Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres

Ariſtippus Philoſophus Socraticus, naufragio cum ejectus ad Rhodienſium litus animadvertiſſet Geometrica ſchemata deſcripta, exclamaviſſe ad comites ita dicitur, **Bene ſperemus, Hominum enim veſtigia video.**
Vitruv. Architect. lib. 6. Præf.

delin. MBurghers ſculpt. Univ. Oxon.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

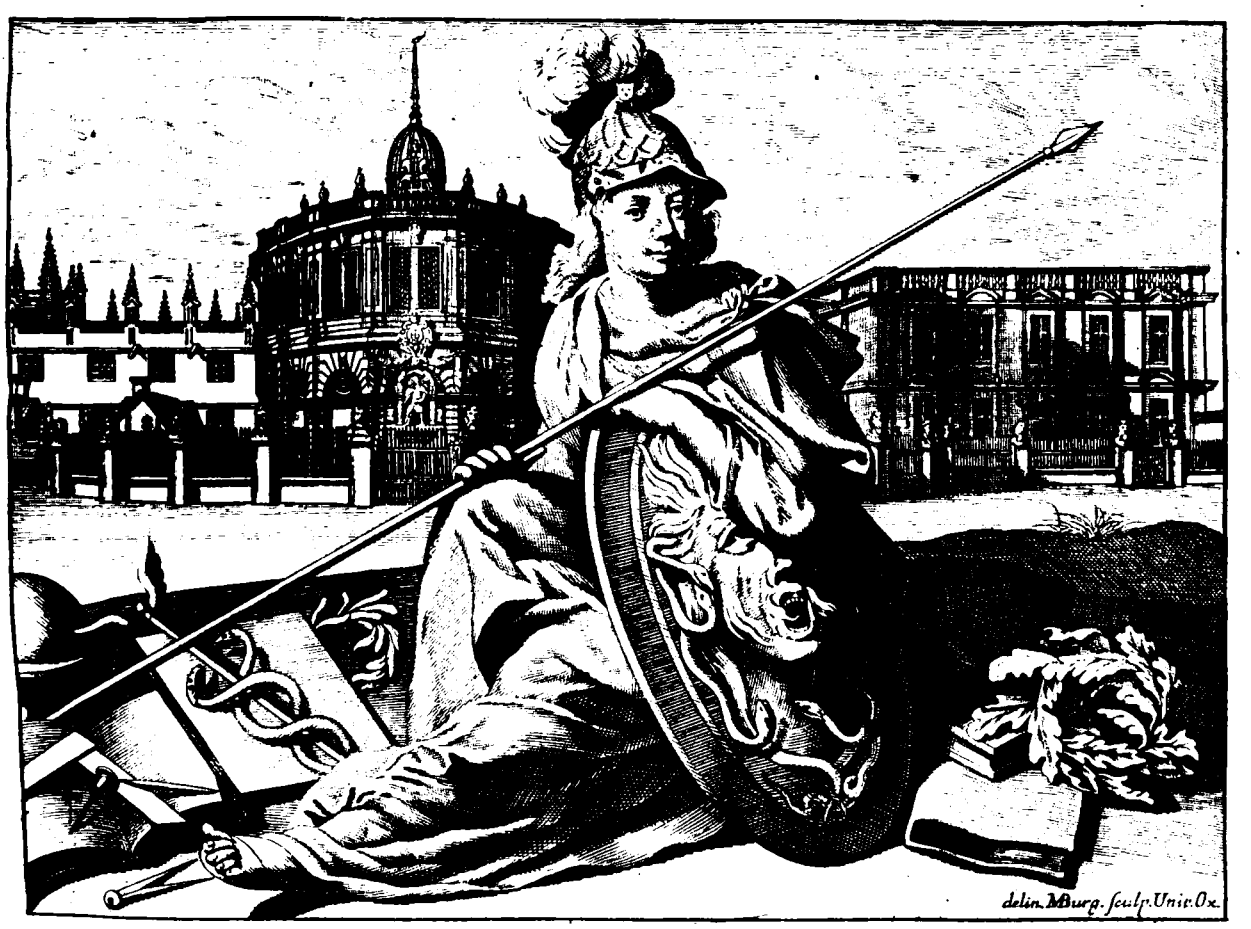
ΤΑ ΣΩΖΟΜΕΝΑ.

EUCLIDIS

QUÆ SUPERSUNT

OMNIA.

Ex Recenſione DAVIDIS GREGORII M. D.
Aſtronomiæ Profeſſoris Saviliani, & R. S. S.



OXONIÆ,

E THEATRO SHELDONIANO, An. Dom. MDCCIII.

264.701-D. Fid-

(Subscriptus) (Grace et Lat.)
BE.5.H.24

Imprimatur,

GUIL. DELAUNE

VICE-CAN. *OXON.*

Junii 3. 1703.

REVERENDO VIRO

HENRICO ALDRICH

S. T. P.

ÆDIS CHRISTI OXONIENSIS

DECANO,

ET

Synodi Provinciæ Cantuarienſis

INFERIORIS DOMUS

PROLOCUTORI DIGNISSIMO.

CUM Tuæ, Vir Reverende, & dignitatis ſplendore, & eruditionis varietate omnium ad Te oculos atque animos trahas; tum præſertim ea, qua literas & literatos foves, benevolentia & liberalitate facis, ut doctorum omnium votis, affectibus, prædicatione cumuleris. Inter Artes vero univerſas quas & Ipſe colis, & ad quas alios accendis, nulla fere eſt quæ curas Tuas magis exercuit quam Matheſis: inter viros quamplurimos, quorum induſtriam provocaſti, me certe devinctiorem habes neminem. Me enim in Oxonio hoſpitem & quaſi peregrinum ſumma illico humanitate amplexus es; meque deinde & ſtudia mea, ultra quam mihi fas erat ſperare, Tuo frequentius colloquio, hortatu, conſilio adjuviſti. Libere mecum communicare ſolebas, quid de omni Matheſeos diſciplina ſenſeris, quis fuerit ſcopus, qui fructus, quæ cujuſque tradendæ ratio commodiſſima. Memini vero quam ſæpe reclamares viris in re Mathematica novitatis, compendii, & forte ſui nimium amantibus; cum interim Juventutem ad ipſos

fontes

fontes remittendam, Veterumque libros diligentius eſſe verſandos terendoſque vehementer urgeres. Ad hæc ſtudia reſuſcitanda ſuadebas, ut Antiqui illi ſcriptores ſive eruti e MSS. publici juris fierent, ſive prius editi ad prelum denuo revocarentur; utque Euclides imprimis (quem Te uno, Vir Clariſſime, nemo aut penitius inſpexit, aut ſæpius revolvit, aut diſtinctius animo infixit) paulo quam antehac elegantior perfectiorque, ſed ſua lingua, ſuo ſimplex cultu atque apparatu prodiret. Mihi vero hanc provinciam commendabas volenti, fateor, atque optanti; quippe qui & rei Mathematicæ inſervire, & Tibi ſemper placere magnopere cupiam. Habes itaque hic, quod a me poſtulabas, Euclidis libros, quantum meæ vires & diligentia efficere poterant, emendatos & numero ſuo abſolutos. Ex Te ſatis intellexi perfectiſſimum opus nihil indigere adjumentis. Cum itaque Tuo obſecutus judicio perpauca admodum annotaverim, pauca etiam erunt quæ veniam Tuam deſiderabunt. Si hæc tandem Tibi non diſplicuerint, pro ſolita Amicitia ſtudiis meis ſuccurre, Tuoque in me Imperio ulterius utere. Nihil oneris impones, quod Te tanto tamque benevolo Adjutore non lubens ſuſcipiam,

Tibi omnibus officiis
omnique cultu devotiſſimus,

DAVID GREGORY.

PRÆFATIO.

PRODEUNT tandem in lucem Euclidis Opera, quæ ſuperſunt omnia, nunc primum Græce & Latine edita. Adjecta ſunt quædam quæ Euclidis forſan non ſunt: noluimus enim quidquam prætermittere, quod vel communi conſenſu, vel celebrioris alicujus Geometræ judicio, Euclidi adſcriptum eſt. De ſingulis, vel qua autoritate Euclidis nomen vendicent, vel quibus argumentis ab illo abjudicanda cenſeamus; quis ſit cujuſque libri ſcopus & methodus; quid demum in hac Editione præſtitum ſit, quibuſque auxiliis muniti hæc adornavimus, paulo fuſius dicemus, ubi pauca de ipſo Authore prælibaverimus.

Quo genere aut patria oriundus ſit Euclides minime conſtat: alium eſſe ab Euclide Megareo, cujus vitam deſcripſit Laertius, vel inde quis ſuſpicetur, quod inter ſcripta ejus nullum opus Mathematicum memoretur. Sed præterea liquet illum Megareum & hunc noſtrum, tum ætate disjunctos eſſe, tum moribus & diſciplina diverſos. Erat enim ille (ut ait Laertius) Socratis auditor; hic (ut teſtatur Proclus libro 2. comment. in lib. 1. Elem.) non Socrate ſolum & Platone, ſed Eudoxo Platonis, & Menæchmo Eudoxi diſcipulo junior. Ille (eodem Laertio authore) vehemens & litigioſus; hic (Pappo teſte libro 7. Collect. math.) ſuaviſſimi ingenii vir, & contentionis minime amans. Floruit vero (ut ex Proclo diſcimus) ſub Ptolemæo Lagi, (qui Ægypto annis plus quam trecentis ante Æram Chriſtianam cæpit imperare,) Eratoſthene & Archimede paulo antiquior. Alexandriæ primus omnium Scholam mathematicam felicibus auſpiciis aperuit, unde omnes fere inſignieres Mathematici prodiere. Si hæc & plura quædam de Euclide clarius uberiuſque enarrata deſideras, Lector, conſule Celeberrimum SAVILIUM, *qui in Prælectionibus illis, quas tanquam primitias propriæ Fundationi conſecrare voluit, quicquid de Euclide ex veterum monumentis erui poteſt copioſiſſime accuratiſſimeque expendit. Cum vero (ut ait Vir ille clariſſimus) Euclidis quidem ingenii monumenta habeamus plurima, vitæ perpauca, de Ejus ſcriptis aliquanto diligentius diſſeremus.*

Opera ejus, partim à Pappo lib. 7, partim à Proclo lib. 2. enumerata, hæc ſunt: Elementorum *Libri,* Datorum *Liber,* Introductio Harmonica, Sectio Canonis, Phænomena, Optica, Catoptrica, *Liber de* Diviſionibus, Poriſmatum *Libri,* Locorum ad ſuperficiem *Libri,* Fallaciarum *Liber,* Conicorum *Libri; de quibus ordine dicendum erit.*

PRÆCIPUE *vero (inquit Proclus loco citato) circa Geometricam Elementorum Inſtitutionem eum quiſpiam admirabitur, propter ordinem & delectum eorum, quæ per Elementa diſtribuit, theorematum atque problematum. Veriſimile eſt etiam ante Euclidem Geometriæ Elementa aliqua conſtructa fuiſſe ab Hippocrate Chio, Leonte, aliiſque magno numero, à Proclo lib. 2. verſus initium memoratis. Nam Proclus expreſſe ait quod Euclides in Elementis multa quidem ordinavit Eudoxi, multa Theateti perfecit, ea præterea, quæ laxius à prioribus demonſtrata fuerant, firmiſſimis demonſtrationibus munivit, quæ nec coargui nec convinci poſſunt; unde à Proclo & veteribus κατ' ἐξοχὴν dictus eſt στοιχειωτὴς, & Geometra.*

Elementa hæc, prout nunc extant, libris conſtant Quindecim; *niſi quod (inquit Gerardus Voſſius) de duobus poſtremis res non ſit ita aperta. Plerique eos non Euclidis putant, ſed commentarios Hypſiclis Alexandrini, qui ducentis poſt Euclidem annis floruit. Sane decimuſquartus præfationem habet propriam, quam nec primus habet Euclidis: non vano argumento, libros duos ultimos alterius eſſe, quam Euclidis.*

Licet Euclides, qui (teſte Proclo) ſecta fuit Platonicus, totius Elementorum Inſtitutionis finem ſtatuat τὸ κοσμικῶν σχημάτων, Mundanarum Figurarum, *conſtitutionem, ad quem (inquit Kepplerus) referuntur omnes omnino propoſitiones omnium librorum, exceptis quæ ad Numerum perfectum ducunt; (figurarum, inquam, earum quæ Platonicæ appellantur, à Pythagora licet detectæ fuerint, ut oſtendit epigramma:*

Σχήματα πίνη Πλάτωνος, ἁ Πυθαγόρας σοφὸς εὗρε·
Πυθαγόρας σοφὸς εὗρε, Πλάτων δ' ἀειδηλ' ἐδίδαξεν·
Εὐκλείδης δὴ τῶνδε κλέος ἀθανάτοις ἐπύθετο.)

proprie tamen Geometria hæc dividitur in ἐπιπέδων ἁπλείαν, ſuperficierum contemplationem, *&* στερεομετρείαν, ſolidorum. *Nam de Punctis & Lineis, ut ait Proclus, nulla eſt inſtituta ab Euclide in Elementis peculiaris tractatio. Sed* στερεομετρία *intelligi nequit ſine notitia linearum* συμμέτρων *&* ἀσυμμέτρων. *Nec hanc ſcire poſſumus, niſi notitiam habeamus numerorum. Quare Elementa hæc commode in quatuor partes dividuntur. Prima eſt* ἐπιπέδων ἁπλεία, *ſex libris comprehenſa; quæ rurſum triplex eſt: quatuor primis agitur de Planis abſolute; in quinto de Proportionibus Magnitudinum in genere; in ſexto denique de Proportionibus Figurarum planarum. Altera eſt de Numerorum Affectionibus; nempe liber ſeptimus, octavus & nonus, qui Arithmeticorum vocantur. Tertia eſt de Lineis* συμμέτροις *&* ἀσυμμέτροις, *unde hæc pars* Συμμετρία *dicitur, ac libro decimo continetur. Quarta eſt* Στερεομετρία, *ſive de Solidis, quæ reliquis libris abſolvitur.*

Circa hoſce Elementorum libros, prout nunc ab omnibus teruntur, varie inter recentiores diſputatur quæ fuerint Theonis in illis partes. "*Quidam propoſitiones Elemento-*
"*rum tribuunt Euclidi, demonſtrationes Theoni, homines ſtulti* (*inquit* Savilius) *&* per-
"*ridiculi; quaſi ullus unquam artifex ſuas edi voluerit concluſiones, nullis adjectis pro-*
"*bationibus. Hoc neque Philoſophorum quiſquam, nec Medicorum, nedum Mathemati-*
"*corum, fecit unquam. Secunda eſt opinio Petri Rami, qui tam propoſitiones quam de-*
"*monſtrationes Euclidi abjudicat, univerſa Theoni attribuens, falſe: eadem enim hæc*
"*quæ nunc habemus, eodem ordine, eiſdem verbis, agnoſcunt ſub Euclidis nomine Pro-*
"*clus & Boëtius Theone poſteriores, & anterior Theone Alexander Aphrodiſeus, & omnis*
"*antiquitas. Tertia opinio eſt eorum, qui omnia attribuunt Euclidi; quæ aut vera eſt,*
"*aut veritati certe proxima. Quid ergo dicemus vulgatis libris, qui ὁπ' ἐ Θέωνος συνε-*
"*σιῶν,* ex Theonis colloquiis ſive congreſſibus, *præ ſe ferunt? cujus tamen tituli in neutro*
"*noſtrorum codicum MSS. ullum reperi veſtigium. Non diffiteor in uno ad oram mar-*
"*ginis adſcripta eſſe ad decimumtertium librum hæc verba:* Εὐκλείδης ὁ τὰ στοιχεῖα συνα-
"*γαγών, ὢν δὴ χρόνοις Ἀλεξάνδρᾳ τῷ Μακεδόνος· Θέων δὲ ὁ σοφιστὴς αὐτὸς, δὴ Θεοδοσίῳ*
"*τῷ βασιλέως; ut collectionem Elementorum Euclidi, ordinationem & diſpoſitionem Theoni*
"*tribuiſſe videatur. Magna certe Theonis laus, ſi inordinata & incompoſita in ordinem*
"*redegit. Sed ne huic incerto ſcholiaſtæ fidem adjungamus, obſtat, ut dixi, Procli &*
"*antiquorum omnium auctoritas; obſtat mirabilis & concinna propoſitionum ſeries, ex*
"*quibus unam loco ſuo ſi eximas, tota corruat compages & ſtructura neceſſe eſt. Quid igitur?*
"*Nullæ ſunt Theonis in hoc libro partes? Non me movent ſuperius dicta; ſed auctoritatem*
"*ipſius Theonis, in commentariis in Almageſtum, perpendendam exiſtimo, quæ fortaſſe*
"*viam præire poſſunt ad eruendam in hac quæſtione veritatem. Quod vero ſectores, in-*
"*quit, in circulis æqualibus ſint proportionales angulis ad centrum conſtitutis, oſtenſum*
"*eſt à nobis in editione Elementorum,* ἐκδόσει, *ad finem ſexti libri. Ex quibus verbis*
"*& novam Elementorum editionem adornaſſe Theonem conſtat, & nonnulla ab ipſo adjecta.*
"*Et quidem in omnibus noſtris exemplaribus hæc verba de ſectore annectuntur ultimæ*
"*propoſitioni libri ſexti Elementorum, quæ & Theonis eſſe puto, ut etiam demonſtrationem*
"*ad illa verba:* λέγω ὅτι κ, &c. *uſque ad finem. Nam Euclidis illa ſolennis clauſula,*
"ὅπερ ἔδει δεῖξαι, *quæ proxime præcedit, finis eſt, ut puto, Euclideæ. Idem judicium*
"*ferendum puto de multis in decimo libro lemmatiis, & fortaſſe propoſitionibus nonnullis.*
"*Alexander certe aliquot ante Theonem ſeculis, in commentariis in priora Ariſtotelis, eam,*
"*quæ quinta eſt decimi in noſtris libris, citat pro quarta; ut neceſſe ſit aliquam ex præ-*
"*cedentibus, quartam, uti reor, qua ſine magno incommodo ſane carere potuiſſemus, ſuo*
"*tempore ab Elementorum libro abfuiſſe, vel ſaltem cum tertia coaluiſſe. Et quidem ul-*
"*timam decimi non dubito aſſumentum eſſe Theonis, vel potius, antiquioris* (*nam apud*
"*Alexandrum extat iiſdem prope verbis*) *minus perſpicacis ingenii, quippe alieno loco po-*
"*ſitam. Forte & Definitiones quædam & Axiomata, Libro* 1. *præpoſita, Theonem vel*
alium præter Euclidem agnoſcunt auctorem, ex. gr. *Ax.* 11; *nam licet Euclides hoc pronunciatum adhibeat in demonſtranda prop.* 29. *El.* 1, *illud tamen pro Axiomate non habuit, ſed pro converſa prop.* 17, *utpote quæ ex illa manifeſto conſequatur. Fortaſſe & alteræ demonſtrationes, quæ paſſim occurrunt, ſunt etiam Theonis: nam quæ in Datorum libro reperiuntur, Euclidis non eſſe expreſſe aſſerit Pappus, licet cum illis Elementorum fa-*

cile

cile comparandæ. Sunt vero ex his quædam quæ Theonem non ſapiunt, ſed à ſciolis quibuſdam conſcriptæ ſunt. Sunt & lemmata & corollaria quædam in Elem. 10. *quæ ab ageometris ſubjuncta ſunt: illa ubique nota perſtrinximus.* "*Ex quibus omnibus* "*concludit* Savilius *Theonis fuiſſe partes, in Euclide pauciſſimis quidem in locis inter-* "*polando, explicando, augendo; ultra hoc nullas. Qui tamen labos non tanti fuit, ut* "*Proclo (omnium ante ſe Mathematicorum diligentiſſimo laudatori) commemoratione dignus* "*videretur.*

Corpus hoc Elementorum ea claritate & evidentia, eo judicio ac firmitudine compactum eſt, ut ſingula in iis propoſitiones, jam à bis mille annis, ab omnibus habeantur pro evidentibus, & pro talibus paſſim ab omnibus citentur. De antiquorum ſuper hiſce ſententia conſulantur Pappus, Proclus, cæterique quotquot erant Geometræ. Ex recentioribus unicus ſufficiat Cardanus, qui lib. 13. *de Subtilitate de hiſce verba faciens, ſic inquit:* "*Quo-* "*rum inconcuſſa dogmatum firmitas, perfectioque adeo abſoluta, ut nullum opus jure huic* "*aliud comparare audeas. Quibus fit ut adeo veritatis lux in eo refulgeat, ut ſoli hi* "*in arduis quæſtionibus videantur poſſe à vero falſum diſcernere, qui Euclidem habent* "*familiarem. Quibus non obſtantibus, dantur aliqui, qui licet utilitatem propoſitionum Euclidearum in omni re geometrica, earumque firmitatem ultra agnoſcant, methodum tamen deſiderant; nempe queruntur illum, neglecta methodo, de Lineis, de Angulis, de Figuris planis mixtim agere: nimirum hanc eſſe optimam veræ methodi legem exiſtimavit vir accuratiſſimus, ut nihil ſumatur pro vero niſi demonſtratum; nihil demonſtretur niſi ex antecedentibus.* "*Quo fit* (*inquit* Savilius) *ut ordo, quem iſti Methodiſtæ requirunt ab Eu-* "*clide, quo nunquam vidit hic ſol* μεθοδικώτερον, *ſervari non potuerit, niſi ſi quis eſt adeo* "*ineptus, ut neſcio cujus imaginariæ venuſtatis rationem habendam putet, neglecta ſani-* "*tate. Quivis eorum, qui Geometriæ Elementa alia methodo tradenda ſuſcepit, inter Euclideum opus alteriuſque cujuſvis præter proprium judex conſtituatur; illico patebit diſcrimen. Impetret horum aliquis ſi poſſit, à judice æque habili, ſententiam qualem de Euclideis Elementis tulit Ramus:* "*Nullus paralogiſmus, nulla* ψευδογραφία, *in totis Ele-* "*mentis, nobis quanquam ſevere inquirentibus animadverti potuit: quam laudem eſſe ſin-* "*gularem profiteor, quamque nulli adhuc neque Grammatico, neque Rhetori, neque Lo-* "*gico concedere potui, ut in Grammatica, Rhetorica, Logica nihil falſi docuiſſet. Nullane igitur eſt methodus compendioſior ad Geometriam addiſcendam, quam hæcce per Euclidis Elementa, quam adeo reformidant plerique? Huic certe quæſtioni reſpondeat ipſe Euclides. Ille à Ptolemæo Ægypti Rege interrogatus, an via eſſet aliqua ad Geometriam magis compendiaria ſua* στοιχώσει, *reſpondiſſe fertur, auctore Proclo in lib.* 2, Μὴ εἶναι βασιλικὴν ἀτραπὸν ἐπὶ γεωμετρίαν.

Hæc vindicandis Elementis, quæ nullo indigent vindice, abunde ſufficient: quid porro nos in iis edendis præſtitimus, paucis explicemus. Primo, Textum Græcum quod attinet, ut is quam emendatiſſimus & caſtigatiſſimus prodiret, modis omnibus curavimus; adhibitis, prout opus eſset, in conſilium MSS. Codicibus haud paucis, melioris notæ, quos in hunc ipſiſſimum uſum Academiæ pridem legârat magnus Savilius; *ut & Caſtigationibus ejus propria manu adſcriptis ad marginem editionis Hervagianæ. Acceſſit ſingularis, & nunquam ſatis prædicanda amiciſſimi* D. Joannis Hudſoni S. T. P. *Protobibliothecarii Bodleiani induſtria in expoliendis Græcis hiſce, & quidem univerſa Editione à vitiis, etiam typographicis, liberanda. Nempe in omnes, etiam infimas, operis noſtri partes ſe demiſit vir optimus. Textum Hervagianum, ante paulo quam in typographorum manus traderetur, accurate interpungendum & diſtinguendum curavit. Latina cum Græcis per totum, in Elementis præſertim ac Datis, ſumma fide contulit. Ubi ea à ſe invicem diſcrepantia deprehenderentur, vel etiam Græcum ipſum ſuſpectum haberetur, conſulti illico MSS. Codices, quorum lectio, ſi cum Latinis congrueret, ad marginem adſcripta extabat; ſin minus, appoſita ſtellula, ut exinde judicandi occaſio mihi daretur, utra demum lectio Geometricis rationibus magis conveniret. Denique, quo textus puritati melius conſuleretur, etiam ſchedas ſingulas, mox ut eas à prelo madentes exceperat, ſemel atque iterum legere & accurate recenſere haud gravatus eſt; eandemque plane in Euclidis noſtri, quam in aliorum Auctorum Græcorum monumentis, à ſe ſumma cum laude vulgatis, præſtitit diligentiam. Traductionem plerunque ſecuti ſumus Federici Commandini, at infinitis in locis caſtigatam; præcipue ex libris clariſſimi* Edvardi Bernardi, *Aſtronomiæ olim Profeſſoris Saviliani, in Bibliotheca Bodleiana adſervatis. Notas nullas adjecimus, niſi cum opus eſſet textum corruptum*

reſtituere, aut ſcholium à ſciolo interpolatum perſtringere: neque enim Euclides is erat, qui elementarem inſtitutionem contexeret, quæ ulteriore egeret explicatione, ſive quæ non eſſet vere elementaris. Atque in hac re provoco ad cujuſvis experientiam, ſintne Elementa hæc clariora & intellectu faciliora, ubi ſola exhibentur, an ubi ſcholiis & lemmatiis innumeris obrutus ipſe Euclides vix appareat. Schemata nitide juſtæque menſuræ excudi curavimus, & demonſtrationibus congrua; præſertim in Elemento quinto, ubi error in ſchemate mentem perſæpe tranſverſim agit. In libro quinto quantitates literis deſignatæ non magis debent eſſe lineæ quam aliæ quævis magnitudines; conſuetudini tamen gerentes morem, rectas in ſchemate deſcripſimus, utpote imaginationi maxime accommodatas. In libris ſeptimo, octavo & nono, nulla debent eſſe ſchemata; literæ enim non determinatos numeros deſignant, ſed quoſvis in certis conditionibus: ad imaginationem tamen ſublevandam, puncta depinximus ea multitudine quæ propoſitioni conveniant. At ſi quando numeri congrui tam magni ſunt, ut punctorum multitudo ſtatim non pateat; ipſos numeros appoſuimus more communi notatos.

SEQUUNTUR *Euclidis* Δεδομένα, Data, *libro unico comprehenſa, cui præfigitur, ob affinitatem, Marini Philoſophi* εἰς τὰ δεδομένα πρόλογος, In Data Præfatio; *tametſi ſtylo ſatis obſcuro conſcripta Euclidis Data parum illuſtret. Cum autem Data hæc ſint ad Analyſin geometricam comparata, & ejus quaſi Elementa veteribus Geometris familiaria, at à recentioribus fere neglecta; libet huc tranſcribere Pappi Alexandrini præfationis ad lib. 7. collect. mathemat. partem, quæ de veterum Analyſi geometrica tractat, & Euclidis Data accurate deſcribit, eorumque uſum indicat. Hanc vero (quia Græce nondum extat) Græce trademus, una cum verſione Commandini.*

Pappi Alexandrini Mathematicarum Collectionum Liber Septimus.

Continet autem lemmata loci reſoluti.

Locus qui vocatur reſolutus, ô Hermodore fili, ut ſummatim dicam, propria quædam eſt materia, poſt communium elementorum conſtitutionem, iis parata, qui in geometricis ſibi comparare volunt vim, ac facultatem inveniendi problemata, quæ ipſis proponuntur: atque hujus tantummodo utilitatis gratia inventa eſt. Scripſerunt autem hac de re tres viri, nempe Euclides στοιχειωτὴς, Apollonius Pergæus, & Ariſtæus ſenior, quæ quidem per reſolutionem & compoſitionem procedit. Reſolutio igitur eſt via à quæſito tanquam conceſſo, per ea quæ deinceps conſequuntur, ad aliquod conceſſum in compoſitione: in reſolutione enim id quod quæritur tanquam factum ponentes, quid ex hoc contingat conſideramus, & rurſum illius antecedens; quouſque progredientes incidamus in aliquod jam cognitum, vel quod ſit è numero principiorum. Et hujuſmodi proceſſum *Reſolutionem* appellamus, veluti ex contrario factam ſolutionem. In compoſitione autem, per converſionem, ponentes tanquam jam factum id quod poſtremum in reſolutione ſumpſimus, atque hic ordinantes ſecundum naturam ea antecedentia, quæ illic conſequentia erant, & mutua illorum facta compoſitione, ad quæſiti finem pervenimus; & hic modus vocatur *Compoſitio*. Duplex autem eſt reſolutionis genus: alterum quidem quod veritatem perquirit, & *Contemplativum* appellatur: alterum vero, quo inveſtigatur id quod dicere propoſuimus, vocaturque *Problematicum*. In contemplativo igitur genere, quod quæritur ut jam exiſtens & ut verum ponen-

Πάππου τοῦ Ἀλεξανδρέως Συναγωγῆς ἕβδομον.

Περιέχει δὲ λήμματα τοῦ ἀναλυομένου τόπου.

Ὁ καλούμενος ἀναλυόμενος, Ἑρμόδωρε τέκνον, κατὰ σύλληψιν ἰδία τίς ἐστιν ὕλη παρεσκευασμένη, μετὰ τὴν τῶν κοινῶν στοιχείων πάντων, τοῖς βουλομένοις ἀναλαμβάνειν ἐν γραμμαῖς δύναμιν εὑρετικὴν τῶν προτεινομένων αὐτοῖς προβλημάτων· καὶ εἰς τοῦτο μόνον χρησίμη καθεστῶσα. γέγραπται δὲ ὑπὸ τριῶν ἀνδρῶν, Εὐκλείδου τε ὁ στοιχειωτὴς, καὶ Ἀπολλωνίου ὁ Περγαῖος, καὶ Ἀρισταίου τοῦ πρεσβυτέρου, κατὰ ἀνάλυσιν καὶ σύνθεσιν ἐχόμενα τῆς ἐφόδου. ἀνάλυσις μέντοι ἐστὶν ὁδὸς ἀπὸ τοῦ ζητουμένου, ὡς ὁμολογουμένου, διὰ τῶν ἑξῆς ἀκολούθων, ἐπί τι ὁμολογούμενον ἐν συνθέσει· ἐν μὲν τῇ ἀναλύσει τὸ ζητούμενον ὡς γεγονὸς ὑποτιθέμενοι, τὸ ἐξ οὗ τοῦτο συμβαίνει σκοπούμεθα· καὶ πάλιν ἐκεῖνο τὸ προηγούμενον, ἕως ἂν ἔτως ἀναπολίζοντες, καταντήσωμεν εἴς τι τῶν ἤδη γνωριζομένων, ἢ τάξιν ἀρχῆς ἐχόντων. καὶ τὴν τοιαύτην ὁδὸν ἀνάλυσιν καλοῦμεν, οἷον ἀνάπαλιν λύσιν. ἐν δὲ τῇ συνθέσει, ἐξ ὑποστροφῆς, τὸ ἐν τῇ ἀναλύσει καταληφθὲν ὕστατον ὑποτιθέμενοι γεγονὸς ἤδη, καὶ τὰ ἑπόμενα ἐκεῖ, ἐνταῦθα προηγούμενα κατὰ φύσιν τάξαντες, καὶ ἀλλήλοις ἑπομενοποιήσαντες, εἰς τέλος ἀφικνούμεθα τῆς τοῦ ζητουμένου κατασκευῆς· καὶ τοῦτο καλοῦμεν σύνθεσιν. διττὸν δέ ἐστιν ἀναλύσεως γένος. τὸ μὲν γὰρ ζητητικὸν καλεῖται θεωρητικόν· τὸ δὲ πρακτικὸν τοῦ προτεθέντος λέγουσιν, ὃ καλεῖται προβληματικόν. ἐπὶ μὲν οὖν τοῦ θεωρητικοῦ γένους, τὸ ζητούμενον ὡς ὂν ὑποτιθέμενοι, καὶ

ὡς

ὡς ἀληθὲς, εἶτα ἀφ' ὧν ἐξῆς ἀκολούθων ὡς ἀληθῶς, ἢ ὡς ἔστι καθ' ὑπόθεσιν, προελθόντες ἐπί τι ὁμολογούμενον· ἐὰν μὲν ἀληθὲς ἢ ἐκεῖνο τὸ ὁμολογούμενον, ἀληθὲς ἔσται καὶ τὸ ζητούμενον, καὶ ἡ ἀπόδειξις ἀντίστροφος τῇ ἀναλύσει· ἐὰν δὲ ψεύδει ὁμολογουμένῳ ἐντύχωμεν, ψεῦδος ἔσται καὶ τὸ ζητούμενον. ἐπὶ δὲ τοῦ προβληματικοῦ γένους, τὸ προτεθὲν ὡς γνωσθὲν ὑποθέμενοι, εἶτα ἀφ' οὗ ἐξῆς ἀκολούθων ὡς ἀληθῶς προελθόντες ἐπί τι ὁμολογούμενον· ἐὰν μὲν τὸ ὁμολογούμενον δυνατὸν ἢ κατασκευὴν, ὃ καλοῦσιν οἱ ἀπὸ τῶν μαθημάτων δοθὲν, δυνατὸν ἔσται καὶ τὸ προτεθὲν, καὶ πάλιν ἡ ἀπόδειξις ἀντίστροφος τῇ ἀναλύσει· ἐὰν δὲ ἀδυνάτῳ ὁμολογουμένῳ ἐντύχωμεν, ἀδύνατον ἔσται καὶ τὸ πρόβλημα. διορισμὸς δὲ ἐστὶ πρόσκλησις τοῦ πότε, καὶ πῶς, καὶ ποσαχῶς δυνατὸν ἔσται τὸ πρόβλημα. τοσαῦτα μὲν ἦν περὶ ἀναλύσεως καὶ συνθέσεως.

Τῶν δὲ προκειμένων τῶν ἀναλυομένων βιβλίων ἡ τάξις ἐστὶ τοιαύτη. Εὐκλείδου δεδομένων βιβλίον ἕν· Ἀπολλωνίου λόγου ἀποτομῆς δύο, χωρίου ἀποτομῆς δύο, ἐπαφῶν δύο· Εὐκλείδου πορισμάτων τρία· Ἀπολλωνίου νεύσεων δύο, τοῦ αὐτοῦ τόπων ἐπιπέδων δύο, κωνικῶν ὀκτώ· Ἀρισταίου τόπων στερεῶν πέντε· Εὐκλείδου τόπων πρὸς φαίνειαν δύο· Ἐρατοσθένους περὶ μεσοτήτων δύο. γίνεται βιβλία λα', ὧν τὰς περιοχὰς, μέχρι τῶν Ἀπολλωνίου κωνικῶν, ἐξεθέμεθα σοὶ πρὸς ἐπίσκεψιν, καὶ τὸ πλῆθος τῶν τόπων, καὶ τῶν διορισμῶν, καὶ τῶν πτώσεων, καθ' ἕκαστον βιβλίον· ἀλλὰ καὶ τὰ λήμματα τὰ ζητούμενα· καὶ ἐδεμίαν ἐν τῇ πραγματείᾳ τῶν βιβλίων καταλέλοιπε ζήτησιν, ὡς ὑπόμιζεν.

Περὶ τῶν Δεδομένων Εὐκλείδου.

Περιέχει δὲ τὸ πρῶτον βιβλίον, ὅπερ ἐστὶ τῶν δεδομένων, ἅπαντα θεωρήματα ἐνενήκοντα· ὧν πρῶτον μὲν καθόλου ἐπὶ μεγεθῶν διαγράμματα κγ'· τὸ δὲ δ' καὶ τὸ κ' ἐν εὐθείαις ἐστὶν ἀνάλογον ἄνευ θέσεως· τὰ δὲ ἐξῆς τούτοις ιδ' ἐν εὐθείαις ἐστὶ θέσει δεδομένοις. τὰ δὲ τούτοις ἑξῆς ι', ἐπὶ τριγώνων ἐστὶ τῷ εἴδει δεδομένων, ἄνευ θέσεως. τὰ δὲ ἑξῆς τούτοις ἑπτὰ, ἐπὶ τυχόντων ἐστὶν εὐθυγράμμων χωρίων εἴδει δεδομένων, ἄνευ θέσεως. τὰ δὲ ἑξῆς τούτοις ἕξ, ἐν παραλληλογράμμοις ἐπὶ κατασκολὰς εἴδει δεδομένων χωρίων. τῶν δὲ ἐχομένων ε', τὸ μὲν πρῶτον γραφόμενόν ἐστι, τὰ δὲ δ' ἐπὶ τριγώνων χωρίων, ὅτι αἱ διαφοραὶ τῶν δυνάμεων τῶν πλευρῶν πρὸς ταῦτα τὰ τρίγωνα χωρία λόγον ἔχουσι δεδομένον. τὰ δὲ ἑξῆς ἑπτὰ, ἕως τοῦ ο' καὶ γ', ἐν δυσὶ παραλληλογράμμοις, ὅτι ἀφ' αἱς ἐν τῆς γωνίας ὑποθέσεις ἐν δεδομένοις ἐστὶ λόγοις πρὸς ἀλλήλας· ἔνια δὲ τούτων ἐπιλόγους ἔχει ὁμοίους ἐν δυσὶ τριγώνοις. ἐν δὲ τοῖς ἀφεξῆς ἓξ διαγράμμασιν, ἕως τοῦ ο' ϛ', δύο μὲν ἐστὶν ἐπὶ τριγώνων, δ' δὲ ἐπὶ πολυγώνων εὐθυγράμμων ἀνάλογον ὄντων. τὰ δὲ ἑξῆς τρία, ἐπὶ δύο

tes, per ea quæ deinceps conſequuntur tanquam vera, & quæ ex poſitione ſunt, procedimus ad aliquod conceſſum; quod quidem ſi verum ſit, verum erit & quæſitum; & demonſtratio reſolutioni ex contraria parte reſpondebit: ſi vero falſo evidenti occurramus, falſum erit & quæſitum. In problematico autem genere, quod propoſitum eſt ut cognitum ponentes, per ea quæ deinceps conſequuntur tanquam vera, procedimus ad aliquod conceſſum; quod quidem ſi fieri, compararique poſſit, (quod Datum vocant mathematici,) etiam illud quod propoſitum eſt fieri poterit; & rurſus demonſtratio reſolutioni ex contraria parte reſpondens: at ſi quod fieri evidenter non poſſit occurramus, & problema itidem fieri non poterit. Determinatio autem eſt, quæ declarat quando, & qua ratione, & quot modis problema fieri poſſit. Hæc igitur de Reſolutione & Compoſitione dicta ſunt.

Dictorum autem librorum, qui ad reſolutum locum pertinent, ordo talis eſt. Euclidis Datorum liber unus; Apollonii de Proportionis Sectione libri duo, de Spatii Sectione duo, Tactionum duo; Euclidis Poriſmatum tres; Apollonii Inclinationum duo, ejuſdem Planorum Locorum duo, Conicorum octo; Ariſtæi Locorum Solidorum quinque; Euclidis Locorum ad Superficiem duo; Eratoſthenis de Medietatibus duo. Atque ita omnes libri ſunt numero triginta & unus; quorum periochas, uſque ad Apollonii Conica, tibi expoſuimus ad contemplationem, & multitudinem locorum & determinationum & caſuum in unoquoque libro; ſed & etiam lemmata quæ requiruntur: & in librorum tractatione nullam, ut arbitramur, quæſtionem omiſimus.

De Datis Euclidis.

Primus autem liber, qui eſt Datorum, theoremata nonaginta continet; quorum primum quidem univerſe in magnitudinibus diagrammata habet 23; vigeſimum-quartum vero eſt in rectilineis proportionalibus ſine poſitione: at quæ deinceps ſequuntur quatuordecim ſunt in rectis lineis poſitione datis. Quæ vero ſequuntur decem in triangulis ſpecie datis, ſine poſitione. Quæ ſequuntur ſeptem ſunt de quibuſvis ſpatiis rectilineis ſpecie datis, ſine poſitione. Quæ ſequuntur ſex in parallelogrammis, & applicationibus ſpatiorum ſpecie datorum. Eorum quæ deinceps ſunt quinque, primum quidem eſt in lineis; quatuor vero in ſpatiis triangulis, quod differentiæ quadratorum laterum ad ipſa triangula ſpatia rationem habeant datam. Quæ ſequuntur ſeptem, uſque ad ſeptuageſimum-tertium, in duobus parallelogrammis, quod ob poſitiones in angulis rationem inter ſe datam habeant: aliqua autem horum epilogos ſimiles habent in duobus triangulis. In ſequentibus vero ſex diagrammatibus, uſque ad ſeptuageſimum-nonum, duo quidem ſunt in triangulis, quatuor in pluribus rectis lineis proportionalibus. Quæ deinceps ſunt tria, in

duabus rectis lineis proportionalibus, quæ datum ſpatium continent. At quæ in omnibus octo, uſque ad nonaginta, in circulis oſtendantur, vel magnitudine tantum datis, vel etiam poſitione; nimirum rectis lineis per datum punctum ductis.

εὐθειῶν ἀνάλογον ἐσῶν, τὰ δ' ἴσῃ, δοθὲν τὸ περιεχόμενον χωρίον. τὰ δ' ἐπὶ πᾶσιν ὀκτὼ, ἕως ϟ, ἐν κύκλοις δείκνυται, τοῖς μὲν μεγέθει μόνον δεδομένοις, τοῖς δὲ καὶ θέσει, ἀριθμῶν εὐθειῶν ἀπὸ δεδομένου σημείου.

Exhinc perſpicere licet quomodo veteres Geometræ theorema demonſtrarent, vel problema conſtruerent. Non enim, ut neoterici plerique, ſymbolis ſuppoſitis, in calculum arithmeticum ſeſe ſtatim immergebant; ſed ex datis gradum faciebant ad quæſita, ope penus analytici; nempe Datorum *horum, aliorumque Euclidis, Apollonii, Ariſtæi & Eratoſthenis Librorum* 30. *ſupra enumeratorum. Hujuſmodi Analyſeos apud veteres paſſim extant exempla, nominatim in propoſitionibus* 107, 117, 155, 204, 205, *&c. ſeptimi libri math. collect. Pappi. Inter recentiores Clariſſ. D.* Antonius Hugo de Omerique, *in Analyſi Geometrica* Gadibus *An.* 1698. *edita, hanc fere veterum Analyſin poſtliminio reducere feliciter eſt aggreſſus.*

Poſtquam Pappus enumeravit Libros, qui ad reſolutum locum pertinent, eorum deſcriptionem particularem aggreditur. Ac primo de Datis Euclidis agit. Ex hujus libri deſcriptione liquet illum temporis injurias eſſe paſſum: ait enim illum theoremata nonaginta continere, cum nunc nonaginta quinque in eo numerentur. Sed libet ſingulas diviſiones diſpicere. Theoremata prima 48 *eodem ſunt ordine, numero, & de iiſdem rebus, quibus à Pappo deſcribuntur. Quæ ſequuntur* 7, *nempe à* 49no *ad* 55^{tum} *incluſive, ſunt (ut à Pappo deſcribuntur) de quibuſvis ſpatiis rectilineis ſpecie datis, ſine poſitione: hæc* 7 *omiſit Commandinus in verſione latina. Sex deinde ſequentia, nempe à* 56to *ad* 61^{mum} *incluſive, reſpondent deſcriptioni Pappi. Sic etiam* 5 *proxima; illorum enim primum eſt de figuris deſcriptis à duabus rectis datam rationem habentibus: loco vero quatuor ſequentium ſunt quinque; exinde protuldubio, quod quæ vulgo numerantur* 64^{tum} *&* 65^{tum} *ſint tantum bini caſus ejuſdem theorematis; eſt enim alterum in oxygoniis triangulis, quod alterum eſt in amblygoniis; adeo ut numerus propoſitionum ſit hic auctus unitate. Sequentia* 7 *à deſcriptione Pappi non diſcrepant, niſi quod horum penultimum ſit de quibuſvis figuris, & ultimum ſit de rectangulo parallelogrammo comparato cum alio rectilineo: patet vero ex Pappi verbis theoremata* 71^{mum} *&* 72^{dum} *(ut vulgo numerantur) debere eſſe tantum epilogos, ut &* 75^{tum} *&* 76^{tum}; *nam in illis eadem enunciantur de triangulis, quæ prius de parallelogrammis. Adeo ut hic reperiantur quatuor theoremata ſupra numerum, quæ una cum uno, (de quo prius) faciunt quinque ſupra numerum; unde fit ut horum ultimum, quod Pappo eſt* 73^{tium}, *ſit* 78^{vum}. *Sequentium theorematum duo ſunt in triangulis, ut ait Pappus; at tantum tria in pluribus rectis proportionalibus, licet Pappus numeret quatuor. Pappus proxime deſcribit tria theoremata in duabus rectis proportionalibus, quæ datum ſpatium continent ſpatium; ſunt tamen quatuor: verum hic aliquis irrepſit error; nequeunt enim duæ rectæ dici proportionales; & præterea vel rectarum harum, vel quadratorum ab illis, ſumma vel differentia data eſt. Octo ſequentia theoremata exacte reſpondent deſcriptioni Pappi. Atque ſic ſunt* 90 *theoremata; nempe ſi vulgo numerata* 64^{tum} *&* 65^{tum} *in unum coaleſcant; &* 71^{mum} *&* 72^{dum}, *item* 75^{tum} *&* 76^{tum} *pro epilogis habeantur, qualia ea habet Pappus, & detrahatur unum ex antepenultimis quatuor à Pappo deſcriptis, & ſuppleatur unum in penultimis tribus. Nos eundem, quem à prædeceſſoribus habuimus, numerum, quique in MSS. noſtris obtinet, retinuimus, ne citationes ab auctoribus factæ turbarentur.*

Græcum textum infinitis in locis, ex diverſis quos habuimus codicibus MSS. ſupplevimus; verſionem Latinam Claudii Hardy *ex* Bernardo *emendavimus, & diagrammatibus ſuas literas ex MSS. reſtituimus, quas* Cl. Hardy *immutaverat, ut paucioribus inciſis ſchematibus opus haberet. Euclides enim in Operibus ſuis indubitatis, etiam in hac re adiaphora, methodum elegantem ubique obſervavit; nempe ut prima puncta, primaſque lineas vel figuras prioribus alphabeti literis deſignaret, ſequentia ſequentibus, atque ita porro.*

Unicum theorema 86^{tum} *inſigniter vitiatum videtur; quod tamen ex MSS. reſtitui nequit. Illud ſic legendum crediderim:* Si duæ rectæ datum ſpatium comprehendant in angulo dato; poſſit autem recta data altera majus, alterius quadrato, quam in ratione: & utraque ipſarum data erit. *Vel ſic aliter:* Si duæ rectæ datum ſpatium comprehendant in angulo dato; quadratum autem rectæ quadrato alterius majus ſit, alterius quadrato, quam in ratione: & utraque ipſarum data erit. *Vel ita optime:*

optime: Si duæ rectæ datum ſpatium comprehendant in angulo dato; earum autem quadrata ſimul ſumpta æqualia ſint ſpatio dato: & utraque ipſarum data erit. *Etenim ſi ſic fuiſſet enunciatum hoc theorema, tum poſitis (methodo, ſive potius ſtylo recentiorum) x & y duabus rectis, & angulo dato recto, (nam alter quivis datus angulus differt à recto ſicut* $\frac{m}{n}$ *ab* $\frac{m}{m}$ *ſive* 1, *quæ differentia gradum æquationis nihil mutat,) fiet* $xy = a^2$, *&* $b^2 - x^2 = y^2$ *ſive* $b^2 = x^2 + y^2$; *& reductione facta ad unicam æquationem,* $x^4 - b^2 x^2 + a^4 = 0$, *vel* $y^4 - b^2 y^2 + a^4 = 0$. *Ideoque cum Euclides oſtendat in hoc caſu dari x & y, ſimul oſtendit reſolutionem æquationis hujuſmodi quatuor dimenſionum, nempe* $z^4 * - dz^2 * + c = 0$, *ſicut in ſequente unico theor.* 87, *oſtendit reſolutionem hujuſmodi æquationis* $z^4 * + dz^2 * - c = 0$, *vel hujuſmodi* $z^4 * - dz^2 * - c = 0$. *Unde factum, ut duobus his theorematibus contineretur reſolutio omnium æquationum (quas vocant) biquadraticarum ſecundo & quarto terminis carentium. At ſi theorema hoc* 86^tum *accipiatur modo quo vulgo legitur, tum erit* $xy = a^2$ *&* $x^2 - b^2 . y^2 :: c . f$, *ſive* $fx^2 - fb^2 = ey^2$; *& rejecta x, fiet* $ey^4 + fb^2 y^2 - fa^4 = 0$; *vel rejecta y, fiet* $fx^4 - fb^2 x^2 - ea^4 = 0$. *Atque ſic reſoluta haberetur æquatio hujus formulæ* $z^4 * + dz^2 * - c = 0$, *vel hujus* $z^4 * - dz^2 * - c = 0$; *nempe ejuſdem cum illis quæ in ſequente* 87^mo *reſolutæ ſunt; & formula hæc* $z^4 * - dz^2 * + c = 0$ *omnino omiſſa eſſet ab Euclide: quod minime eſt veriſimile, præſertim ſi conſideretur theor.* 84^to *Datorum reſolutas eſſe æquationes pure quadraticas harum formularum* $z^2 + dc - c = 0$, *&* $z^2 - dz - c = 0$; *&* 85^to *hanc* $z^2 dz + c = 0$; *cujuſmodi æquatio in biquadraticis eſt omiſſa, niſi lectio ſuprapoſita (vel æquipollens alia) admittatur. Immo conſtructionis harum æquationum (ſimpliciter ſive una æquatione, non autem duabus, ut in* 84^to *&* 85^to, *enunciatarum) habita eſt ratio in theorematibus* 58^vo *&* 59^no *Datorum; immo & in ipſis Elementis, prop.* 28^va *&* 29^na *libri* 6; *& prop.* 30^ma *ejuſdem eſt problema quadraticum ex prius oſtenſa methodo conſtructum, ſicut theoremata aliquot verſus finem Datorum ſunt alia hujus methodi exempla.*

SEQUUNTUR *Euclidis duo Tractatus Muſici*; Introductio Harmonica & Sectio Canonis. *In quibus edendis Celeberrimi D.*Walliſii *conſiliis uſi fuimus, qui in Notis ſuis ad Ptolemæi Harmonica (ab ipſo edita) ejuſque Appendice Græcorum Harmonicam feliciter reſtituit & illuſtravit: quo itaque lectorem ablegamus, qui de hac re plura deſiderat. Euclidis, dixi, Tractatus duo; non quod utrumque putemus ab Euclide ſcriptum, (forte neutrum;) ſed quod è nuperis ſcriptoribus quidam hos Euclidi tribuerint. E nuperis, inquam, ſcriptoribus quidam; nam nemo (quod ſcimus) veterum, Ptolemæo antiquiorum, eorum vel utrumque vel alterum memoravit uſpiam; nec in ullo antiquo codice MS. adſcriptum extat Euclidis nomen. (Quæ agnoſcit Meibomius in Præfatione ſua; qui tamen eos Euclidi tribuit, ſed ut ab aliis forſan interpolatos.) Mirum autem eſt, ſi Euclidis fuerint, quod nemo veterum Ptolemæo antiquiorum, nec ipſe Ptolemæus, eorum uſpiam meminerit. Fieri quidem poteſt, quod eorum prior fuerit ab Euclide ſcriptus, qui totus eſt Ariſtoxeneus, Ariſtoxeni hypotheſin per omnia ſecutus; quæ quidem hypotheſis Euclidis tempore recepta fuerat, eaque ſola; atque deinceps ad Ptolemæum uſque, qui primus omnium hanc Canonis Sectionem introduxit, ante quem nemo (quod ſcimus) aut hujus Sectionis, aut etiam hujuſce Canonis mentionem fecit, aut de eo quicquam cogitavit.*

Ariſtoxenus enim ejuſque ſectatores (Ariſtoxenei dicti) pro poſtulato habuerunt, Magnitudinem, qua differunt Dia-pente & Dia-teſſaron, (pro arbitrio ſuo) dicendam Tonum; *atque ad hanc menſuram intervalla reliqua exigebant omnia. Et ſpeciatim Dia-teſſaron cenſebant hujuſmodi Tonos continere duos cum ſemiſſe; Dia-pente, tres cum ſemiſſe; & Dia-paſon, ſex tonos, ſeu quinque Tonos & duo Hemitonia, (Tonos omnes reputantes tum inter ſe, tum huic æquales;) & Hemitonium, hujuſce Toni præciſe ſemiſſem, de Sonorum inter ſe proportione minime ſolliciti. Ptolemæus autem (omnium primus) hanc Diaſtematum ſeu Intervallorum menſuram per hanc Toni magnitudinem improbans, diſtinguenda cenſuit intervalla Muſica pro Ratione ſeu Proportione, quam inter ſe habent Soni terminantes hæc intervalla, ſecundum Acuminis & Gravitatis gradum conſiderati; quod & Pythagorici ante fecerant, ſed rejicit Ariſtoxenus. Adeoque Dia-paſon cenſuit in Ratione dupla; Dia-pente in ſeſquialtera; Dia-teſſaron in ſeſquitertia; Tonumque ipſum (quo differunt Dia-pente & Dia-teſſaron) in ſeſquioctava; reliquaque intervalla, pro ſua cujuſque Sonorum terminantium proportione. Et quidem, ſumpta pro Canone linea cujuſcunque longitudinis determinatæ, docet, quomodo ſecandus ſit hic Canon, ut hæc ſingula intervalla repræſentet.*

Cui quidem hypotheſi apte reſpondet Experimentum phyſicum: quippe ſi chorda Muſica, æquabiliter tenſa, intelligatur (cæteris paribus) ſecundum has longitudines diviſa; ejuſdem partes (plectro percuſſæ) ſonos exhibebunt gravitate proportionales ſuis reſpective longitudinibus. Atque hinc eſt, quod Ptolemæus, quique illum ſequuntur, (propter hanc Canonis Sectionem,) dici ſolent Canonici; ut reliquis Muſicis (Ariſtoxeneis) contra diſtincti, quos Muſicos *vocant, non* Canonicos.

