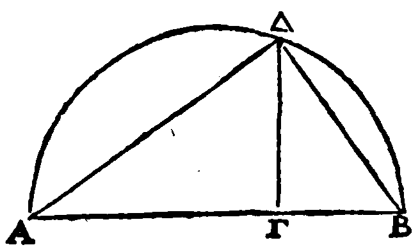
Exponatur enim datæ sphæræ diameter AB, & [per 9.6.] secetur in Γ, ita ut AΓ ipsius BΓ sit dupla; describaturque super AB semicirculus

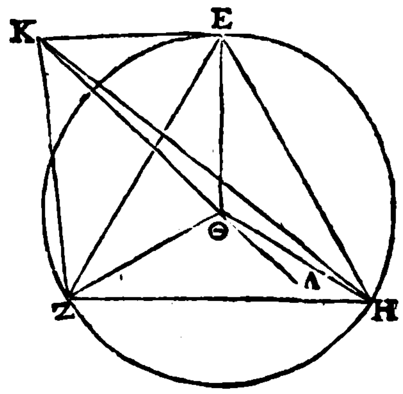


AΔB, & à puncto Γ ipsi AB ad rectos angulos ducatur ΓΔ, & ΔA jungatur: exponatur præterea circulus EZH habens eam quæ ex centro æqualem ipsi ΔΓ, in quo describatur [per 2.4.] triangulum æquilaterum EZH; sumaturque centrum circuli Θ, & jungantur EΘ, ΘZ, ΘH; atque à puncto Θ ipsi plano circuli EZH ad rectos angulos erigatur ΘK; & auferatur ΘK ipsi AΓ æqualis, & KE, KZ, KH jungantur. quoniam igitur ΘK recta est ad planum circuli EZH; & [per 3. def. 11.] ad omnes rectas lineas, quæ in eodem circuli plano existentes ipsam contingunt, rectos angulos faciet. contingit autem ipsam unaquæque linearum ΘE, ΘZ, ΘH: ergo ΘK ad unamquamque ipsarum ΘE, ΘZ, ΘH est perpendicularis. quoniam autem AΓ est æqualis ΘK, & ΓΔ ipsi ΘE, & rectos angulos continent; erit [per 4. 1.] basis ΔA æqualis basi KE. eadem ratione & utravis KZ, KH ipsi ΔA est æqualis: tres igitur KE, KZ, KH inter se æquales sunt. & quoniam dupla

pla est ΑΓ ipsius ΓΒ, erit ΑΒ ipsius ΒΓ tripla. ut autem ΑΒ ad ΒΓ ita quadratum ex ΑΔ ad quadratum ex ΔΓ, ut deinceps [in lem. seq.] demonstrabitur: triplum igitur est quadratum ex ΑΔ quadrati ex ΔΓ. est autem [per 12.13] & quadratum ex ΖΕ quadrati ex ΕΘ triplum, atque est ΔΓ æqualis ΕΘ: ergo & ΔΑ ipsi ΕΖ est æqualis. sed ΔΑ ostensa est æqualis unicuique ipsarum ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ: & igitur unaquæque ipsarum ΕΖ, ΖΗ, ΗΕ unicuique ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ est æqualis: quare æquilatera sunt quatuor triangula ΕΖΗ, ΚΕΖ, ΚΖΗ, ΚΗΕ: pyramis igitur constituta est ex quatuor triangulis æqualibus & æquilateris, cujus basis quidem est triangulum ΕΖΗ vertex autem Κ punctum.

ἔστω ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ, τριπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ, ὡς ἑξῆς δειχθήσεται· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΘ τριπλάσιον, καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΔΓ τῇ ΕΘ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΔΑ τῇ ΕΖ. ἀλλὰ ἡ ΔΑ ἑκάστῃ τῶν ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΕ ἑκάστῃ τῶν ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ ἐστιν ἴση· ἰσόπλευρα ἄρα ἐστὶ τὰ τέσσαρα τρίγωνα τὰ ΕΖΗ, ΚΕΖ, ΚΖΗ, ΚΗΕ· πυραμὶς ἄρα συνίσταται ἐκ τεσσάρων τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΖΗ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον.





Oportet præterea ipsam & sphæra data comprehendere, & ostendere sphæræ diametrum potentia sesquialteram esse lateris pyramidis.

Producatur enim recta linea ΘΛ in directum ipsi ΘΚ; ponaturque ΘΛ ipsi ΒΓ æqualis. & quoniam est [per 8.6.] ut ΑΓ ad ΓΔ ita ΓΔ ad ΓΒ; æqualis autem ΑΓ quidem ipsi ΚΘ, & ΓΔ ipsi ΘΕ, & ΓΒ ipsi ΘΛ; erit ut ΚΘ ad ΘΕ ita ΕΘ ad ΘΛ: rectangulum igitur sub ΚΘ, ΘΛ est æquale quadrato ex ΕΘ. atque est rectus uterque angulorum ΚΘΕ, ΕΘΛ: ergo super ΚΛ descriptus semicirculus per punctum Ε transibit. nam si jungamus ΕΛ, angulus ΛΕΚ fiet rectus, cum triangulum ΕΛΚ æquiangulum sit unicuique triangulorum ΕΛΘ, ΕΚΘ. si igitur manente ΚΛ semicirculus conversus in eundem rursus locum restituatur à quo cœpit moveri, etiam per puncta Ζ, Η transibit, junctis ΖΛ, ΛΗ, & rectis similiter factis ad puncta Ζ, Η angulis; atque pyramis comprehendetur data sphæra, etenim sphæræ diameter ΑΚ est æqualis diametro datæ sphæræ ΑΒ, quoniam ipsi quidem ΑΓ ponitur æqualis ΚΘ, ipsi vero ΓΒ æqualis ΘΛ.

Dico denique sphæræ diametrum potentia sesquialteram esse lateris pyramidis.

Quoniam enim ΑΓ [per constr.] dupla est ipsius ΓΒ, erit ΑΒ ipsius ΒΓ tripla: ergo convertendo, ΑΒ sesquialtera est ipsius ΑΓ. ut autem ΒΑ ad ΑΓ ita est quadratum ex ΒΑ

ΔΕΙ δὴ αὐτὴν καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῆς ΘΚ εὐθεῖα ἡ ΘΚ, καὶ κείσθω τῇ ΒΓ ἴση ἡ ΘΛ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΓΒ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΚΘ, ἡ δὲ ΓΔ τῇ ΘΕ, ἡ δὲ ΓΒ τῇ ΘΛ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΛ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΚΘ, ΘΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ. καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΚΘΕ, ΕΘΛ γωνιῶν· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΚΛ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ε. ἐπειδήπερ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΕΛ, ὀρθὴ γίνεται ἡ ὑπὸ ΛΕΚ γωνία, διὰ τὸ ἰσογώνιον γίγνεσθαι τὸ ΕΛΚ τρίγωνον ἑκατέρῳ τῶν ΕΛΘ, ΕΘΚ τριγώνων. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς ΚΛ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τῶν Ζ, Η σημείων, ἐπιζευγνυμένων τῶν ΖΛ, ΛΗ, καὶ ὀρθῶν ὁμοίως γινομένων τῶν πρὸς τοῖς Ζ, Η γωνιῶν· καὶ ἔσται ἡ πυραμὶς σφαίρᾳ περιειλημμένη τῇ δοθείσῃ, ἡ γὰρ ΚΛ τῆς σφαίρας διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ τῇ ΑΒ ἐπειδήπερ τῇ μὲν ΑΓ ἴση κεῖται ἡ ΚΘ, τῇ δὲ ΓΒ ἡ ΘΛ.

ΛΕΓΩ δὴ ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ, τριπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἡμιολία ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΑΓ. ὡς δὲ ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ

πρὸς

πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ, ἐπειδήπερ ἐπιζευγνυμένης τῆς ΒΔ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΓ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΔΑΒ, ΔΑΓ τριγώνων, καὶ εἶναι ὡς τὴν πρώτην πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΒΑ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ ΑΔ ἴση τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος.

Ἡ ἄρα τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

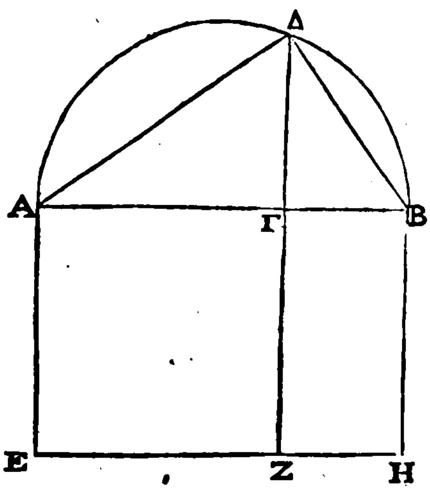
ad quadratum ex ΑΔ, quia, juncta ΒΔ, est [per 8. 6.] ut ΒΑ ad ΑΔ ita ΔΑ ad ΑΓ, ob similitudinem triangulorum ΔΑΒ, ΔΑΓ, & quod [per cor. 20. 6.] ut prima ad tertiam ita quadratum ex prima ad quadratum ex secunda: ergo quadratum ex ΒΑ sesquialterum est quadrati ex ΑΔ. sed est ΒΑ quidem datæ sphæræ diameter, ΑΔ vero æqualis lateri pyramidis.

Sphæræ igitur diameter potentia sesquialtera est lateris pyramidis. quod erat demonstrandum.

ΛΗΜΜΑ.

Δεικτέον ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ.

Ἐκκείσθω γὰρ ἡ τοῦ ἡμικυκλίου καταγραφή, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον τὸ ΕΓ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΖΒ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ ΔΑΒ τρίγωνον τῷ ΔΑΓ τριγώνῳ, ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΕΒ πρὸς τὸ ΒΖ, καί ἐστι τὸ μὲν ΕΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΕΑ τῇ ΑΓ, τὸ δὲ ΒΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΓ, ἡ γὰρ ΔΓ κάθετος τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν ΑΓ, ΓΒ μέση ἀνάλογόν ἐστι, διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ ΑΔΒ· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



LEMMA.

Demonstrandum autem est, ut ΑΒ ad ΒΓ ita esse quadratum ex ΑΔ ad quadratum ex ΔΓ.

Exponatur enim semicirculi figura, jungaturque ΔΒ, & ex ΑΓ describatur quadratum ΕΓ, & parallelogrammum ΖΒ compleatur. quoniam igitur est [per 4. 6.] ut ΒΑ ad ΑΔ ita ΔΑ ad ΑΓ, propterea quod triangulum ΔΑΒ æquiangulum est triangulo ΔΑΓ; erit [per 17.6.] rectangulum sub ΒΑ, ΑΓ quadrato ex ΑΔ æquale. quoniam vero est [per 1.6.] ut ΑΒ ad ΒΓ ita parallelogrammum ΕΒ ad parallelogrammum ΒΖ; atque est parallelogrammum quidem ΕΒ quod continetur sub ΒΑ, ΑΓ, est enim ΕΑ æqualis ΑΓ; parallelogrammum vero ΒΖ æquale est ei quod sub ΑΓ, ΓΒ continetur: erit ut ΑΒ ad ΒΓ ita rectangulum contentum sub ΒΑ, ΑΓ ad contentum sub ΑΓ, ΓΒ. est autem rectangulum sub ΒΑ, ΑΓ æquale quadrato ex ΑΔ, & rectangulum sub ΑΓ, ΓΒ quadrato ex ΔΓ æquale; perpendicularis enim ΔΓ [per 1. 6.] media est proportionalis inter basis portiones ΑΓ, ΓΒ, cum angulus ΑΔΒ sit rectus: quare ut ΑΒ ad ΒΓ ita quadratum ex ΑΔ ad quadratum ex ΔΓ. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδʹ.

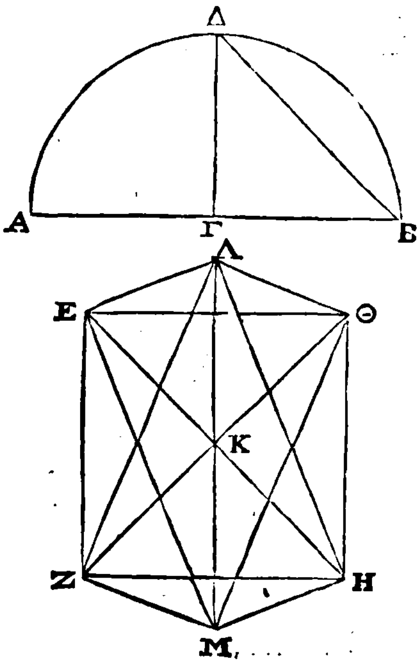
Ὀκτάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν ᾗ καὶ τὴν πυραμίδα· καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΔ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ ἴσην ἔχον ἑκάστην τῶν πλευρῶν τῇ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΖ, ΕΗ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Κ σημείου τῷ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα ἡ ΚΛ,

Prop. XIV. Probl.

Octaedrum constituere, & eadem sphæra comprehendere qua & pyramidem: atque demonstrare sphæræ diametrum potentia duplam esse lateris ipsius octaedri.

Exponatur datæ sphæræ diameter ΑΒ, & in Γ bifariam secetur, describaturque super ΑΒ semicirculus ΑΔΒ, & à puncto Γ ipsi ΑΒ ad rectos angulos ducatur ΓΔ, & ΔΒ jungatur; & exponatur quadratum ΕΖΗΘ habens unumquodque latus æquale ipsi ΒΔ, & junctis ΘΖ, ΕΗ erigatur à puncto Κ ipsi plano quadrati ΕΖΗΘ ad rectos angulos ΚΛ, producaturque ad alteras partes plani ut KM, & auferatur ab utraque rectarum linearum KΛ, KM uni ipsarum KE, KZ, KH, KΘ æqualis utraque KΛ, KM, & jungantur ΛE, ΛZ, ΛH, ΛΘ, ME, MZ, MH, MΘ. quoniam igitur KE est æqualis KΘ, atque est angulus EKΘ rectus; erit [per 47. 1.] quadratum ex ΘE quadrati ex EK duplum. rursus, quoniam ΛK est æqualis KE, & angulus ΛKE rectus; erit quadratum ex EΛ duplum quadrati ex EK. ostensum est autem & quadratum ex ΘE quadrati ex EK duplum: ergo quadratum ex ΛE æquale est quadrato ex EΘ, & ΛE ipsi EΘ æqualis. eadem ratione & ΛΘ est æqualis ΘE: æquilaterum igitur est ΛEΘ triangulum. similiter ostendemus & unumquodque reliquorum triangulorum, quorum bases sunt latera quadrati EZHΘ vertices autem Λ, M puncta, æquilaterum esse: octaedrum igitur constitutum est, quod octo triangulis æquilateris continetur.



OPORTET vero ipsum & data sphæra comprehendere; & demonstrare sphæræ diametrum potentia duplam esse lateris octaedri.

Quoniam enim tres rectæ lineæ ΛK, KM, KE inter se æquales sunt, semicirculus super ΛM descriptus etiam per punctum E transibit. præterea si manente ΛM, conversus semicirculus in eundem locum restituatur à quo cœpit moveri, transibit etiam per puncta Z, H, Θ; atque erit octaedrum sphæra comprehensum. dico etiam ipsum comprehensum esse data sphæra. quoniam enim ΛK est æqualis KM, communis autem KE, & angulos æquales continent; erit [per 4. 1.] basis ΛE basi EM æqualis. & quoniam [per 31. 3.] rectus est ΛEM angulus, est enim in semicirculo; erit [per 47. 1.] quadratum ex ΛM quadrati ex ΛE duplum. rursus, quoniam [per constr.] AΓ est æqualis ΓB; erit AB dupla ipsius BΓ. ut autem AB ad BΓ ita [per 8. & 20. 6.] quadratum ex AB ad quadratum ex BΔ: duplum igitur est quadratum ex AB quadrati ex BΔ. ostensum autem est & quadratum ex ΛM quadrati ex ΛE duplum. & est quadratum ex BΔ æquale quadrato ex ΛE; posita est enim EΘ ipsi ΔB æqualis: ergo quadratum ex AB est æquale quadrato ex ex ΛM; ac propterea ipsa AB est æqualis ΛM. est autem AB diameter datæ sphæræ: quare ΛM est æqualis datæ sphæræ diametro.

Octaedrum igitur comprehensum est data sphæra: & simul demonstratum est sphæræ diametrum potentia duplam esse lateris ipsius octaedri. quod erat faciendum.

καὶ διήχθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τοῦ ἐπιπέδου ὡς ἡ KM, καὶ ἀφῃρήσθω ἀφ' ἑκατέρας τῶν KΛ, KM μιᾷ τῶν KE, KZ, KH, KΘ ἴση ἑκατέρα τῶν KΛ, KM, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛE, ΛZ, ΛH, ΛΘ, ME, MZ, MH, MΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ KE τῇ KΘ, καὶ ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ EKΘ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΘE διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς EK. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΛK τῇ KE, καὶ ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΛKE γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς EΛ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς EK. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘE διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς EK· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΛE ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EΘ· ἴση ἄρα ἡ ΛE τῇ EΘ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΛΘ τῇ ΘE ἐστιν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛEΘ τρίγωνον. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ τοῦ EZHΘ τετραγώνου πλευραί, κορυφαὶ δὲ τὰ Λ, M σημεῖα, ἰσόπλευρόν ἐστιν· ὀκτάεδρον ἄρα συνίσταται, ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

ΔΕΙ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς.

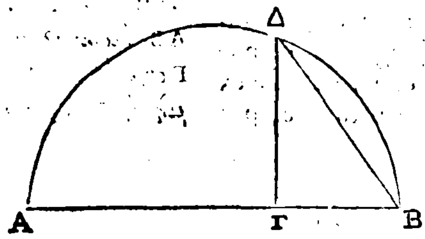
Ἐπεὶ γὰρ αἱ τρεῖς αἱ ΛK, KM, KE ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΛM γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ E. καὶ διὰ τὰ αὐτά, ἐὰν μενούσης τῆς ΛM περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τῶν Z, H, Θ σημείων, καὶ ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένον τὸ ὀκτάεδρον. λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΛK τῇ KM, κοινὴ δὲ ἡ KE, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ ΛE βάσει τῇ EM ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΛEM γωνία, ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΛM διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΛE. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AΓ τῇ ΓB, διπλασία ἐστὶν ἡ AB τῆς BΓ. ὡς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν BΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔB· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς BΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛM διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΛE. καὶ ἐστιν ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς BΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΛE· ἴση γὰρ κεῖται ἡ EΘ τῇ ΔB. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τῷ ἀπὸ τῆς ΛM· ἴση ἄρα ἡ AB τῇ ΛM. καὶ ἐστιν ἡ AB ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· ἡ ΛM ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ.

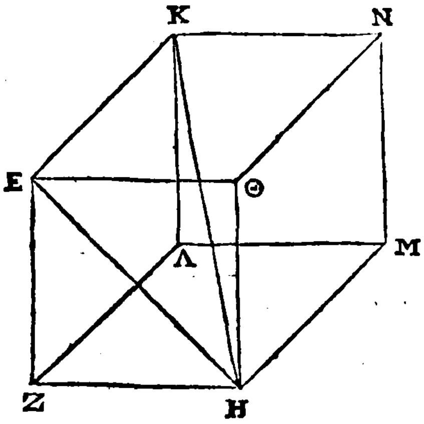
Περιείληπται ἄρα τὸ ὀκτάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ· καὶ συναποδέδεικται ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Κύβον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν ᾗ καὶ τὰ πρότερα, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλῆ ἐστι τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς.

Εκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ ὥστε διπλῆν εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ ἴσην ἔχον ἑκάστην πλευρὰν τῇ ΔΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ τῷ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ, καὶ ἀφῃρήσθωσαν ἀπὸ ἑκάστης τῶν ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ μιᾷ τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ ἴση ἑκάστη τῶν ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΚ· κύβος ἄρα συνίσταται ὁ ΖΝ ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενος. δεῖ δὴ αὐτὸν καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου.





Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΚΗ, ΕΗ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΚΕΗ γωνία, διὰ τὸ καὶ τὴν ΚΕ ὀρθὴν εἶναι πρὸς τὸ ΕΗ ἐπίπεδον δηλαδὴ καὶ πρὸς τὴν ΕΗ εὐθεῖαν, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΚΗ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ΖΗ ὀρθή ἐστιν πρὸς ἑκατέραν τῶν ΖΛ, ΖΕ, καὶ πρὸς τὸ ΖΚ ἄρα ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν ἡ ΖΗ· ὥστε καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν ΖΚ, ἡ ΖΗ ὀρθὴ ἔσται καὶ πρὸς τὴν ΖΚ· καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τὸ ἐπὶ τῆς ΗΚ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ζ. ὁμοίως δὲ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν τοῦ κύβου σημείων ἥξει. ἐὰν δή, μενούσης τῆς ΚΗ, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένος ὁ κύβος. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΖ τῇ ΖΕ, καὶ ἐστιν ὀρθὴ ἡ πρὸς τὸ Ζ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ διπλάσιον ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΗΕ, ΕΚ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ. καὶ ἐπεὶ τριπλασίων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ, ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΕ τριπλάσιον. καὶ κεῖται ἴση τῇ ΒΔ ἡ ΚΕ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΗ

PROP. XV. PROBL.

Cubum constituere & eadem sphæra comprehendere qua & priores; atque demonstrare sphæræ diametrum lateris potentia triplam esse.

Exponatur enim datæ sphæræ diameter AB, & secetur in Γ, ita ut AΓ ipsius ΓB sit dupla; describaturque super AB semicirculus AΔB, & à puncto Γ ipsi AB ad rectos angulos ducatur ΓΔ, & ΔB jungatur; deinde exponatur quadratum EZHΘ, habens unumquodque latus æquale ipsi ΔB; & à punctis E, Z, H, Θ quadrati EZHΘ plano ad rectos angulos ducantur EK, ZΛ, HM, ΘN, & auferatur insuper ab unaquaque rectarum linearum EK, ZΛ, HM, ΘN uni ipsarum EZ, ZH, HΘ, ΘE æqualis unaquæque EK, ZΛ, HM, ΘN; & KΛ, ΛM, MN, NK jungantur: cubus igitur constitutus est ZN, qui sex quadratis æqualibus continetur. oportet vero ipsum & sphæra data comprehendere, & demonstrare sphæræ diametrum potentia triplam esse lateris ipsius cubi.

Jungantur enim KH, EH. & quoniam rectus est KEH angulus, propterea quod & KE perpendicularis sit ad EH, planum videlicet & [per 3. def. 11.] ad rectam lineam EH; semicirculus super KH descriptus [per 31. 3.] per punctum E transibit. rursus, quoniam ZH perpendicularis est ad utramque ipsarum ZΛ, ZE; & [per 4. 11.] ad ZK planum est perpendicularis: quare si jungamus ZK, ipsa ZH ad ZK erit perpendicularis; ac propterea rursus super HK descriptus semicirculus transibit per punctum Z. similiter autem & per reliqua cubi puncta transibit. si igitur, manente KH, conversus semicirculus in eundem rursus locum restituatur, à quo cœpit moveri, erit cubus sphæra comprehensus. Dico ipsum & data sphæra comprehendi. quoniam enim HZ est æqualis ZE, atque est rectus qui ad Z angulus; erit [per 47. 1.] quadratum ex EH quadrati ex EZ duplum. æqualis autem est EZ ipsi EK; quadratum igitur ex EH duplum est quadrati ex EK: ergo quadrata ex HE, EK, hoc est [per 47. 1.] quadratum ex HK, triplum est quadrati ex EK. & quoniam [per constr.] AB est ipsius BΓ tripla, & [per 8. & 20. 6.] ut AB ad BΓ ita quadratum ex AB ad quadratum ex BΔ; erit quadratum ex AB quadrati ex BΔ triplum. ostensum est autem & quadratum ex HK triplum quadrati ex KE, & posita est KE ipsi BΔ æqualis: ergo & KH est æqualis

æqualis A B. at vero A B est datæ sphæræ diameter: quare & K H æqualis erit diametro datæ sphæræ.

Cubus igitur data sphæra est comprehensus; & simul demonstratum est sphæræ diametrum lateris cubi potentia triplam esse. quod erat faciendum.

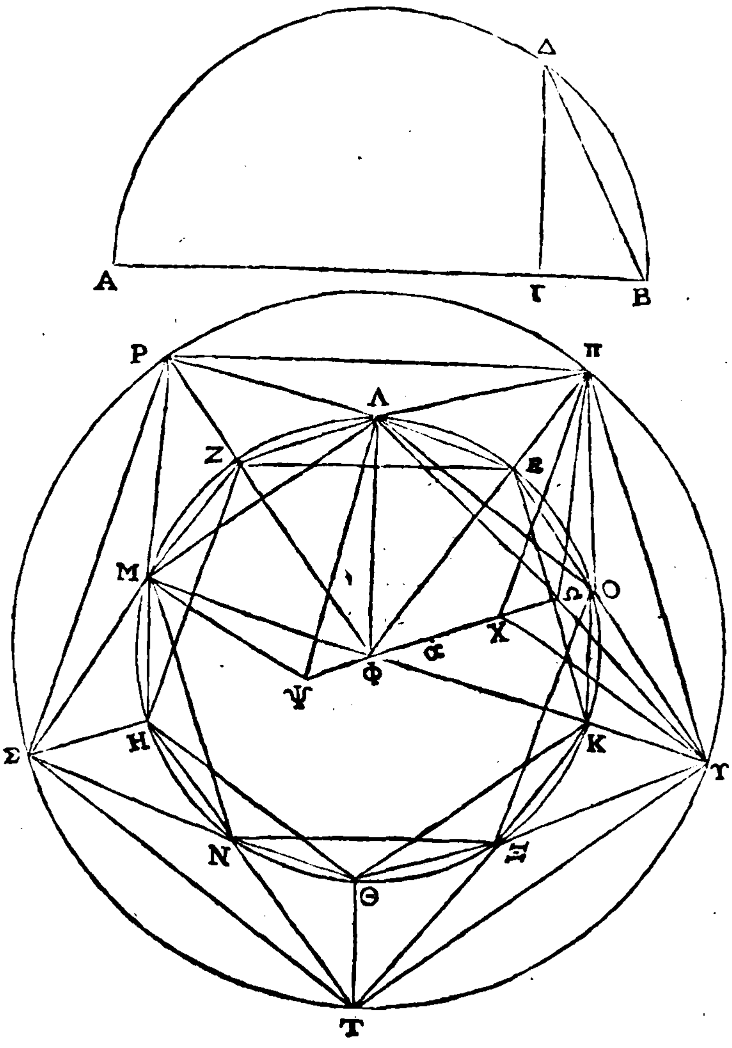
τῇ ΑΒ. καὶ ἔστιν ἡ ΑΒ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· καὶ ἡ ΚΗ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ.

Τῇ δοθείσῃ ἄρα σφαίρᾳ περιείληπται ὁ κύβος· καὶ συναποδέδεικται ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XVI. Probl.

Icosaedrum constituere & eadem sphæra comprehendere qua & prædictas figuras; atque etiam demonstrare icosaedri latus irrationalem esse lineam quæ minor appellatur.

Exponatur datæ sphæræ diameter A B, seceturque in Γ, ita ut A Γ ipsius Γ B sit quadrupla; & super A B descripto semicirculo A Δ B ducatur à puncto Γ ipsi A B ad rectos angulos recta linea Γ Δ, & Δ B jungatur; deinde exponatur circulus E Z H Θ K, cujus ea quæ ex centro sit æqualis ipsi Δ B; describaturque [per 11.4.] in circulo E Z H Θ K pentagonum æquilaterum & æquiangulum E Z H Θ K; præterea [per 30 3.] circumferentiæ E Z, Z H, H Θ, Θ K, K E bifariam secentur in Λ, M, N, Ξ, O punctis; junganturque E Λ, Λ Z, Z M, M H, H N, N Θ, Θ Ξ, Ξ K, K O, O E; & similiter Λ M, M N, N Ξ, Ξ O, O Λ: æquilaterum igitur est Λ M N Ξ O pentagonum; & recta linea E O est decagoni latus. porro à punctis E, Z, H, Θ, K ipsi plano circuli [per 12.11.] ad rectos angulos erigantur E Π, Z P, H Σ, Θ T, K T æquales quidem ei quæ ex centro circuli E Z H Θ K, & jungantur Π P, P Σ, Σ T, T T, T Π, Π Λ, Λ P, P M, M Σ, Σ N, N T, T Ξ, Ξ T, T O, O Π. quoniam igitur utraque ipsarum E Π, K T eidem plano est ad rectos angulos: erit [per 6.11.] E Π ipsi K T parallela. sed est ipsi quoque æqualis; quæ autem æquales & parallelas ad easdem



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛʹ.

Εἰκοσάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν ᾗ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα· καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, ὥστε τετραπλῆν εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ ΕΖΗΘΚ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔστω τῇ ΔΒ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ ΕΖΗΘΚ, καὶ τετμήσθωσαν αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΛ, ΛΖ, ΖΜ, ΜΗ, ΗΝ, ΝΘ, ΘΞ, ΞΚ, ΚΟ, ΟΕ, καὶ ὁμοίως ΛΜ, ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛΜΝΞΟ πεντάγωνον, καὶ δεκαγώνου ἡ ΕΟ εὐθεῖα. καὶ ἀνεστάτωσαν ἀπὸ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ, Κ σημείων τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαι αἱ ΕΠ, ΖΡ, ΗΣ, ΘΤ, ΚΤ ἴσαι οὖσαι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΤ, ΤΠ, ΠΛ, ΛΡ, ΡΜ, ΜΣ, ΣΝ, ΝΤ, ΤΞ, ΞΤ, ΤΟ, ΟΠ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΕΠ, ΚΤ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΠ τῇ ΚΤ. ἔστι δὲ αὐτῇ καὶ ἴση, αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ

αὐτὰ

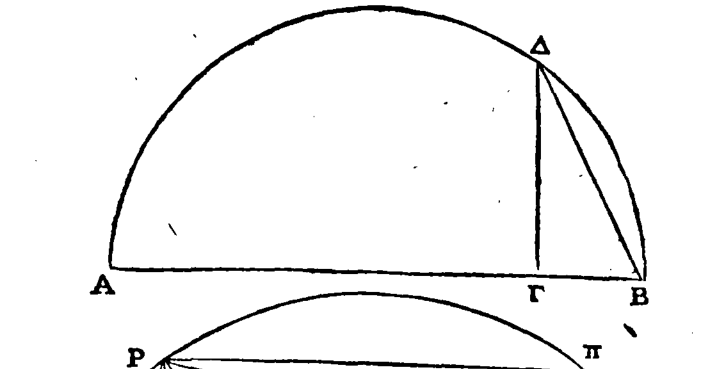
αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· ἡ ΠΥ ἄρα τῇ ΕΚ ἴση τέ ἐστι καὶ παράλληλος. πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ ΕΚ· πενταγώνου ἄρα ἰσοπλεύρου καὶ ἡ ΠΥ, τοῦ εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον περιγραφομένου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ πενταγώνου ἐστὶ ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον ἐγγραφομένου· ἰσόπλευρον ἄρα καὶ τὸ ΠΡΣΤΥ πεντάγωνον. καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μέν ἐστιν ἡ ΠΕ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΕΟ, καὶ ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΠΕΟ· πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΟ· ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΟΥ πενταγώνου ἐστὶ πλευρά, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΠΥ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΟΥ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν ΠΛΡ, ΡΜΣ, ΣΝΤ, ΤΞΥ τριγώνων ἰσόπλευρόν ἐστι. καὶ ἐπεὶ πενταγώνου ἐδείχθη ἑκατέρα τῶν ΠΛ, ΠΟ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΟ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΛΟ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν ΛΡΜ, ΜΣΝ, ΝΤΞ, ΞΥΟ τριγώνων ἰσόπλευρόν ἐστιν. εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ ΕΖΗΘΚ τὸ Φ σημεῖον. καὶ ἀπὸ τοῦ Φ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτω ἡ ΦΩ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ὡς ἡ ΦΨ, καὶ ἀφῃρήσθω ἑξαγώνου μὲν ἡ ΦΧ, δεκαγώνου δὲ ἑκατέρα τῶν ΦΨ, ΧΩ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΠΩ, ΠΧ, ΥΩ, ΕΦ, ΛΦ, ΛΨ, ΨΜ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΦΧ, ΠΕ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΦΧ τῇ ΠΕ. εἰσὶ δὲ καὶ ἴσαι· καὶ αἱ ΕΦ, ΠΧ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ἑξαγώνου δὲ ἡ ΕΦ· ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ ΠΧ. καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μέν ἐστιν ἡ ΠΧ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΠΧΩ γωνία· πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΩ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΥΩ πενταγώνου ἐστίν, ἐπειδήπερ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς ΦΚ, ΧΥ ἴσαι καὶ ἀπεναντίον ἔσονται, καὶ ἔστιν ἡ ΦΚ ἐκ τοῦ κέντρου οὖσα ἑξαγώνου· ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ ΧΥ. δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΥΧΩ· πενταγώνου ἄρα ἡ ΥΩ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΠΥ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα τὸ ΠΥΩ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ εὐθεῖαι κορυφὴ δὲ τὸ Ω σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστιν. πάλιν, ἐπεὶ ἑξαγώνου μὲν ἡ ΦΛ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΦΨ, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΛΦΨ γωνία· πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΨ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΜΨ οὖσαν ἑξαγώνου, συνάγεται καὶ ἡ ΜΨ πενταγώνου. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΜ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα τὸ ΛΜΨ τρίγωνον. ὁμοίως δειχθήσεται ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ κορυφὴ δὲ τὸ Ψ σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστιν· συνέσταται ἄρα εἰκοσάεδρον ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

ΔΕΙ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

partes conjungunt rectæ lineæ & ipsæ [per 33. I.] æquales & parallelæ sunt: ergo ΠΥ ipsi ΕΚ æqualis est & parallela. sed ΕΚ est latus pentagoni æquilateri; ergo & ΠΥ est pentagoni æquilateri latus in circulo ΕΖΗΘΚ descripti. eadem ratione & unaquæque ipsarum ΡΠ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ est latus pentagoni æquilateri in eodem circulo descripti: æquilaterum igitur est ΠΡΣΤΥ pentagonum. & quoniam [per constr.] ΠΕ est hexagoni quidem latus, ΕΟ vero latus decagoni, atque est rectus ΠΕΟ angulus; erit ΠΟ latus pentagoni. etenim [per 10. 13.] latus pentagoni potest & hexagoni & decagoni latus in eodem circulo descriptorum. eadem ratione & ΟΥ est pentagoni latus; est autem & ΠΥ latus pentagoni: ergo ΠΟΥ est triangulum æquilaterum. ob eandem quoque causam unumquodque triangulorum ΠΛΡ, ΡΜΣ, ΣΝΤ, ΤΞΥ est æquilaterum. quoniam igitur utraque ipsarum ΠΛ, ΠΟ ostensa est latus pentagoni, atque est ΛΟ latus pentagoni; erit ΠΛΟ æquilaterum triangulum. eadem ratione & unumquodque triangulorum ΛΡΜ, ΜΣΝ, ΝΤΞ, ΞΥΟ æquilaterum est. sumatur [per I. 3.] centrum circuli ΕΖΗΘΚ, quod sit punctum Φ; & à puncto Φ ipsi circuli plano ad rectos angulos erigatur ΦΩ, & ad alteras partes producatur, ut ΦΨ; dein auferatur hexagoni quidem latus ΦΧ, decagoni vero utraque ipsarum ΦΨ, ΧΩ; & jungantur ΠΩ, ΠΧ, ΥΩ, ΕΦ, ΛΦ, ΛΨ, ΨΜ. quoniam igitur utraque ipsarum ΦΧ, ΠΕ circuli plano est ad rectos angulos; erit [per 6. II.] ΦΧ ipsi ΠΕ parallela. sunt autem [per constr.] & æquales: ergo [per 33. I.] ΕΦ, ΠΧ & æquales sunt & parallelæ. verum ΕΦ est hexagoni latus: hexagoni igitur latus est & ΠΧ. quoniam igitur hexagoni quidem latus est ΠΧ, decagoni vero ΧΩ, & rectus ΠΧΩ angulus; erit [per 10.13.] ΠΩ latus pentagoni. eadem ratione & ΥΩ est pentagoni latus: quoniam si jungamus ΦΚ, ΧΥ, & æquales & oppositæ sunt, atque est ΦΚ ex centro circuli, videlicet hexagoni latus: ergo & ΧΥ est latus hexagoni. decagoni autem latus est ΧΩ, & rectus angulus est ΥΧΩ: pentagoni igitur latus est ΥΩ. sed est etiam ΠΥ latus pentagoni: quare æquilaterum est ΠΥΩ triangulum. eadem ratione & æquilaterum est unumquodque reliquorum triangulorum, quorum bases sunt ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ rectæ lineæ, vertex autem Ω punctum. rursus, quoniam hexagoni latus est ΦΛ, decagoni vero ΦΨ, & angulus ΛΦΨ rectus; erit [per 10.13.] ΛΨ latus pentagoni. eadem ratione si jungamus ΜΦ, quæ est latus hexagoni, concludetur & ΜΨ pentagoni latus esse. est autem & ΛΜ pentagoni latus: æquilaterum igitur est ΛΜΨ triangulum. similiter ostendetur & æquilaterum esse unumquodque reliquorum triangulorum, quorum bases sunt ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ, vertex autem Ψ punctum: constitutum igitur est icosaedrum viginti triangulis æquilateris contentum.

Oportet vero ipsum sphæra data comprehendere, & demonstrare icosaedri latus esse lineam irrationalem quæ minor appellatur.

Quoniam enim hexagoni latus est Φ X, decagoni vero X Ω, recta linea Φ Ω [per 9. 13.] extrema ac media ratione secta est in X, & Φ X est major portio: est igitur [per 3. def. 6.] ut Ω Φ ad Φ X ita Φ X ad X Ω. atque [per constr.] est Φ X ipsi Φ Λ æqualis, & X Ω ipsi Φ Ψ: quare ut Ω Φ ad Φ Λ ita Φ Λ ad Φ Ψ. sunt autem anguli Ω Φ Λ, Λ Φ Ψ recti. si igitur jungamus rectam lineam Λ Ω, erit [per 6. 6.] Ψ Λ Ω rectus angulus ob similitudinem triangulorum Ψ Λ Φ, Φ Λ Ω: ergo [per 31. 3.] semicirculus super Ψ Ω descriptus etiam per Λ transibit. eadem ratione quoniam est ut Ω Φ ad Φ X ita Φ X ad X Ω, & æqualis est [per constr.] Ω Φ quidem ipsi Ψ X; Φ X vero ipsi X Π; erit ut Ψ X ad Π X ita Π X ad X Ω. ideoque si rursus jungamus Π Ψ, erit angulus qui ad Π rectus: semicirculus igitur descriptus super Ψ Ω transibit & per Π. quod si manente Ψ Ω conversus semicirculus in eundem rursus locum restituatur à quo cœpit moveri, etiam per Π & per reliqua icosaedri puncta transibit; atque erit icosaedrum sphæra comprehensum. Dico & ipsum data comprehendi. secetur enim Φ X bifariam in α. & quoniam recta linea Ω Φ extrema ac media ratione secta est in X, & Ω X est minor ipsius portio, ipsa Ω X assumens dimidiam majoris portionis, videlicet X α, quintuplum poterit [per 3. 13.] quadrati ejus quod à dimidia majoris portionis describitur: quadratum igitur ex Ω α quadrati ex α X quintuplum est. sed [per 3. 13.] ipsius quidem α Ω dupla est Ω Ψ; ipsius vero α X dupla X Φ: ergo quadratum ex Ω Ψ quintuplum est quadrati ex Φ X. & quoniam Α Γ quadrupla est ipsius Γ Β, erit Α Β ipsius Β Γ quintupla. ut autem Α Β ad Β Γ ita [per 8. & 20. 6.] quadratum ex Α Β ad quadratum ex Β Δ: quadratum igitur ex Α Β quadrati ex Β Δ est quintuplum. ostensum autem est & quadratum ex Ω Ψ quintu-



Ἐπειδὴ γὰρ ἑξαγώνου μὲν ἡ Φ Χ, δεκαγώνου δὲ ἡ Χ Ω· ἡ Φ Ω ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Χ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ Φ Χ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ω Φ πρὸς τὴν Φ Χ οὕτως ἡ Φ Χ πρὸς τὴν Χ Ω. ἴση δὲ ἡ μὲν Φ Χ τῇ Φ Λ, ἡ δὲ Χ Ω τῇ Φ Ψ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ω Φ πρὸς τὴν Φ Λ οὕτως ἡ Φ Λ πρὸς τὴν Φ Ψ. καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ Ω Φ Λ, Λ Φ Ψ γωνίαι· ἐὰν ἄρα ἐπιζεύξωμεν τὴν Λ Ω εὐθεῖαν, ὀρθὴ ἔσται ἡ ὑπὸ Ψ Λ Ω γωνία διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν Ψ Λ Φ, Φ Λ Ω τριγώνων· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς Ψ Ω γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Λ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Ω Φ πρὸς τὴν Φ Χ οὕτως ἡ Φ Χ πρὸς τὴν Χ Ω, ἴση δὲ ἡ μὲν Ω Φ τῇ Ψ Χ, ἡ δὲ Φ Χ τῇ Χ Π· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ψ Χ πρὸς τὴν Π Χ οὕτως ἡ Π Χ πρὸς τὴν Χ Ω. καὶ διὰ τοῦτο πάλιν ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν Π Ψ, ὀρθὴ ἔσται ἡ πρὸς τῷ Π γωνία· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς Ψ Ω γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Π. καὶ ἐὰν μενούσης τῆς Ψ Ω περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τοῦ Π καὶ τῶν λοιπῶν σημείων τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ ἔσται σφαίρα περιειλημμένον τὸ εἰκοσάεδρον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. τετμήσθω γὰρ ἡ Φ Χ δίχα κατὰ τὸ α. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ Ω Φ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Χ, καὶ τὸ ἔλασσον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ Ω Χ· ἡ ἄρα Ω Χ προσλαβοῦσα τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος τὴν Χ α πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ω α τοῦ ἀπὸ τῆς α Χ. καὶ ἔστι τῆς μὲν α Ω διπλῆ ἡ Ω Ψ, τῆς δὲ α Χ διπλῆ ἡ Χ Φ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ω Ψ τοῦ ἀπὸ τῆς Φ Χ. καὶ ἐπεὶ τετραπλασίων ἐστὶν ἡ Α Γ τῆς Γ Β, πενταπλασίων ἄρα ἡ Α Β τῆς Β Γ ἐστίν. ὡς δὲ ἡ Α Β πρὸς τὴν Β Γ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β Δ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α Β τοῦ ἀπὸ τῆς Β Δ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ω Ψ πεντα-

πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΦΧ, καὶ ἔστιν ἡ ΔΒ ἴση τῇ ΦΧ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ΕΖΗΘΚ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΨΩ. καὶ ἔστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· καὶ ἡ ΨΩ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ· τῇ ἄρα δοθείσῃ σφαίρᾳ περιείληπται τὸ εἰκοσάεδρον.

ΛΕΓΩ δὴ ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. ἐπεὶ γὰρ ῥητή ἐστιν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, καί ἐστι δυνάμει πενταπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου· ὥστε καὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ ῥητή ἐστιν. ἐὰν δὲ εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. ἡ δὲ τοῦ ΕΖΗΘΚ πενταγώνου πλευρὰ ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐστίν· ἡ ἄρα τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

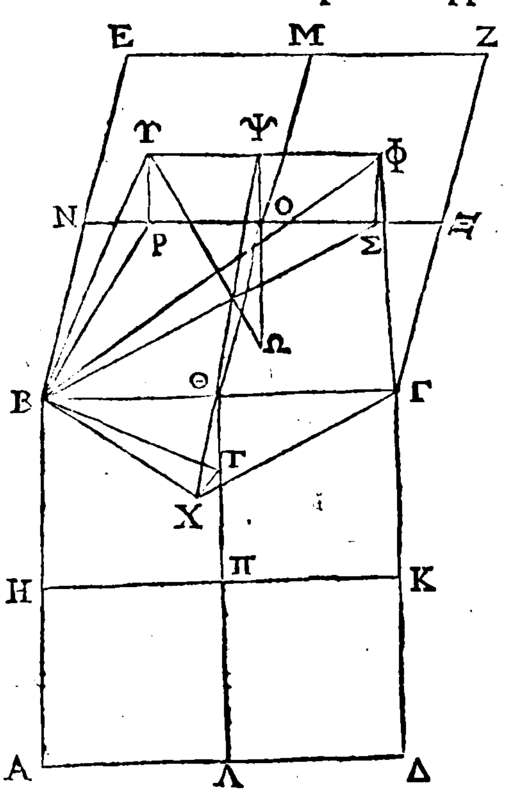
Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται, καὶ ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος σύγκειται ἔκ τε τῆς ἑξαγώνου καὶ τῶν δύο τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζʹ.

Δωδεκάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν ᾗ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα· καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Κείσθωσαν τοῦ προειρημένου κύβου δύο ἐπίπεδα πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις τὰ ΑΒΓΔ, ΓΒΕΖ, καὶ τετμήσθω ἑκάστη τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΕΖ, ΕΒ, ΖΓ πλευρῶν δίχα κατὰ τὰ Η, Θ, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ σημεῖα· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΚ, ΘΛ, ΜΘ, ΝΞ, καὶ τετμήσθωσαν αἱ ΝΟ, ΟΞ, ΘΠ εὐθεῖαι ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὰ Ρ, Σ, Τ σημεῖα, καὶ ἔστω αὐτῶν μείζονα τμήματα τὰ ΦΟ, ΟΣ, ΤΠ, καὶ ἀνεστάτωσαν ἀπὸ τῶν Ρ, Σ, Τ σημείων τοῖς τοῦ κύβου ἐπιπέδοις πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὰ ἐκτὸς μέρη τοῦ κύβου αἱ ΡΥ, ΣΦ, ΤΧ, καὶ κείσθωσαν ἴσαι ταῖς ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΥΒ, ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ, ΦΥ· λέγω ὅτι τὸ ΥΒΧΓΦ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, καὶ ἔτι ἰσογώνιόν ἐστιν. ἐπε-



plum quadrati ex ΦX, atque est ΔB æqualis ΦX; utraque enim ipsarum est [per constr.] æqualis ei quæ ex centro circuli EZHΘK: quare & AB est æqualis ΨΩ. est autem AB datæ sphæræ diameter; quare & ΨΩ erit æqnalis diametro datæ sphæræ: ergo icosaedrum comprehensum est data sphæra.

Dico insuper icosaedri latus esse irrationalem lineam quæ minor appellatur. quoniam enim sphæræ diameter est rationalis, atque est potentia quintupla ejus quæ ex centro EZHΘK circuli; erit [per 6. def. 10.] & quæ ex centro circuli EZHΘK rationalis: quare & diameter ipsius rationalis erit. si autem in circulo rationalem diametrum habente pentagonum æquilaterum describatur, erit [per 11.13.] latus pentagoni linea irrationalis quæ minor appellatur. sed pentagoni EZHΘK latus est latus icosaedri: ergo icosaedri latus est linea irrationalis quæ minor appellatur. quod erat demonstrandum.

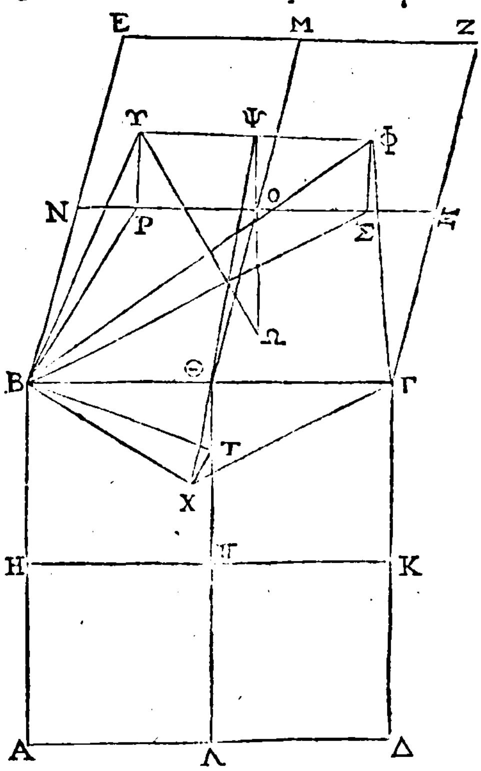
Corollarium.

Ex hoc manifestum est quod sphæræ diameter potentia quintupla est ejus quæ ex centro circuli, à quo icosaedrum describitur; & quod sphæræ diameter composita est ex latere hexagoni & duobus decagoni lateribus, quæ in eodem circulo describuntur.

Prop. XVII. Probl.

Dodecaedrum constituere, & eadem sphæra comprehendere qua & prædictas figuras; atque etiam demonstrare dodecaedri latus esse irrationalem quæ apotome appellatur.

Exponantur prædicti [ad 15.13.] cubi duo plana ad rectos angulos inter sese ABΓΔ, ΓBEZ, & secetur unumquodque ipsorum laterum AB, BΓ, ΓΔ, ΔA, EZ, EB, ZΓ bifariam in punctis H, Θ, K, Λ, M, N, Ξ, atque HK, ΘΛ, MΘ, NΞ jungantur; deinde secentur rectæ lineæ NO, OΞ, ΘΠ extrema ac media ratione in P, Σ, T punctis, sintque ipsorum majores portiones PO, OΣ, TΠ, & à punctis P, Σ, T ad rectos angulos cubi planis [per 12.11.] erigantur PΥ, ΣΦ, TX ad exteriores partes cubi, quæ ipsis PO, OΣ, TΠ æquales ponantur; junganturque ΥB, BX, XΓ, ΓΦ, ΦΥ: dico pentagonum ΥBXΓΦ æquilaterum esse, & in uno plano, & præterea æquiangulum. jungantur enim P B, Σ B, Φ B. & quoniam recta linea N O extrema ac media ratione secta est in P, & O P est major ipsius portio; erunt [per 4.13.] quadrata ex O N, N P tripla quadrati ex O P. æqualis autem est O N ipsi N B, & O P ipsi P Υ: quadrata igitur ex B N, N P quadrati ex P Υ sunt tripla. sed quadratis ex B N, N P æquale est [per 47. 1.] quadratum ex B P: ergo quadratum ex B P triplum est quadrati ex P Υ: quare quadrata ex B P, P Υ quadrati ex P Υ sunt quadrupla. quadratis autem ex B P, P Υ æquale est quadratum ex B Υ: ergo quadratnm ex B Υ quadruplum est quadrati ex Υ P: quare [per 20.6.] B Υ est dupla ipsius Υ P. verum Φ Υ ipsius Υ P dupla est, quoniam & P Σ est dupla ipsius P O, hoc est ipsius P Υ: ergo B Υ est æqualis Υ Φ. similiter demonstrabitur & unaquæque ipsarum B X, X Γ, Γ Φ utrivis B Υ, Υ Φ æqualis: æquilaterum igitur est B Υ Φ Γ X pentagonum. dico & in uno esse plano. ducatur enim à puncto O ipsa O Ψ utrique ipsarum P Υ, Σ Φ parallela ad exteriores cubi partes, & jungantur Ψ Θ, Θ X: dico Ψ Θ X rectam lineam esse. nam cum Θ Π extrema ac media ratione secta sit in T, & Π T sit major ipsius portio; erit [per 3. def. 6.] ut Θ Π ad Π T ita Π T ad T Θ. æqualis autem est Θ Π quidem ipsi Θ O; Π T vero utrivis ipsarum T X, O Ψ: est igitur ut Θ O ad O Ψ ita X T ad T Θ. sed [per 6. 11.] Θ O parallela est ipsi T X, quia utraque ipsarum plano B Δ est ad rectos angulos; T Θ vero est parallela O Ψ, quia utraque ipsarum est ad rectos angulos plano B Z. si autem duo triangula componantur ad unum angulum, ut Ψ O Θ, Θ T X, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita ut homologa latera etiam sint parallela, reliqua ipsorum latera [per 32. 6.] in directum sibi ipsis constituta erunt: ergo Ψ Θ est in directum ipsi Θ X. omnis autem recta linea est in uno plano: in uno igitur plano est Υ B X Γ Φ pentagonum. dico etiam & æquiangulum esse. quoniam enim recta linea N O extrema ac media ratione secta est in P, & O P est major portio: erit [per 5. 13.] ut utraque N O, O P ad O N ita N O ad O Σ. æqualis autem est P O ipsi O Σ: quare ut Σ N ad N O ita N O ad O Σ: ergo [per 3. def. 6.] N Σ extrema ac media ratione secta est in O, & major portio est N O: quadrata igitur ex N Σ, Σ O [per 4. 13.] quadrati ex O N sunt tripla. æqualis autem est O N ipsi N B, & O Σ ipsi Σ Φ: ergo quadrata ex N Σ, Σ Φ tripla



ζεύχθωσαν γὰρ αἱ P B, Σ B, Φ B. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ N O ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ P, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ O P· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν O N, N P τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς O P. ἴση δὲ ἡ μὲν O N τῇ N B, ἡ δὲ O P τῇ P Υ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν B N, N P τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς P Υ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν B N, N P τὸ ἀπὸ τῆς B P ἐστιν ἴσον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς B P τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς P Υ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν B P, P Υ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς P Υ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν B P, P Υ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς B Υ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς B Υ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς P Υ· διπλῆ ἄρα ἡ B Υ τῆς Υ P. ἔστι δὲ καὶ ἡ Φ Υ τῆς Υ P διπλῆ, ἐπειδήπερ καὶ ἡ P Σ τῆς P O, τουτέστι τῆς P Υ ἐστὶ διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ B Υ τῇ Υ Φ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν B X, X Γ, Γ Φ ἑκατέρᾳ τῶν B Υ, Υ Φ ἐστιν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ B Υ Φ Γ X πεντάγωνον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ O ἑκατέρᾳ τῶν P Υ, Σ Φ παράλληλος ἐπὶ τὰ ἐκτὸς μέρη τοῦ κύβου ἡ O Ψ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Ψ Θ, Θ X· λέγω ὅτι ἡ Ψ Θ X εὐθεῖά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ἡ Θ Π ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ T, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ Π T· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Θ Π πρὸς τὴν Π T οὕτως ἡ Π T πρὸς τὴν T Θ. ἴση δὲ ἡ μὲν Θ Π τῇ Θ O, ἡ δὲ Π T ἑκατέρᾳ τῶν T X, O Ψ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Θ O πρὸς τὴν O Ψ οὕτως ἡ X T πρὸς τὴν T Θ. καὶ ἔστι παράλληλος ἡ μὲν Θ O τῇ T X, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ B Δ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἡ δὲ T Θ τῇ O Ψ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ B Z ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἐὰν δὲ δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν (ὡς τὰ Ψ O Θ, Θ T X) τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ εὐθεῖαι ἐπ᾽ εὐθείας ἔσονται· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ Ψ Θ τῇ Θ X. πᾶσα δὲ εὐθεῖα ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ· ἐν ἑνὶ ἄρα ἐπιπέδῳ ἐστὶ τὸ Υ B X Γ Φ πεντάγωνον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιόν ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ N O ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ P, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ O P, ἔστιν ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ N O, O P πρὸς τὴν O N οὕτως ἡ N O πρὸς τὴν O Σ. ἴση δὲ ἡ P O τῇ O Σ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Σ N πρὸς τὴν N O οὕτως ἡ N O πρὸς τὴν O Σ· ἡ N Σ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ O, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ N O· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν N Σ, Σ O τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς O N. ἴση δὲ ἡ μὲν O N τῇ N B, ἡ δὲ O Σ τῇ Σ Φ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῆς N Σ, Σ Φ τετράγωνα τριπλάσιά

ἐστι

ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ· ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΦΣ, ΣΝ, ΝΒ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΣΝ, ΝΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΣ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΣ, ΣΦ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΦΒ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΦΣΒ γωνία, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ· διπλῆ ἄρα ἡ ΦΒ τῆς ΒΝ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΒΝ διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ΦΒ τῇ ΒΓ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΥ, ΥΦ δυσὶ ταῖς ΒΧ, ΧΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΦΒ βάσει τῇ ΒΓ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΥΦ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΧΓ ἐστιν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΥΦΓ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΒΧΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΧΓ, ΒΥΦ, ΥΦΓ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐὰν δὲ πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, ἰσογώνιόν ἐστι τὸ πεντάγωνον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΥΦΓΧ πεντάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τὸ ἄρα ΒΥΦΓΧ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν ἐστι καὶ ἰσογώνιον, καὶ ἔστιν ἐπὶ μιᾶς τοῦ κύβου πλευρᾶς τῆς ΒΓ. ἐὰν ἄρα ἐφ' ἑκάστης τῶν τοῦ κύβου δώδεκα πλευρῶν τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, συσταθήσεταί τι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ιβ'. πενταγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον.

ΔΕΙ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΨΟ, καὶ ἔστω ἡ ΨΩ· συμβάλλει ἄρα ἡ ΨΩ τῇ τοῦ κύβου διαμέτρῳ, καὶ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας, τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ παρατελεύτῳ θεωρήματι τοῦ ια'. βιβλίου. τεμνέτωσαν κατὰ τὸ Ω· τὸ Ω ἄρα κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, καὶ ἡ ΟΩ ἡμίσεια πλευρᾶς τοῦ κύβου. ἐπεζεύχθω δὴ ἡ ΥΩ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΝΣ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ο, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΝΟ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΝΣ, ΣΟ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΝΣ τῇ ΨΩ, ἐπειδήπερ καὶ ἡ μὲν ΝΟ τῇ ΟΩ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΨΟ τῇ ΟΣ· ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΟΣ τῇ ΨΥ, ἐπεὶ καὶ τῇ ΡΟ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΩΨ, ΨΥ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΩΨ, ΨΥ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΥΩ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΥΩ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον δυνάμει τριπλασίων τῆς ἡμισείας τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς, προδέδεικται γὰρ κύβον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. εἰ δὲ ὅλη τῆς ὅλης, καὶ ἡ ἡμίσεια τῆς ἡμισείας· καὶ ἔστιν ἡ ΝΟ ἡμίσεια τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· ἡ ἄρα ΥΩ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον. καὶ ἔστι τὸ Ω κέντρον τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον· τὸ Υ ἄρα σημεῖον πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν λοιπῶν γωνιῶν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας· περιείληπται ἄρα τὸ δωδεκάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ.

Λέγω δὴ ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐπεὶ γὰρ τῆς ΝΟ ἄκρον καὶ μέσον τετμημένης,

ſunt quadrati ex NB: quapropter quadrata ex ΦΣ, ΣN, NB quadrati ex NB ſunt quadrupla. ſed [per 47.1.] quadratis ex ΣN, NB æquale eſt quadratum ex BΣ: quadrata igitur ex BΣ, ΣΦ, hoc eſt quadratum ex ΦB, quia angulus ΦΣB eſt rectus, quadruplum eſt quadrati ex NB: ideoque ipſa ΦB ipſius BN eſt dupla. eſt autem & BΓ dupla ipſius BN: ergo ΦB eſt æqualis BΓ. & quoniam duæ BΥ, ΥΦ duabus BX, XΓ æquales ſunt, & baſis ΦB æqualis baſi BΓ: erit [per 8. 1.] angulus BΥΦ angulo BXΓ æqualis. ſimiliter oſtendemus & ΥΦΓ angulum æqualem eſſe angulo BXΓ: tres igitur anguli BXΓ, BΥΦ, ΥΦΓ inter ſe æquales ſunt. ſi autem pentagoni æquilateri tres anguli ſint æquales [per 7. 13.] pentagonum æquiangulum erit: æquiangulum igitur eſt pentagonum BΥΦΓX. oſtenſum eſt autem & æquilaterum: ergo pentagonum BΥΦΓX æquilaterum eſt & æquiangulum; atque eſt ſuper unum cubi latus BΓ. ſi igitur in unoquoque duodecim cubi laterum eadem conſtruamus, figura ſolida conſtituetur duodecim pentagonis æquilateris & æquiangulis contenta.

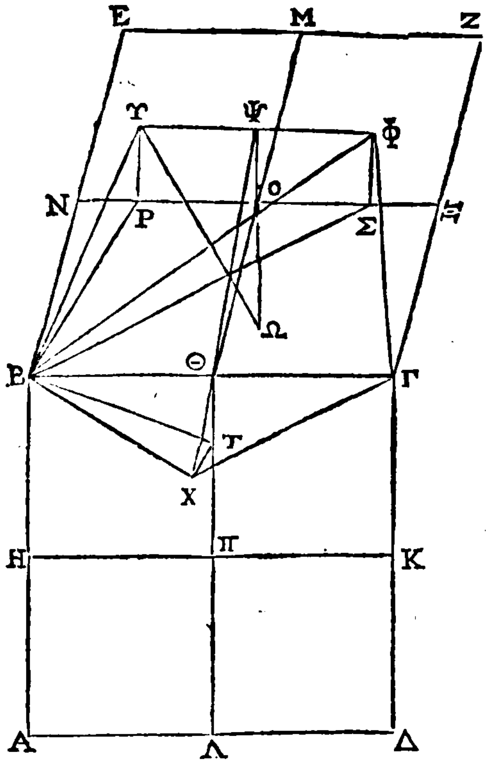
OPORTET autem ipſum & data ſphæra comprehendere; atque demonſtrare dodecaedri latus eſſe irrationalem lineam quæ apotome appellatur.

Producatur enim ΨO, & ſit ΨΩ: occurrit igitur ΨΩ diametro cubi, & bifariam ſe mutuo ſecant, hoc enim oſtenſum eſt penultimo theoremate undecimi libri. ſecent in Ω: ergo Ω eſt centrum ſphæræ quæ cubum comprehendit, & OΩ dimidium lateris cubi. Jungantur ΥΩ. & quoniam recta linea NΣ extrema ac media ratione ſecta eſt in O, & NO eſt ipſius portio major; erunt [per 4. 13.] quadrata ex NΣ, ΣO tripla ejus quod fit ex NO. æqualis autem eſt NΣ ipſi ΨΩ, quoniam & NO ipſi OΩ eſt æqualis, & [per conſtr.] ΨO ipſi OΣ; ſed & OΣ quidem eſt æqualis ΨΥ, quoniam & ipſi PO: quadrata igitur ex ΩΨ, ΨΥ tripla ſunt quadrati quod fit ex NO. ſed [ad 47.1.] quadratis ex ΩΨ, ΨΥ æquale eſt quadratum ex ΥΩ: ergo quadratum ex ΥΩ triplum eſt quadrati ex NO. eſt autem quæ ex centro ſphæræ cubum comprehendentis potentia tripla dimidii lateris cubi, prius enim [ad 15. 13.] oſtenſum eſt cubum conſtituere, & ſphæra comprehendere, atque demonſtrare ſphæræ diametrum potentia triplam eſſe lateris cubi. ſi autem ſit tota totius, erit & dimidia dimidiæ: & eſt NO dimidia lateris cubi; ergo ΥΩ eſt æqualis ei quæ eſt ex centro ſphæræ cubum comprehendentis. eſtque Ω centrum ſphæræ comprehendentis cubum: quare punctum Υ eſt ad ſphæræ ſuperficiem. ſimiliter demonſtrabimus & unumquemque reliquorum angulorum dodecaedri eſſe ad ſuperficiem ſphæræ: dodecaedrum igitur eſt data ſphæra comprehenſum.

DICO dodecaedri latus irrationalem eſſe lineam quæ apotome appellatur.

Quoniam enim rectæ lineæ NO extrema ac media

dia ratione ſectæ major portio eſt ΡΟ; erit tota ΝΞ extrema ac media ratione ſecta, & major portio ΡΣ. nam cum ſit ut ΝΟ ad ΟΡ ita ΟΡ ad ΡΝ, & earum duplæ; nam [per 15.5.] partes cum æque multiplicibus eandem habent rationem: erit ut ΝΞ ad ΡΣ ita ΡΣ ad utramque ΝΡ, ΣΞ. major autem eſt ΝΞ quam ΡΣ: ergo & ΡΣ eſt major quam utraque ΝΡ, ΣΞ: eſt igitur ΝΞ extrema ac media ratione ſecta, & ΡΣ eſt ipſius major portio. æqualis autem eſt ΡΣ ipſi ΥΦ; ergo ΝΞ extrema ac media ratione ſecta eſt, & major portio eſt ΥΦ. & quoniam ſphæræ diameter eſt rationalis. atque [per 15. 13.] eſt potentia tripla lateris cubi; erit [per 6.def.11.] & rationalis ΝΞ quæ eſt cubi latus. ſi autem recta linea rationalis extrema ac media ratione ſecta fuerit, utraque portio [per 6.13.] irrationalis eſt quæ apotome appellatur: ergo ΥΦ, quæ eſt latus dodecaedri, irrationalis eſt quæ apotome appellatur. quod erat demonſtrandum.



τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΡΟ· ὅλης ἄρα τῆς ΝΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΡΣ. οἷον ἐπεὶ ὡς ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΡ οὕτως ἡ ΟΡ πρὸς τὴν ΡΝ καὶ τὰ διπλάσια· τὰ γὰρ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ὡς ἄρα ἡ ΝΞ πρὸς τὴν ΡΣ οὕτως ἡ ΡΣ πρὸς συναμφότερον τὴν ΝΡ, ΣΞ. μείζων δὲ ἡ ΝΞ τῆς ΡΣ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΡΣ συναμφοτέρου τῆς ΝΡ, ΣΞ· ἡ ΝΞ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΡΣ. ἴση δὲ ἡ ΡΣ τῇ ΥΦ· τῆς ἄρα ΝΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΥΦ. καὶ ἐπεὶ ῥητή ἐστιν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, καὶ ἔστι δυνάμει τριπλασίων τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΝΞ πλευρὰ οὖσα τοῦ κύβου. ἐὰν δὲ ῥητὴ γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή· ἡ ΥΦ ἄρα πλευρὰ οὖσα τοῦ δωδεκαέδρου ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Corollarium.

Ex hoc manifeſtum eſt, latere cubi extrema ac media ratione ſecto, ejus portionem majorem eſſe dodecaedri latus.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρά.

Prop. XVIII. Probl.

Latera quinque figurarum exponere & inter ſe comparare.

Exponatur datæ ſphæræ diameter ΑΒ, & ſecetur in Γ quidem ita ut ΑΓ ſit æqualis ΓΒ, in Δ vero ita ut ΑΔ ipſius ΔΒ ſit dupla; dein deſcribatur ſuper ΑΒ ſemicirculus ΑΕΒ, & à punctis Γ, Δ ipſi ΑΒ ad rectos angulos ducantur ΓΕ, ΔΖ, & ΑΖ, ΖΒ, jungantur. & quoniam ΑΔ dupla eſt ipſius ΔΒ, erit ΑΒ ipſius ΒΔ tripla; & per converſionem rationis ΒΑ ſeſquialtera ipſius ΑΔ. ut autem ΒΑ ad ΑΔ ita [per 20. 6.] quadratum ex ΒΑ ad quadratum ex ΑΖ; eſt enim [per 8.6.] triangulum ΑΖΒ triangulo ΑΖΔ æquiangulum: ergo quadratum ex ΒΑ ſeſquialterum eſt quadrati ex ΑΖ. eſt autem [per 13. 13.] & ſphæræ diameter potentia ſeſquialtera lateris pyramidis, atque eſt ΑΒ ſphæræ diameter: ergo ΑΖ pyramidis lateri eſt æqualis.

Rursus, quoniam ΑΔ dupla eſt ΔΒ, erit ΑΒ ipſius ΒΔ tripla. ſed [per 8. & 20.6.] ut ΑΒ ad ΒΔ ita quadratum ex ΑΒ ad quadratum ex ΖΒ: quadratum igitur ex ΑΒ triplum eſt quadrati ex ΒΖ. eſt autem [per 15.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη΄.

Τὰς πλευρὰς τῶν πέντε σχημάτων ἐκθέσθαι καὶ συγκρῖναι πρὸς ἀλλήλας.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ μὲν τὸ Γ ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΓΒ, κατὰ δὲ τὸ Δ ὥστε διπλασίονα εἶναι τὴν ΑΔ τῆς ΔΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΕΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Γ, Δ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΓΕ, ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΖΒ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ, τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ· ἀναστρέψαντι ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ. ὡς δὲ ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ· ἰσογώνιον γάρ ἐστι τὸ ΑΖΒ τρίγωνον τῷ ΑΖΔ τριγώνῳ· ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΖ. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος, καὶ ἔστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ ΑΖ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πλευρᾷ πυραμίδος.

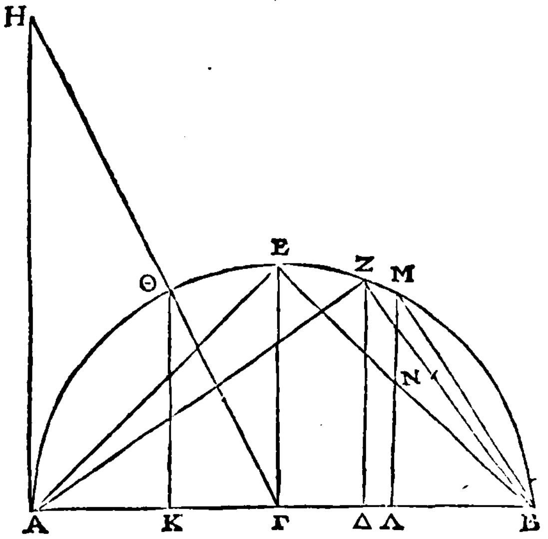
ΠΑΛΙΝ, ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ, τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ· τριπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΖ. ἔστι δὲ

καὶ

ἐστὶν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. καὶ ἔστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ ΒΖ ἄρα τοῦ κύβου ἐστὶ πλευρά.

ΚΑΙ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ· διπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς, καί ἐστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· ἡ ΒΕ ἄρα τοῦ ὀκταέδρου ἐστὶ πλευρά.

ΗΧΘΩ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΗ, καὶ κείσθω ἡ ΑΗ τῇ ΑΒ ἴση, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἤχθω ἡ ΘΚ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΗ τῆς ΑΓ, ἴση γάρ ἡ ΗΑ τῇ ΑΒ, ὡς δὲ ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΓ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΘΚ τῆς ΚΓ· τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΘΚ, ΚΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΓ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΓ. ἴση δὲ ἡ ΘΓ τῇ ΓΒ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΚ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ, ὧν ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ ἐστι διπλῆ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΔ λοιπῆς τῆς ΔΓ ἐστι διπλῆ· τριπλῆ ἄρα ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ· ἐννεαπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΚ· μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ· μείζων ἄρα ἡ ΓΚ τῆς ΓΔ. κείσθω τῇ ΓΚ ἴση ἡ ΓΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΛΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΜΒ. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΚ, καί ἐστι τῆς μὲν ΒΓ διπλῆ ἡ ΑΒ, τῆς δὲ ΓΚ διπλῆ ἡ ΚΛ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΛ. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. καὶ ἔστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ ΚΛ ἄρα ἑξαγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ εἰρημένου κύκλου. καὶ ἐπεὶ τῆς σφαίρας ἡ διάμετρος σύγκειται, ἔκ τε τῆς ἑξαγώνου καὶ δύο τῶν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν εἰρημένον κύκλον ἐγγραφομένων, καί ἐστιν ἡ μὲν ΑΒ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ ΚΛ ἑξαγώνου πλευρά, καὶ ἴση ἡ ΑΚ τῇ ΛΒ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΚ, ΛΒ δεκαγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. καὶ ἐπεὶ δεκαγώνου μὲν ἡ ΛΒ, ἑξαγώνου δὲ ἡ ΜΛ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ΚΛ, ἐπεὶ καὶ τῇ ΘΚ, ἴσον γὰρ ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καί ἐστιν ἑκατέρα τῆς ΘΚ,



13.] sphæræ diameter potentia tripla lateris cubi. atque est AB sphæræ diameter: ergo BZ est latus cubi.

ITEM quoniam AΓ est æqualis ΓB, erit AB ipsius BΓ dupla. ut autem AB ad BΓ ita quadratum ex AB ad quadratum ex BE: quadratum igitur ex AB quadrati ex BE est duplum. at vero [per 14. 13.] sphæræ diameter est potentia dupla lateris octaedri, & AB est diameter datæ sphæræ: quare BE est octaedri latus.

DUCATUR à puncto A ipsi AB ad rectos angulos AH, ponaturque AH æqualis AB, & juncta HΓ à puncto Θ ad AB perpendicularis ducatur ΘK. quoniam igitur AH dupla est ipsius AΓ, etenim HA est æqualis AB, ut autem HA ad AΓ ita [per 4. 6.] ΘK ad KΓ: erit ΘK ipsius KΓ dupla: ergo [per 20.6.] quadratum ex ΘK quadruplum est quadrati ex KΓ: quadrata igitur ex ΘK, KΓ, quod [per 47.1.] est quadratum ex ΘΓ quintuplum est quadrati ex KΓ. æqualis autem est ΘΓ ipsi ΓB: ergo quadratum ex BΓ quintuplum est quadrati ex ΓK. & quoniam AB est dupla ipsius BΓ, ex quibus AΔ dupla est ΔB: erit reliqua BΔ dupla reliquæ ΔΓ; ideoque BΓ ipsius ΓΔ est tripla: noncuplum igitur est [per 20. 6.] quadratum ex BΓ quadrati ex ΓΔ. sed quadratum ex BΓ quadrati ex ΓK est quintuplum: ergo quadratum ex ΓK majus est quadrato ex ΓΔ, & ΓK ipsa ΓΔ major. ponatur ipsi ΓK æqualis ΓΛ; atque à puncto Λ ipsi AB ad rectos angulos ducatur ΛM, & MB jungatur. & quoniam quadratum ex BΓ quintuplum est quadrati ex ΓK, atque est ipsius quidem ΓB dupla AB, ipsius vero ΓK dupla KΛ; erit quadratum ex AB quadrati ex KΛ quintuplum. sed [per coroll. 16. 13.] sphæræ diameter potentia quintupla est ejus quæ ex centro circuli à quo icosaedrum describitur, atque est AB diameter sphæræ: ergo KΛ est hexagoni latus dicti circuli. præterea, quoniam [per cor. 16.13.] sphæræ diameter composita est ex latere hexagoni & duobus lateribus decagoni in dicto circulo descriptorum; atque est AB quidem diameter sphæræ, KΛ vero hexagoni latus, & AK est æqualis ΛB: erit utraque ipsarum AK, ΛB latus decagoni descripti in eodem circulo, à quo icosaedrum describitur. & quoniam ΛB est latus decagoni, MΛ vero latus hexagoni; est enim æqualis ipsi KΛ, quia [per 14. 3.] æqualis est ipsi ΘK; namque æqualiter à centro distant; & est utraque ΘK,

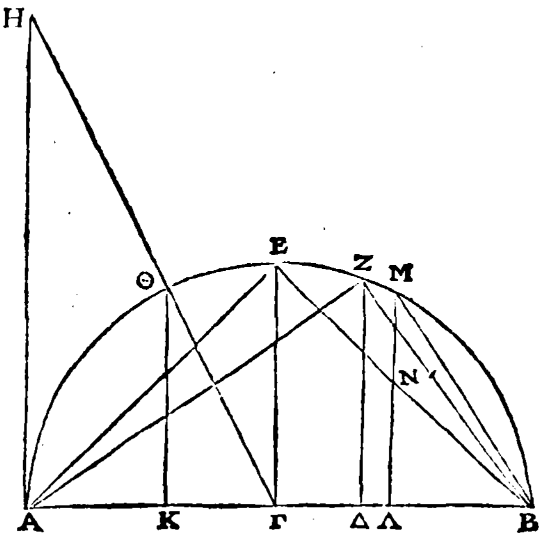
KΛ

K Λ dupla ipsius K Γ: erit [per 10. 13.] M B latus pentagoni. quod autem est latus pentagoni idem est [per 16. 13.] & icosaedri: ergo M B est icosaedri latus.

Et quoniam Z B est latus cubi, secetur extrema ac media ratione in N, & N B sit major portio; erit ergo [per cor. 17.13.] N B dodecaedri latus.

Quoniam autem sphæræ diameter ostensa est ipsius quidem A Z lateris pyramidis potentia sesquialtera, ipsius vero B E octaedri potentia dupla, & ipsius Z B cubi potentia tripla; quarum partium sphæræ diameter potentia est sex, earum pyramidis quidem latus erit quatuor, octaedri vero trium, & cubi duarum: ergo latus pyramidis octaedri quidem lateris potentia est sesquitertium; lateris vero cubi potentia duplum. & octaedri latus lateris cubi potentia est sesquialterum: latera igitur trium figurarum jam dicta, videlicet & octaedri & cubi, inter se sunt in rationibus rationalibus. Dico vero quod reliquorum duorum, nempe icosaedri & dodecaedri latera, neque inter se neque ad jam dicta sunt in rationalibus rationibus; irrationales enim sunt, illius quidem [per 16. 13.] minor, hujus vero [per 17.13.] apotome.

Quod vero M B latus icosaedri majus sit dodecaedri latere N B, ita demonstrabimus.



Quoniam enim [per 8.6.] triangulum Z Δ B æquiangulum est triangulo Z A B; erit [per 4. 6.] ut Δ B ad B Z ita Z B ad B A. & cum tres rectæ lineæ proportionales sint, ut prima ad tertiam ita erit [per cor. 20. 6.] quadratum primæ ad quadratum secundæ: est igitur ut Δ B ad B A ita quadratum ex Δ B ad quadratum ex B Z. & invertendo [per coroll. 4. 5.] ut A B ad B Δ ita quadratum ex Z B ad quadratum ex B Δ. tripla autem est A B ipsius B Δ: ergo quadratum ex Z B quadrati ex B Δ est triplum. verum quadratum ex A Δ quadruplum est quadrati ex Δ B; est enim A Δ ipsius Δ B dupla: ergo quadratum ex A Δ est majus quadrato ex Z B; ac propterea A Δ quam Z B est major: multo igitur major est A Λ quam Z B. & [per 9. 13.] ipsa quidem A Λ extrema ac media ratione secta est, & major ejus portio est A K; quoniam K A est hexagoni latus, & K Λ latus decagoni. ipsa vero Z B [per constr.] extrema ac media ratione secta est, & major portio est N B: major igitur est K Λ quam N B. est autem K Λ ipsi Λ M æqualis: ergo Λ M quam N B est major. sed [per 19. 1.] B M est major

ΚΛ διπλασίων τῆς ΚΓ· πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΒ. ἡ δὲ τοῦ πενταγώνου ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου· εἰκοσαέδρου ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΒ.

ΚΑΙ ἐπεὶ ἡ ΖΒ κύβου ἐστὶ πλευρά, τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Ν, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΝΒ· ἡ ΝΒ ἄρα δωδεκαέδρου ἐστὶ πλευρά.

ΚΑΙ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἐδείχθη τῆς μὲν ΑΖ πλευρᾶς τῆς πυραμίδος δυνάμει ἡμιολία, τῆς δὲ τοῦ ὀκταέδρου ΒΕ δυνάμει διπλασίων, τῆς δὲ τοῦ κύβου τῆς ΖΒ δυνάμει τριπλασίων· οἵων ἄρα ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἕξ, τοιούτων ἡ μὲν τῆς πυραμίδος τεσσάρων, ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τριῶν, ἡ δὲ τοῦ κύβου δύο· ἡ ἄρα τῆς πυραμίδος πλευρὰ τῆς μὲν τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς δυνάμει ἐστὶν ἐπίτριτος, τῆς δὲ τοῦ κύβου δυνάμει διπλῆ. ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τῆς τοῦ κύβου δυνάμει ἡμιολία· αἱ μὲν οὖν εἰρημέναι τῶν τριῶν σχημάτων πλευραί, λέγω δὴ πυραμίδος καὶ ὀκταέδρου καὶ κύβου, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς· αἱ δὲ λοιπαὶ δύο, λέγω δὴ ἥ τε τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ ἡ τοῦ δωδεκαέδρου, οὔτε πρὸς ἀλλήλας οὔτε πρὸς τὰς προειρημένας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς, ἄλογοι γάρ εἰσιν, ἡ μὲν ἐλάττων, ἡ δὲ ἀποτομή.

ΟΤΙ δὲ μείζων ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἡ ΜΒ τῆς τοῦ δωδεκαέδρου τῆς ΝΒ δείξομεν οὕτως.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΖΔΒ τρίγωνον τῷ ΖΑΒ τριγώνῳ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΖ οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΒΑ. καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ. ἀνάπαλιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ. τριπλῆ δὲ ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετραπλάσιον· διπλῆ γὰρ ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΔ τῆς ΖΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ΑΛ τῆς ΖΒ μείζων ἐστί. καὶ τῆς μὲν ΑΛ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΚΛ, ἐπειδήπερ ἡ μὲν ΑΚ ἑξαγώνου ἐστίν, ἡ δὲ ΚΛ δεκαγώνου. τῆς δὲ ΖΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμα ἐστὶν ἡ ΝΒ· μείζων ἄρα ἡ ΚΛ τῆς ΝΒ. ἴση δὲ ἡ ΚΛ τῆς ΛΜ· μείζων ἄρα ἡ ΛΜ τῆς ΝΒ. τῆς δὲ ΛΜ μείζων ἡ ΜΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ΜΒ ἡ ΜΒ πλευρὰ οὖσα τοῦ εἰκοσαέδρου μείζων ἐστὶ τῆς ΝΒ πλευρᾶς οὔσης τοῦ δωδεκαέδρου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΛΛΩΣ ὅτι μείζων ἡ ΜΒ τῆς ΝΒ.

Ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ, τριπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ, διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ ΖΑΒ τρίγωνον τῷ ΖΒΔ τριγώνῳ· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΖ. ἐδείχθη δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΛ πενταπλάσιον· πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς ΚΛ τρισὶ τοῖς ἀπὸ τῆς ΖΒ ἴσα ἐστίν. ἀλλὰ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἓξ τῶν ἀπὸ τῆς ΝΒ μείζονά ἐστιν· ὥστε καὶ ἓν τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ ἑνὸς τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ μεῖζόν ἐστι· μείζων ἄρα ἡ ΚΛ τῆς ΝΒ. ἴση δὲ ἡ ΚΛ τῇ ΑΜ· μείζων ἄρα ἡ ΚΛ τῆς ΝΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ΜΒ τῆς ΝΒ μείζων ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΛΗΜΜΑ.

Ὅτι δὲ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἓξ τῶν ἀπὸ τῆς ΒΝ μείζονά ἐστι, δείξομεν οὕτως.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΒΝ τῆς ΝΖ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΖΒ, ΒΝ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΖ, ΖΝ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΖ, ΒΝ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΖ, ΖΝ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ ΒΖ, ΖΝ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΖΒ, ΒΝ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΖ, ΒΝ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἐστι. τὸ δὲ ὑπὸ ΒΖ, ΖΝ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΝ, ἄκρον γὰρ καὶ μέσον λόγον τέτμηται ἡ ΒΖ κατὰ τὸ Ν, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς μέσης· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΖΒ μεῖζόν ἐστι διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΝ· ἓν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ δύο τῶν ἀπὸ τῆς ΒΝ μεῖζόν ἐστιν· ὥστε καὶ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἓξ τῶν ἀπὸ τῆς ΒΝ μείζονά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Λέγω δὴ ὅτι παρὰ τὰ εἰρημένα ε΄. σχήματα οὐ συσταθήσεται ἕτερον σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων ἴσων ἀλλήλοις.

Ὑπὸ μὲν γὰρ δύο τριγώνων, ἀλλ' οὐδὲ ἄλλων δύο ἐπιπέδων στερεὰ γωνία οὐ συνίσταται. ὑπὸ δὲ τριῶν τριγώνων ἡ τῆς πυραμίδος, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἡ τοῦ ὀκταέδρου, ὑπὸ δὲ ε΄. ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου· ὑπὸ δὲ ἓξ τριγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων οὐκ ἔσται στερεὰ γωνία, οὔσης γὰρ τῆς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου γωνίας διμοίρου ὀρθῆς, ἔσονται αἱ ἓξ τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι, ὅπερ ἀδύνατον, ἅπασα γὰρ στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν περιέχεται. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ οὐδὲ ὑπὸ πλειόνων ἢ ἓξ γωνιῶν ἐπιπέδων στερεὰ γωνία συνίσταται. ὑπὸ δὲ τετραγώνων τριῶν ἡ τοῦ κύβου γωνία περιέχεται· ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον, ἔσον-

quam MA: ergo MB, quæ est latus icosaedri, major est ipsa NB dodecaedri latere. quod erat demonstrandum.

ALITER ostenditur MB majorem esse quam NB.

Quoniam enim AΔ dupla est ipsius ΔB, erit AB ipsius BΔ tripla. ut autem AB ad ΔB ita quadratum ex AB ad quadratum ex BZ, propterea quod triangulum ZAB [per 8.6.] triangulo ZBΔ æquiangulum est: triplum igitur est quadratum ex AB quadrati ex BZ. ostensum autem est quadratum ex AB quadrati ex KΛ quintuplum: ergo quinque quadrata ex KΛ tribus quadratis ex ZB sunt æqualia. sed [ut mox demonstrabitur] tria quadrata ex ZB majora sunt quam sex eorum, quæ fiunt ex NB: & igitur quinque ex KΛ quam sex eorum quæ ex NB sunt majora: ergo & unum ex KΛ majus est uno ex NB; ac propterea KΛ quam NB major. æqualis autem est KΛ ipsi ΛM; major igitur est ΛM quam NB: multo igitur major est MB quam NB. quod erat demonstrandum.

LEMMA.

Tria vero quadrata ex ZB majora esse quam sex eorum quæ ex BN, hoc modo ostendemus.

Quoniam enim major est BN quam NZ, erit rectangulum quod continetur sub ZB, BN majus contento sub BZ, ZN: quod igitur continetur sub ZB, BN una cum contento sub BZ, ZN majus est quam duplum ejus quod sub BZ, ZN continetur. sed [per 2. 2.] quod quidem continetur sub ZB, BN una cum contento sub BZ, ZN est quadratum ex ZB. contentum autem sub BZ, ZN est æquale quadrato ex BN; etenim [ex hyp.] BZ extrema ac media ratione secta est in N, & [per 17. 6.] quod sub extremis continetur est æquale ei quod fit à media: quadratum igitur ex ZB majus est quam duplum quadrati ex BN: quare unum quadratum ex ZB duobus ex BN est majus; idcirco tria quadrata quæ fiunt ex ZB majora sunt quam sex eorum quæ fiunt ex BN. quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Dico præter jam dictas quinque figuras non constitui aliam figuram, quæ sub figuris æquilateris & æquiangulis inter se æqualibus contineatur.

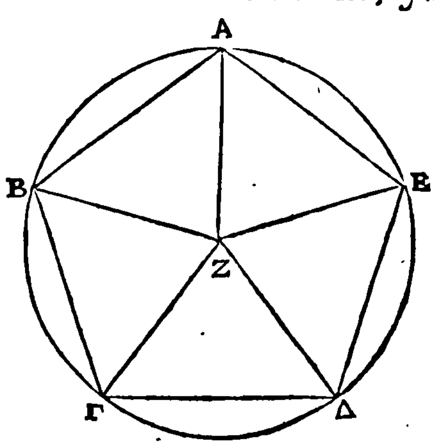
Ex duobus enim triangulis, vel ex aliis duobus planis [per 11. def. 11.] non constituetur angulus solidus. ex tribus autem triangulis constituitur angulus pyramidis; ex quatuor octaedri; ex quinque icosaedri: sed ex sex triangulis æquilateris & æquiangulis ad unum punctum constitutis non est angulus solidus; cum enim [per 32. 1.] trianguli æquilateri angulus sit duæ tertiæ recti, erunt horum sex quatuor rectis æquales, quod fieri non potest, omnis enim solidus angulus [per 21. 11.] sub minoribus quam quatuor rectis continetur. eadem ratione neque ex pluribus quam sex hujusmodi angulis planis constituitur solidus angulus. porro angulus cubi sub tribus quadratis continetur: ut autem sub quatuor contineatur fieri non potest, essent enim rursus quatuor recti. sub pentagonis æquilateris & æquiangulis tribus quidem continetur angulus dodecadri: sed ut sub quatuor contineatur fieri non potest, nam cum pentagoni æquilateri angulus constet [ut mox ostendetur] ex recto & quinta parte recti, erunt quatuor hujusmodi anguli quatuor rectis majores, quod fieri non potest. neq; vero aliis polygonis figuris constituetur angulus solidus, propter dicta absurda quæ consequuntur: non igitur præter jam dictas, figura solida constituitur sub figuris æquilateris & æquiangulis contenta. quod erat demon.

γὰρ πάλιν τέσσαρες ὀρθαί. ὑπὸ δὲ πενταγώνων ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων, ὑπὸ μὲν τριῶν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου· ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον, οὔσης γὰρ τῆς τοῦ ἰσοπλεύρου πενταγώνου γωνίας ὀρθῆς καὶ πέμπτου, ἔσονται αἱ τέσσαρες γωνίαι τεσσάρων ὀρθῶν μείζους, ὅπερ ἀδύνατον. οὐδὲ μὴν ὑπὸ πολυγώνων ἑτέρων σχημάτων περιεχθήσεται στερεὰ γωνία, διὰ τὸ ἄτοπον· οὐκ ἄρα παρὰ τὰ εἰρημένα ε. σχήματα ἕτερον στερεὸν συσταθήσεται ὑπὸ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

LEMMA.

Verum enim vero pentagoni æquilateri & æquianguli angulum constare ex recto & quinta parte recti hoc modo ostendemus.

Sit enim pentagonum æquilaterum & æquiangulum ΑΒΓΔΕ, & circa ipsum circulus ΑΒΓΔΕ describatur, sumaturque ipsius centrum quod sit Ζ, & jungantur ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ, quæ [per 14.4.] pentagoni ΑΒΓΔΕ angulos bifariam secabunt. & quoniam quinque anguli ad Ζ sunt quatuor rectis æquales, & etiam inter se æquales; erit unus ipsorum, ut ΑΖΒ, unus rectus dempta quinta recti parte: ergo [per 32.1.] reliqui ΖΑΒ, ΑΒΖ conficiunt unum rectum & quintam partem recti. æqualis autem est angulus ΖΑΒ angulo ΖΒΓ: & igitur ΑΒΓ totus pentagoni angulus constat ex recto & quinta recti parte. quod erat demonstr.



ΛΗΜΜΑ.

Ὅτι δὲ ἡ τοῦ ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου γωνία ὀρθή ἐστι καὶ πέμπτον, οὕτω δεικτέον.

Ἔστω γὰρ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ περιγεγράφθω περὶ αὐτὸ κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ· δίχα ἄρα τέμνουσιν τὰς πρὸς τοῖς ΑΒΓΔ, Ε πενταγώνου γωνίας. καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τῷ Ζ πέντε γωνίαι τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί, καὶ εἰσὶν ἴσαι· μία ἄρα αὐτῶν, ὡς ἡ ὑπὸ ΑΖΒ, μιᾶς ὀρθῆς ἐστι παρὰ πέμπτον· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΖΑΒ, ΑΒΖ μιᾶς εἰσὶν ὀρθῆς καὶ πέμπτης. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΖΑΒ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τοῦ πενταγώνου γωνία μιᾶς ὀρθῆς ἐστι καὶ πέμπτης. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΣΣΑΡΕΣΚΑΙΔΕΚΑΤΟΝ,
ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΩΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ,
ΩΣ ΟΙΟΝΤΑΙ ΤΙΝΕΣ,

Ὡς ἄλλοι δὲ, ΥΨΙΚΛΕΟΥΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ περὶ τῶν ε΄. σωμάτων πρῶτον.

EUCLIDIS,
UT QUIDAM ARBITRANTUR,
ELEMENTORUM
LIBER DECIMUSQUARTUS,
QUI ET SOLIDORUM QUARTUS,

Aut, *verius* juxta alios, HYPSICLIS ALEXANDRINI de Quinque Corporibus Liber prior.

Βασιλίδης ὁ Τύριος, ὦ Πρώταρχε, παραγενηθεὶς εἰς Ἀλεξάνδρειαν, καὶ συσταθεὶς τῷ πατρὶ ἡμῶν διὰ τὴν ἀπὸ τοῦ μαθήματος συγγένειαν, συνδιέτριψεν αὐτῷ τὸν πλεῖστον τῆς ἐπιδημίας χρόνον. καί ποτε διελοῦντες τὸ παρὰ Ἀπολλωνίου γραφὲν περὶ τῆς συγκρίσεως τοῦ δωδεκαέδρου καὶ τοῦ εἰκοσαέδρου τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, τίνα λόγον ἔχει ταῦτα πρὸς ἄλληλα· ἔδοξαν ταῦτα μὴ ὀρθῶς γεγραφέναι τὸν Ἀπολλώνιον. αὐτοὶ δὲ ταῦτα διακαθάραντες ἔγραψαν ὡς ἦν ἀκούειν τοῦ πατρός. ἐγὼ δὲ ὕστερον περιέπεσον ἑτέρῳ βιβλίῳ ὑπὸ Ἀπολλωνίου ἐκδεδομένῳ, καὶ περιέχοντι ἀπόδειξιν ὑγιῶς περὶ τοῦ ὑποκειμένου· καὶ μεγάλως ἐψυχαγωγήθην ἐπὶ τῇ τοῦ προβλήματος ζητήσει. τὸ μὲν ὑπὸ Ἀπολλωνίου ἐκδοθὲν ἔοικε κοινῇ σκοπεῖν, καὶ γὰρ περιφέρεται· τὸ δ' ὑφ' ἡμῶν δοκοῦν ὕστερον γεγραφέναι φιλοπόνως ὅσα δοκεῖ ὑπομνηματισάμενος, ἔκρινα προσφωνῆσαί σοι, διὰ τὴν ἐν ἅπασι μαθήμασι, μάλιστα δ' ἐν γεωμετρίᾳ προκοπὴν,

BASILIDES Tyrius, Protarche, cum Alexandriam venisset, patrique nostro ob mathematicarum disciplinarum societatem commendatus fuisset, ipso peregrinationis tempore cum eo diu multumque versatus est. Ipsi ergo cum id aliquando expenderent, quod ab Apollonio de dodecaedri & icosaedri in eadem sphæra descriptorum comparatione scriptum est, quam scilicet hæc inter se rationem habeant; arbitrati sunt ea non recte tradidisse Apollonium. Ideoque ea, à se emendata, ut pater meus dicebat, memoriæ ac literis prodiderunt. Ego vero postea incidi in alium librum ab Apollonio editum, qui propositæ rei demonstrationem accuratam complectebatur; ex ejusque problematis indagatione magnam profecto cepi voluptatem. Illud quidem, quod ab Apollonio editum est, quilibet facile perspicere potest, cum in omnium manibus versetur: quod autem nos postea summo, quantum conjici licet, studio lucubrasse videmur, id literis mandatum tibi dedicandum censuimus, ut qui ob excellentem in omnibus disciplinis mathematicis, & præsertim in geometria, cognitionem, prudenter judicabis ea quæ dicturi sumus; ob eam vero, quæ tibi cum patre meo fuit, vitæ consuetudinem, & ob benevolentiam, qua nos complecteris, tractationem ipsam libenter audies. Sed jam tempus est ut prooemio finem imponentes opus ipsum aggrediamur.

ἐμπείρως κρίνοντι τὰ ῥηθησόμενα· διὰ δὲ τὴν πρὸς τὸν πατέρα συνήθειαν, καὶ τὴν πρὸς ἡμᾶς εὔνοιαν, εὐμενῶς ἀκουόμενον τῆς πραγματείας. καιρὸς δ' ἂν εἴη προοιμίου μὲν πεπαῦσθαι, τῆς δὲ συντάξεως ἄρχεσθαι.

PROP. I. THEOR.

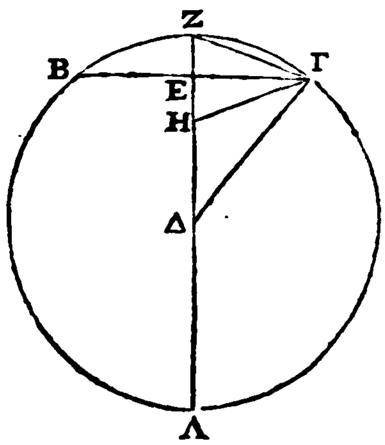
Quæ à centro circuli alicujus ad latus pentagoni æquilateri in eodem circulo descripti perpendicularis ducitur, dimidia est utriusque, & ejus quæ ex centro & lateris decagoni in eodem circulo descripti.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου κύκλου τινὸς ἐπὶ τὴν τοῦ πενταγώνου πλευρὰν, τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου, κάθετος ἀγομένη, ἡμίσειά ἐστι συναμφοτέρου, τῆς τε ἐκ τοῦ κέντρου καὶ τῆς τοῦ δεκαγώνου τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου.

SIT circulus ΑΒΓ, & in eo describatur pentagoni æquilateri latus ΒΓ, sumaturque circuli centrum Δ; & ad ΒΓ ducta ΔΕ perpendiculari, producatur in directum ipsi ΔΕ recta linea ΑΕΖ: dico ΔΕ dimidiam esse utriusque, & hexagoni lateris & decagoni in eodem circulo descriptorum.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐν τῷ ΑΒΓ κύκλῳ πενταγώνου ἰσοπλεύρου πλευρὰ ἡ ΒΓ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἤχθω ἡ ΔΕ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ ΔΕ εὐθεῖα ἡ ΑΕΖ· λέγω ὅτι ἡ ΔΕ ἡμίσειά ἐστι τῆς τοῦ ἑξαγώνου καὶ τοῦ δεκαγώνου πλευρᾶς τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.



Jungantur enim ΔΓ, ΓΖ; ponaturque ΗΕ ipsi ΕΖ æqualis, & à puncto Η ad Γ ducatur ΗΓ. quoniam igitur circumferentia totius circuli quintupla est circumferentiæ ΒΖΓ, atque est totius quidem circuli circumferentiæ dimidia ΑΓΖ, ipsius vero ΒΖΓ dimidia ΖΓ, erit & circumferentia ΑΓΖ quintupla circumferentiæ ΖΓ: ideoque circumferentia ΑΓ ipsius ΓΖ est quadrupla. ut autem ΑΓ ad ΖΓ ita est [per 33. 6.] ΑΔΓ angulus ad angulum ΖΔΓ: angulus igitur ΑΔΓ quadruplus est anguli ΖΔΓ. duplus autem est [per 20.3] angulus ΑΔΓ anguli ΕΖΓ: ergo & angulus ΕΖΓ anguli ΗΔΓ est duplus. est autem [per 4.1] & ΕΖΓ angulus æqualis angulo ΕΗΓ: duplus igitur est angulus ΕΗΓ anguli ΗΔΓ; quare & [per 6. & 32.1.] ΔΗ ipsi ΗΓ est æqualis. sed [per 4.1] ΗΓ æqualis est ΖΓ: ergo & ΔΗ ipsi ΖΓ est æqualis. est autem & ΗΕ æqualis ΕΖ: æqualis igitur est ΔΕ utrique ΕΖ, ΖΓ. communis apponatur ΔΕ; utraque igitur ΔΖ, ΖΓ ipsius ΔΕ est dupla. sed est ΔΖ quidem [per 14 4.] hexagoni lateri æqualis, ΖΓ vero æqualis lateri decagoni: ergo ΔΕ est dimidia & lateris hexagoni & decagoni in eodem circulo descriptorum. quod erat demonstrandum.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΔΓ, ΓΖ, καὶ κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΗΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Γ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΓ. ἐπεὶ πενταπλασία ἐστὶν ὅλου τοῦ κύκλου ἡ περιφέρεια τῆς ΒΖΓ περιφερείας, καὶ ἔστι τῆς μὲν ὅλου τοῦ κύκλου περιφερείας ἡμίσεια ἡ ΑΓΖ, τῆς δὲ ΒΖΓ ἡμίσεια ἡ ΖΓ· καὶ ΑΓΖ ἄρα περιφέρεια πενταπλασία ἐστὶ τῆς ΖΓ περιφερείας· τετραπλῆ ἄρα ἐστὶ ἡ ΑΓ τῆς ΖΓ. ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΖΓ οὕτως ἡ ὑπὸ ΑΔΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΖΔΓ γωνίαν· τετραπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΖΔΓ. διπλῆ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΕΖΓ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΖΓ τῆς ΗΔΓ. ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ ΕΖΓ ἴση τῇ ὑπὸ ΕΗΓ· διπλῆ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΗΓ τῆς ὑπὸ ΗΔΓ· ἴση ἄρα ἡ ΔΗ τῇ ΗΓ. ἀλλὰ ἡ ΗΓ τῇ ΖΓ ἐστιν ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΖΓ. ἔστι δὲ καὶ ΗΕ τῇ ΕΖ ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΔΕ συναμφοτέρῳ τῇ ΕΖ, ΖΓ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ΔΕ· συναμφότερος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΖ, ΖΓ διπλῆ τῆς ΔΕ. καὶ ἔστι ἡ μὲν ΔΖ ἴση τῇ τοῦ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ΖΓ ἴση τῇ τοῦ δεκαγώνου· ἡ ΔΕ ἄρα ἡμίσειά ἐστι τῆς τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Corollarium.

Manifestum vero est ex theorematibus decimitertii libri, [sc. 12. 13.] eam quæ à centro circuli ad latus trianguli æquilateri perpendicularis ducitur dimidiam esse ejus quæ ex centro circuli.

Πόρισμα.

Φανερὸν δὴ ἐκ τῶν ἐν τῷ τρισκαιδεκάτῳ βιβλίῳ θεωρημάτων, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ τριγώνου τοῦ ἰσοπλεύρου κάθετος ἀγομένη ἡμίσειά ἐστι τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων.

Τοῦτο δὲ γράφεται ὑπὸ μὲν * Ἀρισταίου ἐν τῷ ἐπιγραφομένῳ πέντε σχημάτων σύγκρισις. ὑπὸ δὲ Ἀπολλωνίου ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐκδόσει τῆς συγκρίσεως τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον· ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτω καὶ αὐτὸ τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον· διὰ δὲ τὴν αὐτὴν εἶναι κάθετον ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον. γραπτέον δὲ καὶ ἡμῖν αὐτοῖς, ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, προγραφέντος τοῦδε,

Prop. II. Theor.

Idem circulus comprehendit dodecaedri pentagonum & icoſaedri triangulum in eadem ſphæra deſcriptorum.

HOC autem conſcribitur ab * Ariſtæo in libro de quinque figurarum comparatione, & ab Apollonio in ſecunda editione comparationis dodecaedri cum icoſaedro: videlicet ut dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita eſſe & ipſum dodecaedrum ad icoſaedrum, quia perpendicularis ducta à centro ſphæræ ad dodecaedri pentagonum eadem eſt cum illa quæ ad icoſaedri triangulum ducitur. porro nobis quoque deſcribendum monſtrandumque eſt eundem circulum comprehendere & dodecaedri pentagonum & icoſaedri triangulum in eadem ſphæra deſcriptorum, hoc quidem præmiſſo,

(ΛΗΜΜΑ.)

Ἐὰν εἰς κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πενταγώνου ὑποτεινούσης εὐθείας, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου κύκλου.

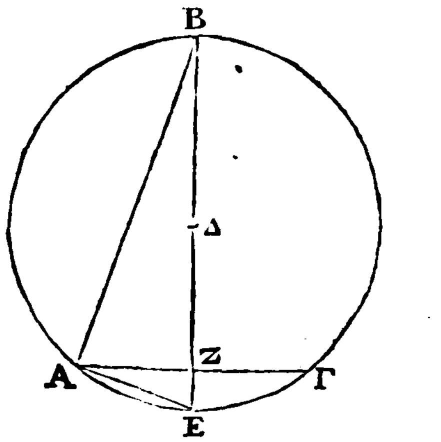
Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐν τῷ ΑΒΓ κύκλῳ πενταγώνου πλευρὰ ἔστω ἡ ΑΓ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἡ ΔΖ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Β, Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετράγωνα πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ ΔΕ τετραγώνου.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ· δεκαγώνου ἄρα ἡ ΑΕ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΒΕ τῆς ΕΔ, τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΔ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΕ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ· τετραπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ ΒΑ, ΑΕ τοῦ ἀπὸ ΕΔ· πενταπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ ΑΒ, ΑΕ καὶ ΕΔ τοῦ ἀπὸ ΕΔ. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΑ ἴσα τῷ ἀπὸ ΑΓ· πενταπλάσια ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ ΒΑ, ΑΓ τοῦ ἀπὸ ΕΔ.

(LEMMA.)

Si in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur, quadratum quod fit ex latere pentagoni, una cum quadrato quod fit ex recta quæ duobus pentagoni lateribus ſubtenditur, quintuplum erit quadrati ejus quæ eſt ex circuli centro.

Sit ΑΒΓ circulus, & in eo pentagoni latus ΑΓ, ſumaturque circuli centrum Δ, & ad ΑΓ perpendicularis ducta ΔΖ in puncta Β, Ε producatur, & jungatur ΑΒ: dico quadrata ex ΒΑ, ΑΓ quadrati ex ΔΕ quintupla eſſe.



Jungatur enim ΑΕ: decagoni ergo latus eſt. & quoniam ΒΕ dupla eſt ipſius ΕΔ; erit [per corol. 20.6.] quadratum ex ΒΕ quadrati ex ΕΔ quadruplum. quadrato autem ex ΒΕ æqualia ſunt quadrata ex ΒΑ, ΑΕ: ergo quadrata ex ΒΑ, ΑΕ quadrupla ſunt quadrati ex ΕΔ: quare etiam quadrata ex ΑΒ, ΑΕ & ΕΔ ſunt quintupla quadrati ex ΕΔ. ſed [per 10. 13.] quadrata ex ΔΕ, ΕΑ æqualia ſunt quadrato ex ΑΓ: quadrata igitur ex ΒΑ, ΑΓ quadrati ex ΕΔ ſunt quintupla.

Τούτου δεδειγμένου, δεικτέον ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος λαμβάνει τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων.

Hoc ita oſtenſo, demonſtrandum quidem eſt eundem circulum comprehendere & dodecaedri pentagonum & icoſaedri triangulum in eadem ſphæra deſcriptorum.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν δωδεκάεδρόν τε καὶ εἰ-

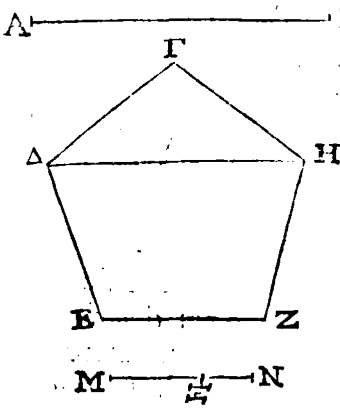
Exponatur ſphæræ diameter ΑΒ, & in eadem ſphæra deſcribatur dodecaedrum & icoſaedrum,

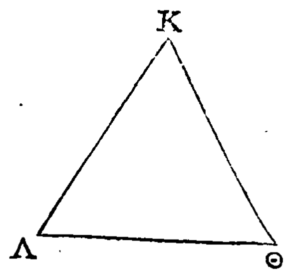
* *Ariſtæi* libros quinque τόπων στερεῶν deſcribit *Pappus* in præfatione ad lib. VII. *Collect. Math.* nulla hujus *de quinque figurarum comparatione* facta mentione.

sitque unum quidem dodecaedri pentagonum ΓΔΕΖΗ, icosaedri vero triangulum ΚΛΘ: dico eundem circulum comprehendere pentagonum ΓΔΕΖΗ & ΚΛΘ triangulum.

Jungatur ΔΗ: ergo [per 8. & 17. 13] ΔΗ est cubi latus. exponatur recta linea quædam ΜΝ, ita ut quadratum ex ΑΒ quadrati ex ΜΝ sit quintuplum. est autem [per cor. 16. 13.] & sphæræ diameter potentia quintupla ejus quæ est ex centro circuli, à quo icosaedrum describitur. secetur [per 30. 6.] ΜΝ extrema ac media ratione in Ξ: & sit ΜΞ portio major; ergo [per 5. & 9 13] ΜΞ est decagoni latus. & quoniam quadratum ex ΒΑ quintuplum est quadrati ex ΜΝ, & triplum quadrati ex ΔΗ; erunt tria quadrata ex ΔΗ quadratis quinque ex ΜΝ æqualia. ut autem tria quadrata ex ΔΗ ad quadrata quinque ex ΜΝ ita [per 8. 13. & 7. 14.] tria quadrata ex ΓΗ ad quinque quadrata ex ΜΞ: tria igitur quadrata ex ΓΗ quinque quadratis ex ΜΞ sunt æqualia. quinque autem quadrata ex ΚΛ æqualia sunt [per 5. 9. & 10. 13.] quinque quadratis ex ΜΝ & quinque quadratis ex ΜΞ: ergo quinque quadrata ex ΚΛ tribus quadratis ex ΔΗ & tribus quadratis ex ΓΗ sunt æqualia sed tria quadrata ex ΔΗ & tria quadrata ex ΓΗ æqualia sunt quindecim quadratis ejus quæ ex centro circuli descripti circa pentagonum ΓΔΕΖΗ, antea enim [per lem. præm.] demonstratum est quadrata ex ΔΗ, ΓΗ quintupla esse quadrati ejus quæ est ex centro circuli circa pentagonum ΓΔΕΖΗ descripti. quinque autem quadrata ex ΚΛ sunt æqualia quindecim quadratis ejus quæ est ex centro circuli descripti circa triangulum ΚΛΘ; etenim demonstratum est [ad 12. 13] quadratum ex ΚΛ triplum esse quadrati ejus quæ est ex centro circuli circa triangulum ΚΛΘ descripti: quindecim igitur quadrata ejus quæ est ex centro circuli quindecim quadratis ejus quæ est ex centro circuli sunt æqualia: quare & diameter diametro est æqualis.

Idem igitur circulus comprehendit & dodecaedri pentagonum & icosaedri triangulum in eadem sphæra descriptorum.





Prop. III. Theor.

Si fuerit pentagonum æquilaterum & æquiangulum, & circa ipsum circulus; à centro autem ad unum latus perpendicularis ducta fuerit: quod tricies sub uno latere & perpendiculari continetur superficiei dodecaedri est æquale.

κοσαέδρου, καὶ ἔστω ἓν μὲν τὸ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον τὸ ΓΔΕΖΗ, εἰκοσαέδρου δὲ τρίγωνον τὸ ΚΛΘ· λέγω ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό, τε ΓΔΕΖΗ πεντάγωνον καὶ τὸ ΚΛΘ τρίγωνον.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΔΗ· κύβου ἄρα πλευρά ἡ ΔΗ. ἐκκείσθω δή τις εὐθεῖα ἡ ΜΝ, ὥστε πενταπλάσιον εἶναι τὸ ἀπὸ ΑΒ τοῦ ἀπὸ ΜΝ. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασία τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσαέδρον ἀναγέγραπται. τετμήσθω ἡ ΜΝ ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Ξ, καὶ ἔστω τὸ μεῖζον τμῆμα ἡ ΜΞ δεκαγώνου ἄρα ἡ ΜΞ. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιον τὸ ἀπὸ ΒΑ τοῦ ἀπὸ ΜΝ, τριπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ ΒΑ τοῦ ἀπὸ ΔΗ· τρία ἄρα τὰ ἀπὸ ΔΗ ἴσα πέντε τοῖς ἀπὸ ΜΝ. ὡς δὲ τρία τὰ ἀπὸ ΔΗ πρὸς πέντε τὰ ἀπὸ ΜΝ οὕτως τρία τὰ ἀπὸ ΓΗ πρὸς πέντε τὰ ἀπὸ ΜΞ· τρία οὖν τὰ ἀπὸ ΓΗ τοῖς πέντε τοῖς ἀπὸ ΜΞ ἐστὶν ἴσα. πέντε δὲ τὰ ἀπὸ ΚΛ τοῖς πέντε τοῖς ἀπὸ ΜΝ καὶ πέντε τοῖς ἀπὸ ΜΞ ἐστὶν ἴσα· πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ ΚΛ ἴσα ἐστὶ τρισὶ τοῖς ἀπὸ ΔΗ καὶ τρισὶ τοῖς ἀπὸ ΓΗ. τρία δὲ τὰ ἀπὸ ΔΗ καὶ τρία τὰ ἀπὸ ΓΗ ἴσα ἐστὶ δέκα καὶ πέντε τοῖς ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου κύκλου περὶ τὸ ΓΔΕΖΗ, προεδείχθη γὰρ τὰ ἀπὸ ΔΗ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΗ πενταπλάσια τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸ πεντάγωνον τὸ ΓΔΕΖΗ κύκλου. ἀλλὰ πέντε μὲν τὰ ἀπὸ ΚΛ ἴσα ἐστὶ δέκα καὶ πέντε τοῖς ἀπὸ τῶν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸ ΚΛΘ τρίγωνον κύκλου, ἐδείχθη δὲ τὸ ἀπὸ ΚΛ τριπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸ ΚΛΘ τριγώνου κύκλου· δεκαπέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ἴσα ἐστὶ τοῖς δεκαπέντε τοῖς ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου· ἡ ἄρα διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ.

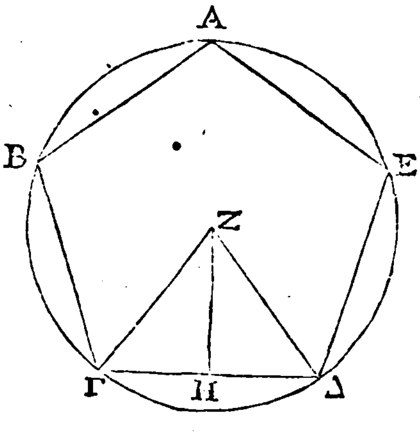
Ὁ αὐτὸς ἄρα κύκλος περιλαμβάνει τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γʹ.

Ἐὰν ᾖ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, καὶ περὶ τοῦτο κύκλος, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου κάθετος ἐπὶ μίαν πλευρὰν ἀχθῇ· τὸ τριακοντάκις ὑπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν καὶ τῆς καθέτου ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφανείᾳ.

Ἔστω πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ περὶ τὸ πεντάγωνον κύκλος, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΗ· λέγω ὅτι τριακοντάκις ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ ἴσον δώδεκα πενταγώνοις τοῖς ΑΒΓΔΕ.

SIT pentagonum æquilaterum & æquiangulum ΑΒΓΔΕ, & circa ipſum circulus; ſumatur autem ejus centrum Ζ, & à Ζ ad ΓΔ perpendicularis ducatur ΖΗ: dico quod tricies ſub ΓΔ, ΖΗ continetur duodecim pentagonis ΑΒΓΔΕ æquale eſſe.

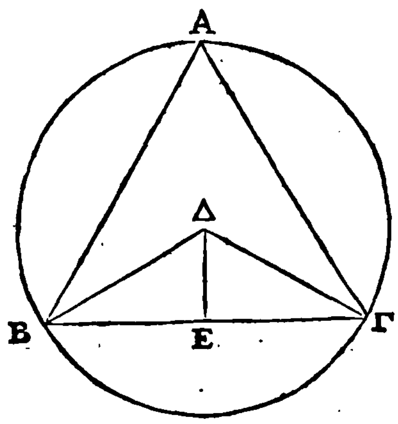


Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΖ, ΖΔ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΓΔΖ τριγώνου, τὸ ἄρα πεντάκις ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ δέκα τρίγωνά ἐστιν ἴσα. τὰ δὲ δέκα τρίγωνα δύο ἐστὶ πεντάγωνα καὶ πάντα ἑξάκις· τὸ ἄρα τριακοντάκις ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ δώδεκα πενταγώνοις. δώδεκα δὲ πεντάγωνα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐστὶν ἐπιφάνεια· τὸ ἄρα τριακοντάκις ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφανείᾳ.

Jungantur ΓΖ, ΖΔ. & quoniam [per 41. 1.] quod ſub ΓΔ, ΖΗ continetur duplum eſt trianguli ΓΔΖ, erit quod quinquies continetur ſub ΓΔ, ΖΗ decem triangulis æquale. decem autem triangula ſunt duo pentagona; pariterque eorum ſextupla: ergo quod tricies ſub ΓΔ, ΖΗ continetur eſt æquale duodecim pentagonis. ſed duodecim pentagona ſunt dodecaedri ſuperficies: ergo quod tricies continetur ſub ΓΔ, ΖΗ ſuperficiei dodecaedri æquale erit.

ΟΜΟΙΩΣ δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἐὰν ᾖ τρίγωνον ἰσόπλευρον ὡς τὸ ΑΒΓ, καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος, καὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ κάθετος ἡ ΔΕ, τὸ τριακοντάκις ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφανείᾳ.

SIMILITER demonſtrabimus, ſi fuerit triangulum æquilaterum, ut ΑΒΓ, & circa ipſum circulus cujus centrum Δ, & ab eo perpendicularis ΔΕ, quod tricies ſub ΒΓ, ΔΕ contineτur ſuperficiei icoſaedri æquale eſſe.



Ἐπεὶ γὰρ πάλιν τὸ ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΔΒΓ, δύο ἄρα τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ, καὶ πάντα τρίς· ἓξ ἄρα τρίγωνα τὰ ΔΒΓ ἴσα ἐστὶ τρισὶ τοῖς ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ. ἓξ δὲ τρίγωνα ὡς τὰ ΔΒΓ ἴσα ἐστὶ δύο τοῖς ΑΒΓ, καὶ πάντα δεκάκις· τὸ ἄρα τριακοντάκις ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ ἴσον ἐστὶν εἴκοσι τοῖς ΑΒΓ τριγώνοις, τουτέστι τῇ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφανείᾳ· ὥστε ἔσται ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ.

Quoniam enim rurſus [per 41. 1.] quod ſub ΒΓ, ΔΕ continetur duplum eſt trianguli ΔΒΓ, erunt duo triangula æqualia ei quod continetur ſub ΒΓ, ΔΕ; pariterque eorum tripla: ſex igitur triangula ΔΒΓ æqualia ſunt tribus quæ ſub ΒΓ, ΔΕ continentur. at ſex triangula ΔΒΓ ſunt æqualia duobus ΑΒΓ triangulis; pariterque eorum decupla: ergo quod tricies ſub ΒΓ, ΔΕ continetur eſt æquale viginti triangulis ΑΒΓ, hoc eſt icoſaedri ſuperficiei. erit igitur ut dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri ita quod continetur ſub ΓΔ, ΖΗ [fig. præc.] ad id quod ſub ΒΓ, ΔΕ continetur [fig. annex.]

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ πεντάγωνον κύκλου ἐπ' αὐτὴν καθέτου ἀγομένης, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου ἐπ' αὐτὴν καθέτου ἀγομένης, τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων εἰκοσαέδρου καὶ δωδεκαέδρου.

Corollarium.

Ex hoc vero perſpicuum eſt, ut dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita eſſe quod continetur ſub latere pentagoni & recta linea, quæ à centro circuli circa pentagonum deſcripti in ipſum latus perpendicularis ducitur, ad id quod continetur ſub latere icoſaedri & perpendiculari, quæ à centro circuli circa triangulum deſcripti ad ipſum latus ducta fuerit; nimirum dodecaedro & icoſaedro in eadem ſphæra deſcriptis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

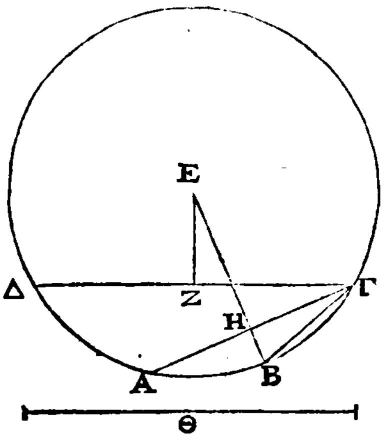
Τούτου δῆλου ὄντος, δεικτέον, ὅτι ἔσται ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκο-

PROP. IV. THEOR.

Hoc probato, demonſtrandum erit, ut dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſae-

icosaedri ita esse latus cubi ad icosaedri latus.

EXponatur circulus ΔΒΓ comprehendens [per 2. 14.] & dodecaedri pentagonum & icosaedri triangulum in eadem sphæra descriptorum, & in ipso describatur trianguli quidem æquilateri latus ΓΔ, pentagoni vero latus ΑΓ; sumatur circuli centrum Ε, & ab eo ad ΔΓ, ΓΑ perpendiculares ducantur ΕΖ, ΕΗ, & producatur in directum ipsi ΕΗ recta linea ΗΒ; jungaturque ΒΓ, & exponatur cubi latus Θ: dico ut dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri ita esse Θ ad ipsam ΓΔ.



Quoniam enim [per 9.13.] utriusque simul ΕΒΓ extrema ac media ratione sectæ major portio est ΒΕ, & est [per 1. 14.] utriusque quidem ΕΒΓ dimidia ΕΗ, ipsius vero ΒΕ [per cor. 1. 14.] dimidia ΕΖ: erit & ipsius ΕΗ extrema ac media ratione sectæ major portio ΕΖ. est autem & ipsius Θ extrema ac media ratione sectæ major portio ΓΑ, ut in dodecaedro [ad cor. 17. 13.] ostensum fuit: ut igitur Θ ad ΓΑ ita est [per 7. 14.] ΕΗ ad ΕΖ; ideoque [per 16. 6.] contentum sub Θ, ΖΕ est æquale ei quod sub ΓΑ, ΕΗ continetur. & quoniam est [per 1. 6.] ut Θ ad ΓΔ ita quod continetur sub Θ, ΕΖ ad contentum sub ΓΔ, ΕΖ; ei vero, quod sub Θ, ΕΖ continetur est æquale contentum sub ΓΑ, ΕΗ: erit [per 16.6.] ut Θ ad ΓΔ ita contentum sub ΓΑ, ΕΗ ad id quod sub ΓΔ, ΕΖ continetur, hoc est [per cor. 3. 14.] ut dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri ita Θ ad ΓΔ.

ALITER

Demonstrare, ut dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita esse latus cubi ad icosaedri latus, hoc quidem præmisso.

LEMMA.

Sit circulus ΑΒΓ, & in eo describantur æquilateri pentagoni latera ΑΒ, ΑΓ, & jungatur ΒΓ; sumatur autem circuli centrum Δ, & jungatur ΑΔ, ipsique ΑΔ producatur in directum ΔΕ, ponatur ipsius ΑΔ dimidia ΔΖ, sitque ΗΓ ipsius ΓΘ tripla: dico quod sub ΑΖ, ΒΘ continetur pentagono æquale esse.

Jungatur enim ΒΔ. & quoniam ΑΔ dupla est ipsius ΔΖ, erit ΑΖ ipsius ΑΔ sesquial-

σαέδρου οὕτως ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν.

ΕΚκείσθω κύκλος περιλαμβάνων τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον, τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, ὁ ΔΒΓ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΔΒΓ κύκλον τριγώνου μὲν ἰσοπλεύρου πλευρὰ ἡ ΓΔ, πενταγώνου δὲ ἡ ΑΓ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὰς ΔΓ, ΓΑ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ ΕΗ εὐθεῖα ἡ ΗΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ ἐκκείσθω κύβου πλευρὰ ἡ Θ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου οὕτως ἡ Θ πρὸς τὴν ΓΔ.

Ἐπεὶ γὰρ συναμφοτέρου τῆς ΕΒΓ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΒΕ, καὶ ἔστι συναμφοτέρου μὲν τῆς ΕΒΓ ἡμίσεια ἡ ΕΗ, τῆς δὲ ΒΕ ἡμίσεια ἡ ΕΖ· καὶ τῆς ΕΗ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΕΖ. ἔστι δὲ καὶ τῆς Θ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμα ἡ ΓΑ, ὡς ἐν τῷ δωδεκαέδρῳ ἐδείχθη· ὡς ἄρα ἡ Θ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΕΖ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ Θ, ΖΕ τῷ ὑπὸ ΓΑ, ΕΗ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Θ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ὑπὸ Θ, ΕΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΔ, ΕΖ, τῷ δὲ ὑπὸ Θ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΓΑ, ΕΗ· ὡς ἄρα ἡ Θ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΑ, ΕΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΔ, ΕΖ, τουτέστιν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν οὕτως ἡ Θ πρὸς τὴν ΓΔ.

ΑΛΛΩΣ

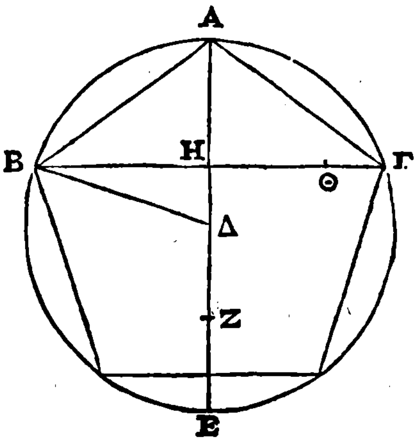
Δεῖξαι, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰν προγραφέντος τοῦδε.

ΛΗΜΜΑ.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον πενταγώνου ἰσοπλεύρου πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Δ ἐπεζεύχθω εὐθεῖα ἡ ΑΔ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ ΑΔ εὐθεῖα ἡ ΔΕ, καὶ κείσθω τῆς μὲν ΑΔ εὐθείας ἡμίσεια ἡ ΔΖ, ἡ δὲ ΗΓ τῆς ΓΘ τριπλῆ ἔστω· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΒΘ ἴσον ἐστὶ τῷ πενταγώνῳ.

Ἀπὸ γὰρ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Δ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΔ τῆς ΔΖ, ἡμιολία ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΔ ἡ ΑΖ.

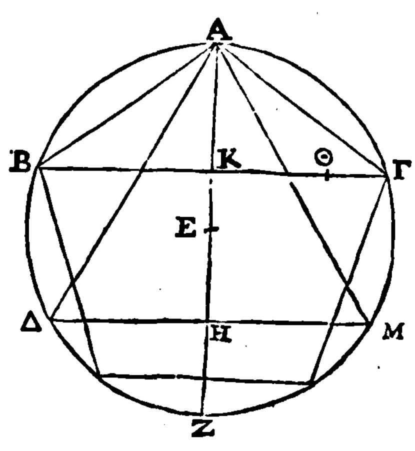
ΑΖ. πάλιν, ἐπεὶ τριπλῆ ἐστιν ἡ ΗΓ τῆς ΓΘ, διπλῆ δὲ ἡ ΗΘ τῆς ΘΓ, ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΓ τῆς ΘΗ· ὡς ἄρα ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς τὴν ΗΘ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΘΗ τῷ ὑπὸ ΔΑ, ΓΗ. ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΒΗ ἴση ἐστί· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΔ, ΒΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΖ, ΘΗ. τὸ δὲ ὑπὸ ΑΔ, ΒΗ δύο ἐστὶ τρίγωνα ὡς τὰ ΑΒΔ· καὶ τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΗΘ ἄρα δύο ἐστὶ ΑΒΔ· πέντε ἄρα τὰ ὑπὸ ΑΖ, ΗΘ δέκα τρίγωνά ἐστι. δέκα δὲ τρίγωνα δύο ἐστὶ πεντάγωνα· πέντε ἄρα τὰ ὑπὸ ΑΖ, ΗΘ δύο πενταγώνοις ἴσα ἐστί. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΗΘ τῆς ΘΓ, τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΗΘ διπλοῦν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΖ, ΘΓ· δύο ἄρα τὰ ὑπὸ ΑΖ, ΘΓ ἴσα ἐστὶν ἑνὶ τῷ ὑπὸ ΑΖ, ΗΘ, καὶ δέκα τὰ ὑπὸ ΑΖ, ΘΓ ἴσα ἐστὶν πέντε τοῖς ὑπὸ ΑΖ, ΗΘ, τουτέστι δύο πενταγώνοις· ὥστε πέντε τὰ ὑπὸ ΑΖ, ΘΓ ἴσα ἐστὶν ἑνὶ πενταγώνῳ. πεντάκις δὲ τὰ ὑπὸ ΑΖ, ΘΓ ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΖ, ΘΒ, ἐπεὶ δὴ πενταπλῆ ἐστιν ἡ ΘΒ τῆς ΘΓ, καὶ κοινὸν ὕψος ἐστὶν ἡ ΑΖ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΖ, ΒΘ ἴσον ἐστὶν ἑνὶ πενταγώνῳ.



ΤΟΥΤΟΥ δήλου ὄντος, νῦν ἐκκείσθω κύκλος ὁ περιλαμβάνων τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον, τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, καὶ ἐγγεγράφθωσαν εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον πενταγώνου ἰσοπλεύρου πλευραὶ αἱ ΒΑ, ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Ε ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΕ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ ἔστω ἡ ΑΕ τῆς ΕΘ διπλῆ, τριπλῆ δὲ ἡ ΚΓ τῆς ΓΘ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η τῇ ΑΖ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΜ· τριγώνου ἄρα ἐστὶν ἰσοπλεύρου ἡ ΔΜ· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΜ τρίγωνον. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ὑπὸ ΑΗ, ΘΒ ἴσον ἐστὶ τῷ πενταγώνῳ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΗ, ΗΔ τῷ ΑΔΜ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΘΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΗΔ οὕτω τὸ πεντάγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΗΔ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΔΗ· καὶ ὡς ἄρα δώδεκα αἱ ΘΒ πρὸς εἴκοσι ΔΗ οὕτω δώδεκα πεντάγωνα πρὸς εἴκοσι τρίγωνα, τουτέστι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου. καὶ ἐστι δώδεκα μὲν αἱ ΒΘ δέκα αἱ ΒΓ, ἡ μὲν γὰρ ΒΘ τῆς ΘΓ ἐστι πενταπλῆ, ἡ δὲ ΒΓ τῆς ΘΓ ἑξαπλῆ·

tera. rursus, quoniam ΗΓ tripla est ipsius ΓΘ, erit ΗΘ ipsius ΘΓ dupla: sesquialtera igitur est ΗΓ ipsius ΘΗ: quare ut ΖΑ ad ΑΔ ita ΓΗ ad ΗΘ: ideoque [per 16. 6.] contentum sub ΑΖ, ΘΗ est æquale ei quod sub ΔΑ, ΓΗ continetur. sed ΓΗ est æqualis ΒΗ: ergo contentum sub ΑΔ, ΒΗ est æquale ei quod sub ΑΖ, ΘΗ continetur. contentum autem sub ΑΔ, ΒΗ [per 41. 1.] est æquale duobus triangulis ut ΑΒΔ: quod igitur sub ΑΖ, ΗΘ continetur æquale est duobus triangulis ΑΒΔ: ergo quinque rectangula contenta sub ΑΖ, ΗΘ decem sunt triangula. decem autem triangula duo pentagona sunt: quinque igitur rectangula contenta sub ΑΖ, ΗΘ duobus pentagonis sunt æqualia. & quoniam ΗΘ est dupla ΘΓ, erit contentum sub ΑΖ, ΗΘ duplum ejus quod sub ΑΖ, ΘΓ continetur; ergo duo rectangula contenta sub ΑΖ, ΘΓ sunt æqualia uni quod continetur sub ΑΖ, ΗΘ decem igitur rectangula contenta sub ΑΖ, ΘΓ sunt æqualia quinque quæ sub ΑΖ, ΗΘ continentur, hoc est duobus pentagonis: ergo quinque contenta sub ΑΖ, ΘΓ uni pentagono sunt æqualia. quinque autem rectangula contenta sub ΑΖ, ΘΓ sunt æqualia ei quod continetur sub ΑΖ, ΘΒ; quoniam ΘΒ quidem quintupla est ipsius ΘΓ, & ΑΖ est communis altitudo: quod igitur sub ΑΖ, ΒΘ continetur uni pentagono est æquale.

Hoc demonstrato, nunc exponatur circulus comprehendens & dodecaedri pentagonum & icosaedri triangulum in eadem sphæra descriptorum, atque in circulo ΑΒΓ describantur æquilateri pentagoni latera ΒΑ, ΑΓ, & jungatur ΒΓ; sumatur præterea circuli centrum Ε, & ab Α ad Ε ducatur ΑΕ, & producatur ΑΕ ad Ζ; sitque ΑΕ dupla ipsius ΕΗ, ipsa vero ΚΓ ipsius ΓΘ tripla; & per Η ipsi ΑΖ ad rectos angulos ducatur ΔΜ: ergo [per cor. 1. 14.] ΔΜ est latus trianguli æquilateri, & æquilaterum est ΑΔΜ triangulum. & quoniam [per lem. præm.] rectangulum quidem contentum sub ΑΗ, ΘΒ est æquale pentagono; contentum vero sub ΑΗ, ΗΔ [per 41. 1.] æquale triangulo ΑΔΜ: erit ut rectangulum contentum sub ΑΗ, ΘΒ ad rectangulum sub ΑΗ, ΗΔ ita pentagonum ad triangulum. ut autem rectangulum contentum sub ΑΗ, ΒΘ ad rectangulum sub ΑΗ, ΗΔ ita [per 1. 6.] ΒΘ ad ΔΗ: & igitur ut duodecim ΘΒ ad viginti ΔΗ ita duodecim pentagona ad viginti triangula; hoc est, dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri. & duodecim quidem ΒΘ sunt decem ΒΓ; etenim ΒΘ quintupla est [per constr.] ipsius ΘΓ, & ΒΓ ipsius ΘΓ sextupla:



 ideo-

ideoque duodecim ΒΘ sunt æquales decem ΒΓ. viginti autem ΔΗ sunt decem ΔΜ; dupla enim est ΔΜ ipsius ΔΗ: ut igitur decem ΒΓ ad decem ΔΜ, hoc est ut ΒΓ ad ΔΜ, ita dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri. atque [per 8. & 17. 13.] est ΒΓ quidem cubi latus, ΔΜ vero latus icosaedri: & igitur ut dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri ita ΒΓ ad ΔΜ, hoc est cubi latus ad latus icosaedri.

δώδεκα ἄρα αἱ ΒΘ ἴσαι εἰσὶ δέκα τῆς ΒΓ. εἴκοσι δὲ ἡ ΔΗ δέκα εἰσὶν αἱ ΔΜ, διπλῆ γὰρ ἡ ΔΜ τῆς ΔΗ· ὡς ἄρα δέκα αἱ ΒΓ πρὸς δέκα τὰς ΔΜ, τουτέστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΔΜ, οὕτως ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν. καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΒΓ ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ, ἡ δὲ ΔΜ ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρά· καὶ ὡς ἄρα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΔΜ, τουτέστιν ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν.

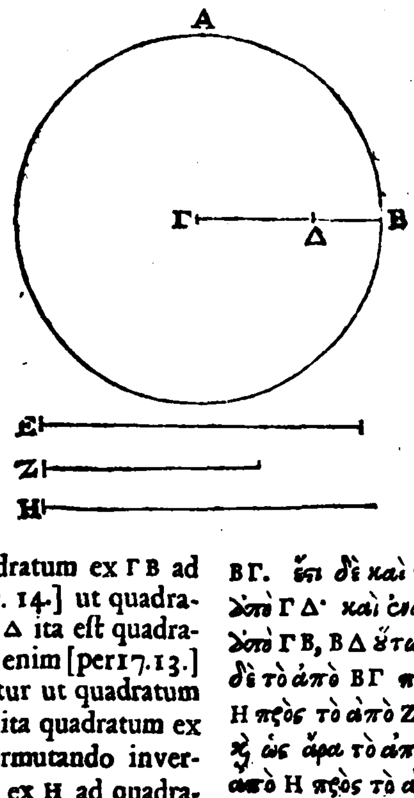
Prop. V. Theor.

Ostendendum vero est etiam, qualibet recta linea extrema ac media ratione secta, quam rationem habet ea quæ potest quadratum totius & quadratum majoris portionis ad eam quæ potest quadratum totius & quadratum minoris portionis, eandem habere cubi latus ad latus icosaedri.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ έ.

Δεικτέον δὴ, ὅτι καὶ εὐθείας ἡσδηποτοῦν τμηθείσης ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ὃν λόγον ἔχει ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν.

SIT circulus ΑΒ comprehendens & dodecaedri pentagonum & [per 2. 14.] icosaedri triangulum in eadem sphæra descriptorum, sumaturque circuli centrum Γ, & à Γ ducatur recta linea utcunque ΓΒ, & secetur extrema ac media ratione in Δ ita ut ΓΔ sit major portio: quare [per 5. & 9. 13.] ΓΔ est latus decagoni in eodem circulo descripti. exponatur [per 18. 13.] icosaedri latus Ε, dodecaedri Ζ, & cubi Η: ergo Ε est trianguli æquilateri latus, Ζ pentagoni in eodem circulo descripti, atque [per cor. 17. 13.] est Ζ ipsius Η major portio. & quoniam Ε est æqualis lateri trianguli æquilateri; trianguli autem æquilateri latus [per 12. 13.] est potentia triplum ipsius ΒΓ: ergo quadratum ex Ε quadrati ex ΒΓ est triplum. suntque [per 4. 13.] quadrata ex ΒΓ, ΒΔ quadrati ex ΓΔ tripla; & permutando igitur ut quadratum ex Ε ad quadrata ex ΓΒ, ΒΔ ita quadratum ex ΓΒ ad quadratum ex ΓΔ. sed [per 7. 14.] ut quadratum ex ΒΓ ad quadratum ex ΓΔ ita est quadratum ex Η ad quadratum ex Ζ, est enim [per 17. 13.] Ζ major portio ipsius Η: & igitur ut quadratum ex Ε ad quadrata ex ΓΒ, ΒΔ ita quadratum ex Η ad quadratum ex Ζ; & permutando invertendoque: ergo ut quadratum ex Η ad quadratum ex Ε ita quadratum ex Ζ ad quadrata ex ΓΒ, ΒΔ. quadrato autem ex Ζ æqualia sunt quæ ex ΒΓ, ΔΓ fiunt quadrata; etenim [per 10. 13.] latus pentagoni potest & hexagoni & decagoni latus: ut igitur quadratum ex Η ad quadratum ex



Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒ περιλαμβάνων τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον, τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Γ, καὶ προσεκβεβλήσθω τις ἀπὸ τοῦ Γ ὡς ἔτυχεν εὐθεῖα ἡ ΓΒ, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Δ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα ἔστω ἡ ΓΔ· δεκαγώνου ἄρα ἐστὶ πλευρὰ ἡ ΓΔ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου. ἐκκείσθω δὴ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἡ Ε, δωδεκαέδρου δὲ ἡ Ζ, κύβου δὲ ἡ Η· ἡ μὲν ἄρα Ε τριγώνου ἰσοπλεύρου ἐστὶ πλευρὰ, ἡ δὲ Ζ πενταγώνου τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου, ἡ δὲ Ζ τῆς Η μεῖζόν ἐστι τμῆμα. καὶ ἐπεὶ ἡ Ε ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἰσοπλεύρου πλευρᾷ, ἡ δὲ τοῦ τριγώνου τοῦ ἰσοπλεύρου πλευρὰ δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς ΒΓ· τριπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ. ἔστι δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ΒΔ τριπλάσια τοῦ ἀπὸ ΓΔ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ Ε πρὸς τὰ ἀπὸ ΓΒ, ΒΔ οὕτω τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ Η πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ· μεῖζον γάρ ἐστι τμῆμα ἡ Ζ τῆς Η· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Ε πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, ΒΔ οὕτω τὸ ἀπὸ Η πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ, καὶ ἐναλλὰξ καὶ ἀνάπαλιν· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Η πρὸς τὸ ἀπὸ Ε οὕτω τὸ ἀπὸ Ζ πρὸς τὰ ἀπὸ ΓΒ, ΒΔ. τῷ δὲ ἀπὸ Ζ ἴσα εἰσὶ τὰ ἀπὸ ΒΓ, ΔΓ, ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰν, καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Η πρὸς τὸ ἀπὸ Ε οὕτω

Ε οὕτω τὰ ἀπὸ ΒΓ, ΓΔ πρὸς τὰ ἀπὸ ΓΒ, ΒΔ. ὡς δὲ τὰ ἀπὸ ΒΓ, ΓΔ πρὸς τὰ ἀπὸ ΓΒ, ΒΔ, οὕτως, εὐθείας ἧς δήποτε ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Η πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε, οὕτως, εὐθείας ἧς δήποτε ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. καὶ ἔστι ἡ μὲν Η κύβου πλευρά, ἡ δὲ Ε εἰκοσαέδρου.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἔσται ὡς ἡ δυναμένη τὴν ὅλην καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὴν δυναμένην τὴν ὅλην καὶ τὸ ἔλασσον τμῆμα, οὕτως ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

E ita quadrata ex ΒΓ, ΓΔ ad quadrata ex ΓΒ, ΒΔ. sed [per 7.14.] ut quadrata ex ΒΓ, ΓΔ ad quadrata ex ΓΒ, ΒΔ, ita, qualibet recta linea extrema ac media ratione secta, quadratum totius & majoris portionis ad quadratum totius & minoris portionis: & igitur ut quadratum ex Η ad quadratum ex Ε, ita, qualibet recta linea extrema ac media ratione secta, quadratum totius & majoris portionis ad quadratum totius & minoris portionis. sed est Η quidem cubi latus, Ε vero icosaedri.

Si igitur recta linea extrema ac media ratione secetur, erit ut ea quæ potest totam & majorem portionem ad eam quæ potest totam & minorem portionem, ita cubi latus ad latus icosaedri in eadem sphæra descriptorum. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛʹ.

Δεικτέον δὲ νῦν, ὅτι ὡς ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου οὕτω τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσοι κύκλοι περιλαμβάνουσι τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον, τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων· ἐν δὲ τῇ σφαίρᾳ οἱ ἴσοι κύκλοι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, αἱ γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὰ τῶν κύκλων ἐπίπεδα κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι τε εἰσὶ καὶ ἐπὶ τὰ κέντρα τῶν κύκλων πίπτουσιν· ὥστε αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ περιλαμβάνοντος τό, τε τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον καὶ τὸ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον ἴσαι εἰσί, τουτέστι, αἱ κάθετοι· ἰσοϋψεῖς ἄρα εἰσὶν αἱ πυραμίδες, αἱ βάσεις ἔχουσαι τὰ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνα καὶ αἱ βάσεις ἔχουσαι τὰ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνα. αἱ δὲ ἰσοϋψεῖς πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ὡς ἄρα τὸ πεντάγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον οὕτως ἡ πυραμίς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας· καὶ ὡς ἄρα δώδεκα πεντάγωνα πρὸς εἴκοσι τρίγωνα οὕτω δώδεκα πυραμίδες πενταγώνους βάσεις ἔχουσαι πρὸς εἴκοσι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας. καὶ δώδεκα πεντάγωνα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνειά ἐστιν, εἴκοσι δὲ τρίγωνα ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειά ἐστιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν οὕτω δώδεκα πυραμίδες πενταγώνους βάσεις ἔχουσαι πρὸς εἴκοσι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας. καὶ εἰσὶ δώδεκα μὲν πυραμίδες πενταγώνους βάσεις ἔχουσαι τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου, εἴκοσι δὲ πυραμίδες τριγώνους βάσεις ἔχουσαι τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου· καὶ ὡς ἄρα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου οὕτω τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου. ὡς δὲ ἐπιφάνεια τοῦ δωδεκαέδρου

Prop. VI. Theor.

Ostendendum vero nunc est, ut latus cubi ad icosaedri latus ita esse dodecaedri solidum ad solidum icosaedri.

Quoniam enim [per 2.14.] æquales circuli comprehendunt & dodecaedri pentagonum & icosaedri triangulum in eadem sphæra descriptorum: in sphæris autem æquales circuli æqualiter à centro distant; nam quæ à centro sphæræ ad plana circulorum perpendiculares ducuntur & æquales sunt & in centra circulorum cadunt; ergo quæ à centro sphæræ ducuntur ad centra circulorum, quæ comprehendunt dodecaedri pentagonum & icosaedri triangulum, æquales sunt, videlicet perpendiculares ipsæ; itaque & pyramides, quæ bases habent dodecaedri pentagona & icosaedri triangula, æquealtæ sunt. pyramides autem æquealtæ [per 5. & 6.12.] inter se sunt ut bases: ut igitur pentagonum ad triangulum ita pyramis, cujus basis est dodecaedri pentagonum & vertex centrum sphæræ, ad pyramidem, cujus basis est icosaedri triangulum vertex autem sphæræ centrum, ergo & ut duodecim pentagona ad viginti triangula ita duodecim pyramides, pentagonales bases habentes, ad viginti pyramides quæ triangulares habent bases. sed duodecim pentagona sunt dodecaedri superficies, & viginti triangula superficies icosaedri: est igitur ut dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri ita duodecim pyramides, pentagonales bases habentes, ad viginti pyramides, quæ triangulares bases habent. & duodecim pyramides, pentagonales bases habentes, sunt dodecaedri solidum; viginti autem pyramides, quæ triangulares habent bases, sunt solidum icosaedri: quare & ut dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri ita solidum dodecaedri ad icosaedri solidum. ut autem dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri ita ostensum est [ad 4. 14.] esse latus cubi ad icosaedri latus: & igitur ut latus cubi ad icosaedri latus ita dodecaedri solidum ad solidum icosaedri.

πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ εἰκοσαέδρου οὕτως ἐδείχθη ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν· καὶ ὡς ἄρα ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰν οὕτω τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου.

Prop. VII. Theor.

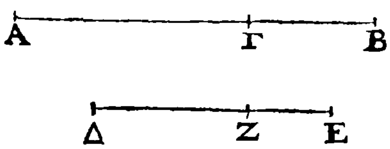
Deinde vero, si duæ rectæ lineæ extrema ac media ratione sectæ fuerint, in subjecta eas esse analogia, ita demonstrabimus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η΄.

Καὶ ἑξῆς, ὅτι ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῶσιν, ἐν ἀναλογίᾳ εἰσὶ τῇ ὑποκειμένῃ, δείξομεν οὕτως.

Secetur enim ΑΒ extrema ac media ratione in Γ, & ejus major portio sit ΑΓ; & similiter ΔΕ extrema ac media ratione secetur in Ζ, ut ΔΖ sit ejus portio major: dico ut tota ΑΒ ad majorem portionem ΑΓ ita esse totam ΔΕ ΔΖ majorem portionem.

Τετμήσθω γὰρ ἡ μὲν ΑΒ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, μεῖζον δὲ τμῆμα αὐτῆς ἔστω ἡ ΑΓ· ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΔΕ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Ζ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα αὐτῆς ἔστω ἡ ΔΖ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὅλη ἡ ΑΒ πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ οὕτως ὅλη ἡ ΔΕ πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ ΔΖ.



Quoniam enim [per 17. 6.] rectangulum quidem sub ΑΒ, ΒΓ est æquale quadrato ex ΑΓ; rectangulum vero sub ΔΕ, ΕΖ æquale quadrato ex ΔΖ: erit ut rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ ad quadratum ex ΑΓ ita rectangulum sub ΔΕ, ΕΖ ad quadratum ex ΔΖ: quare etiam [per 15. 5.] ut rectangulum quod quater continetur sub ΑΒ, ΒΓ ad quadratum ex ΑΓ ita quod quater continetur sub ΔΕ, ΕΖ ad quadratum ex ΔΖ. componendoque ut rectangulum quod quater continetur sub ΑΒ, ΒΓ una cum quadrato ex ΑΓ ad quadratum ex ΑΓ ita quod quater continetur sub ΔΕ, ΕΖ una cum quadrato ex ΔΖ ad quadratum ex ΔΖ. ergo etiam [per 8.2.] ut quadratum ex utraque simul ΑΒ, ΒΓ ad quadratum ex ΑΓ ita quadratum ex utraque simul ΔΕ, ΕΖ ad quadratum ex ΔΖ: quare [per 22. 6.] & longitudine; sc. ut utraque simul ΑΒ, ΒΓ ad ΑΓ ita utraque simul ΔΕ, ΕΖ ad ΔΖ: unde componendo ut utraque simul ΑΒ, ΒΓ una cum ΑΓ ad ΑΓ, hoc est duæ ΑΒ ad ΑΓ, ita utraque simul ΔΕ, ΕΖ una cum ΔΖ ad ΔΖ, hoc est duæ ΔΕ ad ΔΖ: pariterque antecedentium dimidia; videlicet ut ΑΒ ad ΑΓ ita ΔΕ ad ΔΖ. quod erat demonst.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΓ, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΔΖ· ἔστι δὲ ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ· καὶ ὡς τὸ τετράκις ἄρα ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἐστὶν οὕτω τὸ τετράκις ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ. καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς τὸ τετράκις ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ οὕτω τὸ τετράκις ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΔΖ· ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ οὕτω τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ· καὶ μήκει, ὡς συναμφότερος ἡ ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτω συναμφότερος ἡ ΔΕ, ΕΖ πρὸς ΔΕ· συνθέντι ἄρα ὡς συναμφότεροι αἱ ΑΒ, ΒΓ μετὰ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτω συναμφότεροι αἱ ΔΕ, ΕΖ μετὰ τῆς ΔΖ πρὸς τὴν ΔΖ, τουτέστι δύο αἱ ΔΕ πρὸς ΔΖ· καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση, τουτέστι ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΔΖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Corollarium.

Itaque hoc [ad 5. 14.] demonstrato; videlicet, qualibet recta linea extrema ac media ratione secta, quam rationem habet ea quæ potest quadratum totius & majoris portionis ad eam quæ potest quadratum totius & minoris portionis, eandem habere cubi latus ad latus icosaedri. atque hoc etiam demonstrato [ad 5.14.] ut latus cubi ad icosaedri latus, ita esse dodecaedri superficiem ad superficiem icosaedri in eadem sphæra descriptorum: & insuper hoc [ad 6. 14.] cognito, ut dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri ita esse dodecaedrum ad ipsum icosaedrum; propterea quod idem cir-

Πόρισμα.

Δεδειγμένου τοῦδε, ὅτι, εὐθείας ἧσδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθείσης, ὃν λόγον ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, τοῦτον ἔχει ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν. δεδειγμένου δὴ τοῦδε, ὅτι ὡς ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν, οὕτως ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων· προσεπηνεγμένου δὲ καὶ τοῦδε, ὅτι ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν οὕτως καὶ αὐτὸ τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον, διὰ τὸ ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ κύ-

κλου

κλου περιλαμβάνεσθαι τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον· δῆλον ὅτι ἐὰν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφῇ δωδεκάεδρόν τε καὶ εἰκοσάεδρον, λόγον ἕξουσιν εὐθείας οἱασδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθείσης ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος.

[Τούτων δὴ πάντων γνωρίμων ἡμῖν γενομένων, δῆλον ὅτι ἐὰν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφῇ δωδεκάεδρον καὶ εἰκοσάεδρον, τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον λόγον ἕξει ὃν εὐθείας οἱασδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης ἡ δυναμένη τὴν ὅλην καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὴν δυναμένην ὅλην καὶ ἔλαττον τμῆμα.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον οὕτως ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, τουτέστιν ὡς ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν· ὡς δὲ ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου, οὕτως ἐστὶν, εὐθείας ἧς δηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, ἡ δυναμένη τὴν ὅλην καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὴν δυναμένην τὴν ὅλην καὶ τὸ ἔλαττον τμῆμα· ὡς ἄρα τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, οὕτως, εὐθείας ἧς δηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, ἡ δυναμένη τὴν ὅλην καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὴν δυναμένην τὴν ὅλην καὶ τὸ ἔλαττον τμῆμα.]

culus comprehendit & dodecaedri pentagonum & icosaedri triangulum: constat, si in ipsa sphæra describatur & dodecaedrum & icosaedrum, eandeminter se rationem habere, quam, si recta linea extrema ac media ratione secetur, habet ea quæ potest quadratum totius & majoris portionis ad eam quæ potest quadratum totius ac minoris portionis.

[Istis ergo omnibus jam notis, patet, si eidem sphæræ inscribantur dodecaedrum & icosaedrum, eam rationem habere dodecaedrum ad icosaedrum, quam, si recta quævis extrema ac media ratione secetur, ea quæ potest totam & portionem majorem ad illam quæ totam & minorem portionem potest.

Quoniam enim est [per 5.14.] ut dodecaedrum ad icosaedrum ita dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, hoc est ita latus cubi ad icosaedri latus; ut autem latus cubi ad icosaedri latus, ita, qualibet recta linea extrema ac media ratione secta, potens quadratum totius & majoris portionis ad eam quæ potest quadratum totius & minoris portionis: ergo ut dodecaedrum ad icosaedrum, quæ in eadem sphæra describuntur, ita, qualibet recta linea extrema ac media ratione secta, potens quadratum totius & majoris portionis ad eam quæ potest quadratum totius & minoris portionis.]

Cuncta autem ista uncis conclusa rectius omitti possunt: etsi in omnibus quidem *Codicibus Græcis* reperiantur.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΣΣΑΡΕΣΚΑΙΔΕΚΑΤΟΝ,

ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΩΝ ΠΕΜΠΤΟΝ,

ΩΣ ΟΙΟΝΤΑΙ ΤΙΝΕΣ,

Ὡς ἄλλοι δὲ, ΥΨΙΚΛΕΟΥΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ περὶ τῶν ε΄. σωμάτων δεύτερον.

EUCLIDIS,

UT QUIDAM ARBITRANTUR,

ELEMENTORUM

LIBER DECIMUSQUINTUS,

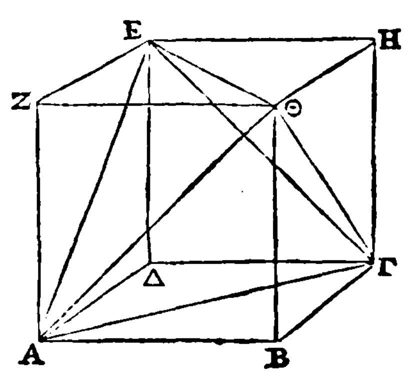
QUI ET SOLIDORUM QUARTUS,

Aut, *verius* juxta alios, HYPSICLIS ALEXANDRINI de Quinque Corporibus Liber secundus.

Prop. I. Probl.

In dato cubo * pyramidem describere.

SIT datus cubus ΑΒΓΔΕΖΗΘ, in quo oporteat pyramidem describere. jungantur ΑΓ, ΑΕ, ΓΕ, ΑΘ, ΕΘ, ΘΓ. itaque perspicuum est triangula ΑΕΓ, ΑΘΕ, ΑΘΓ, ΓΘΕ æquilatera esse; quadratorum enim diametri sunt eorum latera: pyramis igitur est ΑΕΓΘ [per 26. def. 11.] & descripta est in dato cubo. quod erat faciendum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ α΄.

Εἰς τὸν δοθέντα κύβον πυραμίδα ἐγγράψαι.

ΕΣΤΩ ὁ δοθεὶς κύβος ὁ ΑΒΓΔΕΖΗΘ, εἰς ὃν δεῖ πυραμίδα ἐγγράψαι. ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΑΕ, ΓΕ, ΑΘ, ΕΘ, ΘΓ. φανερὸν δὴ ὅτι τὰ ΑΕΓ, ΑΘΕ, ΑΘΓ, ΓΘΕ τρίγωνα ἰσόπλευρά ἐστι, τῶν τετραγώνων γάρ εἰσι διάμετροι αἱ πλευραί· πυραμὶς ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕΓΘ, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν δοθέντα κύβον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. II. Probl.

In data pyramide octaedrum describere.

SIT data pyramis ΑΒΓΔ, cujus latera secentur bifariam in punctis Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ, atque jungantur ΘΚ, ΘΛ, ΕΖ, ΖΗ & reliquæ.

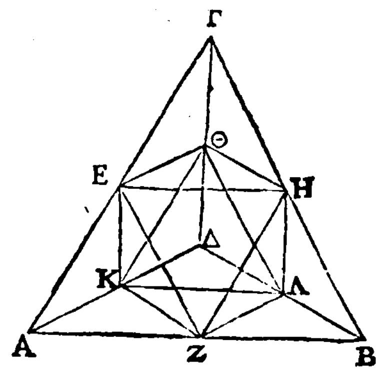
ΠΡΟΤΑΣΙΣ β΄.

Εἰς τὴν δοθεῖσαν πυραμίδα ὀκτάεδρον ἐγγράψαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα πυραμὶς ἡ ΑΒΓΔ, καὶ τετμήσθω δίχα τοῖς Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ σημείοις, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΚ, ΘΛ, ΕΖ, ΖΗ καὶ αἱ λοιπαί.

* Sive potius *tetraedron*, quod & in sequentibus intelligendum est.

* καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ διπλῆ ἐστιν ἑκατέρας τῆς ΘΚ, ΗΖ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ τῇ ΗΖ καὶ παράλληλος. ὁμοίως καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΖΚ ἴση τέ ἐστι καὶ παράλληλος· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΚΖΗ. λέγω ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τῆς ΚΑ κάθετοι ἀχθῶσιν ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ ΕΖΒΗ, ΖΓΕΗ, ΕΖΘΗ, ΘΚΖΗ, ὁμοίως δείξομεν τὰ ἐπὶ τοῦ ΘΚΖΗ τετραγώνου ἰσόπλευρα. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



* quoniam igitur ΑΓ dupla est utriusque ΘΚ, ΗΖ, erit ΘΚ ipsi ΗΖ æqualis & parallela. similiter & ΘΗ æqualis & parallela ipsi ΖΚ: æquilaterum igitur est ΘΚΖΗ. dico & rectangulum esse. si enim ab ipsa ΚΛ perpendiculares ducantur ad plana ΕΖΒΗ, ΖΓΕΗ, ΕΖΘΗ, ΘΚΖΗ, similiter demonstrabimus quæ in quadrato ΘΚΖΗ æquilatera esse. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γʹ.

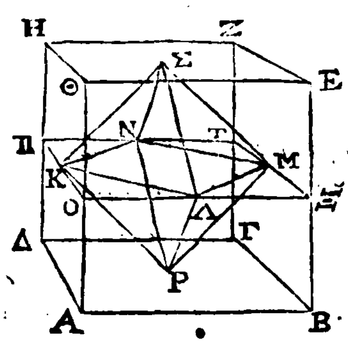
Εἰς τὸν δοθέντα κύβον ὀκτάεδρον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύβος ὁ ΑΒΓΔΕΖΗΘ, καὶ εἰλήφθω τὰ κέντρα ἐφεστώτων τετραγώνων τὰ Κ, Λ, Μ, Ν· λέγω ὅτι τὸ ΚΛΜΝ τετράγωνόν ἐστιν. ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Κ, Λ, Μ, Ν σημείων τῶν ΔΑ, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ παράλληλοι αἱ ΠΟ, ΟΞ, ΞΤ, ΤΠ. ἐπεὶ οὖν διπλῆ ἐστιν ἡ ΠΟ τῆς ΟΚ, ἡ δὲ ΞΟ τῆς ΟΛ, ἴση ἡ ΠΟ τῇ ΞΟ, διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΟΚ τῇ ΟΛ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΚΛ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΟΛ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ἀπὸ ΜΛ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΛΞ· ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΚΛ τῷ ἀπὸ ΜΛ, καὶ ἡ ΚΛ τῇ ΜΛ· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΛΜΝ. καὶ φανερὸν ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. εἰλήφθω τῶν ΒΔ, ΕΗ δύο τετράγωνα, καὶ τὰ κέντρα τὰ Ρ, Σ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΡΚ, ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ, ΣΚ, ΣΛ, ΣΜ, ΣΝ. καὶ φανερὸν ὅτι ἰσόπλευρά ἐστι τὰ περιέχοντα τὸ ὀκτάεδρον τρίγωνα· τῷ γὰρ αὐτῷ λόγῳ ἀποδείξομεν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. III. Probl.

In dato cubo octaedrum describere.

Sit datus cubus ΑΒΓΔΕΖΗΘ, & sumantur centra insistentium quadratorum Κ, Λ, Μ, Ν: dico ΚΛΜΝ quadratum esse. ducantur enim per Κ, Λ, Μ, Ν ipsis ΔΑ, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ parallelæ ΠΟ, ΟΞ, ΞΤ, ΤΠ. quoniam igitur ΠΟ quidem dupla est ipsius ΟΚ, & ΞΟ dupla ipsius ΟΛ, suntque æquales ΠΟ, ΟΞ; erunt & ΟΚ, ΟΛ inter se æquales: quadratum igitur ex ΚΛ [per 47. 1.] duplum est quadrati ex ΟΛ. eadem ratione & quadratum ex ΜΛ duplum est quadrati ex ΛΞ: ergo quadratum ex ΚΛ quadrato ex ΜΛ est æquale, & ipsa ΚΛ ipsi ΜΛ æqualis: æquilaterum igitur est ΚΛΜΝ. & constat etiam illud rectangulum esse. sumantur duo quadrata ΒΔ, ΕΗ, ipsorumque centra Ρ, Σ; atque jungantur ΡΚ, ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ, ΣΚ, ΣΛ, ΣΜ, ΣΝ. perspicuum est æqualia triangula, quæ octaedrum efficiunt, æquilatera esse; hoc enim eadem ratione demonstrabimus. quod erat faciendum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ δʹ.

Εἰς τὸ δοθὲν ὀκτάεδρον κύβον ἐγγράψαι.

Εἰλήφθω τῶν περὶ τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΒΕ, ΑΔΕ τρίγωνα κύκλων τὰ κέντρα τὰ Θ, Λ, Η, Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΘ, ΗΚ, ΛΚ, ΛΘ· λέγω ὅτι ΗΘΚΛ τετράγωνόν ἐστιν. ἤχθωσαν διὰ τῶν Η, Θ, Κ, Λ, ταῖς ΕΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ παράλληλοι αἱ

Prop. IV. Probl.

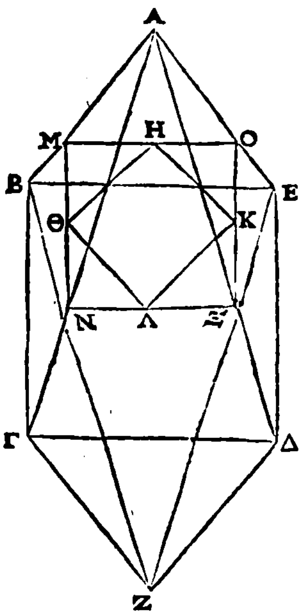
In dato octaedro cubum describere.

Sumantur [per 5. 4.] centra circulorum qui sunt circa triangula ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΒΕ, ΑΔΕ, quæ sint Θ, Λ, Η, Κ; atque ΗΘ, ΗΚ, ΛΚ, ΛΘ jungantur: dico ΗΘΚΛ quadratum esse. ducantur per Η, Θ, Κ, Λ ipsis ΕΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ paral-

* Universus hic liber decimus quintus corruptissimus est. Verum licet demonstrationis modus abhorreat ab illo Veterum castigatissimo, in aliis propositionibus res aliquo saltem modo conficitur; in hac vero propositione quæ sequuntur propositum nullo modo attingunt. liceat igitur breviter ostendere per constructionem prædictam octaedrum in tetraedro esse descriptum. Quoniam ΔΑ & ΔΓ bisecantur in Κ & Θ, patet [ex 4. 6.] ΚΘ esse æqualem dimidiæ ipsius ΑΓ; eadem ratione ΘΛ æqualis est dimidiæ ipsius ΓΒ, item ΚΕ & ΛΗ dimidiæ ipsius ΔΓ æquales: similiter ΘΕ æqualis est dimidiæ ipsius ΑΔ, item ΘΗ dimidiæ ipsius ΔΒ, & ΕΗ dimidiæ ipsius ΑΒ: pariterque ΚΛ, ΛΖ & ΖΚ sunt æquales dimidiis ipsarum ΑΒ, ΑΔ & ΔΒ. Sed [per 26. def. 11.] sex tetraedri latera ΑΒ, ΒΔ, ΔΑ, ΑΓ, ΓΒ, ΓΔ sunt inter se æqualia; igitur & rectæ ΘΚ, ΘΛ, ΘΕ, ΘΗ, ΘΓ, ΖΕ, ΖΚ, ΖΗ, ΖΛ, ΗΛ, ΕΚ, ΕΗ sunt inter se æquales. unumquodque igitur triangulorum ΘΚΛ, ΘΚΕ, ΘΕΗ, ΘΗΛ, ΖΕΗ, ΖΕΚ, ΖΚΛ, ΖΛΗ est æquilaterum: solidum igitur ΘΚΕΖΗΛ est octaedrum, cujus sex anguli solidi Θ, Κ, Ε, Ζ, Η, Λ sunt in mediis punctis sex laterum dati tetraedri. quod erat demonstrandum.

lelæ

lelæ MO, MN, NΞ, ΞO. quoniam igitur æquilaterum est ABΓ triangulum, recta linea quæ à puncto A ducitur ad Θ centrum circuli circa triangulum ABΓ descripti bifariam secat angulum ad A trianguli ABΓ: æqualis igitur est [per 4. 1.] NΘ ipsi MΘ. eadem ratione & MH est æqualis HO. quoniam autem MN est æqualis MO & MO ipsi OΞ; erit igitur & NΘ æqualis MH, & ΘM ipsi HO & MH ipsi OK. suntq; anguli ΘMH, HOK recti: ergo [per 4. 1.] HΘ ipsi HK est æqualis. eadem ratione & reliquæ æquales erunt. cum igitur parallelogrammum sit HΘKΛ [per 7. 11.] in uno erit plano. & cum uterque angulorum MHΘ, OHK sit dimidius recti, reliquus ΘHK [per 13. 1.] rectus erit; similiter & reliqui: quadratum igitur est HΘΛK. possumus autem à principio sumentes centra H, Θ, K, Λ, ducentesque parallelas MN, NΞ, ΞO, OM jungere HΘ, ΘΛ, ΛK, KH, & dicere HΘKΛ quadratum esse. quod si sumentes reliquorum triangulorum centra, ipsa jungamus; ostendentur & reliqua quadrata esse, habebimusque in dato octaedro descriptum cubum. quod erat faciendum.



MO, MN, NΞ, ΞO. ἐπεὶ οὖν ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ ABΓ τρίγωνον, ἡ ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὸ Θ κέντρον τοῦ περὶ τὸ ABΓ τρίγωνον κύκλου δίχα τέμνει τὴν πρὸς τῷ A τοῦ ABΓ τριγώνου· ἴση ἄρα ἡ NΘ τῇ MΘ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴση ἐστὶ καὶ ἡ MH τῇ HO. ἐπειδὴ δὲ ἡ MN τῇ MO, καὶ ἡ MO τῇ OΞ ἐστιν ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ NΘ τῇ MH, καὶ ἡ ΘM τῇ HO καὶ ἡ MH τῇ OK. αἱ δὲ ὑπὸ ΘMH, καὶ HOK ὀρθαί· ἐξ οὗ φανερὸν ὅτι ἡ HΘ ἴση ἐστὶ τῇ HK. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ λοιπαί. ἐπεὶ οὖν παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ HΘKΛ, ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. καὶ ἐπεὶ ἥμισύ ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ MHΘ, OHK ὀρθῆς, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΘHK ὀρθή ἐστιν. ὁμοίως καὶ αἱ λοιπαί· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ HΘKΛ. δυνάμεθα δὲ τὰ ἐξ ἀρχῆς λαμβάνοντες τὰ H, Θ, K, Λ κέντρα, καὶ παραλλήλους ἀγαγόντες τὰς MN, NΞ, ΞO, OM ἐπιζεῦξαι τὰς HΘ, ΘΛ, ΛK, KH, καὶ εἰπεῖν τὸ HΘKΛ τετράγωνον. ἐὰν δὴ λάβωμεν καὶ τῶν λοιπῶν τριγώνων τὰ κέντρα καὶ ἐπιζεύξωμεν καὶ τὰ αὐτά, δείξομεν τὰ λοιπὰ τετράγωνα, καὶ ἕξομεν εἰς τὸ δοθὲν ὀκτάεδρον κύβον ἐγγεγραμμένον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

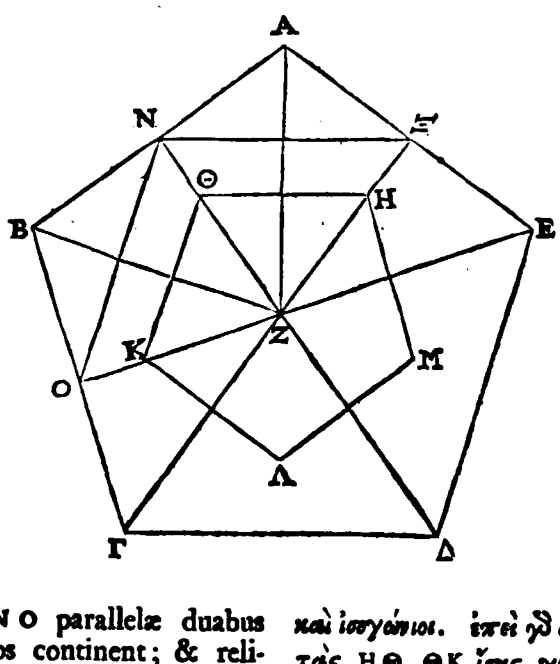
Prop. V. Probl.

In dato icosaedro dodecaedrum describere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε΄.

Εἰς τὸ δοθὲν εἰκοσάεδρον δωδεκάεδρον ἐγγράψαι.

Exponatur pentagonum icosaedri ABΓΔE, & [per 5. 4.] sumantur centra circulorum qui sunt circa triangula AZE, AZB, BZΓ, ΓZΔ, ΔZE, videlicet H, Θ, K, Λ, M, junganturque HΘ, ΘK, KΛ, ΛM, MH: & rursus junctæ ZH, ZΘ, ZK producantur ad puncta Ξ, N, O, & ita rectas lineas EA, AB, BΓ in Ξ, N, O punctis bifariam secabunt, atque erit [per 4. 6] ut NΞ ad NO ita HΘ ad ΘK; æqualis igitur est & HΘ ipsi ΘK. similiter autem & reliqua pentagoni HΘKΛM latera æqualia ostendentur. dico & æquiangulum esse. quonam enim duæ NΞ, NO parallelæ duabus HΘ, ΘK æquales angulos continent; & reliqua manifesta sunt. intelligatur à puncto Z



Ἐκκείσθω πεντάγωνον τοῦ εἰκοσαέδρου τὸ ABΓΔE, καὶ τὰ κέντρα τῶν κύκλων τῶν περὶ τὰ AZE, AZB, BZΓ, ΓZΔ, ΔZE τρίγωνα, τὰ H, Θ, K, Λ, M, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ HΘ, ΘK, KΛ, ΛM, MH· καὶ πάλιν ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ZH, ZΘ, ZK ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Ξ, N, O, δίχα δὴ τμηθήσονται αἱ EA, AB, BΓ, τοῖς Ξ, N, O σημείοις, καὶ ὡς ἡ NΞ πρὸς NO οὕτως ἡ HΘ πρὸς ΘK· ἴση ἄρα καὶ ἡ HΘ τῇ ΘK. ὁμοίως δὲ καὶ αἱ λοιπαὶ τοῦ HΘKΛM πενταγώνου πλευραὶ ἴσαι δειχθήσονται. λέγω ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ δύο αἱ NΞ, NO παρὰ δύο τὰς HΘ, ΘK ἴσας γωνίας περιέχουσι, καὶ τὰ λοιπὰ φανερά. νενοήσθω ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ τοῦ

ABΓ

ΑΒΓΔΕ πενταγώνου ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω, ἥτις πεσεῖται ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ περὶ τὸ πεντάγωνον κύκλου. ἐὰν δὴ ἀπὸ τοῦ Ν ἐπὶ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλει ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετος, ἐπιζεύξωμεν, καὶ διὰ τοῦ Θ παράλληλον αὐτῇ ἀγάγωμεν, φανερὸν ὅτι συμβάλλει τῇ ἀπὸ τοῦ Ζ καθέτῳ, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Θ παράλληλος ὀρθὴν γωνίαν περιέξει μετὰ τῆς ἀπὸ τοῦ Ζ καθέτου. πάλιν, ἐὰν ἐπιζεύξωμεν ἀπὸ τῶν Ξ, Ο ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλου, καὶ ἐπὶ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλει ἡ ἀπὸ τοῦ * Θ τῇ ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς τὰ Η, Κ, φανερὸν ὅτι ἡ ἐπιζευγνυμένη ὀρθὰς περιέξει μετὰ τῆς αὐτῆς. ἐξ οὗ φανερὸν ὅτι ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ ἐστὶ τὸ ΗΘΚΛΜ πεντάγωνον.

ad planum pentagoni ΑΒΓΔΕ ducta perpendicularis, quæ cadet in centrum circuli circa pentagonum descripti. si igitur à puncto Ν ad punctum, in quod dicta perpendicularis cadit, rectam lineam ducamus, & per Θ ducamus ipsi parallelam; perspicuum est hanc perpendiculari à Ζ occurrere, & parallelam per Θ rectum angulum continere cum perpendiculari. rursus, si à punctis Ξ, Ο ad centrum circuli circa pentagonum ΑΒΓΔΕ descripti rectas lineas jungamus; & à puncto, in quo linea per Θ ducta occurrit perpendiculari ex Ζ, ad Η, Κ puncta rectas lineas ducamus: manifestum est ipsas cum dicta perpendiculari rectos angulos continere. ex quo perspicue constat pentagonum ΗΘΚΛΜ esse in uno plano.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛʹ.

Τῶν πέντε σωμάτων τὰς πλευρὰς καὶ γωνίας ἐξευρεῖν.

Δεῖ εἰδέναι ἡμᾶς, ὅτι ἐάν τις ἐρεῖ ἡμῖν πόσας πλευρὰς ἔχει τὸ εἰκοσάεδρον, φήσομεν οὕτως. φανερὸν ὅτι ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων περιέχεται τὸ εἰκοσάεδρον, καὶ ὅτι ἕκαστον τρίγωνον ὑπὸ τριῶν εὐθειῶν περιέχεται· δεῖ οὖν ἡμᾶς πολλαπλασιάσαι τὰ εἴκοσι τρίγωνα ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, γίνεται δὲ ἑξήκοντα, ὧν ἥμισυ γίνεται τριάκοντα. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ δωδεκαέδρου. ἐπεὶ δὲ δώδεκα πεντάγωνα περιέχουσι τὸ δωδεκάεδρον, πάλιν δὲ ἕκαστον πεντάγωνον ἔχει πέντε εὐθείας, ποιοῦμεν δωδεκάκις πέντε, καὶ γίνονται ἑξήκοντα· πάλιν τὸ ἥμισυ γίνεται τριάκοντα. διὰ τόδε ἥμισυ ποιοῦμεν, ἐπειδὴ ἑκάστη πλευρά, κἄν τε ᾖ τρίγωνον ἢ πεντάγωνον ἢ τετράγωνον, ὡς ἐπὶ κύβου, ἐκ δευτέρου λαμβάνεται. ὁμοίως δὲ τῇ αὐτῇ μεθόδῳ καὶ ἐπὶ κύβου καὶ ἐπὶ τῆς πυραμίδος καὶ τοῦ ὀκταέδρου τὰ αὐτὰ ποιήσας εὑρήσεις τὰς πλευράς.

Εἰ δὲ βουληθείης πάλιν ἑκάστου τῶν πέντε σχημάτων εὑρεῖν τὰς γωνίας, πάλιν τὰ αὐτὰ ποιήσας, μέριζε παρὰ τὰ ἐπίπεδα τὰ περιέχοντα μίαν γωνίαν τοῦ στερεοῦ· οἷον, ἐπειδὴ τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου γωνίαν περιέχουσι εʹ τρίγωνα, μέριζε παρὰ τὰς εʹ, γίνονται δώδεκα γωνίαι τοῦ εἰκοσαέδρου. ἐπεὶ δὲ τοῦ δωδεκαέδρου τρία πεντάγωνα περιέχουσι τὴν γωνίαν, μέριζε παρὰ τὰ τρία, καὶ ἕξεις κʹ γωνίας οὔσας τοῦ δωδεκαέδρου. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν εὑρήσεις τὰς γωνίας.

Prop. VI. Probl.

Quinque figurarum latera & angulos invenire.

Oportet autem scire, si quis interroget nos quot latera icosaedrum habeat, ita respondendum esse. patet icosaedrum contineri sub viginti triangulis, & unumquodque triangulum sub tribus rectis lineis comprehendi: multiplicanda sunt igitur viginti triangula per numerum laterum trianguli; & fient sexaginta, cujus dimidium triginta. similiter autem & in dodecaedro: quoniam enim duodecim pentagona dodecaedrum continent, & unumquodque pentagonum habet quinque rectas lineas; conficientur decies quinque, & fient sexaginta, cujus rursus dimidium triginta: dimidium autem idcirco accipimus, quod singula latera (sive sit triangulum, sive pentagonum, sive quadratum, ut in cubo) bis sumantur. eadem methodo & ratione utentes, & in cubo, & in pyramide, & in octaedro latera inveniemus.

Si vero singularum quinque figurarum anguli inveniendi sint, rursus eadem facientes, partiemur per numerum planorum, quæ unum solidi angulum continent: ut quoniam icosaedri angulum continent quinque triangula; partiemur per quinque: erunt duodecim anguli in icosaedro. quoniam autem tria pentagona dodecaedri continent angulum; partiemur per tria, & habebimus angulos viginti in dodecaedro. similiter in reliquis figuris anguli invenientur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζʹ.

Τῶν ἐπιπέδων τῶν πέντε στερεῶν ἕκαστον περιεχόντων κλίσιν ἐξευρεῖν.

Ἐζητήθη πῶς ἐφ' ἑκάστου τῶν εʹ στερεῶν σχημάτων, ἑνὸς ἐπιπέδου τῶν περιεχόντων ὁποιουοῦν δοθέντος, εὑρίσκεται καὶ ἡ κλίσις, ἐν ᾗ κέκλιται πρὸς ἄλληλα τὰ περιέχοντα ἐπίπεδα ἕκαστον τῶν σχημάτων. ἡ δὲ εὕρεσις, ὡς Ἰσίδωρος ὁ ἡμέτερος ὑφηγήσατο μέγας διδάσκαλος, ἔχει τὸν τρόπον τοῦτον. ὅτι μὲν ἐπὶ τοῦ κύβου

Prop. VII. Probl.

Planorum, quæ singulas quinque figuras continent, inclinationem invenire.

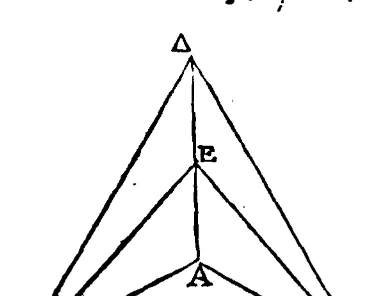
Quæsitum est quomodo, in unaquaque quinque solidarum figurarum, dato uno planorum continentium, inveniatur inclinatio planorum quæ ipsam continent. inventio autem, ut narravit Isidorus magnus præceptor noster, hoc modo se habet. in cubo quidem

* Ita restituimus ex conjectura. Prius erat τῇ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπιζευγνυμένη ὀρθή, ἣ περιέξει &c. nullo plane sensu.

plana, quæ ipsum continent, ad rectos inter se angulos inclinari manifestum est. in pyramide vero, exposito uno triangulo, centris quidem terminis unius lateris, intervallo autem recta linea, quæ à vertice trianguli ad basim perpendicularis ducitur, circumferentiæ descriptæ se mutuo secent; à sectione ad centra junctæ rectæ lineæ continebunt inclinationem planorum quæ pyramidem comprehendunt. at in octaedro, à latere trianguli descripto quadrato, & centris quidem terminis diametri quadrati, intervallo autem similiter perpendiculari, quæ à vertice trianguli ad basim ducitur, describantur circumferentiæ; atque rursus rectæ lineæ à communi sectione ad centra junctæ continebunt angulum, qui ex duobus rectis relinquitur, inclinationis ejus quam inquirimus. in icosaedro autem, à latere trianguli descripto pentagono, jungatur recta linea quæ duobus lateribus subtenditur, & centris quidem terminis ejus, intervalloque perpendiculari ipsius trianguli descriptis circumferentiis; rectæ lineæ à communi sectione ad centra junctæ continebunt similiter angulum, qui ex duobus rectis relinquitur, inclinationis planorum ipsius icosaedri. denique in dodecaedro, exposito uno pentagono, & juncta similiter recta linea quæ duobus lateribus subtenditur, centris quidem terminis ipsius, intervallo autem perpendiculari, quæ à bipartita sectione ad latus pentagoni parallelum ducitur, describantur circumferentiæ; & à puncto, in quo conveniunt, ad centra similiter junctæ rectæ lineæ continebunt angulum, reliquum ex duobus rectis, inclinationis planorum dodecaedri.

Hunc quidem vir ille clarissimus de prædictis sermonem habuit, cum demonstratio eorum sibi manifesta videretur: sed ut contemplatio demonstrativa perspicue appareat, sermonem in unoquoque explicabo; & primum in pyramide.

* INTELLIGATUR pyramis ΑΒΓΔ quatuor triangulis æquilateris contenta, cujus basis ΑΒΓ & vertex Δ punctum: secto autem latere ΑΔ bifariam in Ε, jungantur ΒΕ, ΕΓ. & quoniam æquilatera sunt ΑΔΒ, ΑΔΓ triangula, & bifariam secta est ΑΔ; erunt [per 8. 1.] ΒΕ, ΕΓ ad ipsam ΑΔ perpendiculares. dico angulum ΒΕΓ acutum esse. quoniam enim ΑΓ dupla est ipsius ΑΕ, erit quadratum ex ΑΓ quadrati ex ΑΕ quadruplum. sed [per 47. 1.] quadratum ex ΑΓ æquale est quadratis ex ΑΕ, ΕΓ, ex quibus quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΓΕ rationem habet quam 4 ad 3, atque est ΓΕ ipsi ΕΒ æqualis: quadratum igitur ex ΒΓ minus est quadratis ex ΒΕ, ΕΓ; ideoq; [per convers. 13. 2.] angulus ΒΕΓ est acutus. quoniam igitur duorum pla-



κατ' ὀρθὴν τέμνουσι γωνίαν τὰ περιέχοντα αὐτὴν ἐπίπεδα ἄλληλα, φανερόν. ἐπὶ δὲ τῆς πυραμίδος, ἐκτεθέντος ἑνὸς τριγώνου, κέντροις τοῖς πέρασι τῆς μιᾶς πλευρᾶς, διαστήματι δὲ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν καθέτῳ ἀγομένῃ, περιφέρειαι γραφεῖσαι τεμνέτωσαν ἀλλήλας· καὶ αἱ ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσι τὴν κλίσιν τῶν περιεχόντων τὴν πυραμίδα ἐπιπέδων. ἐπὶ δὲ τοῦ ὀκταέδρου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ἀναγραφέντος τετραγώνου, κέντροις τοῖς πέρασι τῆς διαγωνίου, διαστήματι δὲ ὁμοίως τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ, γεγράφθωσαν περιφέρειαι, καὶ πάλιν αἱ ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσι τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς ἐπιζητουμένης κλίσεως. ἐπὶ δὲ τοῦ εἰκοσαέδρου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ἀναγραφέντος πενταγώνου, ἐπεζεύχθω ἡ ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτείνουσα εὐθεῖα, καὶ κέντροις τοῖς πέρασιν αὐτῆς, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ γραφεισῶν περιφερειῶν, αἱ ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι περιέξουσι τὴν λείπουσαν, ὁμοίως εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιπέδων. ἐπὶ δὲ τοῦ δωδεκαέδρου, ἐκτεθέντος ἑνὸς πενταγώνου, ἐπιζευχθείσης ὁμοίως τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης εὐθείας, κέντροις τοῖς πέρασιν αὐτῆς, διαστήματι δὲ τῇ ἀγομένῃ καθέτῳ ἀπὸ τῆς διχοτομίας αὐτῆς ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ πλευρὰν τοῦ πενταγώνου γεγράφθωσαν περιφέρειαι, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ σημείου καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι ὁμοίως περιέξουσι τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν ἐπιπέδων τοῦ δωδεκαέδρου.

Οὕτω μὲν οὖν ὁ εἰρημένος εὐκλεέστατος ἀνὴρ τὸν περὶ τῶν εἰρημένων ἀποδέδωκε λόγον, σαφῶς ἐφ' ἑκάστου φαινομένης αὐτῷ τῆς ἀποδείξεως· ἐπὶ δὲ τὸ πρόδηλον γενέσθαι τὴν ἐν αὐτοῖς ἀποδεικτικὴν θεωρίαν, τὸν λόγον ἐφ' ἑκάστου σαφηνιῶ· καὶ πρότερον ἐπὶ τῆς πυραμίδος.

* ΝΕΝΟΗΣΘΩ πυραμὶς ὑπὸ τεσσάρων ἰσοπλεύρων τριγώνων περιεχομένη ἡ ΑΒΓΔ, οὗ ΑΒΓ βάσεως νοουμένου κορυφῆς δὲ τοῦ Δ· καὶ τμηθείσης τῆς ΑΔ πλευρᾶς δίχα κατὰ τὸ Ε, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ. καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρά ἐστι τὰ ΑΔΒ, ΑΔΓ τρίγωνα, καὶ δίχα τέτμηται ἡ ΑΔ· αἱ ΒΕ, ΕΓ ἄρα κάθετοί εἰσιν ἐπὶ τὴν ΑΔ. λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΕΓ γωνία ὀξεῖά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΑΕ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ, ὧν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ λόγον ἔχει ὃν δ' πρὸς γ', καί ἐστιν ἴση ἡ ΓΕ τῇ ΕΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΒΓ ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ ΒΕ, ΕΓ· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΕΓ. ἐπεὶ οὖν δύο ἐπιπέδων

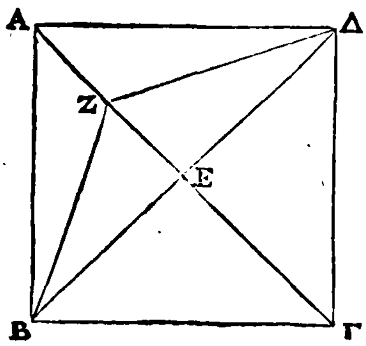
* Sequitur ipsius *Hypsiclis* demonstratio eorum quæ tradidit *Isidorus*.

τῆς

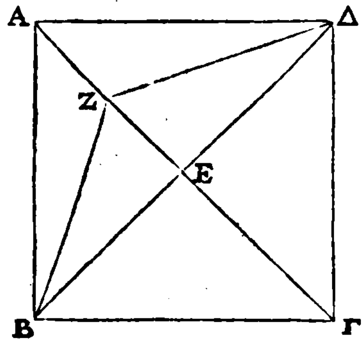
τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ κοινὴ τομή ἐστιν ἡ ΑΔ, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ πρὸς ὀρθὰς εἰσιν εὐθεῖαι ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων ἠγμέναι αἱ ΒΕ, ΕΓ, καὶ ὀξεῖαν γωνίαν περιέχουσιν· ἡ ὑπὸ ΒΕΓ ἄρα γωνία ἡ κλίσις ἐστὶ τῶν ἐπιπέδων. καὶ ἔστι δεδομένη, δέδοται γὰρ ἡ ΒΓ πλευρὰ οὖσα τοῦ τριγώνου, καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΒ, ΕΓ κάθετος οὖσα τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου· κέντροις τοίνυν τοῖς Β, Γ, τουτέστι τοῖς πέρασι τῆς μιᾶς πλευρᾶς, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ, γραφόμεναι περιφέρειαι τέμνουσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ αἱ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ Β, Γ ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσι τὴν κλίσιν τῶν ἐπιπέδων. τοῦτο δὲ ἦν τὸ εἰρημένον. καὶ ὅτι μὲν κέντροις τοῖς Β, Γ, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ, γραφόμενοι κύκλοι τέμνουσιν ἀλλήλους, φανερόν· ἑκατέρα γὰρ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΒΓ· οἱ δὲ κέντροις τοῖς Β, Γ, διαστήματι δὲ τῇ ἡμισείᾳ τῆς ΒΓ, γραφόμενοι κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων. εἰ δὲ ἐλάττων ᾖ, οὐδὲ ἐφάπτονται οὐδὲ τέμνουσιν· εἰ δὲ μείζων, πάντως τέμνουσι, καὶ οὕτως ὁ περὶ τῆς πυραμίδος σαφής τε καὶ ἀκόλουθος ταῖς ἀποδείξεσι φαίνεται λόγος.

norum ABΔ, AΔΓ communis ſectio eſt AΔ, & communi ſectioni ad rectos angulos occurrunt in utroque planorum rectæ lineæ BE, EΓ, quæ acutum angulum continent: erit [per 6. def. 11.] angulus BEΓ planorum inclinatio; atque eſt data; datur enim BΓ nempe latus trianguli, atque etiam utraque ipſarum EB, EΓ, ſc. perpendicularis trianguli æquilateri: centris igitur B, Γ, hoc eſt terminis unius lateris, & intervallo trianguli perpendiculari, deſcriptæ circumferentiæ ſe invicem ſecent in puncto E, & ab eo ad B, Γ junctæ rectæ lineæ planorum inclinationem continebunt. hoc autem eſt quod dicebatur. verum illud, quod centris quidem B, Γ, intervallo autem trianguli perpendiculari deſcripti circuli ſe mutuo ſecent, manifeſtum eſt: utraque enim BE, EΓ major eſt quam dimidia ipſius BΓ: & centris B, Γ, & intervallo ipſius BΓ dimidio æquali, deſcripti circuli ſeſe tangunt. ſi autem minor ſit, neque ſe tangunt neque ſecant: quod ſi major, omnino ſecant; itaque de pyramide ſermo & manifeſtus & demonſtrationibus congruens apparet.

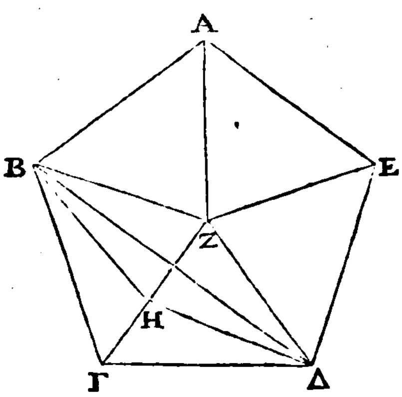
ΣΥΝΝΟΕΙΣΘΩ πάλιν ἐπὶ τετραγώνου τοῦ ΑΒΓΔ πυραμὶς κορυφὴν ἔχουσα τὸ Ε, καὶ τὰ περιέχοντα αὐτὴν δίχα τῆς βάσεως τρίγωνα ἰσόπλευρα· ἔσται δὲ ἡ ΑΒΓΔΕ πυραμὶς ἥμισυ ὀκταέδρου. τετμήσθω μία πλευρὰ ἑνὸς τριγώνου ἡ ΑΕ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΖ, ΔΖ· ἴσαι ἄρα εἰσὶν αἱ ΒΖ, ΔΖ καὶ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΕ. λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΖΔ γωνία ἀμβλεῖά ἐστιν. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΒΔ. καὶ ἐπεὶ τετράγωνόν ἐστι τὸ ΑΓ, διάμετρος δὲ ἡ ΒΔ, τὸ ἀπὸ ΒΔ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ λόγον ἔχει ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου εἴρηται, ὃν δ' πρὸς γ'· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ λόγον ἔχει ὃν ὀκτὼ πρὸς τρία. ἴση δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΖΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΔ τῶν ἀπὸ τῶν ΒΖ, ΖΔ μεῖζόν ἐστιν· ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΖΔ. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπιπέδων τῶν ΑΒΕ, ΑΔΕ τεμνόντων ἄλληλα, κοινὴ τομή ἐστιν ἡ ΑΕ, αἱ δὲ πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων ἠγμέναι εἰσὶν αἱ ΒΖ, ΖΔ περιέχουσαι ἀμβλεῖαν· ἡ ὑπὸ ΒΖΔ ἄρα γωνία λείπουσά ἐστιν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν ΑΒΕ, ΑΔΕ ἐπιπέδων· ἐὰν ἄρα δοθῇ ἡ ὑπὸ ΒΖΔ, δέδοται καὶ ἡ εἰρημένη κλίσις. ἐπεὶ οὖν δέδοται τὸ τρίγωνον τοῦ ὀκταέδρου καὶ μία πλευρά ἐστι τοῦ ὀκταέδρου ἡ ΑΔ, καὶ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον ἀναγέγραπται τὸ ΑΓ, δέδοται καὶ ἡ ΒΔ διάμετρος οὖσα τοῦ τετραγώνου. ἀλλὰ μὴν καὶ αἱ ΒΖ, ΖΔ κάθετοι τοῦ τριγώνου· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΒΖΔ γωνία δέδοται· ἀναγραφέντος ἄρα τοῦ τετραγώνου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ὡς τοῦ ΑΓ, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς διαμέτρου ὡς τῆς ΒΔ, ἐὰν κέντροις τοῖς Β, Δ, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ κύκλους ἐγγράψωμεν, τέμνουσιν ἀλλήλους κατὰ τὸ Ζ, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύ-



INTELLIGATUR rurſus ſuper quadratum ABΓΔ pyramis, verticem habens punctum E, & continentia ipſam præter baſim triangula æquilatera: erit autem ABΓΔE pyramis dimidia octaedri. ſecetur AE latus unius trianguli bifariam in Z; & BZ, ΔZ jungantur: ſunt igitur BZ, ΔZ & æquales inter ſe & ad ipſam AB perpendiculares. dico angulum BZΔ obtuſum eſſe. jungatur enim BΔ. & quoniam AΓ eſt quadratum cujus diameter BΔ, erit quadratum ex BΔ quadrati ex ΔA duplum; quadratum autem ex ΔA ad quadratum ex ΔZ rationem habet, ut ſuperius dictum eſt, quam 4 ad 3; ergo & quadratum ex BΔ ad quadratum ex ΔZ rationem habebit quam 8 ad 3. eſt autem ΔZ æqualis ZB: quadratum igitur ex BΔ majus eſt quadratis ex BZ, ZΔ; quare & [per converſ. 12. 2.] angulus BZΔ eſt obtuſus. & quoniam duorum planorum ABE, AΔE ſe invicem ſecantium communis ſectio eſt AE, & ipſi ad rectos angulos in utroque plano ductæ ſunt BZ, ZΔ angulum obtuſum continentes: erit [per 6. def. 11.] angulus BZΔ reliquus ex duobus rectis inclinationis planorum ABE, AΔE: ſi igitur angulus BZΔ datus ſit, & dicta inclinatio dabitur. itaque quoniam triangulum octaedri datum eſt, & unum ejus latus eſt AΔ, à quo quadratum AΓ deſcribitur; datur & BΔ nempe diameter quadrati. ſed & BZ, ZΔ trianguli perpendiculares datæ ſunt: ergo & angulus BZΔ dabitur: deſcripto igitur quadrato à latere trianguli ut AΓ, & juncta diametro BΔ, ſi centris quidem B, Δ, intervallo autem perpendiculari trianguli circulos deſcribamus, ſe mutuo ſecabunt in Z, & rectæ lineæ à puncto Z ad centra ductæ continebunt angulum B Z Δ, qui quidem est reliquus ex duobus rectis, ut dictum est, inclinationis planorum. hoc quoque loco patet utramque ipsarum B Z, Z Δ majorem esse quam ipsius B Δ dimidiam: ideoque in constructione organica necesse esse circulos se mutuo secare. constat enim ex demonstratione ipsam B Δ ad Δ Z potentia rationem habere quam habet 8 ad 3. & B Δ [per 20. 6.] dimidiæ sui potentia est quadrupla: ergo utraque ipsarum B Z, Z Δ major est quam dimidia ipsius B Δ. & hæc quidem de octaedro dicta sint.



IN icosaedro autem intelligatur pentagonum æquilaterum A B Γ Δ E, super hoc vero pyramis verticem habens punctum Z, ita ut continentia ipsam sint triangula æquilatera: erit A B Γ Δ E pyramis figuræ icosaedri pars. secetur Z Γ latus unius trianguli bifariam in H, & B H, H Δ jungantur, æquales quidem & ad ipsam Z Γ perpendiculares: dico angulum B H Δ obtusum esse, quod per se manifesto constat. juncta enim B Δ obtusum angulum B Γ Δ pentagoni subtendit. hoc autem major est [per 21. 1.] angulus B H Δ: nam B H, H Δ ipsis B Γ, Γ Δ sunt minores. similiter iis, quæ proxime dicta sunt, patet angulum B H Δ esse eum qui relinquitur ex duobus rectis inclinationis triangulorum B Z Γ, Γ Z Δ. hoc autem dato, dabitur & planorum icosaedri inclinatio: à latere enim trianguli icosaedri descripto pentagono & recta linea B Δ data, quæ duobus pentagoni lateribus subtenditur, ut in figura, similiterque datis B H, H Δ perpendicularibus triangulorum, dabitur & B H Δ angulus. nam si centris quidem terminis ipsius B Δ, quæ duobus pentagoni lateribus subtenditur, intervallo autem perpendiculari trianguli, circuli describantur, se invicem secabunt, ut in H; & rectæ lineæ à puncto H ad centra B, Δ ductæ continebunt angulum, qui ex duobus rectis relinquitur, inclinationis planorum. item hoc loco ex figura manifestum est utramque B H, H Δ majorem esse quam dimidiam ipsius B Δ, quod etiam ex constructione organica demonstrari potest.



Intelligatur enim seorsim triangulum æquilaterum Θ K Λ, & ab ipsa K Λ pentagonum describatur K M N Ξ Λ, junctaque M Λ ducatur Θ O perpendicularis trianguli Θ K Λ; dico Θ O majorem esse dimidia ipsius M Λ, quæ inclinationem planorum subtendit. ducta à puncto K ad M Λ perpendiculari K Π, quoniam angulus K Λ Π major est tertia parte recti, hoc est major angulo K Θ O; consti-

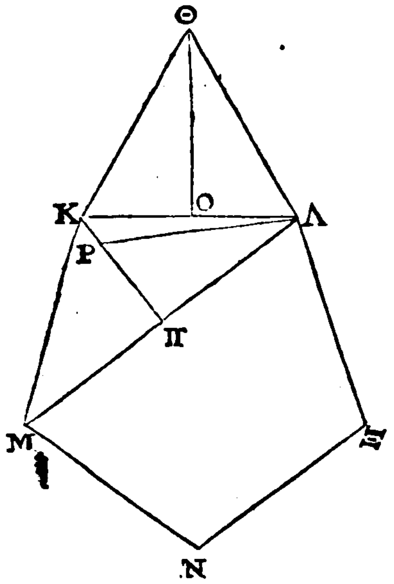
μέναι εὐθεῖαι περιέχουσι τὴν κλίσιν τὴν ὑπὸ B Z Δ, ἥτις ἐστὶν ἡ λείπουσα, ὡς εἴρηται, εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς τῶν ἐπιπέδων κλίσεως. καὶ ἐνταῦθα δὲ σαφὲς μὲν ὡς ἑκατέρα τῶν B Z, Z Δ ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς B Δ μείζων· καὶ διὰ τοῦτο ἐπὶ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς ἀνάγκη τέμνειν τοὺς κύκλους ἀλλήλους. καὶ ἐκ τῆς ἀποδείξεως δὲ δῆλον γέγονεν ὡς ἡ B Δ πρὸς μὲν τὴν Δ Z δυνάμει λόγον ἔχει ὃν ὀκτὼ πρὸς τρία, τῆς δὲ ἡμισείας τῆς B Δ δυνάμει ἐστὶ τετραπλασία· ὥστε διὰ τοῦτο μείζονα γίνεσθαι ἑκατέραν τῶν B Z, Z Δ τῆς ἡμισείας τῆς B Δ. καὶ ταῦτα μὲν ἐπὶ τοῦ ὀκταέδρου.

ΕΠΙ δὲ τοῦ εἰκοσαέδρου νενοήσθω πεντάγωνον ἰσόπλευρον τὸ Δ B Γ Δ E, ἐπὶ δὲ τούτου πυραμὶς κορυφὴν ἔχουσα τὸ Z, ὥστε περιέχοντα αὐτὴν τρίγωνα ἰσόπλευρα εἶναι· ἔσται δὴ ἡ A B Γ Δ E πυραμὶς μέρος εἰκοσαέδρου σχήματος. τετμήσθω μία πλευρὰ ἑνὸς τριγώνου ἡ Z Γ δίχα κατὰ τὸ H, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ B H, H Δ ἴσαι τε οὖσαι καὶ κάθετοι γινόμεναι ἐπὶ τὴν Z Γ· λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ B H Δ γωνία ἀμβλεῖά ἐστι· καὶ ἔστιν αὐτόθι φανερόν. ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ B Δ ἀμβλεῖαν μὲν ὑποτείνει τὴν ὑπὸ B Γ Δ τοῦ πενταγώνου γωνίαν. ταύτης δὲ μείζων ἡ ὑπὸ B H Δ· ἐλάττονες γὰρ αἱ B H, H Δ τῶν B Γ, Γ Δ. ὁμοίως δὴ τοῖς πρὸ τούτου ὅτι ἡ ὑπὸ B H Δ γωνία ἡ λείπουσά ἐστιν εἰς τὰς δύο τῆς κλίσεως τῶν B Z Γ, Γ Z Δ τριγώνων. ταύτης δοθείσης, δεδομένη ἔσται καὶ ἡ κλίσις τῶν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιπέδων· ἀπὸ γὰρ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου τοῦ εἰκοσαέδρου ἀναγραφέντος πενταγώνου, ἐπιζευχθείσης τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης τοῦ πενταγώνου, ὡς ἐπὶ τῆς καταγραφῆς, τῆς B Δ δεδομένης, ὁμοίως δὲ καὶ τῶν B H, H Δ καθέτων τῶν τριγώνων, δέδοται καὶ ἡ ὑπὸ B H Δ. εἰ γὰρ κέντροις τοῖς πέρασι τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης τοῦ πενταγώνου ὡς τῆς B Δ, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ κύκλοι γραφῶσι, τέμνουσιν ἀλλήλους ὡς κατὰ τὸ H, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ H ἐπὶ τὰ B, Δ ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσι τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς τῶν ἐπιπέδων κλίσεως. καὶ ἐνταῦθα δὲ ἐκ μὲν τῆς καταγραφῆς δῆλόν ἐστιν ὅτι ἑκατέρα τῶν B H, H Δ μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς B Δ, εἶναι δὲ καὶ ἐπὶ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς ἀποδειχθήσεται.

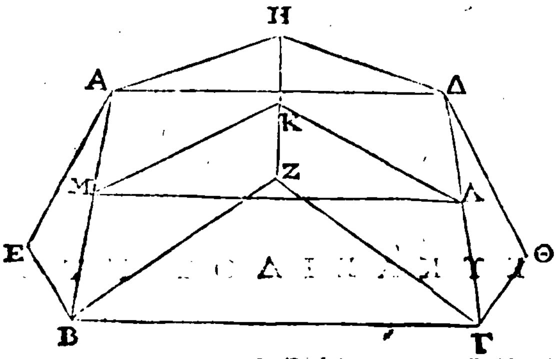
Νενοήσθω χωρὶς ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνον τὸ Θ K Λ, ἀπὸ δὲ τῆς K Λ πεντάγωνον ἀναγεγράφθω τὸ K M N Ξ Λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ M Λ, καὶ ἤχθω κάθετος τοῦ Θ K Λ τριγώνου ἡ Θ O· λέγω ὅτι ἡ Θ O μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς M Λ τῆς ὑποτεινούσης τὴν κλίσιν τῶν ἐπιπέδων. ἀχθείσης ἀπὸ τοῦ K ἐπὶ τὴν M Λ καθέτου τῆς K Π, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ K Λ Π μείζων ἐστὶ τρίτου ὀρθῆς, τουτέστι τῆς ὑπὸ K Θ O, συνεστάτω

τῇ

τῇ ὑπὸ ΚΘΟ ἴση ἡ ὑπὸ ΠΑΡ· ἡ ἄρα ΠΛ κάθετός ἐστιν ἰσοπλεύρου τριγώνου, οὗ πλευρὰ ἡ ΡΛ· ὥστε τὸ ἀπὸ ΡΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΠ λόγον ἔχει ὃν ὁ δ΄ πρὸς τὸν γ΄. μείζων δὲ ἡ ΚΛ τῆς ΛΡ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΚΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΠ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὁ δ΄ πρὸς τὸν γ΄. ἔχει δὲ καὶ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΟ ὃν ὁ δ΄ πρὸς τὸν γ΄· ἡ ἄρα ΚΛ πρὸς τὴν ΛΠ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν ΘΟ· μείζων ἄρα ἡ ΘΟ τῆς ΛΠ.



ΕΠΙ δὲ τοῦ δωδεκαέδρου οὕτως. νοείσθω ἓν τετράγωνον τοῦ κύβου, ἀφ' οὗ τὸ δωδεκάεδρον ἀναγράφεται τὸ ΑΒΓΔ, καὶ δύο ἐπίπεδα τοῦ δωδεκαέδρου τὰ ΑΕΒΖΗ, ΗΔΘΓΖ· λέγω δὴ ἐνταῦθα δεδομένην εἶναι τὴν κλίσιν τῶν δύο πενταγώνων. τετμήσθω ἡ ΖΗ δίχα κατὰ τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ τῇ ΖΗ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων αἱ ΚΛ, ΚΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΜΛ. λέγω δὴ πρῶτον ὅτι ἡ ὑπὸ ΜΚΛ γωνία ἀμβλεῖά ἐστι. δέδεικται γὰρ ἐν τῷ ιγ΄. βιβλίῳ τῶν στοιχείων ἤτοι τῆς συστάσεως τοῦ δωδεκαέδρου, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Κ κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον ἡμίσειά ἐστι τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου· ὥστε ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΜΛ· καὶ διὰ τοῦτο ἡ ὑπὸ ΜΚΛ γωνία ἀμβλεῖά ἐστι. συναποδέδεικται δὲ ἐν τῷ αὐτῷ θεωρήματι, ὅτι καὶ τὸ μὲν ἀπὸ ΚΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου, ὥστε τὴν αὐτὴν τὴν ΚΛ καὶ τὴν ΚΜ, ἴσας οὔσας, μείζονας εἶναι τῆς ἡμισείας τῆς ΜΛ· τῆς ἄρα ὑπὸ ΜΚΛ γωνίας δοθείσης, ἡ λείπουσα εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ἡ κλίσις ἔσται τῶν ἐπιπέδων δηλονότι δεδομένη. ἐπεὶ οὖν ἡ πλευρὰ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου ἡ ὑποτείνουσά ἐστι τὰς δύο πλευρὰς τοῦ πενταγώνου, δέδοται δὲ τὸ πεντάγωνον· δέδοται ἄρα ἡ ΜΛ. δέδοται δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν ΜΚ, ΚΛ, κάθετοι γάρ εἰσιν ἀπὸ τῆς διχοτομίας τῆς ΑΒ ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ πλευρὰν τοῦ πενταγώνου, ὡς τὴν ΖΗ· δέδοται ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΚΜ ἡ λείπουσα, ὡς εἴρηται,



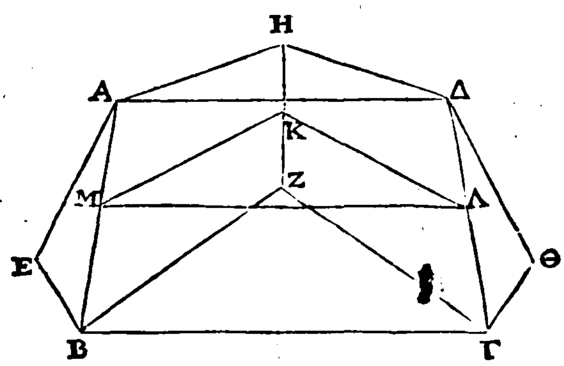
tuatur angulo ΚΘΟ æqualis angulus ΠΑΡ: ergo ΠΛ est perpendicularis æquilateri trianguli, cujus latus est ΡΛ: quare quadratum ex ΡΛ ad quadratum ex ΛΠ rationem habet quam 4 ad 3. sed [per 21. 1.] major est ΚΛ quam ΛΡ: ergo quadratum ex ΚΛ ad quadratum ex ΛΠ majorem habet rationem quam 4 ad 3. habet autem & ad quadratum ex ΘΟ rationem quam 4 ad 3: ergo ΚΛ ad ΛΠ majorem rationem habet quam ad ΘΟ: major igitur [per 10. 5.] est ΘΟ quam ΛΠ.

IN dodecaedro autem hoc modo. intelligatur ΑΒΓΔ unum cubi quadratum, à quo [per 17. 13.] dodecaedrum describitur, & duo plana dodecaedri ΑΕΒΖΗ, ΗΔΘΓΖ: dico & sic datam esse duorum pentagonorum inclinationem. secetur ΖΗ bifariam in Κ, & à puncto Κ ipsi ΖΗ ad rectos angulos ducantur in utroque planorum ΚΛ, ΚΜ; atque ΜΛ jungatur. itaque primum dico angulum ΜΚΛ obtusum esse. ostensum enim est libro decimo tertio elementorum [ad 17. 13.] scilicet in constitutione dodecaedri, rectam lineam, quæ à puncto Κ ad quadratum ΑΒΓΔ perpendicularis ducitur, *dimidiam esse lateris pentagoni: quare minor est quam dimidia ipsius ΜΛ †; ideoque angulus ΜΚΛ est obtusus. simul autem demonstratum est in eodem theoremate, quadratum quidem ex ΚΛ æquale esse & quadrato dimidii lateris cubi & quadrato dimidii lateris pentagoni ‡, ita ut ΚΛ & ΚΜ, inter se æquales, majores sint quam dimidia ipsius ΜΛ: angulo igitur ΜΚΛ dato, reliquus ex duobus rectis, hoc est inclinatio planorum data erit. itaque quoniam latus quadrati ΑΒΓΔ duobus lateribus pentagoni subtenditur, & datum est pentagonum; erit & ΜΛ data. data autem est & utraque ipsarum ΜΚ, ΚΛ, perpendiculares enim sunt à bipartita sectione rectæ lineæ ΑΒ, quæ duobus lateribus subtenditur ad latus pentagoni ipsi parallelum, ut ad ΖΗ; ergo angulus ΛΚΜ datus est,

* Ista enim perpendicularis est eadem cum recta ✝Ο in fig. prop. 17. lib. 13. &, ex constructione, ista ✝Ο æqualis est ΡΟ sive majori portioni ipsius ΝΘ sc. semissis lateris cubi extrema & media ratione sectæ, sive semissi majoris portionis ipsius ΒΓ lateris cubi extrema ac media ratione secti. sed per corol. 17. 13. lateris cubi extrema ac media ratione secti major portio est dodecaedri latus; dicta igitur perpendicularis à puncto Κ ad quadratum ΑΒΓΔ est dimidia lateris dodecaedri sive pentagoni. † Nam ΜΛ sive ΑΔ major est quam ΗΔ. ‡ Nam in fig. prop. 17. lib. 13. quadratum ipsius Θ✝ æquale quadratis ipsius ΘΟ & quadrato ipsius Ο✝, quia angulus ΘΟ✝ est rectus.

 nempe

nempe reliquus ex duobus rectis, ut dictum est, inclinationis ejus quam inquirimus. pulchre igitur in constructione organica dixit, oportere in dato pentagono jungere rectam lineam duobus lateribus subtensam, quæ lateri cubi est æqualis; & centris quidem terminis ipsius, intervallo autem perpendiculari, quæ à bipartita sectione ad latus pentagoni parallelum agitur, (ut in figura sunt ΚΛ, ΚΜ) describere circumferentias; atque à puncto, in quo conveniunt, ad centra rectas lineas ducere, quæ continent angulum reliquum, ex duobus rectis, inclinationis planorum. quod vero perpendicularis ΚΜ major est dimidia ipsius ΜΛ jam dictum est, ut in elementis quoque demonstratum est.



εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς ἐπιζητουμένης κλίσεως. καλῶς ἄρα ἐπὶ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς εἶπεν, ὡς χρὴ δοθέντος τοῦ πενταγώνου ἐπιζεῦξαι τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ δύο πλευρὰς, ἥτις ἴση γίνεται τῇ πλευρᾷ τοῦ κύβου· καὶ κέντροις τοῖς πέρασιν αὐτῆς, διαστήματι δὲ τῇ ἀπὸ τῆς διχοτομίας ἀγομένῃ καθέτῳ, ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ τοῦ πενταγώνου πλευρὰν ὡς ἐπὶ τῆς καταγραφῆς αἱ ΚΛ, ΚΜ γραφεῖσαι περιφέρειαι, καὶ ἀπὸ τοῦ τῆς συμβολῆς τῶν περιφερειῶν σημείου ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζεῦξαι εὐθείας περιεχούσας τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν ἐπιπέδων. ὅτι γὰρ ἡ ΚΛ κάθετος μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΜΛ, εἴρηται, ὡς ἐν τοῖς στοιχείοις συναποδέδεικται τοῦτο.

ΤΕΛΟΣ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

FINIS ELEMENTORUM EUCLIDIS.

ΕΥ-

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΤΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ,
ΚΑΙ
ΜΑΡΙΝΟΥ ΤΟΥ ΦΙΛΟΣΟΦΟΥ
Η
ΕΙΣ ΑΥΤΑ ΠΡΟΘΕΩΡΙΑ.

EUCLIDIS
DATA,
CUM PRÆFATIONE
MARINI.

ΜΑΡΙΝΟΥ ΤΟΥ ΦΙΛΟΣΟΦΟΥ
Η
ΕΙΣ ΤΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΠΡΟΘΕΩΡΙΑ.

MARINI PHILOSOPHI
IN
DATA EUCLIDIS
PRÆFATIO.

ΠΡΩΤΟΝ δεῖ θέσθαι τί τὸ δεδομένον· ἔπειτα τί τὸ χρήσιμον τῆς περὶ τούτου πραγματείας εἰπεῖν· καὶ τρίτον ὑπό τινα ἐπιστήμην ἀνάγεται.

Ὁρίζονται δὲ τὸ δεδομένον πολλαχῶς· καὶ ἄλλως μὲν οἱ παλαιότεροι, ἄλλως δὲ οἱ νεώτεροι. διὸ καὶ συνέβη χαλεπὴν εἶναι τὴν ἀληθῆ περὶ αὐτοῦ ἀπόδοσιν. ἔνιοι μὲν γὰρ οὐδ' ὁρισμόν τινα αὐτοῦ ἀποδεδώκασιν, ἴδιον δέ τι τοῦ δεδομένου εὑρίσκειν ἐπειράθησαν. ἕτεροι δὲ συμπλέξαντες ἤδη τὰ παρ' ἐκείνων λεγόμενα, ὁρίζεσθαι αὐτὸ ἐπεχείρησαν· καὶ οὐδὲ οὗτοι * συμφώνως ἑαυτοῖς. ἐοίκασι δὲ πάντες, ἐκ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ἐννοίας καὶ ὑπολήψεως ὁρμηθέντες, λέγειν τι περὶ αὐτοῦ. καταληπτὸν γάρ τι τὸ δεδομένον εἶναι ὑπέλαβον. διὸ τῶν ἁπλουστέρως καὶ μιᾷ τινι διαφορᾷ περιγράφειν τὸ δεδομένον προθεμένων, οἱ μὲν τεταγμένον ὡς Ἀπολλώνιος ἐν τῇ περὶ νεύσεων, καὶ ἐν τῇ καθόλου πραγματείᾳ· οἱ δὲ γνώριμον, ὡς Διόδωρος· οὕτω γὰρ † τὰς εὐθείας γραμμὰς καὶ τὰς γωνίας δεδόσθαι λέγει, καὶ πᾶν τὸ εἰς γνῶσίν τινα ἐλθόν, καὶ εἰ μὴ ῥητὸν εἴη. ἔνιοι δὲ ῥητὸν αὐτὸ εἶναι ἀπεφήναντο, ὥσπερ δοκεῖ ὁ Πτολεμαῖος, δεδομένα ἐκεῖνα προσαγορεύων, ὧν τὸ μέτρον ἐστὶ γνώριμον, ἢ πρὸς ἀκρίβειαν, ἢ καὶ τὸ σύνεγγυς. καὶ τὸ ἐν ὑποθέσει δὲ παρὰ τοῦ προβάλλοντος προθεμένον, δεδομένον εἶναί τινες ὑπειλήφασιν. λέγουσι δὲ καὶ ἄλλον τρόπον ἐν ταῖς πρώταις στοιχειώσεσι τὸ δοθὲν καὶ τὴν δοθεῖσαν, τουτέστι ἡλίκην ἄν τις ἀφορίσῃ καὶ δῷ εὐθεῖαν. ταῦτα δὲ πάντα κατάληψίν τινα βούλεται σημειῶσαι· ὅθεν καὶ μάλιστα τῶν ὅρων ἐκεῖνοι εὐδοκιμοῦσιν, ὅσοι μάλιστα τὸ καταληπτὸν ἐμφανίζουσιν, ὡς προϊοῦσιν ἡμῖν ἔσται καταφανές.

IMPRIMIS quid sit *datum* statuere necesse est; tum demum institutæ de *dato* tractationis utilitates recensere: tertio dicere ad quam scientiam ea tractatio revocetur.

Datum porro multipliciter definitur: atque aliter quidem à veteribus, aliter autem à recentioribus. qua quidem ratione factum est, ut aliquid de illo proferre, quod verum sit, difficile videatur. Quidam enim *dati* nullam definitionem attulerunt, sed potius proprietatem ejus quam studiose rimati sunt. Aliqui autem, conjungentes & commiscentes ea quæ ab aliis prius dicta fuerant, definire *datum* voluerunt: sed neque sibi ipsis admodum consentiunt; quanquam & omnes ab una eademque ratione exorsi de illo differuerunt. *Datum* enim cuncti *comprehensibile* esse supponunt. Quamobrem eorum, qui simplicius & per aliquam differentiam *datum* describere studuerunt, alii quidem id quod *ordinatum* est *datum* esse existimaverunt, ut Apollonius in tractatu de inclinationibus, & in universali tractatu; alii autem quod *cognitum*, ut Diodorus: etenim ea ratione rectas lineas & angulos dari dicit, atque omne quod in cognitionem aliquam venit, etiamsi *effabile* non sit. Alii autem *effabile* illud ipsum esse affirmarunt, uti voluisse videtur Ptolemæus, qui illa vocat *data*, quorum mensura nota est, vel accurate vel proxime. Quidam etiam id quod in *hypothesi à proponente concessum est*, *datum* esse putaverunt. Ajunt autem aliter accipi in prioribus elementis datum punctum & datam rectam, hoc est quantam quis daret ac determinaret. Hæc tamen omnia *comprehensionem* quandam significare videntur: quamobrem ex his definitionibus, illæ maxime placent, quotquot *comprehensionem* evidentius manifestant; sicut à nobis in sequentibus ostendetur.

* Συμφωνοῦσι in Græco exemplari ad finem *Procli* excuso. † Al. τὰς ἀκτῖνας καὶ.

Jam vero eorum, qui pauci non sunt, quique tenui & unico quopiam *dati* naturam circumscribentes talem qualem illius definitionem proferunt, diversas sententias afferamus. etenim recapitulantes facillime horum omnium differentias enumerare possumus. Alii enim *datum* id quod *ordinatum* & *porimum* est definiverunt: alii autem id quod *ordinatum* est simul & *cognitum*: alii autem quod *porimum* est simul & *cognitum*. Quamobrem videntur illi omnes, ad *comprehensionem* aut *sumptionem* & *inventionem dati* respicientes, ita definivisse. Atque ut hanc illorum sententiam percipiamus plenius, & insuper ex multorum dictis veram propositi definitionem eruamus, considerabimus primum singulorum simplicium & incomplexorum, nec non oppositorum terminorum significationem, *inordinati* inquam & *incogniti* & *apori* & *irrationalis*; siquidem ea pertinent ad hanc materiam geometricam, & ad res naturales, nec non ad alias mathematicas disciplinas.

Itaque *ordinatum* describitur, id quod semper observat id per quod dicitur ordinari, sive quoad magnitudinem, sive quoad speciem, sive quoad aliud quidpiam ejusmodi. alio modo item definitur, quod aliter fieri non potest, sed solummodo definitum aliquem locum sortitur: quemadmodum, (ut exempli gratia dicam) per data duo puncta linea recta dicitur ordinari, quia aliter multipliciterque non potest duci. *Inordinata* autem est circumferentia per duo puncta, multipliciter enim variabiliterque constituitur, majori minorive circulo in infinitum per duo puncta descripto. E converso per tria puncta circumferentia dicitur *ordinata*: atque istiusmodi etiam *ordinata* esse dicuntur; ut super data recta triangulum æquilaterum constituere; non enim aliter dicitur, sed ad utramvis lineæ partem unice & invariabiliter: & datam rectam data ratione secare; unico enim modo tantum fieri potest ad alteram partem bisectionis. *Inordinata* sunt ea quæ iis opposito modo se habent: ut scalenum triangulum construere; & rectam lineam indefinite secare. Illud autem, per quod ordinatur problema, in determinatione proponitur; quandoquidem potest aliquid unum, quod *ordinatum* sit, aliquatenus quidem *ordinatum*, aliquatenus autem *inordinatum* esse: quemadmodum æquilaterum triangulum, quatenus æquilaterum est, *ordinatum* est; magnitudine autem omnino non definitur.

Cognitum autem dicitur id quod notum est, ut clarum & comprehensum à nobis; *incognitum* vero est quod minime notum est, neque comprehensum à nobis: ut longitudo itineris cognita vocatur, quando quot sit stadiorum cognoscitur; item quod trianguli tres anguli duobus rectis æquales sint; item quod binomium irrationale sit. Talia quoque *cognita* sunt: unicam *sc.* esse tangentem helicis à dato extra puncto ad alterutram partem; si enim alia esset, duæ rectæ spatium comprehenderent, quod est impossibile. Quæ porro *incognita* sunt, non ea quidem irrationalia sunt; sed ea tan-

* Νυνὶ δὲ καὶ τῶν μὴ μόνων, ψιλῷ καὶ ἑνὶ χαρακτηριζόντων τὴν τοῦ δεδομένου φύσιν, οἷον δ' ὁρισμὸν αὐτοῦ ποιούντων, τὰς διαφορὰς αὐτῶν ἐκδώμεθα. συγκεφαλαιουμένοις δὲ καὶ τούτων οἱ τρόποι εὐαρίθμητοι γίγνονται. οἱ μὲν γὰρ τεταγμένον καὶ πόριμον τὸ δεδομένον εἶναι ἀφορίσαντο· ἕτεροι δὲ τὸ τεταγμένον ἅμα καὶ γνώριμον· τινὲς δὲ τὸ † πόριμον ἅμα καὶ γνώριμον. φαίνονται δὲ καὶ οὗτοι πάντες πρὸς τὴν κατάληψιν, ἤτοι λῆψιν καὶ εὕρεσιν τοῦ δεδομένου ἀφεωρακότες τὸν εἰρημένον τρόπον ὁρίζεσθαι. ἵνα δὲ ταύτην τε αὐτῶν τὴν ἔννοιαν ‡ καταδηλώμεθα, ἔτι γε μὴν καὶ τὸν ἀληθῆ τοῦ προκειμένου ὅρον ἐκ πολλῶν τῶν παραδεδομένων ἕλωμεν, ἐπισκεπτέον πρότερον ἑκάστου τῶν ἁπλῶν τὸ σημαινόμενον, καὶ τῶν τούτοις ἀντικειμένων· τοῦτο ἀτάκτου λέγω καὶ ἀγνώστου καὶ ἀπόρου καὶ ἀλόγου· καὶ ἐπὶ τὴν ἐνεστῶσαν γεωμετρικὴν ὕλην ἐπεκτείνεται γὰρ τὰ τοιαῦτα, καὶ ἐπὶ τὰ φυσικὰ πράγματα, καὶ ἄλλας δὲ μαθηματικὰς ἐπιστήμας.

Ὑπογράφουσιν τοίνυν τὸ τεταγμένον, τὸ ἀεὶ ταὐτὸ σωζόμενον καθ' ὃ τετάχθαι λέγεται, ἤτοι κατὰ μέγεθος, ἢ εἶδος, ἢ ἄλλο τι τῶν τοιούτων. ἢ καὶ ἑτέρως, ὅπερ μὴ ἐνδέχεται ἄλλως γίγνεσθαι, ἀλλὰ μοναχῶς ἐν ἀφορισμένῳ τινὶ τόπῳ, οἷον, ὡς τύπῳ εἰπεῖν, ἡ διὰ δύο σημείων γραφομένη εὐθεῖα τετάχθαι λέγεται, διὰ τὸ μὴ ἄλλως καὶ ἀστάτως ἄγεσθαι. ἄτακτος δέ ἐστιν ἡ διὰ δυοῖν περιφέρεια, πολλαχῶς γὰρ καὶ ἀστάτως γράφεται, καὶ μείζονος καὶ ἐλάττονος κύκλου ἐπ' ἄπειρον γραφομένου διὰ τῶν δύο σημείων. πάλιν δὲ τεταγμένη ἐστὶν ἡ διὰ τριῶν σημείων περιφέρεια· ἔστι δὲ καὶ τὰ τοιαῦτα τῶν τεταγμένων, ὡς τὸ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ἰσόπλευρον τρίγωνον συστήσασθαι· οὐ γὰρ καὶ διχῶς λέγεται, ἀλλὰ καθ' ἑκάτερον μέρος τῆς εὐθείας μοναχῶς καὶ ἀμεταπτώτως. καὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς τὸν δοθέντα λόγον τεμεῖν, μοναχῶς γὰρ ἂν καὶ τοῦτο γένοιτο ἐπὶ θ' ἄτερα τῆς διχοτομίας. ἄτακτα δέ ἐστι τὰ τούτοις ἀντικειμένως ἔχοντα, ὡς τὸ σκαληνὸν συστήσασθαι, καὶ τὴν εὐθεῖαν ἀορίστως τεμεῖν. πρόσκειται δὲ τῷ ὅρῳ τὸ καθ' ὃ τέτακται· ἐπεὶ δύναταί τι ἓν καὶ πῇ μὲν τεταγμένον, ἄλλως δ' ἄτακτον εἶναι, οἷον τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ᾗ μὲν ἰσόπλευρόν ἐστι τέτακται, μεγέθει δ' οὐχ ὥρισται πάντως.

Γνώριμον δέ ἐστιν τὸ γιγνωσκόμενον, ὡς τὸ δῆλον ἡμῖν καὶ καταλαμβανόμενον, ἄγνωστον δὲ τὸ μὴ γιγνωσκόμενον, μηδὲ καταλαμβανόμενον ὑφ' ἡμῶν, οἷον τὸ μῆκος τῆς ὁδοῦ γνώριμον εἶναι λέγεται, ὅταν ὁπόσων ἐστὶ σταδίων γιγνώσκεται, καὶ τριγώνου ὅτι τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, καὶ ὅτι ἡ ἐκ δυοῖν ὀνομάτων ἄλογόν ἐστιν. ἔτι μὴν τὰ τοιάδε γνώριμα λέγεται, ὡς τὸ μίαν εἶναι τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἕλικος ἀπὸ τοῦ ἐκτὸς δοθέντος σημείου ἐπὶ θ' ὥτερα μέρη· εἰ γὰρ ἄλλη εἴη, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ἀδύνατον. ἄγνωστα οὐ τὰ ἄλογά ἐστιν, ἀλλὰ

* Mendose in altera editione Γυμνὸν δὲ καὶ μὴ μόνον ψιλῶς &c. † Al. τεταγμένον. ‡ Prius καταδηλώμεθα.

τὰ

τὰ μὴ γιγνωσκόμενα μηδὲ καταλαμβανόμενα ὑφ' ἡμῶν.

Πόριμον δέ ἐστιν ὃ δυνατοί ἐσμεν ἤδη ποιῆσαι καὶ κατασκευάσαι, τουτέστιν εἰς ἐπίνοιαν ἀγαγεῖν. ἄλλως δὲ πάλιν ὁρίζονται τὸ πόριμον, ἤτοι τὸ δι' ἀποδείξεως ποριζόμενον, ἢ ὅταν τι φαινόμενον ᾖ καὶ χωρὶς ἀποδείξεως· οἷον τὸ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράψαι, καὶ τὸ τρίγωνον συστήσασθαι, οὐ μόνον ἰσόπλευρον, ἀλλὰ καὶ σκαληνόν, καὶ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων εὑρεῖν, καὶ εὐθείας ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους εὑρεῖν, καὶ τὰ ἀπειραχῶς γιγνόμενα πόριμά ἐστιν, ὥσπερ τὸ διὰ δύο σημείων κύκλον γράψαι. ἄπορον δέ ἐστι τῷ πορίμῳ ἀντικειμένως ἔχον, ὡς ὁ τοῦ κύκλου τετραγωνισμός· οὔπω γάρ ἐστιν ἐν πόρῳ, εἰ καὶ οἷόν τε αὐτὸ πορισθῆναι, καί ἐστιν ἐπιστητόν· ἐπιστήμη γὰρ αὐτοῦ οὔπω κατείληπται. νῦν δὲ περὶ οὗ ἤδη ὄντος ἐν πόρῳ λόγος ἀποδέδοται, ὅπερ καὶ * κύριον πόριμον ἐπονομάζουσιν. τὸ γὰρ μήπω ὂν ἐν πόρῳ, ἐνδεχόμενον δὲ πορισθῆναι, πόριστον ἰδίως προσαγορεύουσιν. ἄπορον δέ ἐστιν ὡς εἴρηται, τῷ πορίμῳ ἀντικειμένως ἔχον, τουτέστιν οὗ ζήτησις ἀδιάκριτός ἐστιν.

Ῥητὸν δέ ἐστιν οὗπερ ἔχομεν εἰπεῖν μέγεθος, ἢ εἶδος, ἢ θέσιν. ἀλλ' οὗτος μὲν ὁ ὅρος κοινότερός ἐστιν, ἰδίως δὲ καθ' αὐτὸ ῥητόν ἐστιν, † ὃ κατά τινα γιγνωσκόμενον, καὶ πρὸς τὸ τῇ θέσει μέτρον, παλαιστὴν εἰ τύχοι, ἢ δάκτυλον.

‡ Οὕτω δὴ προδιωρισμένων, ῥᾷον τὸ λοιπὸν ἐπισκοπεῖν, τήν τε κοινωνίαν τῶν εἰρημένων καὶ τὴν διαφοράν, καὶ πρῶτον ὅπως ἔχει τὸ τεταγμένον πρὸς τὸ γνώριμον, καὶ τὰ τούτοις ἀντικείμενα πρὸς ἄλληλα. οὐκ ἔστι δὴ τῶν ἀναστρεφόντων τὰ τοιαῦτα, οὐδὲ μὴν ἐκείνων ἐν οἷς τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου ἐπιπλέον ἐστίν. εἰ γὰρ καὶ κοινὰ αὐτοῖς πολλὰ ὑπάρχει, ὡς τὸ διὰ δύο σημείων εὐθεῖαν γράψαι, καὶ διὰ τριῶν κύκλον **[καὶ τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι]. ἀλλὰ τὸ τετραγωνίζειν τὸν κύκλον τεταγμένον μέν, ἄγνωστον δέ. καὶ ὅτι μία εὐθεῖα τῆς ἕλικος ἀφ' ἑνὸς σημείου ἐφάπτεται, τῶν τεταγμένων καὶ μὴ ἐνδεχομένων ἄλλως ἔχειν ἐστίν· οὐ μὴν καὶ ἔγνωσται αὐτῶν ἡ ἀπόδειξις, ἤτοι κατασκευή. πάλιν δ' ἡ ἐπ' ἄπειρον τομή, καὶ ἡ τοῦ σκαληνοῦ σύστασις ἔγνωσται μέν, οὐκέτι δὲ τέτακται· ὥστε φανερὸν ὅτι ἔσται τοῦ τεταγμένου τὸ μὲν γνώριμον, τὸ δὲ ἄγνωστον. καὶ ἀνάπαλιν ἢ τοῦ γνωρίμου τὸ μὲν τεταγμένον, τὸ δὲ ἄτακτον. καὶ οὕτως ἔχει ταῦτα πρὸς ἄλληλα, ὡς τὸ λογικὸν καὶ τὸ πεζόν· οὔτε γὰρ ἐξισάζειν τὰ τοιαῦτα, οὔτε τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου ἐπιπλέον ἐστίν.

Ὁμοίως δὲ ἔχει καὶ τὸ τεταγμένον καὶ τὸ ἄτακτον πρὸς τὸ πόριμον καὶ τὸ ἄπορον, κοινωνία τε γὰρ αὐτοῖς ἔνεστι πλείστη, καὶ διαφέρει ἀλλήλων τὸν εἰρημένον τρόπον. ἡ γὰρ ἕλιξ τέτακται, ἀλλ' οὐκ ἦν τοῖς πρὸ τοῦ Ἀρχιμήδους πορίμη· καὶ τὰ ἀπειραχῶς γιγνόμενα καὶ ἄτακτα, πόριμα μέν ἐστιν, ἐὰν κατασκευὴν ἐπινοῇ τις αὐτῶν καὶ τὴν σύστασιν, οὐκέτι δὲ καὶ

tum quæ neque cognita sunt neque comprehensa à nobis.

Porimum (seu quod factionem habet) appellatur id quod possumus facere & construere, hoc est in cognitionem deducere. Rursus autem alia ratione definitur illud, *sc.* quod per demonstrationem exhiberi potest, aut quod apparens est sine demonstratione; quale est, centro intervalloque circulum describere; nec non triangulum non modo æquilaterum, sed & scalenum construere; aut binomium invenire; aut duas rectas potentia solum commensurabiles invenire, aliaque quæ infinitis modis fiunt, *porima* sunt, ut per duo puncta circulum describere. *Aporum* (id est quod factionem non habet) *porimo* maxime opponitur; ut circuli tetragonismus; nondum enim inventus est, quanquam inveniri & sciri posse certum sit, illius enim ratio nondum comprehensa est. Hic autem loquimur de eo, quod notum jam est, quod *porimum præcipuum* appellatur; quod enim nondum in promptu, possibile tamen est, *poriston* appellatur. *Aporum* autem, ut dictum est, *porimo* opponitur, *i. e.* cujus inquisitio dijudicari determinarique non potest.

Effabile autem est id cujus exprimere possumus magnitudinem, vel speciem, vel positionem. Sed hæc definitio generalior est; proprie vero & secundum se *effabile* est, quod per quædam cognitum est, & ad datam positione mensuram, palmum puta, aut etiam digitum.

His itaque explicatis, quod reliquum est facile considerare possumus, in quibus scilicet omnia, quæ superius allata sunt à nobis, conveniant & differant; & primum quidem quomodo se habeant *ordinatum* ad *cognitum*, & illorum opposita ad invicem. Non enim ea convertibiliter dicuntur, neque aliud alio latius patet, etsi conveniunt in multis; ut per duo puncta rectam describere, perque tria circulum **[triangulum æquilaterum constituere]. Porro quadrare circulum *ordinatum* quidem est, *incognitum* tamen: item quod unica sit helicis tangens ab uno puncto, ex *ordinatorum* genere quidem est, & quod aliter fieri non potest; atqui non ideo eorum demonstratio & constructio cognita est. Rursus autem rectæ sectio indefinita, & scaleni constitutio, cognoscitur quidem, nec tamen adhuc ordinatur: ita ut clarum sit *ordinatum* tam esse *cognitum* quam *incognitum*, & vice versa *cognitum* tam esse *ordinatum* quam *inordinatum*. Itaque se habent hæc ad invicem, ut rationale & pedestre; neque enim exæquant illa sese, nec aliud alio latius patet.

Similiter autem & *ordinatum* & *inordinatum* se habent ad *porimum* & *aporum*; quippe inter illa similitudo maxima est, differunt porro inter se dicta ratione. Etenim helix quidem *ordinata* est, sed non erat ante Archimedem *porima*. Eadem autem ratione quæ infinitis modis fiunt *porima* sunt: namque *inordinatorum* aliqua *porima* quidem sunt, si constitutionem eorum quis noverit & constructionem, non utique

* Al. κυρίως. † Al. ὃ κατά τινα γνωριζόμενον ἀριθμόν. ‡ Mallem τούτων. ** Illa uncis inclusa rectius abessent.

tamen *ordinata* sunt: quale est illud, scalenum triangulum constituere; etenim constructionem illius cognitam reddere ex æquilatero non est arduum, quin immo facile admodum; etiamsi *inordinatum* sit, & infinitis modis fiat.

Ita autem se habent *ordinatum* & *inordinatum* ad *effabile* & *irrationanle*: nam inter se conveniunt in multis; dicta ratione tamen differunt. Enimvero illa se non adæquant invicem, neque aliud alterum continet; quælibet enim ex binis nominibus, & quæ irrationales ita assumptæ sunt, *ordinatæ* quidem sunt, non ideo tamen *effabiles*; ut neque diameter respectu lateris quadrati. *Effabilium* vero *inordinata* multa sunt, & ea quæ multipliciter & infinitis modis cognoscuntur: potest enim scalenum triangulum mensurari à proposita & definita mensura, quamvis *inordinatum* sit.

Cogniti autem cum *porimo* similitudines omnes perspectas quidem habere facile est, differentiam autem assignare difficilius est: finitima siquidem est eorum natura, ita ut videantur invicem se adæquare. attentius tamen consideranti, differentia quædam inesse apparebit. Siquidem quod ab uno puncto una recta helicem tangat, clarum est & *cognitum*; sed non propterea cognitum est quomodo construatur, quod adhuc non est comprehensum: ita ut quod cognitum est, non ideo *porimum* sit, etsi omne quod *porimum* est *cognitum* sit; latius igitur patet *cognitum porimo.*

Rursus autem *cognitum* & *porimum* & *effabile* in aliquibus conveniunt, in aliquibus autem differunt, ea qua diximus ratione. Etenim eæ lineæ quæ irrationales appellantur *cognitæ* quidem sunt, non tamen *effabiles*. Contra numerus omnis *effabilis* quidem est, non tamen omnis *cognitus*. *Effabile* porro ex natura sua semper *effabile* est: quanquam aliqua longitudo *effabilis* modo sit, modo non, si quidem ad eandem mensuram cum aliqua alia exigatur. Sed & illa eadem longitudo aliquando *cognita* est, aliquando minime, quamvis inter illas omnino conveniat. Non parum autem difficile est reperire aliquid quod *effabile* sit, atque etiam *incognitum*: etenim latius videtur patere *cognitum* quam *effabile*. Ex his autem clarum est *porimum* & *aporum* differre à *rationali* & *irrationali*: possibile enim est & *irrationalium* aliqua *porima* esse, non autem *rationalium* aliqua esse *irrationalia*. In quibus itaque prædicta conveniant manifestissimum est, ita tamen illa se habent ad invicem, ut latius patere videatur *porimum effabili.*

Ex iis autem licet hoc loco eorum quæ dicta sunt differentiam contemplari. Nam *effabile* quidem & *irrationale* dicitur secundum respectum ad mensuram, quæ tamen ad cognitionem nostram non pervenit. Potest enim aliquid quod *rationale* est non esse nobis *cognitum*; similiter *rationale* esse, neque comprehendi unquam quod *rationale* sit. *Ordinatum* autem & *inordinatum* secundum se propriamque ejus rei natu-

τεταγμένα· οἷον σκαληνὸν τρίγωνον ἐπινοῆσαι, καὶ εἰς τὴν κατασκευὴν αὐτοῦ ἀναγαγεῖν τὴν διάνοιαν ἀπὸ τοῦ ἰσοπλεύρου οὐ χαλεπόν, ἀλλὰ εὐπόριστόν ἐστι καίτοι ἄτακτον ὂν καὶ ἄπειρον.

Οὕτω δὲ ἔχει καὶ πρὸς τὸ ῥητὸν καὶ ἄλογον τὸ τεταγμένον τι καὶ ἄτακτον· κοινωνοῦνται γὰρ ἀλλήλοις πολλαχῇ, καὶ διενηνόχε τῷ εἰρημένῳ τρόπῳ. οὐδὲ γὰρ ταῦτα ἐξισάζει * ἄλληλα, οὐδ' ἕτερον τοῦ ἑτέρου ἐστὶ περιληπτικόν, ἡ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων, καὶ αἱ οὕτως κατειλημμέναι ἄλογοι τεταγμέναι μέν εἰσιν, οὐκέτι δὲ καὶ ῥηταί, καὶ ὁ τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου. πολλὰ δὲ καὶ τῶν ῥητῶν ἄτακτά ἐστιν, ὡς τὰ πολλαχῶς καὶ ἀορίστως γεγνωμένα. δύναται γὰρ καὶ σκαληνὸν τρίγωνον μετρεῖσθαι ὑπὸ τοῦ προτεθέντος καὶ ὁρισθέντος ῥητοῦ μέτρου, καίτοι ἄτακτον ὑπάρχον.

Τοῦ δὲ γνωρίμου πρὸς τὸ πόριμον τὴν μὲν ὁμοιότητα † παντί γε ἰδεῖν ῥᾴδιον, τὴν δὲ διαφορὰν χαλεπὸν ἑλεῖν· σύνεγγυς γάρ εἰσι τὴν φύσιν ἀλλήλων, ὥστε καὶ ἐξισάζειν δοκεῖν. οὐ μὴν ἀλλὰ κἂν τοῦτο ἀκριβῶς ἐπιβλέψαντι ὀφθήσεταί τις ἐνοῦσα διαφορά. εἰ μὲν γὰρ μία ἐστὶν ἡ τῆς ἕλικος ἀφ' ἑνὸς σημείου ἐφαπτομένη, ἐμφανές ἐστι καὶ γνώριμον, ἀλλ' οὐ διὰ τοῦτο ἤδη καὶ πόριμον ἐστὶ τὸ πρόβλημα, μήπω κατειλημμένον· ‡ ὥστε πᾶν ὃ γνώριμον οὐκ ἔστι καὶ πόριμον, τὸ μέντοι πόριμον πᾶν καὶ γνώριμον, ἐπιπλέον ἄρα τὸ γνώριμον τοῦ πορίμου.

Πάλιν δ' αὖ τὸ γνώριμον καὶ τὸ πόριμον καὶ τὸ ῥητὸν πῇ μὲν κοινωνεῖ, πῇ δὲ διαφέρει ἀλλήλων, κατὰ τὸν προειρημένον τρόπον. αἱ γὰρ εἰρημέναι ἄλογοι γνώριμοι μέν εἰσιν, οὐκέτι δὲ καὶ ῥηταί. ὁ γὰρ ἀριθμὸς πᾶς ῥητὸς μέν ἐστιν, οὐκέτι δὲ γνώριμος πᾶς. καὶ τὸ μὲν ῥητὸν τοῖς κατὰ ταὐτὸν ἔθος ὁμοίως δὲ ῥητόν ἐστι· καὶ τὸ μὲν ῥητὸν ἔσται τι μῆκος, τὸ δ' οὔ, εἰ ἐπὶ ταὐτὸ ἀνύσωσι μέτρον. γνώριμον δὲ τὸ μὲν αὐτὸ μῆκος, τὸ δ' οὔ, κἂν ἐν τῇ αὐτῇ συνηθείᾳ ὦσι. ἴσως δὲ κἀνταῦθα χαλεπόν τι ἐστιν εὑρεῖν ῥητὸν μέν, ἄγνωστον δέ· δοκεῖ γὰρ καὶ τοῦ ῥητοῦ ἐπιπλέον εἶναι τὸ γνώριμον. ὅτι δὲ καὶ τὸ πόριμον καὶ τὸ ἄπορον διαφέρει τοῦ τε ῥητοῦ καὶ ἀλόγου φανερὸν ἐκ τούτων· πόριμα γὰρ εἶναι δυνατὸν καὶ τῶν ἀλόγων τινά, οὐδὲν δὲ τῶν ῥητῶν ἄλογον. ἡ δὲ συγγένεια τούτων αὐτῶν καθάπερ καὶ τῶν ἄλλων παντὶ καταφανής, οὕτω μέντοι καὶ ταῦτα ἔχει πρὸς ἄλληλα, ὥστε τὸ πόριμον ἐπιπλέον εἶναι δοκεῖν τοῦ ῥητοῦ.

Ἔξεστι δὲ τῶν προειρημένων τὰς διαφορὰς ἐπισκοπεῖν τῇδε. ῥητὸν μὲν καὶ ἄλογον κατὰ τὴν ἐπὶ τὸ μέτρον ἀναφορὰν λέγεται, οὐ πρὸς τὴν ἡμετέραν γνῶσιν ἀναπεμπόμενον. δύναται γάρ τι ῥητὸν ὂν μὴ εἶναι ἡμῖν γνώριμον, ὅμως ῥητὸν εἶναι μηδὲ κατειλῆφθαι πω ὅτι ῥητόν ἐστι. τὸ δὲ τεταγμένον καὶ ἄτακτον καθ' αὑτὸ καὶ κατ' ἰδίαν

* Al. ἀλλήλοις. † Παντὶ δὴ γε ἰδεῖν ῥᾴδιον in *Editis* vulgatis. ‡ Ita legimus ex Græco exemplari ad finem *Procli* excuso. Edidit quidem *Claudius Hardy*, ὥστε τὸ πόριμον πᾶν καὶ γνώριμον, ἐπιπλέον ἄρα &c.

φύσιν θεωρούμενόν ἐστι, κἂν ὑφ' ἡμῶν μήπω καταλαμβάνηται. πολλὰ γὰρ τεταγμένα φύσει * ὕστερον Ἀρχιμήδης τοῦ Σερήνου ἐθεώρει ὅτι τέτακται. γνώριμον δὲ καὶ ἄγνωστον κατὰ τὴν πρὸς ἡμᾶς ἀναφορὰν λέγεται, ὥστε διαφέρειν ἂν τὰ εἰρημένα ἀλλήλων· εἴπερ τὸ μὲν πρὸς ἡμᾶς ἔχει τὴν ἀναφορὰν, τόδε πρὸς τὴν φύσιν, τόδε πρὸς τὸ μέτρον.

Διωρισμένης δὲ καὶ τῆς κοινωνίας καὶ διαφορᾶς τῶν προτεθέντων, ἑπόμενον ἂν εἴη λοιπὸν τί ποτέ ἐστι τὸ δεδομένον ἐπισκέψασθαι. ὅσοι τοίνυν τὸ καθ' ὑπόθεσιν δεδομένον ὑπὸ τοῦ προβάλλοντος οἴονται εἶναι τὸ δεδομένον, διαμαρτάνουσι τοῦ ζητουμένου. τὰ γὰρ στοιχεῖα πάντα τοῦ δεδομένου συντέτακται, οὐ περὶ τοῦ καθ' ὑπόθεσιν τοιούτου, ὡς ἔξεστιν ἰδεῖν ἐπιοῦσιν τὰς περὶ τούτου πραγματείαις. διὸ δεῖ καὶ ἡμᾶς, ἀφέντας τὴν τοιαύτην ὑπόληψιν, τοὺς ἄλλως ὁριζομένους λόγους ἐξετάσασθαι· ἔσται δὲ τὸ καθ' ὑπόθεσιν δεδομένον, τὸ ἀκολούθως ταῖς ἀρχαῖς θεωρούμενον. ὁρίζονται δὴ οἱ μὲν ὀνομαστικοῖς ὅροις χρώμενοι, ἑνί τινι τῶν εἰρημένων αὐτὸ χαρακτηρίζοντες, ὡς † ἐν ἀρχῇ εἴρηται· πάντες δὲ σχεδὸν ὥσπερ κοινὴν ἔννοιαν περὶ τοῦ δεδομένου δοκοῦσιν ἐσχηκέναι, καταληπτὸν γάρ τι αὐτὸ εἶναι ὑπέλαβον, ὡς αὐτὸ ἐμφαίνει τὸ δεδομένου ὄνομα· καὶ μάλιστα οἱ τὸ καθ' ὑπόθεσιν δεδομένον ὑπογράφοντες. ἔνιοι δὲ πρὸς τὸ συγχωρούμενον ἀπέβλεψαν. χρώμενοι δὲ καὶ ἡμεῖς τῷ εἰρημένῳ, ὥσπερ κανόνι καὶ κριτηρίῳ, δυνησόμεθα εὑρίσκειν τὸν τέλειον τοῦ δεδομένου ὁρισμόν. δῆλον δὲ ὅτι καὶ ἐξισάζειν ἤτοι ἀντιστρέφειν αὐτὸ δεήσει πρὸς τὸ ὁριστόν· καὶ γὰρ τοῦτο ὑπάρχειν δεῖ τοῖς ὀρθῶς ἀποδεδομένοις ὁρισμοῖς. ἔστι δὲ τοῦ προκειμένου τοιοῦτος ἐν μὲν τοῖς ἁπλούστερον εἰρημένοις ὁρισμοῖς, ὁ τὸ πόριμον ὁριζόμενος, ἐν δὲ τοῖς συμπεπλεγμένοις ὁ τὸ γνώριμον ἅμα καὶ πόριμον, ἀτελεῖς δὲ οἱ λοιποὶ πάντες. οὔτε γὰρ ὁ τεταγμένον ὁριζόμενος αὐτάρκης ἐστὶ πρὸς τὴν τοῦ δεδομένου περιοχὴν, διὰ μήτε τὸ πᾶν μήτε μόνον τὸ τεταγμένον εἶναι καταληπτόν· ἀλλὰ καὶ τῶν ἀτάκτων τινὰ, ὡς ἐπιδέδεικται. οὔτε ἐκεῖνος ἱκανὸς, ὁ γνώριμον αὐτὸ ἀφοριζόμενος, οὐδὲ γὰρ τοῦτο πᾶν ἐστι καταληπτόν, εἰ καὶ μόνον· τὸ γὰρ ἄγνωστον οὐκ ἂν εἴη καταληπτόν. οὐδὲ μὴν ὁ ῥητὸν αὐτὸ ἀποφαινόμενος ὅρος τέλειος ἔσται· οὐδὲ γὰρ τοῦτο μόνον καταληπτόν, ὡς καὶ τοῦτο διώρισται πρότερον. λείπεται δὲ ἐν τοῖς ὀνομαστικῶς ἀποδεδομένοις τὸ πόριμον, ὅπερ δοκεῖ μάλιστα τὴν κατάληψιν ἐμφαίνειν· οὐ γὰρ τὸ πόριμον καταληπτὸν καὶ μόνον. τῷ τοιούτῳ καὶ Εὐκλείδης ἐχρήσατο, ὁρώμενα εἴδη τοῦ δεδομένου πάντα ὑπογράφων. τῶν δὲ συνθετῶν ὁρισμῶν μόνος τέλειος ἔσται, ὁ γνώριμον ἅμα καὶ πόριμον τὸ δεδομένον ἀφοριζόμενος, γένει μὲν ἀνάλογον ἔχον τὸ γνώριμον, διαφορᾷ δὲ τὸ πόριμον. ὁ δὲ τεταγμένον ἅμα καὶ πόριμον λέγει, οὐκ ἀληθής· οὐ μόνα γὰρ τὰ τοιαῦτά ἐστι δεδομένα. καὶ ὁ τὸ τεταγμένον καὶ ῥητὸν ὁμοίως ἐλλειπῶς περιέχει τὸ δεδομένον· ὁ δὲ τὸ γνώριμον ἅμα καὶ τεταγμένον, διὰ τὸ ὑπερβάλλειν τὸ ὑποκείμε-

ram, quæ in contemplationem venit, dicitur; etiamsi à nobis minime comprehendatur. nam multa Archimedes posterius *ordinata* esse natura deprehendit, quæ Serenus fuerat contemplatus. *Cognitum* autem & *incognitum* secundum respectum ad nos dicitur, ita ut prædicta differant ab invicem; siquidem hoc refertur ad nos, illud ad propriam naturam, posterius autem ad mensuram.

Explicatis autem & similitudinibus & differentiis eorum quæ proposita sunt, consequens fuerit considerare quid sit *datum*. quotquot enim *id quod in hypothesi concessum est à proponente* putant esse *datum*, aberrant à quæsito. Etenim omnia *datorum* elementa de ejusmodi *dato*, quod est secundum hypothesim, composita non sunt; ut videre licet versatis in tractatione quæ habetur de *dato*. Quamobrem, omissa hac opinione, oportet nos de aliorum definitionibus ferre judicium: quod vero secundum hypothesin datur, est aliquid quod consequenter ex principiis cognoscitur. Porro definitionibus, quæ uno verbo constant, utentes, illud definiunt & aliquo prædictorum insigniunt, ut principio dictum est: ita ut fere omnes hoc idem de *dato* sensisse videantur, ut illud (quod & ipsum *dati* nomen innuit) *comprehensum* quiddam esse supponerent: atque inter illos ii maxime qui illud per *hypothesim* descripserunt; alii autem ad id quod *concessum* est respexerunt. Nos autem utentes dictis, ut regula & criterio, poterimus invenire perfectam *dati* definitionem. Clarum siquidem est quod exæquare aut converti ipsam oportebit cum definito: nam hoc oportet fieri in omnibus definitionibus recte traditis. Est autem propositi talis definitio; in simplicius quidem traditis, illa quæ definit *porimum*; in complexis vero quæ *porimum* & simul *gnorimum*, imperfectæ vero sunt reliquæ omnes. Neque enim quæ *ordinatum* definit sufficit ad *dati* comprehensionem, quia neque illud omne neque illud solum quod *ordinatum* est *comprehensum* est: etenim *inordinatorum* aliqua talia sunt, ut ostensum est. Neque illa satisfacit quæ *cognitum* illud esse describit; nam non illud omne solum *comprehensum* est; & si solum esset; incognitum utiq; numquid esset comprehensum? Neque item quæ *effabile* illud esse definit perfecta est; non enim illud omne solum *comprehensum* est, ut superius declaratum est. Porro in iis definitionibus, quæ uno verbo traditæ sunt, maxime deficit illa *porimi*, quæ videtur comprehensionem manifestare: non enim illud solum quod *porimum* est *comprehensum* est. Tali autem & ipse Euclides definitione usus est, cum perspectas sibi *dati* species omnes describeret. Compositarum autem definitionum ea perfecta est, quæ *cognitum* simul & *porimum datum* esse definit, pro genere quidem analogico habens *cognitum*, pro differentia autem *porimum*. Quæ porro *ordinatum* simul & *porimum* dicit, imperfecta est; non enim quæ talia sunt sola *data* sunt. quæ vero & *ordinatum* & *effabile* similiter cum defectu comprehendit *datum*; quod vero *cognitum* simul & *ordinatum*, quia propositum excedit, sana

non

* Omnino legendum ὕστερον Ἀρχιμήδους ὁ Σέρηνος ἐθεώρει. † *sc.* p. 454. v. 1 & 2.

non est; neque enim illud solum quod tale est *datum* est. soli autem illi, quod superest, ad *dati* cognitionem pervenisse videntur, qui illud quod *cognitum* est, esse *datum* ostenderunt: quod enim tale est, omne & solum *comprehensum* est; quæ utraque inesse debent recte traditis definitionibus. accedunt autem ad eos proxime qui ita definiverunt: *datum est cui æquale possumus exhibere, secundum ea quæ proposita sunt à nobis in primis hypothesibus & principiis.* Ex quorum numero est Euclides ipse ubique usus verbo πορίσασθαι, quanquam prætermittat *cognitum* ut consequens ex *porimo*. Posset autem illum aliquis merito reprehendere, quod non prius quidem *datum in communi* definierit, sed immediate specierum *dati* quamlibet, quamvis in geometricis elementis visus sit simplicem lineam ante species lineæ descripsisse, & alia similiter.

Quæ sit utilitas tractatus de datis.

Igitur cum universalius à nobis, & quantum quidem ad hoc negotium necessarium esse visum est, quid sit *datum* exposuerimus, consequens fuerit hujusce tractationis utilitates aperire. Etenim ea tractatio talis est, ut non sui solum, sed alicujus alterius rei gratia instituatur: etenim ad *locum resolutum* maxime necessaria est hæc scientia. Quantam porro vim *resolutus locus* obtineat in mathematicis disciplinis, & quæ ad illas proxime accedunt, Optica & Canonica, alio loco dictum est à nobis, tum quod *resolutio* sit demonstrationis inventio, tum quod in similibus rebus ad demonstrationis inventionem nobis ea multum conferat, tum quod longe præstantius sit potentiam resolutivam nancisci, quam multas particulares demonstrationes possidere.

Ad quam scientiam datorum *tractatio revocetur.*

Porro cum ad omnes ejusmodi scientias utilis sit *datorum* consideratio, quippe quæ ad *resolutionem* multum utilitatis afferat, merito dicetur non quidem ad unam scientiam, sed ad universalem illam Mathematicam potius revocari, quæ versatur circa numeros, magnitudines, tempora, velocitatem, & omnia quæ sunt ejusmodi, quæque de rationibus agit, nec non de proportionibus atque omnibus omnino medietatibus. quamobrem ad perfectam & demonstrativam *datorum* cognitionem tantopere utilem, hunc *datorum librum* elaboravit Euclides ille qui, inter eos qui elementa Geometrica composuerunt, facile principatum obtinet. quippe cum omnium fere mathematicarum disciplinarum (ut omnis Geometriæ in XIII. libris, Astronomiæ in Phænomenis, Musicæ & Opticæ) elementa seu verius introductiones exarasset, in hoc opere tractationis de *dato*, elementa resolutiva conscripta reliquit. Sed cum Geometra esset, quæ reliquis communia erant cum *dato*, magnitudinibus particulariter accommo-

νον οὐχ ὑγιὴς ἔσται. οὐδὲ γὰρ πᾶν τὸ τοιοῦτο δεδομένον ἐστί. μόνοι δὲ, λοιπὸν, δοκοῦσιν καθικνεῖσθαι τῆς ἐννοίας τοῦ δεδομένου, οἱ γνώριμον αὐτὸ εἶναι ἀποφηνάμενοι· τὸ γὰρ τοιοῦτο πᾶν καταληπτὸν καὶ μόνον· ταῦτα δὲ ἀμφότερα δεῖ ὑπάρχειν, τοῖς ἐπιστημονικῶς ἀποδεδομένοις ὁρισμοῖς. ἐγγὺς δὲ τούτων ἐστὶν οἱ συνθέντες καὶ οὕτως· δεδομένον ἐστὶν ᾧ πορίσασθαι δυνάμεθα ἴσον, διὰ τῶν κειμένων ἡμῖν ἐν ταῖς πρώταις ὑποθέσεσίν τε καὶ ἀρχαῖς. τῶν δὲ προειρημένων εἴη ἂν Εὐκλείδης, πανταχοῦ τῷ πορίσασθαι χρώμενος, εἰ καὶ παραλιμπάνει τὸ γνώριμον, ὡς παρεπόμενον τῷ πορίμῳ. αἰτιάσαιτο δ' ἄν τις αὐτὸν εὐλόγως ὡς οὐ πρότερον κοινῶς τὸ δεδομένον ὁρισάμενον, ἀλλ' ἀμέσως τῶν εἰδῶν αὐτοῦ ἕκαστον, καί τοι ἐν τῇ γεωμετρικῇ στοιχειώσει, φαίνεται πρὸ τῶν εἰδῶν τῆς γραμμῆς, τὴν ἁπλῶς γραμμὴν ὁρισάμενος, καὶ τὰ ἄλλα ὁμοίως.

Τί τὸ χρήσιμον τῆς περὶ τῶν δεδομένων πραγματείας.

Διακριθέντος τοίνυν κοινότερον, καὶ ἴσον καὶ πρὸς τὴν παροῦσαν χρείαν τοῦ δεδομένου, ἐφεξῆς ἂν εἴη τὸ χρήσιμον τῆς περὶ αὐτοῦ πραγματείας ἀποδοῦναι. ἔστι δὲ καὶ τοῦτο τῶν πρὸς ἄλλο ἐχόντων τὴν ἀναφοράν· πρὸς γὰρ τὸν ἀναλυόμενον λεγόμενον τόπον ἀναγκαιοτάτη ἐστὶν ἡ τούτου γνῶσις. ὅσην δ' ἔχει δύναμιν ἐν ταῖς μαθηματικαῖς ἐπιστήμαις, καὶ ταῖς συγγενῶς ὀπτικαῖς τε καὶ κανονικαῖς, ὁ ἀναλυόμενος τόπος ἐν ἄλλοις διώρισται, καὶ ὅτι ἀποδείξεώς ἐστιν εὕρεσις ἡ ἀνάλυσις. καὶ ὅτι πρὸς εὕρεσιν τῆς τῶν ὁμοίων ἀποδείξεως ἡμῖν συμβάλλεται, καὶ ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ δύναμιν ἀναλυτικὴν κτήσασθαι, τοῦ πολλὰς ἀποδείξεις τῶν ἐπὶ μέρους ἔχειν.

Ὑπὸ τίνα ἐπιστήμην ἀνάγεται ἡ τῶν δεδομένων πραγματεία.

Εἰς πάσας τοίνυν τὰς τοιαύτας ἐπιστήμας χρησίμη οὖσα ἡ περὶ τῶν δεδομένων θεωρία, ἐπείπερ εἰς ἀνάλυσιν μέγα συμβάλλεται, εἰκὸς ἂν ῥηθείη ἀνάγεσθαι οὐχ ὑπὸ μίαν ἐπιστήμην, ἀλλ' εἰς τὴν καθόλου λεγομένην μαθηματικήν· αὐτὴ δέ ἐστιν ἡ περὶ τὰ πλήθη, καὶ μεγέθη, καὶ χρόνους, καὶ τάχυν ἔχουσα καὶ ταῦτα πάντα, καθάπερ δὴ ἡ περὶ λόγους, καὶ ἀναλογίας καὶ τὰς πανταχοῦ μεσότητας πραγματευομένη. πρὸς ταύτην τοίνυν τὴν δεδομένου ἐπιστημονικὴν κατάληψιν χρησιμωτάτην οὖσαν, τὸ τῶν δεδομένων βιβλίον ὁ Εὐκλίδης ἐξεπόνησεν, ὃν καὶ στοιχειωτὴν κύριον ἐπωνόμασαν. πάσης γὰρ σχεδὸν μαθηματικῆς ἐπιστήμης στοιχεῖα, καὶ οἷον εἰσαγωγὰς προεξέταξεν, ὡς γεωμετρίας μὲν ὅλης ἐν τοῖς ιγ΄. βιβλίοις, καὶ τῆς ἀστρονομίας ἐν τοῖς Φαινομένοις, καὶ μουσικῆς δὲ καὶ ὀπτικῆς ὁμοίως στοιχεῖα παραδέδωκεν, καὶ τῆς περὶ δεδομένου ταύτης πραγματείας ἐν τῷ προκειμένῳ βιβλίῳ στοιχείωσιν ἀναλυτικὴν ἐποιήσατο. γεωμετρικὸς δὲ ὢν ἀνὴρ διαφερόντως τοὺς κοινοὺς λόγους τοῖς μεγέθεσιν

ἰδίως

ἰδίως ἐφάρμοσεν, ὃν τρόπον ἐποίησεν καὶ ἐπὶ τῶν καθόλου λόγων, ὡς ἐπὶ μεγεθῶν ἰδίως αὐτοὺς πραγματευσάμενος ἐν τῷ πέμπτῳ βιβλίῳ τῶν ἐπιπέδου.

Κοινῶς μὲν καὶ εἴρηταί τι δεδομένον, καὶ ὑπὸ ποίαν ἐπιστήμην ἀνάγεται, καὶ ὅτι χρησιμωτάτη ἐστὶν ἡ περὶ αὐτῶν θεωρία. προσκείσθω δὲ τοῖς εἰρημένοις καὶ ἡ περιγραφὴ τῆς περὶ αὐτῶν ἐπιστήμης. ἔστι δὲ αὐτὴ, ὡς ἐκ τῶν εἰρημένων φανερὸν, κατάληψις τῶν δεδομένων κατὰ πάντα τρόπον, καὶ τῶν περὶ αὐτὰ συμβαινόντων. ἰδίως δὲ καὶ ὡς πρὸς τὸ προκείμενον βιβλίον, λεγέσθω εἶναι μέθοδος στοιχείωσιν περιέχουσα τῆς ὅλης περὶ τοῦ δεδομένου ἐπιστήμης. ἕξει δὲ αὐτὴ τὸ χρήσιμον ἀκολούθως, καὶ τὰ ἄλλα, κατὰ τὴν ἀναφορὰν τὴν πρὸς τὸ δεδομένον.

Διῄρηται δὲ τὸ βιβλίον πρὸς τὰ δεδομένου εἴδη, καὶ τὸ μὲν πρῶτον αὐτῶν τμῆμα περιέχει τὰ κατὰ λόγον δεδομένα, τὸ δὲ δεύτερον τὰ τῇ θέσει, ἔπειτα δὲ, τὰ τῷ εἴδει. ἁπλοῦν γὰρ ἦν τὸ περὶ τῷ μεγέθει δεδομένον, κατέσπαρται δὲ καὶ ταῦτα μεμικτῶς ἐν τοῖς ἄλλοις, καὶ μάλιστα τὸ εἶδος δεδομένοις· ἤρξατο δὲ ἀπὸ τῶν λόγῳ καὶ θέσει δεδομένων, ἐπεὶ καὶ ἐκ τούτων συνίσταται τὰ τῷ εἴδει δεδομένα. καὶ ἄλλως δὲ ἡ διαίρεσις αὐτοῦ τοῦ βιβλίου γέγονεν, εἴς τε καθόλου μεγέθη, καὶ εἰς γραμμὰς, καὶ ἐπίπεδα, καὶ κυκλικὰ θεωρήματα· τῇ δὲ ὁμοίᾳ τάξει ἐχρήσατο καὶ ἐπὶ τῶν ὅρων, ἤτοι ὑποθέσεων τοῦ βιβλίου· τρόπῳ δὲ διδασκαλίας οὐ κατὰ σύνθεσιν ἐνταῦθα ἠκολούθησεν, ἀλλὰ τῷ κατὰ ἀνάλυσιν, ὡς ὁ Παππὸς ἱκανῶς ἀπέδειξεν ἐν τοῖς εἰς τὸ βιβλίον ὑπομνήμασι.

davit; quam rationem ipse servavit, cum de rationibus in universum loqueretur, de iis, tanquam ad magnitudines solum spectantibus, locutus in libro quinto de planis.

Nunc generaliter quidem dictum est quid sit *datum*, & ad quam scientiam pertineat, & quod utilissima sit ejus contemplatio. Adjiciatur autem ad ea quæ dicta sunt, & illius scientiæ, quæ circa datum versatur, descriptio. Est illa quippe, ut ex dictis patet, omnimoda comprehensio *datorum*, & eorum quæ illis accidunt. Peculiariter autem & congruenter ad propositum librum dicatur esse methodus continens elementa ejus scientiæ quæ *datum* contemplatur. Habebit autem & illa utilitatem ex consequenti, atque alia, quatenus refertur ad *datum*.

Porro hic liber secundum *datorum* species dividitur; & prima quidem ejus sectio continet quæ *data* sunt *ratione*, secunda ea quæ *positione*, tum ea quæ *specie data* sunt. Etenim illud quod *magnitudine datum* est, simplex est, & in aliis particulariter continetur, & præcipue in *datis specie*. Incepit autem à *ratione* & *positione datis*, quoniam ex his resultant *specie data*. Aliam vero divisionem recipit hic liber; dividitur quippe & in *magnitudines in universum*, & in *lineas*, & in *superficies*, & in *theoremata de circulis*; quem ordinem secutus fere est in definitionibus & suppositionibus hujus libri. Genere porro docendi usus est, non qui per compositionem procedit, sed qui per resolutionem, ut à Pappo * in commentariis ad hunc librum fuse satis ostensum est.

* Præfat. ad lib. VII. Collect. Math.

ΕΥ-

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΤΑ
ΔΕΔΟΜΕΝΑ.

EUCLIDIS
DATA.

ΟΡΟΙ.

α'. ΔΕΔΟΜΕΝΑ τῷ μεγέθει λέγεται, χωρία τε, καὶ γραμμαὶ, καὶ γωνίαι, οἷς δυνάμεθα ἴσα πορίσασθαι.

β'. Λόγος δεδόσθαι λέγεται, ᾧ δυνάμεθα τὸν αὐτὸν πορίσασθαι.

γ'. Εὐθύγραμμα σχήματα τῷ εἴδει δεδόσθαι λέγεται, ὧν αἵ τε γωνίαι δεδομέναι εἰσὶ κατὰ μίαν, καὶ οἱ λόγοι τῶν πλευρῶν πρὸς ἀλλήλας δεδομένοι.

δ'. Τῇ θέσει δεδόσθαι λέγεται, σημεῖά τε, καὶ γραμμαὶ, καὶ χωρία, καὶ γωνίαι, ἃ τὸν ἀεὶ τόπον ἔχει.

ε'. Κύκλος τῷ μεγέθει δεδόσθαι λέγεται, οὗ δέδοται ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῷ μεγέθει.

ϛ'. Τῇ θέσει δὲ καὶ τῷ μεγέθει κύκλος δεδόσθαι λέγεται, οὗ δέδοται τὸ μὲν κέντρον τῇ θέσει, καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῷ μεγέθει.

ζ'. Τμήματα κύκλων τῷ μεγέθει δεδόσθαι λέγεται, ἐν οἷς αἵ τε γωνίαι δεδομέναι εἰσὶ καὶ αἱ βάσεις τῶν τμημάτων τῷ μεγέθει.

η'. Τῇ θέσει δὲ καὶ τῷ μεγέθει τμήματα δεδόσθαι λέγεται, ἐν οἷς αἵ τε γωνίαι δεδομέναι εἰσὶ τῷ μεγέθει, καὶ αἱ βάσεις τῶν τμημάτων τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.

θ'. Μέγεθος μεγέθους, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν, ὅταν, ἀφαιρεθέντος τοῦ δοθέντος, τὸ λοιπὸν τῷ αὐτῷ ἴσον ᾖ.

ι'. Μέγεθος μεγέθους, δοθέντι, ἔλαττόν ἐστιν, ὅταν, προστεθέντος τοῦ δοθέντος, τὸ ὅλον τῷ αὐτῷ ἴσον ᾖ.

DEFINITIONES.

1. DATA magnitudine dicuntur, ſpatia, lineæ, angulique, quibus æqualia poſſumus invenire.

2. Ratio dari dicitur, cui poſſumus eandem invenire.

3. Rectilineæ figuræ ſpecie dari dicuntur, quarum & ſinguli anguli dati ſunt, & laterum rationes ad invicem etiam datæ.

4. Poſitione dari dicuntur, puncta, lineæ, ſpatia, & anguli, quæ eundem ſitum ſemper obtinent.

5. Circulus magnitudine dari dicitur, cujus datur ea quæ ex centro magnitudine.

6. Poſitione & magnitudine dari dicitur circulus, cujus centrum quidem datur poſitione, & ea quæ ex centro magnitudine.

7. Circuli ſegmenta magnitudine dari dicuntur, in quibus & anguli & ſegmentorum baſes magnitudine data ſunt.

8. Poſitione & magnitudine dari dicuntur circuli ſegmenta, in quibus anguli magnitudine dati ſunt, atque ſegmentorum baſes poſitione ſimul ac magnitudine.

9. Magnitudo magnitudine major eſt, data; quando, ablata data, reliqua eidem æqualis eſt.

10. Magnitudo magnitudine minor eſt, data; quando, adjuncta data, tota eidem æqualis eſt.

11. Magnitudo magnitudine major est, data *magnitudine*, quam in ratione: quando, ablata data, reliqua ad eandem habet rationem datam.

12. Magnitudo magnitudine minor est, data, quam in ratione: quando, adjuncta data, tota ad eandem habet rationem datam.

13. Deducta linea recta est, quæ à dato puncto ad datam positione rectam in angulo dato ducitur.

14 Educta vero linea recta est, quæ à dato puncto ad datam positione rectam in dato angulo protrahitur.

15. Contra positione recta est, quæ per datum punctum datæ positione rectæ parallela ducitur.

ια'. Μέγεθος μεγέθους, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ὅταν, ἀφαιρεθέντος τοῦ δοθέντος, τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχει δεδομένον.

ιβ'. Μέγεθος μεγέθους, δοθέντι, ἔλαττόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ὅταν, προστεθέντος τοῦ δοθέντος, τὸ ὅλον πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχει δεδομένον.

ιγ'. Κατηγμένη ἐστὶν, ἡ ἀπὸ δεδομένου σημείου ἐπὶ θέσει εὐθεῖαν ἀγομένη εὐθεῖα ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ.

ιδ'. Ανηγμένη ἐστὶν, ἡ ἀπὸ δεδομένου σημείου πρὸς θέσει εὐθεῖαν ἀγομένη εὐθεῖα ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ.

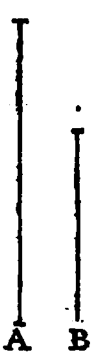
ιε'. Παρὰ θέσει ἐστὶν, ἡ διὰ δεδομένου σημείου δεδομένῃ θέσει εὐθείᾳ παράλληλος ἀγομένη.

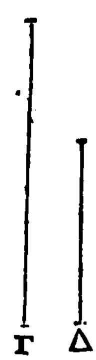
Prop. I.

Datarum magnitudinum ratio ad invicem datur.

Sint datæ magnitudines A, B: dico rationem ipsius A ad B datam esse.

Quoniam enim datur magnitudo A, possumus [per 1. def. dat.] illi invenire æqualem. inveniatur, & esto Γ. rursus cum data sit magnitudo B, illi possumus invenire æqualem. inveniatur, & esto Δ. quoniam igitur A æqualis est ipsi Γ, & B ipsi Δ; erit ut A ad Γ ita B ad Δ: permutando igitur erit [per 16.5.] ut A ad B ita Γ ad Δ. ratio igitur ipsius A ad B [per 2. def. dat.] data est; huic enim eadem inventa est, sc. ratio ipsius Γ ad Δ. quod erat demonstrandum.





ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Τῶν δεδομένων μεγεθῶν ὁ λόγος ὁ πρὸς ἄλληλα δέδοται.

Ἔστω δεδομένα μεγέθη τὰ Α, Β· λέγω ὅτι τοῦ Α πρὸς τὸ Β λόγος ἐστὶ δοθείς.

Ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὸ Α, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ ἴσον πορίσασθαι. πεπορίσθω, καὶ ἔστω τὸ Γ. πάλιν ἐπεὶ δεδομένον ἐστὶ τὸ Β, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ ἴσον πορίσασθαι. πεπορίσθω, καὶ ἔστω τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν Α τῷ Γ, τὸ δὲ Β τῷ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτω τὸ Β πρὸς τὸ Δ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτω τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, τοῦ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγος ἐστὶ δοθείς· ὁ αὐτὸς γὰρ αὐτῷ πεπόρισται ὁ τοῦ Γ πρὸς τὸ Δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. II.

Si data magnitudo ad aliam aliquam magnitudinem rationem datam habeat; datur quoque alia illa magnitudine.

Data enim magnitudo A ad aliam magnitudinem B habeat rationem datam: dico & ipsam B magnitudine datam esse.

Quoniam enim data est A, possumus [per 1. def. dat.] illi æqualem invenire. inveniatur, & esto Γ. & quoniam data est ratio ipsius A ad B; (ita enim supponitur,) possumus huic æqualem invenire. inveniatur, & esto ratio ipsius Γ ad Δ. & quoniam est ut A ad B ita Γ ad Δ; erit quoque permutando ut A

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἐὰν δεδομένον μέγεθος πρὸς ἄλλο τι μέγεθος λόγον ἔχῃ δεδομένον, δέδοται κἀκεῖνο τῷ μεγέθει.

Δεδομένον γὰρ μέγεθος τὸ Α πρὸς ἄλλο τι μέγεθος τὸ Β λόγον ἐχέτω δεδομένον· λέγω ὅτι δέδοται καὶ τὸ Β τῷ μεγέθει.

Ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὸ Α, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ ἴσον πορίσασθαι. πεπορίσθω καὶ ἔστω τὸ Γ. καὶ ἐπεὶ δέδοται ὁ τοῦ Α πρὸς τὸ Β λόγος, οὕτω γὰρ ὑπόκειται, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ τὸν ἴσον πορίσασθαι. πεπορίσθω καὶ ἔστω ὁ τοῦ Γ πρὸς τὸ Δ λόγος. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτω τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς

πρὸς τὸ Γ οὕτω τὸ Β πρὸς τὸ Δ. ἴσον δὲ τὸ Α τῷ Γ· ἴσον ἄρα τὸ Β τῷ Δ· δέδοται ἄρα τὸ Β μέγεθος, ἴσον γὰρ αὐτῷ πεπόρισται τὸ Δ.

ad Γ ita B ad Δ. æqualis autem est A ipsi Γ; æqualis igitur est & B ipsi Δ. itaque [per 1 def. dat.] magnitudo B data est; illi enim æqualis inventa est Δ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

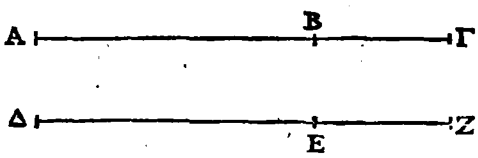
Prop. III.

Ἐὰν δεδομένα μεγέθη ὁποσαοῦν συντεθῇ, καὶ τὸ ἐξ αὐτῶν συγκείμενον δεδομένον ἔσται.

Si quotlibet datæ magnitudines componantur; quæ ex iis componitur magnitudo data erit.

Συγκείσθω γὰρ ὁποσαοῦν δεδομένα μεγέθη, τὰ ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ τὸ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ συγκείμενον τὸ ΑΓ δεδομένον ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὸ ΑΒ, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ ἴσον πορίσασθαι. πεπορίσθω καὶ ἔστω τὸ ΔΕ. πάλιν ἐπεὶ δέδοται τὸ ΒΓ, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ ἴσον πορίσασθαι. πεπορίσθω καὶ ἔστω τὸ ΕΖ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΔΕ, τὸ δὲ ΒΓ τῷ ΕΖ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΓ ὅλῳ τῷ ΔΖ ἐστὶν ἴσον· δέδοται ἄρα τὸ ΑΓ, ἴσον γὰρ αὐτῷ πεπόρισται τὸ ΔΖ.



Componantur enim quotlibet magnitudines datæ AB, BΓ: dico dari etiam magnitudinem AΓ, quæ ex ipsis AB, BΓ componitur.

Quoniam enim datur AB, possumus [per 1. def. dat.] illi invenire æqualem. inveniatur & esto ΔE. rursus quia datur BΓ, possumus illi invenire æqualem. inveniatur & esto EZ. quoniam igitur æqualis est AB ipsi ΔE, atque BΓ ipsi EZ: erit & tota AΓ toti ΔZ æqualis: itaque [per 1. def. dat.] data est AΓ; illi enim æqualis inventa est magnitudo ΔZ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

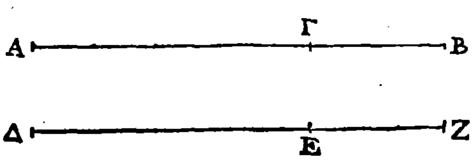
Prop. IV.

Ἐὰν ἀπὸ δεδομένου μεγέθους δεδομένον μέγεθος ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν δεδομένον ἔσται.

Si à data magnitudine data magnitudo auferatur; etiam reliqua magnitudo data erit.

Ἀπὸ γὰρ δεδομένου μεγέθους τοῦ ΑΒ δεδομένον μέγεθος ἀφῃρήσθω τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι καὶ τὸ λοιπὸν τὸ ΓΒ δεδομένον ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὸ ΑΒ, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ ἴσον πορίσασθαι. πεπορίσθω καὶ ἔστω τὸ ΔΖ. πάλιν, ἐπεὶ δέδοται τὸ ΑΓ, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ ἴσον πορίσασθαι. πεπορίσθω καὶ ἔστω τὸ ΔΕ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΔΖ, τὸ δὲ ΑΓ τῷ ΔΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΒ λοιπῷ τῷ ΕΖ ἴσον ἐστί· δέδοται ἄρα τὸ ΓΒ, ἴσον γὰρ αὐτῷ πεπόρισται τὸ ΕΖ.



A Data enim magnitudine AB auferatur data magnitudo AΓ: dico & reliquam magnitudinem ΓB datam esse.

Quoniam enim data est AB, possumus [per 1. def. dat.] illi invenire æqualem. inveniatur & esto ΔZ. rursus, quia data est AΓ, possumus illi invenire æqualem. inveniatur & esto ΔE. quoniam igitur magnitudo AB quidem ipsi ΔZ, magnitudo autem AΓ ipsi ΔE æqualis est: erit & reliqua ΓB reliquæ EZ æqualis: itaque [per 1. def. dat.] data est ΓB; æqualis enim ipsi inventa est EZ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Prop. V.

Ἐὰν μέγεθος πρὸς ἑαυτοῦ τι μέρος λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ πρὸς τὸ λοιπὸν ἕξει δεδομένον.

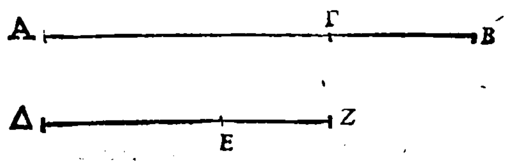
Si magnitudo ad suiipsius aliquam partem habeat rationem datam; etiam ad reliquam habebit rationem datam.

Μέγεθος γὰρ τὸ ΑΒ πρὸς ἑαυτοῦ τι μέρος τὸ ΑΓ λόγον ἐχέτω δεδομένον· λέγω ὅτι καὶ πρὸς τὸ λοιπὸν τὸ ΒΓ λόγον ἔχει δεδομένον.

Κείσθω γὰρ δεδομένον μέγεθος τὸ ΔΖ. καὶ ἐπεὶ

Magnitudo enim AB ad suiipsius partem aliquam AΓ habeat rationem datam: dico illam etiam ad reliquam BΓ habere rationem datam.

Exponatur enim data magnitudo ΔZ. quoniam autem ratio magnitudinis AB ad magnitudinem AΓ data est; fiat huic eadem ratio ipsius ΔZ ad ΔE: ergo [per 1.def. dat.] data est ratio ipsius ΔZ ad ΔE. est autem ΔZ data: ergo [per 2.dat.] data est ΔE: quare [per 4. dat.] & reliqua EZ data est. data autem est ΔZ; igitur [per 1. dat.] ratio ipsius ΔZ ad ZE data est. quoniam vero est [per constr.] ut ΔZ ad ΔE ita AB ad AΓ: ergo per conversionem rationis est [per cor. 19. 5.] ut ΔZ ad ZE ita AB ad BΓ. est autem ratio ipsius ΔZ ad ZE data, ut ostensum est: quare & magnitudinis AB ad BΓ ratio est data.



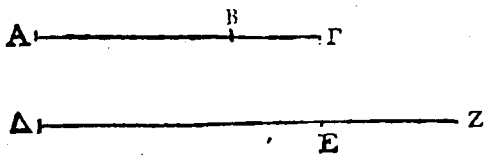
λόγος ἐστὶ δοθεὶς ὁ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΑΓ, ὁ αὐτὸς αὐτῷ πεποιήσθω ὁ τοῦ ΔΖ πρὸς ΔΕ· λόγος ἄρα ἐστὶν ὁ τοῦ ΔΖ πρὸς ΔΕ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΔΖ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΔΕ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΖ δοθέν ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΔΖ δοθέν· λόγος ἄρα τοῦ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ δοθείς ἐστι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΔΖ πρὸς ΔΕ οὕτως καὶ τὸ ΑΒ πρὸς ΑΓ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ. λόγος δὲ τοῦ ΔΖ πρὸς ΖΕ δοθείς ἐστιν, ὡς δέδεικται· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΑΒ πρὸς ΒΓ δοθείς ἐστιν.

Prop. VI.

Si componantur duæ magnitudines habentes ad invicem rationem datam; & ea, quæ ex iis componitur, magnitudo ad utramque rationem datam habebit.

Componantur enim duæ magnitudines AB, BΓ, habentes ad invicem rationem datam: dico quod tota AΓ ad utramque AB, BΓ rationem habet datam.

Exponatur enim data magnitudo ΔE. quoniam vero ratio ipsius AB ad BΓ data est; fiat huic eadem ratio ipsius ΔE ad EZ. ratio igitur ipsius ΔE ad EZ est data: igitur [per 2. dat.] utraque magnitudinum ΔE, EZ data est: quare [per 1. & 3.dat.] ipsius ΔZ ad utramque ΔE, EZ ratio est data. quoniam autem est ut AB ad BΓ ita ΔE ad EZ; componendo igitur erit [per 18.5.] ut AΓ ad BΓ ita ΔZ ad ZE; & [per cor. 19.5.] convertendo ut AΓ ad AB ita ΔZ ad ΔE. & quoniam est ut ΔZ ad utramque ΔE, EZ ita AΓ ad utramque AB, BΓ: ipsius igitur AΓ ad utramque AB, BΓ ratio est data.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛʹ.

Ἐὰν δύο μεγέθη συντεθῇ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα δεδομένον, καὶ τὸ ὅλον πρὸς αὐτῶν ἑκάτερον λόγον ἕξει δεδομένον.

Συγκείσθω γὰρ δύο μεγέθη ΑΒ, ΒΓ, πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα δεδομένον· λέγω ὅτι καὶ ὅλον τὸ ΑΓ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΒΓ λόγον ἔχει δεδομένον.

Ἐκκείσθω γὰρ δεδομένον μέγεθος τὸ ΔΕ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ πεποιήσθω ὁ τοῦ ΔΕ πρὸς ΕΖ. ὁ ἄρα τοῦ ΔΕ πρὸς ΕΖ λόγος ἐστὶ δοθείς· ἐστὶν οὖν ἑκάτερον τῶν ΔΕ, ΕΖ δοθέν· λόγος ἄρα τοῦ ΔΖ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΕ, ΕΖ δοθείς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ οὕτω τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΖ· συνθέντι ἄρα ὡς τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΒΓ οὕτω τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΕ· καὶ ἀναστρέψαντι ὡς τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΑΒ οὕτως τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΔΕ. καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ ΔΖ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΕ, ΕΖ οὕτω τὸ ΑΓ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΒΓ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΑΓ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΒΓ δοθείς.

Prop. VII.

Si data magnitudo in data ratione secetur; utrumque segmentorum datum est.

Magnitudo enim data AB secetur in ratione data, nempe ipsius AΓ ad ΓB: dico utramque ipsarum AΓ, ΓB datam esse.

Quoniam enim data est ratio ipsius AΓ ad ΓB; igitur [per 6.dat.] ratio quoque ipsius AB ad utramque AΓ, ΓB data erit. datur autem AB; igitur [per 2.dat.] utraque ipsarum AΓ, ΓB data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζʹ.

Ἐὰν δεδομένον μέγεθος εἰς δεδομένον λόγον διαιρεθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων δεδομένον ἐστίν.

Δεδομένον γὰρ μέγεθος τὸ ΑΒ εἰς δεδομένον λόγον διῃρήσθω τὸν τοῦ ΑΓ πρὸς ΓΒ· λέγω ὅτι ἑκάτερον τῶν ΑΓ, ΓΒ δοθέν ἐστιν.

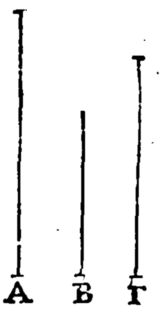
Ἐπεὶ γὰρ λόγος ἐστὶ τοῦ ΑΓ πρὸς ΓΒ δοθείς· λόγος ἄρα τοῦ ΑΒ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΑΓ, ΓΒ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΑΒ· δοθὲν ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΑΓ, ΓΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Τὰ πρὸς αὐτὸ λόγον ἔχοντα δεδομένον, καὶ πρὸς ἄλληλα λόγον ἕξει δεδομένον.

Ἐχέτω γὰρ ἑκάτερον τῶν Α, Γ πρὸς τὸ Β λόγον δεδομένον· λέγω ὅτι καὶ τὸ Α πρὸς τὸ Γ λόγον ἕξει δεδομένον.

Ἔστω γὰρ δεδομένον μέγεθος τὸ Δ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ Α πρὸς τὸ Β δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ πεποιήσθω ὁ τοῦ Δ πρὸς Ε. δοθὲν δὲ τὸ Δ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ε. πάλιν ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ Β πρὸς τὸ Γ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ πεποιήσθω ὁ τοῦ Ε πρὸς τὸ Ζ. δοθὲν δὲ τὸ Ε· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ζ. ἔστι δὲ καὶ τὸ Δ δοθέν· λόγος ἄρα τοῦ Δ πρὸς τὸ Ζ ἐστὶ δοθείς. καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτω τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτω τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτω τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ. λόγος δὲ τοῦ Δ πρὸς τὸ Ζ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ ὁ τοῦ Α πρὸς τὸ Γ δοθείς.

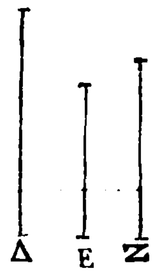


Prop. VIII.

Quæ ad idem datam rationem habent; etiam ad invicem datam rationem habebunt.

Utraque enim magnitudinum A, Γ ad magnitudinem B habeat rationem datam: dico magnitudinem A ad magnitudinem Γ datam quoque rationem habere.

Sit enim data magnitudo Δ. quoniam vero ratio ipſius A ad B data eſt; fiat huic eadem ratio ipſius Δ ad E. eſt autem Δ data; igitur [per 2. dat.] & E data erit. rurſus quoniam ipſius B ad Γ data eſt ratio; fiat huic eadem ratio ipſius E ad Z. eſt autem E data; quare & Z data eſt. at vero data eſt Δ; ergo [per 1. dat.] ipſius Δ ad Z ratio eſt data. cumque ſit ut A ad B ita Δ ad E; atque ut B ad Γ ita E ad Z: ex æquo igitur erit [per 22. 5.] ut A ad Γ ita Δ ad Z. eſt autem ratio ipſius Δ ad Z data: quare & ratio ipſius A ad Γ data eſt.

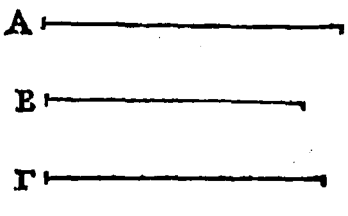


ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Ἐὰν δύο ἢ πλείονα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ δεδομένον, ἔχῃ δὲ τὰ αὐτὰ μεγέθη πρὸς ἄλλά τινα μεγέθη λόγους δεδομένους, εἰ καὶ μὴ τοὺς αὐτούς· κἀκεῖνα τὰ μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγους ἕξει δεδομένους.

Δύο γὰρ ἢ πλείονα μεγέθη τὰ Α, Β, Γ πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω δεδομένον, ἐχέτω δὲ τὰ αὐτὰ μεγέθη τὰ Α, Β, Γ πρὸς ἄλλά τινα μεγέθη τὰ Δ, Ε, Ζ λόγους δεδομένους, μὴ τοὺς αὐτοὺς δέ· λέγω ὅτι καὶ τὰ Δ, Ε, Ζ μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἕξει δεδομένον.

Ἐπεὶ γὰρ λόγος ἐστὶ τοῦ Α πρὸς τὸ Β δοθείς, τοῦ δὲ Α πρὸς τὸ Δ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ Δ ἄρα πρὸς τὸ Β λόγος ἐστὶ δοθείς. ἀλλὰ τοῦ Β πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ἄρα Δ πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς. πάλιν, ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ Β πρὸς τὸ Γ δοθείς, τοῦ δὲ Β πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ Ε ἄρα πρὸς τὸ Γ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ Γ πρὸς τὸ Ζ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ Ε ἄρα πρὸς τὸ Ζ λόγος ἐστὶ δοθείς· τὰ Δ, Ε, Ζ ἄρα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει δεδομένον.

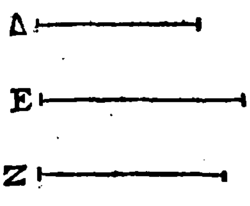


Prop. IX.

Si duæ pluresve magnitudines ad invicem habeant rationem datam; habeant autem illæ magnitudines ad alias quaſdam magnitudines rationes datas, etſi non eaſdem: illæ aliæ magnitudines etiam ad invicem rationes datas habebunt.

Duæ enim pluresve magnitudines A, B, Γ habeant ad invicem rationem datam; habeant autem & illæ eædem magnitudines A, B, Γ ad alias quaſdam magnitudines Δ, E, Z rationes datas, non eaſdem tamen: dico ipſas magnitudines Δ, E, Z ad invicem rationem habere datam.

Quoniam enim ratio ipſius A ad B data eſt, & ratio ipſius A ad Δ etiam data; ratio ipſius Δ ad B [per 8. dat.] data erit. ſed ipſius B ad E ratio eſt data: ergo [per 8. dat.] data etiam eſt ratio ipſius Δ ad E. rurſus, quoniam ratio ipſius B ad Γ eſt data, ipſiuſque B ad E ratio etiam data; ratio quoque ipſius E ad Γ [per 8. dat.] data erit. ipſius autem Γ ad Z ratio eſt data: quare & ratio ipſius E ad Z data eſt: ergo Δ, E, Z habent ad invicem rationem datam.

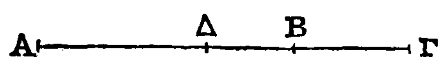


Prop. X.

Si magnitudo magnitudine major fuerit, data, quam in ratione; etiam utraque simul illa eadem major erit, data, quam in ratione. item si utraque simul magnitudo eadem magnitudine major fuerit, data, quam in ratione; aut reliqua illa eadem major erit, data, quam in ratione; aut reliqua una cum consequente, ad quam altera magnitudo datam habet rationem, data erit.

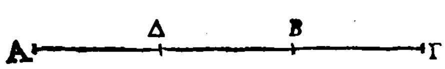
Magnitudo enim A B magnitudine B Γ major sit, data, quam in ratione: dico quod simul utraque A Γ eadem B Γ major est, data, quam in ratione.

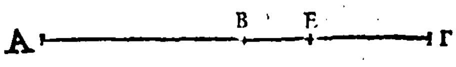
Quoniam enim A B ipsa B Γ major est, data, quam in ratione; auferatur data magnitudo A Δ: ergo [per 11. def. dat.] reliquæ Δ B ad B Γ ratio est data: & componendo igitur, ipsius Δ Γ ad B Γ ratio [per 6 dat.] est data. sed & data est magnitudo A Δ: quare A Γ ipsa Γ B major est, data, quam in ratione.



Rursus magnitudo A Γ magnitudine B Γ major sit, data, quam in ratione: dico reliquam A B eadem B Γ aut majorem esse, data, quam in ratione; aut ipsam quidem A B una cum consequente, ad quam B Γ rationem datam habet, datam esse.

Quoniam enim magnitudo A Γ magnitudine B Γ major est, data, quam in ratione; auferatur data magnitudo. data autem magnitudo aut minor est magnitudine A B, aut major. Sit primum minor, & sit A Δ. ergo reliquæ Δ Γ ad Γ B ratio est data: dividendo igitur, ipsius Δ B ad B Γ ratio est data. data autem est magnitudo A Δ: quare magnitudo A B magnitudine B Γ major est, data, quam in ratione. Sed sit data magnitudo major magnitudine A B, & ponatur ipsi æqualis A E; reliquæ igitur E Γ ad Γ B ratio est data: ideoque permutando, ipsius B Γ ad E Γ ratio est data: quare convertendo, ipsius B Γ ad B E ratio [per 5 dat.] est data. data autem est E B una cum B A, quia tota A E data est: ergo ipsa A B una cum consequente, ad quam B Γ rationem datam habet, data est.





ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Ἐὰν μέγεθος μεγέθους, δοθέντι, μεῖζον ᾖ ἢ ἐν λόγῳ, καὶ τὸ συναμφότερον τοῦ αὐτοῦ, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ. καὶ ἐὰν τὸ συναμφότερον τοῦ αὐτοῦ, δοθέντι, μεῖζον ᾖ ἢ ἐν λόγῳ, καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ αὐτοῦ, ἤτοι δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἢ τὸ λοιπὸν μετὰ τοῦ ἑξῆς, πρὸς ὃ τὸ ἕτερον λόγον ἔχει δεδομένον, δοθέν ἐστι.

Μέγεθος γὰρ τὸ Α Β μεγέθους τοῦ Β Γ, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι καὶ τὸ συναμφότερον τὸ Α Γ τοῦ αὐτοῦ τοῦ Β Γ δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Α Β τοῦ Β Γ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ Α Δ· λοιποῦ ἄρα τοῦ Δ Β πρὸς τὸ Β Γ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ συνθέντι τοῦ Δ Γ πρὸς τὸ Β Γ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Α Δ· τὸ Α Γ ἄρα τοῦ Γ Β, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

ΠΑΛΙΝ δὴ τὸ Α Γ τοῦ Β Γ, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι τὸ λοιπὸν τὸ Α Β τοῦ αὐτοῦ τοῦ Β Γ, ἤτοι δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ, ἢ τὸ Α Β μετὰ τοῦ ἑξῆς, πρὸς ὃ τὸ Β Γ λόγον ἔχει δοθέντα, δοθέν ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Α Γ τοῦ Β Γ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος. τὸ δὴ δοθὲν ἤτοι ἔλασσόν ἐστι τοῦ Α Β, ἢ μεῖζον. Ἔστω πρότερον ἔλασσον, καὶ ἔστω τὸ Α Δ. λοιποῦ ἄρα τοῦ Δ Γ πρὸς Γ Β λόγος ἐστὶ δοθείς· διελόντι ἄρα τοῦ Δ Β πρὸς Β Γ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Α Δ· τὸ Α Β ἄρα τοῦ Β Γ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ. Ἀλλὰ δὴ τὸ δοθὲν μεῖζον ἔστω τοῦ Α Β, καὶ κείσθω αὐτῷ ἴσον τὸ Α Ε· λόγος ἄρα τοῦ λοιποῦ τοῦ Ε Γ πρὸς τὸ Γ Β ἐστι δοθείς· ὥστε καὶ ἀνάπαλιν τοῦ Β Γ πρὸς τὸ Ε Γ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ ἀναστρέψαντι ὁ τοῦ Β Γ πρὸς Β Ε λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι τὸ Ε Β μετὰ τοῦ Β Α δοθέν, ὅλον γὰρ τὸ Α Ε δοθέν ἐστι· τὸ Α Β ἄρα μετὰ τοῦ ἑξῆς, πρὸς ὃ τὸ Β Γ λόγον ἔχει δοθέντα, δοθέν ἐστι.

Prop. XI.

Si magnitudo magnitudine major sit, data, quam in ratione; eadem major erit utraque simul, data, quam in ratione. item si eadem major sit utraque simul, data, quam in ratione; eadem quoque reliqua magnitudine major erit, data, quam in ratione.

Magnitudo enim A B magnitudine B Γ major sit, data, quam in ratione: dico

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

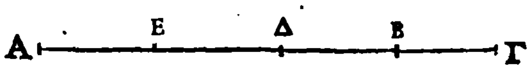
Ἐὰν μέγεθος μεγέθους, δοθέντι, μεῖζον ᾖ ἢ ἐν λόγῳ, τὸ αὐτὸ καὶ συναμφοτέρου, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ. καὶ ἐὰν τὸ αὐτὸ συναμφοτέρου, δοθέντι, μεῖζον ᾖ ἢ ἐν λόγῳ, τὸ αὐτὸ καὶ τοῦ λοιποῦ, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

Μέγεθος γὰρ τὸ Α Β τοῦ Β Γ, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι καὶ τοῦ

Α Γ

τοῦ ΑΓ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΒ τοῦ ΒΓ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος, καὶ ἔστω τὸ ΑΔ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ΔΒ πρὸς τὸ ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἀνάπαλιν δὴ καὶ συνθέντι λόγος ἐστὶ τοῦ ΔΓ πρὸς τὸ ΔΒ δοθείς. ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τοῦ ΑΔ πρὸς τὸ ΔΕ· λόγος ἄρα τοῦ ΑΔ πρὸς τὸ ΔΕ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΑΔ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΔΕ· ὥστε καὶ λοιπὸν τὸ ΑΕ δοθέν ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ὅλου τοῦ ΑΓ πρὸς ὅλον τὸ ΕΒ λόγος δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ΕΒ πρὸς τὸ ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ΑΕ· τὸ ΑΒ ἄρα τοῦ ΑΓ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.



Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΒ συναμφοτέρου τοῦ ΑΓ, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι τὸ αὐτὸ τὸ ΑΒ καὶ λοιποῦ τοῦ ΒΓ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΑΕ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ΕΒ πρὸς τὸ ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ΑΓ πρὸς τὸ ΕΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τοῦ ΑΔ πρὸς τὸ ΔΕ· καὶ τοῦ ΑΔ ἄρα πρὸς τὸ ΔΕ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ ἀναστρέψαντι τοῦ ΑΔ πρὸς τὸ ΑΕ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ ἀνάπαλιν τοῦ ΑΕ πρὸς τὸ ΑΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ δοθὲν τὸ ΑΕ· δοθὲν ἄρα καὶ ὅλον τὸ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ ὅλου τοῦ ΑΓ πρὸς ὅλον τὸ ΕΒ λόγος ἐστὶ δοθείς, ὡς καὶ τοῦ ΑΔ πρὸς ΕΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· ἔσται δὴ καὶ λοιποῦ τοῦ ΓΔ πρὸς λοιπὸν τὸ ΒΔ λόγος δοθείς· καὶ διελόντι τοῦ ΓΒ πρὸς τὸ ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ΔΒ πρὸς τὸ ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ΑΔ· τὸ ΑΒ ἄρα τοῦ ΒΓ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

& eam ΑΒ ipsa ΑΓ majorem esse, data, quam in ratione.

Quoniam enim magnitudo ΑΒ magnitudine ΒΓ major est, data, quam in ratione; auferatur data magnitudo ΑΔ: igitur [per 11.def.dat.] reliquæ ΔΒ ad ΒΓ ratio data est. invertendo ergo & componendo [per 6.dat.] ipsius ΔΓ ad ΔΒ data est ratio. fiat huic eadem ratio ipsius ΑΔ ad ΔΕ: itaque ipsius ΑΔ ad ΔΕ ratio data est. est autem ΑΔ data: ergo [per 2. dat.] ΔΕ data est: quare [per 4. dat.] reliqua ΑΕ data est. totius autem ΑΓ ad totam ΕΒ [per 12.5.] ratio data est: ergo ipsius ΕΒ ad ΑΓ ratio data est. data autem est ΑΕ: quare [per 11.def.dat.] ΑΒ ipsa ΑΓ major est, data, quam in ratione.

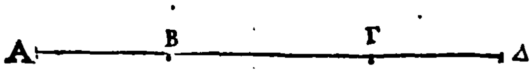
Deinde vero ΑΒ utraque ΑΓ major sit, data, quam in ratione: dico ipsam ΑΒ reliqua ΒΓ majorem esse, data, quam in ratione.

Auferatur data magnitudo ΑΕ; reliquæ ergo ΕΒ ad ΑΓ data est ratio: quare & ipsius ΑΓ ad ΕΒ data est ratio. fiat huic eadem ratio ipsius ΑΔ ad ΔΕ: itaque ipsius ΑΔ ad ΔΕ ratio data est: convertendo ergo [per 5.dat.] ipsius ΑΔ ad ΑΕ ratio data est; & invertendo ratio ipsius ΑΕ ad ΑΔ data est. data autem [ex hyp.] est ΑΕ: quare [per 2.dat.] tota ΑΔ data est. quoniam vero totius ΑΓ ad totam ΕΒ ratio data est; atque etiam ipsius ΑΔ ad ΕΔ ratio data: erit & reliquæ ΓΔ ad reliquam ΒΔ ratio data *: ideoq; dividendo [per conversf.6.dat.] ipsius ΓΒ ad ΒΔ ratio data est: quare & ipsius ΔΒ ad ΒΓ ratio data est. data autem est ΑΔ: quare ΑΒ ipsa ΒΓ major est, data, quam in ratione.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ τὸ μὲν πρῶτον μετὰ τοῦ δευτέρου ᾖ δοθέν, ἢ δὲ καὶ τὸ δεύτερον μετὰ τοῦ τρίτου δοθέν· τὸ πρῶτον τῷ τρίτῳ ἤτοι ἴσον ἐστίν, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζόν ἐστι.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, καὶ τὸ μὲν ΑΒ μετὰ τοῦ ΒΓ δοθὲν ἔστω τὸ ΑΓ, τὸ δὲ ΒΓ μετὰ τοῦ ΓΔ δοθὲν ἔστω τὸ ΒΔ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ ἤτοι ἴσον ἐστίν, ἢ τὸ ἕτερον ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν.



Ἐπεὶ γὰρ δοθέν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΑΓ, ΒΔ· τὰ δὴ δοθέντα ἤτοι ἴσα ἐστίν, ἢ ἄνισα. Ἔστω πρότερον ἴσα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ τῷ ΒΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΒΓ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ λοιπῷ τῷ ΓΔ ἴσον ἐστί. Μὴ ἔστω δὴ ἴσα, ἀλλ' ἔστω μεῖζον τὸ ΑΓ τοῦ ΒΔ, καὶ κείσθω τῷ ΒΔ

Prop. XII.

Si fuerint tres magnitudines, quarum prima cum secunda data sit, atque etiam secunda cum tertia; aut prima tertiæ æqualis est, aut altera altera major est, data.

Sint tres magnitudines ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, & ΑΒ quidem cum ΒΓ data esto, sc. ΑΓ; atque etiam ΒΓ cum ΓΔ sit data, nempe ΒΔ: dico magnitudinem ΑΒ aut magnitudini ΓΔ æqualem esse, aut alteram altera majorem esse, data.

Quoniam enim utraque magnitudinum ΑΓ, ΒΔ data est: datæ magnitudines æquales sunt inter se, aut inæquales. Sint primum æquales; itaque æqualis est ΑΓ ipsi ΒΔ. communis auferatur ΒΓ; reliqua igitur ΑΒ reliquæ ΓΔ æqualis est. Sed non sint inter se æquales; sitque ΑΓ major ipsa ΒΔ, & ponatur ipsi

* Per 19. 5, quoniam prædictæ duæ rationes sunt eædem & datæ.

ΒΔ

ΒΔ æqualis ΓΕ. data autem est ΒΔ: ergo data est & ΓΕ. est autem [ex hyp.] tota ΑΓ data: quare [per 4.dat.] & reliqua ΑΕ data est. quoniam vero æqualis est ΕΓ ipsi ΒΔ, communis auferatur ΒΓ: reliqua ergo ΒΕ reliquæ ΓΔ æqualis est. data autem est magnitudo ΑΕ: quare [per 9. def. dat.] ΑΒ ipsa ΓΔ major est, data.

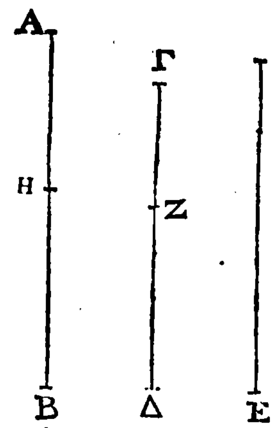
ἴσον τῇ ΓΕ. δοθὲν δὲ τὸ ΒΔ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΓΕ. ἔστι δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΓ δοθέν, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΕ δοθέν ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΓ τῷ ΒΔ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΒΓ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΕ λοιπῷ τῷ ΓΔ ἴσον ἐστί. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ΑΕ· τὸ ΑΒ ἄρα τοῦ ΓΔ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν.

Prop. XIII.

Si fuerint tres magnitudines, & earum prima ad secundam habeat rationem datam, secunda autem tertia major sit, data, quam in ratione; prima quoque tertia major erit, data, quam in ratione.

Sint tres magnitudines ΑΒ, ΓΔ, Ε, & ΑΒ quidem ad ΓΔ habeat rationem datam; magnitudo autem ΓΔ magnitudine Ε major esto, data, quam in ratione: dico quod magnitudo ΑΒ magnitudine Ε major est, data, quam in ratione.

Quoniam enim ΓΔ ipsa Ε major est, data, quam in ratione, auferatur data magnitudo ΓΖ: igitur [per 11.def.dat.] reliquæ ΔΖ ad Ε ratio est data. cumque [ex hyp.] ratio ipsius ΑΒ ad ΓΔ data sit; fiat huic eadem ratio ipsius ΑΗ ad ΓΖ: itaque ratio ipsius ΓΖ ad ΑΗ data est. est autem ΓΖ data: ergo [per 2. dat.] ΑΗ data est: quare [per 19. 5.] & reliquæ ΗΒ ad reliquam ΔΖ ratio data est. ipsius autem ΔΖ ad Ε ratio [ex hyp.] data est: quare [per 8.dat.] & ipsius ΗΒ ad Ε ratio data est. data autem est ΑΗ: ergo ΑΒ ipsa Ε major est, data, quam in ratione.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ τὸ μὲν πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον λόγον ἔχῃ δεδομένον, τὸ δὲ δεύτερον τοῦ τρίτου, δοθέντι, μεῖζον ᾖ ἢ ἐν λόγῳ· καὶ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

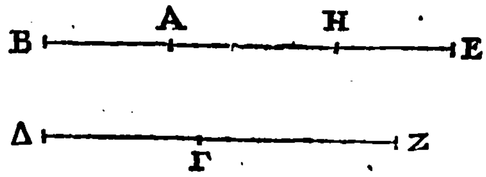
Ἔστω τρία μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ, Ε, καὶ τὸ μὲν ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ λόγον ἐχέτω δεδομένον, τὸ δὲ ΓΔ τοῦ Ε, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι καὶ τὸ ΑΒ τοῦ Ε, δοθέντι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΓΔ τοῦ Ε, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΓΖ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ΔΖ πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τοῦ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΖ· λόγος ἄρα τοῦ ΓΖ πρὸς τὸ ΑΗ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΓΖ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΑΗ· καὶ λοιποῦ ἄρα τοῦ ΗΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΔΖ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ΔΖ πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΗΒ ἄρα πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ΑΗ· τὸ ΑΒ ἄρα τοῦ Ε, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Prop. XIV.

Si duæ magnitudines ad invicem habeant rationem datam; utrique autem illarum adjiciatur data magnitudo: totæ ad invicem aut habebunt rationem datam, aut altera altera major erit, data, quam in ratione.

Duæ enim magnitudines ΑΒ, ΓΔ ad invicem habeant rationem datam, & adjiciatur utrique earum data magnitudo, tam ΑΕ quam ΓΖ: dico quod totæ ΕΒ, ΖΔ aut habent ad invicem rationem datam, aut altera altera major est, data, quam in ratione.



Quoniam enim data est utraque ΕΑ, ΖΓ; ipsius quoque ΕΑ ad ΖΓ [per 1.dat.] data est ratio. &

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ προστεθῇ ἑκατέρῳ αὐτῶν δεδομένον μέγεθος· τὰ ὅλα πρὸς ἄλληλα ἤτοι λόγον ἕξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω δεδομένον, καὶ προσκείσθω ἑκατέρῳ αὐτῶν δεδομένον μέγεθος, τό τε ΑΕ καὶ τὸ ΓΖ· λέγω ὅτι ὅλα τὰ ΕΒ, ΖΔ πρὸς ἄλληλα ἤτοι λόγον ἔχει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ δοθέν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΕΑ, ΖΓ, λόγος ἄρα τοῦ ΕΑ πρὸς τὸ ΖΓ δοθείς. καὶ εἰ μὲν ὁ αὐὁ αὐτὸς τῷ τοῦ ΑΒ πρὸς ΓΔ, ἔσται καὶ ὅλου τοῦ ΕΒ πρὸς ὅλον τὸ ΖΔ λόγος δοθείς. Μὴ ἔστω δὲ ὁ αὐτός, καὶ πεποιήσθω ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτω τὸ ΗΑ πρὸς τὸ ΓΖ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΗΑ πρὸς τὸ ΓΖ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΓΖ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΗΑ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΕΑ δοθέν· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΗ δοθέν ἐστι. καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτω τὸ ΗΑ πρὸς τὸ ΓΖ, λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΗΒ πρὸς τὸ ΖΔ δοθείς. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ΕΗ· τὸ ΕΒ ἄρα τοῦ ΖΔ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

igitur si hæc ratio eadem sit quæ ipsius AB ad ΓΔ; totius quidem EB ad totam ZΔ ratio [per 12. 5.] data erit. At vero non sit eadem; & fiat ut AB ad ΓΔ ita HA ad ΓZ: itaque ratio ipsius HA ad ΓZ data est. est autem magnitudo ΓZ data: quare [per 2. dat.] HA data est. sed & ipsa EA data est: ergo [per 4. dat.] etiam reliqua EH data est. quoniam vero ut AB ad ΓΔ ita HA ad ΓZ, ratio quoque ipsius HB ad ZΔ [per 12. 5.] data est. data autem est magnitudo EH: quare [per 11. def. dat.] magnitudo EB magnitudine ZΔ major est, data, quam in ratione.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

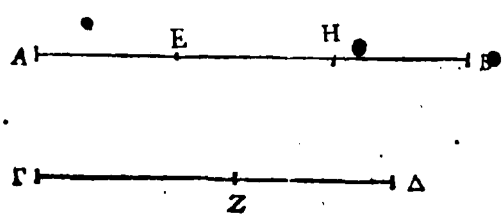
Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν δεδομένον μέγεθος· τὰ λοιπὰ πρὸς ἄλληλα ἤτοι λόγον ἕξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

PROP. XV.

Si duæ magnitudines habeant ad invicem rationem datam, & ab utraque earum auferatur data magnitudo: reliquæ magnitudines aut ad invicem habebunt rationem datam; aut altera altera major erit, data, quam in ratione.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω δεδομένον, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν δεδομένον μέγεθος, ἀπὸ μὲν τοῦ ΑΒ τὸ ΑΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΓΔ τὸ ΓΖ· λέγω ὅτι τὰ λοιπὰ τὰ ΕΒ, ΖΔ πρὸς ἄλληλα ἤτοι λόγον ἕξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ ἑκάτερον τῶν ΑΕ, ΓΖ δοθέν ἐστι, λόγος τοῦ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ ἐστὶ δοθείς. Καὶ εἰ μὲν ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, ἔσται καὶ λοιποῦ τοῦ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ λόγος δοθείς. Μὴ ἔστω δὴ ὁ αὐτός, καὶ πεποιήσθω ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτω τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΖ. λόγος δὲ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΖ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΓΖ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΑΗ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΕ δοθέν· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΗ δοθέν. καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτω τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΖ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ΗΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ΕΗ· τὸ ΕΒ ἄρα τοῦ ΖΔ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.



DUÆ enim magnitudines AB, ΓΔ habeant ad invicem rationem datam, & auferatur ab utraque earum data magnitudo; à magnitudine quidem AB magnitudo AE, à magnitudine autem ΓΔ magnitudo ΓZ: dico quod reliquæ EB, ZΔ aut habent ad invicem rationem datam, aut altera altera major est, data, quam in ratione.

Quoniam enim utraque AE, ΓZ data est, ratio etiam ipsius AE ad ΓZ data est. Si igitur ratio hæc eadem sit quæ ipsius AB ad ΓΔ; erit [per 19. 5.] & reliquæ EB ad reliquam ZΔ ratio data. At vero non sit eadem; & fiat ut AB ad ΓΔ ita AH ad ΓZ. est autem ipsius AB ad ΓΔ ratio data: ergo ratio magnitudinis AH ad ΓZ data est. verum [ex hyp.] ΓZ data est: quare [per 2. dat.] data est AH. est autem & AE data; reliqua igitur EH [per 4. dat.] data est. quoniam vero ut AB ad ΓΔ ita est AH ad ΓZ; itaque [per 19. 5.] reliquæ HB ad reliquam ZΔ ratio est data. & data est EH; quare EB ipsa ZΔ major est, data, quam in ratione.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ ἑνὸς αὐτῶν δεδομένον μέγεθος ἀφαιρεθῇ, τῷ δὲ ἑτέρῳ αὐτῶν δεδομένον μέγεθος προστεθῇ· τὸ ὅλον τοῦ λοιποῦ, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

PROP. XVI.

Si duæ magnitudines ad invicem habeant rationem datam; & ab una quidem illarum auferatur data magnitudo, alteri autem earum adjiciatur data magnitudo: tota quidem reliqua major erit, data, quam in ratione.

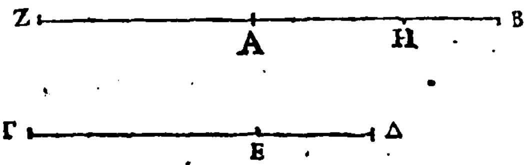
Δύο γὰρ μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ λόγον ἐχέτω δεδομένον, καὶ ἀπὸ τοῦ μὲν ΓΔ δεδομένον μέγεθος ἀφῃρήσθω τὸ ΓΕ, τῷ δὲ ΑΒ δεδομένον μέγεθος προσ-

DUÆ enim magnitudines AB, ΓΔ habeant ad invicem rationem datam, & à ΓΔ quidem auferatur data magnitudo ΓE; magnitudini autem AB adjiciatur data magnitudo

ZA: dico totam ZB reliqua EΔ majorem esse, datâ, quam in ratione.

κείσθω τὸ ΖΑ· λέγω ὅτι ὅλον τὸ ΖΒ λοιποῦ τοῦ ΕΔ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Quoniam enim ratio ipsius AB ad ΓΔ data est; fiat huic eadem ratio ipsius AH ad ΓE: ergo [per 2. def. dat.] ratio ipsius AH ad ΓE data est. data autem est ΓE: itaque [per 2. dat.] AH data est. est autem & AZ data: quare [per 3. dat.] tota ZH data est. & quoniam est ut AB ad ΓΔ ita AH ad ΓE; ratio etiam reliquæ HB ad reliquam EΔ [per 19. 5.] data erit. sed & data est HZ: ergo [per 11. def. dat.] magnitudo ZB magnitudine EΔ major est, data, quam in ratione.



Ἐπεὶ γὰρ λόγος ἐστὶ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω τοῦ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΕ· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΕ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΓΕ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΑΗ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΖ δοθέν· ὅλον ἄρα τὸ ΖΗ δοθέν ἐστι. καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτω τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΕ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ΗΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΕΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ΗΖ· τὸ ΖΒ ἄρα τοῦ ΕΔ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

PROP. XVII.

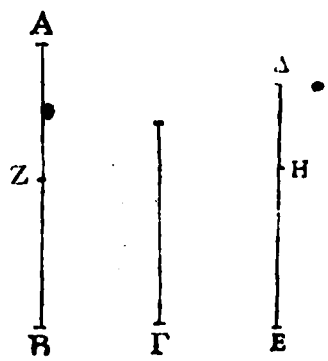
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Si fuerint tres magnitudines, & prima quidem secunda major sit, data, quam in ratione; tertia autem eadem secunda major sit, data, quam in ratione: prima ad tertiam aut rationem habebit datam; aut altera altera major erit, data, quam in ratione.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ τὸ πρῶτον τοῦ δευτέρου, δοθέντι, μεῖζον ᾖ ἢ ἐν λόγῳ, ᾖ δὲ καὶ τὸ τρίτον τοῦ αὐτοῦ, δοθέντι, μεῖζον ἢ ἐν λόγῳ· τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον ἤτοι λόγον ἕξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

Sint tres magnitudines AB, Γ, ΔE, & utraque magnitudinum AB, ΔE magnitudine Γ major sit, data, quam in ratione: dico magnitudines AB, ΔE aut ad invicem habere rationem datam; aut alteram altera majorem esse, data, quam in ratione.

Quoniam enim magnitudo AB magnitudine Γ major est, data, quam in ratione; auferatur data magnitudo AZ: ergo [per 11. def. dat.] reliquæ ZB ad Γ ratio est data. rursus quia ΔE ipsa Γ major est, data, quam in ratione; auferatur data magnitudo ΔH: ergo reliquæ HE ad Γ ratio est data. ipsius vero ZB ad Γ ratio est data: igitur [per 8. dat.] ratio ipsius ZB ad HE data est. adjiciuntur vero ipsis datæ magnitudines AZ, ΔH: igitur [per 14. dat.] totæ AB, ΔE aut habent ad invicem rationem datam; aut altera altera major est, data, quam in ratione.



Ἔστω τρία μεγέθη τὰ ΑΒ, Γ, ΔΕ, καὶ ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΔΕ τοῦ Γ, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι τὰ ΑΒ, ΔΕ ἤτοι πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΒ τοῦ Γ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΑΖ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ΖΒ πρὸς τὸ Γ λόγος ἐστὶ δοθείς. πάλιν, ἐπεὶ τὸ ΔΕ τοῦ Γ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΔΗ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ΗΕ πρὸς τὸ Γ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ΖΒ πρὸς τὸ Γ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ λόγος ἄρα τοῦ ΖΒ πρὸς τὸ ΗΕ ἐστὶ δοθείς. καὶ πρόσκειται αὐτοῖς δεδομένα μεγέθη τὰ ΑΖ, ΔΗ· τὰ ὅλα ἄρα τὰ ΑΒ, ΔΕ ἤτοι πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

PROP. XVIII.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Si fuerint tres magnitudines, atque ex his una utraque reliquarum major sit, data, quam in ratione: reliquæ duæ aut datam rationem habebunt ad invicem, aut altera altera major erit, data, quam in ratione.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, ἓν δὲ αὐτῶν ἑκατέρου τῶν λοιπῶν, δοθέντι, μεῖζον ᾖ ἢ ἐν λόγῳ· τὰ λοιπὰ δύο πρὸς ἄλληλα ἤτοι λόγον ἕξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

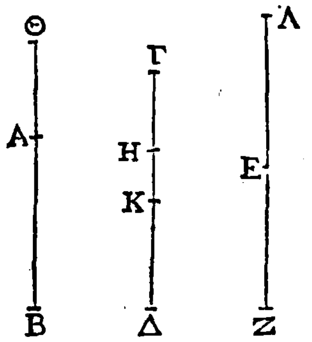
Sint tres magnitudines AB, ΓΔ, EZ; atque ex his una, nempe ΓΔ, utraque reliquarum AB, EZ major sit, data, quam in ratione: dico

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ἓν δ' αὐτῶν τὸ ΓΔ τοῦ ἑκατέρου τῶν λοιπῶν τῶν ΑΒ, ΕΖ, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι τὰ

τὰ

τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΖ ἤτοι λόγον ἔχει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΓΔ τοῦ ΑΒ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΓΗ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ΗΔ πρὸς τὸ ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τοῦ ΓΗ πρὸς τὸ ΑΘ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΓΗ πρὸς τὸ ΑΘ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΓΗ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΑΘ· καὶ ὅλου τοῦ ΓΔ πρὸς ὅλον τὸ ΘΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. πάλιν ἐπεὶ τὸ ΓΔ τοῦ ΕΖ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΓΚ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ΚΔ πρὸς τὸ ΕΖ λόγος ἐστὶ δοθείς. ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω, ὁ τοῦ ΓΚ πρὸς τὸ ΑΕ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΓΚ πρὸς τὸ ΑΕ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΓΚ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΑΕ· καὶ ὅλου τοῦ ΓΔ πρὸς ὅλον τὸ ΑΖ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ΓΔ πρὸς τὸ ΘΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΘΒ ἄρα πρὸς τὸ ΑΖ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἀφῄρηται ἀπ' αὐτῶν δεδομένα μεγέθη τὰ ΘΑ, ΑΕ· τὰ ΑΒ, ΕΖ ἄρα ἤτοι πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.



aut magnitudinem AB ad EZ rationem habere datam; aut alteram altera majorem esse, data, quam in ratione.

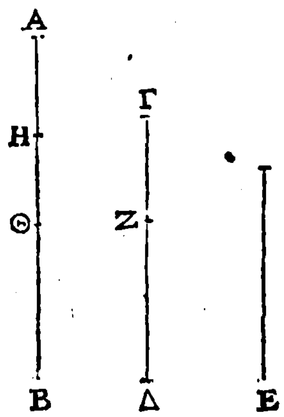
Quoniam enim magnitudo ΓΔ magnitudine AB major est, data, quam in ratione; auferatur data magnitudo ΓΗ: ergo reliquæ ΗΔ ad AB ratio est data. fiat huic eadem ratio ipsius ΓΗ ad AΘ: itaque ratio ipsius ΓΗ ad AΘ data est. est autem ΓΗ data; quare AΘ data est: itaque [per 12. 5.] & totius ΓΔ ad totam ΘB ratio est data. rursus cum ΓΔ ipsa EZ major sit, data, quam in ratione; auferatur data magnitudo ΓΚ: itaque [per 11. def.dat.] reliquæ ΚΔ ad EZ ratio est data. fiat huic eadem ratio ipsius ΓΚ ad AE: ergo ipsius ΓΚ ad AE data est ratio. data autem est ΓΚ: quare AE data est: ergo [per 12. 5.] & totius ΓΔ ad totam AZ ratio est data. ipsius autem ΓΔ ad ΘB ratio est data: quare [per 8.dat.] & ipsius ΘB ad AZ ratio est data. ablatæ autem sunt ab ipsis datæ magnitudines ΘA, AE: quare [per 15. dat.] AB, EZ aut ad invicem habent rationem datam, aut altera altera major est, data, quam in ratione.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθʹ.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ τὸ μὲν πρῶτον τοῦ δευτέρου, δοθέντι, μεῖζον ᾖ ἢ ἐν λόγῳ, ᾖ δὲ καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τρίτου, δοθέντι, μεῖζον ἢ ἐν λόγῳ· καὶ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ, Ε, καὶ τὸ μὲν ΑΒ τοῦ ΓΔ, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ, τὸ δὲ ΓΔ τοῦ Ε, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι καὶ τὸ ΑΒ τοῦ Ε, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΓΔ τοῦ Ε, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΓΖ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ΖΔ πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς. πάλιν ἐπεὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ· ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΑΗ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ΗΒ πρὸς τὸ ΓΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω τοῦ ΗΘ πρὸς τὸ ΓΖ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΗΘ πρὸς τὸ ΓΖ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΓΖ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΗΘ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΗΑ δοθέν· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΘΑ δοθέν ἐστι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΗΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτω καὶ τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΓΖ, καὶ λοιποῦ τοῦ ΘΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ΖΔ πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς·



PROP. XIX. THEOR.

Si fuerint tres magnitudines, & prima quidem magnitudo secunda magnitudine major sit, data, quam in ratione; sit autem secunda tertia major, data, quam in ratione: prima quidem tertia major erit, data, quam in ratione.

Sint tres magnitudines AB, ΓΔ, E, & magnitudo quidem AB magnitudine ΓΔ major sit, data, quam in ratione; magnitudo autem ΓΔ magnitudine E major sit, data, quam in ratione: dico quod AB ipsa E major est, data, quam in ratione.

Quoniam enim ΓΔ ipsa E major est, data quam in ratione; auferatur data magnitudo ΓZ: ergo [per 11. def. dat.] reliquæ ZΔ ad E data est ratio. rursus quia AB ipsa ΓΔ major est, data, quam in ratione; auferatur data magnitudo AH: ergo reliquæ HB ad ΓΔ ratio est data. Fiat huic eadem ratio ipsius HΘ ad ΓZ; itaque ipsius HΘ ad ΓZ ratio est data. est autem ΓZ data: quare HΘ data est. sed & HA data est: quare [per 3. dat.] tota magnitudo ΘA data est. quoniam vero [ex hyp.] est ut HB ad ΓΔ ita HΘ ad ΓZ; reliquæ quoque ΘB ad reliquam ZΔ ratio est * data. ipsius autem ZΔ ad E ratio est data: quare

* Quia, per 19. 5, est eadem cum prædictis rationibus datis.

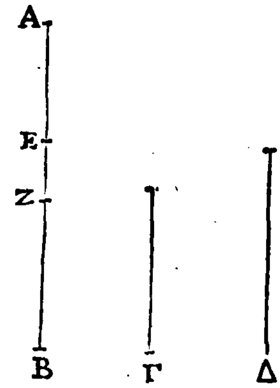
[per 8. dat.] ipsius ΘB ad E ratio est data. verum data est magnitudo ΘA: itaque [per 11. def. dat.] BA ipsa E major est, data, quam in ratione.

καὶ τοῦ ΘΒ ἄρα πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ δοθὲν τὸ ΘΑ· τὸ ΒΑ ἄρα τοῦ Ε, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

ALITER

Sint tres magnitudines AB, Γ, Δ, & AB quidem ipsa Γ major esto, data, quam in ratione; sit autem & Γ ipsa Δ major, data, quam in ratione: dico quod AB ipsa Δ major est, data, quam in ratione.

Quoniam enim AB ipsa Γ major est, data, quam in ratione, auferatur data magnitudo AE: ergo [per 11. def. dat.] reliquæ EB ad Γ ratio data est. est autem [ex hyp.] magnitudo Γ magnitudine Δ major, data, quam in ratione: quare [per 13. dat.] EB ipsa Δ major est, data, quam in ratione. auferatur data magnitudo EZ: reliquæ igitur ZB ad Δ ratio data est. data autem [per 3. dat.] est AZ: itaque AB ipsa Δ major est, data, quam in ratione.



ΑΛΛΩΣ

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ ΑΒ, Γ, Δ, καὶ τὸ μὲν ΑΒ τοῦ Γ, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ, τὸ δὲ Γ τοῦ Δ, δοθέντι, μεῖζόν ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒ τοῦ Δ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

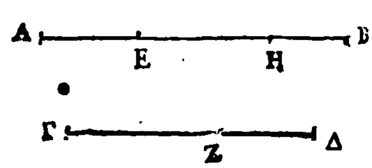
Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΒ τοῦ Γ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφῃρήσθω δοθὲν μέγεθος τὸ ΑΕ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ΕΒ πρὸς τὸ Γ λόγος ἐστὶ δοθείς. τὸ δὲ Γ τοῦ Δ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ· καὶ τὸ ΕΒ ἄρα τοῦ Δ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ. ἀφῃρήσθω οὖν τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΕΖ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ΖΒ πρὸς τὸ Δ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ΑΖ· τὸ ΑΒ ἄρα τοῦ Δ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Prop. XX.

Si datæ fuerint duæ magnitudines, & auferantur ab ipsis magnitudines habentes ad invicem rationem datam; reliquæ magnitudines aut habebunt ad invicem rationem datam, aut altera altera major erit, data, quam in ratione.

Sint duæ datæ magnitudines AB, ΓΔ, & ab AB, ΓΔ auferantur magnitudines AE, ΓZ habentes ad invicem rationem datam: dico quod magnitudines EB, ZΔ aut habebunt ad invicem rationem datam; aut altera altera major erit, data, quam in ratione.

Quoniam enim data est utraque AB, ΓΔ; [per 1. dat.] ipsius quoque AB ad ΓΔ ratio data est. Itaque si eadem sit quæ ipsius AE ad ΓZ; erit [per 19. 5.] & reliquæ EB ad reliquam ZΔ ratio data. At vero non sit eadem; & fiat ut AE ad ΓZ ita AH ad ΓΔ. est autem [ex hyp.] ratio ipsius AE ad ΓZ data: itaque ratio ipsius AH ad ΓΔ data est. data autem est ΓΔ: itaque [per 2. dat.] data est AH. sed & data est AB: reliqua igitur HB [per 4. dat.] data est. & quoniam est ut AE ad ΓZ ita AH ad ΓΔ; etiam [per 19. 5.] reliquæ EH ad reliquam ZΔ ratio data est. sed & data est HB: quare [per 11. def. dat.] magnitudo EB magnitudine ZΔ major est, data, quam in ratione.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κʹ.

Ἐὰν ᾖ δύο μεγέθη δεδομένα, καὶ ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτῶν μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα δεδομένον· τὰ λοιπὰ πρὸς ἄλληλα ἤτοι λόγον ἕξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

Ἔστω δύο μεγέθη δεδομένα τὰ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ ἀφῃρήσθω μεγέθη τὰ ΑΕ, ΓΖ λόγον ἔχοντα πρὸς ἄλληλα δεδομένον· λέγω ὅτι τὰ ΕΒ, ΖΔ πρὸς ἄλληλα ἤτοι λόγον ἔχει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ δοθέν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΓΔ· λόγος ἄρα τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ δοθείς. Καὶ εἰ μὲν ὁ αὐτός ἐστι τοῦ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ· ἔσται καὶ λοιποῦ τοῦ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ λόγος δοθείς. Μὴ ἔστω δὴ ὁ αὐτὸς, καὶ πεποιήσθω ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ οὕτως τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΔ. λόγος δὲ τοῦ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΔ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΓΔ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΗ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΒ δοθέν· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΒ δοθέν ἐστι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ οὕτω τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΔ, καὶ λοιποῦ τοῦ ΕΗ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΗΒ· τὸ ΕΒ ἄρα τοῦ ΖΔ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Prop. XXI.

Si fuerint duæ magnitudines datæ, & adjiciantur ipsis aliæ magnitudines habentes ad invicem rationem datam;

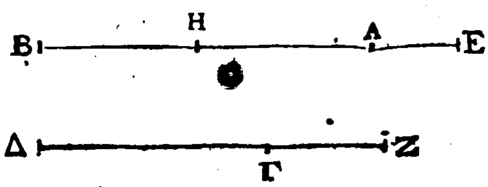
ΠΡΟΤΑΣΙΣ καʹ.

Ἐὰν ᾖ δύο μεγέθη δεδομένα, καὶ προστεθῇ αὐτοῖς μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα δεδομένον· τὰ ὅλα πρὸς ἄλληλα ἤτοι λόγον ἕξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

totæ aut habebunt ad invicem rationem datam, aut altera altera major erit, data, quam in ratione.

Ἔστω δύο μεγέθη δεδομένα τὰ ΑΒ, ΓΔ, καὶ προσκείσθω αὐτοῖς μεγέθη τὰ ΑΕ, ΓΖ λόγον ἔχοντα πρὸς ἄλληλα δεδομένον· λέγω ὅτι τὰ ὅλα τὰ ΕΒ, ΖΔ πρὸς ἄλληλα ἤτοι λόγον ἕξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ δοθέν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΓΔ· λόγος ἄρα τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ δοθείς. Καὶ εἰ μὲν ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ, ἔσται καὶ ὅλου τοῦ ΕΒ πρὸς ὅλον τὸ ΖΔ λόγος δοθείς. Εἰ δὲ οὔ, πεποιήσθω ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ οὕτω τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΔ· λόγος ἄρα τοῦ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΔ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΓΔ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΑΗ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΒ δοθέν· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΒ δοθέν ἐστι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΕΑ πρὸς τὸ ΓΖ οὕτως τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΔ· καὶ ὅλου τοῦ ΕΗ πρὸς ὅλον τὸ ΖΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ δοθὲν τὸ ΗΒ· τὸ ΕΒ ἄρα τοῦ ΖΔ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.



Sint duæ magnitudines datæ AB, ΓΔ, & adjiciantur ipsis magnitudines AE, ΓZ, habentes ad invicem rationem datam: dico quod totæ EB, ZΔ aut habebunt ad invicem rationem datam; aut altera altera major erit, data, quam in ratione.

Quoniam enim data est utraque AB, ΓΔ; ipsius quidem AB ad ΓΔ ratio data est. Si igitur eadem sit quæ ipsius AE ad ΓZ, erit [per 12. 5.] & totius EB ad totam ZΔ ratio data. Sin autem non sit eadem; fiat ut AE ad ΓZ ita AH ad ΓΔ: itaque ratio ipsius AH ad ΓΔ data est. est autem ΓΔ data: ergo [per 2. dat.] AH data est. sed & AB data est: quare [per 4. dat.] reliqua HB data est. & quoniam est ut EA ad ΓZ ita AH ad ΓΔ: totius igitur EH ad totam ZΔ ratio [per 12. 5.] data est. data vero est HB: quare [per 11. def. 5.] magnitudo EB magnitudine ZΔ major est, data, quam in ratione.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

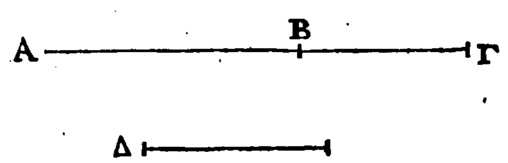
Ἐὰν δύο μεγέθη πρός τι μέγεθος λόγον ἔχῃ δεδομένον· καὶ τὸ συναμφότερον πρὸς αὐτὸ λόγον ἕξει δεδομένον.

Prop. XXII.

Si duæ magnitudines ad aliam aliquam magnitudinem habeant rationem datam; & simul utraque ad eandem illam habebit rationem datam.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ ΑΒ, ΒΓ πρός τι μέγεθος τὸ Δ λόγον ἐχέτω δεδομένον· λέγω ὅτι καὶ τὸ συναμφότερον τὸ ΑΓ πρὸς τὸ αὐτὸ Δ λόγον ἔχει δεδομένον.

Ἐπεὶ γὰρ ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει δεδομένον· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ δοθείς· καὶ συνθέντι τοῦ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ΒΓ πρὸς τὸ Δ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγος ἐστὶ δοθείς.



Duæ enim magnitudines AB, BΓ ad aliquam aliam magnitudinem Δ habeant rationem datam: dico quod simul utraque AΓ ad illam eandem Δ rationem habet datam.

Quoniam enim utraque AB, BΓ ad Δ rationem habet datam: ratio ipsius AB ad BΓ [per 8. dat.] data est: quare componendo [per 6. dat.] ipsius AΓ ad ΓB ratio est data. ipsius autem BΓ ad Δ [ex hyp.] data est ratio: ideoque [per 8. dat.] ipsius AΓ ad Δ ratio est data.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Ἐὰν ὅλον πρὸς ὅλον λόγον ἔχῃ δεδομένον, ἔχῃ δὲ καὶ τὰ μέρη πρὸς τὰ μέρη λόγους δεδομένους, μὴ τοὺς αὐτοὺς δέ· καὶ πάντα πρὸς πάντα λόγους ἕξει δεδομένους.

Prop. XXIII.

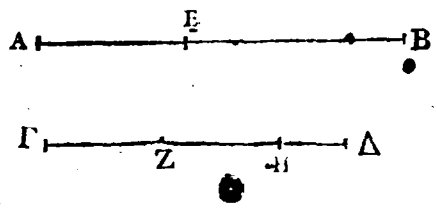
Si totum ad totum habeat rationem datam; habeant autem & partes ad partes rationes datas, etsi non easdem: habebunt omnia ad omnia rationes datas.

Ἐχέτω γὰρ ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ λόγον δεδομένον, ἐχέτω δὲ καὶ τὰ ΑΕ, ΕΒ μέρη πρὸς τὰ ΓΖ, ΖΔ μέρη λόγους δεδομένους, μὴ τοὺς αὐτοὺς δέ· λέγω ὅτι καὶ τὰ πάντα πρὸς πάντα λόγους ἕξει δεδομένους.

Habeat enim totum AB ad totum ΓΔ rationem datam; habeant autem & partes AE, EB, ad partes ΓZ, ZΔ rationes datas, etsi non easdem: dico etiam omnia ad omnia rationes datas habere.

Quo-

Quoniam enim ipsius AE, ad ΓZ ratio data est; fiat huic eadem ratio ipsius AB ad ΓH: igitur ratio ipsius AB ad ΓH data est: quare [per 19. 5. & 2. def. dat.] reliquæ EB ad reliquam ZH ratio est data. data autem [ex hyp.] est ratio ipsius EB ad ZΔ: ergo [per 8. dat.] ipsius ZΔ ad ZH ratio data est: quare convertendo [per 5. dat.] ipsius ZΔ ad ΔH data est ratio. & quoniam ipsius BA ad utramque ΔΓ, ΓH, data est ratio: etiam [per 8. dat.] ipsius ΔΓ ad ΓH ratio data est: unde convertendo [per 5. dat.] ipsius ΓΔ ad ΔH ratio data est. sed [ex hactenus ostensis] ipsius HΔ ad ZΔ data est ratio: quare [per 8. dat.] & ipsius ΓΔ ad ΔZ data est ratio: adeoque [per 5. dat.] & ipsius ΓZ ad ΔZ ratio data est. sed [ex hyp.] ipsius ΓZ quidem ad AE data est ratio, atque ipsius ZΔ ad BE ratio data est: quamobrem & omnium ad omnia rationes datæ sunt.



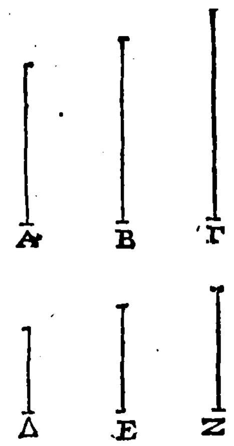
Ἐπεὶ γὰρ λόγος ἐστὶ τοῦ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΗ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΗ ἐστὶ δοθείς. ἔσται δὲ καὶ τοῦ λοιποῦ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΗ λόγος δοθείς. τοῦ δὲ ΕΒ πρὸς τὸ ΖΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΖΔ ἄρα πρὸς τὸ ΖΗ λόγος ἐστὶ δοθείς· ἀναστρέψαντι ἄρα καὶ τοῦ ΖΔ πρὸς τὸ ΔΗ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ ΒΑ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΓ, ΓΗ δοθείς· καὶ τοῦ ΔΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΗ λόγος ἐστὶ δοθείς· ἀναστρέψαντι ἄρα καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΗ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἀλλὰ τοῦ ΗΔ πρὸς τὸ ΖΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ΔΖ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ΓΖ πρὸς τὸ ΔΖ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἀλλὰ τοῦ μὲν ΓΖ πρὸς τὸ ΑΕ λόγος ἐστὶ δοθείς, τοῦ δὲ ΖΔ πρὸς τὸ ΒΕ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε πάντων πρὸς πάντα λόγος ἐστὶ δοθείς.

Prop. XXIV.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint; prima autem ad tertiam habeat rationem datam: ea etiam ad secundam datam rationem habebit.

Sint tres rectæ lineæ proportionales A, B, Γ, sitque ut A ad B ita B ad Γ; habeat autem A ad Γ rationem datam: dico ipsam quoque ad B rationem datam habere.

Exponatur enim recta data Δ. & quoniam ratio ipsius A ad Γ data est; fiat huic eadem ratio ipsius Δ ad Z: igitur ratio Δ ad Z data est. est autem Δ data: ergo [per 2. dat.] etiam Z data est. sumatur autem [per 13. 6.] inter duas rectas Δ, Z media proportionalis E: igitur [per 17.6.] quod continetur sub Δ, Z æquale est quadrato rectæ E: id autem quod continetur sub Δ, Z datum est; quia data est utraque rectarum Δ, Z: quare [per 1. def. dat.] quadratum rectæ E datum est: ergo data est recta E. est autem Δ data: quare [per 1. dat.] ipsius Δ ad E ratio data est. quoniam vero [ex hyp.] est ut A ad Γ ita Δ ad Z: sed ut A quidem ad Γ ita [per 1.6.] quadratum rectæ A ad id quod continetur sub rectis A, Γ; ut vero Δ ad Z ita quadratum rectæ Δ ad id quod continetur sub rectis Δ, Z: erit ergo ut quadratum rectæ A ad id quod continetur sub rectis A, Γ ita quadratum rectæ Δ ad id quod continetur sub rectis Δ, Z. sed [per 17.6.] id quod continetur quidem sub rectis A, Γ æquale est quadrato rectæ B, quia [ex hyp.] proportionales sunt A, B, Γ; ei autem quod continetur sub Δ, Z æquale est quadratum rectæ E: quare ut quadratum rectæ A ad quadratum rectæ B ita est quadratum rectæ Δ ad quadratum



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἡ δὲ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην λόγον ἔχῃ δεδομένον· καὶ πρὸς τὴν δευτέραν λόγον ἕξει δεδομένον.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, καὶ ἔστω ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἡ δὲ Α πρὸς τὴν Γ λόγον ἐχέτω δεδομένον· λέγω ὅτι καὶ πρὸς τὴν Β λόγον ἕξει δεδομένον.

Ἐκκείσθω γὰρ δοθεῖσα ἡ Δ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς Α πρὸς τὴν Γ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τῆς Δ πρὸς τὴν Ζ· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ τῆς Δ πρὸς τὴν Ζ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ Δ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ Ζ. εἰλήφθω τῶν Δ, Ζ μέση ἀνάλογον ἡ Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Δ, Ζ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Ε. δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ, δοθεῖσα γὰρ ἑκατέρα αὐτῶν· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ Ε. ἔστι δὲ καὶ ἡ Δ δοθεῖσα· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς Δ πρὸς τὴν Ε δοθείς. καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ, ὡς δὲ ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Α οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β, αἱ γὰρ Α, Β, Γ ἀνάλογόν εἰσι· τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς

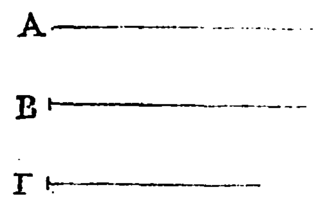
τὸ

τὸ ἀπὸ τῆς Ε· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτω ἡ Δ πρὸς τὴν Ε. λόγος δὲ τῆς Δ πρὸς τὴν Ε δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς Α πρὸς τὴν Β δοθείς.

rectæ E; ergo [per 22. 6.] ut A ad B ita est Δ ad E. est autem [per prius ostensa] ratio ipsius Δ ad E data: quare & ratio ipsius A ad B data est.

ΑΛΛΩΣ ΤΟ ΑΥΤΟ.

Ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς Α πρὸς τὴν Γ δοθείς, ὡς δὲ ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ δοθείς. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς Β· λόγος ἄρα τοῦ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β δοθείς· ὥστε καὶ τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγος ἐστὶ δοθείς· ἑκατέρα γὰρ τῶν Α, Β ἴσην ἐπελογισάμεθα ἐν τῷ οἰκείῳ ἑκάστῳ τετραγώνῳ.



ALITER IDEM.

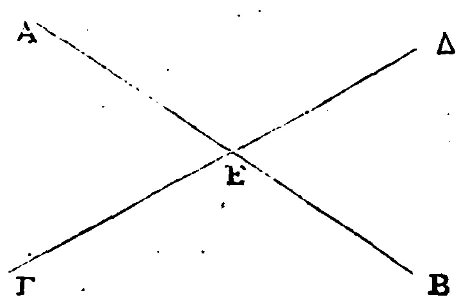
Quoniam ratio ipsius A ad Γ data est; atque est [per 1. 6.] ut A ad Γ ita quadratum rectæ A ad id quod continetur sub rectis A, Γ: igitur ratio quadrati rectæ A ad id quod continetur sub rectis A, Γ data est. ei autem quod continetur sub rectis A, Γ æquale est [per 17. 6.] quadratum rectæ B: ergo quadrati rectæ A ad quadratum rectæ B data est ratio: quamobrem [per 2. def. dat.] ipsius A ad B data ratio est; utrique enim rectarum A, B æqualis inventa est, in proprio uniuscujusq; quadrato.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε΄.

Ἐὰν δύο γραμμαὶ τῇ θέσει δεδομέναι τέμνωσιν ἀλλήλας· δέδοται τὸ σημεῖον, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλας.

Δύο γὰρ γραμμαὶ τῇ θέσει δεδομέναι αἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω ὅτι δοθέν ἐστι τὸ Ε σημεῖον.

Εἰ γὰρ μὴ μεταπεσεῖται τὸ Ε σημεῖον· μεταπεσεῖται ἄρα καὶ μιᾶς τῶν ΑΒ ΓΔ θέσις. οὐ μεταπίπτει δέ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Ε σημεῖον.



PROP. XXV.

Si duæ quævis lineæ positione datæ se mutuo invicem secuerint; punctum, in quo se invicem secant, etiam datum est.

DUÆ enim lineæ positione datæ AB, ΓΔ secent se invicem in puncto E: dico datum esse punctum E.

Si non, excidet punctum E: igitur alterius è rectis AB, ΓΔ positio excidet. atqui [ex hyp.] non excidit: ergo punctum E datum est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ΄.

Ἐὰν εὐθείας γραμμῆς τὰ πέρατα ᾖ δεδομένα τῇ θέσει· δέδοται ἡ εὐθεῖα τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.

Εὐθείας γὰρ γραμμῆς τῆς ΑΒ τὰ πέρατα τὰ Α, Β δεδομένα ἔστω τῇ θέσει· λέγω ὅτι δέδοται ἡ ΑΒ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.

Εἰ γὰρ, μένοντος τοῦ Α σημείου, μεταπεσεῖται τῆς ΑΒ εὐθείας ἤτοι ἡ θέσις ἢ τὸ μέγεθος· μεταπεσεῖται ἄρα καὶ τὸ Β σημεῖον. οὐ μεταπίπτει δέ· δέδοται ἄρα ἡ ΑΒ εὐθεῖα τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.

PROP. XXVI.

Si rectæ lineæ extrema positione data sint; recta positione & magnitudine data est.

REctæ enim lineæ A B extrema A, B data sint positione: dico rectam A B positione & magnitudine datam esse.

Si enim, manente puncto A, excidat positio aut magnitudo rectæ A B; excidet & punctum B. atqui [ex hyp.] non excidit: ergo recta A B positione & magnitudine data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ΄.

Ἐὰν εὐθείας γραμμῆς, τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένης, τὸ ἓν πέρας δοθὲν ᾖ· καὶ τὸ ἕτερον δοθήσεται.

Εὐθείας γὰρ γραμμῆς, τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένης, τῆς ΑΒ, τὸ ἓν πέρας δοθὲν ἔστω τὸ Α· λέγω ὅτι καὶ τὸ Β δοθέν ἐστιν.

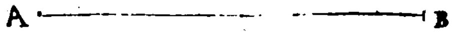
PROP. XXVII.

Si rectæ lineæ, positione & magnitudine datæ, datum fuerit unum extremum; alterum quoque datum erit.

REctæ enim lineæ A B, positione & magnitudine datæ, datum sit unum extremum A: dico & extremum B datum esse.

Si

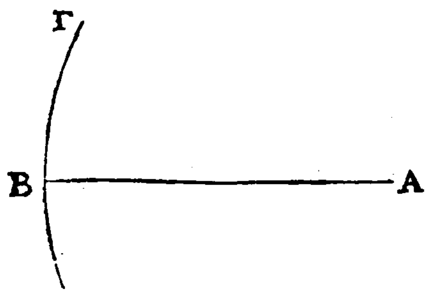
Si enim, manente puncto A, punctum B excidat; excidit quoque rectæ A B aut positio aut magnitudo. atqui [ex hyp.] neutra excidit: quare punctum B datum est.



Εἰ γὰρ, μένοντος τοῦ A σημείου, μεταπίπτει τὸ σημεῖον· μεταπίπτει ἄρα τῆς A B εὐθείας ἤτοι ἡ θέσις ἢ τὸ μέγεθος. οὐ μεταπίπτει δέ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ B σημεῖον.

ALITER.

Centro A, intervallo A B, describatur circumferentia Γ B: circumferentia igitur Γ B [per 6. def. dat.] positione data est. recta autem A B [ex hyp.] positione data est: ergo [per 25. dat.] punctum B datum est.



ΑΛΛΩΣ.

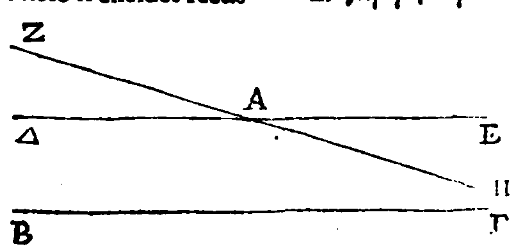
Κέντρῳ γὰρ τῷ A, διαστήματι δὲ τῷ A B, περιφέρεια γεγράφθω ἡ Γ B· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ περιφέρεια Γ B. θέσει δὲ καὶ ἡ A B εὐθεῖα· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ B σημεῖον.

PROP. XXVIII.

Si per datum punctum contra datam positione rectam agatur recta linea; acta recta positione data est.

PER datum enim punctum A, contra datam positione rectam B Γ, agatur recta linea Δ A E: dico positione datam esse lineam Δ A E.

Si enim non; manente puncto A excidet rectæ Δ A E positio. excidat ergo, manente B Γ ad illam parallela, & sit Z A H; itaque parallela est B Γ ipsi Z A H. at vero B Γ [ex hyp.] ipsi Δ A E parallela est: quare [per 30. 1.] Δ A E ipsi H A Z parallela est. sed & cum ea concurrit, quod est absurdum; ergo positio rectæ Δ A E non excidit: recta igitur Δ A E positione data est.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Ἐὰν διὰ δεδομένου σημείου παρὰ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ· δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει.

ΔΙΑ γὰρ δεδομένου σημείου τοῦ A, παρὰ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν B Γ, εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ Δ A E· λέγω ὅτι δέδοται ἡ Δ A E τῇ θέσει.

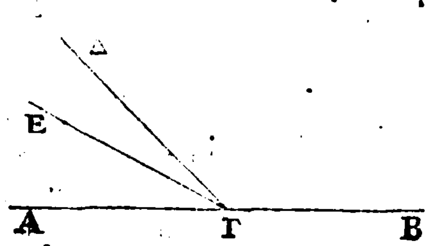
Εἰ γὰρ μή· μένοντος τοῦ A σημείου μεταπεσεῖται τῆς Δ A E ἡ θέσις. διαμενούσης τῆς B Γ παραλλήλου μεταπιπτέτω, καὶ ἔστω ἡ Z A H· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ Γ B τῇ Z A H. ἀλλὰ ἡ B Γ τῇ Δ A E ἐστι παράλληλος· καὶ ἡ Δ A E ἄρα τῇ H A Z παράλληλός ἐστιν. ἀλλὰ καὶ συμπίπτει, ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον· οὐκ ἄρα μεταπεσεῖται τῆς Δ A E θέσις· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ Δ A E.

PROP. XXIX.

Si ad positione datam rectam lineam, datumque in ea punctum, agatur recta linea, quæ faciat angulum datum; acta recta etiam positione data est.

AD datam enim positione rectam lineam A B, & datum in ea punctum Γ, agatur linea Γ Δ, quæ faciat angulum datum A Γ Δ: dico rectam Γ Δ positione datam esse.

Si enim non; manente puncto Γ, excidet positio rectæ Γ Δ, servata anguli A Γ Δ magnitudine. excidat ergo, & sit Γ E. itaque angulus Δ Γ A angulo E Γ A æqualis est; major minori, quod est absurdum. quare positio rectæ Δ Γ non excidet: data est igitur recta Γ Δ positione.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Ἐὰν πρὸς θέσει δεδομένῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δεδομένῳ, εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν· δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει.

ΠΡὸς θέσει γὰρ δεδομένῃ εὐθείᾳ τῇ A B, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δεδομένῳ τῷ Γ, εὐθεῖα ἤχθω ἡ Γ Δ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ A Γ Δ· λέγω ὅτι θέσει ἐστὶν ἡ Γ Δ.

Εἰ γὰρ μή, μένοντος τοῦ Γ σημείου, μεταπεσεῖται τῆς Γ Δ ἡ θέσις, διατηρήσασα τῆς ὑπὸ A Γ Δ γωνίας μέγεθος· μεταπιπτέτω καὶ ἔστω ἡ Γ E. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ Δ Γ A γωνία τῇ ὑπὸ E Γ A, ἡ μείζων τῇ ἐλάσσονι, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα μεταπεσεῖται τῆς Δ Γ ἡ θέσις· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ Γ Δ.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Ἐὰν ἀπὸ δεδομένου σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν· δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει.

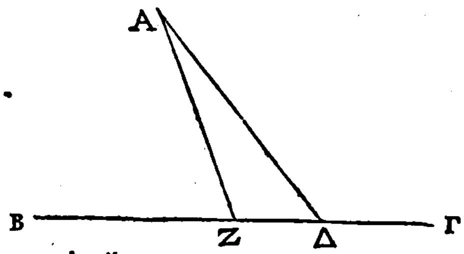
Ἀπὸ γὰρ δεδομένου σημείου τοῦ Α ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΒΓ εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ΑΔ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΑΔΒ· λέγω ὅτι θέσει ἐστὶν ἡ ΑΔ.

Εἰ γὰρ μή, μένοντος τοῦ Α σημείου μεταπεσεῖται τῆς ΑΔ ἡ θέσις, διατηροῦσα τῆς ὑπὸ ΑΔΒ γωνίας τὸ μέγεθος. μεταπιπτέτω καὶ ἔστω ἡ ΑΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΔΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΖΔ γωνίᾳ, ἡ μείζων τῇ ἐλάσσονι, ὅπερ ἀδύνατόν ἐστιν· οὐκ ἄρα μεταπεσεῖται τῆς ΑΔ ἡ θέσις· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ.

PROP. XXX.

Si à dato puncto in datam positione rectam agatur recta linea, quæ faciat angulum datum; acta recta positione data est.

A Dato enim puncto A in positione datam rectam BΓ agatur recta linea AΔ, quæ faciat angulum datum AΔB: dico positione datam esse rectam AΔ.



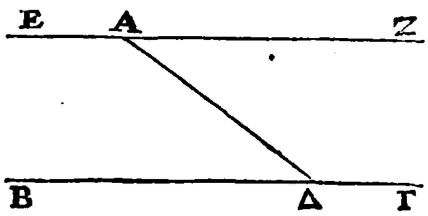
Si enim non, manente puncto A excidet positio rectæ lineæ AΔ, servata anguli AΔB magnitudine. excidat ergo; & sit recta AZ. itaque angulus AΔB angulo AZΔ æqualis est; major minori [per 16.1.]; quod fieri non potest: ergo non excidet positio rectæ AΔ: recta igitur AΔ positione data est.

ΑΛΛΩΣ.

Ἤχθω διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΔΓ παράλληλος εὐθεῖα ἡ ΕΑΖ. ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου σημείου τοῦ Α παρὰ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΒΔΓ εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΕΑΖ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΑΖ. καὶ ἐπεὶ εἰσὶ παράλληλοι αἱ ΒΔΓ, ΕΑΖ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΔΑ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΑΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΓ. δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΓ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΔ. ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει δεδομένῃ εὐθείᾳ τῇ ΕΑΖ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δεδομένῳ τῷ Α, εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΑΔ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΑΔ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ.

ALITER.

Agatur [per 31.1.] per punctum A rectæ BΔΓ parallela EAZ. quoniam igitur per datum punctum A contra datam positione rectam BΔΓ acta est recta linea EAZ: positione datur [per 28.dat.] recta EAZ. quoniam vero rectæ BΔΓ, EAZ sunt parallelæ; atque in illas incidit recta ΔA: angulus igitur EAΔ angulo AΔΓ [per 29.1.] æqualis est: datus autem est [ex hyp.] AΔΓ: quare & angulus EAΔ datus est. quoniam itaque ad positione datam rectam lineam BAZ, & datum in ea punctum A, acta est recta linea, quæ facit angulum EAΔ datum: recta igitur AΔ [per 29. dat.] positione data est.

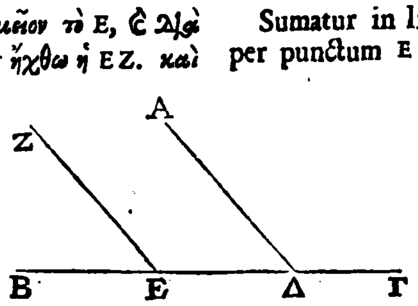


ΑΛΛΩΣ.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΔ δοθὲν σημεῖον τὸ Ε, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΖΕ τῇ ΑΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΕΔ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΓ γωνίᾳ. δοθεῖσα δὲ ἡ ΑΔΓ γωνία· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΕΓ. ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει δεδομένῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δεδομένῳ τῷ Ε, εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΕΖ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΖΕΓ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ. ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου σημείου τοῦ Α, παρὰ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΖΕ, εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΑΔ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ.

ALITER.

Sumatur in linea BΔ datum punctum E; & per punctum E agatur [per 31.1.] ipsi AΔ parallela EZ. itaque cum parallela sit ZE ipsi AΔ, & in illas incidat BEΔ: erit [per 29.1.] angulus ZEΔ angulo AΔΓ æqualis. est autem [ex hyp.] angulus AΔΓ datus: igitur angulus ZEΓ datus est. quoniam itaque ad positione datam rectam BΓ, & datum in ea punctum E, acta est recta EZ, quæ facit angulum datum ZEΓ; recta EZ [per 29.dat.] positione data est. quoniam ergo per datum punctum A, contra datam positione rectam ZE, acta est recta linea AΔ: recta linea AΔ [per 28.dat.] positione data est.

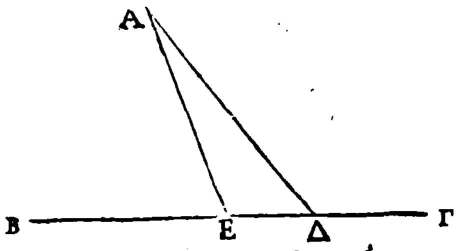


ΑΛΛΩΣ.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΑ. καὶ ἐπεὶ δοθέν ἐστιν ἑκάτερον τῶν

ALITER.

Sumatur in recta BΓ quodlibet punctum E, & connectatur EA. quoniam itaq; datum est utrumque punctorum A, E: positione igitur [per 26. dat.] data est A E. est autem & B Γ positione data: ergo * angulus A E Δ datus est. est autem [ex hyp.] angulus A Δ E datus: quare & [per 32. 1. & 4. dat.] reliquus E A Δ datus est. quoniam itaque ad positione datam rectam A E, & datum in ea punctum A, recta linea A Δ acta est, quæ facit angulum E A Δ datum: igitur [per 29. dat.] recta A Δ positione data est.



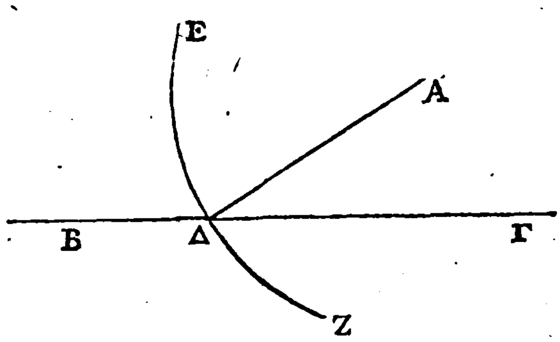
A, E σημείων· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ A E. θέσει δὲ καὶ ἡ B Γ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ A E Δ γωνία. δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ A Δ E· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ τῆς E A Δ δοθεῖσά ἐστιν. ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει δεδομένῃ εὐθείᾳ τῇ A E, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A, εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ A Δ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ E A Δ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ A Δ.

Prop. XXXI.

Si à dato puncto, in datam positione rectam, data magnitudine recta producatur; ea etiam positione data est.

A Dato enim puncto A agatur in positione datam rectam B Γ data magnitudine recta A Δ: dico eam etiam positione datam esse.

Centro enim A, intervallo autem A Δ, circulus E Δ Z describatur. itaque [per 6. def. dat.] positione datus est circulus E Δ Z: nam ejus centrum positione datum est, & quæ ex centro, ipsa A Δ, magnitudine. sed & recta B Γ est etiam positione data. at vero si duæ lineæ positione datæ se invicem secent; punctum intersectionis [per 25. dat.] datum est: ergo datum est punctum Δ. est autem punctum A datum: quare [per 26. dat.] A Δ positione data est.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

Ἐὰν ἀπὸ δεδομένου σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν εὐθεῖα γραμμὴ προσβληθῇ δεδομένη τῷ μεγέθει, δέδοται καὶ τῇ θέσει.

Ἀπὸ γὰρ δεδομένου σημείου τοῦ A ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν B Γ εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ A Δ, δεδομένη τῷ μεγέθει· λέγω ὅτι καὶ τῇ θέσει δέδοται.

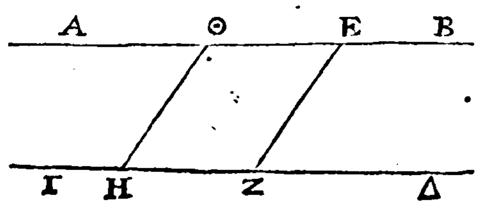
Κέντρῳ γὰρ τῷ A, διαστήματι δὲ τῷ A Δ, κύκλος γεγράφθω ὁ E Δ Z. θέσει ἄρα ἐστὶν ὁ E Δ Z κύκλος, δέδοται γὰρ αὐτοῦ τὸ A κέντρον τῇ θέσει, καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ A Δ τῷ μεγέθει. θέσει δὲ καὶ ἡ B Γ εὐθεῖα. ἐὰν δὲ δύο γραμμαὶ τῇ θέσει δεδομέναι τέμνωσιν ἀλλήλας, δέδοται τὸ σημεῖον, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλας· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Δ. ἔστι δὲ καὶ τὸ A δοθέν· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ A Δ.

Prop. XXXII.

Si in positione datas parallelas rectas agatur recta linea, quæ faciat angulos datos; acta recta magnitudine data est.

IN datas enim positione parallelas rectas A B, Γ Δ agatur recta linea E Z, faciens angulos B E Z, E Z Δ datos: dico magnitudine datam esse rectam E Z.

Sumatur enim in Γ Δ datum punctum H, & [per 31. 1.] per H agatur ipsi E Z parallela H Θ. & quoniam parallela est H Θ ipsi E Z, & in illas incidit Γ Δ; erit [per 29. 1.] angulus E Z Δ angulo Θ H Δ æqualis. angulus autem E Z Δ [ex hyp.] datus est: quare & angulus Θ H Δ datus est. quoniam itaque ad positione da-



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

Ἐὰν εἰς παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, δεδομένας ποιοῦσα γωνίας, δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῷ μεγέθει.

Εἰς γὰρ παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας τὰς A B, Γ Δ, εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ E Z, δεδομένας ποιοῦσα γωνίας τὰς ὑπὸ B E Z, E Z Δ· λέγω ὅτι δέδοται ἡ E Z τῷ μεγέθει.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς Γ Δ δοθὲν σημεῖον τὸ H, καὶ διὰ τοῦ H τῇ E Z παράλληλος ἤχθω ἡ H Θ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ H Θ τῇ E Z, καὶ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ Γ Δ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ E Z Δ τῇ ὑπὸ Θ H Δ. δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ E Z Δ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ Θ H Δ. ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει δεδο-

* Nam rectarum positione datarum datur inclinatio ad invicem; hoc est, angulus ab illis comprehensus.

μένῃ

μένη εὐθεία τῇ ΓΔ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δεδομένῳ τῷ Η, εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΗΘ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΘΗΖ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ. θέσει δὲ καὶ ἡ ΑΒ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Θ σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ τὸ Η δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ τῷ μεγέθει. καὶ ἔστιν ἴση τῇ ΕΖ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΖ τῷ μεγέθει.

tam rectam ΓΔ, & datum in ea punctum Η, acta est recta ΗΘ, quæ facit angulum ΘΗΖ datum: positione data erit [per 29. dat.] recta ΗΘ. est autem [ex hyp.] ΑΒ positione data: itaque [per 25. dat.] punctum Θ datum est. est autem [per constr.] punctum Η datum; quare [per 26. dat.] ΗΘ magnitudine data est. atque [per 34. 1.] est æqualis ipsi ΕΖ: ergo etiam [per 1. def. dat.] ΕΖ magnitudine data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Ἐὰν εἰς παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, δεδομένη τῷ μεγέθει· δεδομένας ποιήσει γωνίας.

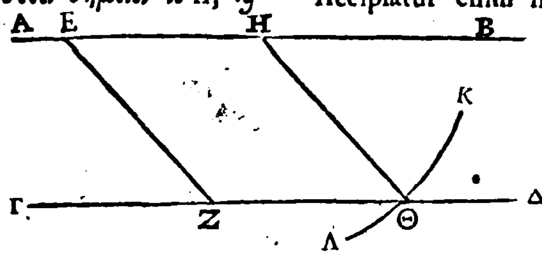
Prop. XXXIII.

Si in datas positione rectas parallelas agatur recta magnitudine data; faciet ea angulos datos.

Εἰς γὰρ παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ΕΖ, δεδομένη τῷ μεγέθει· λέγω ὅτι δεδομένας ποιήσει γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΕΖ, ΕΖΓ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΑΒ δοθὲν σημεῖον τὸ Η, καὶ διὰ τοῦ Η τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΕ τῇ ΗΘ. δοθεῖσα δὲ ΕΖ τῷ μεγέθει· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΗΘ τῷ μεγέθει. καὶ ἔστι τὸ Η δοθέν· ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΘ, κύκλος γραφόμενος ἔσται τῇ θέσει. γεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ ΚΘΛ· θέσει ἄρα ἐστὶν ὁ ΚΘΛ. θέσει δὲ καὶ ἡ ΓΔ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Θ σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ τὸ Η δοθέν· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ. θέσει δὲ ΓΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΘΓ γωνία. καὶ ἔστι τῇ ὑπὸ ΕΖΓ ἴση· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΓ· ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΖ δοθεῖσά ἐστι.

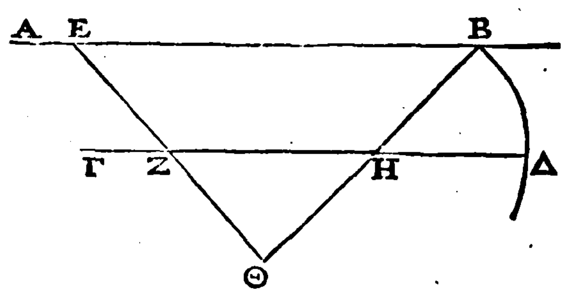
In datas enim positione parallelas rectas ΑΒ, ΓΔ agatur recta ΕΖ magnitudine data: dico quod ipsa faciet angulos ΑΕΖ, ΕΖΓ datos.



Accipiatur enim in recta ΑΒ datum punctum Η, & per punctum Η agatur [per 31. 1.] ipsi ΕΖ parallela ΗΘ: æqualis igitur [per 34. 1.] est ΖΕ ipsi ΗΘ. est autem [ex hyp.] ΕΖ magnitudine data: ergo ΗΘ magnitudine data est. & datum est punctum Η: quare [per 6. def. dat.] centro Η, intervallo ΗΘ, descriptus circulus positione datus erit. describatur, & sit ΚΘΛ: positione igitur datus est circulus ΚΘΛ. est autem [ex hyp.] ΓΔ positione data: ergo [per 25. dat.] datum est punctum Θ. sed & [per constr.] punctum Η datum est: quare [per 26. dat.] recta ΗΘ positione data est. positione autem data est [ex hyp.] recta ΓΔ: itaque angulus ΗΘΓ datus est. & est ΗΘΓ [per 29. 1.] ipsi ΕΖΓ æqualis: igitur angulus ΕΖΓ datus est: igitur [per 32. 1. & 4. dat.] & reliquus ΑΕΖ datus est.

ΑΛΛΩΣ.

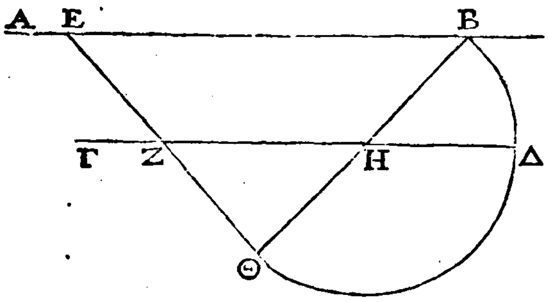
Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΓΔ δοθὲν σημεῖον τὸ Η, καὶ κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΗΔ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΒ· θέσει ἄρα ὁ ΔΒ κύκλος, δέδοται γὰρ αὐτοῦ τὸ κέντρον τῇ θέσει, καὶ ἡ ἐκ κέντρου τῷ μεγέθει. θέσει δὲ καὶ ἡ ΑΒ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Β σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ τὸ Η δοθέν· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΒ. θέσει δὲ καὶ ἡ ΓΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΗΔ γωνία. καὶ εἰ μὲν παράλληλός ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΗΒ, ἔσται καὶ ἡ ὑπὸ ΕΖΗ γωνία δοθεῖσα· ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ ΖΕΒ γωνία δο-



ALITER.

Sumatur in recta ΓΔ datum punctum Η, & ponatur ipsi ΕΖ æqualis ΗΔ, dein centro quidem Η, intervallo autem ΗΔ, circulus ΔΒ describatur: positione igitur datus est [per 6. def. dat.] circulus ΔΒ; ipsius enim centrum positione datum est, & ea quæ ex centro magnitudine. est autem [ex hyp.] recta ΑΒ positione data: quare [per 25. dat.] punctum Β datum est. verum [per constr.] & punctum Η datum est: itaque positione data est recta ΗΒ. sed [ex hyp.] positione data est etiam recta ΓΔ: ergo angulus ΒΗΔ datus est. unde, si parallela sit ΕΖ ipsi ΗΒ, angulus ΕΖΗ [per 29. 1. & 1. def. dat.] datus erit: necnon & reliquus angulus ΖΕΒ [per

32. 1. & 4. dat.] datus erit. si vero parallelæ non sint; rectæ EZ, BH concurrant in puncto Θ. quoniam itaque [per constr.] æqualis est EZ ipsi ΔH, hoc est ipsi HB; atque [ex hyp.] parallela est EB ipsi ZH: erit [per 2. 6.] ZΘ ipsi ΘH æqualis: quare [per 6. 1.] & angulus ΘHZ angulo ΘZH æqualis est. datus autem [per 15. 1.] est angulus ΘHZ: ergo angulus HZΘ datus est: quare [per 32. 1. & 4. dat.] & qui deinceps est angulus HZE datus est: angulus igitur ZEB datus est.



θέσει ἐστί. εἰ δὲ οὔ, συμπιπτέτωσαν αἱ EZ, BH κατὰ τὸ Θ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ EZ τῇ ΔH, τουτ' ἔστι τῇ HB, καὶ ἔστι παράλληλος ἡ EB τῇ ZH· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ZΘ τῇ ΘH· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΘHZ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘZH ἐστιν ἴση. δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ ΘHZ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ HZΘ· ὥστε καὶ ἡ ἐφεξῆς ἡ ὑπὸ HZE δοθεῖσά ἐστι· καὶ ἡ ὑπὸ ZEB ἄρα δοθεῖσά ἐστι.

Prop. XXXIV.

Si in datas positione parallelas rectas à dato puncto recta linea agatur; secabitur illa in data ratione.

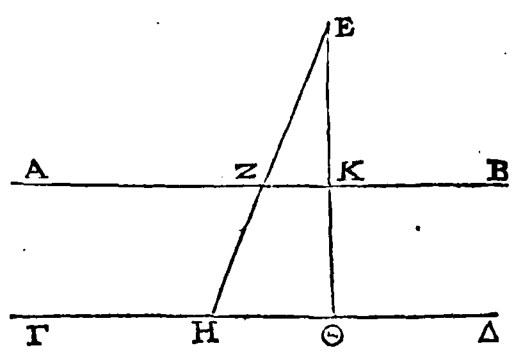
In parallelas enim positione datas rectas AB, ΓΔ, à dato puncto E, agatur linea EZH: dico ipsius EZ ad ZH rationem datam esse.

Agatur enim [per 12. 1.] à puncto E in rectam ΓΔ perpendicularis EKΘ. & quoniam à dato puncto E ad positione datam rectam ΓΔ recta EΘ acta est, quæ facit angulum EΘH datum: [per 30. dat.] positione data erit EΘ. est autem [ex hyp.] utraque rectarum AB, ΓΔ positione data: itaque [per 25. dat.] utrumque punctorum K, Θ datum est. sed & punctum E datum est: quare [per 26. dat.] utraque rectarum EK, KΘ data est: igitur [per 1. dat.] ratio ipsius EK ad KΘ data est. sed [per 2. 6.] est EK ad KΘ ut EZ ad ZH: ergo [per 2. def. dat.] ratio ipsius EZ ad ZH data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ΄.

Ἐὰν εἰς παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας ἀπὸ δεδομένου σημείου εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, εἰς δεδομένον λόγον τμηθήσεται.

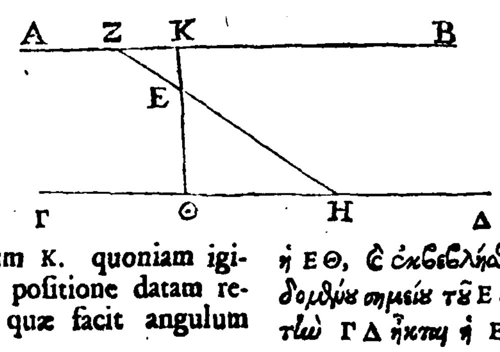
Εἰς γὰρ παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας τὰς AB, ΓΔ, ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ E, εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ EZH· λέγω ὅτι λόγος ἐστὶ τῆς EZ πρὸς τὸ ZH δοθείς.



Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ E σημείου ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἡ EKΘ. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ E ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΓΔ εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ EΘ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ EΘH· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ EΘ. θέσει δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν AB, ΓΔ· δοθὲν ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν K, Θ σημείων. ἔστι δὲ καὶ τὸ E δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν EK, KΘ· λόγος ἄρα τῆς EK πρὸς τὴν KΘ δοθείς. καὶ ἔστιν ὡς ἡ EK πρὸς τὴν KΘ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν ZH· λόγος ἄρα καὶ τῆς EZ πρὸς τὴν ZH δοθείς.

* ALITER.

In parallelas enim positione datas rectas AB, ΓΔ, per datum punctum E, agatur recta linea ZEH: dico ipsius HE ad EZ rationem datam esse.



Agatur enim [per 12. 1.] à puncto E in rectam ΓΔ perpendicularis EΘ, & producatur ad punctum K. quoniam igitur à puncto dato E ad positione datam rectam ΓΔ acta est EΘ, quæ facit angulum

* ΑΛΛΩΣ.

Εἰς γὰρ παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας τὰς AB, ΓΔ, ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ E, εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ZEH· λέγω ὅτι λόγος ἐστὶ τῆς HE πρὸς τὴν EZ δοθείς.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ E σημείου ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἡ EΘ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ K. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ E ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΓΔ ἦκται ἡ EΘ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν

* Est verius casus alter quam alia demonstratio.

τὴν

τὴν ὑπὸ ΕΘΗ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ. θέσει δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ· ἑκάτερον ἄρα τῶν Κ, Θ σημείων δοθέν ἐστι. ἔστι καὶ τὸ Ε δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἑκατέρα τῶν ΘΕ, ΕΚ· λόγος ἄρα τῆς ΘΕ πρὸς τὴν ΕΚ δοθείς. ὡς δὲ ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΚ οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ δοθείς.

ΕΘΗ datum; data erit positione [per 30. dat.] ipsa ΕΘ. est autem [ex hyp.] utraque rectarum ΑΒ, ΓΔ positione data: quare [per 25. dat.] utrumque punctorum Κ, Θ datum est. datum autem est [ex hyp.] punctum Ε: ergo [per 26. dat.] utraque rectarum ΘΕ, ΕΚ data est: ideoque [per 1. dat.] ipsius ΘΕ ad ΕΚ ratio est data. verum ut ΘΕ ad ΕΚ ita [per 4.6.] ΗΕ ad ΕΖ: itaque [per 2. def. dat.] ratio ipsius ΗΕ ad ΕΖ data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

Ἐὰν ἀπὸ δεδομένου σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, καὶ τμηθῇ εἰς δεδομένον λόγον, διὰ δὲ τομῆς παρὰ τὴν θέσει δεδομένην εὐθεῖαν εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ· δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει.

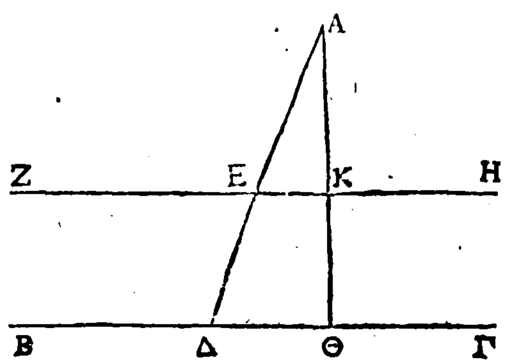
Prop. XXXV.

Si à dato puncto in datam positione rectam ducatur recta linea, seceturque in data ratione, per punctum vero sectionis contra datam positione rectam agatur recta linea; acta recta positione data est.

Ἀπὸ γὰρ δεδομένου σημείου τοῦ Α ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΒΓ εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ΑΔ, καὶ τετμήσθω εἰς δεδομένον λόγον, τὸν τῆς ΔΕ πρὸς ΕΑ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ε τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΖΕΗ· λέγω ὅτι θέσει ἐστὶν ἡ ΖΕΗ.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΘ. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ Α ἐπὶ τὴν θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΒΓ εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΑΘ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΑΘΔ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ. θέσει δὲ καὶ ἡ ΒΓ· δοθὲν ἄρα τὸ Θ σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ τὸ Α δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει· καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΘ, καὶ ἔστι λόγος τῆς ΑΕ πρὸς τὴν ΕΔ δοθείς· λόγος ἄρα τῆς ΑΚ πρὸς τὴν ΚΘ δοθείς· συνθέντι ἄρα λόγος τῆς ΑΘ πρὸς τὴν ΑΚ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ ΑΘ τῷ μεγέθει· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΑΚ τῷ μεγέθει. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ δοθὲν τὸ Α· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Κ. ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου σημείου τοῦ Κ, παρὰ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΒΓ εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΖΗ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ.

A Dato enim puncto Α in positione datam rectam ΒΓ agatur recta linea ΑΔ, & secetur in data ratione, scilicet ipsius ΔΕ ad ΕΑ, & agatur per punctum Ε ipsi ΒΓ parallela ΖΕΗ: dico positione datam esse ΖΕΗ.



Ducatur enim à puncto Α ad rectam ΒΓ perpendicularis ΑΘ. quoniam ergo à dato puncto Α in datam positione rectam ΒΓ acta est recta linea ΑΘ, quæ facit angulum ΑΘΔ datum: [per 30. dat.] positione data erit ipsa ΑΘ. est autem [ex hyp.] ΒΓ positione data: itaque [per 25. dat.] datum est punctum Θ. at vero [ex hyp.] punctum Α datum est: ergo [per 26. dat.] recta ΑΘ positione & magnitudine data est. quoniam vero est [per 2.6.] ut ΑΕ ad ΕΔ ita ΑΚ ad ΚΘ; atq; data est [ex hyp.] ratio ipsius ΑΕ ad ΕΔ: igitur [per 2. def. dat.] ratio ipsius ΑΚ ad ΚΘ data est: ideoq; componendo [per 6. dat.] ipsius ΑΘ ad ΑΚ data est ratio. data autem est Α magnitudine: quare [per 2. dat.] ΑΚ magnitudine data est. sed positione quoque data est ΑΚ; atque datum est [ex hyp.] punctum Α: itaque [per 27. dat.] datum est punctum Κ. quoniam igitur per datum punctum Κ, contra datam positione rectam ΒΓ, recta linea ΖΗ acta est: igitur [per 28. dat.] recta ΖΗ positione data erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ'.

Ἐὰν ἀπὸ δεδομένου σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, καὶ προστεθῇ τις αὐτῇ εὐθεῖα, λόγον ἔχουσα πρὸς αὐτὴν δεδομένον, διὰ δὲ τοῦ πέρατος τῆς προστεθείσης παρὰ τὴν θέσει δεδομένην εὐθεῖαν εὐ-

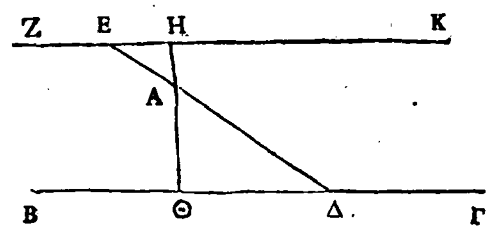
Prop. XXXVI.

Si à dato puncto in datam positione rectam lineam ducatur recta linea, atque adjiciatur ipsi aliqua recta, quæ ad illam habeat rationem datam; per extremum vero adjectæ lineæ contra datam positione rectam linea re-

ꝺa agatur: acta recta positione data est.

A Dato enim puncto A ad positione datam rectam B Γ ducatur recta A Δ: atque adjiciatur ipsi A Δ recta A E, quæ ad A Δ rationem datam habeat; per punctum vero E ipsi B Γ agatur parallela Z K: dico Z K esse positione datam.

Agatur enim à puncto A ad B Γ perpendicularis A Θ, & producatur ad punctum H. quoniam igitur à dato puncto A ad datam positione rectam B Γ acta est recta linea A Θ, quæ facit angulum A Θ Γ datum; Θ A H [per 30.dat.] positione data est. est autem [ex hyp.] B Γ positione data: quare [per 25. dat.] datum est punctum Θ. sed & [ex hyp.] punctum A datum est: itaque [per 26. dat.] data est recta A Θ. & quoniam [ex hyp.] ratio ipsius A E ad A Δ data est, & est per 4. 6.] ut A H ad A Θ ita E A ad Δ A. ratio ipsius A H ad A Θ [per 2.def. dat.] data erit. data autem est Θ A: quare [per 2.dat.] & A H magnitudine data est. sed & etiam positione data est A H; atque datum est punctum A: ergo [per 27. dat.] punctum H datum est. quoniam itaque per datum punctum H, contra datam positione rectam B Γ acta est recta linea Z H K: ipsa Z H K [per 28. dat.] positione data est.



θεῖα γραμμὴ ἀχθῇ· δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει.

Ἀπὸ γὰρ δεδομένου σημείου τοῦ A ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν B Γ εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ A Δ, καὶ προσκείσθω τῇ A Δ ἡ A E λόγον ἔχουσα πρὸς τὴν A Δ δεδομένον, διὰ δὲ τοῦ E τῇ B Γ παράλληλος ἤχθω ἡ Z K· λέγω ὅτι θέσει ἐστὶν ἡ Z K.

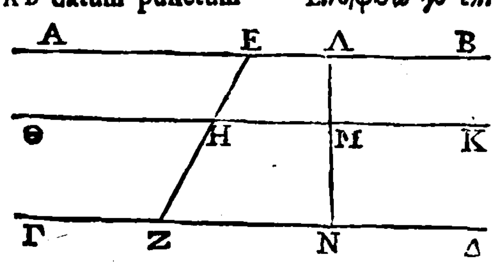
Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὴν B Γ κάθετος ἡ A Θ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ H. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ A ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν B Γ εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ A Θ δεδομένην, ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ A Θ Γ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ Θ A H. θέσει δὲ καὶ ἡ B Γ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Θ σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ τὸ A δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ A Θ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς A E πρὸς τὴν A Δ δοθείς, ὡς δὲ ἡ A H πρὸς τὴν A Θ οὕτως ἡ E A πρὸς τὴν Δ A· λόγος ἄρα καὶ τῆς A H πρὸς τὴν A Θ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ Θ A· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ A H. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ ἔστι δοθὲν τὸ A· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ H. ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου σημείου τοῦ H παρὰ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν B Γ εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ Z H K· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ Z H K.

Prop. XXXVII.

Si in parallelas rectas positione datas ducatur recta linea, seceturque in ratione data; per sectionis autem punctum contra datas positione rectas agatur linea recta acta recta positione data est.

In parallelas enim positione datas rectas A B, Γ Δ agatur recta linea E Z, & secetur in data ratione ipsius Z H ad H E; & ducatur per punctum H utrilibet rectarum A B, Γ Δ parallela Θ K: dico positione datam esse Θ K.

Sumatur enim in recta A B datum punctum A, & deducatur à puncto A in rectam Γ Δ perpendicularis A N. quoniam itaque à dato puncto A, ad datam positione rectam Γ Δ, acta est recta linea A N, quæ facit angulum datum A N Δ: ipsa A N [per 30. dat.] positione data est. est autem [ex hyp.] Γ Δ positione data: ergo [per 25. dat.] datum est punctum N. sed & datum est punctum A: quare [per 26.dat.] data est recta A N. quoniam vero [ex hyp.] ratio ipsius Z H ad H E data est, atque est [per 2.6.] ut Z H ad H E ita N M ad



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζʹ.

Ἐὰν εἰς παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, καὶ τμηθῇ εἰς δεδομένον λόγον, διὰ δὲ τῆς τομῆς παρὰ τὰς ἐν τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας εὐθεῖα ἀχθῇ· δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει.

Εἰς γὰρ παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας τὰς A B, Γ Δ εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ E Z, καὶ τετμήσθω εἰς δεδομένον λόγον τὸν τῆς Z H πρὸς τὴν H E, καὶ διήχθω διὰ τοῦ H ὁποτέρα τῶν A B, Γ Δ παράλληλος ἡ Θ K· λέγω ὅτι θέσει ἐστὶν ἡ Θ K.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς A B δοθὲν σημεῖον τὸ Λ, καὶ κατήχθω ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν Γ Δ κάθετος ἡ Λ N. ἐπεὶ οὖν ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ Λ ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν Γ Δ, εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ Λ N, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ Λ N Δ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ Λ N. θέσει δὲ καὶ ἡ Γ Δ· δοθὲν ἄρα τὸ N σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ τὸ Λ δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ Λ N. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς Z H πρὸς τὴν H E δοθείς, ὡς δὲ ἡ Z H πρὸς τὴν H E οὕτως ἡ N M πρὸς τὴν

M Λ·

ΜΛ· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΝΜ πρὸς τὸ ΜΛ δοθείς. ὥστε καὶ τῆς ΝΛ πρὸς τὸ ΛΜ λόγος ἐστὶ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ ΝΛ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΛΜ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Λ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Μ. ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου σημείου τοῦ Μ παρὰ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΓΔ εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΘΚ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ.

M Λ: ratio quoque ipsius N M ad M Λ [per 2. def. dat.] data est. ideoque [per 6. dat.] ratio ipsius N Λ ad Λ M est data. est autem N Λ data: quare [per 2. dat.] data est Λ M. sed & etiam positione data est; & datum est punctum Λ: quare [per 26. dat.] & punctum M datum est. quoniam itaque per datum punctum M contra positione datam rectam Γ Δ acta est recta linea Θ K; ipsa Θ K [per 28. dat.] positione data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη'.

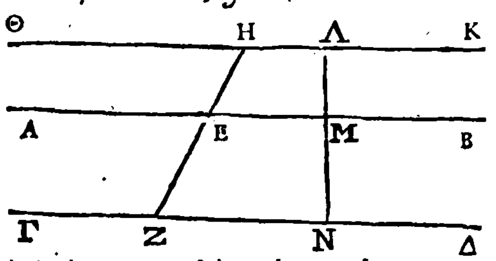
Ἐὰν εἰς παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, καὶ προστεθῇ τις αὐτῇ εὐθεῖα λόγον ἔχουσα πρὸς αὐτὴν δεδομένον, διὰ δὲ τοῦ πέρατος τῆς προστεθείσης παρὰ τὰς θέσει δεδομένας παραλλήλους εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ· δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει.

Prop. XXXVIII.

Si in datas positione parallelas rectas ducatur recta linea, adjiciaturque ei quædam recta habens ad ipsam rationem datam; per extremum vero adjectæ contra datas positione parallelas recta linea agatur: acta recta positione data est.

Εἰς γὰρ παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ΕΖ, καὶ προσκείσθω τις αὐτῇ εὐθεῖα ἡ ΕΗ λόγον ἔχουσα πρὸς τὴν ΕΖ δεδομένον, διὰ δὲ τοῦ Η ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ εὐθειῶν εὐθεῖα γραμμὴ παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΚ· λέγω ὅτι θέσει ἐστὶν ἡ ΘΚ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΑΒ δοθὲν σημεῖον τὸ Μ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Μ ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΜΝ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν ἀπὸ δεδομένου τοῦ Μ, ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΓΔ, εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΜΝ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΜΝΔ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΝ. θέσει δὲ καὶ ἡ ΓΔ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Ν σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ τὸ Μ δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΝ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ δοθείς, ὡς δὲ ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΜΛ· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΝΜ πρὸς τὴν ΜΛ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ ΜΝ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΜΛ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ ἔστι τὸ Μ δοθέν· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου σημείου τοῦ Λ παρὰ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΑΒ εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΘΚ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ.



IN parallelas enim positione datas rectas A B, Γ Δ agatur recta linea E Z, & adjiciatur ipsi quæpiam recta E H, quæ ad E Z habeat rationem datam; per punctum autem H utrilibet rectarum A B, Γ Δ agatur parallela recta linea Θ K: dico quod Θ K positione data est.

Sumatur enim in recta A B datum punctum M, & [per 12. 1.] ducatur à puncto M in lineam Γ Δ perpendicularis recta M N, & producatur ad punctum Λ. quoniam igitur à dato puncto M, in positione datam rectam Γ Δ, acta est recta linea M N, quæ facit angulum M N Δ datum: recta M N [per 28. dat.] positione data est. sed & Γ Δ [ex hyp.] positione data est: ergo [per 25. dat.] datum est punctum N. est autem & punctum M datum: quare [per 26. dat.] data est M N. quoniam vero ratio Z E ad E H [ex hyp.] data est; atque est [per 2. 6.] ut Z E ad E H ita N M ad M Λ: ratio quoque N M ad M Λ [per 2. def. dat.] data est. data autem est M N: quare [per 2. dat.] M Λ data est. sed & positione data est M Λ, atque etiam datum est punctum M: ergo [per 26. dat.] & punctum Λ datum est. quoniam igitur [ex hyp.] per datum punctum Λ contra datam positione rectam A B acta est recta linea Θ K: ipsa Θ K [per 28. dat.] positione data erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ'.

Ἐὰν τριγώνου ἑκάστη τῶν πλευρῶν δεδομένη ᾖ τῷ μεγέθει, δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἴδει.

Prop. XXXIX.

Si trianguli singula latera magnitudine data sint; triangulum specie datum est.

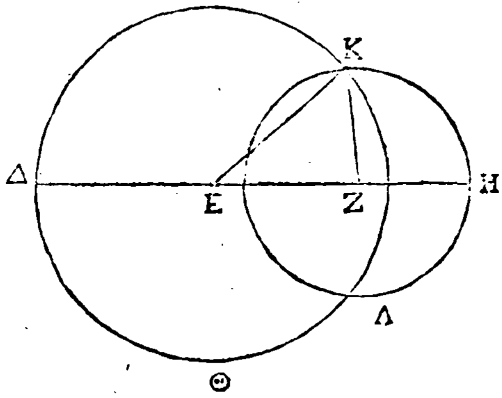
Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἑκάστη τῶν πλευρῶν δεδομένη ἔστω τῷ μεγέθει· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον δέδοται τῷ εἴδει.

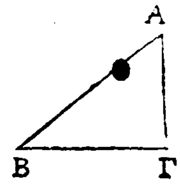
Ἐκκείσθω γὰρ ἡ εὐθεῖα τῇ θέσει δεδομένη ἡ ΔΗ, πεπερατωμένη μὲν κατὰ τὸ Δ, ἄπειρος δὲ κατὰ

TRianguli enim A B Γ singula latera magnitudine data sint: dico triangulum A B Γ specie datum esse.

Exponatur enim recta positione data Δ H, finita quidem ad punctum Δ, infinita vero versus alte-

alteram partem; in ea autem ponatur [per 3.1.] ipsi AB æqualis ΔE. est autem AB data; ergo data est ΔE. sed & ΔE [ex hyp.] positione data est; atque datum est punctum Δ: igitur [per 27. dat.] punctum E datum est. ponatur vero ipsi BΓ æqualis EZ. est autem BΓ data; ergo data est EZ. sed & EZ positione data est; atque datum est punctum B: quare punctum Z datum est. rursus, ponatur ipsi AΓ æqualis ZH. est autem AΓ data: ergo & ZH data est. sed & positione est ZH; atque datum est punctum Z: quare & punctum H datum est. dein centro quidem E, intervallo autem EΔ, circulus describatur ΔKΘ: itaque [per 6. def. dat.] positione datus est circulus ΔKΘ. rursus, centro quidem Z, intervallo autem ZH, circulus describatur HKΛ: itaque positione datus est circulus HKΛ: quare [per 25. dat.] punctum K datum est. est autem utrumque punctorum E, Z datum: ergo [per 26. dat.] unaquæque linearum KE, EZ, ZK positione & magnitudine data est: igitur [per 3. def. dat.] triangulum KEZ specie datum est. atque [per 8. 1.] æquale est ac simile triangulo ABΓ: ergo triangulum ABΓ specie datum est.





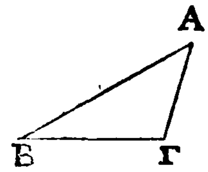
τὸ λοιπόν· καὶ κείσθω τῇ μὲν AB ἴση ἡ ΔE. δοθεῖσα δὲ ἡ AB· δοθεῖσα ἄρα ἡ ΔE. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Δ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ E. τῇ δὲ BΓ κείσθω ἴση ἡ EZ. δοθεῖσα δὲ ἡ BΓ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ EZ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ ἔστι δοθὲν τὸ E· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Z. πάλιν, κείσθω τῇ AΓ ἴση ἡ ZH. δοθεῖσα δὲ ἡ AΓ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ZH. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ δοθέν ἐστι τὸ Z· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ H. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ E, διαστήματι δὲ τῷ EΔ, γεγράφθω κύκλος ὁ ΔKΘ· θέσει ἄρα ἐστὶ ὁ ΔKΘ κύκλος. πάλιν, τῷ μὲν κέντρῳ Z, διαστήματι δὲ τῷ ZH, γεγράφθω HKΛ κύκλος· θέσει ἄρα ἐστὶν ὁ HKΛ κύκλος· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ K σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ ἑκάτερον τῶν E, Z δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκάστη τῶν KE, EZ, ZK τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει· δέδοται ἄρα τὸ KEZ τρίγωνον τῷ εἴδει. καὶ ἔστιν ἴσον τε καὶ ὅμοιον τῷ ABΓ· δέδοται ἄρα τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

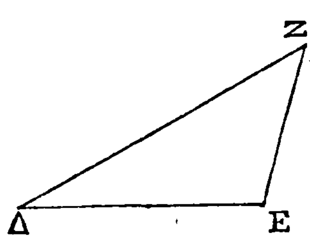
Prop. XL.

Si trianguli singuli anguli magnitudine dati sint; triangulum ipsum specie datum est.

Trianguli enim ABΓ unusquisque angulorum magnitudine datus sit: dico triangulum ABΓ specie datum esse.

Exponatur enim positione & magnitudine data recta ΔE, & [per 23. 1.] ad rectam ΔE, & ad puncta Δ, E in ipsa, angulo quidem ABΓ æqualis constituatur angulus rectilineus ZΔE; angulo autem AΓB æqualis ZEΔ: itaque [per 32. 1.] reliquus angulus BAΓ reliquo ΔZE æqualis est. unusquisque autem eorum, qui ad A, B, Γ puncta sunt, angulorum datus est: quare & unusquisque angulorum ad Z, Δ, E datus erit. quoniam itaque ad positione datam rectam lineam ΔE, & ad datum in ea punctum Δ acta est recta linea ΔZ, faciens angulum datum ad punctum Δ, ipsa ΔZ [per 29. dat.] positione data erit. simili-





ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ′.

Ἐὰν τριγώνου ἑκάστη τῶν γωνιῶν δεδομένη ᾖ τῷ μεγέθει, δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἴδει.

Τριγώνου γὰρ ABΓ ἑκάστη τῶν γωνιῶν δεδομένη ἔστω τῷ μεγέθει· λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον ABΓ δέδοται τῷ εἴδει.

Ἐκκείσθω γὰρ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΔE, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΔE, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Δ, E, τῇ μὲν ὑπὸ ABΓ γωνίᾳ ἴση γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ZΔE, τῇ δὲ ὑπὸ AΓB ἴση ἡ ὑπὸ ZEΔ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ BAΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔZE ἴση ἐστί. δοθεῖσα δὲ ἑκάστη τῶν πρὸς τοῖς A, B, Γ, σημείοις γωνιῶν· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν πρὸς τοῖς Z, Δ, E. ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει δεδομένῃ εὐθείᾳ τῇ ΔE, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δεδομένῳ τῷ Δ, εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΔZ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Δ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΔZ. διὰ

τὰ

τῇ αὐτῇ δὴ καὶ ἡ ΕΖ θέσει ἐστί· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Ζ σημεῖον. ἔστι δὲ ἑκάτερον τῶν Δ, Ε δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκάστη τῶν ΔΕ, ΔΖ, ΕΖ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει· δέδοται ἄρα τὸ ΔΖΕ τρίγωνον τῷ εἴδει, καί ἐστιν ὅμοιον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ· δέδοται ἄρα καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

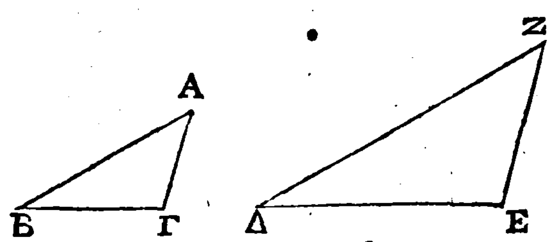
ter quoque positione data est & EZ: quare [per 25. dat.] punctum Z positione datum est. datum autem est utrumque punctorum Δ, E: unaquæque igitur linearum ΔE, ΔZ, EZ [per 26. dat.] positione & magnitudine data est: itaque [per 39. dat.] triangulum ΔZE specie datum est; atque [per 4. 6.] simile est triangulo ABΓ: triangulum igitur ABΓ specie datum est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μα'.

Ἐὰν τρίγωνον μίαν ἔχῃ γωνιῶν δεδομένην, περὶ δὲ τὴν δεδομένην γωνίαν δύο πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον· δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἴδει.

Ἐχέτω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μίαν γωνιῶν δεδομένην τὴν ὑπὸ ΒΑΓ, περὶ δὲ τὴν ὑπὸ ΒΑΓ αἱ πλευραὶ αἱ ΒΑ, ΑΓ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον· λέγω ὅτι ΑΒΓ τρίγωνον δέδοται τῷ εἴδει.