Atque hanc Ptolemaicam Hypotheſin, Ariſtoxeneæ contrariam, exponit Tractatuum horum poſterior, qui Sectio Canonis dicitur. Adeoque (quicquid ſit de priori) poſterior hic tractatus nullo modo cenſeri poteſt ab Euclide ſcriptus, cum hæc Sectio Canonis non niſi longo poſt Euclidem tempore primum innotuerit, nullaque hujus extent veſtigia in quopiam ſcriptore Muſico (quod ſcimus) qui ſit antiquior Ptolemæo. Fieri quidem poteſt (idque probabiliter) ut, ſi ejuſdem Authoris cenſendus ſit uterque, uterque ſit Ptolemæi, qui forte Hypotheſin Ariſtoxeneam, quæ hucuſque obtinuit, fideliter primum expoſuit; dein expoſitam refutavit, ſeu (ut mollius loquamur) correxit & emendavit. Hoc enim poſteriori Tractatu factum eſt, qui eſt prioris ſolida refutatio. Demonſtrat utique (contra quam ſupponit prior Hypotheſis) Dia-paſon minus eſſe quam ejuſmodi ſex Tonos; & Dia-teſſaron minus quam duos cum ſemiſſe; & Dia-pente minus quam tres cum ſemiſſe: item illos, qui pro Tonis antea cenſebantur, non inter ſe æquales omnes, nec expoſito Tono Diazeuctico, quem ut communem menſuram poſuerint: item, quod dici ſolet Hemitonium, non eſſe expoſiti ſemiſſem, nec poſſe Tonum illum in duas partes æquales (concinnas) dividi. Quæ omnia ἀναντιῤῥήτως *demonſtrantur, ſuntque priori hypotheſi plane contraria. Cumque hodierni Muſici practici etiamnum loqui ſoleant non raro ſecundum phraſeologiam Ariſtoxeneorum, (de Tonis & Hemitoniis,) intelligendi ſunt non ſecundum Mathematicam* ἀκρίβειαν, *ſed (latius) vero proximum pro vero ſumentes. Sed, ubi accuratius loqui libet, Tono Diazeuctico (à Meſe ad Parameſen) rationem aſſignant ſeſquioctavam; Tonis quibuſdam minoribus, ſeſquinonam; Hemitonio, ſeſquidecimamquintam; Limmati, ſeſquioctogeſimam;* τῷ *Dia-teſſaron, ſeſquitertiam; Dia-pente, ſeſquialteram; Ditono, ſeſquiquartam; Dia-paſon, duplam; Dia-paſon cum Dia-pente, triplam; Diſ-dia-paſon, quadruplam; & reliquis ſimiliter. Cumque hæc ſibi ſumpſerit demonſtranda Ptolemæus, omnino candide factum eſt, quod hypotheſin, quam ſubverſum ibat, fideliter primum expoſuerit, (ne cenſeretur vel cum umbris dimicare, vel adverſariis eſſe injurius,) deinde falſitatis arguerit. Hinc eſſe ſuſpicamur, quod ſoleant hi Tractatus junctim incedere; quaſi fuerint ejuſdem Auctoris Tractatus duo, aut ejuſdem (ſi libet) Tractatus duæ partes. Atque hæc ſunt quæ de Authore dicenda putavimus, quem Ptolemæum fuiſſe potius cenſeamus. Euclidis interim nomen ideo retinemus, eo quod huic ab aliis ſint adſcripti; reliquiſque ſcriptis Euclideis hic ſubjungimus, ne cenſeamur Euclidis quicquam omiſiſſe: ſuntque Tractatus ipſi (cujuſcunque fuerint Authoris) merito æſtimandi.*

In his edendis Meibomii editionem (Amſtelodami habitam, Anno 1652) in Textu Græco fere per omnia ſequimur; præterquam ubi (in Notis ſuis) aliquid immutandum ſubinnuit ipſe, ut qui in his aliiſque veteribus Muſicis edendis & reſtituendis utilem impendit operam. Apud ipſum videat (cui libet) variantes variorum codicum lectiones, & cur hos aliis prætulerit; quibus codicibus uſus fuerit; quid alii de Authore ſenſerint; aliaque rem ipſam ſpectantia, ſcitu digna. Ejuſdem verſionem Latinam ut plurimum retinemus, paucis tamen in locis ſubinde mutatam; præſertim quod pro Latinis literis ſchemata reſpicientibus ſubſtituimus ubique Græcas, ut quæ ſchematiſmis aptius inſerviant. Sed & voces aliquot parce immutavimus. Sic, verbi gratia, pag. 1. lin. 13. τὴν τάξιν ἐχόντων, *quod ille reddit* certum quendam ordinem ſervantibus, *aptius reddendum putamus* ſecundum qualitatem ordinatis, *pag. 533. lin. 10. Non enim* τινὰ *dicitur, (ut indeterminatum, ſeu indefinitum, innuat;) ſed* ποιὰν, *quod Prædicamentum Qualitatis reſpiciat: quippe ejuſdem ſoni Productio & Contractio (ſeu Longitudo & Brevitas) ſoni Quantitatem reſpiciunt; ſed (quæ hic conſiderantur) Intenſio & Remiſſio (ſeu Acumen & Gravitas) ejuſdem Qualitatem: quod innuit vox* ποιά. *Et ſimiliter ubi vox* ποιὰ *vel* ποιότης *occurrit. Et mirum eſt, quod Interpretes (tum hic tum alibi) id non obſervaverint. Sic vocem* τόνον, *quam ille variis in locis (varietatem affectans) aliter atque aliter reddit,* intenſionem, finitionem, determinationem, *&c. nos* tenſionem *ubique reddimus; vocabulis artis preſſius inſiſtendum putantes, quo ambiguitatem vitemus. Item Rationes, quæ ipſi (novis vocibus) paſſim vocantur* ſeſcupla, ſupertertia,

tertia, superoctava, &c. (*quo linguam Latinam, ut ille loquitur, nevis vocabulis ditare possit,*) *nos receptioribus vocabulis dicimus* sesquialteram, sesquitertiam, sesquioctavam, &c. *quæ voces sunt nec minus latinæ, & melius notæ, & ab ipso aliquando admissæ. Idque potissimum facimus, quia liquet Mathematicos scriptores, & Euclidem maxime; non varietati phrasium indulgere, sed ad statas loquendi formulas stylum suum accommodare.*

Sic vocem ἄγειν, *quam Meibomius* (*p.* 2. *l.* 31.) *reddit* ascendit, *nos* tendit *reddimus,* (*p.* 533. *l. ult.*) *nam vox* ἄγειν *non magis Ascensum innuit quam Descensum. Et apud Meibomium* (*p.* 3. *lin.* 12, 14, 17, 19.) *simili sensu occurrunt voces* deferetur, erigetur, descendet, ascendet, (*innuentes Acutum in Alto, & Grave in Imo,*) *quas nos* (*pag.* 534. *l.* 15, 16, 18. 19.) *expungendas censuimus; tum, quia nihil est in Græco textu quod his vocibus Latinis respondeat; tum maxime, quia Euclides* (*aut quisquis fuerit horum Tractatuum Author*) *nusquam docet Intensionem Ascendendo fieri, nec Remissionem Descendendo.*

Verum quidem est, quod hodierni Musici sic loqui soleant, (*Acutum in Alto reputantes, & Grave in Imo,*) *quodque ex Græcis recentioribus nonnulli sic aliquando* (*sed raro*) *loquuti videantur; apud quos sensim inolevit mos sic loquendi. Hinc est quod apud recentiores Græcos Modus Hypodorius dicitur, qui quam Dorius Gravior; & Hypophrygius quam Phrygius* (*toto Dia-tessaron,*) *& in reliquis similiter; & Hypermixolydius acutior quam Mixolydius. Nec tamen omnes eodem sensu loquuntur: nam Nicomacho* (*pag.* 7. *lin.* 12.) *Hypermese est quam Mese gravior; totoque decursu suo Grave reputat Infimum & Acutum Altissimum. Atque Aristides Quintilianus* (*pag.* 18. *editionis Meibomianæ*) *Tonum Hypodorium acutiorem facit quam Dorium; & Hypophrygium quam Phrygium; & Hypolydium quam Lydium. Sed antiquiores Græci plane contrarium,* (*Grave reputantes in Alto, & Acutum in Imo.*) *Hinc est quod Tetrachordorum Gravissimum dicitur Hypaton* (ὑπατῶν) *Chordarum* Supremarum; *deinde Meson* (μέσων) Mediarum; *& tandem* (νητῶν *sive* πάτων) Ultimarum *sive* Noviſſimarum. *Et, in eodem Tetrachordo, Chorda gravissima Hypate* (ὑπάτη) *Chorda* Suprema *dicitur; Parypate* (παρυπάτη) Supremæ proxima; *& Nete* (νήτη *sive* νεάτη) Ultima *sive* Noviſſima. *Sic Hypate Hypaton, Parypate Hypaton, Hypate Meson, Parypate Meson &c, Grave pro Summo indicant olim habitum; eademque nomina etiamnum retinentur. Horumque Author Tractatuum à Proslambanomeno* (*serius assumpto*) *procedit ad Hypaten Hypaton, Parypaten Hypaton, & sic continue, ad Acutiores sonos descendendo. Quod etiam ad Boëthii tempora continuatum est, qui, in schematismis suis, Grave semper in Summo ponit, & Acutum in Imo. Nolimque Euclidis authoritatem prætendi, quasi sua ætate sic fuerint loquuti, ut nunc dierum. Non interim negemus, quin fieri possit ut Aristoxeni ætate admissum fuerit, ut omnium acutissimum, Tetrachordon* ὑπερβολαίων, (excellentium, supereminentium, extravagantium, insuper adjectorum, *pluribus enim modis Latine redditur ea vox;*) *nam semel occurrit vox* ὑπερβολαίους *apud Aristoxenum,* (*p.* 40. *lin.* 7, *editionis Meibomianæ,*) *qui est omnium quos nunc habemus Musicorum antiquissimus, sed Platone & Aristotele junior, quos ambos ipse citat sub initium libri secundi; & quibus etiam non multo juniorem esse Euclidem nostrum superius ostensum est, ut non possibile sit Tractatus hosce duos ab ipso fuisse scriptos. Sed sciendum est, tum Proslambanomenon, in Grave; tum totum Hyperbolæon Tetrachordum, in Acutum, multo serius admissa fuisse, quam indita fuerint priora nomina ab iis qui chordam Gravissimam censuerint* (ὑπατῶν) Supremam. *Et quidem Vocis* Motum in Acutum, & Motum in Grave, *item* Intensionem & Remissionem, *passim habemus apud scriptores Musicos; sed* (*pro illis*) Ascensum & Descensum *nemo* (*quod scimus*) *dixerit Græcorum veterum.*

Tractatus *Musicos excipiunt* Phænomena; *Liber certe unicus, qui à Geometra scriptus cœlestia ullo modo attingit. Hujus meminit Joannes Grammaticus Philoponus ad* 2. *Phys. Aristot.; meminit etiam Pappus in lib.* 6, *ubi queritur casus esse omissos in ejus Theor.* 2^do 12^mo 13^tio &c, *quos supplet: unde patet Pappum librum hunc pro corrupto habuisse; neque enim de Euclide dixisset, quod propositiones* ἀμελέστερον, negligenter, *intelligeret. Hoc ulterius patet ex secundis demonstrationibus passim interpolatis, & ex scholiis* ἐκ παλαιῶν. *Liber hic Phænomenôn supponit Elementa sphærica tunc extantia: cum vero nihil supersit hac de re scriptum ante Euclidem, præter Autolyci Prytanei Librum de Sphæra quæ movetur, hunc unicum citandum censuimus. Neque enim concinnum judicavimus, ad astruenda quæ ab Euclide asseruntur, Sphærica afferre Theodosii, quæ multis post seculis scripta sunt.*

In hoc edendo codices MSS. diligenter contulimus, ut textus Græcus, qui nunc primo lucem aſpicit, quam caſtigatiſſimus prodiret. Theor. 2. vox ἀρκτικοῦ, redditur Poli arctici, *non* Circuli. *Theor. 4. & alibi ſæpius, loco μεσημβρινὸς, legimus μάγιστος κύκλος, exigente ſenſu. Verſione uſi ſumus Joſephi Auriæ Anno 1591. Romæ edita, at plurimis in locis emendata. Schemata reſtituimus qualia in MSS. reperiuntur, quæ intellectu multo ſunt faciliora. Zamberti & Auriæ theoremata 14 & 15 in unum conjecimus, tam ex fide optimorum codicum, quam ex rei ipſius natura; ſunt enim ejuſdem theorematis tantum caſus diverſi.*

PROXIME *apparent* Optica & Catoptrica. *Horum meminit Proclus in lib. 2, & Marinus in Præf. in Data; at nullibi (quod ſciam) Pappus: tantum enim abeſt, ut, dum lib. 6. collect. math. Prop. 50, 51 idem demonſtrat quod Euclides Theor. 35, 36 & 37 Opticæ, nullam mentionem Euclidis injiciat: poſtquam vero hanc rem abſolviſſet, nempe Prop. 55. ejuſdem Libri, de Aſtronomicis verba faciens, Euclidis Phænomenôn meminit, eaque ſupplevit. Multa nos movent ut ſuſpicemur Opus hoc eſſe ſpurium; vel, ſi hujuſmodi Opus ab Euclide fuerat conſcriptum, illud temporis lapſu prorſus fuiſſe corruptum. Multa, inquam, ſunt quæ hoc ſuadeant; quorum pauca, præter dicta de Pappi ſilentio, adnotare non pigebit. Ipſum Præfationis initium ſatis oſtendit hanc ſaltem ab Euclide non eſſe profectam: loquitur enim non in perſona ſua, ſed in alia ſive tertia; oſtenditque de peripheria circulari quod in Optica demum fit ad Prop. 22. Ut taceam modum, hic & in Catoptrica, angulos deſignandi, quem Euclides nullibi adhibuit. Porro nemo concinnitati & elegantiæ Euclidis aſſuetus putabit Poſitiones 5, 6 & 7, item 8 & 9, rurſuſque 10 & 11 eſſe Euclidis. Rurſus Phænomena 1, 2 & 3 Catoptricæ ſunt prorſus falſa: occupato etenim eo ſpeculi (ſive plani, ſive convexi, ſive cavi) loco, in quem cadit perpendicularis ducta à re aſpectabili ad ſpeculum, res aſpectabilis etiamnum cernitur: mirorque hoc pro Phænomeno proponi à quopiam philoſopho, nedum ab Euclide, cum quotidiana experientia in ſpeculis planis contrarium doceat. Ultimum Phænomenon verum quidem eſt, at ad Catoptricam nihil attinens: Dioptricum enim eſt prorſus, nec quiſquam eſt ejus in hoc libro uſus. Pars theor. 5. contraria eſt theor. 6, eſtque utrumque ineptiſſime prolatum. Septimum theor. & quinque ſequentia pendent à 16, 17 & 18, quæ Euclidem minime ſapiunt; atque hæc rurſus à tribus Phænomenis ſupra dictis: ideoque licet 7 & 16 vera ſunt, tamen non ſunt demonſtrata: reliqua vero duo, 17 & 18, ne quidem ſunt vera; hoc eſt, viſibilis extremitatis imago non eſt in concurſu radii reflexi per oculum tranſeuntis cum perpendiculari ab eadem ad ſpeculum. Theorema 25 omnino falſum eſt, atque hic error ab Alhazeno & Vitellione continuatur. Theoremata 23, 28 & 29 veram ſapiunt Catoptricam: abeſt tamen ſuppoſitio, quod plures radii ab eodem viſibilis puncto manant; abſque qua difficile prorſus eſt ſolidi quidquam in Catoptricis invenire. Theorema ultimum nulli innititur demonſtrationi, ac experientiæ prorſus eſt contrarium: non enim circa centrum ſpeculi cavi Soli oppoſiti accenditur ignis, ſed in medio puncto centrum inter & ſpeculum. Quod theorema hoc ſit hic perperam demonſtratum, agnoſcit Vitellio prop. ult. lib. 8. ſuæ Opticæ, & pſeudographiam detegit; attamen, neque illic, neque ad prop. 37. lib. 9, ubi rem hanc rurſus tractat, verum locum definit. In hiſce Auctor aſſumit viſum fieri per emiſſionem radiorum ex Oculo in Objectum: & licet hoc maximis prematur difficultatibus ex Phyſica petitis, in re tamen Mathematica, ubi Oculus habetur tanquam punctum videns, eodem redit cum hypotheſi emiſſionis radiorum ex Viſibili, & intramiſſionis in Oculum; concinnius tamen putabant veteres radium ab animato Oculo verſus Objectum dirigi, quam ab Objecto inanimato verſus Oculum; nunquam enim (quod res eſt) de radiis ab unoquoque viſibilis puncto circumquaque perpetuo manantibus cogitarunt. Verſione latina Joannis Penæ ſumus uſi, Græcumque textum quam potuimus caſtigatum fecimus: adjecimus paſſim Notas doctiſſimas & reſtitutiones, quas Illuſtris* Savilius *ad oram marginis adſcripſerat, ex quibus liquet illum recte exiſtimaſſe* Euclidis Opticæ & Catoptricæ libros eſſe non magni momenti.

SCRIPSIT *etiam Euclides Librum* περὶ διαιρέσεων, de Diviſionibus, *teſte Proclo.* Joannes Dee *Londinenſis, cum Librum de Diviſionibus ſuperficierum,* Machometo Bagdedino (*qui floruiſſe creditur ſeculo Chriſti decimo*) *vulgo adſcriptum, ex Arabico (uti credo, licet hoc expreſſe non dicat) in Latinum verteret, & Commandino in lucem publicam edendum committeret, ſic ſcribit: "Cum ipſemet Euclides Librum de Diviſionibus ſcripſerit, "nullum, qui ſub hoc titulo extet, alium novimus, nec qui jure meliori propter tractandi "excellentiam Euclidi aſcribi queat, invenire poſſumus ullum: nullius enim Machometi*

"*tantum*

"tantum in Mathematicis acumen adhuc perſpicere ex eorum, quæ habemus, monimentis "potuimus, quantum in his ubique elucet problematibus. Denique in antiquiſſimo quodam "Geometrici negocii fragmento memini me expreſſis verbis ex hoc libello locum citatum le- "giſſe, veluti ex Euclidis certiſſimo opere. Porro invenimus ad hæc verba lib. 2. Procli, Circulus namque, & Rectilineorum quodlibet, in ratione diſſimiles dividi poteſt figuras; quod & ipſe Euclides in Diviſionibus pertractat, *ipſius* Jo. Dee *manu ſcriptum*: "Clarum hinc eſſe poteſt Librum illum, ſive Fragmentum, de Diviſionibus Super- "ficierum, quem nos cum Mathematico excellentiſſimo D. Federico Commandino Urbini "reliquimus, Anno 1563, ipſius Euclidis fuiſſe; quod tum conjiciebamus quidem, aliis ar- "gumentis adducti, hujus loci immemores. Ex hoc ipſo tamen Procli loco colligit Savi- lius *hunc librum non eſſe Euclidis*: "Atqui nulla eſt (inquit in Prælect. 1.) in illo Bagdedini "libello propoſitio, quæ figuras doceat in ſimiles vel diſſimiles figuras dividere, ſed in datam "proportionem dividere. Inter contrarias graviſſimorum Virorum opiniones de auctore hujus Libri, illum hoc in loco edendum judicavimus, quod & raro admodum reperiatur, & Eu- clidem auctorem magis ſapiat quam Optica & Catoptrica pro ejuſdem Libris habitæ. Illum Latine tantum exhibemus; Græce enim, quod ſciamus, nullibi reperitur; neſcimus an Arabice, in aliqua Italiæ bibliotheca. Euclidis propoſitiones ab illo citatas numeravimus, non ut ille Campanum ſecutus, ſed prout in hac editione numerantur. Notas pauculas Illuſtris Savilii adjecimus, quæ locis quibus adjectæ ſunt multum lucis afferunt.

TRES item Poriſmatum Libros edidit Euclides, teſte Pappo & Proclo. Et Proclus quidem, in commentariis, Poriſma hujuſmodi dicit Propoſitionem, quæ neque Problema eſt neque Theorema, id eſt, quæ neque generationem aut ποσόν alicujus rei requirit, neque ſimplicem contemplationem; ſed inventionem tantum: ut Dati Circuli centrum invenire, & quæ huic ſimilia; alia plane ac diverſa notione vocis Poriſmatis, quam quæ in Elementis. Perierunt hi Libri magno rei Geometricæ, Loci præſertim Reſoluti, damno. Ex iis vero quæ in 7^mo lib. Pappi (tum in Præf. tum à Prop. 127. ad 165.) ſuperſunt, non difficile futurum reor illos quodammodo reſtituere, ubi Textus Græcus lucem aſpexerit: Commandini namque verſio Præfationis latina mentem Pappi minime aſſequitur.

PAPPUS etiam in dicto lib. 7. commemorat Euclidis τόπων πρὸς ἐπιφάνειαν, Locorum ad Superficiem, Libros duos, ad Analyſin Geometricam itidem pertinentes; ſed qui etiam periere. Horum nihil conſignavit Pappus præter Lemmata quatuor.

FALLACIARUM, Ψευδαρίων, quoque Librum ab Euclide conſcriptum memorat Proclus in Libro 2^do; de quo ſic ſcribit: "Quoniam multa mente concipimus ut veritati ad- "hærentia, & ſcientificis principiis conſentanea, quæ à principiis aberrant & ſimpliciores "decipiunt; methodos tradidit Euclides altera ab alteris prudenter diſcernendi, per quas "hujus diſciplinæ tirones fierent exercitatiores ad deprehendendos paralogiſmos, & à fal- "laciis & captionibus cautiores. Atque hunc Librum, per quem hanc infert nobis præpara- "tionem, Fallaciarum inſcripſit; quippe qui modos ipſarum omnes ordine enumeravit, at- "que in horum unoquoque cogitationem noſtram variis exercuit theorematibus, & Fallacia "Verum comparavit, ipſique experientiæ deceptionis redargutionem coaptavit. Hic itaque "Liber purgandi exercendique vim habet; ſicut Elementaris Geometriæ Inſtitutio invinci- "bilem perfectumque habet ordinem. Periit & hic magno totius rei literariæ damno.

"EUCLIDES, teſte Pappo in lib. 7, ſecutus Ariſtæum ſcriptorem luculentum in iis "quæ de Conicis tradiderat, neque antevertens, neque volens eorum tractationem deſtruere, "cum mitiſſimus eſſet & benignus erga omnes, quatuor Libros Conicorum ſcripſit, quos "Apollonius (qui Euclidis diſcipulis Alexandriæ longo tempore operam dedit) explevit, ac "iis quatuor alios adjunxit. De his igitur plura non dicemus, cum brevi forſan Apollo- nii Conica Græce, Mathematicis hucuſque inviſa, edendi occaſio dabitur.

EST & Fragmentum quod in Zamberti editione latina Euclidi adſcribitur, de Levi & Ponderoſo. Neſcio qua auctoritate fretus iſtud fecerit Jo. Hervagius editor; neque enim aliud dicit, quam quod dum hæc ederet, illud ad ſe fuerit allatum. Savilius illud pro ſpurio habet. Nos, cum paginam non excedat, edimus, prout illud accepimus; ne quid in hac noſtra editione deſideretur.

OXONIÆ,
Junii 10. 1703.

ELENCHUS OPERUM.

Elementorum Libri XV.	Pag. 1.
Data, cum Præfatione Marini.	461.
Introductio Harmonica.	533.
Sectio Canonis.	547.
Phænomena.	557.
Optica.	601.
Catoptrica.	645.
De Divisionibus Liber.	667.
De Levi et Ponderoso Fragmentum.	685.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ*.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER PRIMUS.

ΟΡΟΙ.

α'. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

β'. Γραμμὴ δὲ, μῆκος ἀπλατές.

γ'. Γραμμῆς δὲ πέρατα, σημεῖα.

δ'. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξίσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

ε'. Επιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

ϛ'. Επιφανείας δὲ πέρατα, γραμμαί.

ζ'. Επίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξίσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

η'. Επίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

θ'. Οταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

ι'. Οταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

ια'. Αμβλεῖα γωνία ἐστὶν, ἡ μείζων ὀρθῆς.

ιβ'. Οξεῖα δὲ, ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

ιγ'. Οριόν ἐστιν, ὅ τινός ἐστι πέρας.

DEFINITIONES.

1. Punctum est, cujus pars nulla est.

2. Linea autem est longitudo non lata.

3. Lineæ vero extrema sunt puncta.

4. Recta quidem linea est, quæ ex æquo sua interjacet puncta.

5. Superficies autem est, quod longitudinem & latitudinem tantum habet.

6. Superficiei vero extrema sunt lineæ.

7. Plana quidem superficies est, quæ ex æquo suas lineas rectas interjacet.

8. Planus vero angulus est duarum linearum, in plano sese tangentium, & non in directum jacentium, mutua inclinatio.

9. Quando autem lineæ angulum comprehendentes rectæ fuerint, angulus ipse appellatur rectilineus.

10. Cum vero recta linea super rectam lineam insistens angulos deinceps inter se æquales fecerit, rectus est uterque æqualium angulorum: & quæ insistit recta linea, perpendicularis vocatur ad eam super quam insistit.

11. Obtusus angulus est, qui major est recto.

12. Acutus autem, qui est recto minor.

13. Terminus est, quod alicujus est extremum.

* Quidam Codices addunt: Ex τῶν Θέωνος σωνηθῶν.

14. Figura eſt, quæ aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur.

15. Circulus eſt figura plana una linea comprehenſa, quæ circumferentia appellatur; ad quam, ab uno puncto eorum quæ intra figuram ſunt poſita, cadentes omnes rectæ lineæ inter ſe ſunt æquales.

16. Hoc autem punctum, centrum circuli nuncupatur.

17. Diameter vero circuli eſt recta quædam linea per centrum ducta, & ex utraque parte circumferentiâ circuli terminata: quæ etiam circulum bifariam ſecat.

18. Semicirculus eſt figura comprehenſa ſub diametro, & ea circuli circumferentia, quæ à diametro intercipitur.

19. Segmentum circuli eſt, quod recta linea & circuli circumferentia comprehenditur.

20. Rectilineæ figuræ ſunt, quæ rectis lineis comprehenduntur.

21. Trilateræ quidem, quæ tribus.

22. Quadrilateræ, quæ quatuor.

23. Multilateræ vero, quæ pluribus quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.

24. E trilateris autem figuris, æquilaterum triangulum eſt, quod tria latera habet æqualia.

25. Iſoſceles autem, quod duo tantum æqualia habet latera.

26. Scalenum vero, quod tria latera habet inæqualia.

27. Adhæc, è trilateris figuris, rectangulum quidem triangulum eſt, quod rectum angulum habet.

28. Amblygonium autem, quod habet angulum obtuſum.

29. Oxygonium vero, quod tres habet angulos acutos.

30. E figuris autem quadrilateris, quadratum quidem eſt, quod & æquilaterum eſt & rectangulum.

31. Oblongum, quod rectangulum quidem eſt, ſed non æquilaterum.

32. Rhombus, quod æquilaterum quidem eſt, ſed non rectangulum.

33. Rhomboïdes, quod habet oppoſita

ιδ'. Σχῆμά ἐστι, τὸ ὑπό τινος ἢ τινων ὅρων περιεχόμενον.

ιε'. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον, ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἡ καλεῖται περιφέρεια· πρὸς ἣν, ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων, πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

ιϛ'. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.

ιζ'. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας· ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

ιη'. Ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα, ὑπό τε διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

ιθ'. Τμῆμα κύκλου ἐστί, τὸ περιεχόμενον ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

κ'. Εὐθύγραμμα σχήματά ἐστι, τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα.

κα'. Τρίπλευρα μέν, τὰ ὑπὸ τριῶν.

κβ'. Τετράπλευρα δέ, τὰ ὑπὸ τεσσάρων.

κγ'. Πολύπλευρα δέ, τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

κδ'. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων, ἰσόπλευρον μέν τρίγωνόν ἐστι, τὸ τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς.

κε'. Ἰσοσκελὲς δέ, τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς.

κϛ'. Σκαληνὸν δέ, τὸ τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

κζ'. Ἔτι τε, τῶν τριπλεύρων σχημάτων, ὀρθογώνιον μέν τρίγωνόν ἐστι, τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν.

κη'. Ἀμβλυγώνιον δέ, τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν.

κθ'. Ὀξυγώνιον δέ, τὸ τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

λ'. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων, τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον.

λα'. Ἑτερόμηκες δέ, ὃ ὀρθογώνιον μέν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ.

λβ'. Ῥόμβος δέ, ὃ ἰσόπλευρον μέν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ.

λγ'. Ῥομβοειδὲς δέ, τὸ τὰς ἀπεναντίον

πλευράς

πλευρὰς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν, οὔτε ὀρθογώνιον.

λδ'. Τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλείσθω.

λε. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι, καὶ ἐκβαλλόμεναι ἐπ' ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

34. Reliqua autem quadrilatera præter hæc, vocentur trapezia.

35. Parallelæ denique rectæ lineæ ſunt, quæ in eodem jacentes plano, atque ex utraque parte in infinitum productæ, in neutram ſibi coincidunt.

ΑΙΤΗΜΑΤΑ.

α'. Ἠιτήσθω, ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

β'. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβάλλειν.

γ'. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.

POSTULATA.

1. POſtuletur, à quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.

2. Item rectam lineam finitam continue in directum producere.

3. Item quovis centro & intervallo circulum deſcribere.

ΚΟΙΝΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ.

α'. ΤΑ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

β'. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

γ'. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.

δ'. Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.

ε'. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπά ἐστιν ἄνισα.

ϛ'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

ζ'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίσεα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

η'. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

θ'. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστι.

ι'. * Καὶ πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

ια'. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλόμεναι αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἐπ' ἄπειρον συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι.

ιϐ'. Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν.

COMMUNES NOTIONES, SIVE AXIOMATA.

1. QUÆ eidem æqualia, inter ſe ſunt æqualia.

2. Item ſi æqualibus æqualia addantur, tota ſunt æqualia.

3. Item ſi ab æqualibus æqualia auferantur, reliqua ſunt æqualia.

4. Item ſi inæqualibus æqualia addantur, tota ſunt inæqualia.

5. Item ſi ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua ſunt inæqualia.

6. Item quæ ejuſdem ſunt duplicia, inter ſe ſunt æqualia.

7. Item quæ ejuſdem ſunt dimidia, inter ſe æqualia ſunt.

8. Item quæ ſibi mutuo congruunt, ſunt æqualia.

9. Item totum ſua parte majus eſt.

10. * Item omnes anguli recti inter ſe æquales ſunt.

11. Item ſi in duas rectas lineas recta incidens angulos interiores & ad eaſdem partes duobus rectis minores fecerit; duæ illæ rectæ, in infinitum productæ, coincident inter ſe ex ea parte, ad quam ſunt anguli duobus rectis minores.

12. Item duæ rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt.

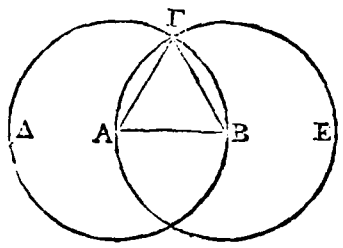
* In quibuſdam Codicibus Axiomata 10 & 11 inter Poſtulata numerantur.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Super datam rectam terminatam, triangulum æquilaterum conſtituere.

SIT data recta terminata AB: oportet vero ſuper rectam AB triangulum æquilaterum conſtituere.

Centro quidem A, intervallo autem AB, deſcribatur [per 3. poſt.] circulus BΓΔ; & rurſus centro B, intervallo BA, deſcribatur circulus AΓE; & à puncto Γ, in quo circuli ſeſe mutuo ſecant, ad puncta A, B ducantur [per 1. poſt.] rectæ ΓA, ΓB.



Quoniam igitur punctum A eſt centrum circuli ΓΔB, recta AΓ [per 15. def.] erit æqualis ipſi AB: rurſus, quoniam punctum B eſt centrum circuli ΓAE, erit BΓ æqualis rectæ BA. oſtenſum autem eſt rectam ΓA æqualem eſſe rectæ AB: utraque igitur rectarum ΓA, ΓB æqualis eſt rectæ AB. quæ autem eidem ſunt æqualia, & inter ſe ſunt æqualia; recta igitur ΓA rectæ ΓB æqualis eſt: quare tres rectæ ΓA, AB, BΓ inter ſe ſunt æquales.

Eſt igitur [per 24. def.] triangulum ABΓ æquilaterum, atque etiam conſtitutum ſuper datam rectam terminatam AB. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Επὶ τῆ δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

ΕΣτω ἡ δοθεῖσα πεπερασμένη ἡ AB· δεῖ δὴ ἐπὶ τῆ AB εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Κέντρῳ μὲν τῷ A, διαστήματι δὲ τῷ AB, κύκλος γεγράφθω ὁ BΓΔ· καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ B, διαστήματι δὲ τῷ BA, κύκλος γεγράφθω ὁ AΓE· καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ A, B σημεῖα ἐπιζευχθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ ΓA, ΓB.

Επεὶ οὖν τὸ A σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔB κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ AΓ τῇ AB· πάλιν, ἐπεὶ τὸ B σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓAE κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ BΓ τῇ BA. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓA τῇ AB ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓA, ΓB τῇ AB ἐστιν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΓA ἄρα τῇ ΓB ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓA, AB, BΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

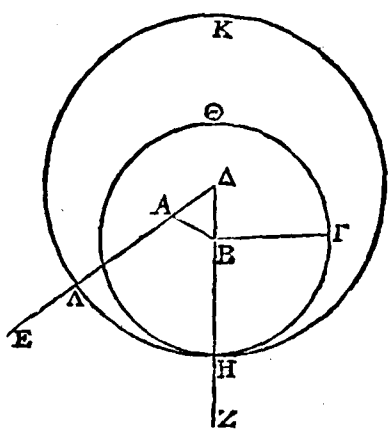
Ισόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓ τρίγωνον, καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆ δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆ AB. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. II. PROBL.

Ad datum punctum, datæ rectæ æqualem rectam ponere.

SIT datum punctum A, & data recta BΓ: oportet quidem ad punctum A, rectæ BΓ æqualem rectam ponere.

Ducatur [per 1. poſt.] ab A puncto ad punctum B recta AB; & ſuper eam [per 1. prop.] conſtituatur triangulum æquilaterum ΔAB, producanturque in directum ipſis ΔA, ΔB rectæ AE, BZ; dein centro B, intervallo BΓ, deſcribatur [per 3. poſt.] circulus ΓHΘ: & rurſus centro Δ, intervallo ΔH, deſcribatur circulus HKΛ.



Quoniam igitur punctum B eſt centrum circuli ΓHΘ, erit [per 15. def.] recta BΓ æqualis rectæ BH. rurſus, quoniam punctum Δ centrum eſt circuli HKΛ, erit recta ΔΛ rectæ ΔH æqualis; ex quibus ΔA æqualis eſt ΔB: reliqua igitur AΛ, [per 3. ax.] reliquæ BH æqualis erit. oſtenſum autem eſt rectam BΓ rectæ BH æqualem eſſe: utraque igitur rectarum AΛ, BΓ rectæ BH æqualis eſt. quæ vero eidem æqualia, & inter ſe ſunt æqualia: ergo & recta AΛ æqualis eſt rectæ BΓ.

Ad datum igitur punctum A, datæ rectæ BΓ æqualis poſita eſt recta AΛ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

ΕΣτω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ A, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ BΓ· δεῖ δὴ πρὸς τῷ A σημείῳ, τῇ BΓ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Επεζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ A σημείου ἐπὶ τὸ B σημεῖον εὐθεῖα ἡ AB· καὶ συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔAB, καὶ ἐκβεβλήθωσαν ἐπ' εὐθείας τῇ ΔA, ΔB εὐθεῖαι αἱ AE, BZ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ B, διαστήματι δὲ τῷ BΓ, κύκλος γεγράφθω ΓHΘ· καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΔH, κύκλος γεγράφθω ὁ HKΛ.

Επεὶ οὖν τὸ B σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓHΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ BΓ τῇ BH. καὶ πάλιν, ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ HKΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΛ τῇ ΔH, ὧν ἡ ΔA τῇ ΔB ἴση ἐστί· λοιπὴ ἄρα ἡ AΛ λοιπῇ τῇ BH ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ BΓ τῇ BH ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν AΛ, BΓ τῇ BH ἐστιν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ AΛ ἄρα τῇ BΓ ἐστιν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ A, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ BΓ ἴση εὐθεῖα κεῖται ἡ AΛ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

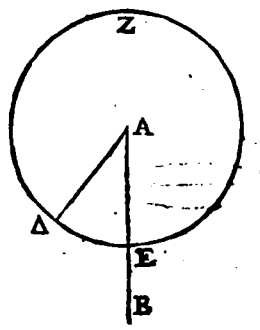
ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τ μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, Γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τ μείζονος τ ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Κείσθω πρὸς τῷ Α σημείῳ τῇ Γ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΔ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΕΖ.



Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τ ΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΔ· ἀλλὰ καὶ ἡ Γ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· ἑκατέρα ἄρα τ ΑΕ, Γ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΑΕ τῇ Γ ἐστὶν ἴση.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τ ΑΒ, Γ, ἀπὸ τ μείζονος τ ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴση ἀφῄρηται ἡ ΑΕ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. III. Probl.

Datis duabus rectis inæqualibus, à majore auferre rectam æqualem minori.

Sint duæ datæ rectæ inæquales AB & Γ, quarum major sit AB: oportet à recta AB majore auferre rectam æqualem rectæ Γ minori.

Ponatur [per 2. prop.] ad punctum A recta AΔ æqualis rectæ Γ; & centro A, intervallo AΔ, describatur [per 3. post.] circulus ΔEZ.

Et quoniam punctum A centrum est circuli ΔEZ, erit recta AE æqualis rectæ AΔ: est autem recta Γ æqualis eidem AΔ. utraque igitur rectarum AE, Γ æquatur rectæ AΔ: quare & recta AE est æqualis rectæ Γ.

Datis igitur duabus rectis inæqualibus AB, Γ, ab AB majore ablata est AE æqualis rectæ Γ minori. quod erat faciendum.

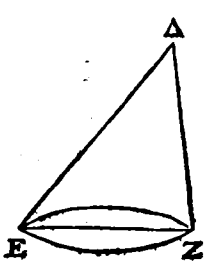
ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τ ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τὴν βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Prop. IV. Theorema.

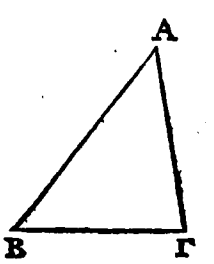
Si duo triangula habuerint duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri; & angulum æqualem angulo, qui ab æqualibus rectis comprehenditur: habebunt & basim basi æqualem, & triangulum erit triangulo æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquabuntur, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην· λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.



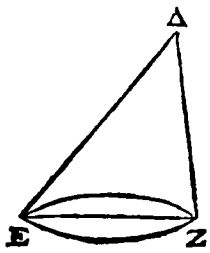
Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, τ δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τ ΔΕ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τ ΑΒ τῇ ΔΕ· ἐφαρμοσάσης δὴ τ ΑΒ ἐπὶ τ ΔΕ, ἐφαρμόσει καὶ ἡ ΑΓ εὐθεῖα ἐπὶ τ ΔΖ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ὥστε καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ σημεῖον ἐφαρμόσει, διὰ τὸ ἴσην πάλιν εἶναι τ ΑΓ τῇ ΔΖ. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφηρμόκει, ὥστε βά-

Sint duo triangula ABΓ, ΔEZ, habentia duo latera AB, AΓ æqualia duobus lateribus ΔE, ΔZ, alterum alteri; nempe latus AB æquale lateri ΔE, & latus AΓ lateri ΔZ, & angulum BAΓ æqualem angulo EΔZ: dico & basim BΓ æquari basi EZ, & triangulum ABΓ æquari triangulo ΔEZ, & reliquos angulos reliquis angulis æquari, alterum alteri, quibus latera æqualia subtenduntur; angulum nempe ABΓ angulo ΔEZ, & angulum AΓB angulo ΔZE.



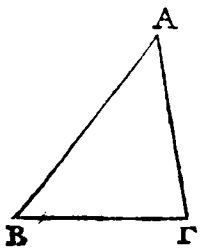
Nam si ABΓ triangulum applicetur triangulo ΔEZ, posito puncto A super punctum Δ, & recta AB super rectam ΔE; punctum B congruet puncto E, quia recta AB æquatur rectæ ΔE: congruente autem recta AB rectæ ΔE, congruet etiam recta AΓ rectæ ΔZ, quia angulus BAΓ æqualis est angulo EΔZ: quare & punctum Γ congruet puncto Z, quia recta AΓ æqualis est rectæ ΔZ. punctum autem B congruebat puncto E, id-

circo baſis ΒΓ congruet baſi ΕΖ: nam ſi punctum Β congruat puncto Ε, & punctum Γ puncto Ζ, baſis autem ΒΓ non congruat baſi ΕΖ; neceſſe eſt duas rectas comprehendere ſpatium, quod [per 12. ax.] fieri non poteſt. congruet igitur baſis ΒΓ baſi ΕΖ, eique æqualis erit: quare & totum triangulum ΑΒΓ congruet toti triangulo ΔΕΖ, eritque ei æquale; & reliqui anguli reliquis angulis congruent, iiſque æquabuntur; nempe angulus ΑΒΓ angulo ΔΕΖ, & angulus ΑΓΒ angulo ΔΖΕ.



Si igitur duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus æqualia, alterum alteri; & angulum habuerint angulo æqualem, qui ab æqualibus rectis comprehenditur: habebunt & baſim baſi æqualem, & triangulum triangulo erit æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur. quod erat demonſtrandum.

σις ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει· εἰ γὰρ τὸ μὲν Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφαρμόσαντος, τὸ δὲ Γ ἐπὶ τὸ Ζ, ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ἀδύνατον. ἐφαρμόσει ἄρα ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ, καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται· ὥστε καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἐπὶ ὅλον τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἐφαρμόσει, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι, καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.



Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. V. Theor.

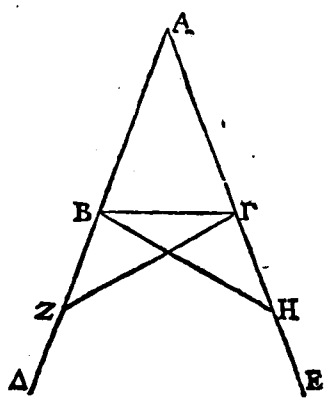
Triangulorum iſoſcelium anguli ad baſim ſunt inter ſe æquales: &, productis æqualibus rectis, anguli ſub baſim erunt inter ſe æquales.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· καὶ, προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

SIT triangulum iſoſceles ΑΒΓ, habens latus ΑΒ æquale lateri ΑΓ, & producantur [per 2. poſt.] rectæ ΒΔ, ΓΕ in directum rectis ΑΒ, ΑΓ: dico angulum ΑΒΓ æqualem eſſe angulo ΑΓΕ, item angulum ΓΒΔ æqualem eſſe angulo ΒΓΕ.

Sumatur enim in recta ΒΔ punctum quodlibet Ζ, & ab ΑΕ recta majore auferatur [per 3. prop.] recta ΑΗ æqualis rectæ ΑΖ minori, & ducantur rectæ ΖΓ, ΗΒ.



Quoniam igitur ΑΖ æquatur rectæ ΑΗ, & ΑΒ rectæ ΑΓ, duæ etiam ΖΑ, ΑΓ æquantur duabus ΗΑ, ΑΒ, altera alteri, & comprehendunt communem angulum ΖΑΗ: erit igitur [per 4. prop.] baſis ΖΓ æqualis baſi ΗΒ, & triangulum ΑΖΓ æquale triangulo ΑΗΒ, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur; angulus nempe ΑΓΖ angulo ΑΒΗ, & angulus ΑΖΓ angulo ΑΗΒ. cum autem tota ΑΖ æquatur toti ΑΗ, & ΑΒ æquatur rectæ ΑΓ; reliqua igitur ΒΖ [per 3. ax.] æquabitur reliquæ ΓΗ. oſtenſum autem eſt rectam ΖΓ æqualem eſſe rectæ ΗΒ: duæ itaque rectæ ΒΖ, ΖΓ æquantur duabus ΓΗ, ΗΒ, altera alteri, & angulus ΒΖΓ æquatur angulo ΓΗΒ, & recta ΒΓ eſt eorum baſis communis; erit igitur [per 4. prop.] & triangu-

Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΓ, ἴσην ἔχον τὴν ΑΒ πλευρὰν τῇ ΑΓ πλευρᾷ, καὶ προσεκβεβλήθωσαν ἐπ' εὐθείας τῇ ΑΒ, ΑΓ εὐθεῖαι αἱ ΒΔ, ΓΕ· λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΕ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΒΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΕ τῇ ἐλάσσονι τῇ ΑΖ ἴση ἡ ΑΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΓ, ΗΒ εὐθεῖαι.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΖ τῇ ΑΗ, ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΗΑ, ΑΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι τὴν ὑπὸ ΖΑΗ· βάσις ἄρα ἡ ΖΓ βάσει τῇ ΗΒ ἴση ἐστὶν, καὶ τὸ ΑΖΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΖΓ τῇ ὑπὸ ΑΗΒ. καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ ΑΖ ὅλῃ τῇ ΑΗ ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΖ λοιπῇ τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΗΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΒΖ, ΖΓ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΖΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΒΓ· καὶ τὸ ΒΖΓ ἄρα τρίγω-

νει τῷ ΓΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἴσαι), ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΗ. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΖ γωνίᾳ ἐδείχθη ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ΓΒΗ τῇ ὑπὸ ΒΓΖ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση, καί εἰσι πρὸς τῇ βάσει τῇ ΒΓ τριγώνου· ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἴση, καί εἰσιν ὑπὸ τὴν βάσιν.

Τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· καὶ, προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν, αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

lum ΒΖΓ æquale triangulo ΓΗΒ, & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur: æqualis eſt igitur angulus ΖΒΓ angulo ΗΓΒ, & angulus ΒΓΖ angulo ΓΒΗ. idcirco cum oſtenſum fuerit totum angulum ΑΒΗ æqualem eſſe toti angulo ΑΓΖ, & angulum ΓΒΗ æqualem angulo ΒΓΖ; reliquus angulus ΑΒΓ [per 3. ax.] reliquo ΑΓΒ æqualis erit, & ſunt ad baſim trianguli ΑΒΓ: oſtenſum etiam eſt angulum ΖΒΓ æqualem eſſe angulo ΗΓΒ, & ſunt ſub baſim.

Triangulorum igitur iſoſcelium anguli ad baſim ſunt inter ſe æquales: &, productis rectis æqualibus, anguli ſub baſim erunt inter ſe æquales. quod erat demonſtrandum.

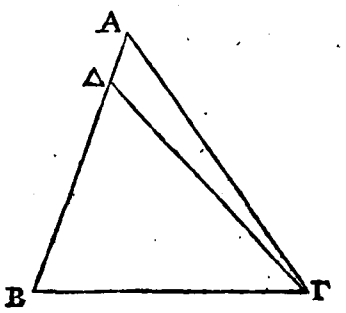
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Prop. VI. Theor.

Si trianguli duo anguli ſint inter ſe æquales, latera æqualibus angulis ſubtenſa inter ſe æqualia erunt.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΑΓΒ γωνίᾳ· λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΓ πλευρᾷ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση.



Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΑΒ· καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΒ τῇ ΑΓ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΑΒ ἴση ἐστὶν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, τῷ ἐλάσσονι τὸ μεῖζον, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ· ἴση ἄρα.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἔsto triangulum ΑΒΓ, æqualem habens ΑΒΓ angulum angulo ΑΓΒ: ajo latus ΑΓ æquale eſſe lateri ΑΒ.

Si enim ΑΓ inæquale eſt lateri ΑΒ, eorum alterum majus erit. ſit majus ΑΒ: & ab ΑΒ majore auferatur [per 3. prop.] recta ΔΒ æqualis lateri ΑΓ minori, & ducatur recta ΔΓ.

Quoniam igitur ΔΒ æquatur rectæ ΑΓ, & recta ΒΓ eſt latus commune, duæ rectæ ΔΒ, ΒΓ æquantur duabus rectis ΑΓ, ΓΒ, altera alteri, & angulus ΔΒΓ angulo ΑΓΒ eſt æqualis; baſis igitur ΔΓ æquabitur baſi ΑΒ, & triangulum ΑΒΓ æquabitur triangulo ΔΓΒ, majus minori, quod abſurdum eſt: non eſt ideo ΑΒ inæqualis rectæ ΑΓ; igitur æqualis.

Idcirco ſi trianguli duo anguli ſint inter ſe æquales, latera æqualibus angulis ſubtenſa inter ſe æqualia erunt. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συναπτέτωσαν), πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχέτωσαν ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.

Prop. VII. Theor.

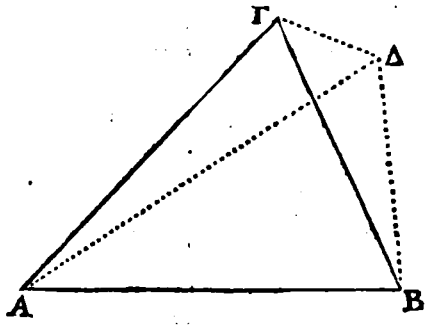
Super eandem rectam, duabus iiſdem rectis duæ aliæ rectæ æquales altera alteri non conſtituentur, ad aliud atque aliud punctum in eaſdem partes, eoſdem terminos habentes cum rectis initio ductis.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἄλλαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συνεστάτωσαν, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ τῷ τε Γ καὶ Δ, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ Γ, Δ, τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχέτωσαν τὰ Α, Β ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις· ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΓΑ τῇ

NAM ſi fieri poteſt, ſuper eandem rectam ΑΒ, duabus iiſdem rectis ΑΓ, ΓΒ duæ aliæ rectæ ΑΔ, ΔΒ æquales altera alteri conſtituantur, ad aliud atque aliud punctum Γ & Δ, in eaſdem partes Γ & Δ, eoſdem terminos habentes Α & Β cum rectis initio ductis; ita ut recta ΓΑ ſit æqualis rectæ

ΔΑ, habens cum illa eundem terminum, punctum A, & recta ΓΒ æqualis rectæ ΔΒ, habens cum illa eundem terminum, punctum B: & ducatur recta ΓΔ.

Quoniam igitur ΑΓ æquatur rectæ ΑΔ, æqualis eſt [per 5. prop.] angulus ΑΓΔ angulo ΑΔΓ: quare angulus ΑΔΓ major eſt angulo ΔΓΒ, & angulus ΓΔΒ multo major eſt angulo ΔΓΒ. rurſus quoniam recta ΓΒ æqualis eſt rectæ ΔΒ, erit angulus ΓΔΒ æqualis angulo ΔΓΒ. oſtenſum autem eſt eodem eſſe multo majorem, quod eſt impoſſibile.



Super eandem igitur rectam, duabus iiſdem rectis duæ aliæ rectæ æquales altera alteri non conſtituentur, ad aliud & aliud punctum in eaſdem partes, habentes eoſdem terminos cum rectis initio ductis. quod erat demonſtrandum.

ΔΑ, τὰ αὐτὰ πέρας ἔχουσα αὐτῇ τὸ Α, ἡ δὲ ΓΒ τῇ ΔΒ, τὰ αὐτὸ πέρας ἔχουσα αὐτῇ τὸ Β· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ, πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΔΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΔΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΒ. ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῷ μείζων, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

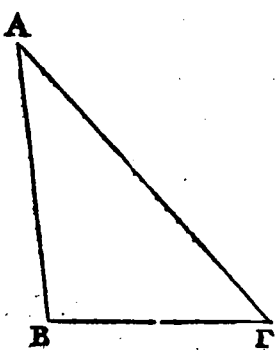
Οὐκ ἄρα ἐπὶ τὰ αὐτῆς εὐθείας, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συναχθήσονται, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VIII. Theor.

Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri; habeant etiam & baſim baſi æqualem: angulum quoque angulo æqualem habebunt, ab æqualibus rectis comprehenſum.

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, habentia duo latera ΑΒ, ΑΓ duobus lateribus ΔΕ, ΔΖ æqualia, alterum alteri, latus quidem ΑΒ lateri ΔΕ, & latus ΑΓ lateri ΔΖ; habeant etiam & baſim ΒΓ æqualem baſi ΕΖ: dico etiam angulum ΒΑΓ æqualem eſſe angulo ΕΔΖ.

Si enim triangulum ΑΒΓ applicetur triangulo ΔΕΖ, & punctum Β ponatur ſuper punctum Ε, & recta ΒΓ ſuper rectam ΕΖ; congruet punctum Γ puncto Ζ, quia recta ΒΓ æquatur rectæ ΕΖ: congruente vero ΒΓ rectæ ΕΖ, congruent etiam ΒΑ, ΑΓ rectis ΕΔ, ΔΖ. ſi enim baſis ΒΓ congruat baſi ΕΖ, latera vero ΒΑ, ΑΓ non congruant lateribus ΕΔ, ΔΖ, ſed ſitum mutent, ut ΕΗ, ΗΖ; conſtituentur, ſuper eandem rectam, duabus iiſdem rectis aliæ duæ rectæ æquales, altera alteri, ad aliud & aliud punctum in eaſdem partes, habentes eoſdem terminos. ſed [per 7. prop.] non conſtituuntur: congruente igitur baſi ΒΓ baſi ΕΖ, non poſſunt non congruere etiam latera ΒΑ, ΑΓ lateribus ΕΔ, ΔΖ. congruent igitur: adeoque angulus ΒΑΓ congruet angulo ΕΔΖ, eique æqualis erit.

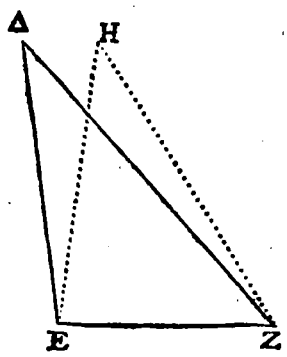


ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην· καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ· ἐχέτω δὲ καὶ βάσιν τὴν ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴσην· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστὶν ἴση.

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Β σημείου ἐπὶ τὸ Ε σημεῖον, τῆς δὲ ΒΓ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΕΖ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς ΒΓ ἐπὶ τὴν ΕΖ, ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ ΒΑ, ΑΓ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. εἰ γὰρ βάσις μὲν ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει, αἱ δὲ ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ οὐκ ἐφαρμόζουσιν, ἀλλὰ παραλλάξουσιν, ὡς αἱ ΕΗ, ΗΖ· συναχθήσονται, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχούσαι. οὐ συνίστανται δέ· οὐκ ἄρα, ἐφαρμοζομένης τῆς ΒΓ βάσεως ἐπὶ τὴν ΕΖ βάσιν, οὐκ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. ἐφαρμόσουσιν ἄρα· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ἐπὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΔΖ ἐφαρμόσει, καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται.



* Ἐφαρμοσάσης.

Ἐὰν

Εὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔχῃ· καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si igitur duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri; habeant etiam & basim basi æqualem: angulum quoque angulo æqualem habebunt, ab æqualibus rectis comprehensum. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

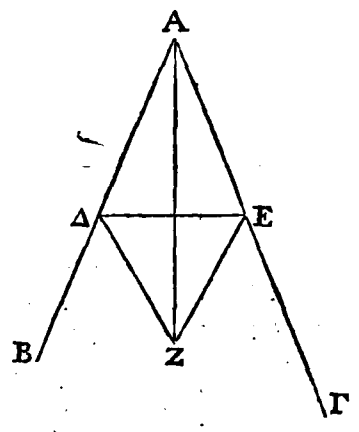
Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.

PROP. IX. PROBL.

Datum angulum rectilineum bifariam secare.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ· δεῖ δὴ αὐτὴν δίχα τεμεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ· λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας.



Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΖ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΖ δυσὶ ταῖς ΕΑ, ΑΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστί· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΖ ἐστὶν ἴση.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Sumatur in recta AB punctum quodlibet Δ, & à recta AΓ auferatur [per 3. prop.] recta AE æqualis rectæ AΔ, & ducatur recta ΔE; & super rectam ΔE fiat [per 1. prop.] triangulum æquilaterum ΔEZ, & ducatur recta AZ: dico angulum BAΓ bifariam secari à recta AZ.

Quoniã enim AΔ æquatur rectæ AE, recta autem AZ sit communis; duæ rectæ ΔA, AZ duabus rectis EA, AZ æquales erunt, altera alteri; basis etiam ΔZ æquatur basi EZ: angulus igitur ΔAZ æquatur [per 8. prop.] angulo EAZ.

Datus igitur angulus rectilineus BAΓ bifariam secatur à recta AZ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

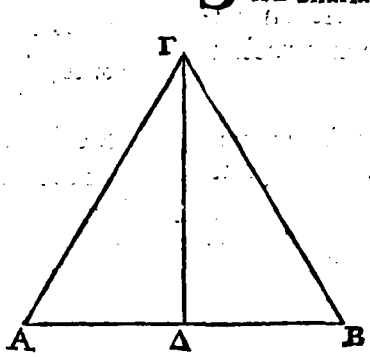
Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

PROP. X. PROBL.

Datam rectam lineam terminatam bifariam secare.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ δίχα τεμεῖν.

Συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία δίχα τῇ ΓΔ εὐθείᾳ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ εὐθεῖα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ σημεῖον.



Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ, δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΔ δυσὶ ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΔ ἐστὶν ἴση.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Sit data recta terminata AB: oportet rectam AB bifariam secare.

Fiat [per 1. prop.] super illam triangulum æquilaterum ABΓ, & secetur [per 9. prop.] angulus AΓB bifariam à recta ΓΔ: dico rectam AB bifariam secari in puncto Δ.

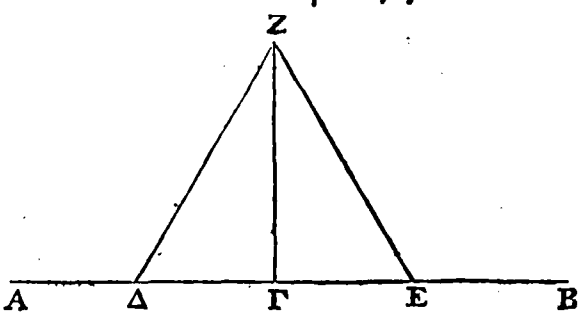
Quoniam enim AΓ æqualis est rectæ ΓB, recta autem ΓΔ est communis; duæ rectæ AΓ, ΓΔ æquales sunt duabus rectis BΓ, ΓΔ, altera alteri, & angulus AΓΔ æqualis est angulo BΓΔ: basis igitur AΔ æqualis est [per 4. prop.] basi BΔ.

Data igitur recta terminata AB bifariam secatur in puncto Δ. quod erat faciendum.

PROP. XI. PROBL.

Datæ rectæ lineæ, à puncto in ipſa dato, ad rectos angulos rectam lineam ducere.

SIT data recta AB, & punctum in ea Γ: oportet à puncto Γ ipſi rectæ AB ad rectos angulos rectam lineam ducere.



Sumatur in recta AΓ punctum quodlibet Δ, & [per 3. prop.] ponatur ΓE æqualis rectæ ΓΔ, & [per 1. prop.] conſtituatur ſuper rectam ΔE triangulum æquilaterum ZΔE, & ducatur recta ZΓ: dico quod datæ rectæ AB, à dato in ea puncto Γ, ad rectos angulos ducitur recta ZΓ.

Quoniam enim æqualis eſt ΓΔ rectæ ΓE, & recta ZΓ communis; duæ rectæ ΔΓ, ΓZ æquantur duabus rectis EΓ, ΓZ, altera alteri, & baſis ΔZ æquatur baſi EZ: angulus igitur ΔΓZ æquatur [per 8. prop.] angulo EΓZ; atque hi anguli ſunt deinceps. quando autem recta inſiſtens in rectam fecerit angulos deinceps inter ſe æquales, rectus eſt [per 10. def.] uterque æqualium angulorum: rectus igitur eſt uterque angulorum ΔΓZ, ZΓE.

Datæ igitur rectæ lineæ AB, à dato in illa puncto Γ, ad rectos angulos ducta eſt recta linea ZΓ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

ΕΣτω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Γ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ AB εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τοῦ AΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΓE, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔE τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ZΔE, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ZΓ· λέγω ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ AB, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ZΓ.

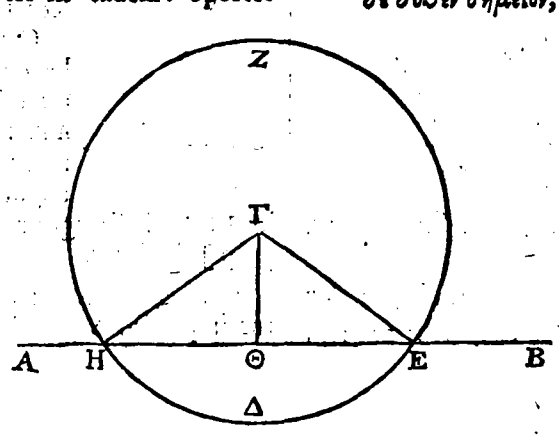
Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΓE, κοινὴ δὲ ἡ ZΓ, δύο δὴ αἱ ΔΓ, ΓZ δυσὶ ταῖς EΓ, ΓZ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔZ βάσει τῇ EZ ἴση ἐστί· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓZ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ EΓZ ἴση ἐστί, καί εἰσιν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΔΓZ, ZΓE.

Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ AB, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, πρὸς ὀρθὰς γωνίας γραμμὴ ἦκται εὐθεῖα ἡ ZΓ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. XII. PROBL.

Super datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod non eſt in eadem, perpendicularem lineam rectam ducere.

SIT data recta infinita AB, & datum punctum Γ, quod non eſt in eadem: oportet ſuper datam rectam infinitam AB, à dato puncto Γ, quod in eadem non eſt, perpendicularem lineam rectam ducere.



Sumatur enim ex altera parte rectæ AB punctum quodlibet Δ, & centro Γ, intervallo ΓΔ, deſcribatur [per 3. poſt.] circulus EZH, & ſecetur recta EH bifariam [per 10. prop.] in puncto Θ, ducanturque rectæ ΓH, ΓΘ, ΓE: dico quod ſuper datam rectam infinitam AB, à dato pun-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

ΕΣτω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος ἡ AB, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, τὸ Γ· δεῖ δὴ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν AB, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς AB εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ, διαστήματι δὲ τῷ ΓΔ, κύκλος γεγράφθω ὁ EZH, καὶ τετμήσθω ἡ EH δίχα κατὰ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓH, ΓΘ, ΓE· λέγω ὅτι ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν AB, ἀπὸ τοῦ δοθέντος

τῆς σημείῳ τῷ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ ΓΘ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΘΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΘΓ, δύο δὴ αἱ ΗΘ, ΘΓ δυσὶ ταῖς ΕΘ, ΘΓ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΓΗ βάσει τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΘΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΘΓ ἐστὶν ἴση, καί εἰσιν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας ἀπείρου τῆς ΑΒ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ ΓΘ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

to Γ, quod in eadem non eſt, ducta eſt perpendicularis recta linea ΓΘ.

Quoniam enim ΗΘ æqualis eſt rectæ ΘΕ, recta autem ΘΓ eſt communis; duæ rectæ ΗΘ, ΘΓ ſunt æquales duabus rectis ΕΘ, ΘΓ, altera alteri, & baſis ΓΗ æquatur [per 15. def.] baſi ΓΕ: angulus igitur ΓΘΗ æquatur [per 8. prop.] angulo ΕΘΓ; atque hi anguli ſunt deinceps. quando autem recta inſiſtens in rectam fecerit angulos deinceps inter ſe æquales, rectus eſt uterque æqualium angulorum; & recta inſiſtens vocatur perpendicularis ad eam in quam inſiſtit.

Super datam igitur rectam infinitam ΑΒ, à dato puncto Γ, quod non eſt in eadem, perpendicularis ducitur ΓΘ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ὡς ἂν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ· ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.

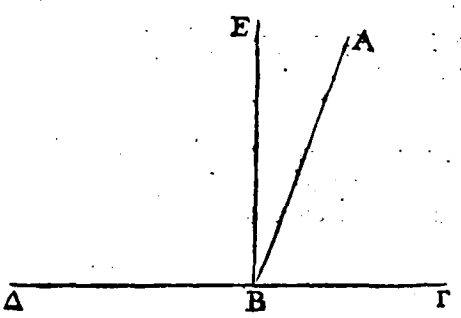
PROP. XIII. THEOR.