Ἐκκείσθω γὰρ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΔΖ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΖ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ζ, τῇ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΔΖΕ. δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΔΖΕ. ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει δεδομένῃ εὐθείᾳ τῇ ΔΖ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ δεδομένῳ σημείῳ τῷ Ζ, εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΖΕ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΔΖΕ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΕ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τῆς ΔΖ πρὸς τὴν ΖΕ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΔΖ πρὸς τὴν ΖΕ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ ΔΖ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΖΕ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καί ἐστι τὸ Ζ δοθέν· δοθὲν ἄρα τὸ Ε. ἔστι δὲ καὶ ἑκάτερον τῶν Δ, Ζ δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκάστη τῶν ΔΖ, ΖΕ, ΔΕ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει· δέδοται ἄρα τὸ ΔΖΕ τρίγωνον τῷ εἴδει. καὶ ἐπεὶ δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχει, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ, περὶ δὲ τὰς ὑπὸ τῶν ΒΑΓ, ΔΖΕ γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. δέδοται δὲ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ εἴδει· δέδοται ἄρα καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.



Prop. XLI.

Si triangulum unum angulum datum habeat, circa datum autem angulum duo latera ad invicem habeant rationem datam; triangulum ipsum specie datum est.

Habeat enim triangulum ABΓ unum angulum datum, nempe BAΓ; circa datum autem angulum BAΓ latera BA, AΓ ad invicem rationem datam habeant: dico triangulum ABΓ specie datum esse.

Exponatur enim positione & magnitudine data recta ΔZ, & constituatur [per 23. 1.] ad rectam ΔZ, & datum in ea punctum Z, angulo BAΓ æqualis angulus ΔZE. est autem angulus BAΓ datus: quare & angulus ΔZE datus est. quoniam igitur ad positione datam rectam ΔZ, & datum in ea punctum Z, acta est recta linea ZE, faciens angulum ΔZE datum: positione data erit [per 29. dat.] recta ZE. quoniam ergo [ex hyp.] ratio ipsius BA ad AΓ data est; fiat huic eadem ratio ipsius ΔZ ad ZE, & connectatur ΔE: itaque [per 2. def. dat.] ratio ΔZ ad ZE data est. data autem est ΔZ: igitur [per 2. dat.] data est ZE. sed & ipsa etiam positione data est; & datum est punctum Z: itaque [per 27. dat.] datum est punctum E. est autem utrumque punctorum Δ, Z datum: quare [per 26. dat.] data est unaquæque linearum ΔZ, ZE, ΔE positione & magnitudine: itaque [per 39. dat.] triangulum ΔZE specie datum est. quoniam vero duo triangula ABΓ, ΔEZ unum angulum uni angulo æqualem habent, scilicet angulum BAΓ angulo ΔZE, circa æquales autem angulos BAΓ, ΔZE latera proportionalia; triangulum ABΓ [per 6. 6.] triangulo ΔEZ simile erit. triangulum autem ΔEZ specie datum est: triangulum igitur ABΓ specie etiam datum est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ'.

Ἐὰν τριγώνου αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον, δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἴδει.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον δέδοται τῷ εἴδει.

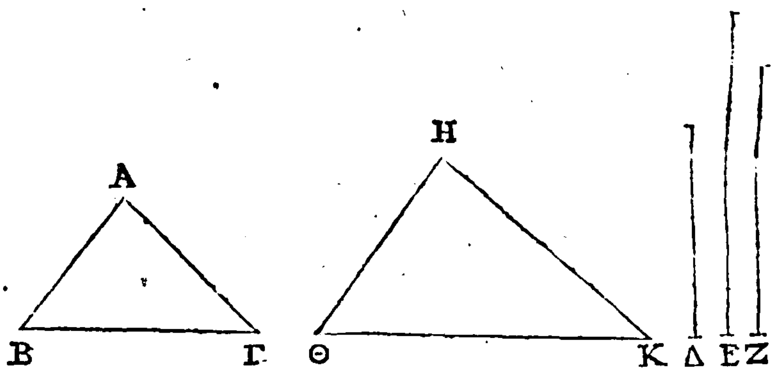
Prop. XLII.

Si trianguli latera ad invicem habeant rationem datam, triangulum specie datum est.

Trianguli enim ABΓ latera ad invicem habeant rationem datam: dico triangulum ABΓ specie datum esse.

Exponatur enim data magnitudine recta Δ. quoniam vero ratio ipsius ΑΒ ad ΒΓ data est, fiat huic eadem ratio ipsius Δ ad Ε. data autem est Δ: quare [per 2. dat.] & data est Ε. rursus quoniam ratio ipsius ΒΓ ad ΑΓ data est; fiat huic eadem ratio ipsius Ε ad Ζ. est autem Ε data: itaque Ζ data est. deinde [per 22. 1.] ex tribus rectis, quæ tribus datis rectis Δ, Ε, Ζ æquales sunt, quarum duæ reliqua majores sint utcunque sumptæ, constituatur triangulum ΗΘΚ; ita ut æqualis sit recta Δ ipsi ΗΘ, recta autem Ε ipsi ΘΚ, & Ζ ipsi ΗΚ. est autem unaquæque linearum Δ, Ε, Ζ data; quare data est unaquæque linearum ΗΘ, ΘΚ, ΚΗ magnitudine: triangulum igitur ΗΘΚ [per 39. dat.] specie datum est. quo-

Ἐκκείσθω γὰρ δεδομένη τῷ μεγέθει εὐθεῖα ἡ Δ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τῆς Δ πρὸς τὴν Ε. δοθεῖσα δὲ ἡ Δ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ Ε. πάλιν ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΑΓ δοθείς, αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τῆς Ε πρὸς τὴν Ζ. δοθεῖσα δὲ ἡ Ε· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ Ζ. καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ τῶν δοθείσαις ταῖς Δ, Ε, Ζ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, τρίγωνον συνεστάτω τὸ ΗΘΚ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν Δ τῇ ΗΘ, τὴν δὲ Ε τῇ ΘΚ, τὴν δὲ Ζ τῇ ΗΚ. δοθεῖσα δὲ ἑκάστη τῶν Δ, Ε, Ζ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν ΗΘ, ΘΚ, ΚΗ τῷ μεγέθει· δέδοται ἄρα τὸ ΗΘΚ τρίγωνον τῷ εἴδει. καὶ



niam autem est ut ΑΒ ad ΒΓ ita Δ ad Ε, atque est Δ æqualis rectæ ΗΘ, ipsa vero Ε rectæ ΘΚ; erit quoque [per 11. 5.] ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΗΘ ad ΘΚ. rursus quoniam est ut ΒΓ ad ΓΑ ita Ε ad Ζ, atque est Ε æqualis ipsi ΘΚ & Ζ ipsi ΚΗ; erit etiam ut ΒΓ ad ΓΑ ita ΘΚ ad ΚΗ ostensum autem est ut ΑΒ ad ΒΓ ita esse ΗΘ ad ΘΚ: est igitur ex æquo [per 22. 5.] ut ΑΒ ad ΑΓ ita ΗΘ ad ΗΚ. est autem ut ΑΓ ad ΒΓ ita ΗΚ ad ΚΘ: itaque [per 5. 6.] triangulum ΑΒΓ triangulo ΗΘΚ simile est. verum triangulum ΗΘΚ specie datum est: quare & triangulum ΑΒΓ specie datum est.

ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε, ἴση δὲ ἡ μὲν Δ τῇ ΗΘ, ἡ δὲ Ε τῇ ΘΚ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΘΚ. πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ, ἴση δὲ ἡ Ε τῇ ΘΚ, ἡ δὲ Ζ τῇ ΗΚ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΗ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΘΚ· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΗΚ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΗΚ πρὸς τὴν ΚΘ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΗΘΚ τριγώνῳ. δέδοται δὲ τὸ ΗΘΚ τρίγωνον τῷ εἴδει· δέδοται ἄρα καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

Prop. XLIII.

Si trianguli rectanguli latera, circa unum acutorum angulorum, ad invicem habeant rationem datam; triangulum ipsum specie datum est.

Trianguli enim rectanguli ΑΒΓ rectum habentis angulum ΒΑΓ, latera ΓΒ, ΒΑ, circa unum acutorum angulorum ΓΒΑ, habeant rationem datam: dico triangulum ΑΒΓ specie datum esse.

Exponatur enim positione & magnitudine data recta ΔΕ; super ΔΕ vero describatur semicirculus ΔΗΕ: itaque [per 6. def. dat.] positione datus est semicirculus ΔΗΕ. & quoniam ratio ipsius ΓΒ ad ΒΑ data est; fiat huic eadem ratio ipsius ΔΕ ad Ζ: quare ratio ipsius ΔΕ ad Ζ data est. data autem est ΔΕ: ergo

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ'.

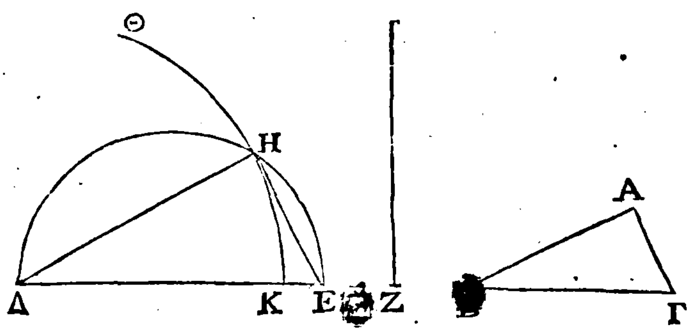
Ἐὰν τριγώνου ὀρθογωνίου περὶ μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον, δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἴδει.

Τριγώνου γὰρ ὀρθογωνίου τοῦ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχοντος τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, περὶ μίαν τῶν ὀξειῶν αὐτοῦ γωνιῶν τὴν ὑπὸ ΓΒΑ, αἱ πλευραὶ αἱ ΓΒ, ΒΑ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον· λέγω ὅτι δέδοται τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

Ἐκκείσθω γὰρ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΔΕ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΔΕ ἡμικύκλιον τὸ ΔΗΕ· θέσει ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΗΕ ἡμικύκλιον. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τῆς ΔΕ πρὸς τὴν Ζ· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΔΕ πρὸς τὴν Ζ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ ΔΕ· δοθεῖσα

δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ Z. καὶ ἔστι μείζων ἡ ΓΒ τῆς ΒΑ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΔ τῆς Z. ἐνηρμόσθω τῷ Z ἴση ἡ ΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΕ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΔΗ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΘΗΚ· θέσει ἄρα ἐστὶν ὁ ΘΗΚ κύκλος, δέδοται γὰρ αὐτοῦ τὸ κέντρον τῇ θέσει, καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῷ μεγέθει. θέσει δὲ καὶ τὸ ΔΗΕ ἡμικύκλιον· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Η σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ ἑκάτερον τῶν Δ, Ε δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκάστη τῶν ΗΔ, ΕΗ, ΕΔ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει· δέδοται ἄρα τὸ ΗΔΕ τρίγωνον τῷ εἴδει. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ, ΔΕΗ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΔΗΕ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς ὑπὸ ΓΒΑ, ΕΔΗ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν τῶν ὑπὸ ΒΓΑ, ΔΕΗ ἑκατέραν ἅμα ἐλάσσονα ὀρθῆς· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τῷ ΔΕΗ. δέδοται δὲ τὸ ΔΕΗ τῷ εἴδει· δέδοται ἄρα καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

[per 2. dat.] Z data est. & [per 19. 1.] major est ΓΒ ipsa ΒΑ: quare & major est ΕΔ ipsa Z. accommodetur [per 1. 4.] ipsi Z æqualis ΔΗ, & connectatur ΗΕ, dein centro quidem Δ, intervallo autem ΔΗ, circulus describatur ΘΗΚ: itaque [per 6. def. dat.] positione datus est semicirculus ΘΗΚ; ipsius namque centrum datum est, & ea quæ ex centro est magnitudine. sed & semicirculus ΔΗΕ positione datus est: ergo [per 25. dat.] punctum Η datum est. datum est autem utrumque punctorum Δ, Ε: igitur [per 26. dat.] unaquæque linearum ΗΔ, ΕΗ, ΕΔ positione & magnitudine data est: quare [per 3. def. dat.] triangulum ΗΔΕ specie datum est. quoniam itaque triangula ΑΒΓ, ΔΕΗ unum angulum uni angulo æqualem habent, angulum scilicet ΒΑΓ angulo ΔΗΕ, circa alios autem angulos ΓΒΑ, ΕΔΗ latera proportionalia, reliquorum autem ΒΓΑ, ΔΕΗ simul utrumque [ex hyp.] recto minorem; ΑΒΓ quidem [per 7. 6.] ipsi ΔΕΗ simile erit. triangulum autem ΔΕΗ [ex ostensis] specie datum est: quare triangulum quoque ΑΒΓ specie datum est.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ'.

Ἐὰν τρίγωνον μίαν ἔχῃ γωνίαν δεδομένην, περὶ δὲ ἄλλην γωνίαν αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον· δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἴδει.

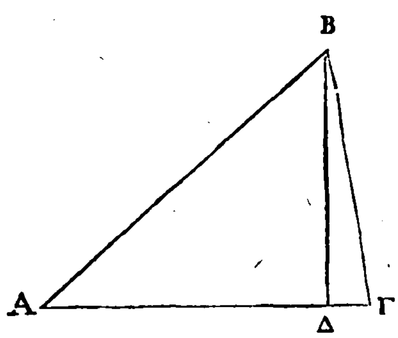
Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μίαν ἔχον γωνίαν δεδομένην τὴν ὑπὸ ΒΑΓ, περὶ δὲ ἄλλην γωνίαν τὴν ὑπὸ ΑΒΓ αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ λόγον ἐχέτωσαν πρὸς ἀλλήλας δεδομένον· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον δέδοται τῷ εἴδει.

Μὴ ἔστω δὴ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ὀρθή, ἀλλὰ ἔστω πρότερον ὀξεῖα· καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἡ ΒΔ. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΔΑ γωνία, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ δοθεῖσα· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ τῶν ΑΒΔ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΒΑΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΒΑ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς. ἀλλὰ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΒΔ ἄρα πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΔΓ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΓΔ γωνία. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ δοθεῖσα· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἐστὶ δο-

Prop. XLIV.

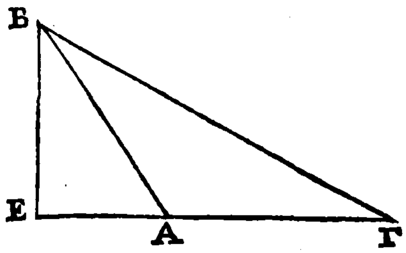
Si triangulum angulum unum habeat datum; latera autem circa alium angulum habeant ad invicem rationem datam: triangulum specie datum est.

SIT triangulum ΑΒΓ, quod unum angulum habeat datum qui sit ΒΑΓ; circa alium autem angulum ΑΒΓ latera ΑΒ, ΒΓ habeant rationem datam: dico triangulum ΑΒΓ specie datum esse.



Non sit autem angulus ΒΑΓ rectus; sed primum acutus: & agatur à puncto Β in lineam ΑΓ perpendicularis ΒΔ. quoniam vero datus est angulus ΒΔΑ, estque [ex hyp.] angulus ΒΑΔ datus; ergo & [per 32. 1. & 4. dat.] reliquus ΑΒΔ datus est: itaque [per 40. dat.] triangulum ΒΑΔ specie datum est: quare [per 3. def. dat.] ratio ipsius ΒΑ ad ΒΔ data est. sed [ex hyp.] rectæ ΑΒ ad ΒΓ data est ratio: ergo [per 8. dat.] & ratio ipsius ΒΔ ad ΒΓ data est. rectus autem est [per constr.] angulus ΒΔΓ: quare [per 43. dat.] triangulum ΒΔΓ specie datum est: datus igitur est angulus ΒΓΔ. est autem [ex hyp.] angulus ΒΑΓ datus: quare & [per 32. 1. & 4. dat.] reliquus angulus ΑΒΓ datus est: triangulum igitur ABΓ [per 40. dat.] specie datum est.

Sed sit angulus BAΓ obtusus, & producaur ΓA ad punctum E, atque agatur à puncto B ad rectam AE perpendicularis BE. & quoniam angulus BAΓ datus est; etiam [per 13. 1. & 4. dat.] & qui deinceps est angulus BAE datus erit. est autem & angulus BEA datus: reliquus igitur EBA [per 32. 1. & 4. dat.] datus est: quare [per 40. dat.] triangulum EBA specie datum est: ergo [per 3. def. dat.] ratio ipsius EB ad BA data est. est autem [ex hyp.] ratio ipsius AB ad BΓ data: quare [per 8. dat.] & ratio ipsius EB ad BΓ data est. sed rectus est [per constr.] angulus BEΓ: ergo [per 4[illegible]t.] triangulum EBΓ specie datum est: quare [per 3.def.dat.] datus est angulus BΓE. est autem [ex hyp.] angulus BAΓ datus: itaque reliquus angulus ABΓ datus est: triangulum igitur ABΓ [per 40.dat.] specie datum est.



θεῖσα· δέδοται ἄρα τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

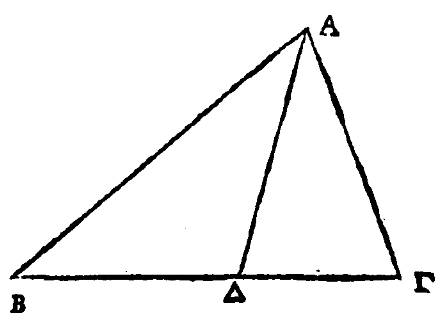
Ἀλλὰ ἔστω ἡ ὑπὸ BAΓ γωνία ἀμβλεῖα, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΓA ἐπὶ τὸ E, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ B σημείου ἐπὶ τὴν AE κάθετος ἡ BE. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ BAΓ· καὶ ἡ ἐφεξῆς ἄρα ἡ ὑπὸ BAE δοθεῖσά ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ BEA δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ EBA δοθεῖσά ἐστιν· δέδοται ἄρα τὸ EBA τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα τῆς EB πρὸς τὴν BA δοθείς. τῆς δὲ AB πρὸς τὴν BΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς EB ἄρα πρὸς τὴν BΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ BEΓ γωνία· δέδοται ἄρα καὶ τὸ EBΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ BΓE. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ BAΓ γωνία δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ABΓ γωνία δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

Prop. XLV.

Si triangulum angulum unum habeat datum; circa datum autem angulum latera simul utraque, tanquam unum, ad reliquum latus habeant rationem datam: triangulum ipsum specie datum est.

SIT triangulum ABΓ quod unum angulum BAΓ habeat datum; circa angulum autem BAΓ latera, hoc est simul utraque BAΓ, tanquam unum, ad BΓ rationem habeant datam: dico triangulum ABΓ specie datum esse.

Secetur enim [per 9. 1.] angulus BAΓ bifariam recta AΔ: itaque [per 2. dat.] datus est angulus BAΔ. quoniam vero [per 3.6.] ut BA ad AΓ ita BΔ ad ΔΓ; erit quoque permutando ut AB ad BΔ ita AΓ ad ΓΔ: adeoque [per 12. 5.] ut simul utraque BAΓ ad BΓ ita erit AB ad BΔ. data autem est [ex hyp.] ratio utriusque simul BAΓ ad BΓ: quare & ratio ipsius AB ad BΔ data est. & datus etiam est angulus BAΔ: quare [per 44. dat.] triangulum ABΔ specie datum est: angulus igitur ABΔ datus est. datus autem est [ex hyp.] angulus BAΓ. itaque [per 32. 1. & 4. dat.] reliquus angulus AΓB datus est: ergo [per 40. dat.] triangulum ABΓ specie datum est.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ με'.

Ἐὰν τρίγωνον μίαν ἔχῃ γωνίαν δεδομένην, αἱ δὲ περὶ τὴν δεδομένην γωνίαν πλευραὶ συναμφότεραι, ὡς μία, πρὸς τὴν λοιπὴν λόγον ἔχωσι δεδομένον· δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἴδει.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ABΓ μίαν γωνίαν δεδομένην ἔχον τὴν ὑπὸ BAΓ, περὶ δὲ τὴν ὑπὸ BAΓ γωνίαν αἱ πλευραί, τουτέστι συναμφότερος ἡ BAΓ, ὡς μία, πρὸς τὴν BΓ λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον. λέγω ὅτι τὸ ABΓ τρίγωνον δέδοται τῷ εἴδει.

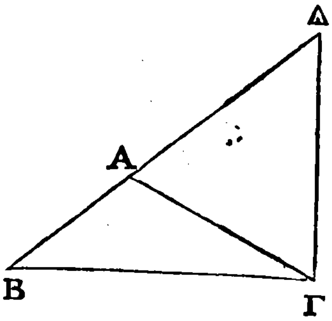
Τετμήσθω γὰρ ἡ ὑπὸ BAΓ γωνία δίχα τῇ AΔ εὐθείᾳ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ BAΔ γωνία. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ BA πρὸς τὴν AΓ οὕτως ἡ BΔ πρὸς τὴν ΔΓ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BΔ οὕτως ἡ AΓ πρὸς τὴν ΓΔ· καὶ ὡς συναμφότερος ἄρα ἡ BAΓ πρὸς τὴν BΓ οὕτως ἡ AB πρὸς τὴν BΔ. λόγος δὲ συναμφοτέρου τῆς BAΓ πρὸς τὴν BΓ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς AB πρὸς τὴν BΔ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ BAΔ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ABΔ τρίγωνον τῷ εἴδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ AEΔ γωνία. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ BAΓ γωνία δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AΓB δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

* ΑΛΛΩΣ.

Ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΑ ἐπ' εὐθείας, καὶ τῇ ΑΓ κείσθω ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ. Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς, ἴση δὲ ἡ ΓΑ τῇ ΔΑ· λόγος ἄρα τῆς ΒΑΔ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ, ἡμίσεια γάρ ἐστι τῆς ὑπὸ ΒΑΓ· δέδοται ἄρα τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

* ALITER.

Producatur BA in directum, & [per 2.1.] ipsi AΓ ponatur æqualis AΔ, & connectatur ΔΓ. Quoniam vero ratio simul utriusque BAΓ ad BΓ data est, atque æqualis est ΓA ipsi ΔA: igitur ratio totius BAΔ ad BΓ data est. verum datus est angulus AΔΓ; dimidius namque est [per 5. & 32. 1.] ipsius BAΓ: igitur [per 44. dat.] triangulum BΔΓ specie datum est: ergo [per 3.def.dat.] angulus ABΓ datus est. angulus autem BAΓ etiam [ex hyp.] datus est: quare [per 32. 1. & 4. dat.] reliquus AΓB datus est. triangulum igitur ABΓ [per 40. dat.] specie datum est.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ μϛʹ.

Ἐὰν τρίγωνον μίαν ἔχῃ γωνίαν δεδομένην, περὶ δὲ ἄλλην γωνίαν αἱ πλευραὶ συναμφότεραι, ὡς μία, πρὸς τὴν λοιπὴν λόγον ἔχωσι δεδομένον· δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἴδει.

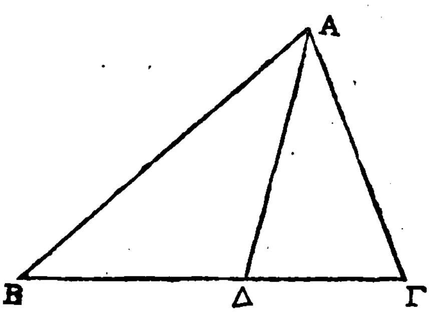
Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μίαν ἔχον γωνίαν δεδομένην τὴν ὑπὸ ΑΒΓ, περὶ δὲ ἄλλην γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ πλευραὶ συναμφότεραι, ὡς μία, τουτέστιν ἡ ΒΑΓ, πρὸς τὴν ΒΓ λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον δέδοται τῷ εἴδει.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τῇ ΑΔ εὐθείᾳ· ἔστιν ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ. λόγος δὲ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ εἴδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία. καὶ ἔστιν αὐτῆς διπλασίων ἡ ὑπὸ ΒΑΓ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

Prop. XLVI.

Si triangulum unum angulum habeat datum; circa alium autem angulum simul utraque latera, tanquam unum, habeant ad reliquum rationem datam: triangulum ipsum specie datum est.

SIT triangulum ABΓ, quod unum angulum ABΓ datum habeat, circa alium autem angulum BAΓ simul utraque latera, tanquam unum (hoc est BAΓ) ad BΓ datam rationem habeant: dico triangulum ABΓ specie datum esse.



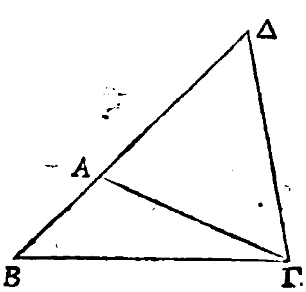
Secetur enim [per 9. 1.] angulus BAΓ bifariam recta AΔ: itaque [per ostensa in præc.] erit ut simul utraque BAΓ ad BΓ ita AB ad BΔ. est autem ratio simul utriusque BAΓ ad BΓ [ex hyp.] data; ergo & ratio ipsius AB ad BΔ data est. datus autem [ex hyp.] est angulus ABΔ: ergo [per 41.dat.] triangulum ABΔ specie datum est: quare [per 3.def.dat.] angulus BAΔ datus est. ipsius autem duplus est [per constr.] angulus BAΓ: igitur [per 2. dat.] angulus BAΓ datus est. est autem [ex hyp.] & angulus ABΓ datus: quare & [per 32. 1. & 4.dat.] angulus AΓB datus est: triangulum igitur ABΓ [per 40.dat.] specie datum est.

ΑΛΛΩΣ.

Ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΑ, καὶ κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΔΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς· ἴση δὲ ἡ ΓΑ τῇ ΑΔ· λόγος ἄρα τῆς ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΔΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΓ γωνία. καὶ ἔστιν αὐτῆς διπλῆ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ·

ALITER.

Producatur BA in directum, & ponatur ipsi ΓA æqualis ΔA, & connectatur recta ΔΓ. quoniam vero [ex hyp.] data est ratio simul utriusque BAΓ ad BΓ; estque [ex constr.] ΓA æqualis ipsi AΔ: igitur ratio ipsius ΔB ad BΓ data est. datus autem est [ex hyp.] angulus ABΓ: quare [per 41. dat.] triangulum ΔBΓ specie datum est; ergo datus est [per 3. def. dat.] angulus BΔΓ. estque hujus duplus [per 5. & 32. 1.] angulus



* Hæc demonstratio non reperitur in Cod. MS. Saviliano.

BAΓ: angulus igitur BAΓ datus est: quare & reliquus AΓB datus est: & igitur [per 40. dat.] triangulum ABΓ specie datum est.

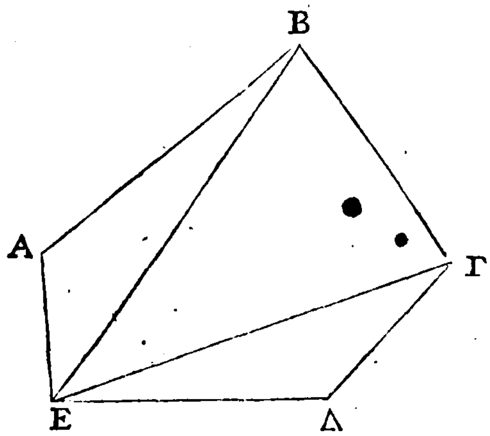
ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δοθεῖσά ἐστι· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

Prop. XLVII.

Rectilinea specie data in data specie triangula dividuntur.

SIT datum specie rectilineum ABΓΔE: dico rectilineum ABΓΔE in data specie triangula dividi.

Connectantur enim rectæ BE, EΓ. quoniam vero rectilineum ABΓΔE specie datum est; igitur [per 3. def. dat.] angulus BAE datus est, & etiam ratio lateris BA ad EA data. quoniam itaque angulus BAE datus est, atque ratio ipsius BA ad AE data: triangulum BAE [per 41. dat.] specie datum est: quare [per 3. def. dat.] angulus ABE datus est. totus autem angulus ABΓ [per 3. def. dat.] datus est: ergo [per 4. dat.] & reliquus EBΓ datus est. ipsius autem AB ad BE, necnon ipsius AB ad BΓ data est ratio: ergo [per 8. dat.] ratio quoque lateris BΓ ad BE data est. sed & datus est angulus ΓBE: triangulum igitur BΓE [per 41. dat.] specie datum est. simili vero ratione & triangulum ΓΔE specie datum est. rectilinea igitur specie data in data specie triangula dividuntur.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ'.

Τὰ δεδομένα εὐθύγραμμα τῷ εἴδει εἰς δεδομένα τρίγωνα τῷ εἴδει διαιρεῖται.

Ἔστω δεδομένον εὐθύγραμμον τῷ εἴδει τὸ ΑΒΓΔΕ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕ εὐθύγραμμον εἰς δεδομένα τῷ εἴδει τρίγωνα διαιρεῖται.

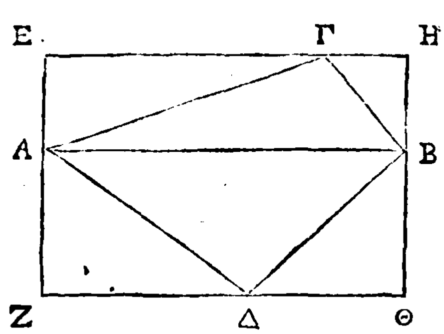
Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΕΓ. καὶ ἐπεὶ δέδοται τὸ ΑΒΓΔΕ εὐθύγραμμον τῷ εἴδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία, καὶ ἔστι λόγος τῆς ΒΑ πρὸς τὴν ΕΑ δοθείς. ἐπεὶ οὖν δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία, καὶ ἔστι λόγος τῆς ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ δοθείς· δέδοται ἄρα τὸ ΒΑΕ τρίγωνον τῷ εἴδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΒΓ δοθεῖσά ἐστιν. καὶ ἔστι λόγος τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ δοθείς, τῆς δὲ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΒΕ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΓΒΕ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΒΓΕ τρίγωνον τῷ εἴδει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΓΔΕ τρίγωνον τῷ εἴδει δέδοται· τὰ ἄρα δεδομένα εὐθύγραμμα τῷ εἴδει εἰς δεδομένα τῷ εἴδει τρίγωνα διαιρεῖται.

Prop. XLVIII.

Si ab eadem recta triangula specie data describantur; habebunt ad invicem rationem datam.

AB eadem enim recta AB duo triangula specie data describantur ABΓ, ABΔ: dico rationem trianguli ABΓ ad triangulum ABΔ datam esse.

Agantur enim [per 11. 1.] à punctis A, B ipsi AB ad rectos angulos rectæ AE, BH, & producantur ad puncta Z, Θ; per puncta autem Γ, Δ [per 31. 1.] ipsi AB parallelæ ducantur EΓH, ZΔΘ. quoniam autem triangulum ABΓ [ex hyp.] specie datum est; ipsius ΓA ad BA [per 3. def. dat.] ratio data erit. quoniam itaque angulus ΓAB datus est, datusque est angulus EAB; etiam [per 4. dat.] reliquus ΓAE da-



ΠΡΟΤΑΣΙΣ μη'.

Ἐὰν ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἀναγραφῇ τρίγωνα δεδομένα τῷ εἴδει· λόγον ἕξει πρὸς ἄλληλα δεδομένον.

Ἀπὸ γὰρ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο τρίγωνα δεδομένα τῷ εἴδει ἀναγεγράφθω τὰ ΑΒΓ, ΑΒΔ· λέγω ὅτι λόγος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ πρὸς τὸ ΑΒΔ δοθείς.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τῶν Α, Β σημείων τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς αἱ ΑΕ, ΒΗ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Ζ, Θ, καὶ διὰ τῶν Γ, Δ σημείων τῇ ΑΒ εὐθείᾳ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΓΗ, ΖΔΘ. καὶ ἐπεὶ δέδοται τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει, λόγος ἐστὶ τῆς ΓΑ πρὸς τὴν ΒΑ δοθείς. ἐπεὶ οὖν δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΓΑΒ γωνία, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΒ δοθεῖσα· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΑΕ δοθεῖσά ἐστιν·

ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΓ δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΓΑ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΕΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα τῆς ΕΑ πρὸς τὴν ΑΓ δοθείς. τῆς δὲ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΕΑ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τῆς ΖΑ πρὸς τὴν ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τῆς ΕΑ πρὸς τὴν ΑΖ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΑΖ οὕτως τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΘΑ· ὥστε καὶ τοῦ ΑΗ πρὸς τὸ ΘΑ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι τοῦ μὲν ΑΗ ἥμισυ τὸ ΑΒΓ, τοῦ δὲ ΑΘ ἥμισυ τὸ ΑΔΒ· καὶ τοῦ ΑΒΓ ἄρα πρὸς τὸ ΑΔΒ λόγος ἐστὶ δοθείς.

tus erit. angulus autem AEΓ datus est: ideoque reliquus angulus EΓA datus est: quare [per 40.dat.] triangulum AEΓ specie datum est: igitur [per 3. def. dat.] ipsius EA ad AΓ ratio est data. sed [ex hyp.] & ratio ΓA ad AB data est: quare [per 8.dat.] ipsius quoque EA ad AB ratio data erit. similiter vero ipsius ZA ad AB ratio est data: quare [per 8.dat.] & ipsius EA ad AZ data est ratio. est autem [per 1. 6.] ut AE ad AZ ita parallelogrammum AH ad parallelogrammum ΘA: ideoque ratio parallelogrammi AH ad parallelogrammum ΘA data est. sed [per 41. 1.] parallelogrammi quidem AH dimidium est triangulum ABΓ; parallelogrammi vero AΘ dimidium est AΔB: trianguli igitur ABΓ ad triangulum AΔB data est ratio.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μθʹ.

Ἐὰν ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο εὐθύγραμμα ἃ ἔτυχεν ἀναγραφῇ δεδομένα τῷ εἴδει, λόγον ἕξει πρὸς ἄλληλα δεδομένον.

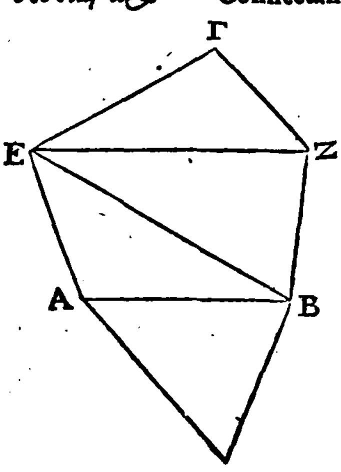
Ἀπὸ γὰρ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο εὐθύγραμμα ἃ ἔτυχεν δεδομένα τῷ εἴδει ἀναγεγράφθω τὰ ΑΕΓΖΒ, ΑΔΒ· λέγω ὅτι λόγος ἐστὶ τοῦ ΑΕΓΖΒ πρὸς τὸ ΑΔΒ δοθείς.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΖΕ· δέδοται ἄρα ἕκαστον τῶν ΕΖΓ, ΕΖΒ, ΕΑΒ τριγώνων τῷ εἴδει. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΕΖ δύο τρίγωνα δεδομένα τῷ εἴδει ἀναγέγραπται τὰ ΕΖΓ, ΕΖΒ· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΓΕΖ πρὸς τὸ ΖΕΒ δοθείς· καὶ συνθέντι ἄρα λόγος ἐστὶ τοῦ ΓΕΒΖ πρὸς τὸ ΕΒΖ δοθείς. τοῦ δὲ ΖΕΒ πρὸς τὸ ΕΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς, ἐπειδήπερ ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΒΕ ἀναγέγραπται δεδομένα τῷ εἴδει τρίγωνα τὰ ΖΕΒ, ΕΑΒ· τοῦ ἄρα ΓΕΒΖ πρὸς τὸ ΕΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ συνθέντι συναμφοτέρου τοῦ ΓΕΑΒΖ πρὸς τὸ ΕΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ΕΑΒ πρὸς τὸ ΑΔΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΓΕΑΒΖ ἄρα πρὸς τὸ ΑΔΒ λόγος ἐστὶ δοθείς.

Prop. XLIX.

Si ab eadem recta linea duo quælibet rectilinea specie data describantur; habebunt ad invicem rationem datam.

AB eadem enim recta AB duo rectilinea quæcunque specie data describantur, ut AEΓZB, AΔB: dico rationem ipsius AEΓZB ad AΔB datam esse.



Connectantur enim BE, ZE: itaque [per 47. dat.] unumquodque triangulorum EZΓ, EZB, EAB, specie datum est. quoniam vero ab eadem recta EZ triangula specie data EZΓ, EZB descripta sunt; ratio ΓEZ ad ZEB [per 48. dat.] data est: quare [per 6. dat.] componendo, ratio ipsius ΓEBZ ad EBZ data est. ipsius etiam ZEB ad EAB [per 48. dat.] data ratio est; quandoquidem ab eadem recta BE triangula specie data descripta sunt, ZEB, EAB: quare [per 8.dat.] ipsius ΓEBZ ad EAB data est ratio: componendo igitur [per 6. dat.] ratio utriusque ΓEABZ ad EAB data est. ratio autem ipsius EAB ad AΔB [per 48.dat.] data est: igitur [per 8. dat.] ratio ipsius ΓEABZ ad AΔB data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νʹ.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα πρὸς ἄλληλα λόγον ἕξει δεδομένον.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ Ε, Ζ· λέγω ὅτι καὶ ὁ αὐτῶν πρὸς ἄλληλα λόγος ἐστὶ δοθείς.

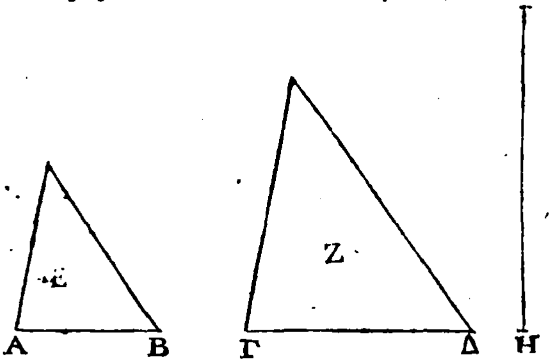
Prop. L.

Si duæ rectæ lineæ ad invicem habeant rationem datam, ab illis quoque similia similiterque descripta rectilinea ad invicem rationem datam habebunt.

DUÆ enim rectæ AB, ΓΔ habeant ad invicem rationem datam, & describantur ab illis similia & similiter posita rectilinea E, Z: dico rationem illorum ad invicem datam esse.

Acci-

Accipiatur enim [per 11. 6.] ipsius A B, Γ Δ tertia proportionalis H: est igitur ut A B ad Γ Δ ita Γ Δ ad H. data autem est [ex hyp.] ratio rectæ A B ad rectam Γ Δ: quare etiam ratio Γ Δ ad H data est: ideoque [per 8. dat.] & ipsius A B ad H ratio data est. verum ut A B ad H ita [per 19 aut 20. 6.] rectilineum E ad rectilineum Z: ratio igitur ipsius E ad Z data est.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν Α Β, Γ Δ τρίτη ἀνάλογον ἡ Η· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α Β πρὸς τὴν Γ Δ οὕτως ἡ Γ Δ πρὸς τὴν Η. λόγος δὲ ὁ τῆς Α Β πρὸς τὴν Γ Δ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς Γ Δ πρὸς τὴν Η δοθείς· ὥστε καὶ τῆς Α Β πρὸς τὴν Η λόγος ἐστὶ δοθείς. ὡς δὲ ἡ Α Β πρὸς τὴν Η οὕτω τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λόγος ἄρα τοῦ Ε πρὸς τὸ Ζ δοθείς.

Prop. LI.

Si duæ rectæ lineæ habeant ad invicem rationem datam, atque ab illis rectilinea quæcunque specie data describantur; habebunt hæc ad invicem rationem datam.

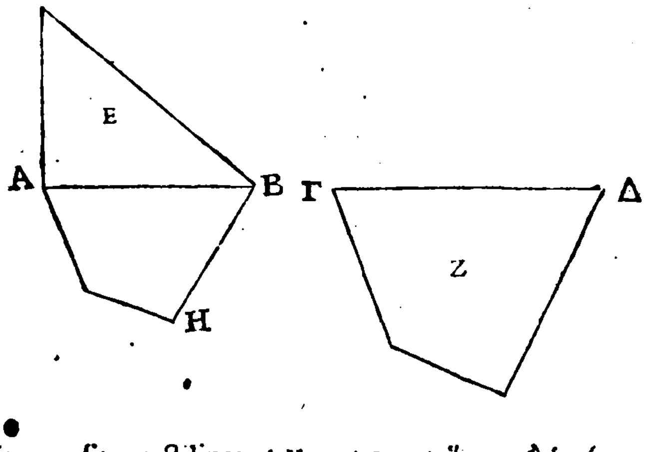
ΠΡΟΤΑΣΙΣ να'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον, καὶ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὡς ἔτυχεν ἀναγραφῇ δεδομένα τῷ εἴδει· λόγον ἕξει πρὸς ἄλληλα δεδομένον.

DUÆ enim rectæ A B, Γ Δ habeant ad invicem rationem datam; & describantur ab ipsis A B, Γ Δ rectilinea quæcunque specie data E, Z: dico ipsius E ad Z rationem datam esse.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι Α Β, Γ Δ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῶν Α Β, Γ Δ εὐθύγραμμα ὡς ἔτυχεν δεδομένα τῷ εἴδει τὰ Ε, Ζ· λέγω ὅτι τοῦ Ε πρὸς τὸ Ζ λόγος ἐστὶ δοθείς.

Describatur enim à recta A B, ipsi Z simile & similiter positum rectilineum A H quoniam autem rectilineum E specie datum est, atque descriptum est ab eadem recta aliud rectilineum A H specie datum: ratio igitur ipsius E ad A H [per 49. dat. data est. & quoniam ratio ipsius A B ad Γ Δ data est, descriptaque sunt à rectis A B, Γ Δ similia & similiter posita rectilinea A H, Z: ratio ipsius A H ad Z [per 50. dat.] data est. data autem est ratio ipsius A H ad E: ergo [per 8. dat.] & ratio ipsius E ad Z data est.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς Α Β τῷ Ζ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ Α Η. ἐπεὶ οὖν τὸ Ε δέδοται τῷ εἴδει, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τὸ εὐθύγραμμον Α Η δεδομένον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα τοῦ Ε πρὸς τὸ Α Η δοθείς. καὶ ἐπεί ἐστι τῆς Α Β πρὸς τὴν Γ Δ λόγος δοθείς, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ τῶν Α Β, Γ Δ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ Α Η, Ζ· λόγος ἄρα τοῦ Α Η πρὸς τὸ Ζ δοθείς. τοῦ δὲ Α Η πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ Ε ἄρα πρὸς τὸ Ζ λόγος ἐστὶ δοθείς.

Prop. LII.

Si à data magnitudine recta figura specie data describatur; descripta figura magnitudine data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νβ'.

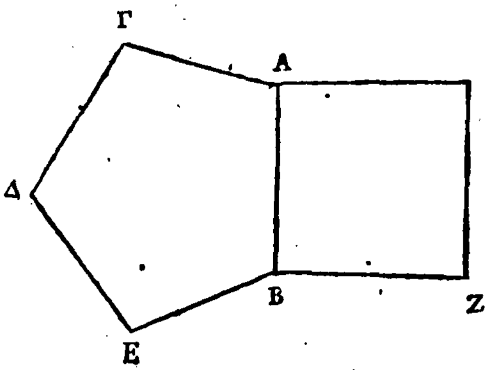
Ἐὰν ἀπὸ δεδομένης εὐθείας τῷ μεγέθει δεδομένον τῷ εἴδει εἶδος ἀναγραφῇ, δέδοται τὸ ἀναγραφὲν τῷ μεγέθει.

A Data enim magnitudine recta A B describatur data specie figura A Γ Δ E B: dico figuram A Γ Δ E B magnitudine datam esse.

Ἀπὸ γὰρ δεδομένης εὐθείας τῷ μεγέθει τῆς Α Β δεδομένον τῷ εἴδει εἶδος ἀναγεγράφθω τὸ Α Γ Δ Ε Β· λέγω ὅτι τὸ Α Γ Δ Ε Β δέδοται τῷ μεγέθει.

Ἀνα-

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΖ· δέδοται ἄρα τὸ ΑΖ τῷ εἴδει καὶ τῷ μεγέθει. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο εὐθύγραμμα ἀναγέγραπται δεδομένα τῷ εἴδει ΑΓΔΕΒ, ΑΖ· λόγος ἄρα τοῦ ΑΓΔΕΒ πρὸς τὸ ΑΖ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΔΖ τῷ μεγέθει· δέδοται ἄρα καὶ τὸ ΑΓΔΕΒ τῷ μεγέθει.



Describatur enim [per 46. 1.] à recta AB quadratum AZ: datum itaque [per 3. def. dat.] est ipsum specie & magnitudine. & quia à recta AB duo rectilinea ΑΓΔΕΒ, AZ specie data, descripta sunt: igitur [per 49. dat.] ratio ipsius ΑΓΔΕΒ ad AZ data est. quadratum autem AZ magnitudine datum est: ergo [per 2. dat.] etiam figura ΑΓΔΕΒ magnitudine data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νγ'.

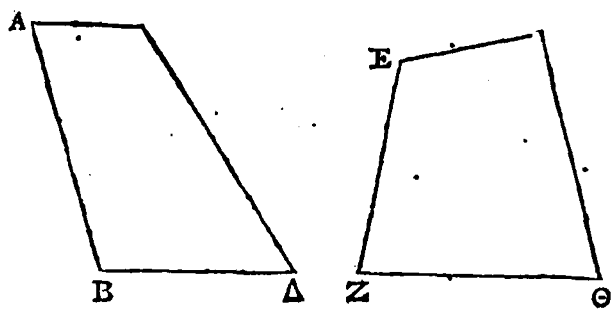
Ἐὰν δύο εἴδη τῷ εἴδει δεδομένα ᾖ, καὶ μία πλευρὰ τοῦ ἑνὸς πρὸς μίαν πλευρὰν τοῦ ἑτέρου λόγον ἔχῃ δεδομένον· καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς λόγον ἕξουσι δεδομένον.

PROP. LIII.

Si duæ figuræ specie datæ fuerint, & unum latus unius ad unum latus alterius habuerit rationem datam; & etiam reliqua latera ad reliqua latera rationem datam habebunt.

Ἔστω δύο εἴδη δεδομένα τὰ ΑΔ, ΕΘ, καὶ λόγος ἔστω τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ δοθείς· λέγω ὅτι τῶν λοιπῶν πλευρῶν πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς λόγος ἐστὶ δοθείς.

Ἐπεὶ γὰρ λόγος ἐστὶ τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ δοθείς, τῆς δὲ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΑΒ ἄρα πρὸς τὴν ΖΘ λόγος ἐστὶ δοθείς. τῆς δὲ ΖΘ πρὸς τὴν ΕΖ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΑΒ ἄρα πρὸς τὴν ΕΖ λόγος ἐστὶ δοθείς. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τῶν λοιπῶν πλευρῶν πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς λόγος ἐστὶ δοθείς.



Sint duæ figuræ specie datæ ΑΔ, ΕΘ, sitque ratio ipsius ΒΔ ad ΖΘ data: dico reliquorum etiam laterum ad reliqua rationem datam esse.

Quoniam enim [ex hyp.] ratio rectæ ΒΔ ad ΖΘ data est; ipsiusque ΔΒ ad ΒΑ [per 3. def. dat.] ratio est data: erit quoque [per 8. dat.] ratio ΑΒ ad ΖΘ data. rectæ autem ΖΘ ad ΕΖ [per 3. def. dat.] ratio est data: quare [per 8. dat.] ipsius ΑΒ ad ΕΖ ratio erit data. similiter & reliquorum laterum ad reliqua latera ratio data erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νδ'.

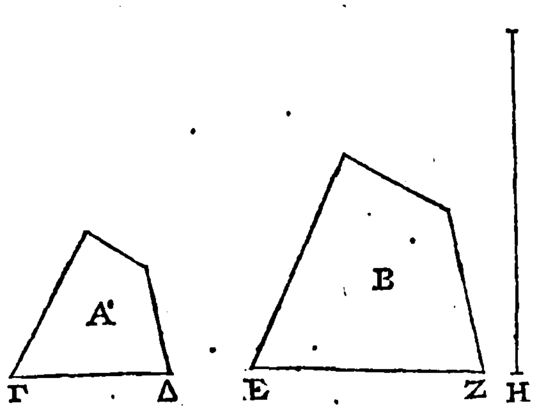
Ἐὰν δύο εἴδη δεδομένα τῷ εἴδει πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῶν πρὸς ἀλλήλας λόγον ἕξουσι δεδομένον.

PROP. LIV.

Si duæ figuræ specie datæ ad invicem habuerint rationem datam; etiam eorum latera inter se habebunt rationem datam.

Δύο γὰρ εἴδη δεδομένα τῷ εἴδει τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω δεδομένον· λέγω ὅτι καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῶν πρὸς ἀλλήλας λόγον ἕξουσι δεδομένον.

Τὸ γὰρ Α τῷ Β ἤτοι ὅμοιόν ἐστιν ἢ οὔ. ἔστω πρότερον ὅμοιον, καὶ εἰλήφθω τῶν ΓΔ, ΕΖ τρίτη ἀνάλογον ἡ Η· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν Η οὕτως τὸ Α πρὸς τὸ Β. λόγος



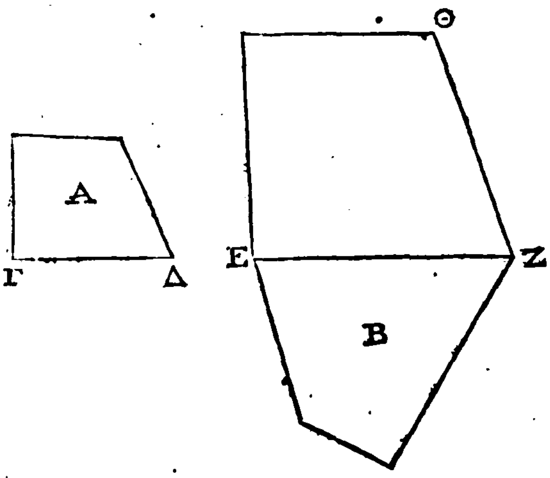
Duæ enim figuræ specie datæ A, B habeant ad invicem rationem datam: dico eorum etiam latera ad invicem rationem datam habere.

Figura enim A ipsi B aut similis est, aut non. esto primum similis, & sumatur [per 11. 6.] rectis ΓΔ, EZ tertia proportionalis H. ideoque [per 20. 6.] ut ΓΔ ad H ita est A ad B. est autem

tem [ex hyp.] ratio ipsius A ad B data: ergo & ratio ipsius ΓΔ ad H data est. sunt autem [per constr.] ΓΔ, EZ, H continue proportionales, ipsius igitur ΓΔ ad EZ [per 24. dat.] data est ratio. similis vero est [ex hyp.] figura A ipsi B: quare [per 53. dat.] reliqua latera ad reliqua latera habebunt rationem datam.

δὲ τοῦ A πρὸς τὸ B δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΓΔ πρὸς τὴν H δοθείς. καὶ εἰσὶν αἱ ΓΔ, EZ, H ἀνάλογον· καὶ τῆς ΓΔ ἄρα πρὸς τὴν EZ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστιν ὅμοιον τὸ A τῷ B· καὶ αἱ λοιπαὶ ἄρα πλευραὶ πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς λόγον ἕξουσι δεδομένον.

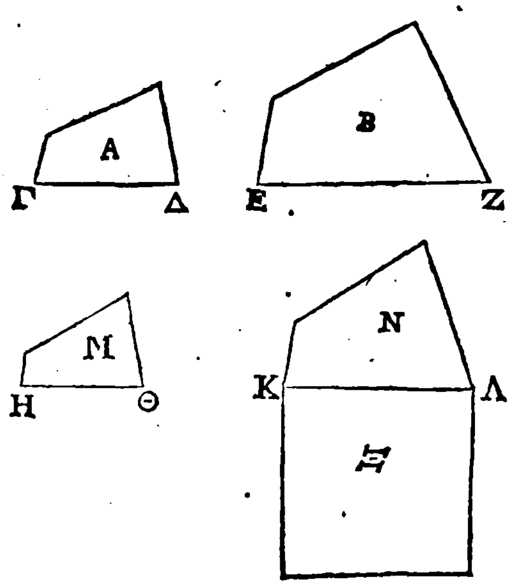
Verum figura A non sit similis figuræ B, & [per 18. 6.] describatur ab EZ ipsi A similis & similiter posita EΘ: itaque figura EΘ specie data est. est autem [ex hyp.] figura B specie data: ergo [per 49. dat.] ratio ipsius B ad EΘ data est: ideoque [per 8. dat.] ratio ipsius A ad EΘ data est. at vero [per constr.] similis est figura A ipsi EΘ: ratio igitur rectæ ΓΔ ad EZ [per 20. 6. & 24. dat.] data est. similiter & ratio reliquorum laterum ad reliqua latera data est.



Μὴ ἔστω δὴ ὅμοιον τὸ A τῷ B, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς EZ τῷ A ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ EΘ· δέδοται ἄρα καὶ τὸ EΘ τῷ εἴδει. δέδοται δὲ καὶ τὸ B· λόγος ἄρα τοῦ B πρὸς τὸ EΘ δοθείς· καὶ τοῦ A ἄρα πρὸς τὸ EΘ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ A τῷ EΘ· λόγος ἄρα τῆς ΓΔ πρὸς τὴν EZ δοθείς. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τῶν λοιπῶν πλευρῶν πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς λόγος ἐστὶ δοθείς.

ALITER.

Exponatur data recta HΘ. aut ergo figura A figuræ B similis est, aut non. sit primum similis. & [per 12. 6.] fiat ut ΓΔ ad EZ ita HΘ ad KΛ, dein [per 18. 6.] describantur ab HΘ, KΛ ipsis A, B similes similiterque positæ figuræ M, N: utraque igitur figura M, N specie data est. & quoniam est ut ΓΔ ad EZ ita HΘ ad KΛ, & descripta sunt à lineis ΓΔ, EZ, HΘ, KΛ similia similiterque posita rectilinea A, B, M, N: erit igitur [per 22. 6.] ut A ad B ita M ad N. est autem ratio ipsius A ad B [ex hyp.] data: igitur & ratio ipsius M ad N data est. M autem [per 52. dat.] data est; siquidem à data magnitudine recta data specie figura descripta est: ergo & [per 2. dat.] figura N data est. describatur autem [per 46. 1.] à recta KΛ quadratum Ξ: figura igitur Ξ specie data est: ergo ratio ipsius N ad Ξ data est. data autem est N: quare & Ξ data est; ergo data est KΛ. est autem HΘ data: ergo [per 1. dat.] ratio ipsius HΘ ad KΛ data est. sed [per constr.] ut HΘ ad KΛ ita est ΓΔ ad EZ: ratio igitur ipsius ΓΔ ad EZ data est. similis vero [ex hyp.] est figura A figuræ B: itaque [per 53.



ΑΛΛΩΣ.

Ἐκκείσθω δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ HΘ. τὸ δὲ A τῷ B ἤτοι ὅμοιόν ἐστιν, ἢ οὔ. ἔστω πρότερον ὅμοιον. καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν EZ οὕτως ἡ HΘ πρὸς τὴν KΛ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῶν HΘ, KΛ τοῖς A, B ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ M, N· δέδοται ἄρα τὸ ἑκάτερον τῶν M, N τῷ εἴδει. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν EZ οὕτως ἡ HΘ πρὸς τὴν KΛ, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ τῶν ΓΔ, EZ, HΘ, KΛ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ A, B, M, N· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ M πρὸς τὸ N. λόγος δὲ τοῦ A πρὸς τὸ B δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τοῦ M πρὸς τὸ N δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ M, ἀπὸ γὰρ δεδομένης εὐθείας τῷ μεγέθει ἀναγέγραπται δεδομένον εἶδος· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ N. ἀναγεγράφθω δὲ ἀπὸ τῆς KΛ τετράγωνον τὸ Ξ· δέδοται ἄρα καὶ τὸ Ξ τῷ εἴδει· λόγος ἄρα τοῦ N πρὸς τὸ Ξ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ N· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ξ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ KΛ. ἔστι δὲ καὶ ἡ HΘ δοθεῖσα· λόγος ἄρα καὶ τῆς HΘ πρὸς τὴν KΛ δοθείς. καὶ ἔστιν ὡς ἡ HΘ πρὸς τὴν KΛ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν EZ· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΓΔ πρὸς τὴν EZ δοθείς. καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ A τῷ B· καὶ αἱ λοιπαὶ

λοιπαὶ πλευραὶ ἄρα πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς λόγον ἕξουσι δεδομένον. μὴ ἔστω δὴ ὅμοιον· ἀναλόγως δὴ τῇ προτέρᾳ ἀποδείξει τὸ λοιπὸν δεικνύσεται.

dat.] reliqua latera ad reliqua latera habebunt datam rationem. deinde vero non sit similis; eodem ergo modo, quo in superiori demonstratione, reliqua pars propositionis ostendetur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νε'.

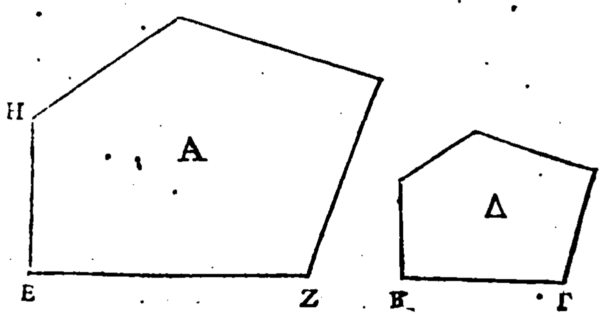
Ἐὰν χωρίον τῷ εἴδει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένον ᾖ, καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ τῷ μεγέθει δεδομέναι ἔσονται.

Prop. LV.

Si spatium magnitudine & specie datum fuerit, etiam latera ejus magnitudine data erunt.

Ἔστω χωρίον τῷ εἴδει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένον τὸ Α· λέγω ὅτι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ δεδομέναι εἰσί.

Ἐκκείσθω γὰρ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΒΓ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΒΓ τῷ Α ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ Δ· δέδοται ἄρα τὸ Δ τῷ εἴδει. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ δεδομένης τῷ μεγέθει εὐθείας τῆς ΒΓ δεδομένον τῷ εἴδει εἶδος ἀναγέγραπται τὸ Δ· δέδοται ἄρα καὶ τὸ Δ τῷ μεγέθει. δέδοται δὲ καὶ τὸ Α· λόγος ἄρα τοῦ Α πρὸς τὸ Δ δοθείς. καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ Α τῷ Δ· λόγος ἄρα τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ ΒΓ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΕΖ. καὶ ἔστι λόγος τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ΕΗ δοθείς· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΕΗ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν λοιπῶν πλευρῶν δέδοται τῷ μεγέθει.



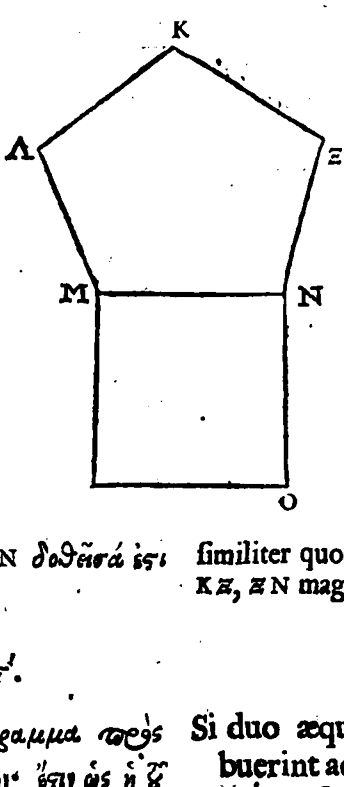
SIT spatium A specie & magnitudine datum: dico latera illius magnitudine data esse.

Exponatur enim positione & magnitudine data recta ΒΓ, & describatur à recta ΒΓ ipsi A simile & similiter positum spatium Δ: itaque spatium Δ specie datum est. quoniam vero à data recta ΒΓ data specie figura Δ descripta est: igitur [per 52. dat.] magnitudine data est Δ. est autem [ex hyp.] & figura A data: itaque [per 1. dat.] ratio ipsius A ad Δ data est. similis autem [per constr.] figura A figuræ Δ: est ergo [per 54. dat.] rectæ EZ ad BΓ ratio data est. data autem est BΓ: quare etiam EZ data est. verum [per 3. def. dat.] ipsius EZ ad EH ratio data est: ergo recta EH data est. similiter vero unumquodque reliquorum laterum magnitudine datum est.

ΑΛΛΩΣ.

Ἔστω χωρίον τὸ ΚΛΜΝΞ δεδομένον τῷ εἴδει καὶ τῷ μεγέθει· λέγω ὅτι καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ δεδομέναι εἰσὶ τῷ μεγέθει.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΜΝ τετράγωνον τὸ ΜΟ· δέδοται ἄρα τῷ εἴδει. ἀλλὰ καὶ τὸ ΛΝ· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΛΝ πρὸς τὸ ΜΟ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΛΝ τῷ μεγέθει· δοθὲν ἄρα τὸ ΜΟ τῷ μεγέθει. καὶ ἔστι τετράγωνον τὸ ΜΟ ἀπὸ τῆς ΜΝ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΝ τῷ μεγέθει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ΜΛ, ΛΚ, ΚΞ, ΞΝ δοθεῖσά ἐστι τῷ μεγέθει.



ALITER.

Sit spatium ΚΛΜΝΞ specie & magnitudine datum: dico latera ejus magnitudine quoque data esse.

Describatur enim [per 46. 1.] à recta MN quadratum MO: itaque illud specie datum est. sed [ex hyp.] & spatium ΛN specie datum est: ergo [per 49. dat.] ratio spatii ΛN ad MO data est. datum autem est [ex hyp.] ΛN magnitudine: igitur [per 2. dat.] datum est MO magnitudine. est autem MO quadratum à recta MN: itaque quadratum à recta MN datum est: quare data est recta MN magnitudine. similiter quoque unaquæque linearum MΛ, ΛK, KΞ, ΞN magnitudine data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νϛ'.

Ἐὰν δύο ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ δεδομένον· ἔστιν ὡς ἡ τῆς

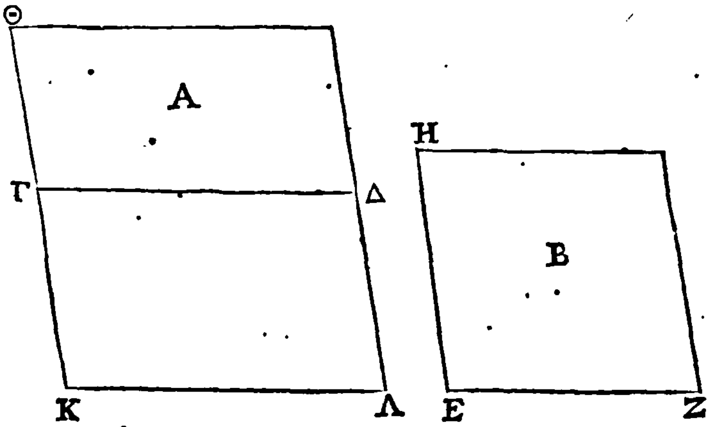
Prop. LVI.

Si duo æquiangula parallelogramma habuerint ad invicem rationem datam; est ut primi latus ad latus secundi ita reliquum secundi latus ad rectam lineam ad quam alterum primi latus habet rationem datam, quam nempe habet parallelogrammum ad parallelogrammum.

πρώτου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου πλευρὰν οὕτως ἡ λοιπὴ τοῦ δευτέρου πλευρὰ πρὸς ἣν ἡ ἑτέρα τοῦ πρώτου πλευρὰ λόγον ἔχει δεδομένον, ὃν τὸ παραλληλόγραμμον ἔχει πρὸς παραλληλόγραμμον.

DUO enim æquiangula parallelogramma A, B habeant ad invicem rationem datam: dico ut ΓΔ ad EZ ita esse EH ad eam ad quam ΓΘ habet rationem datam, quam nempe parallelogrammum A habet ad parallelogrammum B.

Δύο γὰρ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ A, B πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω δεδομένον· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν EZ οὕτως ἡ EH πρὸς ἣν ἡ ΓΘ λόγον ἔχει δεδομένον, ὃν τὸ A παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ B παραλληλόγραμμον.



Producatur enim ΓK in directum ipsi ΓΘ, & fiat [per 12. 6.] ut ΓΔ ad EZ ita EH ad ΓK, compleaturque parallelogrammum ΓΛ. quoniam ergo est ut ΓΔ ad EZ ita est EH ad ΓK, estque [per 34. 1.] recta ΓΔ æqualis ipsi KΛ: igitur ut KΛ ad EZ ita EH ad ΓK. adeoque circa æquales angulos ΓKΛ, HEZ latera reciproce proportionalia sunt: quare [per 14. 6.] æquale est KΔ ipsi HZ. quoniam vero ratio A ad B data est; æquale autem est B ipsi ΓΛ: ipsius igitur ΘΔ ad ΓΛ ratio data est. ut autem ΘΔ ad ΓΛ ita [per 1. 6.] ΘΓ ad ΓK: ergo & ratio ΘΓ ad ΓK data est. quoniam vero [per constr.] ut ΓΔ ad EZ ita est EH ad ΓK; habetque recta ΘΓ ad ΓK rationem datam, eam nempe quam habet spatium A ad B: est igitur ut ΓΔ ad EZ ita EH ad eam ad quam ΘΓ habet rationem datam, eam nempe quam spatium habet A ad spatium B, hoc est rationem ipsius ΘΓ ad ΓK.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῇ ΓΘ ἡ ΓK, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν EZ οὕτως ἡ EH πρὸς τὴν ΓK, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ παραλληλόγραμμον ΓΛ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν EZ οὕτως ἡ EH πρὸς τὴν ΓK, ἴση δέ ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ KΛ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ KΛ πρὸς τὴν EZ οὕτως ἡ EH πρὸς τὴν ΓK. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΓKΛ, HEZ αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ KΔ τῷ HZ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ A πρὸς τὸ B δοθείς, ἴσον δὲ τὸ B τῷ ΓΛ· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΘΔ πρὸς τὸ ΓΛ δοθείς. ὡς δὲ τὸ ΘΔ πρὸς τὸ ΓΛ οὕτως ἡ ΘΓ πρὸς τὴν ΓK· καὶ τῆς ΘΓ ἄρα πρὸς τὴν ΓK λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν EZ οὕτως ἡ EH πρὸς τὴν ΓK, ἡ δὲ ΘΓ πρὸς τὴν ΓK λόγον ἔχει δοθέντα, ὃν τὸ A χωρίον πρὸς τὸ B· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν EZ οὕτως ἡ EH πρὸς ἣν ἡ ΘΓ λόγον ἔχει, ὃν τὸ A χωρίον πρὸς τὸ B, τουτέστι τῆς ΘΓ πρὸς τὴν ΓK.

PROP. LVII.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νζʹ.

Si datum spatium ad datam rectam applicatum fuerit in angulo dato; datur quoque latitudo applicationis.

Ἐὰν δοθὲν χωρίον παρὰ δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβληθῇ ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ, δέδοται τὸ πλάτος τῆς παραβολῆς.

DAtum enim spatium AH ad datam rectam AB applicetur in angulo ΓAB dato: dico datam esse rectam ΓA.

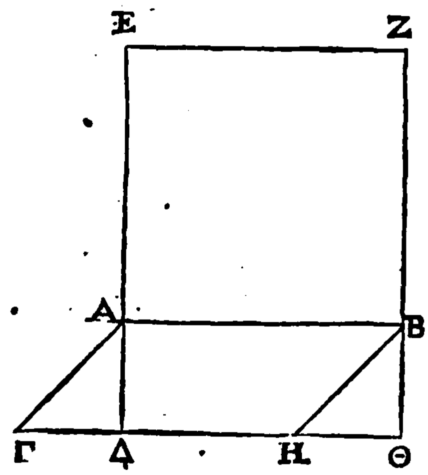
Describatur ab AB quadratum EB: itaque quadratum EB datum est. dein producantur lineæ EA, ZB, ΓH ad puncta Δ, Θ. & quoniam datum est utrumque spatiorum EB, AH: ratio igitur ipsius EB ad AH data est. æquale autem est [per 35. 1.] AΘ ipsi AH: igitur ratio ipsius EB ad AΘ data est: unde & [per 1. 6.] ratio EA ad AΔ data est. æqualis autem

Δοθὲν γὰρ τὸ AH παρὰ δοθεῖσαν τὴν AB παραβεβλήσθω ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓAB· λέγω ὅτι δοθεῖσά ἐστιν ἡ ΓA.

Ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ EB· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ EB. καὶ διήχθωσαν αἱ EA, ZB, ΓH ἐπὶ τὰ Δ, Θ. καὶ ἐπεὶ δοθέν ἐστιν ἑκάτερον τῶν EB, AH· λόγος ἄρα τοῦ EB πρὸς τὸ AH δοθείς. τῷ δὲ AH ἴσον ἐστὶ τὸ AΘ· καὶ τοῦ EB ἄρα πρὸς τὸ AΘ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τῆς EA πρὸς τὴν AΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἴση δὲ ἡ

EA

ΕΑ τῇ ΑΒ· λόγος ἐστὶ ἄρα καὶ τῆς ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ δοθείς. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΓΑΒ γωνία, ὡς καὶ ἡ ὑπὸ ΔΑΒ δοθεῖσά ἐστι· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΑΔ δοθεῖσά ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΑ δοθεῖσα, ὀρθὴ γάρ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΔΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ δοθείς. τῆς δὲ ΑΔ πρὸς τὴν ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΓΑ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ΑΒ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΑΓ.



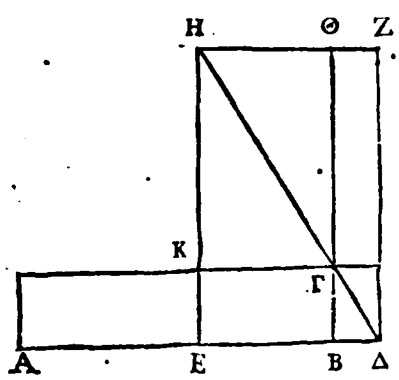
est BA ipsi AB: igitur ratio ipsius BA ad AΔ data est. & quoniam datus est angulus ΓAB, & datus etiam est angulus ΔAB: reliquus igitur ΓAΔ [per 4. dat.] datus est. angulus autem ΓΔA datus est; quia rectus: quare [per 32.1. & 4. dat.] reliquus AΓΔ datus est: ergo [per 40. dat.] triangulum AΔΓ specie datum est; igitur [per 3. def. dat.] ipsius AΓ ad AΔ data est ratio. data autem est ratio ipsius AΔ ad AB: igitur [per 8. dat.] ratio ipsius ΓA ad AB data est. & [ex hyp.] data est AB; igitur [per 2. dat.] data est AΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νη΄.

Ἐὰν δοθὲν χωρίον παρὰ δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβληθῇ, ἐλλεῖπον εἴδει δεδομένῳ τῷ εἴδει· δέδοται τὰ πλάτη τοῦ ἐλλείμματος.

Δοθὲν γὰρ τὸ ΓΑ παρὰ δοθεῖσαν τὴν ΑΔ παραβεβλήσθω, ἐλλεῖπον εἴδει δεδομένῳ τῷ ΔΓ· λέγω ὅτι δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΒΓ, ΒΔ.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΔ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΔ τῷ μεγέθει. καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΕΔ τῷ ΓΔ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ ΕΖ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα· δέδοται ἄρα τὸ ΕΖ τῷ εἴδει. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ δεδομένης εὐθείας τῆς ΕΔ δεδομένον τῷ εἴδει εἶδος ἀναγέγραπται τὸ ΕΖ· δέδοται ἄρα τὸ ΕΖ τῷ μεγέθει. καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς ΑΓ, ΚΘ· δέδοται ἄρα καὶ τὰ ΑΓ, ΚΘ τῷ μεγέθει. καὶ ἔστι τὸ ΑΓ δοθὲν τῷ μεγέθει, ὑπόκειται γάρ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΘ δοθέν ἐστι τῷ μεγέθει. ἔστι δὲ καὶ τῷ εἴδει δοθὲν, ὅμοιον γάρ ἐστι τῷ ΓΔ· τοῦ ΘΚ ἄρα δεδομέναι εἰσὶν αἱ πλευραί· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΓ. καὶ ἔστιν ἴση τῇ ΕΒ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΕΔ δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΒ δοθεῖσα. καὶ λόγος τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ.



Prop. LVIII.

Si spatium datum ad datam rectam applicetur, deficiens data specie figura; latitudines defectus etiam datæ sunt.

Datum enim spatium ΓA ad datam rectam AΔ applicetur, deficiens data specie figura ΔΓ: dico datam esse utramque rectarum BΓ, BΔ.

Secetur enim [per 10.1.] AΔ bifariam in puncto E: igitur [per 2. dat.] data est EΔ magnitudine. dein describatur [per 18. 6.] ab ipsa EΔ ipsi ΓΔ simile similiterque positum rectilineum EZ, & construatur figura: igitur specie datum est EZ. & quoniam, à data recta EΔ, figura specie data descripta est EZ; figura EZ [per 52. dat.] data est magnitudine. est autem [per 36. & 43. 1.] æqualis ipsis AΓ, KΘ: quare figuræ AΓ, KΘ datæ sunt magnitudine. data vero est figura AΓ magnitudine; supponitur enim: ergo [per 4. dat.] reliqua figura KΘ data est magnitudine. sed & eadem specie data est; similis enim est [per constr.] figuræ ΓΔ: quare [per 55. dat.] ipsius ΘK latera data sunt: adeoque KΓ data est. est autem [per 34. 1.] æqualis ipsi EB: ergo EB data est. data vero est & EΔ: quare [per 4. dat.] & reliqua ΔB data est. sed ratio ipsius BΔ ad BΓ [per 3. def. dat.] data est: ergo [per 2. dat.] BΓ data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νθ΄.

Ἐὰν δοθὲν χωρίον παρὰ δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβληθῇ, ὑπερβάλλον τῷ εἴδει δεδομένῳ εἴδει· δέδοται τὰ πλάτη τῆς ὑπερβολῆς.

Δοθὲν γὰρ τὸ ΑΒ παρὰ δοθεῖσαν τὴν ΑΓ παραβεβλήσθω, ὑπερβάλλον εἴδει δεδομένῳ εἴδει

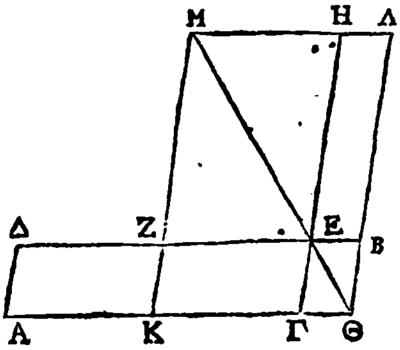
Prop. LIX.

Si spatium datum ad datam rectam applicetur, excedens data specie figura; latitudines excessus etiam datæ sunt.

Datum enim spatium AB ad datam rectam AΓ applicetur, excedens data specie figura ΓB;

ΓΒ: dico datam esse utramque rectarum ΘΓ, ΓΕ.

Secetur enim ΔΕ bifariam in puncto Ζ, & [per 18.6.] describatur ab ΕΖ ipsi ΓΒ simile & similiter positum rectilineum ΖΗ, atque construatur figura. quoniam itaque ΓΒ simile est ipsi ΖΗ; circa eandem igitur diametrum est ΖΗ [per 26. 6.] cum ipso ΓΒ. est autem ΓΒ specie datum: ergo ΖΗ etiam specie datum est. sed & à data recta ΖΕ descriptum est: quare [per 52. dat.] ΖΗ magnitudine datum est. datum autem [ex hyp.] est ΑΒ: ideoque ΑΒ, ΖΗ magnitudine data sunt. ipsis autem ΑΒ, ΖΗ [per 36. & 43.1.] æquale est ΚΛ: ergo [per 3. dat.] ΚΛ magnitudine datum est. sed & specie datum est; simile enim est [per constr.] ipsi ΓΒ: itaque [per 55. dat.] ipsius ΚΛ latera data sunt: ideoque latus ΚΘ datum est. latus autem ΚΓ datum est; æquale enim est [per 34. 1.] ipsi ΖΕ: reliqua igitur recta ΓΘ data est; atque etiam [per 3. def. dat.] rationem datam habet ad ΘΒ: igitur [per 2.dat.] data est ΘΒ.



τῷ ΓΒ· λέγω ὅτι δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΘΓ, ΓΒ.

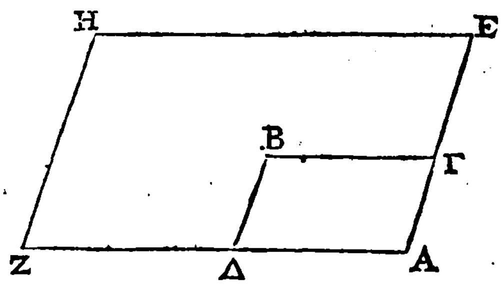
Τετμήσθω γὰρ δίχα ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Ζ σημεῖον, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ΓΒ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ ΖΗ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΓΒ τῷ ΖΗ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗ τῷ ΓΒ. δέδοται δὲ τὸ ΓΒ τῷ εἴδει· δέδοται ἄρα καὶ τὸ ΖΗ τῷ εἴδει. καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ δεδομένης εὐθείας τῆς ΖΕ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗ τῷ μεγέθει. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΒ δοθέν· δοθέντα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΖΗ τῷ μεγέθει. τοῖς δὲ ΑΒ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τὸ ΚΛ· δέδοται ἄρα τὸ ΚΛ τῷ μεγέθει. ἔστι δὲ καὶ τῷ εἴδει, ὅμοιον γάρ ἐστι τῷ ΓΒ· τοῦ ΚΛ ἄρα αἱ πλευραὶ δεδομέναι εἰσὶ τῷ μεγέθει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ. καὶ ἡ ΚΓ δοθεῖσά ἐστιν, ἴση γάρ ἐστι τῇ ΖΕ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΘ δοθεῖσά ἐστι, καὶ λόγον ἔχει πρὸς τὸ ΘΒ δοθέντα· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΘΒ.

PROP. LX.

Si datum specie & magnitudine parallelogrammum dato gnomone augeatur, aut minuatur; latitudines gnomonis datæ sunt.

Parallelogrammum enim ΑΒ specie & magnitudine datum augeatur primum dato gnomone ΕΓΒΔΖΗ: dico utramque rectarum ΓΕ, ΔΖ datam esse.

Quoniam enim datum est ΑΒ, est & gnomon ΕΓΒΔΖΗ datus; igitur spatium totum ΑΗ datum est. sed & specie datum est ΑΗ; est enim [per 26. 6.] simile ipsi ΑΒ: igitur [per 55. dat.] ipsius ΑΗ latera data sunt: quare utraque rectarum ΑΕ, ΑΖ data est. utraque autem rectarum ΓΑ, ΑΔ data est: reliqua igitur, nempe utraque rectarum ΕΓ, ΔΖ, [per 4. dat.] data est.



Rursus vero parallelogrammum ΑΗ, specie & magnitudine datum, minuatur dato gnomone ΕΓΒΔΖΗ: dico datam esse utramque rectarum ΓΕ, ΔΖ.

Quoniam enim datum est ΑΗ, cujus gnomon ΕΓΒΔΖΗ datus est: igitur [per 4. dat.] reliquum ΑΒ magnitudine datum est. sed & specie datum est; etenim [per 26. 6.] simile est ipsi ΗΑ; latera igitur ipsius ΑΒ [per 55. dat.] data sunt: adeoque utraque rectarum ΓΑ, ΑΔ data est. utraque autem rectarum ΕΑ, ΑΖ [ex

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξʹ.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον δεδομένον τῷ εἴδει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένῳ γνώμονι αὐξηθῇ ἢ μειωθῇ, δέδοται τὰ πλάτη τοῦ γνώμονος.

Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ ΑΒ δεδομένον τῷ εἴδει καὶ τῷ μεγέθει ηὐξήσθω πρότερον δεδομένῳ γνώμονι τῷ ΕΓΒΔΖΗ· λέγω ὅτι δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΓΕ, ΔΖ.

Ἐπεὶ γὰρ δοθέν ἐστι τὸ ΑΒ, ἔστι δὲ καὶ ὁ ΕΓΒΔΖΗ γνώμων δοθείς· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΗ δοθέν ἐστι. ἀλλὰ καὶ τῷ εἴδει, ὅμοιον γάρ ἐστι τῷ ΑΒ· τοῦ ΑΗ ἄρα δεδομέναι εἰσὶν αἱ πλευραί· δοθεῖσαι ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΑΖ. ἔστι δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν ΓΑ, ΑΔ δοθεῖσα· λοιπὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ΕΓ, ΖΔ δοθεῖσά ἐστιν.

ΠΑΛΙΝ δὴ παραλληλόγραμμον τὸ ΑΗ δεδομένον τῷ εἴδει καὶ τῷ μεγέθει μεμειώσθω δεδομένῳ γνώμονι τῷ ΕΓΒΔΖΗ· λέγω ὅτι δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΓΕ, ΔΖ.

Ἐπεὶ γὰρ δοθέν ἐστι τὸ ΑΗ, οὗ ὁ ΕΓΒΔΖΗ γνώμων δοθείς ἐστι· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ δοθέν ἐστιν. ἀλλὰ καὶ τῷ εἴδει, ὅμοιον γάρ ἐστι τῷ ΗΑ· τοῦ ΑΒ ἄρα πλευραὶ δεδομέναι εἰσίν· δοθεῖσαι ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΓΑ, ΑΔ. ἔστι δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΑ,

ΑΖ

ΑΖ δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ΕΓ, ΔΖ δοθεῖσά ἐστιν.

hyp.] data est: reliqua igitur, nempe utraque rectarum ΕΓ, ΔΖ, [per 4. dat.] data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξα'.

Ἐὰν δεδομένῳ τῷ εἴδει εἴδους παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν παραλληλόγραμμον χωρίον παραβληθῇ ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ, ἔχῃ δὲ τὸ εἶδος πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον λόγον δεδομένον· δέδοται τὸ παραλληλόγραμμον τῷ εἴδει.

Δεδομένου γὰρ τῷ εἴδει εἴδους τοῦ ΑΖΓΒ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΓΒ παραλληλόγραμμον χωρίον παραβεβλήσθω τὸ ΓΔ ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ, λόγος δὲ ἔστω τοῦ ΑΓ εἴδους πρὸς τὸ ΓΔ δοθείς· λέγω ὅτι δέδοται τὸ ΓΔ τῷ εἴδει.

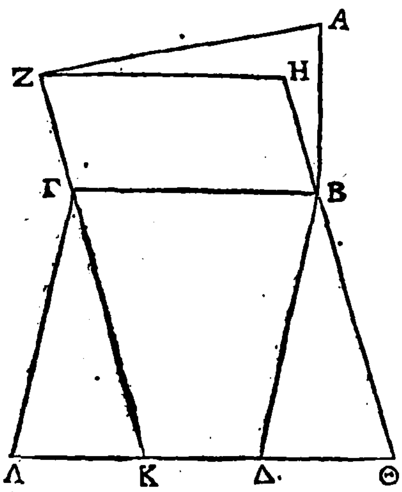
Ἤχθω γὰρ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΖΓ παράλληλος ἡ ΒΗ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΓΒ παράλληλος ΖΗ, καὶ διήχθωσαν αἱ ΖΓ, ΗΒ ἐπὶ τὰ Κ, Θ σημεῖα. ἐπεὶ οὖν δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΖΓΒ γωνία καὶ λόγος ἐστὶ τῆς ΖΓ πρὸς τὴν ΓΒ δοθείς· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΒ παραλληλόγραμμον τῷ εἴδει. δέδοται δὲ τῷ εἴδει τὸ ΑΖΓΒ εἶδος, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΓΒ παραλληλόγραμμον δεδομένον τῷ εἴδει τὸ ΖΒ· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΑΓΖΒ εἴδους πρὸς τὸ ΖΒ παραλληλόγραμμον δοθείς. τοῦ δὲ ΑΓΖΒ πρὸς τὸ ΓΔ λόγος ἐστὶ δοθείς, ἐπειδὴ ὑπόκειται, ἴσον δὲ τὸ ΓΔ τῷ ΚΒ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΚΒ πρὸς τὸ ΓΗ δοθείς, ὥστε καὶ τῆς ΖΓ πρὸς τὴν ΓΚ λόγος ἐστὶ δοθείς. τῆς δὲ ΖΓ πρὸς τὴν ΓΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΓΚ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΖΓΒ γωνία· καὶ ἡ ἐφεξῆς ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΚ δοθεῖσά ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΛ γωνία δοθεῖσα· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΓΚ ἐστὶ δοθεῖσα. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΛΚΓ γωνία δοθεῖσα, ἴση γάρ ἐστι τῇ ὑπὸ ΚΓΒ· λοιπὴ ἄρα ΓΛΚ ἐστὶ δοθεῖσα· δέδοται ἄρα τὸ ΛΚΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΛΓ πρὸς τὴν ΓΚ δοθείς. τῆς δὲ ΓΚ πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΛΓ ἄρα πρὸς τὴν ΓΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΛΓΒ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ εἴδει.

Prop. LXI.

Si ad datæ specie figuræ unum latus applicetur spatium parallelogrammum in angulo dato, habeat autem data figura ad parallelogrammum rationem datam; parallelogrammum ipsum specie datum est.

Ad unum enim latus ΓΒ datæ specie figuræ ΑΖΓΒ applicetur parallelogrammum spatium ΓΔ in angulo dato ΛΓΒ, sitque ratio figuræ ΑΓ ad parallelogrammum ΓΔ data: dico ipsum ΓΔ specie datum esse.

Agatur enim [per 31. 1.] per punctum Β ipsi ΖΓ parallela ΒΗ, per punctum autem Ζ ipsi ΓΒ parallela ΖΗ, & producantur ΖΓ, ΗΒ ad puncta Κ, Θ. quoniam itaque [per 3. def. dat.] datus est angulus ΖΓΒ, & ratio ipsius ΖΓ ad ΓΒ data est; parallelogrammum ΖΒ specie datum est. est autem figura ΑΖΓΒ specie data, atque descriptum est ab eadem recta ΓΒ datum specie parallelogrammum ΖΒ: quare [per 49. dat.] ratio figuræ ΑΓΖΒ ad parallelogrammum ΖΒ data est. data autem est ratio ipsius ΑΓΖΒ ad ΓΔ, quoniam ita supponitur; est etiam [per 35. 1.] ΓΔ æquale ipsi ΚΒ: quare [per 8. dat.] & ratio ipsius ΚΒ ad ΓΗ data est; adeoque [per 1. 6.] & ratio rectæ ΖΓ ad ΓΚ data est. ipsius autem ΖΓ ad ΓΒ [per 3. def. dat.] data est ratio; ergo [per 8. dat.] & ratio ipsius ΒΓ ad ΓΚ data est. quoniam vero datus est angulus ΖΓΒ, etiam [per 13. 1. & 4. dat.] & qui deinceps est angulus ΒΓΚ datus est. angulus autem ΒΓΛ [ex hyp.] datus est: reliquus igitur ΛΓΚ [per 4. dat.] datus est. angulus item ΛΚΓ datus est; æqualis enim est [per 29. 1.] angulo ΚΓΒ: ergo reliquus angulus ΓΛΚ [per 32. 1. & 4. dat.] datus est: triangulum igitur ΛΚΓ [per 40. dat.] specie datum est: quare [per 3. def. dat.] ratio ipsius ΛΓ ad ΓΚ data est. ipsius autem ΓΚ ad ΒΓ data est ratio: igitur [per 1. dat.] & ratio ipsius ΛΓ ad ΓΒ data est. & datus est [ex hyp.] angulus ΛΓΒ: itaque [per 3. def. dat.] parallelogrammum ΓΔ specie datum est.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξβ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον, καὶ ἀναγραφῇ ἀπὸ μὲν μιᾶς δεδομένον τῷ εἴδει εἶδος, ἀπὸ δὲ τῆς ἑτέρας χωρίον παραλληλόγραμμον ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ, ἔχῃ δὲ

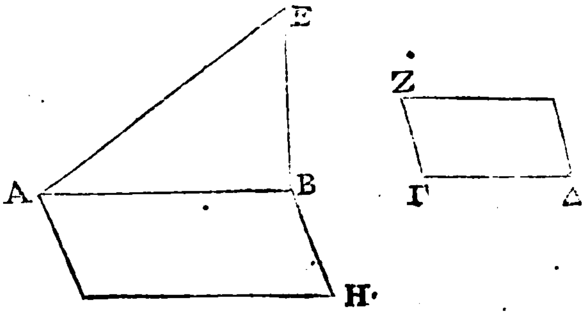
Prop. LXII.

Si duæ rectæ ad invicem habeant rationem datam, & ab una quidem data specie figura descripta sit, ab altera autem spatium parallelogrammum in angulo dato, habeat etiam figuræ gura ad parallelogrammum rationem datam; parallelogrammum ipſum ſpecie datum eſt.

τὸ εἶδος πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον λόγον δεδομένον· δέδοται τὸ παραλληλόγραμμον τῷ εἴδει.

DUÆ enim rectæ AB, ΓΔ habeant ad invicem rationem datam, & deſcribatur à recta quidem AB data ſpecie figura AEB, à recta autem ΓΔ parallelogrammum ΔZ in angulo ZΓΔ dato, ſit etiam ratio ipſius AEB ad parallelogrammum ZΔ data: dico parallelogrammum ΔZ ſpecie datum eſſe.

Deſcribatur enim [per 18.6.] à recta AB ipſi ZΔ ſimile ſimiliterque poſitum parallelogrammum AH. quoniam igitur ratio ipſius AB ad ΓΔ data eſt, atque deſcripta ſunt à rectis AB, ΓΔ ſimilia ſimiliterque poſita rectilinea AH, ZΔ; ratio ipſius AH ad ZΔ [per 50. dat.] data eſt. ratio autem ipſius ZΔ ad AEB [ex hyp.] data eſt: quare [per 8 dat.] & ratio ipſius AEB ad AH data eſt. ſed & datus eſt angulus ABH; ſiquidem æqualis eſt [per conſtr.] angulo ZΓΔ: quoniam igitur figura AEB ſpecie data eſt, & ad unum ejus latus AB applicatum eſt parallelogrammum AH in angulo dato ABH; & ratio figuræ AEB ad parallelogrammum AH [per 49. dat.] data eſt; ipſum igitur AH [per 61. dat.] ſpecie datum eſt. ſimile autem eſt [per conſtr.] ipſi ZΔ: quare & parallelogrammum ZΔ [per 3. def. dat.] ſpecie datum eſt.



Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ AB, ΓΔ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ μὲν τῆς AB δεδομένον τῷ εἴδει εἶδος τὸ AEB, ἀπὸ δὲ τῆς ΓΔ παραλληλόγραμμον τὸ ΔZ ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ZΓΔ, λόγος δὲ ἔστω τοῦ AEB εἴδους πρὸς τὸ ZΔ παραλληλόγραμμον δοθείς· λέγω ὅτι δέδοται τὸ ΔZ παραλληλόγραμμον τῷ εἴδει.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τῷ ZΔ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ AH. καὶ ἐπεὶ λόγος τῆς AB πρὸς τὴν ΓΔ δοθείς ἐστι, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ τῶν AB, ΓΔ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ AH, ZΔ· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ AH πρὸς τὸ ZΔ δοθείς. τοῦ δὲ ZΔ πρὸς τὸ AEB λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ AEB ἄρα πρὸς τὸ AH λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ABH γωνία, ἴση γάρ ἐστι τῇ ὑπὸ ZΓΔ· ἐπεὶ οὖν δεδομένου τῷ εἴδει εἴδους τοῦ AEB παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν AB παραβέβληται τὸ AH ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ABH, καὶ λόγος ἐστὶ τοῦ AEB εἴδους πρὸς τὸ AH παραλληλόγραμμον δοθείς· δέδοται ἄρα τὸ AH τῷ εἴδει. καὶ ἔστιν ὅμοιον τῷ ZΔ· δέδοται ἄρα καὶ τὸ ZΔ τῷ εἴδει.

Prop. LXIII.

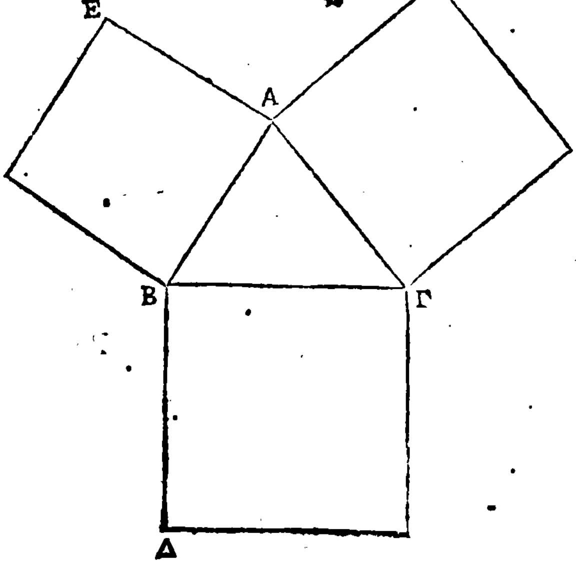
Si triangulum ſit ſpecie datum; quod ab unoquoque laterum deſcribitur quadratum ad triangulum habebit rationem datam.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξγ'.

Ἐὰν τρίγωνον τῷ εἴδει δεδομένον ᾖ, τὸ ἀπὸ ἑκάστης τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τετράγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον λόγον ἕξει δεδομένον.

SIT triangulum ABΓ ſpecie datum, & deſcribantur ab unoquoque laterum ipſius quadrata EB, ΓΔ, ΓZ: dico unumquodque quadratorum EB, ΓΔ, ΓZ ad triangulum ABΓ rationem datam habere.

Quoniam enim ab eadem recta BΓ rectilinea quædam ſpecie data deſcripta ſunt ABΓ, ΓΔ; igitur [per 49. dat.] ratio ipſius ABΓ



Ἔστω τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει τὸ ABΓ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ ἑκάστης τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τετράγωνα τὰ EB, ΓΔ, ΓZ· λέγω ὅτι ἕκαστον τῶν EB, ΓΔ, ΓZ πρὸς τὸ ABΓ τρίγωνον λόγον ἕξει δεδομένον.

Ἐπεὶ γὰρ ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς BΓ εὐθύγραμμα δεδομένα τῷ εἴδει ἀναγέγραπται ἃ ἔτυχε, τὰ ABΓ, ΓΔ· λόγος ἄρα τοῦ ABΓ πρὸς

πρὸς τὸ ΓΔ δοθείς. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρου τῶν ΕΒ, ΖΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς.

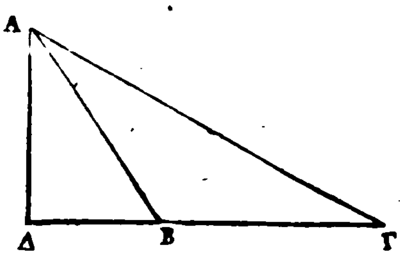
ad ΓΔ data est. similiter quoque utriusque quadratorum ΕΒ, ΖΓ ad triangulum ΑΒΓ ratio data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξδ'.

Ἐὰν τρίγωνον ἀμβλεῖαν ἔχῃ γωνίαν δεδομένην· ᾧ μεῖζον δύναται ἡ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτείνουσα πλευρὰ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ τρίγωνον λόγον ἕξει δεδομένον.

Ἔστω τρίγωνον ἀμβλυγώνιον τὸ ΑΒΓ, ἀμβλεῖαν ἔχον γωνίαν τὴν ὑπὸ ΑΒΓ δεδομένην, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῆς ΒΓ εὐθεῖα ἡ ΒΔ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΔΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, τουτέστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

Ἐπεὶ γὰρ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ δοθεῖσά ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ δοθεῖσα· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΒ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ δοθείς. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ δοθείς· καὶ τοῦ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΒΓ δοθείς. ἀλλὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΒΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἐκεῖνο ἄρα τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.



Prop. LXIV.

Si triangulum angulum obtusum datum habeat; illud spatium, quo latus angulum obtusum subtendens magis potest quam latera obtusum angulum ambientia, ad triangulum habebit rationem datam.

SIT triangulum obtusangulum ΑΒΓ, quod angulum obtusum ΑΒΓ datum habeat; & producatur in directum ipsi ΒΓ recta ΒΔ, & à puncto Α ad rectam ΔΓ perpendicularis agatur ΑΔ: dico quod spatium, quo quadratum rectæ ΑΓ excedit quadrata rectarum ΑΒ, ΒΓ, hoc est rectangulum quod bis continetur sub ΔΒ, ΒΓ, ad triangulum ΑΒΓ habebit rationem datam.

Quoniam enim angulus ΑΒΓ datus est, etiam & ΑΒΔ [per 13.1. & 4.dat.] datus erit. verum & est angulus ΑΔΒ datus; igitur [per 32. 1. & 4. dat.] & reliquus ΔΑΒ datus erit: quare [per 40. dat.] & triangulum ΑΒΔ specie datum est: ratio igitur ipsius ΑΔ ad ΔΒ [per 3. def. dat.] data est. estque [per 1. 6.] ut ΑΔ ad ΔΒ ita quod continetur sub ΑΔ, ΒΓ ad id quod sub ΔΒ, ΒΓ continetur: ergo ratio ejus quod continetur sub ΑΔ, ΒΓ ad id quod sub ΔΒ, ΒΓ continetur data est: quare ratio ejus quod bis continetur sub ΔΒ, ΒΓ ad id quod continetur sub ΑΔ, ΒΓ data est. sed [per 41. 1.] id quod continetur sub ΑΔ, ΒΓ ad triangulum ΑΒΓ habet rationem datam: itaque [per 8. dat.] ratio ejus quod bis continetur sub ΔΒ, ΒΓ ad triangulum ΑΒΓ data est. quod vero bis continetur sub ΔΒ, ΒΓ [per 12. 2.] est spatium quo quadratum rectæ ΑΓ excedit quadrata rectarum ΑΒ, ΒΓ: igitur spatium istud ad triangulum ΑΒΓ rationem habet datam.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξε'.

Ἐὰν τρίγωνον ὀξεῖαν ἔχῃ γωνίαν δεδομένην· ᾧ ἔλασσον δύναται ἡ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτείνουσα πλευρὰ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν, ἐκεῖνο χωρίον πρὸς τὸ τρίγωνον λόγον ἕξει δεδομένον.

Ἔστω τρίγωνον ὀξυγώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀξεῖαν ἔχον γωνίαν δεδομένην τὴν ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ΑΔ· λέγω ὅτι ᾧ ἔλασσόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, τουτέστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ, πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

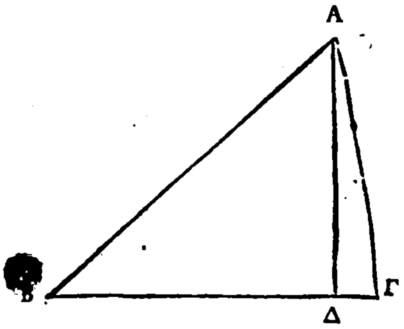
Prop. LXV.

Si triangulum angulum acutum datum habeat; illud spatium, quo latus angulum acutum subtendens minus potest quam latera angulum acutum ambientia, habebit ad triangulum rationem datam.

SIT triangulum acutangulum ΑΒΓ, quod datum angulum acutum habeat ΑΒΓ; & agatur à puncto Α ad ΒΓ perpendicularis ΑΔ: dico quod spatium, quo minus est quadratum rectæ ΑΓ quam quadrata linearum ΑΒ, ΒΓ, hoc est id quod bis continetur sub ΓΒ, ΒΔ, habet ad triangulum ΑΒΓ rationem datam.

 Quo-

Quoniam enim angulus ABΔ [ex hyp.] datus est, estque etiam angulus AΔB datus; reliquus igitur BAΔ [per 32.1.& 4.dat.] datus est: itaq; [per 40. dat.] triangulum ABΔ specie datum est: quare [per 3. def. dat.] ratio ipsius BΔ ad ΔA data est: ideoque [per 1.6.] & ejus quod continetur sub ΓB, BΔ ad id quod continetur sub ΓB, AΔ data est ratio: ergo & ejus quod bis continetur sub ΓB, BΔ ad id quod sub ΓB, AΔ data est ratio. sed [per 41.1.] ejus quod continetur sub BΓ, AΔ ad triangulum ABΓ data ratio est: quare [per 8. dat.] & ejus quod bis continetur sub ΓB, BΔ ad triangulum ABΓ ratio est data. verum [per 13. 2.] quod bis continetur sub ΓB, BΔ est id quo quadratum rectæ AΓ minus est quam quadrata rectarum AB, BΓ: igitur illud spatium, quo minus est quadratum rectæ AΓ quam quadrata rectarum AB, BΓ, ad triangulum ABΓ habebit rationem datam.



Ἐπεὶ γὰρ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ABΔ γωνία, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ AΔB δοθεῖσα· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ BAΔ ἐστὶ δοθεῖσα· δέδοται ἄρα τὸ ABΔ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα τῆς BΔ πρὸς τὴν ΔA δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΓB, BΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓB, AΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΓB, BΔ ἄρα πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓB, AΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἀλλὰ καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν BΓ, AΔ πρὸς τὸ ABΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΓB, BΔ ἄρα πρὸς τὸ ABΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΓB, BΔ ᾧ ἔλασσόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς AΓ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BΓ· ᾧ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς AΓ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BΓ, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ABΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

Prop. LXVI.

Si triangulum habuerit angulum datum; quod sub rectis datum angulum comprehendentibus continetur rectangulum habebit ad triangulum rationem datam.

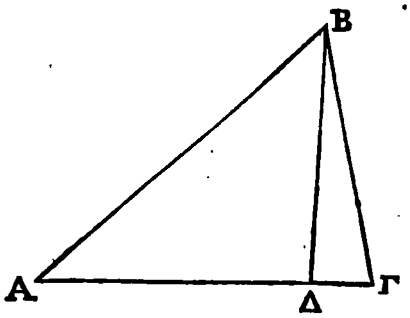
SIT triangulum ABΓ, quod datum angulum habeat ad A: dico rectangulum sub BA, AΓ comprehensum habere ad triangulum ABΓ rationem datam.

Agatur enim [per 12. 1.] à puncto B ad rectam AΓ perpendicularis BΔ. quoniam itaque angulus BAΓ datus est, atque etiam angulus BΔA datus est; reliquus quoque ABΔ [per 32. 1. & 4. dat.] datus est: ergo [per 40. dat.] triangulum ABΔ specie datur; quare ipsius AB ad BΔ data est ratio. ut autem AB ad BΔ ita [per 1. 6.] rectangulum sub BA, AΓ ad rectangulum sub BΔ, AΓ: igitur rectanguli sub BA, AΓ ad rectangulum sub BΔ, AΓ ratio est data. atqui rectanguli sub BΔ, AΓ ad triangulum ABΓ data est ratio: igitur [per 8.dat.] ratio rectanguli sub BA, AΓ ad triangulum ABΓ data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξϛʹ.

Ἐὰν τρίγωνον δεδομένην ἔχῃ γωνίαν· τὸ ὑπὸ τῶν τὴν δεδομένην γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν ὀρθογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον λόγον ἕξει δεδομένον.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ABΓ δεδομένην ἔχον γωνίαν τὴν πρὸς τῷ A· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν BA, AΓ πρὸς τὸ ABΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.



Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ B ἐπὶ τὴν AΓ κάθετος ἡ BΔ. ἐπεὶ οὖν δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ BAΓ γωνία, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ BΔA δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ABΔ γωνία δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ABΔ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς AB πρὸς τὴν BΔ δοθείς. ὡς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν BΔ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν BA, AΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν BΔ, AΓ· καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν BA, AΓ ἄρα πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν BΔ, AΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν BΔ, AΓ πρὸς τὸ ABΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν BA, AΓ ἄρα πρὸς τὸ ABΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς.

Prop. LXVII.

Si triangulum habuerit angulum datum; illud spatium, quo duo datum angulum comprehendentia latera, tanquam una recta, plus possunt quam quadratum à reliquo latere, ad triangulum habebit rationem datam.

SIT triangulum ABΓ, quod angulum BAΓ datum habeat: dico quod illud spatinm, quo

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξζʹ.

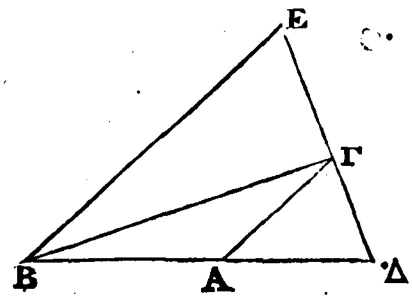
Ἐὰν τρίγωνον δεδομένην ἔχῃ γωνίαν· ᾧ μεῖζον δύναται αἱ τὴν δεδομένην γωνίαν περιέχουσαι πλευραί, ὡς μία, τοῦ ἀπὸ τῆς λοιπῆς, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ τρίγωνον λόγον ἕξει δεδομένον.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ABΓ δεδομένην ἔχον γωνίαν τὴν ὑπὸ BAΓ· λέγω ὅτι ᾧ μεῖζόν ἐστι

τὸ

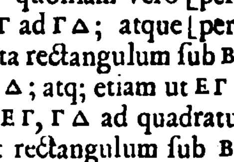
τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἕξει δεδομένον.

Διήχθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῆς ΒΑ εὐθεῖα ἡ ΑΔ, καὶ κείσθω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΓ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Β τῇ ΑΓ παράλληλος ἡ ΒΕ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΓ· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΕ. καὶ διῆκται ἡ ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΕ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ. ἴση δὲ ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῆς ΒΓ· ὥστε τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ, τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ μεῖζον εἶναι τῷ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΕ. λέγω δὴ ὅτι τοῦ ὑπὸ τῆς ΔΓ, ΓΕ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ γὰρ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία, ἡ ἐφεξῆς ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶ δοθεῖσα. ἐστὶ δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΔΓ, ΔΓΑ δοθεῖσα, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἡμίσειά ἐστι τῆς ὑπὸ ΒΑΓ δεδομένης οὔσης· δέδοται ἄρα τὸ ΔΑΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΔ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ, ὡς δὲ ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ. λόγος δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ δοθείς. ἴση δὲ ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ δοθείς. τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ΒΑΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς, διὰ τὸ δοθεῖσαν εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΕ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ



majus est quadratum abs simul utraque ΒΑΓ quam quadratum à recta ΒΓ, ad triangulum ΑΒΓ habebit rationem datam.

Producatur enim in directum ipsi ΒΑ recta ΑΔ, & [per 3. 1.] fiat ipsi ΑΓ æqualis ΑΔ, & connexa recta ΔΓ producatur ad punctum Ε; & [per 31. 1.] agatur per punctum Β ipsi ΑΓ parallela ΒΕ. & quoniam æqualis est ΑΔ ipsi ΑΓ: æqualis quoque [per 4.6. & 14.5.] est ΔΒ ipsi ΒΕ. educta autem est quædam recta ΒΓ: igitur * quod continetur sub ΔΓ, ΓΕ una cum quadrato rectæ ΒΓ æquale est quadrato rectæ ΒΔ. est autem ΔΑ ipsi ΑΓ æqualis: ergo quod ab utraque simul ΒΑΓ quadratum æquale est est ei quod continetur sub ΔΓ, ΓΕ una cum quadrato rectæ ΒΓ; ideoque & quod ab utraque simul ΒΑΓ, hoc est quadratum à recta ΒΔ, majus est quam quadratum rectæ ΒΓ eo quod continetur sub ΔΓ, ΓΕ. dico jam quod ratio rectanguli sub ΔΓ, ΓΕ ad triangulum ΑΒΓ data est. quoniam enim datus est angulus ΒΑΓ; & qui deinceps est ΔΑΓ [per 13. 1. & 4. dat.] datus est. uterque autem angulorum ΑΔΓ, ΔΓΑ datus est; etenim [per 5. & 32. 1.] uterque dimidius est anguli ΒΑΓ, qui [ex hyp.] datus est: quare [per 40. dat.] triangulum ΔΑΓ specie datum est: ergo [per 3. def. dat.] ratio ipsius ΑΔ ad ΔΓ data est: ideoque [per 50. dat.] & ejus quod à recta ΑΔ ad id quod à ΔΓ describitur quadratum ratio est data. quoniam vero [per 2. 6.] ut ΒΑ ad ΑΔ ita est ΕΓ ad ΓΔ; atque [per 1. 6.] ut ΒΑ quidem ad ΑΔ ita rectangulum sub ΒΑ, ΑΔ ad quadratum rectæ ΑΔ; atq; etiam ut ΕΓ ad ΓΔ ita rectangulum sub ΕΓ, ΓΔ ad quadratum rectæ ΓΔ: erit igitur ut rectangulum sub ΒΑ, ΑΔ ad quadratum ex ΑΔ ita rectangulum sub ΕΓ, ΓΔ ad quadratum ex ΓΔ; ideoque permutando [per 16.5.] ut id quod continetur sub ΒΑ, ΑΔ ad id quod continetur sub ΕΓ, ΓΔ ita erit quod à recta ΑΔ ad id quod à recta ΓΔ describitur quadratum. ratio autem quadrati rectæ ΑΔ ad quadratum rectæ ΔΓ data est: igitur & ratio ejus quod continetur sub ΒΑ, ΑΔ ad id quod sub ΕΓ, ΓΔ continetur data est. æqualis autem est [per constr.] ΔΑ ipsi ΑΓ: igitur & ratio ejus quod continetur sub ΒΑ, ΑΓ ad id quod sub ΕΓ, ΓΔ continetur data est. ratio autem rectanguli sub ΒΑ, ΑΓ ad triangulum ΒΑΓ [per 66.dat.] data est, quia datus est angulus ΒΑΓ: quare [per 8.dat.] & ratio rectanguli sub ΕΓ, ΓΔ ad triangulum ΑΒΓ data est. & est [per supra ostensa] rectangulum sub ΔΓ, ΓΕ id quo quadratum ab utraque simul ΒΑΓ majus est quam quadra-



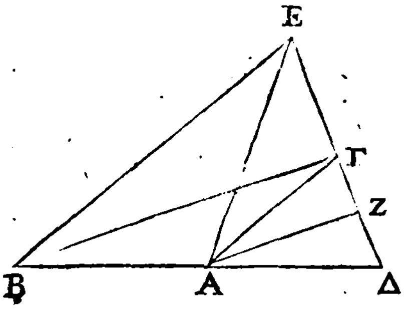
* Quod rectangulum sub ΔΓ, ΓΕ una cum quadrato rectæ ΒΓ æqualis sit quadrato rectæ ΒΔ sic ostenditur. Dividatur ΔΕ bifariam in Ζ, & jungatur ΒΖ; quæ [per 8. 1.] normalis erit in ΔΕ. Rectangulum sub ΔΓ, ΓΕ una cum quadrato rectæ ΓΖ [per 5. 2.] æquale est quadrato rectæ ΔΖ. Addatur commune quadratum rectæ ΒΖ: erit igitur rectangulum sub ΔΓ, ΓΕ una cum quadratis rectarum ΓΖ, ΒΖ æquale quadratis rectarum ΔΖ, ΒΖ. Sed [per 47.1.] quadrata rectarum ΓΖ, ΒΖ æqualia sunt quadrato rectæ ΒΓ; & quadrata rectarum ΔΖ, ΒΖ quadrato ipsius ΒΔ: Rectangulum igitur sub ΔΓ, ΓΕ una cum quadrato rectæ ΒΓ æquale est quadrato rectæ ΒΔ.

tum rectæ ΒΓ: igitur quo majus eſt quadratum ab utraque ſimul ΒΑΓ quam quadratum rectæ ΒΓ, illud ſpatium ad triangulum ΑΒΓ rationem datam habebit.

ΒΓ· ᾧ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

ALITER.

Conſtruantur eadem quæ prius, & [per 12.1.] agatur à puncto Α ad ΓΔ perpendicularis ΑΖ, atque connectatur ΑΕ. & quoniam datus eſt angulus ΒΑΓ, cujus [per 5. & 32.1.] dimidius eſt angulus ΑΓΖ; atque etiam datus eſt angulus ΑΖΓ: triangulum igitur ΑΖΓ [per 40. dat.] ſpecie datum eſt: itaque [per 3. def. dat.] ipſius ΑΖ ad ΖΓ ratio eſt data. ipſius autem ΖΓ ad ΓΔ ratio eſt data, quia hæc illius eſt dupla: ergo [per 8.dat.] ipſius ΔΓ ad ΑΖ data eſt ratio: ideoque [per 1.6.] ejus quod continetur ſub ΕΓ, ΓΔ ad id quod continetur ſub ΑΖ, ΓΕ data eſt ratio. verum ejus quod continetur ſub ΑΖ, ΓΕ ad triangulum ΑΓΕ ratio eſt data; etenim [per 41. 1.] trianguli duplum eſt: itaque [per 8. dat.] ejus quod continetur ſub ΕΓ, ΓΔ ad triangulum ΑΓΕ data eſt ratio. eſt autem [per 37. 1.] triangulum ΑΓΕ triangulo ΑΒΓ æquale; in eadem enim baſi ΑΓ conſiſtit utrumque & in iiſdem parallelis ΑΓ, ΒΕ: quare [per 8. dat.] & ejus quod continetur ſub ΕΓ, ΓΔ ad triangulum ΑΒΓ data eſt ratio. eſt autem [per not. ad præc. demonſtrationem] id quod continetur ſub ΕΓ, ΓΔ illud ſpatium, quo quadratum utriuſq; ſimul ΒΑΓ excedit quadratum rectæ ΒΓ: ergo quo quadratum utriuſque ſimul ΒΑΓ excedit quadratum rectæ ΒΓ, illud ſpatium ad triangulum ΑΒΓ rationem habet datam.



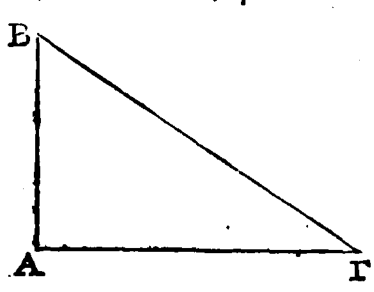
ΑΛΛΩΣ.

Κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἡ ΑΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία, καί ἐστιν αὐτῆς ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΑΓΖ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΖΓ δοθεῖσα· δέδοται ἄρα τὸ ΑΖΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΖ πρὸς τὴν ΖΓ δοθείς. τῆς δὲ ΖΓ πρὸς τὴν ΓΔ λόγος ἐστὶ δοθείς, διπλασίων γάρ ἐστιν αὐτῆς· καὶ τῆς ΔΓ ἄρα πρὸς τὴν ΑΖ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΓΕ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΓΕ πρὸς τὸ ΑΓΕ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς, διπλάσιον γάρ ἐστιν αὐτοῦ· καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ΑΓΕ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς. ἴσον δὲ τὸ ΑΓΕ τρίγωνον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΓ εἰσὶ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΓ, ΒΕ· καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς. καί ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ, ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ· ᾧ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

ALITER.

Aut enim angulus ad Α rectus eſt, aut acutus, aut obtuſus.

Eſto primum rectus: ergo quadratum utriuſque ſimul ΒΑΓ [per 47.1. & 4.2.] excedit quadratum rectæ ΒΓ eo quod bis continetur ſub ΒΑ, ΑΓ. eſt autem [per 66. dat.] ratio rectanguli ſub ΒΑ, ΑΓ ad triangulum ΑΒΓ data, propter datum angulum ΒΑΓ: quare etiam ratio ejus quod bis continetur ſub ΒΑ, ΑΓ ad triangulum ΑΒΓ data eſt.



Dein ſit angulus ΒΑΓ acutus, & à puncto Γ in rectam ΑΒ agatur perpendicularis ΓΔ. quoniam vero triangulum ΑΒΓ acutangulum eſt, & perpendicularis acta eſt ΓΔ; rectarum igitur ΑΒ, ΑΓ quadrata æqualia ſunt [per 13.2.] & quadrato rectæ ΒΓ & rectangulo quod bis continetur ſub ΒΑ, ΑΔ. addatur commune, ſc. duplum rectangulum ſub ΒΑ, ΑΓ: ergo quadrata rectarum ΒΑ, ΑΓ cum eo quod bis continetur ſub rectis ΒΑ,

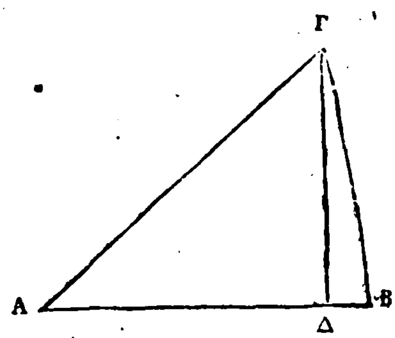
ΑΛΛΩΣ.

Ἤτοι γὰρ ἡ πρὸς τῷ Α γωνία ὀρθή ἐστιν, ἢ ὀξεῖα, ἢ ἀμβλεῖα.

Ἔστω πρότερον ὀρθή· τὸ ἄρα ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ ὑπερέχει τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. ἔστι δὲ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος δοθείς, διὰ τὸ δοθεῖσαν εἶναι τὴν ΒΑΓ γωνίαν· τοῦ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς.

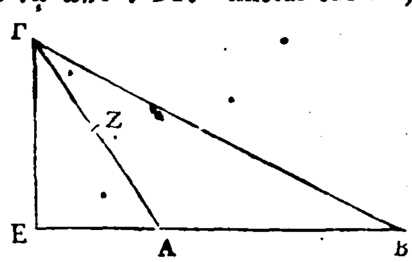
Ἔστω δὴ ὀξεῖα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἡ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ ὀξυγώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ κάθετος ἦκται ἡ ΓΔ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΑΓ ἴσα ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ΒΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ. κοινὸν προσκείσθω τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ, ἴσα ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ΒΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ, καὶ ἔτι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, τουτέστι τῷ δὶς ὑπὸ τῆς ΓΑΔ καὶ τῆς ΒΑ· ὥστε τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΓΑΔ καὶ τῆς ΒΑ. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία, ἔστι δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΓ δοθεῖσα· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς ΑΓΔ δοθεῖσά ἐστιν· δέδοται ἄρα τὸ ΑΔΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΑΓ δοθείς· ὥστε καὶ συναμφοτέρου τῆς ΔΑΓ πρὸς τὴν ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου ἄρα τῆς ΔΑΓ καὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ δὶς ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΑΓ καὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς, διὰ δοθεῖσαν εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· καὶ τοῦ δὶς ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΑΓ καὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς.

ΑΓ, hoc est [per 4. 2.] quadratum utriusque simul ΒΑΓ, æqualia sunt quadrato rectæ ΒΓ & ei quod bis continetur sub ΒΑ, ΑΔ, & insuper ei quod bis continetur sub ΒΑ, ΑΓ; hoc est [per 2. 2.] ei quod bis continetur sub utraque simul ΓΑΔ & recta ΒΑ: ideoque quadratum utriusque simul ΒΑΓ excedit quadratum rectæ ΒΓ eo quod bis sub utraque simul ΓΑΔ & recta ΒΑ continetur. quoniam vero [ex hyp.] datus est angulus ΒΑΓ, atque etiam angulus ΑΔΓ datus est: reliquus igitur angulus ΑΓΔ [per 32. 1. & 4. dat.] est datus: quare [per 40. dat.] triangulum ΑΔΓ specie datum est: ergo ratio ipsius ΑΔ ad ΑΓ data est: adeoque [per 6.dat.] ratio utriusque simul ΔΑΓ ad ΑΓ data est: igitur [per 1. 6.] rectanguli sub utraque simul ΔΑΓ & ΑΒ ad rectangulum sub ΒΑ, ΑΓ data est ratio: & ideo ratio ejus quod bis continetur sub ΔΑΓ & ΑΒ ad id quod continetur sub ΒΑ, ΑΓ etiam datur. ratio autem ejus quod continetur sub ΒΑ, ΑΓ ad triangulum ΑΒΓ [per 66.dat.] data est, propter datum angulum ΒΑΓ: igitur [per 8.dat.] ratio ejus quod bis continetur sub utraque simul ΔΑΓ & recta ΑΒ ad triangulum ΑΒΓ data est.

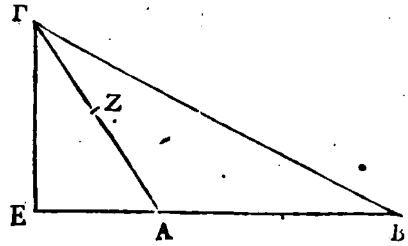


Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἀμβλεῖα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, καὶ ἐκβεβληθείσης τῆς ΒΑ ἐπὶ τὸ Ε, ἤχθω ἐπ᾽ αὐτὴν ἀπὸ τοῦ Γ κάθετος ἡ ΓΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΕ ἴση ἡ ΑΖ. ἐπεὶ οὖν ἀμβλεῖά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία, καὶ κάθετος ἦκται ἡ ΓΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ, τουτέστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΖ, ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ. κοινὸν προσκείσθω τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, τουτέστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΖ, ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΖ· τὸ ἄρα συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΓΖ· ὥστε τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ ὑπερέχειν τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΓΖ. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία, καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΓ ἄρα δοθεῖσά ἐστιν. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΕΑ δοθεῖσά ἐστι· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΕ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΓΕ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα τῆς ΓΑ πρὸς τὴν ΑΕ δοθείς, τουτέστι καὶ πρὸς τὴν ΑΖ· ὥστε καὶ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΖ λόγος ἐστὶ δοθείς. τῆς δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΕΓ ἄρα πρὸς τὴν ΓΖ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε τοῦ ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν

Sit denique angulus ΒΑΓ obtusus; atque producta recta ΒΑ ad punctum Ε, in illam ex Γ agatur perpendicularis ΓΕ, ponaturque ipsi ΑΕ æqualis ΑΖ. quoniam igitur angulus ΒΑΓ est obtusus, & perpendicularis acta est ΓΕ: quadrata igitur rectarum ΒΑ, ΑΓ cum eo quod bis continetur sub ΒΑ, ΑΕ, hoc est quod bis continetur sub ΒΑ, ΑΖ, æqualia sunt [per 13. 2.] quadrato rectæ ΒΓ. addatur commune rectangulum, quod sc. bis continetur sub ΒΑ, ΑΓ: ergo quadrata rectarum ΒΑ, ΑΓ cum eo quod bis continetur sub ΒΑ, ΑΓ, hoc est [per 4.2.] quadratum utriusque simul ΒΑΓ cum eo quod bis continetur sub ΒΑ, ΑΖ, æqualia sunt quadrato rectæ ΒΓ & ei quod bis continetur sub ΒΑ, ΑΓ. auferatur commune rectangulum quod bis continetur sub ΒΑ, ΑΖ: ergo quod ab utraque simul ΒΑΓ quadratum æquale est quadrato rectæ ΒΓ & [per 3.2.] ei quod bis continetur sub ΒΑ, ΓΖ: ideoque quadratum utriusque simul ΒΑΓ excedit quadratum rectæ ΒΓ eo quod bis continetur sub ΒΑ, ΓΖ. quoniam vero angulus ΒΑΓ datus est, angulus etiam ΕΑΓ [per 13.1. & 4.dat.] datus est. sed & angulus ΓΕΑ datus est; ergo [per 32. 1. & 4. dat.] reliquus quoque angulus ΑΓΕ datus est: triangulum igitur ΑΓΕ [per 40.dat.] specie datum est: quare [per 3.def.dat.] & ipsius ΓΑ ad ΑΕ, id est ad ΑΖ, data est ratio: ideoque [per 5.dat.] ipsius ΑΓ ad ΓΖ data est ratio. ipsius autem ΑΓ ad ΓΕ data est ratio: igitur [per 8.dat.] ratio ipsius ΕΓ ad ΓΖ data est: quare [per 1.6.] ratio ejus quod continetur sub ΕΓ, ΑΒ ad id quod continetur



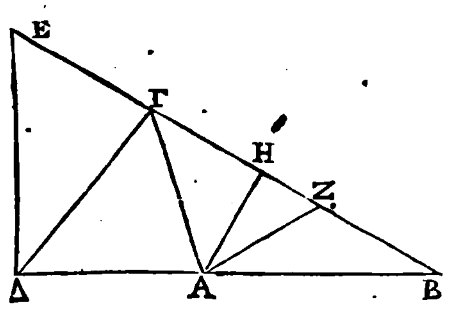
sub ΓΖ, ΑΒ data est. ejus autem quod continetur sub ΑΓ, ΑΒ ad id quod continetur sub ΕΓ, ΑΒ [per 1.6.] ratio est data: ideoque [per 8.dat.] ejus quod sub ΑΓ, ΑΒ ad id quod sub ΓΖ, ΑΒ data est ratio. at vero ratio ejus quod continetur sub ΑΓ, ΑΒ ad triangulum ΑΒΓ [per 66. dat.] data est: illius igitur quod bis continetur sub ΓΖ, ΑΒ ad triangulum ΑΒΓ ratio [per 8.dat.] data est. verum [ex suprà ostensis] rectangulum quod bis continetur sub ΓΖ, ΑΒ illud est quo quadratum utriusque simul ΒΑΓ excedit quadratum rectæ ΒΓ: quo igitur quadratum utriusque simul ΒΑΓ excedit quadratum rectæ ΒΓ, illud spatium ad triangulum ΑΒΓ rationem habet datam.



ΓΖ, ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΑΒ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΑΒ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΑΒ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ· ᾧ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

ALITER.

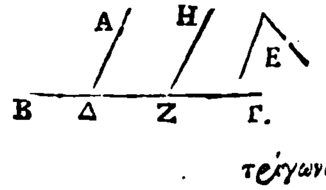
Producatur recta ΒΑ ad punctum Δ, & ponatur ipsi ΓΑ æqualis ΑΔ, connectaturque ΓΔ. quoniam itaque [ex hyp.] datus est angulus ΒΑΓ, & ejus dimidius est [per 5. & 32.1.] uterque angulorum ΑΔΓ, ΑΓΔ; uterque angulorum ΑΔΓ, ΑΓΔ datus est: ergo [per 32. 1. & 4. dat.] & reliquus ΔΑΓ datus est: quare [per 40. dat.] triangulum ΑΓΔ specie datum est: ideoque [per 3. def. dat.] ipsius ΑΓ ad ΓΔ data est ratio. quoniam vero angulus ΑΔΓ datus est, deducatur * ipsi ΑΔΓ æqualis uterque angulorum ΔΕΓ, ΑΖΓ. quoniam vero angulus ΒΔΓ angulo ΔΕΓ æqualis est; angulus autem ΔΒΕ & triangulo ΔΒΕ & triangulo ΔΒΓ communis est: reliquus igitur ΒΔΕ reliquo ΒΓΔ [per 32. 1.] æqualis est: ideoque triangulum ΒΔΕ triangulo ΔΒΓ æquiangulum est: quare [per 4. 6.] ut ΕΒ ad ΒΔ ita est ΒΔ ad ΓΒ: igitur [per 17.6.] quod continetur sub ΕΒ, ΓΒ, hoc est [per 3.2.] rectangulum sub ΕΓ, ΓΒ una cum quadrato rectæ ΒΓ, æquale est quadrato rectæ ΔΒ; hoc est quadrato utriusque simul ΒΑΓ, etenim [per constr.] æqualis est ΔΑ ipsi ΓΑ: igitur rectangulum sub ΕΓ, ΓΒ una cum quadrato rectæ ΒΓ, hoc est quadratum utriusque simul ΒΑΓ, excedit quadratum rectæ ΒΓ rectangulo quod continetur sub ΒΓ, ΓΕ. dico igitur quod data est ratio rectanguli sub ΒΓ, ΓΕ ad triangulum ΑΒΓ. quoniam enim angulus ΒΔΕ angulo ΒΓΔ æqualis est, ut & angulus ΑΔΓ angulo ΑΓΔ æqualis: igitur reliquus ΓΔΕ reliquo ΑΓΒ æqualis est. est autem [per constr.] & angulus ΔΕΓ angulo ΑΖΓ æqualis: reliquus igitur ΓΑΖ reliquo ΔΓΕ [per 32.1.] æqualis est: adeoque triangulum ΑΓΖ tri-



ΑΛΛΩΣ.

Διήχθω ἡ ΒΑ πρὸς τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ. ἐπεὶ οὖν δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία, καὶ ἔστιν αὐτῆς ἡμίσεια ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΔΓ, ΑΓΔ· δοθεῖσαι ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΔΓ, ΑΓΔ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ τοῦ ΔΑΓ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΓΔ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΔ δοθείς. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΔΓ, κατήχθω τῇ ΑΔΓ ἴση ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΔΕΓ, ΑΖΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, κοινὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΒΕ τοῦ ΔΒΕ τριγώνου οὖσα καὶ τοῦ ΔΒΓ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΕ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΓΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΕΒ, ΓΒ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ, τουτέστι τῷ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΔΑ τῇ ΓΑ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ, τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΕ. λέγω οὖν ὅτι λόγος ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΕ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον δοθείς. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ, ὡς ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΔΕ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΕΓ τῇ ὑπὸ ΑΖΓ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΑΖ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓΖ

* Per datum punctum Α ad datam rectam ΒΓ deducatur recta ΑΔ quæ faciat angulum ΑΔΓ æqualem dato angulo Ε, hoc modo. In ΒΓ sumatur punctum utcunque Ζ, & ad datam rectam ΒΓ, datumque in ea punctum Ζ, ducatur [per 23.1.] recta ΖΗ quæ faciat angulum ΓΖΗ æqualem ipsi Ε; & per Α ipsi ΖΗ [per 31.1.] ducatur parallela ΑΔ: erit hæc ea quæ quæritur. Nam angulus ΑΔΓ [per 29. 1.] æqualis est ipsi ΗΖΓ, qui [per constr.] æqualis est ipsi Ε.



τρίγωνον

τρίγωνον τῷ ΔΕΓ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΖ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΓΕ. λόγος δὲ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΔ δοθείς· λόγος ἄρα τῆς ΑΖ πρὸς τὴν ΓΕ δοθείς. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΗ. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΖΓ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΖ δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΑΖ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΗΖ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΖ πρὸς τὴν ΑΗ δοθείς. τῆς δὲ ΖΑ πρὸς τὴν ΓΕ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΑΗ ἄρα πρὸς τὴν ΓΕ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΕ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΒΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΕ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς. καί ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΕ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ· ᾧ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

angulo ΔΕΓ æquiangulum est: quare [per 4. 6.] est ut ΓΑ ad ΑΖ ita ΔΓ ad ΓΕ: ideoque permutando ut ΓΑ ad ΓΔ ita ΑΖ ad ΓΕ. est autem [ex supra ostensis] ratio ipsius ΑΓ ad ΓΔ data: quare & ipsius ΑΖ ad ΓΕ ratio est data. agatur à puncto Α ad rectam ΒΓ perpendicularis ΑΗ. & quoniam angulus ΑΖΓ datus est, atque angulus ΑΗΖ datus: reliquus igitur ΗΑΖ datus est: itaque [per 40.dat.] triangulum ΑΗΖ specie datum est: quare ratio ΑΖ ad ΑΗ data est. ipsius autem ΖΑ ad ΓΕ data est ratio: ergo [per 8.dat.] etiam ratio ipsius ΑΗ ad ΓΕ data est: ideoque [per 1. 6.] ratio ejus quod continetur sub ΑΗ, ΒΓ ad id quod continetur sub ΒΓ, ΓΕ data est. verum [per 41.1.] ejus quod continetur sub ΑΗ, ΒΓ ad triangulum ΑΒΓ data est: quare & ratio ejus quod continetur sub ΒΓ, ΓΕ ad triangulum ΑΒΓ data est. at vero [per supra ostensa] quod continetur sub ΒΓ, ΓΕ est illud spatium quo quadratum utriusque simul ΒΑΓ excedit quadratum rectæ ΒΓ: igitur illud spatium, quo quadratum utriusque simul ΒΑΓ excedit quadratum rectæ ΒΓ, ad triangulum ΑΒΓ habet rationem datam.

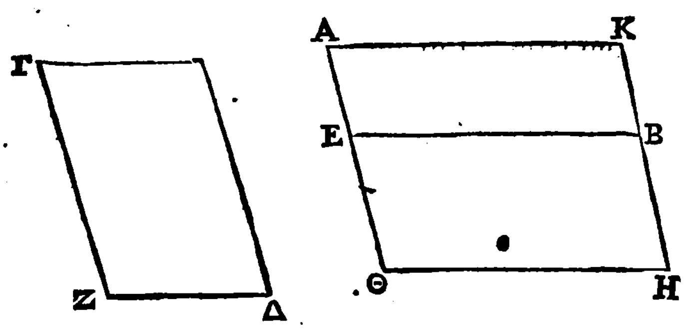
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξη'.

Ἐὰν δύο ἰσογώνια παραλληλόγραμμα λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ μία πλευρὰ πρὸς μίαν πλευρὰν λόγον ἔχῃ δεδομένον· καὶ λοιπὴ πλευρὰ πρὸς τὴν λοιπὴν πλευρὰν λόγον ἕξει δεδομένον.

Prop. LXVIII.

Si duo parallelogramma æquiangula habeant ad invicem rationem datam, atque unum latus ad unum latus habeat rationem datam; etiam reliquum latus ad reliquum latus rationem habebit datam.

Δύο γὰρ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒ, ΓΔ πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω δεδομένον, ἐχέτω δὲ καὶ μία πλευρὰ πρὸς μίαν πλευρὰν λόγον δεδομένον, καὶ ἔστω τῆς ΒΕ πρὸς τὴν ΖΔ λόγος δοθείς· λέγω ὅτι καὶ τῆς ΑΕ πρὸς τὴν ΖΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΕΒ τῷ ΓΔ ἴσον τὸ ΕΗ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΑΕ τῇ ΕΘ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΒ τῇ ΒΗ. ἐπεὶ οὖν λόγος ἐστὶ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ δοθείς, ἴσον δὲ τὸ ΓΔ τῷ ΕΗ· λόγος ἄρα τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΗ δοθείς· ὥστε καὶ τῆς ΑΕ πρὸς τὴν ΕΘ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ τὸ ΕΗ τῷ ΓΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΕΘ. λόγος δὲ τῆς ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ δοθείς· καὶ τῆς ΓΖ ἄρα πρὸς τὴν ΕΘ λόγος ἐστὶ δοθείς. τῆς δὲ ΕΘ πρὸς τὴν ΑΕ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΑΕ ἄρα πρὸς τὴν ΓΖ λόγος ἐστὶ δοθείς.

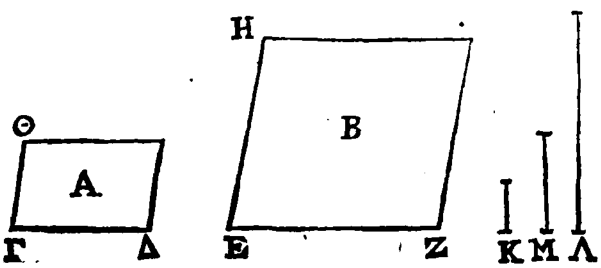


DUO enim æquiangula parallelogramma ΑΒ, ΓΔ habeant ad invicem rationem datam, habeat autem & unum latus ad unum latus rationem datam, sitq; ratio ΒΕ ad ΖΔ data: dico ipsius quoque ΑΕ ad ΖΓ rationem esse datam. Applicetur enim ad rectam ΕΒ ipsi ΓΔ æquale parallelogrammum ΕΗ, atque ita constituatur, ut in directum jaceat ΑΕ ipsi ΕΘ: adeoque recta ΚΒ in directum erit ipsi ΒΗ. quoniam itaque [ex hyp.] data est ratio ipsius ΑΒ ad ΓΔ; ΓΔ vero [per constr.] æquale est ipsi ΕΗ: igitur ratio ipsius ΑΒ ad ΕΗ data est: adeoq; [per 1.6.] & ratio ipsius ΑΕ ad ΕΘ etiam est data. & quoniam parallelogrammum ΕΗ ipsi ΓΔ æquale est, erit [per 14.6.] ut ΕΒ ad ΖΔ ita ΓΖ ad ΕΘ. sed [ex hyp.] ratio ipsius ΕΒ ad ΖΔ data est: igitur & ratio ipsius ΓΖ ad ΕΘ data est. ipsius autem ΕΘ ad ΑΕ ratio est data: ergo [per 8. dat.] & ratio ipsius ΑΕ ad ΓΖ data est.

ALI-

ALITER.

Exponatur data recta K. & quoniam ratio ipsius A ad B data est, fiat huic eadem ratio ipsius K ad Λ. est autem ratio ipsius A ad B data; igitur ratio ipsius K ad Λ data est. data autem est K; ergo & [per 2. dat.] Λ data est. rursus, quoniam ratio ipsius ΓΔ ad EZ data est, fiat huic eadem ratio ipsius K ad M: ergo ratio ipsius K ad M data est. data autem est K; ergo data quoque est M. est autem & Λ data: quare [per 1. dat.] ratio ipsius Λ ad M data est. & quoniam [ex hyp.] æquiangulum est A ipsi B; igitur [per 23.6.] A ad B habet rationem compositam ex laterum rationibus, hoc est, & ex ratione quam habet ΓΔ ad EZ & ex ea quam habet ΘΓ ad HE. sed ipsa K ad Λ habet rationem compositam ex ratione quam habet K ad M & ratione quam habet M ad Λ: igitur ratio composita ex ratione quam habet ΓΔ ad EZ & ratione quam habet ΘΓ ad HE eadem est cum ratione composita ex ratione ipsius K ad M & ratione ipsius M ad Λ. ex quibus ratio ipsius ΓΔ ad EZ eadem est [per constr.] cum ratione ipsius K ad M: igitur reliqua ratio, nempe ipsius ΘΓ ad HE, eadem est cum ratione ipsius M ad Λ. ratio autem ipsius M ad Λ [ex supra ostensis] data est: igitur & ratio ipsius ΘΓ ad HE data est.



ΑΛΛΩΣ.

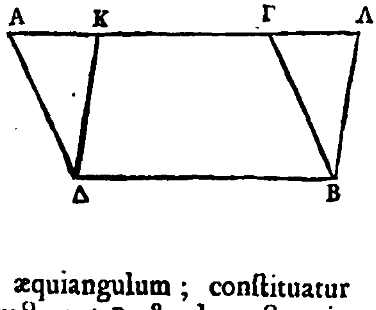
Ἐκκείσθω δεδομένη εὐθεῖα ἡ Κ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ Α πρὸς τὸ Β δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τῆς Κ πρὸς τὴν Λ. λόγος δὲ τοῦ Α πρὸς τὸ Β δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς Κ πρὸς τὴν Λ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ Κ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ Λ. πάλιν ἐπεὶ λόγος ἐστὶ δοθεὶς τῆς ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τῆς Κ πρὸς τὴν Μ· λόγος ἄρα καὶ τῆς Κ πρὸς τὴν Μ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ Κ· δοθεῖσα ἄρα ἡ Μ. ἔστι δὲ καὶ ἡ Λ δοθεῖσα· λόγος ἄρα τῆς Λ πρὸς τὴν Μ δοθείς. καὶ ἐπεὶ ἰσογώνιόν ἐστι τὸ Α τῷ Β· τὸ ἄρα Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, τουτέστιν ἔκ τε τοῦ λόγου ὃν ἔχει ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ καὶ ἡ ΘΓ πρὸς τὴν ΗΕ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ Κ πρὸς τὴν Λ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ λόγου ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς τὴν Μ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ Μ πρὸς τὴν Λ· ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ λόγου ὃν ἔχει ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ καὶ ἡ ΘΓ πρὸς τὴν ΗΕ ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς τὴν Μ καὶ ἡ Μ πρὸς τὴν Λ. ὧν ὁ τῆς ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς Κ πρὸς τὴν Μ λόγῳ· λοιπὸς ἄρα ὁ τῆς ΘΓ πρὸς τὴν ΗΕ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς Μ πρὸς τὴν Λ. τῆς δὲ Μ πρὸς τὴν Λ λόγος ἐστὶ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΘΓ πρὸς τὴν ΗΕ δοθείς.

PROP. LXIX.

Si duo parallelogramma datos angulos habeant, & ad invicem rationem datam; habeat autem & unum latus ad unum latus rationem datam: & reliquum latus ad reliquum latus habebit rationem datam.

DUO enim parallelogramma AB, EH, habentia datos angulos ad puncta Δ, Z, ad invicem rationem datam habeant; sitque etiam ratio ipsius ΔB ad ZH data: dico ipsius quoque AΔ ad EZ rationem datam esse.

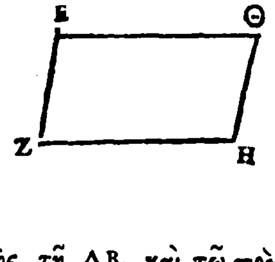
Si AB ipsi EH æquiangulum quidem sit, res [per 68. dat.] manifesta est. si vero non sit illi æquiangulum; constituatur [per 23. 1.] ad rectam ΔB, & ad punctum in illa Δ, angulo EZH æqualis angulus BΔK, & [per 31. 1.] compleatur parallelogrammum ΔΛ.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξθʹ.

Ἐὰν δύο παραλληλόγραμμα δεδομένας ἔχῃ γωνίας καὶ λόγον πρὸς ἄλληλα δεδομένον, καὶ μία πλευρὰ πρὸς μίαν πλευρὰν λόγον ἔχῃ δεδομένον· καὶ ἡ λοιπὴ πλευρὰ πρὸς τὴν λοιπὴν πλευρὰν λόγον ἕξει δεδομένον.

ΔΥΟ γὰρ παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒ, ΕΗ δεδομένας ἔχοντα γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Δ, Ζ, πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω δεδομένον, λόγος δὲ ἔστω τῆς ΔΒ πρὸς τὴν ΖΗ δοθείς· λέγω ὅτι καὶ τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΕΖ λόγος ἐστὶ δοθείς.



Εἰ μὲν οὖν ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒ τῷ ΕΗ, φανερόν. εἰ δὲ οὔ· συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΒ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ, τῇ ὑπὸ ΕΖΗ γωνίᾳ ἴση ὑπὸ ΒΔΚ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΔΛ παραλληλόγραμμον.

Ἐ

καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΔΑΚ, ΑΚΔ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΚ ἐστὶ δοθεῖσα· δέδοται ἄρα τὸ ΑΔΚ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΔΚ δοθείς. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ ΔΓ πρὸς τὸ ΖΘ δοθείς, ὑπόκειται γάρ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ΔΓ τῷ ΔΛ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΔΛ πρὸς τὸ ΖΘ δοθείς. ἐπειδήπερ ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΔΛ τῷ ΖΘ, καὶ λόγος ἐστὶ τοῦ ΔΛ πρὸς τὸ ΖΘ δοθείς, καὶ ἔστι τῆς ΔΒ πρὸς τὴν ΖΗ λόγος δοθείς, ὑπόκειται γάρ· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ τῆς ΔΚ πρὸς τὴν ΕΖ δοθείς. τῆς δὲ ΔΚ πρὸς τὴν ΑΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΑΔ ἄρα πρὸς τὴν ΕΖ λόγος ἐστὶ δοθείς.

& quoniam [ex hyp.] uterque angulorum ΔΑΚ, ΑΚΔ datus est; reliquus igitur ΑΔΚ [per 32. 1.& 4.dat.] datus est: quare [per 40.dat.] triangulum ΑΔΚ specie datum est: ideoque ratio ipsius ΑΔ ad ΔΚ data est. quoniam vero ratio ipsius ΔΓ ad ΖΘ data est, ita enim supponitur; atque [per 35.1.] æquale est ΔΓ ipsi ΔΛ: ratio igitur ipsius ΔΛ ad ΖΘ data est. cumque [per constr.] æquiangulum sit ΔΛ ipsi ΖΘ, & ratio ipsius ΔΛ ad ΖΘ data sit; necnon ratio ipsius ΔΒ ad ΖΗ data, ita enim supponitur: ratio igitur ipsius ΔΚ ad ΕΖ [per 68.dat.] data est. est autem [ex mox ostensis] ratio ipsius ΔΚ ad ΑΔ data: ergo [per 8.dat.] & ratio ipsius ΑΔ ad ΕΖ data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ο'.

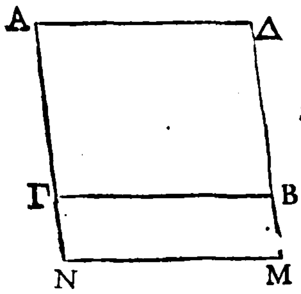
Ἐὰν δυοῖν παραλληλογράμμων περὶ ἴσας γωνίας, ἢ περὶ ἀνίσους μὲν δεδομένας δέ, αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον, καὶ αὐτὰ τὰ παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἕξει δεδομένον.

Prop. LXX.

Si duorum parallelogrammorum, circa æquales angulos, aut circa inæquales quidem datos tamen, latera ad invicem habeant rationem datam; & ipsa quoque parallelogramma ad invicem rationem datam habebunt.

Δυοῖν γὰρ παραλληλογράμμων τῶν ΑΒ, ΕΗ, περὶ ἴσας γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Γ, Ζ, ἢ περὶ ἀνίσους μὲν δεδομένας δέ, αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον, τουτέστι λόγος ἔστω τῆς μὲν ΑΓ πρὸς τὴν ΕΖ δοθείς, τῆς δὲ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ λόγος ἔστω δοθείς· λέγω ὅτι καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΘ λόγος ἐστὶ δοθείς.

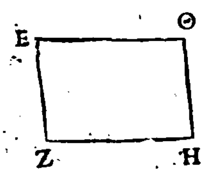
Ἔστω γὰρ ἰσογώνιον τῷ ΖΘ τὸ ΓΔ. καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΓΒ εὐθεῖαν παραλληλογράμμῳ ΖΘ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΜ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΓΝ· καὶ ἡ ΔΒ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ ΒΜ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΝ τῷ ΖΘ, ἐστὶ δὲ καὶ ἰσογώνιον· τῶν ΒΝ, ΖΘ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΓΝ. λόγος δὲ τῆς ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ δοθείς· λόγος ἄρα τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ΓΝ δοθείς. τῆς δὲ ΕΖ πρὸς τὴν ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΑΓ ἄρα πρὸς τὴν ΓΝ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΓΜ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἔστι δὲ τὸ ΓΜ τῷ ΖΘ ἴσον· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΘ δοθείς.



Μὴ ἔστω δὴ ἰσογώνιον τὸ ΑΒ τῷ ΕΗ. καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΓ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Γ, τῇ ὑπὸ ΕΖΗ ἴση γωνία ἡ ὑπὸ ΒΓΚ, καὶ συμπεπληρώσθω ΓΛ παραλληλόγραμμον. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γω-

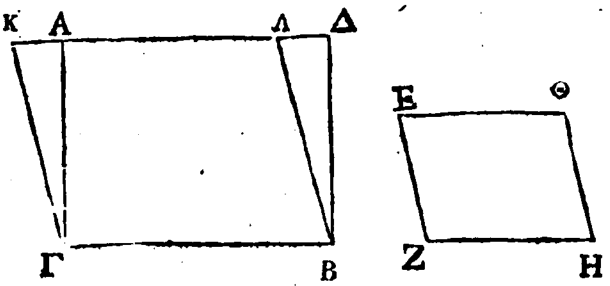
Duorum enim parallelogrammorum ΑΒ, ΕΗ, circa æquales angulos ad puncta Γ, Ζ, aut circa inæquales quidem datos tamen, latera habeant ad invicem rationem datam; nempe data sit ratio ipsius ΑΓ ad ΕΖ; sit quoque ratio ipsius ΓΒ ad ΖΗ data: dico quod ratio ipsius ΓΔ ad ΖΘ data est.

Sit enim primo ΓΔ ipsi ΖΘ æquiangulum. & [per 45. 1.] applicetur ad rectam ΓΒ parallelogrammo ΖΘ æquale parallelogrammum ΓΜ, atque ita constituatur ut ΑΓ in directum sit ipsi ΓΝ: erit igitur & ΔΒ ipsi ΒΜ in directum. quoniam itaque ΒΝ ipsi ΖΘ æquiangulum est & æquale: ipsorum igitur ΒΝ, ΖΘ latera circum æquales angulos sunt [per 14.6.] reciproce proportionalia; adeoque ut ΓΒ ad ΖΗ ita est ΖΕ ad ΓΝ. est autem [ex hyp.] ratio ipsius ΓΒ ad ΖΗ data: ipsius igitur ΕΖ ad ΓΝ data est ratio. verum ipsius ΕΖ ad ΑΓ ratio [ex hyp.] est data: quare [per 8.dat.] ratio ipsius ΑΓ ad ΓΝ data est: adeoque [per 1.6.] & ratio ipsius ΓΔ ad ΓΜ data est. æquale autem est [per constr.] ΓΜ ipsi ΖΘ: ergo ratio ipsius ΓΔ ad ΖΘ data est.



Non sit autem ΑΒ æquiangulum ipsi ΕΗ. & [per 23. 1.] constituatur ad rectam ΒΓ, & datum in ea punctum Γ, angulo ΕΖΗ æqualis angulus ΒΓΚ, compleaturque parallelogrammum ΓΛ. quoniam vero angulus ΑΓΒ [ex hyp.] datus

tus est; atque angulus ΚΓΒ [per constr.] datus: igitur [per 4.dat.] reliquus ΑΓΚ datus est. est autem & ΓΑΚ datus: unde [per 32. 1. & 4.dat.] reliquus ΑΚΓ datus est: triangulum igitur ΑΓΚ [per 40.dat.] specie datum est: adeoque ratio ipsius ΑΓ ad ΓΚ data est. ipsius autem ΑΓ ad ΕΖ [ex hyp.] data est ratio: quare [per 8. dat.] & ratio ipsius ΓΚ ad ΕΖ data est. ipsius autem ΓΒ ad ΖΗ ratio [ex hyp.] data est; atque [per constr.] æqualis est angulus ΚΓΒ angulo ΕΖΗ: igitur [per part. prior. hujus] ratio ipsius ΓΔ ad ΖΘ est data.



νία, ἐςὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΚΓΒ δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΚ δοθεῖσά ἐςιν. ἔςι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΑΚ δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΚΓ δοθεῖσά ἐςι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΓΚ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐςὶ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΚ δοθείς. τῆς δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΕΖ λόγος ἐςὶ δοθείς· καὶ τῆς ΓΚ ἄρα πρὸς τὴν ΕΖ λόγος ἐςὶ δοθείς. ἔςι δὲ καὶ τῆς ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ λόγος δοθείς, καὶ ἴση ἐςὶν ἡ ὑπὸ ΚΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΗ· λόγος ἄρα ἐςὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὴν ΖΘ δοθείς.

Prop. LXXI.

Si duorum triangulorum, circa æquales angulos, aut circa inæquales quidem datos tamen, latera ad invicem habeant rationem datam; ipsa quoque triangula ad invicem rationem datam habebunt.

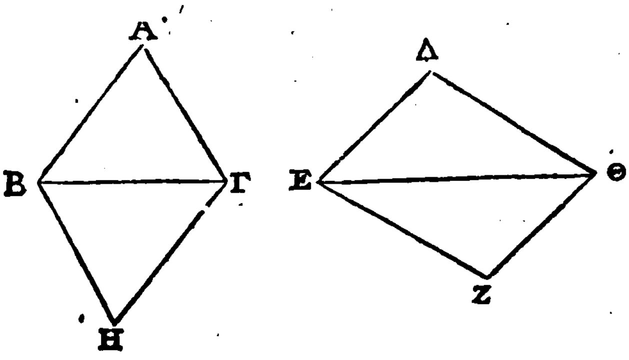
Duorum enim triangulorum ΑΒΓ, ΔΕΘ, circa æquales angulos ad puncta Α, Δ, aut circa inæquales quidem datos tamen, latera ad invicem habeant rationem datam, sitque ratio ipsius quidem ΒΑ ad ΕΔ, necnon ipsius ΑΓ ad ΔΘ data: dico rationem trianguli ΑΒΓ ad triangulum ΔΕΘ datam esse.

Compleantur enim parallelogramma ΑΗ, ΔΖ. quoniam itaque duorum parallelogrammorum ΑΗ, ΔΖ, circa æquales angulos ad puncta Α, Δ, aut inæquales quidem sed tamen datos, latera ad invicem habent rationem datam: ratio ipsius ΑΗ ad ΔΖ [per 70.dat.] data est. sed [per 34.1.] ipsius quidem ΑΗ dimidium est triangulum ΑΒΓ; ipsius vero ΔΖ dimidium triangulum ΔΕΘ: ergo trianguli ΑΒΓ ad triangulum ΔΕΘ ratio est data.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οα'.

Ἐὰν δυοῖν τριγώνων, περὶ ἴσας γωνίας, ἢ περὶ ἀνίσους μὲν δεδομένας δὲ, αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον· καὶ αὐτὰ τὰ τρίγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἕξει δεδομένον.

Δυοῖν γὰρ τριγώνων τῶν ΑΒΓ, ΔΕΘ, περὶ ἴσας γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Α, Δ, ἢ περὶ ἀνίσους μὲν δεδομένας δὲ, αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον, καὶ ἔςω λόγος τῆς μὲν ΒΑ πρὸς τὴν ΕΔ δοθείς, τῆς δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΘ· λέγω ὅτι καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὸ ΔΕΘ τρίγωνον λόγος ἐςὶ δοθείς.



Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΑΗ, ΔΖ παραλληλόγραμμα. ἐπεὶ οὖν δύο παραλληλογράμμων τῶν ΑΗ, ΔΖ περὶ ἴσας γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Α, Δ σημείοις, ἢ περὶ ἀνίσους μὲν δεδομένας δὲ, αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχουσι δεδομένον· λόγος ἄρα τοῦ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΖ δοθείς. καί ἐςι τοῦ μὲν ΑΗ ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τοῦ δὲ ΔΖ τὸ ΔΕΘ· λόγος ἄρα τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὸ ΔΕΘ τρίγωνον δοθείς.

Prop. LXXII.

Si duorum triangulorum bases fuerint in ratione data, atque etiam rectæ actæ ab angulis ad bases, quæ faciant angulos æquales, aut inæquales quidem sed tamen datos, habeant ad invicem

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οβ'.

Ἐὰν δυοῖν τριγώνων αἵ τε βάσεις ἐν δεδομένῳ λόγῳ ὦσι, καὶ αἱ ἐπ' αὐτὰς ἠγμέναι ἀπὸ τῶν γωνιῶν, ἤτοι ἴσας γωνίας ποιοῦσαι, ἢ ἀνίσους μὲν δεδομένας δὲ, τὰς πρὸς ταῖς βάσεσιν λό-

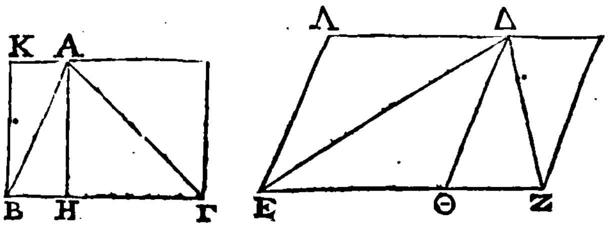
γον

γον ἔχωσι πρὸς ἀλλήλας δεδομένον· καὶ αὐτὰ τὰ τρίγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἕξει δεδομένον.

rationem datam: ipsa quoque triangula ad invicem rationem datam habebunt.

Ἔστωσαν δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἤχθωσαν αἱ ΑΗ, ΔΘ ἤτοι ἴσας γωνίας ποιοῦσαι τὰς ὑπὸ τῶν ΑΗΓ, ΔΘΖ, ἢ ἀνίσους μὲν δεδομένας δὲ, καὶ ἔστω λόγος τῆς μὲν ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ δοθεὶς, τῆς δὲ ΑΗ πρὸς τὴν ΔΘ λόγος ἔστω δοθείς· λέγω ὅτι καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς.

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, & agantur rectæ ΑΗ, ΔΘ, quæ angulos ΑΗΓ, ΔΘΖ ad bases faciant, aut æquales, aut inæquales quidem sed tamen datos; sitque ratio ipsius ΒΓ ad ΕΖ data, atque etiam ipsius ΑΗ ad ΔΘ: dico etiam rationem trianguli ΑΒΓ ad triangulum ΔΕΖ datam esse.



Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΚΓ, ΛΖ παραλληλόγραμμα. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΑΗΓ, ΔΘΖ γωνίαι ἤτοι ἴσαι εἰσὶν, ἢ ἄνισοι μὲν, δεδομέναι δὲ, ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΑΗΓ τῇ ὑπὸ ΚΒΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΘΖ τῇ ὑπὸ ΛΕΖ· καὶ αἱ πρὸς τοῖς Β, Ε ἄρα γωνίαι ἤτοι ἴσαι εἰσὶν, ἢ ἄνισοι μὲν, δεδομέναι δέ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς ΑΗ πρὸς τὴν ΔΘ δοθεὶς, ἴση δὲ ἡ μὲν ΑΗ τῇ ΚΒ, ἡ δὲ ΔΘ τῇ ΛΕ· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΚΒ πρὸς τὴν ΛΕ δοθείς. ἔστι δὲ καὶ τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ λόγος δοθείς. καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τοῖς Β, Ε σημείοις γωνίαι ἤτοι εἰσὶν ἴσαι, ἢ ἄνισοι μὲν δεδομέναι δέ· καὶ τοῦ ΚΓ ἄρα παραλληλογράμμου πρὸς τὸ ΛΖ παραλληλόγραμμον λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς.

Compleantur enim parallelogramma ΚΓ, ΛΖ. & quoniam [ex hyp.] anguli ΑΗΓ, ΔΘΖ aut æquales sunt, aut inæquales quidem sed tamen dati, angulus autem ΑΗΓ [per 29. 1.] angulo ΚΒΓ est æqualis, necnon angulus ΔΘΖ angulo ΛΕΖ: anguli igitur ad puncta Β, Ε aut æquales sunt, aut inæquales quidem sed tamen dati. quoniam vero [ex hyp.] ratio ipsius ΑΗ ad ΔΘ data est, & est [per 34. 1.] ΑΗ quidem ipsi ΚΒ, atque ΔΘ ipsi ΛΕ æqualis: ratio igitur ipsius ΚΒ ad ΛΕ data est. est autem & ratio ipsius ΒΓ ad ΕΖ [ex hyp.] data. & quoniam anguli ad puncta Β, Ε aut æquales sunt, aut inæquales quidem sed tamen dati: igitur [per 70. dat.] ratio parallelogrammi ΚΓ ad parallelogrammum ΛΖ est data: adeoque [per 41. 1.] ratio trianguli ΑΒΓ ad triangulum ΔΕΖ data est.

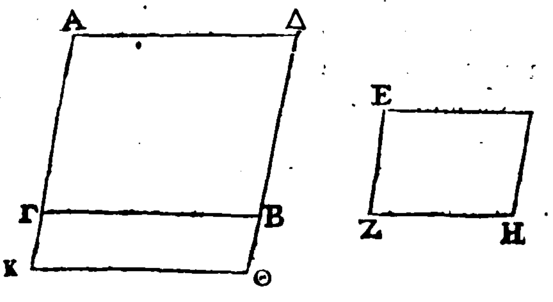
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ογ'.

Prop. LXXIII.

Ἐὰν δυοῖν παραλληλογράμμων περὶ ἴσας γωνίας, ἢ περὶ ἀνίσους μὲν δεδομένας δὲ, αἱ πλευραὶ οὕτως ἔχωσιν, ὥστε εἶναι ὡς τὴν τοῦ πρώτου πλευρὰν πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου πλευρὰν οὕτως τὴν λοιπὴν τοῦ δευτέρου πλευρὰν πρὸς ἄλλην τινὰ, ἔχῃ δὲ ἡ λοιπὴ τοῦ πρώτου πλευρὰ πρὸς αὐτὴν λόγον δεδομένον· καὶ αὐτὰ τὰ παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἕξει δεδομένον.

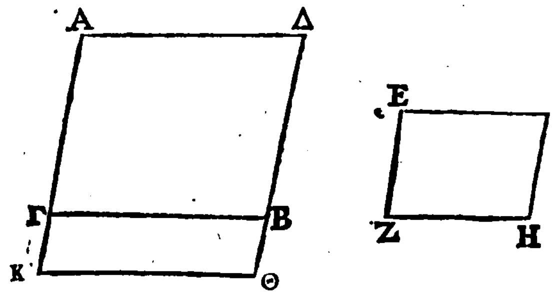
Si duorum parallelogrammorum, circa æquales angulos, aut circa inæquales quidem sed tamen datos, latera ita se habeant, ut sit quemadmodum primi latus ad secundi latus ita reliquum secundi latus ad aliam quandam rectam; habeat autem & reliquum primi latus ad eandem istam rectam rationem datam: ipsa quoque parallelogramma ad invicem rationem datam habebunt.

Δυοῖν γὰρ παραλληλογράμμων τῶν ΑΒ, ΕΗ, περὶ ἴσας γωνίας, ἢ περὶ ἀνίσους μὲν δεδομένας δὲ, τὰς πρὸς τοῖς Γ, Ζ σημείοις, αἱ πλευραὶ οὕτως ἐχέτωσαν πρὸς ἀλλήλας, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΓΚ, τῆς δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΚ λόγος ἔστω δοθείς· λέγω ὅτι καὶ τοῦ ΑΒ παραλληλογράμμου πρὸς τὸ ΕΗ παραλληλόγραμμον λόγος ἐστὶ δοθείς.



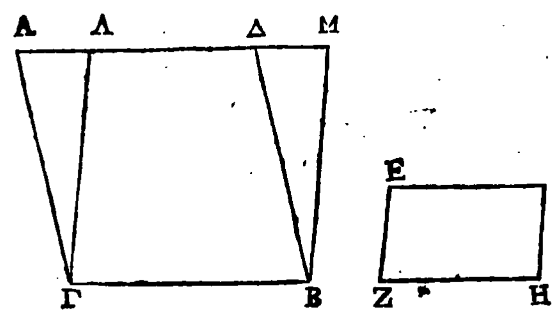
Duorum enim parallelogrammorum ΑΒ, ΕΗ, circa æquales angulos, aut inæquales quidem sed tamen datos ad puncta Γ, Ζ, latera ad invicem ita se habeant, ut sit quemadmodum ΓΒ ad ΖΗ ita recta ΕΖ ad rectam ΓΚ; sitque ratio ipsius ΑΓ ad ΓΚ data: dico parallelogrammi ΑΒ ad parallelogrammum ΕΗ rationem datam esse.

Sit enim primo parallelogrammum ΑΒ æquiangulum ipsi ΕΗ; atque ita constituatur ΓΚ ut sit in directum ipsi ΑΓ, compleaturque parallelogrammum ΑΘ. quoniam vero est ut ΓΒ ad ΖΗ ita ΕΖ ad ΓΚ; *erit etiam permutando [per 16.5.] ut ΓΒ ad ΕΖ ita ΖΗ ad ΓΚ: igitur [per 16.6.] quod continetur sub ΒΓ, ΓΚ æquale est ei quod continetur sub ΕΖ, ΖΗ: ergo ΓΘ ipsi ΕΗ æquale est. sed & [per 14.6.] eidem est æquiangulum: ergo [per 14.6.] latera circa æquales angulos sunt reciproce proportionalia: est igitur ut ΓΒ ad ΖΗ ita ΕΖ ad ΓΚ.* ut autem ΓΒ ad ΖΗ ita [ex hyp.] ΕΖ ad eam ad quam ΑΓ habet rationem datam: ergo ratio ipsius ΑΓ ad ΓΚ data est: adeoque [per 1.6.] ratio ipsius ΑΒ ad ΓΘ, hoc est ad ΕΗ, data est.



Ἔστω γὰρ πρότερον τὸ ΑΒ τῷ ΕΗ ἰσογώνιον, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΓΚ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΘ παραλληλόγραμμον. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΚ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΓΚ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΖΗ· τὸ ΓΘ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΗ. ἔστι δὲ καὶ ἰσογώνιον· τῶν ΓΘ, ΕΗ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΚ.* ὡς δὲ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ἣν ἡ ΑΓ λόγον ἔχει δεδομένον· λόγος ἄρα τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΚ δοθείς· ὥστε τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΘ, τουτέστι πρὸς τὸ ΕΗ, λόγος ἐστὶ δοθείς.

Non sit autem parallelogrammum ΑΒ æquiangulum parallelogrammo ΕΗ. & [per 23. 1.] constituatur ad rectam ΒΓ, & ad datum in ea punctum Γ, angulo ΕΖΗ æqualis angulus ΒΓΛ; compleaturque parallelogrammum ΓΜ. & quoniam datus est uterque angulorum ΑΓΛ, ΑΓΒ; reliquus igitur ΑΓΛ datus est. angulus autem ΓΛΑ [ex hyp.] datus est: quare [per 40. dat.] triangulum ΑΓΛ specie datum est: adeoque ratio ipsius ΑΓ ad ΓΛ data est. & quoniam [ex hyp.] est ut ΒΓ ad ΖΗ ita ΕΖ ad eam ad quam ΑΓ habet rationem datam; ipsiusque ΑΓ ad ΓΛ data est ratio: est igitur ut ΒΓ ad ΖΗ ita ΖΕ ad eam ad quam ΑΓ habet rationem datam. æqualis autem est [per constr.] angulus ΒΓΛ angulo ΕΖΗ: igitur [per part. prior. hujus] ratio ipsius ΓΜ ad ΕΗ data est. sed [per 35.1.] ipsi ΓΜ æqualis est ΓΔ: ratio igitur ipsius ΓΔ ad ΕΗ data est.



Μὴ ἔστω δὴ ἰσογώνιον τὸ ΑΒ τῷ ΕΗ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΓ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Γ τῇ ὑπὸ ΕΖΗ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΓΛ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΓΜ. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΛ, ΑΓΒ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΛ ἐστὶ δοθεῖσα. δέδοται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΛΑ· δέδοται ἄρα τὸ ΑΓΛ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΛ δοθείς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ἣν ἡ ΑΓ λόγον ἔχει δεδομένον, τῆς δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΛ λόγος ἐστὶ δοθείς· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς ἣν ἡ ΑΓ λόγον ἔχει δεδομένον. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ὑπὸ ΒΓΛ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΗ· λόγος ἄρα τοῦ ΓΜ πρὸς τὸ ΕΗ δοθείς. ἴσον δέ ἐστι τὸ ΓΜ τῷ ΓΔ· λόγος ἄρα τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΕΗ δοθείς.

Prop. LXXIV.

Si duo parallelogramma datam rationem habeant, aut in æqualibus angulis, aut inæqualibus quidem sed tamen datis; erit ut primi latus ad secundi latus ita alterum secundi latus ad eam ad quam reliquum primi latus rationem habet datam.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οδ'.

Ἐὰν δύο παραλληλόγραμμα λόγον ἔχῃ δεδομένον, ἤτοι ἐν ἴσαις γωνίαις, ἢ ἐν ἀνίσοις μὲν δεδομέναις δέ· ἔσται ὡς ἡ τοῦ πρώτου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου πλευρὰν οὕτως ἡ ἑτέρα τοῦ δευτέρου πλευρὰ πρὸς ἣν ἡ λοιπὴ τοῦ πρώτου πλευρὰ λόγον ἔχει δεδομένον.

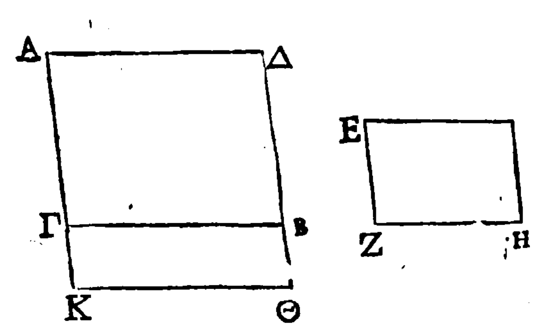
Duo enim parallelogramma ΑΒ, ΕΗ, aut in æqualibus angulis ad puncta Ζ, Γ, aut inæqualibus quidem, sed tamen datis, habeant ad invicem rationem datam: dico ut ΓΒ ad ΖΗ ita esse ΕΖ ad eam ad quam ipsa ΑΓ habet rationem datam.

Δύο γὰρ παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒ, ΕΗ πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω δεδομένον, ἤτοι ἐν ἴσαις γωνίαις, ἢ ἐν ἀνίσοις μὲν δεδομέναις δὲ, ταῖς πρὸς τοῖς Ζ, Γ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ἣν ἡ ΑΓ λόγον ἔχει δεδομένον.

Quæ inter stellulas inclusa redundant, & tollenda videntur.

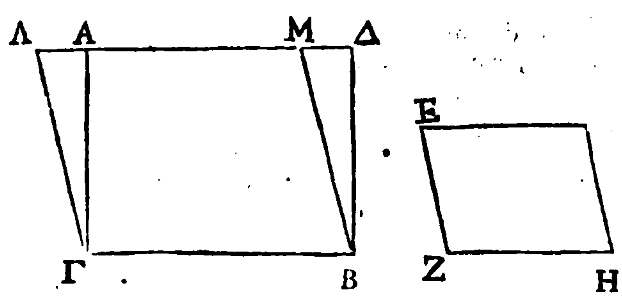
Τὸ

Τὸ γὰρ ΑΒ τῷ ΕΗ ἤτοι ἰσογώνιόν ἐστιν ἢ οὔ. ἔστω πρότερον ἰσογώνιον. καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΓΒ εὐθεῖαν τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΘ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΓΚ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΘ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΗ δοθείς, ἴσον δὲ τὸ ΕΗ τῷ ΓΘ· τοῦ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ ΓΘ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΚ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ ΕΗ, ἐστὶ δὲ καὶ ἰσογώνιον· τῶν ΓΘ, ΕΗ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΚ. τῆς δὲ ΓΚ πρὸς τὴν ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ὁ ΕΖ πρὸς ἣν ἡ ΑΓ λόγον ἔχει δεδομένον.



Etenim ΑΒ ipsi ΕΗ aut æquiangulum est aut non. sit primo æquiangulum. & [per 45.1.] applicetur ad rectam ΓΒ ipsi ΕΗ æquale parallelogrammum ΓΘ, atque ita constituatur ut in directum sit ΑΓ ipsi ΓΚ: ergo in directum est recta ΔΒ rectæ ΒΘ. & quoniam [ex hyp.] ratio ipsius ΑΒ ad ΕΗ data est; atque [per constr.] ΕΗ æquale est ipsi ΓΘ: igitur ratio ipsius ΑΒ ad ΓΘ data est: adeoque [per 1.6.] & ratio ipsius ΑΓ ad ΓΚ data est. & quoniam ΓΘ ipsi ΕΗ æquale est; estque etiam æquiangulum: igitur [per 14.6.] ipsorum ΓΘ, ΕΗ latera circa æquales angulos sunt reciproce proportionalia; est igitur ut ΓΒ ad ΖΗ ita ΕΖ ad ΓΚ. ratio autem ipsius ΓΚ ad ΑΓ data est: ergo ut ΓΒ ad ΖΗ ita est ΕΖ ad eam ad quam ΑΓ rationem habet datam.

Μὴ ἔστω δὴ ἰσογώνιον τὸ ΑΒ τῷ ΕΗ. καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΓΒ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Γ, τῇ ὑπὸ ΕΖΗ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΛΓΒ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ παραλληλόγραμμον ΓΜ. ἐπεὶ οὖν λόγος ἐστὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΕΗ δοθείς, ἴσον δὲ τὸ ΓΔ τῷ ΓΜ· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΓΜ πρὸς τὸ ΕΗ δοθείς. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ὑπὸ ΛΓΒ τῇ ὑπὸ ΕΖΗ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΜ τῷ ΕΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ἣν ὁ ΛΓ λόγον ἔχει δεδομένον. τῆς δὲ ΓΑ πρὸς τὴν ΓΛ λόγος ἐστὶ δοθείς· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ἣν ἡ ΑΓ λόγον ἔχει δεδομένον.



Non sit autem ΑΒ ipsi ΕΗ æquiangulum. & [per 23.1.] constituatur ad rectam ΓΒ, & datum in ea punctum Γ, angulo ΕΖΗ æqualis angulus ΛΓΒ; compleaturq; parallelogrammum ΓΜ. quoniam itaque [ex hyp.] ratio ipsius ΓΔ ad ΕΗ data est; est autem [per 35.1.] ΓΔ æquale ipsi ΓΜ: ipsius igitur ΓΜ ad ΕΗ data est ratio. æqualis autem [per constr.] est angulus ΛΓΒ angulo ΕΖΗ; ideoque [per 29. & 34.1.] æquiangulum est ΓΜ ipsi ΕΗ: ergo [per part. prior. hujus] ut ΓΒ ad ΖΗ ita est ΕΖ ad eam ad quam recta ΛΓ habet rationem datam. ratio autem ipsius ΓΑ ad ΓΛ est data: ergo ut ΓΒ ad ΖΗ ita est ΕΖ ad eam ad quam recta ΑΓ habet rationem datam.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οε'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ δεδομένον, ἤτοι ἐν ἴσαις γωνίαις, ἢ ἐν ἀνίσοις μὲν δεδομέναις δέ· ἔσται ὡς ἡ τοῦ πρώτου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου πλευρὰν οὕτως ἡ ἑτέρα τοῦ δευτέρου πλευρὰ πρὸς ἣν ἡ λοιπὴ τοῦ πρώτου πλευρὰ λόγον ἔχει δεδομένον.

Prop. LXXV.

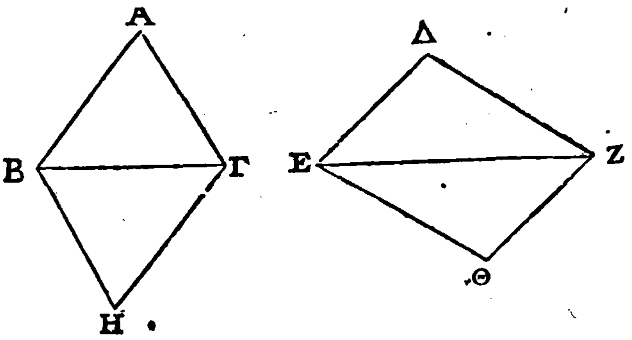
Si duo triangula ad invicem habeant rationem datam, aut in angulis æqualibus, aut inæqualibus quidem sed tamen datis; erit ut primi latus ad secundi latus ita alterum secundi latus ad eam rectam ad quam reliquum primi latus rationem datam habet.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα δεδομένον, καὶ ἔστωσαν αἱ πρὸς τοῖς Α, Δ γωνίαι, ἤτοι ἴσαι, ἤτοι ἄνισοι μὲν δεδομέναι δέ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, quæ ad invicem habeant rationem datam; sintque anguli ad puncta Α, Δ æquales, aut inæquales quidem sed tamen dati: dico ut ΑΒ ad ΔΕ ita

ita esse ΔΖ ad eam ad quam recta ΑΓ habet rationem datam.

Compleantur enim parallelogramma ΑΗ, ΔΘ. & quoniam ratio trianguli ΑΒΓ ad triangulum ΔΕΖ data est: igitur [per 41.1.] parallelogrammi ΑΗ ad parallelogrammum ΔΘ ratio est data. quoniam igitur duo sunt parallelogramma habentia ad invicem rationem datam, aut in angulis æqualibus, aut inæqualibus quidem sed tamen datis: est igitur [per 74. dat.] ut ΑΒ ad ΔΕ ita ΔΖ ad eam ad quam recta ΑΓ habet rationem datam.



ΔΕ οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ἣν ἡ ΑΓ λόγον ἔχει δεδομένον.

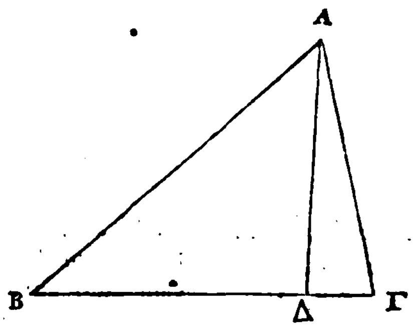
Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΑΗ, ΔΘ παραλληλόγραμμα. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὸ ΔΕΖ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΑΗ παραλληλογράμμου πρὸς τὸ ΔΘ παραλληλόγραμμον δοθείς. ἐπεὶ οὖν δύο παραλληλόγραμμά εἰσι πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα δεδομένον, ἤτοι ἐν ἴσαις γωνίαις, ἢ ἐν ἀνίσοις μὲν δεδομέναις δέ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ἣν ἡ ΑΓ λόγον ἔχει δεδομένον.

PROP. LXXVI.

Si à trianguli specie dati vertice recta perpendicularis agatur ad basim; acta recta habebit ad basim rationem datam.

SIT triangulum ΑΒΓ specie datum, & agatur à puncto Α in basim ΒΓ perpendicularis ΑΔ: dico rationem ipsius ΑΔ ad ΒΓ datam esse.

Quoniam enim datur triangulum ΑΒΓ specie: angulus igitur ΑΒΔ [per 3. def. dat.] datus est, angulus autem ΒΔΑ datus est: quare & [per 32. 1. & 4. dat.] reliquus ΒΑΔ datus est: ergo [per 40. dat.] triangulum ΑΒΔ specie datum est: quare [per 3. def. dat.] ratio ipsius ΒΑ ad ΑΔ data est. est autem [ex hyp.] & ratio ipsius ΑΒ ad ΒΓ data: igitur [per 8. dat.] ratio ipsius ΑΔ ad ΒΓ data est.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ος'.

Ἐὰν τριγώνου δεδομένου τῷ εἴδει ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὴν βάσιν λόγον ἕξει δεδομένον.

Ἔστω τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει τὸ ΑΒΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι λόγος ἐστὶ τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς.

Ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΔ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ δοθείς. ἔστι δὲ καὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ λόγος δοθείς· καὶ τῆς ΑΔ ἄρα πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς.

PROP. LXXVII.

Si duæ figuræ specie datæ ad invicem habeant rationem datam; quodlibet etiam latus unius harum figurarum ad quodlibet latus alterius rationem datam habebit.

DUÆ enim figuræ ΑΒΓ, ΔΕΖ specie datæ ad invicem habeant rationem datam: dico latus quodcunque ipsius ΑΒΓ ad latus quodcunque ipsius ΔΕΖ rationem datam habere.

Describantur enim [per 46. 1.] à rectis ΒΓ, ΕΖ quadrata ΒΗ, ΕΘ. quoniam vero ab ea-

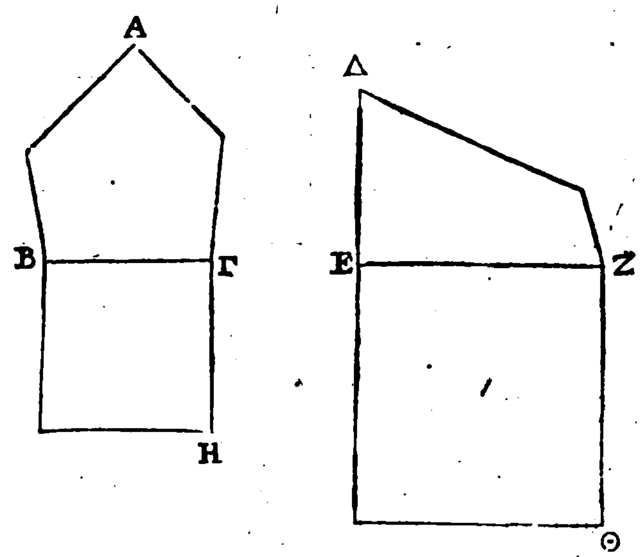
ΠΡΟΤΑΣΙΣ οζ'.

Ἐὰν δύο εἴδη δεδομένα τῷ εἴδει πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ μία πλευρὰ ὁποιαοῦν ἑνὸς τῶν εἰδῶν πρὸς ὁποιανοῦν τοῦ ἑτέρου λόγον ἕξει δεδομένον.

Δύο γὰρ εἴδη τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ δεδομένα τῷ εἴδει πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω δεδομένον· λέγω ὅτι καὶ μία πλευρὰ ὁποιαοῦν τοῦ ΑΒΓ πρὸς μίαν πλευρὰν ὁποιανοῦν τοῦ ΔΕΖ λόγον ἕξει δεδομένον.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῶν ΒΓ, ΕΖ τετράγωνα τὰ ΒΗ, ΕΘ. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας

θείας τῆς ΒΓ δύο εἴδη ἀναγέγραπται ἃ ἔτυχε δεδομένα τῷ εἴδει τὰ ΑΒΓ, ΒΗ· λόγος ἄρα τοῦ ΑΒΓ πρὸς τὸ ΒΗ δοθείς. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῦ ΔΕΖ πρὸς τὸ ΕΘ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ οὖν τοῦ ΑΒΓ πρὸς τὸ ΔΕΖ λόγος ἐστὶ δοθείς, ἀλλὰ τοῦ μὲν ΑΒΓ πρὸς τὸ ΒΗ λόγος ἐστὶ δοθείς, τοῦ δὲ ΔΕΖ πρὸς τὸ ΕΘ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΒΗ ἄρα πρὸς τὸ ΕΘ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ λόγος ἐστὶ δοθείς.



dem recta ΒΓ duæ quædam figuræ specie datæ descriptæ sunt, nempe ΑΒΓ, ΒΗ; ratio igitur ipsius ΑΒΓ ad ΒΗ [per 49. dat.] data est. similiter quoque ipsius ΔΕΖ ad ΕΘ data est ratio. quoniam itaque [ex hyp.] ratio ipsius ΑΒΓ ad ΔΕΖ data est; atque etiam data est ratio ipsius ΑΒΓ quidem ad ΒΗ, ipsiusque ΔΕΖ ad ΕΘ: ipsius quoque ΒΗ ad ΕΘ [per 8. dat.] ratio est data. quare [per 54. dat.] & ratio ipsius ΒΓ ad ΕΖ data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οη'.

Ἐὰν δοθὲν εἶδος πρός τι ὀρθογώνιον λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ μία πλευρὰ πρὸς μίαν πλευρὰν λόγον ἔχῃ δοθέντα· δέδοται τὸ ὀρθογώνιον τῷ εἴδει.

Δοθὲν γὰρ εἶδος τὸ ΑΖΒ πρός τι ὀρθογώνιον τὸ ΓΔ λόγον ἐχέτω δεδομένον, καὶ ἔστω λόγος τῆς ΖΒ πρὸς τὴν ΕΔ δοθείς· λέγω ὅτι δέδοται τὸ ΓΔ τῷ εἴδει.

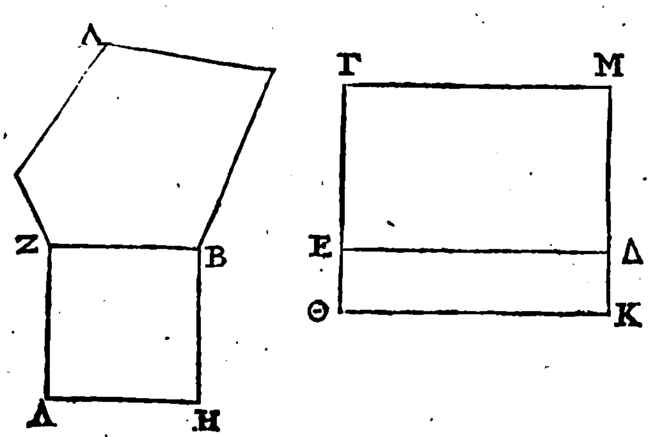
Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΖΒ τετράγωνον τὸ ΖΗ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΔ τῷ ΖΗ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΕΚ, καὶ κείσθω ὥστ' ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΓΕ τῇ ΕΘ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΔ τῇ ΔΚ. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΖΒ δύο εὐθύγραμμα ἃ ἔτυχε δεδομένα τῷ εἴδει ἀναγέγραπται τὰ ΑΖΒ, ΖΗ· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΑΖΒ πρὸς τὸ ΖΗ δοθείς. τοῦ δὲ ΑΖΒ πρὸς τὸ ΓΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ΓΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἀλλὰ τὸ ΖΗ τῷ ΕΚ ἐστὶν ἴσον· καὶ τοῦ ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ΕΚ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ καὶ ἰσογώνιον τὸ ΖΗ τῷ ΕΚ, ἐστὶ γὰρ καὶ ὀρθογώνιον· ἀντιπεπόνθασιν ἄρα αὐτῶν αἱ πλευραί, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΖΛ. λόγος δὲ ὑπόκειται τῆς ΖΒ πρὸς

Prop. LXXVIII.

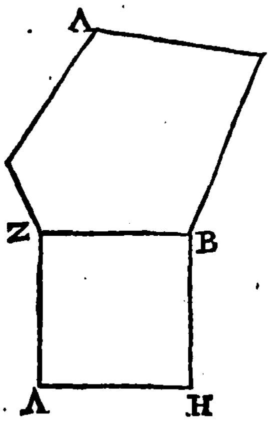
Si data figura habeat ad aliquod rectangulum rationem datam, atque habeat etiam unum latus ad unum latus rationem datam; rectangulum ipsum specie datum est.

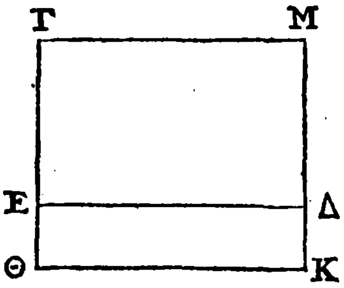
Etenim data figura ΑΖΒ ad aliquod rectangulum ΓΔ habeat rationem datam, & sit ratio ipsius ΖΒ ad ΕΔ data: dico rectangulum ΓΔ specie datum esse.

Describatur enim [per 46. 1.] à recta ΖΒ quadratum ΖΗ; dein [per 45. 1.] applicetur ad rectam ΕΔ ipsi ΖΗ æquale parallelogrammum ΕΚ, & constituatur ita ut in directum sit ΓΕ ipsi ΕΘ; est igitur in directum ΜΔ ipsi ΔΚ. quoniam vero ab eadem recta ΖΒ duo quædam rectilinea ΑΖΒ, ΖΗ specie data descripta sunt: igitur [per 49. dat.] ratio ipsius ΑΖΒ ad ΖΗ data est. ratio autem ipsius ΑΖΒ ad ΓΔ [ex hyp.] data est: quare [per 8. dat.] & ratio ipsius ΖΗ ad ΓΔ data est. sed [per constr.] ΖΗ ipsi ΕΚ æquale est: ipsius igitur ΓΔ ad ΕΚ data est ratio. cumque ΖΗ ipsi ΕΚ æquale sit & æquiangulum; quippe rectangulum etiam est: eorum igitur latera [per 14. 6.] reciproce proportionalia sunt, estque ut ΖΒ ad ΕΔ ita ΕΘ ad ΖΛ. ratio autem ipsius ΖΒ ad ΕΔ data



data supponitur: quare & ratio ipsius $E\Theta$ ad $Z\Lambda$ data est. est autem [per 1. 6.] & ratio ipsius $E\Theta$ ad ΓE data: igitur [per 8. dat.] & ipsius ΓE ad $Z\Lambda$ ratio est data. æqualis autem est ΛZ ipsi $Z B$; est enim quadratum: igitur ipsius ΛZ ad $E\Delta$ data est ratio: igitur [per 8. dat.] & ratio ipsius ΓE ad $E\Delta$ data est. & [ex hyp.] est angulus ad E rectus: igitur [per 3. def. dat.] $\Gamma\Delta$ specie datum est.





τὴν ΕΔ δοθεὶς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΕΘ πρὸς τὴν ΖΛ δοθείς. τῆς δὲ ΕΘ πρὸς τὴν ΓΕ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΓΕ ἄρα πρὸς τὴν ΖΛ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἴση δὲ ἡ ΛΖ τῇ ΖΒ, τετράγωνον γάρ ἐστι· τῆς ΛΖ ἄρα πρὸς τὴν ΕΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· τῆς ΓΕ ἄρα πρὸς τὴν ΕΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ Ε γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΓΔ τῷ εἴδει.

Prop. LXXIX.

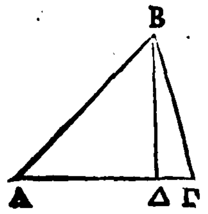
Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, ab æqualibus autem angulis ad bases perpendiculares rectæ agantur, sitque ut primi trianguli basis ad perpendicularem ita & alterius trianguli basis ad perpendicularem; triangula ipsa æquiangula sunt.

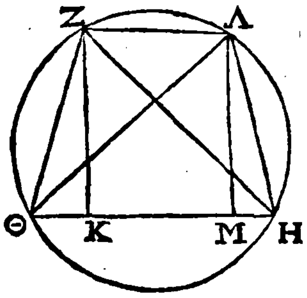
ΠΡΟΤΑΣΙΣ οθ΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, καὶ ἀπὸ τῶν ἴσων γωνιῶν ἐπὶ τὰς βάσεις κάθετοι εὐθεῖαι γραμμαὶ ἀχθῶσιν, ἡ δὲ ὡς ἡ τοῦ πρώτου τριγώνου βάσις πρὸς τὴν κάθετον οὕτως ἡ τοῦ ἑτέρου τριγώνου βάσις πρὸς τὴν κάθετον· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα.

Sint duo triangula $AB\Gamma$, ΘZH æquales habentia angulos ad puncta B, Z, & agantur à punctis B, Z perpendiculares $B\Delta$, KZ; sit autem ut $A\Gamma$ ad $B\Delta$ ita ΘH ad KZ: dico triangulum $AB\Gamma$ triangulo ΘZH æquiangulum esse.

Circumscribatur enim [per 5. 4.] circulus circa triangulum ΘZH, cujus segmentum sit ΘZH; dein constituatur ad rectam ΘH, & ad punctum in ea Θ, angulo ΓAB æqualis angulus $H\Theta\Lambda$, & connectantur $Z\Lambda$, ΛH, denique agatur perpendicularis ΛM. & quoniam æqualis est [per 21. 3.] angulus $HZ\Theta$ angulo $\Theta\Lambda H$, in eodem enim segmento circuli consistunt; atq; est [ex hyp.] $HZ\Theta$ æqualis ΓBA: igitur & $H\Lambda\Theta$ ipsi ΓBA est æqualis. angulus autem $\Lambda\Theta H$ [per constr.] angulo $BA\Gamma$ æqualis est; reliquus igitur angulus $\Lambda H\Theta$ reliquo angulo $B\Gamma A$ æqualis est: ergo [per 4. 6.] triangulum $AB\Gamma$ triangulo $\Theta\Lambda H$ simile est. & ductæ sunt perpendiculares $B\Delta$, ΛM: quare [per 4. & 20. 6.] ut $A\Gamma$ ad $B\Delta$ ita ΘH ad ΛM. erat vero ut $A\Gamma$ ad $B\Delta$ ita ΘH ad ZK; ita enim supponitur: ergo ut ΘH ad $M\Lambda$ ita ΘH ad ZK: ergo [per 9. 5.] æqualis est ZK ipsi ΛM. est autem [per 28. 1.] & ZK parallela ipsi ΛM: quare [per 33. 1.] parallela est $Z\Lambda$





Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΘΖΗ ἴσας ἔχοντα γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Β, Ζ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Β, Ζ κάθετοι αἱ ΒΔ, ΖΚ, ἔστω δὲ ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΖΚ· λέγω ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τρίγωνον ΑΒΓ τῷ ΘΖΗ τριγώνῳ.

Περιγεγράφθω γὰρ περὶ τὸ ΘΖΗ τρίγωνον κύκλος οὗ τμῆμα ἔστω ΘΖΗ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΘΗ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ, τῇ ὑπὸ ΓΑΒ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΘΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΛ, ΛΗ, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΛΜ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΖΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΛΗ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ εἰσι τμήματι τοῦ κύκλου, ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ ΗΖΘ τῇ ὑπὸ ΓΒΑ ἴση· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΗΛΘ τῇ ὑπὸ ΓΒΑ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΛΘΗ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΗΘ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἐστὶν ἴση· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΘΛΗ τριγώνῳ. καὶ κάθετοι ἤγμέναι εἰσὶν αἱ ΒΔ, ΛΜ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΛΜ. ἦν δὲ ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΖΚ, ὑπόκειται γάρ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΜΛ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΖΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΚ τῇ ΛΜ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΚ τῇ ΛΜ παράλληλος· ἡ ΖΛ ἄρα τῇ

ΘΗ παράλληλός ἐστιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΛΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΛΘΗ. ἀλλ' ἡ μὲν ΛΘΗ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΖΛΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΘ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΗΘ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΘΖΗ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΑ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΖΘΗ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΘΗ τριγώνῳ.

ipsi ΘΗ: angulus igitur ΖΛΘ angulo ΛΘΗ [per 29.1.] æqualis est. sed angulus ΛΘΗ [per constr.] æqualis est angulo ΒΑΓ; angulus autem ΖΛΘ [per 21.3.] angulo ΖΗΘ æqualis est: quare & angulus ΒΑΓ angulo ΖΗΘ æqualis est. angulus autem ΑΒΓ [ex hyp.] angulo ΘΖΗ æqualis est: reliquus igitur ΒΓΑ reliquo ΖΘΗ [per 32.1.] æqualis est: ergo triangulum ΑΒΓ triangulo ΖΘΗ æquiangulum est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ π'.

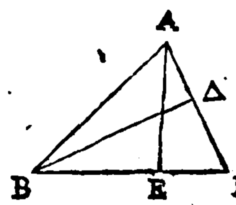
Ἐὰν τρίγωνον μίαν ἔχῃ γωνίαν δεδομένην, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν τὴν δεδομένην γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν ὀρθογώνιον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς λοιπῆς πλευρᾶς τετράγωνον λόγον ἔχῃ δεδομένον· δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἴδει.

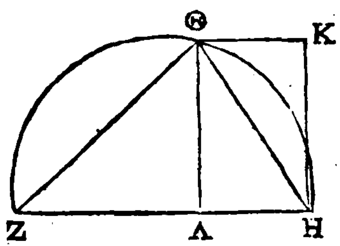
Prop. LXXX.

Si triangulum unum angulum datum habuerit, quodque sub lateribus datum angulum comprehendentibus continetur rectangulum habeat ad quadratum reliqui lateris rationem datam; triangulum ipsum specie datum est.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ δεδομένην ἔχον γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Α, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ λόγον ἐχέτω δεδομένον· λέγω ὅτι δέδοται τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

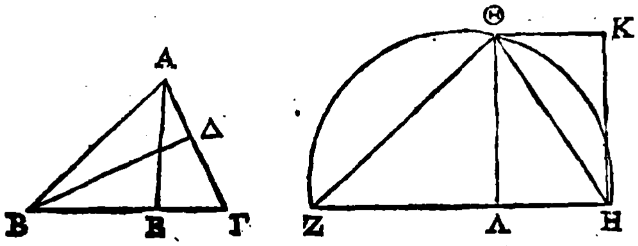
Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Α, Β ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΓΑ κάθετοι αἱ ΑΕ, ΒΔ. ἐπεὶ οὖν δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ δοθεῖσα· δέδοται ἄρα τὸ ΑΔΒ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῆς ΒΓ, ΑΕ, ἑκάτερον γὰρ αὐτῶν διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΕ δοθείς. τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ἄρα ὑπὸ τῆς ΒΓ, ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· τῆς ἄρα ΒΓ πρὸς τὴν ΑΕ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐκκείσθω δὴ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΖΗ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΖΗ τμῆμα κύκλου τὸ ΖΘΗ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ ΒΑΓ. δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ἐν τῷ ΖΘΗ τμήματι γωνία· θέσει ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΘΗ τμῆμα. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Η τῇ ΖΗ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΗΚ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΚ. καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΑΕ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΚ. λόγος δὲ τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΑΕ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΖΗ πρὸς τὴν ΗΚ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ ΖΗ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΗΚ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ δοθέν ἐστι τὸ Η· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Κ. ἤχθω διὰ τοῦ Κ τῇ ΖΗ παράλληλος ἡ ΚΘ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ. θέσει





Sit triangulum ΑΒΓ datum angulum habens ad Α; quod autem sub ΒΑ, ΑΓ continetur ad quadratum rectæ ΒΓ habeat rationem datam: dico triangulum ΑΒΓ specie datum esse.

Agantur enim [per 12.1.] à punctis Α, Β ad ΒΓ, ΓΑ perpendiculares ΑΕ, ΒΔ. quoniam itaque angulus ΒΑΔ [ex hyp.] datus est, atque angulus ΑΔΒ etiam datus: triangulum igitur ΑΔΒ [per 40. dat.] specie datum est: ideoque [per 3.def.dat.] ratio ipsius ΑΒ ad ΒΔ data est: ideoque [per 1.6.] & ratio rectanguli sub ΑΒ, ΑΓ, ad rectangulum sub ΑΓ, ΒΔ est data. ei autem quod continetur sub ΑΓ, ΒΔ æquale est id quod continetur sub ΒΓ, ΑΕ; utrumque enim [per 41.1.] duplum est trianguli ΑΒΓ: igitur ratio ejus quod continetur sub ΒΑ, ΑΓ ad id quod continetur sub ΒΓ, ΑΕ data est. ratio autem ejus quod continetur sub ΒΑ, ΑΓ ad quadratum rectæ ΒΓ [ex hyp.] data est: quare [per 8.dat.] & ratio rectanguli sub ΒΓ, ΑΕ ad quadratum rectæ ΒΓ data est: adeoque [per 1.6.] rectæ ΒΓ ad rectam ΑΕ ratio data est. exponatur jam recta ΖΗ positione & magnitudine data; & [per 33.3.] super ΖΗ describatur circuli segmentum ΖΘΗ, quod capiat angulum angulo ΒΑΓ æqualem. angulus autem ΒΑΓ [ex hyp.] datus est: ergo & angulus in segmento ΖΘΗ datus est: quare [per 8.def.dat.] segmentum ΖΘΗ positione datum est. agatur [per 11.1.] à puncto Η rectæ ΖΗ ad angulos rectos recta ΗΚ: ergo [per 29.dat.] ΗΚ positione data est. deinde fiat [per 12.6.] ut ΒΓ ad ΑΕ ita ΖΗ ad ΗΚ. ratio autem ipsius ΒΓ ad ΑΕ [ex supra ostensis] data est: quare & ratio ipsius ΖΗ ad ΗΚ data est. data autem est ΖΗ: ergo [per 2. dat.] & ΗΚ data est. sed & hæc positione data est, datumque est punctum Η: quare [per 27. dat.] & punctum Κ datum est. agatur [per 31.1.] per punctum Κ ipsi ΖΗ parallela ΚΘ; igitur [per 28. dat.] positione data est ΚΘ. positione autem datum est segmentum ΖΘΗ: ergo [per 25. dat.] punctum Θ datum est. connectantur autem ΘΖ, ΘΗ, & agatur perpendicularis ΘΛ: ergo [per 30. dat.] ΘΛ positione data est. datum autem est punctum Θ, & unumquodque punctorum Ζ, Η: igitur [per 26. dat.] unaquæque rectarum ΘΖ, ΖΗ, ΘΗ positione & magnitudine data est: quare triangulum ΘΖΗ specie datum est. & quoniam [per constr.] est ut ΒΓ ad ΑΕ ita ΖΗ ad ΗΚ, estque [per 34. 1.] ΗΚ æqualis ipsi ΛΘ: erit igitur ut ΒΓ ad ΑΕ ita ΖΗ ad ΛΘ. est autem [per constr.] angulus ΒΑΓ æqualis angulo ΖΘΗ: triangulum igitur ΑΒΓ [per 79. dat.] triangulo ΘΖΗ æquiangulum est. triangulum autem ΖΘΗ specie datum est: quare & triangulum ΑΒΓ datum est.

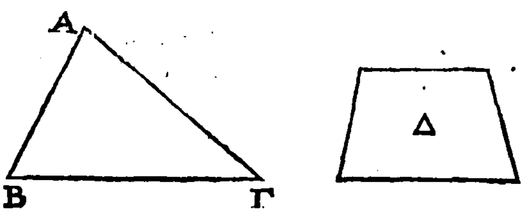


δὲ καὶ τὸ ΖΘΗ τμῆμα· δοθὲν ἄρα ἐςὶ τὸ Θ σημεῖον. ἐπιζεύχθωσαν δὲ αἱ ΘΖ, ΘΗ, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΘΛ· θέσει ἄρα ἐςὶν ἡ ΘΛ. ἔςι δὲ τὸ Θ σημεῖον δοθὲν, ἢ ἑκάτερον τῶν Ζ, Η· δέδοται ἄρα ἑκάςη τῶν ΘΖ, ΖΗ, ΘΗ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει· δέδοται ἄρα τὸ ΘΖΗ τρίγωνον τῷ εἴδει. καὶ ἐπεί ἐςιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΑΕ ὕτως ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΚ, ἴση δὲ ἡ ΗΚ τῇ ΛΘ· ἔςιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΑΕ ὕτως ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΛΘ. καὶ ἔςιν ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΘΗ· ἰσογώνιον ἄρα ἐςὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΘΖΗ τριγώνῳ. δέδοται δὲ τὸ ΖΘΗ τρίγωνον τῷ εἴδει· δέδοται ἄρα καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

ALITER.