Si recta inſiſtens in rectam faciat angulos; vel duos rectos faciet, vel duobus rectis æquales.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΔ σταθεῖσα γωνίας ποιείτω, τὰς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ· λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ γωνίαι, ἢ δύο ὀρθαί εἰσιν, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι.

Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΑ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, δύο ὀρθαί εἰσιν. εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσι. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ἴση ἐστὶ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΕΒΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ εἰσὶν ἴσαι. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ ἴση ἐστὶ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς αὐταῖς ἴσαι· τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ ἄρα ταῖς ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν· ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσι, καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ὡς ἂν ἄρα εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ· ἤτοι δύο ὀρθὰς, ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Si enim angulus ΓΒΑ æqualis ſit angulo ΑΒΔ, duo anguli [per 10. def.] erunt recti. ſin minus, ducatur [per 11. prop.] à puncto Β recta ΒΕ ad rectos angulos rectæ ΓΔ: quare anguli ΓΒΕ, ΕΒΔ ſunt duo recti. & quoniam angulus ΓΒΕ æquatur duobus angulis ΓΒΑ, ΑΒΕ; ſi addatur communis angulus ΕΒΔ, anguli ΓΒΕ, ΕΒΔ æquantur tribus angulis ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ. rurſus, cum angulus ΔΒΑ æquetur angulis duobus ΔΒΕ, ΕΒΑ; ſi communis angulus ΑΒΓ addatur, anguli ΔΒΑ, ΑΒΓ æquabuntur tribus angulis ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ. oſtenſi autem ſunt anguli ΓΒΕ, ΕΒΔ iiſdem tribus eſſe æquales; & quæ eidem æqualia, ſunt inter ſe æqualia; anguli igitur ΓΒΕ, ΕΒΔ æquantur angulis ΔΒΑ, ΑΒΓ: ſed anguli ΓΒΕ, ΕΒΔ ſunt duo recti; idcirco anguli ΔΒΑ, ΑΒΓ ſunt duobus rectis æquales.

Si igitur recta inſiſtens ſuper rectam faciat angulos; faciet vel duos angulos rectos, vel duobus rectis æquales. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, δύο εὐθεῖαι, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

PROP. XIV. THEOR.

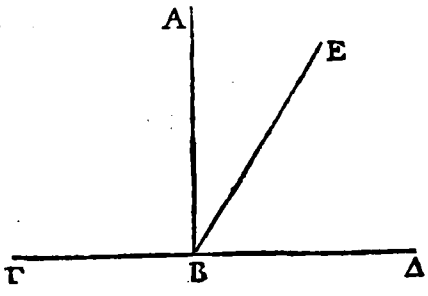
Si ad aliquam rectam lineam, & ad punctum in ea, duæ rectæ, non ad eaſdem partes poſitæ, faciant angulos deinceps duobus rectis æquales; ipſæ rectæ lineæ in directum ſibi invicem erunt.

Πρός γάρ τινι εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β, δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΒΔ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας

AD aliquam enim rectam lineam ΑΒ, & ad punctum in ea Β, duæ rectæ ΒΓ, ΒΔ, non ad eaſdem partes poſitæ, faciant angulos deinceps

ΑΒΓ, ΑΒΔ duobus rectis æquales: dico rectam ΒΔ esse in directum rectæ ΓΒ.

Si enim ΒΔ non sit in directum rectæ ΒΓ, sit [per 2. post.] ΒΕ in directum rectæ ΓΒ.



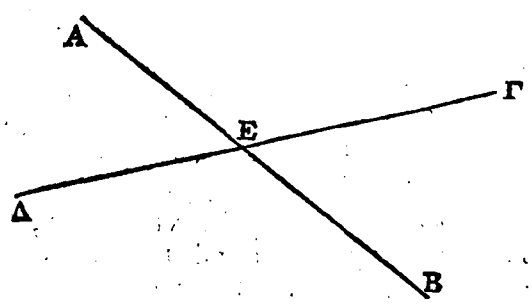
Quoniam igitur recta ΑΒ insistit in rectam ΓΒΕ, anguli ΑΒΓ, ΑΒΕ æquantur [per 13. prop.] duobus rectis; sunt autem [ex hyp.] anguli ΑΒΓ, ΑΒΔ duobus rectis æquales: anguli igitur ΓΒΑ, ΑΒΕ æquantur angulis ΓΒΑ, ΑΒΔ. communis auferatur ΑΒΓ; reliquus igitur ΑΒΕ æquabitur reliquo ΑΒΔ, minor majori, quod fieri non potest: recta igitur ΒΕ non est in directum rectæ ΒΓ. eodem modo ostendemus, nullam aliam esse præter ΒΔ: est ergo recta ΓΒ in directum rectæ ΒΔ.

Si igitur ad aliquam rectam, & ad punctum in ea, duæ rectæ, non ad easdem partes positæ, faciant angulos deinceps duobus rectis æquales; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt. quod erat demonstrandum.

Prop. XV. Theor.

Si duæ rectæ sese mutuo secent, angulos ad verticem facient inter se æquales.

Duæ rectæ ΑΒ, ΓΔ sese mutuo secent in puncto Ε: dico angulum ΑΕΓ æquari angulo ΔΕΒ, & angulum ΓΕΒ æquari angulo ΑΕΔ.



Quoniam enim recta ΑΕ insistit in rectam ΓΔ, faciens angulos ΓΕΑ, ΑΕΔ; idcirco anguli ΓΕΑ, ΑΕΔ æquantur [per 13. prop.] duobus rectis. rursus, quoniam recta ΔΕ insistit in rectam ΑΒ, faciens angulos ΑΕΔ, ΔΕΒ; idcirco anguli ΑΕΔ, ΔΕΒ æquantur [per 13. prop.] duobus rectis. ostensi autem sunt anguli ΓΕΑ, ΑΕΔ æquales duobus rectis: sunt igitur anguli ΓΕΑ, ΑΕΔ æquales angulis ΑΕΔ, ΔΕΒ. auferatur communis angulus ΑΕΔ; reliquus igitur ΓΕΑ æquatur reliquo ΒΕΔ. eodem modo demonstrabitur angulos ΓΕΒ, ΔΕΑ esse æquales.

Si igitur duæ rectæ sese mutuo secent, faciunt angulos ad verticem inter se æquales. quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Hinc manifestum est, quotcunque rectis sese mutuo secantibus, angulos ad punctum sectionis æquari quatuor rectis.

τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιέιτωσαν. λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ ΓΒ ἡ ΒΔ.

Εἰ γὰρ μή ἐστι τῇ ΒΓ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ, ἔστω τῇ ΓΒ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΕ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΒ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΒΕ ἐφέστηκεν, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΕ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ ἴσαι εἰσί. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΒΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΒΔ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ.

Ἐὰν ἄρα πρός τινι εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, δύο εὐθεῖαι, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσι.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΕ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΔ ἐφέστηκε, γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΔΕ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΑΒ ἐφέστηκε, γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ ἴσαι εἰσί. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΕΔ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΕΑ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση ἐστίν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΒ, ΔΕΑ ἴσαι εἰσίν.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

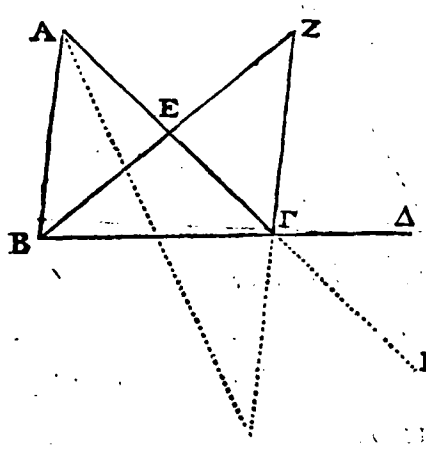
Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς πρὸς τῇ τομῇ γωνίας τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσουσι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις'.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν ἐκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν.

ΕΣτω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία, ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΓ γωνιῶν.

Τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΕ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΖΓ, καὶ διήχθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ Η.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΕΓ ἴση ἐστὶν, κατὰ κορυφὴν γὰρ· βάσις ἄρα ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΕΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ. μείζων δέ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΕΓΔ τῆς ὑπὸ ΕΓΖ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΑΕ. ὁμοίως δὴ, τὴν ΒΓ τετμημένην δίχα, δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν ἐκβεβλημένης, ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι.

ΕΣτω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶ τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῆς ὑπὸ ΑΒΓ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ μείζονές εἰσιν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ.

PROP. XVI. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto, angulus exterior major eſt utrolibet interiorum & oppoſitorum.

SIT triangulum ABΓ, & producatur latus BΓ uſque ad Δ: dico exteriorem angulum AΓΔ majorem eſſe utrolibet interiorum & oppoſitorum ΓBA, BAΓ.

Secetur [per 10. prop.] AΓ bifariam in E, & ducta recta BE producatur ad Z, & ponatur [per 3. prop.] EZ æqualis rectæ BE, & ducatur recta ZΓ, & producatur AΓ ad H.

Quoniam igitur AE æquatur rectæ EΓ, & BE rectæ EZ, duæque AE, EB æquantur duabus ΓE, EZ, altera alteri, angulus etiam AEB æquatur [per 15. prop.] angulo ZEΓ; eſt enim ad verticem: baſis AB æquatur [per 4. prop.] baſi ZΓ, & triangulum ABE æquatur triangulo ZEΓ, & reliqui anguli reliquis angulis æquantur, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur: eſt igitur angulus BAE æqualis angulo EΓZ. major autem eſt [per 9. ax.] angulus EΓΔ angulo EΓZ: major eſt igitur angulus AΓΔ angulo BAE. eodem modo, ſi BΓ ſecetur bifariam, demonſtrabitur angulum BΓH, id eſt [per 15. prop.] angulum AΓΔ, majorem eſſe angulo ABΓ.

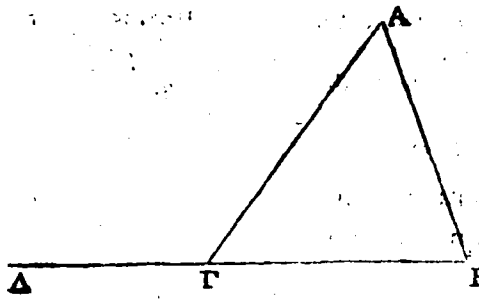
Omnis igitur trianguli uno latere producto, angulus exterior major eſt utrolibet interiorum & oppoſitorum. quod erat demonſtrandum.

PROP. XVII. THEOR.

Omnis trianguli duo anguli ſunt minores duobus rectis, quomodocunque ſumpti.

SIT triangulum ABΓ: dico duos angulos trianguli ABΓ, quomodocunque ſumptos, minores eſſe duobus rectis.

Producatur enim [per 2. poſt.] BΓ ad Δ.



Et quoniam AΓΔ eſt exterior angulus trianguli ABΓ, major eſt [per 16. prop.] interiore & oppoſito ABΓ. addatur communis angulus AΓB: anguli igitur AΓΔ, AΓB ſunt majores angulis ABΓ, BΓA. ſed anguli AΓΔ, AΓB æquantur [per 13. prop.] duobus rectis: anguli igitur ABΓ, BΓA ſunt minores duobus rectis. eodem modo demonſtrabimus angulos BAΓ, AΓB minores eſſe duobus rectis; itemque angulos ΓAB, ABΓ.

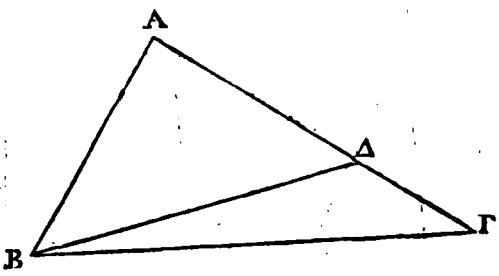
Omnis igitur trianguli duo anguli ſunt minores duobus rectis, quomodocunque ſumpti. quod erat demonſtrandum.

Prop. XVIII. Theor.

Omnis trianguli majus latus majorem angulum ſubtendit.

SIT triangulum ABΓ, habens latus AΓ majus latere AB: dico angulum etiam ABΓ majorem eſſe angulo BΓA.

Quoniam enim latus AΓ majus eſt latere AB, ponatur [per 3. prop.] recta AΔ æqualis lateri AB, & ducatur recta BΔ.



Et quoniam AΔB eſt exterior angulus trianguli BΔΓ, major eſt [per 16. prop.] interiore & oppoſito ΔΓB. æqualis autem eſt [per 5. prop.] angulus AΔB angulo ABΔ, quia latus AB æquatur lateri AΔ: ideoque major eſt angulus ABΔ angulo AΓB; angulus igitur ABΓ multo major eſt angulo AΓB.

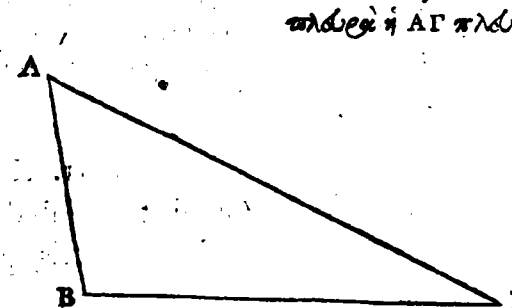
Omnis igitur trianguli majus latus ſubtendit majorem angulum. quod erat demonſtrandum.

Prop. XIX. Theor.

Omnis trianguli majori angulo majus latus ſubtenditur.

SIT triangulum ABΓ, habens angulum ABΓ majorem angulo BΓA: dico latus AΓ majus eſſe latere AB.

Si enim non ſit majus: latus AΓ, vel eſt æquale lateri AB, vel ipſo minus. æquale autem non eſt latus AΓ lateri AB: nam tum angulus ABΓ æqualis eſſet [per 5. prop.] angulo AΓB. non eſt autem æqualis: nec igitur latus AΓ lateri AB æquale erit. neque tamen minus eſt latus AΓ latere AB: tum enim angulus ABΓ minor eſſet [per 18. prop.] angulo AΓB. at non eſt minor: nec igitur latus AΓ minus erit latere AB. demonſtratum autem eſt non eſſe æquale: majus eſt igitur latus AΓ latere AB.



Omnis igitur trianguli majori angulo majus latus ſubtenditur. quod erat demonſtrandum.

Prop. XX. Theor.

Omnis trianguli duo latera ſunt majora reliquo, quomodocunque ſumpta.

SIT enim triangulum ABΓ: dico trianguli ABΓ duo latera, quomodocunque ſumpta, majora eſſe reliquo; nempe BA, AΓ latere BΓ; & AB, BΓ latere AΓ; & BΓ, ΓA latere AB.

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, μείζονα ἔχον τὴν ΑΓ πλευρὰν τῆς ΑΒ· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΓΑ.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΔΓ ἐκτὸς ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΒ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῆς ὑπὸ ΔΓΒ. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΓΑ· λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΓ πλευρᾶς τῆς ΑΒ μείζων ἐστίν.

Εἰ γὰρ μή· ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, ἢ ἐλάσσων. ἴση μὲν οὐκ ἔστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ. οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ. οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ. οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴση ἐστί· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

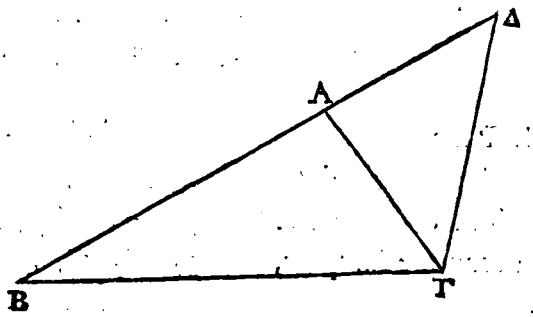
Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι.

Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ, αἱ δὲ ΑΒ, ΒΓ τῆς ΑΓ, αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

Διηχθω

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΔΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Producatur enim latus BA ad punctum Δ, & [per 3. prop.] ponatur ΔA æqualis rectæ ΓA, & jungatur ΔΓ.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ· ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΒΓΔ γωνία τῆς ὑπὸ ΑΓΔ μείζων ἐστὶ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΔ τῆς ὑπὸ ΑΔΓ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΔΓΒ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΔΓ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, ἡ ΔΒ ἄρα τῆς ΒΓ ἐστὶ μείζων. ἴση δὲ ἡ ΔΒ ταῖς ΑΒ, ΑΓ· μείζονες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ μὲν ΑΒ, ΒΓ τῆς ΓΑ μείζονές εἰσιν· αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

Quoniam igitur ΔA æqualis est rectæ AΓ, erit etiam [per 5. prop.] angulus AΔΓ æqualis angulo AΓΔ: est autem [per 9. ax.] angulus BΓΔ major angulo AΓΔ; major est igitur angulus BΓΔ angulo AΔΓ. quoniam etiam triangulum ΔΓB habet angulum BΓΔ majorem angulo BΔΓ, & [per 19. prop.] majorem angulum subtendit majus latus, latus ΔB majus erit latere BΓ. est autem recta ΔB æqualis lateribus AB, AΓ: majora igitur sunt latera BA, AΓ latere BΓ. eodem modo ostendemus latera AB, BΓ majora esse latere ΓA; & latera BΓ, ΓA majora latere AB.

Πάντως ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντη μεταλαμβανόμεναι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Omnis igitur trianguli duo latera, quomodocunque sumpta, sunt majora reliquo. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν· αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν δύο τριγώνου πλευρῶν ἐλάσσονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσι.

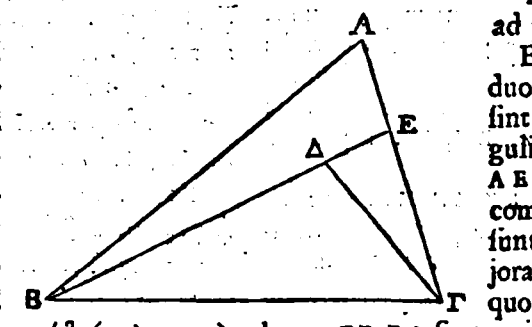
Prop. XXI. Theor.

Si à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ intus constituantur: hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum comprehendent.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ΒΓ, ἀπὸ τῶν περάτων τῶν Β, Γ, δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάτωσαν αἱ ΒΔ, ΔΓ· λέγω ὅτι αἱ ΒΔ, ΔΓ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐλάσσονες μὲν εἰσι, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσι, τὴν ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

Trianguli enim ABΓ in uno latere BΓ, à terminis B, Γ, constituantur intus duæ rectæ BΔ, ΔΓ: dico rectas BΔ, ΔΓ minores esse duobus reliquis trianguli lateribus BA, AΓ, angulum tamen comprehendere BΔΓ majorem angulo BAΓ.

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐπὶ τὸ Ε.



Producatur enim recta BΔ ad punctum E.

Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι· τοῦ ΑΒΕ ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΕ τῆς ΒΕ μείζονές εἰσι. κοινὴ προσκείσθω ἡ ΕΓ· αἱ ἄρα ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονές εἰσι. πάλιν, ἐπεὶ τοῦ ΓΕΔ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ τῆς ΓΔ μείζονές εἰσι, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΔΒ· αἱ ΓΕ, ΕΒ ἄρα τῶν ΓΔ, ΔΒ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονες ἐδείχθησαν αἱ ΒΑ, ΑΓ· πολλῷ ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΔ, ΔΓ μείζονές εἰσι.

Et cum omnis trianguli duo latera [per 20. prop.] sint majora reliquo: trianguli ABE duo latera AB, AE sunt majora latere BE. communis addatur recta EΓ; sunt igitur latera BA, AΓ majora rectis BE, EΓ. rursus, quoniam trianguli ΓEΔ duo latera ΓE, EΔ sunt majora latere ΓΔ, communis addatur ΔB: sunt igitur rectæ ΓE, EB majores rectis ΓΔ, ΔB. sed latera BA, AΓ ostendebantur esse majora rectis BE, EΓ: sunt igitur BA, AΓ multo majora quam BΔ, ΔΓ.

Πάλιν, ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστί· τοῦ ΓΔΕ ἄρα τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΕΔ. διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα καὶ τοῦ ΑΒΕ τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΒΔΓ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

Rursus, quoniam angulus, qui extra est quemvis triangulum, major est [per 16. prop.] interiore & opposito; angulus BΔΓ, qui extra est triangulum ΓΔE, major est angulo ΓEΔ. eadem de causa angulus ΓEB, qui extra est triangulum ABE, major est angulo BAΓ. ostensum autem est angulum BΔΓ majorem esse angulo ΓEB: angulus igitur BΔΓ multo major est angulo BAΓ.

Si igitur à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ intus conſtituantur: hæ reliquis duobus trianguli lateribus ſunt quidem minores, angulum vero comprehendunt majorem. quod erat demonſtrandum.

Εαν ἀρα τριγώνε ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο αἱ εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν· αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάσσονες μέν εἰσι, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXII. PROBL.

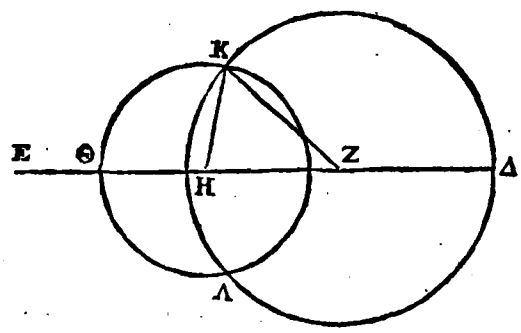
E tribus rectis, quæ tribus rectis datis ſunt æquales, triangulum conſtituere: oportet autem duas, utcunque ſumptas, majores eſſe reliqua.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις, τρίγωνον συστήσασθαι· δεῖ δὴ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντη μεταλαμβανομένας.

SInt tres datæ rectæ A, B, Γ, quarum duæ utcunque ſumptæ ſint majores reliqua; nempe A & B majores quam Γ, item A & Γ majores quam B, denique B & Γ majores quam A: oportet è rectis lineis, æqualibus ipſis A, B, Γ, triangulum conſtituere.

Ponatur recta linea Δ E, finita quidem ad Δ, infinita vero verſus E; & ponatur [per 3. prop.] Δ Z æqualis rectæ A, & recta Z H æqualis rectæ B, rectæ autem Γ ſit æqualis H Θ; & centro Z, intervallo autem Z Δ, deſcribatur [per 3. poſt.] circulus Δ K Λ; & rurſus centro H, intervallo H Θ, deſcribatur circulus K Λ Θ, & ducantur rectæ K Z, K H: dico triangulum K Z H, fieri è tribus lineis rectis, æqualibus ipſis rectis A, B, Γ.



A ———
B ———
Γ ———

Quoniam enim punctum Z eſt centrum circuli Δ K Λ, recta Z Δ æqualis eſt [per 15. def.] rectæ Z K: at Z Δ æquatur rectæ A; recta igitur K Z æqualis eſt rectæ A. rurſus, quoniam punctum H eſt centrum circuli Λ K Θ, æqualis eſt H Θ rectæ H K: eſt autem H Θ æqualis rectæ Γ; eſt igitur K H æqualis rectæ Γ. rectæ autem B æqualis eſt Z H: tres igitur rectæ K Z, Z H, H K æquantur tribus rectis A, B, Γ.

E tribus idcirco rectis K Z, Z H, H K, quæ tribus datis rectis A, B, Γ ſunt æquales, conſtituitur triangulum K Z H. quod erat faciendum.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ A, B, Γ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν, πάντη μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν A B τῆς Γ, αἱ δὲ A Γ τῆς B, καὶ ἔτι αἱ B Γ τῆς A· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς A, B, Γ τρίγωνον συστήσασθαι.

Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ Δ E, πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ Δ, ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ E· καὶ κείσθω τῇ μὲν A ἴση ἡ Δ Z, τῇ δὲ B ἴση ἡ Z H, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ H Θ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Z, διαστήματι δὲ τῷ Z Δ, κύκλος γεγράφθω ὁ Δ K Λ· καὶ πάλιν, κέντρῳ μὲν τῷ H, διαστήματι δὲ τῷ H Θ, κύκλος γεγράφθω ὁ K Λ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ K Z, K H· λέγω ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς A, B, Γ, τρίγωνον συνέσταται τὸ K Z H.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ Δ K Λ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ Z Δ τῇ Z K· ἀλλὰ ἡ Z Δ τῇ A ἐστιν ἴση, καὶ ἡ K Z ἄρα τῇ A ἐστιν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ τὸ H σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ Λ K Θ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ H Θ τῇ H K· ἀλλὰ ἡ H Θ τῇ Γ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ K H ἄρα τῇ Γ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ Z H τῇ B ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ K Z, Z H, H K τρισὶ ταῖς A, B, Γ ἴσαι εἰσίν.

Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν ταῖς K Z, Z H, H K, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς A, B, Γ, τρίγωνον συνέσταται τὸ K Z H. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. XXIII. PROBL.

Ad datam rectam, & ad datum in ea punctum, dato angulo rectilineo angulum rectilineum æqualem conſtituere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

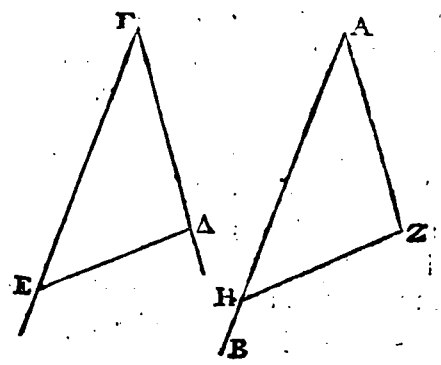
Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

SIT data recta linea A B, & in ea datum punctum A, datus autem angulus rectilineus ſit Δ Γ E: oportet ad datam rectam A B, & ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo Δ Γ E æqualem angulum rectilineum conſtituere.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ A B, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ A, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ Δ Γ E· δεῖ δὴ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ A B, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ Δ Γ E ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Εἰλήφθω

Εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν ΓΔ, ΓΕ τυχόντα σημεῖα τὰ Δ, Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς ΓΔ, ΔΕ, ΓΕ, τρίγωνον συνεστάτω τὸ ΑΖΗ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΓΔ τῇ ΑΖ, τὴν δὲ ΓΕ τῇ ΑΗ, καὶ ἔτι τὴν ΔΕ τῇ ΖΗ.



Ἐπεὶ οὖν αἱ δύο αἱ ΔΓ, ΓΕ δυσὶ ταῖς ΖΑ, ΑΗ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΕ βάσει τῇ ΖΗ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΑΗ ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴση γωνία εὐθύγραμμος συνέσταται ἡ ὑπὸ ΖΑΗ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Sumantur in utraque recta ΓΔ, ΓΕ puncta quælibet Δ, Ε, & ducatur recta ΔΕ: & è tribus rectis lineis, quæ æquales sint tribus ΓΔ, ΔΕ, ΓΕ, conſtituatur [per 22. prop.] triangulum ΑΖΗ; ita ut ΓΔ æquetur rectæ ΑΖ, recta autem ΓΕ rectæ ΑΗ, recta denique ΔΕ rectæ ΖΗ.

Quoniam igitur duæ rectæ ΔΓ, ΓΕ æquantur duabus rectis ΖΑ, ΑΗ, altera alteri, & baſis ΔΕ æquatur baſi ΖΗ; angulus ΔΓΕ [per 8. prop.] æqualis eſt angulo ΖΑΗ.

Ad datam igitur rectam lineam ΑΒ, & ad datum in ea punctum Α, dato angulo rectilineo ΔΓΕ conſtituitur æqualis angulus rectilineus ΖΑΗ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.

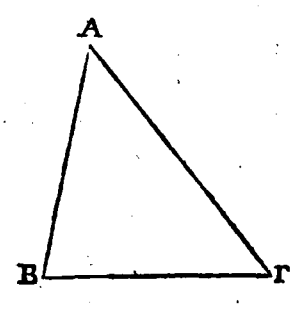
Prop. XXIV. Theor.

Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri; angulum autem angulo majorem, qui ab æqualibus rectis comprehenditur: etiam baſim baſi majorem habebunt.

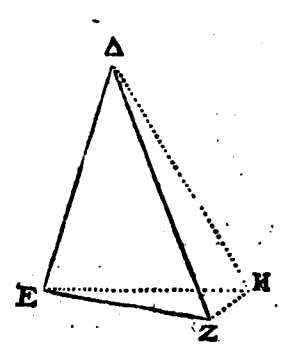
Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, γωνία δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΔΖ μείζων ἔστω· λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἐστίν.

SInt duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, quæ duo latera ΑΒ, ΑΓ duobus lateribus ΔΕ, ΔΖ habent æqualia, alterum alteri, latus nempe ΑΒ lateri ΔΕ, atque latus ΑΓ lateri ΔΖ; angulus autem ΒΑΓ ſit major angulo ΕΔΖ: dico baſim ΒΓ majorem eſſe baſi ΕΖ.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ γωνίας, συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΕ εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Δ, τῇ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΗ· καὶ κείσθω ὁπότερα τῶν ΑΓ, ΔΖ ἴση ἡ ΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΕ, ΖΗ.



Quoniam enim angulus ΒΑΓ major eſt angulo ΕΔΖ, conſtituatur [per 23. prop.] ad rectam ΔΕ, & ad punctum in ea Δ, angulus ΕΔΗ æqualis angulo ΒΑΓ: ponaturque ΔΗ [per 3. prop.] æqualis alterutri rectarum ΑΓ, ΔΖ, & ducantur ΗΕ, ΖΗ.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΔΗ, δύο δὴ αἱ ΒΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΗ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΗ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΗ ἐστὶν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΗ τῇ ΔΖ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΖΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΗΖ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ, πολλῷ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΕΖΗ, μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΕΖΗ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΕΗΖ· ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα πλευρὰ ἡ ΕΗ τῆς ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΕΗ τῇ ΒΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ.

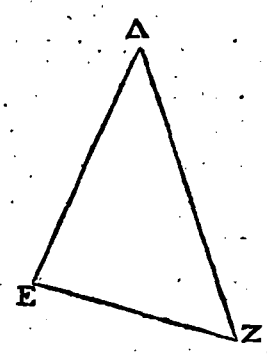
Itaque quoniam ΑΒ æquatur rectæ ΔΕ, & recta ΑΓ rectæ ΔΗ, duæ rectæ ΒΑ, ΑΓ æquantur duabus ΕΔ, ΔΗ, altera alteri, & angulus ΒΑΓ æquatur [per conſtruct.] angulo ΕΔΗ: baſis igitur ΒΓ æqualis erit [per 4. prop.] baſi ΕΗ. rurſus, quoniam ΔΗ æqualis eſt rectæ ΔΖ, & angulus ΔΖΗ eſt [per 5. prop.] æqualis angulo ΔΗΖ; major erit ΔΖΗ angulo ΕΗΖ, multoque igitur major erit angulus ΕΖΗ angulo ΕΗΖ. & quoniam triangulum ΕΖΗ habet angulum ΕΖΗ majorem angulo ΕΗΖ; majorem autem angulum [per 19. prop.] majus latus ſubtendit: eſt latus ΕΗ majus latere ΕΖ. verum ΕΗ æquale eſt [per conſtruct.] lateri ΒΓ; itaque latus ΒΓ majus eſt latere ΕΖ.

Si igitur duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri; angulum autem habeant angulo majorem, qui ab æqualibus rectis comprehenditur: etiam basim basi majorem habebunt. quod erat demonstrandum.

Prop. XXV. Theor.

Si duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri; basim autem habeant basi majorem: habebunt etiam angulum majorem angulo, qui ab æqualibus rectis comprehenditur.

SInt duo triangula ABΓ, ΔEZ, quæ habent duo latera AB, AΓ æqualia duobus lateribus ΔE, ΔZ, alterum alteri, latus quidem AB lateri ΔE, & latus AΓ lateri ΔZ; basis autem BΓ sit major basi EZ: dico angulum BAΓ majorem esse angulo EΔZ.



Si enim non sit major, vel est æqualis ei, vel minor. æqualis autem non est angulus BAΓ angulo EΔZ, sic enim esset [per 4. prop.] basis BΓ æqualis basi EZ: non est autem; angulus igitur BAΓ non est æqualis angulo EΔZ. sed neque minor, sic enim esset [per 24. prop.] basis BΓ minor basi EZ: atqui non est; angulus igitur BAΓ non est minor angulo EΔZ. ostensum autem est eum non esse æqualem: major est igitur angulus BAΓ angulo EΔZ.

Si igitur duo triangula habeant duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri; basim autem habeant basi majorem: habebunt etiam angulum majorem angulo, qui ab æqualibus rectis comprehenditur. quod erat demonstrandum.

Prop. XXVI. Theor.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale; vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum subtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

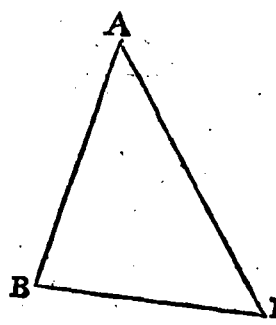
SInt duo triangula ABΓ, ΔEZ, quæ duos angulos ABΓ, BΓA duobus angulis ΔEZ, EZΔ æquales habent, alterum alteri, angulum scilicet ABΓ æqualem angulo ΔEZ, angulum vero BΓA angulo EZΔ: habeant autem & unum latus uni lateri æquale; & primum, quod æqua-

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν βάσιν δὲ τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ· καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, βάσις δὲ ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἔστω· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΔΖ μείζων ἐστίν.



Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ, ἢ ἐλάσσων. ἴση μὲν οὐκ ἔστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΔΖ, ἴση γὰρ ἦν καὶ ἡ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ· οὐκ ἔστι δέ, οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΔΖ. ἀλλ' οὐδὲ μὴν ἐλάσσων, ἐλάσσων γὰρ ἦν καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ· οὐκ ἔστι δέ, οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ. ἐδείχθη δὲ οὐδ' ἴση· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ· καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

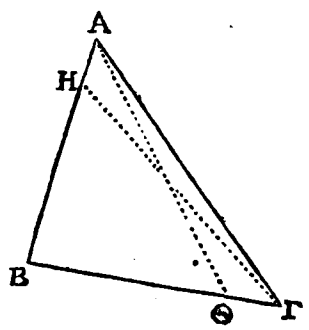
Ἔστωσαν δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ· ἐχέτω δὴ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην· πρότερον, τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις

τὴν

τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· λέγω ὅτι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, μία αὐτῶν μείζων ἔσται. ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ κείσθω τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΗΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΗ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΒΗ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΗΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΗΓΒ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΕ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἴση ἐστὶν, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ· ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ ἴση, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστί, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.



ΑΛΛΑ δὴ πάλιν, ἐστωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι ἴσαι, ὡς ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ· λέγω πάλιν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

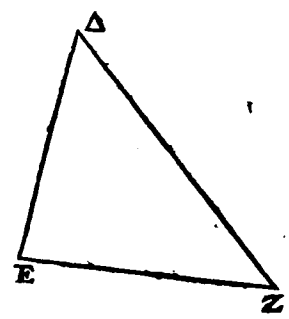
Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ΒΓ τῇ ΕΖ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω εἰ δυνατὸν μείζων ἡ ΒΓ, καὶ κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΒΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΘ τῇ ΕΖ, ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΔΕ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΘ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσι· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΘΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΔ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΖΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΘΑ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἐστὶν ἴση, τριγώνου δὴ τοῦ ΑΘΓ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΘΑ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΒΓΑ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ, ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΓ

libus adjacet angulis, latus nempe ΒΓ lateri ΕΖ: dico & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habere, alterum alteri, latus ſcilicet ΑΒ lateri ΔΕ, & latus ΑΓ lateri ΔΖ, & reliquum angulum ΒΑΓ reliquo angulo ΕΔΖ.

Si enim latus ΑΒ ſit inæquale lateri ΔΕ, eorum alterum erit majus. ſit ΑΒ majus, & ponatur [per 3. prop.] ΗΒ recta æqualis lateri ΔΕ, & ducatur ΗΓ.

Quoniam igitur latus ΒΗ æquale eſt lateri ΔΕ, latus autem ΒΓ lateri ΕΖ, duo nempe latera ΒΗ, ΒΓ æqualia duobus ΔΕ, ΕΖ, alterum alteri, & angulus ΗΒΓ æqualis eſt angulo ΔΕΖ: baſis igitur ΗΓ æquatur [per 4. prop.] baſi ΔΖ, & triangulum ΗΓΒ æquabitur triangulo ΔΕΖ, & reliqui anguli reliquis angulis æquabuntur, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur: eſt igitur angulus ΗΓΒ æqualis angulo ΔΖΕ. angulus autem ΔΖΕ ponitur æqualis angulo ΒΓΑ: eſt igitur angulus ΒΓΗ æqualis angulo ΒΓΑ, minor majori, quod fieri non poteſt. non eſt igitur latus ΑΒ inæquale lateri ΔΕ: ergo eſt æquale. eſt autem ΒΓ latus æquale lateri ΕΖ, atque duo latera ΑΒ, ΒΓ æquantur duobus ΔΕ, ΕΖ, alterum alteri, & angulus ΑΒΓ æquatur angulo ΔΕΖ: baſis igitur ΑΓ [per 4. prop.] æquatur baſi ΔΖ, & reliquus angulus ΒΑΓ æquatur reliquo angulo ΕΔΖ.



Quin & rurſum, ſint latera quæ æqualibus angulis ſubtenduntur æqualia, latus ſcilicet ΑΒ lateri ΔΒ: dico rurſus, quod & reliqua latera reliquis lateribus æquabuntur, nempe ΑΓ lateri ΔΖ, & ΒΓ lateri ΕΖ; & reliquus etiam angulus ΒΑΓ æquabitur reliquo angulo ΕΔΖ.

Si enim inæquale ſit latus ΒΓ lateri ΕΖ, eorum alterum majus erit. ſit (ſi fieri poteſt) ΒΓ majus, ponaturque [per 3. prop.] ΒΘ æquale lateri ΕΖ, & ducatur ΑΘ.

Et quoniam latus ΒΘ æquale eſt lateri ΕΖ, & latus ΑΒ lateri ΔΕ, duo nempe latera ΑΒ, ΒΘ æqualia duobus ΔΕ, ΕΖ, alterum alteri, & angulos comprehendunt æquales: baſis igitur ΑΘ [per 4. prop.] æquatur baſi ΔΖ, & triangulum ΑΒΘ æquatur triangulo ΔΕΖ, & reliqui anguli reliquis angulis æquabuntur, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur: angulus igitur ΒΘΑ æquatur angulo ΕΖΔ. ſed [ex hyp.] angulus ΕΖΔ æqualis eſt angulo ΒΓΑ: eſt igitur ΒΘΑ angulus æqualis angulo ΒΓΑ; trianguli nempe ΑΓΘ exterior angulus ΒΘΑ æqualis interiori & oppoſito ΒΓΑ, quod [per 16. prop.] fieri non poteſt: latus igitur ΒΓ non eſt inæquale lateri ΕΖ, igitur æquale. eſt autem ΑΒ æquale lateri ΔΕ; duo idcirco latera ΑΒ, ΒΓ æquantur duobus lateribus ΔΕ, ΕΖ, alterum alteri, & comprehendunt angulos æquales: baſis igitur ΑΓ [per 4. prop.] æquatur baſi ΔΖ, & triangu-

lum

lum ABΓ æquatur triangulo ΔEZ, & reliquus angulus BAΓ æquatur reliquo EΔZ.

Si igitur duo triangula duos angulos duobus angulis habeant æquales, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale; vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum ſubtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt. quod erat demonſtrandum.

τελγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ BAΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ EΔZ ἴση ἐστίν.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἔχῃ, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXVII. Theor.

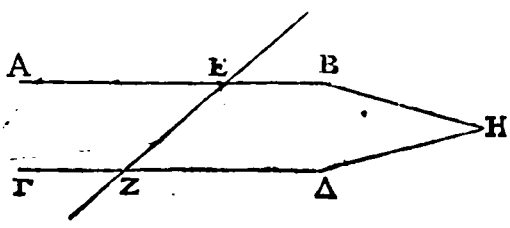
Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter ſe æquales fecerit, parallelæ erunt rectæ lineæ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι.

IN duas enim rectas lineas AB, ΓΔ recta linea EZ incidens alternos angulos AEZ, EZΔ æquales inter ſe faciat: dico rectam lineam AB rectæ ΓΔ parallelam eſſe.

Si enim non eſt parallela, productæ AB, ΓΔ, vel ad partes BΔ convenient, vel ad partes AΓ. producantur, conveniantque ad partes BΔ in puncto H.



Jam, angulus AEZ, qui extra eſt triangulum EHZ, major eſt [per 16. prop.] interiore & oppoſito EZH: ſed & [ex hyp.] æqualis, quod fieri non poteſt; non igitur AB, ΓΔ, productæ ad partes BΔ, convenient. ſimiliter demonſtrabitur neque convenire ad partes AΓ: quæ vero in neutras partes conveniunt, ſunt [per 35. def.] inter ſe parallelæ; parallela igitur eſt AB ipſi ΓΔ.

Quare ſi in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter ſe æquales fecerit, rectæ lineæ erunt parallelæ. quod erat demonſtrandum.

Εἰ γὰρ δύο εὐθείας τὰς AB, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ EZ, τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ AEZ, EZΔ ἴσους ἀλλήλαις ποιείτω· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ ΓΔ εὐθείᾳ.

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι αἱ AB, ΓΔ συμπεσοῦνται, ἤτοι ἐπὶ τὰ B, Δ μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ AΓ. ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ BΔ μέρη κατὰ τὸ H.

Τριγώνου δὴ τοῦ EHZ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ AEZ μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίας τῆς ὑπὸ EZH· ἀλλὰ καὶ ἴση, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα αἱ AB, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ B, Δ μέρη. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ A, Γ· αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι, παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXVIII. Theor.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori & oppoſito & ad eaſdem partes æqualem fecerit; vel interiores & ad eaſdem partes duobus rectis æquales: rectæ lineæ erunt inter ſe parallelæ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῇ· παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι.

IN duas enim rectas lineas AB, ΓΔ recta linea EZ incidens exteriorem angulum EHB interiori & oppoſito & ad eaſdem partes HΘΔ æqualem faciat; vel interiores & ad eaſdem partes BHΘ, HΘΔ duobus rectis æquales: dico rectam lineam AB rectæ ΓΔ parallelam eſſe.

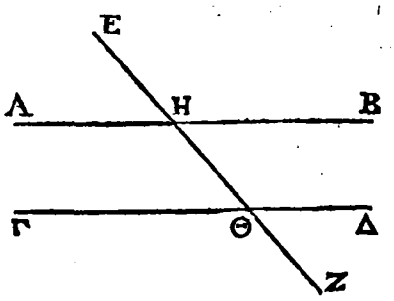
Quoniam enim EHB angulus æqualis eſt angulo HΘΔ, angulus autem EHB æqualis [per 15. prop.] angulo AHΘ; erit & angulus AHΘ angulo HΘΔ æqualis: & ſunt alterni; parallela igitur eſt [per 27. prop.] AB ipſi ΓΔ.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς AB, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ EZ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ EHB τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίᾳ τῇ ὑπὸ HΘΔ ἴσην ποιείτω, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ BHΘ, HΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ ΓΔ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ EHB τῇ ὑπὸ HΘΔ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ EHB τῇ ὑπὸ AHΘ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ AHΘ ἄρα τῇ ὑπὸ HΘΔ ἐστὶν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ ΓΔ.

ΠΑΛΙΝ

ΠΑΛΙΝ, ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ τῶν ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσί. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΘ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ· ὥστε παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.



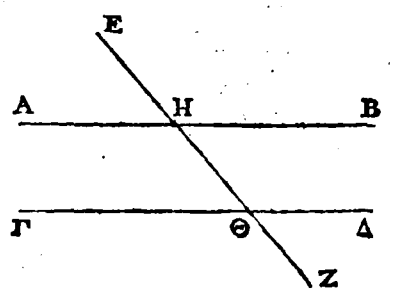
Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ὁμόπλευρον ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ὁμόπλευρον, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ὁμόπλευρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

ΕΙΣ γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπιπτέτω ἡ ΕΖ· λέγω ὅτι τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΗΘ, ΗΘΔ ἴσας ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΗΘ. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῶν ὑπὸ ΗΘΔ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ τῶν ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. αἱ δὲ ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπεσοῦνται. οὐ συμπίπτουσι δέ, διὰ τὸ παραλλήλους αὐτὰς ὑποκεῖσθαι· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, ἴση ἄρα.



ΑΛΛΑ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΕΗΒ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση.

ΚΟΙΝΗ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ τῶν ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· καὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἡ ἄρα εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ὁμόπλευρον τὴν αὐτὴν μέρη ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ὁμόπλευρα τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

RURSUS, quoniam anguli BHΘ, HΘΔ duobus rectis ſunt æquales, & ſunt [per 13. prop.] AHΘ, BHΘ æquales duobus rectis: erunt anguli AHΘ, BHΘ angulis BHΘ, HΘΔ æquales. communis auferatur BHΘ, reliquus igitur AHΘ eſt æqualis reliquo HΘΔ; & ſunt alterni: ergo AB ipſi ΓΔ [per 27. prop.] eſt parallela.

Si igitur in duas rectas recta linea incidens exteriorem angulum interiori & oppoſito & ad eaſdem partes æqualem fecerit; vel interiores & ad eaſdem partes duobus rectis æquales: rectæ lineæ erunt inter ſe parallelæ. quod erat demonſtrandum.

PROP. XXIX. THEOR.

In parallelas rectas lineas recta linea incidens & alternos angulos inter ſe æquales, & exteriorem interiori & oppoſito & ad eaſdem partes æqualem, & interiores & ad eaſdem partes duobus rectis æquales efficit.

IN parallelas enim rectas lineas AB, ΓΔ recta linea incidat EZ: dico illam alternos angulos AHΘ, HΘΔ inter ſe æquales efficere; & exteriorem EHB interiori & oppoſito & ad eaſdem partes HΘΔ æqualem, & interiores & ad eaſdem partes BHΘ, HΘΔ duobus rectis æquales.

Si enim inæqualis eſt AHΘ ipſi HΘΔ, unus ipſorum major eſt. ſit major AHΘ. & quoniam angulus AHΘ major eſt angulo HΘΔ, communis apponatur BHΘ: anguli igitur AHΘ, BHΘ angulis BHΘ, HΘΔ majores ſunt. ſed anguli AHΘ, BHΘ ſunt [per 13. prop.] æquales duobus rectis: ergo BHΘ, HΘΔ anguli ſunt duobus rectis minores. quæ vero à minoribus, quàm ſunt duo recti, in infinitum producuntur rectæ lineæ [per 11. ax.] inter ſe convenient: ergo rectæ lineæ AB, ΓΔ in infinitum productæ convenient inter ſe. atqui non conveniunt, cum parallelæ ponantur: non igitur inæqualis eſt AHΘ angulus angulo HΘΔ, ideo æqualis.

ANGULUS autem AHΘ æqualis eſt [per 15. prop.] angulo EHB: ergo & EHB ipſi HΘΔ æqualis erit.

COMMUNIS apponatur BHΘ: anguli igitur EHB, BHΘ ſunt æquales angulis BHΘ, HΘΔ. ſed EHB, BHΘ æquales ſunt [per 13. prop.] duobus rectis: ergo & BHΘ, HΘΔ duobus rectis æquales erunt.

In parallelas igitur rectas lineas recta linea incidens & alternos angulos inter ſe æquales, & exteriorem interiori & oppoſito & ad eaſdem partes æqualem, & interiores & ad eaſdem partes duobus rectis æquales efficit. quod erat demonſtrandum.

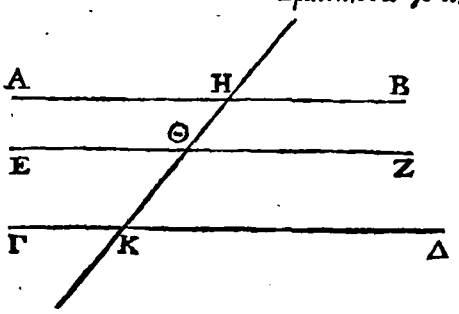
PROP. XXX. THEOR.

Quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ & inter ſe ſunt parallelæ.

SIT utraque ipſarum AB, ΓΔ ipſi EZ parallela: dico & AB ipſi ΓΔ parallelam eſſe.

Incidat enim in ipſas recta linea HK.

Et quoniam in parallelas rectas lineas AB, EZ recta linea HK incidit, angulus AHΘ [per 27. prop.] angulo HΘZ eſt æqualis. rurſus, quoniam in parallelas rectas lineas EZ, ΓΔ recta linea incidit HK, æqualis eſt HΘZ angulus [per 28. prop.] angulo HKΔ. oſtenſus autem eſt & angulus AHK angulo HΘZ æqualis: ergo & AHK ipſi HKΔ æqualis erit; & ſunt alterni: parallela igitur eſt AB [per 29. prop.] ipſi ΓΔ.



Ergo quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ & inter ſe ſunt parallelæ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἔστω ἑκατέρα τῶν AB, ΓΔ τῇ EZ παράλληλος· λέγω ὅτι καὶ ἡ AB τῇ ΓΔ ἐστὶ παράλληλος.

Ἐμπιπτέτω γὰρ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ HK.

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς AB, EZ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ HK, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ AHΘ τῇ ὑπὸ HΘZ. πάλιν, ἐπεὶ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας τὰς EZ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ HK, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ HΘZ τῇ ὑπὸ HKΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ AHK τῇ ὑπὸ HΘZ ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ AHK ἄρα τῇ ὑπὸ HKΔ ἐστὶν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ ΓΔ.

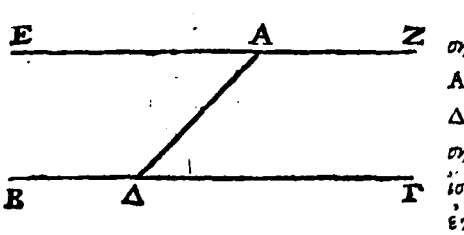
Αἱ ἄρα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXXI. PROBL.

Per datum punctum, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

SIT datum quidem punctum A, data vero recta linea BΓ: oportet, per A punctum, ipſi BΓ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

Sumatur in BΓ quodvis punctum Δ, & jungatur AΔ; conſtituaturq; [per 23. prop.] ad rectam lineam ΔA, & ad punctum in ipſa A, angulo AΔΓ æqualis angulus ΔAE; & in directum ipſi EA recta linea AZ producatur.



Quoniam igitur in duas rectas lineas BΓ, EZ recta linea AΔ incidens alternos angulos EAΔ, AΔΓ inter ſe æquales efficit, EZ ipſi BΓ [per 27. prop.] parallela erit.

Per datum igitur punctum A, datæ rectæ lineæ BΓ parallela ducta eſt recta linea EAZ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ A, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ BΓ· δεῖ δὴ διὰ τοῦ A σημείου, τῇ ΓB εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς BΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AΔ· καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΔA εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A, τῇ ὑπὸ ΑΔΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΔAE· καὶ ἐκβεβλήθω ἐπ' εὐθείας τῇ AE εὐθεῖα ἡ AZ.

Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς BΓ, EZ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ AΔ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ EAΔ, AΔΓ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκε, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ EZ τῇ BΓ.

Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ A, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ BΓ παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ EAZ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. XXXII. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto, exterior angulus duobus interioribus & oppoſitis eſt æqualis; & trianguli tres interiores anguli duobus rectis ſunt æquales.

SIT triangulum ABΓ, & unum ipſius latus BΓ producatur in Δ: dico angulum exteriorem AΓΔ duobus interioribus & oppoſitis ΓAB, ABΓ æqualem eſſe; & trianguli tres in-

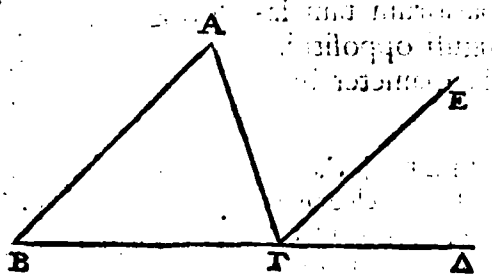
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστί· καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ABΓ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ BΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ AΓΔ ἴση ἐστὶ τοῖς δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΓAB, ABΓ· καὶ αἱ ἐντὸς

τρίγωνα τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

teriores angulos ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ duobus rectis esse æquales.



Ηχθω γὰρ, διὰ τοῦ Γ σημείου, τῇ ΑΒ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΓΕ.

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΑΓ· αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΔ· ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΕΓΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ ἐκτὸς γωνία ἴση ἐστὶ δυσὶ τοῖς ἐκτὸς καὶ ἀπεναντίον τοῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ.

Ducatur enim, per punctum Γ, [per 31. prop.] ipsi ΑΒ rectæ parallela ΓΕ.

Et quoniam ΑΒ ipsi ΓΕ parallela est, & in ipsas incidit ΑΓ: alterni anguli ΒΑΓ, ΑΓΕ [per 29. prop.] inter se æquales sunt. rursus, quoniam ΑΒ parallela est ipsi ΓΕ, & in ipsas incidit recta linea ΒΔ: exterior angulus ΕΓΔ interiori & opposito ΑΒΓ est æqualis. ostensus autem est angulus ΑΓΕ æqualis angulo ΒΑΓ: quare totus ΑΓΔ exterior angulus æqualis est duobus interioribus & oppositis ΒΑΓ, ΑΒΓ.

ΚΟΙΝΗ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί.

Communis addatur ΑΓΒ: anguli igitur ΑΓΔ, ΑΓΒ tribus ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ sunt æquales. sed [per 13. prop.] anguli ΑΓΔ, ΑΓΒ sunt æquales duobus rectis: ergo & ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ duobus rectis sunt æquales.

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστί· καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Omnis igitur trianguli uno latere producto, exterior angulus duobus interioribus & oppositis est æqualis; & trianguli tres interiores anguli duobus rectis sunt æquales. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Prop. XXXIII. Theor.

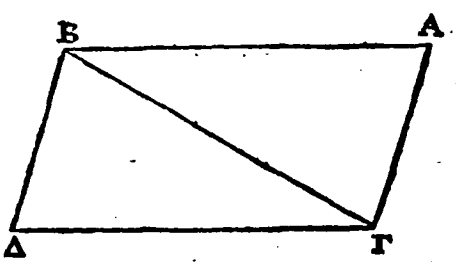
Quæ æquales & parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, ipsæ etiam sunt æquales & parallelæ.

Ἔστωσαν ἴσαι τε καὶ παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐπιζευγνύτωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ· λέγω ὅτι καὶ αἱ ΑΓ, ΒΔ ἴσαι καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Sint æquales & parallelæ ΑΒ, ΓΔ, & ipsas conjungant ad easdem partes rectæ lineæ ΑΓ, ΒΔ: dico ΑΓ, ΒΔ æquales & parallelas esse.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΒΓ.

Jungatur enim ΒΓ.



Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ· αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΓΔ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΔ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστί, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΔ. καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΑΓ, ΒΔ εὐθεῖα ἐμπέπτωκε ἡ ΒΓ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσα· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ. ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση.

Et quoniam ΑΒ parallela est ipsi ΓΔ, & in ipsas incidit ΒΓ: alterni anguli ΑΒΓ, ΒΓΔ [per 29. prop.] æquales sunt. rursus, quoniam ΑΒ est æqualis ΓΔ, communis autem ΒΓ, duæ ΑΒ, ΒΓ duabus ΓΔ, ΒΓ sunt æquales; & angulus ΑΒΓ æqualis angulo ΒΓΔ: basis igitur ΑΓ [per 4. prop.] basi ΒΔ est æqualis, triangulumque ΑΒΓ æquale triangulo ΒΓΔ, & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur: ergo angulus ΑΓΒ angulo ΓΒΔ est æqualis. & quoniam in duas rectas lineas ΑΓ, ΒΔ recta ΒΓ incidens alternos angulos ΑΓΒ, ΓΒΔ æquales inter se efficit: parallela est [per 27. prop.] ΑΓ ipsi ΒΔ. ostensa autem est & eidem æqualis.

Αἱ ἄρα τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι, καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

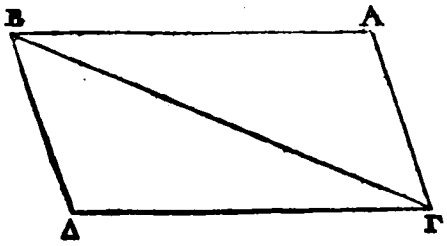
Quæ igitur æquales & parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, ipsæ etiam sunt æquales & parallelæ. quod erat demonstrandum.

Prop. XXXIV. Theor.

Parallelogrammorum ſpatiorum tam latera oppoſita quam anguli oppoſiti inter ſe æquantur, & illa diameter bifariam ſecat.

SIT parallelogrammum ΑΓΔΒ, cujus autem diameter ΒΓ: dico ΑΓΔΒ parallelogrammi latera oppoſita & angulos oppoſitos inter ſe æquari, & diametrum ΒΓ ipſum bifariam ſecare.

Quoniam enim parallela eſt ΑΒ ipſi ΓΔ, & in ipſas incidit recta linea ΒΓ: anguli alterni ΑΒΓ, ΒΓΔ [per 29. prop.] inter ſe ſunt æquales. rurſus, quoniam ΑΓ ipſi ΒΔ parallela eſt, & in ipſas incidit ΒΓ, alterni anguli ΑΓΒ, ΓΒΔ ſunt inter ſe æquales: duo igitur triangula ſunt ΑΒΓ, ΓΒΔ, quæ duos angulos ΑΒΓ, ΒΓΑ duobus angulis ΒΓΔ, ΓΒΔ æquales habent, alterum alteri; & unum latus uni lateri æquale, quod æqualibus adjacet angulis, utrique commune ΒΓ: ergo & reliqua latera [per 26. prop.] reliquis lateribus æqualia habebunt, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem: æquale igitur eſt latus quidem ΑΒ lateri ΓΔ, latus vero ΑΓ ipſi ΒΔ, & angulus ΒΑΓ angulo ΒΔΓ. & quoniam angulus ΑΒΓ eſt æqualis angulo ΒΓΔ, & angulus ΓΒΔ angulo ΑΓΒ: erit totus angulus ΑΒΔ æqualis toti ΑΓΔ. oſtenſus autem eſt & angulus ΒΑΓ angulo ΒΔΓ æqualis.



Parallelogrammorum igitur ſpatiorum latera oppoſita & anguli oppoſiti inter ſe æquantur.

Dico etiam diametrum eas bifariam ſecare. quoniam enim æqualis eſt ΑΒ ipſi ΓΔ, communis autem ΒΓ; duæ ΑΒ, ΒΓ duobus ΔΓ, ΓΒ ſunt æquales, altera alteri, & angulus ΑΒΓ æqualis eſt angulo ΒΓΔ: baſis igitur ΑΓ [per 4. prop.] baſi ΒΔ æqualis eſt, ideoque triangulum ΑΒΓ triangulo ΒΓΔ æquale erit.

Ergo diameter ΒΓ parallelogrammum ΑΓΔΒ bifariam ſecat. quod erat demonſtrandum.

Prop. XXXV. Theor.