Sit triangulum ΑΒΓ quod datum angulum habeat ad Α; ratio autem ejus quod continetur sub ΒΑ, ΑΓ ad quadratum rectæ ΒΓ sit data: dico triangulum ΑΒΓ specie datum esse.

Quoniam enim datus est angulus ΒΑΓ, spatium illud, quo quadratum utriusque simul ΒΑΓ excedit quadratum rectæ ΒΓ, ad triangulum ΑΒΓ [per 67. dat.] rationem datam habet. sit autem Δ spatium, quo quadratum utriusque simul ΒΑΓ excedit quadratum rectæ ΒΓ: ergo ratio ipsius Δ ad triangulum ΑΒΓ data est. trianguli autem ΑΒΓ ad id quod continetur sub ΒΑ, ΑΓ [per 66. dat.] ratio est data; quia datus est angulus ΒΑΓ: ergo [per 8. dat.] ratio spatii Δ ad id quod continetur sub ΒΑ, ΑΓ data est. ejus autem quod continetur sub ΒΑ, ΑΓ ad quadratum rectæ ΒΓ [ex hyp.] data est ratio: quare [per 8. dat.] & ratio spatii Δ ad quadratum rectæ ΒΓ data est: igitur componendo [per 6. dat.] spatii Δ cum quadrato rectæ ΒΓ ad quadratum rectæ ΒΓ ratio est data. sed [per constr.] spatium Δ una cum quadrato rectæ ΒΓ est ipsum quadratum utriusque simul ΒΑΓ: quare ratio quadrati utriusque simul ΒΑΓ ad quadratum rectæ ΒΓ data est: adeoque [per 54. dat.] & ratio utriusque simul ΒΑΓ ad ΒΓ data est. datus etiam est [ex hyp.] angulus ΒΑΓ: triangulum igitur ΑΒΓ [per 45. dat.] specie datum est.



ΑΛΛΩΣ.

Ἔςω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, δεδομένην ἔχον γωνίαν τὴν πρὸς τὸ Α, λόγος δὲ ἔςω τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ δοθείς· λέγω ὅτι δέδοται τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

Ἐπεὶ γὰρ δοθεῖσά ἐςιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία· ᾧ ἄρα μεῖζόν ἐςι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον. ᾧ δή ἐςι μεῖζον τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ἔςω τὸ Δ χωρίον· λόγος ἄρα ἐςὶ τοῦ Δ χωρίου πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον δοθείς. τοῦ δὲ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγος ἐςὶ δοθείς. διὰ τὸ δοθεῖσαν εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· καὶ τοῦ Δ ἄρα χωρίου πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγος ἐςὶ δοθείς. τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ λόγος ἐςὶ δοθείς· καὶ τοῦ Δ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ λόγος ἐςὶ δοθείς· ἢ συνθέντι λόγος ἄρα τοῦ Δ χωρίου μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἐςὶ δοθείς. ἀλλὰ τὸ Δ χωρίον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ ἐςί· λόγος ἄρα τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ δοθείς· ὥςε καὶ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐςὶ δοθείς. καὶ ἔςι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

PROP. LXXXI.

Si tres rectæ, quæ tribus rectis invicem proportionalibus proportionales fuerint, extremas habuerint in ratione data; medias quoque habebunt in ra-

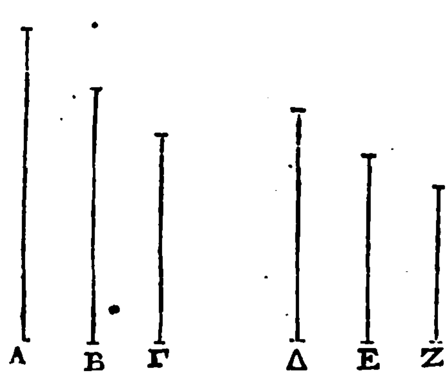
ΠΡΟΤΑΣΙΣ πα΄.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι, ἀνάλογον οὔσαι τρισὶν εὐθείαις ἀνάλογον οὔσαις, τὰς ἄκρας ἐν δεδομένῳ λόγῳ ἔχωσι· καὶ τὰς μέσας ἐν δεδομένῳ λόγῳ ἕξουσι.

ἔξουσι. καὶ ἐὰν ἡ ἄκρα πρὸς τὴν ἄκραν λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ ἡ μέση πρὸς τὴν μέσην· καὶ ἡ λοιπὴ ἄκρα πρὸς λοιπὴν ἄκραν λόγον ἕξει δεδομένον.

Τρεῖς γὰρ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔστωσαν αἱ Α, Β, Γ τρισὶν εὐθείαις ἀνάλογον οὔσαις ταῖς Δ, Ε, Ζ, τὰς ἄκρας ἐν δεδομένῳ λόγῳ ἐχέτωσαν, καὶ τῆς μὲν Α πρὸς τὴν Δ λόγος ἔστω δοθείς, τῆς δὲ Γ πρὸς τὴν Ζ· λέγω ὅτι καὶ τῆς Β πρὸς τὴν Ε λόγος ἐστὶ δοθείς.

Ἐπεὶ γὰρ τῆς μὲν Α πρὸς τὴν Δ, τῆς δὲ Γ πρὸς τὴν Ζ λόγος ἐστὶ δοθείς· λόγος ἄρα τοῦ ὑπὸ τῶν Α, Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ δοθείς. ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Β, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε δοθείς· ὥστε καὶ τῆς Β πρὸς τὴν Ε λόγος ἐστὶ δοθείς.



ΕΣΤΩ δὲ πάλιν τῆς μὲν Α πρὸς τὴν Δ λόγος δοθείς, τῆς δὲ Β πρὸς τὴν Ε λόγος ἔστω δοθείς· λέγω ὅτι καὶ τῆς Γ πρὸς τὴν Ζ λόγος ἐστὶ δοθείς.

Ἐπεὶ γὰρ τῆς μὲν Α πρὸς τὴν Δ, τῆς δὲ Β πρὸς τὴν Ε λόγος ἐστὶ δοθείς· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε δοθείς. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Β ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Ε ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ· λόγος ἄρα τοῦ ὑπὸ τῶν Α, Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ δοθείς. καὶ μιᾶς πλευρᾶς τῆς Α πρὸς μίαν πλευρὰν τὴν Δ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ λοιπῆς ἄρα τῆς Γ πρὸς λοιπὴν τὴν Ζ λόγος ἐστὶ δοθείς.

tione data. & si extrema ad extremam, & media ad mediam, habeat rationem datam; & reliqua extrema ad reliquam extremam rationem datam habebit.

Tres enim rectæ A, B, Γ, proportionales tribus rectis proportionalibus Δ, E, Z, extremas habeant in ratione data; sit nempe ratio ipsius A quidem ad Δ data, ipsius autem Γ ad Z ratio data: dico ipsius quoque B ad E rationem esse datam.

Quoniam enim ipsius A ad Δ, ipsiusque Γ ad Z ratio est data: igitur [per 70.dat.] ratio ejus quod continetur sub A, Γ ad id quod continetur sub Δ, Z data est. sed [per 17.6.] ei quod continetur sub A, Γ æquale est quadratum rectæ B; atque ei quod sub Δ, Z æquale est quadratum rectæ E: ergo ratio quadrati rectæ B ad quadratum rectæ E data est: ideoque [per 54.dat.] ratio rectæ B ad rectam E data est.

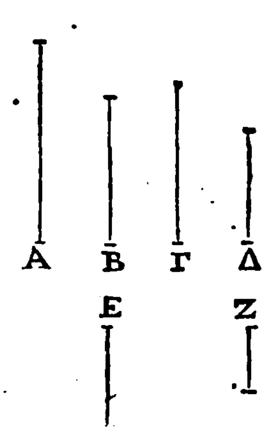
Sit vero rursus ratio ipsius A ad Δ, ipsiusque B ad E data: dico ipsius quoque Γ ad Z rationem datam esse.

Quoniam enim ratio ipsius A ad Δ, & ipsius B ad E data est: ratio igitur quadrati rectæ B ad quadratum rectæ E [per 50. dat.] data est. sed [per 17.6.] quadrato rectæ B æquale est id quod continetur sub A, Γ; & quadrato rectæ E æquale est id quod continetur sub Δ, Z: igitur ratio ejus quod continetur sub A, Γ ad id quod continetur sub Δ, Z data est. ratio autem unius lateris A ad unum latus Δ [ex hyp.] data est: quare [per 68.dat.] & ratio reliqui lateris Γ ad reliquum latus Z data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πβʹ.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν· ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς ἣν ἡ δευτέρα λόγον ἔχει δεδομένον, οὕτως ἡ τρίτη πρὸς ἣν ἡ τετάρτη λόγον ἔχει δεδομένον.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ ἔστω ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· λέγω ὅτι ὡς ἡ Α πρὸς ἣν ἡ Β λόγον ἔχει δεδομένον οὕτως ἡ Γ πρὸς ἣν ἡ Δ λόγον ἔχει δεδομένον.



Ἔστω γὰρ πρὸς ἣν ἡ Β λόγον ἔχει δεδομένον ἡ Ε, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Ε οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ. λόγος δὲ τῆς Β πρὸς τὴν Ε δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς Δ πρὸς τὴν Ζ δοθείς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἔστι δὲ καὶ

Prop. LXXXII.

Si quatuor rectæ proportionales fuerint; erit ut prima ad eam ad quam secunda rationem habet datam, ita tertia ad eam ad quam quarta rationem habet datam.

Sint quatuor rectæ proportionales A, B, Γ, Δ, sitque ut A ad B ita Γ ad Δ: dico ut A ad eam ad quam B rationem habet datam ita esse Γ ad eam ad quam Δ rationem datam habet.

Sit enim E ea ad quam B rationem habet datam; fiatque [per 12.6.] ut B ad E ita Δ ad Z. est autem [ex hyp.] ratio ipsius B ad E data: ergo & ratio ipsius Δ ad Z data est. & quoniam est ut A ad B ita Γ ad Δ, & est etiam [per constr.] ut ut B ad E ita Δ ad Z: erit igitur ex æquo [per 22.5.] ut A ad E ita Γ ad Z. & [ex hyp.] est E quidem ea ad quam B rationem habet datam; atque Z ea ad quam Δ rationem habet datam: quare ut A ad eam ad quam B rationem habet datam ita est Γ ad eam ad quam Δ rationem habet datam.

ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Ε οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ε οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Ζ. καί ἐστιν ἡ μὲν Ε πρὸς ἣν ἡ Β λόγον ἔχει δεδομένον, ἡ δὲ Ζ πρὸς ἣν ἡ Δ λόγον ἔχει δεδομένον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς ἣν ἡ Β λόγον ἔχει δεδομένον οὕτως ἡ Γ πρὸς ἣν ἡ Δ λόγον ἔχει δεδομένον.

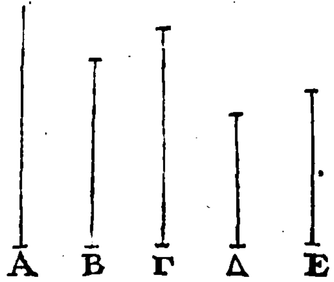
Prop. LXXXIII.

Si quatuor rectæ ita ad invicem se habeant, ut tribus ex iis quibuscunque sumptis, & quarta ipsis utcunque accepta ad quam reliqua è quatuor rectis rationem habet datam, proportionales sint quatuor rectæ; erit ut quarta ad tertiam ita secunda ad eam ad quam prima habet rationem datam.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πγ'.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι οὕτως ἔχωσι πρὸς ἀλλήλας, ὥστε τριῶν ληφθεισῶν ἐξ αὐτῶν ὁποιωνοῦν, καὶ τετάρτης αὐταῖς ληφθείσης ὡς ἔτυχεν πρὸς ἣν ἡ λοιπὴ ἐξ ἀρχῆς τεσσάρων εὐθειῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον, ἀνάλογον γίγνεσθαι τὰς τέσσαρας εὐθείας· ἔσται ὡς ἡ τετάρτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως ἡ δευτέρα πρὸς ἣν ἡ πρώτη λόγον ἔχει δεδομένον.

Sint quatuor rectæ A, B, Γ, Δ ita se habentes ad invicem, ut tribus ex iis quibuscunque sumptis A, B, Γ, & quarta ipsis utcunque accepta, quæ sit E, ad quam Δ rationem habet datam, proportionales sint rectæ A, B, Γ, E: dico ut Δ ad Γ ita esse B ad eam ad quam A habet rationem datam.



Quoniam enim est [ex hyp.] ut A ad B ita Γ ad E; igitur [per 16.6.] quod continetur sub A, E æquale est ei quod continetur sub B, Γ. quoniam vero [ex hyp.] ratio ipsius E ad Δ data est: igitur [per 1.6.] ratio ejus quod continetur sub A, Δ ad id quod continetur sub A, E data est. quod autem continetur sub A, E æquale est contento sub B, Γ: quare & ratio ejus quod continetur sub A, Δ ad id quod continetur sub B, Γ data est: ergo [per 56.dat.] ut Δ ad Γ ita est B ad eam ad quam A habet rationem datam.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ, Δ οὕτως ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας ὥστε τριῶν ὁποιωνοῦν ληφθεισῶν ἐξ αὐτῶν Α, Β, Γ, καὶ τετάρτης αὐταῖς προσληφθείσης ὡς ἔτυχε τῆς Ε, πρὸς ἣν ἡ Δ λόγον ἔχει δεδομένον, ἀνάλογον εἶναι τὰς Α, Β, Γ, Ε εὐθείας· λέγω ὅτι ὡς ἡ Δ πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Β πρὸς ἣν ἡ Α λόγον ἔχει δεδομένον.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Ε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Γ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς Ε πρὸς τὴν Δ δοθείς· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν Α, Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Ε δοθείς. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν Α, Ε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Γ· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν Α, Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Β, Γ δοθείς· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Δ πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Β πρὸς ἣν ἡ Α λόγον ἔχει δεδομένον.

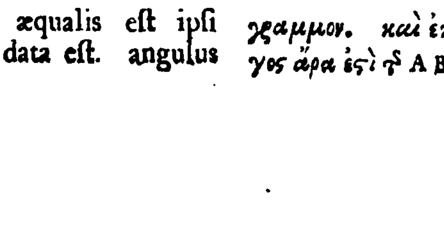
Prop. LXXXIV.

Si duæ rectæ spatium datum comprehendant in angulo dato, sitque altera altera major data; etiam unaquæque ipsarum data erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πδ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δοθὲν χωρίον περιέχωσιν ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ, ἡ δὲ ἑτέρα τῆς ἑτέρας δοθείσῃ μείζων ᾖ· καὶ ἑκατέρα αὐτῶν ἔσται δοθεῖσα.

Duæ enim rectæ AB, BΓ datum spatium AΓ comprehendant in angulo dato ABΓ; sitque ΓB ipsa BA major, data: dico unamquamque rectarum AB, BΓ datam esse.



Quoniam enim ΓB major est quam ipsa BA, data; sit linea data ipsa ΔΓ: igitur [per 2. def.dat.] reliqua ΔB ipsi BA æqualis est. compleatur parallelogrammum AΔ. & quoniam AB æqualis est ipsi BΔ: ratio ipsius AB ad BΔ data est. angulus

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ δοθὲν χωρίον περιεχέτωσαν τὸ ΑΓ ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ ΓΒ τῆς ΒΑ δοθείσῃ μείζων ἔστω· λέγω ὅτι δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΒΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΓΒ τῆς ΒΑ δοθείσῃ μείζων ἐστὶ, δοθεῖσα ἔστω ἡ ΔΓ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΒ τῇ ΒΑ ἴση ἐστί. συμπεπληρώσθω τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς. δοθεῖσα

δὲ

δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΑΔ τῷ εἴδει. ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΓ δοθὲν παρὰ δοθεῖσαν τὴν ΔΓ παραβέβληται ὑπερβάλλον εἴδει δεδομένῳ τῷ εἴδει τῷ ΑΔ· δέδοται τὸ πλάτος τῆς ὑπερβολῆς· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΔΓ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΒΓ δοθεῖσά ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ δοθεῖσα· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΒ, ΒΓ δοθεῖσά ἐστι.

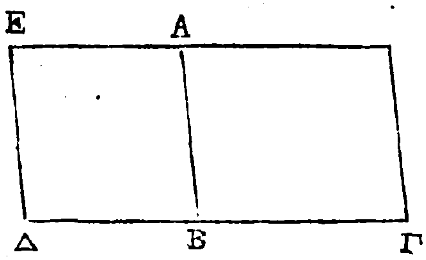
vero ΑΒΔ [ex hyp.] datus eſt: quare ΑΔ ſpecie datum eſt. quoniam itaque datum ſpatium ΑΓ ad datam rectam ΔΓ applicatum eſt, excedens data ſpecie figura ΑΔ: latitudo igitur exceſſus [per 59. dat.] data eſt; quare ΒΔ data eſt. ſed & ΔΓ [ex hyp.] data eſt: ergo [per 3.dat.] & tota ΒΓ data eſt. data autem eſt ΑΒ: quare utraque rectarum ΑΒ, ΒΓ data eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πε΄.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δοθὲν χωρίον περιέχωσιν ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ, ᾖ δὲ συναμφότερος δοθεῖσα· καὶ ἑκατέρα αὐτῶν ἔσται δοθεῖσα.

ΔΥΟ γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ δοθὲν χωρίον ΑΓ περιεχέτωσαν ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἔστω συναμφότερος ἡ ΑΒΓ δοθεῖσα· λέγω ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΒΓ δοθεῖσά ἐστι.

Διήχθω γὰρ ἡ ΓΒ ἐπὶ τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ διὰ τοῦ Δ τῇ ΒΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΒ τῇ ΒΑ, καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία, ἐπεὶ καὶ ἡ ἐφεξῆς αὐτῇ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΕΒ τῷ εἴδει. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστι συναμφότερος ἡ ΑΒΓ, ἴση δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· δοθεῖσα ἄρα ἡ ΔΓ. ἐπεὶ οὖν δοθὲν τὸ ΑΓ παρὰ δοθεῖσαν τὴν ΔΓ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει δεδομένῳ τῷ εἴδει ΕΒ· δέδοται τὰ πλάτη τοῦ ἐλλείμματος· δοθεῖσαι ἄρα εἰσὶν αἱ ΑΒ, ΒΔ. ἀλλὰ καὶ συναμφότερος ἡ ΑΒΓ δοθεῖσά ἐστι· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΒΓ.



Prop. LXXXV.

Si duæ rectæ datum ſpatium comprehendant in angulo dato, ſitque ſimul utraque data; & earum etiam unaquæque data erit.

DUÆ enim rectæ ΑΒ, ΒΓ datum ſpatium ΑΓ comprehendant in angulo dato ΑΒΓ, & utraque ſimul rectarum ΑΒΓ data ſit: dico unamquamque rectarum ΑΒ, ΒΓ datam eſſe.

Producatur enim ΓΒ ad punctum Δ, & ponatur ipſi ΑΒ æqualis ΒΔ, atque per punctum Δ ipſi ΒΑ parallela agatur ΔΕ, compleaturque ΑΔ. quoniam igitur æqualis eſt ΔΒ ipſi ΒΑ, atque datus eſt angulus ΑΒΔ; nam qui eſt ipſi deinceps [ex hyp.] datus eſt: parallelogrammum igitur ΕΒ ſpecie datum eſt. & quoniam data eſt, [ex hyp.] ſimul utraque ΑΒΓ; eſtque [per conſtr.] ΑΒ æqualis ipſi ΒΔ: recta igitur ΔΓ [per 3.dat.] data eſt. quoniam itaque ad datam rectam ΔΓ datum ſpatium ΑΓ applicatum eſt, deficiens data ſpecie figura ΕΒ: igitur [per 58. dat.] latitudines defectus datæ ſunt: quare rectæ ΑΒ, ΒΔ datæ ſunt. at vero [ex hyp.] utraque ſimul ΑΒΓ data eſt: unaquæque igitur rectarum ΑΒ, ΒΓ [per 4.dat.] data eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πϛ΄.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δοθὲν χωρίον περιέχωσιν ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μιᾶς τοῦ ἀπὸ τῆς ἑτέρας, δοθέντι, μεῖζον ᾖ ἢ ἐν λόγῳ· καὶ ἑκατέρα αὐτῶν ἔσται δοθεῖσα.

Η ὡς ἐν ἄλλῳ ἀντιτύπῳ ἀναγινώσκεται.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δοθὲν χωρίον περιέχωσιν ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ, δύνηται δὲ ἡ ἑτέρα τῆς ἑτέρας, δοθέντι, μεῖζον ἢ ἐν λόγῳ· καὶ ἑκατέρα αὐτῶν δοθεῖσα ἔσται.

ΔΥΟ γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ δοθὲν χωρίον περιεχέτωσαν τὸ ΑΓ ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΒΓ δοθεῖσά ἐστι.

Prop. LXXXVI.

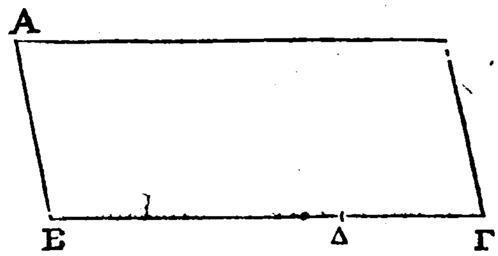
Si duæ rectæ datum ſpatium comprehendant in angulo dato, quadratum autem unius quadrato alterius majus ſit, dato, quam in ratione; & utraque ipſarum data erit.

Vel ut legitur in alio exemplari.

Si duæ rectæ datum ſpatium comprehendant in angulo dato, poſſit autem altera altera majus, dato, quam in ratione; & utraque ipſarum data erit.

DUÆ enim rectæ ΑΒ, ΒΓ datum ſpatium ΑΓ comprehendant in angulo dato ΑΒΓ; quadratum autem rectæ ΒΓ quadrato rectæ ΑΒ majus ſit, dato, quam in ratione: dico utramque rectarum ΑΒ, ΒΓ datam eſſe.

Quoniam enim quadratum rectæ ΓΒ quadrato rectæ ΒΑ majus est, dato, quam in ratione; auferatur datum, sitque id quod continetur sub ΓΒ, ΒΔ: ergo [per 11.def.dat.] ratio reliqui, quod nempe continetur sub ΒΓ, ΓΔ, ad quadratum rectæ ΑΒ data est. quoniam vero datum est id quod continetur sub ΑΒ, ΒΓ, atque etiam illud quod continetur sub ΓΒ, ΒΔ datum: ratio igitur ejus quod continetur sub ΑΒ, ΒΓ ad id quod continetur sub ΓΒ, ΒΔ [per 1.dat.] data est. ut autem id quod continetur sub ΑΒ, ΒΓ ad id quod continetur sub ΓΒ, ΒΔ ita [per 1.6.] est ΑΒ ad ΒΔ: quare ratio rectæ ΑΒ ad rectam ΒΔ data est: ideoque [per 50. dat.] ratio quadrati rectæ ΑΒ ad quadratum rectæ ΒΔ data est. datur autem ratio ejus quod continetur sub ΒΓ, ΓΔ ad quadratum rectæ ΑΒ: ergo [per 8.dat.] & ratio ejus quod continetur sub ΒΓ, ΓΔ ad quadratum rectæ ΒΔ data est: quare ratio ejus quod quater continetur sub ΒΓ, ΓΔ ad quadratum rectæ ΒΔ data est; ideoque [per 6.dat.] & ratio ejus quod quater continetur sub ΒΓ, ΓΔ una cum quadrato rectæ ΒΔ ad quadratum rectæ ΒΔ data est. sed [per 8.2.] id quod quater continetur sub ΒΓ, ΓΔ una cum quadrato rectæ ΒΔ est quadratum utriusque simul ΒΓ, ΓΔ: ratio igitur quadrati utriusque simul ΒΓ, ΓΔ ad quadratum rectæ ΒΔ data est: quare [per 54.dat.] & ratio utriusque simul ΒΓ, ΓΔ ad ΒΔ data est: ergo [per 6.dat.] & componendo ratio rectarum ΒΓ, ΓΔ, necnon ipsius ΒΔ, id est duarum ΓΒ, ad ΒΔ data est: quare & ratio unius ΓΒ ad ΒΔ data est. ut autem ΓΒ ad ΒΔ ita [per 1.6.] quod continetur sub ΓΒ, ΒΔ ad quadratum rectæ ΒΔ: ergo & ratio ejus quod continetur sub ΓΒ, ΒΔ ad quadratum rectæ ΒΔ data est. datum autem est [per constr.] id quod continetur sub ΓΒ, ΒΔ: quare [per 2. dat.] & quadratum rectæ ΒΔ datum est: ideoque data est recta ΒΔ: igitur [per 2.dat.] & ipsa ΒΓ data est; nam & ratio ipsius ΒΔ ad ΒΓ data est, & ipsa ΒΔ data. at vero [ex hyp.] datum est spatium ΑΓ, angulusque ΑΒΓ datus: quare [per 57. dat.] data est ΑΒ: utraque igitur rectarum ΑΒ, ΒΓ data est.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΑ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφῃρήσθω τὸ δοθέν, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἐπεὶ δοθέν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ δοθέν· τοῦ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ· ὥστε καὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ τετράκις ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ τετράκις ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἀλλὰ τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου ἐστὶ τῆς ΒΓ, ΓΔ· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΓ, ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ δοθείς· ὥστε καὶ συναμφοτέρου τῆς ΒΓ, ΓΔ πρὸς τὴν ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ συνθέντι ἄρα τῶν ΒΓ, ΓΔ καὶ τῆς ΒΔ, τουτέστι δύο τῶν ΓΒ, πρὸς τὴν ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ μιᾶς τῆς ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. ὡς δὲ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ· καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ· ὥστε καὶ ἡ ΒΓ δοθεῖσά ἐστι, τῆς γὰρ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς, καὶ δέδοται ἡ ΒΔ. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ΑΓ, καὶ δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΒ, ΒΓ δοθεῖσά ἐστι.

Prop. LXXXVII.

Si duæ rectæ datum spatium comprehendant in angulo dato, possit autem altera altera majus, dato; & earum utraque data erit.

DUÆ enim rectæ ΑΒ, ΒΓ datum spatium ΑΓ comprehendant in angulo dato ΑΒΓ; quadratum autem rectæ ΑΒ quadrato rectæ ΒΓ majus sit, dato: dico utramque ipsarum ΑΒ, ΒΓ datam esse.

Quoniam enim quadratum rectæ ΑΒ quadrato rectæ ΒΓ majus est, dato; auferatur datum, sit-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πζʹ.

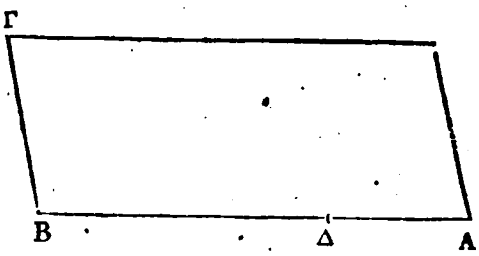
Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δοθὲν χωρίον περιέχωσιν ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μείζονος τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος, δοθέντι, μεῖζον ᾖ· καὶ ἑκατέρα αὐτῶν δοθεῖσα ἔσται.

ΔΥΟ γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ δοθὲν χωρίον περιεχέτωσαν τὸ ΑΓ ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΒ, δοθέντι, μεῖζον ἔστω τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ· λέγω ὅτι δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΒΓ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν, ἀφῃρήσθω τὸ δοθέν, καὶ ἔστω

τὸ

τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ. καὶ ἐπεὶ δοθέν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ δοθέν· λόγος ἄρα τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ δοθείς. καὶ ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς· τοῦ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ δοθείς· καὶ τοῦ τετράκις ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ δοθείς· λόγος ἄρα τοῦ τετράκις ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ δοθείς. ἀλλὰ τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ ἐστὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑ, ΑΔ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ δοθείς· λόγος ἄρα συναμφοτέρου τῆς ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ δοθείς. καὶ συνθέντι συναμφοτέρου τῆς ΒΑ, ΑΔ μετὰ τῆς ΒΔ, τουτέστι δύο τῶν ΑΒ, πρὸς τὴν ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ μιᾶς ἄρα τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. τῆς δὲ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΑΒ ἄρα πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ, οὕτω γὰρ δοθὲν ἀφῄρηται· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· δοθεῖσα ἄρα ἡ ΑΒ. καὶ ἔστι λόγος τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΒΓ.



que id quod continetur sub A B, B Δ; ergo reliquum, quod sc. [per 2.2.] continetur sub B A, A Δ, æquale est quadrato rectæ B Γ. quoniam vero id quod continetur sub A B, B Γ, necnon id quod continetur sub A B, B Δ, datum est: ratio igitur ejus quod continetur sub A B, B Δ ad id quod continetur sub A B, B Γ [per 1. dat.] data est. atque ut rectangulum sub A B, B Δ ad rectangulum sub A B, B Γ ita est Δ B ad B Γ: ergo datur ratio rectæ Δ B ad rectam B Γ; adeoque [per 50. dat.] ratio quadrati rectæ Δ B ad quadratum rectæ B Γ data est. quadrato autem rectæ B Γ æquale est [per constr. & 2. 2.] rectangulum sub B A, A Δ: igitur ratio rectanguli sub B A, A Δ ad quadratum rectæ Δ B data est: ideoque & ratio ejus quod quater continetur sub B A, A Δ ad quadratum rectæ Δ B data est: quare & ratio ejus quod quater continetur sub B A, A Δ una cum quadrato rectæ Δ B ad quadratum rectæ Δ B data est. sed id quod quater continetur sub B A, A Δ una cum quadrato rectæ Δ B est [per 8. 2.] quadratum utriusque simul B A, A Δ: igitur ratio quadrati utriusque simul B A, A Δ ad quadratum rectæ Δ B data est: quare [per 54. dat.] & ratio utriusque simul B A, A Δ ad Δ B data est. atque componendo [per 6. dat.] ratio utriusque simul B A, A Δ & ipsius B Δ, hoc est duarum A B, ad B Δ data est: ergo & ratio unius A B ad B Δ data est. at vero ratio Δ B ad B Γ data est: ergo [per 8. dat.] & ratio ipsius A B ad B Γ data est. & quoniam ratio ipsius A B ad B Δ data est; atque [per 1. 6.] est ut A B ad B Δ ita quadratum rectæ A B ad id quod continetur sub A B, B Δ: ratio igitur quadrati rectæ A B ad id quod continetur sub A B, B Δ data est. datum autem est id quod continetur sub A B, B Δ; sic enim ablatum fuit spatium datum: ergo [per 2. dat.] & quadratum rectæ A B datum est: quare data est recta A B. est autem ratio ipsius A B ad B Γ data: recta igitur B Γ data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πη΄.

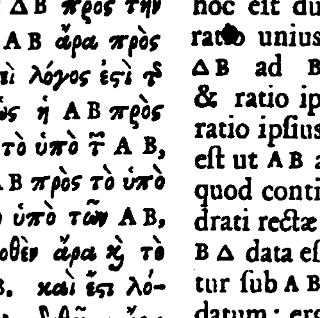
Ἐὰν εἰς κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἀπολαμβάνουσα τμῆμα δεχόμενον γωνίαν δοθεῖσαν· δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῷ μεγέθει.

Prop. LXXXVIII.

Si in circulum magnitudine datum acta sit recta linea, segmentum auferens quod angulum datum comprehendat; acta recta magnitudine data est.

Εἰς γὰρ κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει τὸν ΑΒΓ ἤχθω ἡ ΑΓ, ἀπολαμβάνουσα τμῆμα τὸ ΑΕΓ δεχόμενον γωνίαν ΑΕΓ δοθεῖσαν· λέγω ὅτι ἡ ΑΓ δέδοται τῷ μεγέθει.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΔ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΕ. δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΕ, ὀρθὴ γάρ ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΓ



In circulum enim magnitudine datum A B Γ agatur recta linea A Γ, auferens segmentum A E Γ quod comprehendat angulum datum A E Γ: dico rectam A Γ magnitudine datam esse.

Sumatur enim [per 1. 3.] circuli centrum Δ, & connexa recta A Δ producatur ad punctum E, atque connectatur Γ E. datus igitur est angulus A Γ E; etenim [per 31. 3.] rectus est. angulus quoque A E Γ [ex hyp.] datus

datus est: quare & reliquus angulus ΓAE [per 32. 1. & 4.dat.] datus est: triangulum igitur AΓE [per 40. dat.] specie datum est; adeoque ratio ipsius EA ad AΓ [per 3. def. dat.] data est. est autem [per 5.def.dat.] EA magnitudine data; quia datur circulus magnitudine: ergo [per 2. dat.] & ipsa AΓ magnitudine data est.

δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΑΕ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΓΕ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΕΑ πρὸς τὴν ΑΓ δοθείς· δοθεῖσα δὲ ἡ ΕΑ τῷ μεγέθει, ἐπεὶ καὶ ὁ κύκλος δέδοται τῷ μεγέθει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῷ μεγέθει.

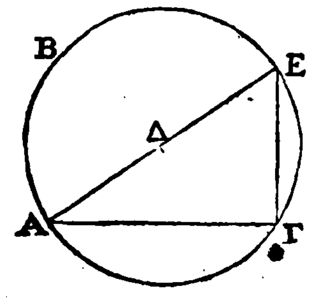
PROP. LXXXIX.

Si in datum magnitudine circulum datâ magnitudine recta acta fuerit; auferet segmentum quod angulum datum comprehendet.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πθ'.

Ἐὰν εἰς κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ δεδομένη τῷ μεγέθει· ἀπολήψεται τμῆμα δεχόμενον γωνίαν δοθεῖσαν.

IN circulum enim magnitudine datum ABΓ agatur recta magnitudine data AΓ: dico quod auferet segmentum quod angulum datum comprehendet.



Accipiatur enim [per 1.3.] circuli centrum Δ, & connexa recta AΔ producatur ad punctum E, connectaturque ΓE. & quoniam data est utraque rectarum EA, AΓ: igitur [per 1. dat.] ratio ipsius EA ad AΓ data est. rectus autem est [per 31.3.] angulus AΓE: quare [per 44. dat.] triangulum AΓE specie datum est: angulus igitur AEΓ [per 3.def.dat.] datus est.

Εἰς γὰρ κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει τὸν ΑΒΓ εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ΑΓ δεδομένη τῷ μεγέθει· λέγω ὅτι ἀπολήψεται τμῆμα δεχόμενον γωνίαν δοθεῖσαν.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΔ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΕ. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΕΑ, ΑΓ· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΕΑ πρὸς τὴν ΑΓ δοθείς. καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΑΓΕ τρίγωνον τῷ εἴδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΓ γωνία.

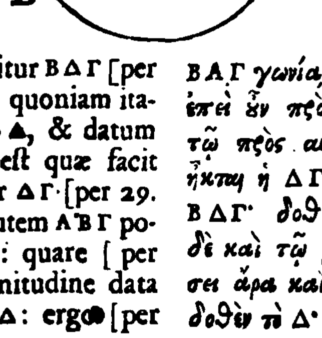
PROP. XC.

Si in circuli positione dati circumferentia acceptum fuerit datum punctum, ab eo autem puncto ad circumferentiam circuli inflexa fuerit recta linea quæ datum angulum efficiat; inflexæ rectæ altera extremitas data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϟ'.

Ἐὰν κύκλου δεδομένου τῇ θέσει ἐπὶ τῆς περιφερείας δοθὲν σημεῖον ληφθῇ, ἀπὸ δὲ τούτου πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν κλασθῇ τις εὐθεῖα δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν· δέδοται τὸ ἕτερον πέρας τῆς κλασθείσης.

IN circuli enim positione dati ABΓ circumferentia accipiatur punctum datum B, atque à puncto B inflectatur recta BAΓ quæ faciat angulum BAΓ datum: dico punctum Γ datum esse.



Accipiatur enim [per 1. 3.] circuli centrum Δ, & connectantur BΔ, ΔΓ. & quoniam datum est utrumque punctorum B, Δ: igitur [per 26.dat.] positione data est BΔ. & quoniam datus est angulus BAΓ: angulus igitur BΔΓ [per 20.3. & 2. dat.] datus quoque est. quoniam itaque ad datam positione rectam BΔ, & datum in ea punctum Δ, recta ΔΓ acta est quæ facit angulum BΔΓ datum: recta igitur ΔΓ [per 29. dat.] positione data est. circulus autem ABΓ positione & magnitudine datus est: quare [per 25. & 26. dat.] positione & magnitudine data est ΔΓ. datum autem est punctum Δ: ergo [per 27.dat.] punctum Γ datum est.

Κύκλου γὰρ τῇ θέσει δεδομένου τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς περιφερείας δοθὲν σημεῖον τὸ Β, ἀπὸ δὲ τοῦ Β σημείου κεκλάσθω εὐθεῖα ἡ ΒΑΓ δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ· λέγω ὅτι δέδοται τὸ Γ σημεῖον.

Εἰλήφθω γὰρ τοῦ κύκλου τὸ κέντρον τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΔ, ΔΓ. καὶ ἐπεὶ δοθέν ἐστιν ἑκάτερον τῶν Β, Δ, θέσει ἐστὶν ἡ ΒΔ. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΓ. ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει δεδομένῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΔ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ, εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΔΓ δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΔΓ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ θέσει. θέσει δὲ καὶ τῷ μεγέθει δοθεὶς ὁ ΑΒΓ κύκλος· θέσει ἄρα καὶ τῷ μεγέθει δοθεῖσά ἐστιν ἡ ΔΓ. καὶ δοθὲν τὸ Δ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Γ σημεῖον.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϟα'.

Ἐὰν ἀπὸ δεδομένου σημείου, τοῦ θέσει δεδομένου κύκλου ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἀχθῇ· δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.

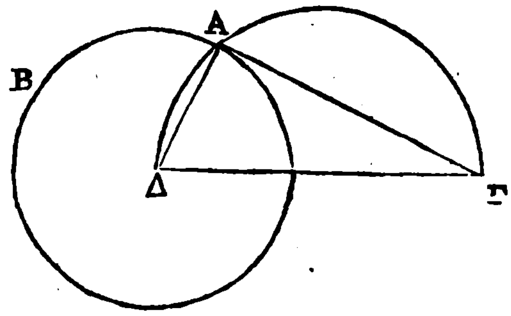
Ἀπὸ γὰρ δεδομένου σημείου τοῦ Γ, θέσει δεδομένου κύκλου τοῦ ΑΒ ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἤχθω ἡ ΓΑ· λέγω ὅτι ἡ ΓΑ εὐθεῖα δέδοται τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.

Εἰλήφθω γὰρ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΓ. καὶ ἐπεὶ δοθέν ἐστιν ἑκάτερον τῶν Δ, Γ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΓ. καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει διὰ τοῦ Α. ἤχθω καὶ ἔστω ὁ ΔΑΓ· θέσει ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΑΓ. θέσει δὲ καὶ ὁ ΑΒ κύκλος δοθείς· ἔστιν ἄρα τὸ Α δοθέν. ἀλλὰ καὶ τὸ Γ δοθέν ἐστι· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.

PROP. XCI.

Si à dato puncto recta linea acta fuerit, quæ datum positione circulum contingat; acta recta positione & magnitudine data est.

A Dato enim puncto Γ datum positione circulum ΑΒ contingens recta ΓΑ ducatur: dico positione & magnitudine datam esse rectam ΓΑ.



Sumatur enim [per 1.3.] circuli centrum Δ, & connectantur rectæ ΔΑ, ΔΓ. & quoniam utrumque punctorum Δ, Γ datum est: recta igitur ΔΓ [per 26. dat.] positione & magnitudine data est. & [per 18.3.] rectus est angulus ΔΑΓ: ergo [per 31. 3.] super ΔΓ descriptus semicirculus transibit per punctum Α. transeat, sitque ΔΑΓ: ergo [per 6.def.dat.] positione datus est circulus ΔΑΓ. est autem [ex hyp.] circulus ΑΒ positione datus: quare [per 25. dat.] punctum Α datum est. sed & punctum Γ [ex hyp.] datum est: recta igitur ΑΓ [per 26. dat.] positione & magnitudine data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϟβ'.

Ἐὰν κύκλου δεδομένου τῇ θέσει ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς δοθέν, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου εἰς τὸν κύκλον διαχθῇ εὐθεῖα· τὸ ὑπὸ τῆς ἀχθείσης καὶ τῆς μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας περιεχόμενον ὀρθογώνιον δοθέν ἐστι.

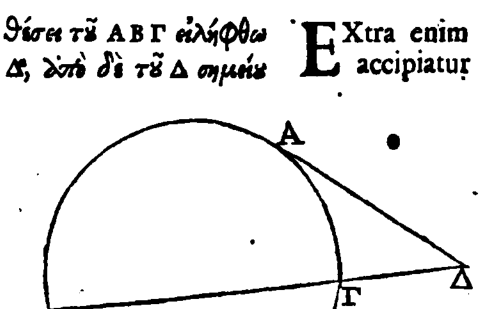
Κύκλου γὰρ δεδομένου τῇ θέσει τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ σημείου διήχθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΒ τέμνουσα τὸν κύκλον· λέγω ὅτι δοθέν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἡ ΔΑ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει. ἐπεὶ οὖν δοθεῖσά ἐστιν ἡ ΑΔ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ.

PROP. XCII.

Si extra circulum positione datum accipiatur aliquod punctum, à dato autem puncto in circulum ducatur recta quædam; rectangulum sub ducta linea & ea quæ inter punctum & convexam peripheriam interjicitur datum erit.

Extra enim datum positione circulum ΑΒΓ accipiatur aliquod punctum Δ; à puncto autem Δ agatur quædam recta ΔΒ secans circulum: dico rectangulum sub ΒΔ, ΔΓ datum esse.



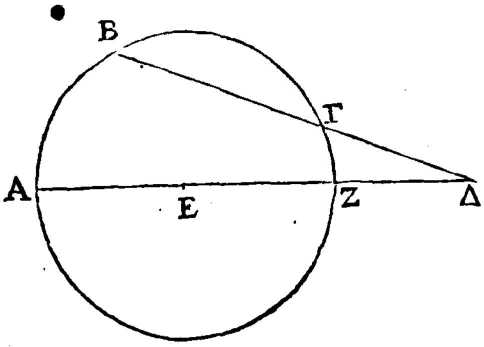
Agatur enim [per 17. 3.] à puncto Δ circulum ΑΒΓ contingens recta ΔΑ: recta igitur ΔΑ [per 91.dat.] positione & magnitudine data est. quoniam itaque data est ΑΔ: etiam quadratum rectæ ΑΔ [per 52. dat.] datum est. & [per 36.3.] æquale quidem est ei quod continetur sub ΒΔ, ΔΓ: quare & id quod continetur sub ΒΔ, ΔΓ datum est.

ΑΛΛΩΣ.

Εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Α. καὶ ἐπεὶ

ALITER.

Accipiatur [per 1.3.] circuli centrum Ε, & jungatur ΔΕ & producatur ad punctum Α. & quoniam tum est [ex hyp.] utrumque punctorum E, Δ: recta igitur EΔ [per 26. dat.] positione & magnitudine data est. circulus autem ABZ [ex hyp.] datus est magnitudine & positione: utrumque igitur punctorum A, Z [per 25. dat.] datum est. datum autem [ex hyp.] est punctum Δ: utraque igitur rectarum AΔ, ZΔ [per 26. dat.] data est: quare quod continetur sub AΔ, ΔZ datum est. & [per 36. 3.] id quod continetur sub AΔ, ΔZ æquale est ei quod continetur sub BΔ, ΔΓ: ergo & id quod continetur sub BΔ, ΔΓ datum est.



δοθέν ἐστιν ἑκάτερον τῶν E, Δ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ EΔ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει. δέδοται δὲ καὶ ὁ ABZ κύκλος· δοθὲν ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν A, Z. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ Δ δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν AΔ, ZΔ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AΔ, ΔZ. καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν AΔ, ΔZ τῷ ὑπὸ τῶν BΔ, ΔΓ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν BΔ, ΔΓ.

Prop. XCIII.

Si intra datum positione circulum sumatur aliquod datum punctum, per punctum autem agatur in circulum recta aliqua linea; quod sub segmentis actæ rectæ lineæ comprehenditur rectangulum datum erit.

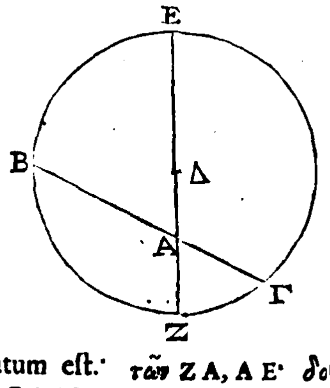
Etenim intra circulum positione datum BΓ sumatur aliquod punctum datum A; per punctum autem A agatur quævis recta ΓB: dico rectangulum sub BA, AΓ datum esse.

Accipiatur enim [per 1. 3.] circuli centrum Δ, & connexa recta AΔ producatur ad puncta Z, E. itaque quoniam datum est [ex hyp.] utrumque punctorum Δ, A: igitur [per 26. dat.] positione data est recta ΔA. est autem & circulus ΓBZ [ex hyp.] positione datus: utrumque igitur punctorum Z, E [per 25. dat.] datum est. punctum autem A [ex hyp.] datum est: ergo [per 26. dat.] utraque rectarum ZA, AE data est: ideoque rectangulum sub ZA, AE datum est. & [per 35. 3.] est æquale rectangulo sub BA, AΓ: igitur rectangulum sub BA, AΓ datum est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϟγʹ.

Ἐὰν κύκλου δεδομένου τῇ θέσει ληφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς δοθέν, διὰ δὲ τοῦ σημείου διαχθῇ τις εὐθεῖα εἰς τὸν κύκλον· τὸ ὑπὸ τῶν τῆς ἀχθείσης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον δοθὲν ἔσται.

Κύκλου γὰρ δεδομένου τῇ θέσει τοῦ BΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐντὸς τὸ A δοθέν, διὰ δὲ τοῦ A διήχθω τις εὐθεῖα ἡ ΓB· λέγω ὅτι δεδομένον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν BA, AΓ.



Εἰλήφθω γὰρ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ AΔ διήχθω ἐπὶ τὰ Z, E. ἐπεὶ οὖν δοθέν ἐστιν ἑκάτερον τῶν Δ, A· θέσει ἄρα καὶ ἡ ΔA. θέσει δὲ καὶ ὁ ΓBZ κύκλος· δοθὲν ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν Z, E. ἔστι δὲ καὶ τὸ A δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ZA, AE· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ZA, AE. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν BA, AΓ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν BA, AΓ.

Prop. XCIV.

Si in circulum magnitudine datum agatur recta linea, segmentum auferens quod angulum datum comprehendat, angulus autem qui in segmento consistit bifariam secetur: utraque simul rectarum, quæ angulum datum comprehendunt, ad lineam, quæ angulum bifariam secat, habebit rationem datam; & rectangulum sub utrisque simul, quæ datum angulum comprehendunt, rectis & inferne abscissa ab ea, quæ angulum in circumferentia datum bifariam secat, datum erit.

In circulum enim magnitudine datum ABΓ agatur recta BΓ, segmentum auferens quod da-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϟδʹ.

Ἐὰν εἰς κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἀπολαμβάνουσα τμῆμα δεχόμενον γωνίαν δοθεῖσαν, καὶ ἡ ἐν τῷ τμήματι γωνία δίχα τμηθῇ· συναμφότεροι αἱ τὴν δεδομένην γωνίαν περιέχουσαι πλευραὶ πρὸς τὴν δίχα τέμνουσαν τὴν γωνίαν λόγον ἕξουσι δεδομένον, καὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς τὴν δεδομένην γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν καὶ τῆς κάτω ἀπολαμβανομένης ἀπὸ τῆς δίχα τεμνούσης τὴν γωνίαν πρὸς τῇ περιφερείᾳ δοθὲν ἔσται.

Εἰς γὰρ κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει τὸν ABΓ εὐθεῖα ἤχθω ἡ BΓ, ἀπολαμβάνουσα τμῆμα δε-

χόμενον

χόμενον γωνίαν δοθεῖσαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τῇ ΑΔ εὐθείᾳ· λέγω ὅτι λόγος ἐστὶ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ δοθείς, καὶ ὅτι δοθέν ἐστι τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ καὶ τῆς ΕΔ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ. καὶ ἐπεὶ εἰς κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει τὸν ΑΒΓ διῆκται εὐθεῖα ἡ ΒΓ, ἀπολαμβάνουσα τμῆμα τὸ ΒΑΓ δεχόμενον γωνίαν δοθεῖσαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῷ μεγέθει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΔ δοθεῖσά ἐστι τῷ μεγέθει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται τῇ ΑΔ εὐθείᾳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΓ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ· καὶ ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ. καὶ ἐπεὶ ἐστιν ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΑΓ, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΔΕ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΕΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως συναμφότερος ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ· ἔστιν ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΔ. λόγος δὲ τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ δοθείς.

ΛΕΓΩ ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ καὶ τῆς ΔΕ δοθέν ἐστι.

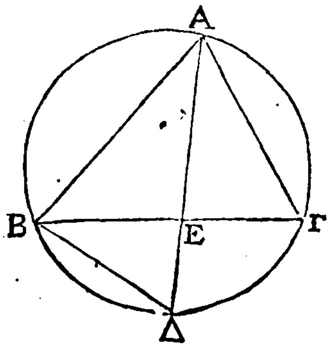
Ἐπεὶ γὰρ ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΕΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΒ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ· ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἐστὶ συναμφότερος ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ· ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ καὶ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ. δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ καὶ τῆς ΕΔ.

ΑΛΛΩΣ.

Διήχθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ Ε, καὶ κείσθω τῇ ΒΓ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΒ, ΒΔ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ ἑκατέρας τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΒΕ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΔ, τουτέστι τῇ ὑπὸ ΑΒΔ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΓ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΒΕ ἐστὶν ἴση. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΑΒ τῇ ὑπὸ ΓΔΒ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΕΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΓΒ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ

tum angulum ΒΑΓ comprehendat, & secetur angulus ΒΑΓ bifariam recta ΑΔ: dico rationem utriusque simul rectæ ΒΑΓ ad ΑΔ datam esse; necnon datum esse id quod sub utraque simul ΒΑΓ & recta ΕΔ continetur.

Connectatur ΒΔ. & quoniam in circulum ΑΒΓ magnitudine datum acta est recta ΒΓ, auferens segmentum ΒΑΓ quod angulum datum ΒΑΓ comprehendat: magnitudine igitur [per 88. dat.] data est recta ΒΓ. similiter data est recta ΒΔ: igitur ratio ipsius ΒΓ ad ΒΔ [per 1. dat.] data est. quoniam vero [ex hyp.] angulus ΒΑΓ recta ΑΔ bifariam sectus est: est igitur [per 3. 6.] ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΒΕ ad ΕΓ: ideoque [per 16. 5.] permutando, ut ΑΒ ad ΒΕ ita est ΑΓ ad ΓΕ: quare [per 12. 5.] ut utraque ΒΑΓ ad ΒΓ ita ΑΓ ad ΓΕ. & quoniam angulus ΒΑΕ angulo ΕΑΓ æqualis est; estque [per 21. 3.] angulus ΑΓΕ angulo ΒΔΕ æqualis: reliquus igitur angulus ΑΕΓ reliquo angulo ΑΒΔ [per 32. 1.] æqualis est: adeoque æquiangulum est triangulum ΑΕΓ triangulo ΑΒΔ: quare [per 4. 6.] ut ΑΓ ad ΓΕ ita est ΑΔ ad ΔΒ. sed [ex mox ostensis] ut ΑΓ ad ΓΕ ita est utraque ΒΑΓ ad ΒΓ: igitur ut utraque simul ΒΑΓ ad ΒΓ ita ΑΔ ad ΔΒ: ideoque permutando ut utraque ΒΑΓ ad ΑΔ ita est ΒΓ ad ΒΔ. est autem ratio ipsius ΒΓ ad ΒΔ data: ergo & ratio utriusque simul ΒΑΓ ad ΑΔ data est.

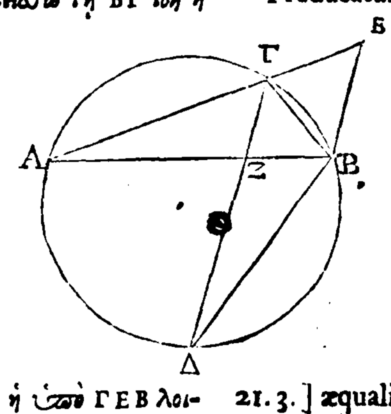


Dico insuper rectangulum sub utraque simul ΒΑΓ & ΔΕ datum esse.

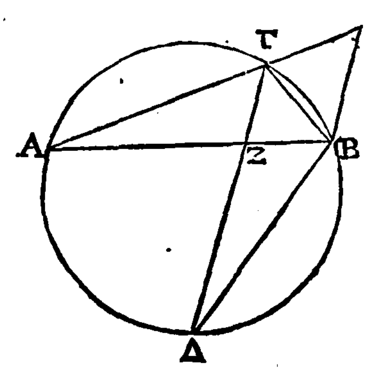
Quoniam enim [per 15. 1. & 21. 3.] triangulum ΑΕΓ triangulo ΔΕΒ æquiangulum est: est igitur [per 4. 6.] ut ΒΔ ad ΔΕ ita ΑΓ ad ΓΕ. ut autem ΑΓ ad ΓΕ ita est [ex supra ostensis] utraque ΒΑΓ ad ΒΓ: quare [per 11. 5.] ut utraque ΒΑΓ ad ΒΓ ita est ΒΔ ad ΔΕ: ideoque [per 16. 6.] quod continetur sub utraque ΒΑΓ & ΔΕ æquale est ei quod continetur sub ΓΒ, ΒΔ. quod autem continetur sub ΓΒ, ΒΔ [ex mox ostensis] datum est: ergo & id quod continetur sub utraque ΒΑΓ & ΕΔ datum est.

ALITER.

Producatur ΑΓ ad punctum Ε, & ponatur ipsi ΒΓ æqualis ΓΕ, connectanturque ΕΒ, ΒΔ. & quoniam [per constr. & 5. & 32. 1.] angulus ΑΓΒ utriusvis angulorum ΑΓΔ, ΓΒΕ duplus est: angulus igitur ΓΒΕ æqualis est angulo ΑΓΔ; hoc est [per 21. 3.] ipsi ΑΒΔ. communis adjiciatur angulus ΑΒΓ: totus igitur angulus ΔΒΓ toti angulo ΖΒΕ æqualis est. angulus autem ΓΑΒ angulo ΓΔΒ [per 21. 3.] æqualis est: reliquus igitur ΓΕΒ [per 32. 1.] reliquo ΔΓΒ æqualis est: ideoque triangulum



gulum ΕΑΒ triangulo ΓΔΒ æquiangulum est: quare [per 4.6.] ut ΒΑ ad ΑΒ ita ΓΔ ad ΔΒ. est autem [per constr.] recta ΕΑ utraq; simul ΑΓΒ: ergo ut utraque simul ΑΓΒ ad ΑΒ ita est ΓΔ ad ΒΔ: permutando igitur ut utraque simul ΑΓΒ ad ΓΔ ita est ΑΒ ad ΒΔ. est autem [per 1. dat.] ratio ipsius ΑΒ ad ΒΔ data; utraque enim earum [per 88.dat.] data est: quare ratio utriusque ΑΓΒ ad ΓΔ data est.



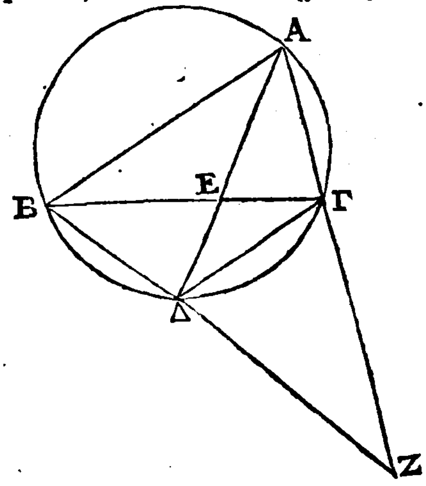
Et quoniam [ex supra ostensis] triangulum ΕΑΒ est triangulo ΖΒΔ æquiangulum: erit [per 4.6.] ut ΕΑ ad ΑΒ ita ΒΔ ad ΔΖ. est autem [per constr.] ΕΑ utraque ΑΓΒ: quare ut utraque simul ΑΓΒ ad ΑΒ ita est ΒΔ ad ΔΖ: ideoq; [per 16.6.] quod continetur sub utraque ΑΓΒ & ΖΔ æquale est ei quod continetur sub ΑΒ, ΒΔ. est autem id quod continetur sub ΑΒ, ΒΔ datum; etenim [per 88.dat.] utraque rectarum ΑΒ, ΒΔ data est: ergo quod continetur sub utraque simul ΑΓΒ & ΖΔ datum est.

τὸ ΕΑΒ τρίγωνον τῷ ΓΔΒ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ. ἡ δὲ ΕΑ συναμφότερός ἐστιν ἡ ΑΓΒ· καὶ ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ ΑΓΒ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΒΔ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ ΑΓΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ. λόγος δὲ ἐστὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν δοθεῖσά ἐστι· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΑΓΒ πρὸς τὴν ΓΔ δοθείς.

ΚΑΙ ἐπεὶ ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΕΑΒ τρίγωνον τῷ ΖΒΔ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΖ. ἡ δὲ ΕΑ συναμφότερός ἐστιν ἡ ΑΓΒ· ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ ΑΓΒ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΓΒ καὶ τῆς ΖΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ. δοθὲν δὲ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ· δοθεῖσα γὰρ ἑκατέρα αὐτῶν· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΑΓΒ καὶ τῆς ΖΔ.

ALITER.

Producatur ΑΓ ad punctum Ζ, & fiat ΓΖ æqualis ipsi ΒΑ, connectanturque ΒΔ, ΔΓ, ΔΖ. & quoniam æqualis est ΒΑ ipsi ΓΖ, atque ΔΒ [per 26.& 29.3.] ipsi ΔΓ; adeoque duæ ΑΒ, ΒΔ duabus ΖΓ, ΓΔ æquales sunt utraque utrique. atque etiam [per 13.1.& 22.3.] angulus ΑΒΔ angulo ΔΓΖ æqualis est, quia quadrilaterum ΑΒΔΓ est in circulo: basis igitur ΑΔ [per 4.1.] basi ΔΖ æqualis est, & triangulum ΑΒΔ triangulo ΓΔΖ æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquales sub quibus æqualia latera subtenduntur; adeoque angulus ΒΑΔ angulo ΔΖΓ æqualis est. angulus autem ΒΑΔ [ex hyp.] datus est: quare angulus ΔΖΓ datus est. sed & angulus ΔΑΖ datus est: triangulum igitur ΑΔΖ [per 40. dat.] specie datum est: adeoque [per 3.def.dat.] data est ratio ipsius ΖΑ ad ΑΔ. est autem ΑΖ utraque simul ΒΑΓ; quia [per constr.] æqualis est ΓΖ ipsi ΒΑ: ratio igitur utriusque simul ΒΑΓ ad ΑΔ data est.



Et eadem ratione, qua superius, rectangulum sub utraque simul ΒΑΓ & ΕΔ datum esse ostendemus.

ΑΛΛΩΣ

Διήχθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΓΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΔ, ΔΓ, ΔΖ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΑ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΔΒ τῇ ΔΓ· δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΔ δυσὶ ταῖς ΖΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΔ τῇ ὑπὸ ΔΓΖ ἐστὶν ἴση, ἐπειδήπερ ἐν κύκλῳ ἐστὶ τὸ ΑΒΔΓ τετράπλευρον· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΓΔΖ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς ἴσαι ἔσονται ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΓ. δοθεῖσα δὲ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΖΓ γωνία. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΑΖ γωνία δοθεῖσα· δέδοται ἄρα τὸ ΑΔΖ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΖΑ πρὸς τὴν ΑΔ δοθείς. ἡ δὲ ΑΖ συναμφότερός ἐστιν ἡ ΒΑΓ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΓΖ τῇ ΒΑ· λόγος ἄρα ἐστὶ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ δοθείς.

ΚΑΙ ὁμοίως τῷ πρότερον δείξομεν ὅτι τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ καὶ τῆς ΕΔ δοθέν ἐστι.

Prop. XCV.

Si in circuli positione dati diametro sumatur datum punctum, à puncto autem in circulum producatur quædam re-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϟε'.

Ἐὰν κύκλου δεδομένου τῇ θέσει ἐπὶ τῆς διαμέτρου δοθὲν σημεῖον ληφθῇ, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσβληθῇ τις εὐθεῖα, καὶ ἀπὸ τῆς τομῆς τις πρὸς ὀρθὰς ἀχθῇ τῇ διαχθείσῃ, διὰ δὲ τοῦ σημείου, καθ᾽ ὃ συμβάλλει ἡ πρὸς ὀρθὰς τῇ περιφερείᾳ τοῦ κύκλου, παράλληλος ἀχθῇ τῇ διαχθείσῃ· δοθὲν ἔσται τὸ σημεῖον, καθ᾽ ὃ συμβάλλει ἡ παράλληλος τῇ διαμέτρῳ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν παραλλήλων περιεχόμενον ὀρθογώνιον δοθὲν ἔσται.

Κύκλου γὰρ τῇ θέσει δεδομένου τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ τῆς διαμέτρου τῆς ΒΓ εἰλήφθω δοθὲν σημεῖον τὸ Δ, διὰ δὲ τοῦ Δ πρὸς τὸν κύκλον προσβεβλήσθω τις τυχοῦσα ἡ ΔΑ, ἀπὸ δὲ τοῦ Α τῇ ΔΑ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΑΕ, διὰ δὲ τοῦ Ε τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ· λέγω ὅτι δοθέν ἐστι τὸ Ζ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΕΖ χωρίον δοθέν ἐστι.

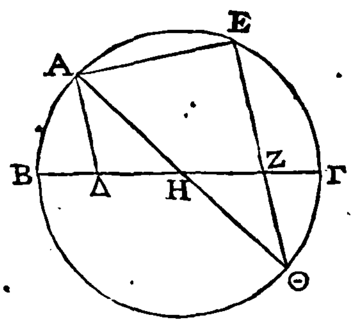
Διήχθω ἡ ΕΖ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ. ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΘΕΑ γωνία, ἡ ΘΑ διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ τοῦ ΑΒΓ κύκλου διάμετρος· τὸ Η ἄρα κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Η. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ Δ δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ τῷ μεγέθει. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΕΘ, καὶ ἐστιν ἴση ἡ ΘΗ τῇ ΗΑ· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΔΗ τῇ ΗΖ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΖΘ. δοθεῖσα δὲ ἡ ΔΗ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΗΖ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΗΖ, ΗΔ δοθεῖσά ἐστι. καὶ ἐστι δοθὲν τὸ Η· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Ζ.

ΚΑΙ ἐπεὶ ἐντὸς κύκλου δεδομένου τῇ θέσει τοῦ ΑΒΓ εἴληπται σημεῖον τὸ Ζ δοθέν, καὶ διῆκται ἡ ΕΖΘ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΖΘ. ἴση δὲ ἡ ΘΖ τῇ ΔΑ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΕΖ.

cta, agaturque recta à sectione ad rectos angulos in productam rectam; per punctum autem in quo linea, quæ ad rectos angulos insistit, occurrit circumferentiæ circuli, agatur parallela productæ rectæ: datum est illud punctum in quo parallela occurrit ipsi diametro; & quod sub parallelis lineis comprehenditur rectangulum datum est.

IN circuli enim positione dati ΑΒΓ diametro ΒΓ accipiatur datum punctum Δ, per punctum autem Δ producatur in circulum recta quædam linea ΔΑ, à puncto autem Α ipsi ΔΑ ad angulos rectos agatur recta ΑΕ, atque per punctum Ε ipsi ΑΔ parallela agatur ΕΖ: dico punctum Ζ datum esse; atque etiam datum esse rectangulum sub ΑΔ, ΕΖ comprehensum.

Producatur enim recta ΕΖ ad punctum Θ, & connectatur recta ΑΘ. quoniam angulus ΘΕΑ rectus est; recta ΘΑ [per 31.3.] est circuli ΑΒΓ diameter. est autem [ex hyp.] & ΒΓ diameter circuli ΑΒΓ: ergo punctum Η circuli ΑΒΓ centrum est: quare datum est punctum Η. est autem [ex hyp.] punctum Δ datum: ergo [per 26. dat.] data est recta ΔΗ magnitudine. & quoniam recta ΑΔ [ex hyp.] parallela est ipsi ΕΘ, atque est ΘΗ ipsi ΗΑ æqualis: igitur [per 29. 1.& 4.6.] æqualis est ΔΗ quidem ipsi ΗΖ, & ΑΔ ipsi ΖΘ. est autem recta ΔΗ data: ergo etiam data est ΗΖ. sed & etiam positione datæ sunt: ergo utraque rectarum ΗΖ, ΗΔ data est. atque datum est punctum Η: quare [per 27.dat.] & punctum Ζ datum est.



ET quoniam intra circulum positione datum ΑΒΓ acceptum est datum punctum Ζ, & acta est recta ΕΖΘ: rectangulum igitur sub ΕΖ, ΖΘ [per 93.dat.] datum est. æqualis autem est ΘΖ ipsi ΔΑ: ergo rectangulum sub ΑΔ, ΕΖ datum est.

ΤΕΛΟΣ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ.

FINIS DATORUM EUCLIDIS.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΕΙΣΑΓΩΓΗ
ΑΡΜΟΝΙΚΗ.

EUCLIDIS
INTRODUCTIO
HARMONICA.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΕΙΣΑΓΩΓΗ
ΑΡΜΟΝΙΚΗ.

EUCLIDIS
INTRODUCTIO
HARMONICA.

ΑΡΜΟΝΙΚΗ ἐστιν ἐπιστήμη θεωρητικὴ καὶ πρακτικὴ τῆς τοῦ ἡρμοσμένου φύσεως. Ηρμοσμένον δέ ἐστι τὸ ἐκ φθόγγων καὶ διαστημάτων, ποιὰν τάξιν ἐχόντων, συγκείμενον. μέρη δ' αὐτῆς ἐστιν ἑπτά. περὶ φθόγγων. περὶ διαστημάτων. περὶ γενῶν. περὶ συστημάτων. περὶ τόνων. περὶ μεταβολῆς. περὶ μελοποιΐας.

Φθόγγος μὲν οὖν ἐστι φωνῆς πτῶσις ἐμμελὴς ἐπὶ μίαν τάσιν.

Διάστημα δὲ, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο φθόγγων ἀνομοίων ὀξύτητι καὶ βαρύτητι.

Γένος δέ ἐστι ποιὰ τεττάρων φθόγγων διαίρεσις.

Σύστημα δέ ἐστι, τὸ ἐκ πλειόνων ἢ ἑνὸς διαστημάτων συγκείμενον.

Τόνος δέ ἐστι τόπος τις τῆς φωνῆς, δεκτικὸς συστήματος, ἀπλατής.

Μεταβολὴ δέ ἐστιν ὁμοίου τινὸς εἰς ἀνόμοιον τόπον μετάθεσις.

Μελοποιΐα δέ ἐστι χρῆσις τῶν ὑποκειμένων τῇ ἁρμονικῇ πραγματείᾳ, πρὸς τὸ οἰκεῖον ἑκάστης ὑποθέσεως.

Ταῦτα δὲ θεωρεῖται ἐν φωνῆς ποιότητι, ἧς κινήσεις εἰσὶ δύο. ἡ μὲν συνεχής τε καὶ λογικὴ καλουμένη· ἡ δὲ διαστηματική τε καὶ μελῳδική. Η μὲν οὖν συνεχὴς κίνησις τῆς φωνῆς τάς τε ἐπιτάσεις, καὶ τὰς ἀνέσεις ἀφανῶς ποιεῖται, μηδαμοῦ ἱσταμένη, ἢ μέχρι σιωπῆς· ἡ δὲ διαστηματικὴ κίνησις τῆς φωνῆς ἐναντίως κινεῖται τῇ συνεχεῖ· μονάς τε γὰρ ποιεῖ, καὶ τὰς μεταξὺ τούτων διαστάσεις. ἐναλλὰξ αὐτῶν ἑκάτερον τίθεται. τὰς μὲν οὖν μονὰς, τάσεις καλοῦμεν· τὰς δὲ διαστάσεις, μεταβάσεις, τὰς ἀπὸ τάσεων ἐπὶ τάσεις. τὰ δὲ ποιοῦντα τὴν τῶν τάσεων διαφορὰν, ἐπίτασίς ἐστι καὶ ἄνεσις. ἀποτέλεσμα δὲ τούτων ὀξύτης καὶ βαρύτης. τὸ μὲν γὰρ δι' ἐπιτάσεως γινόμενον, εἰς ὀξύτητα ἄγει· τὸ δὲ

HARMONICE est scientia, quæ modulatæ seriei naturam contemplatur, eamque effectui destinat. Modulata vero series est, quæ ex sonis & intervallis, secundum qualitatem ordinatis, componitur. Illius partes sunt septem. De sonis. de intervallis. de generibus. de systematis. de tonis. de commutatione. de melopœia.

Sonus est vocis casus, cantui aptus, in unam tensionem.

Intervallum vero est, quod continetur duobus sonis, acumine & gravitate differentibus.

Genus est quatuor sonorum secundum qualitatem distributio.

Systema est, quod ex pluribus uno intervallis constat.

Tonus est locus quidam vocis, systematis capax, latitudine carens.

Commutatio est similis alicujus in dissimilem locum transpositio.

Melopœia est usus eorum, quæ harmonicæ tractationi sunt subjecta; ita ut cuilibet argumento character suus tribuatur.

Hæc vero considerantur in vocis qualitate, cujus duo sunt motus. unus continuus vocatur, quo sermocinantes utimur: alter intervallis discretus, quem in modulationibus adhibemus. Porro continuus vocis motus tam tensiones quam remissiones efficit non apparentes, nullo in loco consistens antequam desinat. intervallis vero discretus vocis motus contra quam continuus observat motum: moras enim facit, quibus intervalla intercipiuntur: alternis vero utrumque illorum ponitur. moras itaque tensiones vocamus: transitus vero à tensionibus ad tensiones, intervalla. cæterum quæ differentes illas tensiones faciunt, intensio sunt ac remissio. quarum effectus sunt acumen atque gravitas. nam quod fit intensione, in acumen tendit: quod vero remissione, ad gravitatem. acumen igitur est effectus intensionis; ut contra gravitas, remissionis. utrisque enim accidit tensiones esse consecutum. tensiones vero & soni pro eodem accipiuntur. tensiones quidem ab instrumentis quæ tanguntur, à *tendendo* appellatæ: soni vero, quod à *voce* procreentur. atque illi quidem ob diversas tensiones sunt innumeri: nominatim vero in quoque genere octodecim.

Genera sunt tria; diatonum, chroma, harmonia. Ex his diatonum modulamur, ab acuto versus grave, per tonum, & tonum, & hemitonium: contra, à gravi acutum versus, per hemitonium, & tonum, & tonum. Chroma, in gravem sonum, per triemitonium & hemitonium & hemitonium: in acumen, contrario modo, per hemitonium, & hemitonium, & triemitonium. Harmonia, in gravem sonum, per ditonum, & diesin, & diesin: in acumen vero contra, per diesin, & diesin & ditonum.

Porro in diatono genere hi sunt soni:

Proslambanomenos.
Hypate hypaton.
Parypate hypaton.
Lichanos hypaton diatonos.
Hypate meson.
Parypate meson.
Lichanos meson diatonos.
Mese.
Trite synemmenon.
Paranete synemmenon diatonos.
Nete synemmenon.
Paramese.
Trite diezeugmenon.
Paranete diezeugmenon diatonos.
Nete diezeugmenon.
Trite hyperbolæon.
Paranete hyperbolæon diatonos.
Nete hyperbolæon.

In chromate vero hi:

Proslambanomenos.
Hypate hypaton.
Parypate hypaton.
Lichanos hypaton chromatice.
Hypate meson.
Parypate meson.
Lichanos meson chromatice.
Mese.
Trite synemmenon.
Paranete synemmenon chromatice.
Nete synemmenon.
Paramese.
Trite diezeugmenon.
Paranete diezeugmenon chromatice.
Nete diezeugmenon.
Trite hyperbolæon.
Paranete hyperbolæon chromatice.
Nete hyperbolæon.

δι' ἀνέσεως, εἰς βαρύτητα. καὶ ὀξύτης μὲν οὖν ἐστι, τὸ δι' ἐπιτάσεως γινόμενον ἀποτέλεσμα, βαρύτης δὲ, τὸ δι' ἀνέσεως. ἀμφοῖν γὰρ συμβέβηκε τὸ τετάσθαι. καλοῦνται δὲ τάσεις καὶ φθόγγοι. τάσεις μὲν ἀπὸ τῶν καθαπτῶν ὀργάνων, παρὰ τὸ τετάσθαι· φθόγγοι δὲ, ἐπεὶ ὑπὸ φωνῆς ἐνεργοῦνται. φθόγγοι δέ εἰσιν τῇ μὲν τάσει ἄπειροι· τῇ δὲ δυνάμει καθ' ἕκαστον γένος δεκαοκτώ.

Γένη δέ ἐστι τρία, διάτονον, χρῶμα, ἁρμονία. καὶ μελῳδεῖται τὸ μὲν διάτονον, ἐπὶ μὲν τὸ βαρὺ, κατὰ τόνον, καὶ τόνον, καὶ ἡμιτόνιον· ἐπὶ δὲ τὸ ὀξὺ ἐναντίως, καθ' ἡμιτόνιον, καὶ τόνον, καὶ τόνον. τὸ δὲ χρῶμα, ἐπὶ μὲν τὸ βαρὺ, κατὰ τριημιτόνιον, καὶ ἡμιτόνιον, καὶ ἡμιτόνιον· ἐπὶ δὲ τὸ ὀξὺ ἐναντίως, καθ' ἡμιτόνιον, καὶ ἡμιτόνιον, καὶ τριημιτόνιον. ἡ δὲ ἁρμονία, ἐπὶ μὲν τὸ βαρὺ, κατὰ δίτονον, καὶ δίεσιν, καὶ δίεσιν· ἐπὶ δὲ τὸ ὀξὺ ἐναντίως, κατὰ δίεσιν, καὶ δίεσιν, καὶ δίτονον.

Εἰσὶ δὲ οἱ μὲν ἐν τῷ διατόνῳ φθόγγοι οἵδε·

Προσλαμβανόμενος.
Ὑπάτη ὑπατῶν.
Παρυπάτη ὑπατῶν.
Λιχανὸς ὑπατῶν διάτονος.
Ὑπάτη μέσων.
Παρυπάτη μέσων.
Λιχανὸς μέσων διάτονος.
Μέση.
Τρίτη συνημμένων.
Παρανήτη συνημμένων διάτονος.
Νήτη συνημμένων.
Παραμέση.
Τρίτη διεζευγμένων.
Παρανήτη διεζευγμένων διάτονος.
Νήτη διεζευγμένων.
Τρίτη ὑπερβολαίων.
Παρανήτη ὑπερβολαίων διάτονος.
Νήτη ὑπερβολαίων.

Ἐν δὲ χρώματι οἵδε·

Προσλαμβανόμενος.
Ὑπάτη ὑπατῶν.
Παρυπάτη ὑπατῶν.
Λιχανὸς ὑπατῶν χρωματική.
Ὑπάτη μέσων.
Παρυπάτη μέσων.
Λιχανὸς μέσων χρωματική.
Μέση.
Τρίτη συνημμένων.
Παρανήτη συνημμένων χρωματική.
Νήτη συνημμένων.
Παραμέση.
Τρίτη διεζευγμένων.
Παρανήτη διεζευγμένων χρωματική.
Νήτη διεζευγμένων.
Τρίτη ὑπερβολαίων.
Παρανήτη ὑπερβολαίων χρωματική.
Νήτη ὑπερβολαίων.

Ἐν δὲ ἁρμονίᾳ οἵδε·

Προσλαμβανόμενος.
Ὑπάτη ὑπατῶν.
Παρυπάτη ὑπατῶν.
Λιχανὸς ὑπατῶν ἐναρμόνιος.
Ὑπάτη μέσων.
Παρυπάτη μέσων.
Λιχανὸς μέσων ἐναρμόνιος.
Μέση.
Τρίτη συνημμένων.
Παρανήτη συνημμένων ἐναρμόνιος.
Νήτη συνημμένων.
Παραμέση.
Τρίτη διεζευγμένων.
Παρανήτη διεζευγμένων ἐναρμόνιος.
Νήτη διεζευγμένων.
Τρίτη ὑπερβολαίων.
Παρανήτη ὑπερβολαίων ἐναρμόνιος.
Νήτη ὑπερβολαίων.

In harmonia denique hi:

Proſlambanomenos.
Hypate hypaton.
Parypate hypaton.
Lichanos hypaton enarmonios.
Hypate meſon.
Parypate meſon.
Lichanos meſon enarmonios.
Meſe.
Trite ſynemmenon.
Paranete ſynemmenon enarmonios.
Nete ſynemmenon.
Parameſe.
Trite diezeugmenon.
Paranete diezeugmenon enarmonios.
Nete diezeugmenon.
Trite hyperbolæon.
Paranete hyperbolæon enarmonios.
Nete hyperbolæon.

Κατὰ δὲ μίξιν τῶν γενῶν οἵδε·

Προσλαμβανόμενος.
Ὑπάτη ὑπατῶν.
Παρυπάτη ὑπατῶν.
Λιχανὸς ὑπατῶν ἐναρμόνιος.
Λιχανὸς ὑπατῶν χρωματική.
Λιχανὸς ὑπατῶν διάτονος.
Ὑπάτη μέσων.
Παρυπάτη μέσων.
Λιχανὸς μέσων ἐναρμόνιος.
Λιχανὸς μέσων χρωματική.
Λιχανὸς μέσων διάτονος.
Μέση.
Τρίτη συνημμένων.
Παρανήτη συνημμένων ἐναρμόνιος.
Παρανήτη συνημμένων χρωματική.
Παρανήτη συνημμένων διάτονος.
Νήτη συνημμένων.
Παραμέση.
Τρίτη διεζευγμένων.
Παρανήτη διεζευγμένων ἐναρμόνιος.
Παρανήτη διεζευγμένων χρωματική.
Παρανήτη διεζευγμένων διάτονος.
Νήτη διεζευγμένων.
Τρίτη ὑπερβολαίων.
Παρανήτη ὑπερβολαίων ἐναρμόνιος.
Παρανήτη ὑπερβολαίων χρωματική.
Παρανήτη ὑπερβολαίων διάτονος.
Νήτη ὑπερβολαίων.

Porro ſi miſceantur genera, hi:

Proſlambanomenos.
Hypate hypaton.
Parypate hypaton.
Lichanos hypaton enarmonios.
Lichanos hypaton chromatice.
Lichanos hypaton diatonos.
Hypate meſon.
Parypate meſon.
Lichanos meſon enarmonios.
Lichanos meſon chromatice.
Lichanos meſon diatonos.
Meſe.
Trite ſynemmenon.
Paranete ſynemmenon enarmonios.
Paranete ſynemmenon chromatice.
Paranete ſynemmenon diatonos.
Nete ſynemmenon.
Parameſe.
Trite diezeugmenon.
Paranete diezeugmenon enarmonios.
Paranete diezeugmenon chromatice.
Paranete diezeugmenon diatonos.
Nete diezeugmenon.
Trite hyperbolæon.
Paranete hyperbolæon enarmonios.
Paranete hyperbolæon chromatice.
Paranete hyperbolæon diatonos.
Nete hyperbolæon.

Τῶν δὲ ἐξηριθμημένων φθόγγων οἱ μέν εἰσιν ἑστῶτες· οἱ δὲ κινούμενοι. ἑστῶτες μὲν οὖν εἰσιν, ὅσοι ἐν ταῖς τῶν γενῶν διαφοραῖς οὐ μεταπίπτουσιν, ἀλλὰ μένουσιν ἐπὶ μιᾶς τάσεως. κινούμενοι δὲ, ὅσοι τοὐναντίον πεπόνθασιν. ἐν γὰρ ταῖς τῶν γενῶν διαφοραῖς μεταβάλλουσιν, καὶ οὐ μένουσιν ἐπὶ μιᾶς τάσεως.

Horum vero, quos recenſuimus, ſonorum alii ſunt ſtantes: alii mobiles. ſtantes ſunt, qui in diverſis generibus loca non mutant, ſed in una tenſione conſiſtunt. mobiles vero, quibus contrarium accidit. in diverſis enim generibus diverſa habent loca, nec in una tenſione conſiſtunt.

Εἰσὶν οὖν οἱ μὲν ἑστῶτες ὀκτὼ οἵδε·

Προσλαμβανόμενος.

Stantes itaque hi octo numerantur:

Proſlambanomenos.

Hypate

Hypate hypaton.
Hypate meſon.
Meſe.
Nete ſynemmenon.
Parameſe.
Nete diezeugmenon.
Nete hyperbolæon.

Mobiles autem, qui media inter hoſce loca occupant. Rurſus ſtantium alii ſunt barypycni: alii apycni, qui perfecta ſyſtemata continent.

Barypycni ſunt hi quinque:

Hypate hypaton.
Hypate meſon.
Meſe.
Parameſe.
Nete diezeugmenon.

Apycni, qui perfecta ſyſtemata continent, hi tres ſequentes:

Proſlambanomenos.
Nete ſynemmenon.
Nete hyperbolæon.

Mobilium alii ſunt meſopycni; alii oxypycni; alii diatoni.

Mmeſopycni ſunt hi quinque:

Parypate hypaton.
Parypate meſon.
Trite ſynemmenon.
Trite diezeugmenon.
Trite hyperbolæon.

Oxypycni ſimiliter in ſingulis generibus numerantur quinque. nimirum in harmonia enarmonii: in chromate, chromatici. ſed diatonum de ſpiſſi natura non participat.

In harmonia itaque ſunt hi:

Lichanos hypaton enarmonios.
Lichanos meſon enarmonios.
Paranete ſynemmenon enarmonios.
Paranete diezeugmenon enarmonios.
Paranete hyperbolæon enarmonios.

Deinde in chromate hi:

Lichanos hypaton chromatice.
Lichanos meſon chromatice.
Paranete ſynemmenon chromatice.
Paranete diezeugmenon chromatice.
Paranete hyperbolæon chromatice.

Intervallorum differentiæ ſunt quinque. nam & magnitudine inter ſe differunt, & genere; & ut conſona à diſſonis: deinde ut compoſita ab incompoſitis; & *tandem* ut rationalia ab irrationalibus. eſt autem *per magnitudinem differentia*, qua intervallorum quædam ſunt majora, quædam minora: ut ditonum, triemitonium, tonus, hemitonium, dieſis, diateſſaron, diapente, diapaſon, & ſimilia. *differentia per genus eſt*, qua intervallorum alia ſunt diatona; alia chromatica, alia enarmonia. differentia *per conſona & diſſona* eſt, qua intervallorum alia ſunt conſona, alia diſſona. conſona ſunt, diateſſaron, diapente, diapaſon, & ſimilia. diſſona

Ὑπάτη ὑπατῶν.
Ὑπάτη μέσων.
Μέση.
Νήτη συνημμένων.
Παραμέση.
Νήτη διεζευγμένων.
Νήτη ὑπερβολαίων.

Κινούμενοι δὲ, οἱ ἀνὰ μέσον τούτων πάντες. Τῶν δὲ ἑστώτων οἱ μὲν εἰσι βαρύπυκνοι· οἱ δὲ ἄπυκνοι, καὶ περιέχοντες τὰ τέλεια συστήματα.

Βαρύπυκνοι μὲν οὖν εἰσι πέντε οἵδε·

Ὑπάτη ὑπατῶν.
Ὑπάτη μέσων.
Μέση.
Παραμέση.
Νήτη διεζευγμένων.

Ἄπυκνοι δὲ, καὶ περιέχοντες τὰ τέλεια συστήματα, οἱ λοιποὶ τρεῖς οἵδε·

Προσλαμβανόμενος.
Νήτη συνημμένων.
Νήτη ὑπερβολαίων.

Τῶν δὲ κινουμένων οἱ μὲν εἰσι μεσόπυκνοι, οἱ ὀξύπυκνοι, οἱ δὲ διάτονοι.

Μεσόπυκνοι μὲν οὖν εἰσι πέντε οἵδε·

Παρυπάτη ὑπατῶν.
Παρυπάτη μέσων.
Τρίτη συνημμένων.
Τρίτη διεζευγμένων.
Τρίτη ὑπερβολαίων.

Ὀξύπυκνοι δὲ ὁμοίως κατὰ γένος πέντε. ἐν μὲν ἁρμονίᾳ οἱ ἐναρμόνιοι· ἐν δὲ χρώματι οἱ χρωματικοί. τὸ γὰρ διάτονον οὐ μετέχει πυκνοῦ.

Εἰσὶν οὖν οἱ μὲν ἐν τῇ ἁρμονίᾳ οἵδε·

Λιχανὸς ὑπατῶν ἐναρμόνιος.
Λιχανὸς μέσων ἐναρμόνιος.
Παρανήτη συνημμένων ἐναρμόνιος.
Παρανήτη διεζευγμένων ἐναρμόνιος.
Παρανήτη ὑπερβολαίων ἐναρμόνιος.

Ἐν δὲ τῷ χρώματι, οἵδε·

Λιχανὸς ὑπατῶν χρωματική.
Λιχανὸς μέσων χρωματική.
Παρανήτη συνημμένων χρωματική.
Παρανήτη διεζευγμένων χρωματική.
Παρανήτη ὑπερβολαίων χρωματική.

Τῶν δὲ διαστημάτων διαφοραί εἰσι πέντε. ἧ τε μεγέθει ἀλλήλων διαφέρει, ἧ τε κατὰ γένος· καὶ ᾗ τὰ σύμφωνα τῶν διαφώνων, καὶ τὰ σύνθετα τῶν ἀσυνθέτων, καὶ τὰ ῥητὰ τῶν ἀλόγων. ἡ μὲν οὖν κατὰ τὸ μέγεθός ἐστι, καθ' ἣν ἃ μέν ἐστι μείζονα τῶν διαστημάτων, ἃ δὲ ἐλάττονα, οἷον δίτονον, τριημιτόνιον, τόνος, ἡμιτόνιον, δίεσις, διὰ τεσσάρων, διὰ πέντε, διὰ πασῶν, καὶ τὰ ὅμοια. ἡ δὲ κατὰ γένος, καθ' ἣν ἃ μέν ἐστι τῶν διαστημάτων διατονικὰ, ἃ δὲ χρωματικὰ, ἃ δὲ ἐναρμόνια. ἡ δὲ τοῦ συμφώνου, καθ' ἣν ἃ μέν ἐστι τῶν διαστημάτων σύμφωνα, ἃ δὲ διάφωνα. σύμφωνα μὲν οὖν ἐστι, διὰ τεσσάρων, διὰ πέντε, διὰ πασῶν, καὶ τὰ ὅμοια. διάφωνα

δὲ

δὲ τὰ ἐλάττονα τοῦ διὰ τεσσάρων, καὶ τὰ μεταξὺ τῶν συμφώνων πάντα. ἐλάττονα μὲν οὖν ἐστι τοῦ διὰ τεσσάρων, δίεσις, ἡμιτόνιον, τόνος, τριημιτόνιον, δίτονον. μεταξὺ δὲ τῶν συμφώνων, τρίτονον, τετράτονον, πεντάτονον, καὶ τὰ ὅμοια. ἔστι δὲ συμφωνία μὲν, κρᾶσις δύο φθόγγων, ὀξυτέρου, καὶ βαρυτέρου. διαφωνία δὲ τοὐναντίον, δύο φθόγγων ἀμιξία, μὴ οἵων τε κραθῆναι, ἀλλὰ τραχυνθῆναι τὴν ἀκοήν. ἡ δὲ τοῦ συνθέτου ἐστὶ διαφορὰ, καθ' ἣν ἃ μέν ἐστι τῶν διαστημάτων ἀσύνθετα· ἃ δὲ σύνθετα. ἀσύνθετα μὲν οὖν διαστήματά ἐστι, τὰ ὑπὸ τῶν ἑξῆς φθόγγων περιεχόμενα, οἷον ὑπάτης καὶ παρυπάτης· καὶ λιχανοῦ καὶ ὑπάτης μέσων. ὁ αὐτὸς λόγος καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν διαστημάτων. σύνθετα δὲ τὰ ὑπὸ τῶν μὴ ἑξῆς, οἷον μέσης καὶ παρυπάτης, μέσης καὶ νήτης, παραμέσης καὶ ὑπάτης. ἔστι δέ τινα κοινὰ συνθέτου καὶ ἀσυνθέτου διαστήματα, τὰ ἀπὸ ἡμιτονίου μέχρι διτόνου. τὸ μὲν γὰρ ἡμιτόνιόν ἐστιν ἐν ἁρμονίᾳ σύνθετον· ἐν δὲ χρώματι καὶ διατόνῳ ἀσύνθετον. ὁ τόνος ἐν μὲν χρώματι σύνθετος, ἐν δὲ διατόνῳ ἀσύνθετος. τὸ τριημιτόνιον ἐν μὲν χρώματι ἀσύνθετον, ἐν δὲ διατόνῳ σύνθετον. τὸ δίτονον ἐν μὲν ἁρμονίᾳ ἀσύνθετον, ἐν δὲ χρώματι καὶ διατόνῳ σύνθετον. τὰ δὲ ἐλάττω τοῦ ἡμιτονίου πάντα ἐστὶν ἀσύνθετα. ὁμοίως δὲ καὶ τὰ μείζω τοῦ διτόνου πάντα σύνθετα. ἡ δὲ τοῦ ῥητοῦ καὶ ἀλόγου διαφορά ἐστι, καθ' ἣν τῶν διαστημάτων ἃ μέν ἐστι ῥητὰ, ἃ δὲ ἄλογα. ῥητὰ μὲν οὖν ἐστιν, ὧν οἷόν τ' ἐστὶ τὰ μεγέθη ἀποδιδόναι, οἷον τόνος, ἡμιτόνιον, δίτονον, τρίτονον, καὶ τὰ ὅμοια· ἄλογα δὲ τὰ παραλλάττοντα ταῦτα τὰ μεγέθη ἐπὶ τὸ μεῖζον ἢ ἐπὶ τὸ ἔλαττον, ἀλόγῳ τινὶ μεγέθει.

Γένη δέ ἐστι τρία τὰ προειρημένα. πᾶν οὖν ἔσται μέλος ἤτοι διατονικὸν, ἢ χρωματικὸν, ἢ ἐναρμόνιον, ἢ κοινὸν, ἢ μικτὸν ἐκ τούτων. διατονικὸν μὲν οὖν ἐστι τὸ τῇ διατονικῇ διαιρέσει χρώμενον. χρωματικὸν δὲ, τὸ τῇ χρωματικῇ. ἐναρμόνιον δὲ, τὸ τῇ ἐναρμονίῳ. κοινὸν δὲ τὸ ἐκ τῶν ἑστώτων συγκείμενον. μικτὸν δὲ, τὸ ἐν ᾧ δύο ἢ τρεῖς χαρακτῆρες γενικοὶ ἐμφαίνονται, οἷον διατόνου καὶ χρώματος, ἢ διατόνου καὶ ἁρμονίας, ἢ χρώματος καὶ ἁρμονίας, ἢ καὶ διατόνου, καὶ χρώματος καὶ ἁρμενίας. γίνονται δὲ αἱ τῶν γενῶν διαφοραὶ παρὰ τοὺς κινουμένους τῶν φθόγγων. κινεῖται δὲ ἡ μὲν λιχανὸς ἐν τονιαίῳ τόπῳ. ἡ δὲ παρυπάτη ἐν διεσιαίῳ· λιχανὸς μὲν οὖν ἐστιν ὀξυτάτη, ἡ τόνον ἀπὸ τοῦ ὀξυτέρου ἀπέχουσα τῶν τὸ τετράχορδον περιεχόντων· βαρυτάτη δὲ, ἡ δίτονον. ὁμοίως δὲ καὶ παρυπάτη ἐστὶ βαρυτάτη μὲν, ἡ δίεσιν ἀπὸ τοῦ βαρυτέρου τῶν τὸ τετράχορδον περιεχόντων ἀπέχουσα· ὀξυτάτη δὲ, ἡ ἡμιτόνιον ἀπέχουσα. χρόα δέ ἐστι γένους εἰδικὴ διαίρεσις. χρόαι δέ εἰσιν αἱ ῥηταὶ καὶ γνώριμοι ἕξ· ἁρμονίας μία, χρώματος τρεῖς, διατόνου δύο. ἡ μὲν οὖν τῆς ἁρμονίας τῇ αὐτῇ τοῦ γένους διαιρέσει καὶ αὐτὴ κέχρηται· μελῳδεῖται γὰρ κατὰ δίεσιν τὸ τεταρτημόριον τόνου, καὶ δίεσιν τὴν ἴσην, καὶ δίτονον ἀσύνθετον. τῶν δὲ χρωματικῶν διαιρέσεων τὸ μὲν καλεῖται μαλακὸν χρῶμα, τὸ δὲ

vero, quæ diatessaron consonantia sunt minora, quæque inter consona interponuntur, omnia. & quidem minora quam diatessaron sunt; diesis, hemitonium, tonus, triemitonium, ditonum. inter consona vero, tritonum, tetratonum, pentatonum, & similia. porro consonantia est mistio duorum sonorum, acuti scilicet & gravis. dissonantia contra est in duobus sonis mistionis fuga, qui cum misceri recusent asperitate quadam aures lædunt. compositi differentia est, qua intervallorum alia sunt incomposita, alia composita. incomposita itaque intervalla sunt, quæ à sonis deinceps positis continentur, ut est intervallum ab hypate & parypate comprehensum: item à lichano & hypate meson. eadem ratio obtinet in reliquis intervallis. composita vero sunt, quæ à sonis non deinceps positis comprehenduntur; ut à mese & parypate, mese & nete, paramese & hypate. sunt deinde quædam intervalla communia, quæ compositi atque incompositi naturam obtinent, sc. ab hemitonio ad ditonum omnia. quippe hemitonium in harmonia est compositum: in chromate & diatono incompositum. tonus in chromate est compositus; in diatono incompositus. triemitonium in chromate est incompositum; in diatono compositum. ditonum in harmonia est incompositum; in chromate & diatono compositum. quæ vero sunt hemitonio minora intervalla, omnia sunt incomposita. ut contra omnia ditono majora sunt composita. rationabilis & irrationabilis differentia est, qua intervallorum alia sunt rationabilia, alia irrationabilia. rationabilia sunt, quorum magnitudines exhibere possumus: ut tonus, hemitonium, ditonum, tritonum, & similia: irrationabilia, quæ hasce magnitudines variant vel in majus, vel in minus, magnitudine aliqua irrationabili.

Genera sunt tria illa prædicta. omnis itaque cantus aut diatonicus erit, aut chromaticus, aut enarmonius, aut communis, aut etiam ex hisce mistus. diatonicus est, qui divisione utitur diatonica. chromaticus, qui chromatica. enarmonius, qui enarmonia. communis qui ex sonis stantibus est compositus. mistus, in quo duorum aut trium generum characteres cernuntur: ex.gr. diatoni & chromatis; aut diatoni & harmoniæ; aut chromatis, & harmoniæ; aut etiam diatoni, chromatis & harmoniæ. Fiunt autem generum differentiæ à sonis mobilibus. & quidem lichanus movetur in loco, qui saltem capiat tonum. parypate, in loco qui capiat diesin. est itaque acutissima lichanus, quæ tono distat ab acutiore eorum, qui tetrachordum comprehendunt: gravissima vero, quæ ditono. eodem modo gravissima est parypate, quæ distat diesi à graviore eorum, quæ tetrachordum includunt: acutissima vero, quæ distat hemitonio. Color est generis divisio specialis. sunt vero rationabiles & noti colores sex: harmoniæ unus, tres chromatis, diatoni duo. harmoniæ color eadem, qua genus ipsum, divisione utitur. canitur enim per diesin, quæ est toni pars quarta, & diesin, priori æqualem, & ditonum incompositum. porro ex chromaticis divisionibus aliud vocatur chroma molle; aliud fescuplum, aliud toniæum. & quidem chroma molle canitur per diefin, quæ est toni pars tertia, & diefin illi æqualem, & intervallum incompofitum, quod æquale est tono, ejusque dimidio & trienti. fesquialterum, per diefin, quæ fit fesquialtera enarmoniæ diefeos, & diefin priori æqualem, & intervallum incompofitum, constans ex feptem diefibus, quarum quælibet fit toni pars quarta. toniæum chroma eodem, quo genus, utitur colore. quippe canitur per hemitonium, & hemitonium, & triemitonium. atque hæc fic explicata chromata appellationes habent ab iis, quæ ipfis infunt, fpiffis. toniæum enim appellatur ab eo, qui in ipfo est per compofitionem, tono. & fefquialterum, à diefibus, quæ in ipfo funt, fefcuplis diefium enarmoniarum. eodem modo chroma fpiffi minimi molle dicitur, quoniam, quod in ipfo eft, fpiffum remittitur, & tantum non plane enervatur. diatonicarum divifionum alia nuncupatur diatonum molle; alia, fyntonum. diatoni mollis color canitur per hemitonium, & per trium diefium incompofitum intervallum, & per quinque diefium fimiliter incompofitum intervallum. diatoni fyntoni color communem habet cum fuo genere divifionem. canitur enim per hemitonium, & tonum, & tonum. fed & in numeris monftrantur illi colores, hoc modo: fupponitur tonus in minimas duodecim partes divifus, quarum quælibet duodecima pars toni appellatur. atque eadem ratione, qua tonus, reliqua dividuntur intervalla. nempe hemitonium in fex partes duodecimas: diefis quadrantalis in tres: diefis trientalis in quatuor: totum diateffaron in triginta. harmonia itaque canetur per magnitudinem trium partium duodecimarum, & trium, & viginti quatuor. chroma molle per magnitudinem quatuor partium duodecimarum, & quatuor & viginti duarum, fefquialterum chroma per magnitudinem partium duodecimarum quatuor femis, & quatuor femis, & viginti unius. toniæum chroma per fex, & fex, & octodecim. diatonum molle per fex, & novem, & quindecim. fyntonum per fex, & duodecim, & duodecim.

Syftematum differentiæ funt feptem, quarum quatuor eædem funt, quæ in intervallis confiderantur. nimirum, *differentia per magnitudinem*; *per genus*; *item differentia confoni & diffoni*; *tum rationabilis & irrationabilis*. tres vero funt peculiares fyftematum differentiæ; nempe, *ordine procedentis & præpofteri*; *conjuncti & disjuncti*; *immutabilis & mutabilis*. *magnitudine* igitur *differunt* majora fyftemata à minoribus, ut diapafon à tritono, aut diapente, aut diateffaron, aut fimilibus. *genere differunt* diatonica ab enarmoniis aut chromaticis: aut chromatica aut enarmonia à cæteris. *confoni differentia*, ut quæ à confonis fonis continentur, differunt ab iis, quæ à diffonis. confona vero fyftemata in immutabili fyftemate funt fex; quorum minimum eft diateffaron, tonorum duorum femis, cujufmodi eft ab hypate hypaton ad hypaten mefon. alterum eft diapente, tono-

ἡμιόλιον, τὸ δὲ τονιαῖον. τὸ μὲν οὖν μαλακὸν χρῶμα μελῳδεῖται κατὰ δίεσιν τὴν τριτημόριον τόνου, καὶ δίεσιν τὴν ἴσην, καὶ ἴσον τόνῳ καὶ τῷ ἡμίσει, καὶ τρίτῳ, ἀσύνθετον διάστημα. τὸ δὲ ἡμιόλιον, κατὰ δίεσιν, ἡμιόλιον τῆς ἐναρμονίου διέσεως, καὶ δίεσιν τὴν ἴσην, καὶ ἑπτὰ διέσεων τεταρτημορίων ἀσύνθετον διάστημα, τὸ δὲ τονιαῖον χρῶμα τῇ αὐτῇ τοῦ γένους κέχρηται χρόᾳ. μελῳδεῖται γὰρ κατὰ ἡμιτόνιον, καὶ ἡμιτόνιον, καὶ τριημιτόνιον. κέκληνται δὲ τὰ εἰρημένα χρώματα ἀπὸ τῶν ἐνυπαρχόντων αὐτοῖς πυκνῶν. τό, τε γὰρ τονιαῖον ἀπὸ τοῦ ἐνυπάρχοντος αὐτῷ κατὰ συνθέσεως τόνου. καὶ ἡμιόλιον, ἀπὸ τῶν ἐνυπαρχόντων αὐτῷ διέσεων, ἡμιολίων τῶν ἐναρμονίων διέσεων. μαλακὸν δὲ τοῦ ἐλαχίστου πυκνοῦ, ὡσαύτως καὶ χρῶμα, ἐπειδὴ τὸ ἐν αὐτῷ πυκνὸν χρῶμα ἀνίεταί τε καὶ ἐκλύεται. τῶν δὲ διατονικῶν διαιρέσεων τὸ μὲν διάτονον μαλακὸν καλεῖται· τὸ δέ, σύντονον. ἡ μὲν οὖν τοῦ μαλακοῦ διατόνου χρόα μελῳδεῖται κατὰ ἡμιτόνιον, καὶ τριῶν διέσεων ἀσύνθετον διάστημα, καὶ κατὰ πέντε διέσεων ὁμοίως ἀσύνθετον διάστημα. ἡ δὲ τοῦ συντόνου διατόνου τῇ αὐτῇ τοῦ γένους ἐπικοινωνεῖ διαιρέσει. μελῳδεῖται γὰρ καθ᾽ ἡμιτόνιον, καὶ τόνον, καὶ τόνον. δείκνυνται δὲ καὶ ἀριθμῷ αἱ χρόαι τὸν τρόπον τοῦτον· ὑποτίθεται γὰρ ὁ τόνος εἰς δώδεκά τινα ἐλάχιστα μόρια διαιρούμενος, ὧν ἕκαστον δωδεκατημόριον τόνου καλεῖται. ἀναλόγως δὲ τῷ τόνῳ καὶ τὰ λοιπὰ διαστήματα. τὸ μὲν γὰρ ἡμιτόνιον εἰς ἓξ δωδεκατημόρια· ἡ δὲ δίεσις, ἡ μὲν τεταρτημόριος, εἰς τρία· ἡ δὲ τριτημόριος, εἰς τέσσαρα· ὅλον δὲ τὸ διὰ τεσσάρων εἰς τριάκοντα. ἡ μὲν οὖν ἁρμονία μελῳδηθήσεται κατὰ τριῶν δωδεκατημορίων μέγεθος, καὶ τριῶν, καὶ εἰκοσιτεσσάρων. τὸ δὲ μαλακὸν χρῶμα, κατὰ τεσσάρων, καὶ τεσσάρων, καὶ εἰκοσιδυοῖν. τὸ δὲ ἡμιόλιον χρῶμα κατὰ τεσσάρων ἥμισυ, καὶ τεσσάρων ἥμισυ, καὶ εἰκοσιενός· τὸ δὲ τονιαῖον χρῶμα, κατὰ ἕξ, καὶ ἕξ, καὶ ὀκτωκαίδεκα. τὸ δὲ μαλακὸν διάτονον, κατὰ ἕξ, καὶ ἐννέα, καὶ δεκαπέντε· τὸ δὲ σύντονον κατὰ ἕξ, καὶ δώδεκα, καὶ δώδεκα.

Τῶν δὲ συστημάτων διαφοραί εἰσιν ἑπτά· τέσσαρες μὲν αἱ αὐταὶ τοῖς διαστήμασιν, ἥτε κατὰ μέγεθος, καὶ ἡ κατὰ γένος, καὶ ἡ τοῦ συμφώνου καὶ διαφώνου, καὶ ἡ τοῦ ῥητοῦ καὶ ἀλόγου. τρεῖς δὲ ἴδιαι τῶν συστημάτων διαφοραί εἰσιν, ἡ τοῦ ἑξῆς, καὶ τοῦ ὑπερβατοῦ, καὶ ἡ τοῦ συνημμένου καὶ διεζευγμένου, καὶ ἡ τοῦ ἀμεταβόλου καὶ ἐμμεταβόλου. μεγέθη μὲν οὖν διαφέρει τὰ μείζω συστήματα τῶν ἐλαττόνων, καθάπερ τὸ διὰ πασῶν τοῦ τριτόνου, ἢ διὰ πέντε, ἢ διὰ τεσσάρων, ἢ τῶν ὁμοίων. γένει δὲ τὰ διατονικὰ τῶν ἐναρμονίων, ἢ χρωματικῶν· ἢ τὰ χρωματικὰ ἢ ἐναρμόνια τῶν λοιπῶν. τῇ δὲ τοῦ συμφώνου διοίσει τὰ ὑπὸ τῶν συμφώνων φθόγγων περιεχόμενα τῶν ὑπὸ διαφώνων. σύμφωνα δέ ἐστιν ἐν τῷ ἀμεταβόλῳ συστήματι ἕξ· ἐλάχιστον μὲν τὸ διὰ τεσσάρων, τόνων δύο ἡμίσεως, οἷόν ἐστι τὸ ἀπὸ ὑπάτης ὑπατῶν ἐπὶ ὑπάτην μέσων. δεύτερον δὲ τὸ διὰ πέντε, τό-

νων

νων τριῶν ἡμίσεως· οἷόν ἐστι τὸ ἀπὸ προσλαμβανομένου ἐπὶ ὑπάτην μέσων. τρίτον δὲ τὸ διὰ πασῶν, τόνων ἕξ· οἷόν ἐστι τὸ ἀπὸ προσλαμβανομένου ἐπὶ μέσην. τέταρτον δὲ τὸ διὰ πασῶν καὶ διὰ τεσσάρων, τόνων ὀκτὼ ἡμίσεως· οἷόν ἐστι τὸ ἀπὸ προσλαμβανομένου ἐπὶ νήτην συνημμένων, ἢ παρανήτην διεζευγμένων διάτονον. πέμπτον δὲ τὸ διὰ πασῶν καὶ διὰ πέντε, τόνων ἐννέα ἡμίσεως· οἷόν ἐστι τὸ ἀπὸ προσλαμβανομένου ἐπὶ νήτην διεζευγμένων. ἕκτον δὲ τὸ δὶς διὰ πασῶν, τόνων δώδεκα· οἷόν ἐστι τὸ ἀπὸ προσλαμβανομένου ἐπὶ νήτην ὑπερβολαίων. τὸ δὲ συνημμένων καλούμενον σύστημα πρόεισι μέχρι τετάρτου συμφώνου. τὸ δὲ διεζευγμένων μέχρι πέμπτου συμφώνου· καὶ τὸ τῶν ὑπερβολαίων μέχρι ἕκτου. πρῶτον γὰρ αὐτῶν τὸ διὰ τεσσάρων. δεύτερον, τὸ διὰ πέντε. τρίτον, τὸ διὰ πασῶν. τέταρτον, τὸ διὰ πασῶν καὶ διὰ τεσσάρων. πέμπτον, τὸ διὰ πασῶν καὶ διὰ πέντε. ἕκτον, τὸ δὶς διὰ πασῶν. ὁ δὲ τῆς φωνῆς τόπος αὔξεται μέχρι τοῦ ὀγδόου συμφώνου, ὅπερ ἐστὶ δὶς διὰ πασῶν καὶ διὰ τεσσάρων, καὶ δὶς διὰ πασῶν καὶ διὰ πέντε. διάφωνα δέ ἐστι, τά τε ἐλάττω τοῦ διὰ τεσσάρων, καὶ μεταξὺ τῶν εἰρημένων συμφώνων πάντα. γίνεται δὲ καὶ σχήματα τοῦ αὐτοῦ μεγέθους ἐκ τῶν αὐτῶν ἀσυνθέτων συγκείμενα καὶ ἀριθμοῦ, εἰ ἡ τάξις αὐτῶν ἀλλοίωσιν λάβοι, ἐνυπάρχοντός τινος ἀνομοίου. τὰ γὰρ ἐξ ἴσων πάντων, ἢ ὁμοίων σχημάτων, ἀλλοίωσιν οὐ ποιεῖ. τοῦ μὲν οὖν διὰ τεσσάρων τρία εἴδη. πρῶτον μὲν τὸ ὑπὸ βαρυπύκνων περιεχόμενον, οἷόν ἐστι τὸ ἀπὸ ὑπάτης ὑπατῶν ἐπὶ ὑπάτην μέσων. δεύτερον τὸ ὑπὸ μεσοπύκνων περιεχόμενον, οἷόν ἐστι τὸ ἀπὸ παρυπάτης ὑπατῶν ἐπὶ παρυπάτην μέσων. τρίτον δὲ τὸ ὑπὸ ὀξυπύκνων περιεχόμενον· οἷόν ἐστι τὸ ἀπὸ λιχανοῦ ὑπατῶν ἐπὶ λιχανὸν μέσων. ἐν μὲν οὖν ἁρμονίᾳ καὶ χρώματι πρὸς τὴν τοῦ πυκνοῦ σχέσιν τὰ σχήματα τῶν συμφώνων λαμβάνεται· ἐν δὲ διατόνῳ ἐπὶ πυκνοῦ οὐ γίνεται. διαιρεῖται δὲ τὸ γένος τοῦτο εἰς ἡμιτόνια καὶ τόνους. ὑπάρχει δὲ ἐν τῇ διατεσσάρων συμφωνίᾳ ἡμιτόνιον μὲν ἕν, τόνοι δὲ δύο. ὁμοίως δὲ κἂν τῷ διὰ πέντε, ἡμιτόνιον μὲν ἕν, τόνοι δὲ τρεῖς. ἐν δὲ τῷ διὰ πασῶν ἡμιτόνια μὲν δύο, τόνοι δὲ πέντε. πρὸς δὲ τὴν τῶν ἡμιτονίων σχέσιν τὰ σχήματα θεωρεῖται. τοῦ οὖν διὰ τεσσάρων πρῶτον μέν ἐστιν εἶδος, οὗ τὸ ἡμιτόνιον ἐπὶ τὸ βαρὺ τῶν τόνων κεῖται. δεύτερον δέ, οὗ μέσον τοῦ τόνου. τρίτον, οὗ πρῶτον ἐπὶ τὸ ὀξὺ τῶν τόνων. ἔχει δὲ καὶ ταῦτα ὁμοίως τοῖς λοιποῖς τοῖς γένεσιν ἀπὸ τῶν αὐτῶν φθόγγων ἐπὶ τοὺς αὐτούς. τοῦ δὲ διὰ πέντε τέσσαρα ἐστὶ σχήματα. πρῶτον μὲν τὸ ὑπὸ βαρυπύκνων περιεχόμενον, οὗ πρῶτος ὁ τόνος ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἔστι δὲ ἀπὸ ὑπάτης μέσων ἐπὶ παραμέσην. δεύτερον δέ, τὸ ὑπὸ μεσοπύκνων περιεχόμενον, οὗ δεύτερος ὁ τόνος ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἔστι δὲ ἀπὸ παρυπάτης μέσων ἐπὶ τρίτην διεζευγμένων. τρίτον δέ, τὸ ὑπὸ ὀξυπύκνων περιεχόμενον, οὗ τρίτος ὁ τόνος ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἔστι δὲ ἀπὸ λιχανοῦ μέσων ἐπὶ παρανήτην διεζευγμένων. τέταρτον δέ, τὸ ὑπὸ βαρυπύκνων περιεχόμενον, οὗ τέταρτος ὁ τόνος ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἔστι δὲ ἀπὸ μέσης

ἐπὶ

rum trium ſemis: ut eſt à proſlambanomeno ad hypaten meſon. tertium eſt diapaſon, tonorum ſex: quale eſt à proſlambanomeno ad meſen. quartum, diapaſon & diateſſaron, tonorum octo ſemis: veluti eſt à proſlambanomeno ad neten ſynemmenon, aut paraneten diezeugmenon diatonon. quintum, diapaſon & diapente, tonorum novem ſemis: cujuſmodi eſt à proſlambanomeno ad neten diezeugmenon. ſextum, bis diapaſon, tonorum duodecim: cujuſmodi eſt à proſlambanomeno ad neten hyperbolæon. conjunctarum quod vocatur ſyſtema progreditur ad quartum ſyſtema conſonum. disjunctarum autem ad quintum conſonum; & hyperbolæon ad ſextum. primum enim ipſorum eſt diateſſaron. alterum, diapente. tertium, diapaſon. quartum, diapaſon & diateſſaron. quintum, diapaſon & diapente. ſextum, bis diapaſon. vocis autem locus augeri poteſt ad octavum uſque ſyſtema conſonum, quod eſt, adjectis duobus; nimirum bis diapaſon & diateſſaron, & bis diapaſon & diapente. diſſona vero ſunt, tum quæ minora ſunt quam diateſſaron, tum quæ inter dicta conſona interjiciuntur, omnia. porro unius ejuſdemque magnitudinis quoque exiſtunt figuræ, ex iiſdem incompoſitis, & numero æqualibus conſtitutæ, ſi nimirum ordo ipſorum varietur, & jam ante adſit aliquod diſſimile. neque enim, quæ ex æqualibus inter ſe omnibus, vel ſimilibus, conſtant intervallis, ullam varietatem admittunt. quare diateſſaron ſpecies ſunt tres. prima, quæ à barypycnis comprehenditur; cujuſmodi eſt ab hypate hypaton ad hypaten meſon. altera, quæ à meſopycnis continetur; ut eſt à parypate hypaton ad parypaten meſon. tertia quæ ab oxypycnis includitur; ut à lichano hypaton ad lichanon meſon. atque ita in harmonia ac chromate, ſpiſſi ratione habita, figuræ conſonorum ſumuntur: in diatono vero ſpiſſum non reperitur. hoc quippe genus in hemitonia dividitur & tonos. ita ut in diateſſaron concentu hemitonium ſit unum, toni vero duo. ſimiliter in diapente, hemitonium unum, toni tres. in diapaſon item, hemitonia duo, toni quinque. reſpectu vero ad hemitonia habito, figuras illas contemplamur. hinc prima diateſſaron ſpecies eſt, cujus hemitonium, infra tonos, loco eſt graviſſimo. altera, cujus hemitonium eſt loco medio. tertia, cujus hemitonium primum eſt in acumine. atque hæc eodem modo ſe habent in reliquis generibus, ab iiſdem ſonis ad eoſdem. diapente habet quatuor ſpecies. prima, quæ à barypycnis continetur, cujus tonus primus eſt in acumine. eſtque ab hypate meſon ad parameſen. altera, quæ à meſopycnis comprehenditur, cujus tonus ſecundo loco eſt in acumine. eſt vero à parypate meſon ad triten diezeugmenon. tertia, quæ ab oxypycnis continetur, cujus tertius ab acumine eſt tonus: ut à lichano meſon ad paraneten diezeugmenon. quarta, quæ barypycnis rurſus includitur, cujus quartus ab acumine eſt tonus. eſt vero à meſe ad neten diezeugmenon: aut à proſlambanomeno ad hypaten meſon. at vero in diatono prima diapente ſpecies eſt, cujus hemitonium primum eſt in gravi. altera, cujus primum in acumine. tertia, cujus ſecundum in acumine. quarta, cujus tertium in acumine. Porro diapaſon ſpecies ſunt ſeptem. prima, quæ à barypycnis continetur, cujus primus tonus eſt in acumine. eſtque ab hypate hypaton ad parameſen. à veteribus vocabatur mixolydia. altera, quæ comprehenditur à meſopycnis, cujus tonus ſecundo loco eſt in acumine. ut à parypate hypaton ad triten diezeugmenon. vocabatur ab iiſdem lydia. tertia, quæ ab oxypycnis; cujus tertius ab acumine eſt tonus. eſt vero à lichano hypaton ad paraneten diezeugmenon. vocabatur phrygia. quarta, quæ rurſus à barypycnis comprehenditur, cujus quartus ab acumine eſt tonus. eſtque ab hypate meſon ad neten diezeugmenon. vocabatur doria. quinta, quæ à meſopychis; cujus quinto ab acumine loco eſt tonus. ut à parypate meſon ad triten hyperbolæon. vocabatur hypolydia. ſexta, quæ ab oxypycnis, cujus ſextus ab acumine eſt tonus, ut à lichano meſon ad paraneten hyperbolæon. vocabatur hypophrygia. ſeptima, quæ à barypycnis continetur, cujus primus tonus loco eſt graviſſimo. eſt vero à meſe ad neten hyperbolæon; aut à proſlambanomeno ad meſen. vocabatur communis & locrenſis & hypodoria. at in diatono prima eſt diapaſon ſpecies, cujus primum hemitonium eſt in gravi, quartum vero ab acumine. altera, cujus tertium eſt in gravi, primum in acumine. tertia, cujus ſecundum in utramque partem. quarta, cujus primum in gravi, tertium in acumine. quinta, cujus quartum in gravi, primum in acumine. ſexta, cujus tertium in gravi, ſecundum in acumine. ſeptima, cujus ſecundum eſt hemitonium in gravi, tertium in acumine. ſunt vero hæ ſpecies ab iiſdem ſonis, à quibus in harmonia & chromate incipiebant, ad eoſdem; appellanturque iiſdem nominibus. *rationabilis atque irrationabilis differentia* different ſyſtemata, illa quæ ex rationabilibus conſtituuntur, ab iis quæ ex irrationabilibus. quæ enim rationabilia, ſunt ex rationabilibus. ut contra, quæ irrationabilia, ex irrationabilibus. *continui atque interrupti differentia* different ſyſtemata, illa quæ per deinceps poſitos ſonos canuntur, ab iis quæ per non proximos. *conjuncti atque disjuncti differentia* different ſyſtemata, illa quæ ex conjunctis tetrachordis compoſita ſunt, ab iis quæ ex disjunctis. eſt vero conjunctio, duorum tetrachordorum, deinceps modulatorum ac ſpecie ſimilium, ſonitus communis. hinc disjunctio eſt, duorum tetrachordorum, deinceps modulatorum ac ſpecie ſimilium, tonus intermedius. ſunt autem in univerſum conjunctiones tres: media, acutiſſima, graviſſima. graviſſima eſt ex hypaton tetrachordo & meſon. communis vero ſonus ea conjungit hypate meſon. media conjunctio eſt, ex tetrachordo meſon & ſynemmenon. quæ jungit communis ſo-

ἐπὶ νήτην διεζευγμένων, ἢ ἀπὸ προσλαμβανομένου ἐπὶ ὑπάτην μέσων. ἐν δὲ διατόνῳ πρῶτον μέν ἐστι σχῆμα, οὗ πρῶτον τὸ ἡμιτόνιον ἐπὶ τὸ βαρύ. δεύτερον δέ, οὗ πρῶτον ἐπὶ τὸ ὀξύ. τρίτον, οὗ δεύτερον ἐπὶ τὸ ὀξύ. τέταρτον, οὗ τρίτον ἐπὶ τὸ ὀξύ. τοῦ δὲ διὰ πασῶν εἴδη ἐστὶν ἑπτά. πρῶτον μέν, τὸ ὑπὸ βαρυπύκνων περιεχόμενον, οὗ πρῶτος ὁ τόνος ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἔστι δὲ ἀπὸ ὑπάτης ὑπατῶν ἐπὶ παραμέσην. ἐκαλεῖτο δὲ ὑπὸ τῶν ἀρχαίων μιξολύδιον. δεύτερον δέ, τὸ ὑπὸ μεσοπύκνων περιεχόμενον, οὗ δεύτερος ὁ τόνος ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἔστι δὲ ἀπὸ παρυπάτης ὑπατῶν ἐπὶ τρίτην διεζευγμένων. ἐκαλεῖτο δὲ λύδιον. τρίτον, τὸ ὑπὸ ὀξυπύκνων περιεχόμενον, οὗ τρίτος ὁ τόνος ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἔστι δὲ ἀπὸ λιχανοῦ ὑπατῶν ἐπὶ παρανήτην διεζευγμένων. ἐκαλεῖτο δὲ φρύγιον. τέταρτον, τὸ ὑπὸ βαρυπύκνων περιεχόμενον, οὗ τέταρτος ὁ τόνος ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἔστι δὲ ἀπὸ ὑπάτης μέσων ἐπὶ νήτην διεζευγμένων. ἐκαλεῖτο δὲ δώριον. πέμπτον, τὸ ὑπὸ μεσοπύκνων περιεχόμενον, οὗ πέμπτος ὁ τόνος ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἔστι δὲ ἀπὸ παρυπάτης μέσων ἐπὶ τρίτην ὑπερβολαίων. ἐκαλεῖτο δὲ ὑπολύδιον. ἕκτον, τὸ ὑπὸ ὀξυπύκνων περιεχόμενον, οὗ ἕκτος ὁ τόνος ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἔστι δὲ ἀπὸ λιχανοῦ μέσων ἐπὶ παρανήτην ὑπερβολαίων. ἐκαλεῖτο δὲ ὑποφρύγιον. ἕβδομον, τὸ ὑπὸ βαρυπύκνων περιεχόμενον, οὗ πρῶτος ὁ τόνος ἐπὶ τὸ βαρύ. ἔστι δὲ ἀπὸ μέσης ἐπὶ νήτην ὑπερβολαίων, ἢ ἀπὸ προσλαμβανομένου ἐπὶ μέσην. ἐκαλεῖτο δὲ κοινὸν καὶ λοκριστὶ καὶ ὑποδώριον. ἐν δὲ τῷ διατόνῳ πρῶτον μέν ἐστιν εἶδος τοῦ διὰ πασῶν, οὗ πρῶτον μὲν ἐπὶ τὸ βαρὺ, τέταρτον δὲ ἐπὶ τὸ ὀξὺ, ἐστὶ τὸ ἡμιτόνιον. δεύτερον δέ, οὗ τρίτον μὲν ἐπὶ τὸ βαρὺ, πρῶτον δὲ ἐπὶ τὸ ὀξύ: τρίτον δέ, οὗ δεύτερον ἐφ᾽ ἑκάτερα. τέταρτον δέ, οὗ πρῶτον μὲν ἐπὶ τὸ βαρὺ, τρίτον δὲ ἐπὶ τὸ ὀξύ. πέμπτον δέ, οὗ τέταρτον μὲν ἐπὶ τὸ βαρὺ, πρῶτον δὲ ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἕκτον δέ, οὗ τρίτον μὲν ἐπὶ τὸ βαρὺ, δεύτερον δὲ ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἕβδομον δέ, οὗ δεύτερον μὲν ἐπὶ τὸ βαρὺ, τρίτον δὲ ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἔστι δὲ ταῦτα ἀπὸ τῶν αὐτῶν φθόγγων ἐπὶ τοὺς αὐτοὺς, καθάπερ ἐπὶ τῆς ἁρμονίας καὶ τοῦ χρώματος, καὶ ἐκαλεῖτο τοῖς αὐτοῖς ὀνόμασι. τῇ δὲ τοῦ ῥητοῦ καὶ ἀλόγου διαφορᾷ διοίσει συστήματα, ὅσα ἐκ ῥητῶν διαστημάτων σύγκειται, τῶν ἐξ ἀλόγων. ὅσα μὲν γὰρ ῥητὰ ἐκ ῥητῶν ἐστιν. ὅσα δὲ ἄλογα, ἐξ ἀλόγων. τῇ δὲ τοῦ ἑξῆς καὶ ὑπερβατοῦ διαφορᾷ διοίσει συστήματα, τὰ διὰ τῶν ἑξῆς φθόγγων μελῳδούμενα, τῶν δι᾽ ὑπερβατῶν. τῇ δὲ τοῦ συνημμένου καὶ διεζευγμένου διαφορᾷ διοίσει συστήματα, ὅσα διὰ τῶν συνημμένων τετραχόρδων τὴν σύνθεσιν ἔχει, τῶν διὰ τῶν διεζευγμένων. ἔστι δὲ συναφὴ μὲν, δύο τετραχόρδων, ἑξῆς μελῳδουμένων, ὁμοίων κατὰ σχῆμα, φθόγγος κοινός. διάζευξις δέ ἐστι δύο τετραχόρδων, ἑξῆς μελῳδουμένων, ὁμοίων κατὰ σχῆμα, τόνος ἀνὰ μέσον. εἰσὶ δὲ αἱ πᾶσαι συναφαὶ τρεῖς· μέση, ὀξυτάτη, βαρυτάτη. καὶ ἔστι βαρυτάτη μὲν, ἡ ἐκ τοῦ ὑπατῶν καὶ μέσων τετραχόρδου. κοινὸς δὲ αὐτὰ συνάπτει φθόγγος, ὑπάτη μέσων. μέση δέ ἐστι συναφὴ, ἐκ τῶν μέσων καὶ συνημμένων. κοινὸς δὲ αὐτὰ συνάπτει φθόγγος μέση.

μέση. ὀξυτάτη δέ ἐστι συναφὴ ἐκ τοῦ διεζευγμένων καὶ ὑπερβολαίων. κοινὸς δὲ αὐτὰ συνάπτει φθόγγος, νήτη διεζευγμένων. διάζευξις δέ ἐστι μία ἐκ τοῦ μέσων καὶ διεζευγμένων. κοινὸς δὲ αὐτὰ διαζεύγνυσι τόνος, ὁ μεταξὺ μέσης καὶ παραμέσης. τέλεια δέ ἐστι συστήματα δύο, ὧν τὸ μὲν ἔλαττον, τὸ δὲ μεῖζον. καὶ ἔστι τὸ μὲν ἔλαττον κατὰ συναφὴν, ἀπὸ προσλαμβανομένου ἐπὶ νήτην συνημμένων. ὑπάρχει δὲ ἐν αὐτῷ τετράχορδα τρία συνημμένα τάδε· ὑπατῶν, μέσων, συνημμένων. καὶ τόνος ἀπὸ προσλαμβανομένου ἐπὶ ὑπάτην ὑπατῶν. συμφώνῳ δὲ ὁρίζεται τῷ διὰ πασῶν καὶ διὰ τεσσάρων· τὸ δὲ μεῖζόν ἐστι κατὰ διάζευξιν, ἀπὸ προσλαμβανομένου ἐπὶ νήτην ὑπερβολαίων. ὑπάρχει δὲ ἐν αὐτῷ τετράχορδα μὲν τέσσαρα, διὰ δυοῖν διεζευγμένα, ἀλλήλοις δὲ συνημμένα, τὸ, τε ὑπατῶν, καὶ μέσων, καὶ διεζευγμένων, καὶ ὑπερβολαίων. καὶ ἔτι τόνοι δύο· ὅ, τε ἀπὸ προσλαμβανομένου ἐπὶ ὑπάτην ὑπατῶν, καὶ ὁ ἀπὸ μέσης ἐπὶ παραμέσην. συμφώνῳ δὲ ὁρίζεται τῷ δὶς διὰ πασῶν. πέντε δὲ ὄντων τετραχόρδων ἐν τῷ ἀμεταβόλῳ συστήματι, ὅπερ ἐστὶν ἐξ ἀμφοῖν τελείοιν σύνθετον, τὰ μὲν δύο κοινά ἐστιν ἑκατέρῳ τῶν τελείων, τό, τε ὑπατῶν καὶ μέσων· ἴδια δὲ, τοῦ μὲν κατὰ συναφὴν, τὸ νητῶν συνημμένων· τοῦ δὲ κατὰ διάζευξιν, τὸ νητῶν διεζευγμένων, καὶ τὸ νητῶν ὑπερβολαίων. τῇ δὲ τοῦ ἀμεταβόλου καὶ ἐμμεταβόλου διοίσει, καθ' ἣν διαφέρει τὰ ἁπλᾶ συστήματα τῶν μὴ ἁπλῶν. ἁπλᾶ μὲν οὖν ἐστι τὰ πρὸς μίαν μέσην ἡρμοσμένα· διπλᾶ δὲ, τὰ πρὸς δύο· τριπλᾶ δὲ τὰ πρὸς τρεῖς· πολλαπλάσια δὲ τὰ πρὸς πλείονας. ἔστι δὲ μέση φθόγγου δύναμις, ᾧ συμβέβηκεν κατὰ μὲν διάζευξιν, ἐπὶ μὲν τὸ ὀξὺ, τόνον ἔχειν ἀσύνθετον, ἀπαθοῦς ὄντος τοῦ συστήματος· ἐπὶ δὲ τὸ βαρὺ, δίτονον, ἢ τὸ σύνθετον ἢ ἀσύνθετον· κατὰ δὲ συναφὴν, ᾧ συμβαίνει τριῶν τετραχόρδων συνημμένων, ἤτοι τοῦ μέσου ὀξυτάτῳ εἶναι, ἢ τοῦ ὀξυτάτου, βαρυτάτῳ. ἀπὸ δὲ τῆς μέσης καὶ τῶν λοιπῶν φθόγγων αἱ δυνάμεις γνωρίζονται. τὸ γὰρ πῶς ἔχει ἕκαστος αὐτῶν πρὸς τὴν μέσην φανερῶς γίνεται.

Τόνος δὲ λέγεται τετραχῶς. καὶ γὰρ ὡς φθόγγος, καὶ ὡς διάστημα, καὶ ὡς τόπος φωνῆς, καὶ ὡς τάσις· ἐπὶ μὲν οὖν τοῦ φθόγγου χρῶνται τῷ ὀνόματι οἱ λέγοντες ἑπτάτονον τὴν φόρμιγγα, καθάπερ Τέρπανδρος καὶ Ἴων. ὁ μὲν γάρ φησιν,

Ἡμεῖς τοι τετράγηρυν ἀποστέρξαντες ἀοιδὴν,
Ἑπτατόνῳ φόρμιγγι νέους κελαδήσομεν ὕμνους.

Ὁ δὲ ἐν δεκαχόρδῳ λύρᾳ·

—— τὴν δεκαβάμονα τάξιν ἔχουσα
Τὰς συμφωνούσας ἁρμονίας τριόδους.
Πρὶν μέν σ' ἑπτάτονον ψάλλον διὰ τέσσαρα πάντες
Ἕλληνες, σπανίαν μοῦσαν ἀειράμενοι.

καὶ ἕτεροι δὲ οὐκ ὀλίγοι κέχρηνται τῷ ὀνόματι. ἐπὶ δὲ τοῦ διαστήματος, ὅταν λέγωμεν ἀπὸ μέσης ἐπὶ παραμέσην τόνον εἶναι. ὁ δὲ ὡς τόπος, ὅταν λέγωμεν, φωνῆς, δώριον, ἢ φρύγιον, ἢ λύδιον, ἢ τῶν ἄλλων τινά. εἰσὶ δὲ κατὰ Ἀριστόξενον τρισκαίδεκα τόνοι. ὑπερμιξολύδιος, καὶ ὑπερφρύγιος καλούμενος.

nus mese. acutissima denique conjunctio est, ex tetrachordo diezeugmenon & hyperbolæon. quæ communis copulat sonus, nete diezeugmenon. disjunctio una est, ex tetrachordo meson & diezeugmenon. communis vero tonus ille disjungit, qui est inter mesen & paramesen. porro perfecta sunt systemata duo, quorum alterum minus est, alterum majus. ac minus quidem est per conjunctionem, à proslambanomeno ad neten synemmenon. sunt vero in eo tria hæc tetrachorda conjuncta, hypaton, meson, synemmenon. præterea tonus à proslambanomeno ad hypaten hypaton. finitur denique consonantia diapason & diatessaron. majus vero est per disjunctionem, à proslambanomeno ad neten hyperbolæon. in quo sunt quatuor tetrachorda, quorum bina à binis disjuncta, inter se vero conjuncta; nimirum hypaton, & meson; & diezeugmenon, & hyperbolæon. & insuper toni duo: tum qui à proslambanomeno est ad hypaten hypaton, tum qui à mese ad paramesen. includitur autem concentu bis diapason. cum vero quinque sint tetrachorda in systemate immutabili, quod ex binis perfectis constat, bina quidem utrique perfectorum sunt communia, hypaton scilicet & meson: propria vero, conjuncto quidem, tetrachordum neton synemmenon: disjunctio vero, tetrachordum neton diezeugmenon & neton hyperbolæon. *immutabilis & mutabilis differentia* distabunt, quæ ut simplicia systemata differunt à non simplicibus. simplicia sunt, quæ modulatam seriem uni mese aptatam habent: duplicia, quæ duabus: triplicia, quæ tribus: multiplicia, quæ pluribus. est vero *mese* potestas soni, cui in disjunctione quidem accidit, acumen versus, tonum habere incompositum, si systema omni affectione careat; versus grave vero, ditonum, idque vel compositum, vel incompositum: in conjunctione vero, cui inter tria tetrachorda conjuncta contingit, aut medii esse acutissimmum; aut acutissimi, gravissimum. meses deinde beneficio relinquorum potestates innotescunt. quomodo enim quisque illorum ad mesen se habeat, fit manifestum:

Tonus quatuor modis dicitur. nam & pro *sono* usurpatur, & pro *intervallo*, & pro *vocis loco*, & pro *tentione*. pro *sono* usurpant hoc nomen, qui citharam vocant *heptatonon*, id est, septem sonis constantem, quomodo Terpander atque Ion. ille enim ita:

At nos quadrisono contempto carmine, posthac
Rite novos cithara heptatono cantabimus hymnos.

Hic vero in lyra decem chordis instructa:

-----decimus tibi psallitur ordo,
Concentuque placent harmoniæ triplices.
Omnes heptatonon diatessara te ante canebant
Græci, queis placuit rara Camœna nimis.

atque alios non paucos hoc vocabulo ita usos invenimus. pro *intervallo*, cum dicimus à mese ad paramesen esse tonum. pro *vocis loco*, cum dicimus tonum Dorium, aut Phrygium, aut Lydium, aut reliquorum aliquem. sunt vero, ut censet Aristoxenus, toni tredecim. hypermixolydius, qui & hyperphrygius vocatur. mixolydii

xolydii duo; acutior & gravior. quorum acutior, qui ordine est secundus, Hyperiastius vocatur: gravior vero, etiam Hyperdorius. Lydii duo; acutior, & gravior, qui & Æolius appellatur. Phrygii duo; quorum alter gravis, qui & Iastius; alter acutus. Dorius unus. Hypolydii duo; acutior, & gravior, qui & Hypoæolius vocatur. Hypophrygii duo, quorum gravior quoque appellatur Hypoiastius. Hypodorius. Ex his gravissimus est Hypodorius: qui vero deinceps existunt, à gravissimo ad acutissimum, hemitonio se invicem excedunt. alterni vero duo, tono; terni, triemitonio. similiter de reliquorum tonorum distantia concludes. Hypermyxolydius denique Hypodorium per diapason intervallum acumine superat. Pro *tensione* tonus accipitur, quando dicimus, acuto aliquem vocis tono uti, aut gravi, aut etiam medio.

Mutatio quatuor modis dicitur: *per genus*, *per systema*, *per tonum*, & *per melopœiam*. per *genus* fit mutatio, cum ex diatono in chroma, aut harmoniam: aut ex chromate, aut harmonia in reliquorum generum aliquod fit transitus. per *systema* vero, cum ex conjunctione in disjunctionem, aut vice versa, fit mutatio. per *tonum*, cum ex Doriis cantilenis in Phrygias, aut ex Phrygiis in Lydias, aut Hypermixolydias, aut Hypodorias; aut in universum, cum ex tredecim tonorum aliquo in reliquorum aliquem, mutationem instituimus. atque hæ mutationes ab hemitonio intervallo ad diapason procedunt. quorum aliæ per consona fiunt intervalla; aliæ per dissona. atque adeo quædam harum minus sunt concinnæ, aut inconcinnæ; quædam magis. inter quas itaque major est communio, illæ sunt concinniores; ut contra, in quibus minor, inconcinniores. quippe omni mutationi necesse est aliquid esse cum alio commune; aut sonum, aut intervallum, aut systema. atque hæc communicatio per sonorum similitudinem assumitur. cum enim in commutationibus mutuo cadunt similes soni, ita ut spissi fiat participatio, concinna est mutatio: cum contra dissimiles, inconcinna. denique per *melopœiam* fit mutatio, cum ex distendente more in contrahentem, aut quietum; aut ex quieto in reliquorum aliquem fit transitus. est vero distendens mos melopœiæ, quo signatur magnificentia ac virile animi robur, tum actiones heroicæ, atque his similes affectus. hisce itaque maxime utitur tragœdia, & quæ ex reliquis huic characteri sunt propiora. contrahens mos est, quo animus contrahitur ad humilitatem, & effeminatam dispositionem. atque hujusmodi status conveniet amatoriis affectibus, tum lamentis & miserationibus, atque id genus aliis. quietus denique melopœiæ mos est, quem consequitur animi tranquillitas, statusque liberalis ac pacificus. huic conveniunt hymni, pæanes, laudes, consulta, atque his similia.

Melopœia est usus partium Harmonices, quæ à nobis sunt expositæ, quæque propositorum

μιξολύδιοι δύο, ὀξύτερος καὶ βαρύτερος· ὧν ὀξύτερος καὶ δεύτερος ὑπεριάστιος καλεῖται· ὁ δὲ βαρύτερος, καὶ ὑπερδώριος. λύδιοι δὲ δύο, ὀξύτερος καὶ βαρύτερος, ὃς καὶ αἰόλιος καλεῖται. φρύγιοι δύο, ὁ μὲν βαρὺς, ὃς καὶ ἰάστιος· ὁ δὲ ὀξύς. δώριος εἷς. ὑπολύδιοι δύο· ὀξύτερος, καὶ βαρύτερος, ὃς καὶ ὑποαιόλιος καλεῖται. ὑποφρύγιοι δύο, ὧν ὁ βαρύτερος καὶ ὑποϊάστιος καλεῖται. ὑποδώριος. τούτων βαρύτατος μὲν ὑποδώριος· οἱ δὲ ἑξῆς, οἱ ἀπὸ τοῦ βαρυτάτων μέχρι τοῦ ὀξυτάτου ἡμιτονίῳ ἀλλήλων ὑπερέχοντες. παράλληλοι δὲ δύο, τόνῳ· τρεῖς δὲ, τριημιτονίῳ. ἀναλόγως δὲ ἕξει καὶ ἐπὶ τῆς τῶν λοιπῶν τόνων διαστάσεως. ὁ δὲ ὑπερμιξολύδιος τοῦ ὑποδωρίου τῷ διὰ πασῶν ἐστιν ὀξύτερος. ὁ δὲ, ὡς τάσις, τόνος λέγεται, καθ᾽ ὅ φαμεν ὀξυτονεῖν τινα ἢ βαρυτονεῖν, ἢ μέσῳ τῷ τῆς φωνῆς τόνῳ κεχρῆσθαι.

Μεταβολὴ δὲ λέγεται τετραχῶς. καὶ γὰρ κατὰ γένος, καὶ κατὰ σύστημα, καὶ κατὰ τόνον. καὶ κατὰ μελοποιίαν. κατὰ μὲν οὖν γένος γίνεται μεταβολὴ, ὅταν ἐκ διατόνου εἰς χρῶμα, ἢ ἁρμονίαν· ἢ ἐκ χρώματος ἢ ἁρμονίας εἰς τι τῶν λοιπῶν μεταβολὴ γένηται. κατὰ σύστημα δὲ, ὅταν ἐκ συναφῆς εἰς διάζευξιν, ἢ ἀνάπαλιν, μεταβολὴ γένηται. κατὰ τόνον δὲ, ὅταν ἐκ δωρίων εἰς φρύγια, ἢ ἐκ φρυγίων εἰς λύδια, ἢ ὑπερμιξολύδια, ἢ ὑποδώρια, ἢ καθόλου, ὅταν ἔκ τινος τῶν δεκατριῶν τόνων εἴς τινα τῶν λοιπῶν μεταβολὴ γένηται. γίνονται δὲ αἱ μεταβολαὶ ἀπὸ τοῦ ἡμιτονίου ἀρξάμεναι μέχρι τοῦ διὰ πασῶν. ὧν αἱ μὲν κατὰ σύμφωνα γίνονται διαστήματα, αἱ δὲ κατὰ διάφωνα. τούτων δ᾽ αἱ μὲν ἐμμελεῖς ἧττον ἢ ἐκμελεῖς, αἱ δὲ μᾶλλον. ἐν ὅσαις μὲν οὖν αὐτῶν πλείων ἡ κοινωνία, ἐμμελέστεραι· ἐν ὅσαις δὲ ἐλάττων, ἐκμελέστεραι. ἐπειδὴ ἀναγκαῖον πάσῃ μεταβολῇ κοινόν τι ὑπάρχειν, ἢ φθόγγον, ἢ διάστημα, ἢ σύστημα. λαμβάνεται δὲ ἡ κοινωνία καθ᾽ ὁμοιότητα φθόγγων. ὅταν γὰρ ἐπ᾽ ἀλλήλους ἐν ταῖς μεταβολαῖς πέσωσιν ὅμοιοι φθόγγοι κατὰ τὴν τοῦ πυκνοῦ μετοχὴν, ἐμμελὴς γίνεται ἡ μεταβολή· ὅταν δὲ ἀνόμοιοι, ἐκμελής. κατὰ δὲ μελοποιίαν γίνεται μεταβολὴ, ὅταν ἐκ διασταλτικοῦ ἤθους εἰς συσταλτικὸν, ἢ ἡσυχαστικὸν, ἢ ἐξ ἡσυχαστικοῦ εἴς τι τῶν λοιπῶν ἡ μεταβολὴ γένηται. ἔστι δὲ διασταλτικὸν μὲν ἦθος μελοποιίας, δι᾽ οὗ σημαίνεται μεγαλοπρέπεια καὶ διάρμα ψυχῆς ἀνδρῶδες, καὶ πράξεις ἡρωϊκαὶ, καὶ πάθη τούτοις οἰκεῖα. χρῆται δὲ τούτοις μάλιστα μὲν ἡ τραγῳδία, καὶ τῶν λοιπῶν δὲ ὅσα τούτου ἔχεται τοῦ χαρακτῆρος. συσταλτικὸν δὲ, δι᾽ οὗ συνάγεται ἡ ψυχὴ εἰς ταπεινότητα καὶ ἄνανδρον διάθεσιν. ἁρμόσει δὲ τὸ τοιοῦτον κατάστημα τοῖς ἐρωτικοῖς πάθεσι καὶ θρήνοις, καὶ οἴκτοις καὶ τοῖς παραπλησίοις. ἡσυχαστικὸν δὲ ἦθός ἐστι μελοποιίας, ᾧ παρέπεται ἠρεμότης ψυχῆς, καὶ κατάστημα ἐλευθέριόν τε καὶ εἰρηνικόν. ἁρμόσουσι δὲ αὐτῷ ὕμνοι, παιᾶνες, ἐγκώμια, συμβουλαὶ, καὶ τὰ τούτοις ὅμοια.

Μελοποιΐα ἐστὶ χρῆσις τῶν προειρημένων μερῶν τῆς ἁρμονικῆς, καὶ ὑποκειμένων δύναμιν ἔχοντων.

ἐχόντων. δι' ὧν δὲ μελοποιία ἐπιτελεῖται, τέσσαρά ἐστιν· ἀγωγή, πλοκή, πεττεία, τονή. ἀγωγὴ μὲν οὖν ἐστιν, ἡ διὰ τῶν ἑξῆς φθόγγων ὁδὸς τοῦ μέλους. πλοκὴ δὲ, ἡ ἐναλλὰξ τῶν τε διαστημάτων θέσις παράλληλος. πεττεία δὲ, ἡ ἐφ' ἑνὸς τόνου πολλάκις γινομένη πλῆξις. τονὴ δὲ, ἡ ἐπὶ πλείονα χρόνον μονὴ, κατὰ μίαν γινομένη προφορὰν τῆς φωνῆς. διάγραμμα δὲ, σχῆμα ἐπίπεδον, τὰς τῶν μελῳδουμένων περιέχον δυνάμεις. δύναμις δέ ἐστι τάξις φθόγγου, δι' ἧς γνωρίζομεν τῶν φθόγγων ἕκαστον. μελοποιία δέ ἐστι χρῆσις τῶν ὑποκειμένων τῇ ἁρμονικῇ πραγματείᾳ, πρὸς τὸ οἰκεῖον ἑκάστης ὑποθέσεως. οὗτος ὁ ὅρος τῆς κατὰ τὸ ἡρμοσμένον ἐστὶ πραγματείας.

virtutem complectuntur. quatuor vero sunt, quibus melopœia perficitur: *Ductus*, *Nexus*, *Pettia*, *Extensio*. *Ductus* itaque est, cantilenæ via, per deinceps positos sonos confecta. *Nexus* vero contra, via permutata, spatiorumque positio alterna. *Pettia* est percussio in uno eodemque tono frequenter facta. *Extensio* est diuturnior mora, quæ una vocis prolatione conficitur. Diagramma est figura plana, eorum quæ modulamur continens potestates. potestas vero est, quæ vicem soni obtinet, per quam sonorum quemlibet cognoscimus. Melopœia denique est usus eorum, quæ Harmonicæ tractationi sunt subjecta, ad proprietatem cujusque argumenti exprimendam. Atque hic est tractationis de modulata serie finis.

ΤΕΛΟΣ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ.

FINIS INTRODUCTIONIS HARMONICÆ EUCLIDIS.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΚΑΤΑΤΟΜΗ
ΚΑΝΟΝΟΣ.

EUCLIDIS
SECTIO
CANONIS.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΚΑΤΑΤΟΜΗ
ΚΑΝΟΝΟΣ.

EUCLIDIS
SECTIO
CANONIS.

Εἰ ἡσυχία εἴη καὶ ἀκινησία, σιωπὴ ἂν εἴη. σιωπῆς δὲ οὔσης καὶ μηδενὸς κινουμένου, οὐδὲν ἂν ἀκούοιτο· εἰ ἄρα μέλλει τι ἀκουσθήσεσθαι, πληγὴν καὶ κίνησιν πρότερον δεῖ γενέσθαι. ὥστε, ἐπειδὴ πάντες οἱ φθόγγοι γίνονται πληγῆς τινος γινομένης, πληγὴν δὲ ἀμήχανον γενέσθαι, μὴ οὐχὶ κινήσεως πρότερον γενομένης· τῶν δὲ κινήσεων αἱ μὲν πυκνότεραί εἰσιν, αἱ δὲ ἀραιότεραι· καὶ αἱ μὲν πυκνότεραι ὀξυτέρους ποιοῦσι τοὺς φθόγγους, αἱ δὲ ἀραιότεραι, βαρυτέρους· ἀναγκαῖον τοὺς μὲν ὀξυτέρους εἶναι, ἐπείπερ ἐκ πυκνοτέρων καὶ πλειόνων σύγκεινται κινήσεων· τοὺς δὲ βαρυτάτους, ἐπείπερ ἐξ ἀραιοτέρων καὶ ἐλασσόνων σύγκεινται κινήσεων. ὥστε τοὺς μὲν ὀξυτέρους τοῦ δέοντος ἀνιεμένους ἀφαιρέσει κινήσεων τυγχάνειν τοῦ δέοντος· τοὺς δὲ βαρυτέρους ἐπιτεινομένους, προσθέσει κινήσεων, τυγχάνειν τοῦ δέοντος. διόπερ ἐκ μορίων τοὺς φθόγγους συγκεῖσθαι φατέον, ἐπειδὴ προσθέσει καὶ ἀφαιρέσει τυγχάνουσι τοῦ δέοντος. πάντα δὲ τὰ ἐκ μορίων συγκείμενα, ἀριθμοῦ λόγῳ λέγεται πρὸς ἄλληλα. ὥστε καὶ τοὺς φθόγγους ἀναγκαῖον ἐν ἀριθμοῦ λόγῳ λέγεσθαι πρὸς ἀλλήλους. τῶν δὲ ἀριθμῶν οἱ μὲν ἐν πολλαπλασίονι λόγῳ λέγονται· οἱ δὲ ἐν ἐπιμορίῳ· οἱ δὲ ἐν ἐπιμερεῖ. ὥστε καὶ τοὺς φθόγγους ἀναγκαῖον ἐν τοῖς τοιούτοις λόγοις λέγεσθαι πρὸς ἀλλήλους. τούτων δὲ οἱ μὲν πολλαπλάσιοι, καὶ ἐπιμόριοι ἑνὶ ὀνόματι λέγονται πρὸς ἀλλήλους. γιγνώσκομεν δὲ καὶ τῶν φθόγγων τοὺς μὲν συμφώνους ὄντας, τοὺς δὲ διαφώνους. καὶ τοὺς μὲν συμφώνους μίαν κρᾶσιν τὴν ἐξ ἀμφοῖν ποιοῦντας· τοὺς δὲ διαφώνους, οὔ. τούτων οὕτως ἐχόντων, εἰκὸς τοὺς συμφώνους φθόγγους, ἐπειδὴ μίαν, τὴν ἐξ ἀμφοῖν, ποιοῦνται κρᾶσιν τῆς φωνῆς, εἶναι τῶν ἐν ἑνὶ ὀνόματι πρὸς ἀλλήλους λεγομένων ἀριθμῶν, ἤτοι πολλαπλασίους ὄντας, ἢ ἐπιμορίους.

Si omnia quiescerent, nihilque moveretur, silentium foret. si silentium foret, nihilque moveretur, nihil quoque audiretur: quare, si quid audiri debeat, percussionem atque motum præcedere oportet. hinc adeo, cum omnes soni fiant præcedente aliqua percussione; percussio vero fieri nequeat nisi præcesserit motus: & cum motuum alii sint spissiores, alii rariores; & quidem spissiores faciant sonos acutiores; rariores vero, graviores: necesse est, illos quidem esse acutiores, quod ex spissioribus & pluribus componantur motibus; hos vero graviores, quod ex motibus constituantur & rarioribus & paucioribus. ut hac ratione, qui justo sunt acutiores, si remittantur, ablatione motuum justum sonum consequantur; ut contra, qui graviores, si intendantur, motuum additione justi fiunt. sonos itaque ex partibus componi dicendum, quod additione & ablatione fiant justi. jam vero, quæ ex partibus constant, omnia, numeri inter se ratione dicuntur. ut sonos quoque numeri ratione inter se dici sit necesse. porro numerorum alii dicuntur in ratione multiplici, alii in superparticulari, alii in superpartiente. ut & sonos necesse sit iis inter se rationibus appellari. atque horum multiplices & superparticulares uno inter se nomine dicuntur. deinde quoque est notum, sonorum alios esse consonos, alios dissonos. & consonos quidem unam ex ambobus facere mistionem: dissonos vero, non item. cum hæc ita se habeant, rationi est consentaneum, sonos consonos, quod vocis unam ex ambobus mistionem, faciant ad numeros, qui uno nomine mutuum suum dicunt respectum, vel multiplices, vel superparticulares.

Theorema I.

Si intervallum multiplex, bis compositum, fecerit aliquod intervallum; etiam illud erit multiplex.

Esto intervallum B, Γ, ita ut B sit multiplex ipsius Γ; porro factum sit, ut Γ ad B ita B ad Δ: dico Δ quoque multiplicem esse ipsius Γ.

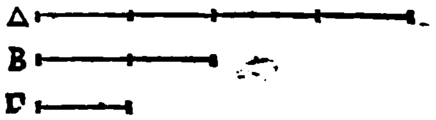
Quoniam enim B multiplex est ipsius Γ, metitur ergo Γ ipsum B. sed erat quoque ut Γ ad B ita B ad Δ: quare & Γ metitur ipsum Δ: ergo Δ est multiplex ipsius Γ.

ΘΕΩΡΗΜΑ α'.

Ἐὰν διάστημα πολλαπλάσιον, δὶς συντεθὲν, ποιῇ τι διάστημα· καὶ αὐτὸ πολλαπλάσιον ἔσται.

Ἔστω διάστημα τὸ Β, Γ, καὶ ἔστω πολλαπλάσιον τὸ Β τοῦ Γ, καὶ γεγενήσθω ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ· φημὶ δὴ καὶ τὸν Δ τοῦ Γ πολλαπλάσιον εἶναι.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Β τοῦ Γ πολλαπλάσιός ἐστι, μετρεῖ ἄρα ὁ Γ τὸν Β. ἦν δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ· ὥστε μετρεῖ καὶ ὁ Γ τὸν Δ· πολλαπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ Δ τοῦ Γ.



Theorema II.

Si intervallum, bis compositum, totum fecerit intervallum multiplex; ipsum quoque erit multiplex.

Sit intervallum B, Γ, factumque sit ut Γ ad B ita B ad Δ, sit quoque Δ multiplex ipsius Γ: dico etiam B ipsius Γ esse multiplicem.

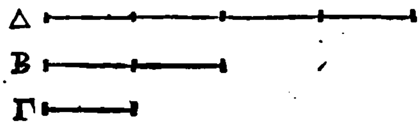
Quia enim Δ est multiplex ipsius Γ, igitur Γ metitur ipsum Δ. didici autem; si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, & primus metiatur ultimum, illum quoque intermedios mensurum: quare & Γ metitur ipsum Δ: ergo B est multiplex ipsius Γ.

ΘΕΩΡΗΜΑ β'.

Ἐὰν διάστημα, δὶς συντεθὲν, τὸ ὅλον ποιῇ πολλαπλάσιον· καὶ αὐτὸ ἔσται πολλαπλάσιον.

Ἔστω διάστημα τὸ Β, Γ, καὶ γεγενήσθω ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔστω ὁ Δ τοῦ Γ πολλαπλάσιος· φημὶ δὴ καὶ τὸν Β τοῦ Γ εἶναι πολλαπλάσιον.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Δ τοῦ Γ πολλαπλάσιός ἐστι, μετρεῖ ἄρα ὁ Γ τὸν Δ. ἔμαθον δὲ, ὅτι ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὁποσοιοῦν, ὁ δὲ πρῶτος τὸν ἔσχατον μετρῇ, καὶ τοὺς μεταξὺ μετρήσει· μετρεῖ ἄρα ὁ Γ τὸν Δ· πολλαπλάσιος ἄρα ὁ Β τοῦ Γ.



Theorema III.

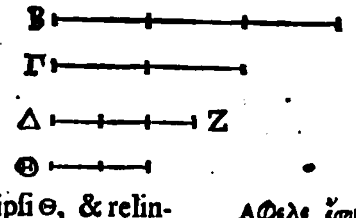
Superparticulare intervallum neque unum neque plures habebit proportionaliter incidentes numeros medios.

Sit enim superparticulare intervallum B, Γ. minimi vero in eadem ratione, in qua sunt B, Γ, sint Δ Z, Θ. hos igitur sola unitas, tanquam mensura communis metitur.

ΘΕΩΡΗΜΑ γ'.

Ἐπιμορίου διαστήματος μέσοι, οὔτε εἷς οὔτε πλείους ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί.

Ἔστω γὰρ ἐπιμόριον διάστημα τὸ Β, Γ. ἐλάχιστοι δὲ ἐπὶ τῷ αὐτῷ λόγῳ τοῖς Β, Γ ἔστωσαν οἱ Δ Ζ, Θ· οὗτοι δὴ ὑπὸ μονάδος μόνης μετροῦνται κοινοῦ μέτρου.



Aufer H Z æqualem numerum ipsi Θ, & relinquitur unitas: est igitur Δ Z superparticularis ipsius Θ. excessus vero ipse Δ H communis mensura

Ἀφελε ἴσον τῷ Θ τὸν Η Ζ, καὶ ἐπίλοιπον μονάς. ἐπιμόριός ἐστιν ἄρα ὁ Δ Ζ τοῦ Θ. καὶ ἡ ὑπεροχὴ ὁ Δ Η κοινὸν μέτρον τοῦτε

ΔΖ

ΔΖ καὶ Θ· οὐκ ἄρα ἐμπεσεῖται εἰς τοὺς ΔΖ, Θ μέσος οὐδείς. ἔσται γὰρ ὁ ἐμπίπτων τοῦ ΔΖ ἐλάττων, τοῦ δὲ Θ μείζων· ὥστε τὴν μονάδα διαιρεθῆναι, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐμπεσεῖται εἰς τοὺς ΔΖ, Θ τις. ὅσοι δὲ εἰς τοὺς ἐλαχίστους μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσι, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται. οὐδεὶς δὲ εἰς τοὺς ΔΖ, Θ ἐμπεσεῖται· οὐδὲ ἄρα εἰς τοὺς Β, Γ ἐμπεσεῖται.

ipsius ΔZ & Θ: nullus igitur inter ΔZ & Θ medius cadet proportionalis. Foret enim qui incideret, ipso ΔZ minor, major vero ipso Θ; atque hac ratione unitas divideretur, quod fieri nequit: nullus ergo inter ΔZ & Θ incidet. quot autem inter minimos cadunt medii proportionales, tot etiam inter alios, eandem rationem habentes, incident proportionales. sed nullus cadit inter ΔZ & Θ; quare nec inter B, Γ quisquam incidet.

ΘΕΩΡΗΜΑ δʹ.

Ἐὰν διάστημα, μὴ πολλαπλάσιον, δὶς συντεθῇ· τὸ ὅλον οὔτε πολλαπλάσιον ἔσται, οὔτε ἐπιμόριον.

Ἔστω γὰρ διάστημα μὴ πολλαπλάσιον τὸ Β, Γ, καὶ γινέσθω ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ· λέγω ὅτι ὁ Δ τοῦ Γ οὔτε πολλαπλάσιος, οὔτε ἐπιμόριός ἐστιν.

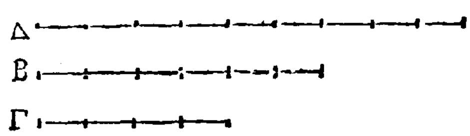
Ἔστω γὰρ πρῶτον ὁ Δ τοῦ Γ πολλαπλάσιος· οὐκοῦν ἐμάθομεν, ὅτι ἐὰν διάστημα, δὶς συντεθὲν, τὸ ὅλον ποιῇ πολλαπλάσιον, καὶ αὐτὸ πολλαπλάσιόν ἐστιν· ἔσται ἄρα ὁ Β τοῦ Γ πολλαπλάσιος. οὐκ ἦν δέ· ἀδύνατον ἄρα τὸν Δ τοῦ Γ εἶναι πολλαπλάσιον. ἀλλὰ μὴν οὐδ' ἐπιμόριον, ἐπιμορίου γὰρ διαστήματος μέσος οὐδεὶς ἀνάλογον ἐμπίπτει· εἰς δὲ τοὺς Δ, Γ ἐμπίπτει ὁ Β· ἀδύνατον ἄρα τὸν Δ τοῦ Γ ἢ πολλαπλάσιον, ἢ ἐπιμόριον εἶναι.

THEOREMA IV.

Si intervallum non multiplex bis componatur; totum, quod producitur, intervallum, neque multiplex erit, neque superparticulare.

SIT enim intervallum non multiplex B, Γ; & fiat ut Γ ad B ita B ad Δ: dico Δ neque multiplicem esse, neque superparticularem ipsius Γ.

Sit enim primo Δ multiplex ipsius Γ; atqui



didicimus, si intervallum, bis compositum, totum fecerit multiplex, ipsum quoque esse multiplex: erit igitur B multiplex ipsius Γ. sed hoc non erat: quare impossibile est ut Δ sit multiplex ipsius Γ. sed neque secundo, superparticularis; cum superparticulare intervallum nullum habeat medium *numerum* proportionaliter intervenientem. jam vero inter Δ, Γ cadit B: quare fieri nequit ut Δ ipsius Γ aut multiplex sit aut superparticularis.

ΘΕΩΡΗΜΑ εʹ.

Ἐὰν διάστημα, δὶς συντεθὲν, τὸ ὅλον μὴ ποιῇ πολλαπλάσιον· οὐδ' αὐτὸ ἔσται πολλαπλάσιον.

Ἔστω διάστημα τὸ Β, Γ, καὶ γεγενήσθω ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ. καὶ μὴ ἔστω ὁ Δ τοῦ Γ πολλαπλάσιος· λέγω ὅτι οὐδὲ ὁ Β τοῦ Γ ἔσται πολλαπλάσιος.

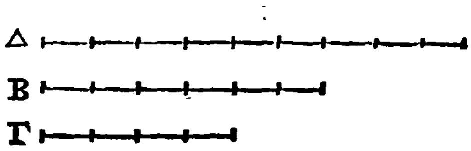
Εἰ γάρ ἐστιν ὁ Β τοῦ Γ πολλαπλάσιος, ἔσται καὶ ὁ Δ τοῦ Γ πολλαπλάσιος. οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ὁ Β τοῦ Γ ἔσται πολλαπλάσιος.

THEOREMA V.

Si intervallum, bis compositum, totum non fecerit multiplex; ipsum quoque non erit multiplex.

SIT enim intervallum B, Γ; sitque factum ut Γ ad B ita B ad Δ; porro Δ non sit multiplex ipsius Γ: dico nec B ipsius Γ fore multiplicem.

Si enim B fuerit multiplex ipsius Γ, erit



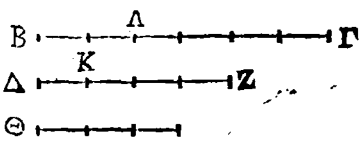
quoque Δ multiplex ipsius Γ. atqui non est: neque igitur B erit multiplex ipsius Γ.

THEOREMA VI.

Duplex intervallum constat ex duobus maximis superparticularibus, sesquialtero scilicet & sesquitertio.

SIT enim ΒΓ sesquialter ipsius ΔΖ, ΔΖ vero sesquitertius ipsius Θ: dico ΒΓ duplum esse ipsius Θ.

Quoniam enim dempsi ΖΚ æqualem ipsi Θ,

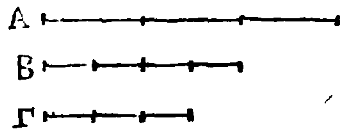


deinde ipsi ΔΖ æqualem ΓΛ: hinc, quoniam ΒΓ est sesquialter ipsius ΔΖ, existit ΒΛ pars tertia ipsius ΒΓ, at dimidia ipsius ΔΖ. rursus, quoniam ΔΖ est sesquitertius ipsius Θ, ΔΚ est pars quarta ipsius ΔΖ, at tertia ipsius Θ: cum igitur ΔΚ sit pars quarta ipsius ΔΖ, at ΒΛ pars tertia ipsius ΒΓ; erit ΔΚ pars sexta ipsius ΒΓ. atqui idem ΔΚ erat pars tertia ipsius Θ: ergo ΒΓ duplus est ipsius Θ.

ALITER.

Sit enim Α sesquialter ipsius Β, ipse autem Β sesquitertius ipsius Γ; dico Α esse duplum ipsius Γ.

Quoniam enim Α sesquialter est ipsius Β, Α



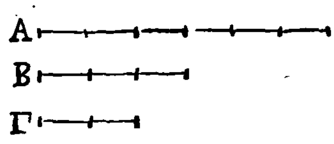
continet ipsum Β atque ejus semissem: quare duo Α æquales sunt tribus Β. rursus, quoniam Β est sesquitertius ipsius Γ, continet ergo Β ipsum Γ & tertiam ejus partem: quare tres Β æquales sunt quatuor Γ. atqui tres Β æquales quoque sunt duobus Α: quare duo Α æquales sunt quatuor Γ. atque hinc Α est æqualis duobus Γ: est igitur Α duplus ipsius Γ.

THEOREMA. VII.

Ex duplo intervallo & sescuplo, triplum fit intervallum.

SIT enim Α duplus ipsius Β, Β vero sescuplus ipsius Γ: dico Α esse triplum ipsius Γ.

Cum enim Α sit duplum ipsius Β; est ergo Α



æqualis binis Β. rursus, cum Β sit sesquialter ipsius Γ; continet ergo Β ipsum Γ ejusque

ΘΕΩΡΗΜΑ ϛ'.

Τὸ διπλάσιον διάστημα ἐκ δύο τῶν μεγίστων ἐπιμορίων συνέστηκεν, ἔκ τε τοῦ ἡμιολίου καὶ ἐκ τοῦ ἐπιτρίτου.

ΕΣτω γὰρ ὁ μὲν ΒΓ τοῦ ΔΖ ἡμιόλιος, ὁ δὲ ΔΖ τοῦ Θ ἐπίτριτος· φημὶ τὸν ΒΓ τοῦ Θ διπλάσιον εἶναι.

Αφεῖλον γὰρ ἴσον τῷ Θ τὸν ΖΚ, καὶ τῷ ΔΖ τὸν ΓΛ· οὐκοῦν ἐπεὶ ὁ ΒΓ τοῦ ΔΖ ἡμιόλιος, ὁ ΒΛ ἄρα τοῦ ΒΓ τρίτον μέρος ἐστὶν, τοῦ δὲ ΔΓ ἥμισυ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ ΔΖ τοῦ Θ ἐπίτριτός ἐστιν, ὁ ΔΚ τοῦ μὲν ΔΖ τεταρτημόριόν ἐστι, τοῦ δὲ Θ τριτημόριον· οὐκοῦν ἐπεὶ ὁ ΔΚ τοῦ ΔΖ ἐστὶ τεταρτημόριον, ὁ δὲ ΒΛ τοῦ ΒΓ τρίτον μέρος· ὁ ἄρα ΔΚ τοῦ ΒΓ ἕκτον μέρος ἐστίν. ἦν δὲ ὁ ΔΚ τοῦ Θ τρίτον μέρος· ὁ ἄρα ΒΓ τοῦ Θ διπλάσιός ἐστιν.

ΑΛΛΩΣ.

Εστω γὰρ ὁ μὲν Α τοῦ Β ἡμιόλιος. ὁ δὲ Β τοῦ Γ ἐπίτριτος· λέγω ὅτι ὁ Α τοῦ Γ ἐστὶ διπλάσιος.

Επεὶ γὰρ ἡμιόλιός ἐστιν ὁ Α τοῦ Β· ὁ Α ἄρα ἔχει τὸν Β, καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ· δύο ἄρα οἱ Α ἴσοι εἰσὶ τρισὶ τοῖς Β. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Β τοῦ Γ ἐστιν ἐπίτριτος· ὁ Β ἄρα ἔχει τὸν Γ καὶ τὸ τρίτον αὐτοῦ· τρεῖς ἄρα οἱ Β ἴσοι εἰσὶ τέτταρσι τοῖς Γ. τρεῖς δὲ οἱ Β ἴσοι εἰσὶ δυσὶ τοῖς Α· δύο ἄρα οἱ Α ἴσοι εἰσὶ τέτταρσι τοῖς Γ· ὁ Α ἄρα ἴσος ἐστὶ δυσὶ τοῖς Γ· διπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ Α τοῦ Γ.

ΘΕΩΡΗΜΑ ζ'.

Εκ τοῦ διπλασίου διαστήματος καὶ ἡμιολίου, τριπλάσιον διάστημα γίνεται.

ΕΣτω γὰρ ὁ μὲν Α τοῦ Β διπλάσιος, ὁ δὲ Β τοῦ Γ ἡμιόλιος· λέγω ὅτι ὁ Α τοῦ Γ ἐστὶ τριπλάσιος.

Επεὶ γὰρ ὁ Α τοῦ Β ἐστὶ διπλάσιος· ὁ ἄρα Α ἴσος ἐστὶ δυσὶ τοῖς Β. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Β τοῦ Γ ἐστὶν ἡμιόλιος· ὁ Β ἄρα ἔχει τὸν Γ καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ.

δύο

δύο ἄρα οἱ Β ἴσοι εἰσὶ τρισὶ τοῖς Γ. δύο δὲ οἱ Β ἴσοι εἰσὶ τῷ Α· καὶ ὁ Α ἄρα ἴσος ἐστὶ τρισὶ τοῖς Γ· τριπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ Α τοῦ Γ.

quare bini B æquales sunt ternis Γ. atque bini B æquales sunt ipsi A: ergo A quoque æqualis est ternis Γ: est ergo A triplus ipsius Γ.

ΘΕΩΡΗΜΑ η'.

Ἐὰν ἀπὸ ἡμιολίου διαστήματος ἐπίτριτον διάστημα ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν καταλείπεται ἐπόγδοον.

THEOREMA VIII.

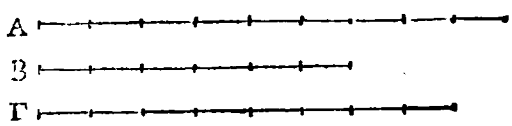
Si à sesculplo intervallo sesquitertium intervallum auferatur; quod relinquitur, est sesquioctavum.

Ἔστω γὰρ ὁ μὲν Α τοῦ Β ἡμιόλιος, ὁ δὲ Γ τοῦ Β ἐπίτριτος· λέγω ὅτι ὁ Α τοῦ Γ ἐστὶν ἐπόγδοος.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τοῦ Β ἐστὶν ἡμιόλιος, ὁ Α ἄρα ἔχει τὸν Β καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ· ὀκτὼ ἄρα οἱ Α ἴσοι εἰσὶ δώδεκα τοῖς Β. πάλιν ἐπεὶ ὁ Γ τοῦ Β ἐστὶν ἐπίτριτος· ὁ Γ ἄρα ἔχει τὸν Β καὶ τὸ τρίτον αὐτοῦ· ἐννέα ἄρα οἱ Γ ἴσοι εἰσὶ δώδεκα τοῖς Β. δώδεκα δὲ οἱ Β ἴσοι εἰσὶν ὀκτὼ τοῖς Α· ὀκτὼ ἄρα οἱ Α ἴσοι εἰσὶν ἐννέα τοῖς Γ· ὁ ἄρα Α ἴσος ἐστὶ τῷ Γ καὶ τῷ ὀγδόῳ αὐτοῦ· ὁ Α ἄρα τοῦ Γ ἐστὶν ἐπόγδοος.

Esto enim A sesquialter ipsius B, at Γ sesquitertius ipsius B: dico A esse superoctavum ipsius Γ.

Quoniam enim A est sesquialter ipsius B, habet ergo A ipsum, ejusque semissem: quare octo A æquales sunt duodecim B. porro, quoniam Γ est ipsius B sesquitertius, habet ergo Γ ipsum B ejusque trientem: quare novem Γ æquales sunt duodecim B. atqui duodecim B æquales sunt octonis A: octoni ergo A æquales sunt novenis Γ: quare A æqualis est ipsi Γ ejusque parti octavæ: atque adeo A sesquioctavus est ipsius Γ.



ΘΕΩΡΗΜΑ θ'.

Τὰ ἓξ ἐπόγδοα διαστήματα μείζονά ἐστι διαστήματος ἑνὸς διπλασίου.

THEOREMA IX.

Sex intervalla sesquioctava majora sunt uno intervallo duplo.

Ἔστω γὰρ ὁ εἷς ἀριθμὸς ὁ Α, καὶ τοῦ μὲν Α ἐπόγδοος ἔστω ὁ Β, τοῦ δὲ Β ἐπόγδοος ὁ Γ, τοῦ δὲ Γ ἐπόγδοος ὁ Δ, τοῦ δὲ Δ ἐπόγδοος ὁ Ε, τοῦ δὲ Ε ἐπόγδοος ὁ Ζ, τοῦ δὲ Ζ ἐπόγδοος ὁ Η· λέγω ὅτι ὁ Η τοῦ Α μείζων ἐστὶν ἢ διπλάσιος.

Ἐπεὶ ἐμάθομεν εὑρεῖν ἑπτὰ ἀριθμοὺς ἐφεξῆς ἐπογδόους ἀλλήλων, εὑρήσθωσαν οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η. καὶ γίνεται ὁ μὲν Α, εἰκοσιὲξ μύρια, δισχίλια, ἑκατὸν καὶ τεσσαράκοντα καὶ τέσσαρα· ὁ δὲ Β, εἰκοσιεννέα μύρια, τετρακισχίλια, ἐννακόσια καὶ δώδεκα· ὁ δὲ Γ, τριακοντατρία μύρια, χίλια, ἑπτακόσια, καὶ ἑβδομηκονταέξ· ὁ δὲ Δ, τριακονταεπτὰ μύρια, τρισχίλια, διακόσια καὶ τεσσαρακονταοκτώ· ὁ δὲ Ε, τεσσαρακονταὲν μύρια, ἐννακισχίλια, ἐννακόσια καὶ τέσσαρα· ὁ δὲ Ζ, τεσσαρακονταεπτὰ μύρια, δισχίλια, τριακόσια καὶ ἐννενηκονταδύο· ὁ δὲ Η, πεντηκοντατρία μύρια, χίλια, τετρακόσια καὶ τεσσαρακονταέν· καὶ ἔστιν ὁ Η τοῦ Α μείζων ἢ διπλάσιος.

SIT enim unus numerus A, atque hujus A sesquioctavus sit B, hujus vero B sesquioctavus sit Γ, hujus vero Γ sesquioctavus sit Δ, rursus hujus Δ sesquioctavus sit E, ipsius vero E sesquioctavus sit Z, denique ipsius Z sesquioctavus sit H: dico H numerum duplo & amplius majorem esse ipso A.

Quoniam didicimus invenire septem numeros deinceps inter se sesquioctavos, inventi sint, A, B, Γ, Δ, E, Z, H.

A, 262144. B, 294912. Γ, 331776.
Δ, 373248. E, 419904. Z, 472392. H, 531441.

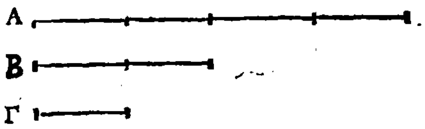
sit itaque A vicies-sexies dena millia, duo millia, centum quadraginta quatuor; B autem, vicies-novies dena millia, quatuor millia, nongenta & duodecim; deinde Γ, tricies-ter dena millia, mille, septingenta, septuaginta sex; & Δ, tricies-septies dena millia, tria millia, ducenta & quadraginta octo; & E, quadragies-semel dena millia, novem millia, nongenta & quatuor; porro Z, quadragies-septies dena millia, duo millia, trecenta & nonaginta duo; tandem H, quinquagies-ter dena millia, mille, quadringenta & quadraginta unum; estque H duplo & amplius major quam A.

Theorema X.
Intervallum diapaſon eſt multiplex.

SIT enim nete quidem hyperbolæon A, meſe vero B, & proſlambanomenos Γ: ergo A, Γ intervallum, cum ſit bis diapaſon, eſt conſonum. eſt igitur vel ſuperparticulare, vel multiplex. non eſt autem ſuperparticulare, quoniam in ſuperparticulari intervallo nullus cadit medius proportionalis: eſt ergo multiplex. quoniam ergo bina æqualia intervalla, A, B : B, Γ, compoſita faciunt multiplex; ideo & A, B erit multiplex.

ΘΕΩΡΗΜΑ ι'.
Τὸ διὰ πασῶν διάστημα ἐστὶ πολλαπλάσιον.

Ἔστω γὰρ νήτη μὲν ὑπερβολαίων ὁ Α, μέση δὲ ὁ Β, προσλαμβανόμενος δὲ ὁ Γ· τὸ ἄρα Α, Γ διάστημα, δὶς διὰ πασῶν ὄν, ἐστὶ σύμφωνον.



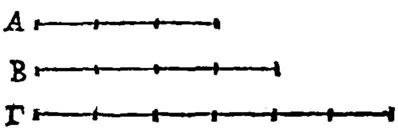
ἤτοι οὖν ἐπιμόριόν ἐστιν, ἢ πολλαπλάσιον. ἐπιμόριον μὲν οὖν οὐκ ἔστιν, ἐπιμορίου γὰρ διαστήματος μέσος οὐδεὶς ἀνάλογον ἐμπίπτει· πολλαπλάσιον ἄρα ἐστίν. ἐπεὶ οὖν δύο ἴσα διαστήματα, τὰ Α, Β· Β, Γ συντεθέντα ποιεῖ πολλαπλάσιον τὸ ὅλον· καὶ τὸ Α, Β ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον.

Theorema XI.
Diateſſaron intervallum & diapente, utrumque eſt ſuperparticulare.

ESto enim nete quidem ſynemmenon A, meſe vero B, & hypate meſon Γ: quare A, Γ intervallum, cum ſit bis diateſſaron, eſt diſſonum: non eſt ergo multiplex. quoniam itaque duo intervalla æqualia, A, B : B, Γ compoſita totum non faciunt multiplex, neque ergo A, B eſt multiplex. eſt tamen conſonum: ergo ſuperparticulare. eadem demonſtratio obtinet in diapente.

ΘΕΩΡΗΜΑ ια'.
Τὸ διὰ τεσσάρων διάστημα καὶ τὸ διὰ πέντε, ἑκάτερον ἐπιμόριόν ἐστιν.

Ἔστω γὰρ νήτη μὲν συνημμένων ὁ Α, μέση δὲ ὁ Β, ὑπάτη δὲ μέσων ὁ Γ· τὸ ἄρα Α, Γ διάστημα, δὶς διὰ τεσσάρων ὄν, ἐστὶ διάφωνον·



οὐκ ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον. ἐπεὶ οὖν δύο διαστήματα ἴσα τὰ Α Β· Β Γ συντεθέντα τὸ ὅλον μὴ ποιεῖ πολλαπλάσιον, οὐδὲ ἄρα τὸ Α, Β ἐστὶ πολλαπλάσιον. καί ἐστι σύμφωνον· ἐπιμόριον ἄρα. ἡ αὐτὴ δὲ ἀπόδειξις καὶ ἐπὶ τοῦ διὰ πέντε.

Theorema XII.
Intervallum diapaſon eſt duplum.

QUippe monſtravimus ipſum eſſe multiplex: quare aut duplum eſt, aut duplo majus. ſed monſtravimus intervallum duplum conſtare ex duobus maximis ſuperparticularibus: unde diapaſon intervallum, ſi duplo fuerit majus, non erit compoſitum ex duobus ſolum ſuperparticularibus, ſed ex pluribus. atqui componitur ex duobus intervallis conſonis, nimirum ex diapente & diateſſaron: quare diapaſon non erit duplo majus: ergo duplum. quoniam vero diapaſon eſt duplum, & duplum conſtat ex duobus maximis ſuperparticularibus; idcirco diapaſon ex ſeſquialtero conſtat & ſeſquitertio: hæc enim ſunt maxima; ſiquidem ex diapente & diateſſaron, quæ ſuperparticularia ſunt, componitur. porro diapente, quoniam majus eſt, erit ſeſcuplum;

ΘΕΩΡΗΜΑ ιβ'.
Τὸ διὰ πασῶν διάστημα ἐστὶ διπλάσιον.

Ἐδείξαμεν γὰρ αὐτὸ πολλαπλάσιον· οὐκοῦν ἤτοι διπλάσιόν ἐστιν, ἢ μεῖζον ἢ διπλάσιον. ἀλλ' ἐπεὶ ἐδείξαμεν τὸ διπλάσιον διάστημα ἐκ δύο τῶν μεγίστων ἐπιμορίων συγκείμενον· ὥστε εἰ ἔσται τὸ διὰ πασῶν μεῖζον διπλασίου, οὐ συγκείσεται ἐκ δύο μόνων ἐπιμορίων, ἀλλ' ἐκ πλειόνων. σύγκειται δὲ ἐκ δύο συμφώνων διαστημάτων, ἔκ τε τοῦ διὰ πέντε καὶ διὰ τεσσάρων· οὐκ ἄρα ἔσται διὰ πασῶν μεῖζον διπλασίου· διπλάσιον ἄρα. ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ διὰ πασῶν ἐστι διπλάσιον, τὸ δὲ διπλάσιον ἐκ τῶν δύο μεγίστων ἐπιμορίων συνέστηκεν· καὶ τὸ διὰ πασῶν ἄρα ἐξ ἡμιολίου καὶ ἐπιτρίτου συνέστηκεν· ταῦτα γὰρ μέγιστα, συνέστηκε γὰρ ἔκ τε τοῦ διὰ πέντε καὶ ἐκ τοῦ διὰ τεσσάρων ὄντων ἐπιμορίων· τὸ μὲν ἄρα διὰ πέντε, ἐπειδὴ μεῖζόν ἐστιν, ἡμιόλιον ἂν εἴη.

ἐστί· τὸ δὲ διὰ τεσσάρων ἐπίτριτον. Φανερὸν δὴ ὅτι τὸ διὰ πέντε καὶ τὸ διὰ πασῶν τριπλάσιόν ἐστιν, ἐδείξαμεν γὰρ ὅτι ἐκ διπλασίου διαστήματος καὶ ἡμιολίου τριπλάσιον διάστημα γίνεται· ὥστε καὶ τὸ διὰ πασῶν καὶ τὸ διὰ πέντε τριπλάσιον. τὸ δὲ δὶς διὰ πασῶν τετραπλάσιόν ἐστιν· * ἀποδέδεικται ἄρα τῶν συμφώνων ἕκαστον ἐν τίσι λόγοις ἔχει τοὺς περιέχοντας φθόγγους πρὸς ἀλλήλους.

diatessaron vero sesquitertium. manifestum quoque, intervallum quod fit ex diapente & diapason additis, esse triplum; etenim monstravimus, ex duplo intervallo & sesquialtero, intervallum fieri triplum: ideoque diapason & diapente triplum est. bis diapason autem quadruplum: demonstratum ergo est, quibus inter se rationibus constitutos habet sonos, qui ipsum continent consonorum, *intervallorum* unumquodq;.

ΘΕΩΡΗΜΑ ιγʹ.

Λοιπὸν δὲ περὶ τοῦ τονιαίου διαστήματος διελθεῖν, ὅτι ἐστὶν ἐπόγδοον.

Ἐμάθομεν γὰρ ὅτι ἐὰν μὲν ἀπὸ ἡμιολίου διαστήματος ἐπίτριτον διάστημα ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν καταλείπεται ἐπόγδοον· ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ διὰ πέντε τὸ διὰ τεσσάρων ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν τονιαῖόν ἐστι διάστημα· τὸ ἄρα τονιαῖον διάστημά ἐστιν ἐπόγδοον.

THEOREMA XIII.

Reliquum est ut de toni intervallo dispiciamus, quod est sesquioctavum.

NAM didicimus, si à sescuplo intervallo auferatur intervallum sesquitertium, id quod relinquitur, esse sesquioctavum; porro si à diapente auferatur diatessaron, reliquum esse toni intervallum: quare toni intervallum est sesquioctavum.

ΘΕΩΡΗΜΑ ιδʹ.

Τὸ διὰ πασῶν ἔλαττόν ἐστιν ἢ ἓξ τόνων.

Δέδεικται γὰρ τὸ μὲν διὰ πασῶν διπλάσιον· ὁ δὲ τόνος ἐπόγδοος. τὰ δὲ ἓξ ἐπόγδοα διαστήματα μείζονα διαστήματός ἐστι διπλασίου· τὸ ἄρα διὰ πασῶν ἔλαττόν ἐστιν ἓξ τόνων.

THEOREMA XIV.

Diapason est minus sex tonis.

MOnstratum enim est, diapason quidem esse duplum: tonus vero est sesquioctavus. at sex sesquioctava intervalla majora sunt intervallo duplo: quare diapason minus est sex tonis.

ΘΕΩΡΗΜΑ ιεʹ.

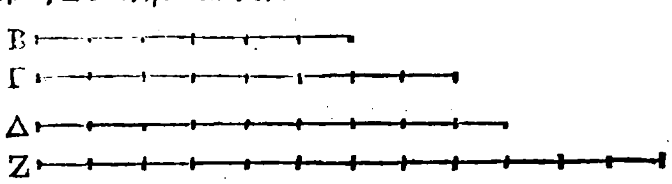
Τὸ δὲ διὰ τεσσάρων ἔλαττον δύο τόνων καὶ ἡμιτονίου. καὶ τὸ διὰ πέντε ἔλαττον τριῶν τόνων καὶ ἡμιτονίου.

Ἔστω γὰρ νήτη μὲν διεζευγμένων ὁ Β, παραμέση δὲ ὁ Γ, μέση δὲ ὁ Δ, ὑπάτη δὲ μέσων ὁ Ζ· οὐκοῦν τὸ μὲν Γ, Δ διάστημα τόνος ἐστί. τὸ δὲ Β, Ζ διὰ πασῶν ὄν, ἔλαττόν ἐστιν ἓξ τόνων· τὰ λοιπὰ ἄρα, τό, τε Β, Γ καὶ τὸ Δ, Ζ, ἴσα ὄντα, ἐλάττονά ἐστι πέντε τόνων· ὥστε τὸ Β, Γ ἔλαττον, δύο τόνων καὶ ἡμιτονίου ὄν, ἐστὶ διὰ τεσσάρων· τὸ δὲ Β,Δ, ἔλαττον τριῶν τόνων καὶ ἡμιτονίου ὄν, ἐστὶ διὰ πέντε.

THEOREMA. XV.

Diatessaron minus est duobus tonis & hemitonio. item diapente minus est tribus tonis & hemitonio.

SIT enim nete quidem diezeugmenon Β, paramese vero Γ, mese Δ, hypate meson Ζ: quare Γ, Δ intervallum est tonus. at Β, Ζ cum sit diapason, minus est sex tonis: ergo reliqua, scilicet Β Γ, & Δ Ζ, cum sint æqualia, minora sunt tonis quinque: quare Β, Γ, cum duobus tonis & hemitonio existat minus, est diatessaron: deinde Β, Δ, cum tribus tonis & hemitonio sit minus, est diapente.



ΘΕΩΡΗΜΑ ιϛʹ.

Ὁ τόνος οὐ διαιρεθήσεται εἰς δύο ἴσας, οὔτε εἰς πλείους.

Ἐδείχθη γὰρ ὢν ἐπιμόριος. ἐπιμορίου δὲ διαστήματος οὔτε πλείους οὔτε εἷς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν· οὐκ ἄρα διαιρεθήσεται ὁ τόνος εἰς ἴσα.

THEOREMA. XVI.

Tonus in duas pluresve æquales partes dividi nequit.

MOnstratus enim est esse superparticularis. at superparticulare intervallum neq; unum neque plures capit medios proportionaliter intervenientes: quare nec tonus in æqua dividetur.

* In editis *Euclidis* perperam, ἀποδέδεικται ἄρα ὅτι τῶν συμφώνων ἕκαστον ἐν τισὶ λόγοις, &c.

Theorema XVII.

Paranetæ & lichani ſumentur per conſonantiam hoc modo.

Esto enim meſe B, intendatur diateſſaron ad Γ, atque à Γ remittatur diapente ad Δ: eſt igitur tonus B, Δ. rurſus à Δ intendatur diateſſaron ad E, & ab E remittatur diapente ad Z: quare tonus eſt Z, Δ: unde Z, B eſt ditonum: ergo Z eſt lichanos. ſimili quoque ratione ſumentur paranetæ.

diateſſ. { Γ —— nete ſyn.
E ——
B —— meſe. } diapente.
ton. { Δ ——
ton { Z —— lichan

ΘΕΩΡΗΜΑ ιζ'.

Αἱ παρανῆται καὶ αἱ λιχανοὶ ληφθήσονται διὰ συμφωνίας οὕτως.

Ἔστω γὰρ μέση ὁ Β, ἐπιτετάσθω διὰ τεσσάρων ἐπὶ τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἀνείσθω διὰ πέντε ἐπὶ τὸ Δ· τόνος ἄρα τὸ Β, Δ. πάλιν δὲ ἀπὸ τοῦ Δ διὰ τεσσάρων ἐπιτετάσθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἀνείσθω ἐπὶ τὸ Ζ διὰ πέντε· τόνος ἄρα τὸ Ζ, Δ· δίτονον ἄρα τὸ Ζ, Β· λιχανὸς ἄρα τὸ Ζ. ὁμοίως ἂν καὶ αἱ παρανῆται ληφθήσονται.

Theorema XVIII.

Parypatæ & tritæ non dividunt ſpiſſum in partes æquales.

Esto enim meſe quidem B, lichanos vero Γ, & hypate Δ; remittatur diapente à B ad Z: quare tonus eſt Z, Δ. porro à Z intendatur diateſſaron ad E: itaque tonus eſt tum Z, Δ intervallum, tum Γ, E. commune intervallum Δ, Γ addatur: quare Z, Γ æquale eſt ipſi Δ, E. at Z, E eſt diateſſaron: nullus ergo medius proportionaliter incidit inter Z, B: eſt enim intervallum hoc ſuperparticulare. eſtque Δ, Z æqualis ipſi Γ, B: non ergo cadet medius inter Δ, Γ intervallum, quod eſt ab hypate ad lichanon: hinc neque parypate in æqua dividet ſpiſſum. ſimili ratione neque trite.

B —— meſe.
ton { E ——
Γ —— lichan.
ton { Δ —— hypat.
Z ——

ΘΕΩΡΗΜΑ ιη'.

Αἱ παρυπάται καὶ αἱ τρίται οὐ διαιροῦσι τὸ πυκνὸν εἰς ἴσα.

Ἔστω γὰρ μέση μὲν ὁ Β, λιχανὸς δὲ ὁ Γ, ὑπάτη δὲ ὁ Δ, ἀνείσθω ἀπὸ τοῦ Β διὰ πέντε ἐπὶ τὸ Ζ· τόνος ἄρα τὸ Ζ, Δ. καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ διὰ τεσσάρων ἐπιτετάσθω ἐπὶ τὸ Ε· τόνος ἐστὶν ἄρα τὸ Ζ, Δ διάστημα, καὶ τὸ Γ, Ε. κοινὸν προσκείσθω τὸ Δ, Γ· τὸ ἄρα Ζ, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ Δ, Ε. διὰ τεσσάρων δὲ τὸ Ζ, Ε· οὐκ ἄρα μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει τις τοῦ Ζ, Ε, ἐπιμόριον γὰρ τὸ διάστημα. καὶ ἐστὶν ἴσος ὁ Δ, Ζ τῷ Γ, Ε· οὐκ ἄρα τοῦ Δ, Γ μέσος ἐμπεσεῖται, ὅ ἐστιν ἀπὸ ὑπάτης ἐπὶ λιχανόν· οὐκ ἄρα ἡ παρυπάτη διαιρεῖ τὸ πυκνὸν εἰς ἴσα. ὁμοίως οὐδὲ ἡ τρίτη.

Theorema XIX.

Canonem deſignare ſecundum ſyſtema, quod vocatur immutabile.

SIT Canonis longitudo, quæ & chordæ, A B; ac dividatur in quatuor partes æquales, nimirum Γ, Δ, E: erit itaque B A, cum graviſſimus ſit ſonus, bombus. porro hic A B eſt ſeſquitertius ipſius Γ B: itaque Γ B ipſi A B conſonabit diateſſaron verſus acumen. eſtque A B proſlambanomenos: quare Γ B erit hypaton diatonos. rurſus, quoniam A B eſt duplus ipſius

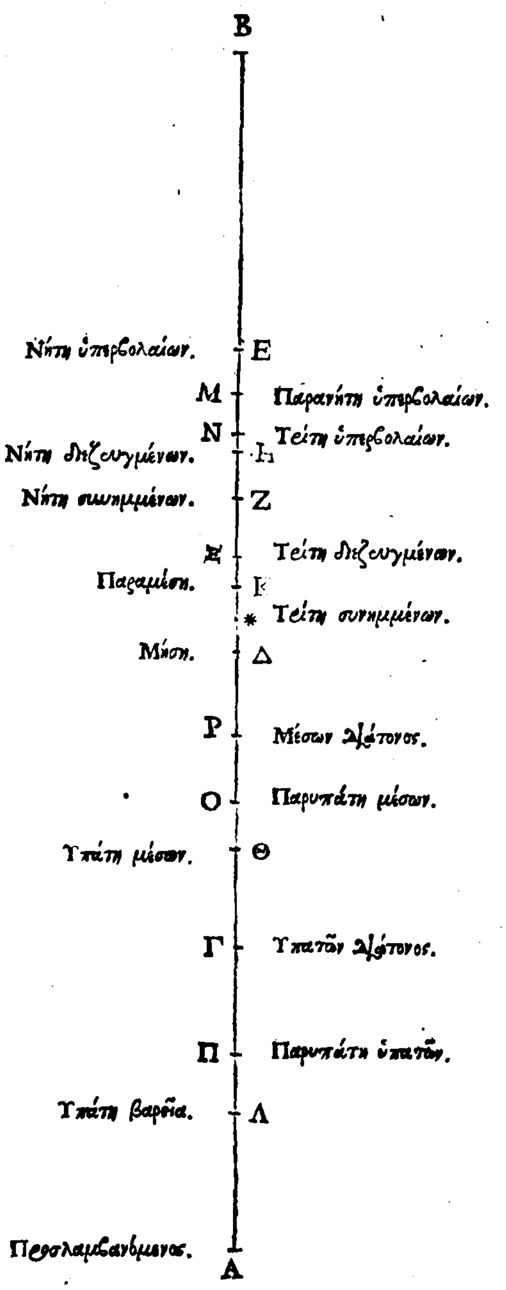
ΘΕΩΡΗΜΑ ιθ'.

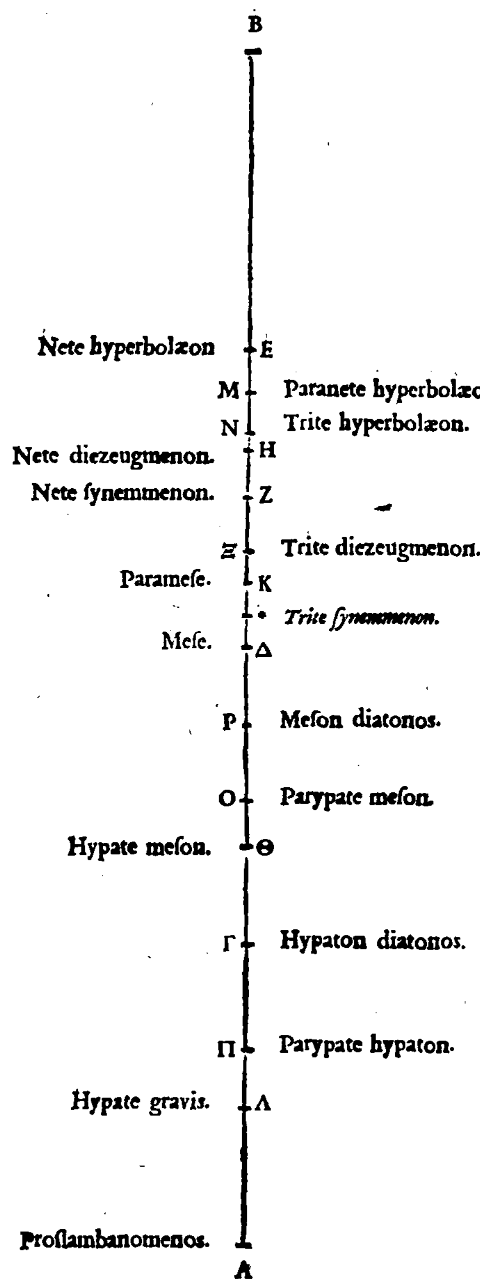
Τὸν κανόνα καταγράψαι κατὰ τὸ καλούμενον ἀμετάβολον σύστημα.

Ἔστω τοῦ κανόνος μῆκος, ὃ καὶ τῆς χορδῆς, τὸ ΑΒ, καὶ διῃρήσθω εἰς τέσσαρα ἴσα, τοῖς Γ, Δ, Ε· ἔσται ἄρα ὁ ΒΑ βαρύτατος ὢν φθόγγος, βόμβος. οὗτος δὲ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΒ ἐπίτριτός ἐστιν· ὥστε ὁ ΓΒ τῷ ΑΒ συμφωνήσει διὰ τεσσάρων ἐπὶ τὴν ὀξύτητα. καὶ ἔστιν ὁ ΑΒ προσλαμβανόμενος· ὁ ἄρα ΓΒ ἔσται ὑπατῶν διάτονος. πάλιν ἐπεὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΒΔ ἐστὶ διπλάσιος,

πλάσιος, συμφωνήσει αὐτῇ διὰ πασῶν, καὶ ἔσται ὁ ΒΔ μέση. πάλιν, ἐπεὶ τετραπλάσιός ἐστιν ὁ ΑΒ τοῦ ΕΒ, ἔσται ὁ ΕΒ νήτη ὑπερβολαίων. ἔτεμον τὸν ΓΒ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἔσται διπλάσιος ὁ ΓΒ τοῦ ΖΒ· ὥστε συμφωνεῖν τὸν ΓΒ πρὸς τὸν ΖΒ διὰ πασῶν· ὥστε εἶναι τὸν ΖΒ νήτην συνημμένων. ἀπέλαβον τοῦ ΔΒ τρίτον μέρος τὸ ΔΗ, καὶ ἔσται ἡμιόλιος ὁ ΔΒ τοῦ

ΒΔ, idcirco per diapason intervallum ipsi consonabit, eritque ΒΔ mese. iterum, quoniam ΑΒ quadruplus est ipsius ΕΒ, erit idcirco ΕΒ nete hyperbolæon. divisi deinde ΓΒ bifariam in Ζ, eritque ΓΒ duplus ipsius ΖΒ; ita ut ΓΒ consonet ad ΖΒ diapason intervallo: quare ΖΒ est nete synemmenon. abscidi à ΔΒ partem tertiam, ΔΗ. eritque ΔΒ sesquialter ipsius





ΗΒ· ὥστε συμφωνήσει ὁ ΔΒ πρὸς τὸν ΗΒ, ἐν τῷ διὰ πέντε· ὁ ἄρα ΗΒ νήτη ἔσται διεζευγμένων. ἔθηκα τῷ ΗΒ ἴσον τὸν ΗΘ· ὥστε ὁ ΘΒ πρὸς τὸν ΗΒ συμφωνήσει διὰ πασῶν· ὡς εἶναι τὸν ΘΒ ὑπάτην μέσων. ἔλαβον τοῦ ΘΒ τρίτον μέρος τὸ ΘΚ, καὶ ἔσται ἡμιόλιος ὁ ΘΒ τοῦ ΚΒ· ὥστε εἶναι τὸν ΚΒ παραμέσην. ἀπέλαβον τῷ ΚΒ ἴσον τὸν ΛΚ, καὶ γενήσεται ὁ ΛΒ ὑπάτη βαρεῖα· ἔσονται ἄρα εἰλημμένοι ἐν τῷ κανόνι πάντες οἱ φθόγγοι τοῦ ἀμεταβόλου συστήματος.

ΗΒ; ut hac ratione ΔΒ consonet ad ΗΒ, diapente intervallo: ergo ΗΒ erit nete diezeugmenon. posui ipsi ΗΒ æqualem, scilicet ΗΘ: ergo ΘΒ consonabit diapason ad ΗΒ, ut ΘΒ sit hypate meson. sumpsi ipsius ΘΒ partem tertiam, ΘΚ, eritque ΘΒ sesquialter ipsius ΚΒ; ita ut ΚΒ sit paramese. porro abscidi ipsi ΚΒ æqualem ΛΚ, fietque ΛΒ hypate gravissima: quare soni omnes systematis immutabilis sumpti erunt in canone.

THEO-

Theorema XX.

Reſtat tandem ut mobiles deſignentur.

Diviſi EB in octo partes, quarum uni æqualem poſui EM; ut MB fiat ipſius EB ſeſquioctavus. ac rurſus diviſo MB in partes octo, illarum uni æqualem poſui NM: tono itaque gravior erit NB quam BM, MB vero quam BE: ita ut NB quidem ſit trite hyperbolæon, MB vero paranete hyperbolæon diatonos. porro in tres partes diviſi NB, illarumque uni æqualem poſui NΞ; ita ut ΞB ſit ſeſquitertius ipſius NB, ac diateſſaron conſonet verſus gravitatem, fiatque ΞB, trite diezeugmenon. rurſus ipſius ΞB ſumpta parte dimidia, æqualem ipſi poſui ΞO; ut hac ratione OB conſonet diapente ad ΞB: quare OB erit parypate meſon. deinde ipſi ΞO æqualem poſui OΠ; ut ΠB fiat parypate hypaton. ſumpſi quoque ipſius ΓB partem quartam ΓP; ut PB fiat meſon diatonos.

ΘΕΩΡΗΜΑ κʹ.

Λοιπὸν δὲ τοὺς φερομένους λαβεῖν.

Ἔτεμον τὴν EB εἰς ὀκτὼ, καὶ ἑνὶ αὐτῶν ἴσον ἔθηκα τὴν EM· ὥστε τὴν MB τοῦ EB γενέσθαι ἐπόγδοον. καὶ πάλιν διελὼν τὴν MB εἰς ὀκτὼ, ἑνὶ αὐτῶν ἴσον ἔθηκα τὴν NM· τόνῳ ἄρα βαρύτερος ἔσται ὁ NB τοῦ BM, ὁ δὲ MB τοῦ BE· ὥστε ἔσται μὲν ὁ NB τρίτη ὑπερβολαίων, ὁ δὲ MB παρανήτη ὑπερβολαίων διάτονος. ἔλαβον τοῦ NB τρίτον μέρος, καὶ ἑνὶ αὐτῶν ἴσον ἔθηκα τὴν NΞ· ὥστε τὴν ΞB τοῦ NB εἶναι ἐπίτριτον, καὶ διὰ τεσσάρων συμφωνεῖν ἐπὶ τὴν βαρύτητα, καὶ γενέσθαι τὴν ΞB τρίτην διεζευγμένων. πάλιν τοῦ ΞB λαβὼν ἥμισυ μέρος ἔθηκα ἴσον αὐτῷ τὴν ΞO, ὥστε διὰ πέντε συμφωνεῖν τὴν OB πρὸς τὴν ΞB· ὁ ἄρα OB ἔσται παρυπάτη μέσων. καὶ τῷ ΞO ἴσον ἔθηκα τὴν OΠ· ὥστε γενέσθαι τὴν ΠB παρυπάτην ὑπατῶν. ἔλαβον δὲ τοῦ ΓB τέταρτον μέρος τὸ ΓP· ὥστε γενέσθαι τὴν PB μέσων διάτονον.

ΤΕΛΟΣ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΚΑΤΑΤΟΜΗΣ ΚΑΝΟΝΟΣ.

FINIS EUCLIDIS SECTIONIS CANONIS.

ΕΥ-

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ.

EUCLIDIS
PHÆNOMENA.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ.

EUCLIDIS
PHÆNOMENA.

ἘΠΕΙΔΗ ὁρᾶται τὰ ἀπλανῆ ἄστρα ἔκ τε τοῦ αὐτοῦ τόπου ἀνατέλλοντα καὶ εἰς τὸν αὐτὸν τόπον δυόμενα, καὶ τὰ ἅμα ἀνατέλλοντα ἀεὶ ἅμα ἀνατέλλοντα, καὶ τὰ ἅμα δυόμενα ἀεὶ ἅμα δυόμενα, καὶ ἐν τῇ ἀπ' ἀνατολῆς ἐπὶ δύσιν φορᾷ τὰ πρὸς ἄλληλα διαστήματα τὰ αὐτὰ ἔχοντα, τοῦτο δὲ γίγνεται ἐπὶ τῶν ἐγκύκλιον φορὰν φερομένων μόνον, ἐπὰν ἡ ὄψις πάντη τῆς περιφερείας ἴσον ἀπέχῃ, ὡς ἐν τοῖς ὀπτικοῖς δείκνυται· θετέον τὰ ἄστρα ἐγκυκλίως φέρεσθαι, καὶ ἐνδεδέσθαι ἐν ἑνὶ σώματι, καὶ τὴν ὄψιν ἴσον ἀπέχειν τῶν περιφερειῶν.

Ὁρᾶται δέ τις ἀστὴρ μεταξὺ τῶν ἄρκτων, οὐ μεταλλάσσων τόπον ἐκ τόπου, ἀλλ' ἐν ᾗ ἐστι χώρᾳ ἐν ταύτῃ στρεφόμενος, ἐπεὶ δὲ οὗτος πρὸς τὰς περιφερείας τῶν κύκλων, καθ' ὧν οἱ λοιποὶ ἀστέρες φέρονται, ἴσον ἀπέχων πάντη φαίνεται· θετέον τοὺς κύκλους πάντας παραλλήλους εἶναι, ὥστε πάντα τὰ ἀπλανῆ ἄστρα κατὰ παραλλήλων φέρεσθαι πόλον ἐχόντων τὸν προειρημένον ἀστέρα.

Τούτων δὲ ἔνια οὔτε ἀνατέλλοντα οὔτε δυόμενα ὁρᾶται, διὰ τὸ ἐπὶ μετεωροτέρων κύκλων φέρεσθαι, οὓς καλοῦσιν ἀεὶ φανερούς. ταῦτα δέ ἐστι τὰ ἐχόμενα [1] τοῦ φανεροῦ πόλου ἄστρα ἕως τοῦ ἀρκτικοῦ κύκλου. καὶ ἐλάχιστον μὲν κύκλον φέρονται οἱ ἔγγιον

QUANDOQUIDEM astra inerrantia ex eodem ipso loco semper oriri, & in eodem ipso loco occidere conspiciuntur; & quæ simul oriuntur, semper simul oriri, quæve contra simul occidunt, simul semper occidere videntur; præterea in conversione, quam ab ortu faciunt ad occasum, intervalla eadem mutuo retinere; quod quidem iis astris accidit, quæ motu tantummodo circulari feruntur, quandoquidem, ut in opticis est demonstratum, visus omni ex parte à circumferentia æque distat: ponendum siquidem est, astra circulari motu moveri, uni infixa esse corpori, & visum ab circumferentiis æque distantem esse.

Et quoniam astrum quoddam, quod intra circulum arcticum situm est, locum de loco non apparet permutare, sed in quo loco situm est ac positum, in illo ipso circumvolvi videtur; præterea etiam quoniam hoc jam dictum astrum à circulorum circumferentiis, in quibus reliqua feruntur astra, æqualiter distare omniquaque conspicitur: idcirco ponendum deinceps est, circulos omnes esse parallelos, & astra inerrantia idcirco omnia in circulis ferri parallelis, polum dictum jam astrum habentibus.

Atqui horum quidem astrorum quædam neque oriri neque occidere videntur, propterea quod in sublimioribus ferantur circulis, qui semper-apparentes circuli nominantur. sunt autem hæc astra illa quidem, quæ intra polum conspicuum & arcticum circulum continentur. feruntur vero minimo quidem circulo astra illa, quæ

1 Ἐπόμενα τῷ φανερῷ πόλῳ Bodl.

polo

polo sunt propinquiora; maximo autem, quæ à circulo arctico minime distant: ac quæ in ipso arctico circulo sunt, radere horizonta conspiciuntur.

Porro autem quæcunque astra ab his recedunt meridiem versus, omnia & oriri & occidere videntur; propterea quod horum non integri circuli supra terram existant, sed horum circulorum pars quidem sit supra terram, pars autem reliqua sub terram occultetur. ex segmentis vero quæ supra terram sunt uniuscujusque jam dictorum circulorum, illud segmentum majus est, quod propius quidem est maximo circulo semper-apparentium circulorum: ex illis vero segmentis, quæ sub terram manent occultata, illud minimum est, quod magis ad jam dictum circulum accedit; quoniam tempus quo sub terram in hoc dicto circulo astra convertuntur, minimum est; tempus vero quo supra terram circumferuntur, maximum. præterea astra quæ magis ab commemoratis jam astris recedunt, supra terram quidem in conversione sua semper minus tempus comprehendunt; sub terram autem majus: quæ autem meridei quamproxima sunt, in conversione, quam supra terram peragunt, minimum tempus habebunt; quæ vero sub terram, contra maximum.

Apparent deinde astra, quæ in circulo sita sunt inter omnes sphæræ circulos medium locum obtinente, æquale tempus insumere in motu supra terram atque in motu qui fit infra terram, & idcirco talem circulum æquinoctialem circulum appellamus. præterea astra, quæ sunt sita in circulis æque distantibus ab æquinoctiali circulo, æquali tempore motus suos peragunt, scilicet in segmentis permutatim assumptis: ita ut segmenta, quæ sunt supra terram, quæve ad septentrionem spectant, æqualia sint segmentis sub terram existentibus, & ad meridiem vergentibus; & contra quæ sunt segmenta supra terram ad meridiem vergentia æqualia sint segmentis sub terram ad septentrionem pertinentibus. nam tempus quidem utrumque, quo dicti feruntur circuli tam supra terram quam continue sub terram, cæterorum circulorum utrique tempori similiter æquale apparet: & circulus præterea qui lacteus dicitur, quinetiam zodiacus, cum obliqui sint ad parallelos circulos & se invicem secent, in sphæræ conversione semicirculos supra terram habere conspiciuntur.

τοῦ πόλου ὄντες, μέγιστοι δὲ οἱ ἐπὶ τοῦ ἀρκτικοῦ· οἱ δὲ ἐπὶ τοῦ ἀρκτικοῦ κύκλου ὄντες φαίνονται ξύοντες τὸν ὁρίζοντα.

Τὰ δὲ πρὸς μεσημβρίαν τούτων ἐχόμενα ἅπαντα καὶ ἀνατέλλοντα καὶ δυόμενα ὁρᾶται, διὰ τὸ τοὺς κύκλους αὐτῶν μὴ ὅλους εἶναι ὑπὲρ γῆς, ἀλλὰ μέρος μὲν αὐτῶν ὑπὲρ γῆς, τὸ δὲ λοιπὸν ὑπὸ τὴν γῆν. τῶν δὲ ὑπὲρ γῆς τμημάτων ἑκάστου αὐτῶν μόνον φαίνεται τὸ ἔγγιον τοῦ μεγίστου τῶν ἀεὶ φανερῶν, τῶν δὲ ὑπὸ γῆν ἐλάχιστον τὸ ἔγγιον τοῦ εἰρημένου κύκλου, διὰ τὸ τὸν χρόνον τῆς ὑπὸ γῆν φορᾶς τῶν ἐπὶ τούτου τοῦ κύκλου ἀστέρων ὄντων ἐλάχιστον ἔχειν, τῆς δὲ ὑπὲρ γῆς φορᾶς, πλεῖστον. τὰ δὲ ἐπὶ τὸν ἀπώτερον τούτων ἀεὶ τὴν μὲν ὑπὲρ γῆς φορὰν ἐλάσσονα χρόνον ἔχει, τὴν δὲ ὑπὸ γῆν πλείονα· ἐλάχιστον δὲ χρόνον ἕξει τῆς ὑπὲρ γῆς φορᾶς τὰ ἔγγιστα τῆς μεσημβρίας ὄντα, τῆς δὲ ὑπὸ γῆν πλεῖστον.

Φαίνονται δὲ οἱ ἐπὶ τοῦ κατὰ μέσον τούτων ὄντες ἰσοχρόνιον ποιούμενοι τὴν ὑπὲρ γῆς φορὰν τῇ ὑπὸ γῆν· διὸ λέγομεν τοῦτον τὸν κύκλον ἰσημερινόν. οἱ δὲ ἐπὶ τῶν ἴσον ἀπεχόντων τοῦ ἰσημερινοῦ κύκλου ἰσοχρόνιον ποιούμενοι τὴν φορὰν ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τμήμασιν· οἷον τὰ ὑπὲρ γῆς τῶν πρὸς ἄρκτους ὄντων τοῖς ὑπὸ γῆν τῶν πρὸς μεσημβρίαν, τὰ δὲ ὑπὲρ γῆς τῶν πρὸς μεσημβρίαν τοῖς ὑπὸ γῆν τῶν πρὸς ἄρκτους ὄντων· ὁ δὲ συναμφότερος χρόνος ἑκάστου κύκλου, ὅ,τε ὑπὲρ γῆς, καὶ ὁ συνεχὴς ὑπὸ γῆν τῷ συναμφοτέρῳ ἑκάστου ἴσος φαίνεται. ἔτι δὲ ὁ τοῦ γαλαξίου κύκλος καὶ ὁ ζωδιακός, λοξοὶ ὄντες πρὸς τοὺς παραλλήλους κύκλους καὶ τέμνοντες ἀλλήλους ἐν τῇ περιφορᾷ, ἀεὶ ἡμικυκλίους ὑπὲρ γῆς ἔχοντες φαίνονται.

Διὰ δὴ τὰ προειρημένα πάντα, ὁ κόσμος ὑποκείσθω σφαιροειδής· εἴτε γὰρ ἦν κυλινδροειδὴς ἢ κωνοειδής, οἱ ἐπὶ τῶν λοξῶν κύκλων καὶ τεμνόντων τὸν ἰσημερινὸν δίχα [1] λαμβανόμενοι ἀστέρες ἐν τῇ [2] περιφορᾷ οὐκ ἂν ἐφαίνοντο ἀεὶ ἐπὶ ἡμικυκλίων ἴσων φερόμενοι, ἀλλ᾽ ὅτε μὲν ἐπὶ μείζονος ἡμικυκλίου τμήματος, ὅτε δὲ ἐπὶ ἐλάσσονος. ἐὰν γὰρ κῶνος ἢ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ μὴ παρὰ τὴν βάσιν, ἡ τομὴ γίγνεται ὀξυγωνίου κώνου τομή, ἥτις ἐστὶν ὁμοία θυρεῷ. δῆλον οὖν ὅτι τοιούτου σχήματος διὰ τοῦ μέσου τεμνομένου κατά τε τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος, ἀνόμοια τμήματα ποιεῖ· δῆλον δὲ ὅτι κἂν λοξαῖς τομαῖς τμηθῇ διὰ τοῦ μέσου, καὶ οὕτως ἀνόμοια τμήματα ποιεῖ· ὅπερ οὐ φαίνεται τοῦτο γιγνόμενον κατὰ τὸν κόσμον.

Διὰ δὴ ταῦτα πάντα ὁ κόσμος ἔσται σφαιροειδής, καὶ στρέφεται ὁμαλῶς περὶ ἄξονα· οὗ ὁ μὲν εἷς πόλος ὑπὲρ γῆς φανερός, ὁ δὲ εἷς ὑπὸ γῆν ἀφανής.

Ὁρίζων δὲ καλείσθω, τὸ δι᾽ ἡμῶν ἐπίπεδον ἐκπίπτον εἰς τὸν κόσμον, καὶ ἀφορίζον τὸ ὑπὲρ γῆς ὁρώμενον ἡμισφαίριον. [3] ἔστι δὲ κύκλος· ἐὰν γὰρ σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμηθῇ, ἡ [4] κοινὴ τομὴ κύκλος ἐστί.

Μεσημβρινὸς δὲ κύκλος καλείσθω, ὁ διὰ τῶν πόλων τῆς σφαίρας καὶ [4] ὀρθὸς πρὸς τὸν ὁρίζοντα.

Τροπικοὶ δέ, ὧν ὁ διὰ μέσων τῶν ζωδίων κύκλος ἐφάπτεται τοὺς αὐτοὺς πόλους ἐχόντων τῇ σφαίρᾳ.

Ὁ δὲ διὰ μέσων τῶν ζωδίων κύκλος καὶ ὁ ἰσημερινὸς μέγιστοί εἰσι· δίχα γὰρ τέμνουσιν ἀλλήλους. ἥτε γὰρ ἀρχὴ τοῦ κριοῦ καὶ ἡ ἀρχὴ τῶν χηλῶν κατὰ διάμετρόν τέ εἰσι, καὶ ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ οὖσαι κατὰ συζυγίαν ἀνατέλλουσί τε καὶ δύνουσι, [6] μεταξὺ τῶν ἀρχῶν ἔχουσαι τῶν μὲν δώδεκα ζωδίων ἓξ ζώδια, τοῦ δὲ ἰσημερινοῦ κύκλου ἡμικύκλια δύο. ἐπειδήπερ ἑκατέρα ἀρχὴ ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ κύκλου οὖσα ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ φέρεται, ἡ μὲν τὴν ὑπὲρ γῆς φορὰν, ἡ δὲ τὴν ὑπὸ

Propter hæc igitur omnia jam expoſita, ſupponatur mundum ſphærica eſſe figura ornatum: ſive enim cylindricam figuram, aut conicam habeat, aſtra quæ in circulis obliquis, lacteo (inquam) & zodiaco continentur, ſecantibus æquinoctialem in partes duas æquales, in mundi converſione non apparerent ſemper in ſemicirculis æqualibus ferri; verum aliquando in ſegmentis ſemicirculo majoribus, aliquando autem minoribus. conus enim, aut cylindrus, ſi plano aliquo ſectus fuerit, quod parallelum non ſit ipſorum baſi, ſectio illa acutanguli coni ſectio eſt, quæ quidem clypeo aſſimilatur. & patet etiam ſi hujuſmodi figura per medium juxta longitudinem & latitudinem dividatur, diſſimilia facere ſegmenta: & manifeſtum hinc eſt quoque, quod ſi ſectionibus obliquis medium dividatur, ſimiliter facere ſegmenta diſſimilia; quod autem fieri in mundo nullo modo perſpicitur.

Cum itaque hæc omnia ſic ſe habeant, mundus omnino ſphæricus erit, & circa ſuum axem æquabiliter volvitur; cujus quidem polus alter ſupra terram apparet, alter ſub terram occultatur.

Nominetur præterea circulus horizon illud planum, quod è viſu noſtro in ipſum mundum incidit, & ſeparat hemiſphærium nobis conſpicuum ſupra terram ab occulto. tale autem planum circulus eſt: ſi quidem enim ſphæra plano aliquo ſecta fuerit, ſectio circulus eſt.

Meridianus porro circulus dicetur is, qui per ſphæræ polos incedit & horizonti eſt ad angulos rectos.

Tropici autem ſunt hi, quos circulus zodiacus tangit, & qui polos etiam cum ſphæra habent eoſdem.

Zodiacus autem circulus & æquinoctialis maximi circuli ſunt: bifariam enim ſeſe mutuo ſecant. arietis namque principium & libræ principium per diametrum ſunt, & cum in æquinoctiali circulo ſint, conjugate & oriuntur & occidunt; intra quæ principia ſex continentur ſigna ex duodecim zodiaci ſignis, æquinoctialis etiam duo ſemicirculi. quoniam utrumque principium, in ipſo circulo æquinoctiali ſitum, eodem tempore fertur, illud quidem in motu ſupra terram, hoc autem ſub

1 ἀπολαμβανόμενοι, Bodl. 2 φορᾷ Bodl. 3 ἴσως δὲ Bodl. 4 κοινὴ deeſt Bodl. 5 ὀρθῶς Bodl. 6 μεταξὺ αὐτῶν Bodl.

terram. etenim sphæra si æquabiliter volvatur circa suum proprium axem, omnia puncta, quæ sunt in sphæræ superficie, æquali tempore similes parallelorum circulorum circumferentias, in quibus feruntur, præteribunt: similes igitur circumferentias circuli æquinoctialis percurrunt, alteram quidem circumferentiam, quæ est supra terram, alteram autem, quæ est sub terram: æquales igitur sunt circumferentiæ: erit igitur semicirculus utraque. tempus enim ab ortu rursus ad ortum, & ab occasu rursus ad occasum integrum circulum absolvit: quare & zodiacus & æquinoctialis invicem se secant. nam si in sphæra duo circuli se invicem bifariam secent, uterque alterum secans maximus circulus erit: zodiacus circulus igitur & æquinoctialis maximi circuli sunt.

Atqui horizon quoque est unus è maximis circulis; nam & zodiacum, & æquinoctialem, maximos circulos existentes, semper bifariam secat. semper enim ex signorum zodiaci duodecim, sex supra terram apparent; & æquinoctialis circuli semper semicirculus supra terram conspicitur: ideoque accidit, ut quæ in hoc sita sint astra, simul & oriantur, & simul etiam occidant; & alterum quidem horum astrorum eodem temporis spatio ab ortu accedat ad occasum, alterum vero ab occasu ad ortum.

Ac patet jam igitur ex explicatis & præostensis, æquinoctialis circuli semper semicirculum supra horizonta exstare. si etenim in sphæra manens fixus circulus secuerit bifariam aliquem maximum circulum semper mobilem, tunc & secans maximus circulus est: sequitur igitur horizontem esse unum de maximis circulis.

γῆν. ἐὰν δὲ σφαῖρα στρέφηται ὁμαλῶς περὶ τὸν ἑαυτῆς ἄξονα, πάντα τὰ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας σημεῖα ἐν τῷ ἴσῳ χρόνῳ τὰς ὁμοίας περιφερείας διεξέρχεται τῶν παραλλήλων κύκλων, καθ' ὧν φέρεται· ὁμοίας ἄρα περιφερείας [1] διέξεισι τοῦ ἰσημερινοῦ κύκλου, ἡ μὲν τὴν ὑπὲρ γῆς, ἡ δὲ τὴν ὑπὸ γῆν· ἴσαι ἄρα εἰσὶν αἱ περιφέρειαι· ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον. τὸ γὰρ ἀπὸ ἀνατολῆς ἐπὶ ἀνατολὴν ἢ ἀπὸ δύσεως ἐπὶ δύσιν ὅλος κύκλος ἐστίν· δίχα ἄρα τέμνουσιν ἀλλήλους ὅ, τε τῶν ζωδίων κύκλος καὶ [2] ὁ ἰσημερινός. ἐὰν δὲ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους δίχα, ἑκάτερος τῶν τεμνόντων μέγιστος ἔσται· ὁ ἄρα τῶν ζωδίων κύκλος καὶ ὁ ἰσημερινὸς μέγιστοί εἰσι.

Καὶ ὁ ὁρίζων δὲ τῶν μεγίστων ἐστὶ κύκλων· τόν τε γὰρ τῶν ζωδίων [3] κύκλον καὶ τὸν ἰσημερινὸν, μεγίστους ὄντας ἀεὶ δίχα τέμνει. τῶν τε γὰρ δώδεκα ζωδίων τὰ μὲν ἓξ ἀεὶ ὑπὲρ γῆς ἔχει, καὶ τοῦ ἰσημερινοῦ δὲ κύκλου [4] ἀεὶ ἡμικύκλιον ὑπεράνω ἔχει· καὶ γὰρ τὰ ἐπὶ τούτου ἄστρα ἅμα ἀνατέλλοντα καὶ δύνοντα ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ παραγίνεται, τὸ μὲν ἀπὸ ἀνατολῆς ἐπὶ δύσιν, τὸ δὲ ἀπὸ δύσεως ἐπὶ ἀνατολήν.

Φανερὸν οὖν ἐκ τῶν πρότερον ἀποδεδειγμένων, ὅτι τοῦ ἰσημερινοῦ ἀεὶ [5] ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντά ἐστιν ἡμικύκλιον. ἐὰν δὲ ἐν σφαίρᾳ μένων κύκλος δίχα [6] τέμνῃ τινὰ τῶν μεγίστων κύκλων ἀεὶ φερόμενον, καὶ ὁ τέμνων μέγιστός ἐστιν· ὁ ὁρίζων ἄρα τῶν μεγίστων ἐστὶ κύκλων.

THEOREMA I.

Terra in medio mundi sita est, cujus ratione centri vicem obtinet.

SIT in mundo circulus horizon AB, terra autem sit visus noster, qui quidem sit in puncto Δ, partes orientales sint versus Γ punctum, occidentales autem ad A; & conspiciatur per dioptram, in Δ puncto manentem, cancer oriens in puncto Γ; spectabitur igitur per eandem dioptram capricornus occidens. spectetur in A puncto. & quoniam A, Γ puncta per dioptram Δ spectata sunt; recta igitur linea est, quæ per A, Δ, Γ puncta spectatur. sitque ipsa AΔΓ.

ΘΕΩΡΗΜΑ α'.

Η γῆ ἐν μέσῳ τῷ κόσμῳ ἐστὶ, καὶ κέντρου τάξιν ἐπέχει πρὸς τὸν κόσμον.

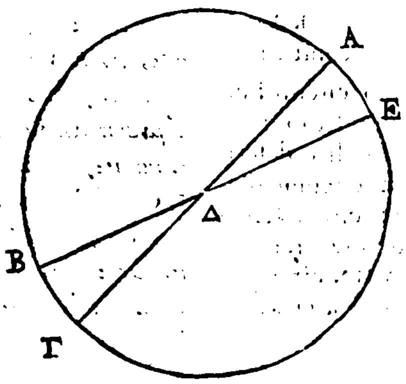
Ἔστω ἐν κόσμῳ ὁ ὁρίζων ὁ ΑΒ, γῆ δὲ ἡ ἡμετέρα ὄψις [7] ἡ πρὸς τῷ Δ σημείῳ, καὶ ἔστω ἀνατολικὰ μὲν μέρη τὰ Γ, δυτικὰ δὲ τὰ Α, καὶ τεθεωρήσθω διὰ διόπτρας κειμένης πρὸς τῷ Δ σημείῳ καρκῖνος ἀνατέλλων κατὰ τὸ Γ σημεῖον· θεωρηθήσεται ἄρα διὰ τῆς αὐτῆς διόπτρας αἰγόκερως δύνων. τεθεωρήσθω κατὰ τὸ Α σημεῖον. καὶ ἐπεὶ τὰ Α, Γ σημεῖα διὰ διόπτρας τεθεώρηται τῷ Δ, εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Α, Δ, Γ. ἔστω ἡ ΑΔΓ.

1 διέξεισι *Bodl.* 2 Deest *Bodl.* 3 κύκλος *Bodl.* 4 ἄνω ἔχει *Bodl.* 5 ἀεί. 6 ἐπὶ *Bodl.* 7 τέμνει. 8 Η γῆ &c. deest. 9 ἡ deest.

Φανερὸν

φανερὸν δὴ ὅτι ἡ Α Δ Γ διάμετρός ἐστι τῆς τε τῶν ἀπλανῶν σφαίρας καὶ τοῦ ζωδιακοῦ κύκλου, ἐπειδήπερ τοῦ ζωδιακοῦ ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα ἓξ ζώδια ἀποτέμνει. πάλιν δὴ μετακινηθέντος τοῦ τε τῶν ζωδίων κύκλου καὶ τῆς διόπτρας, τεθεωρήσθω λέων ἀνατέλλων κατὰ τὸ Β σημεῖον· θεωρηθήσεται ἄρα διὰ τῆς αὐτῆς διόπτρας ὑδροχόος δύνων· τεθεωρήσθω κατὰ τὸ Ε σημεῖον. καὶ ἐπεὶ τὰ Β, Ε σημεῖα τεθεώρηται διὰ διόπτρας [1] τῆς Δ, εὐθεῖά ἐστιν ἡ διὰ τῶν Ε, Δ, Β. ἔστω ἡ Ε Δ Β· ἡ Ε Δ Β ἄρα διάμετρός ἐστι τῆς τε τῶν ἀπλανῶν σφαίρας καὶ τοῦ ζωδιακοῦ κύκλου. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ Α Δ Γ· τὸ Δ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῆς τῶν ἀπλανῶν σφαίρας, καὶ ἔστι πρὸς τῇ γῇ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἐὰν ληφθῇ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς γῆς κέντρον ἐστὶ τοῦ κόσμου.

Η γῆ ἄρα ἐν μέσῳ τῷ κόσμῳ ἐστὶ, καὶ κέντρου τάξιν ἐπέχει πρὸς τὸν κόσμον.



manifestum itaque est quod recta linea Α Δ Γ diameter est & sphæræ astrorum inerrantium & zodiaci circuli; quandoquidem zodiaci sex signa supra horizontem abscindit. rursus jam zodiaco circulo circumvoluto, quinetiam dioptra, leo videbitur oriens in puncto Β: quare per eandem dioptram conspicietur & aquarius occidens. conspiciatur in puncto Ε. quoniam vero puncta Β, Ε visa sunt per dioptram Δ; recta igitur linea est quæ per Ε, Δ, Β spectatur. sit ipsa Ε Δ Β: quare Ε Δ Β recta linea diameter est & sphæræ astrorum inerrantium & zodiaci circuli. est autem demonstratum idem de recta Α Δ Γ: quamobrem punctum Δ est centrum sphæræ astrorum inerrantium, & est super terram. similiter jam ostendetur, si quodvis aliud punctum fuerit sumptum super terram, quod mundi centrum est.

Terra igitur in medio mundo sita est, cujus ratione centri vicem obtinet.

ΘΕΩΡΗΜΑ β'.

Εν μιᾷ κόσμου περιφορᾷ ὁ μὲν διὰ τῶν πόλων τῆς σφαίρας κύκλος δὶς ἔσται ὀρθὸς πρὸς τὸν ὁρίζοντα· ὁ δὲ τῶν ζωδίων κύκλος πρὸς μὲν τὸν μεσημβρινὸν δὶς ἔσται ὀρθὸς, πρὸς δὲ τὸν ὁρίζοντα οὐδέποτε, ὅταν ὁ πόλος τοῦ ὁρίζοντος μεταξὺ ᾖ τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ καὶ τοῦ ἀρκτικοῦ. ἐὰν δὲ ἐπί τινος τῶν τροπικῶν ὁ πόλος ᾖ τοῦ ὁρίζοντος, ὁ τῶν ζωδίων κύκλος ἅπαξ ὀρθὸς ἔσται πρὸς τὸν ὁρίζοντα· ὅταν δὲ ὁ πόλος τοῦ ὁρίζοντος μεταξὺ τῶν τροπικῶν κύκλων ὑπάρχῃ, δὶς ἔσται ὁ τῶν ζωδίων κύκλος ὀρθὸς πρὸς τὸν ὁρίζοντα.

THEOREMA II.

In una mundi revolutione circulus quidem per sphæræ polos ductus bis erit horizonti ad angulos rectos: zodiacus autem circulus ad meridianum bis quoque erit rectus; ad horizontem vero minime, quando polus horizontis fuerit inter tropicum cancri & polum arcticum. quod si horizontis polus in aliquo fuerit tropicorum circulorum, tum zodiacus semel erit horizonti ad angulos rectos constitutus: quando denique polus horizontis fuerit inter tropicos circulos, tunc demum circulus zodiacus horizonti bis erit ad angulos rectos.

Εστω ὁρίζων κύκλος ὁ Ω Β Γ; καὶ μέγιστος μὲν τῶν ἀεὶ φανερῶν κύκλων ἔστω ὁ Π Δ, μέγιστος δὲ τῶν ἀεὶ ἀφανῶν ἔστω ὁ Ε Ζ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ὁ Η Θ Κ, χειμερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ Λ Μ Ν, ὁ δὲ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω ὡς τὴν Κ Λ, πόλος δὲ τῆς σφαίρας τὰ Ξ, Ο σημεῖα, καὶ γεγράφθω διὰ τῶν Ξ, Ο μέγιστος κύκλος ὁ Α Ξ Ε Ο· λέγω ὅτι ἐν μιᾷ περιφορᾷ, ὁ μὲν διὰ τῶν πόλων τῆς σφαίρας κύκλος δὶς ἔσται ὀρθὸς πρὸς τὸν ὁρίζοντα, ὁ δὲ τῶν ζωδίων κύκλος πρὸς μὲν τὸν μεσημβρινὸν δὶς ἔσται ὀρθὸς, πρὸς δὲ τὸν ὁρίζοντα οὐδέποτε, ὅταν ὁ πόλος τοῦ ὁρίζοντος μεταξὺ τῶν Η Θ Κ, [2] Ξ ὑπάρχῃ.

SIT horizon circulus Ω Β Γ; maximus autem eorum qui semper apparent, sit circulus Π Δ; maximus vero eorum qui semper occulti sunt, sit circulus Ε Ζ; æstivus tropicus sit Η Θ Κ, hybernus autem sit Λ Μ Ν; zodiacus circulus positionem habeat veluti Κ Λ; sphæræ poli sint puncta Ξ, Ο; & describatur per Ξ, Ο puncta maximus circulus Α Ξ Ε Ο: dico quod in una sphæræ revolutione circulus quidem per sphæræ polos ductus bis erit horizonti ad angulos rectos; zodiacus autem ad meridianum bis quoque erit rectus, ad horizontem vero minime, quando polus horizontis fuerit inter Η Θ Κ & Ξ.

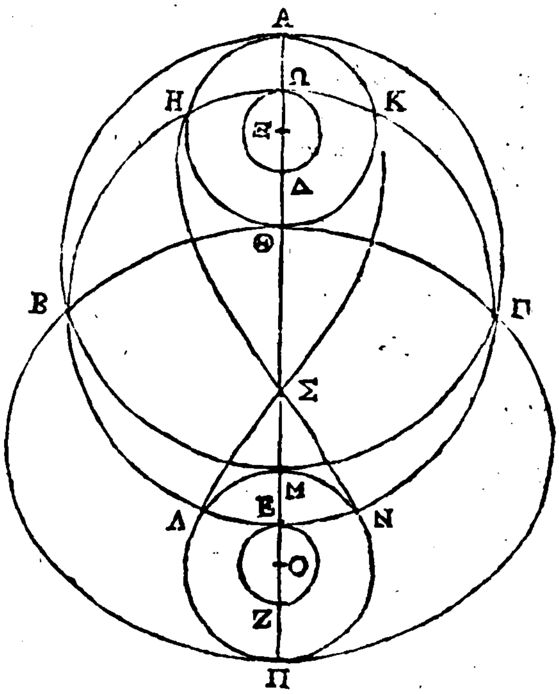
1 τῆς Δ deest in MS. Bodl. 2 In MSS. perperam legitur Ω Δ.

Quod

Quod autem circulus per sphæræ polos ductus bis horizonti ΒΕΓ sit ad angulos rectos, jam * demonstratum fuit.

Dico jam quod & zodiacus circulus ΚΛ meridiano ΑΟ bis erit ad angulos rectos constitutus.

Quoniam in sphæra quidem duo circuli sunt ΩΒΓ & ΑΗΘΚ, qui sese mutuo secant; & per ipsorum polos maximus circulus descriptus est ΑΘΟ: æqualis igitur est circumferentia ΗΘ circumferentiæ ΘΚ, & circumferentia ΛΠ circumferentiæ ΠΝ. sed tota circumferentia ΗΘΚ toti circumferentiæ ΛΠΝ est æqualis: quare circumferentia ΛΠ ipsi ΚΘ æqualis est. quo igitur tempore punctum Κ, incipiens à puncto Κ & circumferentiam ΚΘ percurrens, pervenit ad Θ punctum; hoc ipso tempore & punctum Λ, inchoans à puncto Λ & circumferentiam ΛΠ pertransiens, pervenit ad punctum Π, & zodiacus circulus positionem habebit ΘΒΠΓ. & quoniam in sphæra duo circuli ΑΗΘΚ, ΘΒΠΓ sese tangunt, maximus autem circulus ΞΘΟΠ descriptus est per polos unius circuli & amborum contactum: circulus igitur ΞΘΟΠ transibit etiam per polos circuli ΘΒΠΓ, atque ipsi erit ad angulos rectos: quare & ΘΒΠΓ ad ΞΘΟΠ etiam est ad angulos rectos. rursus, quoniam circumferentia ΘΗ circumferentiæ ΠΝ similis est: quo igitur tempore punctum Θ ad Η punctum pervenit, eodem ipso tempore & Π ad punctum Ν accedit; & zodiacus circulus positionem habebit ΗΣΝ. rursus, quoniam ΗΑ similis est circumferentiæ ΝΜ: quo igitur tempore punctum Η pervenit ad punctum Α, eodem tempore & punctum Ν pervenit ad punctum Μ, & zodiacus circulus positionem habebit ΑΒΜΓ. & quoniam in sphæra duo circuli ΑΒΜΓ, ΑΗΘΚ se mutuo tangunt, & per unius polos & contactum amborum maximus circulus descriptus est ΑΞΘΟ: circulus igitur ΑΞΘΟ ad ΑΒΜΓ est ad angulos rectos: quare & ipse ΑΒΜΓ ad ΑΞΘΟ etiam est ad angulos rectos. rursus, quoniam circumferentia ΑΚ similis est circumferentiæ ΜΛ: quo igitur tempore Α punctum pervenit ad punctum Κ, hoc ipso tempore & punctum Μ ad punctum Λ accedit; & zodiacus circulus positionem habebit ΚΣΛ. quo igitur tempore punctum Κ, incipiens à Κ & circumferentiam ΚΘΗΑ percurrens, ad Κ redit (quod est tempus unius revolutionis sphæræ) circulus ΚΣΛ bis est circulo ΑΞΘΟ rectus.



Ὅτι μὲν οὖν ὁ διὰ τῶν πόλων τῆς σφαίρας πρὸς τὸν ΒΕΓ ὁρίζοντι δὶς ὀρθός ἐστι, δέδεικται.

ΛΕΓΩ δὴ ὅτι καὶ ὁ ζωδιακὸς κύκλος ὁ ΚΛ πρὸς τὸν ΑΟ μεσημβρινὸν δὶς ἔσται ὀρθός.

Ἐπεὶ γὰρ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΩΒΓ, ΑΗΘΚ τέμνουσιν ἀλλήλους, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν γέγραπται μέγιστος κύκλος ὁ ΑΘΟ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΗΘ περιφέρεια τῇ ΘΚ, ἡ δὲ ΛΠ τῇ ΠΝ. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΗΘΚ περιφέρεια τῇ ΛΠΝ περιφερείᾳ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΛΠ περιφέρεια τῇ ΚΘ περιφερείᾳ. ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Κ σημεῖον, ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Κ καὶ τὴν ΚΘ περιφέρειαν διελθὸν, ἐπὶ Θ παραγίγνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Λ, ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Λ καὶ τὴν ΛΠ περιφέρειαν διελθὸν, ἐπὶ τὸ Π παρέσται, καὶ ὁ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἕξει ὡς τὴν ΘΒΠΓ. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΗΘΚ, ΘΒΠΓ ἐφάπτονται ἀλλήλων, διὰ δὲ τῶν τοῦ ἑνὸς πόλων καὶ τῆς ἁφῆς γέγραπται μέγιστος κύκλος ὁ ΞΘΟΠ· ὁ ΞΘΟΠ ἄρα ἥξει καὶ διὰ τῶν τοῦ ΘΒΠΓ πόλων, καὶ ἔσται ὀρθὸς πρὸς αὐτόν· ὥστε καὶ ὁ ΘΒΠΓ πρὸς τὸν ΞΘΟΠ ὀρθός ἐστι. πάλιν, ἐπεὶ ὁμοία ἐστὶν ἡ ΘΗ περιφέρεια τῇ ΠΝ περιφερείᾳ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Θ ἐπὶ τὸ Η παραγίνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Π ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ὁ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἕξει ὡς τὴν ΗΣΝ. πάλιν, ἐπεὶ ὁμοία ἐστὶν ἡ ΗΑ περιφέρεια τῇ ΝΜ περιφερείᾳ· ἐν ᾧ τὸ ἄρα χρόνῳ Η ἐπὶ τὸ Α παραγίνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Ν ἐπὶ τὸ Μ, καὶ ὁ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἕξει ὡς τὴν ΑΒΜΓ. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΒΜΓ, ΑΗΘΚ ἐφάπτονται ἀλλήλων, διὰ δὲ τῶν τοῦ ἑνὸς πόλων καὶ τῆς ἁφῆς μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ ΑΞΘΟ· ὀρθὸς ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΞΘΟ πρὸς τὸν ΑΒΜΓ· ὥστε καὶ ὁ ΑΒΜΓ πρὸς τὸν ΑΞΘΟ ὀρθός ἐστι. πάλιν, ἐπεὶ ὁμοία ἐστὶν ἡ ΑΚ περιφέρεια τῇ ΜΛ περιφερείᾳ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Α ἐπὶ τὸ Κ παραγίγνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Μ ἐπὶ τὸ Λ παρέσται, καὶ ὁ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἕξει ὡς τὸν ΚΣΛ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Κ, ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Κ καὶ τὴν ΚΘΗΑ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Κ παραγίγνεται (ὅς ἐστι χρόνος μιᾶς περιφορᾶς τῆς σφαίρας) δὶς ἔσται ὁ ΚΣΛ κύκλος πρὸς ὀρθὰς πρὸς τὸν ΑΞΘΟ κύκλον.

* Nempe ab Euclidis Antecessore *Autolyco Prop. 10. De Sphæra mota.*

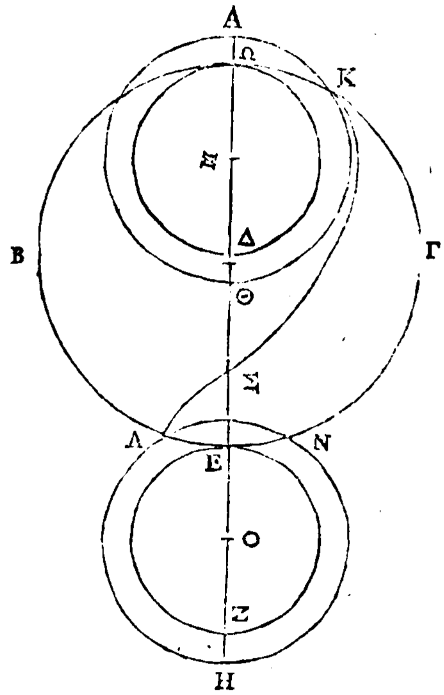
Τῶν

ΤΩΝ αὐτῶν ὑποκειμένων, ἔστω ὁ πόλος τοῦ ΒΕΓΚ κύκλου μεταξὺ τῶν Θ, Ξ σημείων· λέγω ὅτι οὐδέποτε ἔσται ὁ ΚΛ ζωδιακὸς κύκλος ὀρθὸς πρὸς τὸν ΒΕΓΚ ὁρίζοντα.

Εἰ γάρ ἐστιν ὁ ΚΣΛ ὀρθὸς πρὸς τὸν ΒΕΓΚ, τεμεῖ αὐτὸν διὰ τῶν πόλων, καὶ ἐλεύσεται διὰ τοῦ πόλου ὅς ἐστι μεταξὺ τῶν Θ, Ξ σημείων τοῦ τροπικοῦ καὶ τοῦ ἀρκτικοῦ, καὶ τεμεῖ τὸν ΑΘΚ τροπικόν, ὅπερ ἀδύνατον· οὐδέποτε ἄρα ἔσται ὀρθὸς ὁ ΚΛ ζωδιακὸς πρὸς τὸν ΒΕΓΚ ὁρίζοντα.

IISDEM suppositis, sit polus circuli BEΓK inter puncta Θ, Ξ: dico quod circulus zodiacus KΛ nequaquam est horizonti BEΓK ad angulos rectos.

Si enim KΣΛ ipsi BEΓK est ad angulos rectos; secaret ipsum per polos, & transiret per polum qui est inter puncta Θ, Ξ, scilicet per polum qui est inter circulum arcticum & tropicum; & secaret ipsum tropicum circulum AΘK, quod est absurdum: nullo modo igitur circulus zodiacus KΛ est ad angulos rectos ipsi BEΓK.

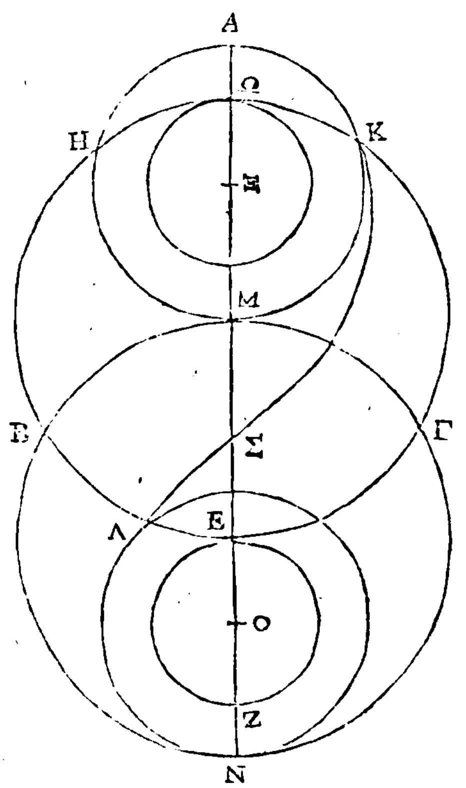


ΕΣΤΩ δὲ ὁ πόλος τοῦ ὁρίζοντος ἐπὶ τοῦ ΑΗΜΚ τὸ Μ σημεῖον· λέγω ὅτι ἅπαξ ἔσται ὁ ΚΣΛ κύκλος ὀρθὸς πρὸς τὸν ὁρίζοντα.

Ἐπεὶ γὰρ ὁμοία ἐστὶν ἡ ΚΜ περιφέρεια τῇ ΑΝ περιφερείᾳ, ἐν ᾧ χρόνῳ τὸ Κ τὴν ΚΜ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Μ παραγίνεται ἐν τούτῳ καὶ τὸ Λ ἐπὶ τὸ Ν παρέσται, καὶ ὁ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἕξει ὡς τὴν ΜΒΝΓ. ἐπεὶ οὖν ὁ ΜΒΝΓ τὸν ΚΒΓ ὁρίζοντα διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· ὀρθὸς ἄρα ἐστὶν ὁ τῶν ζωδίων κύκλος πρὸς τὸν ὁρίζοντα.

SIT rursus polus horizontis punctum M in circulo tropico, scilicet AHMK, situs: dico quod circulus KΣΛ semel erit ad rectos angulos horizonti.

Quoniam enim circumferentia KM circumferentiæ AN similis est: quo igitur tempore punctum K circumferentiam KM percurrens pervenit ad M, hoc ipso tempore & punctum Λ pervenit ad punctum N, & zodiacus circulus positionem habebit veluti MBNΓ. quoniam igitur MBNΓ horizontem KBΓ per polos secat, & bifariam ipsum secabit & ad angulos rectos: quare zodiacus circulus horizonti est ad angulos rectos.



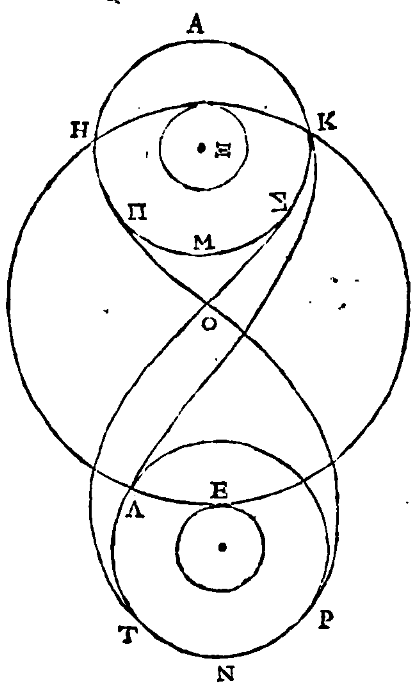
ΕΣΤΩ δὲ ὁ πόλος τοῦ ὁρίζοντος μεταξὺ τῶν τροπικῶν τὸ Ο σημεῖον· λέγω ὅτι δὶς ἔσται ὁ ΚΛ κύκλος ὀρθὸς πρὸς τὸν ὁρίζοντα.

Γεγράφθωσαν διὰ τοῦ Ο πόλου μέγιστοι κύκλοι οἱ ΣΟΤ, ΠΟΡ ἐφαπτόμενοι τοῦ ΑΗΜΚ· ἐφάψονται δὴ καὶ τοῦ ΤΝΡ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΠΟΡ τὸν ΗΕΚ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· ὀρθὸς ἄρα ἐστὶν ὁ ΠΟΡ κύκλος πρὸς τὸν ΗΕΚ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΣΟΤ πρὸς τὸν ΗΕΚ ὀρθός

SIT denique polus horizontis punctum O inter tropicos circulos: dico quod circulus KΛ horizonti bis erit ad angulos rectos.

Describantur per polum O maximi circuli ΣOT, ΠOP tangentes circulum AHMK: tangenti igitur & alterum circulum TNP. & quoniam circulus ΠOP circulum HEK per polos secat: bifariam igitur ipsum & ad rectos secabit angulos: quare circulus ΠOP circulo HEK est ad angulos rectos. propter hæc ipsa etiam & circulus ΣOT est ad angulos rectos circulo

culo HEK. & quoniam semicirculus à puncto K incipiens, qui ad partes K, Λ tendat, non concurrit cum semicirculo à puncto Σ inchoante, qui ad partes Σ, T proficiscatur; circumferentia igitur KΣ similis est circumferentiæ ΛT: quo igitur tempore punctum K ad punctum Σ pervenit, hoc eodem tempore & punctum Λ ad punctum T venit, & circulus KΛ congruet cum circulo ΣT. est autem circulus ΣT ad rectos angulos ipsi HEK: quare & circulus KΛ erit ipsi HEK ad angulos rectos. rursus, quoniam circumferentia ΣMΠ similis est circumferentiæ TNP: quo igitur tempore punctum Σ ad punctum Π accedit: hoc ipso tempore & punctum T ad punctum P pervenit, & zodiacus circulus congruet cum circulo ΠOP. est autem circulus ΠOP ipsi HEK ad angulos rectos: quare & circulus zodiacus horizonti HEK erit etiam ad angulos rectos. zodiacus igitur circulus horizonti bis erit ad angulos rectos.



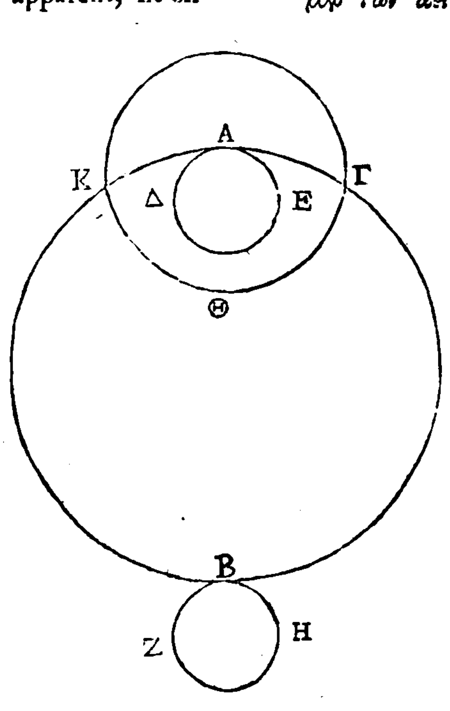
ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἀσύμπτωτόν ἐστι τὸ ἀπὸ τοῦ K ἡμικύκλιον ὡς ἐπὶ τὰ K, Λ μέρη τῷ ἀπὸ τοῦ Σ ἡμικυκλίῳ ὡς ἐπὶ τὰ Σ, T μέρη· ὁμοία ἐστὶν ἡ KΣ περιφέρεια τῇ ΛT περιφερείᾳ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ K ἐπὶ τὸ Σ παραγίγνεται ἐν τούτῳ καὶ τὸ Λ ἐπὶ τὸ T παρέσται, καὶ ὁ KΛ κύκλος ἐφαρμόσει ἐπὶ τὸν ΣT κύκλον. ὁ δὲ ΣT κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν HEK· καὶ ὁ KΛ ἄρα ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν HEK κύκλον. πάλιν, ἐπεὶ ὁμοία ἐστὶν ἡ ΣMΠ περιφέρεια τῇ TNP· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Σ ἐπὶ τὸ Π παραγίγνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ T ἐπὶ τὸ P παρέσται, καὶ ὁ τῶν ζῳδίων κύκλος ἐφαρμόσει ἐπὶ τὸν ΠOP κύκλον. ὁ δὲ ΠOP κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν HEK· καὶ ὁ τῶν ζῳδίων ἄρα κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν HEK ὁρίζοντα. δὶς ἄρα ἔσται ὁ τῶν ζῳδίων κύκλος ὀρθὸς πρὸς τὸν ὁρίζοντα.

THEOREMA III.

Ex inerrantibus astris, quæ ortus & occasus faciunt, unumquodque in iisdem horizontis punctis & oritur & occidit.

SIT in mundo horizon ABΓ: maximus autem eorum, qui semper apparent, sit circulus AΔE; maximus vero eorum, qui semper occulti sunt, sit circulus BHZ; & sumatur punctum Θ ex his quæ & ortus & occasus faciunt; & sint partes orientales quidem versus punctum Γ, occidentales autem versus punctum K: dico quod punctum Θ in iisdem horizontis punctis semper & oritur & occidit, sphæra circumvoluta.

Sit ΓΘK circulus in quo punctum Θ feratur: circulus igitur ΓΘK horizontem secat; quinetiam axi sphæræ est ad angulos rectos. qui vero circuli sunt ad angulos rectos axi & horizontem secant, ortus occasusque faciunt in iisdem punctis horizontis: quare circulus ΓΘK in puncto Γ quidem oritur, & in K puncto occidit. fertur autem punctum



ΘΕΩΡΗΜΑ γʹ.

Τῶν ἀπλανῶν ἄστρων τῶν ἀνατολάς τε καὶ δύσεις ποιουμένων ἕκαστον κατὰ τὰ αὐτὰ σημεῖα τοῦ ὁρίζοντος ἀνατέλλει τε καὶ δύνει.

ΕΣτω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ ABΓ, καὶ μέγιστος μὲν τῶν ἀεὶ φανερῶν ἔστω ὁ AΔE κύκλος, μέγιστος δὲ τῶν ἀεὶ ἀφανῶν ὁ BHZ, καὶ εἰλήφθω σημεῖον τὸ Θ τῶν ἀνατολὰς καὶ δύσεις ποιουμένων, καὶ ἔστω ἀνατολικὰ μὲν τὰ Γ μέρη, δυτικὰ δὲ τὰ K· λέγω ὅτι τὸ Θ σημεῖον ἀεὶ κατὰ τὰ αὐτὰ σημεῖα τοῦ ὁρίζοντος ἀνατέλλει τε καὶ δύνει, στρεφομένης τῆς σφαίρας.

Ἔστω κύκλος, καθ' οὗ φέρεται τὸ Θ σημεῖον, ὁ ΓΘK· ὁ ΓΘK ἄρα κύκλος τέμνει τὸν ὁρίζοντα, καὶ ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ἄξονα τῆς σφαίρας. οἱ δὲ τῷ ἄξονι πρὸς ὀρθὰς ὄντες κύκλοι, καὶ τέμνοντες τὸν ὁρίζοντα, τάς τε ἀνατολὰς καὶ δύσεις κατὰ τὰ αὐτὰ σημεῖα τοῦ ὁρίζοντος ποιοῦνται· ὁ ΓΘK ἄρα κύκλος ἀεὶ κατὰ μὲν τὸ Γ σημεῖον ἀνατέλλει, κατὰ δὲ τὸ K δύνει. καὶ φέρεται τὸ Θ ση-

Θ σημεῖον ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ Γ Θ Κ κύκλου· καὶ τὸ Θ ἄρα σημεῖον ἀεὶ κατὰ μὲν τὸ Γ σημεῖον ἀνατέλλει, κατὰ δὲ τὸ Κ δύνει.

Θ in circumferentia circuli Γ Θ Κ: quare punctum Θ semper in puncto Γ oritur, & in Κ puncto occidit.

ΘΕΩΡΗΜΑ δ΄.

Οσα τῶν ἄστρων ἐστὶν ἐπὶ μεγίστου κύκλου περιφερείας, ὃς μήτε τέμνει τὸν μέγιστον τῶν ἀεὶ φανερῶν κύκλων, μήτε ἐφάπτεται αὐτοῦ· τούτων τὰ πρότερον ἀνατέλλοντα καὶ πρότερον δύνει, καὶ τὰ πρότερον δύοντα πρότερον ἀνατέλλει.

Εστω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ Α Β Γ, καὶ μέγιστος τῶν ἀεὶ φανερῶν ὁ Α Δ Ε, ἕτερος δὲ μέγιστος κύκλος ἔστω ὁ Γ Ζ Β, μήτε τέμνων τὸν Α Δ Ε κύκλον μήτε ἐφαπτόμενος αὐτοῦ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ Γ Ζ Β κύκλου δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Ζ, Η· λέγω ὅτι τῶν Ζ, Η σημείων τὸ πρότερον ἀνατέλλον πρότερον καὶ δύνει, καὶ τὸ πρότερον δῦνον πρότερον καὶ ἀνατέλλει.

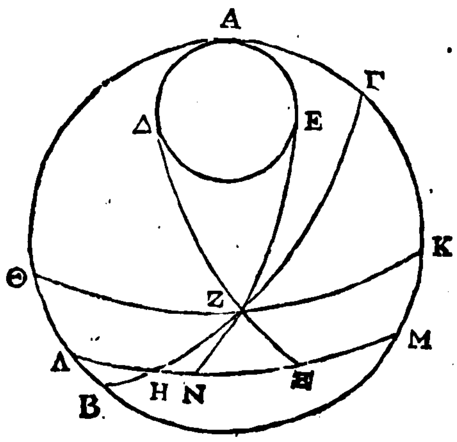
Εστω ἀνατολικὰ μὲν τὰ Γ μέρη, δυτικὰ δὲ τὰ Β, καὶ ἔστωσαν παράλληλοι κύκλοι, καθ᾽ ὧν φέρεται τὰ Ζ, Η σημεῖα, οἱ Θ Κ, Λ Μ, καὶ διὰ τοῦ Ζ γεγράφθω μέγιστος κύκλος ὁ Ν Ζ Ε ἐφαπτόμενος τοῦ Α Δ Ε κύκλου, ὥστε ἀσύμπτωτον εἶναι τὸ ἀπὸ τοῦ Ε ἡμικύκλιον ὡς ἐπὶ τὰ Ζ, Ν μέρη τῷ ἀπὸ τοῦ Α ἡμικυκλίῳ, ὡς ἐπὶ τὰ Λ, Κ μέρη. ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ Κ Ζ περιφέρεια τῇ Μ Ν περιφερείᾳ· λοιπὴ ἄρα ἡ Ζ Θ περιφέρεια, καὶ ἡ συνεχὴς αὐτῇ ὑπὸ γῆν ἡ μέχρι τοῦ Κ σημείου, ὁμοία ἐστὶ τῇ Ν Λ περιφερείᾳ καὶ τῇ συνεχεῖ αὐτῇ τῇ ὑπὸ γῆν μέχρι τοῦ Μ σημείου. ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὰ Ζ, Ν σημεῖα τὰς Ζ Θ, Ν Λ καὶ τὰς συνεχεῖς αὐταῖς μέχρι τῶν Κ, Μ σημείων διαπορεύεται· τὰ Ζ, Ν ἄρα σημεῖα ἅμα ἀνατέλλει. τὸ δὲ Η τοῦ Ν πρότερον ἀνατέλλει· καὶ τὸ Η ἄρα τοῦ Ζ πρότερον ἀνατέλλει. * λέγω ὅτι καὶ πρότερον δύνει. γεγράφθω διὰ τοῦ Ζ σημείου μέγιστος κύκλος ὁ Ξ Ζ Δ ἐφαπτόμενος τοῦ Α Δ Ε κύκλου, ὥστε ἀσύμπτωτον εἶναι τὸ ἀπὸ τοῦ Δ ἡμικύκλιον ὡς ἐπὶ τὰ Δ, Ζ, Ξ μέρη τῷ ἀπὸ τοῦ Α ἡμικυκλίῳ ὡς ἐπὶ τὰ Α, Θ μέρη· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ Ζ Θ περιφέρεια τῇ Ξ Λ περιφερείᾳ· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὸ Ζ σημεῖον τὴν Ζ Θ περιφέρειαν διαπορεύεται, καὶ τὸ Ξ σημεῖον τὴν Ξ Λ περιφέρειαν. τοῦ Ζ ἄρα σημείου ἐπὶ τὸ Θ σημεῖον παραγινομένου, καὶ τὸ Ξ ἐπὶ τὸ Λ παρέσται· τὰ Ζ, Ξ ἄρα σημεῖα ἅμα δύνει. τὸ δὲ Η τοῦ Ξ πρότερον δύνει· καὶ τὸ Η ἄρα τοῦ Ζ πρότερον δύνει.

Theorema IV.

Quæcunque astra sunt in circumferentia maximi circuli, qui neque secat maximum semper-apparentium circulorum, neque ipsum tangit: horum quæ prius oriuntur prius & occidunt; & quæ prius occidunt, prius etiam & oriuntur.

SIT in mundo horizon circulus Α Β Γ; maximus autem semper-apparentium sit circulus Α Δ Ε; alter vero maximus circulus sit Γ Ζ Β, qui neque secet circulum Α Δ Ε neque ipsum tangat; sumantur autem in circumferentia circuli Γ Ζ Β duo puncta utcunque, quæ sint Ζ, Η: dico quod punctorum Ζ, Η quod prius oritur illud quoque prius occidit, & quod prius occidit prius quoque oritur.

Sint vero partes orientales Γ, occidentales Β; sintque circuli paralleli Θ Κ, Λ Μ in quibus puncta Ζ, Η ferantur; & per punctum Ζ describatur maximus circulus Ν Ζ Ε, qui circulum Α Δ Ε tangat; ita ut semicirculus qui à puncto Ε incipit, qui ad partes Ζ, Ν tendat, non concurrat cum semicirculo à puncto Α inchoante, qui ad partes Λ, Κ proficiscatur. circumferentia igitur Κ Ζ circumferentiæ Μ Ν similis est: quare & reliqua Ζ Θ, & quæ huic continua est sub terram circumferentia usque ad punctum Κ contenta, similis est etiam circumferentiæ Ν Λ, & ei quæ huic continua est sub terram usque ad punctum Μ comprehensæ. æquali igitur tempore [per 2. Autol.] puncta Ζ, Ν circumferentias Ζ Θ, Ν Λ percurrunt, & eas etiam quæ his continuæ sunt usque ad puncta Κ, Μ interceptæ: quare puncta Ζ, Ν simul oriuntur. verum punctum Η prius oritur quam punctum Ν: quare punctum Η prius oritur quam punctum Ζ. dico quod & prius occidit. describatur per punctum Ζ maximus circulus Ξ Ζ Δ qui circulum Α Δ Ε tangat; ita ut semicirculus, qui à puncto Δ incipit, qui ad partes Δ, Ζ, Ξ tendat, non concurrat cum semicirculo à puncto Α inchoante, qui ad partes Α, Θ proficiscatur. circumferentia igitur Ζ Θ circumferentiæ Ξ Λ similis est: æquali igitur tempore punctum Ζ circumferentiam Ζ Θ percurrit, ac punctum Ξ circumferentiam Ξ Λ pertransit. cum igitur punctum Ζ ad punctum Θ pervenit, tunc & punctum Ξ ad Λ punctum accedet: puncta igitur Ζ, Ξ simul occidunt. sed Η prius occidit quam punctum Ξ: quare punctum Η prius quoque occidit quam Ζ.



* In Cod. Bodl. ἢ καὶ οὕτως. λέγω ὅτι τὸ Η πρότερον δύνει τοῦ Ζ. ἐπεὶ γὰρ ἡ Κ Θ μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία τῇ Μ Λ, ἡ δὲ Κ Ζ ὁμοία ἐστὶ τῇ Μ Ν· λοιπὴ ἄρα ἡ Θ Ζ μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία τῇ Ν Λ· πρότερον ἄρα δύνει τὸ Ν Ζ. ἀλλὰ καὶ τὸ Η τοῦ Ν· πολλῷ ἄρα τὸ Η πρότερον δύσεται τοῦ Ζ.

Simi-

Similiter etiam demonstrabitur, quod & si prius occidit & prius quoque orietur.

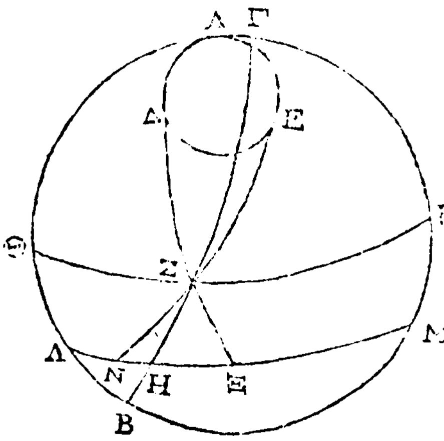
Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ πρότερον δῦνον πρότερον ἀνατέλλει.

Theorema V.

Quæcunque astra sunt in circumferentia maximi circuli, qui maximum eorum qui semper apparent secat; horum quæ magis spectant ad septentriones prius quidem oriuntur, posterius autem occidunt.

SIT in mundo circulus horizon ΑΒΓ; maximus autem eorum, qui semper apparent sit circulus ΑΔΕ; alter vero circulus maximus sit ΓΖΒ, qui secet circulum ΑΔΕ; & sumantur in circumferentia circuli ΓΖΒ duo puncta utcunque sumpta, quæ sint Ζ, Η; sit autem punctum Ζ propius ad septentriones: dico quod punctum Ζ prius oritur quam punctum Η, posterius autem occidit.

Sint partes orientales versus Γ, occidentales vero sint versus Β; & sint circuli paralleli ΚΘ, ΜΛ, in quibus puncta Ζ, Η ferantur; & describatur per punctum Ζ maximus circulus ΝΖΕ tangens circulum ΑΔΕ, ita ut semicirculus à puncto Ε inchoans, qui ad partes Ζ, Ν proficiscatur, non concurrat cum semicirculo à puncto Α inchoante, qui ad partes Γ, Κ: quare circumferentia ΖΓ similis est circumferentiæ ΜΝ: & reliqua, igitur ΖΘ, & quæ huic sub terram continua est usque ad punctum Κ intercepta, similis quoque est circumferentiæ ΝΛ, & ei quæ huic etiam continua est sub terram usque ad punctum Μ comprehensa. quare [per 1. Autol.] tempore æquali puncta Ζ, Ν circumferentias ΖΘ, ΝΛ, & eas quæ his continuæ sub terram sunt usque ad puncta Κ, Μ interceptæ, percurrunt: puncta igitur Ζ, Ν simul oriuntur. sed punctum Ν prius oritur quam punctum Η: quare & punctum Ζ prius oritur etiam quam punctum Η. dico quod & posterius occidit. describatur per punctum Ζ maximus circulus ΞΖΔ tangens circulum ΑΔΕ, itaut semicirculus à puncto Δ inchoans, qui ad partes Ζ, Ξ tendat, non concurrat cum semicirculo à puncto Α proficiscente, qui ad partes Α, Β tendat: quare circumferentia ΖΘ similis est circumferentiæ ΞΛ. æquali igitur tempore punctum Ζ circumferentiam ΖΘ percurrit atque punctum Ξ ipsam ΞΛ pertransit: puncto igitur Ζ jam pervento ad punctum Θ & ipsum Ξ perveniet ad punctum Λ: quare puncta Ζ, Ξ simul occidunt. sed punctum Η prius occidit quam punctum Ξ: quare punctum Η prius quoque occidit quam punctum Ζ: punctum igitur Ζ posterius occidit quam punctum Η. sed demonstratum est quod & prius oritur: quare punctum Ζ prius quidem oritur quam punctum Η, posterius autem occidit.



ΘΕΩΡΗΜΑ έ.

Οσα τῶν ἄστρων ἐστὶν ἐπὶ μεγίστου κύκλου περιφερείας, ὃς τέμνει τὸν μέγιστον τῶν ἀεὶ φανερῶν· τούτων τὰ πρὸς τοῖς ἄρκτοις ὄντα πρότερον μὲν ἀνατέλλει, ὕστερον δὲ δύνει.

ΕΣτω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ ΑΒΓ, καὶ μέγιστος τῶν ἀεὶ φανερῶν ὁ ΑΔΕ, ἕτερος δὲ μέγιστος κύκλος ἔστω ὁ ΓΖΒ τέμνων τὸν ΑΔΕ κύκλον, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ΓΖΒ κύκλου δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Ζ, Η, καὶ ἔστω τὸ Ζ σημεῖον πρὸς τοῖς ἄρκτοις· λέγω ὅτι τὸ Ζ σημεῖον τοῦ Η πρότερον μὲν ἀνατέλλει, ὕστερον δὲ δύνει.

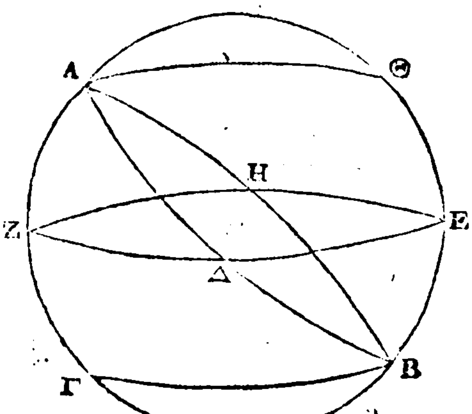
Εστω ἀνατολικὰ μὲν τὰ Γ μέρη, δυτικὰ δὲ τὰ Β, καὶ ἔστωσαν κύκλοι παράλληλοι καθ' ὧν φέρεται τὰ Ζ, Η σημεῖα οἱ ΚΘ, ΜΛ, καὶ γεγράφθω διὰ τοῦ Ζ σημείου μέγιστος κύκλος ὁ ΝΖΕ ἐφαπτόμενος τοῦ ΑΔΕ κύκλου, ὥστε ἀσύμπτωτον εἶναι τὸ ἀπὸ τοῦ Ε ἡμικύκλιον ὡς ἐπὶ τὰ Ζ, Ν μέρη τῷ ἀπὸ τοῦ Α ἡμικυκλίῳ ὡς ἐπὶ τὰ Γ, Κ μέρη· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΚ περιφέρεια τῇ ΜΝ περιφερείᾳ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΖΘ περιφέρεια καὶ ἡ συνεχὴς αὐτῇ ὑπὸ γῆν μέχρι τοῦ Κ σημείου ὁμοία ἔσται τῇ ΝΛ περιφερείᾳ καὶ τῇ συνεχεῖ αὐτῇ τῇ ὑπὸ γῆν μέχρι τοῦ Μ σημείου. ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὰ Ζ, Ν σημεῖα τὰς ΖΘ, ΝΛ περιφερείας καὶ τὰς συνεχεῖς αὐταῖς μέχρι τῶν Κ, Μ σημείων διαπορεύεται· τὰ Ζ, Ν ἄρα σημεῖα ἅμα ἀνατέλλει. τὸ δὲ Ν τοῦ Η πρότερον ἀνατέλλει· καὶ τὸ Ζ ἄρα τοῦ Η πρότερον ἀνατέλλει. λέγω ὅτι καὶ ὕστερον δύνει. γεγράφθω διὰ τοῦ Ζ σημείου μέγιστος κύκλος ὁ ΞΖΔ ἐφαπτόμενος τοῦ ΑΔΕ κύκλου, ὥστε ἀσύμπτωτον εἶναι τὸ ἀπὸ τοῦ Δ ἡμικύκλιον ὡς ἐπὶ τὰ Ζ, Ξ μέρη τῷ ἀπὸ τοῦ Α ἡμικυκλίῳ ὡς ἐπὶ τὰ Α, Β μέρη· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ περιφέρεια τῇ ΞΛ περιφερείᾳ. ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὸ Ζ τὴν ΖΘ περιφέρειαν διαπορεύεται καὶ τὸ Ξ τὴν ΞΛ· τοῦ Ζ ἄρα ἐπὶ τὸ Θ σημεῖον παραγινομένου καὶ τὸ Ξ ἐπὶ τὸ Λ παρέσται· τὰ Ζ, Ξ ἄρα σημεῖα ἅμα δύνει. τὸ δὲ Η τοῦ Ξ πρότερον δύνει· καὶ τὸ Η ἄρα τοῦ Ζ πρότερον δύνει· ὥστε τὸ Ζ τοῦ Η ὕστερον δύνει. ἐδείχθη δὲ καὶ πρότερον ἀνατέλλον· τὸ Ζ ἄρα τοῦ Η πρότερον ἀνατέλλει, ὕστερον δὲ δύνει.

ΘΕΩΡΗΜΑ ϛʹ.

Τὰ ἐπὶ τοῦ ζωδιακοῦ κύκλου ἄστρα τὰ κατὰ διάμετρον ὄντα κατὰ συζυγίαν ἀνατέλλει τε καὶ δύνει· ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ.

Ἔστω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ ΑΒΓ, ὁ δὲ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω τὴν ΑΒΔ, ἰσημερινὸς δὲ ἔστω ὁ ΕΖ· καὶ ἔστω αὐτῶν τὰ μὲν ὑπὲρ τὴν γῆν τμήματα τὰ ΑΗΒ, ΖΗΕ· κατὰ διάμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν Α σημεῖον τῷ Β, τὸ δὲ Ε τῷ Ζ. λέγω ὅτι τά τε Α, Β σημεῖα καὶ τὰ Ε, Ζ κατὰ συζυγίαν ἀνατέλλει τε καὶ δύνει.

Ἔστω ἀνατολικὰ μὲν τὰ Α μέρη, δυτικὰ δὲ τὰ Β, καὶ ἔστωσαν παράλληλοι κύκλοι καθ' ὧν φέρεται τὰ Α, Β σημεῖα οἱ ΑΘ, ΒΓ, καὶ ἔστω τὸ μὲν ΑΘ τμῆμα τὸ ὑπὲρ γῆς, τὸ δὲ ΒΓ τὸ ὑπὸ γῆν. καὶ ἐπεὶ κατὰ διάμετρόν ἐστι τὸ μὲν Α σημεῖον τῷ Β, τὸ δὲ Ε τῷ Ζ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΒ περιφέρεια τῇ ΑΖ περιφερείᾳ. ἀλλ' ἡ ΕΒ τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΑΖ ἄρα τῇ ΖΓ ἴση ἐστίν. καὶ ἔστι μέγιστος τῶν παραλλήλων ὁ ΕΔΖ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΘ κύκλος τῷ ΒΓ κύκλῳ. καὶ ἔστιν αὐτῶν τὰ ἐναλλὰξ τμήματα τὰ ΑΘ, ΒΓ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ περιφέρεια τῇ ΒΓ περιφερείᾳ· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὸ Α σημεῖον τὴν ΑΘ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Θ παρέσται, καὶ τὸ Β τὴν ΒΓ διελθὸν ἐπὶ τὸ Γ παρέσται. ἀλλὰ τὸ μὲν Α τὴν ΑΘ διελθὸν καὶ ἐπὶ τὸ Θ παραγενόμενον δύνει, τὸ δὲ Β τὴν ΒΓ διελθὸν καὶ ἐπὶ τὸ Γ παραγενόμενον ἀνατέλλει· τοῦ Α ἄρα δύνοντος τὸ Β ἀνατέλλει. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τοῦ Α ἀνατέλλοντος τὸ Β δύνει.



ΠΑΛΙΝ, ἐπεὶ ἡμικύκλιόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΕΗΖ, ΖΔΕ, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΔΕ περιφέρεια τῇ ΕΗΖ περιφερείᾳ· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὸ Ζ σημεῖον τὴν ΖΗΕ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ε παρέσται, καὶ τὸ Ε τὴν ΕΔΖ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ζ παρέσται. ἀλλὰ τὸ μὲν Ζ τὴν ΖΗΕ διελθὸν καὶ ἐπὶ τὸ Ε παραγενόμενον δύνει, τὸ δὲ Ε τὴν ΕΔΖ διελθὸν καὶ ἐπὶ τὸ Η παραγενόμενον ἀνατέλλει· τοῦ Ζ ἄρα δύνοντος τὸ Ε ἀνατέλλει. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τοῦ Ζ ἀνατέλλοντος τὸ Ε δύνει. ὁμοίως δὴ καὶ πάντα τὰ ἐπὶ τοῦ ζωδιακοῦ κύκλου ἄστρα, καὶ τὰ ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ τὰ κατὰ διάμετρον ὄντα, κατὰ συζυγίαν ἀνατέλλει τε καὶ δύνει.

ΑΛΛΩΣ

Ἔστω ὁ ὁρίζων κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ἔστω ὁ ΑΔ, χειμερινὸς δὲ ὁ ΒΓ, ὁ δὲ τῶν ζω-

THEOREMA VI.

Astra quæ in circulo zodiaco per diametrum sunt posita, conjugate & oriuntur & occidunt: similiter quæ in circulo æquinoctiali sita sint.

SIT in mundo horizon ABΓ, zodiacus circulus positionem habeat ABΔ, æquinoctialis vero sit EZ: sintque horum circulorum segmenta quidem AHB, ZHE supra terram; per diametrum igitur est punctum A puncto B, & punctum E puncto Z. dico quod puncta A, B & E, Z conjugate & oriuntur & occidunt.

Sint partes orientales A, occidentales autem B puncta; sint vero circuli paralleli AΘ, BΓ, in quibus puncta A, B ferantur; & sit segmentum AΘ supra terram, & segmentum BΓ sub terram. & quoniam punctum A per diametrum est puncto B, & punctum E etiam est per diametrum ipsi Z: æqualis igitur est circumferentia EB circumferentiæ AZ. sed circumferentiæ ZΓ æqualis est etiam ipsa EB: quare circumferentia AZ æqualis quoque est ipsi ZΓ. est autem circulus EΔZ maximus parallelorum circulorum: circulus igitur AΘ æqualis est circulo BΓ. & sunt ipsorum segmenta alternatim sumpta AΘ, BΓ: quare circumferentia AΘ æqualis est circumferentiæ BΓ: æquali igitur tempore [per 2. Autol.] punctum A circumferentiam AΘ percurrens pervenit ad punctum Θ, & ipsum B circumferentiam BΓ pertransiens accedit ad punctum Γ. sed A percurrens circumferentiam AΘ & accedens ad punctum Θ occidit; & B pertransiens circumferentiam BΓ & perveniens ad punctum Γ oritur: quare puncto A occidente & B oritur. similiter demonstrabitur quod puncto A oriente B occidit.

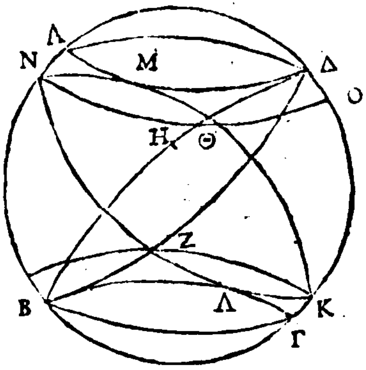
RURSUS, quoniam utraque EHZ, ZΔE semicirculi circumferentia est; æqualis igitur est ZΔE ipsi EHZ: quare tempore æquali punctum Z percurrens circumferentiam ZHE pervenit ad punctum E; & ipsum E pertransiens circumferentiam EΔZ pervenit ad punctum Z. sed punctum Z circumferentiam ZHE percurrens, & perveniens ad punctum E occidit; & punctum E perambulans circumferentiam EΔZ & perveniens ad punctum H oritur: quare puncto Z occidente punctum E oritur. similiter jam demonstrabitur quod Z oriente E occidit. simili etiam modo ostendetur, quod omnia alia puncta, quæcunque sunt vel in zodiaco circulo vel in æquinoctiali per diametrum posita, conjugate & oriuntur & occidunt.

ALITER.

Sit horizon circulus ABΓΔ, tropicus æstivus sit AΔ, hybernus autem sit BΓ, zodiacus cir-

circulus poſitionem habeat ΔΗΒΖ, ſint autem in ΔΗΒΖ per diametrum puncta Ζ, Η: dico quod puncto Ζ oriente, punctum Η occidit.

Si enim fieri poteſt, non occidat, ſed occidat punctum Θ; & per puncta Ζ, Θ deſcribantur circuli paralleli ΟΘΝ, ΚΖ: quare [ex hyp.] puncto Ζ oriente in puncto Κ, & punctum Θ occidet in Ν; & circulus zodiacus poſitionem habebit veluti ΜΝΛΚ. & quoniam uterque circulus ΑΒΓΔ, ΜΝΛΚ maximus eſt: punctum igitur Κ puncto Ν per diametrum eſt. ſed punctum Κ idem eſt ac punctum Ζ, & punctum Ν idem eſt ac ipſum Θ: quare punctum Ζ per diametrum eſt puncto Θ. ſed [ex hyp.] & Ζ per diametrum eſt ipſi Η; quod fieri non poteſt: non igitur, puncto Ζ oriente, punctum Η non occidit: occidit igitur.



δίων κύκλος θέσιν ἐχέτω ὡς τὴν ΔΗΒΖ, καὶ ἔστω ἐπὶ τῆς ΔΗΒΖ κατὰ διάμετρον τὰ Ζ, Η σημεῖα· λέγω ὅτι τοῦ Ζ ἀνατέλλοντος τὸ Η δύνει.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, μὴ δυνέτω, ἀλλ' ἔστω τὸ Θ δῦνον, καὶ διὰ τῶν Ζ, Θ παράλληλοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ΟΘΝ, ΚΖ· ὥστε τοῦ Ζ ἀνατέλλοντος κατὰ τὸ Κ σημεῖον τὸ Θ δύσεται κατὰ τὸ Ν, καὶ ὁ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἕξει τὴν ΜΝΛΚ. καὶ ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν ΑΒΓΔ, ΜΝΛΚ κύκλων μέγιστός ἐστι, κατὰ διάμετρόν ἐστι τὸ Κ τῷ Ν. ἀλλὰ τὸ μὲν Κ τῷ Ζ ἐστι τὸ αὐτὸ, τὸ δὲ Ν τῷ Θ· καὶ τὸ Ζ ἄρα τῷ Θ ἐστι κατὰ διάμετρον. ἀλλὰ καὶ τὸ Ζ τῷ Η, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοῦ Ζ ἀνατέλλοντος τὸ Η οὐ δύνει· δύνει ἄρα.

Theorema VII.

Zodiacus circulus in omni horizontis loco, qui eſt inter tropicos circulos, & oritur & occidit; quando maximus ſemper-apparentium non fuerit circulo tropico major: converſioneſque facit contrario tranſmutatus; nam quando cum ortibus ad meridiem ſe tranſmutaverit, tunc ad ſeptentriones cum occaſibus tranſmutatus apparet; at quando contra cum ortibus ad ſeptentriones ſeſe tranſmutaverit, tunc etiam cum occaſibus ad meridiem tranſmutatus apparet: interdum autem alio modo ſupra nos ſtat.

SIT in mundo circulus horizon ΑΒΓΔ, æſtivus tropicus ſit ΑΔ, hybernus autem ſit ΒΓ, zodiacus circulus poſitionem habeat veluti ΔΕΒΖ; & ſit ſegmentum ΔΕΒ ſub terram, ſegmentum vero ΔΖΒ ſupra terram. dico quod zodiacus circulus in omni horizontis loco, qui eſt inter tropicos, & oritur & occidit; & quod contrario tranſmutatus converſiones facit: nam quando cum ortibus meridiem verſus ſeſe mutaverit, tunc cum occaſibus ſeptentriones verſus tronſmutatus apparet; quando autem cum ortibus ad ſeptentriones ſe tranſmutaverit, tunc cum occaſibus meridiem verſus etiam tranſmutatus appparet: interdum vero alio modo ſupra nos conſtitutus eſt.

Sint itaque partes orientales Δ, Γ, occidentales autem ſint Α, Β. quod igitur circulus zodiacus in omni horizontis loco, qui eſt inter tropicos circulos, faciat & ortus & occaſus, jam manifeſtum eſt [per 11. Autol.]; quandoquidem majores circulos tangit quam eos quos horizon tangit.

JAM dico, quod converſiones facit contrario tranſmutatus.

ΘΕΩΡΗΜΑ ζʹ.

Ὁ τῶν ζωδίων κύκλος κατὰ πάντα τοῦ ὁρίζοντος τὸν μεταξὺ τόπον τῶν τροπικῶν κύκλων ἀνατέλλει τε καὶ δύνει, ὅταν ὁ μέγιστος τῶν ἀεὶ φανερῶν μὴ μείζων ᾖ τοῦ τροπικοῦ κύκλου, καὶ τροπὰς ποιεῖται ἐναντίως μεθιστάμενος· ὅταν μὲν γὰρ ταῖς ἀνατολαῖς πρὸς μεσημβρίαν μεθίστηται, ταῖς δύσεσι πρὸς ἄρκτους μεθιστάμενος φαίνεται· ὅταν δὲ ταῖς ἀνατολαῖς πρὸς ἄρκτους μεθίστηται, ταῖς δύσεσι πρὸς μεσημβρίαν μεθιστάμενος φαίνεται· καὶ ἄλλοτε ἄλλως ὑπὲρ ἡμᾶς ἵσταται.

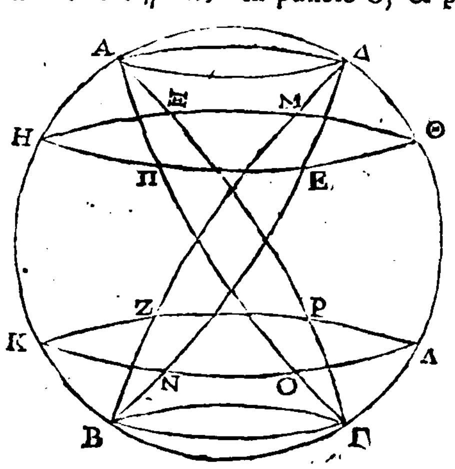
Ἔστω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ ΑΒΓΔ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ἔστω ὁ ΑΔ, χειμερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ ΒΓ, ὁ δὲ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω τὴν ΔΕΒΖ, καὶ ἔστω τὸ μὲν ΔΕΒ τμῆμα ὑπὸ γῆν, τὸ δὲ ΔΖΒ ὑπὲρ γῆς. λέγω ὅτι ὁ τῶν ζωδίων κύκλος κατὰ πάντα τόπον τοῦ ὁρίζοντος μεταξὺ τῶν τροπικῶν ἀνατέλλει καὶ δύνει καὶ τροπὰς ποιεῖται ἐναντίως μεθιστάμενος. ὅταν μὲν γὰρ ταῖς ἀνατολαῖς πρὸς μεσημβρίαν μεθίστηται, ταῖς δύσεσι πρὸς ἄρκτους μεθιστάμενος φαίνεται· ὅταν δὲ ταῖς ἀνατολαῖς πρὸς ἄρκτους μεθίστηται, ταῖς δύσεσι πρὸς μεσημβρίαν μεθιστάμενος φαίνεται· καὶ ἄλλοτε ἄλλως ὑπὲρ ἡμᾶς ἵσταται.

Ἔστω ἀνατολικὰ μὲν τὰ Δ, Γ μέρη, δυτικὰ δὲ τὰ Α, Β. ὅτι μὲν οὖν ὁ τῶν ζωδίων κύκλος κατὰ πάντα τόπον τοῦ ὁρίζοντος τὸν μεταξὺ τῶν τροπικῶν ἀνατέλλει τε καὶ δύνει φανερόν· ἐπειδήπερ μειζόνων ἐφάπτεται κύκλων ἢ ὧν ὁ ὁρίζων ἐφάπτεται.

ΛΕΓΩ δὴ ὅτι καὶ τροπὰς ποιεῖται ἐναντίως μεθιστάμενος.

Ἀπ-

Ἀπειλήφθωσαν ἴσαι τε καὶ ἀπεναντίον περιφέρειαι αἱ ΔΕ, ΖΒ, καὶ γεγράφθωσαν παράλληλοι κύκλοι, καθ' ὧν φέρεται τὰ Ε, Ζ σημεῖα, οἱ ΗΕΘ, ΚΖΛ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΕ περιφέρεια τῇ ΖΒ περιφερείᾳ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΕΒ· ὅλη ἄρα ἡ ΔΕΒ ὅλῃ τῇ ΕΒΖ ἐστὶν ἴση. ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ ΔΕΒ· ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΒΖ· κατὰ διάμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Ε σημεῖον τῷ Ζ σημείῳ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΕΔ περιφέρεια τῇ ΔΜ περιφερείᾳ, ἡ δὲ ΖΒ τῇ ΒΝ, ἀλλὰ ἡ ΔΕ τῇ ΖΒ ἴση ἐστίν· καὶ ἡ ΔΜ ἄρα τῇ ΒΝ ἐστὶν ἴση. κοινὴ προσκείσθω ἡ ΜΒ· ὅλη ἄρα ἡ ΔΜΒ ὅλῃ τῇ ΜΒΝ ἐστὶν ἴση. ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ ΔΜΒ· ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΜΒΝ· κατὰ διάμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Μ σημεῖον τῷ Ν σημείῳ. καὶ ἐπεὶ τοῦ τῶν ζῳδίων κύκλου τὰ κατὰ διάμετρον ὄντα σημεῖα κατὰ συζυγίαν ἀνατέλλει τε καὶ δύνει· τοῦ Δ ἄρα σημείου ἀνατέλλοντος κατὰ τὸ Δ σημεῖον, τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Β δύνει κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ τοῦ Ε ἀνατέλλοντος κατὰ τὸ Θ σημεῖον, τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Ζ δύνει κατὰ τὸ Κ σημεῖον, καὶ τοῦ Ν σημείου ἀνατέλλοντος κατὰ τὸ Λ σημεῖον, τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Μ δύνει κατὰ τὸ Η σημεῖον, καὶ ἔτι τοῦ Β σημείου ἀνατέλλοντος κατὰ τὸ Γ σημεῖον, τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Δ δύνει κατὰ τὸ Α σημεῖον· ὅταν ἄρα ὁ τῶν ζῳδίων κύκλος ταῖς ἀνατολαῖς πρὸς μεσημβρίαν μεθίστηται, ταῖς δύσεσι πρὸς ἄρκτους μεθιστάμενος φαίνεται. λέγω ὅτι καὶ ὅταν ταῖς ἀνατολαῖς πρὸς ἄρκτους μεθίστηται, ταῖς δύσεσι πρὸς μεσημβρίαν μεθιστάμενος φαίνεται. ἀνατείλαντος γὰρ τοῦ ΔΕΒ ἡμικυκλίου ὁ τῶν ζῳδίων κύκλος θέσιν ἕξει τὴν ΑΞΓ. καὶ ὁμοίως δείξομεν ὅτι κατὰ διάμετρόν ἐστι τὸ μὲν Ξ σημεῖον τῷ Ο σημείῳ, τὸ δὲ Ρ τῷ Π. καὶ ἐπεὶ τοῦ Γ σημείου ἀνατέλλοντος κατὰ τὸ Γ σημεῖον, τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Α δύνει κατὰ τὸ Α σημεῖον, τοῦ δὲ Ο σημείου ἀνατέλλοντος κατὰ τὸ Λ σημεῖον, τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Ξ δύνει κατὰ τὸ Η σημεῖον, τοῦ δὲ Π σημείου ἀνατέλλοντος κατὰ τὸ Θ σημεῖον, τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Ρ δύνει κατὰ τὸ Κ σημεῖον, καὶ ἔτι τοῦ Α σημείου ἀνατέλλοντος κατὰ τὸ Δ σημεῖον, τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Γ δύνει κατὰ τὸ Β σημεῖον· ὅταν ἄρα ὁ τῶν ζῳδίων κύκλος ταῖς ἀνατολαῖς πρὸς ἄρκτους μεθίστηται, ταῖς δύσεσι πρὸς μεσημβρίαν μεθιστάμενος φαίνεται. ἐδείχθη δὲ ὅτι καὶ ὅταν ταῖς ἀνατολαῖς πρὸς μεσημβρίαν μεθίστηται, ταῖς δύσεσι πρὸς ἄρκτους μεθιστάμενος φαίνεται. καὶ φανερὸν ὅτι ἄλλοτε ἄλλως ὑπὲρ ἡμᾶς ἵσταται. ὅταν μὲν γὰρ ἡ συναφὴ τοῦ ζῳδιακοῦ κύκλου ᾖ ἐπὶ τῆς διχοτομίας τοῦ ὑπὲρ γῆς τμήματος τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ, ὀρθότατός ἐστι πρὸς ἡμᾶς· ὅταν δὲ ἐπὶ



Sumantur æquales & opposita circumferentiæ Δ E, Z B; & describantur paralleli circuli H E Θ, K Z Λ, in quibus puncta E, Z ferantur. quoniam itaque [ex hyp.] circumferentia Δ E æqualis est circumferentiæ Z B, communis addatur E B: tota igitur Δ E B toti E B Z æqualis est. est autem Δ E B semicirculi circumferentia: & E B Z igitur semicirculi circumferentia est: per diametrum igitur est punctum E puncto Z. & quoniam circumferentia E Δ æqualis est ipsi Δ M, & circumferentia Z B æqualis est ipsi B N; sed & circumferentia Δ E æqualis est ipsi Z B: quare & circumferentia Δ M æqualis est ipsi B N. communis addatur circumferentia M B: tota igitur Δ M B toti M B N æqualis est. est autem & circumferentia Δ M B semicirculus; & igitur semicirculus est etiam circumferentia M B N: quare punctum M per diametrum est ipsi N positum. & quoniam puncta quæ in circulo zodiaco sunt per diametrum posita [per 6. Phæn.] conjugate oriuntur & occidunt: puncto igitur Δ oriente in Δ, & punctum B ipsi per diametrum positum occidit in puncto B; & puncto E oriente in puncto Θ, & punctum Z quod ipsi est per diametrum occidit in puncto K; quinetiam N puncto oriente in puncto Λ, & ipsi per diametrum positum M punctum occidit in puncto H; & etiam B oriente in puncto Γ, & ipsi per diametrum Δ occidit in puncto A: quando igitur zodiacus circulus meridiem versus cum ortibus mutaverit sese, tunc & cum occasibus ad septentriones transmutatus apparet. dico etiam quod quando cum ortibus ad septentriones se transmutaverit, tunc cum occasibus ad meridiem transmutatus apparet. oriente namque Δ E B semicirculo, circulus zodiacus positionem habebit A Ξ Γ. & similiter demonstrabitur quod punctum Ξ per diametrum est ipsi O; & punctum P per diametrum est puncto Π. & quoniam puncto Γ oriente in Γ puncto, punctum A ipsi Γ per diametrum positum occidit in puncto A; & O oriente in puncto Λ, & punctum Ξ ipsi per diametrum positum occidit in puncto H; quinetiam Π oriente in Θ puncto, & P punctum ipsi per diametrum positum occidit in puncto K; & adhuc puncto A oriente in Δ puncto, punctum Γ per diametrum ipsi A occidit in puncto B: quando igitur zodiacus circulus septentrionem versus cum ortibus se mutaverit, tunc & cum occasibus meridiem versus mutatus apparet. est autem demonstratum quod quando se mutat meridiem versus cum ortibus, tunc quoque cum occasibus septentrionem versus mutatus apparet. ac manifestum quoque est quod alio modo atque alio se habet supra nos. nam quando zodiaci circuli contactus fuerit in medio puncto segmenti æstivi tropici quod est supra terram, tunc maxime rectus est ad nos: quando vero fuerit

fuerit zodiaci contactus in medio puncto segmenti æstivi tropici quod est sub terram, tunc maxime inclinatus erit ad nos. & semper quo longius distat contactus à medio puncto, ad nos magis erit inclinatus: similiter autem inclinatus erit, cum contactus ab alterutro medio puncto æquidistans fuerit.

τῆς διχοτομίας τοῦ ὑπὸ γῆν τμήματος τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ, ταπεινότατός ἐστι πρὸς ἡμᾶς. καὶ ἀεὶ μὲν πορρώτερον γιγνόμενος τῆς διχοτομίας τοῦ ὑπὲρ γῆς τμήματος τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ, μᾶλλον ἔσται κεκλιμένος· ὁμοίως δὲ ἔσται κεκλιμένος, ἴσον ἀπέχων ἑκατέρωσεν τῶν διχοτομιῶν.

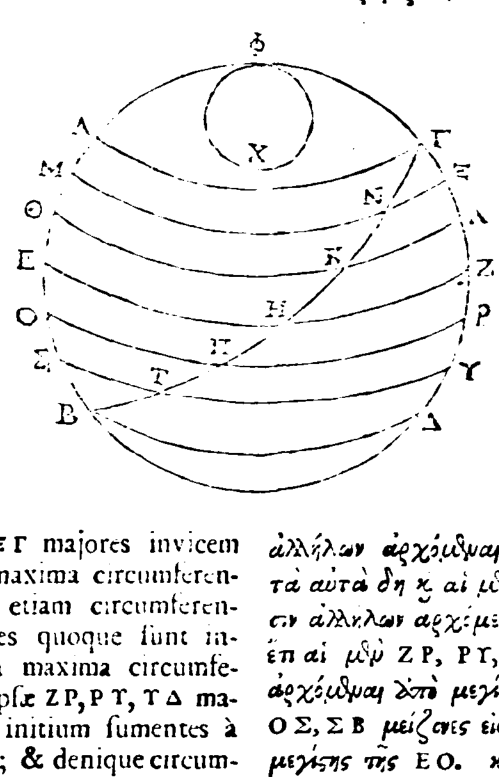
Theorema VIII.

Zodiaci circuli signa in segmentis horizontis inæqualibus oriuntur & occidunt: atque in maximis quidem, quæ prope æquinoctialem circulum sunt; in minoribus, quæ deinceps sequuntur; in minimis vero, quæ prope tropicos circulos sunt; denique in segmentis æqualibus, quæ ab æquinoctiali circulo æque distant.

ΘΕΩΡΗΜΑ η΄.

Τὰ ζῴδια ἐν ἀνίσοις τμήμασι τοῦ ὁρίζοντος ἀνατέλλει τε καὶ δύνει· καὶ ἐν μεγίστοις μὲν τὰ πρὸς τῷ ἰσημερινῷ· ἐν ἐλάσσοσι δὲ τὰ ἑξῆς τούτων· ἐν ἐλαχίστοις δὲ τὰ πρὸς τοῖς τροπικοῖς· ἐν ἴσοις δὲ τὰ ἴσον ἀπέχοντα τοῦ ἰσημερινοῦ κύκλου.

SIT horizon circulus ΑΒΓΔ, tropici autem sint ΑΓ, ΒΔ, maximus vero semper-apparentium circulorum sit circulus ΦΧ, zodiacus circulus positionem habeat ΓΒ, æquinoctialis circulus sit ΕΖ; & dividatur utraque circumferentia ΓΗ, ΗΒ in tres partes æquales in punctis Ν, Κ, Π, Τ: dico quod circumferentiæ ΓΝ, ΝΚ, ΚΗ, ΗΠ, ΠΤ, ΤΒ in segmentis horizontis inæqualibus & oriuntur & occidunt; & quod circumferentiæ ΚΗ, ΗΠ in maximis; & ΚΝ, ΠΤ in minoribus; in minimis autem circumferentiæ ΓΝ, ΒΤ; at in æqualibus ipsæ ΚΗ, ΗΠ; ΚΝ, ΠΤ; & denique ΝΓ, ΤΒ, & oriuntur & occidunt.



Sint quidem circuli paralleli ΜΞ, ΘΛ, ΟΡ, ΣΥ, in quibus puncta Ν, Κ, Π, Τ ferantur. quoniam igitur [per constr.] circumferentiæ ΗΚ, ΚΝ, ΝΓ æquales invicem sunt; circumferentiæ ΖΛ, ΛΞ, ΞΓ majores invicem sunt, initium sumentes à maxima circumferentia ΖΛ. eadem ratione etiam circumferentiæ ΕΘ, ΘΜ, ΜΑ majores quoque sunt invicem, initium sumentes à maxima circumferentia ΕΘ: quinetiam & ipsæ ΖΡ, ΡΥ, ΥΔ majores etiam invicem sunt, initium sumentes à maxima circumferentia ΖΡ; & denique circumferentiæ ΕΟ, ΟΣ, ΣΒ majores invicem sunt, initium sumentes à maxima circumferentia ΕΟ. & quoniam circumferentiæ ΓΝ, ΝΚ, ΚΗ, ΗΠ, ΠΤ, ΤΒ oriuntur quidem in circumferentiis ΓΞ, ΞΛ, ΛΖ, ΖΡ, ΡΥ, ΥΔ; occidunt autem in circumferentiis ΑΜ, ΜΘ, ΘΕ, ΕΟ, ΟΣ, ΣΒ: quare in segmentis horizontis inæqualibus dictæ circumferentiæ & oriuntur & occidunt. & quoniam circuli paralleli ΘΛ, ΟΡ maximi cujusdam circuli ΓΒ circumferentias ΠΗ, ΗΚ æquales auferunt ad ma-

Ἔστω ὁρίζων κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, τροπικοὶ δὲ οἱ ΑΓ, ΒΔ, μέγιστος δὲ τῶν ἀεὶ φανερῶν ὁ ΦΧ, ὁ δὲ τῶν ζῳδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω τὴν ΓΒ, ἰσημερινὸς δὲ κύκλος ὁ ΕΖ, καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα τῶν ΓΗ, ΗΒ εἰς τρία ἴσα κατὰ τὰ Ν, Κ, Π, Τ σημεῖα· λέγω ὅτι καὶ αἱ ΓΝ, ΝΚ, ΚΗ, ΗΠ, ΠΤ, ΤΒ περιφέρειαι ἐν ἀνίσοις τμήμασι τοῦ ὁρίζοντος ἀνατέλλουσι τε καὶ δύνουσι, καὶ ἐν μεγίστοις μὲν αἱ ΚΗ, ΗΠ, ἐν ἐλάσσοσι δὲ αἱ ΚΝ, ΠΤ, ἐν ἐλαχίστοις δὲ αἱ ΓΝ, ΒΤ, ἐν ἴσοις δὲ ἡ μὲν ΚΗ τῇ ΗΠ, ἡ δὲ ΚΝ τῇ ΠΤ, ἡ δὲ ΝΓ τῇ ΤΒ.

Ἔστωσαν καθ' ὧν φέρεται τὰ Ν, Κ, Π, Τ σημεῖα παράλληλοι κύκλοι οἱ ΜΞ, ΘΛ, ΟΡ, ΣΥ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΗΚ, ΚΝ, ΝΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· αἱ ΖΛ, ΛΞ, ΞΓ ἄρα μείζονες εἰσιν ἀλλήλων ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης τῆς ΖΛ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ μὲν ΕΘ, ΘΜ, ΜΑ μείζονές εἰσιν ἀλλήλων ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης τῆς ΕΘ· καὶ ἔτι αἱ μὲν ΖΡ, ΡΥ, ΥΔ μείζονες εἰσιν ἀλλήλων ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης τῆς ΖΡ, καὶ ἔτι αἱ ΕΟ, ΟΣ, ΣΒ μείζονες εἰσιν ἀλλήλων ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης τῆς ΕΟ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΓΝ, ΝΚ, ΚΗ, ΗΠ, ΠΤ, ΤΒ ἀνατέλλουσι μὲν κατὰ τὰς ΓΞ, ΞΛ, ΛΖ, ΖΡ, ΡΥ, ΥΔ περιφερείας, δύνουσι δὲ κατὰ τὰς ΑΜ, ΜΘ, ΘΕ, ΕΟ, ΟΣ, ΣΒ· ὥστε ἐν ἀνίσοις τμήμασι τοῦ ὁρίζοντος ἀνατέλλουσι τε καὶ δύνουσι. καὶ ἐπεὶ παράλληλοι οἱ ΘΛ, ΟΡ μεγίστου τινὸς κύκλου περιφερείας τοῦ ΓΒ τὰς ΠΗ, ΗΚ ἴσας ἀφαιροῦσι πρὸς τὸν μέγιστον

τῶν

τῶν παραλλήλων τὸν Ε Ζ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Θ Λ κύκλος τῷ Ο Ρ κύκλῳ. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ ἴσοι τε καὶ παράλληλοι κύκλοι οἱ Θ Λ, Ο Ρ μεγίστου τινὸς κύκλου περιφερείας τοῦ Α Β Γ Δ τὰς Λ Ζ, Ζ Ρ ἀφαιροῦσι πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων τὸν Ε Ζ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Λ Ζ τῇ Ζ Ρ περιφερείᾳ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ Ξ Ζ περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ Ζ Υ περιφερείᾳ, ὧν ἡ Λ Ζ τῇ Ζ Ρ ἐστιν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ Ξ Λ λοιπῇ τῇ Ρ Υ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ Γ Ξ ἴση ἐστὶ τῇ Υ Δ.

Τὰ ἄρα ζώδια ἐν ἀνίσοις τμήμασι τοῦ ὁρίζοντος ἀνατέλλει τε καὶ δύνει· καὶ ἐν μεγίστοις μὲν τὰ πρὸς τῷ ἰσημερινῷ· ἐν ἐλάσσοσι δὲ τὰ ἑξῆς τούτων· ἐν ἐλαχίστοις δὲ τὰ πρὸς τοῖς τροπικοῖς· ἐν ἴσοις δὲ τὰ ἴσον ἀπέχοντα τοῦ ἰσημερινοῦ κύκλου.

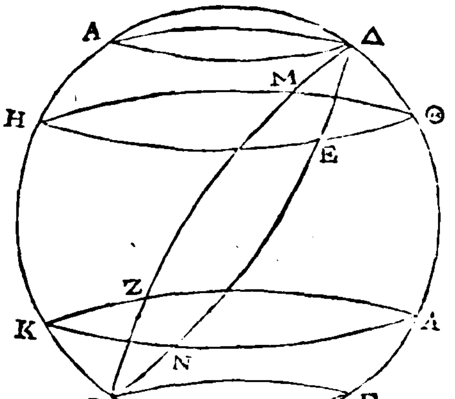
ximum parallelorum Ε Ζ: circulus igitur Θ Λ circulo Ο Ρ æqualis est. quoniam autem in sphæra æquales & paralleli circuli Θ Λ, Ο Ρ maximi cujusdam circuli Α Β Γ Δ circumferentias, scilicet Λ Ζ, Ζ Ρ auferunt apud maximum parallelorum Ε Ζ: æqualis igitur est circumferentia Λ Ζ circumferentiæ Ζ Ρ. similiter itaque demonstrabitur quod & circumferentia Ξ Ζ est æqualis circumferentiæ Ζ Υ; ex quibus ipsa Λ Ζ æqualis est ipsi Ζ Ρ; & reliqua igitur Ξ Λ reliquæ Ρ Υ est æqualis. eadem ratione & circumferentia Γ Ξ æqualis est ipsi Υ Δ.

Quare zodiaci circuli signa in segmentis horizontis inæqualibus & oriuntur & occidunt: & in maximis quidem quæ prope circulum æquinoctialem sunt; in minoribus, quæ deinceps sequuntur; in minimis porro, quæ sunt prope circulos tropicos; denique in segmentis æqualibus, quæ ab æquinoctiali circulo æque distant.

ΘΕΩΡΗΜΑ θʹ.

Τοῦ τῶν ζωδίων κύκλου τὰ ἡμικύκλια, ὅσα μὴ τὰς ἀρχὰς ἔχει ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τῶν παραλλήλων, ἐν ἀνίσοις χρόνοις ἀνατέλλει ὅλα· καὶ ἐν πλείστῳ μὲν τὸ μετὰ τὸν καρκίνον, ἐν ἐλάσσονι δὲ, τὰ ἑξῆς τούτου· ἐν ἐλαχίστοις δὲ τὸ μετὰ τὸν αἰγόκερω· ὅσα δὲ τὰς ἀρχὰς ἔχει ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τῶν παραλλήλων, ἐν ἴσοις χρόνοις ἀνατέλλει.

Ἔστω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ Α Β Γ Δ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ἔστω ὁ Α Δ, χειμερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ Β Γ, ὁ δὲ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω τὴν Δ Ε Β Ζ, καὶ ἔστω ἀνατολικὰ μὲν τὰ Γ, Δ μέρη, δυτικὰ δὲ τὰ Α, Β, καὶ τὸ μὲν Δ Ε Β ἔστω τὸ μετὰ τὸν καρκίνον ἡμικύκλιον, τὸ δὲ Β Ζ Δ τὸ μετὰ τὸν αἰγόκερω· λέγω ὅτι τοῦ τῶν ζωδίων κύκλου τὰ ἡμικύκλια, ὅσα μὴ τὰς ἀρχὰς ἔχει ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τῶν παραλλήλων, ἐν ἀνίσοις χρόνοις ἀνατέλλει, καὶ ἐν πλείστῳ μὲν τὸ μετὰ τὸν καρκίνον τὸ Δ Ε Β, ἐν ἐλάσσονι δὲ τὰ ἑξῆς τούτου, ἐν ἐλαχίστῳ δὲ τὸ μετὰ τὸν αἰγόκερω τὸ Β Ζ Δ, ὅσα δὲ τὰς ἀρχὰς ἔχει ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τῶν παραλλήλων ἐν ἴσοις χρόνοις ἀνατέλλει.



Ἀπειλήφθωσαν ἴσαι περιφέρειαι αἱ Δ Ε, Β Ζ, καὶ γεγράφθωσαν παράλληλοι κύκλοι Η Ε Θ Μ, Κ Ζ Λ Ν, καθ᾽ ὧν φέρεται τὰ Ε, Ζ σημεῖα, καὶ ἔστω αὐτῶν τὰ ὑπὲρ γῆς τμήματα τὰ Η Μ Θ, Κ Ζ Λ. ὁμοίως δὴ δείξομεν τοῖς πρότερον ὅτι κατὰ διάμετρόν ἐστι τὸ μὲν Ε σημεῖον τῷ Ζ σημείῳ, τὸ δὲ Μ τῷ

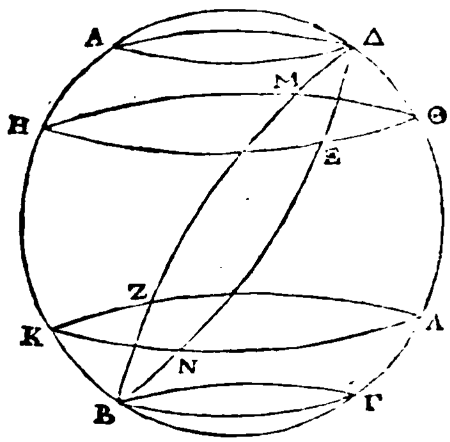
Theorema IX.

Zodiaci semicirculi, quicunque non habent initium ab eodem parallelo circulo, universi temporibus oriuntur inæqualibus: ac majori quidem tempore oritur semicirculus, qui post cancrum est; minori vero, qui hunc deinceps sequuntur: in minimis porro qui est post capricornum; qui autem initium habent ab eodem parallelo, æqualibus temporibus oriuntur.

Sit in mundo circulus horizon Α Β Γ Δ; tropicus æstivus sit Α Δ, hybernus autem sit Β Γ; zodiacus vero circulus positionem habeat veluti Δ Ε Β Ζ; sint autem partes orientales Γ, Δ puncta, occidentales vero Α, Β; & sit semicirculus Δ Ε Β post cancrum, & semicirculus Β Ζ Δ post capricornum: dico quod semicirculi zodiaci, quicunque non habent initium ab eodem parallelo circulo, temporibus oriuntur inæqualibus; & majori tempore oritur semicirculus quidem Δ Ε Β, qui est post cancrum; minori vero qui deinceps sequitur; at minimo tempore oritur semicirculus Β Ζ Δ, qui est post capricornum; quicunque porro initium habent ab eodem parallelo circulo, æqualibus temporibus oriuntur.

Sumantur æquales circumferentiæ Δ Ε, Β Ζ; & describantur circuli paralleli Η Ε Θ Μ, Κ Ζ Λ Ν, in quibus puncta Ε, Ζ ferantur; sintque segmenta Η Μ Θ, Κ Ζ Λ supra terram. similiter itaque demonstrari poterit ac superius [ad 7. Phæn.] quod punctum Ε per diametrum est ipsi Ζ, & punctum Μ per

per diametrum est puncto N. & quoniam circumferentia AΔ major est circumferentia HMΘ quam ut ei similis sit; & HMΘ major etiam est ipsa KZΛ quam ut ei similis sit; quinetiam ipsa KZΛ major est circumferentia BΓ quam ut ei similis sit: majori igitur tempore punctum Δ incipiens à Δ circumferentiam ΔA percurrit, quam punctum E inchoans à puncto Θ circumferentiam ΘMH pertransit; & punctum E incipiens à Θ majori tempore percurrit circumferentiam ΘMH, quam punctum N inchoans à puncto Λ circumferentiam ΛZK pertransit; quinetiam punctum N inchoans à puncto Λ majori tempore percurrit circumferentiam ΛZK, quam B incipiens à puncto Γ circumferentiam ΓB pertransit. sed quo quidem tempore punctum Δ circumferentiam ΔA percurrit, hoc ipso tempore punctum B per diametrum ipsi Δ positum percurrit alternam circumferentiam BΓ, & oritur quidem semicirculus ΔEB; & quo tempore punctum E incipiens à puncto Θ circumferentiam ΘMH percurrit, hoc ipso tempore ipsi per diametrum positum Z incipiens à puncto K circumferentiam KNΛ percurrit, & semicirculus EBZ oritur; quinetiam quo tempore punctum N incipiens à puncto Λ circumferentiam ΛZK pertransit, hoc ipso tempore & punctum M ipsi per diametrum positum incipiens à puncto H circumferentiam HEΘ percurrit, & semicirculus NBM oritur; & etiam quo tempore punctum B incipiens à puncto Γ circumferentiam ΓB pertransit, hoc ipso tempore & punctum Δ ipsi per diametrum positum, inchoans à puncto A circumferentiam alternam AΔ percurrit, & semicirculus BZΔ oritur: quare semicirculus ΔEB, qui est post cancrum, majori tempore oritur; sed minori tempore oritur EBZ quam ΔEB; quinetiam minori tempore NBM oritur quam semicirculus EBZ; at vero minimo tempore oritur semicirculus BZΔ qui est post capricornum.



Dico etiam quod quicunque initium habent ab eodem circulo parallelo, æqualibus temporibus oriuntur. habeant siquidem semicirculi MΔN, EBZ initium ab eodem circulo parallelo: dico quod æqualibus temporibus oriuntur MΔN, EBZ.

Quoniam enim æquali tempore punctum M inchoans à puncto Θ circumferentiam ΘMH percurrit, atque punctum E similiter inchoans à puncto Θ circumferentiam ΘMH pertransit: sed quo tempore punctum M incipiens a puncto Θ circumferentiam ΘMH percurrit, hoc ipso tempore & punctum N ipsi per diametrum positum incipiens à puncto K circumferentiam KNΛ pertransit, & oritur MΔN semicirculus; & quo tempore punctum E inchoans à puncto Θ circumferentiam ΘMH percurrit, hoc ipso tempore & punctum Z ipsi per diametrum positum

Ν. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία ἡ ΑΔ περιφέρεια τῆς ΗΜΘ περιφερείας, ἡ δὲ ΗΜΘ τῆς ΚΖΛ, καὶ ἔτι ἡ ΚΖΛ τῆς ΒΓ· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ τὸ Δ σημεῖον ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Δ τὴν ΔΑ περιφέρειαν διαπορεύεται, ἤπερ τὸ Ε ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Θ τὴν ΘΜΗ περιφέρειαν διαπορεύεται· καὶ τὸ Ε ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Θ ἐν πλείονι χρόνῳ τὴν ΘΜΗ περιφέρειαν διαπορεύεται, ἤπερ τὸ Ν ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Λ τὴν ΛΖΚ περιφέρειαν διαπορεύεται· καὶ τὸ Ν ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Λ ἐν πλείονι χρόνῳ τὴν ΛΖΚ περιφέρειαν διαπορεύεται, ἤπερ τὸ Β ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Γ τὴν ΓΒ περιφέρειαν διαπορεύεται. ἀλλὰ ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ Δ σημεῖον τὴν ΔΑ περιφέρειαν διαπορεύεται, ἐν τούτῳ τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Β σημεῖον τὴν ἐναλλὰξ τὴν ΒΓ περιφέρειαν διαπορεύεται, καὶ ἀνατέλλει τὸ ΔΕΒ ἡμικύκλιον· ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ τὸ Ε ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Θ τὴν ΘΜΗ περιφέρειαν διαπορεύεται, ἐν τούτῳ τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Ζ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Κ τὴν ΚΝΛ περιφέρειαν διαπορεύεται, καὶ ἀνατέλλει τὸ ΕΒΖ ἡμικύκλιον· ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ τὸ Ν ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Λ τὴν ΛΖΚ διαπορεύεται, ἐν τούτῳ τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Μ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Η τὴν ΗΕΘ διαπορεύεται, καὶ ἀνατέλλει ΝΒΜ ἡμικύκλιον· ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ τὸ Β ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Γ τὴν ΓΒ διαπορεύεται, ἐν τούτῳ τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Δ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Α τὴν ἐναλλὰξ τὴν ΑΔ διαπορεύεται, καὶ ἀνατέλλει τὸ ΒΖΔ ἡμικύκλιον· ἐν πλείστῳ ἄρα χρόνῳ ἀνατέλλει τὸ μετὰ τὸν καρκίνον ἡμικύκλιον τὸ ΔΕΒ, ἐν ἐλάσσονι δὲ τοῦ ΔΕΒ τὸ ΕΒΖ, καὶ ἔτι τοῦ ΕΒΖ ἐν ἐλάσσονι τὸ ΝΒΜ, ἐν ἐλαχίστῳ δὲ τὸ μετὰ τὸν αἰγόκερων τὸ ΒΖΔ.

ΛΕΓΩ ὅτι ὅσα τὰς ἀρχὰς ἔχει ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ τῶν παραλλήλων, ἐν ἴσοις χρόνοις ἀνατέλλει. ἐχέτω γὰρ τὰ ΜΔΝ, ΕΒΖ ἡμικύκλια τὰς ἀρχὰς ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ τῶν παραλλήλων· λέγω ὅτι ἐν ἴσοις χρόνοις ἀνατέλλει τὰ ΜΔΝ, ΕΒΖ ἡμικύκλια.

Ἐπεὶ γὰρ ἐν ἴσῳ χρόνῳ τὸ Μ σημεῖον ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Θ τὴν ΘΜΗ περιφέρειαν διαπορεύεται, καὶ τὸ Ε ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Θ τὴν ΘΜΗ περιφέρειαν διαπορεύεται· ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ τὸ Μ σημεῖον ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Θ τὴν ΘΜΗ διαπορεύεται, ἐν τούτῳ τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Ν ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Κ τὴν ΚΝΛ περιφέρειαν διαπορεύεται, καὶ ἀνατέλλει τὸ ΜΔΝ ἡμικύκλιον· ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ τὸ Ε σημεῖον ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Θ σημείου τὴν ΘΜΗ περιφέρειαν διαπορεύεται, ἐν τούτῳ τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Ζ ἀρξά-

ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Κ τὴν ΚΝΛ περιφέρειαν διαπορεύεται, καὶ ἀνατέλλει τὸ ΕΒΖ ἡμικύκλιον· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ ἀνατέλλει τὰ ΜΔΝ, ΕΒΖ ἡμικύκλια.

incipiens à puncto K circumferentiam K N A pertransit, & semicirculus E B Z oritur: quare tempore æquali semicirculi M Δ N, E B Z oriuntur.

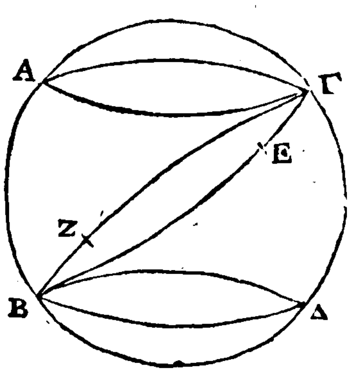
ΘΕΩΡΗΜΑ ι'.

Ἐὰν δὲ τοῦ ζωδίων κύκλου δύο ἡμικύκλια ἀνατέλλῃ ἐν ἀνίσοις χρόνοις, κοινήν τινα ἔχοντα περιφέρειαν· καὶ αἱ ἀπεναντίον περιφέρειαι ἐν ἀνίσοις χρόνοις ἀνατέλλουσι, καὶ αἱ αὐταὶ διαφοραὶ ἔσονται τῶν χρόνων ἐν οἷς ταῦτα ἡμικύκλια ἀνατέλλει καὶ αἱ ἀπεναντίον περιφέρειαι. καὶ ἐὰν δὲ τῶν ζωδίων κύκλου δύο ἡμικύκλια ἐν ἴσοις χρόνοις ἀνατέλλῃ, κοινήν τινα ἔχοντα περιφέρειαν· καὶ αἱ ἀπεναντίον περιφέρειαι ἐν ἴσοις χρόνοις ἀνατέλλουσι.

THEOREMA X.

Si duo zodiaci semicirculi, communem aliquam habentes circumferentiam, temporibus inæqualibus oriuntur: & oppositæ circumferentiæ temporibus quoque inæqualibus oriuntur; atque eædem erunt temporum differentiæ, in quibus & semicirculi & oppositæ circumferentiæ oriuntur. quod si duo zodiaci semicirculi, communem aliquam etiam habentes circumferentiam, temporibus æqualibus oriuntur; & oppositæ circumferentiæ temporibus quoque æqualibus oriuntur.

Ἔστω ὁρίζων ὁ ΑΒΔΓ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ὁ ΑΓ, χειμερινὸς δὲ ὁ ΒΔ, ζωδιακὸς δὲ ὁ ΓΒ, καὶ ἀπειλήφθωσαν ἴσαι περιφέρειαι αἱ ΓΕ, ΒΖ· τὰ ἄρα ΓΕΒ, ΕΒΖ ἡμικύκλια ἐν ἀνίσοις χρόνοις ἀνατέλλει. λέγω ὅτι καὶ αἱ ΓΕ, ΒΖ περιφέρειαι ἐν ἀνίσοις χρόνοις ἀνατέλλουσιν.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΓΕΒ τοῦ ΕΒΖ ἐν πλείονι χρόνῳ ἀνατέλλει, κοινὸς ἀφῃρήσθω ὁ τῆς ΕΒ περιφερείας ἀνατολῆς χρόνος· (ἡ γὰρ ΕΒ περιφέρεια ἑαυτῇ αἰεὶ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἀνατέλλει) λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΕ τῆς ΒΖ ἐν πλείονι χρόνῳ ἀνατέλλει. καὶ φανερὸν ὅτι αἱ αὐταὶ διαφοραί εἰσι τῶν χρόνων ἐν οἷς ταῦτα ΓΕΒ, ΕΒΖ ἡμικύκλια ἀνατέλλει, καὶ αἱ ἀπεναντίον περιφέρειαι αἱ ΓΕ, ΒΖ. φανερὸν δὲ ὅτι κἂν ἡμικύκλιά τινα ἐν ἴσοις χρόνοις ἀνατέλλῃ, καὶ αἱ ἀπεναντίον περιφέρειαι ἐν ἴσοις χρόνοις ἀνατέλλουσιν.

SIT horizon circulus A B Δ Γ; tropicus æstivus sit A Γ, hybernus sit B Δ; zodiacus circulus sit Γ B; & sumantur zodiaci circuli æquales circumferentiæ Γ E, B Z: semicirculi igitur Γ E B, E B Z temporibus inæqualibus oriuntur. dico quod & circumferentiæ Γ E, B Z etiam temporibus inæqualibus oriuntur.

Quoniam enim [per 6. Ph.] Γ E B semicirculus majori tempore oritur quam ipse E B Z, commune auferatur tempus quo circumferentia E B oritur: (semper siquidem ipsa æquali tempore sibi ipsi oritur) quare & reliqua Γ E majori tempore oritur quam ipsa B Z. ac manifestum est quod eædem sunt temporum differentiæ, in quibus & semicirculi Γ E B, E B Z oriuntur & circumferentiæ Γ E, B Z. & patet etiam, si semicirculi quidam æqualibus temporibus oriuntur, quod & in iis circumferentiæ oppositæ æqualibus quoque temporibus oriuntur.

ΘΕΩΡΗΜΑ ια'.

Τοῦ τῶν ζωδίων κύκλου τῶν ἴσων τε καὶ ἀπεναντίον περιφερειῶν ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ἑτέρα ἀνατέλλει, ἡ ἑτέρα δύνει· ἐν ᾧ δὲ ἡ ἑτέρα δύνει, ἡ ἑτέρα ἀνατέλλει.

THEOREMA XI.

Ex æqualibus & oppositis zodiaci circumferentiis, quo tempore una oritur, altera occidit: & quo tempore una occidit, altera oritur.

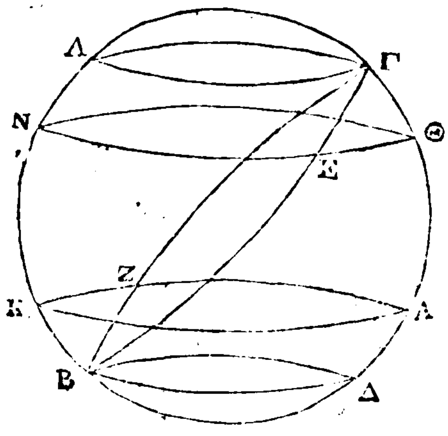
Ἔστω ὁρίζων κύκλος ὁ ΑΒΔΓ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ἔστω ὁ ΑΓ, χειμερινὸς δὲ ὁ ΒΔ, ζωδιακὸς δὲ ἔστω ὁ ΓΒ, καὶ ἀπειλήφθωσαν ἐπ' αὐτοῦ ἴσαι καὶ ἀπεναντίον περιφέρειαι αἱ ΓΕ, ΒΖ· λέγω ὅτι ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΓΕ ἀνατέλλει, ἡ ΒΖ δύνει.

Ἔστωσαν καθ' ὧν φέρεται τὰ Ε, Ζ σημεῖα παράλληλοι κύκλοι οἱ ΝΘ, ΚΛ. καὶ ἐπεὶ τὰ ἐπὶ τοῦ ζωδιακοῦ ἄστρα κατὰ διάμετρον ὄντα κατὰ

SIT horizon circulus A B Δ Γ; æstivus tropicus sit A Γ, hybernus autem sit B Δ, zodiacus circulus sit Γ B; & sumantur in zodiaco circulo æquales & oppositæ circumferentiæ Γ E, B Z: dico quod quo tempore Γ E circumferentia oritur, & B Z occidit.

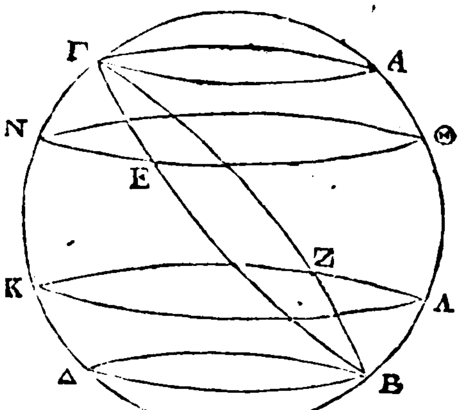
Sint autem circuli N Θ, K Λ paralleli in quibus puncta E, Z ferantur. & quoniam [per 6. Phæn.] astra, quæ in circulo zodiaco sunt per diame-

diametrum posita, conjugatæ & oriuntur & occidunt; quare astro E oriente, & Z occidit: quo igitur tempore astrum E incipiens à puncto E circumferentiam EΘ percurrens pervenit ad punctum Θ, hoc ipso tempore & astrum Z incipiens à puncto Z circumferentiam ZK percurrens pervenit ad punctum K. verum quando E circumferentiam EΘ percurrens pervenit ad punctum Θ, tunc ipsa EΓ oritur; quando vero astrum Z percurrens ipsam ZK pervenit ad K punctum, tunc circumferentia BZ occidit: quare quo tempore ΓE oritur, hoc ipso tempore BZ circumferentia occidit.



συζυγίαν ἀνατέλλει τε καὶ δύνει, τοῦ E ἄρα ἀνατέλλοντος τὸ Z δύνει· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ E ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ E τὴν EΘ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Θ παραγίγνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Z ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Z τὴν ZK διελθὸν ἐπὶ τὸ K παραγίνεται. ἀλλ' ὅταν μὲν τὸ E τὴν EΘ διελθὸν ἐπὶ τὸ Θ παραγένηται, ἀνατέλλει ἡ EΓ· ὅταν δὲ τὸ Z τὴν ZK διελθὸν ἐπὶ τὸ K παραγένηται, δύνει ἡ BZ περιφέρεια· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ ΓE περιφέρεια ἀνατέλλει, ἐν τούτῳ καὶ ἡ BZ περιφέρεια δύνει.

Dico etiam quod quo tempore circumferentia BZ oritur, & ΓE occidit. circumvolvatur namque zodiacus circulus, ut se habet in secunda figura, & habeat positionem veluti ΓEBZ: dico quod quo tempore circumferentia BZ oritur, & ΓE occidit. quoniam enim punctum Z est per diametrum ipsi E; quare Z oriente, & E occidit: quo igitur tempore Z circumferentiam ZA percurrens pervenit ad punctum A, hoc eodem tempore & E circumferentiam EN percurrens pervenit ad punctum N. sed quando Z circumferentiam ZA percurrens pervenit ad A, tunc ipsa BZ oritur; quando autem E circumferentiam EN percurrens pervenit ad N, tunc ipsa ΓE occidit: quare quo tempore BZ oritur, hoc ipso tempore & ΓE occidit.



Λέγω ὅτι καὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ BZ ἀνατέλλει ἡ ΓE δύνει. μετακεκινήσθω γὰρ ἐν τῇ δευτέρᾳ πτώσει ὁ τῶν ζωδίων κύκλος, καὶ θέσιν ἐχέτω τὴν ΓEBZ· λέγω ὅτι ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ BZ ἀνατέλλει, ἡ ΓE δύνει. ἐπεὶ γὰρ κατὰ διάμετρόν ἐστι τὸ Z σημεῖον τῷ E σημείῳ, τοῦ ἄρα Z ἀνατέλλοντος τὸ E δύνει· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Z τὴν ZA περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ A παραγίγνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ E τὴν EN περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ N παρέσται. ἀλλ' ὅταν μὲν τὸ Z τὸν ZA περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ A παραγένηται, ἀνατέλλει ἡ BZ· ὅταν δὲ τὸ E τὴν EN περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ N παραγένηται, δύνει ἡ ΓE· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ BZ περιφέρεια ἀνατέλλει, ἐν τούτῳ ἡ ΓE περιφέρεια δύνει.

Theorema XII.

Semicirculi,*qui post cancrum est, circumferentiæ æquales temporibus occidunt inæqualibus; atque in maximis quidem, quæ prope contactus sunt tropicorum; in minoribus, quæ has deinceps sequuntur; in minimis autem, quæ prope æquinoctialem sunt circulum: denique temporibus æqualibus oriuntur & occidunt, quæ ab æquinoctiali circulo æqualiter distant.

ΘΕΩΡΗΜΑ ιβ'.

Τοῦ * μετὰ τὸν καρκίνον ἡμικυκλίου αἱ ἴσαι περιφέρειαι ἐν ἀνίσοις χρόνοις δύνουσιν, καὶ ἐν πλείστοις μὲν αἱ πρὸς ταῖς συναφαῖς τῶν τροπικῶν, ἐν ἐλάσσοσι δὲ αἱ ἑξῆς τούτων, ἐν ἐλαχίστοις δὲ αἱ πρὸς τῷ ἰσημερινῷ· ἐν ἴσοις δὲ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ ἰσημερινοῦ κύκλου καὶ δύνουσι καὶ ἀνατέλλουσιν.

Sit horizon circulus ABΓΔ; maximus autem eorum qui semper apparent sit circulus EZ, æstivus tropicus sit AB, hybernus autem sit ΔΓ; & sit post cancrum semicirculus BΔ supra terram, æquinoctialis circulus sit HΘ, & dividatur utraque circumferentia BΞ, ΞΔ in tres partes æquales in punctis K, Λ, M, N: dico quod circumferentiæ BK, KΛ, ΛΞ, ΞM, MN, NΔ in inæqualibus

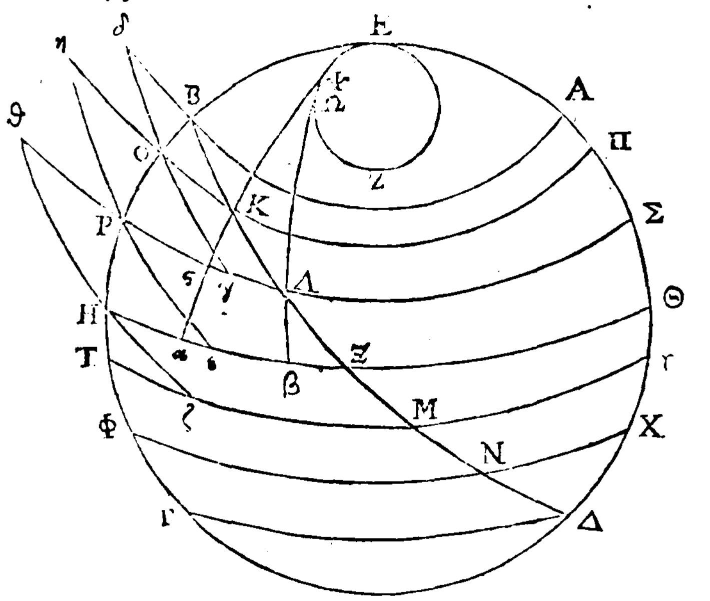
Ἔστω ὁρίζων κύκλος ὁ ABΓΔ, μέγιστος δὲ τῶν ἀεὶ φανερῶν ὁ EZ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ὁ AB, χειμερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ ΔΓ, καὶ ἔστω τὸ μετὰ τὸν καρκίνον ἡμικύκλιον τὸ BΔ ὑπὲρ γῆς, ἰσημερινὸς δὲ κύκλος ὁ HΘ, καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα τῶν BΞ, ΞΔ εἰς τρία ἴσα κατὰ τὰ K, Λ, M, N σημεῖα· λέγω ὅτι αἱ BK, KΛ, ΛΞ, ΞM, MN, NΔ ἐν ἀνίσοις χρόνοις

* Hoc est incipiens à cancro, & secundum seriem signorum productus.

δύνουσι

δύνει, καὶ ἐν πλείοσι μὲν αἱ ΒΚ, ΝΔ, ἐν ἐλάσσοσι δὲ αἱ ΚΛ, ΜΝ, ἐν ἐλαχίστοις δὲ αἱ ΛΞ, ΞΜ· ἐν ἴσοις δὲ ἡ μὲν ΛΞ τῇ ΞΜ, ἡ δὲ ΚΛ τῇ ΜΝ, ἡ δὲ ΒΚ τῇ ΝΔ.

Ἔστωσαν καθ' ὧν φέρεται τὰ Κ, Λ, Μ, Ν σημεῖα παράλληλοι κύκλοι οἱ ΟΠ, ΡΣ, ΤΥ, ΦΧ, καὶ γεγράφθωσαν διὰ τῶν Κ, Λ σημείων μέγιστοι κύκλοι οἱ Ψα, Ωβ ἐφαπτόμενοι τοῦ ΕΖ κύκλου. καὶ ἐπεὶ αἱ ΒΚ, ΚΛ, ΛΞ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· αἱ Ηα, αβ, βΞ ἄρα μείζονές εἰσιν ἀλλήλων, ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης τῆς Ηα. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ Ηα τῆς αβ, ἀλλ' ἡ μὲν Ηα τῇ ΟΚ ἐστιν ὁμοία, ἡ δὲ αβ τῇ ςΛ· καὶ ἡ ΟΚ ἄρα τῆς ςΛ μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία, τῆς δὲ ΛΡ ἐλάσσων ἢ ὁμοία ἡ ΟΚ. ἔστω τῇ ΟΚ ὁμοία ἡ Λγ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Κ σημεῖον ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Κ τὴν ΚΟ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ο παραγίγνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Λ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Λ τὴν Λγ διελθὸν ἐπὶ τὸ γ παρέσται, καὶ ὁ τῶν ζῳδίων κύκλος θέσιν ἕξει ὡς τὴν γΟδ. ἐπεὶ οὖν ὁμοία ἐστὶν ἡ ΟΚ περιφέρεια τῇ γΛ, ἀλλὰ ἡ ΟΚ τῇ Ρς ὁμοία ἐστί· καὶ ἡ Ρς ἄρα τῇ γΛ ἐστὶν ὁμοία. καί εἰσι τοῦ αὐτοῦ κύκλου· ἴση ἄρα ἡ Ρς τῇ γΛ. κοινὴ προσκείσθω ἡ γς· ὅλη ἄρα ἡ Ργ τῇ ςΛ ἐστὶν ἴση. ἡ δὲ ΟΚ τῆς ςΛ μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία· καὶ ἡ ΟΚ ἄρα τῆς Ργ μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ τὸ Κ τὴν ΚΟ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ο παραγίγνεται, ἤπερ τὸ γ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ γ τὴν γΡ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ρ παρέσται. ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ τὸ Κ τὴν ΚΟ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ο παραγίνεται, δύνει ἡ ΒΚ περιφέρεια, ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ τὸ γ τὴν γΡ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ρ παραγίνεται, δύνει ἡ ΚΛ περιφέρεια· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ ΒΚ δύνει, ἤπερ ἡ ΚΛ. Πάλιν, ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ αβ τῆς βΞ, ἀλλ' ἡ αβ τῇ ςΛ ἐστιν ὁμοία· καὶ ἡ ςΛ ἄρα τῆς βΞ μείζων ἐστὶν



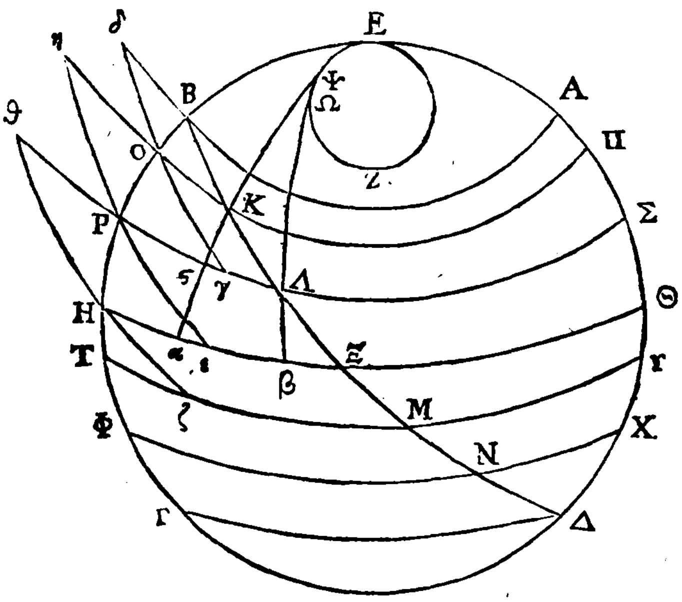
occidunt temporibus; & quod circumferentiæ ΒΚ, ΝΔ in maximis; in minoribus autem circumferentiæ ΚΛ, ΜΝ; in minimis porro ΛΞ, ΞΜ occidunt temporibus: æqualibus vero temporibus occidunt circumferentiæ quidem ΛΞ, ΞΜ, item ΚΛ, ΜΝ, & denique ipsæ ΒΚ, ΝΔ.

Sint itaque paralleli circuli ΟΠ, ΡΣ, ΤΥ, ΦΧ, in quibus puncta Κ, Λ, Μ, Ν ferantur; & describantur per puncta Κ, Λ maximi circuli Ψα, Ωβ, qui tangant circulum ΕΖ. quoniam autem [ex hyp.] circumferentiæ ΒΚ, ΚΛ, ΛΞ æquales ad invicem sunt: circumferentiæ igitur Ηα, αβ, βΞ majores sunt invicem, initium sumentes à maxima circumferentia Ηα. & quoniam circumferentia Ηα major est ipsa αβ; sed & ipsa Ηα similis est circumferentiæ ΟΚ, & ipsa etiam αβ similis quoque ipsi ςΛ: circumferentia igitur ΟΚ major est circumferentia ςΛ quam ut ei similis sit, circumferentia vero ΟΚ minor est ipsa ΛΡ quam ut ei similis sit. sit ipsi ΟΚ similis circumferentia Λγ: quo igitur tempore punctum Κ incipiens à puncto Κ & circumferentiam ΚΟ percurrens pervenit ad punctum Ο, hoc ipso tempore & punctum Λ inchoans à puncto Λ & circumferentiam Λγ percurrens pervenit ad punctum γ, & circulus zodiacus positionem habebit veluti γΟδ. & quoniam circumferentia ΟΚ similis est posita ipsi γΛ; sed & circumferentia ΟΚ similis est ipsi Ρς: circumferentia igitur Ρς similis est etiam ipsi γΛ. & sunt ejusdem circuli; quare circumferentia Ρς æqualis est ipsi γΛ. communis addatur ipsa γς: & tota igitur Ργ ipsi ςΛ æqualis est. est autem & ΟΚ major ipsa ςΛ quam ut ei similis sit: quare & ΟΚ major est etiam ipsa Ργ quam ut ei similis sit: majori igitur tempore punctum Κ circumferentiam ΚΟ percurrens pervenit ad punctum Ο, quam punctum γ incipiens à puncto γ & circumferentiam γΡ pertransiens pervenit ad punctum Ρ. sed quo tempore Κ circumferentiam ΚΟ percurrens pervenit ad punctum Ο, ipsa circumferentia ΒΚ occidit; quo vero tempore punctum γ circumferentiam γΡ percurrens pervenit ad punctum Ρ, circumferentia ipsa ΚΛ quoque occidit: quare majori tempore circumferentia ΒΚ occidit quam ipsa ΚΛ. Rursus, quoniam circumferentia αβ ipsa ΒΞ major est; sed & ipsa αβ similis est circumferentiæ ςΛ: quare & ςΛ major est circumferen-

Ὅτι δὲ ἡ ΡΛ τῆς Ξα μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία δῆλον. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται μείζων ἐστὶν ἡ Ηα τῆς αβ, ἡ δὲ αβ τῆς βΞ· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ Ηα τῆς βΞ. κοινῆς προσκειμένης τῆς αβ, μείζων ἐστὶν ἡ Ηβ τῆς αΞ· ὥστε καὶ μείζων ἢ ὁμοία ἡ Ηβ τῇ αΞ. ὁμοία δὲ καὶ ἡ Ηβ τῇ ΡΛ· μείζων ἄρα ἢ ὁμοία ἡ ΡΛ τῇ αΞ.

Quod autem circumferentia ΡΛ major sit ipsa Ξα, quam ut ei similis sit, ita patet: quoniam circumferentia Ηα major est ipsa αβ, & αβ major quoque est ipsa βΞ: erit & circumferentia Ηα major etiam ipsa βΞ communis addatur αβ: quare Ηβ etiam major est ipsa αΞ: major igitur est Ηβ circumferentia ipsa αΞ quam ut ei similis sit. est autem ipsa Ηβ similis circumferentiæ ΡΛ: quare & ΡΛ major quoque erit ipsa αΞ quam ut ei similis sit.

tia β ξ quam ut ei similis sit: quare ipsa P Λ multo major est circumferentia β ξ quam ut ei sit similis, sed minor circumferentia H ξ quam ut ei similis esse possit. sit itaque ipsi P Λ similis circumferentia ξ ε: quo igitur tempore punctum ξ circumferentiam ξ ε percurrens pervenit ad punctum ε, hoc ipso tempore & punctum Λ circumferentiam Λ P percurrens pervenit ad punctum P, & zodiacus circulus positionem habebit veluti ε P η. & quoniam similis est circumferentia P Λ ipsi ε ξ; sed & ipsa P Λ similis est etiam ipsi H β: quare ipsa H β ipsi ε ξ similis quoque est. & sunt ejusdem circuli: æqualis igitur est circumferentia H β ipsi ε ξ. communis auferatur ipsa ε β: quare & reliqua H ε reliquæ β ξ est æqualis. & quoniam ς Λ major est ipsa β ξ quam ut ei similis sit; est autem & ς Λ æqualis ipsi P γ, & β ξ etiam est æqualis ipsi H ε: quare & ipsa P γ major est quoque circumferentia H ε quam ut ei similis esse possit: majori igitur tempore punctum γ circumferentiam γ P percurrens pervenit ad P quam ε circumferentiam ε H pertransiens pervenit ad punctum H. sed quo tempore punctum γ circumferentiam γ P percurrens pervenit ad P, ipsa γ O circumferentia occidit, hoc est ipsa K Λ; quo tempore vero punctum ε circumferentiam ε H percurrens pervenit ad punctum H, ipsa ε P occidit, hoc est circumferentia Λ ξ: quare majori tempore circumferentia K Λ occidit quam ipsa Λ ξ. Rursus, quoniam circumferentia T M major est ipsa H ξ quam ut ei similis sit; sit itaque ipsa M ζ similis ipsi H ξ: quo igitur tempore punctum ξ incipiens ab ξ circumferentiam ξ H percurrens pervenit ad punctum H, hoc ipso tempore & punctum M circumferentiam M ζ percurrens pervenit ad punctum ζ, & circulus zodiacus positionem habebit veluti ζ H ϑ. & quoniam in sphæra duo circuli paralleli T Υ, P Σ maximi cujusdam circuli B Δ circumferentias æquales Λ ξ, ξ M auferunt ad maximum parallelorum circulorum H Θ: æqualis igitur est circulus P Σ circulo T Υ. & quoniam in sphæra æquales & paralleli circuli P Σ, T Υ maximi cujusdam circuli A B Γ Δ circumferentias T H, H P auferunt ad maximum parallelorum circulorum H Θ: æqualis igitur est circumferentia T H ipsi H P. est autem ipsa ζ H æqualis ipsi H ϑ; (quoniam & Λ ξ æqualis est ipsi ξ M:) quare & recta à puncto ϑ ad punctum P ducta æqualis est rectæ à puncto T ad punctum ζ ductæ. est vero & circulus P Σ æqualis circulo T Υ: quare [per 28.3.] & circumferentia ϑ P æqualis est ipsi T ζ. sed circumferentia ϑ P similis est circumferentiæ H ε: quare & ipsa H ε similis quoque est circumferen-



ἡ ὁμοία· πολλῷ ἄρα ἡ P Λ τῆς β Ξ μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία, τῆς δὲ H Ξ ἐλάσσων ἢ ὁμοία. ἔστω οὖν τῇ P Λ ὁμοία ἡ Ξ ε· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Ξ τὴν Ξ ε περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ ε παραγίνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Λ τὴν Λ P περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ P παρέσται, καὶ ὁ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἕξει ὡς τὴν ε P η. ἐπεὶ οὖν ὁμοία ἐστὶν ἡ P Λ τῇ ε Ξ, ἀλλ' ἡ P Λ τῇ H β ἐστὶν ὁμοία· καὶ ἡ H β ἄρα τῇ ε Ξ ἐστὶν ὁμοία. καί εἰσι τοῦ αὐτοῦ κύκλου· ἴση ἄρα ἡ H β τῇ ε Ξ περιφερείᾳ. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ε β· λοιπὴ ἄρα ἡ H ε λοιπῇ τῇ β Ξ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἡ ς Λ τῆς β Ξ μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία, ἴση δὲ ἡ μὲν ς Λ τῇ P γ, ἡ δὲ β Ξ τῇ H ε· καὶ ἡ P γ ἄρα τῆς H ε μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ τὸ γ τὴν γ P περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ P παραγίνεται, ἤπερ τὸ ε τὴν ε H διελθὸν ἐπὶ τὸ H παραγίνεται. ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ τὸ γ τὴν γ P περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ P παραγίνεται, ἡ γ O περιφέρεια δύνει, τουτέστιν ἡ K Λ περιφέρεια· ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ τὸ ε τὴν ε H περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ H παραγίνεται, δύνει ἡ ε P, τουτέστιν ἡ Λ Ξ περιφέρεια· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ K Λ δύνει, ἤπερ ἡ Λ Ξ. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ T M τῆς H Ξ μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία, ἔστω τῇ H Ξ ὁμοία ἡ M ζ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Ξ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Ξ τὴν Ξ H περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ H παραγίγνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ M τὴν M ζ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ ζ παρέσται, καὶ ὁ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἕξει ὡς τὴν ζ H ϑ. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι οἱ T Υ, P Σ μεγίστου τινὸς κύκλου τοῦ B Δ περιφερείας τὰς Λ Ξ, Ξ M ἴσας ἀφαιροῦσι πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων τὸν H Θ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ P Σ τῷ T Υ· ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ ἴσοι τε καὶ παράλληλοι κύκλοι οἱ P Σ, T Υ μεγίστου τινὸς κύκλου τοῦ A B Γ Δ περιφερείας τὰς T H, H P ἀφαιροῦσι πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων τὸν H Θ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ T H τῇ H P. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ζ H τῇ H ϑ ἴση, (ἐπεὶ καὶ ἡ Λ Ξ ἴση ἐστὶ τῇ Ξ M·) ἴση ἄρα καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ ϑ ἐπὶ τὸ P τῇ ἀπὸ τοῦ T ἐπὶ τὸ ζ. καὶ ἔστιν ἴσος ὁ P Σ κύκλος τῷ T Υ κύκλῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ϑ P περιφέρεια τῇ T ζ περιφερείᾳ. ἀλλ' ἡ ϑ P τῇ H ε περιφερείᾳ ἐστὶν ὁμοία· καὶ ἡ H ε ἄρα τῇ T ζ ἐστὶν

ὁμοία

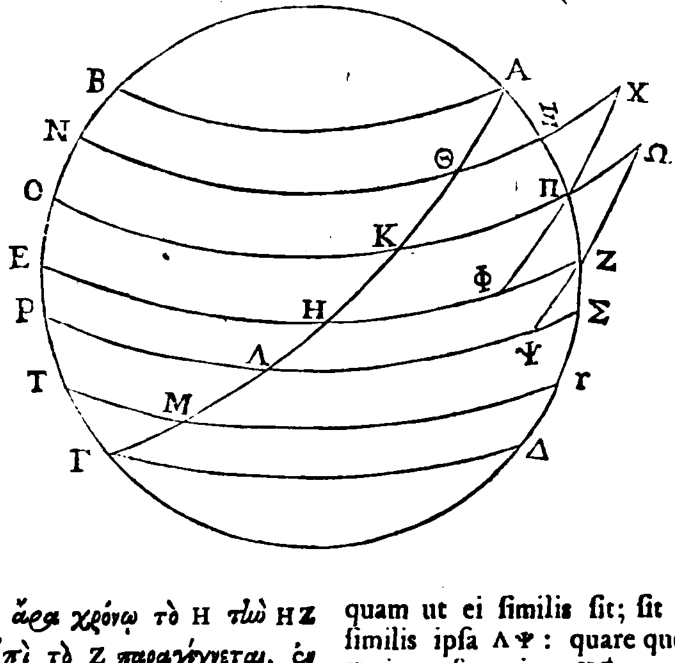
ὁμοία· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ ι ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ ι τὴν ι Η περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Η παραγίγνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ ζ τὴν ζ Τ διελθὸν ἐπὶ τὸ Τ παραγίγνεται. ἀλλ᾽ ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ τὸ ι ἐπὶ τὸ Η παραγίγνεται, δύνει ἡ ι Ρ περιφέρεια, τουτέστιν ἡ Λ Ξ περιφέρεια· ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ τὸ ζ ἐπὶ τὸ Τ παραγίγνεται, δύνει ἡ ζ Η περιφέρεια, τουτέστιν ἡ Ξ Μ· ἡ Λ Ξ ἄρα περιφέρεια τῇ Ξ Μ περιφερείᾳ ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύνει. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ Κ Ξ τῇ Ξ Ν ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύνει, ὧν ἐπεὶ ἡ Λ Ξ τῇ Ξ Μ ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύνει· λοιπὴ ἄρα ἡ Κ Λ τῇ Μ Ν ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύνει. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΒΚ τῇ ΝΔ ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύνει. καὶ ἐπεὶ ἐν πλείονι χρόνῳ ἡ ΒΚ δύνει ἤπερ ἡ Κ Λ, ἡ δὲ Κ Λ ἤπερ ἡ Λ Ξ· ἀλλ᾽ ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ ἡ ΒΚ δύνει ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΔΝ, ἐν ᾧ δὲ ἡ Κ Λ ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΜΝ, ἐν ᾧ δὲ ἡ Λ Ξ ἐν τούτῳ ἡ Ξ Μ· καὶ ἡ μὲν ΔΝ ἄρα τῆς ΝΜ ἐν πλείονι χρόνῳ δύνει, ἡ δὲ ΝΜ τῆς Μ Ξ.

tiæ Τζ: quo igitur tempore punctum ι inchoans à puncto ι & circumferentiam ι Η percurrens pervenit ad punctum Η, hoc ipso tempore & punctum ζ pertransiens ζ Τ pervenit ad punctum Τ. sed quo tempore punctum ι pervenit ad punctum Η, ipsa circumferentia ι Ρ (hoc est Λ Ξ) occidit: quo autem tempore punctum ζ ad punctum Τ pervenit, ipsa circumferentia ζ Η (hoc est ipsa Ξ Μ) occidit: quare circumferentia Λ Ξ æquali tempore occidit atque ipsa Ξ Μ. similiter demonstrabitur quod & circumferentia Κ Ξ æquali tempore occidit ac ipsa Ξ Ν; ex quibus quoniam circumferentia Λ Ξ æquali tempore occidit ac circumferentia Ξ Μ: & reliqua igitur Κ Λ æquali tempore occidit atque ipsa Μ Ν. simili modo ostendetur quod & circumferentia Β Κ æquali etiam tempore occidit ac circumferentia Ν Δ. & quoniam majori tempore circumferentia Β Κ occidit quam ipsa Κ Λ, & Κ Λ majori etiam tempore occidit quam Λ Ξ; sed quo tempore ipsa Β Κ occidit, hoc ipso tempore & Δ Ν etiam occidit; & quo tempore occidit ipsa Κ Λ hoc ipso etiam & Μ Ν occidit; præterea quo tempore occidit ipsa Λ Ξ hoc ipso & Ξ Μ occidit: quare majori tempore Δ Ν occidit quam ipsa Ν Μ; & Ν Μ majori quoque tempore occidit quam Μ Ξ.

ΛΕΓΩ ὅτι καὶ ἡ μὲν Λ Ξ τῇ Ξ Μ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἀνατέλλει, ἡ δὲ ΚΛ τῇ ΜΝ, ἡ δὲ ΒΚ τῇ ΝΔ.

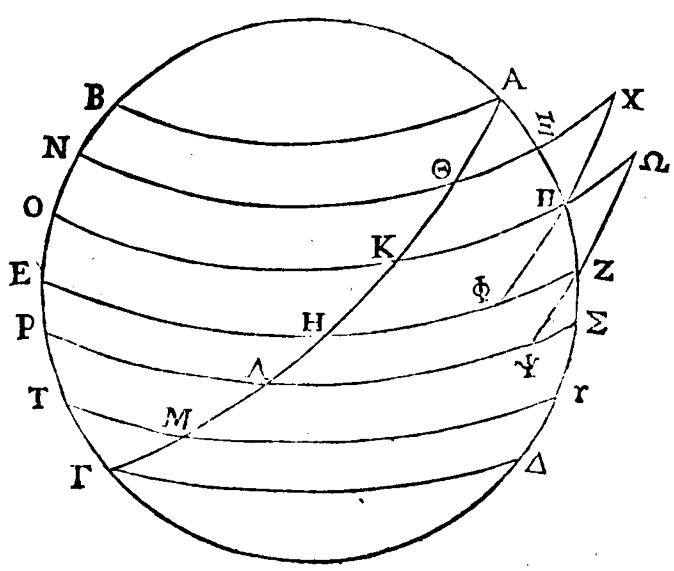
Dico quod & circumferentia quidem Λ Ξ æquali tempore oritur ac ipsa Ξ Μ; & ipsa Κ Λ etiam æquali tempore oritur ac ipsa ΜΝ; & deniq; quod ipsa Β Κ æquali etiam tempore oritur ac Ν Δ.

Καὶ θεωρείσθω τὰ λεγόμενα ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ ἔστω τὸ μετὰ τὸν καρκίνον ἡμικύκλιον ὑπὸ τὴν γῆν τὸ ΑΓ, καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα τῶν ΑΗ, ΗΓ εἰς τρία ἴσα κατὰ τὰ Θ, Κ, Λ, Μ σημεῖα, καὶ ἔστωσαν καθ᾽ ὧν φέρεται τὰ Θ, Κ, Λ, Μ σημεῖα παράλληλοι κύκλοι οἱ ΝΞ, ΟΠ, ΡΣ, ΤΥ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΗ τῆς ΚΠ μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία, ἔστω τῇ ΚΠ ὁμοία ἡ ΗΦ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Κ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Κ τὴν ΚΠ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Π παραγίνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Η ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Η τὴν ΗΦ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Φ παρέσται, καὶ ὁ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἕξει ὡς τὴν ΦΠΧ. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ΛΣ τῆς ΗΖ μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία, ἔστω τῇ ΗΖ ὁμοία ἡ ΛΨ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Η τὴν ΗΖ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ζ παραγίγνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Λ τὴν ΛΨ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ψ παρέσται, καὶ ὁ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἕξει ὡς τὴν ΨΖΩ. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ παρ-



Intelligantur autem in secunda figura ea quæ dicta sunt & explicata prius; & sit post cancrum semicirculus sub terram Α Γ; & dividatur utraque circumferentia Α Η, Η Γ in tres partes æquales in punctis Θ, Κ, Λ, Μ; & sint circuli paralleli Ν Ξ, Ο Π, Ρ Σ, Τ Υ in quibus puncta Θ, Κ, Λ, Μ ferantur. & quoniam circumferentia Ζ Η major est ipsa Κ Π quam ut ei similis sit, sit ipsi Κ Π similis circumferentia Η Φ: quo igitur tempore punctum Κ incipiens à puncto Κ circumferentiam Κ Π percurrens pervenit ad punctum Π, hoc ipso tempore & punctum Η incipiens ab Η & circumferentiam Η Φ percurrens pervenit ad punctum Φ; & zodiacus circulus positionem habebit veluti Φ Π Χ. rursus, quoniam circumferentia Λ Σ major est ipsa Η Ζ quam ut ei similis sit; sit circumferentiæ Η Ζ similis ipsa Λ Ψ: quare quo tempore punctum Η circumferentiam Η Ζ percurrens pervenit ad punctum Ζ, hoc ipso tempore & punctum Λ circumferentiam Λ Ψ percurrens pervenit ad punctum Ψ; & circulus zodiacus positionem habebit veluti Ψ Ζ Ο. & quoniam in sphæra sunt circuli paralleli

ralleli ΟΠ, ΡΣ, qui maximi cujusdam circuli ΑΓ circumferentias æquales ΑΗ, ΗΚ auferunt ad maximum parallelorum circulorum ΕΖ: æqualis est circulus ΟΠ circulo ΡΣ. & quoniam in sphæra æquales & paralleli circuli ΠΟ, ΡΣ maximi cujusdam circuli ΑΒΓΔ circumferentias ΣΖ, ΖΠ ad maximum parallelorum ΕΖ auferunt: æqualis est circumferentia ΣΖ ipsi ΖΠ. est autem & circumferentia ΨΖ æqualis ipsi ΖΩ: quare recta à puncto Π ad punctum Ω extensa æqualis est rectæ à puncto Ψ usque ad punctum Σ productæ. & circulus quidem ΟΠ circulo ΡΣ æqualis est: & circumferentia igitur ΠΩ [per 28.3.] æqualis est ipsi ΨΣ. quoniam vero semicirculus à puncto Χ inchoans, qui ad partes Χ, Π tendat, non concurrit cum semicirculo à puncto Ω incipiente, qui ad partes Ω, Ζ proficiscatur; similis igitur est circumferentia ΠΩ ipsi ΦΖ. sed & ipsa ΠΩ ipsi ΨΣ similis etiam est; quare & ipsa ΦΖ circumferentia ipsi ΨΣ similis quoque est: quo igitur tempore punctum Φ circumferentiam ΦΖ percurrens pervenit ad punctum Ζ, hoc ipso tempore & punctum Ψ circumferentiam ΨΣ percurrens pervenit ad punctum Σ. sed quando quidem Φ jam pervenit ad Ζ, tunc oritur ΦΠ, hoc est ipsa ΚΗ; quando vero Ψ ad Σ accessit, tunc oritur ΨΖ, hoc est ipsa ΛΗ: quare tempore æquali quidem ΚΗ & ipsa ΛΗ oriuntur. similiter itaque demonstrabitur quod & ipsæ ΚΘ, ΛΜ & etiam ipsæ ΑΘ, ΜΓ æquali tempore oriuntur.



Semicirculi igitur post cancrum circumferentiæ æquales temporibus inæqualibus occidunt; & in maximis quidem illæ, quæ prope contactus sunt tropicorum circulorum; in minoribus autem, quæ deinceps sequuntur; in minimis vero quæ sunt prope circulum æquinoctialem; æqualibus denique temporibus & occidunt & oriuntur, quæ ab æquinoctiali circulo æqualiter distant.

παράλληλοι κύκλοι οἱ ΟΠ, ΡΣ μεγίστου τινὸς κύκλου περιφερείας τοῦ ΑΓ τὰς ΛΗ, ΗΚ ἴσας ἀφαιροῦσι πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων τὸν ΕΖ, ἴσος ἐστὶν ὁ ΟΠ τῇ ΡΣ. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ ἴσοι τε καὶ παράλληλοι κύκλοι οἱ ΠΟ, ΡΣ μεγίστου τινὸς κύκλου περιφερείας τοῦ ΑΒΓΔ τὰς ΣΖ, ΖΠ ἀφαιροῦσι πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων τὸν ΕΖ, ἴση ἐστὶν ἡ ΣΖ τῇ ΖΠ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΨΖ τῇ ΖΩ ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Π ἐπὶ τὸ Ω τῇ ἀπὸ τοῦ Ψ ἐπὶ τὸ Σ. καὶ ἔστιν ἴσος ὁ ΟΠ κύκλος τῷ ΡΣ κύκλῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΩ τῇ ΨΣ περιφερείᾳ. ἐπεὶ δὲ ἀσύμπτωτόν ἐστι τὸ ἀπὸ τοῦ Χ ἡμικύκλιον ὡς ἐπὶ τὰ Χ, Π μέρη τῷ ἀπὸ τοῦ Ω ἡμικυκλίῳ ὡς ἐπὶ τὰ Ω, Ζ μέρη, ὁμοία ἐστὶν ἡ ΠΩ περιφέρεια τῇ ΦΖ περιφερείᾳ. ἀλλ' ἡ ΠΩ τῇ ΨΣ ἐστὶν ὁμοία· καὶ ἡ ΦΖ ἄρα τῇ ΨΣ ἐστὶν ὁμοία· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Φ τὴν ΦΖ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ζ παραγίνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Ψ τὴν ΨΣ διελθὸν ἐπὶ τὸ Σ παρέσται. ἀλλ' ὅταν μὲν τὸ Φ ἐπὶ τὸ Ζ παραγένηται, ἀνατέλλει ἡ ΦΠ, τουτέστιν ἡ ΚΗ· ὅταν δὲ τὸ Ψ ἐπὶ τὸ Σ παραγένηται, ἀνατέλλει ἡ ΨΖ περιφέρεια, τουτέστιν ἡ ΛΗ· ἡ ΚΗ ἄρα τῇ ΛΗ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἀνατέλλει. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΚΘ τῇ ΛΜ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἀνατέλλει, ἡ δὲ ΛΘ τῇ ΜΓ.

Τοῦ ἄρα μετὰ τὸν καρκίνον ἡμικυκλίου αἱ ἴσαι περιφέρειαι ἀνίσοις χρόνοις δύουσι, καὶ ἐν πλείστοις μὲν, αἱ πρὸς ταῖς συναφαῖς τῶν τροπικῶν· ἐν ἐλάσσοσι δὲ αἱ ἑξῆς τούτων· ἐν ἐλαχίστοις δὲ αἱ πρὸς τῷ ἰσημερινῷ· ἐν ἴσοις δὲ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ ἰσημερινοῦ κύκλου καὶ δύουσι καὶ ἀνατέλλουσι.

SCHOLIUM EX ABUNDANTI.

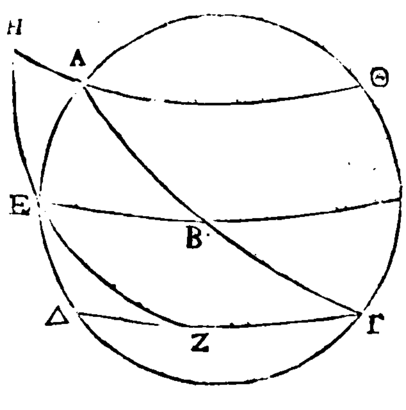
Eadem manente descriptione, dico quod circumferentia ΑΒ æquali tempore occidit ac circumferentia ΒΓ. quoniam enim ΓΔ major est ipsa ΒΕ quam ut ei similis sit; ponatur ipsi ΒΕ similis circumferentia ΓΖ; & circulus zodiacus positionem habeat veluti ΖΕΗ. & quoniam ΑΒ ipsi ΒΓ est æqualis: & circulus igitur ΑΘ æqualis est circulo ΓΔ: quare & circumferentia ΑΕ æqualis est ipsi ΕΔ. est autem ΖΕ æqualis circumferentiæ ΕΗ; quoniam & ΓΒ ipsi ΒΑ æqua-

ΣΧΟΛΙΟΝ ΕΚ ΠΕΡΙΣΣΟΥ.

Τῆς αὐτῆς καταγραφῆς μενούσης, λέγω ὅτι ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύνει. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΓΔ τῆς ΒΕ μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία, κείσθω τῇ ΒΕ ὁμοία ἡ ΓΖ, καὶ ὁ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω τὴν ΖΕΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ, ἴσος ἐστὶν ὁ ΑΘ κύκλος τῷ ΓΔ κύκλῳ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΕΗ ἴση, ἐπεὶ καὶ ἡ ΓΒ τῇ ΒΑ ἴση

ἐστί,

ἐστιν ἄρα καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Α τῇ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Ζ ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΗ περιφέρεια τῇ ΔΖ περιφερείᾳ. ἀλλ' ἡ ΑΗ τῇ ΕΒ ἐστιν ὁμοία· καὶ ἡ ΕΒ ἄρα τῇ ΔΖ ἐστιν ὁμοία· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Β ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Β τὴν ΒΕ διελθὸν ἐπὶ τὸ Ε παραγίγνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Ζ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Ζ τὴν ΖΔ διελθὸν ἐπὶ τὸ Δ παρέσται. ἀλλ' ὅταν μὲν τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε παραγένηται δύνει ἡ ΒΑ περιφέρεια, ὅταν δὲ τὸ Ζ ἐπὶ τὸ Δ παραγένηται δύνει ἡ ΖΕ, τουτέστιν ἡ ΓΒ· ἡ ΑΒ ἄρα τῇ ΒΓ ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύνει.

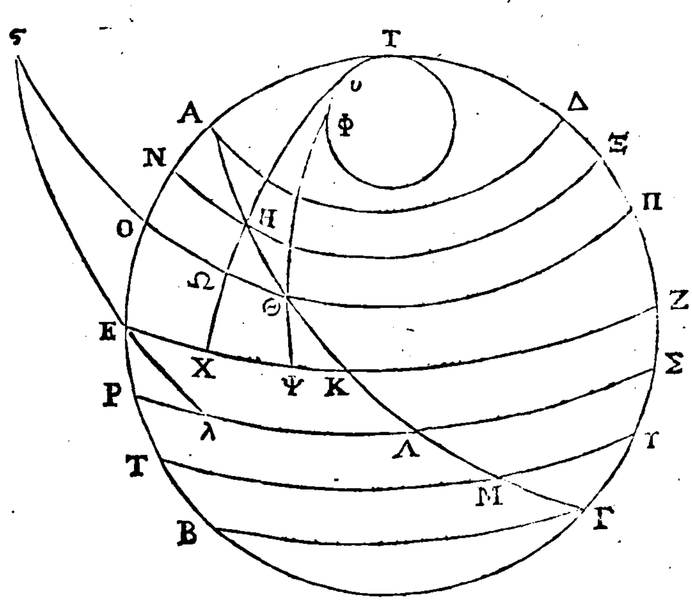


lis est: recta igitur à puncto H ad punctum A æqualis est rectæ à puncto Δ ad punctum Z ductæ: quare & circumferentia A H æqualis est circumferentiæ Δ Z. sed circumferentia A H similis est ipsi E B: & circumferentia igitur E B similis quoque est circumferentiæ Δ Z: quo igitur tempore punctum B incipiens à puncto B circumferentiam B E percurrens pervenit ad punctum E, hoc ipso tempore & punctum Z inchoans à puncto Z & ipsam Z Δ percurrens pervenit ad Δ. sed quo quidem tempore B ad E pervenit, ipsa B A occidit; & quando Z ad Δ pervenit, tunc & ipsa Z E, hoc est ipsa Γ B, occidit: quare circumferentia A B æquali tempore occidit quo ipsa B Γ.

ΑΛΛΩΣ

Ἔστω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ ΑΒΓΔ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ἔστω ὁ ΑΔ, χειμερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ ΒΓ, ζῳδιακοῦ δὲ ἡμικύκλιον τὸ μετὰ τὸν καρκίνον ἔστω ὑπὲρ γῆς τὸ ΑΓ, καὶ ἔστω ἀνατολικὰ μὲν μέρη τὰ Δ,Γ, δυτικὰ δὲ τὰ Α, Β, ἰσημερινὸς δὲ κύκλος ἔστω ὁ ΕΖ, καὶ διῃρήσθω τὸ ΑΓ ἡμικύκλιον εἰς τὰ ἐν αὐτῷ ζῴδια κατὰ τὰ Η, Θ, Λ, Μ σημεῖα, καὶ γεγράφθωσαν παράλληλοι κύκλοι οἱ ΝΗΞ, ΟΘΠ, ΡΛΣ, ΤΜΥ καθ' ὧν φέρεται τὰ Η, Θ, Λ, Μ σημεῖα· λέγω ὅτι ἐν πλείστῳ μὲν χρόνῳ δύνουσιν αἱ ΑΗ, ΜΓ περιφέρειαι, ἐν ἐλάσσονι δὲ αἱ ΗΘ, ΛΜ, ἐν ἐλαχίστῳ δὲ αἱ ΘΚ, ΛΚ, ἐν ἴσῳ δὲ χρόνῳ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ ἰσημερινοῦ.

Ἔστω μέγιστος τῶν ἀεὶ φανερῶν ὁ ΤυΦ, καὶ γεγράφθωσαν διὰ τῶν Η, Θ μέγιστοι κύκλοι οἱ υΗΩΧ, ΦΘΨ ἐφαπτόμενοι τοῦ ΤυΦ κύκλου, ὥστε ἀσύμπτωτα εἶναι τὰ ἀπὸ τῶν υ, Φ ἡμικύκλια ὡς ἐπὶ τὰ ΗΧ, ΘΨ μέρη τῷ ἀπὸ τοῦ Τ ἡμικυκλίῳ ὡς ἐπὶ τὰ Τ, Α μέρη· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΗΝ περιφέρεια ἑκατέρᾳ τῶν ΩΟ, ΧΕ, ἡ δὲ ΘΩ τῇ ΨΧ· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὸ Η τὴν ΗΝ περιφέρειαν διαπορεύεται καὶ τὸ Ω τὴν ΩΟ. ἀλλ' ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Η τὴν ΗΝ περιφέρειαν διαπορεύεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ δύ-



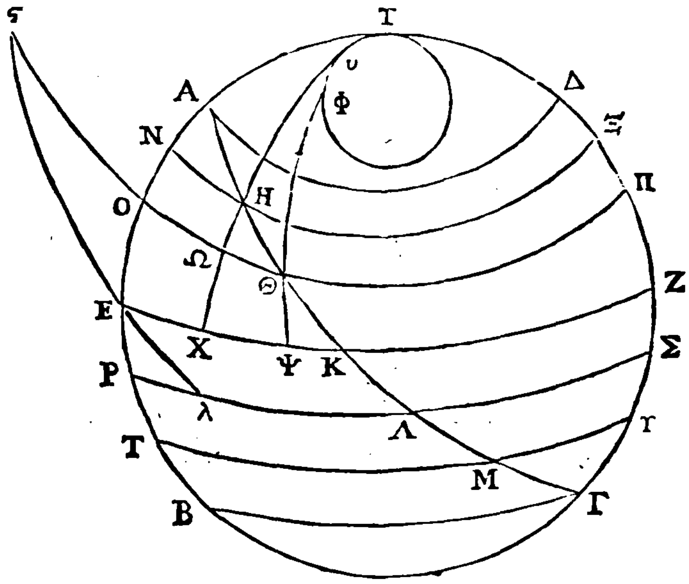
ALITER.

Sit in mundo circulus horizon A B Γ Δ; tropicus æstivus sit A Δ; hybernus autem sit B Γ: zodiaci semicirculus post cancrum supra terram sit A Γ; sint autem partes orientales Δ, Γ; occidentales vero A, B; æquinoctialis circulus sit E Z; & dividatur semicirculus A Γ in signa, quæ sunt in ipso, in punctis H, Θ, Λ, M; & describantur circuli paralleli N H Ξ, O Θ Π, P Λ Σ, T M Y, in quibus puncta H, Θ, Λ, M, ferantur: dico quod majori tempore circumferentiæ A H, M Γ occidunt; minori vero H Θ, Λ M; & denique minimo tempore Θ K, Λ K circumferentiæ occidunt; æquali vero tempore quæ ab æquinoctiali circulo æque distant.

Sit maximus semper-apparentium circulus T υ Φ; & describantur per puncta H, Θ maximi circuli υ H Ω X, Φ Θ Ψ, qui circulum T υ Φ tangant, ita ut semicirculi, qui à punctis υ, Φ inchoant qui ad partes H X, Θ Ψ tendunt, non concurrant cum semicirculo à puncto T inchoante, qui ad partes T, A proficiscitur: quare circumferentia quidem H N utrique ipsarum Ω O, X E similis est; & similiter circumferentia Θ Ω ipsi Ψ X etiam similis est: æquali igitur tempore punctum H circumferentiam H N percurrit, quo punctum Ω ipsam Ω O pertransit. sed tempus in quo punctum H circumferentiam H N percurrit, tempus est in quo circumfecumferentia H A occidit: & tempus igitur in quo punctum Ω circumferentiam Ω O percurrit, idem est cum tempore quo occidit circumferentia H A. rursus, quoniam tempus in quo punctum Θ percurrit circumferentiam Θ O, tempus est quo occidit circumferentia Θ A; ex quo si auferatur tempus in quo punctum Ω ipsam Ω O percurrit, quod quidem idem est cum tempore in quo occidit circumferentia H A: reliquum igitur tempus, in quo punctum Θ ipsam Θ Ω percurrit, idem est cum tempore in quo occidit ipsa H Θ circumferentia. est autem [ex modo ostensis] similis ipsa Ω O ipsi X E & Ω Θ etiam est similis ipsi X Ψ: igitur tempus in quo punctum X percurrit circumferentiam X E, tempus est quo ipsa H A occidit; & tempus in quo punctum Ψ ipsam Ψ X percurrit, tempus est quo circumferentia Θ H occidit. eadem ratione jam tempus quidem in quo punctum K ipsam K Ψ pertransit, tempus est quo occidit K Θ circumferentia. & quoniam in sphæra maximus circulus A B Γ Δ quendam circulum ex parallelis tangit, scilicet T υ Φ, & ipsum A B Γ Δ secant maximi circuli E Z, A Γ, quorum quidem E Z [ex hyp.] maximus est parallelorum, & A Γ obliquus est ad parallelos circulos; & sumptæ sunt circumferentiæ A H, H Θ, Θ K in obliqui circuli circumferentia æquales deinceps ad easdem partes maximi parallelorum; & per puncta H, Θ descripti sunt maximi circuli υ H X, Φ Θ Ψ tangentes circulum T υ Φ: major igitur est circumferentia E X ipsa X Ψ: & circumferentia X Ψ major quoque est ipsa Ψ K: quare majori tempore X circumferentiam X E percurrit quam Ψ ipsam Ψ X; & Ψ majori quoque tempore circumferentiam Ψ X percurrit quam K ipsam K Ψ. sed tempus quidem in quo X percurrit circumferentiam X E, tempus est quo H ipsam H N pertransit, id est in quo occidit circumferentia A H; tempus autem in quo Ψ pertransit circumferentiam Ψ X, tempus est in quo punctum Θ circumferentiam Θ Ω percurrit, id est tempus in quo occidit circumferentia Θ H; & tempus in quo punctum K ipsam K Ψ pertransit, tempus est in quo occidit circumferentia K Θ: majori igitur tempore circumferentia A H occidit quam ipsa H Θ, & H Θ majori quam Θ K.

Dico jam quod circumferentiæ quæ ab æquinoctiali circulo æque distant, temporibus æqualibus occidunt.

Punctum siquidem K, cum jam pervenerit ad



νει ἡ H A περιφέρεια· καὶ ὁ χρόνος ἄρα ἐν ᾧ τὸ Ω τὴν Ω O διαπορεύεται ὁ αὐτός ἐστι τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ δύνει ἡ H A περιφέρεια. πάλιν, ἐπεὶ ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Θ τὴν Θ O διαπορεύεται ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ δύνει ἡ Θ A περιφέρεια, ὧν ἀφαιρεῖται ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Ω τὴν Ω O διαπορεύεται, ὁ αὐτὸς ὢν τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ δύνει ἡ H A περιφέρεια· λοιπὸς ἄρα ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Θ τὴν Θ Ω διαπορεύεται, ὁ αὐτός ἐστι τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ δύνει ἡ H Θ περιφέρεια. ὁμοία δέ ἐστιν ἡ μὲν Ω O τῇ X E, ἡ δὲ Ω Θ τῇ X Ψ· καὶ ὁ χρόνος ἄρα ἐν ᾧ τὸ X τὴν X E διαπορεύεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ δύνει ἡ H A περιφέρεια· ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Ψ τὴν Ψ X διαπορεύεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ δύνει ἡ Θ H περιφέρεια. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὸ K τὴν K Ψ διαπορεύεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ δύνει ἡ K Θ περιφέρεια. ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ ὁ μέγιστος κύκλος A B Γ Δ ἐφάπτεταί τινος κύκλου τῶν παραλλήλων τοῦ T υ Φ, καὶ τὸν A B Γ Δ τέμνουσιν οἱ μέγιστοι κύκλοι οἱ E Z, A Γ, ὧν ὁ μὲν E Z μέγιστος τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ A Γ λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους· καὶ ἀπειλημμέναι εἰσὶ περιφέρειαι αἱ A H, H Θ, Θ K ἐπὶ τῆς τοῦ λοξοῦ κύκλου περιφερείας ἴσαι ἑξῆς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, καὶ διὰ τῶν H, Θ σημείων γεγραμμένοι εἰσὶ μέγιστοι κύκλοι οἱ υ H X, Φ Θ Ψ ἐφαπτόμενοι τοῦ T υ Φ κύκλου· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν E X περιφέρεια τῆς X Ψ περιφερείας, ἡ δὲ X Ψ τῆς Ψ K· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ τὸ X τὴν X E διαπορεύεται ἤπερ τὸ Ψ τὴν Ψ X, καὶ τὸ Ψ τὴν Ψ X ἐν πλείονι χρόνῳ διαπορεύεται ἤπερ τὸ K τὴν K Ψ. ἀλλ᾽ ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ τὸ X τὴν X E διαπορεύεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ τὸ H τὴν H N περιφέρειαν διαπορεύεται, τουτέστιν ἐν ᾧ δύνει ἡ A H περιφέρεια· ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Ψ τὴν Ψ X διαπορεύεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ τὸ Θ τὴν Θ Ω διαπορεύεται, τουτέστιν ὁ χρόνος ἐν ᾧ δύνει ἡ Θ H περιφέρεια· ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ τὸ K τὴν K Ψ διαπορεύεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ δύνει ἡ K Θ περιφέρεια· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ δύνει ἡ μὲν A H περιφέρεια τῆς H Θ περιφερείας, ἡ δὲ H Θ τῆς Θ K.

ΛΕΓΩ δὴ ὅτι ἐν ἴσοις χρόνοις αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ ἰσημερινοῦ δύνουσιν.

Παραγινομένου γὰρ δὴ τοῦ K σημείου ἐπὶ τὸ E σημεῖον,

σημεῖον, ὁ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω τὴν ϛ Ε Λ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ϛ Ε περιφέρεια τῇ Ε Λ περιφερείᾳ, καὶ ἔστι μέγιστος τῶν παραλλήλων ὁ Ε Ζ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ϛ Θ Π κύκλος τῷ Ρ Λ Σ κύκλῳ· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ Ο Ε περιφέρεια τῇ Ε Ρ περιφερείᾳ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ϛ Ε τῇ Ε Λ ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ ϛ ἐπὶ τὸ Ο τῇ ἀπὸ τοῦ Ρ ἐπὶ τὸ Λ. καὶ εἰσὶν ἴσοι κύκλοι οἱ ϛ Θ Π, Ρ Λ Σ· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ϛ Ο περιφέρεια τῇ Ρ Λ περιφερείᾳ· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὸ Λ σημεῖον τὴν Λ Ρ διαπορεύεται καὶ τὸ Ο τὴν Ο ϛ. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ τὸ Λ τὴν Λ Ρ διαπορεύεται ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ δύνει ἡ Λ Ε περιφέρεια, ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Ο τὴν Ο ϛ διαπορεύεται ἴσος ἐστὶ τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ δύνει ἡ Ε ϛ περιφέρεια· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ δύνουσιν αἱ Λ Ε, Ε ϛ περιφέρειαι. ἴση δὲ ἡ μὲν Λ Ε τῇ Λ Κ, ἡ δὲ Ε ϛ τῇ Κ Θ· αἱ Λ Κ, Κ Θ ἄρα ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύνουσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ Μ Κ, Κ Η ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύνουσιν· ὧν αἱ Λ Κ, Κ Θ ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύνουσιν· λοιπαὶ ἄρα αἱ Μ Λ, Θ Η ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύνουσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ Μ Γ, Λ Η περιφέρειαι ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύνουσιν. καὶ ἐπεὶ ἐν πλείονι χρόνῳ δύνει ἡ Λ Η περιφέρεια ἤπερ ἡ Η Θ, καὶ ἡ Η Θ ἤπερ ἡ Θ Κ· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ δύνει καὶ ἡ Γ Μ περιφέρεια ἤπερ ἡ Μ Λ, καὶ ἡ Μ Λ ἤπερ ἡ Λ Κ· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ δύνουσιν αἱ Λ Η, Μ Γ περιφέρειαι, ἐν ἐλάσσονι δὲ αἱ Η Θ, Λ Μ, ἐν ἐλαχίστῳ δὲ αἱ Θ Κ, Λ Κ, ἐν ἴσῳ δὲ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ ἰσημερινοῦ καὶ δύνουσιν καὶ ἀνατέλλουσι. τῆς γὰρ αὐτῆς μενούσης καταγραφῆς, ἐὰν μεταστρέψωμεν τὸν ζωδιακὸν, καὶ ποιήσωμεν τὸ Α Γ ἡμικύκλιον τοῦ ζωδιακοῦ ὑπὸ γῆν, ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις προβήσεται, καὶ δειχθήσονται αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ ἰσημερινοῦ ἐν ἴσῳ χρόνῳ καὶ ἀνατέλλουσαι.

punctum E, circulus zodiacus positionem habebit veluti ϛ E Λ. & quoniam æqualis est circumferentia ϛ E ipsi E Λ, & [ex hyp.] circulus E Z maximus est parallelorum circulorum: æqualis igitur est circulus ϛ Θ Π circulo Ρ Λ Σ: quare & circumferentia O E ipsi E Ρ æqualis est. est autem & ϛ E æqualis ipsi E Λ: quare & recta à puncto ϛ ad punctum O ducta æqualis est rectæ à puncto Ρ ad punctum Λ ductæ. & sunt circuli ϛ Θ Π, Ρ Λ Σ æquales: similis igitur est circumferentia ϛ O ipsi Ρ Λ: quare tempore æquali punctum Λ circumferentiam Λ Ρ percurrit, atque punctum O ipsam O ϛ pertransit. sed tempus quidem in quo Λ ipsam Λ Ρ percurrit, tempus est quo circumferentia Λ E occidit; & tempus in quo punctum O circumferentiam O ϛ pertransit, æquale est tempori in quo occidit circumferentia E ϛ: quare tempore æquali circumferentiæ Λ E, E ϛ occidunt. est autem quidem circumferentia Λ E æqualis ipsi Λ K, & E ϛ est etiam æqualis ipsi K Θ: quare Λ K, K Θ tempore æquali occidunt. similiter ostendetur quod & circumferentiæ M K, K H æquali etiam tempore occidunt; ex quibus ipsæ Λ K, K Θ æquali tempore occidunt: & reliquæ igitur M Λ, Θ H æquali tempore occidunt. simili modo jam ostendetur quod & circumferentiæ M Γ, Λ H æquali tempore occidunt. & quoniam [ex mox ostensis] majori tempore circumferentia Λ H occidit quam ipsa H Θ, & ipsa H Θ majori etiam tempore occidit quam Θ K: quare majori tempore occidit circumferentia Γ M quam ipsa M Λ; & similiter ipsa M Λ etiam tempore majori occidit quam ipsa Λ K: majori igitur tempore circumferentiæ Λ H, M Γ occidunt; minori autem H Θ, Λ M; denique minimo tempore Θ K, Λ K; & tandem quæ ab æquinoctiali circulo æque distant, tempore æquali & occidunt & oriuntur. eadem enim manente descriptione, si convertamus zodiacum, & faciamus A Γ dimidium zodiaci sub terram, eadem procedet demonstratio; & ostendetur circumferentias, quæ æque distant ab æquinoctiali, & æquali tempore oriri.

ΘΕΩΡΗΜΑ ιγʹ.

Τοῦ μετὰ τὸν αἰγόκερω ἡμικυκλίου αἱ ἴσαι περιφέρειαι ἐν ἀνίσοις χρόνοις ἀνατέλλουσι, καὶ ἐν πλείστοις μὲν αἱ πρὸς ταῖς συναφαῖς τῶν τροπικῶν, ἐν ἐλάσσοσι δὲ αἱ ἑξῆς τούτων, ἐν ἐλαχίστοις δὲ αἱ πρὸς τῷ ἰσημερινῷ, ἐν ἴσοις δὲ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ ἰσημερινοῦ κύκλου καὶ ἀνατέλλουσιν καὶ δύνουσιν.

Theorema XIII.

Circumferentiæ æquales semicirculi, qui post capricornum est, temporibus inæqualibus oriuntur; ac majori quidem tempore oriuntur quæ prope contactus sunt tropicorum circulorum; minori vero quæ deinceps sequuntur; minimo autem tempore quæ sunt prope circulum æquinoctialem; denique tempore æquali oriuntur & occidunt quæ ab æquinoctiali circulo æqualiter distant.

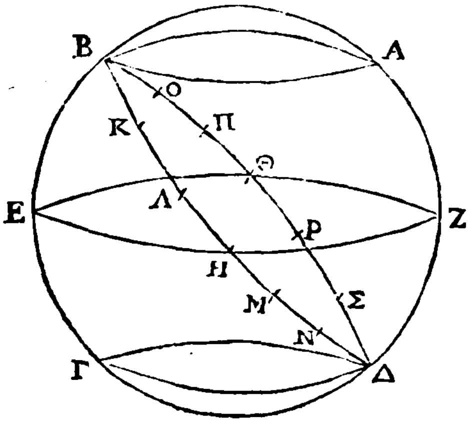
Ἔστω ὁρίζων κύκλος ὁ Α Β Γ Δ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ὁ Β Α, χειμερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ Γ Δ, καὶ ἔστω τὸ μετὰ τὸν αἰγόκερω ἡμικύκλιον ὑπὸ γῆν τὸ Δ Η Β, ἰσημερινὸς δὲ κύκλος ὁ Ε Θ Ζ Η, καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα τῶν Β Η, Η Δ εἰς τρία ἴσα κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν σημεῖα· λέγω ὅτι

SIT circulus horizon A B Γ Δ, tropicus æstivus sit B A, hybernus sit Γ Δ; & sit post capricornum sub terram semicirculus Δ H B, æquinoctialis circulus sit E Θ Z H, & dividatur utraque circumferentia B H, H Δ in tres partes æquales in punctis K, Λ, M, N: dico quod

circum-

circumferentiæ BK, KΛ, ΛH, HM, MN, NΔ temporibus oriuntur inæqualibus; & quod majori quidem tempore BK, NΔ, minori vero KΛ, MN, minimo denique ipsæ ΛH, HM circumferentiæ oriuntur; at tempore æquali circumferentiæ quidem BK, NΔ, item KΛ, MN, & tandem ipsæ ΛH, HM oriuntur.

Sit quidem supra terram post capricornum semicirculus BΘΔ; & dividatur utraque circumferentia BΘ, ΘΔ in tres partes æquales in punctis O, Π, P, Σ. & quoniam [per 12. Phæn.] majori tempore circumferentia BO occidit quam ipsa OΠ; sed [per 11. Phæn.] quo tempore circumferentia BO occidit & ipsa ΔN oritur, & quo tempore OΠ occidit & ipsa MN oritur: majori igitur tempore NΔ oritur quam ipsa NM. rursus, quoniam circumferentia OΠ majori tempore occidit quam ΠΘ; sed quo tempore OΠ occidit & ipsa NM oritur, & quo tempore ΠΘ occidit & circumferentia HM oritur: quare majori tempore circumferentia NM oritur quam ipsa MH. eadem ratione & BK majori tempore oritur quam KΛ, & KΛ quam ipsa ΛH. & quoniam quo tempore ΠΘ occidit, hoc eodem tempore & ΘP; sed quo tempore ΠΘ occidit & ipsa MH oritur, & quo tempore ΘP occidit & HΛ oritur: quare MH circumferentia æquali tempore oritur atque ipsa HΛ. eadem ratione demonstrabitur quod & KΛ æquali tempore oritur atque ipsa MN; & BK æquali tempore atque ipsa ΔN. rursus, quoniam quo tempore circumferentia ΠΘ oritur, & eodem tempore etiam ipsa ΘP oritur; sed quo tempore ΠΘ oritur & MH occidit; & quo tempore ΘP oritur & ipsa HΛ occidit: quare tempore æquali ΛH occidit atque ipsa HM. similiter ostendetur, quod circumferentia KΛ eodem tempore occidit quo ipsa MN; & item BK eodem quo ipsa ΔN.



αἱ BK, KΛ, ΛH, HM, MN, NΔ περιφέρειαι ἐν ἀνίσοις χρόνοις ἀνατέλλουσι, καὶ ἐν πλείοσι μὲν αἱ BK, NΔ, ἐν ἐλάσσοσι δὲ αἱ KΛ, MN, ἐν ἐλαχίστοις δὲ αἱ ΛH, HM, ἐν ἴσοις δὲ ἡ μὲν BK τῇ NΔ, ἡ δὲ KΛ τῇ MN, ἡ δὲ ΛH τῇ HM ἀνατέλλουσιν.

Ἔστω γὰρ τὸ μετὰ τὸν αἰγόκερων ἡμικύκλιον ὑπὲρ γῆς τὸ BΘΔ, καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα τῶν BΘ, ΘΔ εἰς τρία ἴσα κατὰ τὸ O, Π, P, Σ σημεῖα. καὶ ἐπεὶ ἐν πλείονι χρόνῳ ἡ BO δύνει ἤπερ ἡ OΠ, ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ ἡ BO δύνει ἡ ΔN ἀνατέλλει, ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἡ OΠ δύνει ἡ MN ἀνατέλλει· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ NΔ ἀνατέλλει ἤπερ ἡ NM· πάλιν, ἐπεὶ ἡ OΠ ἐν πλείονι χρόνῳ δύνει ἤπερ ἡ ΠΘ, ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ ἡ OΠ δύνει ἡ NM ἀνατέλλει, ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἡ ΠΘ δύνει ἡ HM ἀνατέλλει· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ NM ἀνατέλλει ἤπερ ἡ MH. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν BK τῆς KΛ ἐν πλείονι χρόνῳ ἀνατέλλει, ἡ δὲ KΛ τῆς ΛH. καὶ ἐπεὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΠΘ δύνει ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΘP, ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν ἡ ΠΘ δύνει ἡ MH ἀνατέλλει, ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἡ ΘP δύνει ἡ HΛ ἀνατέλλει· καὶ ἡ MH ἄρα τῇ HΛ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἀνατέλλει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν KΛ τῇ MN ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἀνατέλλει, ἡ δὲ BK τῇ ΔN. πάλιν, ἐπεὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΠΘ ἀνατέλλει, ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΘP, ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ ἡ ΠΘ ἀνατέλλει ἡ MH δύνει, ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἡ ΘP ἀνατέλλει ἡ HΛ δύνει· ἡ ΛH ἄρα τῇ HM ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύνει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν KΛ τῇ MN ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύνει, ἡ δὲ BK τῇ ΔN.

DEFINITIO.

PErmutatio conspicui hemisphærii dicitur, quando antegrediente circumferentiæ puncto quod in ortu existit, consequens punctum oriens & percurrens totum conspicuum hemisphærium ad occasum pervenit; hoc est quando circumferentia, quæ duobus intercipitur punctis, & antecedente & consequente, ab hemisphærio conspicuo ad hemisphærium occultum venit; & è contra, permutatio hemisphærii occulti.

ΟΡΟΣ.

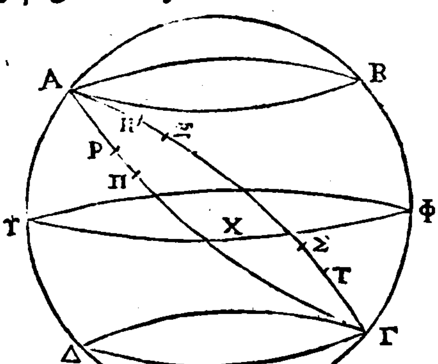
Ἐξαλλαγὴ φανεροῦ ἡμισφαιρίου ἐστίν, ὅταν τοῦ προηγουμένου σημείου τῆς περιφερείας ἐπὶ τῆς ἀνατολῆς ὄντος τὸ ἑπόμενον ἀνατεῖλον καὶ διελθὸν ὅλον τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἐπὶ τῆς δύσεως γένηται· τουτέστιν ὥστε ἀπὸ τοῦ ἀφανοῦς ἡμισφαιρίου εἰς τὸ ἀφανὲς ἐλθεῖν τὴν περιφέρειαν τὴν μεταξὺ τῶν δύο σημείων τοῦ ἡγουμένου καὶ τοῦ ἑπομένου· καὶ ἀνάπαλιν, ἐξαλλαγὴ ἀφανοῦς ἡμισφαιρίου.

ΛΗΜΜΑ.

Τοῦ τῶν ζωδίων κύκλου τῶν ἴσων περιφερειῶν καὶ ἴσον ἀπεχουσῶν ἀπὸ τῆς τροπικῆς συναφῆς ὁποτερασοῦν, ἐν ᾧ ἡ ἑτέρα δύνει ἡ ἑτέρα ἀνατέλλει, καὶ ἀνάπαλιν.

Ἔστω ἐν κόσμῳ ὁρίζων κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, θερινὸς μὲν τροπικὸς ὁ ΑΒ, χειμερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ ΓΔ, ὁ δὲ τῶν ζωδίων κύκλος ἔστω ὁ ΑΠΓΗ, καὶ ἔστω ἴση ἡ ΠΡ τῇ ΞΗ· λέγω ὅτι ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΠΡ δύνει ἡ ΞΗ ἀνατέλλει.

Εἰλήφθω γὰρ τῇ ΠΡ ἴση τε καὶ ἀπεναντίον ἡ ΣΤ, καὶ μεταξὺ τῶν ΞΗ, ΣΤ ὁ ἰσημερινὸς ἔστω ΥΧΦ. καὶ ἐπεὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΠΡ δύνει ἡ ΣΤ ἀνατέλλει, ἀλλ' ἐν ᾧ ἡ ΣΤ ἀνατέλλει ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΗΞ, ἴσον γὰρ ἀπέχουσι τοῦ ἰσημερινοῦ· καὶ ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ ΠΡ δύνει ἡ ΗΞ ἀνατέλλει.



LEMMA.

Ex æqualibus zodiaci circuli circumferentiis & æque distantibus ab alterutro tropicorum contactu, quo tempore altera occidit & altera oritur; & contra.

SIT in mundo horizon circulus ΑΒΓΔ; tropicus æstivus sit ΑΒ, hybernus autem sit ΓΔ; zodiacus circulus sit ΑΠΓΗ; & sit circumferentia ΠΡ æqualis circumferentiæ ΞΗ: dico quod quo tempore circumferentia ΠΡ occidit, & ipsa ΞΗ oritur.

Sumatur quidem circumferentiæ ΠΡ æqualis & opposita circumferentia ΣΤ; & inter circumferentias ΞΗ, ΣΤ sit circulus æquinoctialis ΥΧΦ. & quoniam [per 12. Phæn.] quo tempore ΠΡ circumferentia occidit, & ipsa ΣΤ oritur; sed [per 13. Phæn.] quo tempore circumferentia ΣΤ oritur & hoc etiam tempore circumferentia ΗΞ oritur; æqualiter enim distant ab æquinoctiali circulo: quare quo tempore ΠΡ occidit, & ipsa ΗΞ oritur.

ΘΕΩΡΗΜΑ ιδ'.

Τοῦ τῶν ζωδίων κύκλου αἱ ἴσαι περιφέρειαι οὐκ ἐν ἴσοις χρόνοις ἐξαλλάσσουσι τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἀλλ' ἐν πλείονι ἡ ἔγγιον τῆς συναφῆς τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ τῆς ἀπώτερον, ἐν ἴσῳ δὲ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ τροπικοῦ ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἡμικυκλίων, ὅταν ὁ πόλος τοῦ ὁρίζοντος μεταξὺ ᾖ τοῦ τε ἀρκτικοῦ καὶ τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ.

Ἔστω ὁρίζων κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, μέγιστος δὲ τῶν ἀεὶ φανερῶν ἔστω ὁ ΕΖ, θερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ ΒΑ, καὶ ἔστω ὁ τοῦ ΑΒΔΓ πόλος μεταξὺ τῶν ΕΖ, ΒΑ, ὁ δὲ τῶν ζωδίων κύκλος ποτὲ μὲν θέσιν ἐχέτω ὡς τὴν ΘΗΚ, ποτὲ δὲ ὡς τὴν ΑΜΝ, καὶ ἀπειλήφθω ἡ ΗΚ μὴ μείζων ἡμικυκλίου, καὶ γεγράφθω διὰ τοῦ Κ σημείου μέγιστος κύκλος ὁ ΚΝΖ ἐφαπτόμενος τοῦ ΕΖ. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ κύκλου τινὸς ΕΖ ἐφάπτεται, ἑτέρου δὲ τούτῳ παράλληλον τέμνει τὸν ΒΑ, καὶ ἔστιν ὁ τοῦ ΑΒΓΔ πόλος μεταξὺ τῶν ΑΒ, ΕΖ, καὶ γεγραμμένοι εἰσὶ μέγιστοι κύκλοι οἱ ΘΗΚ, ΑΜΝ ἐφαπτόμενοι τοῦ ΒΑ, μείζων ἐστὶν ἡ ΟΜΞ περιφέρεια τῆς ΟΔ περιφερείας. πάλιν, ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ κύκλου τινὸς τοῦ ΕΖ ἐφάπτεται, ἑτέρου δὲ τούτῳ παράλληλον τὸν ΒΑ τέμνει, καὶ ἔστιν ὁ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου πόλος μεταξὺ τῶν ΕΖ, ΒΑ· καὶ γέγραπται μέγιστος κύκλος ὁ ΖΝΚ

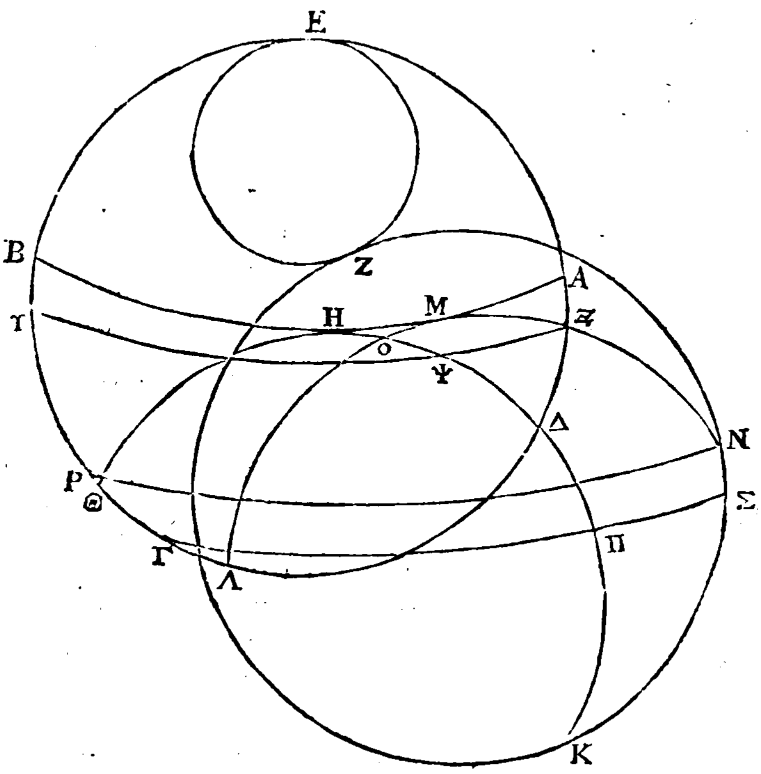
THEOREMA XIV.

Zodiaci circuli circumferentiæ æquales temporibus æqualibus non permutant hemisphærium conspicuum: sed majori tempore illa quæ contactui æstivi tropici propinquior fuerit, quam ea quæ remotior est ab eo: in tempore vero æquali quæ à tropico æstivo æque distant in utroque semicirculo; quando polus horizontis fuerit inter arcticum circulum & æstivum tropicum situs.