Parallelogramma, ſuper eadem baſi & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

SInt parallelogramma ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ ſuper eadem baſi ΒΓ & in eiſdem parallelis ΑΖ, ΒΓ conſtituta: dico ΑΒΓΔ parallelogrammum ΕΒΓΖ parallelogrammo eſſe æquale.

Quoniam enim parallelogrammum eſt ΑΒΓΔ, ΑΔ [per 34. prop.] æqualis eſt ΒΓ. eadem quoque ratione & ΕΖ eſt æqualis ΒΓ: quare & ΑΔ æqualis erit ΕΖ. & communis ΔΕ: tota igitur ΑΕ toti ΔΖ [per 2. ax.] eſt æqualis. eſt autem

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΓΔΒ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΓΔΒ παραλληλογράμμου αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ ἡ ΒΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει.

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΓ· αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ, ΓΒΔ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΒΔ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν τῇ μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΓ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΑΒ πλευρὰ τῇ ΓΔ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΔΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστίν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΒΔΓ ἴση.

Τῶν ἄρα παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΓ, ΓΒ ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστί· καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστί, καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν.

Ἡ ἄρα ΒΓ διάμετρος δίχα τέμνει τὸ ΑΓΔΒ παραλληλόγραμμον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

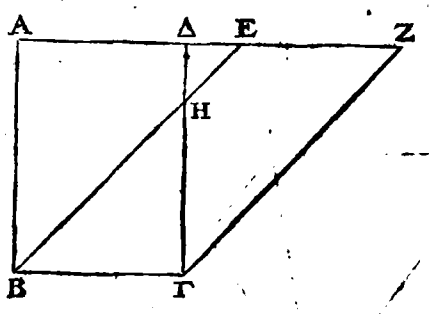
Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΖ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΕΒΓΖ.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, τῇ ΒΓ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ ἴση ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΕΖ ἴση ἐστί. κοινὴ ἡ ΔΕ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΕ ὅλῃ τῇ ΔΖ ἐστιν ἴση. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΑΒ

τῇ

τῇ ΔΓ ἴση· δύο δὴ αἱ ΕΑ, ΑΒ δυσὶ ταῖς ΖΔ, ΔΓ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΔΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΒ ἴση ἐστὶν, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντός· βάσις ἄρα ἡ ΕΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΕΑΒ τρίγωνον τῷ ΖΔΓ τριγώνῳ ἴσον ἐστί. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΔΗΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒΗΔ τραπέζιον λοιπῷ τῷ ΕΗΓΖ τραπεζίῳ ἴσον ἐστί. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΗΒΓ τρίγωνον· ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ὅλῳ τῷ ΕΒΓΖ παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστί.



Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

& AB [per 34. prop.] æqualis ΔΓ; ergo duæ EA, AB duabus ZΔ, ΔΓ ſunt æquales, altera alteri, & angulus ZΔΓ [per 29. prop.] æqualis angulo EAB, exterior interiori: baſis igitur EB [per 4. prop.] baſi ZΓ eſt æqualis; & triangulum EAB æquale triangulo ZΔΓ. commune auferatur ΔHE: reliquum igitur trapezium ABHΔ [per 3. ax.] reliquo trapezio EHΓZ eſt æquale. commune addatur HBΓ triangulum: ergo totum parallelogrammum ABΓΔ toti parallelogrammo EBΓZ æquale erit.

Parallelogramma igitur, ſuper eadem baſi & in eiſdem parallelis conſtituta, ſunt inter ſe æqualia. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ'.

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

PROP. XXXVI. THEOR.

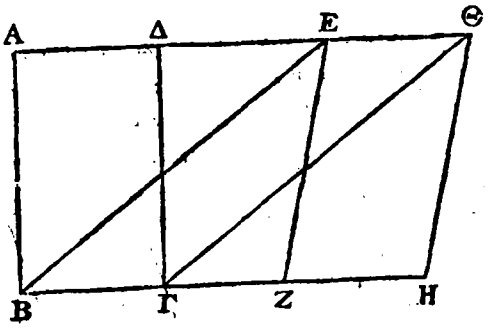
Parallelogramma, ſuper æqualibus baſibus & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

Ἐστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΒΓ, ΖΗ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΘ, ΒΗ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΗ, ἀλλὰ καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΕΘ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα τῇ ΕΘ ἐστὶν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ παράλληλοι καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΒΕ, ΓΘ, αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι· καὶ αἱ ΕΒ, ΓΘ ἄρα ἴσαι τέ εἰσι καὶ παράλληλοι· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΓΘ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΑΒΓΔ· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει τὴν ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶν αὐτῷ, ταῖς ΒΓ, ΑΘ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΖΗΘ τῷ αὐτῷ τῷ ΕΒΓΘ ἐστὶν ἴσον· ὥστε καὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ ἴσον ἐστί.

Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



SInt parallelogramma ABΓΔ, EZHΘ ſuper æqualibus baſibus BΓ, ZH & in eiſdem parallelis AΘ, BH conſtituta: dico parallelogrammum ABΓΔ parallelogrammo EZHΘ eſſe æquale.

Conjungantur enim BE, ΓΘ.

Et quoniam æqualis eſt BΓ ipſi ZH, & ZH ipſi EΘ; erit & BΓ ipſi EΘ æqualis. ſunt autem & parallelæ & ipſas conjungunt BE, ΓΘ; quæ autem æquales & parallelas ad eaſdem partes conjungunt [per 33. prop.] ſunt æquales & parallelæ: ergo BE, ΓΘ & æquales ſunt & parallelæ: quare EBΓΘ parallelogrammum eſt, & [per 35. prop.] æquale parallelogrammo ABΓΔ; baſim enim eandem habet BΓ & in eiſdem parallelis BΓ, AΘ conſtituitur. ſimili ratione & EZHΘ eidem EBΓΘ eſt æquale: ergo & parallelogrammum ABΓΔ eſt æquale parallelogrammo EZHΘ.

Parallelogramma igitur, ſuper æqualibus baſibus & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ'.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

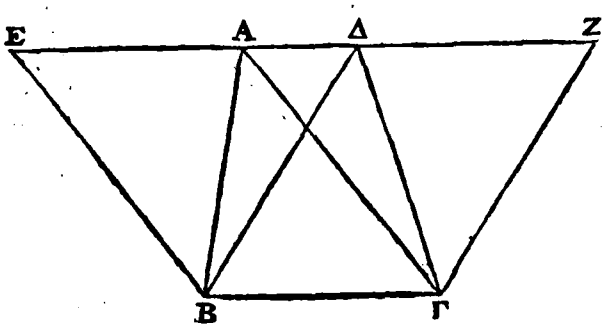
PROP. XXXVII. THEOR.

Triangula, ſuper eadem baſi & in eiſdem parallelis conſtituta, ſunt inter ſe æqualia.

Ἐστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις τῇ ΑΔ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ.

SInt triangula ABΓ, ΔBΓ ſuper eadem baſi BΓ & in eiſdem parallelis AΔ, BΓ conſtituta: dico triangulum ABΓ triangulo ΔBΓ eſſe æquale.

Producatur A Δ ex utraque parte in E, Z puncta, & per B quidem ipſi Γ A [per 31. prop.] parallela ducatur B E, per Γ vero ipſi B Δ parallela ducatur Γ Z.



Parallelogrammum igitur eſt utrumq; ipſorum E B Γ A, Δ B Γ Z: & parallelogrammum E B Γ A [per 35. prop.] eſt æquale parallelogrammo Δ B Γ Z; etenim ſuper eadem ſunt baſi B Γ & in eiſdem parallelis B Γ, E Z: eſtque parallelogrammi quidem E B Γ A dimidium A B Γ triangulum; diameter enim A B ipſum bifariam ſecat: parallelogrammi vero Δ B Γ Z dimidium triangulum Δ B Γ; diameter enim Δ Γ [per 34. prop.] ipſum bifariam ſecat. æqualium autem dimidia inter ſe ſunt æqualia: ergo triangulum A B Γ triangulo Δ B Γ eſt æquale.

Triangula igitur, ſuper eadem baſi & in eiſdem parallelis conſtituta, ſunt inter ſe æqualia. quod erat demonſtrandum.

Ἐκβεβλήθω ἡ Α Δ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Ε, Ζ σημεῖα, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ Γ Α παράλληλος ἤχθω ἡ Β Ε, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ Β Δ παράλληλος ἤχθω ἡ Γ Ζ.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν Ε Β Γ Α, Δ Β Γ Ζ· ἔστι δὲ τὸ Ε Β Γ Α τῷ Δ Β Γ Ζ, ὅτι τε γὰρ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τῆς Β Γ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς Β Γ, Ε Ζ· ἔστι δὲ τοῦ μὲν Ε Β Γ Α παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ Α Β Γ τρίγωνον, ἡ γὰρ Α Β διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ Δ Β Γ Ζ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ Δ Β Γ τρίγωνον, ἡ γὰρ Δ Γ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Α Β Γ τρίγωνον τῷ Δ Β Γ τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXVIII. Theor.

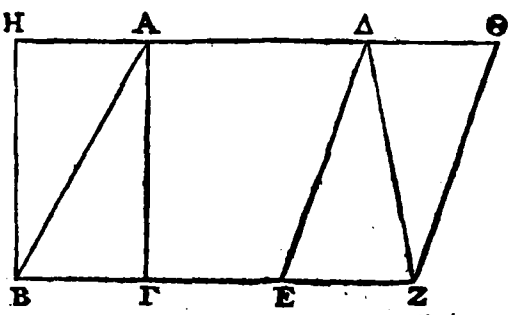
Triangula, ſuper baſibus æqualibus & in eiſdem parallelis conſtituta, ſunt inter ſe æqualia.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη'.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν.

SInt triangula A B Γ, Δ E Z ſuper æqualibus baſibus B Γ, E Z & in eiſdem parallelis B Z, A Δ conſtituta: dico A B Γ triangulum eſſe æquale triangulo Δ E Z.

Producatur enim A Δ ex utraque parte in H, Θ puncta, & per B quidem ipſi Γ A [per 31. prop.] parallela ducatur B H, per Z vero ducatur Z Θ parallela ipſi Δ E.



Parallelogrammum igitur eſt utrumque ipſorum H B Γ A, Δ E Z Θ: atque eſt H B Γ A [per 36. prop.] æquale Δ E Z Θ; ſuper æqualibus enim ſunt baſibus B Γ, E Z & in eiſdem parallelis B Z, H Θ: parallelogrammi vero H B Γ A dimidium eſt A B Γ triangulum, nam [per 34. prop.] diameter A B ipſum bifariam ſecat: & parallelogrammi Δ E Z Θ dimidium eſt triangulum Z E Δ; diameter enim Δ Z ipſum ſecat bifariam. æqualium autem dimidia ſunt inter ſe æqualia: ergo A B Γ triangulum triangulo Δ E Z eſt æquale.

Triangula igitur, ſuper æqualibus baſibus & in eiſdem parallelis conſtituta, ſunt inter ſe æqualia. quod erat demonſtrandum.

Ἔστω τρίγωνα Α Β Γ, Δ Ε Ζ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν Β Γ, Ε Ζ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς Β Ζ, Α Δ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Α Β Γ τρίγωνον τῷ Δ Ε Ζ τριγώνῳ.

Ἐκβεβλήθω γὰρ ἡ Α Δ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Η, Θ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ Γ Α παράλληλος ἤχθω ἡ Β Η, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ Δ Ε παράλληλος ἤχθω ἡ Ζ Θ.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν Η Β Γ Α, Δ Ε Ζ Θ· καὶ ἴσον τὸ Η Β Γ Α τῷ Δ Ε Ζ Θ, ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν Β Γ, Ε Ζ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς Β Ζ, Η Θ· καὶ ἔστι τοῦ μὲν Η Β Γ Α παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ Α Β Γ τρίγωνον, ἡ γὰρ Α Β διάμετρος δίχα αὐτὸ τέμνει· τοῦ δὲ Δ Ε Ζ Θ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ Ζ Ε Δ τρίγωνον, ἡ γὰρ Ζ Δ διάμετρος δίχα αὐτὸ τέμνει. τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Α Β Γ τρίγωνον τῷ Δ Ε Ζ τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

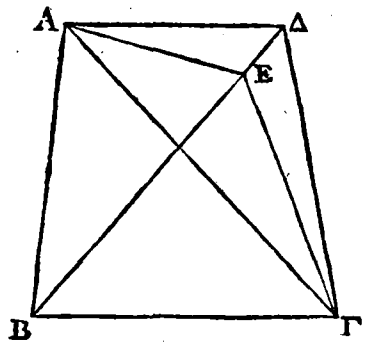
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ'.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνα ἴσα τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς ΒΓ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· λέγω ὅτι ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ.

Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ εὐθεῖα παράλληλος ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ.

Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῇ ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΕ. ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τῷ ΔΒΓ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΔΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΕΒΓ ἴσον ἐστίν, τὸ μεῖζον τῷ ἐλάττονι, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ· ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶ παράλληλος.



Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXXIX. THEOR.

Triangula æqualia, ſuper eadem baſi & ad eaſdem partes conſtituta, ſunt in eiſdem parallelis.

SInt æqualia triangula ABΓ, ΔBΓ, ſuper eadem baſi BΓ conſtituta & ad eaſdem partes: dico in eiſdem eſſe parallelis. ducatur enim AΔ: dico AΔ parallelam eſſe BΓ.

Si enim non, ducatur per A punctum [per 31. prop.] rectæ BΓ parallela recta AE, & ducatur EΓ.

Æquale igitur eſt [per 37. prop.] ABΓ triangulum triangulo EBΓ; ſuper eadem enim eſt baſi BΓ & in eiſdem parallelis BΓ, AE. ſed [ex hyp.] ABΓ triangulum triangulo ΔBΓ eſt æquale: ergo & triangulum ΔBΓ æquale eſt ipſi EBΓ triangulo, majus minori, quod fieri non poteſt: non eſt igitur AE ipſi BΓ parallela. ſimiliter oſtendemus neque ullam aliam parallelam eſſe præter ipſam AΔ: ergo AΔ ipſi BΓ eſt parallela.

Triangula igitur æqualia, ſuper eadem baſi & ad eaſdem partes conſtituta, ſunt in eiſdem parallelis. quod erat demonſtrandum.

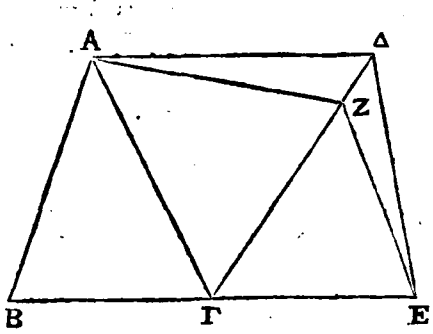
ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνα ἴσα τὰ ΑΒΓ, ΓΔΕ, ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν ΒΓ, ΓΕ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· λέγω ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΒΕ.

Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ Α τῇ ΒΕ παράλληλος ἡ ΖΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΕ.

Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΓΕ τριγώνῳ· ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΓ, ΓΕ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΕ, ΑΖ. ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΓΕ τριγώνῳ· καὶ τὸ ΔΓΕ τρίγωνον ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΖΓΕ τριγώνῳ, τὸ μεῖζον τῷ ἐλάσσονι, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΒΕ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ· ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΕ παράλληλός ἐστι.



Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστι παραλλήλοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XL. THEOR.

Triangula æqualia, ſuper baſibus æqualibus & ad eaſdem partes conſtituta, ſunt in eiſdem parallelis.

SInt triangula æqualia ABΓ, ΓΔE, ſuper æqualibus baſibus BΓ, ΓE & ad eaſdem partes conſtituta: dico etiam in eiſdem eſſe parallelis. ducatur enim AΔ: dico AΔ ipſi BE parallelam eſſe.

Nam ſi non eſt, ducatur per A ipſi BE parallela ZA, & ZE ducatur.

Triangulum igitur ABΓ [per 38 prop.] triangulo ZΓE eſt æquale; nam & ſuper æqualibus baſibus BΓ, ΓE & in eiſdem parallelis BE, AZ conſtituuntur. ſed triangulum ABΓ æquale eſt triangulo ΔΓE: ergo & triangulum ΔΓE triangulo ZΓB æquale erit, majus minori, quod fieri non poteſt: non eſt igitur AZ ipſi BE parallela. ſimiliter demonſtrabimus neque ullam aliam parallelam eſſe præter AΔ: ergo AΔ ipſi BE parallela erit.

Æqualia igitur triangula, ſuper baſibus æqualibus & ad eaſdem partes conſtituta, ſunt in eiſdem parallelis. quod erat demonſtrandum.

PROP.

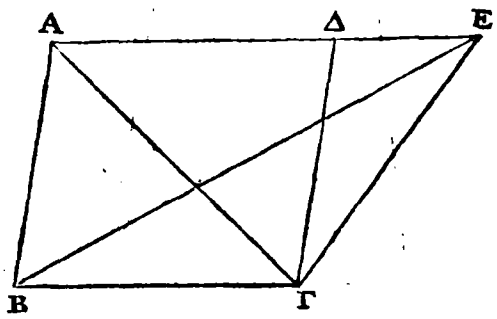
Prop. XLI. Theor.

Si parallelogrammum & triangulum eandem habeant baſim, ſintque in eiſdem parallelis : parallelogrammum ipſius trianguli duplum erit.

PArallelogrammum enim ABΓΔ & triangulum EBΓ baſim habeant eandem BΓ, & ſint in eiſdem parallelis BΓ, AE : dico parallelogrammum ABΓΔ trianguli BEΓ duplum eſſe.

Ducatur enim AΓ.

Triangulum igitur ABΓ triangulo EBΓ [per 37. prop.] eſt æquale; namque ſuper eadem baſi BΓ, & in eiſdem parallelis BΓ, AE conſtituitur. ſed ABΓΔ parallelogrammum duplum eſt trianguli ABΓ, diameter enim AΓ [per 34. prop.] ipſum bifariam ſecat: quare & ABΓΔ parallelogrammum ipſius EBΓ trianguli duplum erit.



Si igitur parallelogrammum & triangulum eandem habeant baſim, & ſint in eiſdem parallelis: parallelogrammum ipſius trianguli duplum erit. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μά.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τὴν αὐτὴν ἔχῃ καὶ τὸν αὐτὸν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ· διπλάσιον ἔσται τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.

ΠΑραλληλόγραμμον γὰρ τὸ ABΓΔ τριγώνῳ τῷ EBΓ βάσιν τὴν αὐτὴν ἐχέτω τὴν αὐτὴν τὴν BΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἔστω παραλλήλοις ταῖς BΓ, AE· λέγω ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ ABΓΔ παραλληλόγραμμον τοῦ BEΓ τριγώνου.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ AΓ.

Ἴσον δή ἐστι τὸ ABΓ τῷ EBΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τῆς BΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς BΓ, AE. ἀλλὰ τὸ ABΓΔ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ABΓ τριγώνου, ἡ γὰρ AΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· ὥστε τὸ ABΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τοῦ EBΓ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον.

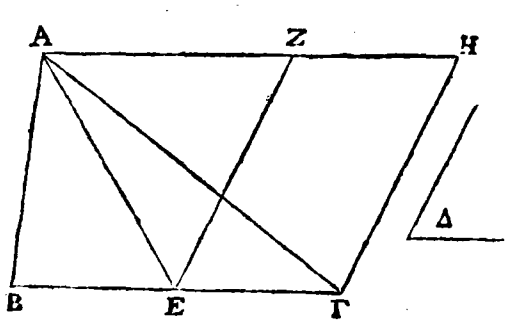
Ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τὴν αὐτὴν ἔχῃ καὶ τὸν αὐτὸν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ· διπλάσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XLII. Probl.

Dato triangulo æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo.

SIT datum triangulum ABΓ, datus autem rectilineus angulus Δ: oportet itaque dato triangulo ABΓ æquale parallelogrammum conſtituere in angulo rectilineo ipſi Δ æquali.

Secetur BΓ [per 10. prop.] bifariam in E, & ducatur AE, & ad rectam lineam EΓ atque ad punctum in ea E conſtituatur [per 23. prop.] angulus ΓEZ æqualis ipſi Δ, & per A quidem ipſi EΓ [per 31. prop.] parallela ducatur AH, per Γ vero ipſi ZE ducatur parallela ΓH: parallelogrammum igitur eſt ZEΓH.



Et quoniam BE eſt æqualis EΓ, erit & ABE triangulum [per 38. prop.] triangulo AEΓ æquale; ſuper æqualibus enim ſunt baſibus BE, EΓ, & in eiſdem parallelis BΓ, AH: ergo triangulum ABΓ trianguli AEΓ eſt duplum. eſt autem [per 41. prop.] parallelogrammum ZEΓH duplum

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ'.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι *ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

ΕΣτω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον τὸ ABΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία Δ· δεῖ δὴ τῷ ABΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν ἴσῃ τῇ Δ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Τετμήσθω ἡ BΓ δίχα κατὰ τὸ E, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AE, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ EΓ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ E τῇ Δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΓEZ, καὶ διὰ μὲν τοῦ A τῇ EΓ παράλληλος ἤχθω ἡ AH, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ZE παράλληλος ἤχθω ἡ ΓH· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ZEΓH.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ BE τῇ EΓ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ABE τρίγωνον τῷ AEΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσὶ τῶν BE, EΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς BΓ, AH· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓ τοῦ AEΓ τριγώνου. ἔστι δὲ καὶ τὸ ZEΓH παραλληλόγραμμον

* Legendum videtur, ἐν ἴσῃ τῇ δοθείσῃ, ſic *Proclus* in 44. prop.

μον

μεν διαλάσιον τῷ ΑΕΓ τριγώνῳ. βάσιν τε γὰρ αὐτὸ τὴν αὐτὴν ἔχει καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστιν αὐτῷ παραλλήλοις· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, καὶ ἔχει τὴν ὑπὸ ΓΕΖ γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ Δ.

Τῷ ἄρα δοθέντι τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ ἴσον παραλληλόγραμμον συνέσταται τὸ ΖΕΓΗ, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΕΖ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

trianguli ΑΒΓ; baſim enim eandem habet, & in eiſdem eſt parallelis: æquale igitur eſt [per 6. ax.] ΖΕΓΗ parallelogrammum triangulo ΑΒΓ, habetque ΓΕΖ angulum æqualem angulo dato Δ.

Dato igitur triangulo ΑΒΓ æquale parallelogrammum ΖΕΓΗ conſtitutum eſt, in angulo ΓΕΖ, qui angulo Δ eſt æqualis. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ'.

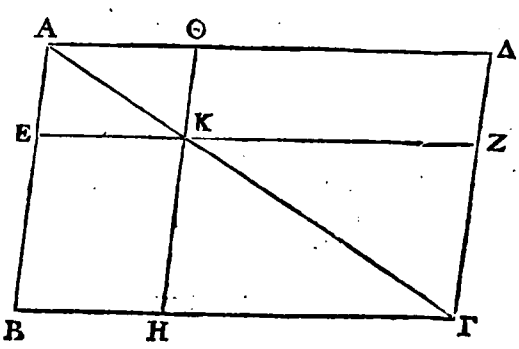
Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογραμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Prop. XLIII. Theor.

In omni parallelogrammo complementa eorum quæ circa diametrum ſunt parallelogrammorum inter ſe ſunt æqualia.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ ΕΘ, ΖΗ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΒΚ, ΚΔ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΚ παραπλήρωμα τῷ ΚΔ παραπληρώματι.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ ΕΚΘΑ παραλληλόγραμμόν ἐστι, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΚ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΚΖΓ τρίγωνον τῷ ΚΗΓ ἐστὶν ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΚΖΓ τῷ ΚΗΓ, τὸ ΑΕΚ τρίγωνον μετὰ τοῦ ΚΗΓ ἐστὶν ἴσον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ μετὰ τοῦ ΚΖΓ τριγώνου· ἔστι δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὅλῳ τῷ ΑΔΓ ἴσον· λοιπῷ ἄρα τῷ ΚΔ παραπληρώματι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΚ παραπλήρωμα.



Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογραμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SIT parallelogrammum ΑΒΓΔ, cujus diameter ΑΓ, & circa ipſam ΑΓ parallelogramma quidem ſint ΕΘ, ΖΗ, quæ vero dicuntur complementa ΒΚ, ΚΔ: dico ΒΚ complementum complemento ΚΔ eſſe æquale.

Quoniam enim parallelogrammum eſt ΑΒΓΔ, & ejus diameter ΑΓ, æquale eſt [per 34. prop.] triangulum ΑΒΓ triangulo ΑΔΓ. rurſus, quoniam ΕΚΘΑ parallelogrammum eſt, cujus diameter ΑΚ, triangulum ΑΕΚ triangulo ΑΘΚ æquale erit. eadem etiam ratione & triangulum ΚΖΓ triangulo ΚΗΓ eſt æquale. cum igitur triangulum quidem ΑΕΚ æquale ſit triangulo ΑΘΚ, triangulum vero ΚΖΓ ipſi ΚΗΓ, triangulum ΑΕΚ una cum triangulo ΚΗΓ æquale eſt triangulo ΑΘΚ una cum ΚΖΓ triangulo: eſt autem & totum triangulum ΑΒΓ æquale toti ΑΔΓ: reliquum igitur ΒΚ complementum [per 3. ax.] reliquo complemento ΚΔ eſt æquale.

In omni igitur parallelogrammo complementa eorum quæ circa diametrum ſunt parallelogrammorum inter ſe ſunt æqualia. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ'.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, * ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Prop. XLIV. Probl.

Ad datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare, in dato angulo rectilineo.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ Γ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ, τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐν ἴσῃ τῇ Δ γωνίᾳ.

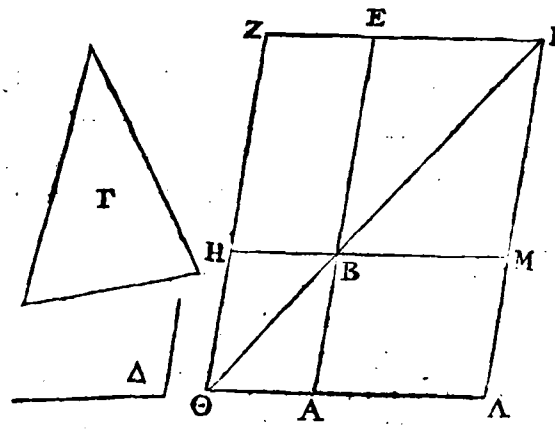
Συνεστάτω τῷ Γ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕΖΗ, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΒΗ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ· καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΒΕ τῇ

SIT data quidem recta linea ΑΒ, datum vero triangulum Γ, & datus angulus rectilineus Δ: oportet quidem ad datam rectam lineam ΑΒ, dato triangulo Γ æquale parallelogrammum applicare, in angulo ipſi Δ æquali.

Conſtituatur [per 42. prop.] triangulo Γ æquale parallelogrammum ΒΕΖΗ, in angulo ΕΒΗ, qui eſt æqualis angulo Δ; & ponatur ΒΕ in di-

* ἐν γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ δοθείσῃ. Procli.

rectum ipſi AB, producaturque ZH ad Θ, & per A alterutri ipſarum BH, EZ [per 31. prop.] parallela ducatur AΘ, & jungatur ΘB. & quoniam in parallelas AΘ, EZ recta linea ΘZ incidit, anguli AΘZ, ΘZE [per 29. prop.] duobus rectis ſunt æquales; quare BΘH, HZE duobus rectis ſunt minores: quæ vero à minoribus, quàm ſunt duo recti, in infinitum producuntur [per 11. ax.] conveniunt inter ſe: ergo ΘB, ZE productæ convenient. producantur [per 2. poſt.] & conveniant in K; perque K alterutri ipſarum EA, ZΘ [per 31. prop.] parallela ducatur KA; & AΘ, HB ad Λ, M puncta producantur.



Parallelogrammum igitur eſt ΘΛKZ, cujus diameter ΘK, & circa ΘK parallelogramma quidem ſunt AH, ME; ea vero quæ dicuntur complementa ΛB, BZ: ergo [per 43. prop.] AB ipſi BZ eſt æquale. eſt autem BZ æquale triangulo Γ: quare & ΛB triangulo Γ æquale erit. & quoniam HBE angulus æqualis eſt [per 15. prop.] angulo ABM, & æqualis eſt etiam HBE angulo Δ: erit & angulus ABM angulo Δ æqualis.

Ad datam igitur rectam lineam AB, dato triangulo Γ æquale parallelogrammum conſtituitur AB, in angulo ABM, qui eſt æqualis angulo Δ. quod erat faciendum.

AB. Ἤχθω ἡ ZH ἐπὶ τὸ Θ, καὶ διὰ μὲν τοῦ A ὁποτέρᾳ τῶν BH, EZ παράλληλος ἤχθω ἡ AΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘB. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς AΘ, EZ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΘZ, αἱ ἄρα ὑπὸ AΘZ, ΘZE γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ BΘH, HZE δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν· αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων, ἢ δύο ὀρθῶν, εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ ΘB, ZE ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ K, καὶ διὰ τοῦ K σημείου ὁποτέρᾳ τῶν EA, ZΘ παράλληλος ἤχθω ἡ KΛ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΘA, HB ἐπὶ τὰ Λ, M σημεῖα.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΛKZ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΘK, περὶ δὲ τὴν ΘK παραλληλόγραμμα μέν ἐστι τὰ AH, ME, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα ΛB, BZ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛB τῷ BZ. ἀλλὰ καὶ τὸ BZ τῷ Γ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΛB ἄρα τῷ Γ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ HBE γωνία τῇ ὑπὸ ABM, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ HBE τῇ Δ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ABM τῇ Δ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν AB, τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΛB, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ABM, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. XLV. PROBL.

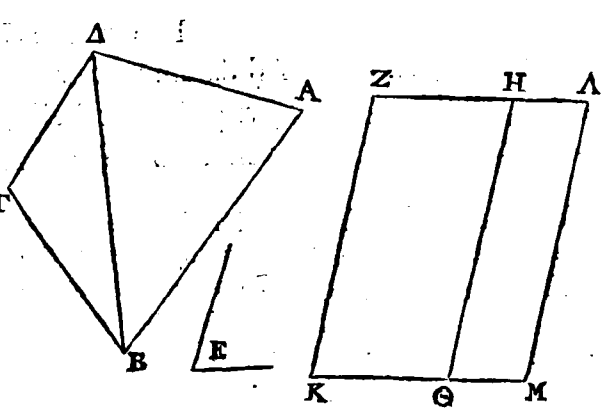
Rectilineo dato æquale parallelogrammum conſtituere, in dato angulo rectilineo.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ με'.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

SIT datum rectilineum ABΓΔ, datus vero angulus rectilineus E: oportet rectilineo ABΓΔ æquale parallelogrammum conſtituere, in angulo ipſi E æquali.

Ducatur enim ΔB, & conſtituatur [per 42. prop.] triangulo AΔB æquale parallelogrammum ZΘ, in angulo ΘKZ, qui eſt æqualis angulo E: deinde ad rectam lineam HΘ applicetur triangulo ΔBΓ æquale parallelogrammum HM, in angulo HΘM, qui angulo E eſt æqualis.



Et quoniam angulus E æqualis eſt utrique ipſorum ΘKZ, HΘM: erit & ΘKZ angulo HΘM æqualis. communis addatur KΘH: angu-

ΕΣτω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ABΓΔ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ E· δεῖ δὴ τῷ ABΓΔ εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν ἴσῃ γωνίᾳ τῇ E.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΔB, καὶ συνεστάτω τῷ ABΔ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ZΘ, ἐν τῇ ὑπὸ ΘKZ γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ E· καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν HΘ εὐθεῖαν τῷ ΔBΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ HM, ἐν τῇ ὑπὸ HΘM γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ E.

Καὶ ἐπεὶ ἡ E γωνία ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘKZ, HΘM ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ἄρα ὑπὸ ΘKZ τῇ ὑπὸ HΘM ἴση ἐστίν. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ KΘH· αἱ ἄρα ὑπὸ

ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ τῇ ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΘΜ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΘΜ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΗΘ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ, δύο εὐθεῖαι αἱ ΚΘ, ΘΜ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν, ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ τῇ ΘΜ. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΚΜ, ΖΗ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘΗ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΖ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΘΗΛ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ ταῖς ὑπὸ ΘΗΖ, ΘΗΛ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, καὶ αἱ ὑπὸ ΘΗΖ, ΘΗΛ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΛ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΚΖ τῇ ΘΗ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΜΛ, καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῇ ΜΛ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν· καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ ΚΜ, ΖΛ, καὶ αἱ ΚΜ, ΖΛ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΖΛΜ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΘΖ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ ΑΒΓ τῷ ΗΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ εὐθύγραμμον ὅλῳ τῷ ΚΖΛΜ παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστί.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΑΒΓΔ ἴσον παραλληλόγραμμον συνέστηται τὸ ΚΖΛΜ, ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΚΜ, ἥ ἐστιν ἴση δοθείσῃ τῇ Ε. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

li igitur ΖΚΘ, ΚΘΗ [angulis ΚΘΗ, ΗΘΜ] sunt æquales. sed ΖΚΘ, ΚΘΗ [per 29. prop.] sunt æquales duobus rectis: ergo & ΚΘΗ, ΗΘΜ duobus rectis æquales erunt. itaque quoniam ad rectam lineam ΗΘ, & ad punctum in ea Θ, duæ rectæ lineæ ΚΘ, ΘΜ, non ad easdem partes positæ, angulos deinceps duobus rectis æquales efficiunt, [per 14. prop.] in directum est ΚΘ ipsi ΘΜ. & quoniam in parallelas ΚΜ, ΖΗ recta linea ΘΗ incidit, alterni anguli ΜΘΗ, ΘΗΖ [per 29. prop.] æquales sunt. communis addatur ΘΗΛ: anguli igitur ΜΘΗ, ΘΗΛ angulis ΘΗΖ, ΘΗΛ sunt æquales. at anguli ΜΘΗ, ΘΗΛ [per 29. prop.] sunt æquales duobus rectis: quare & anguli ΘΗΖ, ΘΗΛ duobus rectis æquales erunt: in directum igitur est ΖΗ ipsi ΗΛ. & quoniam ΚΖ ipsi ΘΗ & æqualis est & parallela, & ΘΗ etiam ipsi ΜΛ, erit [per 1. ax. & 30. prop.] ΚΖ ipsi ΜΛ & æqualis & parallela; ipsasque conjungunt rectæ lineæ ΚΜ, ΖΛ: ergo & ΚΜ, ΖΛ [per 33. prop.] sunt æquales & parallelæ: parallelogrammum igitur est ΚΖΛΜ, cum autem triangulum quidem ΑΒΔ æquale sit parallelogrammo ΘΖ, triangulum vero ΑΒΓ parallelogrammo ΗΜ; erit totum ΑΒΓΔ rectilineum toti parallelogrammo ΚΖΛΜ æquale.

Dato igitur rectilineo ΑΒΓΔ æquale parallelogrammum constitutum est ΚΖΛΜ, in angulo ΖΚΜ, qui est æqualis angulo Ε dato. quod erat faciendum.

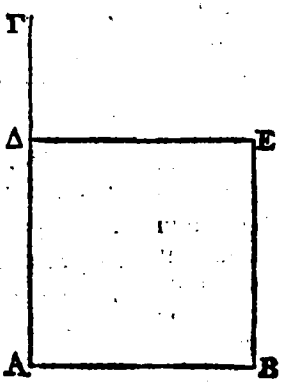
ΠΡΟΤΑΣΙΣ μς'.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Prop. XLVI. Probl.

A data recta linea quadratum describere.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.



Ἤχθω τῇ ΑΒ εὐθείᾳ, ἀπὸ δὲ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ Α, πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΓ· καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ σημείου τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕ· διὰ δὲ τοῦ Β σημείου τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΕ.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΒΕ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση, αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΔ, ΔΕ, ΒΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ παραλληλόγραμμον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΒ, ΔΕ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΑΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΔΕ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΕ. τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ ΑΒΕ, ΒΕΔ γωνιῶν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον.

Τετράγωνον ἄρα ἐστί, καὶ ἔστιν ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας ἀναγεγραμμένον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

SIT data recta linea ΑΒ: oportet ab ipsa ΑΒ quadratum describere.

Ducatur [per 11. prop.] rectæ lineæ ΑΒ, à puncto in ea dato Α, ad rectos angulos ΑΓ; & ipsi ΑΒ æqualis [per 3. prop.] ponatur ΑΔ; perque punctum Δ ducatur [per 31. prop.] ΔΕ ipsi ΑΒ parallela; & per Β ipsi ΑΔ parallela ducatur ΒΕ.

Parallelogrammum igitur est ΑΔΕΒ. ideo & ΑΒ quidem est æqualis ΔΕ, ΑΔ vero ipsi ΒΕ. sed & ΑΒ ipsi ΑΔ est æqualis: quatuor igitur ΒΑ, ΑΔ, ΔΕ, ΕΒ inter se sunt æquales: ideoque æquilaterum est ΑΔΕΒ parallelogrammum. dico etiam rectangulum esse. quoniam enim in parallelas ΑΒ, ΔΕ recta linea incidit ΑΔ: anguli ΒΑΔ, ΑΔΕ [per 29. prop.] duobus rectis sunt æquales. rectus autem est [per constructionem] ΒΑΔ: ergo & ΑΔΕ rectus erit. parallelogrammorum autem tam latera quam anguli oppositi [per 34. prop.] æquantur: rectus igitur est uterque oppositorum ΑΒΕ, ΒΕΔ angulorum; & ob id rectangulum est ΑΔΕΒ. ostensum autem est & æquilaterum esse.

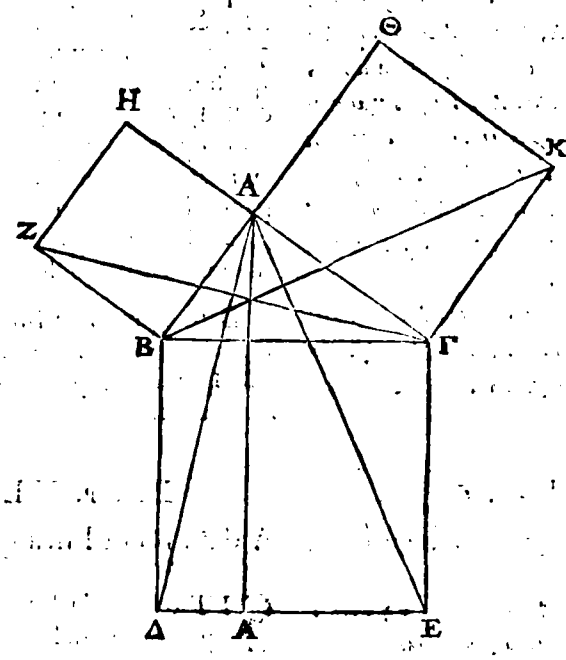
Quadratum igitur sit necesse est; atque à recta linea ΑΒ describitur. quod erat faciendum.

PROP. XLVII. THEOR.

In rectangulis triangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur, æquale eſt quadratis, quæ à lateribus rectum angulum comprehendentibus deſcribuntur.

SIT triangulum rectangulum ABΓ, rectum habens BAΓ angulum: dico quadratum, deſcriptum à recta BΓ, æquale eſſe quadratis, quæ ab ipſis BA, AΓ deſcribuntur.

Deſcribatur enim à BΓ quidem quadratum BΔEΓ; ab ipſis vero BA, AΓ quadrata HB, ΘΓ; perque A alterutri ipſarum BΔ, ΓE parallela ducatur AΛ; & ducantur AΔ, ZΓ.



Quoniam igitur uterque angulorum BAΓ, BAH rectus eſt; & ad eandem rectam lineam BA, & ad punctum in ea A, duæ rectæ lineæ AΓ, AH, non ad eaſdem partes poſitæ, faciunt angulos deinceps duobus rectis æquales: ΓA recta eſt in directum ipſi AH. eadem ratione, & AB eſt in directum ipſi AΘ. & quoniam angulus ΔBΓ [per 10. ax.] eſt æqualis angulo ZBA, rectus enim eſt uterque, communis addatur ABΓ: totus igitur ΔBA angulus toti ZBΓ eſt æqualis. cum autem duæ ΔB, BA duabus ΓB, BZ ſint æquales, altera alteri, & angulus ΔBA æqualis angulo ZBΓ: erit [per 4. prop.] & baſis AΔ baſi ZΓ æqualis, & ABΔ triangulum triangulo ZBΓ æquale. eſtque trianguli quidem ABΔ [per 41. prop.] duplum BΛ parallelogrammum; baſim enim eandem habent BΔ, & ſunt in eiſdem parallelis BΔ, AΛ: trianguli vero ZBΓ duplum eſt HB quadratum; rurſus enim baſim habent eandem ZB, & ſunt in eiſdem parallelis ZB, HΓ; æqualium autem dupla ſunt inter ſe æqualia: æquale eſt igitur parallelogrammum BΛ ipſi HB quadrato. ſimiliter, ductis AE, BK, oſtendetur etiam ΓΛ parallelogrammum æquale quadrato ΘΓ: totum igitur BΔEΓ quadratum duobus quadratis HB, ΘΓ eſt æquale. & eſt quidem BΔEΓ quadratum à recta linea BΓ deſcriptum; quadrata vero HB, ΘΓ ab ipſis BA, AΓ: quadratum igitur BE, à latere BΓ deſcriptum, æquale eſt quadratis, quæ deſcribuntur à lateribus BA, AΓ.

Ergo in rectangulis triangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur, æquale eſt quadratis, quæ à lateribus rectum angulum comprehendentibus deſcribuntur. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν, τετραγώνοις.

ΕΣται τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ABΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ BAΓ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς BΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν BA, AΓ τετραγώνοις.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς BΓ τετράγωνον τὸ BΔEΓ· ἀπὸ δὲ τῶν BA, AΓ τὰ HB, ΘΓ· καὶ ἤχθω διὰ τοῦ A ὁποτέρᾳ τῶν BΔ, ΓE παράλληλος ἤχθω ἡ AΛ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AΔ, ZΓ.

Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ BAΓ, BAH γωνιῶν· πρὸς δή τινι τῇ BA, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A, δύο εὐθεῖαι αἱ AΓ, AH, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓA τῇ AH. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ AB τῇ AΘ ἐστιν ἐπ' εὐθείας. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔBΓ γωνία τῇ ὑπὸ ZBA, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ABΓ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔBA ὅλῃ τῇ ὑπὸ ZBΓ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΔB, BA δυσὶ ταῖς ΓB, BZ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔBA γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ZBΓ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ AΔ βάσει τῇ ZΓ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ABΔ τρίγωνον τῷ ZBΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἔστι μὲν τοῦ ABΔ τριγώνου διπλάσιον τὸ BΛ παραλληλόγραμμον, βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν BΔ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσὶ παραλλήλοις ταῖς BΔ, AΛ· ἔστι δὲ τοῦ ZBΓ τριγώνου διπλάσιον τὸ HB τετράγωνον, βάσιν τε πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ZB καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις εἰσὶ ταῖς ZB, HΓ· τὰ δὲ τοῖς ἴσων διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ BΛ παραλληλόγραμμον τῷ HB τετραγώνῳ. ὁμοίως δὴ, ἐπιζευγνυμένων τῶν AE, BK, δειχθήσεται καὶ τὸ ΓΛ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΘΓ τετραγώνῳ· ὅλον ἄρα τὸ ΔBΓE τετράγωνον δυσὶ τοῖς HB, ΘΓ τετραγώνοις ἴσον ἐστί. καὶ ἔστι τὸ μὲν BΔEΓ τετράγωνον ἀπὸ τῆς BΓ ἀναγραφέν, τὰ δὲ HB, ΘΓ ἀπὸ τῶν BA, AΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς BΓ πλευρᾶς τετράγωνον BE ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν BA, AΓ πλευρῶν τετραγώνοις.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

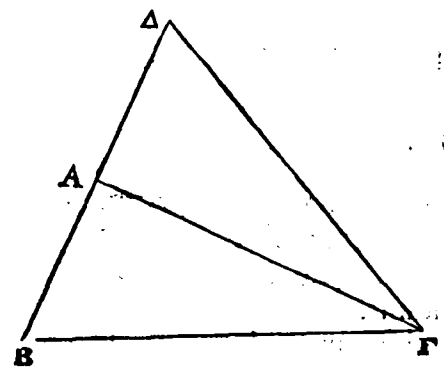
ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μή.

Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις· ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστι.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις· λέγω ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα ἡ ΑΔ, καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ, ὀρθὴ γὰρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ὑπόκειται γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΔΓ τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΑΔ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΒΑ, ΑΓ ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἐστὶν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις· ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XLVIII. Theor.

Si quadratum, quod describitur ab uno laterum trianguli, æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur: angulus à reliquis duobus trianguli lateribus comprehensus rectus erit.

Trianguli enim ΑΒΓ quod ab uno latere ΒΓ describitur quadratum æquale sit quadratis quæ à reliquis trianguli lateribus ΒΑ, ΑΓ describuntur: dico angulum ΒΑΓ rectum esse.

Ducatur enim [per 11. prop.] à puncto Α ipsi ΑΓ ad rectos angulos ΑΔ, ponaturque ΑΔ ipsi ΒΑ æqualis, & ducatur ΔΓ.

Quoniam igitur ΔΑ est æqualis ΑΒ; erit & quadratum, quod describitur ex ΔΑ, æquale quadrato rectæ ΑΒ. commune addatur quadratum. quod ex ΑΓ: ergo quadrata quæ ex ΔΑ, ΑΓ æqualia sunt quadratis quæ ex ΒΑ, ΑΓ describuntur. sed quadratis quidem quæ ex ΔΑ, ΑΓ æquale est [per 47. prop.] quod ex ΔΓ quadratum, rectus enim angulus est ΔΑΓ; quadratis vero quæ ex ΒΑ, ΑΓ æquale ponitur quadratum quod ex ΒΓ: quadratum igitur quod ex ΔΓ æquale est ei quod ex ΒΓ quadrato: ergo & latus ΔΓ lateri ΓΒ est æquale. & quoniam ΑΔ est æqualis ΑΒ, communis autem ΑΓ; duæ ΑΔ, ΑΓ duabus ΒΑ, ΑΓ æquales sunt; & basis ΔΓ est æqualis basi ΓΒ: angulus igitur ΔΑΓ [per 8. prop.] angulo ΒΑΓ est æqualis. rectus autem est ΔΑΓ: ergo & ΒΑΓ rectus erit.

Si igitur quadratum, quod describitur ab uno laterum trianguli, æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur: angulus à reliquis duobus trianguli lateribus comprehensus rectus erit. quod erat demonstrandum.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SECUNDUS.

DEFINITIONES.

1. OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur ſub duabus rectis lineis, quæ rectum angulum comprehendunt.

2. Omnis parallelogrammi unumquodque eorum quæ circa diametrum ipſius ſunt parallelogrammorum cum duobus complementis Gnomon vocetur.

ΟΡΟΙ.

α'. ΠΑΝ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν.

β'. Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ ἐόντων παραλληλογράμμων ὁποιονοῦν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι γνώμων καλείσθω.

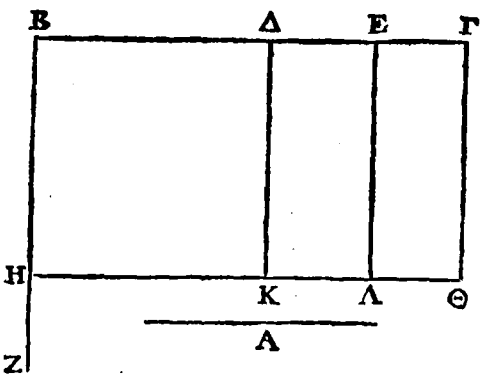
PROPOSITIO I. THEOREMA.

Si ſint duæ rectæ lineæ, altera autem ipſarum ſecta fuerit in quotcunque partes: rectangulum ſub duabus rectis comprehenſum æquale eſt eis rectangulis, quæ ſub recta linea non ſecta & ſingulis alterius ſegmentis comprehenduntur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὅσα δυνατὸν τμήματα· τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τὴν ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

SInt duæ rectæ lineæ A, BΓ, & ſecta ſit BΓ utcunque in punctis Δ, E: dico rectangulum comprehenſum ſub rectis lineis A, BΓ æquale eſſe rectangulo quod continetur ſub A, BΔ, & rectangulo quod ſub A, ΔE, & ei quod ſub A, EΓ continetur.



Ducatur enim [per 11. prop. lib. 1.] à puncto B ipſi BΓ ad rectos angulos BZ, atque ipſi A ponatur æqualis BH, & per H quidem ipſi BΓ [per 31. 1.] parallela ducatur HΘ; per puncta vero Δ, E, Γ ducantur ΔK, EΛ, ΓΘ parallelæ ipſi BH.

Rectangulum igitur BΘ eſt æquale rectangulis BK, ΔΛ, EΘ. atque eſt quidem BΘ rectangulum, quod ſub A, BΓ continetur; etenim con-

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ A, BΓ, καὶ τετμήσθω ἡ BΓ ὡς ἔτυχε κατὰ τὰ Δ, E σημεῖα· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν A, BΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπό τε τῶν A, BΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν A, ΔE, καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ τῶν A, EΓ.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ B τῇ BΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ BZ, καὶ κείσθω τῇ A ἴση ἡ BH, καὶ διὰ μὲν τοῦ H τῇ BΓ παράλληλος ἤχθω ἡ HΘ, διὰ δὲ τῶν Δ, E, Γ τῇ BH παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΔK, EΛ, ΓΘ.

Ἴσον δή ἐστι τὸ BΘ τοῖς BK, ΔΛ, EΘ. καί ἐστι τὸ μὲν BΘ τὸ ὑπὸ τῶν A, BΓ, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν HB,

ΗΒ, ΒΓ, ἴση δὲ ἡ ΒΗ τῇ Α· τὸ δὲ ΒΚ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΔ, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΗΒ, ΒΔ, ἴση δὲ ἡ ΗΒ τῇ Α· τὸ δὲ ΔΛ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ, ἴση γάρ ἡ ΔΚ, τοῦτ' ἔστιν ἡ ΒΗ, τῇ Α· καὶ ἔτι ὁμοίως τὸ ΕΘ τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΕΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ Α, ΒΔ, καὶ τῷ ὑπὸ Α, ΔΕ, καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ Α, ΕΓ.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὅσα δηποτοῦν τμήματα· τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

tinetur ſub ΗΒ, ΒΓ, & ΒΗ ipſi Α eſt æqualis: rectangulum autem ΒΚ eſt quod continetur ſub ipſis Α, ΒΔ; continetur enim ſub ΗΒ, ΒΔ, quarum ΗΒ eſt æqualis Α: & rectangulum ΔΛ eſt quod continetur ſub rectis Α, ΔΕ, quoniam ΔΚ, hoc eſt ΒΗ, ipſi Α eſt æqualis: & ſimiliter rectangulum ΕΘ eſt quod ſub rectis Α, ΕΓ continetur: ergo rectangulum contentum ſub rectis Α, ΒΓ eſt æquale rectangulo contento ſub rectis Α, ΒΔ, & contento ſub rectis Α, ΔΕ, & adhuc contento ſub Α, ΕΓ.

Si igitur ſint duæ rectæ lineæ, quarum altera ſecta fuerit in quotcunque partes: rectangulum ſub duabus rectis lineis comprehenſum eſt æquale eis rectangulis, quæ ſub recta linea non ſecta, & ſingulis alterius ſegmentis comprehenduntur. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

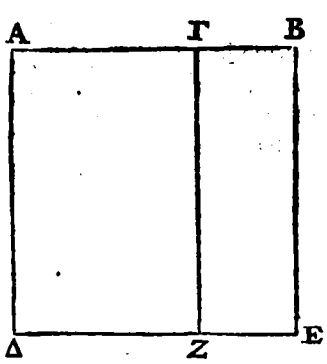
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.

Prop. II. Theor.

Si recta linea ſecetur utcunque, rectangula ſub tota & utroque ſegmento comprehenſa æquantur quadrato totius.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ περιεχομένου ὀρθογωνίου, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνου τὸ ΑΔΕΒ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΕ παράλληλος ἡ ΓΖ.



Ἴσον δή τὸ ΑΕ τοῖς ΑΖ, ΓΕ· καί ἐστι τὸ μὲν ΑΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον, τὸ δὲ ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον· περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ· τὸ δὲ ΓΕ τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΒΕ τῇ ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Recta enim linea ΑΒ ſecetur utcunque in puncto Γ: dico rectangulum quod ſub rectis ΑΒ, ΒΓ comprehenditur, una cum rectangulo comprehenſo ſub ΒΑ, ΑΓ, æquari quadrato rectæ ΑΒ.

Deſcribatur enim [per 46. 1.] ex ΑΒ quadratum ΑΔΕΒ, & per Γ ducatur [per 31. 1.] alterutri ipſarum ΑΔ, ΒΕ parallela ΓΖ.

Eſt igitur ΑΕ æquale rectangulis ΑΖ, ΓΕ: eſt autem ΑΕ quadratum rectæ ΑΒ; ΑΖ vero rectangulum comprehenditur ſub rectis ΒΑ, ΑΓ, comprehenditur enim ſub rectis ΔΑ, ΑΓ, quarum ΑΔ æquatur ipſi ΑΒ: & rectangulum ΓΕ comprehenditur ſub rectis ΑΒ, ΒΓ, cum recta ΒΕ ſit æqualis rectæ ΑΒ: rectangulum igitur comprehenſum ſub rectis ΒΑ, ΑΓ, una cum rectangulo ſub ΑΒ, ΒΓ, æquatur quadrato rectæ ΑΒ.

Si igitur recta linea ſecetur utcunque, rectangula ſub tota & utroque ſegmento comprehenſa æquantur quadrato totius. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.

Prop. III. Theor.

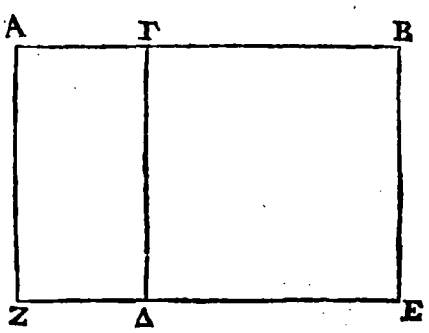
Si recta linea ſecetur utcunque, rectangulum ſub tota & uno ſegmento comprehenſum æquatur rectangulo ſub ſegmentis comprehenſo, & prædicti ſegmenti quadrato.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΓ τετραγώνου.

Recta enim linea ΑΒ ſecta ſit utcunque in puncto Γ: dico rectangulum ſub ΑΒ, ΒΓ æquale eſſe rectangulo ſub ΑΓ, ΓΒ, una cum quadrato rectæ ΒΓ.

Deſcriba-

Deſcribatur enim [per 46. 1.] ex ΒΓ quadratum ΓΔΕΒ, producaturque ΒΔ in Ζ, & per Α alterutri ipſarum ΓΔ, ΒΕ [per 31. 1.] parallela ducatur ΑΖ.



Æquale utique erit rectangulum ΑΕ ipſis ΑΔ, ΓΕ: & eſt ΑΕ quidem rectangulum contentum ſub rectis ΑΒ, ΒΓ; continetur etenim ſub rectis ΑΒ, ΒΕ, quarum ΒΕ eſt æqualis ΒΓ: rectangulum vero ΑΔ eſt quod continetur ſub rectis ΑΓ, ΓΒ, cum ΔΓ ipſi ΓΒ ſit æqualis: & ΔΒ eſt quadratum quod fit ex ex ΒΓ: ergo rectangulum ſub ΑΒ, ΒΓ, eſt æquale rectangulo ſub ΑΓ, ΓΒ, una cum quadrato quod ex ΒΓ.

Si igitur recta linea ſecetur utcunque, rectangulum ſub tota & uno ſegmento comprehenſum æquatur rectangulo ſub ſegmentis comprehenſo, & prædicti ſegmenti quadrato. quod erat demonſtrandum.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΓΔΕΒ, καὶ ἤχθω ἡ ΕΔ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, ΒΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΖ.

Ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΕ τοῖς ΑΔ, ΓΕ· καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΕ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ, ἴση δὲ ἡ ΒΕ τῇ ΒΓ· τὸ δὲ ΑΔ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἴση γὰρ ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ· τὸ δὲ ΔΒ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΓΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, μετὰ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνου.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ εἰρημένου τμήματος τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. IV. Theor.

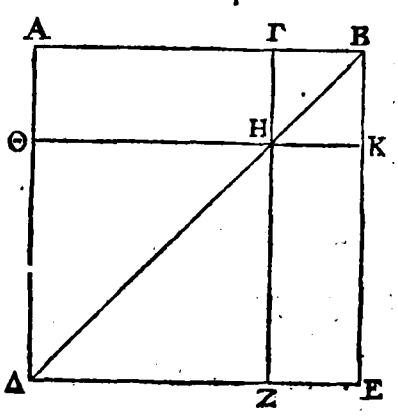
Si recta linea ſecetur utcunque, quadratum totius æquatur quadratis ſegmentorum & rectangulo bis comprehenſo ſub ſegmentis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Recta enim linea ΑΒ ſecta ſit utcunque in Γ: dico quadratum quod fit ex ΑΒ æquale eſſe & quadratis ex ΑΓ, ΓΒ & ei rectangulo quod bis comprehenditur ſub ſegmentis ΑΓ, ΓΒ.

Deſcribatur enim [per 46. 1.] ex ΑΒ quadratum ΑΔΕΒ, jungaturque ΒΔ, & per Γ quidem alterutri ipſarum ΑΔ, ΒΕ [per 31. 1.] parallela ducatur ΓΗΖ, per Η vero alterutri ipſarum ΑΒ, ΔΕ ducatur parallela ΘΚ.



Et quoniam ΓΖ eſt parallela ipſi ΑΔ, & in ipſas incidit ΒΔ, erit exterior angulus ΒΗΓ [per 29. 1.] interiori & oppoſito ΑΔΒ æqualis. angulus autem ΑΔΒ [per 5. 1.] eſt æqualis angulo ΑΒΔ, quod & latus ΒΑ æquale eſt lateri ΑΔ: quare ΓΗΒ angulus angulo ΗΒΓ eſt æqualis: ac propterea latus ΒΓ [per 6. 1.] lateri ΓΗ æquale. ſed & latus ΓΒ æquale eſt [per 34. 1.] lateri ΗΚ, & ΓΗ ipſi ΒΚ: ergo & ΗΚ eſt æquale ΚΒ: & ΓΗΚΒ eſt æquilaterum. dico inſuper etiam rectangulum eſſe. quoniam enim ΓΗ eſt parallela ipſi ΒΚ, & in ipſas incidit ΓΒ; anguli ΚΒΓ, ΗΓΒ [per 29. 1.] duobus rectis ſunt æquales. rectus autem eſt [per 30. def. 1.] ΚΒΓ angulus: ergo & rectus ΗΓΒ: quare & anguli oppoſiti ΓΗΚ, ΗΚΒ [per 34. 1.] recti erunt: rectangulum igitur eſt ΓΗΚΒ. ſed oſtenſum fuit & æquilaterum eſſe: quadratum

Ἐὰν γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΗΖ,* διὰ δὲ Η ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΚ.