SIT horizon circulus ΑΒΓΔ; maximus autem eorum qui semper apparent sit circulus ΕΖ; æstivus tropicus sit ΒΑ; & sit polus circuli ΑΒΓΔ inter ΕΖ, ΒΑ; zodiacus vero circulus positionem habeat aliquando ut ΘΗΚ, interdum vero ΑΜΝ; & sumatur circumferentia ΗΚ quæ non sit major semicirculo; & per punctum Κ describatur maximus circulus ΚΝΖ tangens circulum ΕΖ. & quoniam in sphæra maximus circulus ΑΒΓΔ circulum quendam ΕΖ tangit, alterum autem ipsi parallelum ΒΑ secat; & [ex hyp.] est circuli ΑΒΓΔ polus inter ΑΒ, ΕΖ; & sunt descripti maximi circuli ΘΗΚ, ΑΜΝ tangentes circulum ΒΑ: circumferentia igitur ΟΜΞ major est circumferentia ΟΔ. rursus, quoniam in sphæra maximus circulus ΑΒΓΔ circulum quendam ΕΖ tangit, alium autem huic parallelum ΒΑ secat; & est circuli ΑΒΓΔ polus inter circulos ΕΖ, ΒΑ; & est descriptus maximus circulus

ZNK tangens circulum EZ: circuli igitur ZNK polus est inter circulos EZ, BA: quare ipsius alter polus est inter circulos æquales & parallelos ipsis EZ, BA. igitur KO major est quam OMN, ex quibus ipsa ΞMO major est ipsa OΔ: & reliqua igitur ΔK major est ΞN. ponatur ipsi NΞ æqualis ΔΠ, sintque circuli paralleli NP, ΓΠΣ, in quibus puncta N, Π ferantur. & quoniam semicirculus à puncto E inchoans, qui ad partes E, P proficiscitur, non concurrit cum semicirculo à puncto Z inchoante, qui ad partes Z, N tendit: similis igitur est circumferentia NP ipsi ΓΣ: quare circumferentia NP major est ipsa ΓΠ quam ut ei similis sit: majori igitur tempore punctum N inchoans à N circumferentiam NP percurrens pervenit

ἐφαπτόμενος τοῦ EZ· καὶ ὁ τοῦ ZNK ἄρα κύκλου πόλος μεταξὺ τῶν EZ, BA ἐστιν· ὁ ἄρα ἕτερος αὐτοῦ πόλος μεταξὺ τῶν ἴσων τε καὶ παραλλήλων τῶν EZ, BA ἐστιν. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ KO τῆς OMN, ὧν ἡ ΞMO τῆς OΔ μείζων ἐστί· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔK τῆς ΞN μείζων ἐστί. κείσθω τῇ NΞ ἴση ἡ ΔΠ, καὶ ἔστωσαν καθ' ὧν φέρεται τὰ N, Π σημεῖα παράλληλοι κύκλοι οἱ NP, ΓΠΣ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμπτωτόν ἐστι τὸ ἀπὸ τοῦ E ἡμικύκλιον ὡς ἐπὶ τὰ E, P μέρη τῷ ἀπὸ τοῦ Z ἡμικυκλίῳ ὡς ἐπὶ τὰ Z, N μέρη· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ NP περιφέρεια τῇ ΓΣ περιφερείᾳ· καὶ ἡ NP ἄρα τῆς ΓΠ μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ τὸ N ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ N τὴν NP περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ



ad P, quam Π inchoans à Π & circumferentiam ΠΓ percurrens pervenit ad Γ. sed quo quidem tempore punctum N circumferentiam NP percurrens pervenit ad punctum P, circumferentia NΞ permutat hemisphærium conspicuum; quo vero tempore Π incipiens à puncto Π & circumferentiam ΠΓ percurrens pervenit ad punctum Γ, circumferentia ΠΔ permutat hemisphærium conspicuum: majori igitur tempore circumferentia ΞN permutat hemisphærium conspicuum quam ipsa ΔΠ. Dico quod & ΞN propior est contactui tropici æstivi quam ΠΔ. describatur per punctum Ξ circulus parallelus ΞΥ: æqualis igitur est circumferentia ΞM ipsi HΨ: quare major est circumferentia HΔ ipsa MΞ: circumferentia igitur ΞN propior est contactui tropici æstivi quam ipsa ΠΔ circumferentia.

SIT horizon circulus ΑΒΓΔ; maximus autem eorum qui semper apparent sit circulus EZ; tropicus æstivus sit BHA; zodiacus vero positionem habeat ΓHΔ: dico quod & in

τὸ P παραγίνεται, ἤπερ τὸ Π ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Π τὴν ΠΓ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Γ παραγίνεται. ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ τὸ N τὴν NP περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ P παραγίνεται, ἡ NΞ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ τὸ Π ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Π τὴν ΠΓ διελθὸν ἐπὶ τὸ Γ παραγίνεται, ἡ ΠΔ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ ΞN ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ ΔΠ. Λέγω ὅτι καὶ ἔγγιόν ἐστιν ἡ ΞN τῆς συναφῆς τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ ἤπερ ἡ ΠΔ. γεγράφθω διὰ τοῦ Ξ παράλληλος κύκλος ὁ ΞΥ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΞM περιφέρεια τῇ HΨ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ HΔ τῆς MΞ· ἡ ΞN ἄρα ἔγγιόν ἐστι τῆς συναφῆς τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ ἤπερ ἡ ΠΔ.

ΕΣΤΩ ὁρίζων ὁ ΑΒΓΔ, μέγιστος δὲ τῶν ἀεὶ φανερῶν ὁ EZ, θερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ BHA, ὁ ζωδιακὸς δὲ κύκλος θέσιν ἐχέτω τὴν ΓHΔ· λέγω ὅτι

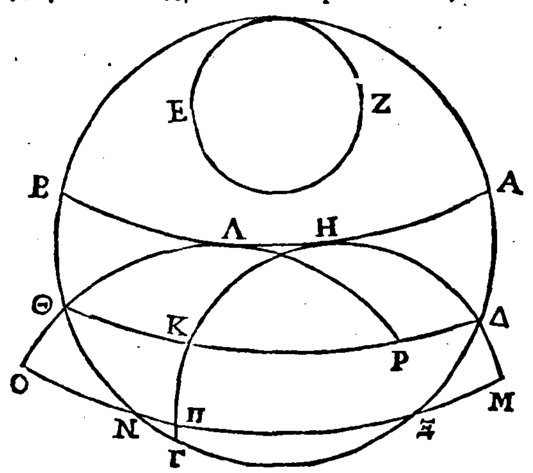
καὶ

καὶ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμικυκλίῳ τῷ ἐπὶ τὰ Η, Γ μέρη αἱ ἴσαι περιφέρειαι οὐκ ἐν ἴσοις χρόνοις ἐξαλλάσσουσι τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἀλλ᾽ ἐν πλείονι ἡ ἔγγιον τῆς συναφῆς τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ τῆς ἀπώτερον, ἐν ἴσῳ δὲ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἡμικυκλίων.

Γεγράφθω διὰ τοῦ Δ παράλληλος κύκλος ὁ ΔΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΗ τῇ ΗΔ. καὶ μετακεκινήσθω ὁ τῶν ζωδίων κύκλος, καὶ θέσιν ἐχέτω ὡς τὴν ΘΛΡ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΚΗ, ΗΔ ἴσον ἀπέχουσι τῆς συναφῆς τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ ΔΗ ἀνατέλλει, ἐν τούτῳ καὶ ΚΗ δύνει, τουτέστιν ἡ ΛΘ. ἀλλ᾽ ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ ἡ ΔΗ ἀνατέλλει ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ τὸ Η ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Α τὴν ΑΗ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Η παραγίνεται, ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ ἡ ΛΘ δύνει ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ τὸ Λ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Λ τὴν ΛΒ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Β παραγίνεται· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Η τὴν ΑΗ διελθὸν ἐπὶ τὸ Η παραγίγνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Λ τὴν ΛΒ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Β παραγίγνεται. κοινὸς προσκείσθω ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Δ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Δ τὴν ΔΡΚΘ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Θ παραγίγνεται· ὁ ἄρα χρόνος ἐν ᾧ τὸ Η ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Α τὴν ΑΗ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Η παραγίνεται, μετὰ τοῦ χρόνου ἐν

altero semicirculo, qui est ad partes Η, Γ, circumferentiæ æquales non æqualibus temporibus permutabunt conspicuum hemisphærium; sed majori tempore, quæ propior est contactui tropici æstivi, quam quæ remotior est ab eo; æquali vero tempore in unoquoque semicirculo, quæ æque distant ab æstivo tropico.

Describatur per punctum Δ parallelus circulus ΔΘ: æqualis igitur est circumferentia ΚΗ ipsi ΗΔ. circumvolvatur autem zodiacus, & positionem habeat veluti ΘΛΡ. & quoniam circumferentiæ ΚΗ, ΗΔ æque distant à contactu tropici æstivi: igitur [per lem. præm.] quo tempore ΔΗ oritur & hoc tempore ipsa ΚΗ occidit, hoc est circumferentia ΛΘ. sed tempus in quo circumferentia ΔΗ oritur, tempus est in quo punctum Η incipiens à puncto Α & circumferentiam ΑΗ percurrens pervenit ad Η punctum; & tempus in quo circumferentia ΛΘ occidit, tempus est in quo punctum Λ inchoans à puncto Λ & circumferentiam ΛΒ percurrens pervenit ad punctum Β: quare quo tempore punctum Η circumferentiam ΑΗ percurrens accedit ad punctum Η, eodem tempore & punctum Λ circumferentiam ΛΒ pertransiens pervenit ad punctum Β. commune addatur tempus in quo Δ incipiens à puncto Δ & circumferentiam ΔΡΚΘ percurrens pervenit ad punctum Θ: quare tempus, in quo punctum Η incipiens à puncto Α & circumferentiam ΑΗ percurrens accedit ad punctum Η, una cum tempore in quo Δ inci-



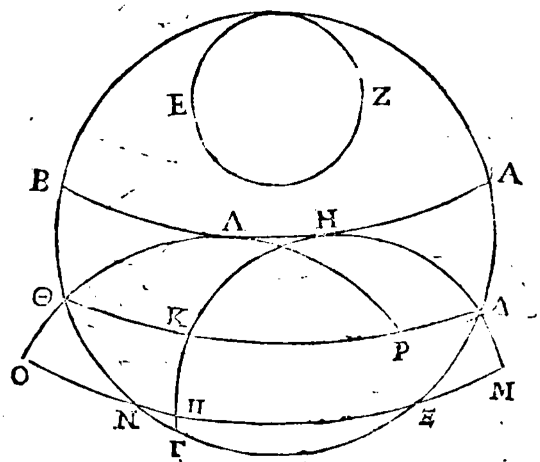
ᾧ τὸ Δ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Δ τὴν ΔΘ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Θ παραγίνεται, ἴσος ἐστὶ τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ τὸ Λ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Λ τὴν ΛΒ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Β παραγίνεται, μετὰ τοῦ χρόνου ἐν ᾧ τὸ Δ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Δ τὴν ΔΚΘ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Θ παραγίνεται. ἀλλ᾽ ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ τὸ Η ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Α τὴν ΑΗ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Η παραγίνεται, μετὰ τοῦ χρόνου ἐν ᾧ τὸ Δ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Δ τὴν ΔΘ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Θ παραγίνεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ ΗΔ περιφέρεια ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Λ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Λ τὴν ΛΒ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Β παραγίνεται, μετὰ τοῦ χρόνου ἐν ᾧ τὸ Δ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Δ τὴν ΔΡΘ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Θ παραγίνεται, ὁ χρό-

piens à puncto Δ & circumferentiam ΔΘ percurrens accedit ad punctum Θ, æquale est tempori in quo Λ incipiens à puncto Λ & circumferentiam ΛΒ percurrens pervenit ad punctum Β, una cum tempore, in quo Δ inchoans à puncto Δ & circumferentiam ΔΚΘ percurrens accedit ad punctum Θ. verum tempus in quo punctum Η incipiens ab Α & circumferentiam ΑΗ percurrens venit ad punctum Η, una cum tempore in quo Δ inchoans à puncto Δ & circumferentiam ΔΘ pertransiens pervenit ad punctum Θ, tempus est in quo circumferentia ΗΔ permutat conspicuum hemisphærium; & tempus in quo Λ inchoans à puncto Λ & circumferentiam ΛΒ percurrens accedit ad punctum Β, una cum tempore in quo punctum Δ incipiens à Δ & circumferentiam ΔΡΘ percurrens pervenit ad punctum Θ,

tempus

tempus est in quo circumferentia ΛΘ permutat conspicuum hemisphærium: quare quo tempore circumferentia ΚΗ permutat conspicuum hemisphærium, hoc eodem tempore & etiam circumferentia ΗΔ. sumatur punctum quoddam Μ, ut circumferentia ΗΔ sit æqualis ipsi ΔΜ; & sit ΜΞΝΟ parallelus circulus in quo punctum Μ feratur: æqualis igitur est ΔΜ circumferentiæ ΚΠ, & æqualiter distant ipsæ ΔΜ, ΚΠ ab æstivi tropici contactu: quare [per lem. præc.] quo tempore circumferentia ΔΜ oritur, hoc eodem tempore & ΠΚ occidit, hoc est ipsa ΘΟ. sed tempus in quo circumferentia ΔΜ oritur, tempus est in quo punctum Μ incipiens à puncto Μ & circumferentiam ΜΞ percurrens pervenit ad punctum Ξ; & tempus in quo circumferentia ΘΟ occidit, tempus est in quo punctum Ο incipiens ab Ν & circumferentiam ΝΟ percurrens pervenit ad punctum Ο: quare tempus in quo punctum Μ inchoans ab Μ & circumferentiam ΜΞ percurrens accedit ad punctum Ξ, idem est ac tempus in quo Ο inchoans à puncto Ν & circumferentiam ΝΟ pertransiens accedit ad Ο punctum. commune addatur tempus in quo punctum Ξ incipiens ab Ξ & circumferentiam ΞΝ percurrens accedit ad punctum Ν: quare tempus in quo Μ incipiens à puncto Μ & circumferentiam ΜΝ percurrens pervenit ad punctum Ν, æquale est tempori in quo punctum Ο incipiens ab ipso Ξ & circumferentiam ΞΟ percurrens pervenit ad punctum Ο. sed tempus in quo Μ incipiens à puncto Μ & circumferentiam ΜΝ pertransiens pervenit ad punctum Ν, tempus est in quo ΔΜ circumferentia permutat conspicuum hemisphærium; & tempus in quo punctum Ο incipiens à Ξ & circumferentiam ΞΟ percurrens accedit ad punctum Ο, tempus est in quo circumferentia ΟΘ, hoc est ipsa ΚΠ, permutat conspicuum hemisphærium: quare quo tempore ΔΜ permutat conspicuum hemisphærium, hoc ipso tempore & etiam circumferentia ΚΠ. & quoniam ΗΔ majori tempore permutat conspicuum hemisphærium quam circumferentia ΔΜ; sed quo tempore ΗΔ permutat conspicuum hemisphærium, hoc eodem tempore & ipsa ΗΚ; quo vero tempore ΔΜ circumferentia permutat conspicuum hemisphærium, hoc tempore etiam & ΚΠ circumferentia: quare majori tempore circumferentia ΗΚ permutat conspicuum hemisphærium quam ΚΠ circumferentia.

νος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ ΛΘ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ ΚΗ περιφέρεια ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΗΔ. εἰλήφθω δή τι σημεῖον τὸ Μ, ὡς ἴσην εἶναι τὴν ΗΔ τῇ ΔΜ, καὶ ἔστω καθ' οὗ φέρεται τὸ Μ σημεῖον παράλληλος κύκλος ὁ ΜΞΝΟ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΚΠ, καὶ ἴσον ἀπέχουσιν αἱ ΔΜ, ΚΠ τῆς συναφῆς τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ ΔΜ περιφέρεια ἀνατέλλει, ἐν τούτῳ ἡ ΠΚ δύνει, τουτέστιν ἡ ΘΟ. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ ἡ ΔΜ ἀνατέλλει, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ τὸ Μ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Μ τὴν ΜΞ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ξ παραγίνεται· ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ ἡ ΘΟ δύνει, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ τὸ τὸ Ο ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Ν τὴν ΝΟ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ο παραγίνεται· ὁ ἄρα χρόνος ἐν ᾧ τὸ Μ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Μ τὴν ΜΞ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ξ παραγίνεται, ὁ αὐτός ἐστι τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ τὸ Ο ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Ν τὴν ΝΟ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ο παραγίνεται. κοινὸς προσκείσθω ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Ξ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Ξ τὴν ΞΝ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ν παραγίνεται· ὁ ἄρα χρόνος, ἐν ᾧ τὸ Μ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Μ τὴν ΜΝ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ν παραγίνεται, ἴσος ἐστὶ τῷ χρόνῳ, ἐν ᾧ τὸ Ο ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Ξ τὴν ΞΟ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ο παραγίνεται. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος, ἐν ᾧ τὸ Μ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Μ τὴν ΜΝ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ν παραγίνεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ ΔΜ περιφέρεια ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Ο ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Ξ τὴν ΞΟ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ο παραγίνεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ ΟΘ περιφέρεια, τουτέστιν ἡ ΚΠ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ ΔΜ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΚΠ. καὶ ἐπεὶ ἐν πλείονι χρόνῳ ἡ ΗΔ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ ΔΜ, ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ ἡ ΗΔ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΗΚ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἐν ᾧ δὲ ἡ ΔΜ ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΚΠ· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ ΗΚ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ ΚΠ.



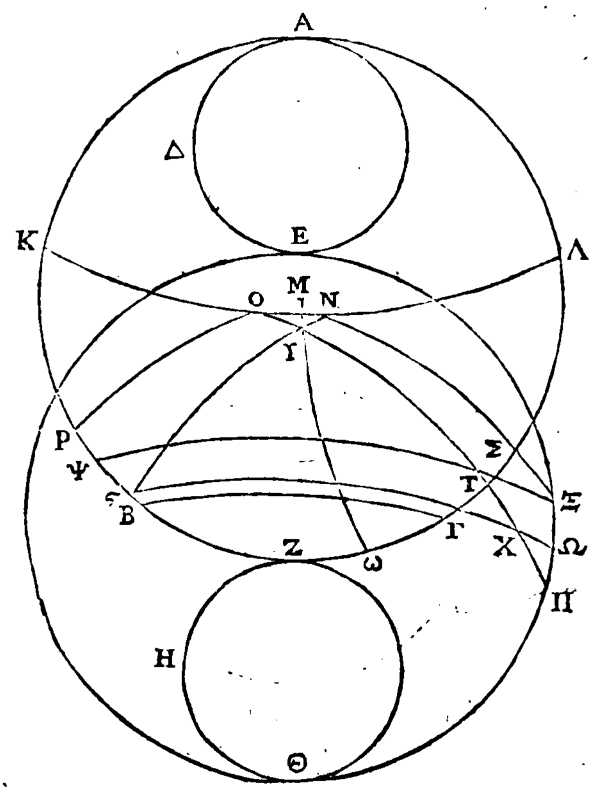
ΑΛ-

ΑΛΛΩΣ.

ΕΣΤΩ ἐν κόσμῳ ὁρίζων κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ μέγιστος μὲν τῶν ἀεὶ φανερῶν ὁ ΑΔΕ, μέγιστος δὲ τῶν ἀεὶ ἀφανῶν ὁ ΖΗΘ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ἔστω ὁ ΚΛ, χειμερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ ΒΓ, * καὶ ἔστω ἀνατολικὰ μὲν τὰ Λ, Γ μέρη, δυτικὰ δὲ τὰ Κ,Β, ζωδιακοῦ δὲ θέσεις ἔστωσαν τοῦ μετὰ τὸν καρκίνον ἡμικυκλίου αἱ ΝΞ, ΟΠ, καὶ ἀπειλήφθω ἡ ΟΠ περιφέρεια μὴ μείζων ἡμικυκλίου οὖσα, καὶ μέγιστος κύκλος γεγράφθω διὰ τοῦ Π ἐφαπτόμενος τοῦ ΑΔΕ· ἐφάψεται ἄρα καὶ τοῦ ΖΗΘ, ἤτοι δὴ διὰ τοῦ Ο σημείου ἥξει, ἢ ὑπερπεσεῖται τὸ Ο σημεῖον. γεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ ΕΘΠ, ὥστε ἀσύμπτωτον εἶναι τὸ ἀπὸ τοῦ Ε ἡμικύκλιον ὡς ἐπὶ τὰ Ξ, Π μέρη τῷ ἀπὸ τοῦ Α ἡμικυκλίῳ ὡς ἐπὶ τὰ Κ, Ρ μέρη, καὶ προσαναπεπληρώσθωσαν οἱ ΞΝΒ, ΠΟΡ κύκλοι. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ἐστὶν ὁ ΑΒΓ, καὶ τέμνουσι δύο μέγιστοι κύκλοι ἀλλήλους οἱ ΒΝΣ, ΡΟΤΠ, καὶ ἔστιν ὁ τοῦ ΑΒΓ κύκλου πόλος μεταξὺ τῶν ΑΔΕ, ΚΛ περιφερειῶν· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΣΝΥ περιφέρεια τῆς ΥΤ περιφερείας· (διὰ γὰρ τοῦ Υ καὶ τοῦ Μ πόλου τοῦ ΑΒΓ ἡμικυκλίου μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΜΥω· ὁ ΜΥω ἄρα ὀρθὸς πρὸς τὸν ΑΒΓ) ἡ ΤΥ ἄρα περιφέρεια τῆς ΥΝΣ περιφερείας ἐλάσσων ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο μέγιστοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΕΘΠΩ τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἐφάπτονται τοῦ ΑΔΕ, καὶ τῷ ΑΔΕ παράλληλον ὄντα τὸν ΚΛ τέμνουσι, καὶ ἔστιν ὁ τοῦ ΑΒΓ πόλος μεταξὺ τῶν ΑΔΕ, ΚΛ κύκλων· καὶ ὁ τοῦ ΕΘΠ ἄρα πόλος μεταξύ ἐστι τῶν ΑΔΕ, ΚΛ κύκλων· ὁ ἄρα ἕτερος αὐτοῦ πόλος ἐστὶ μεταξὺ τῶν ΗΖΘ, ΒΓ κύκλων. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ἐστὶν ὁ ΕΘΠ, καὶ τὸν ΕΘΠ τέμνουσι δύο μέγιστοι κύκλοι οἱ ΡΟΠ, ΒΝΞ, καὶ ἔστιν ὁ τοῦ ΕΘΠ πόλος μεταξὺ τῶν ΒΓ, ΗΘΖ· μείζων ἐστὶν ἡ ΠΥ περιφέρεια τῆς ΥΝΞ περιφερείας. ὧν ἡ ΥΤ τῆς ΥΝΣ ἐλάσσων ἐστίν· λοιπὴ ἄρα ἡ ΤΠ λοιπῆς τῆς ΣΞ μείζων ἐστί. κείσθω τῇ ΣΞ περιφερείᾳ ἴση περιφέρεια ἡ ΤΧ καὶ γεγράφθωσαν παράλληλοι κύκλοι καθ' ὧν φέρεται τὰ Ξ, Χ σημεῖα οἱ ΞΨ, Ως· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΞΨ περιφέρεια τῇ Ως περιφερείᾳ· ἡ ΞΨ ἄρα τῆς Χς μείζων ἐστὶν ἡ ὁμοία· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ τὸ Ξ σημεῖον τὴν ΞΨ περιφέρειαν διαπορεύεται

ALITER.

SIT in mundo horizon circulus ABΓ, maximus autem semper-apparentium sit circulus ΑΔΕ, maximus vero semper-occultorum sit circulus ΖΗΘ; & tropicus æstivus sit ΚΛ, hybernus autem sit ΒΓ; & sint partes orientales quidem Λ, Γ, occidentales vero Κ,Β; zodiaci post cancrum semicirculi positiones sint ipsæ ΝΞ, ΟΠ; sumaturque circumferentia ΟΠ quæ non sit major semicirculo, & per punctum Π describatur maximus circulus tangens circulum ΑΔΕ: tanget igitur etiam & circulum ΖΗΘ; & vel transibit per punctum Ο, vel per superiorem partem ipsius Ο. describatur, sitque ipse ΕΘΠ, ita ut semicirculus à puncto Ε inchoans, qui ad partes Ξ, Π tendat, non concurrat cum semicirculo à puncto Α proficiscente, qui ad partes Κ,Ρ proficiscatur; & compleantur circuli ΞΝΒ, ΠΟΡ. & quoniam in sphæra maximus circulus est ΑΒΓ; & sunt duo maximi circuli ΒΝΣ, ΡΟΤΠ, qui se mutuo secant bifariam; atque [ex hyp.] est circuli ΑΒΓ polus inter circulos ΑΔΕ,ΚΛ: major igitur est circumferentia ΣΝΥ ipsa ΥΤ: (etenim per Υ & polum Μ semicirculi ΑΒΓ traductus est maximus circulus ΜΥω, & igitur ΜΥω est ad ΑΒΓ rectus) quare & ipsa ΤΥ circumferentia minor est ipsa ΥΝΣ. & quoniam in sphæra duo circuli maximi ΑΒΓ,ΕΘΠΩ eundem circulum ΑΔΕ tangunt, & huic ΑΔΕ parallelum alterum ΚΛ secant; atque est circuli ΑΒΓ polus inter circulos ΑΔΕ, ΚΛ: erit & ipsius ΕΘΠ polus etiam inter ΑΔΕ, ΚΛ circulos: quare & alter polus ipsius est inter circulos ΗΖΘ,ΒΓ. & quoniam in sphæra maximus circulus est ΕΘΠ; & ipsum ΕΘΠ circulum secant duo alii maximi circuli ΡΟΠ, ΒΝΞ; & est circuli ΕΘΠ polus inter circulos ΒΓ, ΗΘΖ: major igitur est circumferentia ΠΥ ipsa ΥΝΞ. ex quibus ΥΤ minor est ipsa ΥΝΣ: & reliqua igitur ΤΠ major est reliqua ΣΞ. ponatur ipsi ΣΞ æqualis circumferentia ΤΧ; & describantur circuli paralleli, qui sint ΞΨ, Ως, in quibus puncta Ξ, Χ ferantur: similis igitur est circumferentia ΞΨ ipsi Ως: quare & ΞΨ major est circumferentia Χς quam ut ei similis sit: majori igitur tempore punctum Ξ circumferentiam ΞΨ percurrit quam punctum



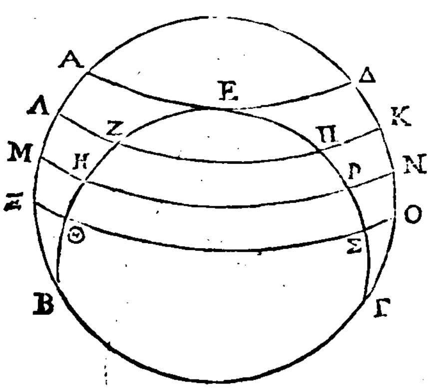
* In Cod. Bodl. καὶ ἔστω ὁ τοῦ ΑΒΓ κύκλου πόλος μεταξὺ τῶν ΑΔΕ, ΚΛ κύκλων, καὶ ἔστω ἀνατολικὰ &c.

x ipsam X ϛ pertranseat. verum tempus quidem in quo punctum Ξ circumferentiam Ξ Ψ percurrit, tempus est in quo circumferentia Σ Ξ permutat manifestum hemisphærium; tempus autem in quo punctum X percurrit circumferentiam X ϛ, tempus est in quo similiter ipsa T X permutat manifestum hemisphærium: quare majori tempore circumferentia Σ Ξ permutat manifestum hemisphærium quam ipsa T X. atque est ipsa Σ Ξ propinquior contactui tropici æstivi quam T X.

Quare majori tempore circumferentia illa permutat manifestum hemisphærium, quæ quidem contactui tropici æstivi propinquior est, quam quæ ab eo est remotior.

Similiter autem circumferentiæ æquales, quæ sunt in semicirculo post capricornum, non temporibus æqualibus permutant conspicuum hemisphærium; sed majori tempore quæ propior est tropico æstivo, quam quæ remotior est ab eo; æquali vero tempore quæ æque distant ab alterutro contactu.

Sit in mundo horizon A B Γ Δ; æstivus tropicus sit A Δ; zodiacus circulus positionem habeat B E Γ; sit autem circumferentia B E in semicirculo qui est post capricornum; & circumferentia E Γ in semicirculo qui est post cancrum; & sint partes quidem orientales versus punctum Δ, occidentales autem versus punctum B; & sumantur æquales circumferentiæ Z H, H Θ: dico quod circumferentia Z H majori tempore permutat conspicuum hemisphærium quam circumferentia H Θ.



Describantur paralleli circuli K Λ, M N, Ξ O, in quibus puncta Z, H, Θ ferantur: æqualis igitur est circumferentia Z H ipsi Π P; & circumferentia H Θ ipsi P Σ. sed [ex constr.] circumferentia Z H est æqualis circumferentiæ H Θ: quare & Π P ipsi P Σ æqualis est. & quoniam [per lem. præm.] quo tempore circumferentia Π P occidit & circumferentia Z H oritur; commune apponatur tempus in quo punctum Π circumferentiam K Λ percurrit, quod æquale est tempori quo Z punctum percurrit circumferentiam K Λ: tempus igitur in quo punctum Π percurrit circumferentiam K Λ & circumferentia Π P occidit, æquale est tempori in quo circumferentia Z H oritur & punctum Z circumferentiam K Λ pertransit. verum tempus quidem in quo punctum Π ipsam K Λ percurrit & circumferentia Π P occidit, tempus est in quo circumferentia Π P permutat conspicuum hemisphærium; & tempus in quo Z H oritur & punctum Z circumferentiam K Λ percurrit, tempus est in quo ipsa Z H permutat conspicuum hemisphærium: quare circumferentiæ Z H, Π P æquali tempore permutant conspicuum hemisphærium. similiter demonstrabitur quod & ipsæ H Θ, P Σ æquali etiam tempore permutabunt conspicuum hemisphærium. sed [per part. prior. hujus] Π P majori tempore permutat con-

ἤπερ τὸ X τῆς X ϛ. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ τὸ Ξ σημεῖον τὴν Ξ Ψ περιφέρειαν διαπορεύεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ Σ Ξ περιφέρεια ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ τὸ X σημεῖον τὴν X ϛ περιφέρειαν διαπορεύεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ T X ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ Σ Ξ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ T X. καὶ ἔστιν ἡ Σ Ξ ἔγγιον τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ ἤπερ ἡ T X.

Εν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἡ ἔγγιον τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ τῆς ἀπώτερον.

ΩΣΑΥΤΩΣ δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ μετὰ τὸν αἰγόκερω ἡμικυκλίου αἱ ἴσαι περιφέρειαι οὐκ ἐν ἴσοις χρόνοις ἐξαλλάσσουσι τὸ ἡμισφαίριον φανερὸν, ἀλλ' ἐν πλείονι ἡ ἔγγιον τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ τῆς ἀπώτερον, ἐν ἴσῳ δὲ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ὁποτέρας οὖν τῶν συναφῶν.

Εστω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ A B Γ Δ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ὁ A Δ, ὁ δὲ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω τὴν B E Γ, καὶ ἔστω ἡ μὲν B E περιφέρεια ἐπὶ τοῦ μετὰ τὸν αἰγόκερω ἡμικυκλίου, ἡ δὲ E Γ ἐπὶ τοῦ μετὰ τὸν καρκίνον, καὶ ἔστωσαν ἀνατολικὰ μὲν τὰ Δ μέρη, δυτικὰ δὲ τὰ B, καὶ ἀπειλήφθωσαν ἴσαι περιφέρειαι αἱ Z H, H Θ· λέγω ὅτι ἡ Z H ἐν πλείονι χρόνῳ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ H Θ.

Γεγράφθωσαν παράλληλοι κύκλοι οἱ K Λ, M N, Ξ O, καθ' ὧν φέρεται τὰ Z, H, Θ σημεῖα· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Z H περιφέρεια τῇ Π P περιφερείᾳ, ἡ δὲ H Θ περιφέρεια τῇ P Σ. ἀλλ' ἡ Z H τῇ H Θ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ Π P ἄρα τῇ P Σ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ Π P δύνει ἡ Z H ἀνατέλλει, κοινὸς προσκείσθω ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Π σημεῖον τὴν K Λ περιφέρειαν διαπορεύεται, ἴσος ὢν τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ τὸ Z σημεῖον τὴν K Λ περιφέρειαν διαπορεύεται· ὁ ἄρα χρόνος ἐν ᾧ τὸ Π σημεῖον τὴν K Λ περιφέρειαν διαπορεύεται καὶ ἡ Π P δύνει, ἴσος ἐστὶ τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ ἡ Z H περιφέρεια ἀνατέλλει καὶ τὸ Z σημεῖον τὴν K Λ περιφέρειαν διαπορεύεται. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ τὸ Π σημεῖον τὴν K Λ περιφέρειαν διαπορεύεται καὶ ἡ Π P δύνει, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ Π P ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ Z H ἀνατέλλει καὶ τὸ Z σημεῖον τὴν K Λ περιφέρειαν διαπορεύεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ Z H ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· αἱ Z H, Π P ἄρα ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ H Θ, P Σ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον. ἡ δὲ Π P τῆς P Σ ἐν πλείονι χρόνῳ ἐξαλλάττει

λάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, καὶ ἀπεδείχθησαν αἱ ΖΗ, ΠΡ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάξαι τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· καὶ ἡ ΖΗ ἄρα ἐν πλείονι χρόνῳ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ ΗΘ.

Τοῦ ἄρα τῶν ζῳδίων κύκλου αἱ ἴσαι περιφέρειαι οὐκ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἀλλ' ἐν πλείονι ἡ ἔγγιον τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ τῆς ἀπώτερον. καὶ συναποδέδεικται ὅτι αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι.

spicuum hemisphærium quam ipsa ΡΣ; & est etiam demonstratum quod ΖΗ, ΠΡ æquali tempore permutant conspicuum hemisphærium: quare & circumferentia ΖΗ majori tempore permutat conspicuum hemisphærium quam ipsa ΗΘ.

Zodiaci igitur circuli circumferentiæ æquales haud æquali tempore permutant conspicuum hemisphærium, sed in majori tempore quæ propior est tropico æstivo quam quæ remotior est ab eo: æquali vero tempore quæ inde æque distant.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Καὶ ἐν καθόλου χρὴ εἰδέναι, ὅτι; τῶν προηγουμένων σημείων ἐπὶ τοῦ ὁρίζοντος ὄντων, ἡ περιφέρεια οὔτε ἀνατέλλει οὔτε δύνει, τῶν δὲ ἑπομένων σημείων ἐπὶ τοῦ ὁρίζοντος ὄντων πᾶσα ἀνέτειλε, καὶ πᾶσα ἔδυ· τὰ γὰρ ὑπηγούμενα σημεῖα καὶ πρότερα ἀνατέλλει καὶ πρότερα δύνει κατὰ τὸ δ' θεώρημα. τῆς οὖν ΠΡ περιφερείας προηγούμενον ἦν σημεῖον τὸ Π, τῆς δὲ ΗΖ προηγούμενον τὸ Η. λαβὼν οὖν τὴν μὲν ΠΡ δύνουσαν, τὴν δὲ ΗΖ ἀνατέλλουσαν, ἀναγκαίως τὰς ἐξαλλαγὰς αὐτῶν ζητῶν τὰς ἐπὶ τοῦ φανεροῦ ἡμισφαιρίου προσέλαβε τῆς μὲν ΠΡ τὴν δύσιν, τῆς δὲ ΗΖ τὴν ἀνατολήν· ὅτε γὰρ τὸ Π ἐπὶ τὸ Λ ἔρχεται, ἡ ΠΡ οὔπω δύνει, ἀλλ' ἔτι ὑπὲρ γῆς ἐστι· διὸ προσέλαβεν αὐτῆς τὴν δύσιν. τοῦ γὰρ Π κατὰ τὸ Κ ἐπὶ τῆς ἀνατολῆς ὄντος, ἡ ΠΡ πᾶσα ὑπὸ γῆν ἐστι, καὶ κινουμένης τῆς σφαίρας ἄνω φέρεται πᾶσα· διὸ ἐν ᾧ τὸ Π ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὸ Λ ἔρχεται μετὰ τῆς δύσεως τῆς ΠΡ, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ ΠΡ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον. πάλιν, τοῦ Ζ κατὰ τὸ Κ ἐπὶ τῆς ἀνατολῆς ὄντος, ἡ ΗΖ πᾶσα προανέτειλε· διὸ προσέλαβεν αὐτῆς τὴν ἀνατολήν. γενομένου δὲ τοῦ Ζ κατὰ τὸ Λ, πᾶσα ἡ ΗΖ δύνει· διὸ ἐν ᾧ τὸ Ζ ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὸ Λ ἔρχεται μετὰ τῆς ἀνατολῆς τῆς ΗΖ, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ ΗΖ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον. ἐὰν δὲ, ὡς ἔχει ἐν ἄλλῃ ἐκδόσει, τῆς μὲν ΠΡ τὴν ἀνατολὴν, τῆς δὲ ΗΖ τὴν δύσιν ζητῶν, οὐκέτι λήψει τὰ Π, Ζ σημεῖα, ἀλλὰ τὰ Ρ, Η, καὶ τὸν χρόνον ἐν ᾧ τό τε Ρ τὴν ΝΜ διέρχεται καὶ τὸ Η τὴν ΝΜ.

SCHOLIUM.

In universum scire oportet, quod præcedente circumferentiæ puncto in horizonte existente, ipsa circumferentia neque ortum habuit neque occasum, subsequente vero ejus puncto in horizonte posito, tota prius ortum habuit vel occasum; antecedentia enim puncta prius oriuntur & prius occidunt per theorema quartum. circumferentiæ itaque ΠΡ punctum præcedens erat Π; ipsius vero ΗΖ præcedens punctum Η. *auctor* igitur sumens circumferentiam quidem ΠΡ occidentem, ipsam vero ΗΖ orientem, earumque permutationes quærens in conspicuo hemisphærio, necessario sumpsit occasum quidem circumferentiæ ΠΡ, ortum vero ipsius ΗΖ. nam quando punctum Π ad Λ pervenit, circumferentia ΠΡ nondum occidit, sed adhuc supra terram est; quare sumpsit ejus occasum: puncto enim Π existente in ortu ad Κ, tota circumferentia ΠΡ est infra terram, & mota sphæra tota sursum fertur: quare tempus quo punctum Π à Κ ad Λ pervenit una cum tempore quo ipsa circumferentia ΠΡ occidit, est tempus quo circumferentia ΠΡ permutat conspicuum hemisphærium. rursus, puncto Ζ existente in ortu ad Κ, tota circumferentia ΗΖ prius ortum habuit; quare *auctor* sumpsit ejus ortum. posito autem puncto Ζ ad Λ, tota circumferentia ΗΖ occasum habuit: quare tempus quo punctum Ζ à Κ ad Λ pervenit una cum tempore quo circumferentia ΗΖ oritur, est tempus quo circumferentia ΗΖ permutat conspicuum hemisphærium. si vero *quærat* (ut fit in alia hypothesi) circumferentiæ quidem ΠΡ ortum, circumferentiæ vero ΗΖ occasum; non amplius sumet puncta Π, Ζ, sed ipsa Ρ, Η, tempusque quo punctum Ρ percurrit circumferentiam ΝΜ, & quo punctum Η percurrit ipsam ΝΜ.

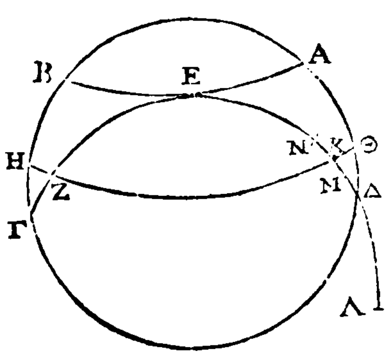
ΣΧΟΛΙΟΝ α'. ΕΚ ΠΕΡΙΣΣΟΥ.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἀπειλήφθω ἡ ΕΖ μὴ μείζων τεταρτημορίου, καὶ ἔστω καθ' οὗ φέρεται τὸ Ζ σημεῖον ὁ ΖΚΘ κύκλος· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ. κείσθω τῇ ΕΚ ἴση ἡ ΛΚ· ὅλη ἄρα ἡ ΖΕΚ ὅλῃ τῇ ΕΚΛ ἐστιν ἴση. λέγω ὅτι εἰ μὲν τεταρτημορίου ἐστὶν ἡ ΕΖ, αἱ ΖΕΚ, ΕΚΛ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· εἰ δὲ ἐλάσσων ἐστὶ τεταρ-

SCHOLIUM I. EX ABUNDANTI.

Iisdem suppositis, assumatur circumferentia ΕΖ quæ non sit major quarta zodiaci parte; & sit ΖΚΘ parallelus circulus in quo punctum Ζ feratur: æqualis igitur est circumferentia ΕΖ circumferentiæ ΕΚ. ponatur ipsi ΕΚ æqualis circumferentia ΑΚ: tota igitur ΖΕΚ toti ΕΚΑ æqualis est. dico quod, si quidem circumferentia ΕΖ quarta zodiaci pars est, ipsæ circumferentiæ ΖΕΚ, ΕΚΑ æquali tempore permutabunt conspicuum hemisphærium; si vero circumferentia EZ est minor quarta zodiaci parte, quod circumferentia ZEK majori tempore permutabit conspicuum hemisphærium quam ipsa EKΛ.

Sit primum circumferentia EZ quarta zodiaci pars: quare & ipsa EK etiam est quarta pars zodiaci; igitur circulus HZΘ est æquinoctialis. & quoniam EK, KΛ circumferentiæ æque distant ab æquinoctiali circulo: quare [per 12. Phæn.] quo tempore circumferentia EK occidit, eodem tempore & KΛ etiam occidit. sed [per lem. præm.] quo tempore EK circumferentia occidit, hoc ipso tempore & circumferentia EZ oritur: quare quo tempore circumferentia EZ oritur, & ipsa KΛ occidit. commune adponatur tempus in quo EK permutat conspicuum hemisphærium: tempus igitur in quo circumferentia KΛ occidit una cum tempore in quo EK permutat conspicuum hemisphærium, æquale est tempori in quo ipsa EZ oritur, una cum tempore in quo EK circumferentia permutat conspicuum hemisphærium. verum tempus in quo ΛK occidit & ipsa KE permutat conspicuum hemisphærium, tempus est in quo circumferentia EΛ permutat conspicuum hemisphærium; & tempus in quo EZ oritur una cum tempore in quo EK permutat conspicuum hemisphærium, tempus est in quo circumferentia ZEK permutat conspicuum hemisphærium: quare circumferentiæ ZEK, EKΛ æquali tempore permutant conspicuum hemisphærium.



SED sit circumferentia EZ minor quarta zodiaci parte: quare & ipsa EK minor est etiam quarta zodiaci parte. ponatur EM quarta zodiaci pars; & ponatur ipsi MK æqualis KN: reliqua igitur EN reliquæ MΛ est æqualis. atque est circumferentia EN propior contactui tropici æstivi quam ipsa MΛ: majori igitur tempore [per 12. Phæn.] circumferentia EN occidit, quam ipsa MΛ. eadem ratione & circumferentia NK majori quoque tempore occidit quam ipsa KM: igitur & circumferentia EK majori etiam tempore occidit quam circumferentia KΛ. sed [per lem. præm.] quo tempore circumferentia EK occidit, & ipsa EZ oritur: quare majori tempore circumferentia EZ oritur quam ipsa KΛ occidit. commune adponatur tempus, in quo circumferentia EK permutat conspicuum hemisphærium: quare majori tempore ZEK permutat conspicuum hemisphærium quam ipsa EΛ circumferentia.

τημορίου ἡ EZ, ἐν πλείονι χρόνῳ ἡ ZEK ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ EKΛ.

Ἔστω πρότερον τεταρτημορίου ἡ EZ· καὶ ἡ EK ἄρα τεταρτημορίου ἐστίν· ἰσημερινὸς ἄρα ἐστὶν ὁ HZΘ. καὶ ἐπεὶ αἱ EK, KΛ ἴσον ἀπέχουσι τοῦ ἰσημερινοῦ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ EK δύνει ἐν τούτῳ καὶ ὁ KΛ. ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἡ EK δύνει ἐν τούτῳ ἡ EZ ἀνατέλλει· καὶ ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ EZ ἀνατέλλει ἡ KΛ δύνει. κοινὸς προσκείσθω ὁ χρόνος, ἐν ᾧ ἡ EK ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ὁ ἄρα χρόνος ἐν ᾧ ἡ KΛ δύνει, μετὰ τοῦ χρόνου ἐν ᾧ ἡ EK ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἴσος ἐστὶ τῷ χρόνῳ, ἐν ᾧ ἡ EZ ἀνατέλλει καὶ ἡ EK ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον. ἀλλ᾽ ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ ἡ ΛK δύνει καὶ KE ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ EΛ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ ἡ EZ ἀνατέλλει μετὰ τοῦ χρόνου ἐν ᾧ ἡ EK ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ ZEK ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· αἱ ZEK, EKΛ ἄρα ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον.

ἈΛΛ᾽ ἔστω ἡ EZ περιφέρεια ἐλάσσων τεταρτημορίου· καὶ ἡ EK ἄρα ἐλάσσων ἐστὶ τεταρτημορίου. κείσθω τεταρτημορίου ἡ EM, καὶ κείσθω τῇ MK ἴση ἡ KN· λοιπὴ ἄρα ἡ EN λοιπῇ τῇ MΛ ἐστὶν ἴση. καὶ ἡ EN ἔγγιον τῆς συναφῆς τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ ἤπερ ἡ MΛ· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ EN δύνει ἤπερ ἡ MΛ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ NK ἐν πλείονι χρόνῳ δύνει ἤπερ ἡ KM· καὶ ἡ EK ἄρα τῆς KΛ ἐν πλείονι χρόνῳ δύνει. ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἡ EK δύνει ἡ EZ ἀνατέλλει· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ EZ ἀνατέλλει ἤπερ ἡ KΛ δύνει. κοινὸς προσκείσθω ὁ χρόνος ἐν ᾧ ἡ EK ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ ZEK ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ EΛ.

SCHOLIUM II. EX ABUNDANTI.

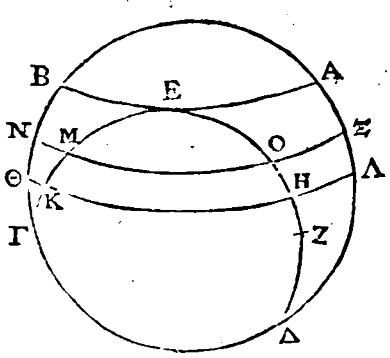
Iisdem similiter suppositis, sumatur circumferentia EZ non major quarta zodiaci parte; & sumatur punctum utcunque H sitque ΘKHΛ circulus parallelus in quo H punctum feratur; ponatur vero circumferentiæ ZH æqualis circumferentia KM; æqualis igitur est circumferentia KEH ipsi MEZ: dico quod majori tempore KEH circumferentia permutat conspicuum hemisphærium quam MEZ.

ΣΧΟΛΙΟΝ β'. ΕΚ ΠΕΡΙΣΣΟΥ.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἀπειλήφθω ἡ EZ μὴ μείζων τεταρτημορίου, καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον τὸ H, καὶ ἔστω καθ᾽ οὗ φέρεται τὸ H σημεῖον παράλληλος κύκλος ὁ ΘKHΛ, καὶ κείσθω τῇ ZH ἴση ἡ KM· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ KEH τῇ MEZ· λέγω ὅτι ἐν πλείονι χρόνῳ ἡ KEH περιφέρεια ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ MEZ.

Ἔστω

Ἔστω καθ' ὃ φέρεται τὸ Μ σημεῖον παράλληλος κύκλος ὁ ΝΜΞ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΜ τῇ ΟΗ. καὶ ἐπεὶ ἔγγιόν ἐστιν ἡ ΟΗ τῆς συναφῆς τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ ἤπερ ἡ ΗΖ· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ ΟΗ δύνει ἤπερ ἡ ΗΖ. ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἡ ΟΗ δύνει ἡ ΜΚ ἀνατέλλει· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ ΜΚ ἀνατέλλει ἤπερ ἡ ΗΖ δύνει. κοινὸς προσκείσθω ὁ χρόνος ἐν ᾧ ἡ ΜΕΗ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ ΚΕΗ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ ΜΕΖ.



Sit N M Ξ circulus parallelus in quo punctum M feratur: æqualis igitur est circumferentia K M ipsi O H. & quoniam circumferentia O H propior est contactui tropici æstivi quam ipsa H Z, majori igitur tempore [per 12. Phæn.] O H occidit quam ipsa H Z. sed [per lem. præm.] quo tempore circumferentia O H occidit & ipsa M K oritur: quare majori tempore circumferentia M K oritur quam H Z occidit. commune adponatur tempus, in quo circumferentia M E H permutat conspicuum hemisphærium: quare majori tempore circumferentia K E H permutat conspicuum hemisphærium quam ipsa M E Z.

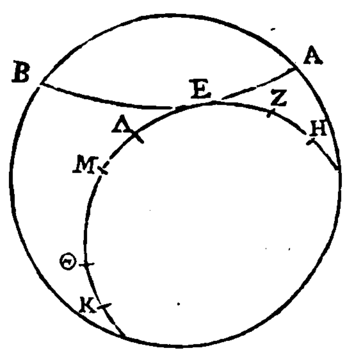
ΣΧΟΛΙΟΝ γ'. ΕΚ ΠΕΡΙΣΣΟΥ.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἀπειλήφθωσαν ἴσαι τε καὶ ἀπεναντίον περιφέρειαι αἱ ΖΗ, ΘΚ, καὶ ἔστω ἡ ΖΗ ἔγγιον τῆς συναφῆς τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ ἤπερ ἡ ΘΚ· λέγω ὅτι ἐν πλείονι χρόνῳ ἡ ΖΗ ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ ΘΚ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΖΗ ἔγγιόν ἐστι τῆς συναφῆς τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ ἤπερ ἡ ΘΚ, μείζων ἐστὶν ἡ ΘΕ τῆς ΕΖ. κείσθω τῇ μὲν ΖΕ ἴση ἡ ΕΛ, τῇ δὲ ΖΗ ἴση ἡ ΛΜ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΛΜ, ΖΗ ἴσον ἀπέχουσι τῆς συναφῆς τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ, ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΛΜ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΖΗ. ἐν πλείονι δὲ χρόνῳ ἡ ΛΜ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ ΘΚ· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ καὶ ἡ ΖΗ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ ΘΚ.

SCHOLIUM III. EX ABUNDANTI.

Iisdem suppositis, assumantur æquales & oppositæ circumferentiæ Z H, Θ K; & sit circumferentia Z H propior contactui tropici æstivi, quam ipsa Θ K: dico quod majori tempore circumferentia Z H permutat conspicuum hemisphærium quam ipsa Θ K.



Quoniam enim [ex hyp.] circumferentia Z H propior est contactui tropici æstivi quam ipsa Θ K, major igitur est Θ E ipsa E Z. ponatur quidem ipsi Z E æqualis circumferentia E Λ; & circumferentiæ Z H æqualis ipsa Λ M. quoniam igitur [ex hyp.] circumferentiæ Λ M, Z H æque distant à contactu tropici æstivi; quo igitur tempore circumferentia Λ M permutat conspicuum hemisphærium [per 15. Phæn.] hoc ipso tempore & Z H. sed majori tempore circumferentia Λ M permutat conspicuum hemisphærium quam ipsa Θ K: majori igitur tempore circumferentia Z H permutat conspicuum hemisphærium quam ipsa Θ K.

ΘΕΩΡΗΜΑ ιε'.

Τοῦ τῶν ζῳδίων κύκλου τῶν ἴσων τε καὶ ἀπεναντίον περιφερειῶν, ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ἑτέρα ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἡ ἑτέρα τὸ ἀφανές· καὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ἑτέρα τὸ ἀφανές, ἡ ἑτέρα τὸ φανερόν.

THEOREMA XV.

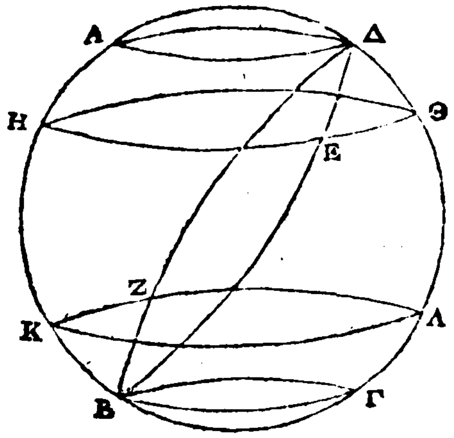
Ex æqualibus & opposito jacentibus zodiaci circuli circumferentiis, quo tempore altera permutat conspicuum hemisphærium, altera occultum permutat: & quo tempore altera permutat occultum hemisphærium, altera conspicuum permutat.

Ἔστω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ ΑΒΓΔ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ἔστω ὁ ΑΔ, χειμερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ ΒΓ, ὁ δὲ τῶν ζῳδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω τὴν ΔΕΒΖ, καὶ ἔστω τὸ μὲν ΔΕΒ ἡμικύκλιον τὸ μετὰ τὸν καρκίνον ὑπὸ γῆν, τὸ δὲ ΒΖΔ τὸ μετὰ τὸν αἰγόκερων ὑπὲρ γῆς, καὶ ἔστω ἀνατολικὰ μὲν τὰ Δ μέρη, δυτικὰ δὲ τὰ Β, καὶ ἀπειλήφθωσαν δύο ἴσαι τε καὶ ἀπεναντίον περιφέρειαι αἱ ΔΕ, ΒΖ·

SIT in mundo horizon circulus A B Γ Δ; æstivus tropicus sit A Δ, hybernus autem sit B Γ; zodiacus circulus positionem habeat veluti Δ E B Z; sit autem semicirculus post cancrum sub terram Δ E B; & semicirculus post capricornum supra terram sit B Z Δ: partes orientales sint versus punctum Δ, occidentales versus B punctum; & sumantur duæ circumferentiæ Δ E, B Z æquales & oppositæ inter se: dico

dico quod quo tempore circumferentia ΔE permutat conſpicuum hemiſphærium, hoc ipſo & ipſa BZ circumferentia permutat occultum: & contra quo tempore ΔE permutat occultum, hoc ipſo BZ conſpicuum permutat.

Deſcribantur paralleli circuli HEΘ, KZΛ, in quibus puncta E, Z ferantur. & quoniam [per 6. Phæn.] aſtra quæ in zodiaco per diametrum ſunt poſita, conjugate & oriuntur & occidunt: puncto igitur E occidente in puncto H, & punctum Z ipſi E per diametrum poſitum oritur in puncto Λ. ſed ipſum E percurrens circumferentiam ΘEH occidet quidem, & Z pertranſiens circumferentiam KZΛ oritur: quare quo tempore E percurrit circumferentiam ΘEH, & Z pertranſit circumferentiam KZΛ. ſed tempus quidem in quo E percurrit circumferentiam ΘEH, tempus eſt in quo circumferentia ΔE permutat conſpicuum hemiſphærium; ac tempus in quo punctum Z percurrit circumferentiam KZΛ, tempus eſt in quo circumferentia ZB permutat occultum hemiſphærium: quare tempore æquali circumferentia ΔE permutat conſpicuum hemiſphærium atque ipſa ZB occultum.



Similiter demonſtrabimus quod quo tempore circumferentia ΔE permutat occultum, ipſa ZB permutat conſpicuum hemiſphærium.

λέγω ὅτι ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΔΕ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἐν τούτῳ ἡ ΒΖ τὸ ἀφανές, καὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΔΕ τὸ ἀφανές, ἐν τούτῳ ἡ ΒΖ τὸ φανερόν.

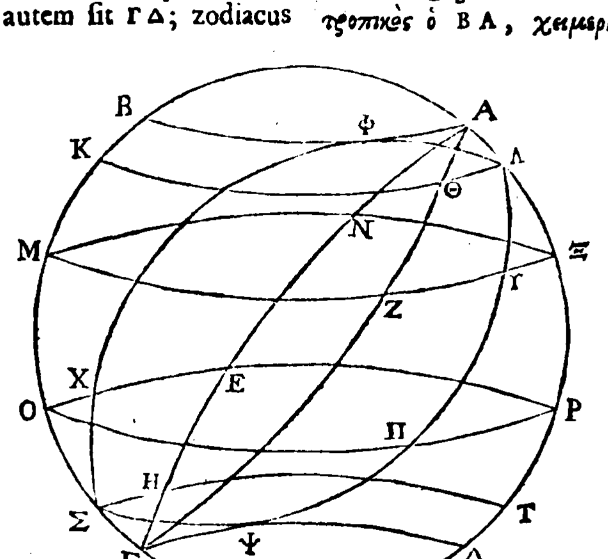
Γεγράφθωσαν παράλληλοι κύκλοι οἱ ΗΕΘ, ΚΖΛ, καθ' ὧν φέρεται τὰ Ε, Ζ σημεῖα. καὶ ἐπεὶ τοῦ τῶν ζωδίων κύκλου τὰ κατὰ διάμετρον ἄστρα ὄντα κατὰ συζυγίαν ἀνατέλλει τε καὶ δύνει· τοῦ Ε ἄρα σημείου δύνοντος κατὰ τὸ Η σημεῖον τὸ Ε τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Ζ ἀνατέλλει κατὰ τὸ Λ σημεῖον. ἀλλὰ τὸ μὲν Ε τὴν ΘΕΗ διελθὸν δύνει, τὸ δὲ Ζ τὴν ΚΖΛ διελθὸν ἀνατέλλει· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Ε τὴν ΘΕΗ διαπορεύεται, καὶ τὸ Ζ τὴν ΚΖΛ. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ τὸ Ε τὴν ΘΕΗ διαπορεύεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ ΔΕ ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Ζ τὴν ΚΖΛ διαπορεύεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ ΖΒ ἐξαλλάσσει τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ ἡ ΔΕ ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον καὶ ἡ ΖΒ τὸ ἀφανές.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΔΕ ἐξαλλάσσει τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον, ἡ ΖΒ τὸ φανερόν.

ALITER.

Sit horizon circulus ABΓΔ; tropicus æſtivus ſit BA, hybernus autem ſit ΓΔ; zodiacus circulus poſitionem habeat veluti ABΓZ; & ſumantur & æquales & oppoſitæ circumferentiæ EH, ZΘ: dico quod quo tempore ZΘ permutat conſpicuum hemiſphærium, ipſa EH permutat occultum.

Sint circuli paralleli KΘΛ, MNΞZ, EOΠP, ΣHT, in quibus puncta Θ, Z, E, H ferantur; & circumvolvatur zodiacus circulus, & nunc quidem habeat poſitionem veluti TΛΦXΣΨ, interdum vero ſicuti ΘEH. & quoniam [ex hyp.] circumferentiæ ZΘ, EH ſunt æquales & oppoſitæ: circuli igitur MNΞ, OΠP ſunt æquales. æqualium autem & parallelorum circulorum ſegmenta alternatim ſumpta æqualia invicem ſunt: ſegmentum igitur MNΞ



ΑΛΛΩΣ.

Ἔστω ὁρίζων κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ὁ ΒΑ, χειμερινὸς δὲ ὁ ΓΔ, ὁ ζωδιακὸς δὲ κύκλος θέσιν ἐχέτω ὡς τὴν ΑΕΓΖ, καὶ ἀπειλήφθωσαν ἴσαι τε καὶ ἀπεναντίον περιφέρειαι αἱ ΕΗ, ΖΘ· λέγω ὅτι ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΖΘ ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἡ ΕΗ τὸ ἀφανές.

Ἔστωσαν καθ' ὧν φέρεται τὰ Θ, Ζ, Ε, Η σημεῖα παράλληλοι κύκλοι οἱ ΚΘΛ, ΜΝΞΖ, ΕΟΠΡ, ΣΗΤ, καὶ μετακεκινήσθω ὁ τῶν ζωδίων κύκλος, καὶ ὅτε μὲν θέσιν ἐχέτω τὴν ΥΛΦΧΣΨ, ὅτε δὲ τὴν ΘΕΗ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΖΘ, ΕΗ περιφέρειαι ἴσαι τε καὶ ἀπεναντίον εἰσίν, ἴσοι εἰσὶ καὶ οἱ ΜΝΞ, ΟΠΡ κύκλοι. τῶν δὲ ἴσων τε καὶ παραλλήλων κύκλων τὰ ἐναλλὰξ τμήματα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις· τὸ ἄρα ὑπὲρ γῆς τοῦ

ΜΝΞΖ

ΜΝΞΖ κύκλου τὸ ΜΝΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γῆν τοῦ ΕΟΠΡ κύκλου τῷ ΟΠΡ. πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΖΘ, ΕΗ ἴσαι τε καὶ ἀπεναντίον εἰσὶν, ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΖΘ ἀνατέλλει, ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΕΗ δύνει. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ ἡ ΖΘ ἀνατέλλει, τουτέστιν ἡ ΤΛ, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ τὸ Τ σημεῖον ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Τ τὴν ΤΞ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ξ παραγίνεται, ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ ἡ ΕΗ δύνει, τουτέστιν ἡ ΧΣ, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ τὸ Χ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Χ τὴν ΧΟ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ο παραγίνεται. ὁ ἄρα χρόνος ἐν ᾧ τὸ Τ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Τ τὴν ΤΞ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ξ παραγίνεται, ἴσος ἐστὶ τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ τὸ Χ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Χ τὴν ΧΟ περιφέρειαν διελθὸν ἀπὸ τὸ Ο παραγίνεται. κοινὸς προσκείσθω ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Τ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Ξ τὴν ΞΝΜ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Μ παραγίνεται, ἴσος ὢν τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ τὸ Χ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Ο τὴν ΟΠΡ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ρ παραγίνεται· ὁ ἄρα χρόνος ἐν ᾧ τὸ Τ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Τ τὴν ΤΞΝΜ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Μ παραγίνεται, ἴσος ἐστὶ τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ τὸ Χ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Χ τὴν ΧΟΠΡ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ρ παραγίνεται. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ τὸ Τ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Τ τὴν ΤΞΝΜ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Μ παραγίνεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ ΤΛ ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, τουτέστιν ἡ ΘΖ· ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Χ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Χ τὴν ΧΟΠΡ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ρ παραγίνεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ΧΣ ἐξαλλάσσει τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον, τουτέστιν ἡ ΕΗ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ ΘΖ ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἐν τούτῳ καὶ ΕΗ τὸ ἀφανές.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΘΖ ἐξαλλάσσει τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον, ἐν τούτῳ ἡ ΕΗ τὸ φανερόν.

supra terram circuli ΜΝΞΖ æquale est ΟΠΡ segmento sub terram circuli ΕΟΠΡ. rursus, quoniam circumferentiæ ΖΘ, ΕΗ æquales & oppositæ sunt: quo igitur tempore ΖΘ oritur [per 11. Phæn.] hoc ipso tempore & ΕΗ occidit. sed tempus in quo ΖΘ oritur, hoc est in quo oritur ipsa ΤΛ, tempus est in quo punctum Τ incipiens ab ipso Τ & circumferentiam ΤΞ percurrens pervenit ad punctum Ξ; & tempus in quo ipsa ΕΗ occidit, hoc est in quo occidit circumferentia ΧΣ, tempus est in quo punctum Χ incipiens à puncto Χ circumferentiam ΧΟ percurrens pervenit ad punctum Ο. tempus igitur in quo punctum Τ incipiens ab ipso Τ & circumferentiam ΤΞ percurrens pervenit ad punctum Ξ, æquale est tempori in quo punctum Χ incipiens ab ipso Χ & circumferentiam ΧΟ percurrens pervenit ad punctum Ο. commune addatur tempus in quo punctum Τ incipiens ab Ξ & circumferentiam ΞΝΜ percurrens pervenit ad punctum Μ, quod quidem est æquale tempori in quo punctum Χ incipiens ab ipso Ο & circumferentiam ΟΠΡ percurrens pervenit ad punctum Ρ: quare tempus quidem in quo punctum Τ incipiens ab ipso Τ & circumferentiam ΤΞΝΜ percurrens pervenit ad punctum Μ, æquale est tempori in quo punctum Χ incipiens ab ipso Χ & circumferentiam ΧΟΠΡ percurrens pervenit ad punctum Ρ. sed tempus in quo punctum Τ incipiens ab ipso Τ & circumferentiam ΤΞΝΜ percurrens pervenit ad punctum Μ, tempus est in quo circumferentia ΤΛ, hoc est ipsa ΘΖ, permutat conspicuum hemisphærium; & tempus in quo punctum Χ incipiens ab ipso Χ & circumferentiam ΧΟΠΡ percurrens pervenit ad punctum Ρ, tempus est in quo ipsa ΧΣ, hoc est ipsa ΕΗ, permutat occultum hemisphærium: quare quo tempore ΘΖ permutat conspicuum hemisphærium, hoc ipso tempore & ipsa ΕΗ permutat occultum.

Similiter demonstrabitur quod quo tempore ipsa ΘΖ permutat occultum hemisphærium, hoc ipso tempore & circumferentia ΕΗ permutat conspicuum.

ΘΕΩΡΗΜΑ ιϛʹ.

Τοῦ τῶν ζῳδίων κύκλου αἱ ἴσαι περιφέρειαι οὐκ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον, ἀλλ' ἐν πλείονι χρόνῳ ἀεὶ ἡ ἔγγιον τοῦ χειμερινοῦ τροπικοῦ τῆς ἀπώτερον, ἐν ἴσῳ δὲ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ὁποτέρας οὖν τῶν συναφῶν.

Theorema XVI.

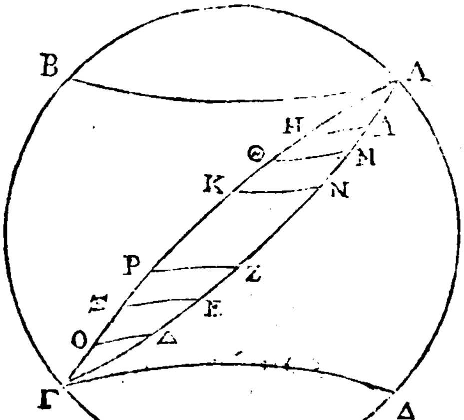
Zodiaci circuli circumferentiæ æquales tempore haud æquali permutant occultum hemisphærium: sed majori semper tempore quæ vicinior est tropico hyberno, quam quæ ab eo remotior est: æquali vero tempore quæ ab alterutro contactu æqualiter distant.

Ἔστω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ ΑΒΓΔ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ἔστω ὁ ΑΒ, χειμερινὸς δὲ τροπικὸς ἔστω ὁ ΓΔ, ὁ δὲ τῶν ζῳδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω τὴν ΑΓΕ, καὶ ἀπειλήφθωσαν αἱ ἴσαι περιφέρειαι αἱ ΔΕ, ΕΖ· λέγω ὅτι αἱ ΔΕ, ΕΖ οὐκ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον, ἀλλ' ἐν πλείονι ἡ ΔΕ περιφέρεια τῆς ΕΖ περιφερείας.

SIT in mundo horizon circulus ΑΒΓΔ; æstivus tropicus sit ΑΒ, hybernus autem sit ΓΔ; circulus zodiacus positionem habeat ΑΓΕ; & sumantur æquales circumferentiæ ΔΕ, ΕΖ: dico quod circumferentiæ ΔΕ, ΕΖ tempore haud æquali permutant occultum hemisphærium; sed majori tempore circumferentia ΔΕ quam ipsa ΕΖ.

Suman-

Sumantur enim circumferentiis ΔE, EZ æquales & oppositæ circumferentiæ HΘ, ΘK: circumferentiæ igitur HΘ, ΘK tempore haud æquali permutant conspicuum hemisphærium, sed [per 14. Phæn.] majori tempore circumferentia HΘ quam ipsa ΘK. sed [per 15. Phæn.] quo tempore circumferentia HΘ permutat conspicuum hemisphærium, ipsa ΔE permutat occultum; & quo tempore ΘK permutat conspicuum hemisphærium & ipsa BZ permutat occultum: circumferentiæ igitur ΔE, EZ tempore haud æquali permutant occultum hemisphærium; sed majori tempore ΔE quam ipsa EZ.



Dico etiam quod tempore æquali quæ æqualiter distant ab alterutro contactu tropico.

Sint autem circuli paralleli ΔO, EΞ, ZP, KN, ΘM, HΛ, in quibus puncta Δ, E, Z, K, Θ, H ferantur: æquali igitur tempore HΘ, ΛM [per 14. Phæn.] permutant conspicuum hemisphærium. sed [per 15. Ph.] quo tempore circumferentia ΘH permutat conspicuum hemisphærium, ipsa ΔE permutat occultum; & & quo tempore ΔM permutat conspicuum hemisphærium, circumferentia ΞO permutat occultum: quare EΔ, OΞ æquali tempore permutant occultum hemisphærium.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ τῆς ΔΕ, ΕΖ περιφερείαις ἴσαι τε καὶ ἀπεναντίον περιφέρειαι αἱ ΗΘ, ΘΚ· αἱ ΗΘ, ΘΚ ἄρα περιφέρειαι οὐκ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἀλλ' ἐν πλείονι ἡ ΗΘ τῆς ΘΚ. ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ ἡ ΗΘ ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἡ ΔΕ τὸ ἀφανές, ἐν ᾧ δὲ ἡ ΘΚ τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἐξαλλάσσει, ἡ ΕΖ τὸ ἀφανές· αἱ ΔΕ, ΕΖ ἄρα περιφέρειαι οὐκ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον, ἀλλ' ἐν πλείονι ἡ ΔΕ τῆς ΕΖ.

ΛΕΓΩ ὅτι καὶ ἐν ἴσῳ χρόνῳ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἑκατέρας τῶν τροπικῶν συναφῶν.

Ἔστωσαν γὰρ καθ' ὧν φέρεται τὰ Δ, Ε, Ζ, Κ, Θ, Η σημεῖα παράλληλοι κύκλοι οἱ ΔΟ, ΕΞ, ΖΡ, ΚΝ, ΘΜ, ΗΛ· αἱ ΗΘ, ΛΜ ἄρα περιφέρειαι ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον. ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ ἡ ΘΗ ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἡ ΔΕ τὸ ἀφανὲς ἐξαλλάσσει, ἐν ᾧ δὲ ἡ ΛΜ ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἡ ΞΟ τὸ ἀφανὲς ἐξαλλάσσει· αἱ ΕΔ, ΟΞ ἄρα περιφέρειαι ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον.

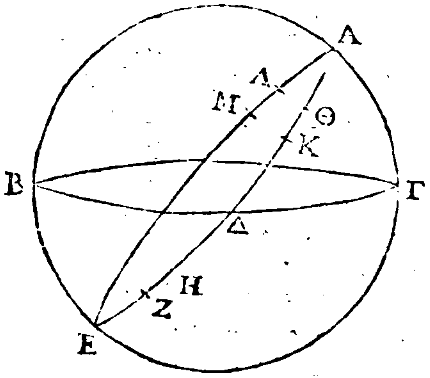
Theorema XVII.

Ex circumferentiis æqualibus & æqualiter distantibus ab æquinoctiali circulo, quæ quidem sunt ad diversas partes ipsius æquinoctialis, quo tempore altera permutat conspicuum hemisphærium, altera permutat occultum; & quo tempore altera occultum, altera permutat conspicuum.

ΘΕΩΡΗΜΑ ιζ'.

Τῶν ἐφ' ἑκάτερα τοῦ ἰσημερινοῦ περιφερειῶν ἴσων τε καὶ ἴσον ἀπεχουσῶν τοῦ ἰσημερινοῦ, ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ἑτέρα ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἡ ἑτέρα τὸ ἀφανές· καὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ἑτέρα ἐξαλλάσσει τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον, ἡ ἑτέρα τὸ φανερόν.

SIT in mundo horizon circulus ABΓ, æquinoctialis sit BΔΓ, zodiacus circulus positionem habeat AEΘ; & ad diversas partes æquinoctialis circuli BΔΓ sint æquales, & æqualiter distantes ab ipso æquinoctiali, circumferentiæ ΘK, ZH: dico quod quo tempore ΘK permutat conspicuum hemisphærium, ipsa ZH permutat occultum.



Ponatur ipsi ZH æqualis & opposita circumferentia MΛ: circumferentiæ igitur MΛ, ΘK [ex 14. Ph.] æquali tempore permutant conspicuum hemisphærium. sed [per 15. Phæn.] quo tempore MΛ permutat conspicuum hemisphæ-

Ἔστω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ ΑΒΓ, ἰσημερινὸς δὲ κύκλος ἔστω ὁ ΒΔΓ, ὁ δὲ τῶν ζῳδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω ὡς τὴν ΑΕΘ, καὶ τοῦ ΒΔΓ ἰσημερινοῦ ἐφ' ἑκάτερα ἴσαι τε καὶ ἴσον ἀπέχουσαι περιφέρειαι ἔστωσαν αἱ ΘΚ, ΖΗ· λέγω ὅτι ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΘΚ ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἡ ΖΗ τὸ ἀφανές.

Κείσθω γὰρ τῇ ΖΗ ἴση τε καὶ ἀπεναντίον περιφέρεια ἡ ΜΛ· αἱ ΜΛ, ΘΚ ἄρα περιφέρειαι ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον. ἀλλ' ἐν ᾧ χρόνῳ ΜΛ ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἡ

ΖΗ

ΖΗ τὸ ἀφανὲς ἐξαλλάσσει· καὶ ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ ΘΚ περιφέρεια ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἡ ΗΖ περιφέρεια τὸ ἀφανὲς ἐξαλλάσσει.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΘΚ περιφέρεια ἐξαλλάσσει τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον, ἡ ΗΖ τὸ φανερὸν ἐξαλλάσσει.

rium: & ipsa ZH permutat occultum: quare quo tempore ΘK permutat conspicuum hemisphærium, & circumferentia HZ permutat occultum.

Eadem ratione quo tempore ΘK permutat occultum hemisphærium, & ipsa HZ permutat conspicuum.

ΘΕΩΡΗΜΑ ιη'.

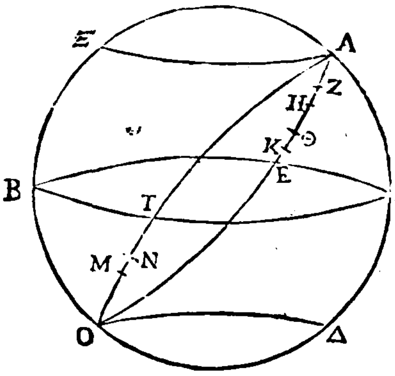
Τῶν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ τῷ ἀπολαμβανομένῳ ὑπὸ τοῦ ἰσημερινοῦ πρὸς τῷ θερινῷ τροπικῷ ἴσων περιφερειῶν, ἐν πλείονι χρόνῳ ἡ ἑτέρα αὐτῶν ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἤπερ ἡ λοιπὴ τὸ ἀφανές· καὶ ἡ τυχοῦσα τῆς τυχούσης.

THEOREMA XVIII.

Ex æqualibus circumferentiis, quæ sunt in semicirculo comprehenso inter æquinoctialem & æstivum tropicum, altera ex ipsis majori tempore permutat conspicuum hemisphærium, quam reliqua occultum; & alia utcunque sumpta, alia utcunque sumpta.

ΕΣτω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ ΑΒΓ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ἔστω ὁ ΑΞ, χειμερινὸς δὲ ὁ ΔΟ, ἰσημερινὸς δὲ κύκλος ἔστω ὁ ΒΕΓ, ὁ δὲ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω τὴν ΑΕΟ, καὶ ἐν τῷ ΤΑΕ ἡμικυκλίῳ ἴσαι περιφέρειαι ἔστωσαν αἱ ΖΗ, ΘΚ, ἔγγιον δὲ ἔστω τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ ἡ ΖΗ· λέγω ὅτι ἐν πλείονι χρόνῳ ἡ ΗΖ ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ ΘΚ τὸ ἀφανές, καὶ ἡ τυχοῦσα τῆς τυχούσης.

Κείσθω γὰρ τῇ ΘΚ περιφερείᾳ ἴση τε καὶ ἀπεναντίον περιφέρεια ἡ ΜΝ· ἔγγιον ἄρα ἡ ΖΗ περιφέρεια τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ, ἤπερ ἡ ΜΝ· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ ΖΗ ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἤπερ ἡ ΜΝ τὸ φανερόν. ἀλλ᾽ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΜΝ περιφέρεια ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἡ ΘΚ τὸ ἀφανές· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ ΖΗ περιφέρεια ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἤπερ ἡ ΘΚ τὸ ἀφανές. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ τυχοῦσα τῆς τυχούσης ἐν πλείονι χρόνῳ ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἤπερ ἡ λοιπὴ τὸ ἀφανές.



SIT in mundo horizon circulus ABΓ; æstivus tropicus sit AΞ, hybernus autem ΔO; circulus æquinoctialis sit BEΓ; zodiacus circulus positionem habeat AEO; sint autem in semicirculo TAE æquales circumferentiæ ZH, ΘK, quarum ipsa ZH propinquior sit tropico æstivo: dico quod circumferentia HZ majori tempore permutat conspicuum hemisphærium quam ipsa ΘK occultum; & alia utcunque sumpta, alia utcunque sumpta.

Ponatur ipsi ΘK æqualis & opposita circumferentia MN: circumferentia igitur ZH propinquior est tropico æstivo quam ipsa MN: quare [per 14. Phæn.] ZH majori tempore permutat conspicuum hemisphærium quam ipsa MN conspicuum. verum [per 17 Ph.] quo tempore circumferentia MN permutat conspicuum hemisphærium, & ipsa ΘK permutat occultum: majori igitur tempore circumferentia ZH permutat conspicuum hemisphærium quam ΘK occultum. Simili modo ostendetur, quod & alia utcunque sumpta majori etiam tempore permutat conspicuum hemisphærium quam altera occultum.

ΩΣΑΥΤΩΣ δὲ καὶ τῶν ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμικυκλίῳ τῷ ἀπολαμβανομένῳ ὑπὸ τοῦ ἰσημερινοῦ πρὸς τῷ χειμερινῷ τροπικῷ ἴσων περιφερειῶν, ἐν πλείονι χρόνῳ ἡ ἑτέρα αὐτῶν ἐξαλλάσσει τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον, ἤπερ ἡ λοιπὴ τὸ φανερόν· καὶ ἡ τυχοῦσα τῆς τυχούσης.

Hoc eodem modo, in altero semicirculo contento inter æquinoctialem & hybernum tropicum, potest demonstrari quod, ex circumferentiis æqualibus, altera majori tempore permutat occultum hemisphærium quam reliqua conspicuum; & alia utcunque sumpta, alia utcunque sumpta.

ΤΕΛΟΣ ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΩΝ.

FINIS EUCLIDIS PHÆNOMENΩN.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΟΠΤΙΚΑ.

EUCLIDIS

OPTICA.

[1] ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΟΠΤΙΚΑ.

EUCLIDIS
OPTICA.

ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΣ τὰ κατὰ τὴν ὄψιν, παραμυθίας ἐκόμιζέ τινας, προσεπιλογιζόμενος [3] ὅτι κατ' εὐθείας γραμμὰς πᾶν φῶς φέρεται· σημεῖον δὲ τούτου μέγιστον τάς τ' ἀπὸ τῶν σωμάτων ἀπορριπτομένας σκιάς, καὶ τὰς ἀπὸ τῶν θυρίδων τε καὶ ὀπῶν φερομένας αὐγὰς κομίζει· ἕκαστον δὲ τούτων οὐκ ἂν ἐγίνετο, καθάπερ νῦν θεωρεῖται γινόμενον, εἴπερ μὴ αἱ ἀπὸ τοῦ ἡλίου φερόμεναι ἀκτῖνες κατά τινας εὐθείας ἐφέροντο. ἐπί τε τῶν παρ' ἡμῖν πυρῶν ἀποστελλομένας ἔφασκεν αὐγάς, αἰτίας εἶναι τοῦ τε φωτίζεσθαί τινα τῶν παρακειμένων σωμάτων, καὶ ἀπορρίπτειν σκιάς, τὰς μὲν ἴσας τοῖς ὑποκειμένοις σώμασι, τὰς δὲ μείζονας, τὰς δὲ ἐλάσσονας τῶν ὑποκειμένων σωμάτων. καὶ ἴσας μὲν ἀπορρίπτειν σκιάς, ὅσα τοῖς φωτοῖς φωτίζουσί τε πυροῖς ἴσα ἐστί· τάς τ' ἐσχάτας ἀκτῖνας ἐπὶ τούτων συμβαίνειν παραλλήλους γίνεσθαι, καὶ μὴ συναπτούσας ἑαυτάς, μειοῦν τὴν σκιάν, μήτε μὴν ἐξαπλουμένας αὔξειν, ἀλλ' οἷόν ἐστι τὸ ἐπιπροσθοῦν, τοιαύτην καὶ τῆς σκιᾶς συμμετρίαν φυλάσσειν· ἐλάσσονες δὲ αἱ τῶν σωμάτων σκιαί εἰσιν, ὅταν τὰ φωτίζοντα πυρὰ μείζονα ᾖ· τὰς γὰρ ἐσχάτας ἀκτῖνας συμπίπτειν ἑαυταῖς· διὸ δὴ καὶ μειοῦν τὰς σκιάς. μείζους δὲ τῶν σωμάτων αἱ σκιαί εἰσιν, ὅταν τὰ φωτίζοντα πυρὰ ἐλάσσονα ᾖ· τὰς γὰρ ἐσχάτας ἀκτῖνας ἐπὶ τούτων ἐξαπλοῦσθαι συμβαίνει, καὶ μεῖζον τὸ σκιαζόμενον μέρος ἀποτελεῖν. οὐδέποτε δ' ἂν τοῦτο συμβαίνειν, εἰ μὴ αἱ ἀπὸ τοῦ πυρὸς φερόμεναι ἀκτῖνες ἐπ' εὐθείας ἐφέροντο. ἐκφανέστατα δὲ τούτων πάντων τοῦτο ἐπὶ τῶν κατασκευαστῶς γινομένων θεωρεῖσθαι συμβαί-

CUM ea quæ ad adſpectum attinent demonſtraret, jucundas aliquot rationes adferebat, quibus concluderet, omnem lucem ſecundum rectas lineas ferri: hujuſque rei maximum argumentum dabat, tum umbras à corporibus projectas, tum radios per feneſtras & rimas delatos: quorum nihil fieri videremus, ut nunc fit, niſi radii à ſole miſſi in rectam lineam tenderent. dicebat etiam, radiós ab igne hoc noſtro emiſſos, cauſam eſſe cur objecta quædam corpora partim illuſtrentur, partim umbras jaciant nunc æquales objectis corporibus, nunc majores, nunc minores. atque æquales quidem umbras ab iis corporibus projici dicebat, quæ æqualia eſſent ſplendidis & lucentibus ignibus: in his enim accidere aſſerebat, ut & extremi radii fierent paralleli, & neque concurrendo umbram minuerent, neque ſeſe explicando eam augerent, ſed quale eſſet objectum corpus, talem umbræ commenſum radii illi ſervarent: minores vero ſunt umbræ corporibus, cum lumina illuſtrantia majora ſunt; extremos enim radios concurrere, ob idque umbram minorem reddere contingit. majores denique ſunt umbræ objectis corporibus, cum illuſtrantia lumina minora ſunt: accidit enim in his, ut extremi radii ſeſe dilatent & opacam partem majorem faciant. quod fieri poſſe negabat, niſi radii, quos lumen projicit, in rectam lineam tenderent. ſed id omnium clariſſime ſpectari poteſt in his quæ ad id monſtrandum præcipue comparata

1 In MS. Savil. τὰ περὶ τῶν Εὐκλείδου ὀπτικῶν. 2 Sc. ὁ Εὐκλείδης. 3 In Cod. Bodl. διότι.

ſunt.

ſunt. ſi enim lucernæ cuipiam, ut libet poſitæ, apponatur tabella, cui rimula per tenuem ſertulam facta ſit, ita ut rimula illa medio lucernæ reſpondeat; huic autem tabellæ, ex altera ejus parte, altera tabella prope admoveatur, in quam incidat radius per rimulam delatus; inveniemus radium illum, qui per prioris tabellæ rimulam in poſteriorem tabellam fertur, rectis omnino lineis contineri, eum quoque qui medium lucernæ & rimulam tabellæ connectit, in eadem eſſe recta linea. itaque cum omnem lucem ferri in rectam lineam evidens cuilibet & exploratum ſit, inde ſe ad aſpectus explicationem convertens, concedendum cenſuit, ut radii ab oculo manantes in rectam lineam ferrentur, ita tamen ut alii ab aliis intervallo aliquo diſtarent. ex quo fieri dicebat, ut nullum aſpectabile ſimul totum ſpectaretur, hanc rationem adferens. ſæpenumero enim acu aut alio ejuſmodi corpuſculo aliquo in terram delapſo, cum plerique illud ſtudioſius quærerent, eodem modo ſæpius fruſtra quæſiverunt, cum nihil impediret quo minus corpuſculum, quod quærebant, cernerent: & tamen paulo poſt, cum oculos in eum locum conjicerent, in quo erat illud corpuſculum, acum viderunt. ex quo conſtat, cum corpuſculum ipſum in terram delapſum non cernatur, neque locum ipſum, in quo illud collocatum erat, cerni: ideoque non omnes partes loci ſubjecti oculo ſpectantis videri. ſi enim omnes loci partes cernerentur, ipſum quoque corpuſculum, quod diſquiritur, cerneretur: atqui id non cernitur. quinetiam converſus ad eos, qui intentis oculis libros inſpiciunt, aſſeruit ne hos quidem videre poſſe omnes literas unius paginæ, eo quod ſæpe coacti literas quaſdam raro & ſparſim ſcriptas oſtendere, id non poſſent; propterea quod oculorum radii non ad ſingulas literas feruntur, nec continui & conjuncti inter ſe ſunt; ſed aliquo intervallo alii ab aliis diſtant: atque ideo pleraſque objectarum literarum non cernunt: ex quo patet, fore ut totus paginæ locus non videatur. hoc idem in aliis quæ videntur, uſu venit. quocirca quæ cernuntur, ſimul tota non cernuntur: exiſtimantur autem cerni, propter nimiam celeritatem radiorum nihil omittentium, id eſt, continue & obiter per rem ſubjectam delatorum: nec ita ſalientium, ut aliquam

νει. λύχνου γὰρ ὁπωσδήποτουν κειμένου εἰ παρατεθείη τούτῳ πτυχίον ἔχον [1] ἐντομὴν λεπτοῦ πριονίου, ὥστε καὶ τὴν ἐντομὴν κατὰ μέσον τοῦ λύχνου πίπτειν, τῷ δὲ πτυχίῳ κατὰ τὰ ἕτερα μέρη παρατεθείη πτυχίον ἕτερον ᾧ προσπεσεῖται ἡ αὐγὴ ἡ διὰ τῆς ἐντομῆς φερομένη, πάντως τὴν προσπίπτουσαν αὐγὴν τῷ πτυχίῳ, εὐθείαις γραμμαῖς περιεχομένην εὑρήσομεν, καὶ τὴν ἐπιζευγνύουσαν τό, τε μέσον τοῦ λύχνου, καὶ τὴν ἐντομὴν τοῦ πτυχίου κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν οὖσαν. ἐναργοῦς οὖν ὄντος τοῦ, ὅτι πᾶν φῶς κατ' εὐθεῖαν γραμμὴν φέρεται, καὶ πᾶσι προδήλου, μεταβαίνων ἐπὶ τὴν ὄψιν, ἠξίου καὶ τὰς ἀπ' αὐτῆς ἐκχεομένας ἀκτῖνας ὁμολογεῖν, κατ' εὐθείας φέρεσθαι γραμμὰς, καὶ ταύτας ἐν [2] διαστήματι. καὶ διὰ τοῦτο μηδὲ τὰ ὁρώμενα ἅμα ὅλα ὁρᾶσθαι, ὑπόμνησιν φέρων τοιαύτην. πολλάκις γὰρ βελόνης, ἢ τινος τοιούτου ἑτέρου σωματίου ἐκριφέντος εἰς τὸ ἔδαφος, φιλοτιμότερόν τινες προσηκάθισαν τῇ ζητήσει· καὶ τὸν αὐτὸν τρόπον πολλάκις ἐμάτευσαν, οὐδενὸς ἐπιπροσθοῦντος τῷ ζητουμένῳ σωματίῳ· εἶτα μέντοι γε ὕστερον ἐπιβάλλοντες τὴν ὄψιν τῷ τόπῳ, ἐν ᾧπερ ἦν τὸ σωμάτιον, εἶδον τὴν βελόνην. δῆλον ὡς ὅτι οὐχ ἑωρᾶτο τὸ ἐξερριμμένον, οὐδὲ ὁ τόπος, ἐν ᾧ ἦν, ἑωρεῖτο· ὥστε τοῦ ὑπὸ τὴν ὄψιν τοῦ ζητοῦντος κειμένου τόπου, μὴ ἅπαντα τὰ μέρη θεωρεῖσθαι. εἰ γὰρ ἐθεωρεῖτο, καὶ τὸ ζητούμενον ἂν ἑωρᾶτο· οὐχ ἑωρᾶτο δέ. ἐπί τε τῶν ἀτενιζόντων τοῖς βιβλίοις συνιστάμενος, ἔφασκε μηδὲ τούτους ἂν δύνασθαι πάντα τὰ ἐν σελίδι γράμματα ὁρᾶν· πολλὰ γοῦν ἀναγκαζομένους δεῖξαι τῶν σπανίως γραφομένων γραμμάτων, μὴ δύνασθαι δεῖξαι, διὰ τὸ μὴ πρὸς πάντα τὰ γράμματα τὰς ὄψεις φέρεσθαι, ἀλλ' ἐκ διαστημάτων ταύτας ὑπάρχειν, καὶ πολλὰ τῶν κατατεταγμένων μὴ θεωρεῖν. ὥστε ἐκ τούτου φανερόν ἐστι, διότι οὐδ' ὁ τόπος τῆς σελίδος ὅλος ὁραθήσεται. καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων θεαμάτων τὸ αὐτὸ συμβαίνει. ὥστε οὐχ ὁραθήσεται ἅμα ὅλα τὰ ὁρώμενα· δοκεῖ δ' ὁρᾶσθαι διὰ τὸ κινεῖσθαι τὰς ὄψεις ὑπερβολῇ τάχους μηδὲν ἀπολειπούσας, τοῦτ' ἔστι κατὰ συνέχειαν διαφερομένας καὶ μὴ ἀλλο-

1 Al. ἐπιτομήν. 2 In Cod. Bodl. διαστήμασι. mox in MS. Savil. τὰ ὁρώμενα μὴ ἅμα.

μένας·

μένας. πρὸς δὲ τὸ τῇ ὄψει προσπίπτειν τὶ εἴδωλον ἀπὸ τοῦ ὁρωμένου εἰς τὸ κινεῖσθαι αὐτὴν πρὸς τὸ καταλαβεῖν τὸ ὁρώμενον, ἔφερεν αἰτίαν τοιαύτην· καὶ γὰρ ἐπὶ τοῦ ζητουμένου σώματος καὶ τοῦ τῷ βιβλίῳ ἀτενίζοντος, ἀπορίαν κομίζων ἔλεγεν· εἰ τὴν κατ' εἰδώλων ἔμπτωσιν τὸ ὁρατικὸν πάθος, καὶ ἀπὸ παντὸς σώματος συνεχῶς εἴδωλα ἀπέῤῥει, ἃ κινεῖ ἡμῶν τὴν αἴσθησιν, τίς ἡ αἰτία γίνεται, δι' ἣν οὐχ ὁρᾷ ὅ, τι ζητῶν, τὴν βελόνην, καὶ ὁ τῷ βιβλίῳ ἀτενίζων, πάντα τὰ γράμματα, πότερόν ποτε διὰ τὸ μετεωρίζεσθαι τῇ διανοίᾳ; ἀλλὰ οὐδὲν ἧττον ἐπιλογιζόμενοι ζητοῦσι, καὶ ὁλοσχερῶς οὐχ εὑρίσκουσι· πολλάκις δὲ ὁμιλοῦντες ἀλλήλοις, καὶ περισπώμενοι τῇ διανοίᾳ, εὑρίσκουσι θᾶττον. ἀλλ' οὐ πάντα τὰ εἴδωλα εἰσφέρεται εἰς τὴν ὅρασιν. καὶ τίς αἰτία τοῦ ἀποκλείεσθαι τὰ μὴ εἰσφερόμενα; καὶ μὴν τὴν φύσιν ἔφασκε κατὰ τὰ ζῶα τὰ μὲν τῶν αἰσθητηρίων πρὸς ὑποδοχὴν εὔθετα κατεσκευακέναι, τὰ δὲ μή· ἀκοὴν μὲν γὰρ καὶ γεῦσιν καὶ ὄσφρησιν, κοῖλα κατεσκεύακεν ἐντὸς, ὡς ἔξωθεν αὐταῖς προσπίπτειν σώματα κινήσοντα τὰς αἰσθήσεις ταύτας· ἀκοῇ μὲν γὰρ φωνὴ προσπίπτουσα, τόπον ἐπιτήδειον ὤφειλεν εὑρίσκειν πρὸς τὸ ἀναμεῖναι, καὶ μὴ κατὰ τὴν πρόσπτωσιν εὐθέως ἀποπαλθεῖσαν, τήν τ' αἴσθησιν ἀκίνητον διαφυλάττειν, καὶ τὴν ἐπιφερομένην συγχέαι φωνήν. ὁμοίως δὲ καὶ ὄσφρησιν· ἐπὶ μὲν γὰρ γεύσεως τί δεῖ καὶ λέγειν; διὸ καὶ μάλιστά πως αὗται αἱ αἰσθήσεις κοῖλαι τε καὶ ἀντροειδεῖς κατεσκευάσθησαν πρὸς τὸ ἐμμένειν τὰ προσπίπτοντα σώματα πλείονα χρόνον. ἐπὶ τῆς ὁράσεως οὖν, εἴπερ ἔξωθεν αὐτῇ προσέπιπτε τὰ κινήσοντα αὐτὴν σώματα, καὶ μὴ αὐτὴ ἐξαπέστελλέ τι ἀφ' ἑαυτῆς, ἔδει τὴν κατασκευὴν αὐτῆς κοίλην τε καὶ εὔθετον πρὸς ὑποδοχὴν τῶν προσπιπτόντων σωμάτων εἶναι· νυνὶ δὲ θεωρεῖται τοῦτο μὴ οὕτως ἔχον, ἀλλὰ μᾶλλον σφαιροειδὴς οὖσα θεωρεῖται ἡ ὅρασις· πρὸς οὖν τὸ πιστὸν εἶναι κατὰ τὸ παρὸν, τὸ ἀκτῖνας εἶναι τὰς ἐκχεομένας καὶ κινούσας τὸ ὁρατικὸν πάθος, ἀρκούντως ἐδόκει εἰρῆσθαι. πρὸς δὲ τὸ τὰς ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ταῖς ὄψεσι κειμένας περιφερείας εὐθείας φαίνεσθαι, ἔλεγε τάδε· διότι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κειμένη ὄψις ὡς πινιοῦ θεωρητῷ τοιαύ-

partem intactam prætereant. illud vero quod plerique dicunt, imaginem à re visa ad oculum fluere, qua motus oculus rem visam comprehendat, ita refellebat: nam & de corpusculo quod disquirebatur, & de eo qui intentis oculis librum inspiceret, hanc dubitationem adferebat: si visio fiat affluxu imaginum ad oculum, ab omnique corpore imagines continenter fluant, quæ nostrum sensum moveant, quî fit ut acum quærens eam non videat, aut librum attente inspiciens omnia elementa non cernat? idne ideo fit, quod mentem majoribus rebus intentam habeant? atqui nihilo secus ratiocinantur, dum rem quærunt nec plane inveniunt: & tamen sæpe dum alios alloquuntur, & mentem aliis rebus occupatam & distractam habent, citius reperiunt. at (inquiunt) non omnes imagines in visum confluunt. unde igitur fit (inquam) ut quædam non influant, sed potius excludantur? enimvero dicebat naturam in animalibus sentiendi instrumenta ita fecisse, ut eorum quædam ad recipiendum accommodata essent, quædam non: auditum quippe gustatum & odoratum intus cava fecit, ut reciperent corpora venientia extrinsecus, quæ hos sensus moverent: vox enim ad auditum applicans, locum idoneum reperire debuit, ut in eo aliquandiu maneret, ne si statim post applicationem inde resiliret, sensum immotum redderet, vocemque delatam confunderet. eadem ratione odoratum cavum fecit natura: nam de gustatu quid dicere attinet? concavi ergo & cavernæ instar à natura facti sunt hi sensus, ut eis adhibita corpora diutius immorentur. quamobrem si in visione, corpora visum propius accedant extrinsecus, quam ut oculus aliquid ex se emittat, deberet ipse oculus cavus esse, ut ad receptionem imaginum esset commodior. id autem aliter se habere constat; globosum enim esse oculum, perspicuum est. hæc igitur in præsentia ei sufficere visa sunt, ut confirmaret radios effusos & emissos esse, qui videndi affectum moveant. porro, ut ostenderet circumferentias in eadem superficie cum visu positas, rectas lineas oculo videri, has rationes adferebat: quia visus, in eodem plano positus in quo est res spectata, talem habet

bet situm, ut neque sublimior sit quam res quæ spectatur, neque depressior: (id enim est esse in eodem plano.) si ergo visus neque sublimior neque humilior sit quam circumferentia, quæ in eodem plano describitur; radios igitur projicit non sublimiores quidem ad has circumferentiæ partes, depressiores vero ad illas; sed radios omnes per planum delatos æqualiter ad omnes circumferentiæ partes emittit; ut eadem causa sit, cur & planum, in quo est oculus, rectæ lineæ speciem habeat, & circumferentia in eodem plano descripta. planum enim, quod rectæ lineæ instar ad oculum ponitur, id est, quod productum secat centrum oculi, ipsum quidem cerni non potest, propterea quod nullus radiorum ab oculo emissorum in illud cadit: ejus vero extremum cernitur, quod est linea. id vero ideo dicit, quia ea linea quæ oculo objecta manet, reliquis plani partibus officiens, prohibet planum cerni. eadem vero causa quæ efficit ut planum quod in rectam lineam ad oculum positum est, recta linea esse videatur, efficit etiam ut circumferentiarum in eodem plano jacentium in quo est oculus, partim majores appareant, cum plures radii ad eas applicant; partim æquales, cum æquales; partim minores, cum illi veluti radiorum anguli, qui ad oculum fiunt, minores sunt.

τη ἐστὶν, ὥστε μήτε ὑψηλοτέραν εἶναι τοῦ θεωρουμένου, μήτε ταπεινοτέραν· τὸ γὰρ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κεῖσθαι, τοῦτ' ἔστιν· εἰ οὖν οὔτε ταπεινοτέρα οὔτε ὑψηλοτέρα ἐστὶν ἡ ὄψις τῆς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ γεγραμμένης περιφερείας, οὐχὶ τοῖς δὲ μὲν τοῖς μέρεσιν ὑψηλοτέρας προβάλλει ἀκτῖνας, τοῖς δὲ ταπεινοτέρας, ἀλλὰ πᾶσι τοῖς μέρεσι τῆς περιφερείας ἴσας τὰς διὰ τοῦ ἐπιπέδου φερομένας ἀκτῖνας προβάλλει, ὥστε τὴν αὐτὴν γίνεσθαι αἰτίαν, τοῦ τε τὸ ἐπίπεδον εὐθείας φαντασίαν ἀπολιπεῖν, καὶ τῆς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ γεγραμμένης περιφερείας. καὶ γὰρ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐπ' εὐθείας κείμενον τῇ ὄψει, αὐτὸ μὲν ἀθεώρητόν ἐστι, διὰ τὸ μὴ προσπίπτειν αὐτῷ μηδεμίαν τῶν ἀπὸ τῆς ὄψεως ἐκχεομένων ἀκτίνων· τὸ δὲ πέρας αὐτοῦ θεωρεῖται, ὅπερ ἐστὶν ἡ [1] γραμμή. λέγει δὲ, [2] διὰ τὸ τὴν πρὸς τῇ ὄψει μένειν γραμμὴν, ἥτις τοῖς λοιποῖς τοῦ ἐπιπέδου μέρεσιν ἐπιπροσθοῦσα, ἀθεώρητον ποιεῖ τὸ ἐπίπεδον. ἡ δὲ αὐτὴ αἰτία ἡ περὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἐπ' εὐθείας κειμένου τῷ ὄμματι ποιεῖ εὐθείας ἀποδίδοσθαι φαντασίαν, καὶ τῶν περιφερειῶν τῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κειμένων τῷ ὄμματι, φαίνεσθαι δὲ τὸ μὲν μεῖζον, ὅταν πλείονες ὄψεις ἐπιβάλλωσι, τὸ δὲ ἴσον, ὅταν ἴσαι, τὸ δὲ ἔλασσον, ὅταν ἐλάσσονες γίγνωνται τῶν ὄψεων, οἷον γωνίαι τινὲς πρὸς τῷ ὄμματι.

[POSITIONES.]

1. Ponatur ergo radios ab oculo emissos in rectam lineam ferri, aliquoque intervallo inter se distare.

2. Item, figuram à radiis comprehensam esse conum, qui verticem habeat in oculo, basim vero in extremis rerum visarum.

3. Item, ea cerni, ad quæ radii perveniunt.

4. Item, ea non cerni, ad quæ radii non perveniunt.

5. Item, quæ sub majore angulo cernuntur, majora existimari.

6. Item, quæ sub minore angulo cernuntur, minora putari.

7. Item, quæ sub æquali angulo cernuntur, æqualia existimari.

[ΘΕΣΕΙΣ.]

α'. Ὑποκείσθω οὖν, τὰς ἀπὸ τοῦ ὄμματος ὄψεις κατ' εὐθείας γραμμὰς φέρεσθαι, διάστημά τι ποιούσας ἐπ' ἀλλήλων.

β'. Καὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ὄψεων περιεχόμενον σχῆμα εἶναι κῶνον, τὴν κορυφὴν μὲν ἔχοντα πρὸς τῷ ὄμματι, τὴν δὲ βάσιν πρὸς τοῖς πέρασι τῶν ὁρωμένων.

γ'. Καὶ ὁρᾶσθαι μὲν ταῦτα, πρὸς ἃ ἂν αἱ ὄψεις προσπίπτωσι.

δ'. Μὴ ὁρᾶσθαι δὲ, πρὸς ἃ ἂν μὴ προσπίπτωσιν αἱ ὄψεις.

ε'. Καὶ τὰ μὲν ὑπὸ μείζονος γωνίας ὁρώμενα, μείζονα φαίνεσθαι.

ϛ'. Τὰ δ' ὑπὸ ἐλάσσονος, ἐλάσσονα.

ζ'. Ἴσα δὲ τὰ ὑπὸ ἴσων γωνιῶν ὁρώμενα.

1 In *MS. Savil.* περιφέρεια. 2 In *MS. Savil.* διὰ τὴν πρὸς τῇ ὄψει κειμένην γραμμήν.

η'. Καὶ

η'. Καὶ τὰ μὲν ὑπὸ μετεωροτέρων ἀκτίνων ὁρώμενα, μετεωρότερα φαίνεσθαι.

8. Item, quæ à sublimioribus radiis videntur, sublimiora apparere.

θ'. Τὰ δ' ὑπὸ ταπεινοτέρων, ταπεινότερα.

9. Quæ vero à depressioribus, depressiora.

ι'. Καὶ ὁμοίως τὰ μὲν ὑπὸ δεξιωτέρων ἀκτίνων ὁρώμενα, δεξιώτερα φαίνεσθαι.

10. Item, quæ à dexterioribus radiis spectantur, dexteriora apparere.

ια'. Τὰ δ' ὑπὸ ἀριστερωτέρων, ἀριστερώτερα.

11. Quæ vero à sinisterioribus, sinisteriora.

ιβ'. Τὰ δ' ὑπὸ πλειόνων [1] γωνιῶν ὁρώμενα, ἀκριβέστερον φαίνεσθαι.

12. Item, quæ sub pluribus angulis spectantur, accuratius videri.

Ταῦτα μὲν οὖν ὑποκείσθω ἡμῖν, ἐξ ὧν τὰ ἑξῆς θεωρήματα δειχθήσεται.

Hæc igitur à nobis posita sint, è quibus sequentia theoremata demonstrentur.

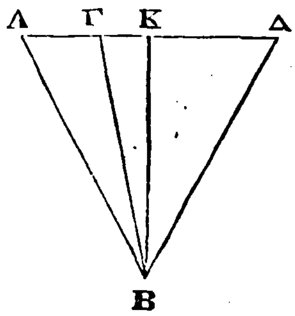
ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Οὐδὲν τῶν ὁρωμένων ἅμα ὅλον ὁρᾶται.

Propositio I. Theor.

Nullum aspectabile simul totum cernitur.

Ἔστω γὰρ ὁρώμενόν τι τὸ ΑΔ, ὄμμα δὲ ἔστω τὸ Β, ἀφ' οὗ προσπιπτέτωσαν ὄψεις αἱ ΒΑ, ΒΓ, ΒΚ, ΒΔ. οὐκοῦν ἐπεὶ ἐν διαστήματι φέρονται αἱ προσπίπτουσαι ὄψεις, οὐκ ἂν προσπίπτοιεν συνεχῶς πρὸς τὸ ΑΔ· ὥστε γίνοιτο ἂν καὶ κατὰ τὸ ΑΔ διαστήματα, πρὸς ἃ αἱ ὄψεις οὐ προσπίπτουσιν· οὐκ ἄρα ὀφθήσεται ἅμα ὅλον τὸ ΑΔ.



Sit enim aspectabile aliquod ΑΔ; oculus vero Β, à quo radii pergant ΒΑ, ΒΓ, ΒΚ, ΒΔ. quia igitur [per 1. posit.] radii ab oculo exsilientes ita feruntur, ut aliquo intervallo alii ab aliis distent; non ergo continui incidunt in aspectabile ΑΔ: sunt igitur aliqua intervalla in ΑΔ, ad quæ radii non pervenient: quare totum ΑΔ simul non cernetur.

Δοκεῖ δὲ ὁρᾶσθαι ἅμα τῶν ὄψεων ταχὺ φερομένων.

Existimatur autem totum simul cerni, propter delatorum radiorum celeritatem.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Δεῖ γὰρ τὸ ὁρώμενον ἀπόστασίν τινα ἔχειν πρὸς τὸ ὄμμα· οὕτως γὰρ ὁραθήσεται. ὡς ἄγε μηδεμίαν ἀπόστασιν ἔχει, οὐχ ὁραθήσεται.

SCHOLIUM.

Oportet enim aspectabile aliquam ab oculo distantiam habere; sic enim videbitur. quod si nullam habeat distantiam ab oculo, non videbitur.

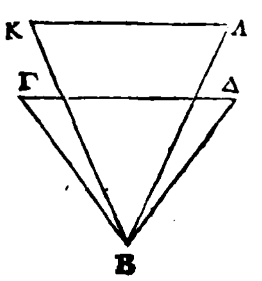
ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Τῶν ἴσων [2] μεγεθῶν ἐν διαστήματι [3] κειμένων τὰ ἔγγιον κείμενα ἀκριβέστερον ὁρᾶται.

Prop. II. Theor.

Æqualium magnitudinum inæqualiter distantium, quæ propius positæ sunt accuratius cernuntur.

Ἔστω ὄμμα μὲν τὸ Β, ὁρώμενον δὲ τὸ ΓΔ καὶ τὸ ΚΛ, χρὴ δὲ νοεῖν αὐτὰ ἴσα τε καὶ παράλληλα, ἔγγιον δὲ ἔστω τὸ ΓΔ, καὶ προσπιπτέτωσαν ὄψεις αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΒΚ, ΒΛ. οὐ γὰρ ἂν εἴποιμεν, ὡς αἱ ἀπὸ τοῦ Β ὄμματος πρὸς τὴν ΚΛ προσπίπτουσαι ὄψεις διὰ τῶν Γ, Δ σημείων ἐλεύσονται· ἢ γὰρ ἂν τριγώνου τοῦ ΒΛΚ ἡ ΚΛ μείζων ἂν ἦν τῆς ΓΔ [4]. ὑπόκειται δὲ καὶ ἴση· οὐκοῦν τὸ ΓΔ ὑπὸ



Sit oculus Β, aspectabiles vero magnitudines ΓΔ & ΚΛ, quæ æquales & parallelæ cogitandæ sunt; propior autem oculo sit ΓΔ quam ΚΛ, & emittantur ab oculo radii ΒΓ, ΒΔ, ΒΚ, ΒΛ. nunquam dicemus fieri posse, ut radii, à Β oculo ad ΚΛ tendentes, transeant per Γ, Δ puncta: alioqui [ex schol. seq.] trianguli ΒΛΚ latus ΚΛ majus esset latere ΓΔ [trianguli ΒΔΓ.] atqui ΚΛ posita est æqualis ipsi ΓΔ: quare ΓΔ

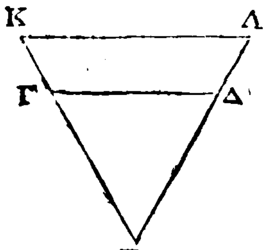
1 Forte ἀκτίνων, ut in secunda propositione πλειόνων ὄψεων: est enim hoc γωνιῶν subobscurum. in seq. tertia propositione πλειόνων ὄψεων & μείζονος γωνίας idem valet. *Sav.* 2 Καὶ παραλλήλων, ut in demonstratione: & quidem alioqui theorema non erit universaliter verum; ne sic quidem κατὰ πάσας πτώσεις, nisi æquales sint radii à β in rei visæ πέρατα. *Savil.* 3 Διεστηκότων ἀνίσως *MS. Savil.* 4 Adjiciendum, τοῦ ΒΔΓ τριγώνου. *Savil.*

à plurià pluribus radiis conspicitur quam ΚΛ: accuratius igitur cernetur ΓΔ quam ΚΛ.

πλειόνων ὄψεων ὁρᾶται ἤπερ τὸ ΚΛ· ἀκριβέστερον ἄρα φανήσεται τὸ ΓΔ τοῦ ΚΛ. [1]

SCHOLIUM.

Quod autem, si radii ΒΚ & ΒΛ transeant per puncta Γ & Δ, necesse sit latus ΚΛ majus esse latere ΓΔ, sic sane ostendetur. sit enim ut in subjecto triangulo factum est. cum ergo in rectas parallelas ΚΛ, ΓΔ rectæ lineæ ΒΚ, ΒΛ incidant: duo igitur anguli ΒΚΛ & ΒΛΚ [per 29. 1.] duobus angulis ΒΓΔ & ΒΔΓ sunt æquales; ideoque duo triangula æquiangula sunt ΒΓΔ & ΒΚΛ: ergo [per 4.6.] ut ΒΚ ad ΚΛ sic ΒΓ ad ΓΔ; & viciſſim ut ΒΚ ad ΒΓ sic ΚΛ ad ΓΔ. est autem ΒΚ major quam ΒΓ: ergo etiam ΚΛ major est quam ΓΔ.



[2]ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὅτι δὲ διερχομένων τῶν ὄψεων ΒΚ, ΒΛ διὰ τῶν Δ καὶ Γ σημείων, ἡ ΚΛ μείζων ἂν εἴη τῆς ΓΔ, οὕτω πῶς δῆλον. γεγενέσθω γὰρ ὡς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ τριγώνῳ. καὶ ἐπειδὴ εἰς ὀρθὰς παραλλήλους τὰς ΚΛ, ΓΔ εὐθεῖαι ἐμπίπτουσιν αἱ ΒΚ, ΒΛ· αἱ μὲν οὖν ΒΚΛ καὶ ΒΛΚ γωνίαι ταῖς ΒΓΔ καὶ ΒΔΓ γωνίαις ἴσαι εἰσὶ, καὶ διὰ τοῦτο ἰσογώνιά ἐστι τρίγωνα τὰ ΒΓΔ καὶ ΒΚΛ· ὡς ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτω καὶ ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΓΔ. ἔστι δὲ ἡ ΒΚ τῆς ΒΓ μείζων· καὶ ἡ ΚΛ ἄρα τῆς ΓΔ μείζων ἐστί.

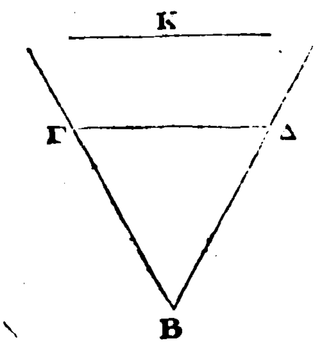
PROP. III. THEOR.

Aſpectabilium quodlibet certam habet intervalli longitudinem, qua expleta jam non cernitur.

SIT oculus Β, aspectabile vero ΓΔ: dico ΓΔ posse collocari in quadam distantia ab oculo, ex qua jam non cernetur.

Sit enim ΓΔ in intervallo quod est inter radios ΒΓ & ΒΔ, & supra illud sit Κ: nullus igitur radius ex Β oculo ad Κ perveniet. ad quod autem radii non perveniunt, illud [per 4 posit.] non cernitur: quocirca unumquodque aspectabilium certum habet intervalli modum, quo expleto jam non cernitur.

Oportet tamen inter aspectabile & oculum aliquod esse intevallum, alioqui cerni non posset.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἕκαστον τῶν ὁρωμένων ἔχει τι μῆκος ἀποστήματος, [3] οὗ γινομένου οὐκ ἔτι ὁρᾶται.

ΕΣτω γὰρ ὄμμα μὲν τὸ Β, ὁρώμενον δὲ τὸ ΓΔ· λέγω ὅτι τὸ ΓΔ ἔν τινι ἀποστήματι γενόμενον οὐκ ἔτι ὁραθήσεται.

Γεγενήσθω γὰρ τὸ ΓΔ ἐν τῷ μεταξὺ διαστήματι τῶν ὄψεων [4], ἐφ᾽ οὗ τὸ Κ. [5] οὐκοῦν πρὸς τὸ Κ οὐδεμία τῶν ἀπὸ τοῦ Β ὄψεων προσπεσεῖται. πρὸς ὃ δέ γε αἱ ὄψεις οὐ προσπίπτουσιν, ἐκεῖνο οὐχ ὁρᾶται· ἕκαστον ἄρα τῶν ὁρωμένων ἔχει τι μῆκος ἀποστήματος, οὗ γινομένου οὐκ ἔτι ὁρᾶται.

[6] Δεῖ δὲ τὸ ὁρώμενον πρὸς τὸ ὄμμα ἔχειν ἀπόστημά τι· οὐ γὰρ ἂν ἄλλως ὀφθείη.

SCHOLIUM.

Id fortaſſis objiciat quiſpiam: cum non solum ΒΓ, ΒΔ radii tendant ad ΓΔ magnitudinem, sed multo plures sint inter puncta Γ, Δ, qui ad eandem magnitudinem ferantur: igitur magnitudine ΓΔ longius ab oculo semota, etiamsi ΒΓ, ΒΔ radii ad eam non perveniant, radii tamen intermedii ad eam pervenient. nos igitur hæc objicienti satisfaciemus hoc modo: quamvis ΓΔ magnitudo nonnihil semota ab oculo non attingatur à radiis ΒΓ, ΒΔ, sed à radiis intermediis; tamen si eadem magnitudo longiſſime semoveatur ab oculo, ne ab intermediis quidem radiis attingetur.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἴσως εἴποι τις ἄν, ὡς ἐπειδὴ οὐ μόναι αἱ ΒΓ, ΒΔ αἱ προσπίπτουσαι ἀκτῖνες πρὸς τὸ ΓΔ μέγεθος, ἀλλὰ καὶ [7] πλείους μεταξὺ τῶν Γ, Δ, ὅτι ἀφισταμένου τοῦ ΓΔ μεγέθους οὐ πίπτουσιν αἱ ΒΓ, ΒΔ ἀκτῖνες, προσπίπτουσιν αἱ μεταξὺ τοῦ μέσου προσπίπτουσαι ἀκτῖνες. λέγομεν οὖν πρὸς τὸν οὕτως ἀπορήσαντα· ὅτι εἰ καὶ πρὸς μικρὸν ἀφεστηκότος τοῦ ΓΔ μεγέθους οὐ προσβάλλουσιν αἱ ΒΓ, ΒΔ ἀκτῖνες, ἀλλ᾽ αἱ μεταξὺ τοῦ μέσου, ἐπὶ πλεῖστον ἀφεστηκότος τοῦ τοιούτου μεγέθους, οὐδ᾽ αἱ μεταξὺ τοῦ μέσου προσπεσοῦνται. [8] δεῖ δ᾽ ἀποπλατύνεσθαι τὸ μεταξὺ τῶν τοιούτων ὄψεων διάστημα, [9] ἀφισταμένου τοῦ μεγέθους, ὅντος [10] ὁρισμένου παντὸς μεγέθους.

1 In *MS.Savil.* schol. ἐπειδὴ ἴσαι ἀκτῖνες ἐπὶ τὸ ΓΔ προσπίπτουσιν ἐξώτεραι ἔσονται τοῦ ΚΛ, μὴ προσπίπτουσαι αὐτοῖς, ὥστε ὑπὸ πλειόνων ὁρᾶται τὸ ΓΔ. Verba (inquit *Savil.*) sunt mutilata, sed hoc sibi voluiſſe videtur, radios aliquot in ΓΔ incidere extra angulum ΚΒΛ, atq; ita ὑπὸ πλειόνων ὄψεων ὁρᾶσθαι. 2 Deest hoc schol. in lib. MS. remanet κατὰ χειρός. 3 Al. ἐν ᾧ γινόμενον. 4 Oportet quidem subjungere proximorum. 5 Ne hoc quidem quale sit satis intelligo. nam si hoc sumere voluit, potuit non minus id, quod est demonstrandum, suo sibi jure ἀναπόδεικτον aſſumere. 6 Illa δεῖ δὲ &c. desunt in *MS Bodl.* 7 Ἄλλαι πλεῖσται in *MS.Savil.* 8 Δεῖ τὸ πλατύνεσθαι, augeatur, crescat, in longum tamen non in latum. si recte intelligo: fortaſſe verba sunt adhuc mutilata, & omittit *Pena.* 9 Forsan ἀφισταμένου. *Savil.* 10 Rectius ὁρισμένου. *Idem.*

[1] ΑΛΛΩΣ.

Ἔστω ὄμμα μὲν τὸ Β, ὁρώμενον δὲ τὸ ΓΔ, [2] ὑπὸ τῆς ΓΒΔ ἐλαχίστης γωνίας· λέγω ὅτι ἐν μείζονι ἀποστήματι γινόμενον τὸ ΓΔ οὐχ ὁραθήσεται.

Γεγενήσθω γὰρ, καὶ κείσθω πορρώτερον, ὡς ἐν τῷ Κ· ὁραθήσεται οὖν ὑπὸ ὀλιγωτέρων ὄψεων. [2] ἑωρᾶτο δὲ ὑπ' ὀλιγίστων, διὰ τὸ ἐλαχίστην ὑποκεῖσθαι τὴν ΓΒΔ γωνίαν.

ALITER.

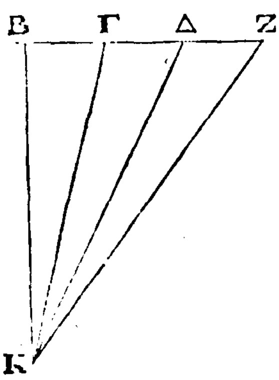
Sit oculus Β; aſpectabile vero ſit ΓΔ, quod cernatur ſub ΓΒΔ angulo minimo: dico cerni non poſſe ΓΔ magnitudinem, ſi longius removeatur ab oculo.

Fiat enim, & ſemoveatur longius ab oculo, ponaturque in Κ; cernetur ergo ſub paucioribus radiis quam antea. ſed cernebatur ſub pauciſſimis, propterea quod angulus ΓΒΔ ponitur eſſe minimus.

[3] ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Τῶν ἴσων διαστημάτων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ὄντων, τὰ ἐκ πλείονος ἀποστήματος ὁρώμενα ἐλάττω φαίνεται.

Ἔστω γὰρ ἴσα τὰ ΒΓ, ΓΔ, ΔΖ, ὄμμα δὲ τὸ Κ, ἀφ' οὗ προσπιπτέτωσαν ὄψεις αἱ ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ, ΚΖ· [4] ἡ δὲ ΚΒ πρὸς ὀρθὰς ἔστω τῇ ΒΖ. ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΚΒΖ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΒΓ, ΓΔ, ΔΖ, μείζων ἐστὶν ἡ μὲν ΒΚΓ γωνία τῆς ΓΚΔ γωνίας, ἡ δὲ ΓΚΔ γωνία τῆς ΔΚΖ γωνίας· μεῖζον ἄρα φαίνεται τὸ μὲν ΒΓ τοῦ ΓΔ, τὸ δὲ ΓΔ τοῦ ΔΖ.



PROP. IV. THEOR.

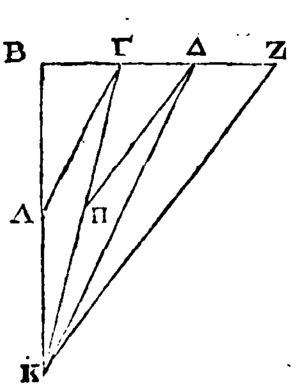
Æqualium intervallorum in eadem recta linea collocatorum, quæ è longiore diſtantia ſpectantur, minora apparent.

Sint enim æqualia intervalla ΒΓ, ΓΔ, ΔΖ; oculus autem ſit Κ, à quo procedant radii ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ, ΚΖ; ſitque ΚΒ ad rectos angulos ipſi ΒΖ. quia igitur in rectangulo triangulo ΚΒΖ æquales ſunt ΒΓ, ΓΔ, ΔΖ: major [per ſchol. ſeq.] eſt ΒΚΓ quidem angulus angulo ΓΚΔ, & angulus ΓΚΔ angulo ΔΚΖ: igitur [per 5. poſit.] majus apparet ΒΓ intervallum quam ΓΔ, & ΓΔ quam ΔΖ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἔστω τρίγωνον ἡ ΚΒΖ, ὀρθὴν ἔχον τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν, ἴσαι δ' ἔστωσαν αἱ ΒΓ, ΓΔ, ΔΖ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΓΚ, ΔΚ· φημὶ ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΒΚΓ γωνία τῆς ΓΚΔ γωνίας, καὶ ἡ ΓΚΔ τῆς ΔΚΖ.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἡ ΓΛ παράλληλος τῇ ΔΚ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΛΒ. ἴση δ' ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΛ τῇ ΛΒ. καὶ ἐπειδὴ ὀρθή ἐστιν ἡ πρὸς τῷ Β γωνία· μείζων ἂν εἴη ἡ ΛΓ τῆς ΛΒ. ἴση δ' ἐστὶν ἡ ΛΒ τῇ ΛΚ· ἡ ἄρα ΛΓ μείζων ἐστὶ τῆς ΛΚ· ὥστε καὶ ἡ ΛΚΓ γωνία τῆς ΛΓΚ γωνίας μείζων ἐστί. τῇ δὲ ΛΓΚ γωνίᾳ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΚΔ, ἐναλλὰξ γάρ εἰσιν· ἡ ἄρα ΛΚΓ μείζων ἐστὶ τῆς ΓΚΔ. πάλιν, ἀπὸ τοῦ Δ ἤχθω ἡ ΔΠ παράλληλος τῇ ΖΚ· φανερὸν ὅτι ἡ



SCHOLIUM.

Sit triangulum ΚΒΖ, cujus angulus qui ad Β rectus ſit; ſint autem & ΒΓ, ΓΔ, ΔΖ inter ſe æquales, & connectantur ΓΚ & ΔΚ: dico angulum ΒΚΓ majorem eſſe angulo ΓΚΔ; & angulum ΓΚΔ majorem eſſe angulo ΔΚΖ.

A puncto enim Γ ducatur recta linea ΓΛ, quæ ſit parallela ipſi ΔΚ: eſt igitur [per 2.6.] ut ΔΓ ad ΓΒ ſic ΚΛ ad ΛΒ. æqualis vero eſt ΔΓ ipſi ΓΒ: quare æqualis etiam eſt ΚΛ ipſi ΛΒ. & quia angulus ad Β rectus eſt: major igitur eſt [per 19.1.] ΛΓ recta quam ΛΒ. ipſa autem ΛΒ æqualis eſt ipſi ΛΚ: quare ΛΓ major eſt quam ΛΚ: ideoque [per 18.1.] angulus ΛΚΓ major eſt angulo ΛΓΚ. angulo autem ΛΓΚ æqualis eſt [per 29. 1.] angulus ΓΚΔ; ſunt enim alterni anguli: angulus ergo ΛΚΓ major eſt angulo ΓΚΔ. rurſus, à puncto Δ ducatur ΔΠ parallela ipſi ΖΚ: conſtat ergo li-

1 Deeſt in *MSS.* 2 Ex hoc loco apparet idem eſſe ὑπὸ τῆς ἐλαχίστης γωνίας ὁρᾶσθαι, καὶ ὑπὸ ὀλιγίστων ὄψεων. *Savil.* 3 Magnam habet affinitatem cum ſeptima, & plane altera non ægre carere potuiſſemus. Illic eſt ἴσα μεγέθη, hic διαστήματα, non magno ſane διαστήματι. *Savil.* 4 Quod ſc. minimum omnium ἀπόστημα facit: nam per 19.1. conſtat ΚΒ minorem eſſe quam ΚΓ, & ΚΓ quam ΚΔ, & ΚΔ quam ΚΖ. ut autem demonſtrationi theorema quadraret, ipſum theorema debuit eſſe hujuſmodi: Τῶν ἴσων διαστημάτων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ὄντων, quæ propriora ſunt perpendiculari in illam εὐθεῖαν actæ majora ſunt; quæque ab ea remotiora, minora: niſi quod *Euclides* opticus eſt neſcio quo modo minus ὀπτικὸς, in perſpectiva minus perſpicax. *Savil.*

neam ΠΔ majorem esse linea ΠΚ: quocirca angulus ΠΚΔ major est angulo ΠΔΚ. ipsi autem ΠΔΚ angulo æqualis est angulus ΔΚΖ: quare angulus ΠΚΔ major est angulo ΔΚΖ.

ΠΔ μείζων ἐϛὶ τῆς ΠΚ· ὥϛε ἡ ΠΚΔ γωνία μείζων ἐϛὶ τῆς ΠΔΚ. τῇ δὲ ΠΔΚ ἴση ἐϛὶν ἡ ΔΚΖ· διὰ τοῦτο ἄρα ἡ ΠΚΔ μείζων ἐϛὶ τῆς ΔΚΖ.

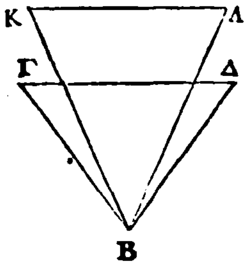
Prop. V. Theor.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Æquales magnitudines inæqualiter distantes inæquales apparent; & perpetuo major, quæ propius ad oculum posita est.

Τὰ ἴσα μεγέθη ἄνισον διεϛηκότα ἄνισα φαίνεται, καὶ μεῖζον ἀεὶ τὸ ἔγγιον τοῦ ὄμματος κείμενον.

SIT ΓΔ æqualis ipsi ΚΛ, oculus autem sit Β, à quo radii procedant ΒΔ, ΒΛ, ΒΚ, ΒΓ. cum igitur ΓΔ sub majori angulo spectetur quam ΚΛ; major apparet ΓΔ [per 5. posit.] quam ΚΛ.

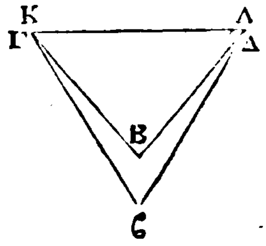


ΕΣτω ἴσον τὸ ΓΔ τῷ ΚΛ, ὄμμα δὲ ἔϛω τὸ Β, ἀφ' οὗ προσπιπτέτωσαν ὄψεις αἱ ΒΔ, ΒΛ, ΒΚ, ΒΓ. ἐπεὶ οὖν τὸ ΓΔ ὑπὸ μείζονος γωνίας ὁρᾶται ἤπερ τὸ ΚΛ· μεῖζον ἄρα φαίνεται τὸ ΓΔ τοῦ ΚΛ.

SCHOLIUM.

[2] ΣΧΟΛΙΟΝ.

Magnitudo ΓΔ sub majore angulo spectatur quam magnitudo ΚΛ. si enim ΓΔ & ΚΛ, altera alteri ita applicetur, ut punctum Κ cum puncto Γ, & punctum cum puncto Δ congruat: cum duæ lineæ ϛΚ & ϛΛ duabus lineis ΒΓ & ΒΔ majores sint; igitur triangulum ΒΓΔ cadet intra ϛΚΛ triangulum: quare ejus latera continebunt majorem angulum per 21. primi elementorum.



Τὸ ΓΔ ὑπὸ μείζονος γωνίας ὁρᾶται ἤπερ τὸ ΚΛ. καὶ γὰρ δὴ συνηρμοσμένων τῶν ΓΔ, ΚΛ, ὥϛε τὸ Κ τῷ Γ, καὶ τὸ Λ τῷ Δ ἁρμόζεσθαι· [3] ἐπειδὴ αἱ ϛΚ, ϛΛ μείζονές εἰσι τῶν ΒΓ, ΒΔ· τὸ ἄρα ΒΓΔ τρίγωνον ἐντὸς τοῦ ϛΚΛ τριγώνου πεσεῖται, καὶ αἱ αὐτοῦ πλευραὶ μείζω γωνίαν περιέξουσι, διὰ τὸ εἰκοϛὸν πρῶτον τοῦ πρώτου τῶν ϛοιχείων.

Prop. VI. Theor.

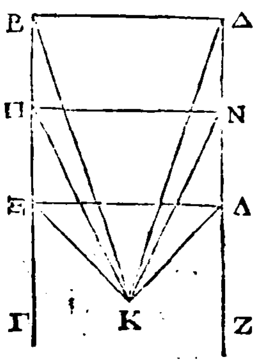
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Parallela intervalla eminus spectata inæqualis latitudinis apparent.

Τὰ παράλληλα τῶν διαϛημάτων ἐξ ἀποϛήματος ὁρώμενα ἀνισοπλατῆ φαίνεται.

SIT enim ipsius ΒΓ ad ΔΖ intervallum parallelum, oculus autem sit Κ: dico has duas magnitudines ΒΓ & ΔΖ videri tamen inæqualiter inter se distare; majusque semper apparere propius intervallum remotiore.

Procedant enim radii ΚΞ, ΚΠ, ΚΒ, ΚΔ, ΚΝ, ΚΛ, connectanturque rectæ ΞΛ, ΠΝ & ΒΔ. cum igitur major sit angulus ΞΚΛ angulo ΠΚΝ; major ergo apparet recta ΞΛ [per 5. posit.] quam ΠΝ. eademque ratione ΠΝ recta major apparet quam recta ΒΔ: non ergo videntur parallela intervalla, sed semper coarctari & inæqualiter distare videntur. quare parallela intervalla eminus spectata inæ-



ΕΣτω γὰρ τὸ ΒΓ τῷ ΔΖ παράλληλον διάϛημα, [4] ὄμμα δ' ἔϛω τὸ Κ· λέγω ὅτι τὰ ΒΓ, ΔΖ ἀνισοπλατῆ φαίνεται, καὶ μεῖζον ἀεὶ τὸ ἔγγιον διάϛημα τοῦ πόῤῥωτέρου.

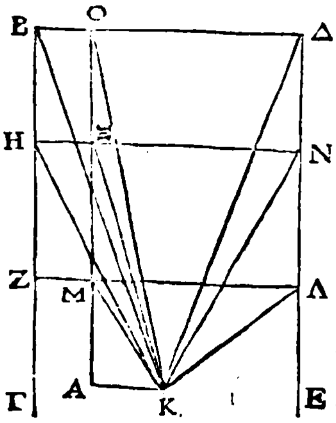
Προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΚΞ, ΚΠ, ΚΒ, ΚΔ, ΚΝ, ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΞΛ, ΠΝ, ΒΔ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐϛὶν ἡ ὑπὸ ΞΚΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΠΚΝ γωνίας, μείζων φαίνεται καὶ ἡ ΞΛ εὐθεῖα τῆς ΠΝ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΠΝ εὐθεῖα μείζων φαίνεται τῆς ΒΔ εὐθείας· οὐκ ἔτι οὖν ὀφθήσεται παράλληλα τὰ διαϛήματα, ἀλλ' εἰς ἔλαττον καὶ ἀνισοπλατῆ. τὰ ἄρα παράλληλα τῶν διαϛημάτων ἐξ ἀποϛήματος ὁρώμενα ἀνι-

1 καὶ παράλληλα. & in quæ radii à visu in rei visæ πέρατα æquales incidant; id enim ni ita fiat, nihil obstat propiorem magnitudinem minorem φαίνεσθαι, cum tamen reipsa sit æqualis: nam *Euclidis* demonstratio est plane ἀσυλλόγιστος. *Savil.* 2 Deest hoc Scholion in MS. *Bodl.* 3 Hoc quidem verum est si utrumque triangulum sit isosceles τῶν ΚΒ, ΒΛ, καὶ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἴσων ὑποκειμένων: quod quia non est necesse, nullo modo concludit Scholiastes. Possunt enim minores esse, ut nec intra triangulum cadant, nec angulum majorem comprehendant. *Savil.* 4 προχωρεῖ ἀπόδειξις, posito Κ intra ΒΓ & ΔΖ producta, vel in altera earum. Quod si extra sit, nec ἀποϛήματα majora faciunt semper minores angulos, nec etiam *inæqualia inæqualis*. *Savil.*

σοπλατῆ

ἀνισοπλατῆ φαίνεται. οὕτω μὲν, εἰ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ εἴη τὸ ὄμμα τῷ ὁρωμένῳ, λέγοιτο.

Εἰ δὲ μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ εἴη τὸ ὄμμα, οὕτως. ἔστω γὰρ τὸ Κ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον [1] κάθετος ἡ ΚΑ, ἀπὸ δὲ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΛΖ ἡ ΑΜ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ο [2], καὶ προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΚΒ, ΚΗ, ΚΖ, ΚΔ, ΚΝ, ΚΛ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΚΜ, ΚΞ, ΚΟ. ἐπεὶ οὖν ἀπὸ μετεωροτέρου τοῦ Κ ἐπὶ τὸ Μ ἐπέζευκται ἡ ΚΜ, κάθετος ἄρα ἐστὶν ἐπὶ τὴν ΖΛ. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ ΚΞ ἐπὶ τὴν ΗΝ, ἡ δὲ ΚΟ ἐπὶ τὴν ΒΔ· ὀρθογώνια ἄρα ἐστὶ τὰ ΚΜΛ, ΚΞΝ, ΚΟΔ τρίγωνα. [3] καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΞΝ τῇ ΜΛ ἴση, παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ ΜΝ· ἑκατέρα δὲ τῶν ΞΚ, ΚΝ μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ΜΚ, ΚΛ· μείζων ἐστὶν ἄρα καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΜΚΛ τῆς ὑπὸ ΞΚΝ [4], ὥστε καὶ ὅλη ἡ ΖΛ ὅλης τῆς ΗΝ μείζων φαίνεται. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΗΝ τῆς ΒΔ· ἀνισοπλατῆ ἄρα φαίνεται τὰ μεγέθη.



qualis latitudinis apparent. hoc igitur modo fit demonstratio, cum oculus est in eodem plano, in quo spectatum intervallum.

Quod si non sit in eodem plano, demonstratio fiet, ut sequitur. sit enim K oculus sublimior plano illo in quo est intervallum; & ex K in subjectum planum ducatur perpendicularis KA; & ex A in ΛZ ducatur perpendicularis AM, quæ producatur versus O; incidantque radii KB, KH, KZ, KΔ, KN, KΛ, & conjungantur KM, KΞ, KO. quia igitur ex K, puncto in sublimi posito, ad M punctum deducta est recta linea KM; perpendicularis ergo est [per sch. 1.] KM ad ZΛ. eodemque modo KΞ ad HN, & KO ad BΔ: triangula ergo rectangula sunt KMΛ, KΞN, KOΔ. estque [per 34. 1.] ΞN ipsi MΛ æqualis, parallelogrammum enim est MN; utraque autem ipsarum ΞK, KN, major est utraque ipsarum MK, KΛ: major igitur [per schol. 2.] est angulus MKΛ angulo ΞKN: quare tota ZΛ major apparet quam tota HN. eademque ratione tota HN major quam BΔ: inæqualiter ergo distare videntur duæ magnitudines.

ΣΧΟΛΙΟΝ α'.

Πῶς δὲ ἡ ΚΜ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΖΛ, δείξομεν οὕτως. ἐπεὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἦκται ἡ ΚΑ· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἡ ΚΑ ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας. ἐπεὶ οὖν ἐπὶ τὴν ΛΖ κάθετος ἦκται ἡ ΜΑ, καὶ πρὸς τὴν ΑΜ ἡ ΚΑ ὀρθὴν ποιήσει γωνίαν. ἐπιζεύχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Λ ἡ ΑΛ· καὶ πρὸς ἄρα τὴν ΑΛ ἡ ΑΚ ὀρθὴν ποιήσει γωνίαν. ἐπεὶ οὖν τρίγωνόν ἐστιν ὀρθογώνιον τὸ ΚΑΜ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ΚΑΜ γωνίαν· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΚΜ ὑποτεινούσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΚΑ, ΑΜ. πάλιν ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστιν ὀρθογώνιον τὸ ΑΜΛ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΜΛ γωνίαν· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΜ, ΜΛ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΚΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΚΑ, ΑΜ, ΜΛ. ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν ΚΑ, ΑΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΜ, τρίγωνον γάρ ἐστιν ὀρθογώνιον τὸ ΚΑΜ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΚΑΜ γωνίαν· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΚΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΚΜ, ΜΛ. καὶ, διὰ τὸ ὄγδοον καὶ τεσσαρακοστὸν τοῦ πρώτου τῶν στοιχείων, ἡ ὑπὸ ΚΜΛ γωνία ὀρθή ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SCHOLIUM 1.

Quomodo autem KM perpendicularis sit in ZΛ, sic demonstrabimus. cum ex K puncto in sublimi constituto in subjectum planum ducta sit perpendicularis KA; ad omnes igitur rectas ipsam tangentes & in subjecto plano jacentes [per 3. def. 11.] angulos rectos facit KA. quia ergo MA perpendicularis ducta est ad ΛZ: igitur KA rectum angulum facit cum AM. ducatur linea ex A in Λ, sitque AΛ: ergo AK cum AΛ rectum angulum facit. cum itaque triangulum rectangulum sit KAM, rectum habens angulum KAM: quadratum igitur quod fit ex KM subtendente rectum angulum æquale est [per 47. 1.] quadratis quæ fiunt ex KA, AM. rursus quia triangulum est rectangulum AMΛ rectum habens AMΛ: quadratum igitur quod fit ex AΛ æquale est quadratis quæ fiunt ex AM, MΛ: quadratum igitur quod fit ex KΛ æquale est eis quæ fiunt ex KA, AM, MΛ. sed quadratis quæ fiunt ex KA, AM æquale est quadratum quod fit ex KM, triangulum enim rectangulum est KAM rectum angulum habens KAM: quadratum ergo quod fit ex KΛ æquale est quadratis quæ fiunt ex KM, MΛ. quocirca, per 48. primi elementorum, rectus est angulus KMΛ. quod erat demonstrandum.

ΣΧΟΛΙΟΝ β'.

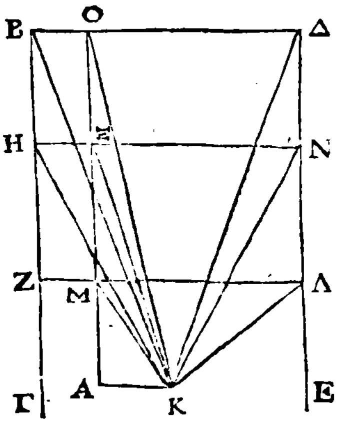
Ὅτι δὲ ἡ ὑπὸ ΜΚΛ τῆς ὑπὸ ΞΚΝ μείζων ἐστὶ, δείξομεν οὕτως. ἐπεὶ ὀρθογώνιόν ἐστι τρίγω-

SCHOLIUM 2.

Porro quod angulus MKΛ major sit angulo ΞKN, demonstrabimus hoc modo. quoniam triangu-

1 Προχωρεῖ ἀπόδειξις, si κάθετος KA intra parallelas productas cadet; si extra, non est necesse, ut in præcedente casu. *Savil.* 2 Erit igitur ad rectos τοῖς BΔ, HN παραλλήλοις. modo intelligantur BΔ, HN, ZΛ πρὸς ὀρθὰς secare parallelas: id quod est necesse, quia distantiæ ita capiuntur. *Idem.* 3 Parallelorum enim intervalla capiuntur per rectas lineas ad rectos angulos ipsis incidentes. *Idem.* 4 *Adde hæc*, Similiter demonstratur MKZ angulus major angulo ΞKH. Tale quippiam vitio librariorum abesse puto: est enim necessarium, nisi A punctum in alteram parallelarum cadit. *Idem.*

lum KΛM est rectangulum, rectum habens angulum KΛM: angulus ergo KMΛ [per 17.1.] acutus est; quare [per 13.1.] obtusus est KMΞ angulus: trianguli ergo obtusanguli KΞM latus KΞ subtendit angulum obtusum qui est ad M: majus igitur [per 19.1.] est KΞ quam KM. quia ergo triangula sunt rectangula KΞN, KΛM, rectos habentia angulos ad Ξ, M; quadratum igitur quod fit ex KN æquale est [per 47. 1.] quadratis quæ fiunt ex KΞ, ΞN. eadem ratione quadratum quod fit ex KΛ æquale est quadratis quæ fiunt ex KM, MΛ. quadrata autem quæ fiunt ex KΞ, ΞN majora sunt quadratis quæ fiunt ex KM, MΛ: nam [per 34.1.] ΞN latus æquale est lateri MΛ, cum sit ei oppositum in parallelogrammo MN; est vero [ex mox ostensis] KΞ recta major quam recta KM: quadratum igitur quod fit ex KN majus est quadrato quod fit ex KΛ: quare KN major est quam KΛ. ostensa vero est KΞ major quam KM; & ΞN æqualis ipsi MΛ: si ergo ipsam MΛ aptaverimus ipsi ΞN, cadet KMΛ triangulum intra triangulum KΞN: ergo, per prop. 21. primi elementorum, major erit MKΛ angulus angulo ΞKN. quod erat demonst.

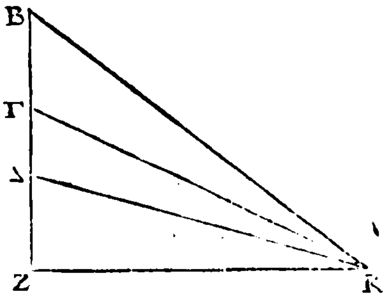


νον τὸ KΛM ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ KΛM γωνίαν, ὀξεῖά ἐστιν ἡ ὑπὸ KMΛ· ὥστε ἀμβλεῖά ἐστιν ἡ ὑπὸ KMΞ· ἀμβλυγωνίου οὖν τριγώνου τοῦ KΞM ἡ KΞ ὑποτείνει τὴν πρὸς τῷ M ἀμβλεῖαν γωνίαν· μείζων ἄρα ἡ KΞ τῆς KM. ἐπεὶ οὖν τρίγωνά ἐστιν ὀρθογώνια τὰ KΞN, KΛM ὀρθὰς ἔχοντα τὰς πρὸς τοῖς Ξ, M γωνίας· τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς KN ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν KΞ, ΞN. ὁμοίως καὶ τὸ ἀπὸ τῆς KΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν KM, MΛ· καί ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν KΞ, ΞN μείζονα τῶν ἀπὸ τῶν KM, MΛ· ἡ γὰρ ΞN τῇ MΛ ἴση ἐστίν, ὡς παραλληλογράμμου τοῦ MN οὖσα ἀπεναντίον, ἡ δὲ KΞ τῆς KM μείζων ἐστί· καὶ τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς KN τοῦ ἀπὸ τῆς KΛ μεῖζον· ὥστε καὶ ἡ KN τῆς KΛ μείζων. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ KΞ τῆς KM μείζων, ἴση δὲ ἡ ΞN τῇ MΛ· ἐὰν ἄρα τὴν MΛ ἐπὶ τὴν ΞN ἐφαρμόσωμεν, ἐντὸς πεσεῖται τὸ KMΛ τρίγωνον τοῦ KΞN τριγώνου· καὶ, διὰ τὸ εἰκοστὸν πρῶτον τοῦ πρώτου τῶν στοιχείων, μείζων ἔσται ἡ ὑπὸ MKΛ τῆς ὑπὸ ΞKN. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VII. Theor.

Magnitudines æquales in eadem recta linea procul à sese positæ, inæquales apparent.

Sint enim æquales magnitudines BΓ, ΔZ, oculus autem sit K; & ab oculo K incidant radii KB, KΓ, KΔ, KZ. sit autem rectus KZB angulus: major ergo est [per sch. 4. opt.] angulus ZKΔ angulo ΓKB: quare [per 5. posit.] major apparebit ΔZ quam ΓB: ideoque inæquales apparent BΓ, ΔZ magnitudines.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἴσα ὄντα μεγέθη, πορρωτέρω ἀλλήλων τεθέντα, ἄνισα φαίνεται.

[1] Ἔστω γὰρ ἴσα μεγέθη τὰ BΓ, ΔZ, ὄμμα δὲ ἔστω τὸ K, καὶ ἀπὸ τοῦ K ὄμματος προσπιπτέτωσαν ὄψεις αἱ KB, KΓ, KΔ, KZ. ὀρθὴ δὲ ἔστω ἡ ὑπὸ KZB γωνία. οὐκοῦν μείζων ἐστὶν ἡ ZKΔ γωνία τῆς ΓKB· ὥστε καὶ ἡ ΔZ μείζων φανήσεται τῆς ΓB· ἄνισα ἄρα φαίνεται τὰ BΓ, ΔZ μεγέθη.

Prop. VIII. Theor.

Æquales magnitudines, inæqualiter ab oculo distantes, non servant eandem rationem angulorum quam distantiarum.

Sit BΓ magnitudo æqualis & parallela magnitudini ΔZ; sitque oculus K, à quo educantur radii KZΓ, KΘB, & KEΔ, quorum KΓ sit ad angulos rectos ipsi BΓ: assero fore ut non appareat eadem ratio inter magnitudines BΓ, ΔZ quæ inter intervalla KΓ, KZ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

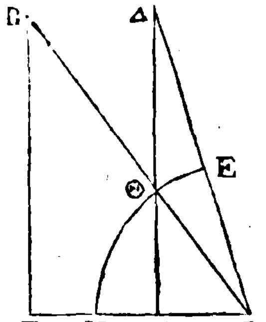
Τὰ ἴσα μεγέθη ἄνισον διεστηκότα οὐκ ἀναλόγως τοῖς ἀποστήμασιν ὁρᾶται [3].

Ἔστω γὰρ τὸ BΓ τῷ ΔZ ἴσον, καὶ κείσθω αὐτῷ παράλληλον, ὄμμα δὲ ἔστω τὸ K [4], καὶ ἀπ' αὐτοῦ προσπιπτέτωσαν ὄψεις αἱ KZΓ, KΘB, καὶ KEΔ, ὧν ἡ KΓ πρὸς ὀρθὰς ἔστω τῇ BΓ· φημὶ δὴ ὅτι οὐκ ἀναλόγως φανήσεται τὰ BΓ, ΔZ μεγέθη τοῖς KΓ, KZ διαστήμασιν.

1 Mihi plane & theorema & demonstratio nihil videtur post 4. prop. magni adferre: omitti sane utrumque sine dispendio rei opticæ potuit. *Savil.* 2 Ut huic demonstrationi theorema congrueret, deberet esse hujusmodi: Τῶν ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἴσων ὄντων μεγεθῶν, πορρωτέρω ἀλλήλων τεθέντων, quæ à perpendiculari in illam εὐθεῖαν acta inæqualiter absunt ἄνισα φαίνεται. *Idem.* 3 Sed major est ratio majoris distantiæ ad minorem quam majoris τῆς ὄψεως anguli ad minorem. *Idem.* 4 ἐπ' εὐθείας scilicet τοῖς Γ, Z σημείοις.

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ γὰρ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΘΖΚ· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΘΚ· ὥστε καὶ ἡ ΘΚ τῆς ΚΖ μείζων ἐστίν [1]· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΘΚ, κύκλος γραφόμενος ὑπερπεσεῖται τὴν ΚΖ. γεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ ΕΘΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΔΘΚ τρίγωνον μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὸν ΘΕΚ τομέα ἤπερ τὸ ΖΘΚ τρίγωνον πρὸς τὸν ΗΘΚ τομέα· ἐναλλὰξ ἄρα τὸ ΘΔΚ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΘΚ τρίγωνον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΕΘΚ τομεὺς πρὸς τὸν ΗΘΚ τομέα· [2] συνθέτως ἄρα ΖΔΚ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΘΚ τρίγωνον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΕΗΚ τομεὺς πρὸς τὸν ΗΘΚ τομέα. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ΖΔΚ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΘΚ τρίγωνον οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ, ὡς δὲ ὁ ΗΕΚ τομεὺς πρὸς τὸν ΗΘΚ τομέα οὕτως ἡ ὑπὸ ΔΚΖ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΘΚΖ· ἐν μείζονι ἄρα λόγῳ ἐστὶ καὶ ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΖΘ ἤπερ ἡ ΕΚΖ γωνία πρὸς τὴν ΘΚΖ. ὡς δὲ ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΖΘ οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΖΚ· καὶ ἡ ΚΓ ἄρα πρὸς τὴν ΖΚ ἐν μείζονι λόγῳ ἐστὶν ἤπερ ἡ ΕΚΖ γωνία πρὸς τὴν ΘΚΖ γωνίαν. καὶ ἐκ μὲν τῆς ΒΚΖ γωνίας τὸ ΔΖ ὁρᾶται, ἐκ δὲ τῆς ΒΚΓ γωνίας τὸ ΒΓ· οὐκ ἀνάλογον ἄρα τοῖς ἀποστήμασι τὰ ἴσα μεγέθη ὁρᾶται.

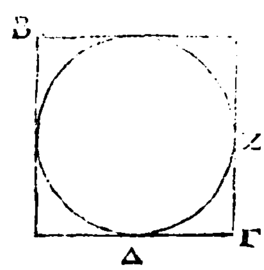


Quia enim rectus est angulus ΘΖΚ; ergo [per 17.1.] angulus ΖΘΚ acutus est: quare [per 19.1.] ΘΚ major est quam ΚΖ: ideoque si centro Κ, intervallo autem ΚΘ, describatur circulus, cadet ultra ipsam ΚΖ, id est, ΚΖ erit minor semidiametro. descripta igitur sit circuli portio, quæ sit ΕΘΗ. & quia ΔΘΚ triangulum majorem rationem habet ad sectorem ΘΕΚ quam ΖΘΚ triangulum ad sectorem ΗΘΚ: vicissim ergo ΘΔΚ triangulum ad ΖΘΚ triangulum majorem rationem habet quam sector ΕΘΚ, ad ΗΘΚ sectorem: ergo per compositionem rationis, triangulum ΖΔΚ ad triangulum ΖΘΚ majorem habet rationem quam sector ΕΗΚ ad ΗΘΚ sectorem. sed [per 1.6.] ut ΖΔΚ triangulum ad ΖΘΚ triangulum ita ΔΖ ad ΖΘ; ut autem ΗΕΚ sector ad ΗΘΚ sectorem ita [per cor. 33. 6.] ΔΚΖ angulus ad ΘΚΖ angulum: ergo ΔΖ ad ΖΘ majorem rationem habet quam angulus ΕΚΖ ad angulum ΘΚΖ. ut autem ΔΖ ad ΖΘ ita [per 4.6.] ΓΚ ad ΖΚ: igitur ΚΓ ad ΖΚ majorem rationem habet quam ΕΚΖ angulus ad ΘΚΖ angulum. sed sub ΕΚΖ angulo cernitur magnitudo ΔΖ; sub angulo autem ΒΚΓ cernitur magnitudo ΒΓ: non ergo in eadem ratione cernuntur æquales magnitudines, in qua sunt intervalla.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θʹ.

Τὰ ὀρθογώνια μεγέθη, ἐξ ἀποστήματος [3] ὁρώμενα, περιφερῆ φαίνεται.

Ἔστω γὰρ ὀρθογώνιον τὸ ΒΓ ἐξ ἀποστήματος ὁρώμενον. ἐπεὶ οὖν ἕκαστον τῶν ὁρωμένων ἔχει τι μῆκος ἀποστήματος, οὗ γινομένου οὐκέτι ὁρᾶται· [4] ἡ μὲν Γ ἄρα γωνία οὐχ ὁρᾶται, τὰ δὲ Δ, Ζ σημεῖα μόνον φαίνεται. ὁμοίως καὶ ἐφ᾽ ἑκάστης τῶν λοιπῶν γωνιῶν τοῦτο συμβήσεται· ὥστε ὅλον περιφερὲς φανήσεται.



Prop. IX. Theor.

Rectangulæ magnitudines, eminus spectatæ, rotundæ apparent.

SIT ΒΓ rectangula magnitudo eminus conspecta. cum ergo [per 3. opt.] quodlibet aspectabilium habeat certam intervalli longitudinem, qua expleta jam non cernitur: angulus igitur, qui est ad Γ, non cernitur, sed puncta tantum Δ & Ζ apparent. idem cuilibet reliquorum angulorum accidet: quare circularis apparebit tota magnitudo.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Η Γ γωνία οὐχ ὁρᾶται· τὸ γὰρ ὀρθογωνίων σχημάτων πλάτος ἔλαττον τυγχάνει περὶ τὰς γωνίας ἢ ἄλλοθί που· διόπερ τὰ πλησίον τῶν γωνιῶν θᾶττον ἂν ἀφανίζοιτο τῶν περὶ τὰ μέσα σχήματα.

SCHOLIUM.

Angulus Γ non cernitur: figurarum enim rectangularum latitudo minor est circa angulos quam alibi: quocirca partes quæ magis ad angulos accedunt citius evanescunt & aspectum fugiunt, quam illæ quæ medium figuræ locum occupant.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιʹ.

Τῶν κάτω τοῦ ὄμματος κειμένων ἐπιπέδων, [5] τὰ πόῤῥω μετεωρότερα φαίνεται.

Ἔστω γὰρ ὄμμα τὸ Β ἄνω τοῦ ΓΚ ἐπιπέδου κείμενον, ἀφ᾽ οὗ ὄμματος προσπιπτέτωσαν

Prop. X. Theor.

Planorum oculo subjectorum quæ remotiora sunt sublimiora apparent.

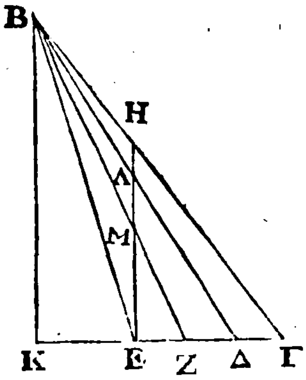
SIT oculus Β sublimior positus quam sit planum ΓΚ, & ex oculo procedant radii

1 Addit *Cod. Savil.* ἐν τῷ ΚΔ ἐλάσσων 2 Συνθέντι ἄρα in *Cod. Savil.* Καταγραφὴ prop. 8. accommodari potest ad ea quæ videntur secundum radios ἰσοσκελεῖς (quomodo res perfectissime videntur, quippe secundum maximum angulum, ut ex lemmate ad quartam liquet) divisis basibus bifariam. 3 Satis longinquo, quantum sufficiat nimirum ad tollendum sensum angulorum. *Savil.* 4 Ita ne totum quidem orthogonium: sed à Scholiaste nonnihil sublevamur hac in parte. *Savil.* 5 Τὰ πόῤῥωτέρω à puncto casus radii perpendicularis in subjectum planum. *Idem.*

ΒΓ,

ΒΓ, ΒΔ, ΒΖ, ΒΕ, ΒΚ, quorum ΒΚ perpendicularis sit ad subjectum planum: dico ΓΔ planum sublimius apparere plano ΖΕ.

Quia enim radii ΒΓ, ΒΔ, sub quibus cernitur ΓΔ planum, sublimiores sunt quam ΒΖ, ΒΕ, sub quibus cernitur planum ΖΕ: sublimius igitur apparet planum ΓΔ plano ΖΕ, & planum ΖΕ plano ΕΚ; quæ enim per radios sublimiores spectantur [per 8. posit.] sublimiora apparent.



ἀκτῖνες αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΒΖ, ΒΕ, ΒΚ, ὧν ἡ ΒΚ κάθετος ἔστω ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· λέγω ὅτι τὸ ΓΔ τοῦ ΖΕ μετεωρότερον φαίνεται.

Ἐπεὶ αἱ ΒΓ, ΒΔ ὄψεις, ὑφ' ὧν ὁρᾶται τὸ ΓΔ ἐπίπεδον, μετεωρότεραί εἰσι τῶν ΒΖ, ΒΕ ὄψεων, ὑφ' ὧν ὁρᾶται τὸ ΖΕ· ἐκεῖνο τὸ μὲν ΓΔ τοῦ ΖΕ μετεωρότερον φαίνεται, τὸ δὲ ΖΕ τοῦ ΕΚ· τὰ γὰρ ὑπὸ μετεωροτέρων ἀκτίνων φαινόμενα μετεωρότερα φαίνεται.

SCHOLIUM.

Quod autem radii ΒΓ, ΒΔ sublimiores sint radiis ΒΖ, ΒΕ, hinc liquet. ducatur enim ΕΗ recta ad planum ΚΓ: punctum igitur Η sublimius est puncto Λ, & punctum Λ puncto Μ. ducitur autem radius ΒΓ per punctum Η, radius vero ΒΔ per punctum Λ, radius denique ΒΖ per punctum Μ: ergo radius ΒΓ sublimior est quam ΒΔ, & ΒΔ sublimior est quam ΒΖ, & ΒΖ quam ΒΕ: quare ΒΓ, ΒΔ radii sublimiores sunt quam radii ΒΖ, ΒΕ.

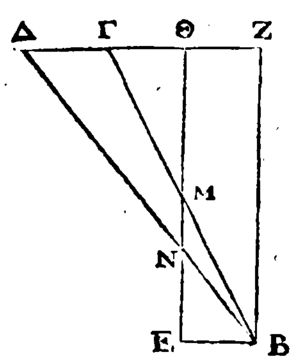
ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὅτι δὲ αἱ ΒΓ, ΒΔ ὄψεις μετεωρότεραί εἰσι τῶν ΒΖ, ΒΕ ὄψεων, δῆλον. ἤχθω γὰρ ἡ ΕΗ πρὸς ὀρθὰς τῷ ΚΓ ἐπιπέδῳ· ἐκεῖνο τὸ Η σημεῖον μετεωρότερόν ἐστι τοῦ Λ, καὶ τὸ Λ τοῦ Μ. διῆκται δὲ ἡ μὲν ΒΓ ὄψις διὰ τοῦ Η, ἡ δὲ ΒΔ διὰ τοῦ Λ, ἡ δὲ ΒΖ διὰ τοῦ Μ· ἡ ἄρα ΒΓ ὄψις μετεωροτέρα ἐστὶ τῆς ΒΔ, καὶ ἡ ΒΔ τῆς ΒΖ, καὶ ἡ ΒΖ τῆς ΒΕ· αἱ ἄρα ΒΓ, ΒΔ ὄψεις μετεωρότεραί εἰσι τῶν ΒΖ, ΒΕ ὄψεων.

Prop. XI. Theor.

Planorum oculo sublimiorum quæ remotiora sunt depressiora apparent.

SIT oculus Β depressior plano ΔΖ, & ab oculo Β procedant radii ΒΔ, ΒΓ, ΒΖ: quia igitur de radiis omnibus ab oculo Β ad planum ΔΖ tendentibus humillimus est ΒΔ, ipse autem ΒΓ humilior ipso ΒΖ. sed per radios ΒΔ, ΒΓ cernitur planum ΔΓ, per radios autem ΒΓ, ΒΖ cernitur planum ΓΖ: igitur [per 9. posit.] ΔΓ depressius apparet quam ΓΖ.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Τῶν ἄνω τοῦ ὄμματος κειμένων ἐπιπέδων [1] τὰ πόρρω ταπεινότερα φαίνεται.

Ἔστω γὰρ ὄμμα τὸ Β, κάτω τοῦ ΔΖ ἐπιπέδου κείμενον, ἀφ' οὗ προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΒΔ, ΒΓ, ΒΖ, [2] ταπεινοτάτη τῶν ἀπὸ τοῦ Β ὄμματος πρὸς τὸ ΔΖ ἐπίπεδον προσπιπτουσῶν ἀκτίνων ἐστὶν ἡ ΒΔ, ἡ δὲ ΒΓ τῆς ΒΖ ταπεινοτέρα. ἀλλὰ διὰ μὲν τῶν ΒΔ, ΒΓ ἀκτίνων τὸ ΔΓ φαίνεται, διὰ δὲ τῶν ΒΓ, ΒΖ τὸ ΓΖ· τὸ ΔΓ ἄρα ταπεινότερον τοῦ ΓΖ ὁρᾶται.

SCHOLIUM.

Quod autem radiorum omnium ex Β oculo ad ΔΖ planum pergentium humillimus sit radius ΒΔ, hunc in modum demonstrabimus. sit enim planum ΒΕ parallelum quidem plano ΖΔ, brevius autem ipso ΓΖ; erigaturque ΕΘ linea, quæ recta sit ad planum ΒΕ: igitur punctum Ν depressius est puncto Μ. transit autem radius quidem ΒΔ per punctum Ν, radius autem ΒΓ per punctum Μ: quare radius ΒΔ humilior est radio ΒΓ. eadem demonstratio in reliquis valebit.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὅτι δὲ ἡ ΒΔ ταπεινοτάτη ἐστὶ τῶν ἀπὸ τοῦ Β ὄμματος πρὸς τὸ ΔΖ ἐπίπεδον προσπιπτουσῶν ἀκτίνων, δείξομεν οὕτως. ἔστω γὰρ ΒΕ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ΖΔ ἐπιπέδῳ, ἔστω δὲ καὶ ἔλαττον τοῦ ΓΖ, καὶ ἀνήχθω ἡ ΕΘ πρὸς ὀρθὰς τῷ ΒΕ ἐπιπέδῳ· τὸ μὲν Ν ἄρα σημεῖον ταπεινότερόν ἐστι τοῦ Μ. διῆκται δὲ ἡ μὲν ΒΔ ὄψις διὰ τοῦ Ν σημείου, ἡ δὲ ΒΓ διὰ τοῦ Μ· ἡ ἄρα ΒΔ ταπεινοτέρα ἐστὶ τῆς ΒΓ. τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ περὶ τῶν ἄλλων ἔσται ἡ ἀπόδειξις.

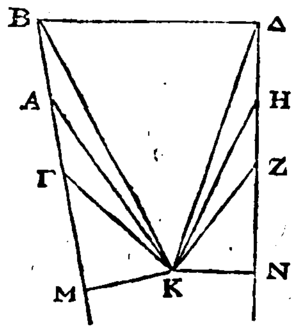
1 Τὰ πορρωτέρω ut supra, à puncto incidentiæ radii perpendicularis in supra positum planum. *Savil.* 2 In MS. *Savil.* ὧν ἡ ΒΖ κάθετος ἔστω ἐπὶ τὸ ἄνω κείμενον ἐπίπεδον, ut supra.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ΄.

Τῶν εἰς τοὔμπροσθεν [1] μῆκος ἐχόντων, τὰ μὲν ἐν τοῖς δεξιοῖς εἰς τὰ ἀριστερὰ δοκεῖ [2] παρῆχθαι, τὰ δ' ἐν τοῖς ἀριστεροῖς εἰς τὰ δεξιά.

Ἔστω γὰρ ὁρώμενα τὰ ΒΓ, ΔΖ, ὄμμα δὲ τὸ Κ, ἀφ' οὗ προσπιπτέτωσαν ὄψεις αἱ ΚΓ, ΚΑ, ΚΒ, ΚΖ, ΚΗ, ΚΔ· λέγω ὅτι τὸ Δ παρῆχθαι δοκεῖ εἰς τ' ἀριστερὰ ἤπερ τὸ Η· ὁμοίως δὲ καὶ τὸ Β εἰς τὰ δεξιὰ δοκεῖ παρῆχθαι ἤπερ τὸ Α. ὥστε τῶν εἰς τοὔμπροσθεν μῆκος ἐχόντων, τὰ μὲν ἐν τοῖς δεξιοῖς εἰς τὰ ἀριστερὰ δοκεῖ παρῆχθαι, τὰ δὲ ἐν τοῖς ἀριστεροῖς εἰς τὰ δεξιά.



Prop. XII. Theor.

Eorum quæ in anteriorem partem longitudinem habent, dextra lævorſum & læva dextrorſum educi videntur.

Sint viſæ magnitudines ΒΓ, ΔΖ; oculus vero ſit Κ, à quo procedant radii ΚΓ, ΚΑ, ΚΒ, ΚΖ, ΚΗ, ΚΔ: igitur Δ magis ad lævam educi videtur quam Η: eodemque modo Β magis ad dextram educi videtur quam Α. quocirca eorum quæ in anteriorem partem longitudinem habent, dextra lævorſum & læva dextrorſum educi videntur.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὅτι δὲ τὸ μὲν Δ παρῆχθαι δοκεῖ εἰς τ' ἀριστερὰ ἤπερ τὸ Η, καὶ τὸ Η ἤπερ τὸ Ζ, τὸ δὲ Β εἰς τὰ δεξιὰ μᾶλλον ἢ τὸ Α, καὶ τὸ Α μᾶλλον ἢ τὸ Γ, δῆλον. ἔστω γὰρ ἡ ΚΝ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΔΝ, καὶ ἡ ΚΜ ὁμοίως πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΜ· πασῶν οὖν ἀπὸ τοῦ Κ ὄμματος πρὸς τὴν ΔΝ προσπιπτουσῶν ἀκτίνων [3] ἐλαχίστη ἐστὶν ἡ ΚΝ κάθετος· καὶ διὰ τοῦτο δεξιώτατον τὸ Ν σημεῖον, καὶ ἡ ΚΝ δεξιωτάτη τῶν ΚΖ, ΚΗ, ΚΔ ὄψεων. ἐπεὶ δὲ ἡ ΚΖ ἐγγίων πρὸς τὴν ΚΝ ἤπερ ἡ ΚΗ, καὶ ἡ ΚΗ, ἐγγίων πρὸς τὴν ΚΝ ἤπερ ἡ ΚΔ· ἡ ἄρα ΚΔ εἰς τὰ ἀριστερὰ παρῆχθαι δοκεῖ ἤπερ ἡ ΚΗ, καὶ ἡ ΚΗ ἤπερ ἡ ΚΖ· τὸ οὖν Δ εἰς τὰ ἀριστερὰ ἀπονεύειν μᾶλλον φαίνεται ἢ τὸ Η, καὶ τὸ Η ἤπερ τὸ Ζ. ὁμοίως δὴ δείξομεν καὶ τὸ Β εἰς τὰ δεξιὰ παρῆχθαι ἢ τὸ Α, καὶ τὸ Α ἢ τὸ Γ.

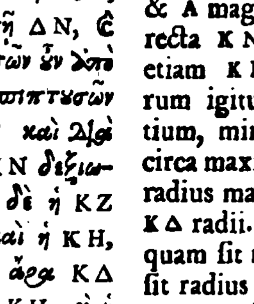
SCHOLIUM.

Quod autem Δ magis ad ſiniſtram procumbere videatur quam Η, & Η quam Ζ; item quod Β ad dextram magis tendere videatur quam Α, & Α magis quam Γ, hinc conſtabit. eſto enim recta ΚΝ ad angulos rectos ipſi ΔΝ, recta etiam ΚΜ ad angulos rectos ipſi ΒΜ: radiorum igitur omnium, ex oculo Κ ad ΔΝ pergentium, minimus eſt perpendicularis ΚΝ: quocirca maxime dextrum eſt punctum Ν, & ΚΝ radius magis ad dextram vergit quam ΚΖ, ΚΗ, ΚΔ radii. quia autem ΚΖ propior eſt ipſi ΚΝ quam ſit radius ΚΗ, & ΚΗ propior ipſi ΚΝ quam ſit radius ΚΔ: igitur radius ΚΔ ad lævam magis vergere videtur quam radius ΚΗ, & radius ΚΗ magis quam radius ΚΖ: ergo Δ lævorſum magis nutare videtur quam Η, & Η magis quam Ζ. eodem modo oſtendemus Β magis ad dextram vergere quam Α, & Α quam Γ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ΄.

Τῶν ἴσων μεγεθῶν ὑπὸ τὸ ὄμμα [4] κειμένων [5] τὰ πόρρω κείμενα μετεωρότερα φαίνεται.

Ἔστω γὰρ ἴσα μεγέθη τὰ ΒΓ, ΔΖ, ΚΛ ὑπὸ τὸ ὄμμα τὸ Ν κείμενα, καὶ ἀπὸ τοῦ Ν ὄμματος προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΝΒ, ΝΔ, ΝΚ. λέγω ὅτι [6] μετεωροτάτη ἐστὶν ἡ ΝΒ τῶν λοιπῶν ἀκτίνων· ὥστε καὶ τὸ Β σημεῖον. τὸ ἄρα ΒΓ τοῦ ΔΖ μετεωρότερον φαίνεται, τὸ δὲ ΔΖ τοῦ ΚΛ. τῶν ἄρα ἴσων μεγεθῶν ὑπὸ τὸ ὄμμα κειμένων τὰ πόρρω κείμενα μετεωρότερα φαίνεται.



Prop. XIII. Theor.

Æqualium magnitudinum ſub oculo poſitarum, quæ remotiores ab oculo ſunt ſublimiores apparent.

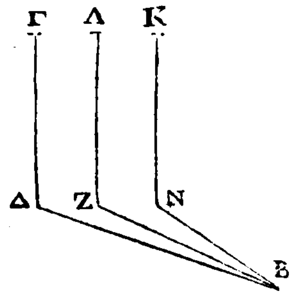
Sint æquales magnitudines ΒΓ, ΔΖ, ΚΛ poſitæ ſub oculo qui ſit Ν, à quo procedant radii ΝΒ, ΝΔ, ΝΚ. horum ergo omnium maxime ſublimis eſt radius ΝΒ: quare & punctum Β ſublimius apparet; igitur ΒΓ ſublimior apparet quam ΔΖ, & ΔΖ quam ΚΛ. ergo æqualium magnitudinum ſub oculo poſitarum, quæ remotiores ab oculo ſunt ſublimiores apparent.

1 Antrorſum, in anteriorem partem, ſc. neque ad dextram neque ad ſiniſtram deflectendo. *Savil.* 2 Ἀπονεύειν, tendere, procumbere. 3 Κάθετος & ἐλαχίστη eſt & δεξιωτάτη, ſed non puto δεξιωτάτη quia ἐλαχίστη. *Savil.* 4 Sc. æqualiter, *i. e.* ita ut κάθετοι à punctis Β, Δ. Κ, itemque κάθετοι à punctis Γ, Ζ, Λ, in rectam ab Ν ad centrum terræ ductam ἀχθεῖσαι in iiſdem punctis rectam illam ſecent; alioqui non συγχωρεῖται. *Savil.* 5 In quæ ſc. perpendicularis ob oculo longior eſt. *Idem.* 6 Longiſſime ſc. diſtans à perpendiculari ab oculo ad horizontem, quæ eſt omnino μετεωροτάτη. *Idem.*

Prop. XIV. Theor.

Æqualium magnitudinum oculo sublimiorum, quæ remotiores sunt humiliores apparent.

Sint æquales magnitudines KN, ΛZ, ΓΔ positæ loco sublimiori quam sit B oculus, à quo pergant radii BN, BZ, BΔ; humillimus ergo est radius BΔ: quare & punctum Δ humillimum erit. ideoque ΓΔ humilior apparebit quam ΛZ, & ΛZ humilior videbitur quam KN.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ΄.

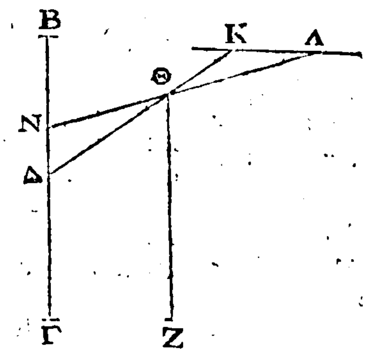
Τῶν ἴσων μεγεθῶν [1] ἄνω τοῦ ὄμματος κειμένων [2] τὰ πόῤῥω κείμενα ταπεινότερα φαίνεται.

Ἔστω ἴσα μεγέθη τὰ ΚΝ, ΛΖ, ΓΔ ἄνω τοῦ ὄμματος κείμενα τοῦ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ὄμματος προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΒΝ, ΒΖ, ΒΔ· οὐκοῦν ταπεινοτάτη ἐστὶν ἡ ΒΔ· ὥστε καὶ τὸ Δ. καὶ τὸ μὲν ΓΔ ταπεινότερον φαίνεται τοῦ ΛΖ, τὸ δὲ ΛΖ τοῦ ΚΝ.

Prop. XV. Theor.

Magnitudinum oculo subjectarum, quarum altera alteram excedit, oculo quidem ad eas accedente, excessus quo major minorem superare videtur, major apparet; recedente vero, minor.

Sit BΓ major quam ΘZ, ponaturque K oculus sublimiore loco quam sint BΓ, ΘZ, & per punctum Θ cadat radius KΔ. igitur BΓ excedere videtur ipsam ΘZ tota BΔ magnitudine, æqualis enim videtur ΘZ ipsi ΔΓ, cum ab eodem oculo & eodem radio KΔ cernantur. rursus, transferatur oculus ad Λ, & per Θ punctum procedat radius ΛN. itaque rursus BΓ major apparet quam ΘZ, tanto excessu quanta est magnitudo BN: recedente itaque oculo, major magnitudo BΓ minorem ΘZ excedere videtur minore excessu, quam accedente.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε΄.

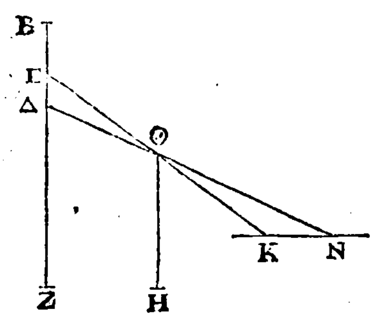
Ὅσα ἀλλήλων ὑπερέχει τῶν ὑπὸ τὸ ὄμμα [3] κειμένων, προσιόντος μὲν τοῦ ὄμματος, μείζονι τὸ ὑπερφαινόμενον φαίνεται μεῖζον· ἀπιόντος δὲ, ἐλάττονι μεῖζον.

Ἔστω γὰρ μεῖζον τὸ ΒΓ τοῦ ΘΖ, καὶ ὄμμα κείσθω τὸ Κ ἄνω τῶν ΒΓ, ΘΖ, καὶ προσπιπτέτω ἀκτὶς διὰ τοῦ Θ ἡ ΚΔ. οὐκοῦν τὸ ΒΓ τοῦ ΘΖ μεῖζον φαίνεται τῷ ΒΔ, ἴσον γὰρ ἐφαίνετο τὸ ΘΖ τῷ ΔΓ, ἐπειδὴ ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ὄμματος καὶ τῆς ΚΔ ἀκτῖνος ἑωρᾶτο. πάλιν δὴ μετακείσθω τὸ ὄμμα ἐπὶ τὸ Λ, καὶ διὰ τοῦ Θ προσπιπτέτω ἀκτὶς ἡ ΛΝ. οὐκοῦν πάλιν τὸ ΒΓ τοῦ ΘΖ μεῖζον φαίνεται τῷ ΒΝ· ἐλάττονι ἄρα φαίνεται ὑπερέχον τὸ ΒΓ τοῦ ΘΖ, ἀπιόντος τοῦ ὄμματος, ἤπερ προσιόντος.

Prop. XVI. Theor.

Magnitudinum oculo sublimiorum, quarum altera alteram excedit, oculo ad eas accedente, excessus, quo major minorem superat, minor videtur; recedente vero multo major.

Sit BZ major quam ΘH; ab oculo vero K in inferiore loco posito procedat radius KΓ per punctum Θ: igitur BZ excedere videtur ipsam ΘH, tanta quantitate quanta est BΓ. transferatur oculus K ad N, procedatque radius NΔ per punctum Θ: ergo hic rursus BZ excedit ipsam ΘH tota magnitudine BΔ.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ΄.

Ὅσα ἀλλήλων ὑπερέχει κάτω τοῦ ὄμματος κειμένων, προσιόντος μὲν τοῦ ὄμματος, ἐλάττονι μεῖζον τὸ ὑπερφαινόμενον φαίνεται· ἀπιόντος δὲ, μείζονι μεῖζον.

Ἔστω μεῖζον τὸ ΒΖ τοῦ ΘΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ ὄμματος κάτω κειμένου προσπιπτέτω ἀκτὶς ἡ ΚΓ διὰ τοῦ Θ· οὐκοῦν τὸ ΒΖ τοῦ ΘΗ μεῖζον φαίνεται τῷ ΒΓ. μετακείσθω δὴ τὸ Κ ὄμμα ἐπὶ τὸ Ν, καὶ προσπιπτέτω ἀκτὶς ἡ ΝΔ διὰ τοῦ Θ· οὐκοῦν πάλιν τὸ ΒΖ τοῦ ΘΗ μεῖζον φαίνεται τῷ ΒΔ.

1 Et æque altorum, ut supra. *Savil.* 2 Ut supra. *Idem.* 3 Satis est minorem quantitatem esse oculo subjectam. *Idem.*

προσιόν-

προσιόντος μὲν ἄρα τοῦ ὄμματος, ἐλάττονι μεῖζον φαίνεται ὑπερέχον τὸ ΒΖ τοῦ ΘΗ, ἀπιόντος δὲ μείζονι.

quare oculo accedente, major magnitudo ΒΖ minorem ΘΗ superare videtur minori excessu; recedente vero oculo, majore.

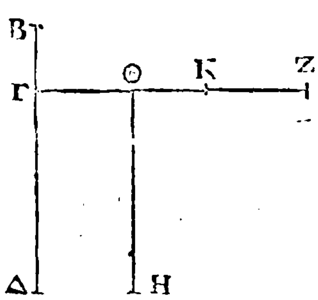
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Ὅσα ἀλλήλων ὑπερέχει, τοῦ ὄμματος [1] ἐπ' εὐθείας τῷ ἐλάσσονι μεγέθει ὄντος, προσιόντος τε καὶ ἀφισταμένου τοῦ ὄμματος, τῷ ἴσῳ ἀεὶ δόξει τὰ ὑπερφαινόμενα τοῦ ἐλάσσονος ὑπερέχειν.

Prop. XVII. Theor.

Magnitudinum, quarum altera alteram excedit; oculi radio ad inferioris verticem perpendiculariter incidente, * major minorem semper excedere videtur æquali excessu, sive oculus accedat, sive recedat.

Ὑπερεχέτω γὰρ τὸ ΒΔ τοῦ ΘΗ τῷ ΒΓ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΘ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἔστω τὸ ὄμμα ἐπὶ τὸ Ζ· οὐκοῦν ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἀκτὶς προσπίπτουσα κατὰ τὴν ΖΓ ἐνεχθήσεται. πάλιν δὲ μετακινείσθω τὸ ὄμμα ἐπὶ τὸ Κ· οὐκοῦν διὰ τὰ αὐτὰ ἡ ἀπὸ τοῦ Κ ὄμματος ἀκτὶς προσπίπτουσα κατὰ τὴν ΚΓ ἐνεχθήσεται· τῷ αὐτῷ ἄρα ὑπερέξει τὸ ΒΔ τοῦ ΘΗ, καὶ προσιόντος τοῦ ὄμματος καὶ ἀφισταμένου.



Excedat enim ΒΔ ipsam ΘΗ magnitudine ΒΓ; & connexa ΓΘ producatur usque ad Ζ, in quo sit oculus: igitur radius ex Ζ procedens secundum ΖΓ incidet. rursus, transferatur oculus ad Κ. ergo ob eandem causam radius ex Κ oculo emissus feretur secundum ΚΓ lineam: quare sive oculus accedat sive recedat, eodem excessu perpetuo excedet major magnitudo ΒΔ ipsam minorem magnitudinem ΘΗ.

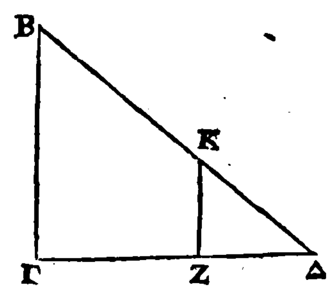
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Τὸ δοθὲν ὕψος γνῶναι πόσον ἐστίν.

Prop. XVIII. Probl.

Datam altitudinem cognoscere quanta sit.

Ἔστω γὰρ ὃ δεῖ ἐπιγνῶναι ὕψος πόσον ἐστὶ τὸ ΒΓ, καὶ προσπιπτέτω ἀκτὶς ἡλίου διὰ τοῦ Β, ἡ ΒΔ· οὐκοῦν σκιὰ ἔσται ἡ ΓΔ. λάβε δή τι γνώριμον μέγεθος τὸ ΚΖ, καὶ ἐνάρμοσον ὑπὸ τὴν Δ γωνίαν παράλληλον τῇ ΒΓ· οὐκοῦν ἐστὶν ὡς τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΒ οὕτω τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΚ. καὶ γνώριμος ὁ λόγος ὁ τοῦ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΚ· γνώριμος ἄρα καὶ ὁ τοῦ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΒ. καὶ ἔστι γνώριμος ἡ ΔΓ σκιά· γνώριμον ἄρα καὶ τὸ ΓΒ ὕψος.



Sit altitudo ΒΓ, cujus quantitatem cognoscere oporteat; & per punctum Β cadat solis radius ΒΔ: igitur umbra erit ΓΔ. sume igitur magnitudinem aliquam cognitam, cujusmodi sit ΚΖ; eamque ita aptato in angulo Δ, ut sit parallela ipsi ΒΓ: est itaque [per 4.6.] ut ΔΓ ad ΓΒ ita ΔΖ ad ΖΚ. est autem [per 1. dat.] cognita ratio ipsius ΔΖ ad ΖΚ: cognita ergo erit etiam ratio ΔΓ ad ΓΒ. sed ΔΓ umbra cognita est: cognoscetur ergo [per 2. dat.] ipsa ΓΒ altitudo.

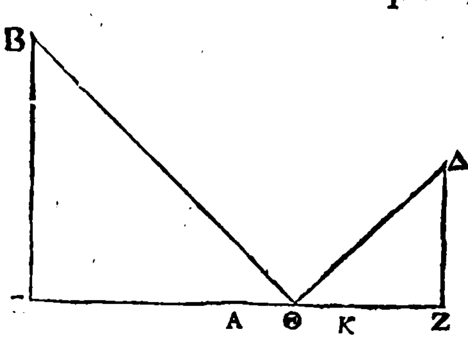
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Μὴ ὄντος ἡλίου, τὸ δοθὲν ὕψος [2] γνῶναι ἡλίκον ἐστίν.

Prop. XIX. Probl.

Cognoscere quanta sit data altitudo, alio modo quam per solem.

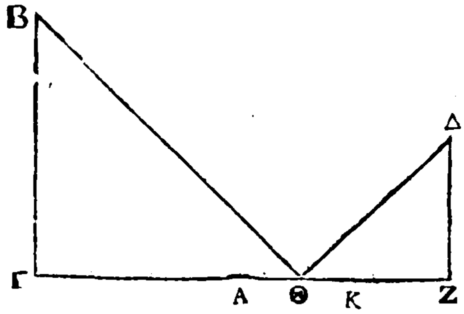
Ἔστω γὰρ ὃ δεῖ ἐπιγνῶναι ὕψος ἡλίκον ἐστὶ τὸ ΒΓ, καὶ κείσθω κάτοπτρον τὸ ΑΚ, ὄμμα δὲ ἔστω τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ προσπιπτέτω ἀκτὶς ἡ ΔΘ, καὶ ἀνακλάσθω ὡς ἡ ΘΒ ἐπὶ τὸ Β πέρας, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ὄμματος κάθετος ἤχθω ἡ ΔΖ· οὐκοῦν ἴσαι εἰσὶν αἱ πρὸς τῷ Θ γωνίαι ἀλλήλαις, τοῦτο γὰρ δείκνυται ἐν



Sit ΒΓ altitudo, cujus quantitatem vestigare oporteat; & ponatur speculum ΑΚ, oculus autem sit Δ, à quo procedat radius ΔΘ, & à puncto Θ reflectatur versus extremum punctum Β secundum lineam ΘΒ; & à Δ oculo demittatur perpendicularis ΔΖ: æquales igitur sunt inter se anguli ad Θ; id enim osten-

1 Æque alto minori quantitati. *Savil.* 2 Sc. rei ἀεὶ ὀρθῆς horizonti sitæ. *Idem.* * Al. *superexstans.*

sum est in catoptricis. angulus etiam qui ad Γ æqualis est angulo qui ad Z, sunt enim ambo recti: reliquus igitur qui ad B [per 32.1.] reliquo qui ad Δ æqualis est: quare [per 4.6.] triangulus BΓΘ similis est triangulo ΔΘZ: est ergo ut ΘΓ ad ΓB ita ΘZ ad ZΔ. sed [per 1. dat.] ratio ipsius ΘZ ad ZΔ data est: igitur ratio etiam ipsius ΘΓ ad ΓB innotescet. nota autem est quantitas ipsius ΘΓ: ergo [per 2.dat.] nota etiam erit quantitas ipsius altitudinis ΓB.

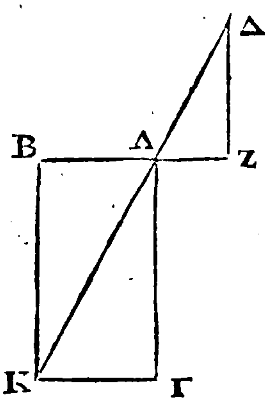


τοῖς κατοπτρικοῖς. ἀλλὰ καὶ ἡ πρὸς τῷ Γ τῇ πρὸς τῷ Z ἴση ἐστίν, ὀρθὴ γὰρ ἐστιν ἑκατέρα αὐτῶν· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ E λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Δ ἴση ἐστίν· ὥστε ὅμοιον ἂν εἴη τὸ BΓΘ τρίγωνον τῷ ΔΘZ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΓ πρὸς ΓB οὕτως ἡ ΘZ πρὸς ZΔ. τῆς δὲ ΘZ πρὸς ZΔ λόγος δοθείς ἐστι· καὶ τῆς ΘΓ ἄρα πρὸς ΓB γνώριμος ὁ λόγος ἐστί. γνώριμος δὲ ἡ ΘΓ· γνώριμον ἄρα καὶ τὸ ΓB ὕψος.

Prop. XX. Probl.

Cognoscere quanta sit profunditas data.

SIT BK profunditas, cujus quantitatem cognoscere oporteat; ponaturque oculus in Δ, à quo procedat radius ΔΛK in profundum; & à puncto Δ ducatur ΔZ, quæ sit parallela ipsi BK. cum igitur in rectas parallelas BK, ΔZ recta linea ΔK incidat; alternos angulos BKΛ & ΛΔZ [per 29. 1.] æquales inter se facit. sunt vero etiam & anguli ad verticem Λ inter se æquales: reliquus igitur angulus [per 32. 1.] reliquo æqualis est. sunt igitur duo triangula æquiangula BKΛ & ΛΔZ: quare [per 4. 6.] erit ut ΛZ ad ZΔ sic ΛB ad BK. datur autem [per 1. dat.] ratio ipsius ΛZ ad ZΔ: dabitur ergo ratio ipsius ΛB ad BK. datur vero quantitas ipsius ΛB: ergo [per 2.dat.] etiam dabitur quantitas ipsius BK.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κʹ.

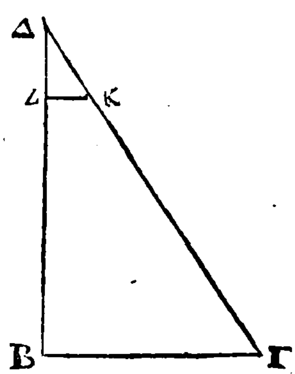
Τὸ δοθὲν βάθος ἐπιγνῶναι πηλίκον ἐστίν.

Ἔστω γὰρ τὸ βάθος ὃ δεῖ ἐπιγνῶναι πηλίκον ἐστί, τὸ BK· καὶ κείσθω ὄμμα τὸ Δ, καὶ προσπιπτέτω ἀκτὶς ἡ ΔΛK εἰς τὸ βάθος, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ παρὰ τὴν BK ἡ ΔZ. ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ BK τῇ ΔZ, καὶ ἐμπέπτωκεν ἡ ΔK· τὰς ἄρα ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ BKΛ, ΛΔZ ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν αἱ πρὸς τῷ Λ ἴσαι ἀλλήλαις· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα γωνία τῇ λοιπῇ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ BKΛ τρίγωνον τῷ ΛΔZ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΛZ πρὸς ZΔ, οὕτως ἡ ΛB πρὸς BK. δοθεὶς δὲ ὁ τῆς ΛZ πρὸς ZΔ λόγος· δοθεὶς ἄρα καὶ ὁ τῆς ΛB πρὸς BK λόγος. καὶ ἐστι δοθεῖσα ἡ ΛB· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ BK.

Prop. XXI. Probl.

Datæ longitudinis quantitatem cognoscere.

SIT BΓ longitudo, cujus quantitas cognoscenda sit; ponaturque oculus in Δ, à quo procedant radii ΔB, ΔΓ; & à puncto Z ducatur ZK, quæ parallela sit ipsi BΓ: est igitur [per 4 6.] ut ZK ad KΔ ita BΓ ad ΓΔ. sed [per 1.dat.] ratio ipsius ZK ad KΔ cognoscitur: ergo etiam ratio ipsius BΓ ad ΓΔ cognoscetur. sed ipsius ΓΔ quantitas cognoscitur: quare [per 2.dat.] ipsius etiam BΓ quantitas cognoscetur.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ καʹ.

Τὸ δοθὲν μῆκος ἐπιγνῶναι πηλίκον ἐστίν.

Ἔστω γὰρ ὃ δεῖ μῆκος ἐπιγνῶναι πηλίκον ἐστὶ τὸ BΓ, κείσθω δὴ ὄμμα τὸ Δ, ἀφ' οὗ προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΔB, ΔΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Z ἤχθω παρὰ τὴν BΓ ἡ ZK· ἐκεῖν ἐστιν ὡς ἡ ZK πρὸς KΔ οὕτως ἡ BΓ πρὸς ΓΔ. γνώριμος δὲ ὁ τῆς ZK πρὸς KΔ λόγος· γνώριμος ἄρα καὶ ὁ τῆς BΓ πρὸς ΓΔ λόγος. καὶ γνώριμος ἡ ΓΔ· γνώριμος ἄρα καὶ BΓ.

Prop. XXII. Theor.

Si in eodem plano, in quo est oculus,

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβʹ.

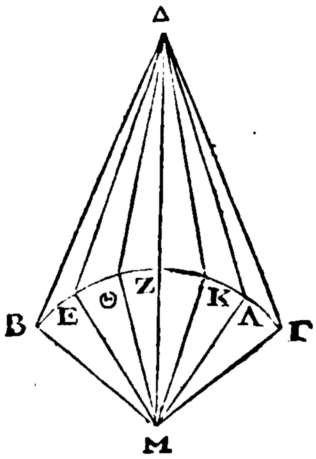
[1] Ἐὰν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ καὶ τὸ ὄμμα,

1 Vel potius, si oculus in plano circuli ponatur: & sic in demonstratione ponitur. *Savil.*

κύκλῳ

κύκλου περιφέρεια τεθῇ· [1] εὐθεῖα γραμμὴ ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια φαίνεται.

describatur circuli circumferentia; hæc videbitur esse recta linea.



Ἔστω γὰρ περιφέρεια ἡ ΒΓ, ὄμμα δὲ τὸ Δ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὂν τῇ ΒΖΓ περιφερείᾳ, ἀφ' οὗ προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΔΒ, ΔΓ, ΔΖ. [2] ἐπεὶ οὖν τῶν ὁρωμένων οὐδὲν ἅμα ὁρᾶται, [3] οὐκ ἂν φαίνοιτο ἡ ΖΒ περιφέρεια, τὰ δὲ Ζ, Β πέρατα· δόξει ἄρα ἡ ΖΒ περιφέρεια εὐθεῖα εἶναι. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΖΓ· [4] ὅλη ἄρα ἡ ΒΓ περιφέρεια εὐθεῖα δόξει εἶναι.

SIT enim circumferentia ΒΖΓ; oculus autem Δ in eodem plano in quo est ΒΖΓ circumferentia; & ex Δ oculo procedant radii ΔΒ, ΔΓ, ΔΖ. quia ergo [per 1. opt.] nullum aspectabile simul totum cernitur, circumferentia quidem ΖΒ non apparebit, sed ejus extrema puncta Ζ, Β: quare circumferentia ΖΒ videbitur esse recta linea. eodemque modo ΖΓ: tota igitur circumferentia ΒΓ lineæ rectæ instar videbitur.

ΑΛΛΩΣ ΕΚ ΤΩΝ ΤΟΥ ΠΑΠΠΟΥ.

Ἀπὸ τοῦ Δ ὄμματος κειμένου ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐν ᾧπερ καὶ ἡ ΒΖΓ περιφέρεια, προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΔΒ, ΔΕ, ΔΘ, ΔΚ, ΔΛ, ΔΓ, ἡ δὲ ΔΖ ἐκβαλλομένη διήχθω εἰς τὸ Μ κέντρον, ἀφ' οὗ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΒ, ΜΕ, ΜΘ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΓ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΜΔΓ γωνία τῆς ΜΔΛ γωνίας μείζων ἐστί, καὶ ἡ ΜΔΛ τῆς ΜΔΚ· ἡ ἄρα ΜΓ μείζων φαίνεται τῆς ΜΛ, καὶ ἡ ΜΛ τῆς ΜΚ, καὶ ἡ ΜΚ [5] τῆς ΜΖ· καὶ διὰ τοῦτο τὸ Ζ σημεῖον μᾶλλον πλησιάζειν φαίνεται τῷ Μ κέντρῳ ἤπερ τὸ Κ σημεῖον, καὶ τὸ Κ ἤπερ τὸ Λ, καὶ τὸ Λ ἤπερ τὸ Γ· [6] ἡ ἄρα ΖΚΛΓ περιφέρεια εὐθεῖα φαίνεται. τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον καὶ ΖΘΕΒ περιφέρεια εὐθείας φαντασίαν παρέχειν δειχθήσεται· διόπερ ὅλη ἡ περιφέρεια εὐθειῶσθαι δόξει.

ALITER EX PAPPI DEMONSTRATIONIBUS.

Ab oculo Δ posito in eodem plano, in quo est circumferentia ΒΖΓ, procedant radii ΔΒ, ΔΕ, ΔΘ, ΔΚ, ΔΛ, ΔΓ; radius autem ΔΖ extensus producatur usque ad centrum Μ, à quo connectantur rectæ lineæ ΜΒ, ΜΕ, ΜΘ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΓ. angulus igitur ΜΔΓ major est angulo ΜΔΛ, & angulus ΜΔΛ major angulo ΜΔΚ; quare ΜΓ major apparet quam ΜΛ, & ΜΛ major quam ΜΚ, & ΜΚ major quam ΜΖ; ideoque punctum Ζ apparet propinquius esse ipsi Μ centro quam punctum Κ; & idem punctum Κ propinquius videtur eidem centro quam punctum Λ: & Λ quam Γ: igitur circumferentia ΖΚΛΓ recta linea esse videtur. eodemque modo ostendetur ΖΘΕΒ circumferentia rectæ lineæ speciem præ se ferre: quapropter tota circumferentia adinstar rectæ lineæ apparebit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Σφαίρας ὁπωσοῦν ὁρωμένης ὑπὸ τοῦ ἑνὸς ὄμματος, ἔλαττον ἀεὶ τοῦ ἡμισφαιρίου ὀφθήσεται· αὐτὸ δὲ τὸ ὁρώμενον τῆς σφαίρας ὑπὸ κύκλου περιεχόμενον φαίνεται.

Prop. XXIII. Theor.

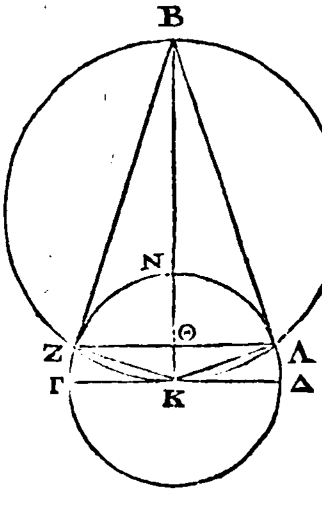
Quomodocunque sphæra unico oculo spectetur, semper minus hemisphærio de ea cernetur; ea autem sphæræ pars quæ cernitur, circulo comprehendi videtur.

Ἔστω γὰρ σφαῖρα ἧς κέντρον τὸ Κ, ὄμμα δὲ ἔξω τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΚ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἤχθω διὰ τοῦ Κ ἡ ΓΚΔ, καὶ ἐκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν ΒΚ, ΓΚΔ ἐπίπεδον· ποιήσει δὴ ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλον. ποιείτω δὴ τὸν ΓΔΛΝΖ, περὶ δὲ τὴν ΒΚ διάμετρον κύκλος γεγράφθω, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΖ, ΖΒ, ΒΛ, ΛΚ, ΛΖ. ἐπεὶ οὖν ὀρθαί εἰσιν αἱ ὑπὸ ΚΖΒ, ΚΛΒ, διὰ

SIT enim sphæra cujus centrum Κ; oculus vero sit Β; & connectatur recta ΒΚ, cui per punctum Κ ad angulos rectos ducatur ΓΚΔ; & per lineam ΒΚ & ΓΚΔ sphæræ diametrum ducatur planum: faciet igitur in sphæra circulum. faciat (inquam) sitque ille circulus ΓΔΛΝΖ, & circa ΒΚ diametrum describatur circulus, & connectantur rectæ lineæ ΚΖ, ΖΒ, ΒΛ, ΛΚ, ΛΖ. cum ergo ΚΖΒ, ΚΛΒ anguli

1 Oportet tamen esse ὡς οἶμαι ἐκ διαστήματος, & sic est in 25. prop. *Savil.* 2 Schol. οὐδὲν γὰρ ἅμα βλέπεται ὅλον, ἵνα συναισθάνηται ὡς περιφερῶς τῶν ὁρωμένων. *Idem.* 3 Valde credulum esse oportet, qui hujusmodi demonstrationibus velit credere: neque mehercule *Pappus* melius concludit. *Idem.* 4 At ne illud quidem necesse, etiamsi ΒΖ, ΖΓ rectæ appareant, ΒΖΓ rectam videri, cum fortasse non sunt futuræ sibi ἐπ' εὐθείας. *Idem.* 5 Non video quomodo ΜΖ posset videri, cum nullus possit in eam à Δ incidere angulus: quin potius ἐπιπωθεῖ τὸ Ζ τῷ Μ sed quid dicam de singulis? tota demonstratio est planissimus παραλογισμός. quid enim nobis cum Μ centro, ut sit nobis semper necesse ad ipsum respicere? quod si aliud cepero, ruet egregia hæc *Pappi* demonstratio. *Idem.* 6 Ut cætera concedam, ne illud quidem necesse est, nisi Ζ σημεῖον tanto magis φαίνοιτο centro πλησιάζειν ostendatur quam Κ, quanto ΔΖ minor est quam ΚΜ. ne ita quidem prorsus & ex omni parte conveniet: sed quid facias tam putidis nugis? *Idem.*

sint in semicirculis: sunt igitur [per 31.3.] recti: quare B Z, B Λ rectæ lineæ ipsas K Z, K Λ eductas ex K centro in unico sphæræ puncto tangent: radii ergo ex B oculo procedentes cadent secundum lineas B Z, B Λ. quia ergo omnes anguli qui sunt circa punctum Θ recti sunt, eo quod parallela est recta Γ Δ rectæ Z Λ, & æqualis est Z Θ ipsi Θ Λ: si igitur manente latere Θ B ipsum triangulum Θ B Z circumducatur, quoadusque ad illud punctum restituatur unde circumduci cœperat, fiet ut & B Z circumducta sphæricam superficiem tangat in unico puncto, nempe in Z, & circulus describatur per puncta Z, Λ. quare circulo comprehenditur ea sphæræ pars quæ cernitur; quæ sane minor est hemisphærio, quia portio Z N Λ minor est semicirculo: quod ergo ab oculo cernetur est minus hemisphærio.



τὸ ἐν ἡμικυκλίοις εἶναι, καὶ ἐκ κέντρου τὰς K Z, K Λ, καθ' ἓν σημεῖον ἐφάψονται[1] αἱ B Z, B Λ τῆς σφαίρας· αἱ ἄρα ἀπὸ τοῦ B ὄμματος προσπίπτουσαι ἀκτῖνες κατὰ τὰς B Z, B Λ πεσοῦνται. καὶ ἐπεὶ ἑκάστη τῶν [2] πρὸς τῷ Θ γωνιῶν ὀρθή ἐστι, [3] διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν Γ Δ τῇ Z Λ, καὶ ἴση ἡ Z Θ τῇ Θ Λ· ἐὰν δὴ μενούσης τῆς Θ B τὸ Θ B Z τρίγωνον περιενεχθὲν εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἡ B Z περιφερομένη καθ' ἓν ἐφάψεται τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας [4] κατὰ τὸ Z, καὶ κύκλος ἔσται γεγραμμένος διὰ τῶν Z, Λ σημείων· ὥστε ὑπὸ κύκλου ἂν περιέχοιτο τὸ ὁρώμενον τῆς σφαίρας, ὅ γε ἔλαττόν ἐστιν ἡμισφαιρίου, τὸ γὰρ Z N Λ ἔλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίου· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ ὄψεως ὁρώμενον ἔλαττόν ἐστιν ἡμισφαιρίου.

SCHOLIUM.

Quod autem, si sphæra plano secetur, communis sectio sit circulus, sumptum quidem est tanquam certum in phænomenis, demonstratum autem in sphæricis.

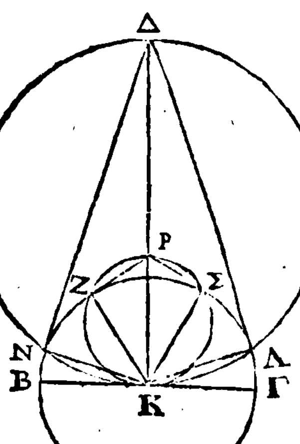
ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὅτι δὲ ἂν σφαῖρα τμηθῇ ἐπιπέδῳ, ἡ κοινὴ τομὴ κύκλος ἐστὶ, προείληπται μὲν ἐν τοῖς φαινομένοις, δέδεικται δὲ ἐν τοῖς σφαιρικοῖς.

Prop. XXIV. Theor.

Oculo propius ad sphæram accedente, minus de sphæra cernetur, quam oculo procul posito; plus tamen cerni existimabitur.

Sit sphæra cujus centrum K; & ab oculo Δ ad centrum connectatur linea recta Δ K; & per punctum K ducatur B Γ, quæ sit ad angulos rectos ipsi Δ K; & circa Δ K diametrum describatur circulus, & ducantur rectæ Δ N, N K, Δ Λ, Λ K: anguli ergo ad Λ, N recti sunt [per 31. 3.] quia sunt in semicirculis: quare rectæ lineæ Δ Λ, Δ N in uno puncto sphæram tangunt; ideoque radii qui ex Δ oculo procedunt, cadent in sphæram secundum lineas Δ Λ, Δ N. rursus, transferatur oculus ex Δ puncto in P punctum, & circa lineam P K describatur circulus, connectanturque lineæ P Z, Z K, P Σ, Σ K: lineæ igitur P Z, P Σ in uno puncto tangunt sphæram: quare radii etiam ex P oculo



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Τοῦ ὄμματος προσιόντος ἔγγιον τῆς σφαίρας, τον ἔσται τὸ ὁρώμενον· δόξει δὲ μεῖζον ὁρᾶσθαι.

Ἔστω γὰρ σφαῖρα ἧς κέντρον τὸ K, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ὄμματος ἐπεζεύχθω ἐπὶ τὸ κέντρον ἡ Δ K, καὶ διὰ τοῦ K πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ B Γ, [5] περὶ δὲ τὴν Δ K κύκλος γεγράφθω, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Δ N, N K, Δ Λ, Λ K· οὐκοῦν ὀρθαὶ ἔσονται αἱ πρὸς τοῖς Λ, N γωνίαι, διὰ τὸ ἐν ἡμικυκλίοις εἶναι· καθ' ἓν ἄρα ἐφάπτονται αἱ Δ Λ, Δ N τῆς σφαίρας· αἱ ἄρα ἀπὸ τοῦ Δ ὄμματος προσπίπτουσαι ἀκτῖνες κατὰ τὰς Δ Λ, Δ N πεσοῦνται. πάλιν δὴ μετακείσθω τὸ Δ ὄμμα ἐπὶ τὸ P, καὶ περὶ τὴν P K κύκλος γεγράφθω, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ P Z, Z K, P Σ, Σ K· οὐκοῦν αἱ P Z, P Σ καθ' ἓν ἐφάψονται τῆς σφαίρας· καὶ αἱ γε ἀπὸ τοῦ P ὄμματος

1 Τοῦ κύκλου Γ Δ Λ Z, atque ideo sphæram, per 16.3 elem. *Savil.* 2 Schol. Manusc. quia K Z B, K Λ B habent; æqualia latera, imo anguli Z K Θ, Λ K Θ æquales & rectæ comprehendentes; ergo anguli ad Θ æquales & recti: οἱ μὲν ἄλλοι ἄλλως (inquit ille) ἐγὼ δὲ οὕτως. 3 Unde hoc? etsi verum est & potest probari. sed Θ ἐστὶ multo facilius, quia in isosceli Z B Λ angulus ad B secatur bifariam. *Savil.* 4 In uno puncto, nempe Z: nam κατὰ Z opinor esse ex scholio, & abest in sequentibus. *Idem.* 5 Sc. Καὶ ἐκβεβλήσθω τὸ διὰ τῆς B K Γ, Δ K ἐπίπεδον, &c. ut in præcedente. *Idem.*

ἀκτῖνες

ἀκτῖνες προσπίπτουσι κατὰ τὰς Ρ Ζ, Ρ Σ πίπτουσι· ὥστε ὁρᾶται ὑπὸ μὲν τῆς Ρ γωνίας τὸ Ζ Σ, ὑπὸ δὲ τῆς Δ τὸ Ν Ζ Σ Α. μεῖζον δὲ τὸ Ν Ζ Σ Α τοῦ Ζ Σ ἐστι, φαίνεται δὲ ἔλαττον· μείζων γάρ ἐστιν [1] ἡ Ρ γωνία τῆς Δ γωνίας. τὰ δὲ ὑπὸ μείζονος γωνίας ὁρώμενα, μείζονα φαίνεται· μεῖζον ἄρα φαίνεται τὸ Ζ Σ τοῦ Ν Ζ Σ Α· ἔστι δὲ ἔλαττον.

procedentes incident in ſphæram ſecundum rectas Ρ Ζ, Ρ Σ: ergo ſub angulo quidem Ρ cernitur Ζ Σ, ſub angulo vero Δ cernitur Ν Ζ Σ Α. eſt autem Ν Ζ Σ Α major quam Ζ Σ; minor vero apparet: angulus enim Ρ major eſt angulo Δ. quæ autem ſub majore angulo ſpectantur [per 5. poſit.] majora videntur: major igitur apparet Ζ Σ quam Ν Ζ Σ Α; minor vero eſt.

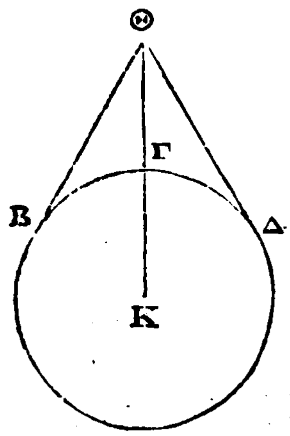
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Σφαῖρα ἐκ διαστήματος [2] ὁρωμένη κύκλος φαίνεται.

Ἔστω γὰρ ἡ σφαῖρα, ἧς κέντρον τὸ Κ, μέγιστος κύκλος ΒΓΔ, ᾧ ἀπὸ τοῦ Θ ὄμματος προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΘΒ, ΘΓ, ΘΔ· οὐκοῦν ἡ ΒΓΔ περιφέρεια εὐθεῖα εἶναι δοκεῖ. ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ἄλλαι τῶν κύκλων περιφέρειαι ἐν τῇ σφαιρικῇ ἐπιφανείᾳ γραφομένων εὐθεῖαι φανήσονται· κύκλος ἄρα φαίνεται ἡ σφαῖρα πόρρω κειμένη τοῦ ὄμματος.

Prop. XXV. Theor.

Sphæra eminus ſpectata videtur circulus.



SIT enim in ſphæra, cujus centrum Κ, maximus circulus Β Γ Δ, ad quem ex Θ oculo procedant radii Θ Β, Θ Γ, Θ Δ: ergo [per 22. opt.] Β Γ Δ circumferentia videtur eſſe recta linea. ſimiliter & circumferentiæ reliquorum circulorum, in ſphæræ ſuperficie deſcriptorum, rectæ lineæ videbuntur: quare tota ſphæra, procul ab oculo diſſita, circulus exiſtimabitur.

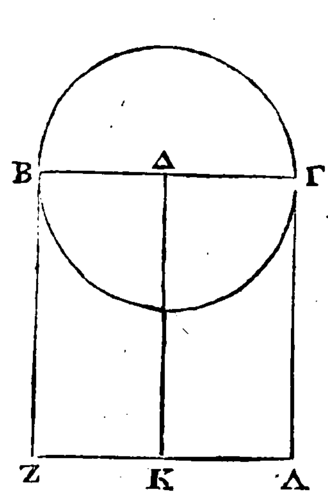
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Σφαίρας διὰ τῶν δύο ὀμμάτων ὁρωμένης, ἐὰν ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας ἴση ᾖ τῇ εὐθείᾳ [3] τῇ διεστώσῃ ἀπὸ τῶν ὀμμάτων· ἡμισφαίριον αὐτῆς ὀφθήσεται.

Ἔστω γὰρ σφαῖρα ἧς διάμετρος ἡ ΒΓ, καὶ ἀπὸ τῶν Β, Γ ἤχθωσαν πρὸς ὀρθὰς αἱ ΒΖ, ΓΑ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἤχθω παρὰ τὴν ΒΓ ἡ ΖΑ, καὶ κείσθω ἓν ὄμμα ἐπὶ τοῦ Ζ, τὸ δὲ ἕτερον ἐπὶ τοῦ Α, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ κέντρου ἤχθω παρὰ τὴν ΒΖ ἡ ΔΚ. οὐκοῦν ἐὰν μενούσης τῆς ΔΚ τὸ ΒΚ παραλληλόγραμμον περιενεχθὲν, εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιγραφὲν ὑπὸ τῆς ΒΔ σχῆμα κύκλος ἔσται, ὅς γε διὰ τοῦ κέντρου ἐστὶ τῆς σφαίρας· ὥστε τὸ ἡμισφαίριον τῆς σφαίρας μόνον ὀφθήσεται ὑπὸ τῶν Ζ, Α ὀμμάτων.

Prop. XXVI. Theor.

Si ſphæræ ambobus oculis conſpectæ diameter æqualis fuerit rectæ lineæ, qua oculorum alter ab altero diſtat; dimidium ſphæræ cernetur.



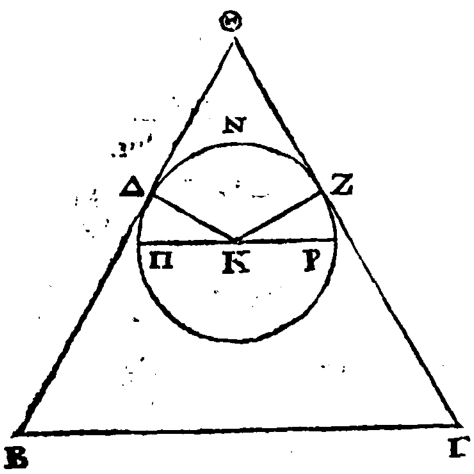
SIT ſphæra cujus diameter ΒΓ; & à punctis Β, Γ excitentur ΒΖ, ΓΑ rectæ, quæ ſint ad angulos rectos ipſi ΒΓ; & per punctum Ζ ducatur ΖΑ quæ ſit parallela ipſi ΒΓ; ponaturque oculorum alter quidem in Ζ, alter vero in Α; & ex Δ centro ducatur ΔΚ parallela ipſi ΒΖ. ſi ergo manente ΔΚ latere, parallelogrammum ΒΚ circumagatur, donec in idem punctum reſtituatur unde circumagi cœperat; figura, quam deſcribet latus ΒΔ circumactum, erit circulus, qui per centrum ſphæræ tranſit: quare dimidia tantum ſphæræ pars cernetur à Ζ, Α oculis.

1 Quia ſc. angulus ΖΚΣ, quo Ρ deficit à duobus rectis, minor eſt quam angulus ΝΚΑ, quo Δ deficit à duobus rectis. *Savil.* 2 Hinc apparet etiam in 22. prop. addendum eſſe, aut certe ſupplendum itidem, ἐκ διαστήματος. *Idem.* 3 Hoc quid ſit plane neſcio. Forſan legendum τῷ διαστήματι τῶν ὀμμάτων. *Idem.*

Prop. XXVII. Theor.

Si oculorum intervallum majus sit sphæræ diametro; sphæræ pars, quæ cernitur, major hemisphærio videbitur.

Sit enim sphæra, cujus centrum K; oculorum vero intervallum ΒΓ majus sphæræ diametro ΠΚΡ; per K autem & rectam ΒΓ extendatur planum, quod faciat in sphæra circulum ΔΝΖ; & ab oculis Β, Γ cadant radii ΒΔ, ΓΖ, qui sphæram ipsam tangant in uno puncto. hi ergo radii in rectum producti alicubi concurrent, cum ΒΓ sit major quam sphæræ diameter ΠΡ. concurrant ergo in puncto Θ. quoniam autem à puncto Θ ad sphæram ΔΝΖ cadunt lineæ ΘΖ, ΘΔ, sphæram in uno puncto tangentes: igitur ΖΝΔ minor est semicirculo, anguli enim ΘΖΚ, ΘΔΚ recti sunt: reliquum igitur sphæræ, quod per radios ΒΔ, ΓΖ cernitur, majus est hemisphærio.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

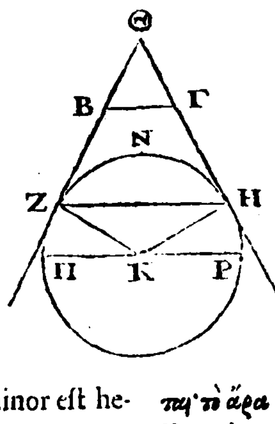
Ἐὰν τὸ τῶν ὀμμάτων διάστημα μεῖζον ᾖ τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας, ἡμισφαιρίου μεῖζον τὸ ὁρώμενον τῆς σφαίρας ὀφθήσεται.

Ἔστω γὰρ σφαῖρα ἧς κέντρον τὸ Κ, τὸ δὲ τῶν ὀμμάτων διάστημα τὸ ΒΓ μεῖζον ὂν τῆς ΠΚΡ διαμέτρου τῆς σφαίρας, διὰ δὲ τοῦ Κ καὶ τῆς ΒΓ ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδον, καὶ ποιείτω ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλον τὸν ΔΝΖ, καὶ προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες καθ' ἓν σημεῖον ἁπτόμεναι αἱ ΒΔ, ΓΖ. αὗται οὖν ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐπειδὴ ἡ ΒΓ τῆς ἐν τῇ σφαίρᾳ διαμέτρου ΠΡ μείζων ἐστί. συμπιπτέτωσαν δὴ κατὰ τὸ Θ σημεῖον. οὐκοῦν ἐπεὶ ἀπὸ τοῦ Θ σημείου αἱ ΘΖ, ΘΔ καθ' ἓν ἐφαπτόμεναι προσπεπτώκασιν, ἔλασσον ἂν εἴη τὸ ΖΝΔ ἡμικυκλίου, αἱ γὰρ ΘΖΚ, ΘΔΚ γωνίαι ὀρθαί εἰσι[1]· τὸ ἄρα λοιπὸν τῆς σφαίρας μεῖζον ἡμισφαιρίου ὁρᾶται ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΓΖ.

Prop. XXVIII. Theor.

Si oculorum intervallum minus sit sphæræ diametro; sphæræ pars, quæ cernitur, minor est hemisphærio.

Sit sphæra cujus centrum K; oculorum vero intervallum ΒΓ, quod minus sit quam sphæræ diameter ΠΚΡ; & per K & ΒΓ trajiciatur planum, quod in sphæra faciat circulum ΖΝΗ; & ex Β, Γ oculis deducantur radii ΒΖ, ΓΗ, qui sphæram tangant in uno puncto; concurrantque in puncto Θ: concurrent enim, cum inæquales sint ΒΓ oculorum interstitium, & ΠΡ diameter sphæræ. ergo radii à puncto Θ in sphæram cadentes minus comprehendent quam dimidium sphæræ: quare ΖΝΗ minus est hemisphærio; ideoque sphæræ pars ea, quæ ab oculis Β, Γ cernitur, minor est hemisphærio.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Ἐὰν τὸ τῶν ὀμμάτων διάστημα ἔλασσον ᾖ τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας, τὸ ὁρώμενον τῆς σφαίρας ἔλασσον ἡμισφαιρίου ὀφθήσεται.

Ἔστω γὰρ σφαῖρα ἧς κέντρον τὸ Κ, τὸ δὲ τῶν ὀμμάτων διάστημα τὸ ΒΓ, ἔλαττον ὂν τῆς ΠΚΡ διαμέτρου τῆς σφαίρας, καὶ διὰ τοῦ Κ καὶ τῆς ΒΓ ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδον, καὶ ποιείτω ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλον τὸν ΖΝΗ, ἤχθωσαν δὲ ἀπὸ τῶν Β, Γ ὀμμάτων καθ' ἓν ἐφαπτόμεναι αἱ ΒΖ, ΓΗ, καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Θ· συμπεσοῦνται γὰρ, ἐπειδήπερ ἄνισοί εἰσιν ἥ τε ΓΒ καὶ ἡ ΠΡ τῆς σφαίρας διάμετρος. οὐκοῦν αἱ ἀπὸ τοῦ Θ σημείου προσπίπτουσαι πρὸς τὴν σφαῖραν ἔλαττον ἡμισφαιρίου περιλήψονται· τὸ ἄρα ΖΝΗ ἔλασσον ἡμισφαιρίου ἐστίν· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν Β, Γ ὀμμάτων ὁρώμενον ἔλασσον ἂν εἴη ἡμισφαιρίου.

Prop. XXIX. Theor.

Quomodocunque cylindrus unico oculo cernatur, minus dimidia parte cylindri cernetur.

Sit K centrum circuli, qui basis sit alicujus cylindri; & ab oculo N ducatur recta linea

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

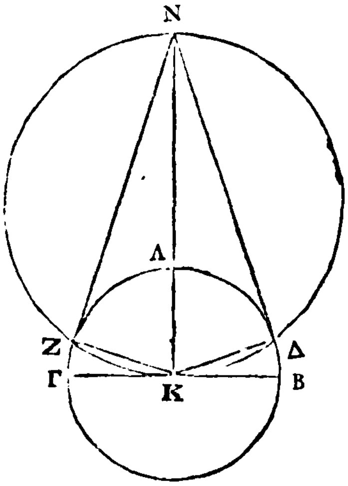
Κυλίνδρου ὁπωσοῦν ὁρωμένου [2] ὑφ' ἑνὸς ὄμματος ἔλαττον ἡμικυλινδρίου ὀφθήσεται.

[3] Ἔστω κυλίνδρου τοῦ περὶ τὴν βάσιν κύκλου κέντρον τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ν ὄμματος ἤχθω

1 Ergo anguli ΔΚΖ, ΔΘΖ duobus rectis æquales: & proinde ΔΚΖ minor semicirculo. *Savil.* 2 Id est, in quacunque ab oculo distantia, non situ. nam oculo supra vel infra cylindrum posito, de cylindrica superficie nihil prorsus videtur. *Idem.* 3 Hæc demonstratio supponit oculum in plano basis cylindri; vel potius id tantum respicit de cylindro, quod oculis directà ex adverso objacet. idemque in sequentibus de conis intellige. *Idem.*

ἐπὶ

ἐπὶ τὸ Κ ἡ ΝΚ, καὶ διὰ τῆ Κ πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἤχθω ἡ ΒΓ, περὶ δὲ τὴν ΝΚ κύκλος γεγράφθω, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΖ, ΖΚ, ΝΔ, ΔΚ. οὐκοῦν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Ζ, Δ· καθ' ἓν ἄρα ἐφάπτονται αἱ ΝΖ, ΝΔ. καὶ αἱ γε ἀπὸ τῆ Ν ὄμματος φερόμεναι ἀκτῖνες κατὰ τὰς ΝΖ, ΝΔ πεσοῦνται· ὥστε τὸ ΖΛΔ μόνον ὀφθήσεται. ἀλλὰ τὸ ΖΛΔ ἔλαττόν ἐστι τῆ ΓΛΒ ἡμικυκλίου· τὸ ἄρα ΖΛΔ ἔλασσον ἡμικυκλίου ὀφθήσεται, τοῦτ' ἔστιν ὁ κύλινδρος [1] ὁμοίως γὰρ τῇ βάσει καὶ κατὰ πᾶσαν ἐπιφάνειαν τῆ κυλίνδρου [2] δείξομεν· ὥστε ὅλου τῆ κυλίνδρου τῆ ἡμίσεως ἔλαττον φανεῖται.

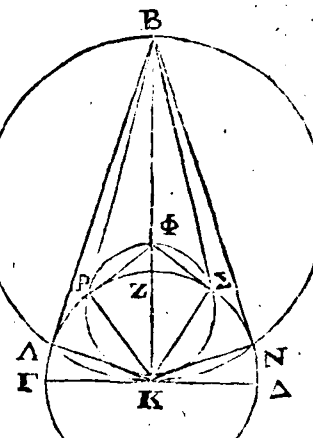


ad ipsum Κ, quæ sit ΝΚ; & à puncto Κ excitetur ΒΓ, quæ sit ad angulos rectos ipsi ΝΚ: & circa ΝΚ describatur circulus; connectanturque rectæ ΝΖ, ΖΚ, ΝΔ, ΔΚ. recti ergo sunt [per 31. 3.] anguli ad Ζ, Δ: ideoque ΝΖ, ΝΔ in uno puncto cylindrum tangunt. & radii ab oculo Ν delati cadent in cylindrum secundum lineas ΝΖ, ΝΔ: quare ΖΛΔ tantum cernetur. sed ΖΛΔ minor est semicirculo ΓΛΒ: igitur apparebit ΖΛΔ, quæ minor est semicirculo; id est, minus semper cernetur quam dimidia cylindri pars. quod enim de cylindri basi monstravimus, illud idem de qualibet alia parte superficiei cylindri demonstrabimus: quare minus dimidia parte totius cylindri cernitur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λʹ.

Τῆ δὲ ὄμματος ἔγγιον τεθέντος τῆ κυλίνδρου, ἔλασσον μὲν ἔσται τὸ περιλαμβανόμενον ὑπὸ τῶν ὄψεων τῆ κυλίνδρου, δόξει δὲ μεῖζον ὁρᾶσθαι.

Ἔστω γὰρ κυλίνδρου τῆ περὶ τὴν βάσιν κύκλου κέντρον τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τῆ Β ὄμματος ἐπὶ τὸ Κ κέντρον ἐπεζεύχθω ἡ ΒΚ, διὰ δὲ τῆ Κ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ περὶ τὴν ΒΚ κύκλος γεγράφθω, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΝ, ΝΚ, ΒΛ, ΛΚ. διὰ δὲ τὰ πρότερον τὸ ΛΖΝ ἔλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίου, [3] καὶ ὁμοίως τῇ βάσει τῆ κυλίνδρου ἔλαττον ἢ τὸ ἥμισυ ὁραθήσεται. καὶ προσηγχθω δὴ τὸ ὄμμα, καὶ ἔστω Φ, καὶ περὶ τὴν ΦΚ κύκλος γεγράφθω, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΦΡ, ΡΚ, ΚΣ, ΣΦ. οὐκοῦν αἱ ἀπὸ Φ ἀκτῖνες προσπίπτουσι κατὰ τὰς ΦΡ, ΦΣ πεσοῦνται, αἱ δ' ἀπὸ τοῦ Β κατὰ τὰς ΒΛ, ΒΝ· μεῖζον ἄρα τὸ ΝΖΛ τῆ ΡΖΣ. δοκεῖ δὲ μεῖζον φαίνεσθαι τὸ ΡΖΣ τοῦ ΝΖΛ, μείζων γὰρ ἡ Φ γωνία τῆς Β γωνίας· ὥστε καὶ τοῦ κυλίνδρου ἔλαττον μέρος ὀφθήσεται, δοκεῖ δὲ μεῖζον ὁρᾶσθαι.



Prop. XXX. Theor.

Pars cylindri quæ cernitur, oculo ad cylindrum accedente, minor est quam ea quæ cernitur oculo recedente; major tamen existimatur.

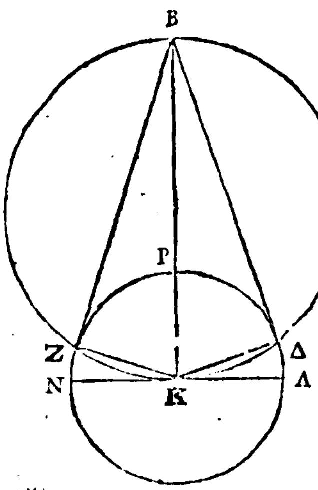
Sit Κ centrum circuli efficientis basim alicujus cylindri, & ab oculo Β ad centrum Κ ducatur ΒΚ; per punctum vero Κ ducatur ΓΔ quæ sit ad angulos rectos ipsi ΒΚ; describatur etiam circulus circa ΒΚ, & connectantur rectæ ΒΝ, ΝΚ, ΒΛ, ΛΚ. igitur sicut in præcedente ΛΖΝ circumferentia est minor semicirculo; & quemadmodum minus quam dimidium basis, ita etiam minus quam dimidium cylindri spectabitur. jam oculus propius admoveatur, sitque Φ, & circa ΦΚ describatur circulus, & ducantur lineæ ΦΡ, ΡΚ, ΚΣ, ΣΦ. radii ergo ex Φ oculo procedentes ferentur secundum lineas ΦΡ, ΦΣ, radii vero ex Β deducti ferentur secundum lineas ΒΛ, ΒΝ: major est igitur ΝΖΛ circumferentia quam ΡΖΣ circumferentia. & tamen aspectus existimat majorem esse ΡΖΣ quam ΝΖΛ, propterea quod angulus Φ major est angulo Β: quare minor cylindri pars cernetur, & tamen major videbitur.

1 Debuit esse ἔλασσον ἡμικυλινδρίου aut hujusmodi quippiam, nisi forte totus locus est ita legendus: ἔλασσον ἄρα τοῦ ἡμικυλινδρίου ὀφθήσεται. hanc enim, quam videmus hic ταυτολογίαν aures meæ non ferunt. *Savil.* 2 Δείξομεν, quid? nempe, semper minus semicirculo videri ab oculo in eodem plano posito. quamvis non negem, κατ' ἄλλας θέσεις, minus itidem ἡμικυλινδρίου videri sæpissime; nihil tamen ad hanc demonstrationem, cum planum per radios in cylindris & conis non circulos faciat, sed sæpius curvas lineas ex alio genere. *Idem.* 3 Hæc verba & illa præcedentis ὁμοίως τῇ βάσει &c. nonnihil suspicionis injiciunt, voluisse *Euclidem* id quod de basi tantum demonstravit, vel (ut generalius dicam) de circulo in cujus plano est oculus, ad reliquam superficiem cylindri trahere. *Idem.*

Prop. XXXI. Theor.

Coni circularem baſim habentis uno tantum oculo ſpectati minus dimidia parte cernetur.

SIT conus quivis habens pro baſi circulum, cujus centrum eſt K; & ex B oculo ad centrum connectatur BK; à puncto autem K excitetur NΛ, quæ ſit ad angulos rectos ipſi BK; & circa BK deſcribatur circulus, conjunganturque rectæ BZ, ZK, BΔ, ΔK. anguli igitur ad Z, Δ, cum ſint in ſemicirculis, recti ſunt: quare in unico puncto circulum tangent duæ lineæ BΔ, BZ. radii autem ab oculo in circuli circumferentiam pergentes cadent ſecundum lineas BΔ, BZ: quod igitur cernetur, erit ZPΔ, quod minus eſt quam NPΛ. atqui NPΛ eſt ſemicirculus: ergo ZPΔ minus eſt ſemicirculo: quare coni pars quam cernit oculus minor eſt dimidia parte coni: idem enim demonſtrabimus de reliquis circulis qui in coni ſuperficie ſunt.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα΄.

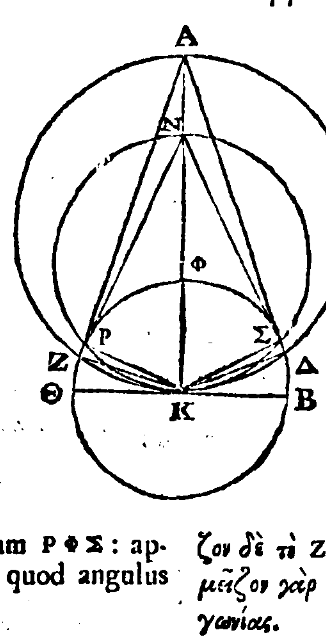
Κώνου [1] κύκλον ἔχοντος τὴν βάσιν ὑπὸ τοῦ [2] ἑνὸς ὄμματος ὁρωμένου ἔλασσον ἡμίσεως ὀφθήσεται.

Ἔστω γὰρ κώνου βάσις κύκλος οὗ κέντρον τὸ K, καὶ ἀπὸ τοῦ B ὄμματος ἤχθω ἐπὶ τὸ κέντρον ἡ BK, καὶ διὰ τοῦ K πρὸς ὀρθὰς τῇ BK ἡ NΛ, περὶ δὲ τὴν BK κύκλος γεγράφθω, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ BZ, ZK, BΔ, ΔK. οὐκοῦν ὀρθαί εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς Z, Δ, ὡς ἡμικυκλίου γωνίαι· καθ' ἓν ἄρα ἐφάπτονται αἱ BΔ, BZ. καὶ αἱ γε ἀπὸ τοῦ ὄμματος ἀκτῖνες προσπίπτουσαι κατὰ τὰς BΔ, BZ πεσοῦνται· ἔσται δὴ ὁρώμενον τὸ ZPΔ, ἔλασσον ὂν τοῦ NPΛ. ἀλλὰ τὸ NPΛ ἡμικύκλιόν ἐστι· τὸ ἄρα ZPΔ ἔλασσόν ἐστιν ἡμικυκλίου· ὥστε καὶ τὸ ὁρώμενον τοῦ κώνου ἔλασσόν ἐστιν ἡμίσεως· [3] ὁμοίως γὰρ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν κύκλων τῶν ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ δείξομεν.

Prop. XXXII. Theor.

Oculo per idem planum propius ad conum accedente, major coni pars cernetur quam oculo recedente; minor tamen aſpectui apparebit.

SIT baſis coni circulus, cujus centrum K; oculus autem ſit A, & ex A ad K ducatur recta AK; & à puncto K excitetur ΘB, quæ ſit ad angulos rectos ipſi AK; deſcribatur autem circulus circa ipſam AK, connectanturque AZ, ZK, AΔ, ΔK; tranſeratur autem oculus ex A puncto in punctum N, & circa rectam NK deſcribatur circulus, connectanturque rectæ NP, PK, NΣ, ΣK. ergo radii ex A oculo pergentes, cadent ſecundum lineas AΔ, AZ: quare ex puncto A cernetur ZΦΔ. eadem ratione radii procedentes ex N oculo cadent in circuli circumferentiam ſecundum lineas NP, NΣ: igitur ex N puncto cernetur PΦΣ. majus autem autem eſt ZΦΔ quam PΦΣ: apparet tamen minus, propterea quod angulus ad N major eſt angulo ad A.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ΄.

Τοῦ δὲ ὄμματος ἔγγιον μετατεθέντος ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἔλασσον μὲν ἔσται τὸ ὑπὸ τῆς ὄψεως περιλαμβανόμενον μέρος· δόξει δὲ μεῖζον ὁρᾶσθαι.

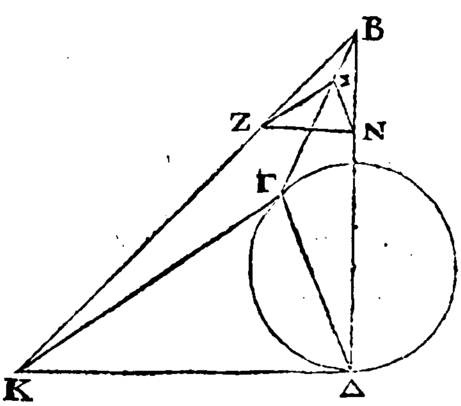
Ἔστω γὰρ κώνου βάσις κύκλος οὗ κέντρον τὸ K, ὄμμα δὲ ἔστω τὸ A, καὶ ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὸ K ἐπεζεύχθω ἡ AK, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἤχθω διὰ τοῦ K ἡ ΘB, γεγράφθω δὲ περὶ τὴν AK κύκλος, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AZ, ZK, AΔ, ΔK, μετακείσθω δὲ τὸ A ὄμμα ἐπὶ τὸ N, καὶ περὶ τὴν NK κύκλος γεγράφθω, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ NP, PK, NΣ, ΣK. οὐκοῦν αἱ ἀπὸ τοῦ A ὄμματος ἀκτῖνες προσπίπτουσαι κατὰ τὰς AΔ, AZ πεσοῦνται· ὥστε φανεῖται τὸ ZΦΔ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ τοῦ N ὄμματος ἀκτῖνες προσπίπτουσαι κατὰ τὰς NP, NΣ πεσοῦνται· ὀφθήσεται ἄρα τὸ PΦΣ. μεῖζον δὲ τὸ ZΦΔ τοῦ PΦΣ· φαίνεται δὲ ἔλασσον, μείζων γὰρ ἡ πρὸς τῷ N γωνία τῆς πρὸς τὸ A γωνίας.

1 Quaſi ſit alius qui baſim habeat μὴ κύκλον. *Savil.* 2 Quid ſi ille unus oculus ſub baſi ſtatuatur? nihil plane videbitur. quid ſi ſupra in axi protracto? videbitur ſuperficies coni proculdubio. *Idem.* 3 Oculo, ſc. in eorum plano collocato: nam alioqui planum per ZB, BΔ non facit in coni ſuperficie circulum, ut ex rectitudine angulorum Z, Δ poſſis concludere τὴν ἐφαψιν, aut ex quantitate anguli ad K quantitatem τῆς ZPΔ γραμμῆς. *Idem.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

[1] Κώνου κύκλον ἔχοντος τὴν βάσιν, ἐὰν ἀπὸ τῶν συναφῶν τῶν ἀπὸ τοῦ ὄμματος πρὸς τὴν τοῦ κώνου βάσιν προσπιπτουσῶν ἀκτίνων εὐθεῖαι διαχθῶσι διὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς τοῦ κώνου πρὸς τὴν κορυφὴν αὐτοῦ, διὰ δὲ τῶν ἀχθεισῶν καὶ τῶν ἀπὸ τοῦ ὄμματος πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κώνου προσπιπτουσῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ, ἐπὶ δὲ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων τὸ ὄμμα τεθῇ· τὸ ὁρώμενον τοῦ κώνου ἴσον διαπαντὸς ὀφθήσεται[2].

Ἔστω γὰρ κώνου οὗ βάσις μὲν ὁ ΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Β σημεῖον, ὄμμα δὲ τὸ Κ, ἀφ' οὗ προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΚΔ, ΚΓ, ἁπτόμεναι κατὰ τὰ Γ, Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἀπὸ τῶν Γ, Δ σημείων ἐπὶ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου αἱ ΔΒ, ΓΒ, καὶ διὰ μὲν τῶν ΓΒ, ΓΚ ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω, διὰ δὲ τῶν ΔΒ, ΔΚ ὁμοίως ἕτερον ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω· οὐκοῦν συμπεσεῖται τὰ ἐπίπεδα, αἵ τε γὰρ ΓΒ, ΔΒ συμπίπτουσι, καὶ αἱ ΓΚ, ΚΔ. συμπιπτέτωσαν οὖν τὰ ἐπίπεδα, καὶ ἔστω αὐτῶν κοινὴ τομὴ ἡ ΒΚ· λέγω ὅτι ὅπου δ' ἂν ἐπὶ τῆς ΒΚ τεθῇ τὸ ὄμμα, ἴσον τοῦ κώνου τὸ ὁρώμενον φαίνεται. κείσθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΒΚ τὸ Ζ ὄμμα, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ζ, παρὰ μὲν τὴν ΚΔ ἡ ΖΝ, παρὰ δὲ ΚΓ ἡ ΖΣ. οὐκοῦν αἱ ΖΝ, ΖΣ τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας κατὰ τὰ Σ, Ν ἐφάπτονται, [3] τὰ γὰρ ἐν τῇ ΒΓΔ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ τῶν παραλλήλων κύκλων τμήματα ὅμοιά ἐστι· τὰ ἄρα ἐν τῇ ΒΔΓ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ διαστήματα ὁρώμενα ἴσα φαίνεται. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἣν περιέχουσιν αἱ ΖΣ, ΖΝ γωνία τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν ΚΓ, ΚΔ· [4] ἴσον ἂν φαίνοιτο τὸ ΣΝ διάστημα τοῦ κώνου τῷ ΓΔ διαστήματι· ὥστε ὅπου ἂν τὸ ὄμμα τεθῇ ἐπὶ τῆς ΚΒ εὐθείας, ἴσον ἀεὶ φαίνεται τὸ ὁρώμενον.



Prop. XXXIII. Theor.

Si ad coni circularem basim ducantur ab oculo radii ipsam basim tangentes, & à punctis in quibus radii tangunt basim ducantur rectæ lineæ per coni superficiem usque ad ejus verticem; per eas vero lineas & radios ab oculo ad basim coni procedentes duo plana educantur, in quorum communi sectione oculus collocetur: coni pars spectata æqualis perpetuo videbitur.

SIT enim conus, cujus basis sit Γ Δ circulus, vertex autem sit punctum B; oculus vero sit K, à quo procedant radii KΔ, KΓ, qui tangant [ipsum Γ Δ circulum] in punctis Γ, Δ, à quibus ad verticem coni ducantur rectæ lineæ Δ B, Γ B; educantur autem duo plana, alterum quidem per lineam Γ B & radium Γ K, alterum autem eodem modo per lineam Δ B & radium Δ K: concurrent igitur hæc duo plana, propterea quod rectæ lineæ Γ B, Δ B concurrunt, & radii Γ K, K Δ etiam concurrunt. concurrant igitur, seque mutuo secent duo illa plana, sitque eorum communis sectio linea B K: fore assero ut ab oculo, in quolibet puncto lineæ B K collocato, æqualis coni portio cernatur. sumatur enim in linea B K aliquod punctum quod sit Z, in quo sit oculus; & per punctum Z ducatur recta linea Z N parallela ipsi KΔ; ipsi autem K Γ parallela Z Σ. igitur rectæ lineæ Z N, Z Σ tangunt coni superficiem in punctis Σ, N; sectiones enim circulorum parallelorum in coni superficie B Γ Δ similes sunt: intervalla igitur quæ cernuntur in B Δ Γ superficie coni æqualia apparent. cum enim angulus, quem comprehendunt radii Z Σ, Z N, æqualis sit ipsi angulo quem comprehendunt radii K Γ, K Δ: igitur superficiei coni intervallum Σ N æquale apparebit intervallo Γ Δ: quocirca ubicunque ponatur oculus in recta K B, spectata coni portio semper æqualis apparebit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

[5] Ἴσου δὲ ἀεὶ τοῦ ὄμματος ἀπὸ τοῦ κώνου ἀπέχοντος, μετεώρου μὲν τοῦ ὄμματος τι-

Prop. XXXIV. Theor.

Oculo moto per lineam æque distantem superficiei coni, si in sublime attolla-

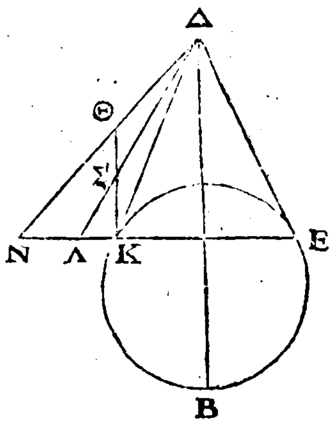
1 Brevius & planius, ut puto, sic: Rectæ lineæ à coni vertice ad basis planum extra conum ductæ quacunque in parte oculus statuatur, τὸ ὁρώμενον τοῦ κώνου ἴσον διαπαντὸς ὀφθήσεται. neque mihi ulla satis justa causa apparet, cur his ambagibus voluerit proponere. *Savil.* 2 Addit Reg. τῆς ὄψεως ἐπὶ παραλλήλου ἐπιπέδου τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὑπαρχούσης; 3 Hoc verum quidem est, sed non probat Z Σ, Z N contingere conum in Σ & N. ac est quidem illud satis per se manifestum, cum plana K B Δ, K B Γ conum tangant. mihi plane usque ad ἐπεὶ (quod tunc legendum esset ἀλλ' ἐπεὶ) omnia παρέλκειν videntur. nam sine iis, ut puto, constat demonstratio. credo esse ex *Scholio*. *Idem*. 4 Hæc verba confirmant id, quod per prop 29. annotavi, illud hic dici ὀρθὸν in conis & cylindris, quod oculis directa ex adverso objacet. *Idem*. 5 Id est, cum est in recta linea parallela rectæ cuipiam à circumferentia basis ad verticem. *Idem*.

tur oculus, coni portio quæ cernitur minor apparet; si vero oculus deprimatur, major.

θέντος, ἔλασσον φαίνεται τοῦ κώνου τὸ ὁρώμενον[1]· ταπεινοτέρου δὲ, μεῖζον.

SIT coni vertex in puncto Δ, basis autem ejusdem coni sit circulus ΚΒΕ, & ducatur ΚΘ parallela ipsi ΒΔ, collocetur que oculus in Θ: dico coni portionem spectatam minorem apparere oculo posito in puncto Θ quam in puncto Σ.

Connectantur enim à puncto Δ ad puncta Θ, Σ rectæ lineæ ΘΔ, ΔΣ, & producantur usque ad puncta Ν, Λ. igitur portiones coni, quæ cernuntur, inæquales apparent, si oculus constituatur nunc in Ν, nunc in Λ; & minor quidem coni portio apparet ex Ν, major autem ex Λ: portio autem coni quæ cernitur ex Ν æqualis est ei quæ cernitur ex Θ, & portio quæ cernitur ex Λ æqualis est ei quæ cernitur ex Σ, ut in præcedenti ostensum est: quare oculus positus in puncto Θ minorem coni portionem se videre existimat, quam cum collocatur in puncto Σ.



Ἔστω γὰρ κώνου κορυφὴ μὲν πρὸς τῷ Δ σημείῳ, βάσις δὲ ὁ κύκλος ΚΒΕ, καὶ ἤχθω ἡ ΚΘ παρὰ τὴν ΒΔ, καὶ κείσθω τὸ ὄμμα ἐπὶ τοῦ Θ· φημὶ δὴ ἔλασσον ὀφθήσεσθαι τοῦ κώνου τὸ ὁρώμενον, τεθέντος τοῦ ὄμματος ἐπὶ τοῦ Θ σημείου ἤπερ ἐπὶ τοῦ Σ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐπὶ τὰ Θ, Σ σημεῖα αἱ ΘΔ, ΔΣ, καὶ [2] ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Ν, Λ. οὐκοῦν ἐπί τε τοῦ Ν καὶ ἐπὶ τοῦ Λ σημείου τεθέντος ὄμματος, ἄνισα φαίνεται τὰ ὁρώμενα τοῦ κώνου, καὶ ἔλασσον μὲν φαίνεται τὸ πρὸς τῷ Ν, μεῖζον δὲ τὸ πρὸς τῷ Λ. ἴσον δὲ τὸ μὲν πρὸς τῷ Ν τῷ πρὸς τῷ Θ, τὸ δὲ πρὸς τῷ Λ τῷ πρὸς τῷ Σ, ὡς ἐν τῷ πρὸ αὐτοῦ ἐδείχθη· τοῦ ἄρα ὄμματος πρὸς τῷ Θ σημείῳ ὄντος, ἔλασσον φαίνεται τὸ ὁρώμενον τοῦ κώνου ἤπερ πρὸς τῷ Σ.

PROP. XXXV. THEOR.

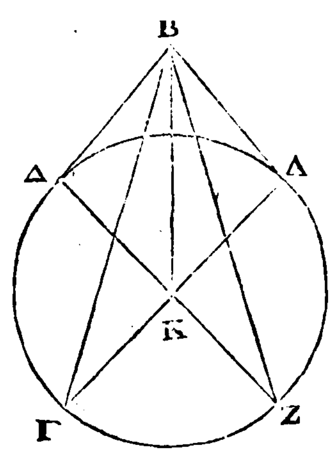
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε΄.

In circulo si à centro excitetur linea recta ad angulos rectos plano ipsius circuli, oculusque in ea linea constituatur; circuli diametri æquales apparebunt.

Ἐν κύκλῳ ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς ὀρθάς τις ἀχθῇ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ, ἐπὶ δὲ ταύτης τεθῇ τὸ ὄμμα· ἴσαι αἱ διάμετροι τοῦ κύκλου φαίνονται.

SIT enim circulus cujus centrum Κ; & à puncto Κ erigatur recta linea ΚΒ, quæ angulos rectos faciat cum circuli plano; ponaturque oculus in puncto Β, & ducantur diametri ΑΓ, ΔΖ: dico diametrum ΑΓ æqualem videri diametro ΔΖ.

Ducantur enim rectæ lineæ ΒΑ, ΒΖ, ΒΓ, ΒΔ. duæ igitur rectæ ΒΚ, ΚΖ duabus ΒΚ, ΚΓ sunt æquales altera alteri. angulus autem ΒΚΓ angulo ΒΚΖ est æqualis: quare [per 4. 1.] basis ΒΖ æqualis est basi ΒΓ. eademque ratione ΒΔ æqualis est ipsi ΒΑ: duæ igitur rectæ ΔΒ, ΒΖ duabus rectis ΓΒ, ΒΑ sunt æquales; & ΔΖ æqualis est ipsi ΓΑ: angulus igitur ΔΒΖ [per 8. 1.] æqualis est angulo ΓΒΑ. sed [per 7. posit.] quæ sub æqualibus angulis spectantur æqualia apparent: æqualis igitur apparet ΓΑ diameter ipsi ΔΖ diametro.



Ἔστω γὰρ κύκλος, οὗ κέντρον τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ πρὸς ὀρθὰς ἀνήχθω τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ κύκλου ἡ ΚΒ, τὸ δὲ ὄμμα κείσθω ἐπὶ Β, καὶ διάμετροι ἤχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ· φημὶ δὲ τὴν ΑΓ τῇ ΔΖ ἴσην φαίνεσθαι.

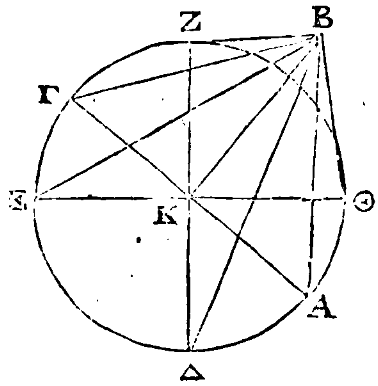
Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΑ, ΒΖ, ΒΓ, ΒΔ· οὐκοῦν δύο αἱ ΒΚ, ΚΖ δυσὶ ταῖς ΒΚ, ΚΓ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΚΓ γωνία τῇ ΒΚΖ γωνίᾳ ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΒΖ βάσις τῇ ΒΓ βάσει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΔ τῇ ΒΑ ἐστὶν ἴση· δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΖ δυσὶ ταῖς ΓΒ, ΒΑ ἴσαι εἰσὶν, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΓΑ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΒΑ ἴση ἐστί. τὰ δὲ ὑπὸ ἴσων γωνιῶν ὁρώμενα ἴσα φαίνεται· ἴση ἄρα ἡ ΓΑ τῇ ΔΖ φαίνεται.

1 Sed tamen plus ὀφθήσεται. *Savil.* 2 Donec sc. concurrant cum plano basis. *Idem.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛʹ.

Καὶ ἐὰν ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀναχθεῖσα μὴ πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ, ἴση δὲ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου· ἴσαι αἱ διάμετροι φανήσονται.

Ἔστω κύκλος οὗ κέντρον τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ μὴ πρὸς ὀρθὰς ἀνήχθω τῷ ἐπιπέδῳ ἡ ΚΒ, ἴση δὲ ἔστω τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἀπὸ τοῦ Β σημείου αἱ αὐταὶ ταῖς πρότερον. οὐκοῦν ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις αἱ ΔΚ, ΚΒ, ΚΖ, ὀρθὴ ἂν εἴη ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ΖΒΔ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὀρθὴ ἂν εἴη· ἴσαι ἄρα ἔσονται ἀλλήλαις. τὰ δὲ ὑπὸ ἴσων γωνιῶν ὁρώμενα ἴσα φαίνεται· ἴση ἄρα ἡ ΔΖ τῇ ΑΓ φαίνεται.



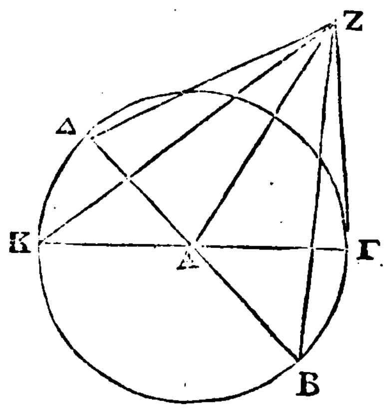
[1] Ἀλλὰ δὴ ἡ ΑΖ μήτε ἴση ἔστω τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, μήτε πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ, ἴσας δὲ γωνίας ποιείτω [2] ταῖς ὑπὸ ΔΑΖ, ΖΑΓ καὶ ΚΑΖ, ΖΑΒ· λέγω ὅτι καὶ οὕτως αἱ διάμετροι ἴσαι φανήσονται. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΖ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΖΑ τῇ ὑπὸ ΑΖΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΚΖΑ τῇ ὑπὸ ΑΖΒ ἐστὶν ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΒ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΚΖΓ ἐστὶν ἴση. ὥστε αἱ διάμετροι ἴσαι φανήσονται, τῆς ἀπὸ τοῦ ὄμματος πρὸς τὸ κέντρον ἴσας περιεχούσης γωνίας μετὰ τῶν διαμέτρων, ἄν τε πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ, ἄν τε μή.

Prop. XXXVI. Theor.

Si vero linea ex centro excitata non ſit ad angulos rectos plano circuli, æqualis tamen ſemidiametro; diametri æquales apparebunt.

SIT circulus, cujus centrum K; & ex K in ſublime ducatur KB, quæ non faciat angulos rectos cum plano circuli; æqualis vero ſit ipſius ſemidiametro; & à puncto B, in quo eſt oculus, ducantur lineæ ut prius. cum igitur æquales inter ſe ſint ΔK, KB, KZ, rectus erit [per 31.3.] angulus ZBΔ. eademque ratione rectus etiam erit angulus ABΓ: ideoque & æquales inter ſe ſunt. quæ autem ſub æqualibus angulis ſpectantur æqualia apparent: æqualis ergo apparet ΔZ diameter ipſi AΓ diametro.

SED AZ neque æqualis ſit ſemidiametro, neque cum plano circuli angulos rectos faciat, ſed angulos ΔAZ, ZAΓ & KAZ, ZAB æquales faciat: dico hoc etiam modo fore ut diametri æquales appareant [oculo in Z conſtituto.] quia enim æqualis eſt ΔA ipſi AΓ, ipſa vero AZ communis eſt, & æquales angulos cum eis facit; ergo [per 4. 1.] baſis ΔZ æqualis eſt baſi ZΓ, & angulus ΔZA angulo AZΓ. eodem modo oſtendemus angulum KZA æqualem eſſe angulo AZB: quare totus ΔZB angulus toti KZΓ angulo eſt æqualis. ideoque diametri [ΔB, KΓ] æquales apparebunt, cum radius qui ab oculo tendit in centrum circuli æquales angulos facit cum diametris, ſive radius ille rectus ſit ad planum circuli, ſive non.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζʹ.

[3] Ἐὰν ἡ ἀπὸ τοῦ ὄμματος πρὸς τὸ κέντρον προσπίπτουσα τοῦ κύκλου μήτε πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ, μήτε ἴση ᾖ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, μήτε ἴσας γωνίας περιέχουσα μετὰ

Prop. XXXVII. Theor.

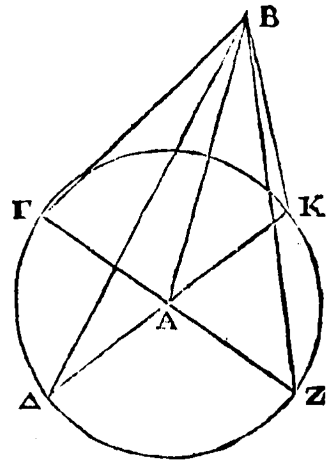
In circulo, ſi radius ab oculo in centrum tendens neque rectus ſit ad planum circuli, neque æqualis ſemidiametro, nec angulos æquales contineat

1 In hac πτώσει duæ tantum diametri æquales φαίζονται, cum recta AZ non poſſit cum pluribus angulos ad centrum efficere æqualeis, ducta autem à Z ad planum perpendiculari, punctoque incidentiæ cum centro connexo, angulus fiet omnium minimus ex ſemidiametro πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀναχθεῖσαν, & propiores remotioribus majores, æquales vero πρὸς ἀναχθεῖσαν facient, qui cum ea ſemidiametro ad utramque partem angulos æqualeis faciunt, vel ab ea abſunt æqualiter. *Savil.* 2 Neque enim cum pluribus poteſt. *Idem.* 3 Hæc 37. propoſitio vel eſt Scholiaſtæ alicujus (id quod mihi veriſimillimum videtur, ita tamen ut poſt duo proxima theoremata reponi debeat; vel 38 & 39 lemmata dicenda ſunt ad hoc theorema neceſſaria, vel certe, quum diſerte theoremata appellet non λήμματα (ὡς ἐν τοῖς θεωρήμασιν ἀποδείκνυται) duobus ſequentibus hoc theorema poſtponi debuit. neque enim theoremata ſequentia ad præcedentium demonſtrationem aſſumi poſſunt. *Idem.*

cum semidiametris, sed major sit vel minor semidiametro; diametri inæquales apparebunt.

τ͂ ἐκ τοῦ κέντρου, μείζων δὲ ἢ ἐλάσσων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου· ἄνισοι αἱ διάμετροι φαίνονται.

SIT circulus, cujus centrum A; & ab oculo B ad circuli centrum ducatur recta BA, quæ neque rectos angulos faciat cum plano circuli, neque æqualis sit semidiametro circuli, nec æquales angulos contineat cum semidiametris: assero fore ut ipsius circuli diametri inæquales appareant.



Ducatur enim ΓZ diameter ad angulos rectos ipsi AB; ducatur item ΔK, quæ inæquales faciat angulos cum linea AB; & connectantur rectæ BΓ, BΔ, BK, BZ; sitque primo BA major semidiametro AK: major igitur est angulus ΓBZ angulo KBΔ, ut in theorematis [subnexis] demonstratur. quæ autem sub majore angulo spectantur majora apparent: igitur diameter ΓZ major apparet diametro ΔK. quod si BA minor sit quam AK, major apparebit ΔK quam ΓZ.

Ἔστω γὰρ κύκλος οὗ κέντρον τὸ Α, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ὄμματος ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εὐθεῖα ἤχθω ἡ ΒΑ, καὶ ἔστω μήτε πρὸς ὀρθὰς τῷ ἐπιπέδῳ, μήτε ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, μήτε ἴσας γωνίας περιέχουσα μετὰ τῶν ἐκ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι αἱ διάμετροι τοῦ κύκλου ἄνισοι φανήσονται.

Ἤχθω γὰρ ἡ μὲν ΓΖ διάμετρος πρὸς ὀρθὰς οὖσα τῇ ΑΒ, ἡ δὲ ΔΚ ἀνίσους [1] ποιοῦσα γωνίας πρὸς τῇ ΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΒΚ, ΒΖ, ἔστω δὲ πρότερον ἡ ΒΑ τῆς ΑΚ μείζων· ἐκεῖνο μείζων ἐστὶν ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ΓΒΖ τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῶν ΚΒΔ, ὡς ἐν τοῖς θεωρήμασιν ἀποδείκνυται. τὰ δὲ ὑπὸ μείζονος γωνίας ὁρώμενα μείζονα φαίνεται· μείζων ἄρα ἡ ΓΖ τῆς ΔΚ φαίνεται. ἐὰν δὲ ἡ ΒΑ τῆς ΑΚ ἐλάσσων ᾖ, μείζων φαίνεται ἡ ΔΚ τῆς ΓΖ.

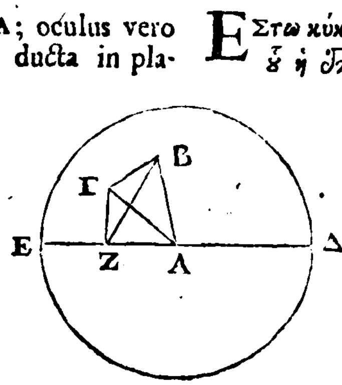
Ad horum demonstrationem præcognita esse oportet quæ sequuntur.

Προσλαμβανόμενα εἰς τούτων ἀπόδειξιν.

Si ab oculo in sublimi posito cadant duæ rectæ lineæ, altera ad centrum circuli, quæ perpendicularis non sit plano circuli, altera vero quæ perpendicularis sit circuli plano; & à puncto, in quod cadit perpendicularis, connectatur recta linea ad centrum circuli: angulus comprehensus sub hac linea, & ea quæ à centro ad oculum ducta est, minimus est omnium angulorum contentorum sub linea ab oculo ad centrum ducta, & lineis per centrum ductis.

Ἐὰν ἀπὸ μετεώρου ὄμματος πρὸς κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, ἡ μὲν πρὸς τὸ κέντρον μὴ πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ κάθετος οὖσα τῷ ἐπιπέδῳ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου, εἰς ὃ πίπτει ἡ κάθετος, εἰς τὸ κέντρον ἀχθῇ εὐθεῖά τις· ἡ περιεχομένη γωνία ὑπό τε τῆς ἀπὸ τοῦ σημείου εἰς τὸ κέντρον, καὶ τῆς ἀπὸ τοῦ ὄμματος εἰς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη ἐστὶ γωνιῶν ἁπασῶν περιεχομένων ὑπό τε τῆς ἀπὸ τοῦ ὄμματος πρὸς τὸ κέντρον, καὶ τῶν διὰ τοῦ κέντρου διαγομένων εὐθειῶν.

SIT circulus, cujus centrum A; oculus vero sit B, à quo perpendicularis ducta in planum circuli cadat non in A centrum, sed extra centrum in Γ nempe, sitque BΓ; & à puncto Γ ad punctum A connectatur recta ΓA, item ex puncto A in punctum B ducatur AB: dico angulorum omnium, qui fieri possunt ex concursu lineæ BA cum alia qualibet linea transeunte per punctum A, minimum esse angulum ΓAB. ducatur enim per punctum A recta linea ΔAE; & à puncto Γ in ΔE ducatur perpendicularis ΓZ, quæ sit in



Ἔστω κύκλος οὗ κέντρον τὸ Α, ὄμμα δὲ τὸ Β, ἀφ' οὗ ἡ ἐπὶ τοῦ κύκλου κάθετος ἀγομένη μὴ πιπτέτω ἐπὶ τὸ κέντρον τὸ Α, ἀλλὰ ἐκτὸς, καὶ ἔστω ἡ ΒΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὸ Α ἡ ΓΑ, ἔτι δὲ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἡ ΑΒ· λέγω ὅτι πασῶν διὰ τοῦ Α διαγομένων εὐθειῶν, καὶ ποιουσῶν πρὸς τῇ ΒΑ γωνίας, ἐλαχίστη ἐστὶν ὑπὸ τῶν ΓΑΒ. διήχθω γὰρ εὐθεῖα ἡ ΔΑΕ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετος ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἡ ΓΖ, καὶ ἐπε-

1 Nam si & ipsa æquales angulos faceret, BA esset κάθετος ad planum circuli, per 4. 11. *Savil.*

ζεύχθω

ζεύχθω ἡ ΒΖ· καὶ ἡ ΒΖ ἄρα ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετός ἐστιν. ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΓΖΑ, ἡ ὑπὸ ΑΓΖ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ὀρθῆς· μείζων ἄρα ἡ ΑΓ πλευρὰ τῆς ΑΖ· ἡ ΒΑ ἄρα πρὸς τὴν ΑΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν ΑΓ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ γωνία καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΒΖΑ εἰσὶν ὀρθαί, καὶ εἰσὶν αἱ ΓΑ, ΑΖ ἄνισοι· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ τῶν ΖΑΒ τῆς ὑπὸ τῶν ΓΑΒ ἐστὶ μείζων. ὁμοίως δὲ δείξεται ὅτι καὶ πασῶν τῶν διὰ τοῦ Α διαγομένων εὐθειῶν, καὶ ποιουσῶν πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ γωνίας, ἐλαχίστη ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῆς ΓΑΒ.

eodem plano, in quo ΔΕ; connectaturque recta ΒΖ: igitur [per lem. 1.] ΒΖ perpendicularis est in lineam ΔΕ. cum ergo angulus ΓΖΑ rectus sit, angulus igitur ΑΓΖ [per 17.1.] minor est recto: majus ergo [per 19.1.] est latus ΑΓ latere ΑΖ: quare [per 8.5.] recta ΒΑ ad ΑΖ majorem rationem habet quam ad ΑΓ. sed duo anguli ΑΓΒ, ΒΖΑ recti sunt, & ΓΑ, ΑΖ rectæ lineæ inæquales sunt: ergo [per lem. 2.] reliquus angulus ΖΑΒ reliquo angulo ΓΑΒ est major. eodem modo ostendemus omnium angulorum, qui fiunt ex concursu lineæ ΑΒ cum lineis trajectis per punctum Α, minimum esse angulum ΓΑΒ.

ΛΗΜΜΑ α'.

Ὅτι δὲ ἡ ΖΒ τῇ ΔΕ ἐστὶ πρὸς ὀρθὰς δείξομεν οὕτως.

Ἐπεὶ ἡ ΒΓ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς, καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ΒΓ ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. ἓν δὲ τῶν διὰ τῆς ΒΓ ἐκβαλλομένων ἐπιπέδων ἐστὶ τὸ ΒΓΖ τρίγωνον· καὶ τὸ ΒΓΖ ἄρα τρίγωνον τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. ἐπεὶ οὖν δύο ἐπίπεδα, τό τε τοῦ ΕΔ κύκλου καὶ τὸ τοῦ ΒΓΖ τριγώνου, τέμνουσιν ἄλληλα, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ αὐτῶν τῇ ΓΖ πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἡ ΔΕ, ἐν τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ, κάθετος γὰρ ἦκται ἡ ΓΖ ἐπὶ τὴν ΕΔ· καὶ ἡ ΕΔ ἄρα τῷ τοῦ ΒΓΖ τριγώνου ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς· ὥστε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ ΓΖΒ τριγώνου ἐπιπέδῳ, ἐστὶ πρὸς ὀρθάς· ἡ ΔΕ ἄρα τῇ ΖΒ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς· ἀνάπαλιν ἄρα ἡ ΖΒ τῇ ΕΔ διαμέτρῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς.

LEMMA I.

Quod autem recta ΖΒ ad angulos rectos sit ipsi ΔΕ, ostendemus hoc modo.

Quia enim ΒΓ est ad rectos angulos plano circuli: ergo [per 18.11.] plana omnia trajecta per lineam ΒΓ angulos rectos faciunt cum plano circuli. sed triangulum ΒΓΖ est unum de planis trajectis per lineam ΒΓ; ergo triangulum ΒΓΖ ad angulos rectos insistit plano circuli. cum ergo duo plana, planum nempe circuli ΕΔ & planum trianguli ΒΓΖ se mutuo secent, & ad ipsorum communem sectionem, quæ est ΓΖ, ipsa ΔΒ angulos rectos faciat cum plano circuli: (ducta enim est ΓΖ perpendicularis in ipsam ΕΔ) igitur recta ΕΔ angulos rectos facit cum plano ipsius trianguli ΒΓΖ: quare [per 3. def. 11.] ad omnes lineas à quibus tangitur, positas in eodem plano trianguli ΓΖΒ, angulos rectos facit: ideoque ΔΕ ad ipsam ΖΒ angulos rectos facit: conversim igitur ΖΒ est ad angulos rectos ipsi ΕΔ diametro circuli.

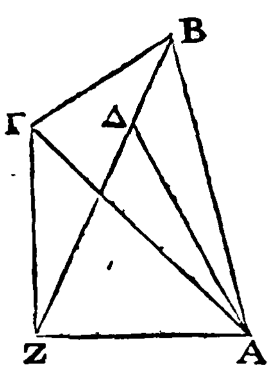
ΛΗΜΜΑ β'.

Ὅτι δὲ δείξομεν ὅτι ἡ ΖΑΒ γωνία τῆς ΓΑΒ γωνίας μείζων ἐστίν.

Ἔστω γὰρ δύο τρίγωνα τὰ ΒΓΑ, ΒΖΑ ὀρθὰς ἔχοντα τὰς πρὸς τοῖς Γ, Ζ γωνίας· καὶ ἡ ΒΑ πρὸς ΖΑ μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ πρὸς τὴν ΓΑ· λέγω ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΑΒ γωνία τῆς ὑπὸ ΓΑΒ γωνίας.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΖΑ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν ΓΑ· καὶ ἀνάπαλιν ἄρα ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΑΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ· ὥστε ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΑ πρὸς ΑΒ. πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ οὕτως ἡ ΖΑ πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΑΒ τὴν ΑΔ· ἰσογώνια ἄρα ἐστὶ τὰ τρίγωνα τὰ ΒΓΑ, ΔΖΑ· ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΑΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΑΔ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΑΒ γωνία τῆς ὑπὸ ΓΑΒ.

Ἐκ δὲ δὴ τούτων δείξομεν ὅτι



LEMMA II.

Præterea ostendemus angulum ΖΑΒ majorem esse angulo ΓΑΒ.

Sint duo triangula ΒΓΑ, ΒΖΑ, qui rectos habeant angulos positos ad Γ, Ζ; habeat autem ΒΑ majorem rationem ad ΖΑ, quam ad ΓΑ: dico angulum ΖΑΒ majorem esse angulo ΓΑΒ.

Cum enim ΒΑ ad ΖΑ majorem rationem habeat quam ad ΓΑ: conversim [1] igitur ΖΑ ad ΑΒ minorem rationem habet quam ΓΑ ad ΑΒ: quare ΓΑ ad ΑΒ majorem rationem habet quam ΖΑ ad ΑΒ. fiat ergo ut ΓΑ ad ΑΒ ita ΖΑ ad minorem quam ΑΒ, nempe ΑΔ; æquiangula ergo sunt [per 7.6.] triangula ΒΓΑ, ΔΖΑ: quare angulus ΓΑΒ æqualis est angulo ΖΑΔ: ideoque angulus ΖΑΒ major est angulo ΓΑΒ.

Ex his igitur ostendemus quod

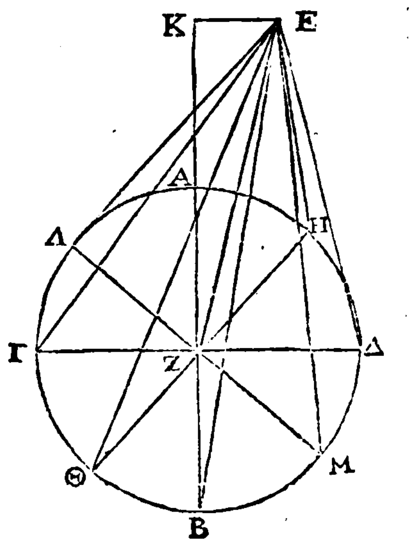
1 Hæc & hisce similia demonstrantur à Pappo in Lib. 7. *Collect. Math.*

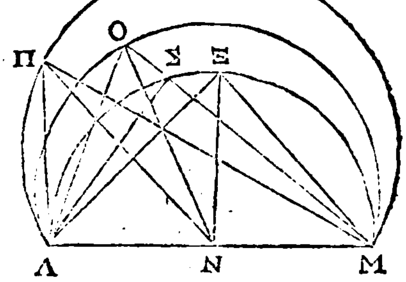
PROP.

Prop. XXXVIII. Theor.

In circulo, ſi radius ab oculo in centrum tendens, & inæquales angulos comprehendens cum diverſis diametris, non ſit rectus ad planum circuli, ſed ſit major ſemidiametro: diametri inæquales apparebunt; & ea major videbitur, ad quam radius ab oculo ad centrum tendens eſt perpendicularis.

SIT circulus ΑΒΓΔ, ducanturque duæ diametri ΑΒ, ΓΔ ſe mutuo ſecantes ad angulos rectos; ſit vero oculus Ε, à quo ad centrum connexa recta linea ΕΖ faciat rectos quidem angulos cum ΓΔ, quosvis autem alios cum ipſa ΑΒ; ſit autem ipſa ΕΖ major ſemidiametro circuli. quia ergo ΓΔ ad angulos rectos eſt utrique ipſarum ΑΒ, ΕΖ: omnia igitur plana trajecta per lineam ΓΔ [per 4. & 18.11.] ad angulos rectos erunt plano trajecto per lineas ΕΖ, ΑΒ. itaque ex Ε puncto ad planum ſubjectum ducatur perpendicularis: cadet ergo in communem ipſorum planorum ſectionem, quæ eſt ΑΒ. cadat ergo, ſitque ΕΚ; ducaturque diameter ΗΘ; ſumaturque linea ΛΜ æqualis diametro circuli, quæ bifariam ſecetur in puncto Ν; à quo excitetur linea ſublimis ΝΞ, quæ ſit ad ad angulos rectos ipſi ΛΜ; ſit vero linea ΝΞ æqualis ipſi ΕΖ: deſcriptum igitur ſegmentum circuli tranſiens per puncta Λ,Ξ,Μ majus eſt ſemicirculo, propterea quod linea ΝΞ major eſt utravis duarum linearum ΛΝ, ΜΝ. ſit ergo illud circuli ſegmentum ΛΞΜ, & connectantur lineæ ΞΛ, ΞΜ: angulus ergo in puncto Ξ poſitus, qui ſub lineis ΛΞ & ΜΞ continetur, æqualis eſt angulo poſito in puncto Ε, qui continetur ſub lineis connexis à puncto Ε ad puncta Γ, Δ. rurſus, angulo contento ſub ΕΖ, ΖΗ, id





ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη΄.

[1] Ἐὰν ἡ ἀπὸ τοῦ ὄμματος πρὸς τὸ κέντρον προσπίπτουσα, καὶ ἀνίσους γωνίας περιέχουσα μετὰ διαφόρων διαμέτρων, μὴ πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ, μείζων δὲ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου· ἄνισοι αἱ διάμετροι φανήσονται, καὶ μείζων, ἐφ' ἣν ἡ ἀπὸ τοῦ ὄμματος πρὸς τὸ κέντρον ἐστὶ κάθετος.

ΕΣτω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ διήχθωσαν δύο διάμετροι αἱ ΑΒ, ΓΔ τέμνουσαι ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς, ὄμμα δὲ ἔστω τὸ Ε, ἀφ' οὗ ἡ ἐπὶ τὸ κέντρον ἐπιζευγνυμένη ἡ ΕΖ πρὸς ὀρθὰς μὲν ἔστω τῇ ΓΔ, πρὸς δὲ τὴν ΑΒ τυχοῦσαν γωνίαν περιεχέτω, καὶ ἔστω ἡ ΕΖ ἑκατέρας [2] τῆς ἐκ τοῦ κέντρου μείζων. ἐπεὶ οὖν ἡ ΓΔ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΒ,ΕΖ ἐστι πρὸς ὀρθάς· καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ΓΔ ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα τῷ διὰ τῶν ΕΖ, ΑΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἤχθω οὖν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος· ἐπὶ τὴν κοινὴν ἄρα τομὴν πίπτει ἐπιπέδων, [3] τὴν ΑΒ. πιπτέτω οὖν, καὶ ἔστω ἡ ΕΚ, καὶ διήχθω διάμετρος ἡ ΗΘ, καὶ κείσθω τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου ἴση ἡ ΛΜ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ ἀνήχθω ἀπὸ τοῦ Ν τῇ ΛΜ πρὸς ὀρθὰς μετέωρος εὐθεῖα ἡ ΝΞ, καὶ ἔστω ἡ ΝΞ τῇ ΕΖ ἴση· τὸ ἄρα περὶ τὴν ΛΜ γραφόμενον τμῆμα καὶ ἐρχόμενον διὰ τοῦ Ξ μεῖζον ἔσται τοῦ ἡμικυκλίου, ἐπειδήπερ ἡ ΝΞ μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ΛΝ, ΜΝ. ἔστω τὸ ΛΞΜ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΞΛ, ΞΜ· [4] ἡ ἄρα πρὸς τὸ Ξ γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΛΞΜ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Ε σημείῳ, τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὸ Ε καὶ τὰ Γ, Δ σημεῖα. ἔτι κείσθω τῇ [5] ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΖΗ ἴση

1 Ἐὰν ἡ ἀπὸ τοῦ ὄμματος πρὸς τὸ κέντρον προσπίπτουσα, μὴ πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ, περιέχῃ δὲ ἀνίσους γωνίας μετὰ διαφόρων διαμέτρων, καὶ μείζων ᾖ τῆς ἐκ τοῦ &c. ſic enim multo proponitur aptius. *Savil.* 2 Malo τῆς. *Idem.* 3 Extenſam, ſi opus eſt. *Idem.* 4 Quia duo ſunt triangula ΝΞΜ, ΖΕΔ, itemque ΛΞΝ, ΓΕΖ, quæ duo latera duobus lateribus habeant æqualia, & angulum comprehenſum angulo æqualem. *Idem.* 5 Qui ſc. rectus non eſt; tum enim ΕΖ eſſet erecta ad planum contra hypotheſin. *Idem.*

ἡ ὑπὸ

ἡ ὑπὸ τ̃ ΛΝ, ΝΟ, κ̀ ἀφῃρήσθω ἴση τῇ ΕΖ ἡ ΝΟ, ϗ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΟ, ΜΟ, ϗ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΛΟΜ τρίγωνον τμῆμα κύκλου· ἔςαι δὴ κ̀ ἡ πρὸς τῷ Ο σημείῳ γωνία, ἡ περιεχομένη ἡ ὑπὸ τ̃ ΛΟ, ΟΜ, ἴση τῇ ὑπὸ τ̃ ΗΕΘ. ἔτι κείσθω τῇ ὑπὸ τῶν ΕΖΑ [1] ἴση ἡ ὑπὸ τῶν ΛΝΠ, ϗ ἀφῃρήσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΝΠ καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΠ, ΠΜ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΛΠΜ τρίγωνον τμῆμα κύκλου· ἔςαι δὴ καὶ ἡ πρὸς τῷ Π σημείῳ ἴση τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τ̃ ΑΕ, ΕΒ γωνίᾳ. ἐπεὶ ὖν μείζων ἐςὶν ἡ πρὸς τῷ Ξ τῆς πρὸς τῷ Ο γωνίας, ἡ μὲν γὰρ πρὸς τῷ Ξ ἴση ἐςὶ τῇ πρὸς τῷ Σ γωνίᾳ, ἀμφότεραι γὰρ ἐν τῷ αὐτῷ εἰσι τμήματι, ἡ δὲ πρὸς τῷ Σ μείζων ἐςὶ τ̃ πρὸς τῷ Ο γωνίας, τριγώνου γὰρ τοῦ ΛΣΟ ἐκτός ἐςι· καὶ ἡ πρὸς τῷ Ξ ἄρα μείζων ἐςὶ τ̃ πρὸς τῷ Ο. καὶ ἔςιν ἡ πρὸς τῷ Ξ ἴση τῇ ὑπὸ ΓΕΔ, ἡ δὲ πρὸς τῷ Ο τῇ ὑπὸ ΗΕΘ· μείζων ἄρα φανήσεται καὶ ἡ ΓΔ τ̃ ΗΘ. πάλιν ἡ μὲν πρὸς τῷ Ο γωνία τῇ ὑπὸ ΗΕΘ ἐςὶν ἴση, ἡ δὲ πρὸς τῷ Π τῇ ὑπὸ ΑΕΒ, μείζων δ᾽ ἡ Ο [2] γωνία τ̃ Π· μείζων ἄρα φανήσεται ἡ ΗΘ τῆς ΑΒ εὐθείας.

est angulo ΕΖΑ, æqualis constituatur ad punctum Ν angulo ΛΝΟ, contentus sub lineis ΛΝ, ΝΟ, auferaturque ΝΟ æqualis ipsi ΕΖ, connectanturque rectæ ΛΟ, ΜΟ, & [per 5.4.] circa triangulum ΛΟΜ describatur circuli segmentum: angulus igitur positus in puncto Ο, contentus sub lineis ΛΟ, ΟΜ, æqualis erit angulo ΗΕΘ. rursus, ad punctum Ν ponatur angulus ΛΝΠ æqualis angulo ΕΖΑ, abscindaturque ΝΠ æqualis ipsi ΕΖ, & connectantur rectæ ΛΠ, ΠΜ, & circa triangulum ΛΠΜ describatur circuli segmentum: erit ergo angulus ΛΠΜ æqualis angulo contento sub rectis lineis ΑΕ, ΕΒ. quia ergo angulus ΛΞΜ major est angulo ΛΟΜ (angulus enim ΛΞΜ [per 21.3.] æqualis est angulo ΛΣΜ, eo quod ambo sunt in eodem circuli segmento) angulus autem ΛΣΜ [per 16.1.] major est angulo ΛΟΜ; (est enim exterior angulus trianguli ΛΣΟ:) angulus igitur ΛΞΜ major est angulo ΛΟΜ. angulus vero ΛΞΜ æqualis est angulo ΓΕΔ, & angulus ΛΟΜ æqualis est ipsi ΗΕΘ: [major igitur est angulus ΓΕΔ angulo ΗΕΘ;] ideoq; [per 5. posit.] diameter ΓΔ apparebit major diametro ΗΘ. rursus, angulus ΛΟΜ æqualis est angulo ΗΕΘ, angulus autem ΛΠΜ angulo ΑΕΒ; major vero est angulus ΛΟΜ angulo ΛΠΜ: quare ΗΘ diameter major apparebit diametro ΑΒ.

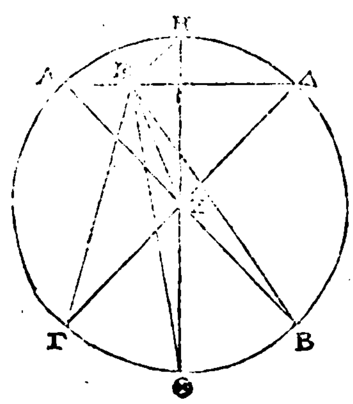
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ΄.

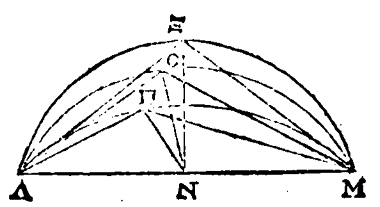
Μὴ ἔςω δὲ μείζων ἡ ἐκ τοῦ ὄμματος ἐπὶ τὸ κέντρον ἐπιζευγνυμένη τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἀλλ᾽ ἐλάσσων, ἔςαι δὲ περὶ τὰς διαμέτρους τὐναντίον· ἡ γὰρ τότε μείζων τ̃ διαμέτρων, νῦν ἐλάττων φανήσεται· ἡ δὲ ἐλάττων, μείζων.

Prop. XXXIX. Theor.

Quod si ab oculo ad centrum connexa recta linea non fuerit major semidiametro, sed minor; contrarium diametris eveniet: quæ enim antea major videbatur, nunc minor apparebit; & quæ minor, major.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ διήχθωσαν δύο διάμετροι τέμνουσαι ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς





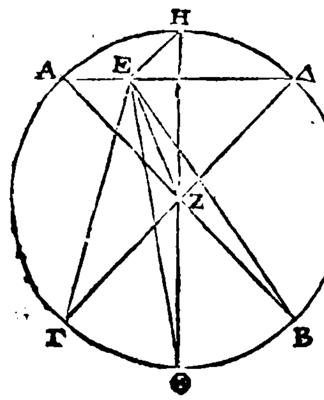
αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἑτέρα δέ τις διήχθω ἡ ΗΘ, ὄμμα δὲ τὸ Ε, ἀφ᾽ οὗ ἡ ἐπὶ τὸ Ζ κέντρον ζευχθεῖσα ἔςω ἡ ΕΖ, ἐλάσσων οὖσα ἑκατέρας [3] τ̃ ἐκ τοῦ κέντρου,

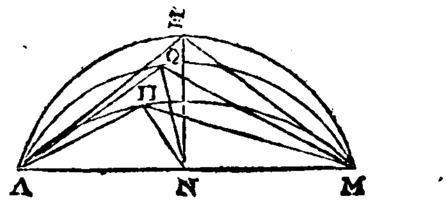
SIT circulus ΑΒΓΔ, in quo ducantur duæ diametri se mutuo secantes ad angulos rectos, quæ sint ΑΒ, ΓΔ; & alia quævis præterea diameter sit vero oculus Ε, à quo ad centrum connexa recta linea ΕΖ minor sit semidiametro, faciatque

1 Qui angulus (per lemma præcedens) minimus est omnium ab ΕΖ cum semidiametris factorum, atque ideo ΝΠ modo cadit intra ΝΟ. *Savil.* 2 Punctum Ο cadere extra circulum ΛΞΜ ita constat; quia ΞΝ secat ΛΜ bifariam & ad rectos, est igitur ΞΝ ἐκβληθεῖσα diameter circuli, & quia ΛΞΜ est major semicirculo in ΞΝ est centrum circuli, quare [per 7.3.] ΝΞ longissima est omnium rectarum ab Ν ad circuli circumferentiam: cadit ergo Ο extra ΛΞΜ. similiter demonstratur punctum Π cadere extra circulum ΛΟΜ, quia, cum angulus ΛΝΠ minor sit angulo ΛΝΟ, recta ΝΠ remotior est ab ΝΞ (si educatur ad circumferentiam ΛΟΜ) maxima. *Idem.* 3 Malo τῆς, ut supra. *Idem.*

ΖΕ rectos angulos cum ΓΔ diametro, & ponatur ΛΜ recta æqualis diametro circuli, seceturque bifariam in puncto Ν, & à puncto Ν erigatur ad angulos rectos linea ΝΞ quæ sit æqualis lineæ ΕΖ, & [per 5. 4.] circa puncta Λ, Ξ, Μ describatur circuli segmentum ΛΞΜ: erit igitur hoc segmentum minus semicirculo, quandoquidem ΝΞ minor est semidiametro. sit ergo illud segmentum ΛΞΜ, & con-

πρὸς ὀρθὰς δὲ ἔστω τῇ ΓΔ ἡ ΕΖ, καὶ κείσθω τῇ τοῦ κύκλου διαμέτρῳ ἴση ἡ ΛΜ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ ἀνήχθω ἀπὸ τοῦ Ν πρὸς ὀρθὰς ἡ ΝΞ ἴση τῇ ΕΖ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὴν ΛΜ καὶ τὸ Ξ σημεῖον τμῆμα κύκλου τὸ ΛΞΜ· ἔσται δὴ ἔλασσον ἡμικυκλίου, ἐπειδήπερ ἡ ΝΞ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου. ἔστω τὸ ΛΞΜ, καὶ ἐπεζεύχθω-





nectantur rectæ ΞΛ, ΞΜ; angulus igitur in puncto Ξ positus, qui continetur sub lineis ΛΞ, ΞΜ, æqualis est angulo posito in puncto Ε, qui continetur sub rectis lineis ΓΕ, ΕΔ. rursus, ad punctum Ν constituatur angulus ΛΝΟ æqualis angulo ΕΖΗ, abscindaturque ΝΟ æqualis ipsi ΕΖ, connectanturque rectæ ΛΟ, ΜΟ, & circa lineam ΛΜ per punctum Ο describatur circuli segmentum ΛΟΜ: angulus igitur in puncto Ο positus, qui continetur sub lineis ΛΟ, ΜΟ, æqualis est angulo ad punctum Ε posito & contento sub lineis ΘΕ & ΕΗ. denique, ad punctum Ν ponatur angulus ΛΝΠ æqualis ΛΖΕ, abscindaturque ΝΠ æqualis ipsi ΕΖ, connectanturque rectæ ΛΠ, ΠΜ, & circa triangulum ΛΠΜ describatur circuli segmentum ΛΠΜ: erit ergo angulus in puncto Π positus, sub lineis ΛΠ, ΠΜ contentus, æqualis angulo posito in Ε puncto & sub lineis ΑΕ, ΕΒ contento. cum ergo angulus ΛΞΜ minor sit angulo ΛΟΜ, angulus autem ΛΟΜ æqualis sit angulo ΘΕΗ, & angulus ΛΞΜ æqualis sit angulo ΓΕΔ: minor igitur [per 6. posit.] apparebit ΓΔ diameter diametro ΗΘ. rursus, quia angulus ΘΕΗ minor est angulo ΑΕΒ: minor ergo apparebit diameter ΗΘ diametro ΑΒ.

σαν αἱ ΞΛ, ΞΜ· ἡ ἄρα πρὸς τῷ Ξ σημείῳ γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΛΞ, ΞΜ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Ε, περιεχομένῃ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΕ, ΕΔ. ἔτι κείσθω τῇ ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΖΗ ἴση ἡ ἀπὸ τῶν ΛΝ, ΝΟ, καὶ ἀφῃρήσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΝΟ [1], καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΟ, ΜΟ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὴν ΛΜ καὶ τὸ Ο σημεῖον τὸ ΛΟΜ τμῆμα κύκλου. ἡ δὴ πρὸς τῷ Ο σημείῳ γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΜΟ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Ε, τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν ΘΕ, ΕΗ. ἔτι κείσθω τῇ ὑπὸ ΑΖ, ΖΕ ἴση ἡ ὑπὸ τῶν ΛΝ, ΝΠ, καὶ ἀφῃρήσθω ἡ ΝΠ ἴση τῇ ὑπὸ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΠ, ΠΜ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΛΠΜ τρίγωνον τμῆμα κύκλου τὸ ΛΠΜ· ἔσται δὴ ἡ πρὸς τῷ Π σημείῳ γωνία, περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΛΠ, ΠΜ, ἴση τῇ πρὸς τῷ Ε γωνίᾳ περιεχομένῃ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ. ἐπεὶ οὖν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Ξ τῆς πρὸς τῷ Ο γωνίας, ἴση δὲ ἡ μὲν πρὸς τῷ Ο τῇ πρὸς τῷ Ε, περιεχομένῃ δὲ ὑπὸ τῶν ΘΕ, ΕΗ, ἡ δὲ πρὸς τῷ Ξ τῇ πρὸς τῷ Ε περιεχομένῃ τῇ ὑπὸ τῶν ΓΕΔ· ἐλάσσων ἄρα φαίνεται ἡ ΓΔ τῆς ΗΘ. πάλιν, ἐπεὶ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Ε περιεχομένη δὲ ὑπὸ τῶν ΘΕΗ, τῆς πρὸς τῷ Ε περιεχομένης δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ· ἐλάσσων ἄρα φαίνεται καὶ ἡ ΗΘ τῆς ΑΒ.

Prop. XL. Theor.

Curruum rotæ nunc circulares nunc oblongæ apparebunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

Τῶν ἁρμάτων οἱ τροχοὶ ὅτε μὲν κυκλοειδεῖς, ὅτε δὲ παρεσπασμένοι φαίνονται.

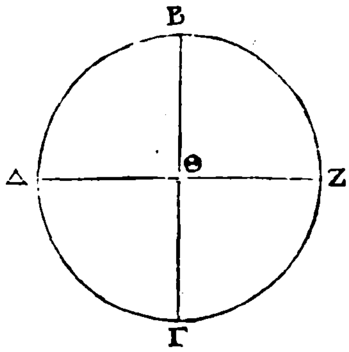
Sit rota, cujus diametri sunt ΔΖ, ΒΓ. cum ergo radius, ab oculo ad centrum rotæ tendens, fuerit vel rectus ad rotæ planum vel æqualis semidiametro, diametri ipsius æquales apparebunt, ut in theor. præc. demonstratum est.

Ἔστω γὰρ τροχὸς, οὗ διάμετροι αἱ ΔΖ, ΒΓ. ἐὰν οὖν ὅτε μὲν ἡ ἀπὸ τοῦ ὄμματος εἰς τὸ κέντρον νεύουσα πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ ἐπιπέδῳ, ἢ ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, ἴσαι αἱ διάμετροι φαίνονται, ὡς ἐν [2] τῷ πρὸ αὐτοῦ θεωρήματι ἀπεδείχθη.

1 Punctum Ο non cadere intra ΛΞΝ constat ex eo, quod ΝΞ minima sit omnium ab Ν puncto ad circumferentiam ΛΞΜ ductarum. *Savil.* 2 In theor. 36 & 37. quod qua ratione vocavit τὸ πρὸ αὐτοῦ? nisi hoc e *Scholio*, ut etiam fortasse totum theorema. *Idem.*

ὥστε

ὥστε ὁ τροχὸς ὁ τοῦ ἅρματος κυκλοειδὴς φαίνεται τούτων ὑπαρχόντων. περιφερομένου δὲ τοῦ ἅρματος, καὶ τῆς ἀπὸ τοῦ ὄμματος νευούσης εἰς τὸ κέντρον ἀκτῖνος, μήτε πρὸς ὀρθὰς οὔσης τῷ τοῦ τροχοῦ ἐπιπέδῳ, μήτε ἴσης τῇ ἐκ τοῦ κέντρου αὐτοῦ, ἄνισοι αἱ διάμετροι φανοῦνται ὁμοίως, διὰ τὸ πρὸ αὐτοῦ δειχθέν· ὥστε παρεσπασμένος φαίνοιτο ὁ τροχός.



quare eo modo spectata rota currus circularis apparebit. curru vero inordinate & celeriter delato, si oculi radius tendens ad centrum neque rectus sit ad rotæ planum, neque æqualis semidiametro rotæ, inæquales apparebunt ejus diametri, per præcedens theorema: quare oblonga apparebit rota.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μα'.

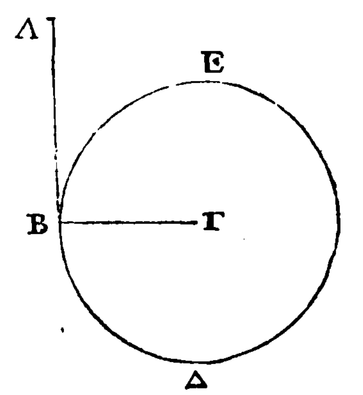
Ἐὰν μέγεθός τι πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ μετέωρον, τεθῇ δὲ τὸ ὄμμα ἐπί τι σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, καὶ μεθιστῆται τὸ ὁρώμενον ἐπὶ κύκλου περιφερείας· ἴσον ἀεὶ τὸ ὁρώμενον φανήσεται.

Prop. XLI. Theor.

Si magnitudo quævis recta sit ad subjectum planum, ponaturque oculus in puncto aliquo plani illius, circa quod tanquam circa circuli centrum sese verset spectata magnitudo; ea semper æqualis apparebit.

Ἔστω ὁρώμενόν τι μέγεθος τὸ ΑΒ μετεωρότερον τοῦ ἐπιπέδου, ὄμμα δὲ ἔστω τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΒ, καὶ κέντρῳ τῷ Γ διαστήματι δὲ τῷ ΓΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΔΕ· λέγω ὅτι ἐὰν ἐπὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας μεθιστῆται τὸ ΑΒ, ἀπὸ τοῦ Γ ὄμματος ἴσος ἀεὶ ὀφθήσεται.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι, καὶ ποιεῖ πρὸς τὴν ΒΓ ὀρθὴν γωνίαν· πᾶσαι ἄρα αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ Γ πρὸς τὸ ΑΒ μέγεθος προσπίπτουσαι ἀλλήλαις ἴσας γωνίας ποιοῦσιν· ἴσον ἄρα τὸ ὁρώμενον ὀφθήσεται.



Sit spectata magnitudo ΑΒ sublimior subjecto plano, [cui ad angulos rectos insistat;] oculus autem sit Γ, & connectatur recta ΓΒ; & centro Γ intervallo autem ΓΒ describatur circulus ΒΔΕ: fore assero, ut, si magnitudo ΑΒ vectetur in circuli circumferentia, æqualis perpetuo appareat ipsi Γ oculo.

Quia enim ΑΒ magnitudo recta est ad planum, facitque angulum rectum cum linea ΒΓ jacente in plano circuli: quare omnes lineæ, quæ à centro Γ in ipsam ΑΒ magnitudinem incident, angulos inter se æquales facient; ideoque [per 7. posit.] spectata magnitudo ejusdem quantitatis perpetuo apparebit.

ΟΜΟΙΩΣ δὲ κἂν ἀπὸ τοῦ Γ κέντρου μετέωρος ἀχθῇ εὐθεῖα, καὶ ἐπ' αὐτῆς τὸ ὄμμα τεθῇ ἐπὶ παραλλήλου ὂν τῷ ὁρωμένῳ μεγέθει, καὶ μετακινῆται τὸ μέγεθος, ἴσον ἀεὶ τὸ ὁρώμενον φαίνεται.

Eodem modo si ex centro Γ sublimis ducatur recta linea, quæ parallela sit spectatæ magnitudini, & in ejus culmine statuatur oculus; magnitudo, vectata in circuli circumferentia perpetuo sibi æqualis apparebit.

[1] ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὁμοίως δὲ κἂν ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς ὀρθὰς ἀνασταθῇ εὐθεῖα, ἐπὶ δὲ ταύτης ὄμμα μετατεθῇ, καὶ μετακινεῖται τὸ ὁρώμενον μέγεθος κατὰ τοῦ κύκλου περιφέρειαν παράλληλον ὂν τῇ εὐθείᾳ, ἐφ' ἧς τὸ ὄμμα· ἴσον ἀεὶ τὸ ὁρώμενον ὀφθήσεται.

SCHOLIUM.

Similiter si ex centro ad planum circuli erigatur perpendicularis recta, in qua collocetur oculus; circumferatur autem in peripheria circuli spectata magnitudo, parallela existens rectæ in qua est oculus: spectata magnitudo semper æqualis apparebit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ'.

Ἐὰν δὲ τὸ ὁρώμενον πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μεθιστῆται δὲ τὸ ὄμμα ἐπὶ κύκλου περιφερείας, κέντρον ἔχοντος τὸ σημεῖον

Prop. XLII. Theor.

Si spectata magnitudo recta sit ad subjectum planum; oculus autem vectetur in circumferentia circuli, cujus centrum sit punctum illud in quo

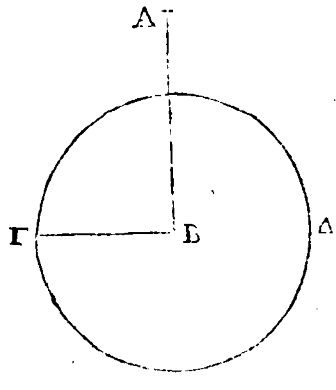
1 Ex MSS. sed eodem redit cum subnexis ipsi propositioni.

erecta

erecta magnitudo tangit planum: spectata magnitudo semper æqualis apparebit.

κατ᾽ ὃ συμβάλλεται τὸ μέγεθος τῷ ἐπιπέδῳ· ἴσον ἀεὶ τὸ ὁρώμενον φανήσεται.

SIT spectata magnitudo A B, quæ & sublimis sit & angulos rectos faciat cum subjecto plano; oculus vero sit Γ; & centro B intervallo autem B Γ describatur circulus Γ Δ: fore assero, ut, si Γ oculus in circumferentia vectetur, ipsa A B magnitudo æqualis perpetuo appareat.



Id autem hinc perspicuum est. omnes enim radii ex puncto Γ ad A B magnitudinem tendentes æquales angulos continent, quia angulus in puncto B rectus est; quare [per 7. posit.] spectata magnitudo sibi ipsi æqualis perpetuo apparebit.

ΕΣτω ὁρώμενον μὲν τὸ A B μετέωρον ὄν, καὶ πρὸς ὀρθὰς πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, ὄμμα δὲ ἔστω τὸ Γ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ B διαστήματι δὲ τῷ B Γ κύκλος γεγράφθω ὁ Γ Δ· λέγω ὅτι ἐὰν τὸ Γ μεθιστῆται ἐπὶ κύκλου περιφερείας, ἴσον ἀεὶ τὸ A B φανήσεται.

Τοῦτο δὲ φανερόν ἐστι. πᾶσαι γὰρ αἱ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου πρὸς τὸ A B προσπίπτουσαι ἀκτῖνες πρὸς ἴσας γωνίας προσπίπτουσιν, ἐπειδήπερ ἡ πρὸς τῷ B ὀρθή ἐστιν· ἴσον ἄρα τὸ ὁρώμενον φανήσεται.

Prop. XLIII. Theor.

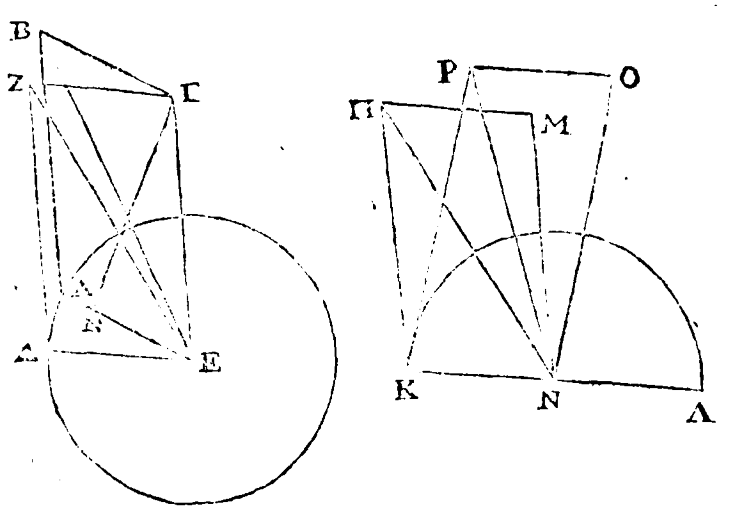
Si oculo posito in centro circuli, magnitudo, quæ ad circuli planum recta non sit, in circuli circumferentia vectetur; semper inæqualis apparebit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ΄.

Ἐὰν δὲ τὸ ὁρώμενον μέγεθος μὴ πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μεθιστῆται [1] δὲ τὸ ὁρώμενον ἐπὶ κύκλου περιφερείας· ἄνισον ἀεὶ ὀφθήσεται.

SIT circulus A Δ, in cujus circumferentia sumatur punctum Δ, à quo sublimis erigatur recta linea Δ Z, quæ ad circuli planum ad angulos rectos non sit; ponaturque oculus in E centro: fore dico, ut, si Δ Z in circuli circumferentia transponatur, nunc major nunc minor appareat.

ΕΣτω κύκλος ὁ A Δ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀνεστάτω μὴ πρὸς ὀρθὰς τῷ κύκλῳ εὐθεῖα ἡ Δ Z, ὄμμα δὲ ἔστω τὸ E· λέγω ὅτι ἡ Δ Z ἐὰν ἐπὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας μεθιστῆται, ποτὲ μὲν μείζων φανήσεται ποτὲ δὲ ἐλάσσων.



Ipsa Δ Z aut major est semidiametro, aut æqualis, aut minor. Sit primo major semidiametro; ducaturque ex E centro recta linea E Γ parallela & æqualis ipsi Δ Z; & à puncto Γ in subjectum planum ducatur perpendicularis Γ N, quæ plano occurrat in puncto N; connectaturque recta E N, quæ producatur & circumferentiæ occurrat in puncto A; & ex

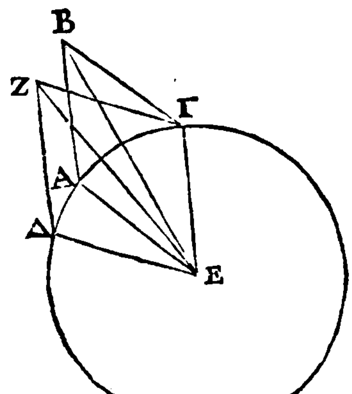
Ἤτοι δὲ ἡ Δ Z μείζων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἢ ἴση, ἢ ἐλάσσων. Ἔστω πρότερον μείζων, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ E κέντρου τῇ Δ Z παράλληλος ἡ E Γ, καὶ ἔστω ἴση τῇ Δ Z ἡ E Γ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἡ Γ N, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ N σημεῖον, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ E N ἐκβεβλήσθω καὶ συμβαλλέτω τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὸ A, καὶ

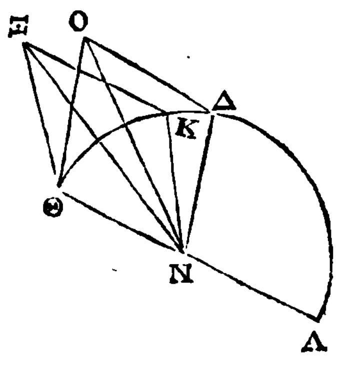
1 Sc. sibi semper παραλλήλως, quod necessario fit cum alius nullus adest motus. *Savil.*

ἤχθω

ἤχθω διὰ τοῦ Α τῇ ΕΓ παράλληλος ἡ ΑΒ, καὶ ἔστω ἡ ΑΒ τῇ ΔΖ ἴση· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ πασῶν τῶν ἐπὶ τοῦ κύκλου περιφερείας μεθισταμένων εὐθειῶν ἐλάσσων φαίνεται. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΓΖ, ΕΖ, ΒΓ, ΕΒ. ἔχομεν δὲ ἐν τῷ παρακειμένῳ τῷ ἑβδόμῳ καὶ τριακοστῷ θεωρήματι, ὅτι πασῶν τῶν διὰ τοῦ Ε σημείου ἀγομένων εὐθειῶν, καὶ ποιουσῶν πρὸς τῇ ΕΓ γωνίας, ἐλαχίστη ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΕΑ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΓΕ τῇ ΑΒ παράλληλός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ἴση· καὶ ἡ ΕΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστι· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμόν ἐστι. καὶ ἐπεὶ δεῖ δεῖξαι ὅτι ἔλασσον φαίνεται τὸ ΑΒ τοῦ ΔΖ, δῆλον ὅτι πρότερον δεῖ δεῖξαι ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΕΑ γωνία ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΖΕΔ γωνίας. ἐπεὶ οὖν δέδεικται ὅτι πασῶν τῶν διὰ τοῦ Ε σημείου διαγομένων εὐθειῶν καὶ ποιουσῶν πρὸς τῇ ΓΕ γωνίας, ἐλαχίστη ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΕΑ· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶ καὶ τῆς ὑπὸ ΓΕΔ ἡ ὑπὸ ΓΕΑ. ἐκκείσθω δὴ τῷ τοῦ κύκλου ΑΔ ἡμικυκλίῳ ἴσον τὸ ΚΑΛ, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον τὸ Ν, καὶ κείσθω τῇ ὑπὸ ΓΕΑ ἴση γωνία ἡ ὑπὸ ΚΝΜ, τῇ δὲ ὑπὸ ΓΕΔ ἴση ἡ ὑπὸ ΚΝΟ, καὶ κείσθω τῇ ΔΖ ἑκατέρα τῶν ΜΝ, ΟΝ ἴση, καὶ διὰ μὲν τοῦ Μ τῇ ΚΝ ἴση καὶ παράλληλος ἤχθω ἡ ΜΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΠΚ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΝΠ, [1] καὶ ἔστιν ἴσον καὶ ὅμοιον τῷ ΒΕ. πάλιν διὰ τοῦ Ο τῇ ΚΝ ἴση καὶ παράλληλος ἤχθω ἡ ΟΡ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΡΚ· τὸ ΡΝ ἄρα παραλληλόγραμμον ἴσον τε καὶ ὅμοιόν ἐστι τῷ ΖΕ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ διαγώνιοι αἱ ΡΝ, ΠΝ· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΚΝΠ γωνία τῆς ὑπὸ ΚΝΡ γωνίας ἐλάσσων ἐστί. [2] καὶ ἔστι ἡ μὲν ὑπὸ ΚΝΠ ἴση τῇ ὑπὸ ΑΕΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΚΝΡ ἴση τῇ ὑπὸ ΔΕΖ· ἐλάσσων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΒ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ· ὥστε καὶ τὸ ΑΒ μέγεθος τοῦ ΔΖ μεγέθους ἔλασσον ὀφθήσεται.

[3] Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἡ ΒΑ τῆς ΖΔ ἐλάσσων [4] ἐστί, τῆς ΖΔ ἴσης τε καὶ ἐλάσσονος τῆς ἐκ τοῦ κέντρου





ὑπαρχούσης. Ἀλλὰ δὴ ἔστω ΔΖ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση, καὶ κατασκευάσθωσαν πάντα τὰ αὐτὰ τοῖς πρό-

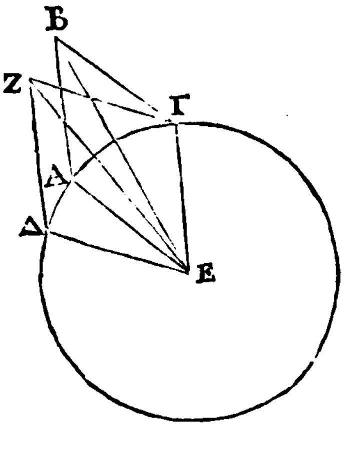
A puncto ducatur AB parallela ipsi EΓ; sit autem AB æqualis ipsi ΔZ: dico omnium rectarum linearum in circuli circumferentia circumlatarum minimam apparere ipsam AB. connectantur enim rectæ ΓZ, EZ, BΓ, EB. habemus jam ostensum in subnexis theoremati tricesimo septimo, omnium linearum trajectarum per punctum E & angulos facientium cum linea EΓ, lineas ΓE, & EA minimum angulum continere, qui est ΓEA. cum ergo ΓE parallela sit & æqualis ipsi AB: igitur [per 33. 1.] EA ipsi ΓB æqualis & parallela est; parallelogrammum ergo est EB; eademque ratione parallelogrammum etiam est ZE. quia vero demonstrandum est AB minorem apparere quam ΔZ, non dubium est quin prius demonstrandum sit angulum BEA minorem esse angulo ZEΔ, [quod hoc modo fiet.] cum enim demonstratum sit [in subnexis ad 37. opt.] omnium linearum trajectarum per punctum E & facientium angulos cum linea ΓE, lineas ΓE, EA omnium minimum angulum continere nempe ΓEA: ergo angulus ΓEA minor est angulo ΓEΔ. ponatur jam KAΛ segmentum æquale semicirculo circuli AΔ, sumaturq; ejus centrum N; & ponatur angulus KNM æqualis angulo ΓEA; angulus autem KNO angulo ΓEΔ; sitque utraque ipsarum MN, ON æqualis ipsi ΔZ; & per punctum M ducatur recta MΠ æqualis & parallela ipsi KN, connectaturque recta ΠK: parallelogrammum ergo est NΠ æquale & simile ipsi BE parallelogrammo. rursus, per punctum O ducatur recta OP æqualis & parallela ipsi KN, connectaturque recta PK: igitur parallelogrammum PN æquale & simile est parallelogrammo ZE. ducantur diametri PN, ΠN: ergo angulus KNΠ minor est angulo KNP. est autem angulus KNΠ æqualis angulo AEB; angulus autem KNP æqualis angulo ΔEZ: minor ergo est angulus AEB angulo ΔEZ: quare [per 6. posit.] magnitudo AB apparebit minor magnitudine ΔZ.

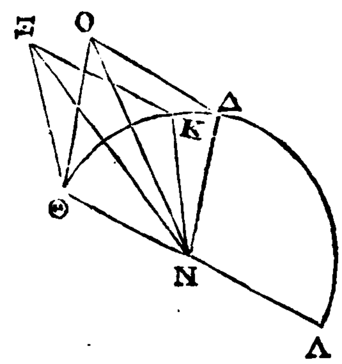
Eodem modo ostendemus BA minorem esse quam ZΔ, si ipsa ZΔ ponatur æqualis vel minor semidiametro. Enimvero sit ΔZ æqualis semidiametro, construanturque reliqua omnia ut in

1 Habet enim δύο ἀπεναντίον KN, NM δυσὶ AE, EΓ æqualeis, & angulum KNM æqualem angulo AEΓ. *Savil.*
2 Nam ΠK, KN æquales BA, AE, & anguli quoque comprehensi: ergo per quartam primi. *Idem.* 3 Sed totum hoc est ex Scholio, aut, quod magis credo, cætera omnia ex hac demonstratione. *Idem.* 4 Lege ὀφθήσεται. *Idem.*

præcedentibus factum est, ponatur item semicirculus Θ Δ Λ qui æqualis sit semicirculo circuli Α Δ, sumaturque centrum ejus quod sit Ν. quia ergo Δ Ζ æqualis posita est semidiametro circuli; igitur Δ Ζ æqualis est ipsi Θ Ν. ponatur angulus Θ Ν Κ æqualis angulo Γ Ε Α, ducaturque Κ Ξ parallela [& æqualis] ipsi Θ Ν, connectaturque recta Ξ Θ, ponatur etiam

τερον, καὶ κείσθω τῷ τοῦ κύκλου Α Δ ἡμικυκλίῳ ἴσον ἡμικύκλιον τὸ Θ Δ Λ, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ κέντρον τὸ Ν. καὶ ἐπεὶ ἡ Δ Ζ ἴση ὑπόκειται τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Δ Ζ τῇ Θ Ν. καὶ κείσθω τῇ μὲν ὑπὸ τῶν Γ Ε Α γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ τῶν Θ Ν Κ, καὶ ἤχθω τῇ Θ Ν παράλληλος ἡ Κ Ξ, καὶ τῇ Θ Ν ἀφῃρήσθω ἴση ἡ Κ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Ξ Θ, τῇ



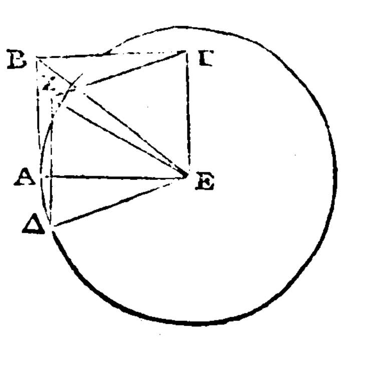


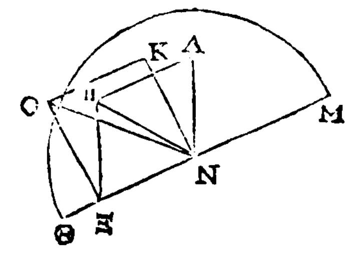
angulus Θ Ν Δ æqualis angulo Γ Ε Δ, ducatur autem Δ Ο [æqualis &] parallela ipsi Θ Ν, ducaturque recta Ο Θ: parallelogramma ergo sunt Θ Δ, Θ Κ similia æqualiaque parallelogrammis Ε Ζ, Ε Β; quare angulus quidem Θ Ν Δ æqualis est Γ Ε Δ angulo; angulus autem Θ Ν Κ æqualis est angulo Γ Ε Α. minor autem est angulus Γ Ε Α angulo Γ Ε Δ: minor est igitur Θ Ν Κ angulus angulo Θ Ν Δ. connectantur parallelogrammorum diametri Ξ Ν, Ο Ν: minor igitur est Θ Ν Ξ angulus angulo Θ Ν Ο. æqualis autem est angulus quidem Θ Ν Ξ angulo Α Ε Β, angulus vero Θ Ν Ο angulo Δ Ε Ζ; minor igitur est Α Ε Β angulus angulo Δ Ε Ζ; quare magnitudo Α Β apparebit minor magnitudine Δ Ζ. quod erat demonstrandum.

Sed enim sit Δ Ζ minor semidiametro circuli, reliqua vero construantur ut antea, ponaturque

δὲ ὑπὸ τῶν Γ Ε Δ ἴση κείσθω ἡ ὑπὸ τῶν Θ Ν Δ, καὶ τῇ Θ Ν παράλληλος ἤχθω ἡ Δ Ο, καὶ ἴση τῇ Θ Ν ἀφῃρήσθω ἡ Δ Ο, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Ο Θ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν Θ Δ, Θ Κ, καὶ ἐστὶν ἴσα τε καὶ ὅμοια τοῖς Ε Ζ, Ε Β· ὥστε καὶ ἡ μὲν ὑπὸ Θ Ν Δ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ Γ Ε Δ, ἡ δὲ ὑπὸ Θ Ν Κ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ Γ Ε Α. ἐλάσσων δέ ἐστιν ἡ ὑπὸ Γ Ε Α τῆς ὑπὸ Γ Ε Δ· ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ Θ Ν Κ τῆς Θ Ν Δ. καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ διαγώνιοι αἱ Ξ Ν, Ο Ν· ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ Θ Ν Ξ τῆς ὑπὸ Θ Ν Ο. ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ Θ Ν Ξ τῇ ὑπὸ Α Ε Β, ἡ δὲ ὑπὸ Θ Ν Ο τῇ ὑπὸ Δ Ε Ζ· ἐλάσσων ἄρα καὶ ὑπὸ Α Ε Β τῆς ὑπὸ Δ Ε Ζ· ἔλασσον ἄρα ὀφθήσεται τὸ Α Β μέγεθος τοῦ Δ Ζ μεγέθους. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἡ Δ Ζ ἐλάσσων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, καὶ κατασκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον,





Θ Μ æqualis semicirculo circuli Α Δ, sumaturque circuli centrum Ν, & ex Θ Ν secetur Ν Ξ æqualis ipsi Δ Ζ, constituaturque angulus Θ Ν Κ æqualis angulo Γ Ε Α, angulus autem Θ Ν Λ æqualis angulo Γ Ε Δ, sitque utraque ipsarum Ν Κ, Ν Λ sigillatim æqualis ipsi Δ Ζ, & per punctum Κ ducatur Κ Ο parallela & æqualis ipsi Ν Ξ, connectaturque Ο Ξ, per punctum autem Λ ducatur

καὶ κείσθω τοῦ κύκλου Α Δ ἡμικυκλίῳ ἴσον τὸ Θ Μ, καὶ λήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ν, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς Θ Ν τῇ Δ Ζ ἴση ἡ Ν Ξ, καὶ κείσθω τῇ μὲν ὑπὸ Γ Ε Α γωνίᾳ ἴση ἡ Θ Ν Κ, τῇ δὲ ὑπὸ Γ Ε Δ ἴση ἡ ὑπὸ Θ Ν Λ, καὶ ἔστω ἴση ἑκατέρα τῶν Ν Κ, Ν Λ τῇ Δ Ζ, καὶ ἤχθω διὰ μὲν τοῦ Κ τῇ Ν Ξ ἴση καὶ παράλληλος ἡ Κ Ο, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Ο Ξ, διὰ δὲ τοῦ Λ τῇ

Ξ Ν

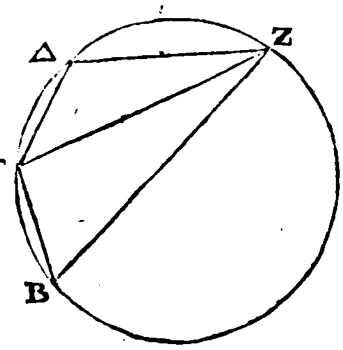
ΞΝ παράλληλος ἡ ΑΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΠΞ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΚΞ, ΞΛ. [1] καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΚΞ τῷ ΕΒ ἴσον τε καὶ ὅμοιον, τὸ δὲ ΞΛ τῷ ΕΖ· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΘΝΚ ἴση τῇ ὑπὸ ΓΕΑ, ἡ δὲ ὑπὸ ΘΝΛ τῇ ὑπὸ ΓΕΔ. μείζων δὲ ἡ ὑπὸ ΓΕΔ τῆς ὑπὸ ΓΕΑ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΘΝΛ τῆς ὑπὸ ΘΝΚ. ἐπεζεύχθωσαν ΝΟ, ΝΠ· καὶ ἡ ὑπὸ ΞΝΟ ἄρα τῆς ὑπὸ ΞΝΠ ἐλάσσων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΞΝΟ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΞΝΠ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ· ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΒ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ. καὶ βλέπεται ὑπὸ μὲν τῆς ΑΕΒ τὸ ΑΒ μέγεθος, ὑπὸ δὲ τῆς ΔΕΖ τὸ ΔΖ· ἔλασσον ἄρα ὀφθήσεται τὸ ΑΒ μέγεθος τοῦ ΔΖ μεγέθους. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΠ parallela ipsi ΞΝ, & connectatur recta ΠΞ: duo igitur parallelogramma sunt ΚΞ, ΞΛ, quorum ΚΞ quidem æquale ac simile est ipsi ΕΒ paparallelogrammo, ipsum autem ΞΛ parallelogrammum æquale item & simile est parallelogrammo ΕΖ; quare angulus ΘΝΚ æqualis est angulo ΓΕΑ, angulus autem ΘΝΛ æqualis est angulo ΓΕΔ. major autem est ΓΕΔ angulo ΓΕΑ: major itaque ΘΝΛ angulus angulo ΘΝΚ. connectantur parallelogrammorum diametri ΝΟ, ΝΠ: igitur angulus ΞΝΟ minor est angulo ΞΝΠ. est autem angulus quidem ΞΝΟ æqualis angulo ΑΕΒ, angulus autem ΞΝΠ æqualis angulo ΔΕΖ: minor ergo est angulus ΑΕΒ angulo ΔΕΖ. cernitur autem magnitudo quidem ΑΒ sub angulo ΑΕΒ, magnitudo vero ΔΖ sub angulo ΔΕΖ: minor itaque apparebit magnitudo ΑΒ magnitudine ΔΖ. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδʹ.

Ἔστι τις τόπος, οὗ, τοῦ ὄμματος μένοντος, τοῦ δὲ ὁρωμένου μεθισταμένου, ἴσον ἀεὶ τὸ ὁρώμενον φαίνεται.

Ἔστω γὰρ ὁρώμενον μέγεθος τὸ ΒΓ, ὄμμα δὲ τὸ Ζ, ἀφ' οὗ προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΖΒ, ΖΓ, καὶ περιειλήφθω τὸ ΖΒΓ τρίγωνον κύκλῳ τῷ ΔΒΖ· λέγω ὅτι τὸ ΒΓ, μεθιστάμενον ἐπὶ τῆς τοῦ γραφέντος κύκλου περιφερείας, ἴσον ἀεὶ ὀφθήσεται.



Μετακείσθω γὰρ τὸ ΒΓ ἐπὶ τοῦ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΖ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ περιφέρεια τῇ ΓΔ περιφερείᾳ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΓΖΒ γωνία τῇ ΓΖΔ γωνίᾳ. τὰ δὲ ὑπὸ ἴσων γωνιῶν ὁρώμενα ἴσα φαίνεται· ἴσον ἄρα φαίνεται τὸ ΒΓ τῷ ΓΔ.

Prop. XLIV. Theor.

Est aliquis locus, ubi, manente oculo, res spectata, à loco in locum delata, æqualis semper apparet.

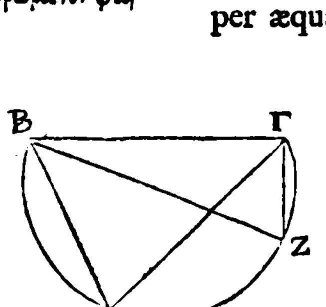
SIT spectata magnitudo ΒΓ, oculus autem Ζ, à quo procedant radii ΖΒ, ΖΓ, efficientes triangulum ΖΒΓ, circa quem [per 5. 4.] describatur circulus ΔΒΖ: dico magnitudinem ΒΓ translatam in quemlibet locum circumferentiæ circuli, ejusdem quantitatis semper apparere.

Transferatur enim ΒΓ magnitudo in ΓΔ, & connectatur recta ΔΖ. æqualis igitur est [per 28.3.] circumferentia ΒΓ circumferentiæ ΓΔ; ideoque [per 27.3.] æqualis est angulus ΓΖΒ angulo ΓΖΔ. quæ autem sub æqualibus angulis cernuntur [per 7. posit.] æqualia apparent: æqualis ergo apparet ΒΓ ipsi ΓΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μεʹ.

Ἔστι τις τόπος, οὗ, τοῦ ὄμματος μεθισταμένου, τοῦ δὲ ὁρωμένου μένοντος, ἀεὶ ἴσον τὸ ὁρώμενον φαίνεται.

Ἔστω γὰρ ὁρώμενον μὲν τὸ ΒΓ, ὄμμα δὲ τὸ Ζ, ἀφ' οὗ προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΖΒ, ΖΓ, καὶ περιειλήφθω τὸ ΒΖΓ τρίγωνον τμήματι κύκλου τῷ ΒΔΖΓ, καὶ μετακείσθω τὸ Ζ ὄμμα ἐπὶ τὸ Δ, καὶ προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΔΒ, ΔΓ· ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ΒΔΓ γωνία τῇ ΒΖΓ, ἐν τῷ αὐτῷ γὰρ τμήματί εἰσι. τὰ δὲ ὑπὸ ἴσων γωνιῶν ὁρώμενα ἴσα φαίνεται· ἴσον ἄρα τὸ ΒΓ διὰ παντὸς φαίνεται, μεθισταμένου τοῦ ὄμματος ἐπὶ τῆς ΒΔΓ περιφερείας.



Prop. XLV. Theor.

Est aliquis locus, ubi, aspectabili manente, oculo vero translato, aspectabile semper æquale apparet.

SIT enim spectata magnitudo ΒΓ, oculus autem Ζ, à quo procedant radii ΖΒ, ΖΓ; & circa triangulum ΒΖΓ describatur [per 5.4.] circuli segmentum ΒΔΖΓ, transferaturque oculus à puncto Ζ in punctum Δ, ex quo ducantur radii ΔΒ, ΔΓ: æqualis igitur est [per 21.3.] angulus ΒΔΓ angulo ΒΖΓ, cum sint in eodem segmento circuli. quæ autem sub æqualibus angulis conspiciuntur [per 7. posit.] æqualia apparent: quare magnitudo ΒΓ ejusdem quantitatis perpetuo apparebit, oculo per ΒΔΓ circumferentiam vectato.

1 Quomodo erunt parallelogramma ΚΞ, ΛΞ τοῖς ΒΕ, ΖΕ ἴσα καὶ ὅμοια; cum tamen ΞΝ minor sit facta quam ΑΒ & ΝΚ æqualis τῇ ΔΖ vel ΒΑ. *Savil.*

Prop.

PROP. XLVI. THEOR.

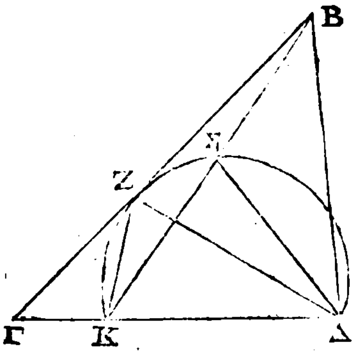
Est aliquis locus, ad quem si oculus transferatur, rem aspectabilem immotam, nunc majorem, nunc minorem existimabit.

SIT spectata magnitudo ΚΔ, recta vero linea ΒΓ, quæ concurrat cum recta ΚΔ producta ad punctum Γ, & [per 13. 6.] sumatur inter ipsas ΔΓ, ΓΚ media proportionalis ΓΖ, & connectantur rectæ ΖΚ, ΖΔ; deinde [per 33. 3.] circa datam rectam lineam ΚΔ describatur segmentum circuli, quod capiat angulum ΚΖΔ: igitur [per 37. 3. & 16. 6.] recta ΒΖΓ tanget segmenti circumferentiam, cum ΔΓ se habeat ad ΓΖ ut ΓΖ ad ΓΚ. ponatur ergo oculus in puncto Β, à quo ducantur radii ΒΔ, ΒΚ, & connectatur recta ΣΔ: æqualis igitur est [per 21. 3.] angulus ΚΖΔ angulo ΚΣΔ; sunt enim in eodem segmento. est autem [per 16. 1.] angulus ΚΣΔ major angulo ΚΒΔ: quare angulus etiam ΚΖΔ angulo ΚΒΔ major est: oculo igitur spectanti è puncto Ζ [per 5. posit.] major apparebit magnitudo ΚΔ quam ex puncto Β.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μϛʹ.

Ἔστι τὶς τόπος, οὗ, τοῦ ὄμματος μεθισταμένου, τοῦ δὲ ὁρωμένου μένοντος, ἄνισον τὸ ὁρώμενον φαίνεται.

Ἔστω γὰρ ὁρώμενον τὸ ΚΔ, εὐθεῖα δὲ ἡ ΒΓ συμπίπτουσα τῇ ΚΔ προσεκβαλλομένῃ, καὶ εἰλήφθω τῆς ΔΓ καὶ τῆς ΓΚ μέση ἀνάλογον ἡ ΓΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΚ καὶ ΖΔ, περὶ δὲ τὴν ΚΔ τμῆμα γεγράφθω [1] ὀξεῖαν ἔχον τὴν ΚΖΔ γωνίαν· ἐφάψεται δὴ τῆς ΒΓ εὐθείας, ἐπείπερ ἐστὶν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΓΚ. κείσθω οὖν τὸ ὄμμα ἐπὶ τοῦ Β σημείου, καὶ προσεκβεβλήσθωσαν αἱ ΒΔ, ΒΚ, ἐπεζεύχθω δὲ ἡ ΣΔ· οὐκοῦν ἴση ἐστὶν ἡ ΚΖΔ γωνία τῇ ΚΣΔ γωνίᾳ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματί εἰσι. καὶ ἔστιν ἡ ΚΣΔ τῆς ΚΒΔ γωνίας μείζων· καὶ ἡ ΚΖΔ ἄρα γωνία τῆς ΚΒΔ μείζων ἐστί· τοῦ ἄρα ὄμματος ἐπὶ τοῦ Ζ ὄντος, μεῖζον φαίνεται τὸ ΚΔ ἤπερ ἐπὶ τοῦ Β.



PROP. XLVII. THEOR.

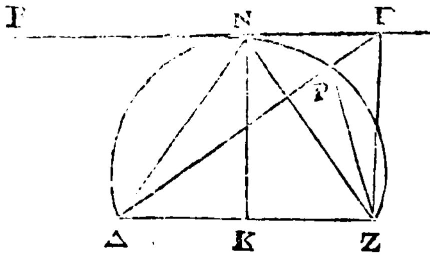
Idem accidet si linea, per quam transit oculus, parallela sit spectatæ magnitudini.

SIT enim ΒΓ linea parallela spectatæ magnitudini ΔΖ, secetur autem bifariam ipsa ΔΖ in puncto Κ, à quo excitetur ΚΝ, ponatur autem oculus ad Ν, & connectantur rectæ ΝΔ, ΝΖ, circa autem rectam ΔΖ [per 33. 3.] describatur segmentum circuli capiens angulum ΔΝΖ. quia ergo linea ΚΝ est diameter ejus circuli, cujus segmentum est ΔΝΖ, ab extremitate vero ipsius ΚΝ, nempe à puncto Ν, ducta est recta ΒΓ ad angulos rectos ipsi ΚΝ; igitur [per 16. 3.] ipsa ΒΓ tangit circumferentiam ipsius segmenti ΔΝΖ. transferatur vero oculus in punctum Γ, à quo procedant radii ΓΖ, ΓΔ, & connectatur recta ΡΖ. æqualis igitur est [per 21. 3.] angulus ΔΝΖ angulo ΔΡΖ. angulus autem ΔΡΖ [per 16. 1.] major est angulo ΔΓΖ: major igitur est angulus ΔΝΖ angulo ΔΓΖ. quæ autem sub majore angulo spectantur [per 5. posit.] majora apparent: major igitur apparebit ipsa ΔΖ magnitudo, oculo collocato in puncto Ν, quam in puncto Γ. oculo

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζʹ.

Τὸ δὲ αὐτὸ συμβήσεται, κἂν παράλληλος ἡ γραμμὴ τῷ ὁρωμένῳ μεγέθει, ἐφ' ἧς τὸ ὄμμα μεθίσταται.

Ἔστω γὰρ παράλληλος ἡ ΒΓ τῷ ὁρωμένῳ τῷ ΔΖ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ ΔΖ κατὰ τὸ Κ, πρὸς ὀρθὰς δὲ ἀνήχθω ἡ ΚΝ, κείσθω οὖν τὸ ὄμμα ἐπὶ τοῦ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΔ, ΝΖ, περὶ δὲ τὴν ΔΖ τμῆμα γεγράφθω, ὃ δέξεται τὴν ΔΝΖ γωνίαν. ἐπεὶ οὖν διάμετρός ἐστιν ἡ ΚΝ [2], καὶ πρὸς ὀρθὰς ἀπὸ ἄκρας ἦκται ἡ ΚΝ [3] τῇ ΒΓ· ἡ ΒΓ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΔΝΖ τμήματος. μετακείσθω δὴ τὸ ὄμμα ἐπὶ τοῦ Γ, καὶ [4] ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΓΖ, ΓΔ, ἐπεζεύχθω δὲ ἡ ΡΖ. οὐκοῦν ἴση ἡ ΔΝΖ γωνία τῇ ΔΡΖ γωνίᾳ. ἡ δὲ ΔΡΖ τῆς ΔΓΖ γωνίας μείζων ἐστί· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΔΝΖ τῆς ΔΓΖ. τὰ δὲ ὑπὸ μείζονος γωνίας ὁρώμενα μείζονα φαίνεται· μεῖζον ἄρα φαίνεται τὸ ΔΖ, τοῦ ὄμματος ἐπὶ τοῦ Ν κειμένου, ἤπερ ἐπὶ τοῦ Γ. τοῦ



1 Et quid ita ὀξεῖαν? atqui nec ΚΖΔ est necessario ὀξεῖα, neque anguli quantitas ad conficiendum problema quicquam conducit, & abest in sequente. *Savil.* 2 Quia sc. τὴν ΔΖ δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει. *Idem.* 3 Malim τῇ ΚΝ ἡ ΒΓ. *Idem.* 4 Hoc verbum in hac quidem re suspectum; & tamen sic utitur in præcedente, τοῦ προσεκβεβλήσθωσαν, nisi forte radiorum ἐκβολὴν intelligat. *Idem.*

ἄρα

ἄρα ὄμματος ἐπὶ τῆς ΒΓ μεθισταμένου, παραλλήλου οὔσης τῇ ΔΖ, ἄνισον φαίνεται τὸ ὁρώμενον.

igitur, discurrenti per ΒΓ, parallelam ΔΖ, ipsa ΔΖ nunc major nunc minor apparebit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μη'.

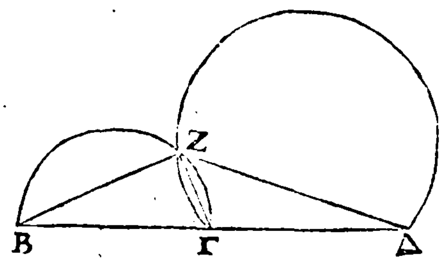
Ἔστι τὶς τόπος κοινὸς, ἐν ᾧ τὰ ἴσα μεγέθη ἄνισα φαίνεται.

Ἔστω γὰρ ἴση ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ, καὶ περὶ μὲν τὴν ΒΓ ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ ΒΖΓ, περὶ δὲ τὴν ΓΔ τμῆμα μεῖζον [1] ἡμικυκλίου, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ· οὐκοῦν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ἐν τῷ μείζονι τμήματι. τὰ δὲ ὑπὸ μείζονος γωνίας ὁρώμενα, μείζονα φαίνεται· τῷ ἄρα ὄμματι τεθειμένῳ ἐπὶ τοῦ Ζ μείζων ἂν φαίνοιτο ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ. ἦν δὲ καὶ ἴση.

Ἔστιν ἄρα τόπος κοινὸς, ἐν ᾧ τὰ ἴσα μεγέθη ἄνισα φαίνεται.

PROP. XLVIII. THEOR.

Est aliquis locus communis, unde æquales magnitudines inæquales apparent.



SIT enim ΒΓ magnitudo æqualis ipsi ΓΔ, & circa ipsam ΒΓ describatur semicirculus ΒΖΓ, circa autem ipsam ΓΔ describatur segmentum ΓΖΔ quod sit majus semicirculo, connectanturque rectæ ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ; ergo [per 31.3.] angulus ΓΖΒ in semicirculo positus major est angulo ΓΖΔ qui est in majori segmento. quæ autem sub majori angulo spectantur [per 5. posit.] majora apparent: quare oculo collocato in puncto Ζ, major apparet ΒΓ quam ΓΔ. atqui positæ sunt æquales.

Est ergo aliquis locus communis, unde spectatæ æquales magnitudines inæquales apparent.

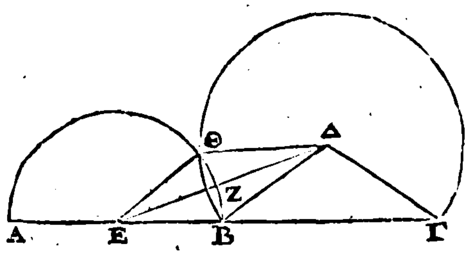
[2] ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὅτι δὲ δύναται τέμνεσθαι τὸ ἡμικύκλιον ὑπὸ τοῦ μείζονος τμήματος καὶ ποῦ, οὕτως εἴη δῆλον.

Ἔστωσαν ἴσαι ΑΒ, ΒΓ, περιγεγράφθω ἡμικύκλιον περὶ τὰ Α, Β, ΑΘΒ. καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΓ, καὶ τῷ Β σημείῳ, γωνία ὀξεῖα ἡ ὑπὸ ΓΒΔ, πρὸς δὲ τῷ Γ ἴση ἡ ΒΓΔ, καὶ συμπιπτέτω κατὰ τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ κέντρον τοῦ ΑΘΒ, ὅ ἐστι τὸ Ε, ἐπιζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ κείσθω τῇ ΒΖ περιφερείᾳ ἴση ἡ ΖΘ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν ΔΘ, ΘΕ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΘΕ τῇ ΕΒ ἴση, κοινὴ δὲ ἡ ΕΔ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν. ἐπεὶ καὶ ἡ ΘΖ περιφέρεια τῇ ΖΒ ἐστιν ἴση· ἴση ἄρα ἡ ΘΔ τῇ ΔΒ. ἡ δὲ ΔΒ τῇ ΔΓ· ὥστε ὁ κέντρῳ Δ διαστήματι δὲ τῷ ΔΘ γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὸ ἡμικύκλιον, καὶ διὰ τοῦ Β καὶ Γ ἐλεύσεται.

SCHOLIUM.

Quod vero semicirculus secet segmentum semicirculo majus, & ubinam illud secet, sic patebit.



Sint rectæ ΑΒ, ΒΓ æquales sibi invicem, circumscribatur semicirculus circa Α, Β puncta, sc. ipse ΑΘΒ; & constituatur ad rectam ΒΓ, punctumque in ipsa Β, angulus acutus ΓΒΔ, & huic ad Δ æqualis angulus ΒΓΔ, & concurrant in Δ puncto, & à puncto Δ ad centrum circuli ΑΘΒ, sc. punctum Ε, jungatur ΔΕ, & arcui ΒΖ ponatur æqualis arcus ΖΘ, & jungantur ΔΘ, ΘΕ. quoniam igitur recta ΘΕ æqualis est ipsi ΕΒ, recta vero ΕΔ communis, & [per 27.3.] æquales continent angulos, quia arcus ΘΖ arcui ΖΒ est æqualis: ergo [per 4. 1.] ΘΔ æqualis est ΔΒ. sed [per 6.1.] ΔΒ æqualis ΔΓ. & ideo circulus centro Δ distantia ΔΘ descriptus intersecat semicirculum, & per puncta Β & Γ transit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μθ'.

Ἔστι τὶς τόπος κοινὸς, ἀφ' οὗ ἄνισα μεγέθη ἴσα φαίνεται.

Ἔστω γὰρ μείζων ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ, καὶ περὶ μὲν τὴν ΒΓ μεῖζον ἡμικυκλίου [3] τμῆμα γεγράφθω, περὶ δὲ τὴν ΓΔ ὅμοιον τῷ περὶ τὴν ΒΖΓ,

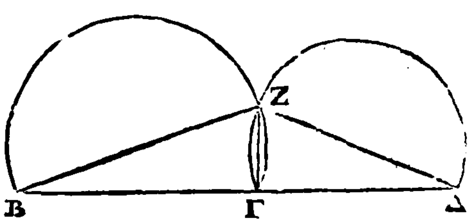
PROP. XLIX. THEOR.

Est aliquis locus communis, unde inæquales magnitudines æquales apparent.

SIT enim ΒΓ major quam ΓΔ, & circa ΒΓ describatur circuli segmentum quod sit majus semicirculo, & circa ΓΔ describatur [per 33.3.] circuli segmentum simile ipsi ΒΖΓ,

1 Nam si τμῆμα sit minus ἡμικυκλίου, nunquam se intersecabunt τὰ τμήματα, & sic in sequentibus. *Savil.* 2 Reperitur in MS. *Saviliano.* 3 Ut sc. fiat intersectio. *Savil.*

id est, quod angulum comprehendat, æqualem angulo ΒΖΓ; connectantur autem rectæ ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ. cum igitur [per 11. def. 3.] anguli, qui sunt in similibus segmentis, sint inter se æquales: æquales ergo sunt inter se anguli in similibus segmentis ΒΖΓ, ΓΖΔ descripti. quæ autem sub æqualibus angulis cernuntur [per 7. posit.] æqualia apparent: quare, oculo collocato in puncto Ζ, æqualis apparet magnitudo ΒΓ ipsi ΓΔ; est autem major.



Igitur locus aliquis communis, unde spectatæ inæquales magnitudines æquales apparent.

τοῦτ' ἔςι δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ ἐν τῷ ΒΖΓ, ἐπιζεύχϑωσαν δὲ αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ. ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐν τοῖς ὁμοίοις τμήμασι γωνίαι ἀλλήλαις, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐν τοῖς ΒΖΓ, ΓΖΔ τμήμασι γωνίαι ἀλλήλαις. τὰ δὲ ὑπὸ ἴσων γωνιῶν ὁρώμενα ἴσα φαίνεται· τοῦ ἄρα ὄμματος τεϑέντος ἐπὶ τοῦ Ζ σημείου, ἴση ἂν φαίνοιτο ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ· ἔςι δὲ μείζων.

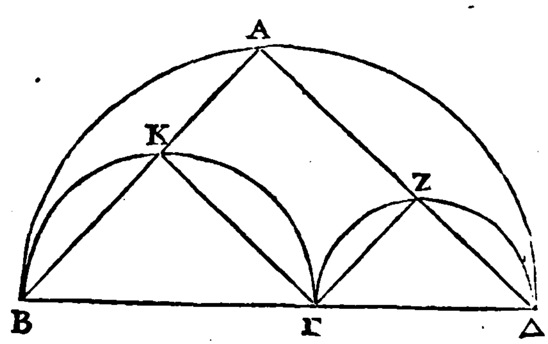
Ἔςι τις ἄρα τόπος κοινός, ἀφ' οὗ τὰ ἄνισα μεγέϑη ἴσα φαίνεται.

Prop. L. Theor.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ν'.

Sunt quædam loca, è quibus spectata una magnitudo, ex duabus inæqualibus inter se additis composita, utrique inæqualium æqualis apparet.

Sint duæ magnitudines inæquales, major quidem ΒΓ, minor vero ΓΔ; & circa ΒΓ, ΓΔ describantur semicirculi & etiam circa totam ΒΔ. angulus igitur qui est in ΒΑΔ semicirculo æqualis est angulo qui est in ΒΚΓ; uterque enim [per 31.3.] rectus est: æqualis ergo apparet ΒΓ ipsi ΒΔ. similiter & ΒΔ ipsi ΓΔ æqualis apparet, oculis positis in semicirculis ΒΑΔ, ΒΚΓ, ΓΖΔ.



Sunt ergo loca quædam, unde spectata una magnitudo, è duabus inæqualibus inter se additis composita, utrique inæqualium apparet æqualis.

Εἰσί τινες τόποι, ἐν οἷς τὰ ἄνισα μεγέϑη δύο, εἰς ταυτὸ συντεϑέντα, ἴσα ἑκατέρῳ τῶν ἀνίσων φαίνεται.

Ἔστω γὰρ μείζων ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ, καὶ περὶ τὰς ΒΓ, ΓΔ ἡμικύκλια γεγράφϑω, καὶ [1] περὶ ὅλην τὴν ΒΔ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ἐν τῷ ΒΑΔ ἡμικυκλίῳ γωνία τῇ ἐν τῷ ΒΚΓ, ὀρϑὴ γάρ ἐστιν ἑκατέρα αὐτῶν· ἴση ἄρα φαίνεται ἡ ΒΓ τῇ ΒΔ. ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ ΒΔ τῇ ΓΔ, τῶν ὀμμάτων ἐπὶ τῶν ΒΑΔ, ΒΚΓ, ΓΖΔ ἡμικυκλίων κειμένων.

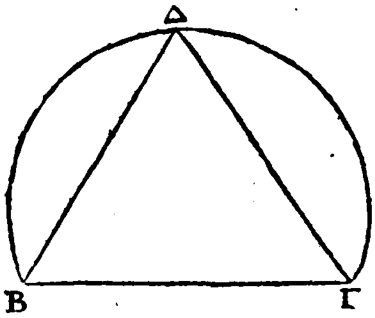
Εἰσί τινες ἄρα τόποι, ἐν οἷς τὰ ἄνισα μεγέϑη δύο, εἰς ταυτὸ συντεϑέντα, ἴσα ἑκατέρῳ τῶν ἀνίσων φαίνεται.

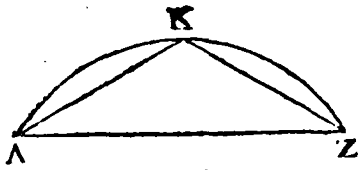
Prop. LI. Probl.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ να'.

Invenire loca, ex quibus eadem magnitudo appareat dimidio aut quarta parte minor, & omnino in data ratione secundum quam secatur angulus.

Sit enim recta linea ΑΖ, & circa ΑΖ describatur pro arbitrio segmentum circuli, in quo





inscribatur angulus Κ; ipsi autem ΑΖ æqualis sit ΒΓ, & circa ΒΓ [per 33.3.] describatur

Εὑρεῖν τόπους, ἀφ' ὧν τὸ ἴσον μέγεϑος ἥμισυ φαίνεται, ἢ τέταρτον μέρος, καὶ καϑόλου ἐν τῷ δοϑέντι λόγῳ, ἐν ᾧ καὶ ἡ γωνία τέμνεται.

Ἔστω γὰρ εὐϑεῖα ἡ ΑΖ, καὶ περὶ τὴν ΑΖ γεγράφϑω τμῆμα κύκλου τυχόν, καὶ ἐγγεγράφϑω εἰς αὐτὸ γωνία ἡ Κ, τῇ δὲ ΑΖ ἴση ἔςω ἡ ΒΓ, καὶ περὶ τὴν ΒΓ περιγεγράφϑω

1 Supponit enim hujus Theor. demonstratio τὰ ἄνισα μεγέϑη in directum esse. *Savil.*

τμῆμα

τμῆμα, ὃ δέξεται τὴν τῆς Κ γωνίας ἡμισείαν. δοκεῖ ἡ Κ γωνία διπλασία ἐστὶ τῆς Δ γωνίας· διπλασία ἄρα φαίνεται ἡ ΑΖ τῆς ΒΓ, τῶν ὀμμάτων ἐπὶ τῶν ΑΚΖ, ΒΔΓ περιφερειῶν κειμένων.

etiam circuli segmentum capiens angulum dimidio minorem quam sit angulus K. angulus ergo K duplus est anguli Δ; quare ΑΖ magnitudo duplo major videtur magnitudine ΒΓ, cum oculi collocantur in ΑΚΖ & ΒΔΓ circumferentiis.

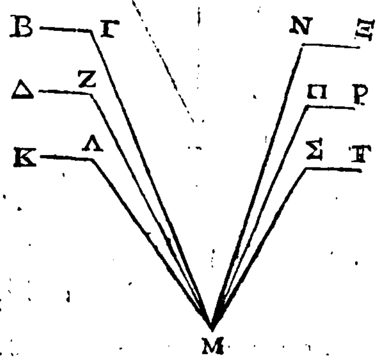
ΠΡΟΤΑΣΙΣ νβ'.

Τῶν ἴσῳ τάχει φερομένων καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ὄντων, [1] πλησίον πρὸς τὸ ὄμμα τὸ [2] πλεῖσταιον προηγεῖσθαι δόξει· [3] παραλλαξάντων δὲ, [4] τὸ μὲν προηγούμενον ἐπακολουθεῖν, τὸ δὲ ἐπακολουθοῦν προηγεῖσθαι δόξει.

Prop. LII. Theor.

Æquali celeritate delatorum & in eadem recta linea positorum prope oculum, ultimum reliqua omnia præcedere videbitur: facto autem transitu in contrarias partes, quod antea præcedebat, subsequi existimabitur; quod autem subsequebatur, præcedere videbitur.

Φερέσθω γὰρ ἰσοταχῶς τὰ ΒΓ, ΔΖ, ΚΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Μ ὄμματος προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΜΓ, ΜΖ, ΜΛ· δοκοῦν μετεωροτάτη ἐστὶ καὶ δεξιωτέρα τῶν ἀπὸ τοῦ ὄμματος ἀκτίνων προσπιπτουσῶν ἡ ΜΓ· τὸ ἄρα ΒΓ δόξει προηγεῖσθαι. παραλλαξάντων δὲ τῶν ΒΓ, ΔΖ, ΚΛ, καὶ ἐπὶ τῶν ΝΞ, ΠΡ, ΣΤ γινομένων, προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΜΝ, ΜΠ, ΜΣ. δοκοῦν πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ ὄμματος ἀκτίνων προσπιπτουσῶν, δεξιωτέρα ἐστὶν ἡ ΜΣ, ἀριστερὰ δὲ μᾶλλον ἡ ΜΝ· ὥστε καὶ τὸ μὲν ΣΤ προηγεῖσθαι δόξει, ἐπακολουθεῖν δὲ τὸ ΝΞ. τὸ μὲν ἄρα ΒΓ προηγούμενον ἐπὶ τοῦ ΝΞ γενόμενον δόξει ἐπακολουθεῖν, τὸ δὲ ΑΚ ἐπακολουθοῦν ἐπὶ ΣΤ γενόμενον δόξει προηγεῖσθαι.



Ferantur enim eadem celeritate ΒΓ, ΔΖ, ΚΛ, & ex M oculo procedant radii ΜΓ, ΜΖ, ΜΛ: radius igitur ΜΓ est dexterrimus & sublimissimus radiorum ab oculo procedentium; quare ΒΓ videbitur præcedere. migratione vero facta in contrarias partes, si nempe ΒΓ, ΔΖ, ΚΛ mutentur ad partes ΝΞ, ΠΡ, ΣΤ, procedant radii ΜΝ, ΜΠ, ΜΣ, omnibus ergo radiis reliquis ab oculo emissis dexterior est ΜΣ, sinisterior autem est ipse ΜΝ: igitur ipsa magnitudo ΣΤ reliquas præcedere videbitur, ipsa vero ΝΞ subsequi. quare ΒΓ magnitudo, quæ antea præcedebat, postquam translata fuerit in ΝΞ, subsequi videbitur; magnitudo autem ΑΚ, quæ antea subsequi videbatur, præcedere existimabitur, cum translata fuerit in ΣΤ.

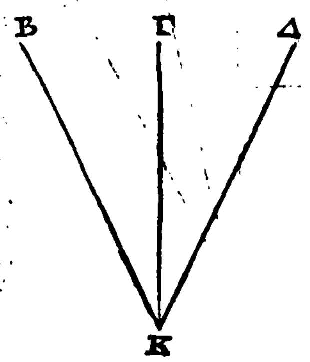
ΠΡΟΤΑΣΙΣ νγ'.

Ἐὰν πλειόνων φερομένων πλειόνων ἀνίσῳ τάχει, συμπαραφέρηται ἐπὶ τὰ αὐτὰ καὶ τὸ ὄμμα· τὰ μὲν τῷ ὄμματι ἰσοταχῶς φερόμενα ἑστάναι δόξει· τὰ δὲ βραδύτερον, εἰς τοὐναντίον φέρεσθαι· τὰ δὲ θᾶττον, εἰς τὰ προηγούμενα.

Prop. LIII. Theor.

Inæquali celeritate delatorum eo vorsum quo fertur oculus, ea quidem, quæ æque velociter feruntur atque oculus, quiescere videntur: quæ vero tardius, in contrariam partem moveri: quæ autem celerius, in præcedentia ferri apparent.

Φερέσθω γὰρ ἀνίσῳ τάχει τὰ Β, Γ, Δ, καὶ βραδύτατα μὲν φερέσθω τὸ Β, τὸ δὲ Γ ἰσοταχῶς τῷ Κ ὄμματι, τὸ δὲ Δ θᾶττον τοῦ Γ, ἀπὸ δὲ τοῦ Κ ὄμματος προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ. δοκοῦν τοῦ ὄμματος συμπαραφερομένου τοῖς Β, Γ, Δ, τὸ μὲν Γ τῷ Κ ὄμματι ἰσοταχῶς φερό-



Magnitudines enim Β, Γ, Δ moveantur velocitate inæquali, & Β quidem tardissime feratur, Γ autem æque celeriter atque Κ oculus, ac Δ denique celerius feratur quam Γ; ab ipso autem Κ oculo procedant radii ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ. si ergo oculus ad easdem partes feratur ad quas tendunt Β, Γ, Δ magnitudines, ipsa quidem Γ magnitudo, quæ æque celeriter fertur atque oculus Κ,

1 Quid hoc? intelligit proculdubio ea quæ in transversum ad oculos moventur, ut à dextra in sinistram aut è contra. *Savil.* 2 Ne hoc quidem quid sit intelligo, nisi τὸ ἔσχατον voluit intelligi. *Idem.* 3 Cum nempe mutaverint situm à sinistra in dextram, aut è contrario, *i.e.* præterierint perpendicularem ab oculo in rectas ductam, quas magnitudines motu suo describunt. *Idem.* 4 Magis congruunt προηγούμενον & ἐπακολουθοῦν, aut certe προηγεῖσθαι δόξειν. *Idem.*

stare & quiescere putabitur; B autem relinqui & retro ferri existimabitur: denique Δ, cum velocius moveatur quam Γ, in præcedentia ferri videbitur; removebitur enim magis ac magis ab ipsa Γ magnitudine.

μένον ἑστάναι δόξει, τὸ δὲ B ὑπολειπόμενον εἰς τοὐναντίον δόξει φέρεσθαι, τὸ δὲ Δ, ἐπεὶ θᾶττον τοῦ Γ φέρεται, δόξει εἰς τοὔμπροσθεν φέρεσθαι, πλεῖον γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ ἀποστήσεται.

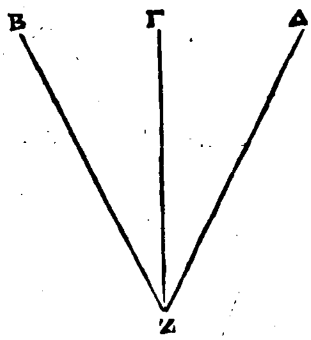
Prop. LIV. Theor.

Si magnitudines aliquæ ad eandem partem ferantur, una vero quiescat; ea quæ quiescit, in contrariam partem moveri videbitur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νδʹ.

Ἐὰν τινῶν φερομένων [1] διαφέρηται τι μὴ φερόμενον, δόξει τὸ μὴ φερόμενον εἰς τοὐναντίον φέρεσθαι.

Ferantur enim B, Δ magnitudines, Γ vero magnitudo immota maneat, & ab oculo Z procedant radii ZB, ZΓ, ZΔ. si ergo B, Δ magnitudines ferantur (exempli gratia) dextrorsum, B quidem propius accedet ad Γ; at vero Δ longius inde distabit: quare Γ in contrarias partes ferri videbitur.



Φερέσθω γὰρ τὰ B, Δ, μενέτω δὲ τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Z ὄμματος προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ZB, ZΓ, ZΔ. οὐκοῦν τὸ μὲν B φερόμενον ἔγγιον ἔσται τοῦ Γ, τὸ δὲ Δ ἀποχωρήσει πορρώτερον· ὥστε δόξει τὸ Γ εἰς τοὐναντίον φέρεσθαι.

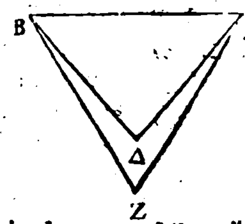
Prop. LV. Theor.

Oculo ad rem visam accedenti res visa augeri videtur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νεʹ.

Τοῦ ὄμματος ἔγγιον τοῦ ὁρωμένου προσιόντος, [2] δόξει τὸ ὁρώμενον αὔξεσθαι.

Oculo enim in Z posito, cernatur magnitudo BΓ per radios ZB, ZΓ, & accedat oculus propius ad magnitudinem BΓ, colloceturque in Δ, cernatque magnitudinem BΓ per radios ΔB, ΔΓ: ergo [per 21.1.] major est angulus Δ angulo Z. quæ autem sub majori angulo cernuntur[per 5 posit.] majora apparent: oculo igitur in Δ collocato auctior apparebit magnitudo BΓ, quam si collocetur in Z.



Ὁράσθω γὰρ τὸ BΓ τοῦ ὄμματος ἐπὶ τοῦ Z κειμένου ὑπὸ τῶν ZB, ZΓ ἀκτίνων, καὶ μετακείσθω τὸ ὄμμα ἔγγιον τοῦ BΓ, καὶ ἔστω ἐπὶ τοῦ Δ, καὶ ὁράσθω τὸ αὐτὸ ὑπὸ τῶν ΔB, ΔΓ ἀκτίνων· οὐκοῦν μείζων ἡ Δ γωνία τῆς Z γωνίας. τὰ δὲ ὑπὸ μείζονος γωνίας ὁρώμενα, μείζονα φαίνεται· δόξει ἄρα ηὐξῆσθαι τὸ BΓ τοῦ ὄμματος ἐπὶ τοῦ Δ ὄντος, ἤπερ ἐπὶ τοῦ Z.

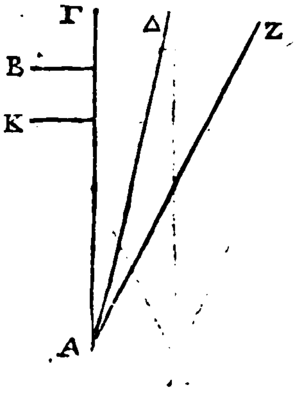
Prop. LVI. Theor.

Æquali celeritate delatorum, quæ longius distant tardius ferri videntur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νϛʹ.

Τῶν ἴσῳ τάχει φερομένων, τὰ πόρρω δοκεῖ βραδύτερον φέρεσθαι.

Ferantur enim eadem celeritate B, K magnitudines ad partes Z, ducanturque ab A oculo radii AΓ, AΔ, AZ. igitur radii ab A oculo ad K magnitudinem tendentes, minores sunt, quam illi qui tendunt ad B magnitudinem: quare K minus intervallum percurret, videbiturque citius ferri, quia citius perveniet ad radium AZ.



Φερέσθω γὰρ ἰσοταχῶς τὰ B, K ὡς ἐπὶ τὰ Z μέρη, καὶ ἀπὸ τοῦ A ὄμματος ἀκτῖνες ἤχθωσαν αἱ AΓ, [3] AΔ, AZ. οὐκοῦν τὸ K ἐλάσσονας ἔχει τὰς ἀπὸ τοῦ ὄμματος ἀκτῖνας ἠγμένας, ἤπερ τὸ B· ἔλαττον ἄρα διάστημα διελεύσεται, καὶ θᾶττον παραλλάξαν τὴν AZ ὄψιν, δόξει ταχύτερον φέρεσθαι.

ALITER.

Duo puncta A, B æquali celeritate ferantur

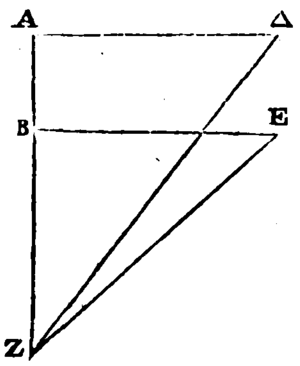
ΑΛΛΩΣ.

Φερέσθω δύο σημεῖα τὰ A, B ἐπὶ παραλλή-

1 Τί δὲ τοῦτο; interpres sic: ad eandem partem ferantur, una vero quiescat. *Savil.* 2 Nempe, si radii ab oculo ἰσοταχῶς acciderint. *Idem.* 3 Quorsum duceretur? *Idem.*

λων

λων εὐθειῶν τῶν ΑΔ, ΒΕ ὁμαλῶς καὶ ἴσως· καὶ ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ [1] διελεύσεται. ἔστωσαν οὖν ἴσαι αἱ ΑΔ, ΒΕ, καὶ προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες ἀπὸ τοῦ Ζ ὄμματος αἱ ΖΑ, ΖΔ, ΖΕ. ἐπεὶ οὖν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΒΖΔ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΖΕ· ἔλαττον ἄρα τὸ ΑΔ διάστημα τοῦ ΒΕ φανήσεται· ὥστε δόξει τὸ Α βραδύτερον φέρεσθαι τοῦ Β.



per rectas parallelas ΑΔ, ΒΕ: æquali ergo tempore pertransibunt. sint itaque æquales ΑΔ, ΒΕ, & ex Ζ oculo procedant radii ΖΑ, ΖΔ, ΖΕ. quia vero angulus ΒΖΔ minor est angulo ΒΖΕ: minus ergo [per 6. posit.] apparebit intervallum ΑΔ intervallo ΒΕ; quare Α tardius ferri videbitur quam Β.

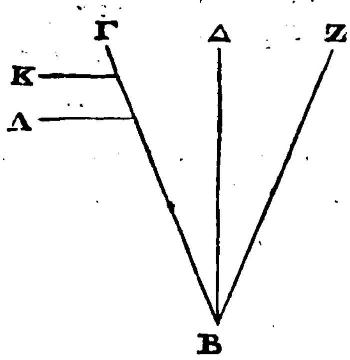
ΠΡΟΤΑΣΙΣ νζ'.

Τοῦ ὄμματος παραφερομένου, τὰ πόῤῥω τῶν ὁρωμένων καταλείπεσθαι δόξει [2].

Ἔστω γὰρ ὄμμα τὸ Β, ἀφ' οὗ ἤχθωσαν ἀκτῖνες αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΒΖ, ὁρώμενα δὲ τὰ Κ, Λ. οὐκοῦν τοῦ ὄμματος παραφερομένου πρὸς τοῖς Γ μέρεσι, θᾶττον περιελεύσονται αἱ ὄψεις τὸ Κ ἤπερ τὸ Λ· δόξει ἄρα τὸ Κ ὑπολείπεσθαι, τὸ δὲ Λ εἰς τοὐναντίον φέρεσθαι, τοῦτ' ἔστιν ὡς ἐπὶ τὰ πρὸς τῷ Ζ μέρη. [3]

Prop. LVII. Theor.

Oculo prætermoto, res spectatæ procul positæ relinqui videntur.



Sit oculus Β, à quo ducantur radii ΒΓ, ΒΔ, ΒΖ, res vero spectatæ sint Κ, Λ. oculo igitur prætermoto, radii ab oculo Β versus Γ protensi citius percurrent Κ magnitudinem quam ipsam Λ: quare Κ relinqui existimabitur, Λ vero in contrarium tendere, hoc est versus partes quæ sunt ad Ζ.

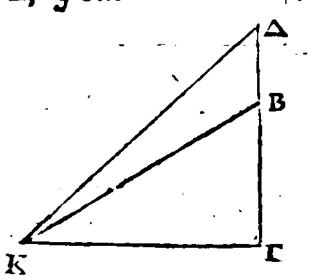
ΠΡΟΤΑΣΙΣ νη'.

Τὰ αὐξανόμενα τῶν μεγεθῶν ἔγγιον δοκεῖ τῷ ὄμματι προσάγεσθαι.

Ἔστω γὰρ ὁρώμενον τὸ ΓΒ ὑπὸ τῶν ΚΒ, ΚΓ ἀκτίνων, καὶ ηὐξήσθω τὸ ΓΒ τῷ ΒΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ ὄμματος προσπιπτέτω ἀκτὶς ἡ ΚΔ· οὐκοῦν μείζων ἡ ὑπὸ ΔΚΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΚΓ γωνίας. τὰ δὲ ὑπὸ μειζόνων γωνιῶν ὁρώμενα, μείζονα φαίνεται· μεῖζον ἄρα φαίνεται τὸ ΓΔ τοῦ ΓΒ. [4] καὶ ἐὰν τὰ μείζονα ὁρώμενα τῷ ὄμματι [5] ἐπαυξάνεσθαι δοκῇ· καὶ τὰ αὐξανόμενα ἄρα τῶν μεγεθῶν δόξει προσάγεσθαι τῷ ὄμματι [6].

Prop. LVIII. Theor.

Magnitudines auctæ propius ad oculum accedere existimantur.



Sit magnitudo ΓΒ, quæ conspiciatur per radios ΚΒ, ΚΓ; augeatur ipsa ΓΒ tanta magnitudine quanta est ΒΔ; ab oculo vero Κ procedat radius ΚΔ: major ergo est ΔΚΓ angulus angulo ΒΚΓ. quæ autem sub majori angulo spectantur majora apparent: major igitur apparet ΓΔ quam ΓΒ. quod si quæ majora visui apparent quam prius, aucta esse putantur: igitur auctæ magnitudines ad oculum accessisse videbuntur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νθ'.

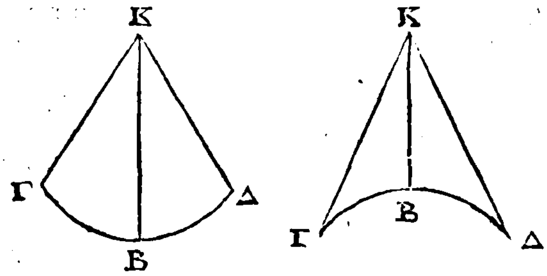
[7] Ὅσα μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἀποστήματι κεῖται μὴ παράλληλα κείμενα, τῶν ἄκρων μὴ κατάλληλα [8] κειμένων, μηδὲ τῶν μέσων ἐπ' εὐθείας ὄντων· τὸ ὅλον σχῆμα ὅτε μὲν κοῖλον ὅτε δὲ κυρτὸν ποιεῖ.

Prop. LIX. Theor.

Quæ neque æqualiter ab oculo absunt, neque extrema extremis & media mediis parallela habent, neque in recta linea sunt; totam figuram faciunt nunc cavam nunc convexam.

1 Sc. ἴσαις εὐθείαις. *Savil.* 2 Adde, καὶ τὰ ἔγγιον εἰς τοὐναντίον φέρεσθαι. sic enim est conclusio. *Idem.* 3 Amplius, neque enim liquet. *Idem.* 4 In MS. sic legitur τὰ μείζονα ἑαυτῶν οἰόμενα τοῦ ὄμματος προσιόντος, ἐπαυξάνεσθαι δοκοῦσι, καὶ τὰ αὐξανόμενα &c. *Idem.* 5 Ne hic quidem quicquam ὑγιές, nisi pro ἐπαυξάνεσθαι, legamus προσιέναι, προσάγεσθαι, aut tale quippiam ex 55. propositione; sed plane nihil est, nec quicquam explico. *Idem.* 6 Addend. ἔγγιον ἄρα δόξει εἶναι τὸ ΓΔ ἤπερ τὸ ΒΓ. *Idem.* 7 Ne hic quidem quicquam explico. *Idem.* 8 Κειμένων τῶν μέσων μηδὲ ἐπ' εὐθ. *Idem.*

CErnantur enim Β, Γ, Δ ab oculo posito in Κ, à quo procedant radii ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ. tota igitur figura ΓΒΔ cava esse videtur. alio modo ponatur ipsa res spectata, [ut in 2. fig.] ita ut punctum Β propius oculo sit quam Γ aut Δ. ipsa igitur ΔΒΓ figura convexa esse existimabitur.



Ὁράσθω γὰρ τὰ Β, Γ, Δ τοῦ ὄμματος ἐπὶ τοῦ Κ κειμένου, καὶ προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ. οὐκοῦν τὸ ὅλον σχῆμα κοῖλον δόξειεν εἶναι. μετακείσθω δὴ πάλιν τὸ ὁρώμενον, καὶ ἔγγιον κείσθω τοῦ ὄμματος· οὐκοῦν τὸ ΔΒΓ δόξει κυρτὸν εἶναι.

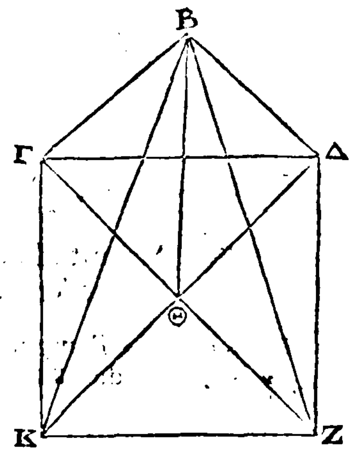
PROP. LX. THEOR.

Si ab intersectione diametrorum quadrati excitetur linea ad planum quadrati normalis, & in ea ponatur oculus; quadrati diametri & latera æqualia apparebunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξ'.

Τετραγώνου ὑπάρχοντος, ἐὰν ἀπὸ τῆς συναφῆς τῶν διαμέτρων πρὸς ὀρθὰς τις ἀναχθῇ τῷ τοῦ τετραγώνου ἐπιπέδῳ, ἐπὶ δὲ αὐτῆς τεθῇ τὸ ὄμμα· αἵ τε [1] πλευραὶ τοῦ τετραγώνου καὶ αἱ διάμετροι ἴσαι φανοῦνται.

SIT quadratum ΓΖ, ducantur vero diametri ΓΖ, ΚΔ quæ se intersecent in puncto Θ, à quo excitetur ΘΒ ad ipsius quadrati planum normalis, ponaturque oculus in Β, à quo procedant radii ΒΚ, ΒΔ, ΒΓ, ΒΖ: duæ igitur rectæ ΘΖ, ΘΒ æquales sunt duabus ΘΓ, ΘΒ. sunt vero etiam anguli ab ipsis lineis contenti inter se æquales, anguli nimirum positi ad punctum Θ: æqualis ergo [per 4. 1.] est basis ΖΒ basi ΒΓ. eademque ratione basis ΚΒ basi ΒΔ æqualis est. duæ ergo rectæ ΖΒ, ΒΓ duabus rectis ΚΒ, ΒΔ æquales sunt utraque utrique, diametri quoque ipsæ æquales sunt: quare [per 8. 1.] anguli etiam qui sunt ad Β æquales erunt. quæ autem sub æqualibus angulis cernuntur [per 7. posit.] æqualia apparent: æquales igitur apparent diametri inter se, & latera quoque inter se æqualia.



Ἔστω γὰρ τετράγωνον τὸ ΓΖ, καὶ διάμετροι ἤχθωσαν αἱ ΓΖ, ΚΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω τῷ ἐπιπέδῳ ἡ ΘΒ, τὸ δὲ ὄμμα κείσθω ἐπὶ τοῦ Β, καὶ προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΒΚ, ΒΔ, ΒΓ, ΒΖ· οὐκοῦν δύο αἱ ΘΖ, ΘΒ δυσὶ ταῖς ΘΓ, ΘΒ ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ γωνίαι αἱ περιεχόμεναι ὑπ' αὐτῶν ἴσαι, τοῦτ' ἔστιν αἱ πρὸς τῷ Θ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΖΒ βάσις τῇ ΒΓ βάσει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΚΒ τῇ ΒΔ ἴση ἐστί. δύο δὴ αἱ ΖΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΚΒ, ΒΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καί εἰσιν αἱ διάμετροι ἴσαι· ὥστε καὶ αἱ πρὸς τῷ Β γωνίαι ἴσαι ἔσονται. τὰ δὲ ὑπὸ ἴσων γωνιῶν ὁρώμενα ἴσα φαίνεται· ἴσαι ἄρα φαίνονται αἵ τε διάμετροι καὶ αἱ πλευραὶ τοῦ τετραγώνου.

PROP. LXI. THEOR.

Quod si radius ab oculo in diametrorum intersectionem ductus neque rectus sit ad planum quadrati, neque æqualis alterutri semidiametrorum quadrati, neque æquales angulos contineat cum ipsis semidiametris; inæquales apparebunt diametri.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξα'.

Τῆς δὲ ἀπὸ τοῦ ὄμματος ἐπὶ τὴν συναφὴν τῶν [2] διαμέτρων, μήτε πρὸς ὀρθὰς οὔσης τῷ τοῦ τετραγώνου ἐπιπέδῳ, μήτε ἴσης ἑκατέρᾳ τῶν ἀπὸ τῆς [2] συναφῆς πρὸς τὰς γωνίας τοῦ τετραγώνου ἀγομένων, μήτε ἴσας γωνίας περιεχούσης μετ' αὐτῶν· αἱ διάμετροι ἄνισοι φαίνονται.

IDem enim quod in circulis, hic etiam evenire demonstrabimus.

Ὁμοίως γὰρ δείξομεν τὰ συμβαίνοντα, καθάπερ καὶ ἐν τοῖς κύκλοις [3].

1 Latera lateribus & diametri diametris. *Savil.* 2 Sc. τῶν διαμέτρων. *Idem.* 3 Theor. 37. 38. 39. 4 In MS. Τέλος εἴληφε τὰ περὶ τῶν ὀπτικῶν Εὐκλείδου.

[4] ΤΕΛΟΣ ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΟΠΤΙΚΩΝ.

FINIS EUCLIDIS OPTICORUM.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΚΑΤΟΠΤΡΙΚΑ.

EUCLIDIS
CATOPTRICA.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΚΑΤΟΠΤΡΙΚΑ.

EUCLIDIS

CATOPTRICA.

ΘΕΣΕΙΣ.

α'. ΟΨΙΝ εἶναι εὐθεῖαν ὑποκείσθω, ἧς τὰ μέσα πάντα τοῖς ἄκροις ἐπιπροσθεῖ.

β'. Τὰ ὁρώμενα ἅπαντα κατ' εὐθείας ὁρᾶσθαι.

γ'. Ἐνόπτρου τεθέντος ἐν ἐπιπέδῳ, καὶ θεωρουμένου τινὸς ὕψους, ὃ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ ἐπιπέδῳ, γίνονται ἀνάλογον, ὡς ἡ μεταξὺ τοῦ ἐνόπτρου [1] καὶ τοῦ θεωροῦντος εὐθεῖα πρὸς τὴν μεταξὺ τοῦ ἐνόπτρου καὶ τοῦ πρὸς ὀρθάς ὕψους, οὕτω τὸ τοῦ θεωροῦντος ὕψος πρὸς τὸ πρὸς ὀρθάς τῷ ἐπιπέδῳ ὕψος.

POSITIONES.

1. PONAMUS radium eſſe rectam lineam, cujus media omnia extremis officiant.

2. Omne aſpectabile ſecundum rectam lineam cerni.

3. Si ſpeculum collocetur in plano, cui ad rectos angulos altitudo aliqua erecta ſit, quam rationem habet linea interjecta inter ſpectatorem & ſpeculum ad lineam interjectam inter ſpeculum & erectam altitudinem, eandem rationem habere ſpectatoris altitudinem ad altitudinem inſiſtentem ad rectos angulos ei plano, in quo eſt ſpeculum.

[ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ.]

α'. Ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἐνόπτροις τοῦ τόπου καταληφθέντος, ἐφ' ὃν ἡ [2] κάθετος πίπτει ἀπὸ τοῦ ὁρωμένου, οὐκέτι ὁρᾶται τὸ ὁρώμενον.

β'. Καὶ ἐν τοῖς κυρτοῖς ἐνόπτροις καταληφθέντος τοῦ τόπου, δι' οὗ ἀπὸ τοῦ ὁρωμένου εἰς τὸ κέντρον [3] ἄγεται τῆς σφαίρας, οὐκέτι ὁρᾶται τὸ ὁρώμενον.

γ'. Τὸ δ' αὐτὸ καὶ ἐν τοῖς κοίλοις συμβαίνει.

δ'. Ἐὰν εἰς ἀγγεῖον ἐμβληθῇ τι, καὶ λάβῃ ἀπόστημα, ὡς μηκέτι ὁρᾶσθαι, τοῦ αὐτοῦ ἀποστήματος ὄντος, ἐὰν ὕδωρ ἐγχυθῇ, ὀφθήσεται τὸ ἐμβληθέν.

[PHÆNOMENA.]

1. In planis ſpeculis occupato eo ſpeculi loco, in quem cadit perpendicularis ducta à re aſpectabili ad ſpeculum, res aſpectabilis non cernitur.

2. Item, in convexis ſpeculis occupato eo loco, per quem à re aſpectabili ad centrum ſphæræ linea recta ducetur, res aſpectabilis non cernitur.

3. Idemque in concavis ſpeculis fit.

4. Si res aliqua in vas injiciatur, & ab oculo removeatur vas ipſum, quoad res in fundo vaſis poſita cerni non poſſit; ea videbitur ab eadem remotione, ſi aqua in vas infundatur.

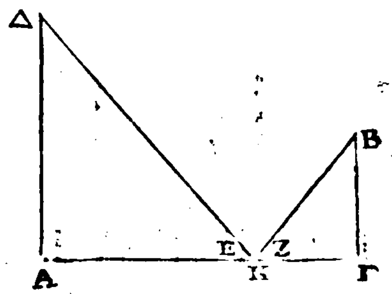
1 Id eſt, σημεῖον in plano ſpeculi, in quod perpendicularis ab oculo cadit, ut oculo poſito in B, rectam ΓΚ accipere oportet, ſc. inter ſpeculum ad Κ & Γ caſum perpendicularis interceptam. *Savil.* 2 Sc. ad planum ſpeculi. *Idem.* 3 Sc. εὐθεῖα: *Idem.*

PROPOSITIO I. THEOR.

A speculis planis, convexis, & cavis, radii ad æquales angulos reflectuntur.

SIT oculus quidem B; planum autem speculum ΑΓ, radius vero BK ab oculo feratur, qui reflectatur ad punctum Δ: dico angulum E æqualem esse angulo Z.

Ducantur enim ΒΓ, ΔΑ, perpendiculares ad speculum, est igitur [per 3. posit.] ut ΒΓ ad ΓΚ sic ΔΑ ad ΑΚ; id enim in definitionibus positum est: quare [per 6. 6.] triangulum ΒΓΚ simile est triangulo ΔΑΚ; ideoque angulus E æquale est angulo Z, triangula enim similia [per 1. def. 6.] æquiangula etiam sunt.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ α΄.

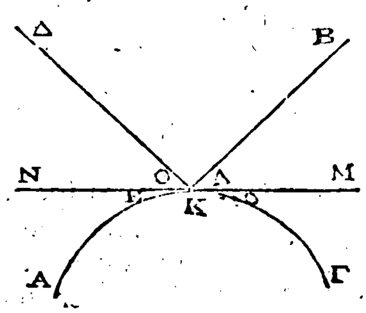
Ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων ἐνόπτρων, καὶ κυρτῶν, καὶ κοίλων, αἱ ὄψεις ἐν ἴσαις γωνίαις ἀνακλῶνται.

ΕΣτω ὄμμα τὸ B, ἔνοπτρον ἐπίπεδον τὸ ΑΓ, ὄψις δὲ ἀπὸ τοῦ ὄμματος φερέσθω ἡ ΒΚ, καὶ ἀνακλάσθω ἐπὶ τὸ Δ· φημὶ δὴ τὴν Ε γωνίαν ἴσην εἶναι τῇ Z.

Ἤχθωσαν κάθετοι ἐπὶ τὸ ἔνοπτρον αἱ ΒΓ, ΔΑ. ἐκεῖ ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς ΑΚ, τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς ὅροις ὑπόκειται· ὅμοιον ἄρα τὸ ΒΓΚ τρίγωνον τῷ ΔΑΚ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἡ Ε γωνία τῇ Z, τὰ γὰρ ὅμοια ἰσογώνιά ἐστιν.

IN CONVEXO SPECULO.

Sit convexum speculum ΑΚΓ, radius autem BK, qui reflectatur ad punctum Δ: dico angulum reflectionis EΘ æqualem esse angulo incidentiæ ΟΛ. si enim applicem planum speculum NM [ita ut tangat speculum convexum in puncto K;] igitur Θ æqualis erit Λ. sed E æqualis est O, tangit enim MN: totum igitur EΘ æqualis est toti ΛO.

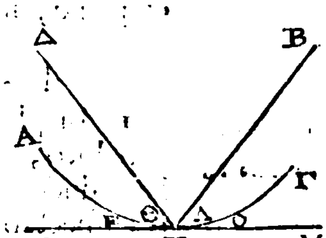


ΕΝ ΤΩ ΚΥΡΤΩ ΕΝΟΠΤΡΩ.

Ἔστω δὴ κυρτὸν ἔνοπτρον τὸ ΑΚΓ, ὄψις δὲ ἡ ΒΚ, ἀνακλωμένη ἐπὶ τὸ Δ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ γωνία τῇ ΟΛ γωνίᾳ. παρέθηκα ἐπίπεδον ἔνοπτρον τὸ ΝΜ· [1] ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Θ γωνία τῇ Λ. [2] ἀλλὰ καὶ ἡ Ε τῇ Ο, ἐφάπτεται γὰρ ἡ ΜΝ· ὅλη ἄρα ἡ ΕΘ ὅλῃ τῇ ΛΟ ἴση ἐστίν.

IN CONCAVO SPECULO.

Sit rursus speculum cavum ΑΚΓ, radius autem BK qui reflectatur ad Δ: dico angulum Θ æqualem esse angulo Λ. apposito enim plano speculo MN, æqualis est angulus ΘE angulo ΛO. sed & angulus E æqualis est angulo O: quare reliquus Θ reliquo Λ æqualis erit.



ΕΝ ΤΩ ΚΟΙΛΩ ΕΝΟΠΤΡΩ.

Ἔστω δὴ πάλιν κοῖλον τὸ ΑΚΓ, ὄψις δὲ ἡ ΒΚ ἀνακλωμένη ἐπὶ τὸ Δ· λέγω ὅτι ἡ Θ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ Λ. παρατεθέντος γὰρ ἐπιπέδου ἐνόπτρου, ἴση γίγνεται ἡ ΘΕ γωνία τῇ ΛΟ. [3] ἴση δὲ καὶ ἡ Ε τῇ Ο· λοιπὴ ἄρα ἡ Θ τῇ Λ ἴση ἐστί.

PROP. II. THEOR.

Si radius, in qualecunque speculum cadens, æquales faciat angulos; ipse in seipsum reflectetur.

SIT planum speculum ΑΚΓ; oculus autem B, à quo radius procedat BK, æquales angulos

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β΄.

Πρὸς ὁποῖον ἂν τῶν ἐνόπτρων προσπέσῃ ὄψις [4] ἴσας ποιοῦσα γωνίας, αὐτὴ δι' ἑαυτῆς ἀνακλασθήσεται.

ΕΣτω ἔνοπτρον ἐπίπεδον τὸ ΑΚΓ, ὄμμα δὲ τὸ B, ὄψις δὲ ἡ ΒΚ προσπεπτωκέτω, ἴσας

1 Per primam partem hujus. *Sav.* 2 Quia semicirculus à K versus Γ ἐφαρμόσει semicirculo versus A; & KM super KN, quia anguli sunt recti: ergo per 8. axioma æquales sunt E, O. *Idem.* 3 Ut supra. *Idem.* 4 In omneis angulos ad punctum προσπτώσεως; alioquin non sequitur conclusio. *Idem.*

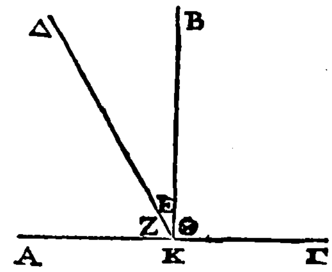
ποιοῦσα

ποιοῦσα γωνίας¹ τὴν ΕΖ τῇ Θ· λέγω ὅτι ἀνακλωμένη ἡ ΒΚ ἐφ' ἑαυτὴν ἥξει, τοῦτ' ἔστιν ἐπὶ τὸ Β.

Μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἡκέτω ἐπὶ τὸ Δ. καὶ ἐπειδὴ αἱ ὄψεις ἐν ἴσαις ἀνακλῶνται γωνίαις, ἴση ἐστὶν ἡ Ζ γωνία τῇ Θ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΕΖ γωνία τῇ Θ ἴση· καὶ ἡ ΕΖ ἄρα γωνία τῇ Ζ γωνίᾳ ἔσται ἴση, ἡ μείζων τῇ ἐλάσσονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ἡ ἄρα ΒΚ δι' αὐτῆς ἀνακλασθήσεται.

Ἡ δ' αὐτὴ ἀπόδειξις ἁρμόσειεν ἐπὶ τῶν κυρτῶν καὶ τῶν κοίλων ἐνόπτρων.

faciens cum speculo, angulum nempe EZ æqualem angulo Θ: fore assero ut radius BK sese reflectens in seipsum redeat, hoc est ad B.



Non enim, sed reflectatur, si possit, in punctum Δ. quia igitur [per I. catoptr.] radii ad æquales angulos reflectuntur, æqualis est angulus Z angulo Θ. ostensus vero est angulus EZ æqualis angulo Θ: igitur angulus EZ angulo Z æqualis erit, major minori; quod fieri nequit: igitur radius BK in seipsum reflectetur.

Eadem demonstratio congruet speculis tum convexis tum cavis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Πρὸς ὁποῖον ἂν τῶν ἐνόπτρων προσπίπτουσα ὄψις ἀνίσους ποιῇ γωνίας, οὔτε δι' ἑαυτῆς ἀνακλασθήσεται, οὔτε ἐπὶ τὴν ἐλάσσονα γωνίαν.

Ἔστω ἐπίπεδον ἔνοπτρον τὸ ΑΚΓ, ὄψις δὲ ἡ ΒΚ προσπιπτέτω, μείζονα ποιοῦσα γωνίαν τὴν Ζ τῆς ΘΛ· λέγω ὅτι ἡ ΒΚ ἀνακλωμένη, οὔτε δι' ἑαυτῆς ἀνακλασθήσεται, οὔτε ἐπὶ τὴν ΘΛ γωνίαν.

Εἰ μὲν γὰρ ἥξει ἐπὶ τὸ ΒΚ, ἡ Ζ γωνία τῇ ΘΛ ἴση, ὅπερ ἄτοπον, ὑπόκειται γὰρ μείζων.

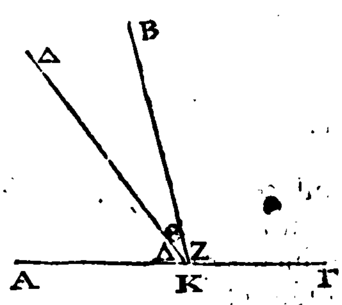
Εἰ δὲ διὰ τοῦ Δ, ἴση ἔσται ἡ Ζ γωνία τῇ Λ, ἔστι δὲ μείζων· ἡ ἄρα ΒΚ ἀνακλασθήσεται ἐπὶ τὴν μείζονα γωνίαν τὴν Ζ. δυνατὸν γὰρ ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην ἀφαιρεθῆναι.

Ἔστι δὲ ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ἐπὶ τῶν κυρτῶν καὶ κοίλων.

PROP. III. THEOR.

Radius in qualecunque speculum cadens, angulosque inæquales faciens, neque in seipsum reflectetur, neque versus minorem angulum.

SIT planum speculum AKΓ, radius autem BK in speculum incidat, faciatque angulum Z majorem angulo ΘΛ: fore assero ut BK radius reflectens, neque in seipsum reflectatur, neque ad angulum ΘΛ.



Si enim redeat in seipsum, in BK; æqualis erit angulus Z angulo ΘΛ, quod est absurdum; positus enim est major.

Si BK reflectatur ad Δ, æqualis erit Z angulus angulo Λ; est autem major: quare radius BK reflectetur versus majorem angulum, qui est ad Z: poterit enim à majore angulo auferri angulus æqualis minori.

Eadem demonstratio valebit in convexis & cavis speculis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

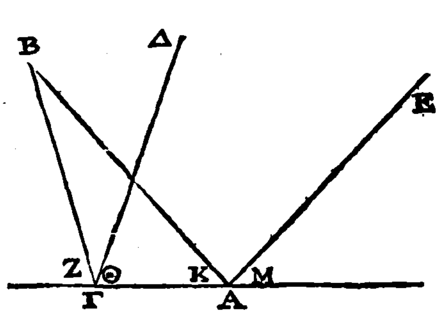
Αἱ ὄψεις ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων ἐνόπτρων καὶ κυρτῶν ἀνακλώμεναι, οὔτε συμπεσοῦνται ἀλλήλαις², οὔτε παράλληλοι ἔσονται.

Ἔστω πάλιν ἐπίπεδον ἔνοπτρον τὸ ΑΓ, ὄμμα δὲ τὸ Β, ὄψεις δὲ ἀνακλώμεναι αἱ ΒΓΔ, ΒΑΕ· λέγω ὅτι αἱ ΓΔ, ΑΕ, οὔτε παράλληλοί εἰσιν, οὔτε συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ Δ, Ε³.

Ἐπεὶ γάρ ἴση ἐστὶν ἡ Ζ γωνία τῇ Θ, ἡ δὲ Κ τῇ Μ, μεί-

PROP. IV. THEOR.

Radii à planis convexisque speculis reflexi neque mutuo concurrent, neque erunt paralleli.



SIT rursus planum speculum AΓ, oculus autem B, radii vero reflexi BΓΔ, BAE: dico duos hos radios reflexos ΓΔ, AE neque parallelos esse, neque productos ad partes Δ, E posse concurrere.

Quia enim [per I. catop.] æqualis est angulus Z angulo Θ, & angulus K angulo M; ma-

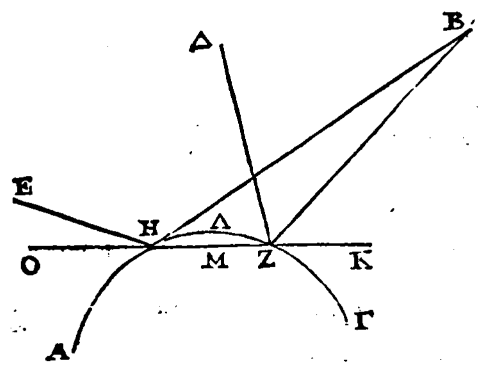
1 Non solum EZ, Θ sed omnes omnino angulos ad K oportet esse æqualeis; in planis sc. speculis rectos, in κοίλοις acutos æqualeis; ἐν δὲ κυρτοῖς obtusos. *Savil.* 2 Sc. ἐπὶ τὰ τοῦ ἀνακλῶντος μέρη. *Idem.* 3 Sc. μέρη.

jor autem est [per 16.1.] angulus Z angulo K, propterea quod est externus angulus in triangulo BAΓ: major igitur est angulus Θ angulo M: quare radii reflexi ΓΔ, AE neque paralleli inter se sunt, neque concurrent ad partes E, Δ.

ζων δὲ ἡ Ζ τῆς Κ, διὰ τὸ ἐκτὸς εἶναι ἐν τῷ ΒΑΓ τριγώνῳ· μείζων ἂν εἴη καὶ ἡ Θ τῆς Μ· οὐκ ἄρα παράλληλος ἡ ΓΔ τῇ ΑΕ ἐστιν, οὐδὲ συμπίπτουσιν ἐπὶ τὰ Ε, Δ.

IN CONVEXO SPECULO,

Sit rursus convexum speculum AHZΓ, oculus autem B, radii autem reflexi BZΔ, BHE: dico radios reflexos ZΔ, HE neque parallelos esse, nec posse concurrere ad partes E, Δ.



Connectatur enim recta HZ, & producatur utrinque. quia igitur angulus BZΓ æqualis est angulo ΔZA, eo quod [per 1. catop.] radii ad æquales angulos reflectuntur; major igitur est angulus ΔZM angulo BZK. & [per 16.1.] angulus BZK major est angulo BHM, & angulus BHM major est angulo EHA; angulus enim BHA [per 1. catop.] æqualis est angulo EHA: major igitur est ΔZM angulus angulo EHA. multo igitur major est angulus ΔZM angulo EHO: igitur radii ZΔ, HE neque concurrent, neque paralleli erunt.

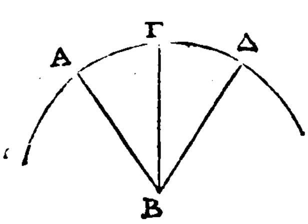
ΕΝ ΤΩ ΚΥΡΤΩ ΕΝΟΠΤΡΩ.

Ἔστω πάλιν κυρτὸν ἔνοπτρον τὸ ΑΗΖΓ, ὄμμα δὲ τὸ Β, ὄψεις δὲ ἀνακλώμεναι αἱ ΒΖΔ, ΒΗΕ· λέγω ὅτι αἱ ΖΔ, ΗΕ, οὔτε παράλληλοί εἰσιν, οὔτε συμπίπτουσιν ἐπὶ τὰ Ε, Δ. Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΗΖ εὐθεῖα, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΖΓ τῇ ΔΖΑ, διὰ τὸ ἐν ἴσαις ἀνακλᾶσθαι γωνίαις· εἴη ἂν μείζων ἡ ΔΖΜ τῆς ΒΖΚ. ἡ δὲ ΒΖΚ τῆς ΒΗΜ ἐστι μείζων, ἡ δὲ ΒΗΜ τῆς ΕΗΑ μείζων, αὐτὴ γὰρ ἡ ΒΗΑ ἴση ἐστὶ τῇ ΕΗΑ· μείζων ἄρα ἡ ΔΖΜ τῆς ΕΗΑ. πολλῷ ἄρα ἡ ΔΖΜ τῆς ΕΗΟ μείζων ἐστίν· οὐκ ἄρα συμπίπτουσιν αἱ ΖΔ, ΗΕ εὐθεῖαι, οὐδὲ παράλληλοί εἰσιν.

Prop. V. Theor.

In cavis speculis si oculum colloces aut in centro, aut in circumferentia, aut intra circumferentiam, id est inter centrum & circumferentiam; radii reflexi concurrent.

SIT cavum speculum AΓΔ; centrum autem sphæræ, cujus portio est ipsum speculum concavum, sit B, & ponatur oculus in B; ab eoque ad circumferentiam ducantur radii BA, BΓ, BΔ: æquales igitur sunt anguli positi ad puncta A, Γ, Δ; sunt enim anguli semicirculorum: radii igitur BA, BΓ, BΔ ab oculo ad speculum missi in seipsos reflectentur; id enim [ad prop. 2. catop.] ostensum est: quare concurrent in puncto B.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐν τοῖς κοίλοις ἐνόπτροις ἂν ἐπὶ τῆς περιφερείας, [1] ἢ ἐντὸς τῆς περιφερείας θῇς ὄμμα, τουτ' ἐστι μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τῆς περιφερείας· αἱ ὄψεις ἀνακλώμεναι συμπίπτουσι.

Ἔστω κοῖλον ἔνοπτρον τὸ ΑΓΔ, κέντρον δὲ τῆς σφαίρας τὸ Β, καὶ κείσθω τὸ ὄμμα ἐπὶ τὸ Β, καὶ προσπιπτέτωσαν ἀπὸ τοῦ Β ὄψεις πρὸς τὴν περιφέρειαν αἱ ΒΑ, ΒΓ, ΒΔ· ἴσαι ἄρα εἰσὶν αἱ πρὸς τοῖς σημείοις τοῖς Α, Γ, Δ γωνίαι· ἡμικυκλίου γάρ εἰσιν· αἱ ἄρα ὄψεις ἀνακλώμεναι δι' ἑαυτῶν ἀνακλασθήσονται αἱ ΒΑ, ΒΓ, ΒΔ, τοῦτο γὰρ δέδεικται· ὥστε συμπίπτουσι κατὰ τὸ Β.

OCULUS IN CIRCUMFERENTIA.

Sit cavum speculum AΓΘB, oculus autem sit B, collocetur que in ipsius speculi circumferentia, & ab oculo B prosiliant radii BΓ, BA, qui reflectantur ad puncta Δ, E. quia segmentum AΓB,

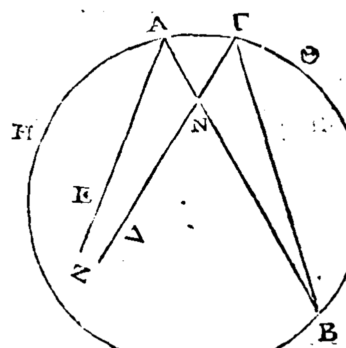
ΟΜΜΑ ΕΝ ΤΗ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑ.

Ἔστω πάλιν κοῖλον ἔνοπτρον τὸ ΑΓΘΒ, ὄμμα δὲ τὸ Β, κείσθω δὲ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ, καὶ ἀπὸ τοῦ Β προσπιπτέτωσαν ὄψεις αἱ ΒΓ, ΒΑ ἀνακλώμεναι ἐπὶ τὰ Δ, Ε σημεῖα. [2] ἐπεὶ μείζων

1 Hæc verba puto esse delenda, ut etiam illa quæ sunt in fine demonstrationis. *Savil.* 2 Demonstratio hujus theorematis, ut vere dicam, nihil habet solidi; & sequentis theorematis multo minus. sed hic quidem σοχωεῖ aliquo more, nempe si BΘΓ major sit quam AΓ, totaque BΘAΓ non major semicirculo. *Idem.*

τὸ

τὸ ΑΓΒ τμῆμα τοῦ ΒΘΓ τμήματος, μείζων ἡ ΒΑΓ γωνία τῆς ΒΓΘ γωνίας, καὶ ἡ ΕΑΗ (διὰ τὸ πρῶτον) ἄρα τῆς ΔΓΑ μείζων· αἱ ἄρα ΒΑΓ, ΕΑΗ τῶν ΒΓΘ, ΔΓΑ μείζους εἰσί· [1] λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΑΕ τῆς ΔΓΒ ἐλάσσων, πολλῷ μᾶλλον ἄρα τῆς ΔΝΒ· συμπεσοῦνται ἄρα αἱ ΓΔ, ΑΕ κατὰ τὸ Ζ. [2] ὁμοίως δειχθήσεται κἂν ἐκτὸς τῆς περιφερείας πίπτῃ τὸ ὄμμα, ὡς ἐπὶ τοῦ ἑξῆς θεωρήματος.

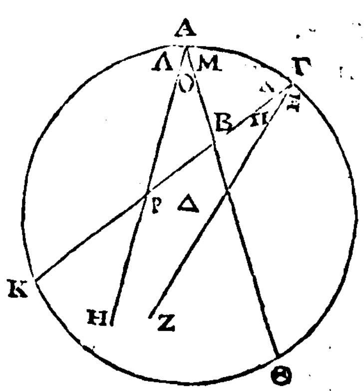


majus est segmento ΒΘΓ: major igitur est ΒΑΓ angulus angulo ΒΓΘ: quare angulus ΕΑΗ (per 1. catop.) major est angulo ΔΓΑ. duo igitur anguli ΒΑΓ, ΕΑΗ majores sunt duobus angulis ΒΓΘ, ΔΓΑ: quare reliquus angulus ΒΑΕ reliquo angulo ΔΓΒ minor est; ac multo etiam minor ipso ΔΝΒ: igitur radii reflexi ΓΔ, ΑΕ concurrent ad partes Ζ. idem ostendetur oculo posito extra circumferentiam, ut in sequenti theoremate.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛʹ.

Ἐν τοῖς κοίλοις ἐνόπτροις, ἐὰν ἀνὰ μέσον τοῦ κέντρου καὶ τῆς περιφερείας θῇς τὸ ὄμμα· [3] ὅτε μὲν συμπεσοῦνται αἱ ὄψεις ἀνακλώμεναι, ὅτε δὲ οὐ συμπεσοῦνται.

[4] Ἔστω ἔνοπτρον κοῖλον τὸ ΑΓ, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ Δ, ὄμμα δὲ κείσθω τὸ Β μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τῆς περιφερείας, ὄψεις δὲ αἱ ΒΑ, ΒΓ ἀνακλώμεναι ἐπὶ τὰ Η, Ζ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ὄψεις ἕως τοῦ ἐνόπτρου αἱ ΑΘ, ΓΚ. ἡ ΑΘ δὴ τῆς ΓΚ ἢ μείζων ἐστὶν, ἢ ἴση, ἢ ἐλάττων. Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΘ ὄψις τῇ ΓΚ ὄψει, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΑΓΘ περιφέρεια τῇ ΓΑΚ περιφερείᾳ· ὥστε καὶ ἡ Μ γωνία τῇ Ξ· αἱ γὰρ τῶν ἴσων περιφερειῶν γωνίαι ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις· καὶ αἱ Μ, Λ γωνίαι ἄρα ταῖς Ν, Ξ εἰσὶν ἴσαι, διὰ τὴν ἀνάκλασιν· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ Ο τῇ Π ἴση ἐστί· μείζων ἄρα ἡ Ρ τῆς Ο. ἐπεὶ γὰρ ἡ Ρ γωνία τῆς Π γωνίας μείζων ἐστὶ, διὰ τὸ ἐκτὸς εἶναι, ἡ δὲ Π τῇ Ο ἴση· καὶ ἡ Ρ ἄρα τῆς Ο μείζων ἐστί. [5] κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΡΣ· συμπεσοῦνται ἄρα αἱ ΓΖ, ΑΗ ὡς ἐπὶ τὰ Η, Ζ. Τὸ δ' αὐτὸ ἔσται, κἂν μείζων ἡ ΑΘ ὄψις τῆς ΓΚ. μείζονες γὰρ ἔσονται αἱ Λ, Μ γωνίαι τῶν Ν, Ξ, ἡ δὲ Π τῆς Ο μείζων ἔσται, καὶ ἡ Ρ τῆς Ο· Ἐὰν δὲ ἡ ΑΘ εὐθεῖα ἐλάσσων ᾖ τῆς ΓΚ, διὰ τὰ αὐτὰ μείζων ἔσται ἡ Ο γωνία τῆς Π. ἔστι δὲ καὶ ἡ Ρ τῆς Π μείζων· οὐδὲν ἄρα κωλύει ἴσην εἶναι τὴν Ρ τῇ Ο, ἢ ἐλάσσονα τῆς Ο, καὶ μὴ συμπίπτειν τῇ ΓΖ τὴν ΑΗ. [6] Φανερὸν δὲ ὅτι



Prop. VI. Theor.

In cavis speculis si inter centrum & circumferentiam colloces oculum; radii reflexi interdum concurrent, interdum non concurrent.

Sit cavum speculum ΑΓ, cujus centrum Δ; oculus autem ponatur in puncto Β inter centrum & circumferentiam; radii vero sint ΒΑ, ΒΓ, qui reflectantur ad puncta Η, Ζ; ipsi autem radii ad speculum usque protrahantur, qui sint ΑΘ, ΓΚ. radius ΑΘ aut major est, aut æqualis, aut minor radio ΓΚ. Si igitur radius ΑΘ æqualis sit radio ΓΚ, æqualis etiam est [per 28.3.] circumferentia ΑΓΘ ipsi ΓΑΚ: quare angulus Μ æqualis erit angulo Ξ; æqualium enim segmentorum anguli sunt inter se æquales. duo item anguli Μ, Λ æquales erunt duobus angulis Ν, Ξ propter æqualitatem angulorum reflectionis & incidentiæ: quocirca reliquus angulus Ο æqualis erit reliquo angulo Π: igitur Ρ angulus major erit angulo Ο. quia enim angulus Ρ major est angulo Π (est enim Ρ exterior angulus in triangulo ΒΓΡ) angulus autem Π æqualis est angulo Ο: igitur angulus Ρ major erit angulo Ο. addatur communis angulus ΒΡΖ: concurrent igitur radii reflexi ΓΖ, ΑΗ versus partes Η, Ζ. Idemque eveniet, si radius ΑΘ major sit radio ΓΚ. duo enim anguli Λ, Μ majores erunt duobus angulis Ν, Ξ: ideoque major erit angulus Π angulo Ο, & angulus Ρ eodem angulo Ο. Quod si radius ΑΘ minor sit radio ΓΚ, eadem ratione major erit Ο angulus angulo Π. est autem angulus Ρ major angulo Π: nihil ergo prohibet quin angulus Ρ æqualis esse possit angulo Ο, vel eo minor, quod si fiat, radii ΓΖ, ΑΗ non concurrent. sive au-

1 Nam tres anguli ad Γ & Α duobus ἡμικυκλίοις angulis sunt æquales. *Savil.* 2 Sunt, ὡς ἔοικεν, ex *Scholio. Idem.* 3 Hoc quidem vere, sed demonstratio est pessima. *Idem.* 4 Nihil est solidi. cur enim concurrant si ΑΘ sit μείζων; non item si ΓΚ, cum utraque sit accepta ὡς ἔτυχε. *Idem.* 5 Sed tamen collecta est conclusio ac si ΖΡΘ major esset angulo Π quia externus, quo quid ineptius? nam ita demum non concurrunt ΑΗ, ΓΖ. *Idem.* 6 Jam φανερὸν nullo modo φανερὸν, nisi quod est φανερῶς falsum, etiamsi præcedentia non essent ἀσυλλόγιστα. *Idem.*

tem

tem ΑΓΘ circumferentia major sit quam circumferentia ΓΑΚ, sive ei æqualis; patet concursum radiorum reflexorum fieri neque in circumferentia, neque extra, sed intra tantum.

ἐάν τε μείζων ᾖ ἡ ΑΓΘ περιφέρεια τῆς ΓΑΚ, ἐάν τε ἴση ἡ σύμπτωσις τῶν ἀνακλάσεων, οὔτε ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, οὔτε ἐκτὸς οὐ μὴ γένηται, ἀλλ' ἐντὸς μόνον.