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΖ τῇ ΑΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΗΓ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΔΒ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΗΒΓ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΓ πλευρᾷ τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ καὶ ἡ ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΒΚ, καὶ ἡ ΗΚ ἄρα τῇ ΚΒ ἐστὶν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ. λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΗ τῇ ΒΚ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΚΒΓ, ΗΓΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΚΒΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΗΓΒ. ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον, αἱ ὑπὸ ΓΗΚ, ΗΚΒ ὀρθαί εἰσιν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· πε-

* Videtur deeſſe ad ſenſum explendum, τέμνουσα τὴν ΒΔ κατὰ τὸ Η σημεῖον. & ſic non raro in ſequentibus, quod ſemel admonuiſſe ſat eſto.

τράγωνον

τετράγωνον ἄρα ἐστί, καὶ ἔστιν ἀπὸ τῆς ΒΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΘΖ τετράγωνόν ἐστι, καὶ ἔστιν ἀπὸ τῆς ΘΗ, τουτ' ἔστιν ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ΘΖ, ΓΚ τετράγωνα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ εἰσί. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ, ἔστι δὲ τὸ ΑΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἴση γὰρ ἡ ΗΓ τῇ ΓΒ· καὶ τὸ ΗΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἔστι δὲ καὶ τὰ ΘΖ, ΓΚ τετράγωνα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα τέσσαρα τὰ ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἀλλὰ τὰ ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ, ὃ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΤΕΡΑ ΔΕΙΞΙΣ.

Λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ· καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ἔστι ΑΒΔ ἄρα τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΔΒ, ΒΑΔ, δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΔΒ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσί· καί εἰσιν ἴσαι, ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΔΒ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ Α, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΗ, ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΓ τῇ ΓΗ ἐστιν ἴση. ἀλλ' ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΚΗ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΒΚ· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΚ. ἔχει δὲ ὀρθὴν τὴν ὑπὸ ΓΒΚ γωνίαν· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΚ, καὶ ἔστιν ἀπὸ τῆς ΓΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΘΖ τετράγωνόν ἐστι, καὶ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ΓΚ, ΘΖ τετράγωνά ἐστι, καὶ ἔστιν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΕΗ, καὶ ἔστι τὸ ΑΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἴση γὰρ ἡ ΓΗ τῇ ΓΒ, καὶ τὸ ΕΗ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἔστι δὲ καὶ τὰ ΓΚ, ΘΖ ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τὰ ἄρα ΓΚ, ΘΖ, ΑΗ, ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἀλλὰ τὰ ΓΚ, ΘΖ καὶ τὰ ΑΗ, ΗΕ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΕ, ὃ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον·

Τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτων φανερόν ἐστιν, ὅτι ἐν τοῖς τετραγώνοις χωρίοις τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα τετράγωνά ἐστιν.

igitur eſt, & eſt ex ΒΓ. eadem ratione & ΘΖ eſt quadratum, & eſt ex ΘΗ, hoc eſt ex ΑΓ: ergo ΘΖ, ΓΚ ex ipſis ΑΓ, ΓΒ quadrata ſunt. & quoniam rectangulum ΑΗ [per 43. 1.] eſt æquale rectangulo ΗΕ, atque eſt ΑΗ quod ſub rectis ΑΓ, ΓΒ continetur, eſt enim ΗΓ ipſi ΓΒ æqualis: erit & ΗΕ æquale ei quod continetur ſub ΑΓ, ΓΒ: quare rectangula ΑΗ, ΗΕ æqualia ſunt ei quod bis continetur ſub rectis ΑΓ, ΓΒ. ſunt autem & ΘΖ, ΓΚ quadrata ex ΑΓ, ΓΒ: quatuor igitur ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ ſunt æqualia & quadratis ex ΑΓ, ΓΒ & ei rectangulo quod bis continetur ſub rectis ΑΓ, ΓΒ. ſed ΘΖ, ΓΚ, ΑΗ, ΗΕ ſunt totum ΑΔΕΒ, quod eſt quadratum ex ΑΒ: quadratum igitur ex ΑΒ æquale eſt & quadratis ex ΑΓ, ΓΒ & ei rectangulo quod bis continetur ſub rectis ΑΓ, ΓΒ.

Quare ſi recta linea ſecetur utcunque, quadratum totius æquatur quadratis ſegmentorum & rectangulo bis comprehenſo ſub ſegmentis. quod erat demonſtrandum.

ALITER.

Dico quadratum ex ΑΒ æquale eſſe & quadratis ex ΑΓ, ΓΒ & ei rectangulo quod bis ſub ΑΓ, ΓΒ continetur.

Quoniam enim, in eadem figura, æqualis eſt ΒΑ ipſi ΑΔ, & angulus ΑΒΔ [per 5. 1.] angulo ΑΔΒ æqualis erit: & cum [per 32. 1.] omnis trianguli tres anguli duobus rectis ſint æquales, erunt trianguli ΑΒΔ tres anguli ΑΒΔ, ΑΔΒ, ΒΑΔ æquales duobus rectis. rectus autem eſt angulus ΒΑΔ; ergo reliqui ΑΒΔ, ΑΔΒ ſunt uni recto æquales: & ſunt æquales inter ſe; uterque igitur ipſorum ΑΒΔ, ΑΔΒ eſt recti dimidius. ſed rectus eſt ΒΓΗ, æqualis namque eſt angulo interiori & oppoſito qui ad Α, reliquus igitur ΓΗΒ dimidius eſt recti: ac propterea ΓΗΒ angulus angulo ΓΒΗ eſt æqualis, & latus ΒΓ [per 6. 1.] æquale lateri ΓΗ. ſed ΓΒ [per 34. 1.] eſt æqualis ΚΗ, & ΓΗ ipſi ΒΚ; æquilaterum igitur eſt ΓΚ. habet autem rectum angulum ΓΒΚ: igitur eſt quadratum, & fit ex ΓΒ. eadem ratione & ΘΖ quadratum eſt, & æquale quadrato quod ex ΑΓ: quadrata igitur ſunt ΓΚ, ΘΖ, & quadratis ex ΑΓ, ΓΒ æqualia. rurſus quoniam [per 43. 1.] rectangulum ΑΗ eſt æquale ipſi ΕΗ, atque eſt ΑΗ id quod ſub rectis ΑΓ, ΓΒ continetur, eſt enim ΓΗ ipſi ΓΒ æqualis: erit & ΕΗ æquale contento ſub rectis ΑΓ, ΓΒ: quare ΑΗ, ΗΕ æqualia ſunt ei quod bis continetur ſub rectis ΑΓ, ΓΒ. ſunt autem & ΓΚ, ΘΖ æqualia quadratis ex ΑΓ, ΓΒ: ergo ΓΚ, ΘΖ, ΑΗ, ΗΕ æqualia ſunt & quadratis ex ΑΓ, ΓΒ & ei quod bis continetur ſub rectis ΑΓ, ΓΒ. ſed ΓΚ, ΘΖ & ΑΗ, ΗΕ ſunt totum ΑΕ, quod eſt quadratum ex ΑΒ:

Quadratum igitur ex ΑΒ eſt æquale quadratis ex ΑΓ, ΓΒ & ei rectangulo quod bis continetur ſub rectis ΑΓ, ΓΒ. quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

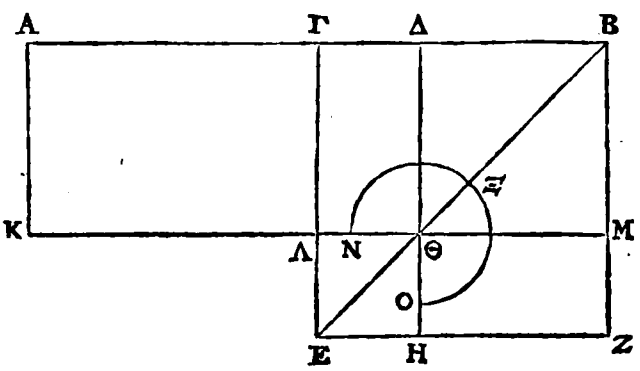
Ex his manifeſtum eſt, in quadratis parallelogramma quæ ſunt circa diametrum eſſe quadrata.

Prop. V. Theor.

Si recta linea ſecetur in æqualia & inæqualia, rectangulum ſub inæqualibus totius ſegmentis comprehenſum una cum quadrato rectæ inter puncta ſectionum æquatur quadrato dimidiæ.

Recta enim linea quæcunque AB ſecta ſit in partes æquales ad punctum Γ, & in partes inæquales ad Δ: dico rectangulum comprehenſum ſub rectis AΔ, ΔB una cum quadrato quod fit ex ΓΔ æquale eſſe ei quod fit ex ΓB quadrato.

Deſcribatur enim [per 46. 1.] ex BΓ quadratum ΓEZB, jungaturque BE; & per Δ quidem alterutri ipſarum ΓE, BZ [per 31. 1.] parallela ducatur ΔΘH, per Θ vero ducatur KΛM parallela alterutri ipſarum ΓB, EZ: & rurſus per A ducatur alterutri ΓΛ, BM parallela AK.



Et quoniam [per 43. 1.] ΓΘ complementum æquale eſt complemento ΘZ, commune addatur ΔM: totum igitur ΓM toti ΔZ eſt æquale. ſed ΓM [per 36. 1.] eſt æquale AΛ, quoniam AΓ æquatur ipſi ΓB: ergo & AΛ æquale eſt ΔZ. commune addatur ΓΘ: totum igitur AΘ ipſis ΔZ, ΔΛ æquale erit. ſed AΘ quidem eſt quod ſub rectis AΔ, ΔB continetur, eſt enim ΔΘ ipſi ΔB æqualis; ZΔ, ΔΛ vero eſt gnomon NΞO: gnomon igitur NΞO æqualis eſt ei quod ſub rectis AΔ, ΔB continetur. commune addatur ΛH, quod æquale eſt [per cor. 4. 2.] quadrato ex ΓΔ: ergo NΞO gnomon & ΛH æqualia ſunt rectangulo quod continetur ſub rectis AΔ, ΔB & ei quod fit ex ΓΔ quadrato. ſed NΞO gnomon & ΛH ſunt totum quadratum ΓEZB, quod quidem fit ex ΓB: ergo rectangulum ſub AΔ, ΔB una cum quadrato quod ex ΓΔ æquale eſt ei quod ex ΓB quadrato.

Si igitur recta linea ſecetur in æqualia & inæqualia, rectangulum ſub inæqualibus totius ſegmentis comprehenſum una cum quadrato rectæ inter puncta ſectionum æquatur quadrato dimidiæ. quod erat demonſtrandum.

Πρoτασις ε'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τοῦ ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ AB τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν AΔ, ΔB περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓB τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς BΓ τετράγωνον τὸ ΓEZB, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ BE· καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ ὁποτέρᾳ τῶν ΓE, BZ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΘH, διὰ δὲ τοῦ Θ ὁποτέρᾳ τῶν ΓB, EZ παράλληλος πάλιν ἡ KΛM· καὶ πάλιν διὰ τοῦ A ὁποτέρᾳ τῶν ΓΛ, BM παράλληλος ἤχθω ἡ AK.

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμα τῷ ΘZ παραλληλογράμμῳ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΔM· ὅλον ἄρα τὸ ΓM ὅλῳ τῷ ΔZ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ΓM τῷ AΛ ἴσον ἐστίν, ἐπεὶ καὶ ἡ AΓ τῇ ΓB ἴση ἐστί· καὶ τὸ AΛ ἄρα τῷ ΔZ ἴσον ἐστί. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΘ· ὅλον ἄρα τὸ AΘ τῷ ΔZ καὶ ΔΛ ἴσον ἐστί. ἀλλὰ τὸ μὲν AΘ τὸ ὑπὸ τῶν AΔ, ΔB ἐστίν, ἴση γὰρ ἡ ΔΘ τῇ ΔB· τὸ δὲ ZΔ, ΔΛ ἐστὶν ὁ NΞO γνώμων· καὶ ὁ NΞO ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ AΔ, ΔB. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΛH, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ὁ ἄρα NΞO γνώμων καὶ τὸ ΛH ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AΔ, ΔB περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ. ἀλλὰ ὁ NΞO γνώμων καὶ τὸ ΛH ὅλον ἐστὶ τὸ ΓEZB τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΓB· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AΔ, ΔB περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓB τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VI. Theor.

Si recta linea ſecetur bifariam & illi recta quæcunque linea in directum adjiciatur, rectangulum comprehenſum ſub compoſita ex tota cum adjecta

Πρoτασις ϛ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας· τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμι-

σείας

σείας τετραγώνῳ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγεγραφέντι τετραγώνῳ.

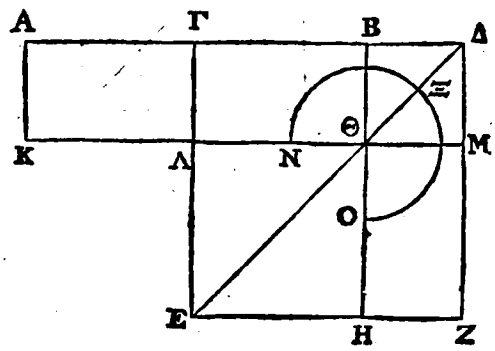
& adjecta una cum quadrato dimidiæ æquatur quadrato compoſitæ ex dimidia & adjecta tanquam una linea.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ σημεῖον, προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετράγωνον τὸ ΓΕΖΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β σημείου ὁποτέρα τῶν ΓΕ, ΔΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΘΗ· διὰ δὲ τοῦ Θ σημείου ὁποτέρα τῶν ΑΔ, ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΛΜ· καὶ ἔτι διὰ τοῦ Α ὁποτέρα τῶν ΓΛ, ΔΜ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ.

Recta enim linea quæcunque AB ſecetur bifariam in puncto Γ, adjiciaturque ipſi in directum recta quæcunque BΔ: dico rectangulum ſub AΔ, ΔB una cum quadrato à ΓB æquale eſſe ei quod fit ex ΓΔ quadrato.

Deſcribatur enim [per 46. 1.] ex ΓΔ quadratum ΓEZΔ, & jungatur ΔE; perque B [per 31. 1.] alterutri ipſarum ΓE, ΔZ parallela ducatur BΘH: & per Θ ducatur KΛM parallela alterutri ipſarum AΔ, EZ: & adhuc per A alterutri ΓΛ, ΔM parallela AK.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΛ τῷ ΓΘ. ἀλλὰ τὸ ΓΘ τῷ ΘΖ ἴσον ἐστίν· καὶ τὸ ΑΛ ἄρα τῷ ΘΖ ἴσον ἐστί. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΜ τῷ ΝΞΟ γνώμονί ἐστιν ἴσον. ἀλλὰ τὸ ΑΜ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΔΜ τῇ ΔΒ· καὶ ὁ ΝΞΟ ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΑΗ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ΝΞΟ γνώμονι καὶ τῷ ΑΗ. ἀλλὰ ὁ ΝΞΟ γνώμων καὶ τὸ ΑΗ ὅλον ἐστὶ τὸ ΓΕΖΔ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ.

Itaque quoniam AΓ eſt æqualis ΓB, erit & rectangulum AΛ [per 36. 1.] rectangulo ΓΘ æquale. ſed ΓΘ [per 43. 1.] æquale eſt ΘZ: ergo & AΛ ipſi ΘZ æquale erit. commune addatur ΓM: totum igitur AM gnomoni NΞO eſt æquale. atqui eſt AM, quod continetur ſub rectis AΔ, ΔB, etenim ΔM [per cor. 4. 2.] eſt æqualis ΔB: ergo & gnomon NΞO æqualis eſt rectangulo comprehenſo ſub rectis AΔ, ΔB. rurſus commune addatur AH, æquale ſcilicet quadrato quod ex ΓB: rectangulum igitur comprehenſum ſub rectis AΔ, ΔB una cum quadrato quod ex BΓ æquale eſt gnomoni NΞO & ipſi AH. ſed gnomon NΞO & AH totum ſunt ΓEZΔ quadratum; quod quidem fit ex ΓΔ: ergo rectangulum ſub AΔ, ΔB una cum quadrato ex BΓ æquale eſt ei quod fit ex ΓΔ quadrato.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας· τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si igitur recta linea ſecetur bifariam, & illi recta quæcunque linea in directum adjiciatur; rectangulum comprehenſum ſub compoſita ex tota cum adjecta & adjecta una cum quadrato dimidiæ æquatur quadrato compoſitæ ex dimidia & adjecta tanquam una linea. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Prop. VII. Theor.

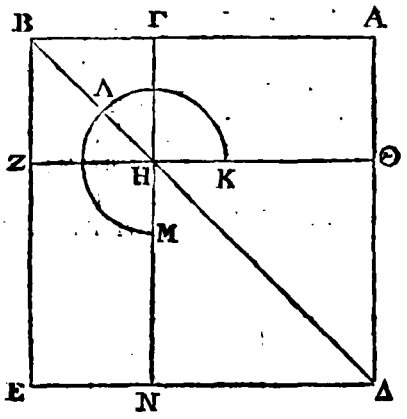
Si recta linea ſecetur utcunque, quadrata totius & unius è ſegmentis ſimul ſumpta æquantur rectangulo bis comprehenſo ſub tota & dicto ſegmento una cum quadrato reliqui ſegmenti.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ.

Recta enim linea quæcunque AB ſecta ſit utcunque in puncto Γ: dico quadrata ex AB, BΓ æqualia eſſe & rectangulo quod bis ſub rectis AB, BΓ continetur & ei quod fit ex AΓ quadrato.

Deſcribatur enim [per 46. 1.] ex AB quadratum AΔEB, & figura conſtruatur.

Itaque quoniam AH rectangulum æquale eſt [per 43. 1.] rectangulo HE, commune addatur ΓZ: quare totum AZ toti ΓE eſt æquale: rectangula igitur AZ, ΓE dupla ſunt rectanguli AZ. ſed AZ, ΓE ſunt KΛM gnomon & quadratum ΓZ: ergo KΛM gnomon & quadratum ΓZ dupla erunt rectanguli AZ. eſt autem id quod bis continetur ſub rectis AB, BΓ duplum ipſius AZ; etenim [per cor. 4. 2.] BZ eſt æqualis BΓ: gnomon igitur KΛM & quadratum ΓZ æqualia ſunt ei quod bis ſub rectis AB, BΓ continetur. commune addatur ΘN, quod eſt ex AΓ quadratum: ergo gnomon KΛM & quadrata ΓZ, ΘN æqualia ſunt ei quod bis ſub rectis AB, BΓ continetur & quadrato ex AΓ. at gnomon KΛM & quadrata ΓZ, ΘN totum ſunt AΔEB, & ΓZ; quæ ſunt ex AB, BΓ quadrata: quadrata igitur ex AB, BΓ æqualia ſunt rectangulo quod bis ſub rectis AB, BΓ continetur una cum eo quod fit ex AΓ quadrato.



Si igitur recta linea ſecetur utcunque, quadrata totius & unius è ſegmentis ſimul ſumpta æquantur rectangulo bis comprehenſo ſub tota & dicto ſegmento una cum quadrato reliqui ſegmenti. quod erat demonſtrandum.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ AΔEB· καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ AH τῷ HE, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓZ· ὅλον ἄρα τὸ AZ ὅλῳ τῷ ΓE ἐστὶν ἴσον· τὰ ἄρα AZ, ΓE διπλάσιά ἐστι τοῦ AZ. ἀλλὰ τὰ AZ, ΓE ὁ KΛM ἐστὶ γνώμων καὶ τὸ ΓZ τετράγωνον· ὁ KΛM ἄρα γνώμων καὶ τὸ ΓZ διπλάσιά ἐστι τοῦ AZ. ἔστι δὲ τοῦ AZ διπλάσιον καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ, ἴση γὰρ ἡ BZ τῇ BΓ· ὁ ἄρα KΛM γνώμων καὶ τὸ ΓZ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΘN, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς AΓ τετράγωνον· ὁ ἄρα KΛM γνώμων καὶ τὰ ΓZ, ΘN τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AΓ τετραγώνῳ. ἀλλ' ὁ KΛM γνώμων καὶ τὰ ΓZ, ΘN τετράγωνα ὅλον ἐστὶ τὸ AΔEB καὶ τὸ ΓZ, ἃ ἐστιν ἀπὸ τῶν AB, BΓ τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB, BΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ τετραγώνου.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VIII. Theor.

Si recta linea ſecetur utcunque, rectangulum quater comprehenſum ſub tota & uno è ſegmentis una cum quadrato reliqui ſegmenti æquatur quadrato compoſitæ ex tota & prædicto ſegmento tanquam ex una linea.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγεγραμμένῳ τετραγώνῳ.

REcta enim linea AB ſecta ſit utcunque in Γ: dico rectangulum quater ſub rectis AB, BΓ contentum una cum quadrato quod ex AΓ æquale eſſe quadrato quod ex AB, BΓ tanquam ex una linea deſcribitur.

Producatur enim in directum rectæ AB recta ΔB, & ipſi ΓB ponatur æqualis BΔ, deſcribaturque [per 46. 1.] ex AΔ quadratum AEZΔ, & dupla figura conſtruatur.

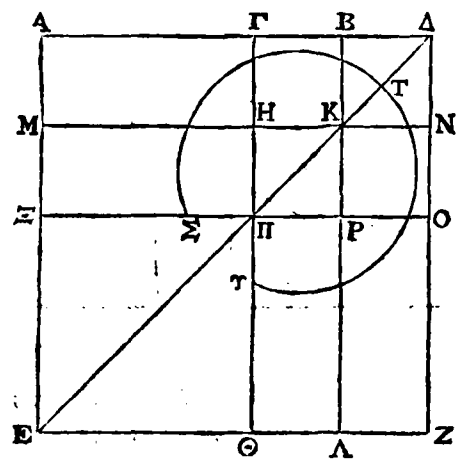
Quoniam igitur ΓB eſt æqualis BΔ, atque eſt ΓB [per 34. 1.] ipſi HK æqualis, BΔ vero ipſi KN, erit & HK æqualis KN. eadem ratione & ΠP ipſi PO eſt æqualis. & quoniam ΓB eſt æqualis BΔ, & HK ipſi KN; erit [per 36. 1.] rectangulum quidem ΓK æquale rectangulo BN, rectangulum vero HP ipſi PN. ſed ΓK eſt [per 43. 1.] æquale PN, complementa enim ſunt parallelogrammi ΓO: ergo & BN æquale eſt HP, & quatuor rectangula BN, KΓ,

Ἐκκείσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῇ AB εὐθεῖα ἡ BΔ, καὶ κείσθω τῇ ΓB ἴση ἡ BΔ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς AΔ τετράγωνον τὸ AEZΔ, καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓB τῇ BΔ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΓB τῇ HK ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ BΔ τῇ KN, καὶ ἡ HK τῇ KN ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΠP τῇ PO ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΓB τῇ BΔ, ἡ δὲ HK τῇ KN· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ΓK τῷ BN, τὸ δὲ HP τῷ PN. ἀλλὰ τὸ ΓK τῷ PN ἐστὶν ἴσον, παραπληρώματα γὰρ τὸ ΓO παραλληλογράμμου· καὶ τὸ BN ἄρα τῷ HP ἐστὶν ἴσον· τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ BN, KΓ,

HP,

ΗΡ, ΡΝ ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· τὰ τέσσαρα ἄρα τετράπλασιά ἐστι τοῦ ΓΚ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΒΔ τῇ ΒΚ, τοῦτ' ἔστι τῇ ΓΗ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΓΒ τῇ ΗΚ, τοῦτ' ἔστι τῇ ΗΠ ἴση ἐστί· καὶ ἡ ΓΗ ἄρα τῇ ΗΠ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΓΗ τῇ ΗΠ, ἡ δὲ ΗΡ τῇ ΡΟ· ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ μὲν ΑΗ τῷ ΜΠ, τὸ δὲ ΠΛ τῷ ΡΖ. ἀλλὰ τὸ ΜΠ τῷ ΠΔ ἐστιν ἴσον, παραπληρώματα γὰρ τὰ ΜΛ παραλληλογράμμου· καὶ τὸ ΑΗ ἄρα τῷ ΡΖ ἴσον ἐστί· τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ ΑΗ, ΜΠ, ΠΔ, ΡΖ ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· τὰ τέσσαρα ἄρα τοῦ ΑΗ ἐστὶ τετράπλασια. ἐδείχθη δὲ καὶ τὰ τέσσαρα τὰ ΓΚ, ΒΝ, ΗΡ, ΡΝ τοῦ ΓΚ τετράπλασια· τὰ ἄρα ὅλα τὰ περιέχει τὸ ΣΤΥ γνώμονα τετράπλασιά ἐστι τοῦ ΑΚ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΚ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ ἐστίν, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΒΚ τῇ ΒΔ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ τετράπλασιόν ἐστι τοῦ ΑΚ. ἐδείχθη δὲ τοῦ ΑΚ τετράπλασιος καὶ ὁ ΣΤΥ γνώμων· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤΥ γνώμονι. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΞΘ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τοῦ ΑΓ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤΥ γνώμονι καὶ τῷ ΞΘ. ἀλλὰ ὁ ΣΤΥ γνώμων καὶ τὸ ΞΘ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΕΖΔ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τοῦτ' ἔστι τῷ ἀπὸ τοῦ ΑΒ καὶ ΒΓ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.



Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΗΡ, ΡΝ sunt inter se æqualia, ideoque quadrupla sunt rectanguli ΓΚ. rursus quoniam ΓΒ est æqualis ΒΔ, & ΒΔ quidem ipsi ΒΚ, hoc est [per 34. 1.] ipsi ΓΗ æqualis; ΓΒ vero ipsi ΗΚ, hoc est ΗΠ: est igitur ΓΗ æqualis ΗΠ. est autem & ΠΡ ipsi ΡΟ æqualis: rectangulum igitur ΑΗ [per 36. 1.] rectangulo ΜΠ, & rectangulum ΠΛ ipsi ΡΖ æquale erit. sed ΜΠ est [per 43. 1.] æquale ΠΛ; complementa enim sunt ΜΛ parallelogrammi; quare & ΑΗ ipsi ΡΖ est æquale: quatuor igitur ΑΗ, ΜΠ, ΠΛ, ΡΖ inter se sunt æqualia, ac propterea ipsius ΑΗ quadrupla. ostensum autem est & quatuor ΓΚ, ΒΝ, ΗΡ, ΡΝ quadrupla esse ΓΚ: quare octo quæ gnomonem ΣΤΥ constituunt ΑΚ quadrupla sunt. & quoniam ΑΚ est quod sub rectis ΑΒ, ΒΔ continetur; etenim ΒΚ est [per cor. 4. 2.] æqualis ΒΔ: erit contentum quater sub rectis ΑΒ, ΒΔ ipsius ΑΚ quadruplum. at demonstratus est gnomon ΣΤΥ quadruplus ipsius ΑΚ: quod igitur quater continetur sub rectis ΑΒ, ΒΔ æquale est gnomoni ΣΤΥ. commune addatur ΞΘ, quod quidem [per cor. 4. 2.] quadrato ex ΑΓ est æquale: ergo quod quater continetur sub rectis ΑΒ, ΒΔ una cum quadrato ex ΑΓ æquale est ipsi ΣΤΥ gnomoni & quadrato ΞΘ. sed ΣΤΥ gnomon & ΞΘ constituunt totum ΑΕΖΔ quadratum, quod describitur à recta ΑΔ: rectangulum igitur quater sub rectis ΑΒ, ΒΓ comprehensum una cum quadrato ex ΑΓ æquale est ei quod ex ΑΔ, hoc est ex ΑΒ, ΒΓ tanquam ex una linea, describitur quadrato.

Si igitur recta linea secetur utcunque, rectangulum quater comprehensum sub tota & uno è segmentis una cum quadrato reliqui segmenti æquatur quadrato compositæ ex tota & prædicto segmento tanquam ex una linea. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου.

Prop. IX. Theor.

Si recta linea secetur in æqualia & inæqualia, quadrata inæqualium segmentorum sunt dupla quadratorum à dimidia & à recta inter puncta sectionum.

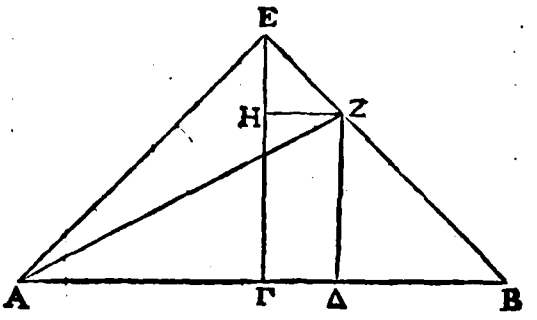
Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.

Ηχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΕ, καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρα τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ, ΕΒ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ τῇ ΕΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΖ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΑΒ πάλιν παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ.

Recta enim linea quæcunque ΑΒ secta sit in partes æquales ad Γ & in partes inæquales ad Δ: dico quadrata ex ΑΔ, ΔΒ quadratorum ex ΑΓ, ΓΔ dupla esse.

Ducatur enim [per 11. 1.] à puncto Γ ipsi ΑΒ ad rectos angulos ΓΕ, & ponatur æqualis alterutri ipsarum ΑΓ, ΓΒ, junganturque ΕΑ, ΕΒ; ac per Δ quidem [per 31. 1.] ipsi ΕΓ parallela ducatur ΔΖ, per Ζ vero ipsi ΑΒ parallela ΖΗ, & ΑΖ jungatur.

Itaque quoniam AΓ eſt æqualis ΓE, erit & angulus EAΓ [per 5. 1.] angulo AEΓ æqualis. & cum rectus ſit angulus ad Γ, reliqui AEΓ, EAΓ [per 32. 1.] uni recto æquales erunt, & ſunt æquales inter ſe: uterque igitur ipſorum AEΓ, EAΓ eſt recti dimidius. eadem ratione & recti dimidius eſt uterque ipſorum ΓEB, EBΓ: ergo totus angulus AEB rectus eſt. & quoniam angulus HEZ dimidius eſt recti, rectus autem EHZ; æqualis enim eſt [per 29. 1.] interiori & oppoſito EΓB: erit & reliquus EZH recti dimidius: æqualis igitur eſt HEZ angulus ipſi EZH: quare & latus EH [per 6. 1.] lateri HZ eſt æquale. rurſus quoniam angulus ad B dimidius eſt recti, rectus autem ZΔB quod ſit [per 29. 1.] æqualis interiori & oppoſito EΓB, reliquus BZΔ recti erit dimidius: angulus igitur ad B æqualis eſt angulo ΔZB: ideoque latus ΔZ [per 6. 1.] lateri ΔB æquale. & quoniam AΓ eſt æqualis ΓE, erit & ex AΓ quadratum æquale quadrato ex ΓE: quadrata igitur ex AΓ, ΓE dupla ſunt quadrati ex AΓ. quadratis autem ex AΓ, ΓE, æquale eſt [per 47. 1.] quadratum ex EA, ſiquidem rectus eſt angulus AΓE: ergo quadratum ex EA quadrati ex AΓ eſt duplum. rurſus quoniam EH æqualis eſt HZ, & quadratum ex EH quadrato ex HZ eſt æquale: quadrata igitur ex EH, HZ dupla ſunt quadrati ex HZ. at quadratis ex EH HZ æquale eſt [per 47. 1.] quod ex EZ quadratum: ergo quadratum ex EZ quadrati ex HZ duplum erit. æqualis autem eſt HZ [per 34. 1.] ipſi ΓΔ: quadratum igitur ex EZ duplum eſt quadrati ex ΓΔ. ſed & quadratum ex AE quadrati ex AΓ eſt duplum: ergo quadrata ex AE, EZ dupla ſunt quadratorum ex AΓ, ΓΔ. quadratis vero ex AE, EZ æquale eſt [per 47. 1.] ex AZ quadratum; quoniam angulus AEZ rectus eſt: quadratum igitur ex AZ quadratorum ex AΓ, ΓΔ eſt duplum. ſed quadrato ex AZ [per 47. 1.] æqualia ſunt ex AΔ, ΔZ quadrata; rectus enim eſt angulus qui ad Δ: ergo ex AΔ, ΔZ quadrata dupla ſunt quadratorum ex AΓ, ΓΔ. eſt autem ΔZ ipſi ΔB æqualis: quadrata igitur ex AΔ, ΔB quadratorum ex AΓ, ΓΔ dupla erunt.



Si igitur recta linea ſecetur in æqualia & inæqualia, quadrata inæqualium ſegmentorum ſunt dupla quadratorum à dimidia & à recta inter puncta ſectionum. quod erat demonſtrandum.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΓ. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ πρὸς τῷ Γ, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΕΓ, ΕΑΓ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΕΓ, ΕΑΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΒ, ΕΒΓ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΒ ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΗΕΖ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΕΗΖ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΓΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΖΗ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΗ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΕΗ πλευρᾷ τῇ ΗΖ ἐστὶν ἴση. πάλιν ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ Β γωνία ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΖΔΒ, ἴση γάρ πάλιν ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΓΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΖΔ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΒ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΔΖ πλευρᾷ τῇ ΔΒ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ τετράγωνον, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΑ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραγώνου. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ. ἴση δὲ ἡ ΗΖ τῇ ΓΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΕΖ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. ἴση δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. X. Theor.

Si recta linea ſecetur bifariam & illi recta quæcunque linea in directum adjiciatur, quadratum compoſitæ ex tota

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας· τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσ-

κειμένης

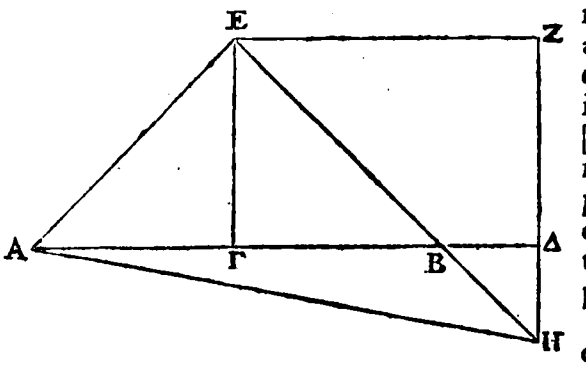
κμένης, τὰ σὺν αμφότερα τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦτε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ ἑνὸς ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τοῦ τραγώνου.

& adjecta & quadratum adjectæ ſimul ſumpta ſunt dupla & quadrati ex dimidia & quadrati compoſitæ ex dimidia & adjecta tanquam una linea.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνου.

Ηχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΕ, καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρα τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Ε τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ, διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ ΓΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΖ. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΕΓ, ΖΔ εὐθεῖά τις ἐνέπεσεν ἡ ΕΖ, αἱ ἄρα τὸ ΓΕΖ, ΕΖΔ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΖΕΒ, ΕΖΔ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα ΕΒ, ΖΔ ἐκβαλλόμεναι ὀφθήσονται συμπίπτουσαι). ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῇ ὑπὸ ΕΑΓ, καὶ ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ Γ· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΕΑΓ, ΑΕΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΒ, ΕΒΓ ἡμίσεια ὀρθῆς ἐστιν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ. καὶ ἐπεὶ ἡμίσεια ὀρθῆς ἐστιν ἡ ὑπὸ ΕΒΓ, ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΗ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΗ ὀρθή, ἴση γὰρ ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ, ἐναλλὰξ γάρ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΗΒ ἡμίσεια ἐστὶν ὀρθῆς· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΗΒ τῇ ὑπὸ ΔΒΗ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΔ πλευρᾷ τῇ ΗΔ ἐστὶν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΖ ἡμίσεια ἐστὶν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Ζ, ἴση γὰρ ἐστὶ τῇ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ Γ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΕΗ ἡμίσεια ἐστὶν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΗ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΗΖ πλευρᾷ τῇ ΕΖ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΓΑ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΑ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνου. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΑ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΖ τῇ ΕΖ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΖΕ τετραγώνῳ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΖΗ, ΖΕ διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΗΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΓΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΗ τετράγωνα



REcta enim AB ſecetur bifariam in Γ, & ipſi in directum adjiciatur quæcunque recta linea BΔ: dico quadrata ex AΔ, ΔB quadratorum ex AΓ, ΓΔ dupla eſſe.

Ducatur enim à puncto Γ [per 11.1.] ipſi AB ad rectos angulos ΓE, & ponatur æqualis alterutri ipſarum AΓ, ΓB; junganturque AE, EB, & per E quidem ipſi AΔ [per 31.1.] parallela ducatur EZ, per Δ vero ducatur ΔZ parallela ipſi ΓE. & quoniam in parallelas EΓ, ZΔ recta quædam linea EZ incidit, anguli ΓEZ, EZΔ [per 29. 1.] æquales ſunt duobus rectis: anguli igitur ZEB, EZΔ duobus rectis ſunt minores. quæ autem rectæ à minoribus angulis, quam ſunt duo recti, in infinitum producuntur [per ax. 11.] conveniunt inter ſe: ergo EB, ZΔ productæ ad partes BΔ convenient. producantur, & conveniant in puncto H, & AH jungatur.

Itaque quoniam AΓ eſt æqualis ΓE, angulus AEΓ [per 5. 1.] angulo EAΓ æqualis erit, atque eſt rectus qui ad Γ: uterque igitur ipſorum EAΓ, AEΓ [per 32. 1.] eſt recti dimidius. eadem ratione & recti dimidius eſt uterque ΓEB, EBΓ: ergo AEB eſt rectus. & quoniam EBΓ eſt dimidius recti: erit & recti dimidius ΔBH [per 15. 1.] ſed & BΔH [per 29. 1.] rectus eſt, etenim eſt æqualis ipſi ΔΓE alterno: reliquus ideo ΔHB dimidius eſt recti, igitur & angulus ΔHB ipſi ΔBH æqualis: ergo & latus BΔ [per 6. 1.] æquale lateri HΔ. rurſus, quoniam EHZ dimidius recti, rectus autem qui ad Z, eſt enim [per 34. 1.] angulo oppoſito qui ad Γ æqualis; erit & reliquus ZEH recti dimidius: igitur EHZ angulus æqualis ipſi ZEH; quare & latus HZ [per 6. 1.] lateri EZ eſt æquale. & cum EΓ ſit æqualis ΓA, & quadratum ex EΓ æquale eſt ei quod ex AΓ quadrato: ergo quadrata ex EΓ, ΓA dupla ſunt quadrati ex ΓA. quadratis autem ex EΓ, ΓA æquale eſt [per 47.1.] quadratum ex EA: quadratum igitur ex EA duplum eſt quadrati ex AΓ. rurſus, quoniam HZ eſt æqualis EZ, æquale eſt & ex ZH quadratum quadrato ex ZE; quadrata igitur ex ZH, ZE quadrati ex EZ ſunt dupla. at quadratis ex HZ, ZE æquale eſt [per 47. 1.] quod ex EH quadratum: ergo quadratum ex EH duplum eſt quadrati ex EZ. æqualis autem eſt EZ ipſi ΓΔ: quadratum igitur ex EH quadrati ex ΓΔ duplum erit. ſed oſtenſum eſt quadratum ex EA duplum eſſe quadrati ex AΓ: ergo quadrata ex AE, EH

ſunt

ſunt dupla quadratorum ex AΓ, ΓΔ. quadratis vero ex AE, EH æquale eſt [per 47. 1.] quod ex AH quadratum: quadratum igitur ex AH duplum eſt quadratorum ex AΓ, ΓΔ. at quadrato ex AH æqualia ſunt [per 47. 1.] ex AΔ, ΔH quadrata: ergo quadrata ex AΔ, ΔH ſunt dupla quadratorum ex AΓ, ΓΔ. ſed ΔH eſt æqualis ΔB: quadrata igitur ex AΔ, ΔB ſunt dupla quadratorum ex AΓ, ΓΔ.

Si igitur recta linea ſecetur bifariam & illi recta quæcunque linea in directum adjiciatur, quadratum compoſitæ ex tota & adjecta & quadratum adjectæ ſimul ſumpta ſunt dupla & quadrati ex dimidia & quadrati compoſitæ ex dimidia & adjecta tanquam una linea. quod erat demonſtrandum.

διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν AΓ, ΓΔ τετραγώνων. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν AE, EH τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AH τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AH διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν AΓ, ΓΔ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς AH ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AΔ, ΔH· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AΔ, ΔH τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν AΓ, ΓΔ τετραγώνων. ἴση δὲ ἡ ΔH τῇ ΔB· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AΔ, ΔB τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν AΓ, ΓΔ τετραγώνων.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας· τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦτε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XI. Probl.

Datam rectam lineam ita ſecare, ut rectangulum ſub tota & altero ſegmento æquetur quadrato reliqui ſegmenti.

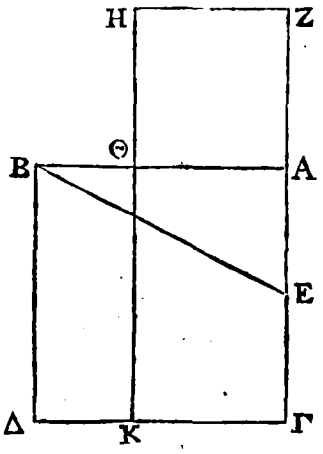
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

SIT data recta linea AB: oportet ipſam AB ita ſecare, ut quod ſub tota & altera parte continetur rectangulum æquale ſit ei quod à reliqua parte fit quadrato.

Deſcribatur enim [per 46. 1.] ex AB quadratum ABΔΓ, ſeceturque [per 10. 1.] AΓ bifariam in E, & BE jungatur; deinde, producta ΓA in Z [per 3. 1.] ponatur ipſi BE æqualis EZ, deſcribaturque ex AZ quadratum ZΘ, & HΘ ad K producatur: dico AB ita ſectam eſſe in Θ, ut rectangulum ſub AB, BΘ æquale ſit quadrato ex AΘ.

Quoniam enim recta linea AΓ bifariam ſecatur in E, adjicitur ipſi in directum AZ; rectangulum ſub ΓZ, ZA una cum quadrato ex AE æquale erit [per 6. 2.] quadrato ex EZ. ſed EZ eſt æqualis EB: rectangulum igitur ſub ΓZ, ZA una cum quadrato ex AE æquale eſt ei quod fit ex EB quadrato. quadrato autem ex EB æqualia ſunt [per 47. 1.] quadrata ex BA, AE, etenim angulus ad A rectus eſt: ergo rectangulum ſub ΓZ, ZA una cum quadrato ex AE æquale eſt quadratis ex BA, AE. commune auferatur quod ex AE quadratum: reliquum igitur rectangulum ſub ΓZ, ZA æquale eſt quadrato ex AB. eſt autem ſub ΓZ, ZA quidem rectangulum ZK, ſiquidem AZ eſt æqualis ZH; quadratum autem ex AB eſt ipſum AΔ: rectangulum igitur ZK æquale eſt quadrato AΔ. commune auferatur AK: ergo reliquum ZΘ reliquo ΘΔ eſt æquale. atque eſt ΘΔ rectangulum ſub AB, BΘ, cum AB



Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB· δεῖ δὴ τὴν AB τεμεῖν, ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ ABΔΓ, καὶ τετμήσθω ἡ AΓ δίχα κατὰ τὸ E σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ BE, καὶ διήχθω ἡ ΓA ἐπὶ τὸ Z, καὶ κείσθω τῇ BE ἴση ἡ EZ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς AZ τετράγωνον τὸ ZΘ, καὶ διήχθω ἡ HΘ ἐπὶ τὸ K· λέγω ὅτι ἡ AB τέτμηται κατὰ τὸ Θ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς AΘ τετραγώνῳ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ AΓ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ E, προσκεῖται δὲ αὐτῇ ἡ AZ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓZ, ZA περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AE τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EZ τετραγώνῳ. ἴση δὲ ἡ EZ τῇ EB· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓZ, ZA περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AE τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EB τετραγώνῳ. ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τῆς EB ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν BA, AE, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ A γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓZ, ZA μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AE ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν BA, AE. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς AE· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ, ZA περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνῳ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓZ, ZA τὸ ZK, ἴση γὰρ ἡ AZ τῇ ZH· τὸ δὲ ἀπὸ τῆς AB τὸ AΔ· τὸ ἄρα ZK ἴσον ἐστὶ τῷ AΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ AK· λοιπὸν ἄρα τὸ ZΘ τῷ ΘΔ ἴσον ἐστί. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΘΔ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΘ, ἴση γὰρ ἡ AB

τῇ

τῇ ΒΔ· τὸ δὲ ΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ τετραγώνῳ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ τέτμηται κατὰ τὸ Θ, ὥστε τὸ ὑπὸ τὰς ΑΒ, ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΘΑ τετραγώνῳ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

fit æqualis ΒΔ; & ΖΘ eſt quadratum ex ΑΘ: rectangulum igitur ſub ΑΒ, ΒΘ quadrato ex ΑΘ æquale erit.

Quare data recta linea ΑΒ ita ſecatur in puncto Θ, ut rectangulum ſub ΑΒ, ΒΘ æquale ſit quadrato ex ΑΘ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ἐφ' ἣν ἐκβληθεῖσα ἡ καθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ.

PROP. XII. THEOR.

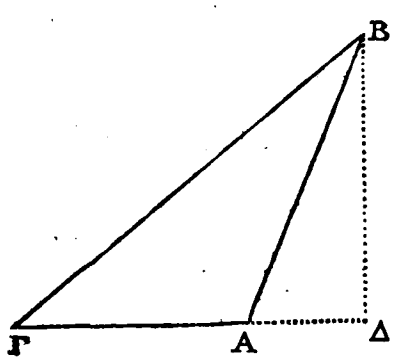
In triangulis amblygoniis quadratum lateris ſubtendentis angulum obtuſum majus eſt quam quadrata laterum angulum obtuſum comprehendentium, rectangulo bis comprehenſo ſub uno laterum circa angulum obtuſum in quod productum perpendicularis cadit, & recta extra intercepta à perpendiculari ad angulum obtuſum.

Ἔστω ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἀμβλεῖαν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὴν ΓΑ ἐκβληθεῖσαν κάθετος ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνων, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΓΔ τέτμηται ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Α σημεῖον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΔΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τῶν ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΒ τετραγώνων μεῖζόν ἐστι, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐν ἄρα τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SIT amblygonium triangulum ΑΒΓ obtuſum angulum habens ΒΑΓ, & ducatur à puncto Β ad ΓΑ productam perpendicularis ΒΔ: dico quadratum ex ΒΓ majus eſſe quam quadrata ex ΒΑ, ΑΓ, rectangulo quod bis ſub rectis ΓΑ, ΑΔ continetur.



Quoniam enim recta linea ΓΔ ſecta eſt utcunque in puncto Α: erit [per 4. 2.] quadratum ex ΓΔ æquale & quadratis ex ΓΑ, ΑΔ & ei rectangulo quod bis continetur ſub rectis ΓΑ, ΑΔ. commune addatur ex ΔΒ quadratum: quadrata igitur ex ΓΔ, ΔΒ æqualia ſunt & quadratis ex ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ & rectangulo quod bis continetur ſub rectis ΓΑ, ΑΔ. ſed quadratis ex ΓΔ, ΔΒ æquale eſt [per 47. 1.] quadratum ex ΓΒ; rectus enim eſt angulus ad Δ: quadratis vero ex ΑΔ, ΔΒ æquale eſt quadratum ex ΑΒ: quadratum igitur ex ΓΒ æquale eſt & quadratis ex ΓΑ, ΑΒ & rectangulo bis contento ſub rectis ΓΑ, ΑΔ: ergo quadratum ex ΓΒ majus eſt quam quadrata ex ΓΑ, ΑΒ, rectangulo quod bis continetur ſub rectis ΓΑ, ΑΔ.

In triangulis igitur amblygoniis quadratum lateris ſubtendentis angulum obtuſum majus eſt quam quadrata laterum angulum obtuſum comprehendentium, rectangulo bis comprehenſo ſub uno laterum circa angulum obtuſum in quod productum perpendicularis cadit, & recta extra interceptà à perpendiculari ad angulum obtuſum. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον

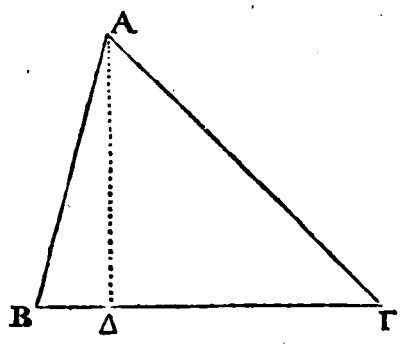
PROP. XIII. THEOR.

In triangulis oxygoniis quadratum lateris ſubtendentis angulum acutum

minus eſt quam quadrata laterum comprehendentium angulum acutum, rectangulo bis comprehenſo ſub uno laterum circa angulum acutum in quod perpendicularis cadit, & recta intus intercepta à perpendiculari ad angulum acutum.

ἐλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τὴν ἀπολαμβανομένην ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

SIT oxygonium triangulum ABΓ acutum habens angulum ad B, & ducatur à puncto A ad BΓ perpendicularis AΔ: dico quadratum quod fit ex AΓ minus eſſe quam quadrata quæ fiunt ex ΓB, BA, rectangulo quod bis continetur ſub rectis ΓB, BΔ.



Quoniam enim recta linea ΓB ſecta eſt utcunque in Δ: erunt [per 7. 2.] quadrata ex ΓB, BΔ æqualia & rectangulo quod bis continetur ſub rectis ΓB, BΔ & quadrato ex ΔΓ. commune addatur ex AΔ quadratum: quadrata igitur ex ΓB, BΔ, ΔA æqualia ſunt & rectangulo bis contento ſub rectis ΓB, BΔ & quadratis ex AΔ, ΔΓ. ſed quadratis ex BΔ, ΔA æquale eſt [per 47. 1.] ex AB quadratum, rectus enim eſt angulus qui ad Δ; quadratis vero ex AΔ, ΔΓ æquale eſt quadratum ex AΓ: quadrata igitur ex ΓB, BA ſunt æqualia quadrato ex AΓ & ei rectangulo quod bis continetur ſub rectis ΓB, BΔ: quare ſolum quadratum ex AΓ minus eſt quam quadrata ex ΓB, BA, rectangulo quod bis continetur ſub rectis ΓB, BΔ.

In triangulis igitur oxygoniis, quadratum lateris ſubtendentis angulum acutum minus eſt quam quadrata laterum comprehendentium angulum acutum, rectangulo bis comprehenſo ſub uno laterum circa angulum acutum in quod perpendicularis cadit, & recta intus intercepta à perpendiculari ad angulum acutum. quod erat demonſtrandum.

Ἔστω ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ὀξεῖαν ἔχων τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον ἐλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ τετραγώνων, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΓΒ τέτμηται ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Δ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΓ τετραγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΒΔ, ΔΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ ἴσα ἐστὶ τῷτε ἀπὸ τῆς ΑΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ· ὥστε μόνον ἀπὸ τῆς ΑΓ ἐλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΓΒ, ΒΑ τετραγώνων, τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐν ἄρα τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἐλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων, τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XIV. PROBL.

Dato rectilineo æquale quadratum conſtituere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

SIT datum rectilineum A: oportet ipſi A rectilineo æquale quadratum conſtituere.

Conſtituatur rectilineo A [per 45. 1.] æquale parallelogrammum rectangulum BΔ. ſi igitur BE eſt æqualis EΔ, factum jam erit quod proponebatur: etenim rectilineo A æquale quadratum conſtitutum eſt BΔ. ſin minus, una ipſarum BE, EΔ major eſt. ſit BE major; & producatur ad Z, ponaturque ipſi EΔ [per 3. 1.] æqualis EZ: deinde ſecta ZB bifariam in H, centro quidem H, intervallo autem æquali uni ipſarum HB, HZ [per 3. poſt.] ſemicirculus deſcribatur BΘZ, producaturque ΔE in Θ, & HΘ jungatur.

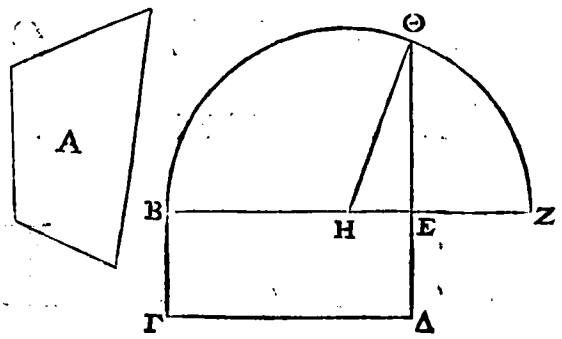
Ἔστω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ Α· δεῖ δὴ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Συνεστάτω τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΒΔ· εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ προταχθέν· συνίσταται γὰρ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον τὸ ΒΔ· εἰ δὲ οὔ, μία τῶν ΒΕ, ΕΔ μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΒΕ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΕΔ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ τετμήσθω ἡ ΖΒ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΗΒ, ΗΖ ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ ΒΘΖ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΕ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΘ.

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΒΖ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ,ΕΖ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΗ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραγώνῳ. ἴση δὲ ἡ ΗΖ τῇ ΗΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ,ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΘ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΘΕ,ΗΕ τετράγωνα· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΕ, ΗΕ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΗΕ τετράγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΖ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ,ΕΖ τὸ ΒΔ ἐστίν, ἴση γὰρ ἡ ΕΖ τῇ ΕΔ· τὸ ἄρα ΒΔ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΕ τετραγώνῳ. ἴσον δὲ τὸ ΒΔ τῷ Α εὐθυγράμμῳ· τὸ Α ἄρα εὐθύγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφομένῳ τετραγώνῳ.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Α ἴσον τετράγωνον συνέσταται, τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφόμενον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Quoniam igitur recta linea BZ secta est in partes æquales ad H & inæquales ad E, erit [per 5. 2.] rectangulum sub BE, EZ una cum quadrato quod sit ex EH æquale quadrato ex HZ. est autem HZ æqualis HΘ: rectangulum igitur sub BE, EZ una cum quadrato ex HE æquale est quadrato ex HΘ. sed quadrato ex HΘ æqualia sunt [per 47. 1.] ex ΘE, HE quadrata: ergo rectangulum sub BE, EZ una cum quadrato ex HE æquale est quadratis ex ΘE, HE. commune auferatur ex HE quadratum: reliquum igitur rectangulum sub BE, EZ est æquale quadrato ex EΘ. sed rectangulum sub BE, EZ est ipsum BΔ parallelelogrammum, quoniam EZ est æqualis EΔ: ergo BΔ parallelogrammum quadrato ex ΘE est æquale. parallelogrammum autem BΔ, est [per constr.] æquale rectilineo A: rectilineum igitur A quadrato ex EΘ descripto æquale erit.

Dato igitur rectilineo A æquale quadratum à recta EΘ descriptum constituitur. quod erat faciendum.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER TERTIUS.

DEFINITIONES.

1. Æquales circuli ſunt, quorum diametri ſunt æquales: vel quorum quæ ex centris ſunt æquales.

2. Recta linea circulum contingere dicitur, quæ contingens circulum & producta ipſum non ſecat.

3. Circuli contingere ſeſe dicuntur, qui contingentes ſe mutuo non ſecant.

4. In circulo æqualiter diſtare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipſas perpendiculares ductæ ſunt æquales.

5. Magis autem diſtare à centro dicitur ea in quam major perpendicularis cadit.

6. Segmentum circuli eſt figura, quæ recta linea & circuli circumferentia comprehenditur.

7. Angulus ſegmenti eſt, qui recta linea & circuli circumferentia comprehenditur.

8. Angulus in ſegmento eſt, quando in circumferentia ſegmenti ſumitur aliquod punctum atque ab ipſo ad terminos lineæ ejus quæ baſis eſt ſegmenti rectæ lineæ ducuntur, angulus à ductis lineis comprehenſus.

9. Quando autem comprehendentes angulum rectæ lineæ aſſumunt circumferentiam, illi inſiſtere angulus dicitur.

10. Sector circuli eſt, quando angu-

ΟΡΟΙ.

α'. Ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ὧν αἱ διάμετροι εἰσὶν ἴσαι· ἢ ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσίν.

β'. Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον.

γ'. Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται, οἵτινες ἁπτόμενοι ἀλλήλων οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους.

δ'. Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσι.

ε'. Μᾶλλον δὲ ἀπέχειν λέγεται, ἐφ' ἣν ἡ μείζων κάθετος πίπτει.

ϛ'. Τμῆμα κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

ζ'. Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

η'. Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστὶν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος ληφθῇ τι σημεῖον καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας ἥτις ἐστὶ βάσις τοῦ τμήματος ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν.

θ'. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ὑπολαμβάνωσί τινα περιφέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία.

ι'. Τομεὺς δὲ κύκλου ἐστὶν, ὅταν πρὸς τῷ κέν-

τρῳ

περὶ αὐτῆς ἡ κύκλου περιφέρεια, τὸ περιεχόμενον σχῆμα εὐθεῖαι τε τὴν γωνίαν περιέχουσαι εὐθεῖαι καὶ ἡ ἀπολαμβανομένη ὑπ' αὐτῶν περιφέρεια.

lus ad centrum conſtiterit, figura contenta rectis lineis angulum comprehendentibus & circumferentia ab ipſis aſſumpta.

ια. Ὅμοια τμήματα κύκλων ἐστὶν τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας· ἢ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

11. Similia circulorum ſegmenta ſunt, quæ angulos capiunt æquales: vel in quibus anguli ſunt inter ſe æquales.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Τοῦ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Propositio I. Problema.

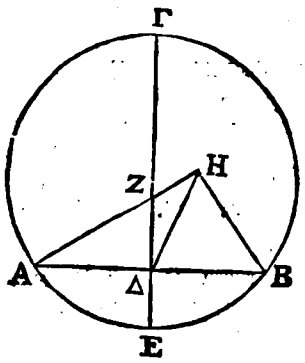
Dati circuli centrum invenire.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ· δεῖ δὴ τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Δήχθω τις εἰς αὐτὸν ὡς ἔτυχεν εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔΓ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ τετμήσθω ἡ ΓΕ δίχα κατὰ τὸ Ζ· λέγω ὅτι τὸ Ζ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν ἔστω τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΑ, ΗΔ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΗ, δύο δὴ αἱ ΑΔ, ΔΗ δυσὶ ταῖς ΗΔ, ΔΒ ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΗΑ βάσει τῇ ΗΒ ἴση ἐστίν, καὶ κέντρον γάρ ἐστὶ τὸ Η· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΔΒ ἐστὶν ἴση. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΔΒ. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΔΒ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΔΒ τῇ ὑπὸ ΗΔΒ, ἡ μείζων τῇ ἐλάττονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ Η κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλο τι πλὴν τοῦ Ζ.

Τὸ Ζ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



SIT datus circulus ΑΒΓ: oportet circuli ΑΒΓ centrum invenire.

Ducatur in ipſo quædam recta linea ΑΒ utcunque, & in puncto Δ [per 10. 1.] bifariam ſecetur, à puncto autem Δ ipſi ΑΒ ad rectos angulos [per 11. 1.] ducta ΔΓ producatur in Ε, & ſecetur ΓΕ bifariam in Ζ: dico punctum Ζ centrum eſſe circuli ΑΒΓ.