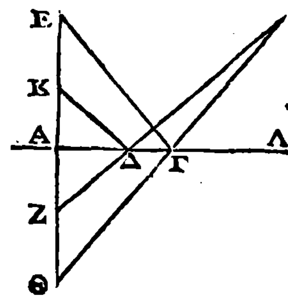
Prop. VII. Theor.

[1] ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζʹ.

Altitudines & profunditates in planis speculis eversæ apparent.

Τὰ ὕψη καὶ τὰ βάθη ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων ἐνόπτρων ἀνεστραμμένα φαίνεται.

Sit altitudo ΑΕ, planum autem speculum ΑΛ, oculus vero Β, à quo missi radii ΒΓ, ΒΔ reflectantur ad Ε, Κ. si igitur radii ΒΔ, ΒΓ in rectum producantur; Ε quidem, quod sursum est, deorsum apparebit in Θ; item Κ, quod deorsum est, apparebit sursum in Ζ: quare eversa apparebunt.



Ἔστω ὕψος μὲν τὸ ΑΕ, ἔνοπτρον δὲ ἐπίπεδον τὸ ΑΛ, ὄμμα δὲ τὸ Β, ὄψις δὲ αἱ ΒΓ, ΒΔ ἀνακλώμεναι ἐπὶ τὰ Ε, Κ. οὐκοῦν φαίνεται ἐκβληθεισῶν τῶν ὄψεων ἐπ' εὐθείας, τὸ μὲν Ε τὸ ἄνω ἐπὶ τοῦ Θ κάτω ὄντος, τὸ δὲ Κ κάτω ὂν ἐπὶ τοῦ Ζ τοῦ ἄνω ὄντος· ὥστε ἀνεστραμμένα ἐστὶ τῇ φαντασίᾳ.

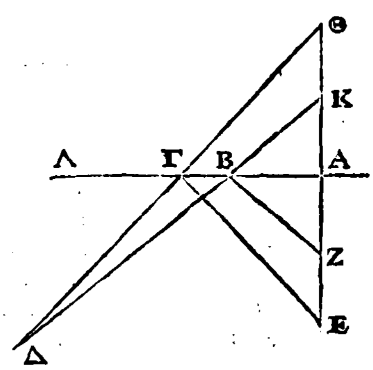
Aliter.

ΑΛΛΩΣ.

Quomodo profunditas apparet.

Ὡς βάθος φαίνεται.

Sit rursum profunditas ΕΑ, planumque speculum ΑΓ, oculus autem Δ, radii denique ab oculo exeuntes ΔΓ, ΔΒ, qui reflectantur ad Ε, Ζ. similiter atque prius, productis radiis usque ad puncta Θ, Κ; punctum quidem Ε, quod imum est, supremum apparebit in puncto Θ; punctum autem Ζ, quod supremum est, imum apparebit in Κ.



Ἔστω πάλιν βάθος μὲν τὸ ΕΑ, ἔνοπτρον δὲ ἐπίπεδον τὸ ΑΓ, ὄμμα δὲ τὸ Δ, ὄψις δὲ αἱ ΔΓ, ΔΒ ἀνακλώμεναι ἐπὶ τὰ Ε, Ζ. ὁμοίως τῶν ὄψεων ἐκβληθεισῶν ἐπὶ τὰ Θ, Κ φανεῖται τὸ μὲν Ε κάτω ὂν ἐπὶ τοῦ Θ ἄνω ὄντος. τὸ δὲ Ζ ἄνω ὂν ἐπὶ τοῦ Κ κάτω ὄντος.

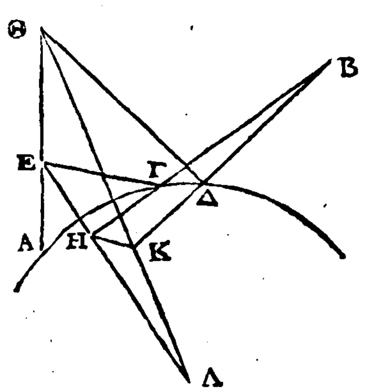
Prop. VIII. Theor.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ηʹ.

Altitudines & profunditates in convexis speculis eversæ apparent.

Τὰ ὕψη καὶ τὰ βάθη ἀπὸ τῶν κυρτῶν ἐνόπτρων ἀνεστραμμένα φαίνεται.

Sit altitudo ΑΘ, speculumque convexum ΑΓΔ, radii autem ΒΓ, ΒΔ, qui reflectantur ad Ε & Θ. ostensum antea est [per 4. opt.] radios reflexos ΓΕ, ΔΘ non posse concurrere versus partes Β, Θ. reliqua ut in planis speculis.

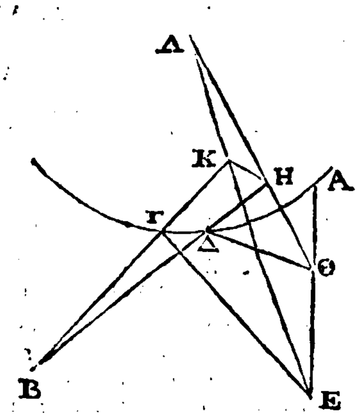


Ἔστω ὕψος τὸ ΑΘ, ἔνοπτρον δὲ κυρτὸν τὸ ΑΓΔ, ὄψεις δὲ αἱ ΒΓ, ΒΔ ἀνακλώμεναι ἐπὶ τὰ Ε, Θ. δέδεικται ὅτι οὐ συμπεσοῦνται. τὰ δὲ λοιπὰ ὁμοίως τοῖς ἐπιπέδοις.

Profunditas.

ΒΑΘΟΣ.

Sit rursus profunditas ΑΕ, convexum autem speculum sit ΑΔΓ, sitque oculus Β; radii autem reflexi ad puncta Ε, Θ, sint ΒΓΕ, ΒΔΘ. reliqua ut in planis speculis.



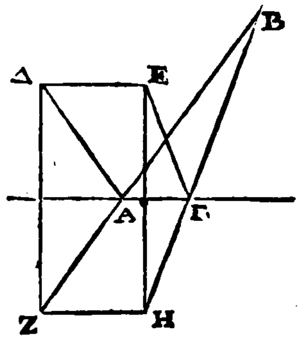
Ἔστω πάλιν βάθος τὸ ΑΕ, ἔνοπτρον δὲ κυρτὸν ΑΔΓ, ὄμμα δὲ τὸ Β· ὄψεις δὲ ἀνακλώμεναι ἐπὶ τὰ Ε, Θ, ΒΓΕ, ΒΔΘ. τὰ δὲ λοιπὰ καθάπερ ἐν τοῖς ἐπιπέδοις.

1 Theorema hoc & quinque sequentia pendent manifestissime ex 16, 17 & 18 sequentibus; neque nisi iis, aut demonstratis, aut sumptis, constare possunt. *Savil.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Τὰ πλάγια μήκη ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων ἐνόπτρων, ὡς τῇ ἀληθείᾳ ἔχει οὕτω καὶ φαίνεται.

Ἔστω ὄμμα τὸ Β, πλάγιον δὲ μῆκος τὸ ΔΕ, ἔνοπτρον δὲ τὸ ΑΓ· οὐκοῦν ἀνακλασθεισῶν τῶν ὄψεων φαίνεται τὸ μὲν Δ ἐπὶ τὸ Ζ, τὸ δὲ Ε ἐπὶ τὸ Η, καὶ ἔστιν οὕτω τῇ φαντασίᾳ, καθόπερ καὶ τῇ ἀληθείᾳ ἔχει· τὸ ἔγγιον, ἔγγιον, τὸ ἀπώτερον, ἀπώτερον.



Prop. IX. Theor.

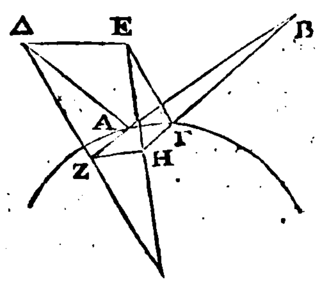
Obliquæ longitudines in planis ſpeculis, ut re ipſa ſe habent ita apparent.

SIT oculus B; longitudo vero oblique poſita ſit ΔE, planum autem ſpeculum AΓ: igitur per radios reflexos cernitur punctum quidem Δ in puncto Z, punctum vero E in puncto H, apparentque in eodem ſitu, in quo re vera ſunt; id nempe quod propius eſt, propius apparet; quod autem remotius, remotius.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Τὰ πλάγια μήκη ἀπὸ τῶν κυρτῶν ἐνόπτρων, καθάπερ ἐστὶν ἀληθῶς καὶ φαίνεται.

Ἔστω μῆκος τὸ ΕΔ, ὄμμα δὲ τὸ Β, ἔνοπτρον δὲ κυρτὸν τὸ ΑΓ, ὄψεις δὲ ἀνακλώμεναι ἐπὶ τὰ Ε, Δ. τὰ δὲ ἄλλα, τὰ αὐτά.



Prop. X. Theor.

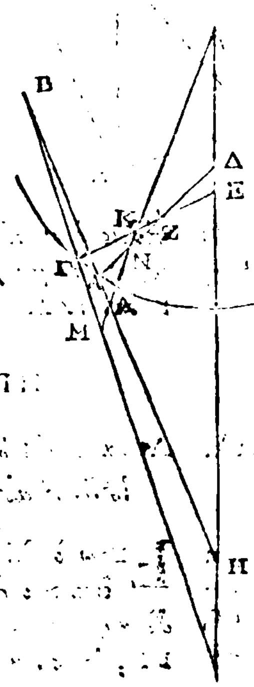
Obliquæ longitudines in convexis ſpeculis, in eodem ſitu apparent in quo revera ſunt.

SIT obliqua longitudo EΔ, oculus autem B, ſitque convexum ſpeculum AΓ, radii autem BΓ, BA reflectantur ad puncta E, Δ. reliqua ut in præcedenti.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Τὰ ὕψη καὶ τὰ βάθη ἀπὸ τῶν κοίλων ἐνόπτρων, ὅσα μὲν ἐστὶν ἐντὸς τῆς συμπτώσεως τῶν ὄψεων, ἀνεστραμμένα φαίνεται, καθάπερ ἐν τοῖς ἐπιπέδοις καὶ κυρτοῖς ἐνόπτροις· ὅσα δὲ ἐστὶν ἐκτὸς τῆς συμπτώσεως, καθάπερ ἐστὶ καὶ φαίνεται.

Ἔστω κοῖλον ἔνοπτρον τὸ ΑΓ, ὄμμα δὲ τὸ Β, ὄψεις δὲ ἀνακλώμεναι αἱ ΒΑ, ΒΓ, σύμπτωσις δὲ αὐτῶν ἐπὶ τὸ Ζ, ὕψη δὲ τὰ τὰ ΚΝ καὶ τὸ ΔΕ· καὶ τὸ μὲν ΚΝ ἐντὸς τῆς τοῦ Ζ συμπτώσεως, τὸ δὲ ΔΕ ἐκτὸς τῆς συμπτώσεως. οὐκοῦν ἐκβληθεισῶν, καθάπερ ἐν τοῖς ἐπιπέδοις καὶ κυρτοῖς ἐνόπτροις, φαίνεται τὸ μὲν Κ ἐπὶ τοῦ Μ, τὸ δὲ Ν ἐπὶ τοῦ Λ· ὥστε ἀνεστραμμένα φαίνεται. πάλιν ἐπὶ τοῦ ἐκτὸς τῆς συμπτώσεως ὕψους φαίνεται· τὸ μὲν Δ ἐπὶ τοῦ Η, τὸ δὲ Ε ἐπὶ τοῦ Θ, ὡς ἔχει οὕτως φαίνεται.



Prop. XI. Theor.

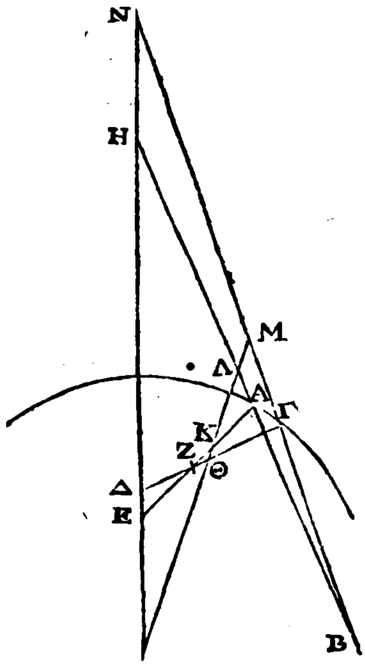
In cavis ſpeculis ſublimitates & profunditates, quæ ſunt intra concurſum radiorum, everſæ apparent, ut in planis ſpeculis; quæ autem ſunt extra concurſum, apparent ut re ipſa ſe habent.

SIT cavum ſpeculum AΓ, oculus autem B; radii vero reflexi BA, BΓ, qui concurrant in puncto Z, ſint autem ſublimitates duæ KN, ΔE; quarum KN quidem ſit intra concurſum Z, ſublimitas autem ΔE ſit extra concurſum. productis igitur radiis, quemadmodum in planis & convexis ſpeculis, apparet punctum quidem K in puncto M, punctum autem N in puncto Λ; everſa igitur apparent. contra vero ſit in ΔE ſublimitate, quæ eſt extra concurſum; apparet enim punctum Δ in puncto H, punctum vero E in puncto Θ, eo nimirum modo quo ſe habent.

PRO-

PROFUNDITAS.

Sint rursus profunditates duæ ΔE, KΘ, cavum autem speculum AΓ, oculus vero B; radii denique reflexi BΓΔ, BAE, qui concurrant in puncto Z. si igitur radii producantur, apparebunt puncta K, Θ eversa, punctum quidem K in puncto Λ, punctum vero Θ in puncto M, quemadmodum in planis & convexis speculis. contra vero puncta Δ, E apparebunt eo modo quo se habent: punctum quidem inferius E, in puncto H; punctum autem superius Δ, in puncto N.



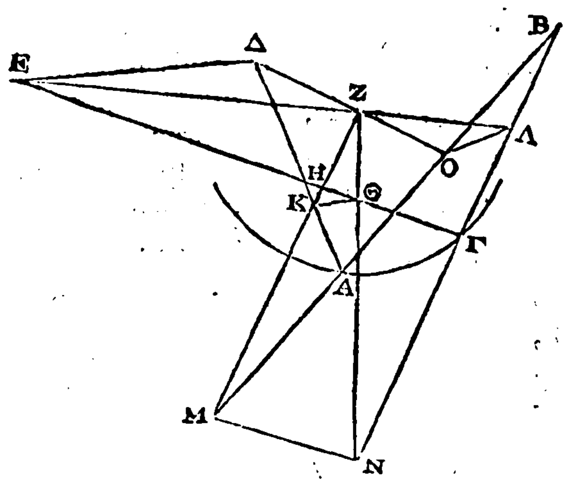
ΒΑΘΟΣ.

Πάλιν βάθος μὲν τὸ ΔΕ καὶ ΚΘ, ἔνοπτρον δὲ κοῖλον τὸ ΑΓ, ὄμμα δὲ τὸ Β, ὄψεις δὲ ἀνακλώμεναι καὶ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Ζ αἱ ΒΓΔ, ΒΑΕ. ἐκβληθεισῶν τῶν ὄψεων, ὁμοίως τὰ μὲν Κ, Θ φαίνεται ἀνεστραμμένα, τὸ μὲν Κ κατὰ τὸ Λ, τὸ δὲ Θ κατὰ τὸ Μ, καθάπερ ἐν τοῖς ἐπιπέδοις καὶ κυρτοῖς ἐνόπτροις· τὰ δὲ Δ, Ε, καθάπερ ἐστί· τὸ μὲν Ε κάτω κατὰ τὸ Η, τὸ δὲ Δ ἄνω κατὰ τὸ Ν.

PROP. XII. THEOR.

In cavis speculis obliquæ longitudines, intra concursum radiorum positæ, apparent ut sunt; quæ autem extra concursum sunt, eversæ apparent.

Sint obliquæ longitudines EΔ, ΘK, cavum autem speculum AΓ, oculus vero B; sintque radii reflexi BAΔ, BΓE, qui concurrant in puncto H, & obliqua quidem longitudo ΘK sit intra concursum H; ΔE vero sit extra eundem. puncta igitur Θ, K in suo naturali situ cernuntur, quemadmodum in planis & convexis speculis; puncta vero E, Δ eversa apparent; punctum enim Δ apparet in puncto O, punctum autem E in puncto Λ.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβʹ.

Τὰ πλάγια μήκη ἀπὸ τῶν κοίλων ἐνόπτρων, ὅσα μὲν ἐντὸς τῆς συμπτώσεως κεῖται τῶν ὄψεων, καθάπερ ἐστίν, οὕτω καὶ φαίνεται· ὅσα δὲ ἐκτός, ἀνεστραμμένα.

Ἔστω γὰρ μήκη μὲν πλάγια τὰ ΕΔ, ΘΚ, κοῖλον δὲ ἔνοπτρον τὸ ΑΓ, ὄμμα δὲ τὸ Β, ὄψεις δὲ ἀνακλώμεναι καὶ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Η, αἱ ΒΑΔ, ΒΓΕ, καὶ τὸ μὲν ΘΚ πλάγιον μῆκος ἔσω ἐντὸς τῆς συμπτώσεως τῆς Η, τὸ δὲ ΔΕ ἐκτός. ἐκ τούτου τὰ μὲν Θ, Κ κατὰ φύσιν φαίνεται, καθάπερ ἐν τοῖς ἐπιπέδοις καὶ κυρτοῖς ἐνόπτροις, τὰ δὲ Ε, Δ ἀνεστραμμένα· τὸ μὲν γὰρ Δ ἐπὶ τοῦ Ο φαίνεται, τὸ δὲ Ε ἐπὶ τοῦ Λ.

PROP. XIII. THEOR.

Res eadem cerni potest per plura specula plana.

SIT aspectabile A, oculus vero B, sint autem tria specula ΓΔ, ΔE, EZ; ducatur perpendicularis à puncto B in ΓΔ speculum, quæ sit BΓ, & ipsi BΓ ponatur æqualis ΓΣ; rursusque à pun-

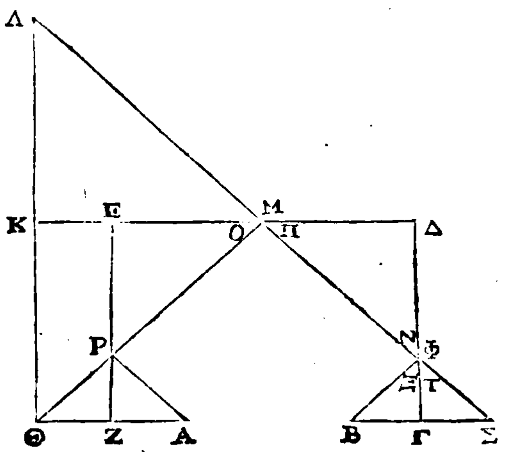
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγʹ.

Δυνατόν ἐστι διὰ πλειόνων ἐνόπτρων ἐπιπέδων ἰδεῖν τὸ αὐτό.

Ἔστω ὃ δεῖ ὀφθῆναι τὸ Α, ὄμμα δὲ τὸ Β, ἔνοπτρα δὲ τρία τὰ ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ἤχθω δὲ κάθετος ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ ΓΔ ἔνοπτρον ἡ ΒΓ, ἴση δὲ ἡ ΒΓ τῇ ΓΣ, καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ

Θ ἐπὶ

Α ἐπὶ τὸ ΕΖ κάθετος ἡ ΑΖ, καὶ τῇ ΑΖ ἴση ἡ ΖΘ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὸ ΔΕ ἐνόπτρον κάθετος ἤχθω ἡ ΘΚ, καὶ ἔστω τῇ ΘΚ ἴση ἡ ΚΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὸ Σ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΜΣ, ἀπὸ δὲ τοῦ Μ ἐπὶ τὸ Θ ἡ ΜΡΘ, ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ ΑΡ, ΒΦ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΣ, καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τὸ Γ γωνίαι· δύο δὴ αἱ ΒΓ, ΓΦ ταῖς ΣΓ, ΓΦ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΓΦ ὀρθὴ οὖσα γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΣΓΦ ὀρθῇ οὔσῃ ἴση ἐστί, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν πρὸς τὸ Β γωνία τῇ πρὸς τὸ Σ, ἡ δὲ Ξ τῇ Τ. ἀλλ᾽ ἡ Τ τῇ Ν ἐστιν ἴση, κατὰ κορυφὴν γάρ· ὥστε ἴση ἐστὶ καὶ ἡ Ν γωνία τῇ Ξ· ἡ ἄρα ΒΞ ὄψις ἀνακλασθήσεται ἐπὶ τὸ Μ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΘΚ τῇ ΚΛ, καὶ ὀρθαὶ δὲ αἱ πρὸς τὸ Κ· ἴση ἐστὶν ἡ Ο γωνία τῇ Π· ἀνακλᾶται ἄρα ἡ αὐτὴ ὄψις ἡ ΒΦΜ ἐπὶ τὸ Ρ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐπὶ τὸ Α, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΖΡΑ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΡΜ, ὁμοίως ταῖς λοιπαῖς ἀποδείξεσιν· ὁρᾷ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Β ὄμματος ὄψις τὸ Α διὰ τῶν τριῶν ἐνόπτρων ἐπιπέδων τῶν ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ.



ςto Α ad speculum ΕΖ ducatur perpendicularis ΑΖ, cui æqualis sit ΖΘ; & à puncto Θ ducatur ΘΚ perpendicularis ad speculum ΔΕ; sitque ΚΛ æqualis ipsi ΘΚ, & connectatur à puncto Λ in punctum Σ recta linea ΛΜΣ; & à puncto Μ in punctum Θ recta linea ΜΡΘ; connectantur denique rectæ ΑΡ, ΒΦ. quia igitur recta ΒΓ æqualis est rectæ ΓΣ, recti autem sunt anguli ad punctum Γ positi; duæ igitur ΒΓ, ΓΦ duabus ΣΓ, ΓΦ sunt æquales, utraque utrique; rectus item angulus ΒΓΦ æqualis est recto ΣΓΦ; & igitur [per 4. 1.] reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, quos æqualia latera subtendunt, angulus nempe Β angulo Σ, & angulus Ξ angulo Τ. sed [per 15. 1.] angulus Τ æqualis est Ν, sunt enim ad verticem: angulus igitur Ν æqualis est Ξ, quo fit [per 1. catop.] ut radius ΒΞ reflectatur versus Μ. rursus, quia æqualis est recta ΘΚ rectæ ΚΛ, recti vero sunt anguli ad Κ; æqualis ergo est angulus Ο angulo Π: idem igitur radius ΒΦΜ reflectitur ad punctum Ρ. eademque ratione idem radius reflectitur à puncto Ρ ad punctum Α, eo quod angulus ΖΡΑ æqualis est angulo ΕΡΜ, quod ut in reliquis ostendi potest: radius igitur emissus ex Β oculo videt punctum Α per tria plana specula ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ.

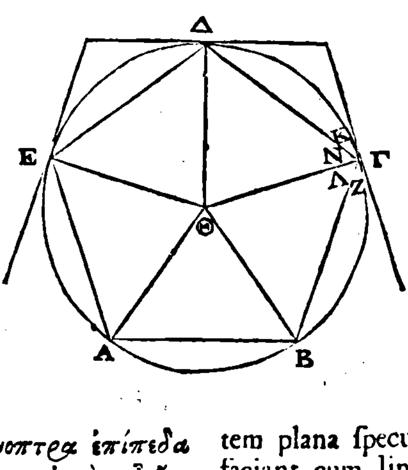
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἔστι δὲ καὶ δι᾽ ὅσων ἄν τις ἐπιτάξῃ ἐνόπτρων ἐπιπέδων, ἰδεῖν τὸ αὐτό· δεῖ δὲ κατὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἐνόπτρων πολυγώνιον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συνίστασθαι, δυσὶ πλείους ἔχον πλευρὰς τῶν ἐνόπτρων.

Prop. XIV. Theor.

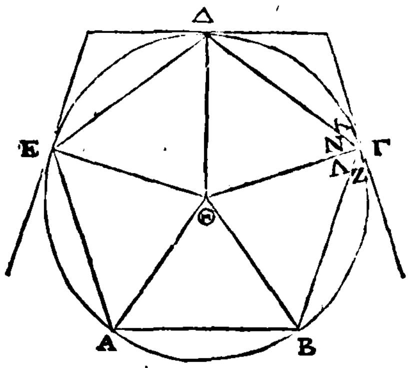
Fieri potest ut eadem res spectetur per quotlibet plana specula: oportet autem describere polygonum æquilaterum & æquiangulum, quod duobus lateribus excedat numerum speculorum.

Ἔστω γὰρ ὁ μὲν ὀφθῆναι δεῖ τὸ Α, ὄμμα δὲ τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἀναγεγράφθω πολυγώνιον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον δύο πλευρὰς πλείους ἔχον τῶν ἐνόπτρων, καὶ ἔστω τὸ ΑΒΔ πολυγώνιον, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ γραφομένου περὶ τὸ πολύγωνον τὸ Θ, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΓ, ΘΕ, ΘΔ, ΘΒ, ΘΑ ἐπὶ τὰς γωνίας, καὶ προσκείσθωσαν ἔνοπτρα ἐπίπεδα πρὸς ὀρθὰς ταῖς ἐπιζευγνυμέναις. ἐπεὶ οὖν ἴση



SIT aspectabile Α, oculus vero Β; connectaturque recta ΑΒ, & ab ΑΒ describatur polygonia figura æquilatera & æquiangula, cui sint duo latera plura quam specula, sitque ea figura polygonia ΑΒΔ; sumaturque centrum circuli descripti circa ipsam, sitque illud Θ, ex quo connectantur rectæ ΘΓ, ΘΕ, ΘΔ, ΘΒ, ΘΑ à centro ad singulos angulos; apponantur autem plana specula eo modo ut angulos rectos faciant cum lineis à centro ductis. quia igitur

tur Z Λ angulus æqualis est angulo K N, uterque enim rectus est; ex quibus angulus N angulo Λ est æqualis: reliquus igitur Z reliquo K est æqualis: quare reflectio radii B Γ fiet in Δ; reflectiones enim [per 1. catop.] fiunt ad æquales angulos. eodem modo ostendentur anguli ad Δ, E puncta inter se æquales: quare radius emissus à B, postquam in singula specula inciderit, inde sese reflectens perveniet ad punctum A.

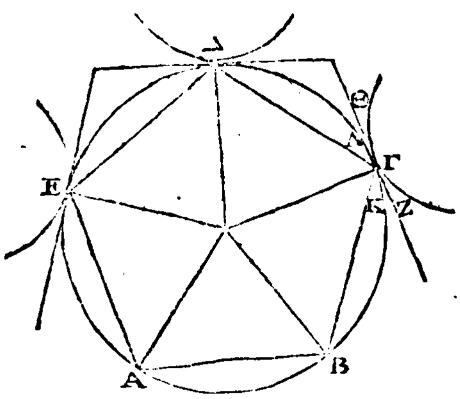


ἐστὶν ἡ Z Λ γωνία τῇ K N, ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἑκατέρα, ὧν ἡ N τῇ Λ ἴση ἐστί· λοιπὴ ἄρα ἡ Z τῇ K ἴση ἐστίν· ὥστε ἡ ἀνάκλασις τῆς B Γ ὄψεως ἐπὶ τὸ Δ ἔσται, διὰ γὰρ ἴσων γωνιῶν αἱ ἀνακλάσεις γίνονται. ὁμοίως δὲ δειχθήσονται καὶ αἱ πρὸς τοῖς Δ, E σημείοις γωνίαι ἴσαι αἱ πρὸς τοῖς ἐνόπτροις· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ B ὄψις ἀνακλωμένη, καὶ προσπεσοῦσα πρὸς πάντα τὰ ἔνοπτρα, ἥξει ἐπὶ τὸ A.

Prop. XV. Theor.

Fieri etiam potest ut eadem res spectetur per quotlibet specula convexa vel concava.

SIT aspectabile A, oculus autem B, describaturque, velut in præcedente, polygonia figura æquilatera & æquiangula A B Γ Δ E, & in punctis Γ, Δ, E ponantur specula ad incidentias radiorum. æqualis ergo est angulus Z angulo Θ, & angulus K angulo Λ: totus ergo angulus K Z toti angulo Θ Λ est æqualis: radius ergo B Γ reflectetur à convexo speculo Γ ad convexum speculum Δ, & à Δ ad E, & ab E ad A aspectabile. unde liquet fieri posse ut res eadem cernatur per quotlibet specula; sive convexa, sive cava, sive mista.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

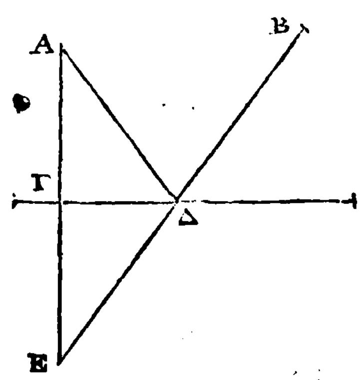
Ἔστι δὲ καὶ διὰ κυρτῶν ἐνόπτρων καὶ διὰ κοίλων ἰδεῖν τὸ αὐτό.

Ἔστω γὰρ ὃ δεῖ ἰδεῖν τὸ A, ὄμμα δὲ τὸ B, καὶ ὁμοίως ἀναγεγράφθω πολύγωνον ἰσόπλευρόν τι καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ πρὸς τοῖς Γ, Δ, E σημείοις ἔστω ἔνοπτρα κατὰ τὰς ἀφὰς τῶν ὄψεων. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν Z τῇ Θ, ἡ δὲ K τῇ Λ· ὅλη ἄρα ἡ KZ ἴση ἐστὶ τῇ ΘΛ· ἀνακλασθήσεται ἄρα ἡ ὄψις ἀπὸ τοῦ κυρτοῦ ἐνόπτρου τοῦ Γ ἐπὶ τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ E, καὶ ἀπὸ τοῦ E ἐπὶ τὸ A. φανερὸν οὖν, ὅτι κυρτῶν ἢ κοίλων ὄντων ἁπάντων καὶ ἀναμεμιγμένων, ἐστὶν ἰδεῖν τὸ αὐτό.

Prop. XVI. Theor.

Aspectabile quodlibet in planis speculis cernitur in perpendiculari ducta ab aspectabili in speculum.

SIT speculum planum Γ Δ, oculus autem B, sitque aspectabile A, & ab aspectabili in ipsum speculum ducatur perpendicularis A Γ. quia igitur in phænomenis positum est, punctum A cerni non posse occupato loco in quo est Γ: igitur punctum A videbitur in aliquo puncto lineæ A Γ productæ in directum. videbitur autem in radio B Δ in directum producto: videbitur ergo in puncto E: est enim positum, rectum id esse cujus extremis media officiunt: quare A E, B E rectæ sunt.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἐνόπτροις ἕκαστον τῶν ὁρωμένων κατὰ τὴν ἀπὸ τοῦ ὁρωμένου κάθετον ὁρᾶται.

Ἔστω ἔνοπτρον ἐπίπεδον τὸ Γ Δ, ὄμμα δὲ τὸ B, ὁρώμενον δὲ τὸ A, καὶ ἔστω κάθετος ἡ ἀπὸ τοῦ ὁρωμένου ἐπὶ τὸ ἔνοπτρον ἡ A Γ. ἐπεὶ οὖν ὑπόκειται ἐν τοῖς Φαινομένοις, ὅτι καταληφθέντος τοῦ τόπου τοῦ Γ, οὐχ ὁρᾶται τὸ A· τὸ A ἄρα ὀφθήσεται ἐπ' εὐθείας τῇ A Γ. ἀλλὰ δὴ καὶ ἐπ' εὐθείας τῇ B Δ ὄψει· κατὰ τὸ E ἄρα· ὑπόκειται γὰρ εἶναι τὸ εὐθὺ οὗ τὸ μέσον τοῖς ἄκροις ἐπιπροσθεῖ· ὥστε εὐθεῖα ἐστὶν ἡ A E καὶ ἡ B E.

ΠΡΟ-

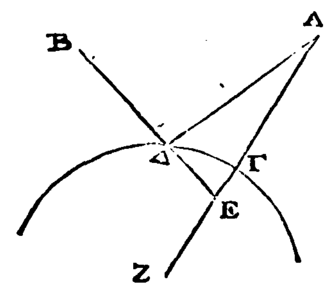
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ΄.

Ἐν τοῖς κυρτοῖς ἐνόπτροις ἕκαστον τῶν ὁρωμένων κατὰ τὴν ἀπὸ τοῦ ὁρωμένου εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἀγομένην εὐθεῖαν ὁρᾶται.

Ἔστω κυρτὸν ἔνοπτρον τὸ ΓΔ, ὄμμα δὲ τὸ Β, ὄψις ἡ ΒΔ ἀνακλωμένη ἐπὶ τὸ Α, καὶ ὁράσθω τὸ Α, κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΔ ὄψις ἐπὶ τὸ Ε. ἐπεὶ οὖν ὑπέκειτο ἐν τοῖς φαινομένοις, ὅτι, καταληφθέντος τοῦ Γ, τὸ Α οὐχ ὁρᾶται· ὀφθήσεται ἄρα ἐπ' εὐθείας τῆς ΑΓ κατὰ τὴν συμβολὴν τῆς ΒΔ ὄψεως καὶ τῆς ΑΓ ἐπὶ τοῦ Ε, καθάπερ ἐπὶ τοῖς ἐπιπέδοις.

PROP. XVII. THEOR.

In convexis ſpeculis quodlibet aſpectabilium cernitur in linea recta ducta ab aſpectabili ad centrum ejus ſphæræ, cujus portio eſt ipſum convexum ſpeculum.



SIT convexum ſpeculum ΓΔ, oculus autem B; radius BΔ, qui reflectatur ad A; ſit vero Z centrum ſphæræ, connectaturque recta AZ, & producatur radius BΔ uſque ad E. quia igitur in phænomenis poſitum eſt A non cerni occupato loco Γ: igitur cernetur in linea AΓ producta in rectum; in eo videlicet loco in quo radius BΔ productus concurrit cum AΓ, nempe in puncto E, veluti in planis ſpeculis.

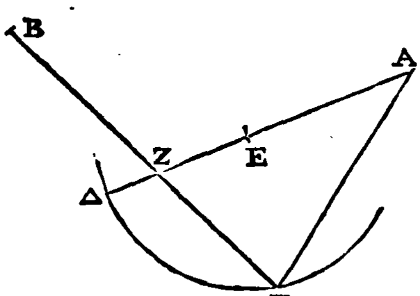
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη΄.

Ἐν τοῖς κοίλοις ἐνόπτροις ἕκαστον τῶν ὁρωμένων κατὰ τὴν ἀπὸ τοῦ ὁρωμένου εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἀγομένην εὐθεῖαν ὁρᾶται.

Ἔστω κοῖλον ἔνοπτρον τὸ ΓΔ, ὄψις δὲ ἀνακλωμένη ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Α ὁρώμενον, τῆς δὲ σφαίρας κέντρον ἔστω τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Ε ἐπεζεύχθω εὐθεῖα, καὶ ἐκβεβλήσθω. ἐπεὶ οὖν ὑπέκειτο ἐν τοῖς φαινομένοις, ὅτι, καταληφθέντος τοῦ τόπου τοῦ Δ, τὸ Α οὐχ ὁρᾶται, ὥστε φαίνεται ἐπ' εὐθείας τῆς ΑΕ· ὀφθήσεται ἄρα κατὰ τὴν συμβολὴν τῆς ΑΔ εὐθείας καὶ τῆς ΒΓ ὄψεως κατὰ τὸ Ζ.

PROP. XVIII. THEOR.

In cavis ſpeculis aſpectabilium quodlibet cernitur in recta linea ducta ab aſpectabili ad centrum ſphæræ, cujus portio eſt ipſum ſpeculum.



SIT cavum ſpeculum ΓΔ, radius vero ab oculo emiſſus BΓ, qui reflectatur ad aſpectabile A; ſit autem E centrum ſphæræ, cujus portio eſt ipſum ΓΔ ſpeculum; connectaturque recta AE, & producatur in rectum. quia igitur in phænomenis poſitum eſt ipſum A non cerni occupato loco Δ: igitur imago ipſius A aſpectabilis cernetur in ipſa AE linea recta in continuum producta: cernetur ergo in Z, in concurſu nempe ipſius AΔ rectæ cum radio BΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ΄.

Ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἐνόπτροις τὰ δεξιὰ, ἀριστερὰ φαίνεται, καὶ τὰ ἀριστερὰ, δεξιά· καὶ τὸ ἀπόστημα τὸ ἀπὸ τοῦ ἐνόπτρου ἴσον ἐστίν.

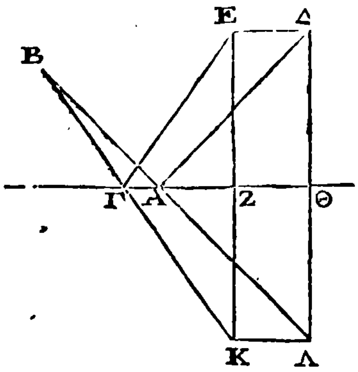
Ἔστω ἐπίπεδον ἔνοπτρον τὸ ΑΓ, ὄμμα δὲ τὸ Β, ὄψεις δὲ αἱ ΒΑ, ΒΓ ἀνακλώμεναι ἐπὶ τὰ Ε, Δ, ὁρώμενον δὲ ἔστω τὸ ΕΔ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Δ ἐπὶ τὸ ἔνοπτρον κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΕΖ, ΔΘ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν· ἐκβεβλήσθωσαν δὲ καὶ αἱ ΒΓ, ΒΑ ὄψεις,

PROP. XIX. THEOR.

In planis ſpeculis dextra apparent ſiniſtra, & ſiniſtra dextra; itemque imago æqualis apparet aſpectabili; imago etiam & aſpectabile æqualiter diſtant à ſpeculo.

SIT planum ſpeculum AΓ, oculus autem B; radii vero BA, BΓ, qui reflectantur ad E, Δ; aſpectabile vero ſit EΔ, & ab E, Δ ad ſpeculum ducantur perpendiculares EZ, ΔΘ & producantur; producantur etiam radii BΓ, BA,

& concurrant cum perpendicularibus in punctis K, Λ, connectaturque recta ΛK. apparet igitur E quidem in K, ipsum autem Δ in Λ: id enim antea ostensum est [ad 16. catopt.] sinistra igitur dextra apparent, & dextra sinistra. Et quia angulus KΓZ æqualis est angulo ZΓE, & recti sunt anguli ad Z: æqualis igitur [per 26. 1.] est recta ZK rectæ ZE. eademque ratione æqualis ΔΘ rectæ ΘΛ: quare intervallum, quo EΔ distat à speculo, æquale est intervallo quo imago KΛ distat ab eodem. Item EΔ aspectabile æquale est ipsi KΛ imagini, eo quod EZ æqualis est ipsi ZK, & ΔΘ ipsi ΘΛ, earum vero utrique communis & ad angulos rectos ipsa ΘZΓ.



καὶ συμπιπτέτωσαν ταῖς καθέτοις κατὰ τὰ Κ, Λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΚ. οὐκοῦν φαίνεται τὸ μὲν Ε ἐπὶ τοῦ Κ, τὸ δὲ Δ ἐπὶ τοῦ Λ, τοῦτο γὰρ προεδείχθη· τὰ ἄρα ἀριστερὰ, δεξιὰ φαίνεται, καὶ τὰ δεξιὰ, ἀριστερά. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΚΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΓΕ, καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τῷ Ζ· ἴση ἄρα ἂν εἴη καὶ ἡ ΖΚ τῇ ΖΕ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΘ τῇ ΘΛ· ἴσον ἄρα τὸ ἀπόστημα, ᾧ ἀπέχει ἀπὸ τοῦ ἐνόπτρου τὸ ΕΔ, τῷ ᾧ ἀπέχει τὸ εἴδωλον τὸ ΚΛ. Καὶ ἴσον τὸ ὁρώμενον τὸ ΕΔ τῷ εἰδώλῳ τῷ ΚΛ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΕΖ τῇ ΖΚ, τὴν δὲ ΔΘ τῇ ΘΛ, κοινὴν δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς τὴν ΘΖΓ.

PROP. XX. THEOR.

In convexis speculis sinistra apparent dextra, & dextra sinistra; & imago propius abest à speculo, quam aspectabile.

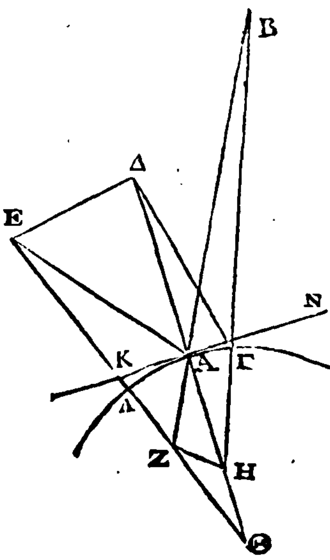
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ΄.

Ἐν τοῖς κυρτοῖς ἐνόπτροις τὰ ἀριστερὰ, δεξιὰ φαίνεται, καὶ τὰ δεξιὰ, ἀριστερά· καὶ τὸ ἀπόστημα ἀπὸ τοῦ ἐνόπτρου τὸ εἴδωλον ἔλασσον ἔχει.

SIT convexum speculum ΛΑΓ; centrum autem sphæræ, cujus portio est ipsum ΛΑΓ speculum, sit Θ; sitque oculus B; radii autem sint BA, BΓ, qui reflectantur ad Δ, E, sitque aspectabile ΔE; ex centro autem Θ ad Δ, E ducantur rectæ ΘΔ, ΘE, producanturque BA, BΓ radii usque ad puncta Z, H; connectaturque recta ZH, quæ [per 17. catop.] erit imago. igitur Δ apparet in H, & E in Z: quare dextra apparent sinistra, & sinistra dextra.

DICO præterea majorem esse EA quam AZ.

Per punctum enim A ducatur recta linea KAN, quæ tangat circulum in puncto A. quia ergo BA, AE æquales faciunt angulos cum circuli circumferentia, propter reflectionem; recta autem KAN circulum tangit: igitur linea KAN bifariam dividit angulum EAZ. & obtusus [per 16. 1. & 18. 3.] est angulus K: major est igitur EK quam KZ: ergo multo major est EA quam AZ: minus ergo distat imago ZH à speculo quam EΔ aspectabile.



Ἔστω ἔνοπτρον κυρτὸν τὸ ΛΑΓ, κέντρον δὲ τῆς σφαίρας τὸ Θ, ὄμμα δὲ τὸ Β, ὄψεις δὲ αἱ ΒΑ, ΒΓ ἀνακλώμεναι ἐπὶ τὰ Δ, Ε, ὁρώμενον δὲ τὸ ΔΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ κέντρου ἤχθωσαν ἐπὶ τὰ Δ, Ε αἱ ΘΔ, ΘΕ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ὄψεις ἐπὶ τὰ Ζ, Η, καὶ ἐπεζεύχθω τὸ ΖΗ εἴδωλον. οὐκοῦν τὸ μὲν Δ φαίνεται ἐπὶ τοῦ Η, τὸ δὲ Ε ἐπὶ τὸ Ζ· τὰ ἄρα δεξιὰ, ἀριστερὰ φαίνεται, καὶ τὰ ἀριστερὰ, δεξιά.

ΛΕΓΩ ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΕΑ τῆς ΑΖ.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Α ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας ἡ ΚΑΝ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΒΑ, ΑΕ πρὸς τὴν περιφέρειαν ἴσας γωνίας ποιοῦσι διὰ τὴν ἀνάκλασιν, ἐφάπτεται δὲ ἡ ΚΑΝ· δίχα ἂν εἴη τετμημένη ἡ ὑπὸ τῶν ΕΑΖ γωνία. καὶ ἀμβλεῖά ἐστιν ἡ Κ γωνία· [1] μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΚ τῆς ΚΖ· πολλῷ μᾶλλον ἡ ΕΑ τῆς ΑΖ· ἔλασσον ἄρα ἀπέχει τὸ εἴδωλον τὸ ΖΗ ἀπὸ τοῦ ἐνόπτρου.

PROP. XXI. THEOR.

In convexis speculis imagines sunt minores aspectabilibus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα΄.

Ἐν τοῖς κυρτοῖς ἐνόπτροις τὸ εἴδωλον ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὁρωμένου.

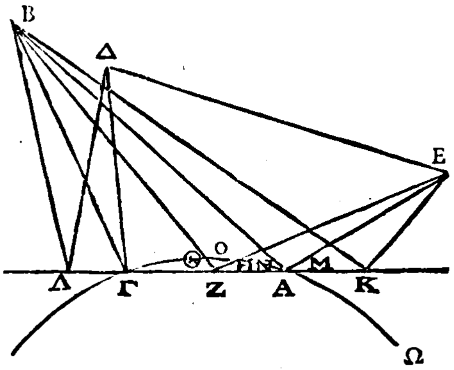
SIT convexum speculum AOΓ, oculus B; radii autem BA, BΓ, qui reflectantur ad

Ἔστω γὰρ κυρτὸν ἔνοπτρον τὸ ΑΟΓ, ὄμμα δὲ τὸ Β, ὄψεις δὲ ἀνακλώμεναι αἱ ΒΑ, ΒΓ ἐπὶ

1 Quia enim AKE major est quam AKZ, & anguli ad A æquales; KEA minor erit quam AZK; quare EA major quam AZ, & per 3. 6. EK quam KZ major. *Savil.*

τὰ

τὰ Δ, Ε· ἐκεῖθεν ἀπὸ τοῦ κυρτοῦ τοῦ ἐνόπτρου θεωρεῖται τὸ ΕΔ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. παρακείσθω δὴ ἔνοπτρον ἐπίπεδον τὸ ΑΓ, ἁπτόμενον τῶν ὄψεων κατὰ τὰ Α, Γ. ἐκεῖθεν ἡ ὄψις, μέλλουσα ἰδεῖν τὸ Ε ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ἐνόπτρου οὐκ ἔστιν ἡ ΒΑΕ· οὐ γὰρ ποιεῖ γωνίας ἴσας πρὸς τῷ ἐπιπέδῳ ἐνόπτρῳ, οὐδὲ μὴν κλασθήσεται μεταξὺ τῶν Α, Γ. κεκλάσθω γὰρ, εἰ δυνατὸν, καὶ ἔστω ἡ ΒΖ ὄψις· ἴση ἄρα ἡ Η γωνία τῇ Θ γωνίᾳ, διὰ τὴν ἀνάκλασιν. ἡ δὲ Θ μείζων τῆς Ν, ἡ δὲ Μ τῆς Η· ὥστε καὶ Μ τῆς Ν μείζων ἐστὶν, ὅπερ ἀδύνατον· αὐτὴ γὰρ ἡ Ν μείζων τῆς Μ ἐστιν, ἴση [1] γάρ ἐστιν ὅλῃ τῇ πρὸς τῇ περιφερείᾳ· ἐκτὸς ἄρα ἀνακλασθήσεται τοῦ Α. κεκλάσθω γὰρ, καὶ ἔστω ἡ ΒΚΕ. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΒΑΔ πεσεῖται ἐκτός· τὸ ἄρα ΕΔ ὑπὸ μείζονος γωνίας θεωρεῖται ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ἐνόπτρου τῆς περιεχομένης ὑπὸ ΚΒΑ ἤπερ ἀπὸ τοῦ κυρτοῦ. ἴσον δὲ ἐδείχθη φαινόμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐνόπτρῳ· φανερὸν οὖν ὅτι ἀπὸ τοῦ κυρτοῦ ἐνόπτρου τὸ εἴδωλον ἔλασσον φαίνεται τοῦ ὁρωμένου.

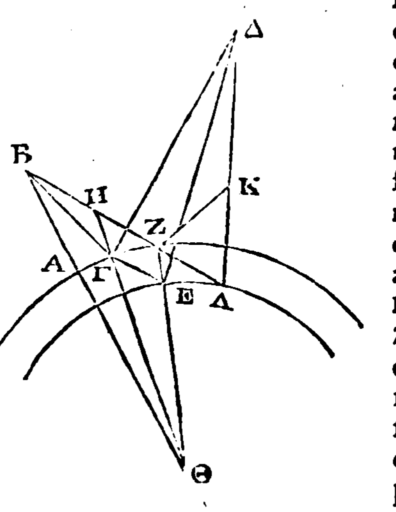


puncta Δ, Β: igitur aspectabile ΕΔ cernitur à speculo convexo sub angulo ΑΒΓ. apponatur huic convexo speculo planum speculum, quod sit ΑΓ: tangatque ipsos ΒΑ, ΒΓ radios in punctis Α, Γ. radius igitur, qui reflexus à plano speculo visurus sit punctum Ε, non est ΒΑΕ; non enim facit æquales angulos cum plano speculo, neque reflectetur ad Ε ab aliquo puncto posito inter Α, Γ. reflectatur enim, si fieri possit, sitque radius ΒΖ: æqualis ergo est [per 1. catop.] Η angulus angulo Θ, propter reflectionem. angulus autem Θ [per 16.1.] major est Ν, & angulus Μ angulo Η: quare Μ major erit quam Ν, quod est absurdum; idem enim Ν major est Μ, æqualis enim est toti angulo ad circumferentiam. ergo radius reflexus reflectetur ab aliquo puncto extra Α. reflectatur ergo, sitque ΒΚΕ. eodem modo ΒΑΔ, radius à speculo plano reflexus ad Δ, cadet extra ΑΓ: igitur ipsius ΕΔ imago à speculo plano cernitur sub angulo ΚΒΑ, qui major est quam angulus ΑΒΓ, sub quo cernitur à convexo speculo. ostensum autem est [ad 19. catop.] imaginem æqualem aspectabili apparere in speculo plano: constat ergo in convexis speculis imaginem apparere minorem aspectabili.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Ἐν τοῖς κυρτοῖς ἐνόπτροις ἀπὸ τῶν ἐλασσόνων ἐνόπτρων ἐλάσσονα φαίνεται τὰ εἴδωλα.

Ἔστω σφαῖρα μείζων μὲν ἡ ΑΓ, ἐλάσσων δὲ ἡ ΕΛ, περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Θ, ὄμμα δὲ τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΑΘ, καὶ ἀπὸ τῆς σφαίρας ἀνακεκλάσθω ὄψις ἡ ΒΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ἀνακλασθησομένη ὄψις ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος σφαίρας ἐπὶ τὸ Δ, οὔτε διὰ τοῦ Γ πεσεῖται, οὔτε ἐκτὸς τοῦ Γ. πιπτέτω γὰρ πρότερον, εἰ δυνατὸν, διὰ τοῦ Γ, καὶ ἀνακεκλάσθω ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος σφαίρας ἐπὶ τὸ Δ, καὶ ἔστω ἡ ΒΕΔ· καὶ ἐπεζεύχθω ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὸ Γ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η. δίχα δὴ τεμεῖ ἡ ΘΓΗ τὴν ὑπὸ τῶν ΒΓΔ γωνίαν, διὰ τὸ τὴν ΒΓΔ ἴσας ποιεῖν γωνίας πρὸς τῇ Γ περιφερείᾳ, διὰ τὴν ἀνάκλασιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὸ Ε ἐπιζευγνυμένη καὶ ἐκβληθεῖσα δίχα τεμεῖ τὴν ὑπὸ ΒΕΔ. τεμνέτω,



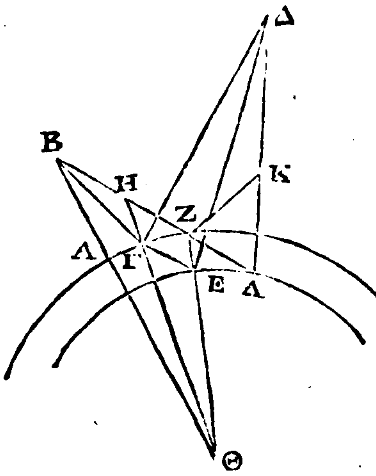
Prop. XXII. Theor.

In convexis speculis minoribus minores imagines apparent.

Sint circa idem centrum Θ duo sphærica specula convexa, quorum ΑΓ sit majus, ΕΛ vero sit minus; sitque oculus Β, connectaturque recta ΒΑΘ; & ex Γ puncto sphærici speculi reflectatur radius ΒΓΔ ad Δ aspectabile: dico fieri non posse ut radius, qui à minore speculo sphærico reflectetur ad Δ, cadat in idem minus speculum per Γ punctum majoris speculi, vel per aliud punctum positum extra Γ, id est, contentum inter Γ & Ζ. si enim id fieri potest, cadat prius per Γ punctum, & reflectatur à minore speculo sphærico ad Δ, sitque ΒΕΔ; connectaturque recta ΘΓ, & producatur usque ad Η. igitur recta ΘΓΗ bifariam secabit angulum ΒΓΔ, eo quod [per 1. catop.] ΒΓΔ æquales facit angulos ad Γ punctum circumferentiæ, propter reflectionem. eademque ratione connexa recta linea ex Θ in Ε & producta bifariam secabit angulum ΒΕΔ. secet,

1 Quin potius ΒΑΟ, qui minor est quam Ν, major est quam Μ. ἴση γάρ ἐστιν ὅλῃ τῇ πρὸς τῇ περιφερείᾳ sc. γωνίᾳ ΕΑΩ per primam hujus. *Savil.*

sitque ΘΕΖ. quia igitur [per 16. 1.] angulus ΒΓΔ major est ΒΕΔ, & illius dimidium dimidio hujus majus est: major ergo est angulus ΒΓΗ angulo ΒΕΖ. est vero etiam [per 15. & 16. 1.] minor, quod est absurdum: fieri ergo non potest ut radius, ad minus speculum reflexus in Δ, transeat per punctum Γ. his positis, cadat extra punctum Γ radius ΒΛ in minus speculum, à quo reflectatur ad Δ; secetque majus speculum in Ζ; radius autem à Ζ reflexus sc. ΒΖΚ minime concurret cum ΓΔ, id enim [ad 4. catop.] ostensum est. concurrat igitur cum ΛΔ in Κ: radius igitur ΒΖΚ reflexus à majore speculo cernit punctum Κ, ipse item radius ΒΛΚ reflexus à minore speculo cernit idem punctum Κ. id autem fieri non posse supra ostensum est: radius igitur, qui ab oculo emissus in minus speculum reflectitur in punctum Δ, cadet per aliquod punctum positum inter Γ, Α. eodem modo ostendetur idem in altera etiam parte fieri: igitur angulus Β, sub quo cernitur Δ aspectabile, minor fit à minore speculo quam à majore: quare [per 6. posit. opt.] imago rei aspectabilis minor apparebit in minore speculo.

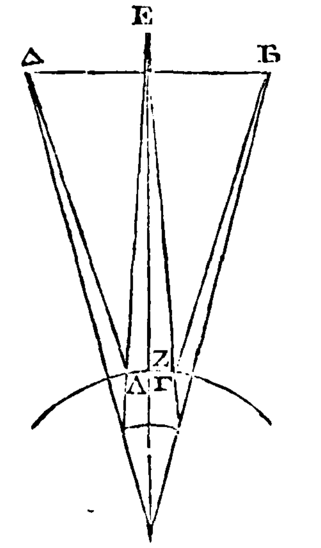


καὶ ἔσω ἡ ΘΕΖ. ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΒΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΕΔ, καὶ ἡμίσεια τῆς ἡμισείας, μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΓΗ τῆς ὑπὸ ΒΕΖ. ἔστι δὲ καὶ ἐλάσσων, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἥξει διὰ τοῦ Γ ἀνακλωμένη ὄψις ἐπὶ τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. ὑποκείσθω δὲ πάλιν τὰ αὐτὰ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς σφαίρας ἀνακλωμένη ὄψις ἡ ΒΛΔ ἐκτὸς πιπτέτω τοῦ Γ, καὶ τεμνέτω ἡ ΒΑ τὴν μείζονα σφαῖραν κατὰ τὸ Ζ, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Ζ ἀνακλωμένη ὄψις ἡ ΒΖΚ οὐ συμπεσεῖται τῇ ΓΔ, τοῦτο γὰρ δέδεικται· τῇ ἄρα ΛΔ συμπιπτέτω κατὰ τὸ Κ. ἡ ἄρα ΒΖΚ ὄψις ἀνακλωμένη ἀπὸ τοῦ μείζονος ἐνόπτρου ὁρᾷ τὸ Κ, καὶ ἡ αὐτὴ ἡ ΒΛΚ ἀνακλωμένη ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος ἐνόπτρου ὁρᾷ τὸ αὐτὸ Κ. τοῦτο δὲ ἐπάνω ἐδείχθη ἀδύνατον· μεταξὺ ἄρα πεσεῖται τῶν Γ, Α ἡ ἀνακλωμένη ὄψις ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος ἐνόπτρου ἐπὶ τὸ Δ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ ἑτέρου μέρους τὸ αὐτὸ ποιοῦσα· ὑπὸ ἐλάσσονος ἄρα θεωρεῖται γωνίας τῆς πρὸς τὸ Β γιγνομένης, ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος ἐνόπτρου ἤπερ ἀπὸ τοῦ μείζονος· ἔλασσον ἄρα φαίνεται τὸ εἴδωλον ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος ἐνόπτρου.

Prop. XXIII. Theor.

In convexis speculis aspectabilium imagines apparent convexæ.

SIT convexum speculum ΑΓ, oculus autem Ε, à quo emittantur radii ΕΑ, ΕΓ, qui reflectantur ad Δ, Β; radius autem ΖΕ reflectatur in seipsum ad Ε. radiorum igitur longissimi sunt, qui ad remotissimas partes tendunt; qui autem ad medium rei aspectabilis tendunt, sunt brevissimi, ut radius ΕΖ: igitur Ε propius videtur à speculo distare; puncta vero Β & Δ longius: itaque tota imago convexa apparet.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Ἐν τοῖς κυρτοῖς ἐνόπτροις τὰ εἴδωλα κυρτὰ φαίνεται.

ἜΣτω κυρτὸν ἔνοπτρον τὸ ΑΓ, ὄμμα δὲ τὸ Ε, ὄψεις δὲ ἀνακλώμεναι αἱ ΕΑ, ΕΓ ἐπὶ τὰ Δ, Β, ἡ δὲ ΖΕ ἀνακλωμένη δι' ἑαυτὴν ἐπὶ τὸ Ε. οὐκοῦν τῶν ὄψεων μέγισται μέν εἰσι τῷ μήκει αἱ πορρωτάτω, ἐλάχισται δὲ αἱ κατὰ μέσον, ὥσπερ ἡ ΕΖ· φαίνεται ἄρα τοῦ ἐνόπτρου ἔγγιον μᾶλλον τὸ Ε, πορρωτάτω δὲ τὸ Β καὶ τὸ Δ· ὥστε ὅλον κυρτὸν φαίνεται.

ΠΡΟ-

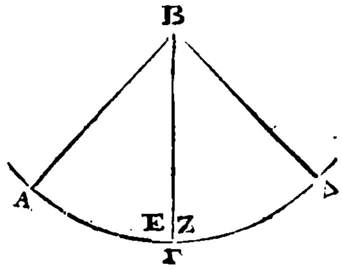
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδʹ.

Ἐν τοῖς κοίλοις ἐνόπτροις, ἐὰν ἐπὶ τοῦ κέντρου τὸ ὄμμα τεθῇ, ταὐτὸ μόνον φαίνεται τὸ ὄμμα.

Ἔστω κοῖλον ἔνοπτρον τὸ ΑΓΔ, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ Β, ὄψεις δὲ αἱ ΒΑ, ΒΓ, ΒΔ. οὐκοῦν ἴση ἡ Ε γωνία τῇ Ζ· ἥξει ἄρα ἡ ἀνακλωμένη ΒΓ ὄψις ἐπὶ τὸ Β. ὁμοίως δὲ καὶ αἱ λοιπαί· αὐτὸ ἄρα μόνον ὁρᾶται τὸ Β.

Prop. XXIV. Theor.

In cavis ſpeculis, ſi oculus ponatur in centro ſpeculi, ſeipſum tantum cernet.



SIT concavum ſpeculum ΑΓΔ, ejus vero centrum B; radii autem ab oculo in ſpeculum miſſi ſint BA, BΓ, BΔ. igitur angulus E æqualis eſt angulo Z: quare dius BΓ reflectetur ad B. idem facient reliqui radii: quare ipſe B oculus ſeipſum tantum cernet.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κεʹ.

Ἐν τοῖς κοίλοις ἐνόπτροις, ἐὰν ἐπὶ τῆς περιφερείας τεθῇ τὸ ὄμμα, ἢ ἔξω τῆς περιφερείας· οὐ φαίνεται τὸ ὄμμα.

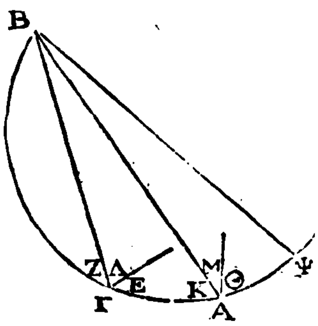
Ἔστω κοῖλον ἔνοπτρον τὸ ΑΓΒ, καὶ τὸ ὄμμα κείσθω ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ τὸ Β, ὄψεις δὲ προσπιπτέτωσαν αἱ ΒΑ, ΒΓ, καὶ ἀνακεκλάσθωσαν. οὐκοῦν μείζων ἐστὶν ἡ μὲν ΜΘ γωνία τῆς Κ [1], ἡ δὲ ΕΛ τῆς Ζ· ὥστε οὐκ ἀνακλασθήσονται αἱ ΒΑ, ΒΓ ὄψεις ἐπὶ τὸ Β ὄμμα. εἰς τὸ ὄμμα δὲ εἰ ἀνακλῶντο, ἴσαι αἱ γωνίαι πρὸς τοῖς Α, Γ ἐγίγνοντο.

Δειχθήσεται δὲ κἂν ἐκτὸς τῆς περιφερείας γένηται τὸ ὄμμα, τὰ αὐτὰ συμβαίνοντα, τουτέστι τὸ μὴ ὁρᾶσθαι τὸ ὄμμα, διὰ τὸ τὰς ἀνακλάσεις μὴ γίνεσθαι ἐπ' αὐτό.

Prop. XXV. Theor.

In cavis ſpeculis, ſi oculum colloces in circumferentia aut extra circumferentiam; ipſe oculus non apparebit.

SIT concavum ſpeculum ΑΓΒ, & oculus B ſtatuatur in ipſius circumferentia, ab eoque emittantur in ſpeculum radii BA, BΓ, & reflectantur. ergo angulus MΘ major eſt angulo K, & angulus EΛ major Z: igitur radii BA, BΓ non reflectentur ad B oculum. ſi enim reflecterentur ad oculum, æquales eſſent anguli quos radii faciunt cum circumferentia ad puncta A, Γ.



QUOD ſi oculus ponatur extra ſpeculi circumferentiam, idem ei accidere demonſtrabitur; nempe oculum non cerni, eo quod reflectiones ad ipſum non fiant.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛʹ.

Ἐν τοῖς κοίλοις ἐνόπτροις, ἐὰν ἐκβαλὼν διάμετρον τῆς σφαίρας ἐκ τοῦ κέντρου πρὸς ὀρθὰς ἀναγάγῃς, καὶ εἰς τὸ ἕτερον μέρος θῇς τὸ ὄμμα· οὐδὲν τῶν ἐν τῷ αὐτῷ μέρει, ἐν ᾧ τὸ ὄμμα ἐστὶν, ὀφθήσεται. τουτέστιν, οὔτε τῶν ἐντὸς τῆς διαμέτρου, οὔτε τῶν ἐκτὸς τῆς διαμέτρου, οὔτε τῶν ἐπὶ τῆς διαμέτρου.

Ἔστω κοῖλον ἔνοπτρον τὸ ΑΓΔ, διάμετρος δὲ ἔστω τῆς σφαίρας ἡ ΑΔ, καὶ τῇ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ Ζ ἡ

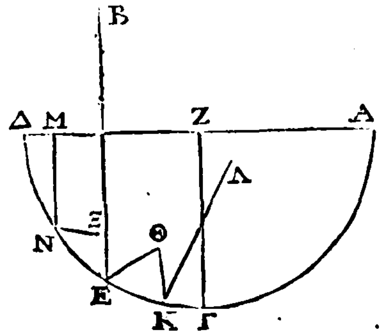
Prop. XXVI. Theor.

In ſpeculis concavis, ſi à centro ad circumferentiam excites rectam lineam quæ angulos rectos faciat cum ejuſdem ſphærici ſpeculi producta diametro, & oculum ſtatuas ad alterutram partem; oculus nil cernet eorum quæ ſunt in ea parte in qua ipſe eſt: hoc eſt, nihil eorum cernet quæ ſunt vel intra diametrum, vel extra diametrum, vel in ipſa diametro.

SIT concavum ſpeculum ΑΓΔ; diameter vero ſphæræ, cujus portio eſt ipſum ſpeculum, ſit AΔ, in qua ſit centrum Z, à quo excitetur

[1] Et quid ita? quaſi vero, poſita B Ψ ſemidiametro, non ſint anguli ad Ψ futuri æquales, ut ſit neceſſarium omnino τὰς ὄψεις in ſe ἀνακλᾶσθαι. *Savil.*

tetur recta ZΓ ad angulos rectos ipsi AΔ; sitque oculus B extra diametrum, & radius BE. igitur BE radius sese reflectens, nec ad B nec ad Z se reflectet; reflectitur enim ad æquales angulos: se igitur reflectet ut EΘ. similiter si oculus statuatur intra diametrum ad Θ, aut in ipsa diametro ad M, radii ΘK, MN se reflectent ut KΛ, NΞ: nihil igitur cernitur eorum quæ sunt ad eandem semidiametri partem ad quam est oculus, neque eorum quæ sunt in ipsa diametro, neque eorum quæ sunt extra diametrum, neque eorum quæ sunt intra.



ZΓ, ὄμμα δὲ ἔσω τὸ B ἐκτὸς τῆς διαμέτρου, ὄψις δὲ ἡ BE. οὐκοῦν ἡ BE ἀνακλωμένη οὐχ ἥξει οὔτε ἐπὶ τὸ B οὔτε ἐπὶ τὸ Z, ἐν γὰρ ἴσαις γωνίαις ἀνακλᾶται· ἥξει ἄρα ὡς ἡ EΘ. ὁμοίως δὲ καὶ ἐὰν ἐντὸς ἐμπέσῃ τὸ ὄμμα ὅπου τὸ Θ, ἢ ἐπὶ τῆς διαμέτρου ὅπου τὸ M, ἀνακλώμεναι αἱ ὄψεις αἱ ΘK, MN ἥξουσιν ὡς αἱ KΛ, NΞ· οὐκ ἄρα ὁρᾶται οὐδὲν τῶν ἐν τῷ αὐτῷ μέρει ὅπου ἐστὶ τὸ ὄμμα, οὔτε τῶν ἐπὶ τῆς διαμέτρου, οὔτε τῶν ἐκτὸς τῆς διαμέτρου, οὔτε τῶν ἐντός.

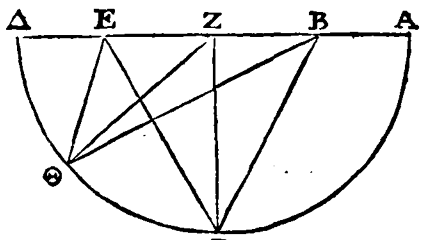
Prop. XXVII. Theor.

In concavis speculis, si oculi ita constituantur in diametro ut uterque à centro æqualiter distet, neuter oculorum cernetur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

Ἐν τοῖς κοίλοις ἐνόπτροις, ἐὰν ἐπὶ τῆς διαμέτρου τεθῇ τὰ ὄμματα ἴσον ἀπέχοντα τοῦ κέντρου· οὐδέτερον τῶν ὀμμάτων ὀφθήσεται.

SIT concavum speculum AΓΔ, ejusque diameter AΔ, centrum autem Z, à quo excitetur ZΓ ad angulos rectos ipsi AΔ; sint vero oculi B, E æqualiter distantes à centro Z, sitque radius BΓ: is ergo se reflectens veniet ad E; reflectitur enim secundum æquales angulos. nullus autem alius reflectetur ad E, ex. gr. BΘ. nam, si fieri potest, reflectatur ad E, connectanturque ΘE, ΘZ: igitur [per 1. catop.] angulus BΘE bifariam secatur à ZΘ. sunt ergo in eadem ratione [per 3. 6.] ut BΘ ad ΘE sic BZ ad ZE, quod fieri nequit; BΘ enim major est [per 7. 3.] quam ΘE, ipsa autem BZ [ex hyp.] æqualis est ipsi ZE: nullus igitur radius emissus à B reflectetur ad E, præter BΓ: unus igitur radius ad utrumque oculorum B, E reflectetur. & non cernetur E, quia BΓ productus non concurret cum BΔ ad partes Γ, Δ; imagines autem aspectabilium [per 18. catop.] apparent in solo concursu radii ab oculo emissi cum recta ab aspectabili per centrum speculi: nec vero EΓ concurret cum EA, ad partes Γ, A; in concavis enim speculis aspectabilium imagines visuntur in recta ab aspectabili ad centrum ipsius sphæræ ducta.



Ἔστω κοῖλον ἔνοπτρον τὸ AΓΔ, διάμετρος δὲ ἡ AΔ, κέντρον δὲ τὸ Z, πρὸς ὀρθὰς δὲ ἡ ZΓ, ὄμματα δὲ τὰ B, E ἴσον ἀπέχοντα τοῦ κέντρου, ὄψις δὲ ἡ BΓ· οὐκοῦν ἀνακλωμένη ἥξει ἐπὶ τὸ E; ἐν ἴσαις γὰρ γωνίαις ἀνακλᾶται. ἄλλη δὲ οὐδεμία ἥξει, ὡς ἡ BΘ. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘE, ΘZ· δίχα ἄρα τμηθήσεται ἡ ὑπὸ BΘE ὑπὸ τῆς ZΘ, καὶ ἀνάλογον ἔσται ὡς ἡ BΘ πρὸς ΘE οὕτως ἡ BZ πρὸς ZE, ὅπερ ἀδύνατον, ἡ μὲν γὰρ BΘ μείζων ἐστὶ τῆς ΘE, ἡ δὲ BZ ἴση τῇ ZE· οὐδεμία ἄρα ἥξει ἀνακλωμένη ἀπὸ τοῦ B ἐπὶ τὸ E· μία ἄρα ὄψις ἀνακλασθήσεται ἐφ' ἑκατέρου τῶν B, E ὀμμάτων. καὶ οὐκ ὀφθήσεται τὸ E, οὐ γὰρ συμπεσεῖται ἡ BΓ ἐκβαλλομένη τῇ BΔ ἐπὶ τὰ Γ, Δ μέρη, ἐφαίνετο δὲ ἕκαστον κατὰ τὴν συμβολὴν μόνον τῶν ὁρωμένων· οὐδὲ ἡ EΓ οὐ μὴ συμπέσῃ τῇ EA ἐπὶ τὰ Γ, A μέρη, ἐν γὰρ τοῖς κοίλοις ἐνόπτροις ἕκαστον τῶν ὁρωμένων κατὰ τὴν ἀπὸ τοῦ ὁρωμένου εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἀγομένην εὐθεῖαν ὁρᾶται.

Prop. XXVIII. Theor.

In cavis speculis, si semidiametrum bifariam seces, & à puncto sectionis lineam ad angulos rectos utrinque ducas, oculos autem ita colloces ut æqualiter di-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

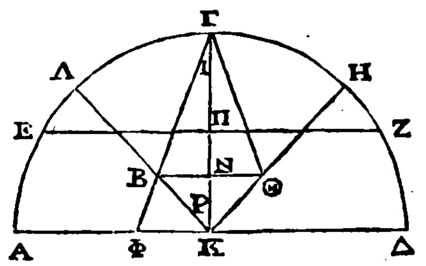
Ἐν τοῖς κοίλοις ἐνόπτροις, ἐὰν τὴν ἐκ τοῦ κέντρου δίχα τεμὼν, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἀγαγὼν, θῇς τὰ ὄμματα ἴσον ἀπέχοντα τῆς

ἐκ

ἐκ τοῦ κέντρου, τῆς δὲ ἡ ἀνὰ μέσον τῆς διαμέτρου καὶ τῆς πρὸς ὀρθὰς, ἢ ἐπ' αὐτῆς τῆς πρὸς ὀρθάς· οὐδέτερον τῶν ὀμμάτων φαίνεται.

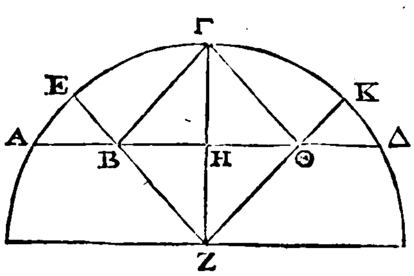
stent ab excitata semidiametro: neuter oculorum cernetur, sive hi sint inter diametrum & lineam ad angulos rectos, sive in recta quæ angulos rectos facit cum semidiametro.

Ἔστω κοῖλον ἔνοπτρον τὸ ΑΓΔ, διάμετρος δὲ ἡ ΑΔ, κέντρον δὲ τὸ Κ, καὶ ἡ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΚΓ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Π, πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἔστω ἡ ΕΠΖ, καὶ ὄμματα τὰ Β, Θ μεταξὺ κείσθωσαν τῆς ΑΔ καὶ τῆς ΕΖ ἐν παραλλήλοις τῆς ΕΖ, ΒΘ ἴσον ἀπέχοντα τῆς ΚΓ, ὄψις δὲ ἔστω ἡ ΒΓ ἀνακλωμένη ἐπὶ τὸ Θ· ἴσας ἄρα ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ περιφερείᾳ, διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν ΖΕ τῇ ΒΘ, καὶ ἴσην τὴν ΒΝ τῇ ΝΘ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΒ, ΚΘ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν, ἐκβεβλήσθω δὲ καὶ ἡ ΓΒ ἐπὶ τὸ Φ. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς ΒΚ, μείζων ἐστὶν ἡ Ρ γωνία τῆς Ι· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΘ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΘΒΚ, τουτέστι τῆς ὑπὸ ΒΘΚ· οὐκ ἄρα συμπεσεῖται ἡ ΒΓ τῇ ΚΘ· οὐκ ἄρα ὀφθήσεται τὸ Θ, κατὰ γὰρ τὴν συμβολὴν φαίνεται τῶν ΒΓ, ΚΘ.



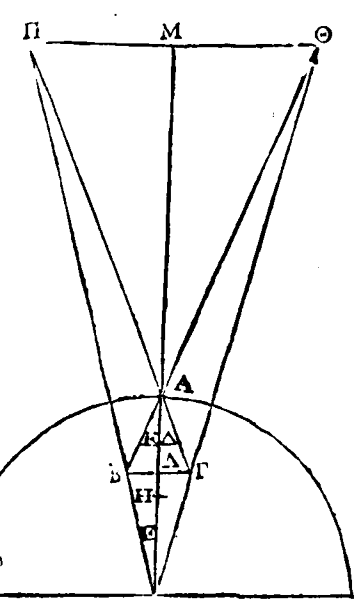
SIT concavum speculum ΑΓΔ, cujus diameter quidem ΑΔ, centrum autem Κ, à quo ad angulos rectos excitetur semidiameter ΚΓ, quæ bifariam secetur in puncto Π, per quod ducatur linea ΕΠΖ, quæ ad angulos rectos sit ipsi ΓΚ; sint autem oculi Β, Θ, collocati inter diametrum ΑΔ & lineam ΕΖ, cui sit parallela linea ΒΘ; ipsique Β, Θ oculi æqualiter distent à semidiametro ΚΓ; esto denique radius ΒΓ, qui reflectatur à puncto Γ ad Θ: angulos igitur æquales facit ad circumferentiam, eo quod linea ΖΕ parallela est ad lineam ΒΘ, & linea ΒΝ æqualis ipsi ΝΘ. connectantur ΚΒ, ΚΘ, & producantur ad Λ, Η, producatur etiam ΓΒ usque ad Φ. quia ergo major est ΒΓ quam ΒΚ, major est [per 18. 1.] angulus Ρ quam Ι; quocirca angulus ΓΒΘ major est [per 32. 1.] angulo ΘΒΚ, id est, angulo ΒΘΚ: non igitur concurrent ΒΓ, ΚΘ: ergo Θ non cernetur; deberet enim cerni in concursu rectarum ΒΓ, ΚΘ.

Ἔστω πάλιν τὰ αὐτὰ τῷ ἐκείνῳ, τὰ δὲ Β, Θ ὄμματα ἔστωσαν ἐπὶ τῆς δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τεμνούσης τὴν ἐκ τοῦ κέντρου, ἐπὶ τῆς ΑΔ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ μὲν ΒΓ τῇ ΒΖ, ἡ δὲ ΓΘ τῇ ΖΘ, παράλληλος ἂν εἴη ἡ ΒΓ τῇ ΖΘ· οὐκ ἄρα συμπεσεῖται ἡ ΒΓ ὄψις τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὸ ὁρώμενον, τουτέστι τῇ ΖΘ, ἐπὶ τὰ Θ, Γ μέρη· ὥστε οὐ φαίνεται τὸ Θ ὄμμα, κατὰ γὰρ τὴν συμβολὴν ἐφαίνετο τῶν ΒΓ, ΖΘ.

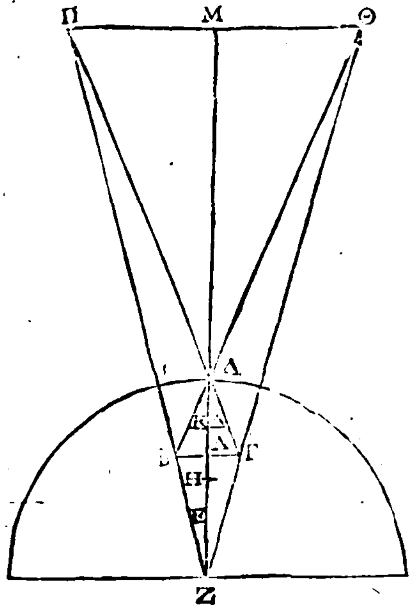


Iisdem manentibus, oculi autem Β, Θ collocentur in linea quæ semidiametrum secat bifariam & ad angulos rectos, id est in linea ΑΔ. quia igitur ΒΓ æqualis est ipsi ΒΖ, & ΓΘ ipsi ΖΘ: parallela ergo [per 8. & 27. 1.] est ΒΓ ipsi ΖΘ: quare radius ΒΓ non concurret cum linea ducta à centro ad aspectabile, id est cum linea ΖΘ, versus partes Θ, Γ: quare Θ oculus non cernetur: si enim cerneretur, deberet cerni in concursu linearum ΒΓ, ΖΘ.

Ἔστω πάλιν τὰ αὐτὰ, τῆς διχοτομίας ἀνωτέρω κείσθω τὰ ὄμματα τὰ Β, Γ ἴσον ἀπέχοντα τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ΖΑ· φημὶ δὴ φαίνεσθαι τὰ Β, Γ, καὶ τὰ δεξιὰ, ἀριστερὰ, καὶ τὰ ἀριστερὰ, δεξιὰ, καὶ τὸ εἴδωλον μεῖζον τοῦ προσώπου, καὶ τὸ ἀπόστημα ἀπὸ τοῦ ἐνόπτρου ἔχον μεῖζον τὸ εἴδωλον. ἔστω γὰρ ἡ ΒΑ ὄψις ἀνακλωμένη, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἀπὸ τοῦ Ζ κέντρου ἐπὶ τὰ Β, Γ αἱ ΖΒ, ΖΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΑ. ἐπεὶ οὖν διχοτομία



Iisdem manentibus, oculi Β, Γ collocentur loco superiore quam sit punctum illud in quo semidiameter bifariam secta est; distentque æqualiter ab ipsa ΖΑ semidiametro: dico fore ut Β, Γ appareant, & dextra videantur sinistra, & sinistra dextra, & faciei imago appareat major facie, & longius à speculo distet quam facies ipsa. sit enim ΒΑ radius, qui reflectatur ad Γ; & à centro Ζ ad puncta Β, Γ connectantur rectæ ΖΒ, ΖΓ, producaturque ΒΑ. quia igitur ΖΑ semidiameter bifariam secta est in H: major ergo est BZ quam BA; ideoque [per 18. 1.] major est K angulus angulo E. æqualis autem est [per 1.catop.] K ipsi Δ: major igitur est Δ quam E: quare lineæ ZB, ΓA productæ tandem concurrent. concurrant in puncto Π. eadem ratione lineæ BA, ZΓ productæ concurrent in puncto Θ: ergo [per 18.catop.] Γ apparebit in Θ, & B in Π; & dextra apparebunt sinistra, & sinistra dextra. quinetiam imago quæ est ΘΠ major apparebit quam facies quæ est BΓ; parallelæ enim sunt. imago ergo major apparet quam facies, & magis distat à speculo; major enim est MA quam AΔ.



ἐστὶ τὸ Η, μείζων ἐστὶν ἡ ΒΖ τῆς ΒΑ, καὶ ἡ Κ γωνία τῆς Ε. ἴση δὲ ἡ Κ τῇ Δ· μείζων ἄρα καὶ ἡ Δ τῆς Ε· συμπεσοῦνται ἄρα αἱ ΖΒ, ΓΑ ἐκβληθεῖσαι. συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Π. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΑ, ΖΓ συμπεσοῦνται κατὰ τὸ Θ· ὀφθήσεται ἄρα τὸ μὲν Γ ἐπὶ τοῦ Θ, τὸ δὲ Β ἐπὶ τοῦ Π, καὶ φαίνεται τὰ μὲν δεξιὰ, ἀριστερὰ, τὰ δὲ ἀριστερὰ, δεξιά. ἀλλὰ μὴν καὶ μείζων ἡ ΘΠ τῆς ΒΓ· παράλληλοι γάρ εἰσι. τὸ ἄρα εἴδωλον φαίνεται μεῖζον, καὶ μεῖζον ἀπέχον τοῦ ἐνόπτρου, μείζων γὰρ ἡ ΜΑ τῆς ΑΔ.

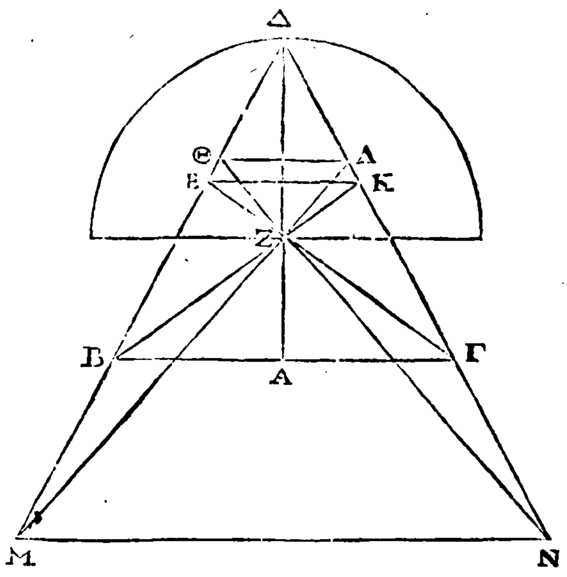
PROP. XXIX. THEOR.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Sin autem oculi extra diametrum ponantur; dextra apparebunt dextra, & sinistra sinistra; & imago apparebit minor ipsa facie, & inter faciem & speculum.

Ἐὰν δὲ ἔξω τῆς διαμέτρου τεθῇ ὄμματα· τὰ δεξιὰ φαίνεται δεξιὰ, καὶ τὰ ἀριστερὰ, ἀριστερὰ, καὶ τὸ εἴδωλον ἔλασσον τοῦ προσώπου, καὶ ἐν τῷ ἀνὰ μέσον τοῦ προσώπου καὶ τοῦ ἐνόπτρου.

Sint enim oculi B, Γ, centrum autem speculi sit Z, per quod ducatur AZΔ ad angulos rectos ipsi diametro; & per punctum A ducatur BAΓ ad angulos rectos ipsi AZΔ, sitque AΓ æqualis ipsi BA; radius autem BΔ reflectatur ad Γ, & per centrum ducantur BZK, ΓZE, & connectantur puncta E, K recta EK: igitur [per 18.catoptric.] B apparet in K; Γ vero apparet in E: quare dextra dextra, & sinistra apparent sinistra, & imago EK minor apparet ipsa BΓ facie; parallela namque est EK ipsi BΓ: apparetque ipsa imago in loco interjecto inter faciem & speculum.



Ἔστω γὰρ ὄμματα τὰ Β, Γ, κέντρον δὲ τὸ Ζ ἐνόπτρου, καὶ τῇ διαμέτρῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω ἡ ΑΖΔ, καὶ ταύτῃ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΓ, καὶ ἴση τῇ ΒΑ ἔστω ἡ ΑΓ, καὶ ὄψις ἡ ΒΔ ἀνακλωμένη ἐπὶ τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ κέντρου αἱ ΒΖΚ, ΓΖΕ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Κ ἡ ΕΚ ἐπεζεύχθω· ἐκεῖνο τὸ μὲν Β ἐπὶ τοῦ Κ φαίνεται, τὸ δὲ Γ ἐπὶ τοῦ Ε· τὰ ἄρα δεξιὰ, δεξιὰ, καὶ τὰ ἀριστερὰ, ἀριστερὰ φαίνεται, καὶ τὸ ΕΚ εἴδωλον ἔλασσον τοῦ ΒΓ προσώπου, παράλληλος γάρ ἐστιν ἡ ΕΚ τῇ ΒΓ· καὶ ἀνὰ μέσον τοῦ ἐνόπτρου καὶ τοῦ προσώπου φαίνεται τὸ εἴδωλον.

Si facies retrahatur à speculo, imago adhuc minor videbitur.

ΑΝΑΓΟΜΕΝΟΥ δὲ τοῦ προσώπου, ἔτι ἔλασσον φαίνεται τὸ εἴδωλον.

Sit enim MN facies eadem quæ erat in BΓ, sed remotior à speculo quam esset BΓ, habeatque eundem situm ad speculum: ergo recta linea ducta à puncto M ad Z centrum & producta cadet supra K, ut in Λ; linea autem ducta à N ad Z & producta cadet supra E, ut ad Θ: imago igitur ipsius MN est ipsa ΘΛ; & minor est ΘΛ quam EK & propior ad speculum.

Ἔστω γὰρ τὸ ΜΝ πρόσωπον τὸ αὐτὸ τῷ ΒΓ, ἀφεστηκὸς ἀπὸ τοῦ ΒΓ κείμενον ὁμοίως· ἐκεῖνο ἀπὸ τοῦ Μ ἐπὶ τοῦ Ζ κέντρου ἐπιζευχθεῖσα καὶ ἐκβληθεῖσα ἀνώτερον πεσεῖται τοῦ Κ ὡς τὸ Λ, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Ν ἐπὶ τὸ Ζ ἀνώτερον τοῦ Ε ἕως τοῦ Θ· φαίνεται ἄρα τὸ ΜΝ ὡς τὸ ΘΛ· καὶ ἔστιν ἔλασσον τὸ ΘΛ τοῦ ΕΚ καὶ ἔγγιον τοῦ ἐνόπτρου.

ΠΡΟ-

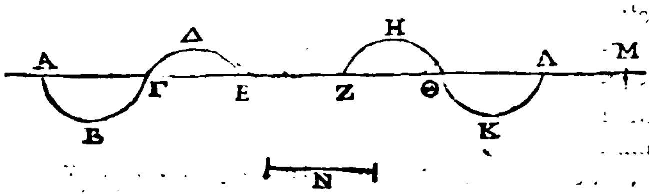
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λʹ.

Δυνατόν ἐστιν ἔνοπτρον κατασκευασθῆναι, ὥστε ἐν τῷ αὐτῷ φαίνεσθαι πλείω πρόσωπα· τὰ μὲν μείζονα, τὰ δὲ ἐλάσσονα· καὶ τὰ μὲν ἔγγιον, τὰ δὲ πορρώτερον· καὶ τὰ μὲν δεξιά, δεξιά· τὰ δὲ ἀριστερά, ἀριστερά.

Ἔστω γὰρ ἐπίπεδον τὸ ΑΜ· οὐκοῦν ἐν τούτῳ γένοιτο ἂν κυρτὰ μὲν ἔνοπτρα, οἷα τὰ ΑΒΓ, ΘΚΛ, κοῖλα δέ, οἷα τὰ ΓΔΕ, ΖΗΘ, ἐπίπεδα δέ, οἷα ΕΖ, ΑΜ. τεθέντος οὖν τοῦ προσώπου ὄντος τὸ Ν, φαίνεται ἀπὸ μὲν τῶν ἐπιπέδων ἴσα τὰ εἴδωλα καὶ ἴσον ἀπέχοντα· ἀπὸ δὲ τῶν κυρτῶν ἐλάσσονα καὶ ἔλασσον ἀπέχοντα· ἀπὸ δὲ τῶν κοίλων παντοδαπῶς, καθάπερ δέδεικται.

PROP. XXX. THEOR.

Speculum ejuſmodi conſtrui poteſt, ut in eo plures facies appareant; quædam majores, quædam minores; quædam propiores, quædam remotiores; & earum dextræ partes à dextris, & ſiniſtræ à ſiniſtris appareant.



SIT enim planum AM: ergo in eo eſſe poſſunt ſpecula convexa quidem, qualia ſunt ABΓ, ΘKΛ; cava autem, qualia ſunt ΓΔE, ZHΘ; plana vero, qualia ſunt EZ, AM. facie igitur poſita in loco N, apparebunt ejus imagines æquales quidem, & æqualiter à ſpeculo diſtantes [per 19 catop.] in planis; in convexis autem [per 20. & 21. catop.] minores & minus diſtantes; at in cavis omnifariam, ut oſtenſum eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λαʹ.

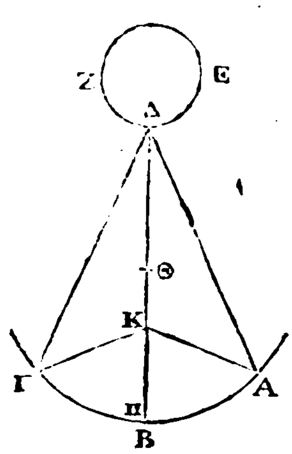
Ἐκ τῶν κοίλων ἐνόπτρων πρὸς τὸν ἥλιον τεθέντων πῦρ ἐξάπτεται.

Ἔστω κοῖλον ἔνοπτρον τὸ ΑΒΓ, ἥλιος δὲ ὁ ΕΖ, κέντρον δὲ τοῦ κατόπτρου τὸ Θ, καὶ ἀπό τινος σημείου τοῦ Δ ἐπιζευχθεῖσα μὲν ἐπὶ τὸ Θ κέντρου ἡ ΔΘ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Β, προσπιπτέτω δὲ ἡ ΔΓ ἀκτίς, καὶ ἀνακεκλάσθω ἐπὶ τὸ Κ· ἀνακλασθήσεται δὴ ἐπάνω τοῦ Θ κέντρου, ἡ γὰρ γωνία ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ ἡ Π ἐλάσσων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ λοιπῆς τῆς ὑπὸ ΒΓΔ. καὶ ἔστω ἡ ΑΒ περιφέρεια ἴση τῇ ΒΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἄλλη τις ἀκτὶς προσπιπτέτω ἡ ΔΑ· φανερὸν οὖν ὅτι ἀνακλωμένη ἡ ΔΑ ἀκτὶς πεσεῖται ἐπὶ τὸ Κ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΑΒ περιφέρειαν τῇ ΒΓ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Δ προσπίπτουσαι πρὸς τὸ ἔνοπτρον καὶ ἴσας [1] ἀπολαμβάνουσαι εἰς τὸ αὐτὸ συμπεσοῦνται τῇ ΒΘ ἀνώτερον τοῦ Θ.

Ἔστω πάλιν κοῖλον ἔνοπτρον τὸ ΑΒΓ, ἥλιος δὲ ὁ ΔΕΖ, καὶ ἀπό τινος σημείου τοῦ Ε διὰ τοῦ Θ κέντρου ἔστω ἡ ΕΘΒ, καὶ ἀπ' ἄλλων διὰ τῶν Δ, Ζ αἱ ΔΘΓ, ΖΘΑ. οὐκοῦν προαποδεδείχαμεν ὅτι αἱ ἀπὸ τοῦ Ε ἀκτῖνες συμπεσοῦνται εἰς ἑαυτὰς διὰ

PROP. XXXI. THEOR.

A concavis ſpeculis ſoli oppoſitis ignis accenditur.



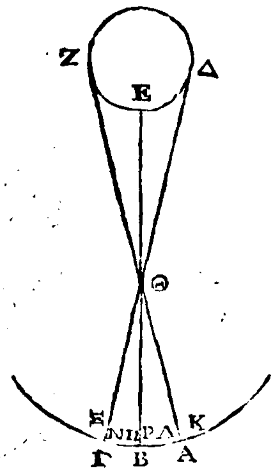
SIT cavum ſpeculum ABΓ, ſol autem EZ, centrum vero ſpeculi ſit Θ; & ab aliquo ſolis puncto, Δ videlicet, ad centrum Θ connexa ΔΘ producatur uſque ad B; radius autem ΔΓ cadat & reflectatur ad K: reflectetur ergo ſupra centrum Θ; angulus enim Π ad circumferentiam minor eſt angulo BΓΔ ad circumferentiam. ſit ergo circumferentia AB æqualis BΓ, & à puncto Δ cadat aliquis alius radius ΔA. conſtat ergo fore ut radius ΔA ſe reflectens cadat in K; eo quod circumferentia AB æqualis eſt BΓ. eodem modo oſtendetur fore, ut omnes radii à puncto Δ in ſpeculum cadentes, & æquales circumferentias comprehendentes, concurrant cum BΘ in puncto ſuperiore quam Θ.

Sit rurſus ſpeculum cavum ABΓ, ſol autem ΔEZ; & ab ejus aliquo puncto E ducatur recta linea EΘB per centrum Θ, & ab aliis punctis Δ, Z ducantur radii ΔΘΓ, ZΘA. itaque demonſtravimus quod radii à puncto E in ſeipſos reflectantur, propter angulos Π, P

1 Sc. περιφερείας, utrinque à B puncto. *Savil.*

inter

inter se æquales; est enim EB diameter. & ZΘA in seipsum recurret, propter angulos K, Λ inter se æquales; & ΔΘΓ redibit in seipsum, propter angulos N, Ξ inter se æquales. quod vero omnes isti in seipsos reflectantur, patet: quia enim per centrum transeunt, dividunt speculum in semicirculos; semicirculorum autem anguli æquales sunt: radii vero omnes reflectuntur ad æquales angulos; ergo in seipsos recurrunt: omnes igitur à sole per centrum, missi à punctis quibuslibet, in centrum concurrent. his igitur radiis incalescentibus, congeretur ignis circa centrum: quare stupa ibi posita incendetur.



γωνίας ἴσας ἔσας, διάμετροι γάρ εἰσιν. αἱ δὲ ἀπὸ τοῦ Z διὰ τὰς K, Λ γωνίας, αἱ δὲ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὴν ΓΔ διὰ τὰς N, Ξ γωνίας ἴσας ἔσας. ὅτι δὲ πᾶσαι αὗται εἰς ἑαυτὰς ἀνακλῶνται, δῆλον· ἐκ γὰρ τοῦ κέντρου οὖσαι ἡμικύκλια ποιοῦσι, αἱ δὲ τῶν ἡμικυκλίων γωνίαι ἴσαι εἰσί· δι' ἴσων ἄρα γωνιῶν αἱ ἀνακλάσεις γίνονται, εἰς ἑαυτὰς οὖν ἀνακλῶνται· πᾶσαι ἄρα συμπεσοῦνται ἀπὸ πάντων τῶν σημείων ἐπὶ τὰς διὰ τοῦ κέντρου καὶ ἐν τῷ κέντρῳ ἀκτῖνας. τούτων οὖν τῶν ἀκτίνων ἐκθερμαινομένων, περὶ τὸ κέντρον πῦρ ἀθροίζεται· ὥστε ἐνταῦθα στυππεῖον τεθὲν ἐξαφθήσεται.

ΤΕΛΟΣ ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΚΑΤΟΠΤΡΙΚΩΝ.

FINIS EUCLIDIS CATOPTRICORUM.

ΕΥ-

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ,

ΩΣ ΟΙΟΝΤΑΙ ΤΙΝΕΣ,

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΝ

ΒΙΒΛΟΣ.

EUCLIDIS,

UT QUIDAM ARBITRANTUR,

DE DIVISIONIBUS

LIBER.

VEL UT ALII VOLUNT,

MACHOMETI BAGDEDINI

LIBER

DE DIVISIONIBUS

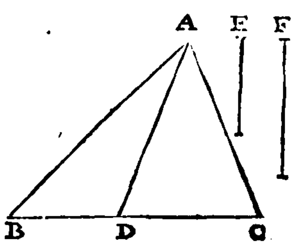
SUPERFICIERUM.

EUCLIDIS
DE
DIVISIONIBUS
LIBER.

Propositio I. Problema.

Per lineam protractam ab angulo trianguli, illum triangulum ſecundum proportionem datam dividere.

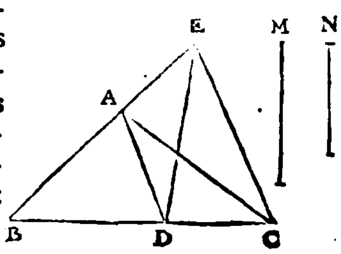
SIT triangulus A B C, & oporteat per lineam deſcendentem ab angulo A dividere triangulum A B C ſecundum proportionem E ad F. dividam enim lineam B C in puncto D ſecundum proportionem E ad F, per doctrinam decimæ ſexti; & protracta linea A D, propoſitum patet per primam ſexti.



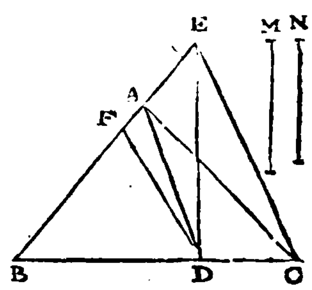
Prop. II. Probl.

Per lineam ductam à puncto, in latere dati trianguli aſſignato, dictum triangulum ſecundum proportionem datam dividere.

SIT triangulus A B C, in cujus latere B C ſignetur punctum D, à quo ducere oporteat lineam dividentem triangulum ſecundum proportionem M ad N; & jungatur D A. ab illo igitur extremo lateris B C, verſus quod voluero habere conſequens in relatione diviſionis, quod (gratia exempli) ſit punctum C, erigam lineam æquidiſtantem lineæ D A donec concurrat in E puncto cum linea B A ulterius protracta. quod autem concurrent, patet per 29. & 17. primi. erit igitur proportio M ad N aut æqualis proportioni B A ad A E, aut major, aut minor. ſit primo æqualis. erit igitur per primam ſexti, proportio B A D trianguli ad A D E triangulum, ſicut proportio M ad N. ſed per 37. primi, triangulus A D E eſt æqualis triangulo A D C: igitur per 7. quinti, proportio trianguli A B D ad triangulum A D C eſt ſicut proportio M ad N. quod fuit probandum.



Sit autem ſecundo, proportio M ad N minor proportione B A lineæ ad A E lineam. itaque dividam B E lineam ſecundum proportionem M ad N: cadet igitur diviſio inter B & A per 8. quinti. cadat in puncto F, & protrahatur linea D F, quam dico dividere triangulum ſecundum proportionem M ad N. *Probatio.* ducta enim linea D E, erit per 37. primi, triangulus A D E æqualis triangulo A D C. poſito igitur triangulo A F D communi; erit triangulus F D E æqualis figuræ quadrilateræ A F D C. cum igitur ex 1. ſexti, proportio trianguli B F D ad triangulum F E D ſit ſicut B F ad F E, & per conſequens ſicut M ad N: proportio trianguli B F D ad figuram quadrilateram A F D C eſt ſicut proportio M ad N. patet igitur propoſitum.



Sit tertio, proportio M ad N major proportione B A ad A E. dividatur igitur B E in puncto F, quod erit inter A & E, ſecundum proportionem M ad N, & ducatur F G æquidiſtanter lineæ C E donec concurrat cum linea A C ad punctum G; deinde jungatur linea G D: dico lineam G D dividere triangulum ſecundum proportionem datam. ducantur enim lineæ D F & D E. eſt igitur triangulus A D E æqualis triangulo A D C, per 37. primi; & per eandem, triangulus A D F æqualis eſt triangulo A D G: duo igitur reſidui, ſcilicet triangulus F D E & triangulus G D C, ſunt æquales. poſito etiam triangulo A B D communi duobus triangulis A F D & A G D æqualibus; erit triangulus B F D æqualis quadrilateræ figuræ B A G D: igitur triangulus F B D ad triangulum F D E eſt ſicut figura

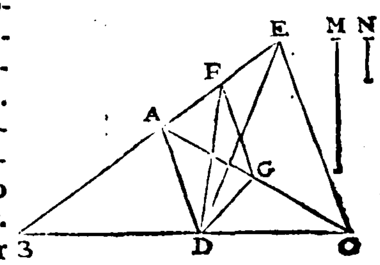
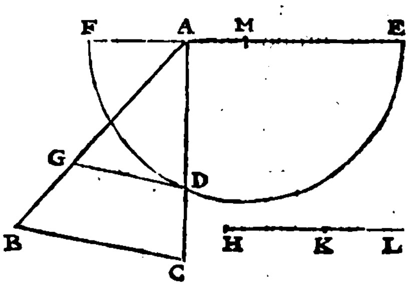


figura quadrilatera B A G D ad triangulum G C D: triangulus vero F B D ad triangulum F D E est sicut M ad N, per hypothesim & primam sexti: igitur proportio figuræ quadrilateræ B A G D ad triangulum G D C est sicut proportio M ad N. quod fuit propositum.

Prop. III. Probl.

Per lineam æquidistantem assignato lateri noti trianguli, [1] illum triangulum secundum proportionem datam dividere.

SIT proportio data H K ad K L; & triangulus A B C, quem secundum proportionem datam volo dividere per lineam æquidistantem lateri ejus B C. ab angulo enim A, versus quem volo habere antecedens in proportione quærenda, protraham lineam A E orthogonaliter super lineam A C, & sibi æqualem; & protrahatur linea E A secundum rectitudinem usque ad F, donec sit proportio E A ad A F sicut H L ad H K, & posito centro in medio puncto lineæ F E, quod sit M, describatur semicirculus F D E, secundum quantitatem lineæ M E: qui quidem semicirculus secabit lineam A C super punctum D;

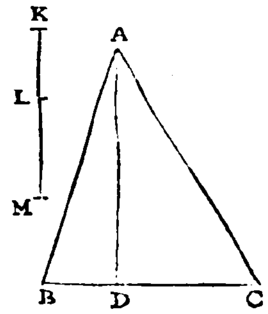


propter hoc quod linea A D minor est quam linea A E, & linea A E æqualis est lineæ A C. ducta igitur linea D G æquidistanter lineæ B C: dico quod proportio trianguli A G D ad superficiem G B C D est sicut proportio H K ad K L. *Probatio.* Proportio enim trianguli A B C ad triangulum A G D est sicut A C ad A D proportio duplicata, per 19. sexti. sed A C & A E sunt æquales: igitur proportio A B C trianguli ad A G D triangulum est sicut proportio A E ad A D duplicata. proportio autem A E ad A D duplicata est sicut A E ad A F, per 31. tertii & 8 sexti: igitur proportio trianguli A B C ad triangulum A G D est sicut proportio E A ad A F. proportio vero E A ad A F est sicut H L ad H K: igitur proportio A B C ad A G D est sicut L H ad H K: igitur divisim proportio superficiei G B C D ad triangulum A G D est sicut L K ad K H: igitur è contra A G D ad G B C D est sicut proportio H K ad K L. quod fuit probandum.

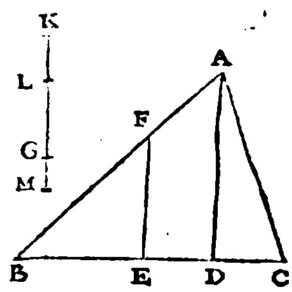
Prop. IV. Probl.

Per lineam æquidistantem perpendiculari [2], ab angulo trianguli super basim protractæ, illum triangulum secundum proportionem datam dividere.

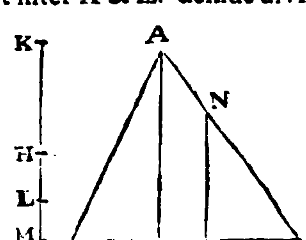
SIT proportio data K L ad L M; secundum illam volo dividere triangulum A B C per lineam æquidistantem perpendiculari A D. dividam enim lineam K M secundum proportionem B D lineæ ad lineam D C. & sit primo (gratia exempli) quod illa divisio cadat in puncto L. est igitur proportio K L ad L M sicut B D ad D C, & per consequens, sicut trianguli A B D ad triangulum A D C, per primam sexti: igitur linea A D dividit triangulum secundum proportionem datam.



Sit autem secundo, proportio K G ad G M sicut proportio B D ad D C; ita quod G sit inter L & M. deinde dividam triangulum A B D, juxta præmissam, per lineam æquidistantem lateri A D secundum proportionem K L ad L G; & sit linea sic dividens triangulum F E: dico igitur quod proportio trianguli F B E ad superficiem A F E C est sicut proportio K L ad L M. *Probatio.* nam proportio trianguli A D C ad triangulum A B D est sicut proportio M G ad G K: igitur conjunctim, per 18. quinti, proportio trianguli A B C ad triangulum A B D est sicut proportio M K ad K G. proportio autem trianguli A B D ad triangulum F B E [3] est sicut proportio K G ad K L: igitur, secundum æquam proportionalitatem per 22. quinti, erit proportio trianguli A B C ad triangulum F B E sicut proportio M K ad K L: igitur divisim, proportio superficiei A F E C ad triangulum F B E est sicut proportio M L ad K L: igitur è contra, proportio K L ad L M est sicut trianguli F B E ad superficiem A F E C. quod fuit probandum.



Sit tertio, proportio K H ad H M sicut B D ad D C, ita quod H sit inter K & L. deinde dividam, per præmissam, triangulum A D C secundum proportionem H L ad L M per lineam N O æquidistantem lateri A D: dico igitur quod proportio superficiei N A B O ad triangulum N O C est sicut proportio K L ad L M. *Probatio.* Proportio namque trianguli A B D ad triangulum A D C est sicut K H



1 Vel, ab illo triangulo portionem assignatam auferre: sic enim utitur in sequenti *Savil.* 2 Nihil est neque in κατασκευῇ, nec in demonstratione, ubi hæc perpendicularitas requiratur. satis erat simpliciter dixisse, rectæ lineæ basim ὡς ἔτυχε secari. deinde, in perpendicularibus quidem extra triangulum cadentibus non valde congruit demonstratio, nisi mutatis prius mutandis. *Idem.* 3 Nam supra F A D E ad E F B est ut G L ad K L: ergo conjunctim A B D ad F B E ut K G ad K L.

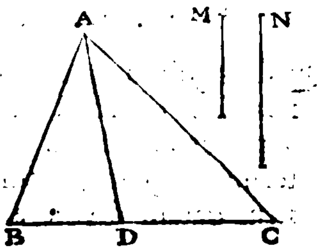
ad

ad H M, per primam sexti & 11. quinti. igitur conjunctim, per 18. quinti, proportio trianguli A B C ad triangulum A D C est sicut proportio K M ad H M: proportio autem trianguli A D C ad triangulum N O C [1] est sicut proportio H M ad L M. igitur secundum æquam proportionalitatem, proportio trianguli A B C ad triangulum N O C est sicut K M ad L M. igitur divisim, proportio superficiei N A B O ad triangulum N O C est sicut proportio K L ad L M. quod fuit propositum.

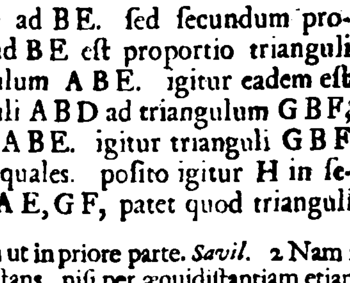
Prop. V. Probl.

Triangulum notum, per lineam æquidistantem lineæ ab angulo ejus ductæ, quæ [2] nec æquidistet alicui laterum ejus, neque alicui perpendicularium ejus, secundum proportionem datam dividere.

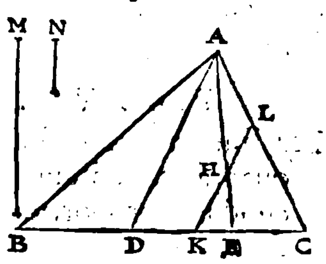
HÆC conclusio probari potest sicut præmissa. potest etiam & aliter sic probari. sit proportio data M ad N: & sit triangulus A B C, quem volo dividere secundum proportionem M ad N, per lineam æquidistantem lineæ A D, quæ descendat ab angulo A; nec sit perpendicularis, nec æquidistans alicui laterum trianguli. dividam igitur lineam B C secundum proportionem M ad N & cadat primo (gratia exempli) divisio in puncto D. linea igitur A D, per primam sexti, dividit triangulum secundum proportionem M ad N datam.



Cadat secundo divisio inter B & D in puncto E; ita quod sit proportio B E ad E C sicut M ad N. tunc ponam lineam B F mediam proportionaliter inter lineas B D & B E: & protracta linea F G æquidistanter lineæ A D, dico quod illa dividit triangulum secundum quod proponitur. *Probatio.* Protraham enim lineam A E. proportio igitur trianguli A B D ad triangulum G B F est sicut proportio B D ad B E. sed secundum proportionem B D ad B E est proportio trianguli A B D ad triangulum A B E. igitur eadem est proportio trianguli A B D ad triangulum G B F, & ad triangulum A B E. igitur trianguli G B F & A B E sunt æquales. posito igitur H in sectione linearum A E, G F, patet quod trianguli A G H & E F H sunt æquales; quibus addita superficie A H F C, erit triangulus A E C æqualis superficiei A G F C. eadem igitur est proportio trianguli A B E ad triangulum A E C sicut trianguli B F G ad superficiem A G F C. sed proportio trianguli A B E ad triangulum A E C est sicut proportio M ad N data. igitur liquet propositum.



Cadat tertio divisio inter D & C in puncto E, ita quod sit proportio B E ad E C sicut M ad N. ponam igitur lineam C K mediam proportionalem inter D C & E C. tunc protracta linea K L æquidistanter lineæ A D, dico quod illa dividit triangulum secundum quod proponitur. nam, ut prius, proportio trianguli A D C ad triangulum L K C est sicut proportio D C ad K C duplicata; & per consequens, est sicut proportio D C ad E C. & secundum eandem proportionem est proportio trianguli A D C ad triangulum A E C: igitur trianguli L K C & A E C sunt æquales, quare & trianguli A H L & K H E etiam sunt æquales. superficies igitur L A B K æqualis est triangulo A B E. igitur eadem est proportio superficiei L A B K ad triangulum L K C, quæ est trianguli A B E ad triangulum A E C. illa vero proportio est sicut M ad N. igitur patet propositum.

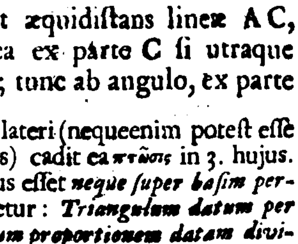


Nota, quod hoc modo probari potest præmissa conclusio: & est hæc probatio facilior quam præmissæ. [3]

Prop. VI. Probl.

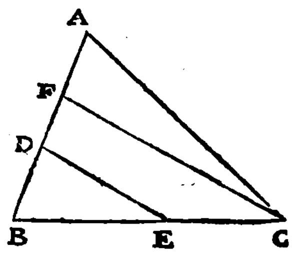
Triangulum notum, per lineam æquidistantem cuicunque lineæ in eo protractæ, sive ab angulo protrahatur, sive non, secundum proportionem datam dividere.

SI enim linea signata sit æquidistans [4] alicui lateri trianguli, habebitur intentum per tertiam hujus. si etiam dicta linea ab aliquo angulo descendat, habebitur propositum per præmissam. quod si assignata linea neque descendat ab angulo aliquo trianguli, neque alicui ejus lateri fuerit æquidistans, ut in triangulo A B C assignetur linea D E, quæ non sit æquidistans lineæ A C, sed concurreret cum ea ex parte C si utraque ulterius protraheretur; tunc ab angulo, ex parte



[1] Per conjunctam ut in priore parte. *Savil.* [2] Nam si æquidistans ponatur tertio lateri (neque enim potest esse alicui alteri æquidistans, nisi per æquidistantiam etiam coincidentiam intelligamus) cadit ea πτῶσις in 3. hujus. sed totum est frigidum: nam quod sequitur *neque alicui perpendicularium ejus* melius esset *neque super basim perpendicularis sit*, & etiam est in ἐκθέσει totum problema melius hoc modo proponeretur: *Triangulum datum per lineam æquidistantem lineæ ab angulo ejus ad basim ductæ quomodocunque, secundum proportionem datam dividere.* Idem. [3] Deest illa πτῶσις in qua A D non secat lineam B C, sed extra cadit; quam tamen supplere non est difficile *Idem.* [4] Vel coincidat. *Idem.*

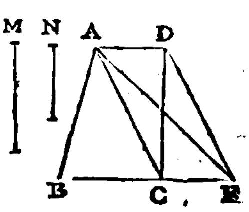
cujus esset concursus, ut ab angulo C, protrahatur linea C F in triangulo æquidistanter lineæ assignatæ, scilicet lineæ D E: & tunc per præmissam dividatur triangulus per lineam æquidistantem lineæ C F secundum proportionem datam. patet per 30. primi, quod ille tunc dividitur per lineam æquidistantem lineæ D E; & sic liquet propositum, quantumcunque extranee linea protrahatur.



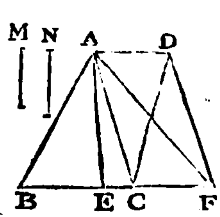
Prop. VII. Probl.

Per lineam protractam ab angulo noti quadranguli, illum quadrangulum secundum proportionem datam dividere.

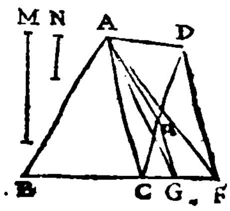
SIT proportio data M ad N: & sit quadrangulus A B C D; à cujus angulo A volo protrahere lineam dividentem quadrangulum secundum proportionem M ad N. protraham enim diametrum A C; & à puncto D protraham lineam D F æquidistantem lineæ A C, donec concurrat cum linea B C in puncto F: deinde dividam lineam B F secundum proportionem M ad N; & cadat primo divisio in puncto C: ita quod eadem sit proportio B C ad C F quæ est M ad N. dico igitur quod linea A C dividit quadrangulum, secundum quod proponitur. *Probatio.* Nam triangulus A D C æqualis est triangulo A F C, per 37. primi. sed proportio trianguli A B C ad triangulum A C F est sicut proportio M ad N, per primam sexti. igitur proportio trianguli A B C ad triangulum A C D est sicut proportio M ad N. quod fuit propositum.



Secundo, cadat divisio in E puncto inter B & C; ita quod sit proportio B E ad E F sicut M ad N. tunc protracta linea A E, dico quod proportio trianguli A B E ad superficiem A E C D est sicut proportio M ad N. *Probatio.* Protraham enim lineam A F. erit ergo triangulus A D C æqualis triangulo A F C, per 37. primi. posito igitur triangulo A E C communi utrique, erit superficies A E C D æqualis triangulo A E F. igitur eadem est proportio trianguli A B E ad superficiem A E C D, & ad triangulum A E F. cum igitur, per primam sexti, proportio A B E trianguli ad A E F triangulum sit sicut M ad N; patet quod proportio A B E trianguli ad A E C D superficiem est sicut M ad N. quod fuit probandum.



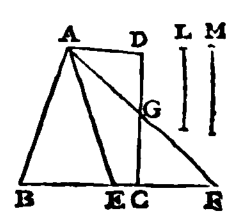
Cadat tertio divisio inter C & F in puncto G; ita quod sit proportio B G ad G F sicut M ad N. tunc protraham lineam G H æquidistanter lineæ D F, quousque concurrat cum linea D C in puncto H: deinde protracta linea A H, dico quod proportio superficiei A B C H ad triangulum A D H est sicut proportio M ad N. *Probatio.* Producam enim lineam A G. erit igitur triangulus A H C æqualis triangulo A G C. sed & totus triangulus A D C æqualis est toti triangulo A F C. ergo triangulus A D H residuus æqualis est triangulo A F G residuo. posito igitur triangulo A B C communi duobus triangulis A C H & A C G æqualibus; erit superficies A B C H æqualis triangulo A B G. erit igitur proportio superficiei A B C H ad triangulum A D H sicut trianguli A B G ad triangulum A G F. sed proportio trianguli A B G ad triangulum A G F est sicut proportio M ad N. igitur liquet propositum.



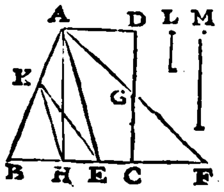
Prop. VIII. Probl.

Quadrangulum notum duorum æquidistantium laterum, per lineam ductam à puncto in altero æquidistantium laterum assignato, secundum proportionem datam dividere.

SIT quadrangulus notus A B C D: & punctum assignatum in latere B C æquidistante lateri A D sit E. tunc volo protrahere lineam ab E puncto, dividentem quadrangulum secundum proportionem L ad M. protrahatur enim B C ulterius secundum rectitudinem usque ad F: ita quod linea C F sit æqualis lineæ A D; & ducatur linea A F, secans lineam D C in puncto G. sunt igitur trianguli A D G & G C F similes, & latera A D & C F æqualia. igitur illi trianguli sunt æquales. addito igitur A B C G communi utrique, patet quod quadrangulus A B C D æqualis est triangulo A B F. *Istud memoriæ commenda.* Deinde dividam lineam B F secundum proportionem L ad M. & cadat divisio primo in puncto E, ita quod proportio B E ad E F sit sicut L ad M. tunc protracta linea E A, dico quod illa dividet quadrangulum secundum quod proponitur. nam propter æqualitatem triangulorum A D G & C G F, superficies A E C D æqualis est triangulo A E F. igitur eadem est proportio trianguli A B E ad superficiem A E C D, & ad triangulum A E F: proportio vero A B E ad A E F est sicut proportio L ad M. igitur proportio A B E ad residuum quadranguli est sicut proportio L ad M. quod est propositum.

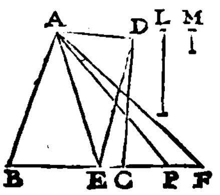


Cadat secundo divisio inter B & E in puncto H, ita quod sit proportio B H ad H F sicut L ad ad M. tunc protraham lineam HK æquidistanter lineæ AE; & secet lineam AB in puncto K: deinde protracta linea KE, dico quod illa dividit quadrangulum, secundum quod proponitur. protraham enim lineam AH. & quia lineæ AE, KH sunt æquidistantes; erunt trianguli KAH, & KEH æquales. igitur addito KBH utrique, erit triangulus ABH æqualis triangulo KBE. sed & triangulus AKE æqualis est triangulo AHE. igitur addito AECD communi utrique; erit superficies AKECD æqualis quadrangulo AHCD. quadrangulus vero AHCD æqualis est triangulo AHF, ut supra ostensum est. igitur eadem est proportio trianguli KBE ad superficiem AKECD sicut trianguli ABH ad triangulum AHF: & per consequens sicut L ad M. quod fuit probandum.

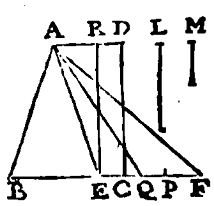


Tertio, cadat divisio inter E & F; facta figura, resecabo de linea EF lineam EP æqualem lineæ DA, deinde secabo lineam BF secundum proportionem L ad M.

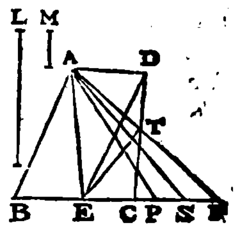
Et cadat divisio primo in puncto P; ita quod sit proportio BP ad PF sicut L ad M. tunc protraham lineam ED, quam dico dividere quadrangulum secundum formam propositam. *Probatio.* Producam enim lineam PA: & quia linea EP est æqualis lineæ AD, & æquidistans ei, erit triangulus ADE æqualis triangulo APE. posito igitur triangulo ABE communi, erit quadrangulus ABED æqualis triangulo ABP: & per consequens residuus triangulus DEC erit æqualis triangulo residuo APF; propter id quod supra probatum est: scilicet quod quadrangulus ABCD æqualis est triangulo ABF. liquet igitur quod eadem est proportio quadranguli ABED ad triangulum DEC sicut trianguli ABP ad triangulum APF, per 7. quinti. sed proportio trianguli ABP ad triangulum APF est sicut L ad M. igitur proportio ABED ad DEC est sicut L ad M. quod fuit probandum.



Secundo, cadat divisio inter E & P in puncto Q: ita quod sit proportio BQ ad QF sicut L ad M: deinde secabo ex linea AD [1] lineam AR æqualem lineæ EQ. tunc protracta linea ER, dico quod illa dividit quadrangulum, secundum quod proponitur. protraham enim lineam AQ. & quia lineæ AR & EQ sunt æquales & æquidistantes, erunt [per 38.1.] trianguli ARE & AQE æquales: quibus addito triangulo ABE communi, erit quadrangulus ABER æqualis triangulo ABQ. sed probatum est superius, quod totus quadrangulus ABCD æqualis est toti triangulo ABF. igitur quadrangulus RECD residuus æqualis est triangulo AQF residuo. igitur eadem est proportio quadranguli ABER ad quadrangulum RECD sicut trianguli ABQ ad triangulum AQF: & per consequens sicut L ad M. quod fuit propositum.



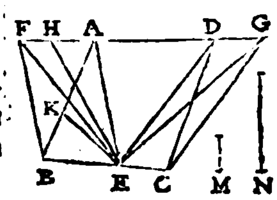
Tertio, cadat divisio inter P & F in puncto S: ita quod sit proportio BS ad SF sicut L ad M: dividam autem lineam DC secundum proportionem PS ad SF, in puncto T: & protraham lineam ET. dico quod illa dividit quadrangulum, secundum quod proponitur: producam enim lineam AS. quia igitur lineæ AD & EP sunt æquales & æquidistantes; erunt trianguli ADE & APE æquales, & per consequens addito triangulo ABE communi, quadrangulus ABED æqualis est triangulo ABP. sed & totus quadrangulus ABCD æqualis est toti triangulo ABF. igitur triangulus DEC æqualis est triangulo PAF. sed & proportio trianguli DET ad triangulum TEC est sicut proportio trianguli PAS ad triangulum SAF. [2] igitur triangulus DET æqualis est triangulo PAS: & triangulus TEC æqualis est triangulo SAF. jam vero probatum fuit quod quadrangulus ABED æqualis est triangulo ABP. igitur addito triangulo DET ad primum, & triangulo PAS sibi æquali ad secundum; erit pentagonus ABETD æqualis triangulo ABS. jam vero probatum fuit quod trianguli TEC & SAF sunt æquales. igitur eadem est proportio pentagoni ABETD ad triangulum TEC sicut trianguli ABS ad triangulum ASF; & per consequens sicut L ad M. quod fuit propositum.



Prop. IX. Probl.

Quemlibet notum quadrangulum, per lineam ductam à puncto in uno laterum non æquidistantium assignato, secundum proportionem datam dividere.

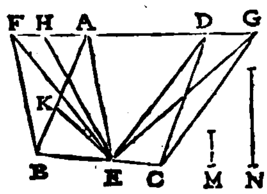
SIT quadrangulus ABCD, cujus duo latera AD, BC non æquidistent. illum igitur quadrangulum volo dividere secundum proportionem M ad N notam, per lineam ductam ab E puncto dato super lineam BC. producam enim duas lineas EA, ED: & extendam DA ex utraque parte secundum rectitudinem, donec linea BF concurreret cum ea in puncto F, æqui-



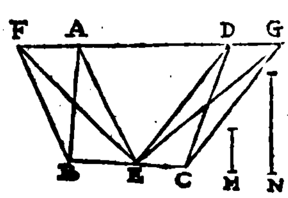
[1] Quæ æqualis est τῇ EP. *Savil.* [2] Si duo tota æqualia dividantur in parteis eandem inter se rationem habenteis, erunt partes ὁμόλογοι inter se æquales. *Idem.*

distanter lineæ A E: & C G concurreret cum ea in puncto G, æquidistanter lineæ E D. deinde dividam lineam F G secundum proportionem M ad N.

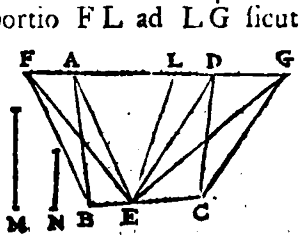
Et primo, cadat divisio inter F & A in puncto H, ita quod sit proportio F H ad H G sicut M ad N; dividam etiam lineam B A secundum proportionem F H ad H A: & cadat divisio in puncto K: ita quod sit proportio B K ad K A sicut F H ad H A. tunc ducta linea K E, dico quod illa dividit quadrangulum, secundum quod proponitur. protraham enim duas lineas E F, E G. erit igitur triangulus A F E æqualis triangulo A B E, per 37. primi; & triangulus D G E æqualis triangulo D C E. addito igitur utrique triangulo A E D, erit triangulus F E G æqualis quadrangulo A B C D proposito. *Hoc memoriæ commenda.* Et quia triangulus A F E est æqualis triangulo A B E; & eadem proportio F H ad H A sicut B K ad K A. igitur, per primam sexti, triangulus E H F æqualis [1] est triangulo E K B. igitur & residuum residuo æquale. triangulus igitur H E G residuus æqualis est pentagono A K E C D. eadem igitur est proportio trianguli E K B ad pentagonum A K E C D sicut trianguli E H F ad triangulum E G H; hoc est, sicut lineæ F H ad lineam H G, & per consequens sicut M ad N. quod fuit probandum.



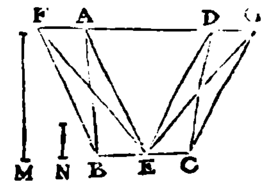
Secundo, cadat divisio in puncto A, ita quod sit proportio F A ad A G sicut M ad N. tunc protracta linea E A, dico quod illa dividit quadrangulum, secundum quod proponitur. nam triangulus A F E æqualis est triangulo A B E. igitur triangulus A E G residuus æqualis est [2] quadrangulo A E C D residuo. eadem ergo est proportio trianguli A B E ad quadrangulum A E C D sicut trianguli A F E ad triangulum A E G; hoc est, sicut F A ad lineam A G, & per consequens sicut M ad N. quod fuit probandum.



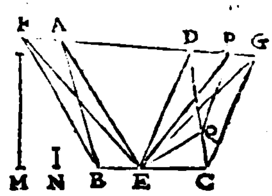
Tertio, cadat divisio inter A & D in puncto L, ita quod sit proportio F L ad L G sicut proportio M ad N. tunc dico quod linea E L dividit quadrangulum, secundum quod proponitur. cum enim trianguli A F E & A B E sint æquales, addito utrique triangulo L A E, erit triangulus L F E æqualis quadrangulo A B E L. igitur triangulus L E G residuus æqualis est [3] quadrangulo L E C D residuo. igitur eadem est proportio quadranguli A B E L ad quadrangulum L E C D sicut trianguli L F E ad triangulum L E G: & per consequens sicut proportio M ad N. quod fuit probandum.



Quarto, cadat divisio in puncto D: quia tunc trianguli D G E & D C E sunt æquales, erit triangulus D F E residuus æqualis quadrangulo D A B E residuo. igitur eadem est proportio quadranguli A B E D ad triangulum D E C sicut trianguli D F E ad triangulum D E G; hoc est, sicut lineæ F D ad lineam D G, & per consequens sicut M ad N. linea igitur D E dividit quadrangulum, secundum quod proponitur.



Quinto, cadat divisio in puncto P inter D & G; ita quod proportio F P ad P G sit sicut M ad N. tunc protraham lineam P Q æquidistantem lineæ C G, donec concurrat cum linea C D in puncto Q. protracta igitur linea E Q, dico quod illa dividit quadrangulum, secundum quod proponitur. protraham enim lineam P E. erit igitur triangulus D E P æqualis triangulo D E Q, per 37. primi. posito igitur triangulo A E D communi, erit triangulus A E P æqualis quadrangulo A E Q D. duo etiam trianguli A F E & A B E sunt æquales. igitur triangulus F E P æqualis est pentagono A B E Q D. erit igitur triangulus P E G residuus æqualis triangulo Q E C residuo: igitur eadem est proportio pentagoni A B E Q D ad triangulum Q E C sicut trianguli F E P ad triangulum P E G; hoc est, sicut lineæ F P ad lineam P G: & per consequens sicut M ad N. quod fuit propositum.



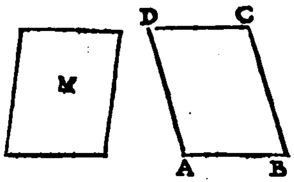
Prop. X. Probl.

Proposita linea nota, duabusque lineis à terminis ejus protractis, angulos qualescunque cum ea ex eadem parte causantibus, superficiem propositæ superficiei [4] notæ æqualem, super lineam notam propositam designare, ita quod dicta superficies [5] inter lineam illam notam, & lineam sibi æquidistantem, atque inter dictas duas ex una parte, vel ex altera notæ lineæ protractas lineas, includatur.

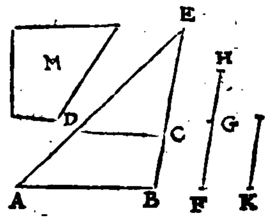
Verbi gratia sit linea A B nota: & duæ lineæ A D, B C secundum libitum situatæ. volo super lineam A B constituere superficiem æqualem superficiei M notæ, inclusam inter lineas

[1] Nam tota A F E, A B E æqualia sunt: & partes F H E, H E A rationem habent quam B E K, K E A, per 1. 6. ut in præcedente. *Savil.* [2] Nam triangulus F E G æqualis est quadrangulo A B C D, eodem argumento quo supra. *Idem.* [3] Nam F E G, A B C D sunt æqualia, ut supra. *Idem.* [4] Rectilineæ. *Idem.* [5] Id est, claudatur his quatuor rectis lineis, linea proposita, duabus protractis, & linea propositæ æquidistante. *Idem.*

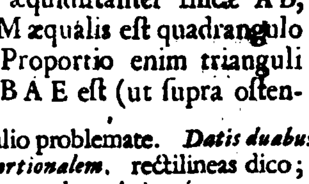
neas A D, B C, & inter A B, & lineam sibi æquidistantem. duo igitur anguli D A B & C B A aut sunt æquales duobus rectis, aut majores, aut minores. sint primo æquales duobus rectis. erit igitur [per 28. 1.] linea A D æquidistans lineæ B C. faciam igitur, per 44. 1, super lineam A B superficiem æquidistantium laterum, cujus anguli sint æquales angulis D A B, C B A, & ipsa superficies sit æqualis superficiei M: & patet propositum.



Sint secundo, duo anguli DAB & CBA minores duobus rectis. concurrent igitur [per 11. ax.] duæ lineæ A D, B C ex parte C D. concurrant autem in puncto E. nisi igitur triangulus E A B fuerit major superficie M; ex parte D C non potest talis superficies constitui, qualem volumus: sed tunc ex parte alia fieri oportebit. sit igitur triangulus E A B major superficie M: & sit [1] proportio trianguli E A B ad superficiem M sicut linea F H ad lineam F G: & sit linea K media proportionalis inter F H & G H. deinde secabo ex linea E B lineam E C, quæ se habeat ad lineam E B sicut linea K ad lineam F H. tunc protracta C D æquidistanter lineæ B A, dico quod superficies A B C D est æqualis superficiei M. *Probatio.* Nam proportio trianguli B A E ad triangulum C D E est, per 19. sexti, sicut proportio B E ad C E duplicata. igitur & sicut proportio F H ad K duplicata: & per consequens proportio trianguli B A E ad triangulum C D E est sicut proportio F H ad G H. igitur eversim, proportio trianguli B A E ad quadrangulum B A D C est sicut proportio F H ad F G. sed quæ est proportio F H ad F G, eadem est trianguli B A E ad superficiem M. igitur eadem est proportio trianguli B A E ad superficiem M, & ad quadrangulum B A D C. quare superficies M & quadrangulus B A D C sunt æquales. & hoc est quod volumus.



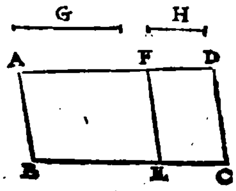
Sint tertio, duo anguli D A B & C B A majores duobus rectis. concurrent igitur ex parte A B. sitque in puncto E. ponam igitur proportionem G H ad G F secundum proportionem trianguli A B E ad superficiem M: sitque linea K media proportionalis inter F H & G H: & ponam proportionem E C ad E B secundum proportionem F H ad K. tunc protracta C D æquidistanter lineæ A B, dico quod superficies M æqualis est quadrangulo A B C D. *Probatio.* Proportio enim trianguli C D E ad triangulum B A E est (ut supra ostensum est) sicut proportio F H ad G H. igitur eversim, proportio C D E trianguli ad quadrangulum C D A B est sicut proportio F H ad F G. igitur disjunctim, proportio A B E trianguli ad quadrangulum A B C D est sicut proportio G H ad G F: & per consequens sicut proportio ejusdem trianguli A B E ad superficiem M. igitur quadrangulus A B C D & M superficies sunt æquales. & hoc volumus demonstrare.



Prop. XI. Probl.

Quadrangulum æquidistantium laterum, per lineam uni suorum laterum æquidistantem, secundum proportionem datam dividere.

SIT quadrangulus æquidistantium laterum A B C D: quem volo dividere secundum proportionem G ad H, per lineam æquidistantem lateri ejus A B. dividam enim lineam B C in puncto E secundum proportionem G ad H: & protraham lineam E F æquidistantem lineæ A B: & habetur propositum.

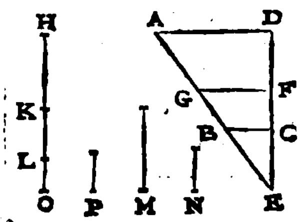


Nam per primam sexti, eadem est proportio quadranguli A B E F ad quadrangulum F E C D sicut lineæ B E ad lineam E C: & per consequens sicut G ad H. quod fuit propositum.

Prop. XII. Probl.

Quadrangulum duorum tantum æquidistantium laterum, per lineam æquidistantibus ejus lateribus æquidistantem, secundum proportionem datam dividere.

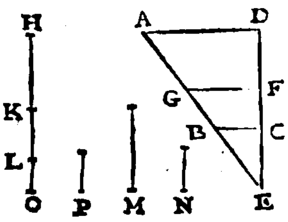
SIT quadrangulus A B C D, cujus tantum duo latera A D & B C æquidistent. illum igitur quadrangulum volo dividere secundum proportionem M ad N, per lineam æquidistantem lateribus ejus A D & B C: latera enim ejus A B & D C concurrent necessario. sitque in puncto E: & ponam proportionem H O ad L O secundum proportionem trianguli D A E ad triangulum C B E. convertendo igitur & dividendo, erit proportio trianguli C B E ad quadrangulum D A B C sicut L O ad L H. dividam autem lineam H L in puncto K secundum proportionem M ad N; ita quod sit proportio H K ad K L sicut M ad N. & sit linea P media proportionalis inter lineas K O & O L: & ponam proportionem F E ad C E secundum proportionem K O ad P. deinde protraham li-



[1] Etiam hic opus est alio problemate. *Datis duabus figuris planis rectilineis, & linea recta, rectam lineam reperire quarto loco proportionalem.* rectilineas dico; nam si figuræ proponantur circulares aut ex mixtarum genere, næ problema istuc multo erit ἀλυτότερον eo quod ab auctore proponitur. *Savil.*

 neam

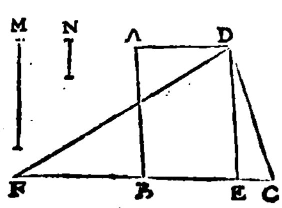
neam F G æquidistantem lineæ D A. dico igitur quod illa dividit quadrangulum, secundum quod proponitur. *Probatio*. Nam proportio trianguli F G E ad triangulum C B E est sicut F E ad C E proportio duplicata. igitur & sicut K O ad P proportio duplicata: & per consequens proportio trianguli F G E ad triangulum C B E est sicut proportio K O ad L O. igitur divisim proportio quadranguli F G B C ad triangulum C B E est sicut proportio K L ad L O. proportio vero trianguli C B E ad quadrangulum A B C D (ut supra ostensum est) est sicut proportio L O ad L H. igitur per æquam proportionalitatem, proportio quadranguli F G B C ad quadrangulum A B C D est sicut proportio K L ad L H. igitur disjunctim, proportio quadranguli F G B C ad quadrangulum A G F D est sicut proportio K L ad K H. igitur è contra, proportio A G F D ad G B C F est sicut H K ad K L; & per consequens sicut M ad N. quod fuit propositum.



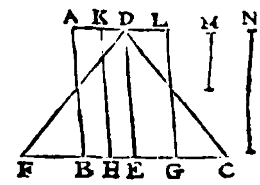
Prop. XIII. Probl.

Quadrangulum duorum tantum æquidistantium laterum, per lineam æquidistantem uni suorum laterum non æquidistantium, secundum proportionem datam dividere.

Sint quadranguli A B C D duo tantum latera A D, B C æquidistantia. illum igitur quadrangulum volo dividere secundum proportionem M ad N, per lineam æquidistantem lateri ejus A B. ab altero igitur angulorum C vel D, protraham lineam intra quadrangulum æquidistantem lineæ A B: & sit, gratia exempli, linea D E. deinde protraham E B secundum rectitudinem usque ad F, donec B F sit æqualis B E, & dividam lineam F C secundum proportionem M ad N. & primo cadat divisio in puncto E; ita quod sit proportio F E ad E C sicut M ad N. dico igitur quod linea D E dividit quadrangulum, secundum quod proponitur. *Probatio*. Protraham lineam D F. est igitur proportio trianguli F D E ad triangulum E D C sicut proportio F E ad E C; igitur & sicut proportio M ad N. sed per 1. sexti, & 41. primi, quadrangulus A B E D æqualis est triangulo F D E. igitur proportio quadranguli A B E D ad triangulum D E C est sicut M ad N. quod fuit propositum.

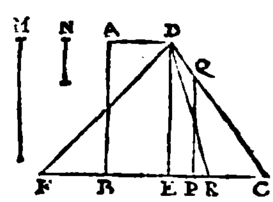


Secundo, cadat divisio inter F & E; ita quod major sit proportio F E ad E C quam sit proportio M ad N. divisa igitur E C linea per æqualia in puncto G; erit major proportio B E ad E G quam M ad N, propter hoc quod linea B E est medietas lineæ F E, & linea E G est medietas lineæ E C. divisa igitur linea B G secundum proportionem M ad N, cadet divisio inter B & E: sitque in puncto H; ita quod eadem sit proportio B H ad H G sicut M ad N. tunc protracta linea H K æquidistanter lineæ B A, dico quod illa dividit quadrangulum, secundum quod proponitur. protraham enim A D lineam secundum rectitudinem usque ad L; quousque concurrat cum linea G L æquidistanter lineæ D E. quia igitur linea E C est dupla lineæ E G, erit parallelogrammum D E G L æquale triangulo D E C. addito igitur utrique quadrangulo K H E D, erit quadrangulus K H G L æqualis quadrangulo K H C D.



igitur eadem est proportio quadranguli A B H K ad quadrangulum K H G L, & ad quadrangulum K H C D. proportio vero quadranguli A B H K ad quadrangulum K H G L est sicut proportio B H ad H G: & per consequens sicut M ad N. igitur proportio quadranguli A B H K ad quadrangulum K H C D est sicut proportio M ad N. quod est propositum.

Tertio cadat divisio inter E & C, in puncto R, ita quod sit proportio F R ad R C sicut M ad N. tunc protraham lineam D R; & per 3. hujus, dividam triangulum D E C secundum proportionem trianguli D E R ad triangulum D R C, per lineam P Q æquidistantem lateri ejus D E; ita quod sit quadrangulus D E P Q æqualis triangulo D E R: & etiam triangulus Q P C æqualis triangulo D R C. dico igitur quod linea P Q dividit quadrangulum, secundum quod proponitur. proportio enim trianguli F D R ad triangulum R D C est sicut proportio M ad N. sed quadrangulus A B E D æqualis est triangulo F D E: & quadrangulus D E P Q æqualis est triangulo D E R. igitur pentagonus A B P Q D est æqualis triangulo F D R. sed & triangulus D R C æqualis est triangulo Q P C. igitur proportio pentagoni A B P Q D ad triangulum Q P C est sicut proportio trianguli F D R ad triangulum D R C: & per consequens sicut proportio M ad N. quod fuit propositum.



Consimiliter operaremur per lineam æquidistantem lateri ejus D C, & patet totum quod proposuimus.

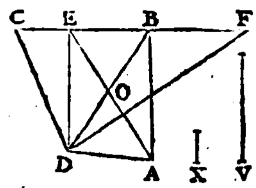
Prop. XIV. Probl.

Quadrangulum nulla habentem æquidistantia latera, per lineam uni suorum laterum æquidistantem, secundum proportionem datam dividere.

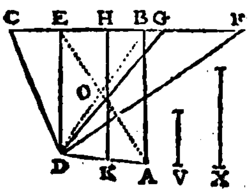
Verbi gratia quadranguli A B C D nulla sint æquidistantia latera: illum tamen volo dividere secundum proportionem V ad X, per

lineam

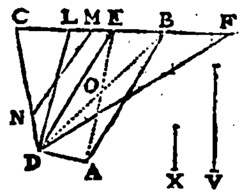
lineam æquidiſtantem lateri ejus A B. protraham enim ab altero angulorum C vel D lineam æquidiſtantem lineæ A B, tranſeuntem intra quadrangulum: & ſit (gratia exempli) linea D E, & protraham duas lineas E A, B D ſecantes ſe in puncto O: & extendam lineam C B ſecundum rectitudinem uſque ad F, donec ſit proportio F B ad B E ſicut proportio A O ad O E, & protraham lineam F D. deinde dividam lineam F C ſecundum proportionem V ad X. & primo, cadat diviſio in puncto E; ita quod ſit proportio F E ad E C ſicut proportio V ad X. dico igitur quod linea D E dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. *Probatio.* Nam proportio trianguli A D O ad triangulum O D E eſt ſicut proportio A O ad O E: & etiam proportio trianguli A B O ad triangulum O B E eſt ſicut proportio A O ad O E. igitur aggregando, proportio trianguli B A D ad triangulum B E D eſt ſicut proportio A O ad O E: & per conſequens ſicut proportio F B ad B E. & ſecundum eandem proportionem eſt triangulus F D B ad triangulum B E D. igitur [per 9.5.] triangulus B A D æqualis eſt triangulo F B D. addito igitur B D E triangulo communi utrique, erit triangulus F D E æqualis quadrangulo A B E D. ſed proportio trianguli F D E ad triangulum E D C eſt ſicut proportio F E ad E C: & per conſequens ſicut proportio V ad X. igitur proportio quadranguli A B E D ad triangulum E D C eſt ſicut proportio V ad X. quod fuit propoſitum.



Secundo, cadat diviſio inter F & E (ſive intra quadrangulum, ſive extra, non eſt cura): ſitque in puncto G: ita quod ſit proportio F G ad G C ſicut proportio V ad X; & protraham lineam G D. erit igitur proportio trianguli F G D ad triangulum G D C ſicut V ad X. adjungam igitur, per 10. hujus, ad lineam A B ſuperficiem æqualem triangulo F D G; quam contineant duo anguli A B C & B A D, ſeparando eam per lineam H K æquidiſtantem lineæ A B. dico igitur quod illa dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. tranſibit enim intra quadrangulum A B E D; propter hoc quod [1] triangulus F D E eſt æqualis quadrangulo A B E D; & triangulus F D G minor eſt triangulo F D E. cum igitur triangulus F D E ſit æqualis quadrangulo A B E D, & triangulus F D G ſit æqualis quadrangulo A B H K: oportet quod triangulus G D E ſit æqualis quadrangulo K H E D. poſito igitur triangulo E D C communi, erit triangulus G D C æqualis quadrangulo K H C D. eadem igitur eſt proportio quadranguli A B H K ad quadrangulum K H C D ſicut trianguli F G D ad triangulum G D C: & per conſequens ſicut proportio V ad X. quod fuit propoſitum.



Tertio, cadat diviſio inter E & C in puncto L: ita quod ſit proportio F L ad L C ſicut V ad X. erit igitur proportio trianguli F D L ad triangulum L D C ſicut proportio V ad X. deinde ſecabo, per tertiam hujus, ex triangulo D E C triangulum ſimilem ei, æqualem vero triangulo L D C, per lineam M N æquidiſtantem lineæ E D. dico igitur quod illa dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. triangulus enim F D E æqualis eſt quadrangulo A B E D; & triangulus E D L æqualis eſt quadrangulo D E M N: propter hoc quod trianguli M N C & L D C ſunt æquales. igitur pentagonus A B M N D æqualis eſt triangulo F D L. igitur eadem eſt proportio pentagoni A B M N D ad triangulum M N C ſicut trianguli F D L ad triangulum L D C: & per conſequens ſicut V ad X. quod fuit propoſitum.

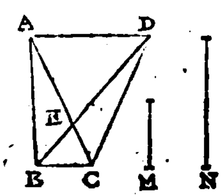


Sicut autem dividitur quadrangulus ſecundum proportionem datam per lineam æquidiſtantem lateri ejus A B, ita poteſt dividi per lineam æquidiſtantem alteri ejus lateri cuicunque; & patet propoſitum.

Prop. XV. Probl.

Quemlibet quadrangulum, per lineam æquidiſtantem uni diametrorum ejus, ſecundum proportionem datam dividere.

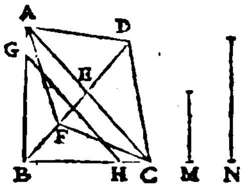
Verbi gratia quadrangulum A B C D volo dividere ſecundum proportionem M ad N, per lineam æquidiſtantem diametro ejus A C. protraham enim diametrum B D ſecantem A C in puncto E: & dividam lineam B D ſecundum proportionem M ad N. primo igitur cadat diviſio in puncto E; ita quod eadem ſit proportio B E ad E D ſicut M ad N. dico igitur quod diameter A C dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. nam proportio trianguli A B E ad triangulum A E D eſt ſicut proportio B E ad E D. ſimiliter proportio trianguli B E C ad triangulum E D C eſt ſicut proportio B E ad E D. igitur conjungendo, erit proportio trianguli A B C ad triangulum A D C ſicut proportio B E ad E D; & per conſequens ſicut proportio M ad N. quod fuit propoſitum.



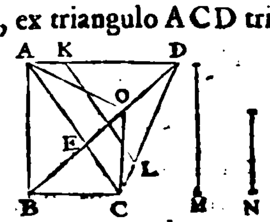
Secundo, cadat diviſio inter B & E in puncto F: ita quod eadem ſit proportio B F ad F D quæ eſt M ad N. tunc protraham duas lineas F A, F C; & erit proportio duorum triangulorum A B F, C B F conjunctim ad quadrangulum

[1] Eodem argumento quo in ſuperiori πτώσει: nam ut A O ad O E, id eſt F B ad B E, id eſt F D B ad B D E, ſic B A D ad B D E: quare F D B æquale B A D; & communi addito B D E, erit F D E æquale B A D E. *Savil.*

A F C D sicut proportio B F ad F D. ex triangulo igitur A B C secabo, per tertiam hujus, triangulum G B H sibi similem, & æqualem duobus triangulis A B F, C B F conjunctim, per lineam G H æquidistantem lineæ A C: illam igitur lineam dico dividere quadrangulum, secundum quod proponitur. quia enim triangulus G B H est æqualis superficiei A B C F, erit triangulus A F C æqualis quadrangulo A G H C. addito igitur A D C communi, erit quadrangulus A F C D æqualis pentagono A G H C D. proportio igitur trianguli G B H ad pentagonum A G H C D est sicut proportio superficiei A B C F ad quadrangulum A F C D: & per consequens sicut proportio M ad N. quod fuit propositum.



Tertio, cadat divisio inter E & D in puncto O: ita quod sit proportio B O ad O D sicut M ad N. tunc protraham duas lineas O A, O C. erit igitur proportio quadranguli A B C O ad superficiem A O C D sicut proportio B O ad O D; & per consequens sicut M ad N. secabo igitur, per tertiam hujus, ex triangulo A C D triangulum K L D sibi similem, & æqualem superficiei A O C D, per lineam K L æquidistantem lineæ A C. dico igitur quod illa dividit quadrangulum, secundum quod proponitur. triangulus enim A O C æqualis est quadrangulo A C L K. igitur quadrangulus A B C O æqualis est pentagono A B C L K, & triangulus K L D æqualis superficiei A O C D. igitur proportio pentagoni A B C L K ad triangulum K L D est sicut proportio quadranguli A B C O ad superficiem A O C D; & per consequens sicut proportio M ad N. quod fuit propositum.

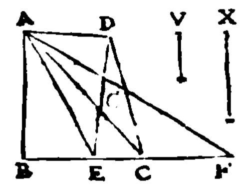


Consimiliter faciemus, ut dividatur quadrangulus A B C D secundum proportionem datam, per lineam æquidistantem diametro ejus B D. & patet propositum.

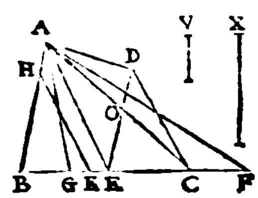
Prop. XVI. Probl.

Quemlibet quadrangulum, per lineam æquidistantem lineæ in quadrangulo assignatæ, quæ nec æquidistet alicui laterum ejus, neque alicui diametrorum ejus, secundum proportionem datam dividere.

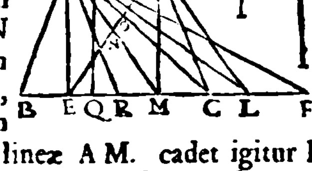
Ut verbi gratia quadrangulum A B C D volo dividere secundum proportionem V ad X, per lineam æquidistantem lineæ A E. protraham enim duas diametros A C, E D secantes se super punctum O: deinde producam lineam B C secundum rectitudinem usque ad F, donec sit proportio E C ad C F sicut proportio E O ad O D: & protraham lineam A F. tunc dividam lineam B F secundum proportionem V ad X: & primo, cadat divisio in E puncto; ita quod sit proportio B E ad E F sicut V ad X. dico igitur quod linea A E dividit quadrangulum, secundum quod proponitur. nam proportio trianguli A E C ad triangulum A C D est sicut proportio E O ad O D. igitur est sicut proportio E C ad C F, & per consequens sicut proportio trianguli A E C ad triangulum A C F. igitur trianguli A C F & A C D sunt æquales. totus igitur quadrangulus A E C D est æqualis toti triangulo A E F. eadem igitur est proportio trianguli A B E ad quadrangulum A E C D sicut ad triangulum A E F. sed proportio A B E trianguli ad triangulum A E F est sicut proportio V ad X. igitur proportio trianguli A B E ad quadrangulum A E C D est sicut proportio V ad X. quod fuit propositum.



Secundo, cadat divisio inter B & E in puncto G: ita quod eadem sit proportio B G ad G F sicut V ad X. tunc protraham lineam A G: & secabo, per tertiam hujus, de triangulo A B E triangulum H B K sibi similem & æqualem triangulo A B G, per lineam H K æquidistantem lineæ A E. tunc illam dico dividere quadrangulum, secundum quod proponitur. erit enim quadrangulus A H K E residuus de triangulo A B E æqualis triangulo A G E residuo de eodem A B E. sed & quadrangulus A E C D [1] æqualis est triangulo A E F. igitur pentagonus A H K C D æqualis est triangulo A G F. igitur eadem est proportio trianguli H B K ad pentagonum A H K C D sicut trianguli A B G ad triangulum A G F; hoc est, sicut B G ad G F, & per consequens sicut V ad X. quod fuit propositum.



Tertio, cadat divisio inter E & F. quia igitur A E non est æquidistans lineæ C D, protraham ab altero duorum angulorum D C lineam intra quadrangulum æquidistantem lineæ A E: quæ (gratia exempli) sit linea D M: & protraham lineam A M secantem lineam E D super punctum N. deinde faciam proportionem L M ad M E secundum proportionem D N ad N E. hoc autem statim fieri potest, protrahendo lineam D L æquidistantem lineæ A M. cadet igitur L citra F; eo quod linea D F, si protraheretur, esset [2] æquidistans lineæ A C, si illa protraheretur. tunc protraham lineam A L. erit igitur triangulus A E L æqualis quadrangulo A E M D. dividatur igitur linea B F secundum proportionem V ad X: & nunc cadat divisio inter E & L



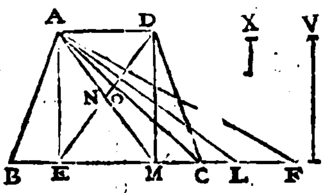
1 Eodem argumento quo in superiori πτώσ. Savil. επιτεχ. Idem.

2 Per 2. sexti; quia est ut E O ad O D sic E C ad C F, per

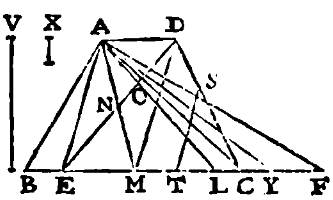
in

in puncto R, ita quod eadem sit proportio B R ad R F sicut V ad X. deinde, per decimam hujus, protraham lineam P Q æquidistantem lineæ A E, sic quod superficies A E Q P sit æqualis triangulo A E R. & quia triangulus A E L est major triangulo A E R: & triangulus A E L est æqualis quadrangulo A E M D; erit propter hoc quadrangulus A E Q P minor quadrangulo A E M D [1]. dico igitur quod linea P Q dividit quadrangulum A B C D, secundum quod proponitur. *Probatio.* Quadrangulus enim A E C D est æqualis triangulo A E F: & quadrangulus A E Q P est æqualis triangulo A E R. igitur quadrangulus P Q C D residuus est æqualis triangulo A R F residuo. similiter quia quadrangulus A E Q P est æqualis triangulo A E R: posito triangulo A B E communi; erit quadrangulus A B Q P æqualis triangulo A B R. igitur eadem est proportio quadranguli A B Q P ad quadrangulum P Q C D sicut trianguli A B R ad triangulum A R F. igitur & sicut B R ad R F: & per consequens sicut V ad X. quod fuit propositum.

Quarto, cadat divisio in puncto L, ita quod eadem sit proportio B L ad L F sicut V ad X. tunc dico quod linea D M dividit quadrangulum, secundum quod proponitur. nam triangulus A E F est æqualis quadrangulo A E C D: & triangulus A E L est æqualis quadrangulo A E M D. igitur triangulus A L F residuus est æqualis triangulo D M C residuo. similiter, quia quadrangulus A E M D est æqualis triangulo A E L; posito triangulo A B E communi, erit quadrangulus A B M D æqualis triangulo A B L. eadem igitur est proportio quadranguli A B M D ad triangulum D M C sicut trianguli A B L ad triangulum A L F: & per consequens sicut V ad X. quod fuit propositum.



Quinto, cadat divisio inter L & F in puncto Y; ita quod eadem sit proportio B Y ad Y F sicut V ad X: & protraham lineam A Y. quia igitur triangulus D M C [2] æqualis est triangulo A L F; & triangulus A L F major est triangulo A Y F: erit triangulus D M C major triangulo A Y F. igitur ex triangulo D M C separabo, per tertiam hujus, triangulum S T C sibi similem, & æqualem triangulo A Y F, per lineam S T æquidistantem lineæ D M. dico igitur quod linea S T dividit quadrangulum, secundum quod proponitur. quia enim triangulus D M C est æqualis triangulo A L F; & etiam triangulus S T C est æqualis triangulo A Y F: erit quadrangulus D M T S residuus æqualis triangulo A L Y residuo. cum igitur quadrangulus A B M D [3] sit æqualis triangulo A B L; erit pentagonus A B T S D æqualis triangulo A B Y. eadem igitur est proportio pentagoni A B T S D ad triangulum S T C sicut trianguli A B Y ad triangulum A Y F. igitur & sicut B Y ad Y F: & per consequens sicut V ad X. & hoc est quod voluimus demonstrare.

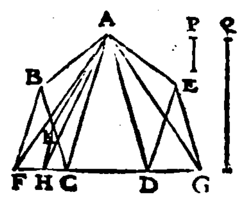


Et est notandum quod sicut dividitur quadrangulus per lineam æquidistantem lineæ ductæ ab angulo ejus, quæ nec æquidistet ejus lateribus, nec ejus diametris: ita potest dividi per lineam æquidistantem lineæ non ductæ ab angulo assignato, ut protrahendo lineam ab aliquo angulo quadranguli cadentem intra quadrangulum, & æquidistantem lineæ assignatæ: & tunc operabimur, sicut jam docuimus.

Prop. XVII. Probl.

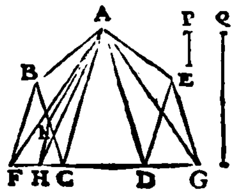
Pentagonum quemlibet notum per lineam à quolibet angulo ejus ductam secundum proportionem datam dividere.

Verbi gratia pentagonum A B C D E volo dividere secundum proportionem P ad Q, per lineam ductam ab angulo ejus A. protraham duas lineas A C, A D: & ab angulo B protraham lineam B F æquidistantem lineæ A C, donec concurrat cum linea D C ulterius protracta in puncto F. similiter ab angulo E protraham lineam E G æquidistantem lineæ A D, donec concurrat cum linea C D ulterius protracta in puncto G. tunc protractis lineis A F, A G; erit triangulus A F G æqualis pentagono A B C D E: propter hoc quod triangulus A B C est æqualis triangulo A F C, & triangulus A E D est æqualis triangulo A G D; addito A C D communi utrisque, patet quod diximus. dividam igitur lineam F G secundum proportionem P ad Q. & cadat primo divisio inter F & C in puncto H: ita quod sit proportio F H ad H G sicut proportio P ad Q. protraham igitur H K æquidistanter lineæ B F, donec tetigerit lineam B C in puncto K. est igitur eadem proportio B K ad K C sicut F H ad H C, per secundam sexti. deinde protracta linea A K: dico illam dividere pentagonum, secundum quod proponitur. protraham enim lineam A H. quia igitur triangulus A E D est æqualis triangulo A G D; addito A C D communi, erit quadrangulus A C D E æqualis triangulo A C G. similiter, quia triangulus A K C est æqualis triangulo A H C, propter æquidistantiam linearum K H & A C: erit pentagonus A K C D E æqualis triangulo A H G. item, quia eadem est proportio B C ad B K sicut F C ad F H; erit eadem proportio trianguli A B C ad triangulum A B K sicut trianguli



1 Cadetque P Q citra D M. *Savil.* 2 Ut in præcedenti πτώσει. 3 Ut in præcedenti πτώσει.

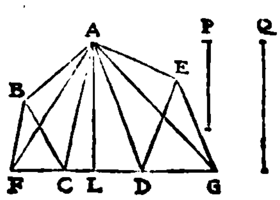
AFC ad triangulum AFH. igitur permutatim, eadem est proportio trianguli ABC ad triangulum AFC sicut trianguli ABK ad triangulum AFH. cum igitur trianguli ABC & AFC sint æquales;



erunt trianguli ABK & AFH æquales. eadem igitur est proportio trianguli ABK ad pentagonum AKCDE sicut trianguli AFH ad triangulum AHG. igitur & sicut FH ad HG: & per consequens sicut P ad Q. quod fuit propositum.

Secundo, cadat divisio in puncto C; ita quod eadem sit proportio FC ad CG sicut P ad Q. tunc dico quod linea AC dividit pentagonum, secundum quod proponitur. nam ut ostensum est supra, quadrangulus ACDE est æqualis triangulo ACG, & triangulus ABC æqualis est triangulo AFC. igitur eadem est proportio trianguli ABC ad quadrangulum ACDE sicut trianguli AFC ad triangulum ACG. igitur sicut FC ad CG: & per consequens sicut P ad Q. quod fuit propositum.

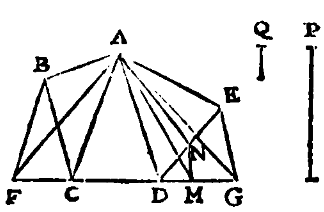
Tertio, cadat divisio in puncto L inter C & D: ita quod sit proportio FL ad LG sicut P ad Q. protraham igitur lineam AL; quam dico dividere pentagonum, secundum quod proponitur. quia enim triangulus ABC est æqualis triangulo AFC; posito ACL communi, erit quadrangulus ABCL æqualis triangulo AFL. similiter, posito triangulo ALD cum



utrisque triangulis AED, AGD; erit quadrangulus ALDE æqualis triangulo ALG. igitur eadem est proportio quadranguli ABCL ad quadrangulum ALDE sicut trianguli AFL ad triangulum ALG. igitur sicut FL ad LG; & per consequens sicut P ad Q. quod fuit propositum.

Quarto, cadat divisio in puncto D. tunc dico quod linea AD dividit pentagonum, secundum quod proponitur: & patet probatio, sicut patuit quando cecidit divisio in puncto C.

Quinto, cadat divisio inter D & G in puncto M; ita quod eadem sit proportio FM ad MG sicut P ad Q tunc erigam lineam MN æquidistanter lineæ GE, quousque tetigerit lineam DE in puncto N: & protraham lineam AN;

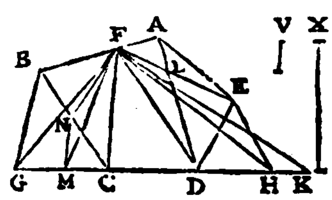


quam dico dividere pentagonum, secundum quod proponitur. protracta enim linea AM, arguitur, ut prius in primo casu [1], quod triangulus AEN est æqualis triangulo AGM: & quod pentagonus ABCDN est æqualis triangulo AFM. igitur eadem est proportio pentagoni ABCDN ad triangulum ANE sicut trianguli AFM ad triangulum AMG. igitur & sicut proportio FM ad MG: & per consequens sicut P ad Q. quod fuit propositum.

Prop. XVIII. Probl.

Per lineam ductam à puncto, in latere noti pentagoni assignato, dictum pentagonum secundum proportionem notam dividere.

Verbi gratia, pentagonum ABCDE volo dividere secundum proportionem V ad X, per lineam ductam à puncto F assignato in in latere ejus AB. protraham lineam BG æquidistanter lineæ FC, & lineam EH æquidistanter lineæ FD, donec concurrant cum linea CD, ulterius ex utraque parte protracta, in punctis G & H. & protraham lineam AD secantem lineam FE in puncto L: deinde extendam lineam DH usque ad K, donec sit proportio DH ad HK sicut DL ad LA. hoc autem fiet, imaginando lineam AK protrahi æquidistanter lineæ LH. tunc protraham lineas FG, FH, FK. dividam igitur lineam GK secundum proportionem V ad X. & cadat divisio primo inter G & C in puncto M: ita quod eadem sit proportio GM ad MK sicut V ad X. deinde dividam lineam BC in puncto N per lineam MN æquidistantem lineæ BG; eritque proportio BN ad NC sicut proportio GM ad MC.



tunc protracta linea FN; dico quod illa dividit pentagonum, secundum quod proponitur. *Probatio.* Nam [2] proportio trianguli FDE ad triangulum FAE est sicut proportio DL ad LA. igitur & sicut proportio DH ad HK, quæ est sicut proportio trianguli DFH ad triangulum HFK. igitur proportio trianguli FDE ad triangulum FAE est sicut proportio trianguli DFH ad triangulum HFK. igitur permutatim, proportio trianguli DFE ad triangulum DFH est sicut proportio trianguli FAE ad triangulum FHK. sed trianguli DEH & DFE sunt æquales; propter æquidistantiam linearum FD & EH. igitur trianguli FAE & FHK sunt æquales. quadrangulus igitur FDEA æqualis est triangulo FDK. addito igitur FCD communi; erit pentagonus FCDEA æqualis triangulo FCK. *Hoc memoriæ commendemus* [3]. ex alia parte

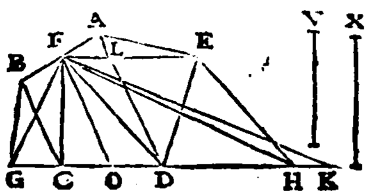
1 Ubi demonstratum fuit ABK æquale esse triangulo AHF: hæc enim illis respondent in figura 1. πτώσεως. *Savil.* 2 Per primam sexti, FDL est ad FLA ut DL ad LA; & DEL est ad LEA ut DL ad LA: quare aggregando FDE est ad FAE ut DL ad LA, ut supra aliquoties. [illegible] est. *Omne quadrilaterum dividitur per diametrum in duo triangula proportionem eandem habentia, quam alterius diametri segmenta inter se eodem ordine sumpta.* Idem. 3 Pertinet enim communiter ad omnes πτώσεις.

pro-

protraham lineam F M. quia igitur triangulus F B C est æqualis triangulo F G C; & eadem est proportio B N ad N C sicut G M ad M C: [1] erit triangulus F B N æqualis triangulo F G M; & triangulus F N C æqualis triangulo F M C. congregando igitur, patet quod hexagonus F N C D E A est æqualis triangulo M F K; & trianguli F B N & F G M sunt æquales. igitur eadem est proportio trianguli F B N ad hexagonum F N C D E A sicut trianguli F G M ad triangulum F M K. igitur & sicut lineæ G M ad lineam M K: & per consequens sicut V ad X. quod fuit propositum.

Secundo, cadat divisio in puncto C; ita quod eadem sit proportio G C ad C K sicut V ad X. dico igitur quod linea F C dividit pentagonum, secundum quod proponitur. jam enim ostensum fuit quod pentagonus F C D E A est æqualis triangulo F C K, & quod etiam triangulus F B C æqualis est triangulo F G C. igitur eadem est proportio trianguli F B C ad pentagonum F C D E A sicut trianguli F G C ad triangulum F C K. igitur & sicut lineæ G C ad C K: & per consequens sicut V ad X. quod fuit propositum.

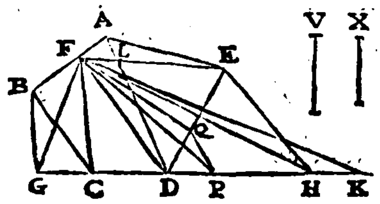
Tertio, cadat divisio inter C & D in puncto O: ita quod eadem sit proportio G O ad O K sicut V ad X. dico igitur quod linea F O dividit pentagonum, secundum quod proponitur. addito communi triangulo F O D ad quadrangulum F D E A, & ad triangulum sibi æqualem F D K; erit pentagonus F O D E A æqualis triangulo F O K. consimiliter, addito



triangulo F C O communi ad duos æquales triangulos F B C & F G C; erit quadrangulus F B C O æqualis triangulo F G O. igitur eadem est proportio quadranguli F B C O ad pentagonum F O D E A sicut trianguli F G O ad triangulum F O K: igitur & sicut G O ad O K: & per consequens sicut V ad X. quod fuit propositum.

Quarto, cadat divisio in puncto D; ita quod eadem sit proportio G D ad D K sicut V ad X. dico igitur quod linea F D dividit pentagonum, secundum quod proponitur. addito enim triangulo F C D communi ad æquales triangulos F B C & F G C, patet probatio.

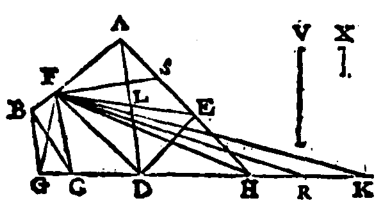
Quinto, cadat divisio inter D & H in puncto P; ita quod eadem sit proportio G P ad P K sicut V ad X. tunc dividam lineam D E in puncto Q, per lineam P Q æquidistantem lineæ E H. erit igitur eadem proportio D Q ad Q E sicut D P ad P H. protracta igitur linea F Q; dico quod illa dividit pentagonum, secundum quod proponitur. totus enim quadrangulus F D E A [2] est æqualis toti triangulo F D K. sed & triangulus F D Q [3] est æqualis triangulo F D P. igitur quadrangulus F Q E A residuus æqualis est triangulo F P K residuo. quadrangulus etiam F B C D æqualis est triangulo F G D. addito igitur triangulo F D Q ad quadrangulum F B



C D; & triangulo F D P, æquali triangulo F D Q, addito ad triangulum F G D: patet quod pentagonus F B C D Q æqualis est triangulo F G P. eadem igitur est proportio pentagoni F B C D Q ad quadrangulum F Q E A sicut trianguli F G P ad triangulum F P K: & per consequens sicut proportio V ad X. quod fuit propositum.

Sexto, cadat divisio in puncto H, dico igitur quod linea F E dividit pentagonum, secundum quod proponitur. quia enim quadrangulus F B C D [4] est æqualis triangulo F G D, & ut supradictum est [5], triangulus A F E æqualis est triangulo F H K, atque triangulus F D E æqualis triangulo F D H. igitur pentagonus F B C D E æqualis est triangulo F G H. igitur eadem est proportio pentagoni F B C D E ad triangulum F A E sicut trianguli F G H ad triangulum F H K. igitur & sicut G H ad H K: & per consequens sicut V ad X. quod fuit propositum.

Septimo, cadat divisio inter H & K in puncto R: ita quod eadem sit proportio G R ad R K sicut V ad X. tunc dividam lineam E A in puncto S, ita quod eadem sit proportio E S ad S A sicut H R ad R K. dico igitur quod linea F S dividit pentagonum, secundum quod proponitur. quia enim triangulus A F E est æqualis triangulo F H K; & proportio E S ad S A est sicut proportio H R ad R K: erit triangulus F E S æqualis triangulo F H R, & etiam triangulus F S A æqualis triangulo F R K. sed & pentagonus F B C D E [6] est æqualis triangulo F G H. igitur hexagonus F B C D E S est æqualis triangulo F G R. igitur eadem est pro-



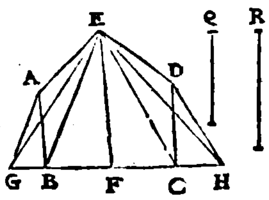
portio hexagoni F B C D E S ad triangulum F S A sicut trianguli F G R ad triangulum F R K. igitur & sicut lineæ G R ad lineam R K: & per consequens sicut V ad X. quod fuit propositum.

1 Nam tota æqualia dividuntur in parteis eandem inter se rationem habenteis: partes itaque ὁμόλογα æquales erunt. *Savil.* 2 Ut probatum est in prima πτώσει. 3 Quia F D, Q P æquidistant. 4 Ut in quarta πτώσει. 5 In quarta πτώσει. 6 Ut in prima πτώσει.

Prop. XIX. Probl.

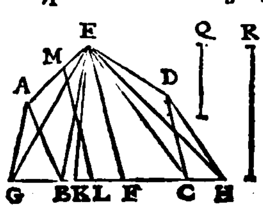
Pentagonum duorum æquidistantium laterum, per lineam æquidistantem æquidistantibus ejus lateribus, secundum proportionem datam dividere.

VErbi gratia, pentagonum A B C D E volo dividere secundum proportionem Q ad R, per lineam æquidistantem lateri ejus A B; quod quidem latus, aut æquidistat lateri C D, aut lateri D E. æquidistet igitur, primo, lateri C D. tunc protraham lineam E F æquidistantem lateri A B: & producam lineas E B & E C: deinde protraham lineam A G æquidistantem lineæ E B, & lineam D H æquidistantem lineæ E C, quousque concurrant cum linea B C, ulterius ex utraque parte protracta, in punctis G & H: deinde dividam lineam G H



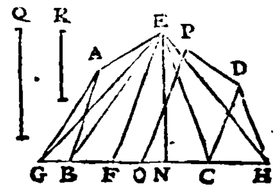
secundum proportionem Q ad R. & primo cadat divisio in puncto F. dico igitur quod linea E F dividit pentagonum, secundum quod proponitur. *Probatio.* Quia enim linea A G æquidistat lineæ E B; protracta linea E G, erit triangulus E A B æqualis triangulo E G B. addito igitur triangulo E B F communi, erit triangulus E G F æqualis quadrangulo E A B F. item, quia D H linea æquidistat lineæ E C; protracta linea E H, erit triangulus E D C æqualis triangulo E H C. addito igitur triangulo E F C communi, erit triangulus E F H æqualis quadrangulo E F C D. & prius fuit triangulus E G F æqualis quadrangulo A B F E. igitur eadem est proportio quadranguli A B F E ad quadrangulum E F C D sicut trianguli E G F ad triangulum E F H. igitur & sicut lineæ G F ad F H: & per consequens sicut Q ad R. quod fuit propositum.

Secundo, cadat divisio inter G & F in puncto K; ut sit proportio G K ad K H sicut Q ad R: tunc protraham lineam E K. quia igitur triangulus E G K est minor triangulo E G F; & triangulus E G F [1] æqualis est quadrangulo A B F E: erit triangulus E G K minor quadrangulo A B F E. adjungam igitur lineæ AB, per decimam hujus, superficiem A B L M æqualem triangulo E G K per lineam L M æquidistantem lineæ A B. dico igitur quod linea L M dividit pentagonum, secundum



quod proponitur. nam triangulus E G K est æqualis quadrangulo A B L M; & totus triangulus E G H [2] est æqualis toti pentagono A B C D E. igitur triangulus E K H residuus est æqualis pentagono M L C D E residuo. igitur eadem est proportio quadranguli A B L M ad pentagonum M L C D E sicut trianguli E G K ad triangulum E H K: & per consequens sicut Q ad R. quod fuit propositum.

Tertio, cadat divisio inter F & H in puncto N: & protrahatur linea E N. erit igitur triangulus E H N minor quadrangulo E F C D; eo quod est minor triangulo E H F sibi æquali: ideo, per decimam hujus, adjungam lineæ D C superficiem P O C D æqualem triangulo E H N per lineam O P æquidistantem lineæ C D. dico igitur quod linea O P dividit pentagonum, secundum quod proponitur. quia enim quadrangulus P O C D est æqualis triangulo E N H: & totus triangulus E G H æqualis est toti pentagono A B C D E; erit pentagonus A B O P E residuus æqualis triangulo E G N residuo. igitur eadem est proportio pentagoni A B O P E ad quadrangulum P O C D sicut trianguli E G N ad triangulum E N H: & per consequens sicut Q ad

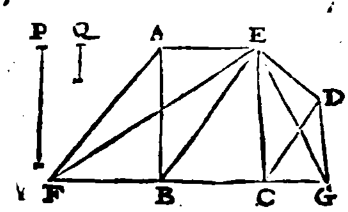


R. quod fuit propositum. Consimiliter autem sicut dividitur pentagonus A B C D E habens duo latera A B, C D æquidistantia, facta ratiocinatione super lineam B C oppositam angulo E inter duo latera æquidistantia intercepto: ita positis duobus ejus lateribus A B, D E æquidistantibus, dividetur per lineam æquidistantem lineæ A B, facta ratiocinatione super latus ejus E A oppositum angulo ejus C inter duo ejus latera A B, D E æquidistantia intercepto: & patet propositum utrobique.

Prop. XX. Probl.

Pentagonum, cujus unum laterum ejus uni ejus diametro æquidistat, per lineam æquidistantem illi lateri & illi diametro, secundum proportionem datam dividere.

VErbi gratia, pentagonum A B C D F volo dividere secundum proportionem P ad Q, per lineam æquidistantem lateri ejus A B; quod quidem latus æquidistat diametro ejus C E. protraham enim lineam E B; & producam lineam A F æquidistantem lineæ E B, & lineam D G æquidistantem lineæ E C, donec concurrant cum linea B C, protracta ex utraque parte ulterius, ad puncta F & G: deinde protractis lineis E F & E G, erit triangulus E F G



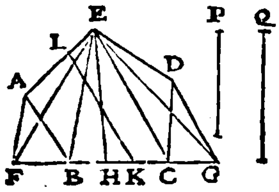
æqualis pentagono A B C D E proposito: ut patet per modum arguendi in præmissa [3]. dividam igitur lineam F G secundum proportionem P ad Q. cadat igitur divisio vel in C, vel ante C, vel post C. & primo cadat in puncto C: ita quod eadem sit proportio F C ad C G sicut P

1 Ut in prima πτώσει. 2 Ut in principio prop. 17. demonstratum est. 3 In principio prop. 17.

ad

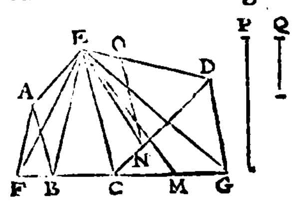
ad Q. dico igitur quod linea E C dividit pentagonum, secundum quod proponitur. quadrangulus enim A B C E est æqualis triangulo E F C; propter hoc quod triangulus E C D residuus est æqualis triangulo E C G residuo; & totus pentagonus æqualis toti triangulo. igitur eadem est proportio quadranguli A B C E ad triangulum E C D sicut trianguli E F C ad triangulum E C G. igitur & sicut F C ad C G; & per consequens sicut P ad Q. quod fuit propositum.

Secundo, cadat divisio inter F & C in puncto H; ita quod sit proportio F H ad H G sicut P ad Q. quia igitur quadrangulus A B C E æqualis est triangulo E F C, & triangulus E F H minor est triangulo E F C; erit triangulus E F H minor quadrangulo A B C E. adjungam igitur lineæ A B, per decimam hujus, quadrangulum A B K L æqualem triangulo E F H, per lineam K L æquidistantem lineæ A B. illam igitur lineam K L dico dividere pentagonum, secundum quod proponitur.



quia enim ille totus pentagonus est æqualis toti triangulo E F G: & quadrangulus A B K L æqualis est triangulo E F H; erit pentagonus L K C D E residuus æqualis triangulo E H G residuo. eadem igitur est proportio quadranguli A B K L ad pentagonum L K C D E sicut trianguli E F H ad triangulum E H G. igitur & sicut F H ad H G: & per consequens sicut P ad Q. quod fuit propositum.

Tertio, cadat divisio inter C & G in puncto M; ita quod eadem sit proportio F M ad M G sicut P ad Q. quia igitur triangulus E D C est æqualis triangulo E G C: & triangulus E M C minor est triangulo E G C; erit propter hoc triangulus E M C minor triangulo E D C. adjungam igitur lineæ E C quadrangulum E C N O æqualem triangulo E M C, per lineam N O æquidistantem lineæ E C, secundum doctrinam decimæ hujus: vel quod idem est, separabo, per tertiam hujus, triangulum D O N à triangulo D E C sibi similem, & æqualem triangulo E G M. dico igitur quod linea N O dividit pentagonum, secundum quod proponitur.

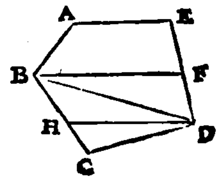


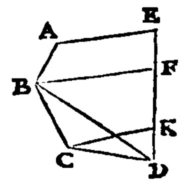
quia enim totus pentagonus A B C D E est æqualis toti triangulo E F G: & triangulus O N D æqualis est triangulo E M G; erit hexagonus A B C N O E residuus æqualis triangulo E F M residuo. eadem igitur est proportio hexagoni A B C N O E ad triangulum O N D sicut trianguli E F M ad triangulum E M G. igitur & sicut F M ad M G: & per consequens sicut P ad Q. quod fuit propositum.

Prop. XXI. Theor.

Quocunque latere pentagoni assignato, quod nec alicui ejus lateri, nec alicui ejus diametro æquidistet; protrahi possunt intra pentagonum, ab aliquibus duobus trium angulorum dicto lateri nullatenus conjunctorum, duæ lineæ æquidistantes illi lateri prætaxato.

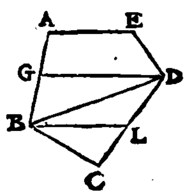
Verbi gratia, esto quod in pentagono A B C D E latus ejus A E neque sit æquidistans alicui lateri ejus, neque ejus diametro B D. tunc dico quod ab aliquibus duobus trium angulorum B, C, D protrahi possunt duæ lineæ intra pentagonum, quarum utraque sit æquidistans lateri A E. ex quo enim A E & B D non sunt æquidistantes, illæ ulterius protractæ aut concurrerent ex parte A B, aut ex parte E D. si ex parte A B; tunc linea B F protracta à puncto B, æquidistanter lineæ A E, necessario caderet super latus E D, sicut in utraque superiorum figurarum [1]: si autem concurrerent ex parte E D, tunc linea D G à puncto D protracta, æquidistanter lineæ A E, necessario cadet super latus A B; sicut in utraque inferiorum figurarum [2].

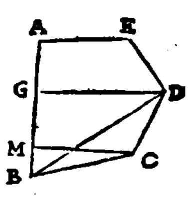




Item si A E & B D concurrerent ex parte A B, sicut in utraque superiorum figurarum; tunc linea B F, ex quo non est æquidistans lineæ C D, aut concurrent cum ea ex parte F D, aut ex parte B C; si ex parte F D, sicut in prima superiorum; tunc à puncto D protrahi potest D H æquidistanter lineæ A E, cadens in latere B C. si vero concurrerent B F & C D ex parte B C, sicut in secunda superiorum; tunc à puncto C protrahi potest C K æquidistanter lineæ A E, cadens in latere E D. habemus igitur B F & D H æquidistantes lineæ A E, in prima figurarum superiorum. & habemus B F & C K æquidistantes eidem lineæ, in secunda figurarum superiorum.

Si autem A E, B D concurrerent ex parte E D, sicut in utraque inferiorum figurarum; tunc linea D G, ex quo non est æquidistans lineæ B C, aut concurret cum ea ex parte G B, aut ex parte D C. si ex parte G B, sicut in prima inferiorum figurarum; tunc à puncto B protrahi potest B L æquidistanter lineæ A E, & cadet in latere C D: si vero G D & B C concurrent ex parte C D, sicut in secunda inferiorum figurarum; tunc à puncto C protrahi potest C M æquidistanter lineæ A E, cadens in latere A B.





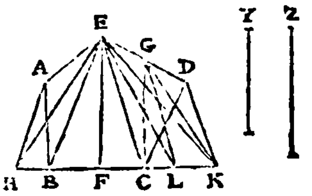
1 Primarum duarum hujus prop. 2 Ultimarum duarum hujus prop.

habemus igitur D G & B L in prima figurarum inferiorum: & D G & C M in secunda figurarum inferiorum, æquidistanter lineæ A E, & cadentes intra pentagonum. patet igitur totum quod ostendere volebamus.

Prop. XXII. Probl.

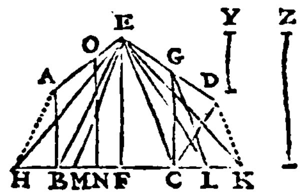
Pentagonum per lineam æquidistantem uni ejus lateri assignato, quod quidem latus nullo ejus alteri lateri, nec alicui ejus diametro sit æquidistans, secundum proportionem datam dividere.

SIT pentagoni A B C D E latus A B, neque æquidistans diametro E C, neque alteri laterum E D, C D. illum igitur volo dividere secundum proportionem Y ad Z, per lineam æquidistantem lateri ejus A B. à duobus enim trium angulorum ejus C, D, E protraham [1] duas lineas intra pentagonum æquidistantes lateri ejus A B. aut igitur illæ duæ lineæ descendentes sic ab angulis cadent super idem latus, vel super latera opposita. cadant igitur primo super latera opposita: & sint E F, C G; ita quod F sit in latere B C, & punctum G sit in latere E D. ratiocinabor autem super latus, in quod cadit parallelus propinquior lineæ A B, videlicet super latus B C. protraham igitur lineas E B & E C; deinde protraham lineam A H æquidistanter lineæ E B; & lineam D K æquidistanter lineæ E C, donec concurrant cum linea B C, ulterius ex utraque parte protracta, in punctis H & K: & protraham lineas E H & E K. quia igitur triangulus E A B est æqualis triangulo E H B: & triangulus E D C æqualis est triangulo E K C; addito triangulo E B C communi, erit pentagonus A B C D E æqualis triangulo E H K. *Quod est memoriæ commendandum* [2]. Protraham etiam lineam G L æquidistanter lineæ E C: & producam lineam E L: tunc dividam lineam H K secundum proportionem Y ad Z. aut igitur cadet divisio in puncto F, vel in puncto L, vel inter H & F, vel inter F & L, vel inter L & K. cadat igitur primo in puncto F; ita quod eadem sit proportio H F ad F K sicut Y ad Z. dico igitur quod linea E F dividit pentagonum, secundum quod proponitur. quadrangulus enim E A B F æqualis est triangulo E H F, & quadrangulus E D C F æqualis est triangulo E K F. igitur est proportio quadranguli E A B F ad quadrangulum E D C F sicut trianguli E H F ad triangulum E K F. igitur & sicut H F ad F K: & per consequens sicut Y ad Z. quod fuit propositum.

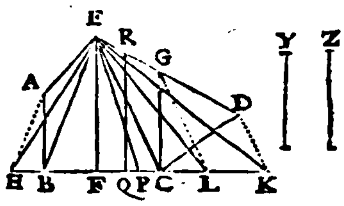


Secundo, cadat divisio in puncto L. dico igitur quod linea C G dividit pentagonum prout proponitur. quia enim lineæ E C & G L sunt æquidistantes, erunt trianguli E G C & E L C æquales. sed totales trianguli E D C & E K C sunt æquales. igitur & triangulus G C D æqualis est triangulo E L K. quadrangulus etiam A B C E æqualis est triangulo E H C. igitur pentagonus A B C G E æqualis est triangulo E H L. eadem igitur est proportio pentagoni A B C G E ad triangulum G C D, sicut trianguli E H L ad triangulum E L K. igitur sicut H L ad L K: & per consequens sicut Y ad Z. quod fuit propositum.

Tertio, cadat divisio inter H & F in puncto M: & protrahatur linea E M. quia igitur triangulus E H F [3] est æqualis quadrangulo E A B F: & triangulus E H M minor est triangulo E H F; erit propter hoc triangulus E H M minor quadrangulo E A B F. adjungam igitur, per decimam hujus, lineæ A B superficiem A B N O æqualem triangulo E H M, per lineam N O æquidistantem lineæ A B. dico igitur lineam N O dividere pentagonum, secundum quod proponitur. pentagonus enim A B C D E [4] æqualis est triangulo E H K: & quadrangulus A B N O æqualis est triangulo E H M. igitur pentagonus O N C D E residuus æqualis est triangulo E M K residuo. igitur eadem est proportio quadranguli A B N O ad pentagonum O N C D E sicut trianguli E H M ad triangulum E M K. igitur & sicut H M ad M K; & per consequens sicut Y ad Z. quod fuit propositum.



Quarto, cadat divisio inter F & L in puncto P: & protrahatur linea E P. quia igitur triangulus E F L æqualis est quadrangulo E F C G: & triangulus E F P minor est triangulo E F L; erit triangulus E F P minor quadrangulo E F C G. adjungam igitur lineæ E F, per decimam hujus, quadrangulum E F Q R æqualem triangulo E F P, per lineam Q R æquidistantem lineæ E F. dico igitur quod linea Q R dividit pentagonum, secundum quod proponitur. est enim triangulus E H P æqualis pentagono A B Q R E: & totus pentagonus A B C D E æqualis est toti triangulo E H K. igitur quadrangulus R Q C D residuus æqualis est triangulo E P K. igitur eadem est proportio pentagoni A B Q R E ad quadrangulum R Q C D sicut trianguli E H P ad triangulum E P K. igitur sicut H P ad P K: & per consequens sicut Y ad Z. quod fuit propositum.

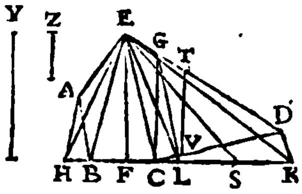


Quinto, cadat divisio inter L & K in puncto S. quia igitur propter æquidistantiam linearum E C & G D, trianguli E G C & E L C sunt

1 Per præcedentem. 2 Nam pertinet ad omneis πτώσεις. 3 Ut in prima πτώσει. 4 patet per prop. 17. hujus.

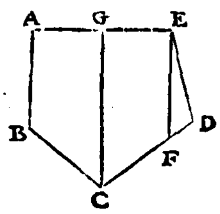
æquales

æquales: atque totales trianguli E D C & E K C etiam æquales; erunt propter hoc trianguli G D C, E K L residui æquales. sed protracta linea E S, triangulus E K S minor est triangulo E K L. igitur triangulus E K S minor est triangulo G D C. per tertiam igitur hujus, resecabo de triangulo G D C triangulum T D V sibi similem, & æqualem triangulo E K S, per lineam T V æquidistantem lineæ G C. dico igitur quod linea T V dividit pentagonum, secundum quod proponitur.

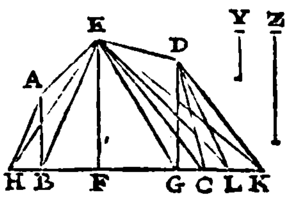


totus enim pentagonus A B C D E æqualis est toti triangulo E H K, & triangulus T D V æqualis triangulo E K S. igitur hexagonus A B C V T E residuus æqualis est triangulo E H S residuo. igitur eadem est proportio hexagoni A B C V T E ad triangulum T D V sicut trianguli E H S ad triangulum E K S. igitur & sicut H S ad S K: & per consequens sicut Y ad Z. quod fuit propositum.

Si autem duæ lineæ E F & C G, quæ sunt æquidistantes lineæ A B, ceciderint sic, quod linea E F ceciderit super latus C D: & linea C G super latus A E; tunc erigemus angulum C: & ratiocinabimur super lineam A E, sicut fecimus super lineam B C; & deveniemus ad nostrum propositum, sicut prius.

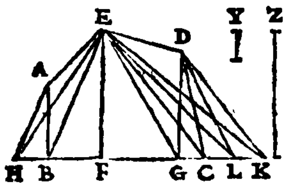


Si autem duæ lineæ, quæ protractæ sunt æquidistanter lineæ A B, cadant super unum & idem latus, tunc ratiocinabimur super illud latus. ut verbi gratia, sit quod in pentagono ABCDE duæ lineæ E F & DG protractæ æquidistanter lineæ AB cadant super latus B C: tunc protraham A H æquidistantem lineæ E B, & lineam D K æquidistantem lineæ E C, protraham etiam lineam E G, & lineam sibi æquidistantem D L: & producam lineas E H, E L & E K. patet igitur ex præmissis, quod triangulus E H K est æqualis pentagono A B C D E, & quod triangulus E H L est æqualis pentagono A B G D E; & tia relinquitur quod triangulus D G C æqualis est triangulo E L K. *Hæc autem sunt memoriæ commendanda.* dividam igitur lineam H K secundum proportionem Y ad Z: & cadet divisio vel in F, vel in L, vel inter illa, aut inter illa & extrema. cadat igitur primo divisio in puncto F. itaque sit proportio H F ad F K sicut Y ad Z. dico igitur quod linea E F dividit pentagonum, secundum quod proponitur. nam quadrangulus A B F E est æ-

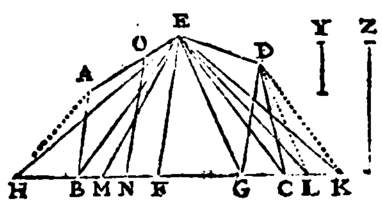


qualis triangulo E H F, & quadrangulus E F C D est æqualis triangulo E F K. igitur eadem est proportio quadranguli A B F E ad quadrangulum E F C D sicut trianguli E H F ad triangulum E F K: & per consequens sicut Y ad Z. quod fuit propositum.

Secundo, cadat divisio in puncto L. dico igitur quod linea D G dividit pentagonum, secundum quod proponitur. quia enim triangulus E G D est æqualis triangulo E G L: & quadrangulus A B G E æqualis triangulo E H G; erit pentagonus A B G D E æqualis triangulo E H L. sed & triangulus D G C [1] æqualis est triangulo E L K. igitur eadem est proportio pentagoni A B G D E ad triangulum D G C sicut trianguli E H L ad triangulum E L K. igitur & sicut H L ad L K: & per consequens sicut Y ad Z. quod fuit propositum.

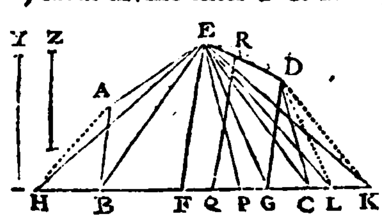


Tertio, cadat divisio in puncto M inter H & F. protracta linea E M; fiat quadrangulus A B N O, per decimam hujus, æqualis triangulo E H M, per lineam N O æquidistantem lineæ A B. patet igitur, sicut & supra, quod proportio quadranguli A B N O ad pentagonum O N C D E est sicut proportio trianguli E H M ad



triangulum E M K: & per consequens sicut Y ad Z. linea igitur O N dividit pentagonum, secundum quod proponitur.

Quarto, cadat divisio inter F & L in puncto

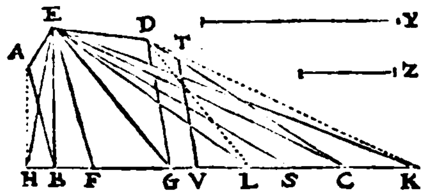


P. tunc protracta linea E P; fiat quadrangulus E F Q R, per decimam hujus, æqualis triangulo E F P. pentagonus igitur A B Q R E est æqualis triangulo E H P. eadem igitur est proportio pentagoni A B Q R E ad quadrangulum R Q C D sicut trianguli E H P ad triangulum E P K. igitur & sicut H P ad P K: & per consequens sicut Y ad Z. quod fuit propositum.

Quinto, cadat divisio in puncto S inter L & K; ita quod eadem sit proportio H S ad S K, sicut Y ad Z. quia igitur, ut superius [3] dictum

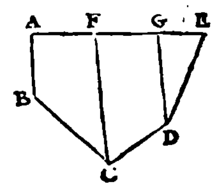
1 Ut supra memoriæ mandatum est. 2 Est enim ABFE quadrangulus æqualis triangulo HEF, & proinde major triangulo HBM. 3 In prima πτώσει secundæ partis.

est, triangulus DGC æqualis est triangulo ELK; erit triangulus ESK minor triangulo DGC. secabo igitur, per tertiam hujus, ex triangulo DGC triangulum TVC sibi similem, &



æqualem triangulo ESK, per lineam TV æquidistantem lineæ DG. dico igitur quod linea TV dividit pentagonum, secundum quod proponitur. quia enim triangulus TVC æqualis est triangulo ESK, & totus pentagonus ABCDE æqualis toti triangulo EHK; erit propter hoc, hexagonus ABVTDE æqualis toti triangulo EHS. eadem igitur est proportio hexagoni ABVTDE ad triangulum TVC sicut trianguli EHS ad triangulum ESK: & per consequens sicut Y ad Z. quod fuit propositum.

Si autem duæ lineæ, quæ protractæ fuerint æquidistanter lineæ AB, cadant super latus AE, secundum quod cadunt lineæ CF, DG: tunc erigemus angulum C; & ratiocinabimur super lineam AE, sicut fecimus super lineam BC: & deveniemus ad nostrum propositum, sicut prius. patet igitur quod voluimus demonstrare.



FINIS LIBRI EUCLIDIS DE DIVISIONIBUS.

EU-

EUCLIDIS
DE
LEVI ET PONDEROSO
FRAGMENTUM.

DEFINITIONES.

1. ÆQUA magnitudine corpora sunt, quæ loca replent æqua.

2. Diversa magnitudine corpora sunt, quæ loca replent non æqua.

3. Grandiora magnitudine dicuntur corpora, quæ loco sunt ampliore.

4. Æqua potentia corpora sunt, quorum, & tempore & aere aquave media æqualibus, & per æqualia intervalla, æquales sunt motus.

5. Diversa potentia corpora sunt, quorum, tempore diverso, motus sunt æquales.

6. Diversorum potentia corporum majus id potentia dicitur, quod movendo temporis insumpsit minus: minus autem potentia, quod temporis amplius.

6. Generis ejusdem corpora sunt, quæ, cum æqua magnitudine ~~sint, etiam sunt~~ potentia.

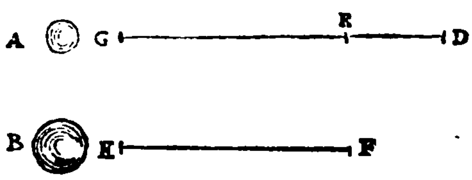
8. Diversa genere corpora sunt, quæ cum æqua magnitudine sint, potentia non sunt; per idem licet medium moveantur.

9. Diversorum genere corporum, potentius id dicitur, quod est solidius.

THEOREMA I.

Diversorum potentia corporum, quod spatium amplius movetur, habet amplius potentiæ.

SInt A & B corpora duo, sint G D & E F spatia duo, G D majus per quod A, E F minus per quod B movetur. resecabo à

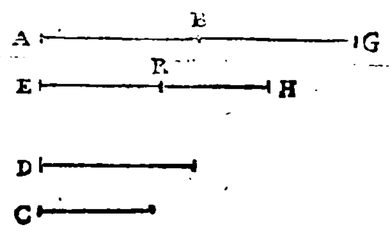


spatio G D, G R spatium, sic ut sit E F spatio spatium G R æquale. cætera sponte patent.

THEOR. II.

Eorundem genere corporum, si ipsa inter se erunt multiplicia, erunt æque ipsorum potentiæ multiplices.

SIT corpus A G, eodem genere corpori D duplum; dico etiam potentia duplum esse. Sit enim A G quidem corporis potentia E H, D vero C: & A G juxta multiplicis excessum in A B & B G dividatur, sic ut utriusque po-

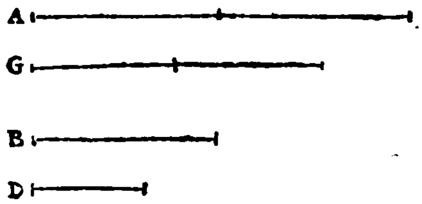


tentia, ipsius D corporis potentiæ, quæ erat C, æqualis fiat. rursus, ut A G corpus in partes A B, B G corpori D æquas divisimus, sic E H potentiam in partes E R & R H, æquas C potentiæ dividamus. liquidum est E H potentiam duplam potentiæ C evadere.

THEOR. III.

Eorundem genere corporum, proportio & magnitudine & potentia est eadem.

SIT A corpus corporis eodem genere B duplum; dico ut A corpus ad B corpus est,



sic corporis A potentia G ad corporis B potentiam D esse.

Patet, si ut corpora sic potentias æque utrinque multipliciter dividamus.

Theor. IV.

Quæ corpora æqua potentia ejusdem generis corpori sunt, ejusdem sunt inter se generis.

ABlatis enim æqualibus illi tertio, erunt ipsorum virtutes æquales, quia potentiæ tertii æquales.

Theor. V.

Quorum corporum & magnitudo & potentia proportio una est, ipsa generis ejusdem erunt.

SIT ut A corpus ad corpus B, sic corporis A potentia ad corporis B potentiam D; dico A, B corpora generis ejusdem esse.

Statuamus enim A corpus æquale corpori cujus potentia sit R. erunt igitur ut B ad A sic R ad potentiam ipsius A, quæ est G. reliqua patent.

FINIS OPERUM EUCLIDIS.

Errata, quæ in opus longum & difficile irrepsisse comperimus, sic emendentur.

PAG. 26. v. 48. pro ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως lege ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων. p. 49. v. 5. pro κύκλου lege κύκλων. p. 149. v. 4. dele ἴσαι. v. 29. pro περὶ ἑαυτοῦ lege παρ' ἑαυτοῦ. p. 150. v. 30. pro τῆς ΓΖ lege ἐλάσσονα τῆς ΓΖ. p. 152. v. 15. dele πρότερον, & v. 16. pro ἴσωσιν πρῶται lege ἴσωσιν πρότεροι αἱ Α, ΒΓ πρῶται. p. 159. v. 13. pro δευτέρου lege τετάρτου. v. 37. pro τῆς Ε, Ζ lege τῶν Ε, Ζ. p. 161. v. 30. pro Α, Β ἐλάχισται lege Α, Β ἐλάσσονες ἐλάχισται. p. 173. v. 19. pro ἕτερον lege ἑκάτερον. p. 177. v. 30. dele ἑξῆς. p. 194. v. 40. pro ἀνάλογον lege ἑξῆς ἀνάλογον. p. 209. v. 13. pro ὑπ' αὐτῶν lege ἀπ' αὐτῶν.

p. 261. v. 36. dele μήκει. p. 262. v. 22, & 23. pro [illegible] lege [illegible] p. 337. v. 2. pro τὸ lege τῷ. p. 354. v. 41. pro ὑφιστῶσι lege ὑφιστῶσι. p. 370. v. 3. pro παραλλήλων lege παραλληλόγραμμα. p. 401. v. 10. pro συλλαβὼν lege συλλαβόν. p. 403. v. 48. pro Β Α, Δ Γ μετὰ lege Β Α, Α Γ μετὰ, & v. 52. pro Β Α, Α Γ ἴσον lege Α Β, Β Γ ἴσον. p. 454. v. 17. pro ὅλον lege ὅλων. p. 455. v. 1. pro γεγωνιωμένα lege γεγωνιωμένα, & v. 19. pro ἐν lege ἕν. p. 457. v. 28. pro δεδομένως lege δεδομένου. p. 458. v. 22. pro ἀλλὸ lege ἄλλο, & v. 25. pro μαθηματικοῖς lege μαθηματικοῖς.