Non ſit enim Ζ, ſed, ſi fieri poteſt, ſit Η, & ducantur ΗΑ, ΗΔ, ΗΒ. itaque quoniam ΑΔ eſt æqualis ΔΒ, communis autem ΔΗ, erunt duæ ΑΔ, ΔΗ duabus ΗΔ, ΔΒ æquales, altera alteri, & baſis ΗΑ [per 15. def. 1.] æqualis eſt baſi ΗΒ, ſunt enim ex centro Η: angulus igitur ΑΔΗ [per 8. 1.] angulo ΗΔΒ eſt æqualis. cum autem recta linea ſuper rectam lineam inſiſtens angulos qui ſunt deinceps æquales inter ſe fecerit, [per 10. def. 1.] rectus eſt uterque æqualium angulorum: ergo angulus ΗΔΒ eſt rectus. ſed & rectus ΖΔΒ: æqualis igitur eſt angulus ΖΔΒ angulo ΗΔΒ, major minori, quod fieri non poteſt. quare Η non eſt circuli ΑΒΓ centrum. ſimiliter oſtendemus, neque aliud eſſe præter ipſum Ζ.

Ergo punctum Ζ centrum eſt circuli ΑΒΓ. quod erat faciendum.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἐν κύκλῳ τινὶ εὐθεῖα εὐθεῖάν τινα δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Corollarium.

Ex hoc perſpicuum eſt, ſi in circulo recta linea rectam bifariam & ad angulos rectos ſecet, circuli centrum eſſe in ſecante.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας λάβῃ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Prop. II. Theor.

Si in circumferentia circuli duo quælibet puncta ſumantur, quæ ipſa conjungit recta linea intra circulum cadet.

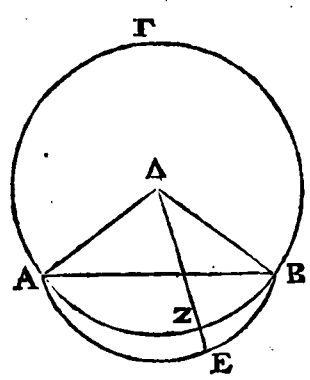
Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ εἰλήφθω τυχόντα δύο σημεῖα τὰ Α, Β· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ ΑΕΒ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΒ, καὶ διήχθω ἡ ΔΖ ἐπὶ τὸ Ε.

SIT circulus ΑΒΓ, & in circumferentia ipſius ſumantur duo quælibet puncta ΑΒ: dico rectam lineam, quæ à puncto Α ad Β ducitur, intra circulum cadere.

Si enim non, fieri ſi poteſt, cadat extra, ut ΑΕΒ; & ſumatur [per 1. 3.] circuli ΑΒΓ centrum, & ſit Δ, junganturque ΑΔ, ΔΒ, & producatur ΔΖ in Ε.

Quoniam igitur ΔA eſt æqualis ΔB, erit & angulus ΔAE [per 5. 1.] angulo ΔBE æqualis: & quoniam trianguli ΔAE unum latus AEB producitur, angulus ΔEB [per 16. 1.] angulo ΔAE major erit. angulus autem ΔAE æqualis eſt angulo ΔBE: ergo ΔEB angulus angulo ΔBE eſt major. ſed majori angulo [per 18. 1.] majus latus ſubtenditur: major igitur eſt ΔB ipſa ΔE. eſt autem rectæ ΔB æqualis ΔZ: ergo ΔZ eſt major ΔE, minor majore, quod fieri non poteſt. recta igitur linea à puncto A ad B ducta non cadet extra circulum. ſimiliter oſtendemus, neque in ipſam cadere circumferentiam: ergo intus cadat neceſſe eſt.



Si igitur in circumferentia circuli duo quælibet puncta ſumantur, quæ ipſa conjungit recta linea intra circulum cadet. quod erat demonſtrandum.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔA τῇ ΔB, ἴση ἄρα καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔAE τῇ ὑπὸ ΔBE· καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΔAE μία πλευρὰ προσεκβέβληται ἡ AEB, μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔEB γωνία τῆς ὑπὸ ΔAE. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΔAE τῇ ὑπὸ ΔBE· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔEB τῆς ὑπὸ ΔBE. τῇ δὲ πρὸς μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα ἡ ΔB τῆς ΔE. ἴση δὲ ἡ ΔB τῇ ΔZ· μείζων ἄρα ἡ ΔZ τῆς ΔE, ἡ ἐλάττων τοῦ μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὸ B ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐπ' αὐτῆς ἡ περιφερείας· ἐντὸς ἄρα.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

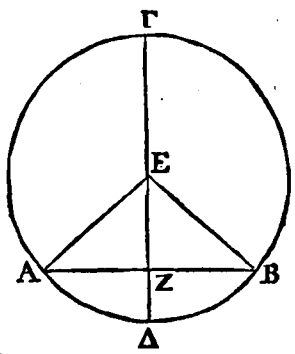
PROP. III. THEOR.

Si in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam non ductam per centrum bifariam ſecet, & ad angulos rectos ipſam ſecabit: quod ſi ad angulos rectos ipſam ſecet, & bifariam ſecabit.

SIT circulus ABΓ, & in ipſo recta linea per centrum ducta ΓΔ rectam lineam AB non ductam per centrum bifariam ſecet in puncto Z: dico quod etiam ad angulos rectos ipſam ſecat.

Sumatur enim [per 1. 3.] circuli ABΓ centrum, & ſit E, junganturque EA, EB.

Quoniam igitur AZ eſt æqualis ZB, communis autem ZE, duæ duabus æquales ſunt, & baſis EA baſi EB eſt æqualis; ergo & angulus AZE [per 8. 1.] angulo BZE æqualis erit. cum autem recta linea ſuper rectam inſiſtens angulos qui ſunt deinceps æquales inter ſe fecerit, rectus eſt uterque æqualium angulorum: uterque igitur AZE, BZE eſt rectus. quare recta linea ΓΔ per centrum ducta rectam lineam AB non ductam per centrum bifariam ſecans, & ad angulos rectos ipſam ſecat.



QUOD ſi recta ΓΔ rectam AB ad rectos angulos ſecet: dico quod etiam bifariam ipſam ſecat, hoc eſt, quod AZ ipſi ZB æqualis eſt.

Iiſdem enim conſtructis, quoniam EA quæ ex centro æqualis eſt EB, & angulus EAZ ipſi EBZ [per 5. 1.] æqualis erit. eſt autem & AZE rectus, æqualis recto BZE: duo igitur triangula ſunt EAZ, EBZ, duos angulos duobus angulis æquales habentia, unumque latus uni lateri æquale EZ, commune ſci-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ· καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ.

Ἔστω κύκλος ὁ ABΓ, καὶ ἐν αὐτῷ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΓΔ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν AB δίχα τεμνέτω κατὰ τὸ Z σημεῖον· λέγω ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ABΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ E, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ EA, EB.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZB, κοινὴ δὲ ἡ ZE, δύο δὴ δύο ἴσαι εἰσὶν, καὶ βάσις ἡ EA βάσει τῇ EB ἴση, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ AZE γωνίᾳ τῇ ὑπὸ BZE ἴση ἐστίν. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν· ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ AZE, BZE ὀρθή ἐστιν. ἡ ΓΔ ἄρα διὰ τοῦ κέντρου τὴν AB μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαν δίχα τέμνουσα, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει.

ΑΛΛΑ δὴ ἡ ΓΔ τὴν AB πρὸς ὀρθὰς τεμνέτω· λέγω ὅτι καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει, τουτ' ἔστιν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZB.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ EA τῇ EB, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ EAZ τῇ ὑπὸ EBZ. ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ AZE ὀρθῇ τῇ ὑπὸ BZE ἴση· δύο ἄρα τρίγωνά ἐστι τὰ EAZ, EBZ τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν τὴν EZ, ὑποτείνουσα

πάντων ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει· ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΒΖ.

Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ· καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

licet utrique, quod uni angulorum æqualium ſubtenditur: ergo & reliqua latera reliquis lateribus [per 26. 1.] æqualia habebunt; æqualis igitur eſt AZ ipſi BZ.

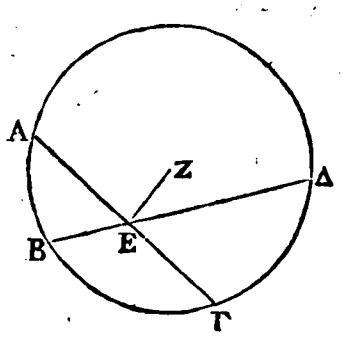
Si igitur in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam non ductam per centrum bifariam ſecet, & ad angulos rectos ipſam ſecabit: & ſi ad angulos rectos ipſam ſecet, & bifariam ſecabit. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· λέγω ὅτι οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτωσαν ἀλλήλας δίχα, ὥστε ἴσον εἶναι τὸ μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, τὸ δὲ ΒΕ τῇ ΕΔ· καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΕ.



Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΕ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένην τὴν ΑΓ δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΕΑ. πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖά τις ἡ ΖΕ εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΔ μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τεμεῖ· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΕΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΑ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΕΑ τῇ ὑπὸ ΖΕΒ, ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. IV. Theor.

Si in circulo duæ rectæ lineæ, non ductæ per centrum, ſe invicem ſecent; ſeſe bifariam non ſecabunt.

Sit circulus ABΓΔ; & in ipſo duæ rectæ lineæ AΓ, BΔ, non ductæ per centrum, ſe invicem ſecent in puncto E: dico eas ſeſe bifariam non ſecare.

Si enim fieri poteſt, ſecent ſeſe bifariam, ita ut AE ſit æqualis EΓ, & BE ipſi EΔ: ſumaturque [per 1. 3.] centrum circuli ABΓΔ, & ſit Z, jungaturque ZE.

Quoniam igitur recta linea ZE per centrum ducta rectam lineam AΓ non ductam per centrum bifariam ſecat, [per 3. 3.] & ad rectos angulos ipſam ſecabit: quare rectus eſt ZEA angulus. rurſus, quoniam recta linea ZE rectam lineam BΔ non ductam per centrum bifariam ſecat, & ad angulos rectos ipſam ſecabit: rectus igitur angulus eſt ZEB. oſtenſus autem eſt rectus & ZEA: ergo ZEA angulus ipſi ZEB æqualis erit, minor majori, quod fieri non poteſt. non igitur AΓ, BΔ ſeſe bifariam ſecant.

Quare ſi in circulo duæ rectæ lineæ, non ductæ per centrum, ſe invicem ſecent; ſeſe bifariam non ſecabunt. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

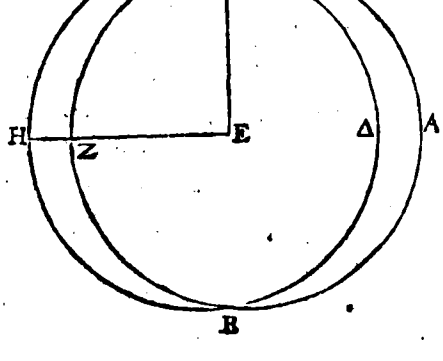
Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔΗ τεμνέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὰ Β, Γ σημεῖα· λέγω ὅτι οὐκ ἔστιν αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ, καὶ διήχθω ἡ ΕΖΗ ὡς ἔτυχε.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΕΖ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΗ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΕΗ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΕΓ τῇ ΕΖ ἴση· καὶ ἡ ΕΖ ἄρα τῇ ΕΗ ἴση ἐστὶν, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον.

Prop. V. Theor.

Si duo circuli ſe invicem ſecent, non erit ipſorum idem centrum.



Duo enim circuli ABΓ, ΓΔH ſe invicem ſecent in punctis B, Γ: dico ipſorum idem centrum non eſſe.

Si enim fieri poteſt, ſit illud E, jungaturque EΓ, & EZH utcunque ducatur.

Et quoniam E centrum eſt circuli ABΓ, erit EΓ [per 15. def. 1.] ipſi EZ æqualis. rurſus, quoniam E centrum eſt ΓΔH circuli, æqualis eſt EΓ ipſi EH. ſed oſtenſa eſt EΓ æqualis EZ: ergo EZ ipſi EH æqualis erit, minor majori, quod fieri non

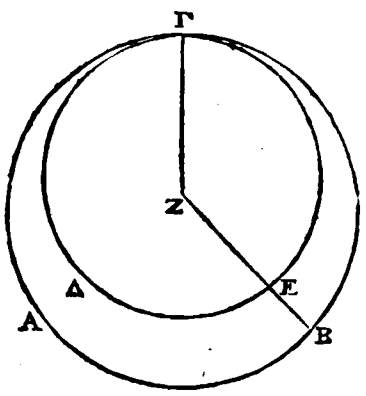
poteſt. non eſt igitur punctum E centrum circulorum ABΓ, ΓΔH.

Quare ſi duo circuli ſe invicem ſecent, non erit ipſorum idem centrum. quod erat demonſtrandum.

Prop. VI. Theor.

Si duo circuli ſeſe intra contingant, ipſorum idem centrum non erit.

DUO enim circuli ABΓ, ΓΔE ſeſe intra contingant in puncto Γ: dico ipſorum non eſſe idem centrum.



Si enim fieri poteſt, ſit Z, jungaturque ZΓ, & ducatur utcunque ZEB.

Quoniam igitur Z centrum eſt circuli ABΓ, æqualis eſt ZΓ ipſi ZB. rurſus, quoniam Z centrum eſt circuli ΓΔE, erit ZΓ æqualis ZE. oſtenſa autem eſt ZΓ æqualis ZB: ergo & ZE ipſi ZB eſt æqualis, minor majori, quod fieri non poteſt. non eſt igitur Z punctum centrum circulorum ABΓ, ΓΔE.

Quare ſi duo circuli ſeſe intra contingant, ipſorum idem centrum non erit. quod erat demonſtrandum.

Prop. VII. Theor.

Si in circuli diametro aliquod punctum ſumatur quod non ſit centrum circuli, & ab eo in circulum cadant quædam rectæ lineæ; maxima quidem erit in qua centrum, reliqua vero minima: aliarum autem, ſemper propinquior ei quæ per centrum major eſt remotiore; duæque tantum æquales ab eodem puncto in circulum cadent, ex utraque parte minimæ.

SIT circulus ABΓΔ, ejus autem diameter ſit AΔ, & in ipſa AΔ ſumatur aliquod punctum Z quod non ſit centrum circuli, ſit autem circuli centrum E, & à puncto Z in circulum ABΓΔ cadant rectæ lineæ ZB, ZΓ, ZH: dico ZA maximam eſſe, ZΔ vero minimam; aliarum autem, ZB quidem majorem quam ZΓ, & ZΓ quam ZH.

Jungantur enim BE, ΓE, HE.

Et quoniam omnis trianguli duo latera [per 20. 1.] reliquo ſunt majora, erunt EB, EZ majores quam BZ. eſt autem AE æqualis BE, ergo BE, EZ ipſi AZ ſunt æquales: major igitur eſt AZ quam BZ. rurſus, quoniam BE eſt æqualis ΓE, communis autem ZE, duæ BE, EZ duabus ΓE, EZ ſunt æquales. ſed BEZ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, οὐκ ἔσονται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΓΔΕ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι οὐκ ἔστιν αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ, καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν ἡ ΖΕΒ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΓ τῇ ΖΕ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ ἴση· καὶ ἡ ΖΕ ἄρα τῇ ΖΒ ἴση ἐστὶν, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν ΑΒΓ, ΓΔΕ κύκλων.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τι σημεῖον ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες πρὸς τὸν κύκλον· μεγίστη μὲν ἔσται ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπὴ τῆς δ' ἄλλαι, ἀεὶ ἡ ἐγγίον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστί· δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Ζ, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, κέντρον δὲ τοῦ κύκλου ἔστω τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον προσπιπτέτωσαν εὐθεῖαί τινες αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΗ· λέγω ὅτι μεγίστη μὲν ἐστιν ἡ ΖΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ· τῶν δὲ ἄλλων, ἡ μὲν ΖΒ τῆς ΖΓ μείζων, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΕ, ΗΕ.

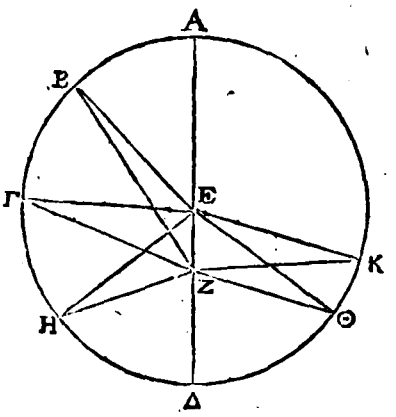
Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν, αἱ ἄρα ΕΒ, ΕΖ τῆς ΒΖ μείζονές εἰσιν. ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΒΕ, αἱ ἄρα ΒΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶ τῇ ΑΖ· μείζων ἄρα ἡ ΑΖ τῆς ΒΖ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΓΕ, κοινὴ ἡ ΖΕ, δύο δὴ αἱ ΒΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ

ὑπὸ

ὑπὸ ΒΕΖ γωνίας τῆς ὑπὸ ΓΕΖ μείζων· βάσις ἄρα ἡ ΒΖ βάσεως τῆς ΓΖ μείζων ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΗ μείζων.

ΠΑΛΙΝ, ἐπεὶ αἱ ΗΖ, ΖΕ τῆς ΕΗ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ΕΗ τῇ ΕΔ· αἱ ἄρα ΗΖ, ΖΕ τῆς ΕΔ μείζονές εἰσι. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΕΖ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΗΖ λοιπῆς τῆς ΖΔ μείζων ἐστί. μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΖΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ· μείζων δὲ ἡ μὲν ΖΒ τῆς ΖΓ, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΗ.

ΛΕΓΩ ὅτι ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου δύο μόνον ἴσαι εὐθεῖαι προσπεσοῦνται πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΖΔ ἐλαχίστης. συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε, τῇ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΕΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΕΘ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΗΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΘΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΕΖ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΘ ἴση ἐστίν. λέγω δὴ ὅτι τῇ ΖΗ ἄλλη ἴση οὐ προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου. εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπτέτω ἡ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΚ τῇ ΖΗ ἴση ἐστίν, ἀλλὰ ἡ ΖΘ τῇ ΖΗ ἴση ἐστί· καὶ ἡ ΖΚ ἄρα τῇ ΖΘ ἴση ἐστίν, ἡ ἐγγὺς τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῇ ἀπώτερον ἴση, ὅπερ ἀδύνατον.



Η ΚΑΙ ΟΥΤΩΣ. ἐπεζεύχθω ἡ ΕΚ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΕΚ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΕ, καὶ βάσις ἡ ΗΖ βάσει τῇ ΖΚ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΕΖ ἴση ἐστίν. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΕΖ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΕΖ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΕΖ ἐστιν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἑτέρα τις προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἴση τῇ ΗΖ· μία ἄρα μόνη.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχε· τῶν μὲν εἰς τὸ κοίλον τῆς περιφερείας προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἐγγίον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν· τῶν δὲ πρὸς τὸ κυρτὸν τῆς περιφερείας προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἐγγίον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων. δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι προσπεσοῦνται ἀπὸ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν

angulus major est angulo ΓΕΖ: basis igitur ΒΖ [per 24. 1.] basi ΓΖ est major. eadem ratione & ΓΖ major est quam ΖΗ.

Rursus, quoniam ΗΖ, ΖΕ majores sunt quam ΕΗ, æqualis autem ΕΗ ipsi ΕΔ: erunt ΗΖ, ΖΕ majores quam ΕΔ. communis auferatur ΕΖ: ergo reliqua ΗΖ major est quam reliqua ΖΔ. maxima igitur est ΖΑ, & ΖΔ minima: major vero ΖΒ quam ΖΓ, & ΖΓ quam ΖΗ.

Dico etiam à puncto Ζ duas tantum æquales rectas cadere in circulum ΑΒΓΔ, ex utraque parte minimæ ΖΔ. constituatur enim [per 23. 1.] ad lineam ΕΖ, atque ad datum in ea punctum Ε, angulo ΗΕΖ æqualis angulus ΖΕΘ, & ducatur ΖΘ. quoniam igitur ΗΕ est æqualis ΕΘ, communis autem ΕΖ, duæ ΗΕ, ΕΖ duabus ΘΕ, ΕΖ sunt æquales, & angulus ΗΕΖ [per constr.] æqualis angulo ΘΕΖ: basis igitur ΖΗ [per 4. 1.] basi ΖΘ æqualis erit. dico à puncto Ζ in circulum non cadere aliam ipsi ΖΗ æqualem. si enim fieri potest, cadat ΖΚ. & quoniam ΖΚ est æqualis ΖΗ, estque ipsi ΖΗ æqualis ΖΘ: erit & ΖΚ ipsi ΖΘ æqualis, videlicet propinquior ei quæ per centrum æqualis remotiori, quod fieri non potest.

Vel hoc modo. jungatur ΕΚ. & quoniam ΗΕ ipsi ΕΚ est æqualis, communis autem ΖΕ, & basis ΗΖ æqualis basi ΖΚ; erit & angulus ΗΕΖ [per 8. 1.] æqualis angulo ΚΕΖ. sed angulus ΗΕΖ angulo ΘΕΖ est æqualis: angulus igitur ΘΕΖ ipsi ΚΕΖ æqualis erit, minor majori, quod fieri non potest. quare à puncto Ζ in circulum non cadet alia recta linea æqualis ipsi ΗΖ: ergo una tantum cadet.

Si igitur in circuli diametro aliquod punctum sumatur, & quæ sequuntur. quod erat demonstrandum.

Prop. VIII. Theor.

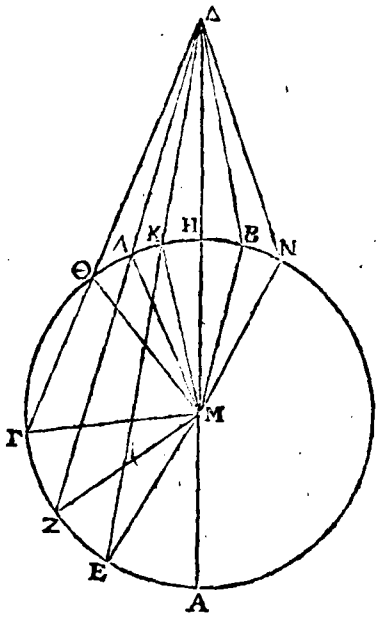
Si extra circulum aliquod punctum sumatur, atque ab eo ad circulum ducantur quædam rectæ lineæ, quarum una per centrum transeat, reliquæ vero utcunque. earum quidem, quæ in concavam circumferentiam cadunt, maxima est quæ per centrum transit: aliarum autem, semper propinquior ei quæ per centrum major est remotiore: earum vero, quæ in convexam circumferentiam cadunt, minima est quæ inter punctum & diametrum interjicitur: aliarum autem, semper quæ propinquior minimæ minor est remotiore: duæque tantum æquales à puncto in circulum cadunt, ex utraque parte minimæ.

Sit circulus ΑΒΓ, & extra circulum sumatur aliquod punctum Δ, ab eo autem in

circulum ducantur rectæ lineæ ΔΛ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, ſitque ΔΛ per centrum: dico earum quidem, quæ in ΑΕΖΓ concavam circumferentiam cadunt, maximam eſſe ΔΛ, quæ per centrum tranſit; & quæ propinquior eſt ei quæ per centrum ſemper erit major remotiore, videlicet ΔΕ quam ΔΖ, & ΔΖ quam ΔΓ; earum vero, quæ in convexam circumferentiam ΘΛΚΗ cadunt, minima eſt ΔΗ, quæ inter Δ & diametrum ΑΗ interjicitur; & quæ propinquior minimæ ſemper eſt minor remotiore, videlicet ΔΚ quam ΔΛ, & ΔΛ quam ΔΘ.

Sumatur enim [per 1. 3.] centrum circuli ΑΒΓ, quod ſit Μ; junganturque ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΘ.

Et quoniam ΑΜ eſt æqualis ΕΜ, communis addatur ΜΔ: ergo ΑΔ eſt æqualis ipſis ΕΜ, ΜΔ. ſed ΕΜ, ΜΔ [per 20. 1.] ſunt majores quam ΕΔ: ergo & ΑΔ quam ΕΔ eſt major. rurſus, quoniam æqualis eſt ΜΕ ipſi ΜΖ, ΜΔ vero communis; erunt ΕΜ, ΜΔ ipſis ΜΖ, ΜΔ æquales. & angulus ΕΜΔ major eſt angulo ΖΜΔ: baſis igitur ΕΔ [per 24. 1.] baſi ΖΔ major erit. ſimiliter demonſtrabimus & ΖΔ majorem eſſe quam ΓΔ: ergo maxima eſt ΔΛ; major autem ΔΕ quam ΔΖ, & ΔΖ quam ΔΓ.



Præterea quoniam ΜΚ, ΚΔ [per 20. 1.] ſunt majores quam ΜΔ, & ΜΗ eſt æqualis ΜΚ, erit reliqua ΚΔ major reliqua ΗΔ: quare ΗΔ minor quam ΚΔ, & idcirco minima eſt. & quoniam ſuper trianguli ΜΛΔ uno latere ΜΔ duæ rectæ lineæ ΜΚ, ΚΔ intus conſtituuntur, erunt ΜΚ, ΚΔ [per 21. 1.] minores ipſis ΜΛ, ΛΔ, quarum ΜΚ eſt æqualis ΜΛ: reliqua igitur ΔΚ minor eſt quam reliqua ΔΛ. ſimiliter oſtendemus & ΔΛ quam ΔΘ minorem eſſe: eſt ergo ΔΗ minima, minor vero ΔΚ quam ΔΛ, & ΔΛ quam ΔΘ.

Dico etiam duas tantum æquales à puncto Δ in circulum cadere, ex utraque parte minimæ. conſtituatur [per 23. 1.] ad rectam lineam ΜΔ, & ad datum in ea punctum Μ, angulo ΚΜΔ æqualis angulus ΔΜΒ, & ΔΒ jungatur. itaque quoniam ΜΚ eſt æqualis ΜΒ, communis autem ΜΔ, duæ ΚΜ, ΜΔ duabus ΒΜ, ΜΔ æquales ſunt, utraque utrique, & angulus ΚΜΔ æqualis angulo ΒΜΔ: baſis igitur ΔΚ [per 4. 1.] baſi ΔΒ eſt æqualis. dico autem à puncto Δ nullam aliam ipſi ΔΚ æqualem in circulum cadere. ſi enim fieri poteſt, cadat ΔΝ. & quoniam ΔΚ eſt æqualis ΔΝ, & ΔΒ ipſi ΔΚ æqualis; erit & ΔΒ æqualis ΔΝ, propinquior ſcilicet minimæ æqualis remotiori, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt.

εὐθεῖαί τινες πρὸς τὸν κύκλον αἱ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ. ἔστω δὲ ἡ ΔΑ διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι μὲν τῶν πρὸς τὴν ΑΕΖΓ κοίλην τοῦ περιφερείας πεσουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΔΑ· αἰεὶ δὲ ἡ ἐγγίον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν, ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ· τῶν δὲ πρὸς τὴν ΘΛΚΗ κυρτὴν περιφέρειαν πεσουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ ΔΗ, ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου Δ καὶ τῆς διαμέτρου ΑΗ· αἰεὶ δὲ ἡ ἐγγίον τῆς ΔΗ ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ ἀπώτερον, ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Μ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΜ τῇ ΕΜ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΜΔ· ἡ ἄρα ΑΔ ἴση ἐστὶ ταῖς ΕΜ, ΜΔ. ἀλλ' αἱ ΕΜ, ΜΔ τῆς ΕΔ μείζονές εἰσι καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΕΔ μείζων ἐστί. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΕ τῇ ΜΖ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, αἱ ΕΜ, ΜΔ ἄρα ταῖς ΜΖ, ΜΔ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΜΔ γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΜΔ μείζων ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΕΔ βάσεως τῆς ΖΔ μείζων ἐστί. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΖΔ τῆς ΓΔ μείζων ἐστί· μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΔΑ, μείζων δὲ ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ.

ΚΑΙ ἐπεὶ αἱ ΜΚ, ΚΔ τῆς ΜΔ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ΜΗ τῇ ΜΚ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΔ λοιπῆς τῆς ΗΔ μείζων ἐστί· ὥστε καὶ ἡ ΗΔ τῆς ΚΔ ἐλάσσων ἐστίν, ἐλαχίστη ἄρα ἐστί. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΜΛΔ δύο πλευραὶ αἱ ΜΚ, ΚΔ μιᾶς τῶν λοιπῶν τῆς ΜΔ δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάθησαν αἱ ΜΚ, ΚΔ, αἱ ἄρα ΜΚ, ΚΔ τῶν ΜΛ, ΛΔ ἐλάττονές εἰσιν, ὧν ἐστιν ἴση ἡ ΜΚ τῇ ΜΛ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΚ λοιπῆς τῆς ΔΛ ἐλάττων ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΔΛ τῆς ΔΘ ἐλάττων ἐστίν· ἐλαχίστη μὲν ἄρα ἡ ΔΗ, ἐλάττων δὲ ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

ΛΕΓΩ ὅτι καὶ δύο μόναι ἴσαι εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ Δ σημείου συσταθήσονται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΔΗ ἐλαχίστης. συνεστάτω πρὸς τῇ ΜΔ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Μ, τῇ ὑπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ ἴση γωνία ἡ ὑπὸ ΔΜΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΚ τῇ ΜΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, δύο δὴ αἱ ΚΜ, ΜΔ δυσὶ ταῖς ΒΜ, ΜΔ ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΜΔ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΔΚ βάσει τῇ ΔΒ ἴση ἐστί. λέγω δὴ ὅτι τῇ ΔΚ εὐθείᾳ ἄλλη ἴση οὐ προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Δ σημείου. εἰ γὰρ δυνατὸν προσπιπτέτω, καὶ ἔστω ἡ ΔΝ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΚ τῇ ΔΝ ἐστιν ἴση, ἀλλὰ ἡ ΔΚ τῇ ΔΒ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΔΒ ἄρα τῇ ΔΝ ἴση ἐστίν, ἡ ἐγγὺς τῆς ΔΗ ἐλαχίστης τῇ ἀπώτερον ἐστὶν ἴση, ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη.

Η ΚΑΙ

Η ΚΑΙ ΑΛΛΩΣ. ἐπεζεύχθω ἡ ΜΝ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΜ τῇ ΜΝ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, καὶ βάσις ἡ ΔΚ βάσει τῇ ΔΝ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΜΝ ἴση ἐστίν. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΚΜΔ τῇ ὑπὸ ΒΜΔ ἴση ἐστί· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΜΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΝΜΔ ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐφ' ἑκάτερα τὴν ΗΔ ἐλαχίστης προσπεσοῦνται.

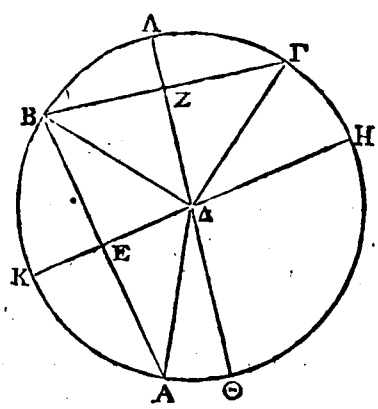
Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς, καὶ τὰ ἐξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς, ἀπ' αὐτοῦ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἐντὸς δέ τι αὐτοῦ σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι, αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ· λέγω ὅτι τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ σημεῖα, καὶ διῃχθεῖσαι αἱ ΕΔ, ΔΖ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Η, Κ, Θ, Λ σημεῖα.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΔ· δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΔ δυσὶ ταῖς ΒΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσί. καὶ βάσις ἡ ΔΑ βάσει τῇ ΔΒ ἴση ἐστί· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΕΔ, ΒΕΔ γωνιῶν· ἡ ΗΚ ἄρα τὴν ΑΒ δίχα τέμνουσα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει. καὶ ἐπεὶ, ἐὰν ἐν κύκλῳ τινὲς εὐθεῖαι εὐθεῖάν τινα δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνωσι, διὰ τοῦ τομὴν ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ἐπὶ δὴ τῆς ΗΚ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐπὶ τῆς ΘΛ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ. καὶ οὐδὲν ἄλλο κοινὸν ἔχουσιν αἱ ΗΚ, ΘΛ εὐθεῖαι, ἢ τὸ Δ σημεῖον· τὸ Δ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεῖαι πλείους ἢ δύο ἴσαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΛΛΩΣ.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐντὸς τὸ Δ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ· λέγω ὅτι τὸ ληφθὲν σημεῖον τὸ Δ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν ἔστω τὸ Ε, καὶ διῃχθεῖσα ἡ ΔΕ διήχθω ἐπὶ τὰ Ζ, Η σημεῖα, ἡ ἄρα ΖΗ διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ

VEL ALITER. jungatur MN. & quoniam æqualis eſt KM ipſi MN, communis autem MΔ, & baſis ΔK baſi ΔN æqualis: angulus KMΔ æqualis erit [per 8. 1.] angulo ΔMN. ſed KMΔ angulus eſt æqualis angulo BMΔ: angulus igitur BMΔ angulo NMΔ æqualis erit, minor majori, quod fieri non poteſt. quare non plures quam duæ rectæ lineæ à puncto Δ in circulum ABΓ cadent, ex utraq; parte minimæ HΔ.

Si igitur extra circulum aliquod punctum ſumatur, & quæ ſequuntur. quod erat demonſtrandum.

PROP. IX. THEOR.

Si intra circulum ſumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales, punctum quod ſumitur erit centrum circuli.

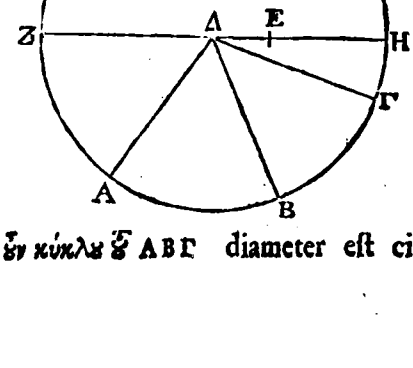
SIT circulus ABΓ, & intra ipſum ſumatur punctum Δ, à quo in circulum cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales, videlicet ΔA, ΔB, ΔΓ: dico punctum Δ centrum eſſe circuli ABΓ.

Jungantur enim AB, BΓ, ſecenturque bifariam [per 10. 1.] in punctis E, Z, & junctæ EΔ, ΔZ ad puncta H, K, Θ, Λ producantur.

Quoniam igitur AE eſt æqualis EB, communis autem EΔ: erunt duæ AE, EΔ duabus BE, EΔ æquales. & baſis ΔA eſt æqualis baſi ΔB: angulus igitur AEΔ angulo BEΔ [per 8. 1.] æqualis erit: & idcirco [per 10. def. 1.] uterque angulorum AEΔ, BEΔ eſt rectus: ergo HK bifariam ſecans AB, & ad angulos rectos ipſam ſecat. & quoniam, ſi in circulo recta linea rectam lineam bifariam & ad rectos angulos ſecet, circuli centrum eſt [per cor. 1. 3.] in ſecante: erit in HK centrum circuli ABΓ. eadem ratione & in ΘΛ erit centrum circuli ABΓ. nullum autem aliud commune habent rectæ lineæ HK, ΘΛ præter punctum Δ: eſt ergo Δ centrum circuli ABΓ.

Si igitur intra circulum ſumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales, punctum quod ſumitur erit centrum circuli. quod erat demonſtrandum.

ALITER.



Sumatur enim intra circulum ABΓ punctum aliquod Δ, atque à puncto Δ in circulum ABΓ cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales ΔA, ΔB, ΔΓ: dico aſſumptum punctum Δ centrum eſſe circuli ABΓ.

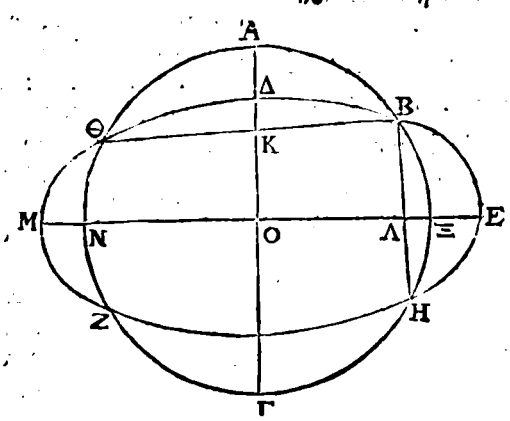
Si enim non ſit, fieri ſi poteſt, ſit E, & junctæ ΔE producatur in Z, H: ergo ZH diameter eſt circuli ABΓ. itaque quoniam in

ΣΗ diametro circuli ΑΒΓ ſumptum eſt aliquod punctum Δ, quod non eſt centrum circuli; [per 7. 3.] maxima quidem erit ΔΗ, major autem ΔΓ quam ΔΒ, & ΔΒ quam ΔΑ. ſed & æquales, quod fieri non poteſt: non eſt igitur Ε centrum circuli ΑΒΓ. ſimiliter oſtendemus neque aliud punctum centrum eſſe præter ipſum Δ: erit igitur Δ centrum circuli ΑΒΓ.

Prop. X. Theor.

Circulus circulum in pluribus quam duobus punctis non ſecat.

SI enim fieri poteſt, circulus ΑΒΓ circulum ΔΕΖ ſecet in pluribus punctis quam duobus, videlicet in Β, Η, Θ, & junctæ ΒΗ, ΒΘ bifariam ſecentur in Κ, Λ, atque à punctis Κ, Λ ipſis ΒΗ, ΒΘ ad rectos angulos ductæ ΚΓ, ΛΜ in puncta Α, Ε producantur.

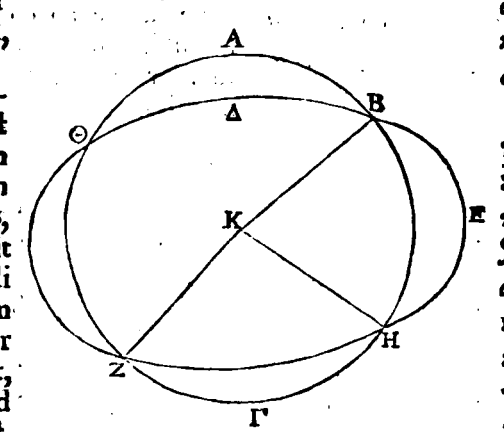


Quoniam igitur in circulo ΑΒΓ, recta linea ΑΓ rectam lineam ΒΘ bifariam & ad angulos rectos ſecat, in ipſa ΑΓ [per cor. 1. 3.] erit centrum circuli ΑΒΓ. rurſus, quoniam in eodem circulo ΑΒΓ recta linea ΝΞ rectam lineam ΒΗ bifariam ſecat & ad angulos rectos, in ipſa ΝΞ centrum erit circuli ΑΒΓ. oſtenſum autem eſt & in ipſa ΑΓ centrum eſſe, & in nullo alio puncto conveniunt inter ſe rectæ lineæ ΑΓ, ΝΞ, præterquam in Ο: eſt igitur Ο centrum circuli ΑΒΓ. ſimiliter oſtendemus punctum Ο centrum eſſe circuli ΔΕΖ: ergo duorum circulorum ſeſe ſecantium ΑΒΓ, ΔΕΖ idem erit centrum Ο, quod [per 5. 3.] fieri non poteſt.

Circulus igitur non ſecat circulum in pluribus punctis quam duobus. quod erat demonſtrandum.

Aliter.

Circulus enim ΑΒΓ rurſus circulum ΔΕΖ ſecet in pluribus punctis quam duobus, nempe in Β, Η, Ζ, & circuli ΑΒΓ centrum ſumatur quod ſit Κ, & ΚΖ, ΚΗ, ΚΒ jungantur.



Quoniam igitur intra circulum ΔΕΖ ſumptum eſt punctum Κ, à quo in circulum ΔΕΖ incidant plures quam duæ rectæ lineæ æquales, ΚΒ, ΚΖ, ΚΗ, punctum Κ erit [per 9. 3.] centrum circuli ΔΕΖ. eſt autem Κ centrum circuli ΑΒΓ: duorum igitur circulorum, qui ſeſe ſecant, erit idem centrum Κ, quod [per 5. 3.] fieri non poteſt.

Quare circulus circulum in pluribus quam duobus punctis non ſecat. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

ΕΙ γὰρ δυνατὸν, κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλον τὸν ΔΕΖ τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, τὰ Β, Η, Θ, καὶ ἤχθωσαν αἱ ΒΗ, ΒΘ δίχα τμηθεῖσαι κατὰ τὰ Κ, Λ σημεῖα. καὶ ἀπὸ τῶν Κ, Λ τῇ ΒΗ, ΒΘ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσαι αἱ ΚΓ, ΛΜ ἐπὶ τὰ Α, Ε διήχθωσαν σημεῖα.

Ἐπεὶ οὖν ἐν κύκλῳ τῷ ΑΒΓ εὐθεῖά τις ἡ ΑΓ εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΘ δίχα τέμνει καὶ πρὸς ὀρθὰς, ἐπὶ τοῦ ΑΓ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου. πάλιν, ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τῷ αὐτῷ τῷ ΑΒΓ εὐθεῖά τις ἡ ΝΞ εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΗ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τοῦ ΝΞ ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ ΑΓ, καὶ κατ' ἀδύνατον συμβάλλουσιν αἱ ΑΓ, ΝΞ εὐθεῖαι ἀλλήλαις ἢ κατὰ τὸ Ο· τὸ Ο ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου κέντρον ἐστὶ τὸ Ο· δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους, τῶν ΑΒΓ, ΔΕΖ, τὸ αὐτό ἐστι κέντρον τὸ Ο, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΛΛΩΣ.

Κύκλος γὰρ πάλιν ὁ ΑΒΓ κύκλον τὸν ΔΕΖ τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, τὰ Β, Η, Ζ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΖ, ΚΗ, ΚΒ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΔΕΖ εἴληπταί τι σημεῖον ἐντὸς, τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ πρὸς τὸν ΔΕΖ κύκλον προσπίπτωσι τρεῖς ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, αἱ ΚΒ, ΚΖ, ΚΗ· τὸ Κ ἄρα σημεῖόν ἐστι κέντρον τοῦ ΔΕΖ κύκλου. ἔστι δὲ καὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Κ· δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους τὸ αὐτὸ κέντρον ἐστὶ τὸ Κ, ὅπερ ἀδύνατον.

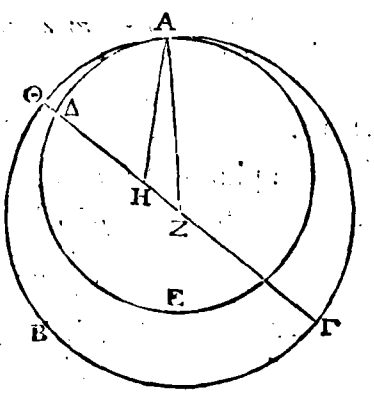
Οὐκ ἄρα κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, καὶ λη-φθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΔΕ ἁπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐντὸς κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ Α σημεῖον πεσεῖται.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν πιπτέτω ὡς ἡ ΖΗΔΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΑΗ.



Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗ, ΗΖ τῆς ΖΑ μείζονές εἰσι τὴν ΖΘ (ἴση γὰρ ἡ ΖΑ τῇ ΖΘ, ἀπὸ κέντρου γὰρ ἀμφω) μείζονες εἰσιν, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΗ λοιπῆς τῆς ΗΘ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ ΑΗ τῇ ΗΔ· καὶ ἡ ΗΔ ἄρα τῆς ΗΘ μείζων ἐστὶν, ἡ ἐλάττων τοῦ μείζονος, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς τοῦ κατὰ τὸ Α συναφοῦς πεσεῖται· ἐπ' αὐτῷ ἄρα.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα καὶ ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΛΛΩΣ.

Ἀλλὰ δὴ πιπτέτω ὡς ἡ ΗΖΓ καὶ συμπεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἡ ΓΖΗ ἐπὶ τὸ Θ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΑΖ.

Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗ, ΗΖ μείζονές εἰσι τῆς ΑΖ, ἀλλὰ ἡ ΑΖ ἴση ἐστὶ τῇ ΓΖ, τοῦτ' ἔστι τῇ ΖΘ, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΗ λοιπῆς τῆς ΗΘ μείζων ἐστὶ, τοῦτ' ἔστιν ἡ ΗΔ τῆς ΗΘ, ἡ ἐλάττων τοῦ μείζονος, ὅπερ οὐκ ἐνδέχεται ἀδύνατον. ὁμοίως δὲ κἂν ἐκτὸς ᾖ τοῦ μικροῦ τὸ κέντρον τοῦ μείζονος κύκλου, δείξομεν τὸ αὐτὸ ἄτοπον.

PROP. XI. THEOR.

Si duo circuli ſeſe intus contingant, & ſumantur centra ipſorum; recta linea ipſorum centra conjungens producta in circulorum contactum cadet.

DUO enim circuli ABΓ, AΔE ſeſe intus contingant in puncto A, & ſumatur circuli quidem ABΓ centrum, quod ſit Z, circuli vero AΔE centrum H: dico rectam lineam à puncto H ad Z ductam, ſi producatur, in punctum A cadere.

Si enim non, fieri ſi poteſt, cadat ut ZHΔΘ, & jungantur AZ, AH.

Quoniam igitur AH, HZ majores ſunt [per 20. 1.] quam ZA, hoc eſt, quam ZΘ, (eſt enim ZA æqualis ZΘ, ambæ ab eodem centro) communis auferatur ZH, reliqua igitur AH major eſt quam reliqua HΘ. ſed AH eſt æqualis HΔ: ergo HΔ major eſt ipſa HΘ, minor majore, quod fieri non poteſt. non igitur à puncto Z ad H ducta recta linea extra contactum A cadet: quare in ipſum cadat neceſſe eſt.

Si igitur duo circuli ſeſe intus contingant, recta linea ipſorum centra conjungens, ſi producatur, in contactum circulorum cadet. quod erat demonſtrandum.

ALITER.

Sed cadat ut HZΓ, & producatur in directum ΓZH ad punctum Θ, junganturque AH, AZ.

Quoniam igitur AH, HZ majores ſunt quam AZ, & AZ eſt æqualis ΓZ, hoc eſt ipſi ZΘ, communis auferatur ZH: reliqua igitur AH reliqua HΘ eſt major; hoc eſt HΔ major ipſa HΘ, minor majore, quod fieri non poteſt. ſimiliter & ſi extra circulum parvum ſit centrum majoris circuli, idem ſequi abſurdum oſtendemus.

Hæc demonſtratio vix differt à priori, adeo ut videatur non eſſe Euclidis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἅπτωνται ἀλλήλων ἐκτὸς, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς ἁφῆς ἐλεύσεται.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΑΔΕ ἁπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐκτὸς κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΓ κύκλου κέντρον, τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τοῦ κατὰ τὸ Α ἁφῆς ἐλεύσεται.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν ἐρχέσθω ὡς αἱ ΖΓΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΑΗ.

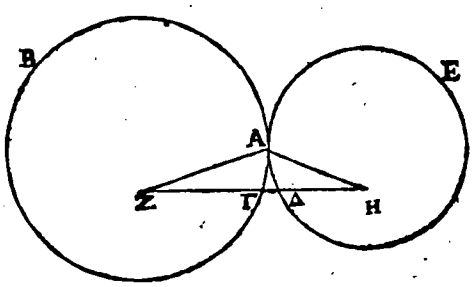
PROP. XII. THEOR.

Si duo circuli ſeſe extra contingant, recta linea ipſorum centra conjungens per contactum tranſibit.

DUO enim circuli ABΓ, AΔE ſeſe extra contingant in puncto A; & ſumatur circuli quidem ABΓ centrum quod ſit Z, circuli vero AΔE centrum H: dico rectam lineam, quæ à puncto Z ad H ducitur, per contactum A tranſire.

Si enim non, fieri ſi poteſt, cadat ut ZΓΔH, & AZ, AH jungantur.

Quoniam igitur Z centrum eſt circuli ABΓ, erit ZA æqualis ZΓ. rurſus, quoniam H centrum eſt AΔE circuli, erit AH ipſi HΔ æqualis. oſtenſa eſt autem & ZA æqualis ZΓ. ſunt igitur ZA, AH ipſis ZΓ, ΔH æquales: ergo tota ZH major eſt quam ZA, AH. ſed & [per 20. 1.] minor; quod fieri non poteſt. non igitur à puncto Z ad H ducta recta linea per contactum A non tranſibit: quare per ipſum tranſeat neceſſe eſt.



Si igitur duo circuli ſeſe extra contingant, recta linea ipſorum centra conjungens per contactum tranſibit. quod erat demonſtrandum.

Επεὶ ἓν τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ABΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ZA τῇ ZΓ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ H σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ AΔE κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ AH τῇ HΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ZA τῇ ZΓ ἴση· αἱ ἄρα ZA, AH τῇ ZΓ, ΔH ἴσαι εἰσίν· ὥστε ὅλη ἡ ZH τῶν ZA, AH μείζων ἐστίν, ἀλλὰ καὶ ἐλάττων· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ H ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἥξει διὰ τῆς κατὰ τὸ A ἐπαφῆς οὐκ ἐλεύσεται· δι' αὐτῆς ἄρα.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτὸς, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

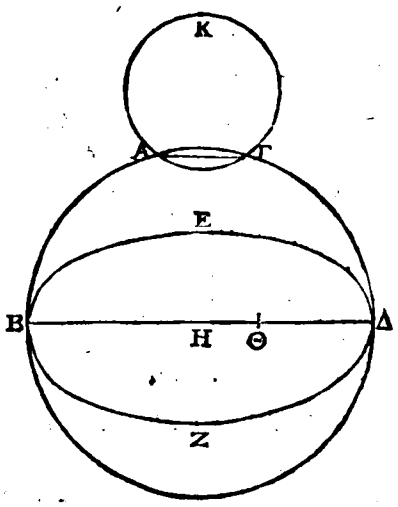
PROP. XIII. THEOR.

Circulus circulum non contingit in pluribus punctis quam uno, ſive intus ſive extra contingat.

SI enim fieri poteſt, circulus ABΔΓ circulum EBZΔ contingat primum intus in pluribus punctis quam uno, videlicet in B, Δ.

Et ſumatur [per 1. 3.] circuli quidem ABΔΓ centrum H, circuli vero EBZΔ centrum Θ.

Ergo recta linea, quæ à puncto H ad Θ ducitur, [per 11. 3.] in puncta B, Δ cadet. cadat ut BHΘΔ. & quoniam H centrum eſt circuli ABΔΓ, erit BH ipſi HΔ æqualis: major eſt igitur BH quam ΘΔ, & BΘ quam ΘΔ multo major. rurſus, quoniam Θ centrum eſt EBZΔ circuli, æqualis eſt BΘ ipſi ΘΔ. atqui oſtenſa eſt ipſa multo major, quod fieri non poteſt: non igitur circulus circulum intus contingit in pluribus punctis quam uno.



DICO etiam neque extra. ſi enim fieri poteſt, circulus AΓK circulum ABΔΓ extra contingat in pluribus punctis quam uno, videlicet in A, Γ, & ducatur AΓ.

Quoniam igitur in circumferentia circulorum ABΔΓ, AΓK ſumpta ſunt duo quælibet puncta A, Γ; recta linea quæ ipſa conjungit [per 2. 3.] intra utrumq; ipſorum cadet. ſed [per 3. def. 3.] quæ intra circulum quidem ABΔΓ cadit, extra circulum AΓK cadet, quod abſurdum: circulus igitur non contingit circulum extra in pluribus punctis quam uno. oſtenſum autem eſt neque intus contingere.

Circulus igitur circulum non contingit in pluribus punctis quam uno, ſive intus ſive extra contingat. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ κατ' ἕν, εἴτε ἐκτὸς εἴτε ἐντὸς ἐφάπτηται.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, κύκλος ὁ ABΔΓ κύκλου τοῦ EBZΔ ἁπτέσθω πρότερον ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν, τὰ B, Δ.

Καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ABΔΓ κύκλου κέντρον, τὸ H· τοῦ δὲ EBZΔ, τὸ Θ.

Ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ H ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐπὶ τὰ B, Δ πεσεῖται. πιπτέτω ὡς ἡ BHΘΔ. καὶ ἐπεὶ τὸ H σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ABΔΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ BH τῇ HΔ· μείζων ἄρα ἡ BH τῆς ΘΔ· πολλῷ ἄρα μείζων ἡ BΘ τῆς ΘΔ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Θ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ EBZΔ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ BΘ τῇ ΘΔ. ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῷ μείζων, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν.

ΛΕΓΩ δὴ ὅτι οὐδὲ ἐκτός. εἰ γὰρ δυνατὸν, κύκλος ὁ AΓK κύκλου τοῦ ABΔΓ ἐφαπτέσθω ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν, τὰ A, Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AΓ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλων τῶν ABΔΓ, AΓK εἴληπται ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑκατέρας δύο τυχόντα σημεῖα τὰ A, Γ, ἡ ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς ἑκατέρας πεσεῖται. ἀλλὰ τοῦ μὲν ABΔΓ ἐντὸς ἔπεσε, τοῦ δὲ AΓK ἐκτὸς, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα κύκλου κύκλος ἐφάπτεται ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν. ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ ἐντός.

Κύκλος ἄρα κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν, εἴτε ἐντὸς εἴτε ἐκτὸς ἐφάπτηται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Εν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

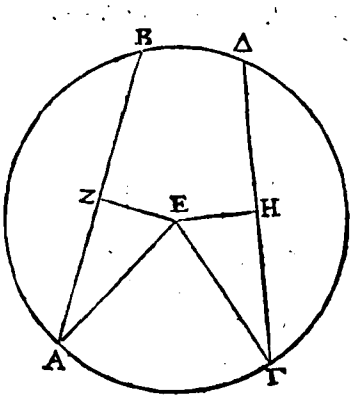
Prop. XIV. Theor.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro, & quæ æqualiter distant à centro sunt inter se æquales.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΔΓ, καὶ ἐν αὐτῷ ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ· λέγω ὅτι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΔΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΓΔ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΓ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΖ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΒ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει· ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, διπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΑΖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΔ τῆς ΓΗ ἐστὶ διπλῆ, καὶ ἔστιν ἴση ΑΒ τῇ ΓΔ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΓ, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΕ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Ζ γωνία· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Η γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΕ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ, ἴση γὰρ ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον ἐστίν, ἴση ἄρα ἡ ΖΕ τῇ ΕΗ. ἐν δὲ κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσιν· αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.



Ἀλλὰ δὴ αἱ ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖαι ἴσον ἀπεχέτωσαν ἀπὸ τοῦ κέντρου, τουτέστιν, ἴση ἔστω ἡ ΖΕ τῇ ΕΗ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι διπλῆ ἐστιν ἡ μὲν ΑΒ τῆς ΑΖ, ἡ δὲ ΓΔ τῆς ΓΗ· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΓ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΑ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΓ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστίν. ἴση γὰρ ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ, καὶ ἔστι τῆς μὲν ΑΖ διπλῆ ἡ ΑΒ, τῆς δὲ ΓΗ διπλῆ ἡ ΓΔ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SIT circulus ΑΒΔΓ, & in ipso æquales rectæ lineæ ΑΒ, ΓΔ: dico eas à centro æqualiter distare.

Sumatur enim circuli ΑΒΔΓ centrum quod sit Ε, & ab ipso ad ΑΒ, ΓΔ perpendiculares ducantur ΕΖ, ΕΗ, & jungantur ΑΕ, ΕΓ.

Quoniam igitur recta linea per centrum ducta ΕΖ rectam lineam ΑΒ non ductam per centrum ad rectos angulos secat, & bifariam [per 3. 3.] ipsam secat: quare ΑΖ est æqualis ΖΒ, ideoque ΑΒ ipsius ΑΖ dupla. eadem ratione & ΓΔ dupla est ΓΗ, atque est ΑΒ ipsi ΓΔ æqualis: æqualis igitur & ΑΖ ipsi ΓΗ. & quoniam ΑΕ est æqualis ΕΓ, erit & quadratum ex ΑΒ quadrato ex ΕΓ æquale. sed quadrato ex ΑΕ æqualia sunt [per 47. 1.] ex ΑΖ, ΖΕ quadrata, rectus est enim angulus ad Ζ: quadrato autem ex ΕΓ æqualia sunt quadrata ex ΕΗ, ΗΓ, cum angulus ad Η sit rectus: quadrata igitur ex ΑΖ, ΖΕ æqualia sunt quadratis ex ΓΗ, ΗΕ, è quibus quadratum ex ΑΖ quadrato ex ΓΗ est æquale; æqualis enim est ΑΖ ipsi ΓΗ: reliquum igitur quod fit ex ΖΕ quadratum æquale est reliquo ex ΕΗ; ac propterea ΖΕ ipsi ΕΗ est æqualis. in circulo autem æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, [per 4. def. 3.] quando à centro ad ipsas perpendiculares ductæ sunt æquales: ergo ΑΒ, ΓΔ à centro æqualiter distant.

Sed ΑΒ, ΓΔ æqualiter distent à centro, hoc est, sit ΖΕ æqualis ipsi ΕΗ: dico ΑΒ ipsi ΓΔ æqualem esse.

Iisdem enim constructis similiter ostendemus, ΑΒ duplam esse ipsius ΑΖ, & ΓΔ duplam ipsius ΓΗ: & quoniam æqualis est ΑΕ ipsi ΕΓ, erit & ex ΑΕ quadratum quadrato ex ΕΓ æquale. sed quadrato quidem ex ΑΕ æqualia sunt [per 47. 1.] quadrata ex ΕΖ, ΖΑ, quadrato autem ex ΕΓ æqualia quadrata ex ΕΗ, ΗΓ: quadrata igitur ex ΕΖ, ΖΑ quadratis ex ΕΗ, ΗΓ sunt æqualia, è quibus quadratum ex ΕΗ æquale est quadrato ex ΕΖ. est autem ΕΖ ipsi ΕΗ æqualis: reliquum igitur ex ΑΖ quadratum æquale est reliquo ex ΓΗ; ergo ΑΖ ipsi ΓΗ est æqualis. atque est ΑΒ ipsius ΑΖ dupla, & ΓΔ dupla ipsius ΓΗ: quare ΑΒ ipsi ΓΔ æqualis erit.

In circulo igitur æquales rectæ lineæ æqualiter à centro distant, & quæ æqualiter à centro distant inter se sunt æquales. quod erat demonstrandum.

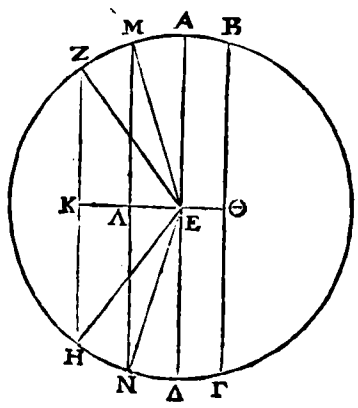
PROP.

Prop. XV. Theor.

In circulo maxima quidem eſt diameter: aliarum vero, ſemper propinquior centro major eſt remotiore.

SIT circulus ΑΒΓΔ, cujus diameter ΑΔ, centrum Ε, & propinquior quidem centro Ε ſit ΒΓ, remotior vero ΖΗ: dico ΑΔ maximam eſſe, & ΒΓ majorem quam ΖΗ.

Ducantur enim à centro ad ΒΓ, ΖΗ perpendiculares ΕΘ, ΕΚ. & quoniam ΒΓ propinquior eſt centro, remotior autem ΖΗ; erit [per 5. def. 3.] ΕΚ major quam ΕΘ. ponatur ipſi ΕΘ æqualis ΕΛ, & per Λ ipſi ΕΚ ad rectos angulos ducta ΛΜ producatur in Ν, & jungantur ΕΜ, ΕΝ, ΕΖ, ΕΗ.



Quoniam igitur ΕΘ eſt æqualis ΕΛ, erit [per 14. 3.] & ΒΓ ipſi ΜΝ æqualis. rurſus, quoniam æqualis eſt ΑΕ ipſi ΕΜ, & ΕΔ ipſi ΕΝ: erit ΑΔ ipſis ΜΕ, ΕΝ æqualis. ſed ΜΕ, ΕΝ majores ſunt quam ΜΝ: ergo & ΑΔ major eſt quam ΜΝ. at ΜΝ eſt æqualis ΒΓ: eſt igitur ΑΔ major quam ΒΓ. & quoniam duæ ΜΕ, ΕΝ duabus ΖΕ, ΕΗ ſint æquales, anguluſque ΜΕΝ major angulo ΖΕΗ; & baſis ΜΝ [per 24. 1.] baſi ΖΗ major erit. oſtenſa autem eſt ΜΝ æqualis ΒΓ: ergo & ΒΓ eſt major quam ΖΗ. maxima igitur eſt ΑΔ diameter, & ΒΓ eſt major quam ΖΗ.

Quare in circulo maxima eſt diameter: aliarum vero, ſemper propinquior centro major eſt remotiore. quod erat demonſtrandum.

Prop. XVI. Theor.

Recta diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducta cadit extra circulum: & in locum qui inter rectam lineam & circumferentiam interjicitur altera recta linea non cadet: & ſemicirculi angulus major eſt quovis angulo rectilineo acuto: reliquus autem minor.

SIT circulus ΑΒΓ circa centrum Δ & diametrum ΑΒ: dico rectam lineam, quæ à puncto Α ipſi ΑΒ ad rectos angulos ducitur, extra circulum cadere.

Si enim non, fieri ſi poteſt, cadat intus ut ΑΓ, & jungatur ΔΓ.

Quoniam igitur æqualis eſt ΔΑ ipſi ΔΓ, erit & angulus ΔΑΓ [per 5. 1.] angulo ΑΓΔ æqualis. rectus autem eſt ΔΑΓ, ergo & ΑΓΔ eſt rectus: ac propterea anguli ΔΑΓ, ΑΓΔ duobus rectis ſunt æquales, quod [per 17. 1.] fieri

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Εν κύκλῳ μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διάμετρος· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἐγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἐγγιον μὲν τοῦ Ε κέντρου ἔστω ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ· λέγω ὅτι μεγίστη μὲν ἐστιν ἡ ΑΔ, μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ.

Ηχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ Ε ταῖς ΒΓ, ΖΗ κάθετοι αἱ ΕΘ, ΕΚ. καὶ ἐπεὶ ἐγγιον μὲν τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ, μείζων ἄρα ἡ ΕΚ τῆς ΕΘ. κείσθω τῇ ΕΘ ἴση ἡ ΕΛ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΕΚ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ ΛΜ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΜ, ΕΝ, ΕΖ, ΕΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΕΛ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΜΝ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΜ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΕΝ, ἡ ἄρα ΑΔ ταῖς ΜΕ, ΕΝ ἴση ἐστίν. ἀλλ' αἱ ΜΕ, ΕΝ τῆς ΜΝ μείζονές εἰσι, καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΜΝ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ ΜΝ τῇ ΒΓ, ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΒΓ μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΜΕ, ΕΝ δυσὶ ταῖς ΖΕ, ΕΗ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΜΕΝ, γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΕΗ μείζων ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΜΝ βάσεως τῆς ΖΗ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΒΓ ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ μείζων ἐστίν. μεγίστη ἄρα ἡ ΑΔ διάμετρος, μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ.

Εν κύκλῳ ἄρα μεγίστη μὲν ἐστιν ἡ διάμετρος· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἐγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις'.

Η τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου· καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται· καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἁπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν· ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ περὶ κέντρον τὸ Δ καὶ διάμετρον τὴν ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν πιπτέτω ἐντὸς, ὡς ἡ ΑΓ καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Επεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΑΓ, ΑΓΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

ἐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α σημείου, τῇ ΒΑ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἐπὶ τῆς περιφερείας· ἐκτὸς ἄρα πεσέται, ὡς ἡ ΑΕ.

non poteſt. recta igitur à puncto Α ipſi ΒΑ ad rectos angulos ducta non cadet intra circulum. ſimiliter oſtendemus neque in circumferentiam cadere: extra igitur cadat neceſſe eſt, ut ΑΕ.

ΛΕΓΩ ὅτι εἰς τὸ μεταξὺ τόπον, τῆς τε ΑΕ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

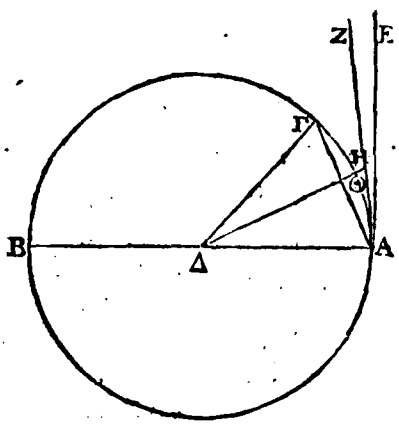
Dico in locum, qui inter rectam lineam ΑΕ & circumferentiam ΓΘΑ interjicitur, alteram rectam lineam non cadere.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, παρεμπιπτέτω ὡς ἡ ΖΑ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐπὶ τὴν ΖΑ κάθετος ἡ ΔΗ.

Si enim fieri poteſt, cadat ut ΖΑ, & à puncto Δ ad ΖΑ perpendicularis ducatur ΔΗ.

Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΔ, ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ ὑπὸ ΔΑΗ· μείζων ἄρα ἡ ΑΔ τῆς ΔΗ. ἴση δὲ ἡ ΔΑ τῇ ΔΘ· μείζων ἄρα ἡ ΔΘ τῆς ΔΗ, ἡ ἐλάττων τοῦ μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα εἰς τὸ μεταξὺ τόπον, τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

Et quoniam rectus eſt angulus ΑΗΔ, minor autem recto ΔΑΗ, erit ΑΔ [per 19. 1.] major quam ΔΗ. æqualis autem eſt ΔΑ ipſi ΔΘ: major igitur eſt ΔΘ ipſa ΔΗ, minor majore, quod fieri non poteſt. in locum igitur, qui inter rectam lineam & circumferentiam interjicitur, altera recta linea non cadet.



ΛΕΓΩ ὅτι καὶ ἡ μετὰ τῆς ἡμικυκλίου γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας, ἀπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν· ἡ δὲ λοιπὴ, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας, ἀπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου ἐλάττων ἐστίν.

Dico præterea angulum ſemicirculi, qui à recta linea ΒΑ & circumferentia ΓΘΑ comprehenditur, quovis angulo acuto rectilineo majorem eſſe; reliquum vero, comprehenſum à circumferentia ΓΘΑ & recta linea ΑΕ, quovis angulo acuto rectilineo eſſe minorem.

Εἰ γάρ ἐστί τις γωνία εὐθύγραμμος, μείζων μὲν τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας, ἐλάττων δὲ τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας, εἰς τὸ μεταξὺ τόπον τῆς τε ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας παρεμπεσεῖται εὐθεῖα, ἥτις ποιήσει μείζονα μὲν τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένην, ἐλάττονα δὲ τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας. οὐ παρεμπίπτει δέ· οὐκ ἄρα τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπὸ τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ἔσται μείζων ὀξεῖα ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένη, οὐδὲ μὴν ἐλάττων τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si enim eſt aliquis angulus rectilineus major comprehenſo à recta linea ΒΑ & circumferentia ΓΘΑ, vel aliquis minor comprehenſo à ΓΘΑ circumferentia & recta linea ΑΕ; in locum, qui inter circumferentiam ΓΘΑ & rectam lineam ΑΕ interjicitur, cadet aliqua recta linea quæ faciet angulum majorem quidem comprehenſo à recta linea ΒΑ & ΓΘΑ circumferentia, qui ſcilicet rectis lineis comprehenditur, minorem vero comprehenſo à circumferentia ΓΘΑ & ΑΕ recta linea. non cadit autem: angulus igitur acutus, qui à rectis lineis comprehenditur, non eſt major angulo comprehenſo à recta linea ΒΑ & ΓΘΑ circumferentia, neque minor comprehenſo à circumferentia ΓΘΑ & ΑΕ recta linea. quod erat demonſtrandum.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτων φανερὸν, ὅτι ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· καὶ ὅτι εὐθεῖα κύκλου καθ' ἓν μόνον ἐφάπτεται σημεῖον. ἐπὶ δὲ περ καὶ ἡ κατὰ δύο αὐτῷ συμβάλλουσα ἐντὸς αὐτοῦ πίπτουσα ἐδείχθη.

Corollarium.

Ex his manifeſtum eſt, quod recta linea, quæ ad rectos angulos ducitur diametro circuli ab extremitate ejuſdem, circulum contingit: & quod recta linea circulum contingit in unico tantum puncto. quoniam quæ circulo in duobus punctis occurrit [per 2. 3.] intra ipſum cadere oſtendebatur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου ἐφάπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Prop. XVII. Probl.

A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum circulum contingat.

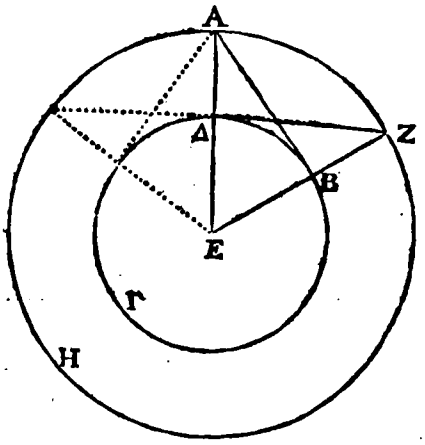
Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ ΒΓΔ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τοῦ ΒΓΔ κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

SIT datum quidem punctum Α, datus autem circulus ΒΓΔ: oportet à puncto Α rectam lineam ducere, quæ circulum ΒΓΔ contingat.

Εἰλήφθω γὰρ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ε διαστήματι δὲ τῷ ΕΑ κύ-

Sumatur enim centrum circuli Ε, & jungatur ΑΕ, & centro quidem Ε intervallo autem ΕΑ [per 3. poſt.]

poſt.] circulus AZH deſcribatur; & à puncto Δ ipſi EA ad rectos angulos [per 11. 1.] ducatur ΔZ, junganturque EBZ, AB: dico à puncto A ductam eſſe AB, quæ circulum BΓΔ contingit.



Quoniam enim E centrum eſt circulorum BΓΔ, AZH, erit EA æqualis EZ, & EΔ ipſi EB: duæ igitur AE, EB duabus ZE, EΔ ſunt æquales, & angulum communem continent, qui eſt ad E: baſis igitur ΔZ [per 4. 1.] baſi AB eſt æqualis, triangulumque ΔEZ æquale triangulo EBA, & reliqui anguli reliquis angulis: æquales igitur eſt angulus EBA angulo EΔZ. rectus autem eſt EΔZ, quare & EBA rectus. atque eſt EB ex centro: quæ autem diametro circuli ab extremitate ad rectos angulos ducitur [per 16. 3.] circulum contingit: ergo AB contingit circulum.

A dato igitur puncto A ducta eſt recta linea AB, quæ circulum BΓΔ contingit. quod erat faciendum.

κλος γεγράφθω ὁ AZH, καὶ ἀπὸ τῦ Δ τῇ EA πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔZ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ EBZ, AB· λέγω ὅτι ἀπὸ τῦ A σημείυ τῦ BΓΔ κύκλυ ἐφαπτομένη ἦκται ἡ AB.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ E κέντρον ἐστὶ τῶν BΓΔ, AZH κύκλων, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν EA τῇ EZ, ἡ δὲ EΔ τῇ EB· δύο δὴ αἱ AE, EB δυσὶ ταῖς ZE, EΔ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχυσι, τὴν πρὸς τῷ E· βάσις ἄρα ἡ ΔZ βάσει τῇ AB ἴση ἐστί. καὶ τὸ ΔEZ τρίγωνον τῷ EBA τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις· ἴση ἄρα τῇ ὑπὸ EΔZ ἡ ὑπὸ EBA. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ EΔZ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ EBA. καὶ ἐστὶν ἡ EB ἐκ τῦ κέντρυ· ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τῦ κύκλυ πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τῦ κύκλυ· ἡ AB ἄρα ἐφάπτεται τῦ κύκλυ.

Ἀπὸ τῦ δοθέντος ἄρα σημείυ τῦ A τῦ δοθέντος κύκλυ τῦ BΓΔ ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ AB. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

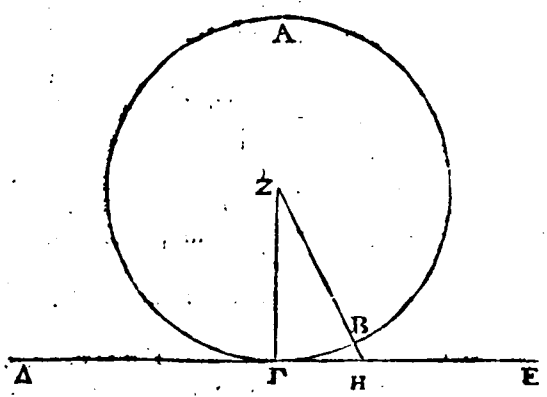
Prop. XVIII. Theor.

Si recta linea circulum contingat, à centro autem ad contactum recta linea ducatur, ea perpendicularis erit tangenti.

CIrculum enim ABΓ contingat recta linea ΔE in puncto Γ, & circuli ABΓ centrum ſumatur Z, à quo ad Γ ducatur ZΓ: dico ZΓ perpendicularem eſſe ad ipſam ΔE.

Si enim non fit ita, ducatur [per 12. 1.] à puncto Z ad ΔE perpendicularis ZH.

Quoniam igitur angulus ZHΓ rectus eſt, erit [per 17. 1.] HΓZ acutus: majorem autem angulum [per 19. 1.] majus latus ſubtendit, major igitur eſt ZΓ quam ZH. eſt autem ZΓ æqualis ipſi ZB: ergo ZB eſt major ipſa ZH, minor majore, quod fieri non poteſt. non eſt igitur ZH perpendicularis rectæ ΔE. ſimiliter oſtendemus neque aliam quampiam eſſe præter ipſam ZΓ: ergo ZΓ ad ΔE eſt perpendicularis.



Si igitur recta linea circulum contingat, à centro autem ad contactum recta linea ducatur, ea perpendicularis erit tangenti. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Ἐὰν κύκλυ ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῦ κέντρυ ἐπί τ' ἀφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην.

Κύκλυ γὰρ τῦ ABΓ ἐφάπτεσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔE κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τῦ ABΓ κύκλυ τὸ Z, καὶ ἀπὸ τῦ Z ἐπὶ τὸ Γ ἐπεζεύχθω ἡ ZΓ· λέγω ὅτι ἡ ZΓ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔE.

Εἰ γὰρ μή, ἤχθω ἀπὸ τῦ Z ἐπὶ τὴν ΔE κάθετος ἡ ZH.

Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ZHΓ γωνία ὀρθή ἐστιν, ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ HΓZ· τῷ δὲ μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, μείζων ἄρα ἡ ZΓ τῆς ZH. ἴση δὲ ἡ ZΓ τῇ ZB· μείζων ἄρα ἡ ZB τῆς ZH, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ZH κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔE. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ZΓ· ἡ ZΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔE.

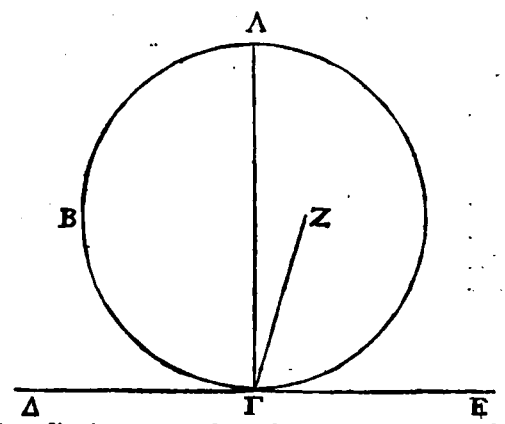
Ἐὰν ἄρα κύκλυ ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῦ κέντρυ ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἁπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΑ· λέγω ὅτι ἐπὶ τῆς ΑΓ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΖ.



Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὰ ἁφὴν ἐπέζευκται ἡ ΖΓ, ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΕ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ ὀρθή· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΕ τῇ ὑπὸ ΑΓΕ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ Ζ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλό τι πλὴν ἐπὶ τῆς ΑΓ.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XIX. THEOR.

Si recta linea circulum contingat, à contactu autem recta linea ducatur ad angulos rectos tangenti, centrum circuli erit in eadem.

CIrculum enim ABΓ contingat quædam recta linea ΔΕ in Γ, & à puncto Γ ipsi ΔΕ ad rectos angulos ducatur ΓΑ: dico circuli centrum esse in ipsa ΑΓ.

Si enim non, fieri si potest, sit Ζ centrum, & jungatur ΓΖ.

Quoniam igitur circulum ABΓ contingit quædam recta linea ΔΕ, & à centro ad contactum ducta est ΖΓ, erit [per 18. 3.] ΖΓ ad ipsam ΔΕ perpendicularis: rectus igitur est angulus ΖΓΕ. est autem & ΑΓΕ rectus: ergo ΖΓΕ angulus est æqualis angulo ΑΓΕ, minor majori, quod fieri non potest. non est igitur Ζ centrum circuli ABΓ. similiter ostendemus neque aliud aliquod esse, præterquam in ipsa ΑΓ.

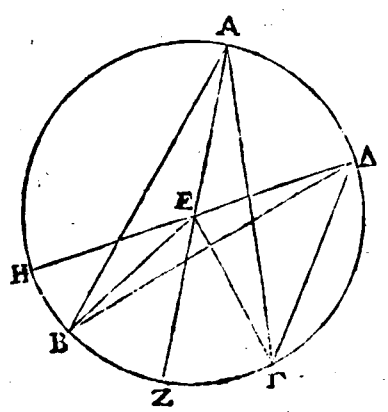
Quare si recta linea circulum contingat, à contactu autem recta linea ducatur ad angulos rectos tangenti, centrum circuli erit in eadem. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐν κύκλῳ, ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ αὐτοῦ γωνία ἔστω ἡ ὑπὸ ΒΕΓ, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, ἐχέτωσαν δὲ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν τὴν ΒΓ· λέγω ὅτι διπλασίων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΕΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΕ διήχθω ἐπὶ τὸ Ζ.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΒ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ ἴση ἐστίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΑΒ, ΕΒΑ γωνίαι τῆς ὑπὸ ΕΑΒ διπλάσιαί εἰσιν. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΕΖ τῇ ὑπὸ ΕΑΒ, ΕΒΑ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΖ ἄρα τῆς ὑπὸ ΕΑΒ ἐστὶ διπλῆ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τῆς ὑπὸ ΕΑΓ ἐστὶ διπλῆ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΓ ὅλης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ ἐστὶ διπλῆ.

Κεκλάσθω δὴ πάλιν, καὶ ἔστω γωνία ἑτέρα ἡ

PROP. XX. THEOR.

In circulo, angulus qui ad centrum duplus est ejus qui ad circumferentiam, quando circumferentiam eandem habent pro basi.

SIT circulus ABΓ, ad cujus centrum sit angulus ΒΕΓ, ad circumferentiam vero ΒΑΓ, & eandem circumferentiam ΒΓ habeant pro basi: dico angulum ΒΕΓ anguli ΒΑΓ duplum esse.

Jungatur enim ΑΕ & ad Ζ producatur.

Itaque quoniam ΕΑ est æqualis ΕΒ, erit & angulus ΕΑΒ [per 5. 1.] angulo ΕΒΑ æqualis: anguli igitur ΕΑΒ, ΕΒΑ dupli sunt ipsius anguli ΕΑΒ. sed angulus ΒΕΖ est [per 32. 1.] æqualis angulis ΕΑΒ, ΕΒΑ: ergo angulus ΒΕΖ duplus est anguli ΕΑΒ. eadem ratione & angulus ΖΕΓ duplus est ipsius ΕΑΓ: totus igitur ΒΕΓ totius ΒΑΓ duplus erit.

Rursus inclinetur, & sit alter angulus ΒΔΓ,

junctaque Δ E ad H producatur. similiter ostendemus angulum H E Γ anguli H Δ Γ duplum esse, è quibus H E B duplus est ipsius H Δ B: ergo reliquus B E Γ reliqui B Δ Γ est duplus.

In circulo igitur, angulus qui ad centrum duplus est ejus qui ad circumferentiam, quando circumferentiam eandem habent pro basi. quod erat demonstrandum.

ὑπὸ ΒΔΓ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΗΕΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΗΔΓ, ὧν ἡ ὑπὸ ΗΕΒ διπλῆ ἐστι τῆς ὑπὸ ΗΔΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΓ διπλῆ ἐστι τῆς ὑπὸ ΒΔΓ.

Ἐν κύκλῳ ἄρα ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXI. Theor.

Anguli in eodem circuli segmento sunt inter se æquales.

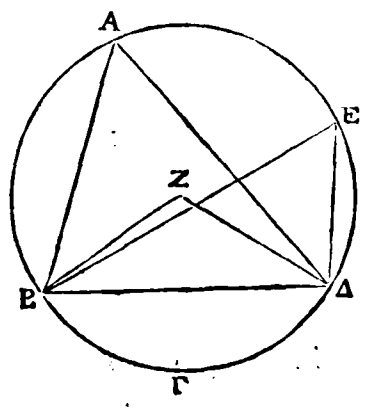
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

SIT circulus A B Γ Δ, & in eodem segmento B A E Δ anguli sint B A Δ, B E Δ: dico eos inter se esse æquales.

Sumatur enim [per 1. 3.] circuli A B Γ Δ centrum quod sit Z, junganturque B Z, Z Δ.

Quoniam autem angulus B Z Δ est ad centrum, angulus vero B A Δ ad circumferentiam, & circumferentiam eandem B Γ Δ habent pro basi, erit [per 20. 3.] angulus B Z Δ duplus anguli B A Δ. eadem ratione angulus B Z Δ duplus est etiam anguli B E Δ: ergo angulus B A Δ [per 7. ax.] angulo B E Δ æqualis erit.



Anguli igitur in eodem circuli segmento sunt inter se æquales. quod erat demonstrandum.

Ἔστω κύκλος ὁ Α Β Γ Δ, καὶ ἐν τῷ τμήματι τῷ Β Α Ε Δ γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ Β Α Δ, Β Ε Δ· λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ Β Α Δ, Β Ε Δ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ Α Β Γ Δ κύκλου τὸ κέντρον, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Β Ζ, Ζ Δ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ Β Ζ Δ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ Β Α Δ πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ἔχουσι δὲ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν, τὴν Β Γ Δ· ἡ ἄρα ὑπὸ Β Ζ Δ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ Β Α Δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ Β Ζ Δ τῆς ὑπὸ Β Ε Δ ἐστὶ διπλασίων· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ Β Α Δ τῇ ὑπὸ Β Ε Δ.

Ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXII. Theor.

Quadrilaterorum, quæ circulis inscribuntur, anguli oppositi sunt duobus rectis æquales.

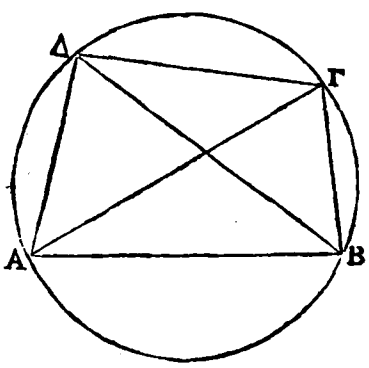
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

SIT circulus A B Γ Δ, & in ipso quadrilaterum A B Γ Δ: dico angulos ipsius oppositos duobus rectis esse æquales.

Jungantur A Γ, B Δ.

Quoniam igitur omnis trianguli tres anguli sunt [per 32. 1.] duobus rectis æquales, erunt trianguli A B Γ tres anguli Γ A B, A B Γ, B Γ A æquales duobus rectis. sed angulus Γ A B est [per 21. 3.] æqualis angulo B Δ Γ, in eodem enim sunt segmento B A Δ Γ, & angulus A Γ B æqualis ipsi A Δ B, quod sint in eodem A Δ Γ B segmento: totus igitur angulus A Δ Γ angulis B A Γ, A Γ B est æqualis. communis apponatur A B Γ angulus: sunt igitur anguli A B Γ, B A Γ, A Γ B, angulis A B Γ, A Δ Γ æquales. sed A B Γ, B A Γ, A Γ B sunt duobus rectis æquales: ergo & anguli A B Γ, A Δ Γ sunt duobus rectis æquales. similiter ostendemus angulos quoque B A Δ, Δ Γ B duobus rectis esse æquales.



Ἔστω κύκλος ὁ Α Β Γ Δ, καὶ ἐν αὐτῷ τετράπλευρον ἔστω τὸ Α Β Γ Δ· λέγω ὅτι αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ Α Γ, Β Δ.

Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, τοῦ Α Β Γ αἱ τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ Γ Α Β, Α Β Γ, Β Γ Α δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ Γ Α Β τῇ ὑπὸ Β Δ Γ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματί εἰσι τῷ Β Α Δ Γ, ἡ δὲ ὑπὸ Α Γ Β τῇ ὑπὸ Α Δ Β, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματί εἰσι τῷ Α Δ Γ Β· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ Α Δ Γ σὺν τῇ ὑπὸ Β Α Γ, Α Γ Β ἴση ἐστί. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ Α Β Γ· αἱ ἄρα ὑπὸ Α Β Γ, Β Α Γ, Α Γ Β σὺν ὑπὸ Α Β Γ, Α Δ Γ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ Α Β Γ, Β Α Γ, Α Γ Β δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· καὶ αἱ ὑπὸ Α Β Γ, Α Δ Γ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ὑπὸ Β Α Δ, Δ Γ Β γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί.

Τῶν

Τῶν ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Quadrilaterorum igitur, quæ circulis inſcribuntur, anguli oppoſiti ſunt duobus rectis æquales. quod erat demonſtrandum.

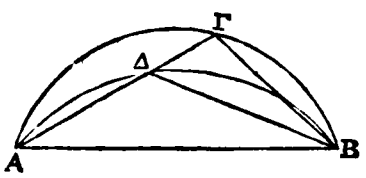
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα ὡσαύτως συνεστάτων οὐκ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

PROP. XXIII. THEOR.

Super eadem recta linea duo circulorum ſegmenta ſimilia & inæqualia ex eadem parte non conſtituentur.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα συνεστάτω ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ ΑΓΒ, ΑΔΒ, καὶ διήχθω ἡ ΑΔΓ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΒ, ΔΒ.



Ἐπεὶ οὖν ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΓΒ τμῆμα τῷ ΑΔΒ τμήματι, ὅμοια δὲ τμήματα κύκλων ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα συσταθήσεται ὡσαύτως ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SI enim fieri poteſt, ſuper eadem recta linea AB duo circulorum ſegmenta ſimilia & inæqualia conſtituantur ex eadem parte AΓB, AΔB, ducaturque AΔΓ, & jungantur ΓB, ΔB.

Quoniam igitur ſegmentum AΓB ſimile eſt ſegmento AΔB, ſimilia autem circulorum ſegmenta ſunt [per 11. def. 3.] quæ angulos capiunt æquales; erit AΓB angulus æqualis angulo AΔB, exterior interiori, quod [per 16. 1.] fieri non poteſt.

Non igitur ſuper eadem recta linea duo circulorum ſegmenta ſimilia & inæqualia ex eadem parte conſtituentur. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

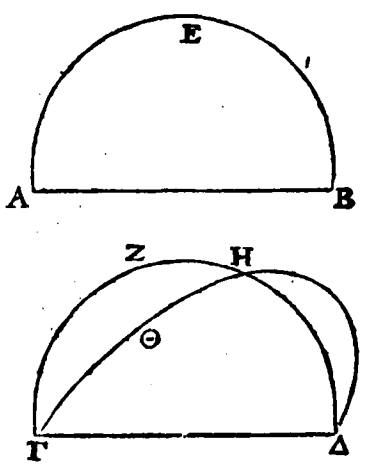
PROP. XXIV. THEOR.

Super æqualibus rectis lineis ſimilia circulorum ſegmenta ſunt inter ſe æqualia.

Ἐστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ ΑΕΒ, ΓΖΔ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕΒ τμῆμα τῷ ΓΖΔ τμήματι.

SInt enim ſuper æqualibus rectis lineis AB, ΓΔ ſimilia circulorum ſegmenta AEB, ΓZΔ: dico ſegmentum AEB ſegmento ΓZΔ eſſe æquale.

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΕΒ τμήματος ἐπὶ τὸ ΓΖΔ, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Γ, τῆς δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΓΔ· ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ ΑΕΒ τμῆμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ. εἰ γὰρ ἡ ΑΒ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐφαρμόσει, τὸ δὲ ΑΕΒ τμῆμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ μὴ ἐφαρμόσει, ἀλλὰ παραλλάξει ὡς τὸ ΓΘΗΔ. κύκλος δὲ κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο· ἀλλὰ καὶ τέμνει ὁ ΓΘΗΔ τὸν ΓΖΔ κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, τὰ Γ, Η, Δ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ οὐκ ἐφαρμόσει καὶ τὸ ΑΕΒ τμῆμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ· ἐφαρμόσει ἄρα, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται.



Segmento enim AEB congruente ſegmento ΓZΔ, & poſito puncto quidem A ſuper Γ, recta vero linea AB ſuper ΓΔ, congruet & B punctum puncto Δ, propterea quod AB ipſi ΓΔ ſit æqualis: congruente autem recta linea AB rectæ ΓΔ, congruet & AEB ſegmentum ſegmento ΓZΔ. ſi enim AB congruat ipſi ΓΔ, ſegmentum vero AEB ſegmento ΓZΔ non congruat, ſitum mutet ut ΓΘHΔ. ſed circulus circulum in pluribus quam duobus punctis [per 10. 3.] non ſecat: at vero circulus ΓΘHΔ circulum ΓZΔ ſecat in pluribus punctis quam duobus, videlicet in punctis Γ, H, Δ, quod fieri non poteſt. congruente igitur recta linea AB rectæ ΓΔ, non poteſt non congruere AEB ſegmento ΓZΔ: quare congruet, & proinde ipſi æquale erit.

Τὰ ἄρα ἐπὶ τῶν ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

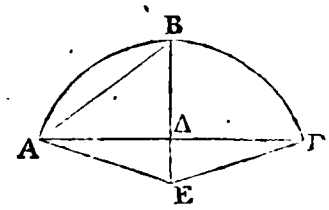
Super æqualibus igitur rectis lineis ſimilia circulorum ſegmenta ſunt inter ſe æqualia. quod erat demonſtrandum.

PROP. XXV. PROBL.

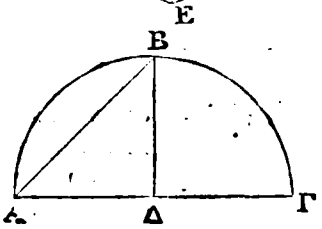
Dato circuli ſegmento, deſcribere circulum cujus eſt ſegmentum.

SIT datum circuli ſegmentum ABΓ: oportet autem circulum deſcribere, cujus ABΓ eſt ſegmentum.

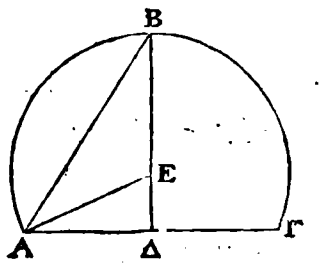
Secetur AΓ [per 10. 1.] bifariam in Δ, & à puncto Δ ipſi AΓ ad rectos angulos [per 11. 1.] ducatur ΔB, & jungatur AB: angulus igitur ABΔ vel major eſt angulo BAΔ, vel æqualis, vel minor.



Sit primum major, & ad rectam lineam BA, atque ad datum in ea punctum A, conſtituatur [per 23. 1.] angulus BAE æqualis angulo ABΔ, & ΔB producatur ad E, jungaturque EΓ. quoniam igitur angulus ABE eſt æqualis angulo BAE, erit recta linea BE [per 6. 1.] ipſi BA æqualis. & quoniam AΔ eſt æqualis ΔΓ, communis autem ΔE, duæ AΔ, ΔE duabus ΓΔ, ΔE ſunt æquales, altera alteri; & angulus AΔE æqualis angulo ΓΔE, rectus enim eſt uterque: ergo & baſis AE [per 4. 1.] baſi EΓ eſt æqualis. ſed oſtenſa eſt AE æqualis EB: quare & BE ipſi EΓ eſt æqualis, ac propterea tres rectæ lineæ AE, EB, EΓ inter ſe ſunt æquales: centro igitur E intervallo autem æquali uni ipſarum AE, EB, EΓ circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta, & circulus deſcriptus erit. quare circuli ſegmento dato deſcriptus eſt [per 9. 3.] circulus, cujus eſt ſegmentum. ſed & illud conſtat, ſegmentum ABΓ ſemicirculo minus eſſe; propterea quod E centrum ipſius cadit extra.



Similiter & ſi angulus ABΔ ſit æqualis angulo BAΔ, facta AΔ æquali utrivis ipſarum BΔ, ΔΓ, erunt tres rectæ lineæ ΔA, ΔB, ΔΓ inter ſe æquales, atque erit [per 9. 3.] Δ circuli completi centrum, & ſegmentum ABΓ ſemicirculus.



Si vero angulus ABΔ minor ſit angulo BAΔ, & conſtituatur ad rectam lineam BA & ad punctum in ea datum A angulus BAE æqualis angulo ABΔ, intra ſegmentum ABΓ erit centrum E, in ipſa ΔB, atque erit ABΓ ſegmentum ſemicirculo majus.

Circuli igitur ſegmento dato, deſcriptus eſt circulus cujus eſt ſegmentum. quod erat faciendum.

PROP. XXVI. THEOR.

In æqualibus circulis æquales anguli æqualibus inſiſtunt circumferentiis, ſive ad centra ſive ad circumferentias inſiſtant.

SInt æquales circuli ABΓ, ΔEZ, & in ipſis æquales anguli, ad centra quidem BHΓ,

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Κύκλυ τμήματος δοθέντος, περιγράψαι τὸν κύκλον ὅπερ ἐστὶ τμῆμα.

ΕΣτω τὸ δοθὲν τμῆμα κύκλυ, τὸ ΑΒΓ· δεῖ δὴ περιγράψαι τὸν κύκλον, ὅυπέρ ἐστι τὸ ΑΒΓ τμῆμα.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείυ τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΔ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΑΔ ἤτοι μείζων ἐστὶν, ἢ ἴση, ἢ ἐλάττων.

Ἔστω πρότερον μείζων, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΑ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α, τῇ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΕ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε ἡ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΕ, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΕ εὐθεῖα τῇ ΕΑ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΕ, δύο δὴ αἱ ΑΔ, ΔΕ δυσὶ ταῖς ΓΔ, ΔΕ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἴση ἐστὶν, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΕ βάσει τῇ ΓΕ ἴση ἐστίν. ἀλλὰ ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ ΒΕ ἄρα τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ε, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΕΓ, κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος. κύκλυ ἄρα τμήματος δοθέντος, περιγέγραπται ὁ κύκλος. καὶ δῆλον ὡς τὸ ΑΒΓ τμῆμα ἔλαττόν ἐστι ἡμικυκλίου, διὰ τὸ, τὸ Ε κέντρον αὐτὸ ἐκτὸς τυγχάνειν.

Ὁμοίως δὲ κἂν ᾖ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ΒΑΔ, τὰ ΑΔ ἴσης ἑκατέρᾳ τῶν ΒΔ, ΔΓ, αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται, καὶ ἔσται τὸ Δ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλυ, καὶ δῆλον ὅτι ἔσται τὸ ΑΒΓ ἡμικύκλιον.

Ἐὰν δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ἐλάττων ᾖ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ, καὶ συνιστώμεθα πρὸς τῇ ΒΑ εὐθείᾳ, καὶ τῷ Α σημείῳ, τῇ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίαν ἴσην, ἐντὸς τοῦ ΑΒΓ τμήματος πεσεῖται τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΔΒ, καὶ ἔσται δῆλον τὸ ΑΒΓ τμῆμα μεῖζον ἡμικυκλίου.

Κύκλυ ἄρα τμήματος δοθέντος, περιγέγραπται ὁ κύκλος, ὅπερ ἐστὶ τὸ τμῆμα. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

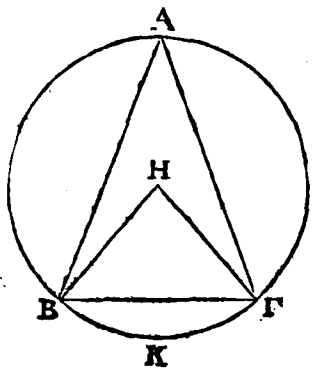
Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἔν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἔν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

ΕΣτωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι γωνίαι ἔστωσαν, πρὸς μὲν τοῖς κέντροις αἱ ὑπὸ

ἴσην τὴν ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ἴσαι ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΚΓ περιφέρεια τῇ ΕΔΖ περιφερείᾳ.

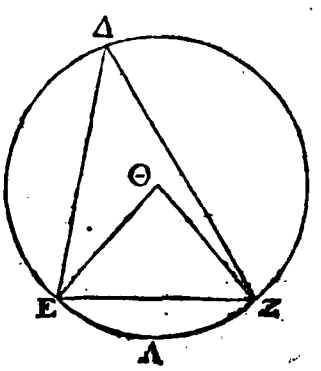
Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΓ, ΕΖ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλοι, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ ΒΗ, ΗΓ δυσὶ ταῖς ΕΘ, ΘΖ ἴσαι εἰσὶν, καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Η γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ Θ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Α γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΑΓ τμῆμα τῷ ΕΔΖ τμήματι, καί ἐστιν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν ΒΓ, ΕΖ· τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα τὸ ΒΑΓ τμῆμα τῷ ΕΔΖ τμήματι. ἐστὶ δὲ καὶ ὅλος ὁ ΑΒΓ κύκλος ὅλῳ τῷ ΔΕΖ κύκλῳ ἴσος, λοιπὸν ἄρα ΒΚΓ τμῆμα λοιπῷ ΕΔΖ ἴσον· ἡ ἄρα ΒΚΓ περιφέρεια τῇ ΕΔΖ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση.



Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάντε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάντε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

EXEUNT enim BH, HΓ duabus EΘ, ΘZ æquales, & angulus ad H æqualis angulo ad Θ: ergo & baſis BΓ [per 4. 1.] baſi EZ eſt æqualis. & quoniam æqualis eſt angulus ad A angulo ad Δ, ſegmentum BAΓ ſimile erit [per 11. def. 3.] ſegmento EΔZ, & ſunt ſuper æquales rectas lineas BΓ, EZ; quæ autem ſuper æquales rectas lineas ſimilia ſunt circulorum ſegmenta [per 24. 3.] ſunt inter ſe æqualia: ſegmentum igitur BAΓ ſegmento EΔZ eſt æquale. ſed & totus ABΓ circulus æqualis eſt toti ΔEZ: reliquum igitur ſegmentum BKΓ reliquo EΔZ eſt æquale, circumferentia igitur BKΓ circumferentiæ EΔZ æqualis erit.



In æqualibus igitur circulis, æquales anguli æqualibus inſiſtunt circumferentiis, ſive ad centra ſive ad circumferentias inſiſtant. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

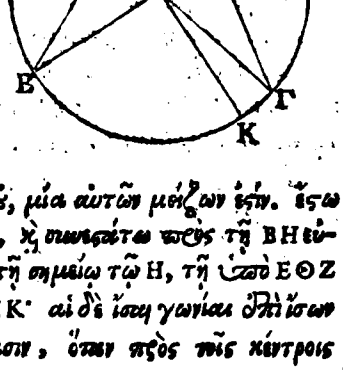
Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἐάντε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάντε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι.

PROP. XXVII. THEOR.

In æqualibus circulis anguli qui æqualibus inſiſtunt circumferentiis ſunt inter ſe æquales, ſive ad centra ſive ad circumferentias inſiſtant.

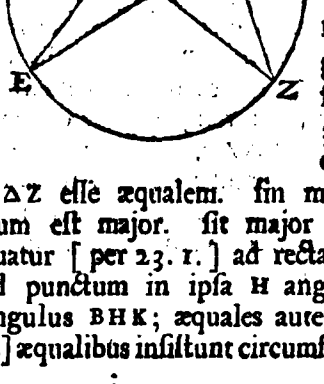
ΕΝ γὰρ ἴσοις κύκλοις τοῖς ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τῶν ΒΓ, ΕΖ, πρὸς μὲν τοῖς Η, Θ κέντροις γωνίαι βεβηκέτωσαν αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΒΗΓ τῇ ὑπὸ ΕΘΖ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ.

Εἰ μὲν οὖν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΕΘΖ, φανερόν ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν. εἰ δὲ οὔ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΒΗΓ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΗ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Η, τῇ ὑπὸ ΕΘΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΗΚ· αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις



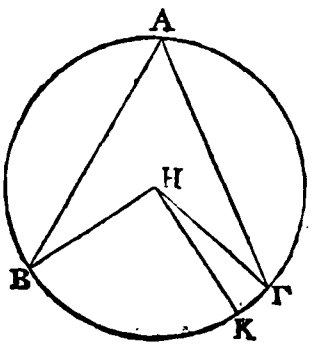
IN æqualibus enim circulis ABΓ, ΔEZ æqualibus circumferentiis BΓ, EZ inſiſtant anguli ad centra quidem BHΓ, EΘZ, ad circumferentias vero BAΓ, EΔZ: dico angulum BHΓ angulo EΘZ, & angulum BAΓ angulo EΔZ æqualem eſſe.

Si enim angulus BHΓ æqualis ſit angulo EΘZ, manifeſtum eſt [per 20. 3.] angulum quoque BAΓ angulo EΔZ eſſe æqualem. ſin minus, unus ipſorum eſt major. ſit major BHΓ, & conſtituatur [per 23. 1.] ad rectam lineam BH, & ad punctum in ipſa H angulo EΘZ æqualis angulus BHK; æquales autem anguli [per 26. 3.] æqualibus inſiſtunt circumferentiis, quando ad



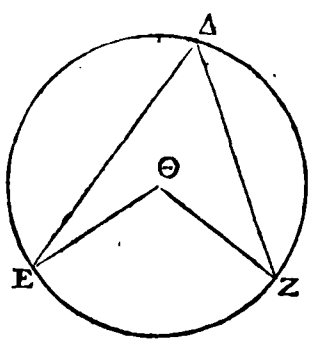
centra

centra fuerint: ergo circumferentia ΒΚ æqualis eſt circumferentiæ ΕΖ. ſed circumferentia ΕΖ æqualis eſt ipſi ΒΓ: ergo & ΒΚ ipſi ΒΓ eſt æqualis, minor majori, quod fieri non poteſt. non eſt igitur inæqualis angulus ΒΗΓ angulo ΕΘΖ: ergo eſt æqualis. eſt autem angulus ad Α [per 20. 3.] dimidius anguli ΒΗΓ, anguli vero ΕΘΖ dimidius qui ad Δ: angulus igitur qui ad Α angulo qui ad Δ eſt æqualis.



In æqualibus igitur circulis anguli qui æqualibus inſiſtunt circumferentiis ſunt inter ſe æquales, ſive ad centra ſive ad circumferentias inſiſtant. quod erat demonſtrandum.

ὧσιν· ἴση ἄρα ἡ ΒΚ τῇ ΕΖ περιφέρεια τῇ ΕΖ περιφερείᾳ. ἀλλ' ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ΒΚ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστιν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΘΖ· ἴση ἄρα. καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ὑπὸ ΒΗΓ ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ Α, τῆς δὲ ὑπὸ ΕΘΖ ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ Δ· ἴση ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ Α γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ.



Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἐάντε πρὸς τοῖς κέντροις ὦσι ἐάντε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXVIII. Theor.

In æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κή'.

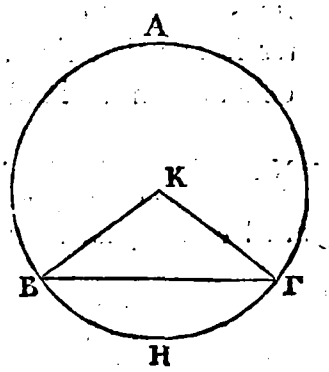
Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι.

SInt æquales circuli ΑΒΓ, ΔΕΖ, & in ipſis æquales rectæ lineæ ΒΓ, ΕΖ, quæ circumferentias quidem auferant majores ΒΑΓ, ΕΔΖ, minores vero ΒΗΓ, ΕΘΖ: dico circumferentiam ΒΑΓ majorem majori circumferentiæ ΕΔΖ, & minorem circumferentiam ΒΗΓ minori ΕΘΖ æquales eſſe.

Sumantur enim [per 1. 3.] centra circulorum Κ, Λ, junganturque ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ.

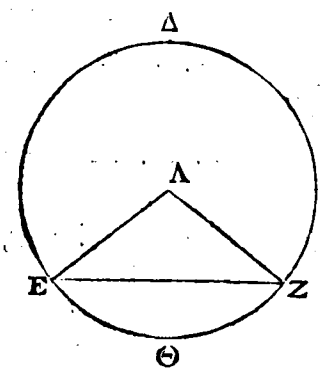
Quoniam autem circuli ſunt æquales, erunt & quæ ex centris æquales: duæ igitur ΒΚ, ΚΓ ſunt æquales duabus ΕΛ, ΛΖ, & baſis ΒΓ æqualis eſt baſi ΕΖ: ergo angulus ΒΚΓ [per 8. 1.] angulo ΕΛΖ eſt æqualis. æquales autem anguli [per 26. 3.] æqualibus inſiſtunt circumferentiis, quando ad centra fuerint: quare circumferentia ΒΗΓ æqualis eſt circumferentiæ ΕΘΖ. ſed & totus ΑΒΓ circulus toti ΔΕΖ eſt æqualis: reliqua igitur circumferentia ΒΑΓ reliquæ ΕΔΖ æqualis erit.

Ergo in æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori. quod erat demonſtrandum.



Ἐστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ ΒΓ, ΕΖ, τὰς μὲν ΒΑΓ, ΕΔΖ περιφερείας μείζονας ἀφαιρούσας, τὰς δὲ ΒΗΓ, ΕΘΖ ἐλάττονας· λέγω ὅτι ἡ μὲν ΒΑΓ μείζων περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ ΕΔΖ μείζονι περιφερείᾳ, ἡ δὲ ΒΗΓ ἐλάττων περιφέρεια ἴση τῇ ΕΘΖ ἐλάττονι.

Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, τὰ Κ, Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ.



Καὶ ἐπεὶ ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ ΒΚ, ΚΓ δυσὶ ταῖς ΕΛ, ΛΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΚΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΛΖ ἴση ἐστίν. αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ὦσι· ἴση ἄρα ἡ περιφέρεια ΒΗΓ τῇ ΕΘΖ περιφερείᾳ. ἔστι δὲ καὶ ὅλος ὁ ΑΒΓ κύκλος ὅλῳ τῷ ΔΕΖ κύκλῳ ἴσος· λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΑΓ περιφέρεια λοιπῇ τῇ ΕΔΖ περιφερείᾳ ἴση ἐστίν.

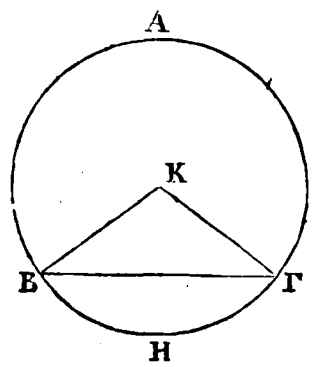
Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν αἱ ΒΗΓ, ΕΘΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖαι· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ εὐθεῖα τῇ ΕΖ.

Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, τὰ Κ, Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗΓ περιφέρεια τῇ ΕΘΖ περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΚΓ τῇ ὑπὸ ΕΛΖ. καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλοι, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ ΒΚ, ΚΓ δυσὶ ταῖς ΕΛ, ΛΖ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνίας περιέχουσιν ἴσας· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν.

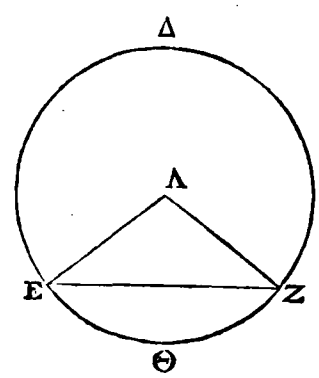
Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις ὑπὸ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXIX. Theor.

In æqualibus circulis æquales circumferentias æquales rectæ lineæ ſubtendunt.

Sint æquales circuli ΑΒΓ, ΔΕΖ, & in ipſis æquales ſumantur circumferentiæ ΒΗΓ, ΕΘΖ, & ΒΓ, ΕΖ jungantur: dico rectam lineam ΒΓ rectæ ΕΖ æqualem eſſe.

Sumantur enim centra circulorum Κ, Λ, & jungantur ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ.



Quoniam igitur circumferentia ΒΗΓ eſt æqualis circumferentiæ ΕΘΖ, erit [per 27. 3.] & angulus ΒΚΓ angulo ΕΛΖ æqualis. & quoniam circuli ΑΒΓ, ΔΕΖ ſunt æquales, & quæ ex centris æquales erunt: duæ igitur ΒΚ, ΚΓ ſunt æquales duabus ΕΛ, ΛΖ, & æquales angulos continent: quare baſis ΒΓ [per 4. 1.] baſi ΕΖ eſt æqualis.

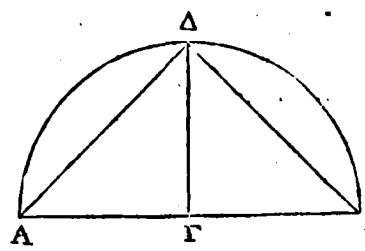
In æqualibus igitur circulis æquales circumferentias æquales rectæ lineæ ſubtendunt. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τεμεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα περιφέρεια ἡ ΑΔΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΔΒ περιφέρειαν δίχα τεμεῖν.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΒ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ· δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΔ δυσὶ ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· καὶ βάσις ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΔΒ ἴση ἐστίν. αἱ δὲ ἴσας εὐθείας ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι· καὶ ἔστιν ἑκατέρα τῶν ΑΔ, ΔΒ περιφερειῶν ἐλάττων ἡμικυκλίου· ἴση ἄρα ἡ ΑΔ περιφέρεια τῇ ΔΒ περιφερείᾳ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα περιφέρεια δίχα τέτμηται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XXX. Probl.

Datam circumferentiam bifariam ſecare.

Sit data circumferentia ΑΔΒ: oportet ΑΔΒ circumferentiam bifariam ſecare.

Jungatur ΑΒ, & [per 10. 1.] bifariam ſecetur in Γ: à puncto autem Γ ipſi ΑΒ [per 11. 1.] ad rectos angulos ducatur ΓΔ, & jungantur ΑΔ, ΔΒ.

Quoniam igitur ΑΓ eſt æqualis ΓΒ, communis autem ΓΔ, duæ ΑΓ, ΓΔ duabus ΒΓ, ΓΔ ſunt æquales. & angulus ΑΓΔ æqualis angulo ΒΓΔ, rectus enim eſt uterque: ergo baſis ΑΔ [per 4. 1.] baſi ΔΒ eſt æqualis. æquales autem rectæ lineæ [per 28. 3.] circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori; & eſt utraque ipſarum ΑΔ, ΔΒ circumferentiarum ſemicirculo minor: quare circumferentia ΑΔ circumferentiæ ΔΒ æqualis erit.

Data igitur circumferentia bifariam ſecta eſt. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

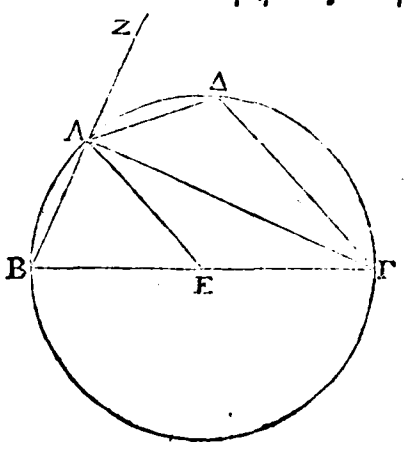
Ἐν κύκλῳ, ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν· ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς· ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι μείζων ὀρθῆς.

Prop. XXXI. Theor.

In circulo, angulus qui in ſemicirculo rectus eſt: qui vero in majori ſegmento minor eſt recto: & qui in minori

nori major recto. & insuper majoris quidem segmenti angulus recto major est; minoris vero segmenti angulus recto minor.

SIT circulus ABΓΔ, cujus diameter BΓ, centrum autem E, & jungantur BA, AΓ, AΔ, ΔΓ: dico angulum quidem, qui est in semicirculo BAΓ, rectum esse; qui vero in segmento ABΓ majore semicirculo, videlicet angulum ABΓ, minorem esse recto; & qui in segmento AΔΓ minore semicirculo, [hoc est angulum AΔΓ] recto majorem esse.



Jungatur AE, & BA ad Z producatur.

Itaque quoniam BE est æqualis EA, erit & angulus EAB [per 5. 1.] angulo EBA æqualis. rursus, quoniam EA est æqualis EΓ, & angulus AΓE angulo ΓAE æqualis erit: totus igitur angulus BAΓ est æqualis duobus angulis ABΓ, AΓB. est autem & angulus ZAΓ, extra triangulum ABΓ, [per 32. 1.] duobus ABΓ, AΓB æqualis: angulus igitur BAΓ est æqualis angulo ZAΓ, ac propterea [per 10. def. 1.] uterque ipsorum rectus: quare in semicirculo BAΓ angulus BAΓ rectus est.

ET quoniam trianguli ABΓ duo anguli ABΓ, BAΓ [per 17. 1.] duobus rectis sunt minores, rectus autem BAΓ; erit ABΓ angulus recto minor, atque est in segmento ABΓ majore semicirculo.

CUM autem in circulo quadrilaterum sit ABΓΔ, quadrilaterorum vero, qui in circulis describuntur, anguli oppositi [per 22. 3.] duobus rectis sint æquales; erunt ABΓ, AΔΓ anguli æquales duobus rectis. & angulus ABΓ minor est recto: reliquus igitur AΔΓ recto major erit, atque est in segmento AΔΓ minore semicirculo.

DICO præterea majoris segmenti angulum, comprehensum à circumferentia ABΓ & recta linea AΓ, recto esse majorem; angulum vero minoris segmenti, comprehensum à circumferentia AΔΓ & recta linea AΓ, recto minorem. quod quidem perspicue apparet. Quoniam enim angulus à rectis lineis BA, AΓ comprehensus rectus est, erit & comprehensus à circumferentia ABΓ & recta linea AΓ major recto. rursus, quoniam angulus comprehensus à rectis lineis ΓA, AZ rectus est; erit angulus, qui comprehenditur à recta ΓA & AΔΓ circumferentia, minor recto.

In circulo igitur, angulus qui in semicirculo rectus est: qui vero in majore segmento minor est recto: & qui in minore major. & insuper majoris segmenti angulus est recto major, minoris vero segmenti minor. quod erat demonstrandum.

ALITER.

Demonstratur angulum BAΓ rectum esse.

ΕΣτω κύκλος ὁ ABΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ BΓ, κέντρον δὲ τὸ E, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ BA, AΓ, AΔ, ΔΓ. λέγω ὅτι ἡ μὲν ἐν τῷ BAΓ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν· ἡ δὲ ἐν τῷ ABΓ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία, ἡ τοῦ ABΓ, ἐλάττων ὀρθῆς· ἡ δὲ ἐν τῷ AΔΓ ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία μείζων ἐστὶν ὀρθῆς.

Ἐπεζεύχθω ἡ AE, καὶ διήχθω ἡ BA ἐπὶ τὸ Z.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ BE τῇ EA, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ EAB τῇ ὑπὸ EBA. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ EA τῇ EΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ AΓE τῇ ὑπὸ ΓAE· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ BAΓ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ABΓ, AΓB ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ZAΓ ἐκτὸς τοῦ ABΓ τριγώνου δυσὶ ταῖς ὑπὸ ABΓ, AΓB γωνίαις ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ BAΓ γωνία τῇ ὑπὸ ZAΓ, ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα· ἡ ἄρα ἐν τῷ BAΓ ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ BAΓ ὀρθή ἐστι.

ΚΑΙ ἐπεὶ τοῦ ABΓ τριγώνου δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ABΓ, BAΓ δυσὶν ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ BAΓ γωνία· ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς ἐστιν ἡ ὑπὸ ABΓ γωνία, ἥ ἐστιν ἐν τῷ ABΓ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

ΚΑΙ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ABΓΔ, τῶν δὲ ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ABΓ, AΔΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. καὶ ἔστιν ἡ ὑπὸ ABΓ ἐλάττων ὀρθῆς· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AΔΓ μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, καὶ ἔστιν ἐν τῷ ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

ΛΕΓΩ δὴ ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς ABΓ περιφερείας καὶ τῆς AΓ εὐθείας, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς· ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῆς AΔΓ περιφερείας καὶ τῆς AΓ εὐθείας, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. καὶ ἔστιν αὐτόθεν φανερόν. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ τῶν BA, AΓ εὐθειῶν περιεχομένη ὀρθὴ γωνία ἐστίν, ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς ABΓ περιφερείας καὶ τῆς AΓ εὐθείας περιεχομένη μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΓA, AZ εὐθειῶν ὀρθή ἐστιν· ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς ΓA εὐθείας καὶ τῆς AΔΓ περιφερείας ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς.

Ἐν κύκλῳ ἄρα, ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν· ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς· ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. καὶ ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία μείζων ἐστὶν ὀρθῆς· ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΛΛΩΣ.

Ἀποδεικτὸν τοῦ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ BAΓ. ἐπεὶ διπλῆ

διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΕ, ἴση γὰρ δυσὶ τοῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον· ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΒ διπλῆ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΕΒ, ΑΕΓ διπλασίονές εἰσι τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΑΕΒ, ΑΕΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΓ ὀρθή ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

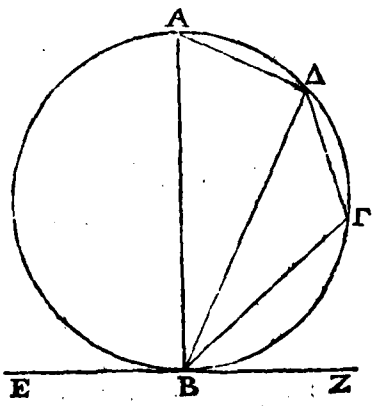
Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τριγώνου ἡ μία γωνία δυσὶν ἴσῃ ᾖ, ὀρθή ἐστι· λέγω τὸ καὶ τλὸ ἐκείνης ἐφεξῆς τοῖς αὐτοῖς ἴσον εἶναι. ὅταν δὲ αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ἴσαι ὦσιν, ὀρθαὶ εἰσιν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς ἀπὸ τοῦ κύκλου διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ ἴσας ἐστὶν ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓΔ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Β σημείου διήχθω τις εὐθεῖα διὰ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου τέμνουσα αὐτὸν ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι ἃς ποιεῖ γωνίας ἡ ΒΔ μετὰ τῆς ΕΖ ἐφαπτομένης ἴσας ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τμήμασι τοῦ κύκλου γωνίαις, τουτέστιν, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΑΒ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΒΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΓΒ τμήματι.



Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΕΖ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΑ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΔ περιφερείας τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ.

Καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ ΑΒΓΔ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Β ἁφῆς ἦκταί τις ἡ ΒΑ πρὸς ὀρθὰς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΑ, ἐπὶ τῆς ΒΑ τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΔΒ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ ἴσαι ὀρθῇ ἐστι· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΒΔ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΖ ὀρθή· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΖ ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΒΔ. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΔ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΖ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι τοῦ κύκλου γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ ΒΑΔ. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΖ, ΔΒΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΓΔ ἴσαι εἰσὶν, ὧν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ ὑπὸ ΔΒΖ ἐδείχθη ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΕ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ ΔΓΒ, τῇ ὑπὸ ΔΓΒ γωνίᾳ, ἐστὶν ἴση.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ ἴσας ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

quoniam enim angulus AEΓ duplus est anguli BAE, etenim duobus interioribus & oppositis [per 32. 1.] est æqualis: est autem & AEB duplus ipsius BAΓ: anguli AEB, AEΓ dupli erunt anguli BAΓ. sed AEB, AEΓ anguli [per 13. 1.] duobus rectis sunt æquales: ergo angulus BAΓ rectus est. quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Hinc manifestum est, quod si unus angulus trianguli sit æqualis duobus reliquis, est rectus: propterea quod ejus angulus deinceps iisdem est æqualis. quando autem anguli deinceps sunt æquales, [per 10. def. 1.] sunt recti.

PROP. XXXII. THEOR.

Si recta linea circulum contingat, à contactu autem ducatur recta linea circulum secans; anguli quos hæc cum contingente facit æquales erunt iis qui in alternis circuli segmentis consistunt.

CIrculum enim ABΓΔ contingat recta linea EZ in B, & à puncto B per circulum ABΓΔ ducatur recta linea BΔ secans illum utcunque: dico angulos quos BΔ cum contingente EZ facit æquales esse iis qui in alternis circuli segmentis consistunt; hoc est, angulum ZBΔ esse æqualem angulo qui constituitur in ΔAB segmento, angulum vero EBΔ æqualem angulo qui in segmento ΔΓB constituitur.

Ducatur enim [per 11. 1.] à puncto B ipsi BZ ad rectos angulos BA, & in circumferentia BΔ sumatur quodvis punctum Γ, junganturque AΔ, ΔΓ, ΓB.

Quoniam igitur circulum ABΓΔ contingit recta linea EZ in puncto B, & à contactu B ad rectos angulos contingenti ducta est BA, erit [per 19. 3.] in ipsa BA centrum circuli ABΓΔ: angulus igitur AΔB in semicirculo [per 31. 3.] est rectus; reliqui igitur anguli BAΔ, ABΔ uni recto sunt æquales. est autem [per constr.] ABZ rectus: ergo [per 10. ax.] angulus ABZ æqualis est angulis BAΔ, ABΔ. communis auferatur ABΔ: reliquus igitur ΔBZ ei qui in alterno circuli segmento consistit, videlicet angulo BAΔ, est æqualis. & quoniam in circulo quadrilaterum est ABΓΔ, anguli ejus oppositi [per 22. 3.] æquales sunt duobus rectis; erunt igitur ΔBZ, ΔBE anguli [per 13. 1.] angulis BAΔ, BΓΔ æquales, è quibus BAΔ ostensus est æqualis ipsi ΔBZ: ergo reliquus ΔBE ei qui in alterno circuli segmento ΔΓB constituitur, videlicet angulo ΔΓB, æqualis erit.

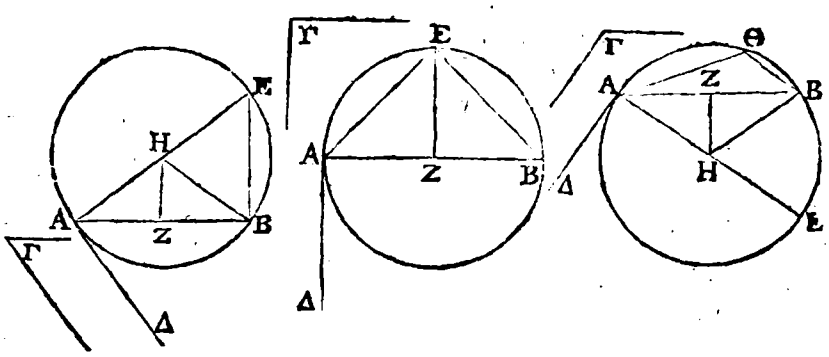
Si igitur recta linea circulum contingat, à contactu autem ducatur recta linea secans; anguli quos hæc cum contingente facit æquales erunt iis qui in alternis circuli segmentis consistunt. quod erat demonstrandum.

PROP. XXXIII. THEOR.

Super data recta linea deſcribere ſegmentum circuli, quod capiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

SIT data recta linea AB, datus autem angulus rectilineus qui ad Γ: itaque oportet ſuper data recta linea AB deſcribere ſegmentum circuli, quod capiat angulum æqualem angulo qui eſt ad Γ. angulus igitur ad Γ vel eſt acutus, vel rectus, vel obtuſus.

Sit primum acutus, ut in prima figura, & ad rectam lineam AB & ad punctum in ea A conſtituatur [per 23. 1.] angulus BAΔ angulo qui eſt ad Γ æqualis: acutus igitur angulus eſt BAΔ. & à puncto A ipſi AΔ [per 11. 1.] ad rectos angulos ducatur AE, ſecetur autem [per 10. 1.] AB bifariam in Z, atque à puncto Z ducatur ZH ad rectos angulos ipſi AB, & HB jungatur. quoniam igitur AZ eſt æqualis ZB, communis autem ZH, duæ AZ, ZH duabus ZB, ZH ſunt æquales, & angulus AZH æqualis angulo HZB: ergo baſis AH [per 4. 1.] baſi HB eſt æqualis. itaque centro H, intervallo autem AH, circulus deſcriptus tranſibit etiam per B. deſcribatur, & ſit ABE, jungaturque EB. Quoniam igitur à puncto A extremitate diametri AB ipſi AE ad rectos angulos ducta eſt AΔ, ipſa AΔ [per 16. 3.] circulum continget. & quoniam circulum ABE contingit recta linea AΔ, & à contactu qui eſt ad A in circulum ABE ducta eſt recta linea AB; erit [per 32. 3.] angulus ΔAB æqualis angulo qui in alterno circuli ſegmento conſtituitur, videlicet ipſi AEB. ſed angulus ΔAB angulo qui ad Γ eſt æqualis: ergo & angulus ad Γ angulo AEB æqualis erit. Super data igitur recta linea AB ſegmentum circuli deſcriptum eſt AEB, quod capiat angulum AEB, dato angulo qui ad Γ æqualem.



Sit deinde angulus qui ad Γ rectus: & oporteat rurſus ſuper rectam lineam AB deſcribere circuli ſegmentum, quod capiat angulum æqualem recto angulo qui eſt ad Γ. Conſtituatur enim rurſus angulo recto qui ad Γ [per 23. 1.] æqualis angulus BAΔ, ut in ſecunda figura; ſeceturque AB [per 10. 1.] bifariam in Z, & centro Z intervallo autem æquali alterutri ipſarum AZ, ZB circulus deſcribatur AEB. Ergo AΔ recta linea [per 16. 3.] circulum ABE contingit, propterea quod rectus eſt qui ad A angulus. & angulus BAΔ æqualis angulo, qui eſt in ſegmento AEB; rectus enim & ipſe eſt [per

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Επὶ τ δοθείσης εὐθείας γράψαι τμῆμα κύκλυ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

ΕΣτω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Γ. δεῖ δὴ ὅπι τ δοθείσης εὐθείας τ AB γράψαι τμῆμα κύκλυ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ. ἡ γὰρ πρὸς τῷ Γ ἤτοι ὀξεῖά ἐστιν, ἢ ὀρθὴ, ἢ ἀμβλεῖα.

Εστω πρότερον ὀξεῖα, ὡς ὅπι τ πρώτης καταγραφῆς, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ A σημείῳ τῇ πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ BAΔ· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ BAΔ. καὶ ἤχθω τῇ AΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ AE, καὶ τετμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Z, καὶ ἤχθω ἀπὸ τ Z σημείου τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ ZH, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ HB. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZB, κοινὴ δὲ ἡ ZH, δύο δὴ αἱ AZ, ZH δυσὶ τ ZB, ZH ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ AZH τῇ ὑπὸ HZB ἴση· βάσις ἄρα ἡ AH βάσει τῇ HB ἴση ἐστίν. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ H, διαστήματι δὲ τῷ AH, κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τ B. γεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ ABE, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ EB. ἐπεὶ οὖν ἀπ' ἄκρας τ AE διαμέτρου, ἀπὸ τ A, τῇ AE πρὸς ὀρθὰς ἐστιν ἡ AΔ, ἡ AΔ ἄρα ἐφάπτεται τ κύκλου. Καὶ ἐπεὶ τ ABE κύκλου ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ AΔ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ A ἀφῆς ἐπὶ τὸν ABE κύκλον διῆκταί τις εὐθεῖα ἡ AB· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔAB γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ AEB. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΔAB τῇ πρὸς τῷ Γ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ πρὸς τῷ Γ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ AEB. Επὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς AB τμῆμα κύκλου γέγραπται τὸ AEB, δεχόμενον γωνίαν τὴν ὑπὸ AEB ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ πρὸς τῷ Γ.

Αλλὰ δὴ ὀρθὴ ἔστω ἡ πρὸς τῷ Γ· καὶ δέον πάλιν ἔστω ἐπὶ τῆς AB γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ ὀρθῇ. Συνεστάτω γὰρ πάλιν τῇ πρὸς τῷ Γ ὀρθῇ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ BAΔ, ὡς ἔχει ὅπι τ δευτέρας καταγραφῆς, καὶ τετμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Z, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Z, διαστήματι δὲ ὁποτέρῳ τῶν AZ, ZB, κύκλος γεγράφθω ὁ AEB· ἐφάπτεται ἄρα ἡ AΔ εὐθεῖα τ ABE κύκλου, διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν πρὸς τῷ A γωνίαν. καὶ ἔστιν ἡ μὲν ὑπὸ BAΔ γωνία τῇ ἐν τῷ AEB τμήματι ἴση, ὀρθὴ γὰρ καὶ αὐτὴ ἐν ἡμικυκλίῳ

κλίου οὖσα. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ πρὸς τῷ Γ ἐστὶν ἴση. Γέγραπται ἄρα πάλιν ἐπὶ τῆς ΑΒ τμήματος κύκλου τὸ ΑΕΒ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ.

Ἀλλὰ δὴ ἡ πρὸς τῷ Γ ἀμβλεῖα ἔστω, καὶ συνεστάτω αὐτῇ ἴση πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ Α σημείῳ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ τῇ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΑΕ, καὶ τετμήσθω πάλιν ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΒ. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, καὶ κοινὴ ἡ ΖΗ, δύο δὴ αἱ ΑΖ, ΖΗ δυσὶ ταῖς ΒΖ, ΖΗ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ὑπὸ ΑΖΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΖΗ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΗ βάσει τῇ ΗΒ ἴση ἐστίν. ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΑΗ, κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Β. εἰχέσθω ὡς ΑΕΒ. καὶ ἐπεὶ τῇ ΑΕ διαμέτρῳ ἀπ' ἄκρας πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ ΑΔ, ἡ ΑΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΕΒ κύκλου. Καὶ ἔστω τοῦ κατὰ τὸ Α ἁπτῆς δεδηγμένη ἡ ΑΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ ΑΘΒ συνισταμένῃ γωνίᾳ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία τῇ πρὸς τῷ Γ ἴση ἐστί· καὶ ἡ ἐν τῷ ΑΘΒ ἄρα τμήματι γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Γ. Ἐπὶ τοῦ δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ γέγραπται τμῆμα κύκλου τὸ ΑΘΒ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

31. 3.] in ſemicirculo conſiſtens. ſed anguli BAΔ æqualis eſt ei qui ad Γ. Deſcripta igitur eſt rurſus ſuper recta linea AB ſegmentum circuli AEB, quod capiat angulum angulo recto qui ad Γ æqualem.

Denique ſit angulus ad Γ obtuſus, & ad rectam lineam AB & ad punctum A conſtituatur [per 23. 1.] ipſi æqualis angulus BAΔ, ut in tertia figura; & ipſi AΔ rectæ lineæ ad rectos angulos [per 11. 1.] ducatur AE, ſeceturque rurſus AB [per 10. 1.] bifariam in Z, ipſi vero AB ducatur ad rectos angulos ZH, & jungatur HB. quoniam autem AZ eſt æqualis ZB, communis autem ZH, duæ ZH, AZ duabus BZ, ZH ſunt æquales, & angulus AZH angulo BZH æqualis: baſis igitur AH [per 4. 1.] eſt æqualis baſi HB. quare centro H, intervallo autem AH, circulus deſcriptus etiam per B tranſibit. tranſeat ut AEB. Et quoniam diametro AE, ab extremitate ad rectos angulos ducta eſt AΔ, ipſa AΔ [per 16. 3.] circulum AEB continget. & à contactu qui eſt ad A ducta eſt AB: quare angulus BAΔ ei qui in alterno circuli ſegmento AΘB conſtituitur eſt æqualis. ſed BAΔ angulus æqualis eſt angulo qui ad Γ: angulus igitur qui in ſegmento AΘB angulo qui ad Γ æqualis erit. Ergo ſuper data recta linea AB deſcriptum eſt AΘB circuli ſegmentum, quod capiat angulum æqualem ei qui eſt ad Γ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

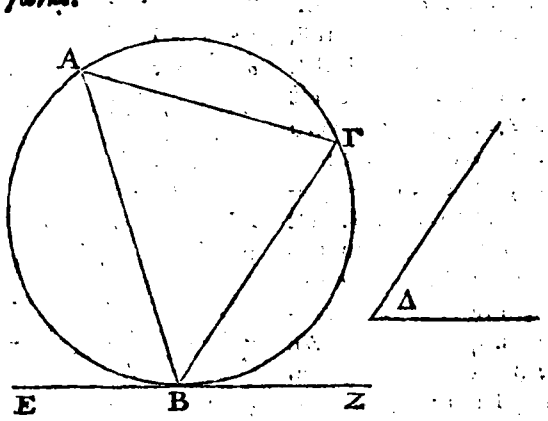
Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Prop. XXXIV. Probl.

A dato circulo ſegmentum abſcindere, quod capiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Δ· δεῖ δὴ δὴ τοῦ ΑΒΓ κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Δ γωνίᾳ.

Ἤχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β τῇ πρὸς τῷ Δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΒΓ.



Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Β ἁπτῆς διῆκται ἡ ΒΓ· ἡ ὑπὸ ΖΒΓ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΒΑΓ ἐναλλὰξ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ πρὸς τῷ Δ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ἐν τῷ ΒΑΓ ἄρα τμήματι γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Δ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα κύκλου τοῦ ΑΒΓ τμῆμα ἀφῄρηται τὸ ΒΑΓ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ Δ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

SIT datus circulus ABΓ, datus autem angulus rectilineus qui ad Δ: oportet à circulo ABΓ ſegmentum abſcindere, quod capiat angulum angulo qui ad Δ æqualem.

Ducatur [per 17. 3.] recta linea EZ contingens circulum ABΓ in puncto B, & ad rectam lineam ZE: & ad punctum in ea B conſtituatur [per 23. 1.] angulus ZBΓ angulo qui eſt ad Δ æqualis.

Quoniam igitur circulum ABΓ contingit recta linea EZ, & à contactu B ducta eſt BΓ, erit [per 32. 3.] angulus ZBΓ æqualis ei qui in BAΓ alterno circuli ſegmento conſtituitur. ſed ZBΓ angulus angulo qui ad Δ eſt æqualis: ergo & angulus qui in ſegmento BAΓ angulo qui ad Δ æqualis erit.

A dato igitur circulo ABΓ abſciſſum eſt ſegmentum BAΓ, quod capiat angulum dato angulo rectilineo qui eſt ad Δ æqualem. quod erat faciendum.

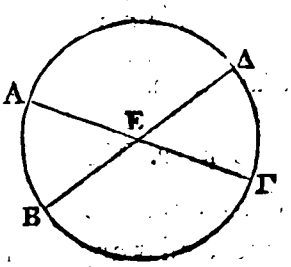
PROP. XXXV. THEOR.

Si in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecent, rectangulum ſub ſegmentis unius comprehenſum æquale eſt ei quod ſub alterius ſegmentis comprehenditur.

IN circulo enim ΑΒΓΔ duæ rectæ lineæ ΑΓ, ΒΔ ſeſe mutuo ſecent in puncto Ε: dico rectangulum comprehenſum ſub ΑΕ, ΕΓ æquale eſſe ei quod comprehenditur ſub ΔΕ, ΕΒ.

Si igitur ΑΓ, ΒΔ per centrum tranſeant, ita ut Ε ſit centrum circuli ΑΒΓΔ; manifeſtum eſt, æqualibus exiſtentibus ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ, ΕΒ, & rectangulum comprehenſum ſub ΑΕ, ΕΓ æquale eſſe ei quod ſub ΔΕ, ΕΒ comprehenditur.

Rectæ autem ΑΓ, ΔΒ non tranſeant per centrum, & ſumatur [per 1. 3.] centrum circuli ΑΒΓΔ quod ſit Ζ, & à Ζ ad rectas lineas ΑΓ, ΔΒ [per 12. 1.] perpendiculares ducantur ΖΗ, ΖΘ, junganturque ΖΒ, ΖΓ, ΖΕ.



Quoniam igitur recta linea ΗΖ per centrum ducta rectam lineam ΑΓ non ductam per centrum ad rectos angulos ſecat, [per 3. 3.] & bifariam ipſam ſecabit: quare ΑΗ ipſi ΗΓ eſt æqualis. & quoniam recta linea ΑΓ ſecta eſt in partes æquales in puncto Η, & in partes inæquales in Ε, erit [per 5. 2.] rectangulum ſub ΑΕ, ΕΓ comprehenſum una cum iplius ΗΕ quadrato æquale quadrato ex ΗΓ. commune addatur ex ΗΖ quadratum: ergo rectangulum ſub ΑΕ, ΕΓ una cum iis quæ ex ΗΕ, ΗΖ quadratis æquale eſt quadratis ex ΓΗ, ΗΖ. ſed quadratis quidem ex ΕΗ, ΗΖ æquale eſt [per 47. 1.] quadratum ex ΖΕ; quadratis vero ex ΓΗ, ΗΖ æquale quod ex ΖΓ quadratum: rectangulum igitur ſub ΑΕ, ΕΓ una cum quadrato ex ΖΕ æquale eſt quadrato ex ΖΓ. eſt autem ΖΓ æqualis ΖΒ: ergo rectangulum ſub ΑΕ, ΕΓ una cum quadrato ex ΕΖ æquale eſt ei quod ex ΖΒ quadrato. eadem ratione & rectangulum ſub ΔΕ, ΕΒ una cum quadrato ex ΖΕ æquale eſt quadrato ex ΖΒ. oſtenſum autem eſt & rectangulum ſub ΑΕ, ΕΓ una cum quadrato ex ΖΕ æquale ei quod ex ΖΒ quadrato: ergo rectangulum ſub ΑΕ, ΕΓ una cum quadrato ex ΖΕ æquale eſt rectangulo ſub ΔΕ, ΕΒ una cum quadrato ex ΖΕ. commune auferatur quod ex ΖΕ quadratum: reliquum igitur rectangulum ſub ΑΕ, ΕΓ reliquo ſub ΔΕ, ΕΒ rectangulo æquale erit.

Quare ſi in circulo duæ rectæ lineæ ſeſe mutuo ſecent, rectangulum ſub ſegmentis unius

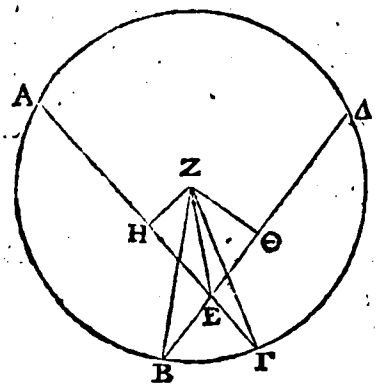
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

ΕΝ γὰρ τῷ κύκλῳ τῷ ΑΒΓΔ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Εἰ μὲν οὖν αἱ ΑΓ, ΒΔ διὰ τοῦ κέντρου εἰσίν, ὥστε τὸ Ε κέντρον εἶναι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· φανερὸν ὅτι, ἴσων ὄντων τῶν ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ, ΕΒ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐστωσαν δὴ αἱ ΑΓ, ΔΒ μὴ διὰ τοῦ κέντρου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὰς ΑΓ, ΔΒ εὐθείας κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΖΗ, ΖΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΕ.



Καὶ ἐπεὶ εὐθεία τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΗΖ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ· ἴση ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΗΓ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΗΕ, ΗΖ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΖ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΓΗ, ΗΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΓ. ἴση δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ. ἐδείχθη δὲ ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον

μένου ὀρθογωνίου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῶν τῆ ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

comprehenſum æquale eſt ei quod ſub alterius ſegmentis comprehenditur. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ'.

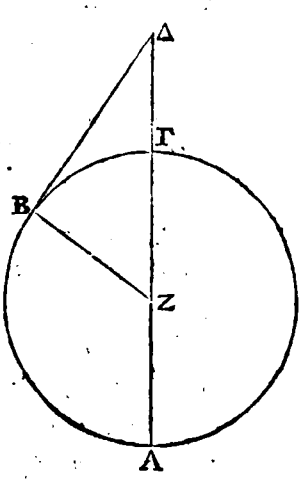
Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται· ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.

Prop. XXXVI. Theor.

Si extra circulum aliquod punctum ſumatur, & ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum ſecet, altera vero contingat; rectangulum, comprehenſum ſub tota ſecante & exteriore ſegmento inter punctum & convexam circumferentiam, æquale erit ei quod à contingente fit quadrato.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓΑ, ΔΒ, καὶ ἡ μὲν ΔΓΑ τεμνέτω τὸν ΑΒΓ κύκλον, ἡ δὲ ΔΒ ἐφαπτέσθω· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετραγώνῳ. ἡ ΔΓΑ ἤτοι διὰ τοῦ κέντρου ἐστὶν, ἢ οὔ.

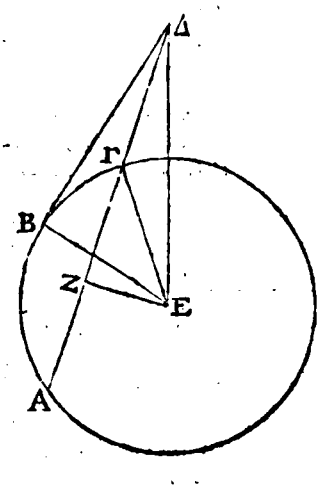
Ἐχέτω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω τὸ Ζ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΒΔ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΑΓ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ζ, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. ἴση δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ ἐφαπτομένης.



Ἀλλὰ δὴ ἡ ΔΓΑ μὴ ἔστω διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἤχθω ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΔ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΖ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τεμεῖ· ἡ ΑΖ ἄρα τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Ζ, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. κοινὸν πρόσ-

Extra circulum enim ΑΒΓ ſumatur aliquod punctum Δ, & ab eo ad dictum circulum cadant duæ rectæ lineæ ΔΓΑ, ΔΒ; & ΔΓΑ quidem circulum ΑΒΓ ſecet; ΔΒ vero contingat: dico rectangulum ſub ΑΔ, ΔΓ æquale eſſe quadrato quod fit ex ΔΒ. vel igitur ΔΓΑ per centrum tranſit, vel non.

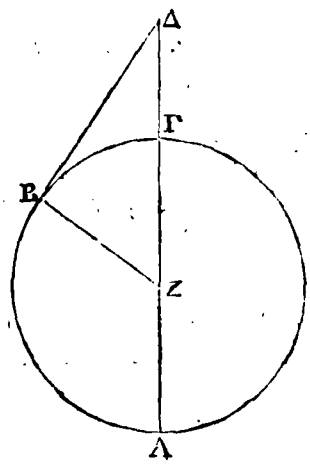
Tranſeat primum per centrum circuli ΑΒΓ, quod ſit Ζ, & jungatur ΖΒ: erit igitur [per 18. 3.] angulus ΖΒΔ rectus. itaque, quoniam recta linea ΑΓ bifariam ſecta eſt in Ζ & ipſi adjicitur ΓΔ, rectangulum ſub ΑΔ, ΔΓ una cum quadrato ex ΖΓ æquale erit [per 6. 2.] ei quod fit ex ΖΔ quadrato. æqualis autem eſt ΖΓ ipſi ΖΒ: ergo rectangulum ſub ΑΔ, ΔΓ una cum quadrato ex ΖΒ æquale eſt quadrato ex ΖΔ. ſed quadratum ex ΖΔ [per 47. 1.] eſt æquale quadratis ipſarum ΖΒ, ΒΔ, rectus enim eſt angulus ΖΒΔ: rectangulum igitur ſub ΑΔ, ΔΓ una cum quadrato ex ΖΒ æquale eſt ipſarum ΖΒ, ΒΔ quadratis. commune auferatur quadratum ex ΖΒ: ergo reliquum ſub ΑΔ, ΔΓ rectangulum æquale erit quadrato quod fit à contingente ΔΒ.



Sed ΔΓΑ non tranſeat per centrum circuli ΑΒΓ, ſumaturque centrum Ε, & ab ipſo Ε ad ΑΓ [per 12. 1.] perpendicularis agatur ΕΖ, & jungantur ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ: rectus igitur eſt ΕΖΔ angulus. & quoniam recta linea ΕΖ per centrum ducta rectam lineam ΑΓ non ductam per centrum ad rectos angulos ſecat, [per 3. 3.] & bifariam ipſam ſecabit: quare ΑΖ ipſi ΖΓ eſt æqualis. rurſus, quoniam recta linea ΑΓ bifariam ſecta eſt in Ζ atque ipſi adjicitur ΓΔ, erit [per 6. 2.] rectangulum ſub ΑΔ, ΔΓ una cum quadrato ex ΖΓ æquale quadrato ex ΖΔ. com-

mune

mune addatur ex ZE quadratum: rectangulum igitur ſub AΔ, ΔΓ una cum quadratis ex ΓZ, ZE eſt æquale quadratis ex ΔZ, ZE. ſed quadratis quidem ex ΔZ, ZE æquale eſt [per 47. 1.] ex ΔE quadratum, etenim rectus eſt angulus EZΔ; quadratis vero ex ΓZ, ZE æquale eſt quadratum ex ΓE: ergo rectangulum ſub AΔ, ΔΓ una cum quadrato ex ΓE eſt æquale quadrato ex EΔ. æqualis autem eſt ΓE ipſi EB: rectangulum igitur ſub AΔ, ΔΓ una cum quadrato ex EB æquale eſt ei quod ex EΔ fit quadrato. ſed quadrato ex EΔ æqualia ſunt [per 47. 1.] quadrata ex EB, BΔ, ſiquidem rectus eſt angulus EBΔ: ergo rectangulum ſub AΔ, ΔΓ una cum quadrato ex EB æquale eſt eis quæ ex EB, BΔ fiunt quadratis. commune auferatur quadratum ex EB: reliquum igitur ſub AΔ, ΔΓ rectangulum quadrato quod fit ex ΔB æquale erit.



Si igitur extra circulum aliquod punctum ſumatur, & quæ ſequuntur. quod erat demonſtrandum.

PROP. XXXVII. THEOR.

Si extra circulum ſumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum ſecet, altera vero in eum incidat, ſit autem rectangulum comprehenſum ſub tota ſecante & exteriore ſegmento inter punctum & convexam circumferentiam æquale ei quod ab incidente fit quadrato; incidens linea circulum continget.

EXtra circulum enim ABΓ ſumatur aliquod punctum Δ, atque à puncto Δ in circulum ABΓ cadant duæ rectæ lineæ ΔΓA, ΔB, & ΔΓA quidem circulum ſecet, ΔB vero in illum incidat, ſitque rectangulum ſub AΔ, ΔΓ æquale quadrato quod fit ex ΔB: dico ipſam ΔB circulum ABΓ contingere.

Ducatur enim [per 17. 3.] recta linea ΔE contingens circulum ABΓ, & ſumatur [per 1. 3.] circuli ABΓ centrum quod ſit Z, jungunturque ZE, ZB, ZΔ: ergo [per 18. 3.] angulus ZEΔ rectus eſt.

Et quoniam ΔE circulum ABΓ contingit, ſecat autem ΔΓA, rectangulum ſub AΔ, ΔΓ æquale erit [per 36. 3.] quadrato ex ΔE. ſed rectangulum ſub AΔ, ΔΓ ponitur æquale quadrato ex ΔB: quadratum igitur

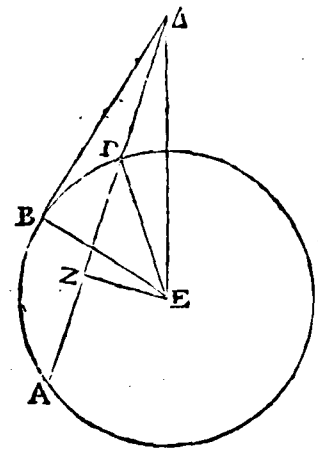
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ'.

Ἐὰν κύκλου λαφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ἐὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τοῦ κυρτοῦ περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτούσης· ἡ προσπίπτουσα ἐφάψεται τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ ABΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ABΓ κύκλον προσπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓA, ΔB, καὶ ἡ μὲν ΔΓA τεμνέτω τὸν κύκλον, ἡ δὲ ΔB προσπιπτέτω, ἔστω δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔB· λέγω ὅτι ἡ ΔB ἐφάπτεται τοῦ ABΓ κύκλου.

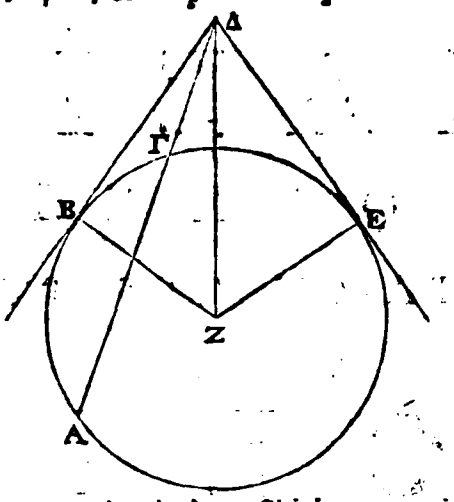
Ἤχθω γὰρ τοῦ ABΓ ἐφαπτομένη ἡ ΔE, καὶ εἰλήφθω τὸ Z κέντρον τοῦ ABΓ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ZE, ZB, ZΔ· ἡ ἄρα ὑπὸ ZEΔ ὀρθή ἐστι.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΔE ἐφάπτεται τοῦ ABΓ κύκλου, τέμνει δὲ ἡ ΔΓA· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔE. ὑπόκειται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔB· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς



ΔE

ΔE ἴση τῷ ἀπὸ τῆς ΔB· ἴση ἄρα ἡ ΔE τῇ ΔB. ἔστι δὲ καὶ ἡ ZE τῇ ZB ἴση, δύο δὴ αἱ ΔE, EZ δυσὶ ταῖς ΔB, BZ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ZΔ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔEZ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔBZ ἐστὶν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔEZ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΔBZ. ἡ ἄρα ΔB ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἐὰν τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΑΓ τυγχάνῃ.



ex Δ E quadrato ex Δ B æquale erit, ac propterea linea Δ E ipſi Δ B æqualis. eſt autem & Z E æqualis Z B: duæ igitur Δ E, E Z duabus Δ B, B Z ſunt æquales, & baſis ipſarum communis Z Δ: angulus igitur Δ E Z [per 8. 1.] eſt æqualis angulo Δ B Z. rectus autem eſt Δ E Z: ergo & Δ B Z eſt rectus. atque Z B producta eſt diameter: quæ vero diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur [per 16. 3.] contingit circulum A B Γ. ſimiliter etiam demonſtrabitur ſi centrum ſit in ipſa A Γ.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεῖαι δύο, ὧν ἡ μία διὰ τοῦ κέντρου ἐστὶ, καὶ ἡ ἑτέρα μηδὲν αὐτῆς· ἐὰν ἄρα ἡ ἐπιζευγνύουσα τὰ ἀπὸ τοῦ κύκλου προσπίπτουσαι ἐφάπτηται τοῦ κύκλου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si igitur extra circulum ſumatur aliquod punctum, & quæ ſequuntur, quod erat demonſtrandum.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER QUARTUS.

DEFINITIONES.

1. FIGURA rectilinea in figura rectilinea inſcribi dicitur, quando unuſquiſque figuræ inſcriptæ angulus contingit unumquodque latus ejus in qua inſcribitur.

2. Figura ſimiliter circa figuram circumſcribi dicitur, quando unumquodque latus circumſcriptæ contingit unumquemque angulum ejus circa quam circumſcribitur.

3. Figura rectilinea in circulo inſcribi dicitur, quando unuſquiſque inſcriptæ figuræ angulus circuli circumferentiam contingit.

4. Figura rectilinea circa circulum circumſcribi dicitur, quando unumquodque latus circumſcriptæ circuli circumferentiam contingit.

5. Circulus ſimiliter in figura rectilinea inſcribi dicitur, quando circuli circumferentia unumquodque latus ejus in qua inſcribitur contingit.

6. Circulus circa figuram rectilineam circumſcribi dicitur, quando circuli circumferentia unumquemque angulum ejus circa quam circumſcribitur contingit.

7. Recta linea in circulo aptari dicitur, quando ejus termini in circuli circumferentia fuerint.

ΟΡΟΙ.

α'. ΣΧΗΜΑ εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη τῶν ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἅπτηται.

β. Σχῆμα δὲ ὁμοίως δεῖ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἑκάστης γωνίας τοῦ δεῖ ὃ περιγράφεται ἅπτηται.

γ'. Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

δ'. Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται.

ε'. Κύκλος δὲ ὁμοίως εἰς σχῆμα λέγεται ἐγγράφεσθαι, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἅπτηται.

ϛ'. Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἅπτηται.

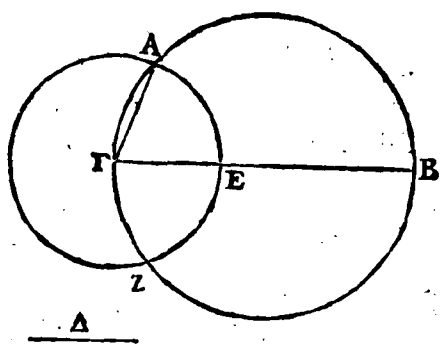
ζ'. Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ὦσι ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Εἰς τὸ δοθὲν κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα μὴ μείζων τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου ἡ Δ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῇ Δ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

Ἤχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου διάμετρος ἡ ΒΓ. εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ Δ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. ἐναρμόσαι γὰρ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῇ Δ εὐθείᾳ ἴσην ἡ ΒΓ. εἰ δὲ οὔ, μείζων ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς Δ, καὶ κείσθω τῇ Δ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ διαστήματι δὲ τῷ ΓΕ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΑ.



Ἐπεὶ οὖν τὸ Γ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΓΕ. ἀλλὰ ἡ Δ τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ Δ ἄρα τῇ ΓΑ ἐστὶν ἴση.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον τὸν ΑΒΓ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, τῇ Δ, ἴση ἐναρμόσαι ἡ ΓΑ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Propositio I. Problema.

In dato circulo datæ rectæ lineæ, quæ diametro ejus major non ſit, æqualem rectam lineam aptare.

SIT datus circulus ABΓ, data autem recta linea Δ non major circuli diametro: oportet in circulo ABΓ rectæ lineæ Δ æqualem rectam lineam aptare.

Ducatur circuli ABΓ diameter BΓ. ſi igitur BΓ ſit æqualis ipſi Δ, factum jam erit quod proponebatur. etenim in circulo ABΓ aptata eſt BΓ rectæ lineæ Δ æqualis. ſin minus, major eſt BΓ quam Δ, ponaturque [per 3. 1.] ipſi Δ æqualis ΓE, & centro quidem Γ intervallo autem ΓE [per 3. poſt.] circulus deſcribatur AEZ, & [per 1. poſt.] ΓA jungatur.

Itaque quoniam punctum Γ centrum eſt AEZ circuli, erit ΓA ipſi ΓE æqualis. ſed Δ eſt æqualis rectæ ΓE: ergo & Δ ipſi ΓA æqualis erit.

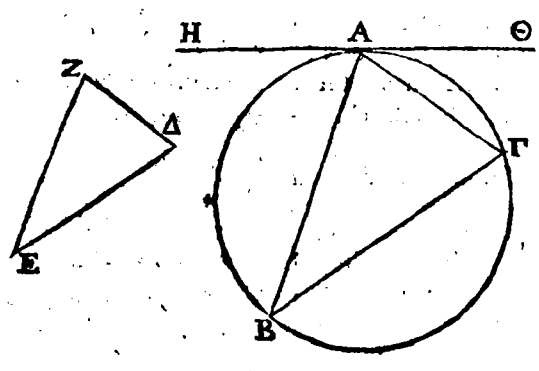
In dato igitur circulo ABΓ, datæ rectæ lineæ Δ, non majore circuli diametro, æqualis aptata eſt ΓA. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

Ἤχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ ΗΑΘ κατὰ τὸ Α, καὶ συνεστάτω πρὸς μὲν τῇ ΑΘ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΘΑΓ· πρὸς δὲ τῇ ΗΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΖΔΕ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ.



Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΘΑΗ, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς διῆκταί τις ἡ ΑΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΘΑΓ ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΔ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΖΔΕ ἐστὶν ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον.

Prop. II. Probl.

In dato circulo inſcribere triangulum, æquiangulum dato triangulo.

SIT datus circulus ABΓ, datum autem triangulum ΔEZ: oportet in circulo ABΓ inſcribere triangulum, triangulo ΔEZ æquiangulum.

Ducatur recta linea HAΘ contingens circulum ABΓ in puncto A, & ad rectam lineam AΘ & ad punctum in ea A conſtituatur [per 23. 1.] angulus ΘAΓ æqualis angulo ΔEZ: rurſus, ad rectam lineam HA & ad punctum in ipſa A conſtituatur angulus HAB æqualis angulo ZΔE, & BΓ jungatur.

Quoniam igitur circulum ABΓ contingit recta ΘAH, à contactu autem ducta eſt AΓ, ΘAΓ angulus [per 32. 3.] æqualis ei qui in alterno circuli ſegmento conſiſtit, videlicet ipſi ABΓ. ſed ΘAΓ angulus æqualis eſt angulo ΔEZ: ergo & angulus ABΓ angulo ΔEZ eſt æqualis. eadem ratione & angulus AΓB eſt æqualis angulo ZΔE: reliquus igitur BAΓ angulus reliquo EZΔ [per 32. 1.] æqualis erit: ergo triangulum ABΓ triangulo ΔEZ eſt æquiangulum, & inſcriptum eſt [per 3. def. 4.] in circulo ABΓ.

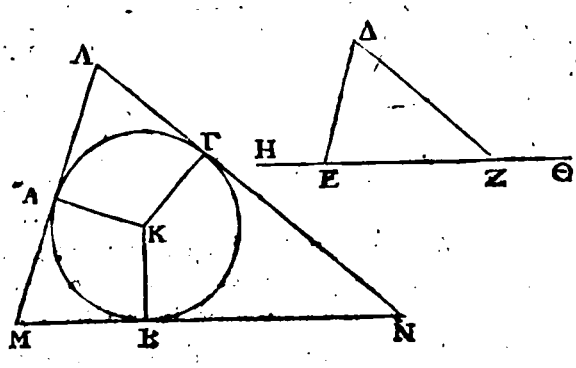
In dato igitur circulo inſcriptum eſt triangulum æquiangulum dato triangulo. quod erat faciendum.

PROP. III. PROBL.

Circa datum circulum circumſcribere triangulum, æquiangulum dato triangulo.

SIT datus circulus ABΓ, datum autem triangulum ΔEZ: oportet circa circulum ABΓ circumſcribere triangulum, æquiangulum triangulo ΔEZ.

Protrahatur [per 2. poſt.] EZ ex utraque parte ad puncta Θ, H, & ſumatur [per 1. 3.] circuli ABΓ centrum K, & recta linea KB utcunque ducatur, conſtituaturque [per 23. 1.] ad lineam KB & ad punctum in ea K angulus BKA æqualis angulo ΔEH, angulo autem ΔZΘ æqualis angulus BKΓ, & per A, B, Γ puncta ducantur [per 17. 3.] rectæ lineæ ΛAM, MBN, NΓΛ circulum ABΓ contingentes.



Quoniam igitur circulum ABΓ contingunt ΛM, MN, NΛ in punctis A, B, Γ, à centro autem K ad puncta A, B, Γ ducuntur rectæ KA, KB, KΓ; erunt [per 18. 3.] anguli ad puncta A, B, Γ recti. & quoniam quadrilateri AMBK anguli quatuor [per 32. 1.] quatuor rectis ſunt æquales (enim in duo triangula dividitur quadrilaterum AMBK) è quibus anguli KAM, KBM ſunt recti; erunt reliqui AKB, AMB duobus rectis æquales. ſunt autem [per 13. 1.] & ΔEH, ΔEZ æquales duobus rectis: anguli igitur AKB, AMB angulis ΔEH, ΔEZ ſunt æquales, è quibus AKB ipſi ΔEH eſt æqualis: ergo reliquus AMB reliquo ΔEZ æqualis erit. ſimiliter demonſtrabitur angulus ΛNM ipſi ΔZE æqualis: ergo & reliquus MΛN [per 32. 1.] eſt æqualis reliquo EΔZ. eſt igitur ΛMN triangulum æquiangulum triangulo ΔEZ, & [per 4. def. 4.] circumſcribitur circa circulum ABΓ.

Circa datum igitur circulum circumſcriptum eſt triangulum, æquiangulum dato triangulo. quod erat faciendum.

PROP. IV. PROBL.

In dato triangulo circulum inſcribere.

SIT datum triangulum ABΓ: oportet in triangulo ABΓ circulum inſcribere.

Secentur [per 9. 1.] anguli ABΓ, BΓA bifariam à rectis lineis BΔ, ΓΔ, quæ conveniant inter ſe in puncto Δ, & à puncto Δ ad rectas lineas AB, BΓ, ΓA [per 12. 1.] perpendiculares ducantur ΔE, ΔZ, ΔH.

Εἰς τὸ δοθὲν ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

ΕΣτω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· δεῖ δὴ περὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Ἐκβεβλήθω ἑφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἡ ΕΖ ἐπὶ τὰ Θ, Η σημεῖα, καὶ εἰλήφθω τὸ ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Κ, καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν εὐθεῖα ἡ ΚΒ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΚΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Κ τῇ μὲν ὑπὸ ΔΕΗ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΚΑ, τῇ δὲ ὑπὸ ΔΖΘ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΚΓ, καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ ΑΒΓ κύκλου αἱ ΛΑΜ, ΜΒΝ, ΝΓΛ.

Καὶ ἐπεὶ ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου αἱ ΛΜ, ΜΝ, ΝΛ κατὰ τὰ Α, Β, Γ, ἀπὸ δὲ τοῦ Κ κέντρου ἐπὶ τὰ Α, Β, Γ σημεῖα ἐπιζευγνύμεναί εἰσιν αἱ ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ· ὀρθαὶ ἄρα εἰσὶν αἱ πρὸς τοῖς Α, Β, Γ σημείοις γωνίαι. καὶ ἐπεὶ τοῦ ΑΜΒΚ τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν (ἐπεὶ διπλᾶ καὶ εἰς δύο τρίγωνα διαιρεῖται τὸ ΑΜΒΚ τετράπλευρον) ὧν αἱ ὑπὸ ΚΑΜ, ΚΒΜ γωνίαι δύο ὀρθαῖς εἰσιν· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΚΒ, ΑΜΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔΕΗ, ΔΕΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΚΒ, ΑΜΒ ταῖς ὑπὸ ΔΕΗ, ΔΕΖ ἴσαι εἰσίν, ὧν ἡ ὑπὸ ΑΚΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΗ ἐστιν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΜΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΛΝΜ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστιν ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΛΝ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστιν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΜΝ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

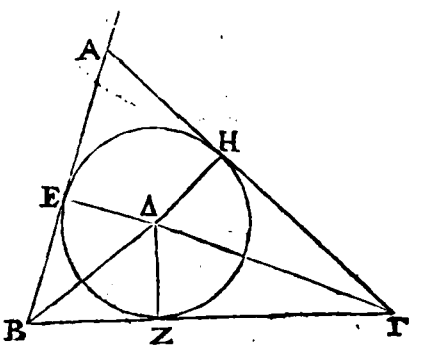
ΕΣτω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθωσαν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ γωνίαι δίχα ταῖς ΒΔ, ΓΔ εὐθείαις, καὶ συμβαλλέτωσαν ἀπ' ἀλλήλων κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθείας κάθετοι αἱ ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ.

Καὶ

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΔ, δίχα γὰρ τέτμηται ἡ ὑπὸ ΑΒΓ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΔ ὀρθὴ τῇ ὑπὸ ΒΖΔ ἴση· δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΕΒΔ, ΔΒΖ, τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΔ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει· ἴση ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΔΖ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση· ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Δ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐφάψεται τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Ε, Ζ, Η σημείοις γωνίας. εἰ γὰρ τεμεῖ αὐτάς, ἔσται ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ μὲν τῷ Δ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ γραφόμενος κύκλος τεμνει τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εὐθείας· ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν, καὶ ἔσται κύκλος ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ κύκλος ἐγγέγραπται ὁ ΕΖΗ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Et quoniam angulus ABΔ eſt æqualis angulo ΓBΔ, bifariam enim ſectus eſt angulus ABΓ; eſtque etiam BEΔ rectus æqualis recto BZΔ; erunt EBΔ, ΔBZ duo triangula habentia duos angulos duobus angulis æquales & unum latus uni lateri æquale & utrique commune BΔ, quod ſcilicet uni æqualium angulorum ſubtenditur: ergo [per 26. 1.] & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, eritque ΔE æqualis ΔZ. eadem ratione erit etiam ΔH æqualis ΔZ: quare centro Δ intervallo autem æquali uni ipſarum ΔE, ΔZ, ΔH circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta, & rectas lineas AB, BΓ, ΓA continget; propterea quod recti ſunt ad E, Z, H anguli. ſi enim ipſas ſecet, quæ diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur intra circulum cadet, quod [per 16. 3.] eſt abſurdum: circulus igitur centro Δ intervallo autem æquali uni ipſarum ΔE, ΔZ, ΔH deſcriptus non ſecabit rectas lineas AB, BΓ, ΓA: quare ipſas continget, atque circulus erit [per 5. def. 4.] inſcriptus in triangulo ABΓ.

In dato igitur triangulo ABΓ inſcriptus eſt circulus EZH. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι.

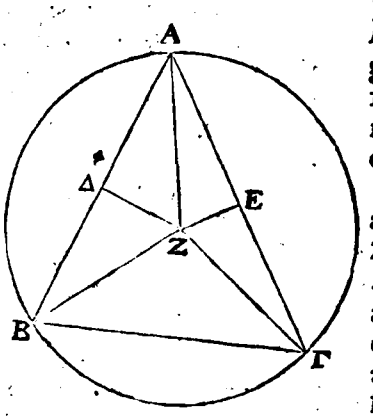
PROP. V. PROBL.

Circa datum triangulum circulum circumſcribere.

Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· δεῖ δὴ περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ κύκλον περιγράψαι.

Τετμήθωσαν αἱ ΑΒ, ΑΓ δίχα κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα, καὶ ἀπὸ τῶν Δ, Ε σημείων τῇ ΑΒ, ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΔΖ, ΕΖ· συμπεσοῦνται δὴ ἤτοι ἐντὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ἢ ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας, ἢ ἐκτὸς *τῆς ΒΓ.

Συμπιπτέτωσαν πρότερον ἐντὸς κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΖ, ΖΓ, ΖΑ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ· βάσις ἄρα ἡ ΑΖ βάσει τῇ ΖΒ ἴση ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΖΑ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ ἡ ΒΖ τῇ ΖΓ ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος ὁ κύκλος περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. καὶ περιγεγράφθω ὡς ὁ ΑΒΓ.



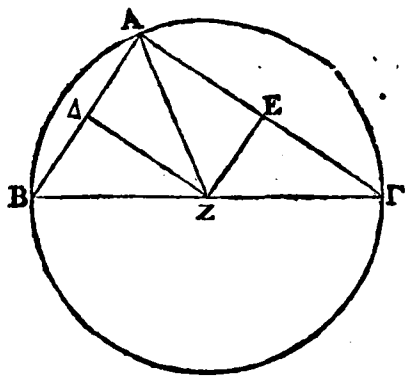
SIT datum triangulum ABΓ: oportet circa datum triangulum ABΓ circulum circumſcribere.

Secentur AB, AΓ [per 10. 1.] bifariam in Δ, E punctis, & à punctis Δ, E ipſis AB, AΓ [per 11. 1.] ad rectos angulos ducantur ΔZ, EZ; quæ vel intra triangulum ABΓ conveniant, vel in recta linea BΓ, vel extra triangulum ABΓ.

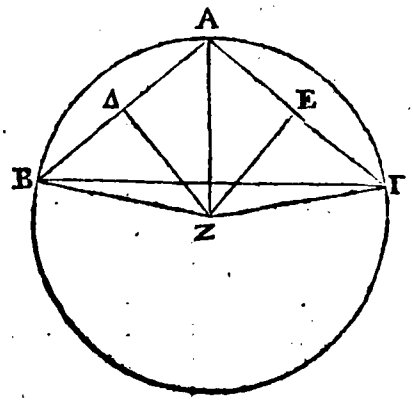
Conveniant primum intra triangulum in puncto Z; & BZ, ZΓ, ZA jungantur. quoniam igitur AΔ eſt æqualis ΔB, communis autem & ad rectos angulos ΔZ; erit [per 4. 1.] baſis AZ baſi ZB æqualis. ſimiliter oſtendetur & ΓZ æqualis ZA: ergo & BZ eſt æqualis ZΓ: tres igitur ZA, ZB, ZΓ inter ſe ſunt æquales. quare centro Z, intervallo autem æquali uni ipſarum ZA, ZB, ZΓ circulus deſcriptus etiam per reliqua puncta tranſibit: atque erit [per 6. def. 4.] circulus circumſcriptus circa triangulum ABΓ. circumſcribatur igitur ut ABΓ.

*Legimus τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ.

Sed Δ Z, E Z conveniant in recta linea B Γ, in puncto Z, ut in ſecunda figura, & A Z jungatur. ſimiliter demonſtrabimus punctum Z centrum eſſe circuli circa triangulum A B Γ circumſcripti.



Poſtremo Δ Z, E Z conveniant extra triangulum A B Γ rurſus in Z puncto, ut in tertia figura; & jungantur A Z, Z B, Z Γ. & quoniam A Δ eſt æqualis Δ B, communis autem & ad rectos angulos Δ Z; baſis A Z [per 4. 1.] baſi Z B æqualis erit. ſimiliter demonſtrabimus & Γ Z ipſi Z A æqualem eſſe; quare & B Z eſt æqualis Z Γ; rurſus igitur centro Z, intervallo autem æquali uni ipſarum Z A, Z B, Z Γ circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta; atque erit circa triangulum A B Γ circumſcriptus. deſcribatur igitur ut A B Γ.



Circa datum igitur triangulum circulus eſt circumſcriptus. quod erat faciendum.

Corollarium.

Et manifeſtum eſt, quod, ſi centrum circuli intra triangulum ceciderit, angulus B A Γ exiſtens in ſegmento ſemicirculo majore minor eſt recto: ſi autem ceciderit in recta linea B Γ, angulus in ſemicirculo rectus erit: & ſi extra triangulum A B Γ, angulus in ſegmento minore ſemicirculo erit major recto. Quare ſi datum triangulum ſit oxygonium, Δ Z, E Z intra triangulum convenient: ſin in eo ſit angulus rectus B A Γ, in ipſa B Γ: & ſi ſit major recto, extra A B Γ.

Ἀλλὰ δὴ αἱ Δ Z, E Z συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ B Γ εὐθείας κατὰ τὸ Z, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ A Z. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ περὶ τὸ A B Γ τρίγωνον περιγραφομένου κύκλου.

Ἀλλὰ δὴ αἱ Δ Z, E Z συμπιπτέτωσαν ἐκτὸς τοῦ A B Γ τριγώνου, κατὰ τὸ Z πάλιν, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ A Z, Z B, Z Γ. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ A Δ τῇ Δ B, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ Δ Z· βάσις ἄρα ἡ A Z βάσει τῇ Z B ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ Γ Z τῇ Z A ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ ἡ B Z τῇ Z Γ ἴση· ὁ ἄρα πάλιν κέντρῳ τῷ Z διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν Z A, Z B, Z Γ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγραφόμενος περὶ τὸ A B Γ τρίγωνον. καὶ γεγράφθω ὡς ὁ A B Γ.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τρίγωνον κύκλος περιγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Καὶ φανερὸν, ὅτι, ὅταν μὲν ἐντὸς τοῦ τριγώνου πίπτῃ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἡ ὑπὸ B A Γ γωνία, ἐν μείζονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς· ὅταν δὲ ἐπὶ τῆς B Γ, ἐν ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, ὀρθὴ ἔσται· ὅταν δὲ ἐκτὸς * τῆς B Γ εὐθείας τὸ κέντρον πίπτῃ, ἡ ὑπὸ B A Γ, ἐν ἐλάττονι τμήματι ἡμικυκλίου τυγχάνουσα, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. ὅτε δὲ ὅταν † ἐλάττων ὀρθῆς τυγχάνῃ ἡ διδομένη γωνία, ἐντὸς τοῦ τριγώνου συμπεσοῦνται αἱ Δ Z, E Z· ὅταν μὲν ὀρθὴ, ἐπὶ τῆς B Γ· ὅταν δὲ μείζων ὀρθῆς, ἐκτὸς τῆς B Γ.

Prop. VI. Probl.

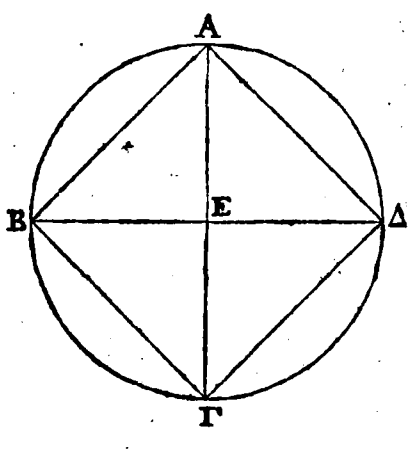
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

In dato circulo quadratum inſcribere.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

SIT datus circulus A B Γ Δ: oportet in circulo A B Γ Δ quadratum inſcribere.

Ducantur [per 11. 1.] circuli A B Γ Δ diametri ad rectos angulos inter ſe A Γ, B Δ; & A B, B Γ, Γ Δ, Δ A jungantur.



Quoniam igitur B E eſt æqualis B Δ, eſt enim E centrum, communis autem & ad rectos angulos E A; erit [per 4. 1.] baſis A B æqualis baſi A Δ. & eadem ratione utraque ipſarum B Γ, Γ Δ utrique B A, A Δ eſt æqualis: æquila-

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ A B Γ Δ· δεῖ δὴ εἰς τὸν A B Γ Δ κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

Ἤχθωσαν τοῦ A B Γ Δ κύκλου διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ A Γ, B Δ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ A B, B Γ, Γ Δ, Δ A.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ B E τῇ E Δ, κέντρον γὰρ τὸ E, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ E A· βάσις ἄρα ἡ A B βάσει τῇ A Δ ἴση ἐστί. κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν B Γ, Γ Δ ἑκατέρᾳ τῶν B A, A Δ ἴση ἐστί· ἰσό-

* Legimus τῶν A B Γ τριγώνου. † Hic locus in omnibus (quos vidimus) codicibus Græcis, tam MSS. quam impreſſo, male ſe habet. Nos in verſione (pauculis immutatis) reſtituimus; quod & antea fecerunt *Campanus* & *Clavius*.

πλευρον

τόλυρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράπλευρον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΒΔ εὐθεῖα διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΑΔ· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΔ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ ὀρθή ἐστιν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράπλευρον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστί. καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸ δοθέντα ΑΒΓΔ κύκλον.

Εἰς τὸ δοθέντα ἄρα κύκλον τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον ἐγγέγραπται τὸ ΑΒΓΔ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

terum igitur est ΑΒΓΔ quadrilaterum. dico & rectangulum esse. quoniam enim recta linea ΒΔ diameter est ΑΒΓΔ circuli, erit ΒΑΔ semicirculus: quare [per 31. 3.] angulus ΒΑΔ rectus est. & eadem ratione unusquisque ipsorum ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΑ rectus erit: rectangulum igitur est ΑΒΓΔ quadrilaterum. ostensum autem est æquilaterum esse: igitur quadratum est. & inscriptum est in circulo ΑΒΓΔ.

In dato igitur ΑΒΓΔ circulo inscriptum est quadratum ΑΒΓΔ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

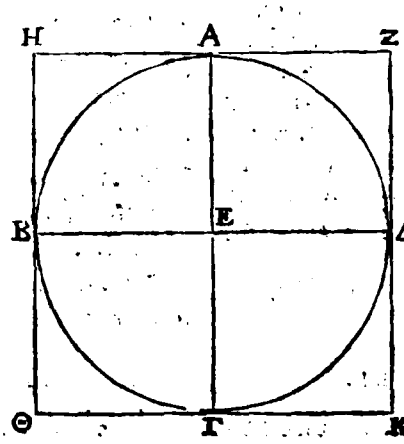
Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

Ἤχθωσαν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ, ΒΔ, καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου αἱ ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΖ.

Ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ΖΗ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ Ε κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ Α ἁπτὴν ἐπιζευγνυται ἡ ΕΑ· αἱ ἄρα πρὸς τῷ Α γωνίαι ὀρθαί εἰσι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς Β, Γ, Δ σημείοις γωνίαι ὀρθαί εἰσι. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία, ἔστι δὲ ὀρθὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΒΗ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΑΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΖΚ παράλληλός ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΗΖ, ΘΚ τῇ ΒΕΔ ἐστὶ παράλληλος. παραλληλόγραμμα ἄρα ἐστὶ τὰ ΗΚ, ΗΓ, ΑΚ, ΖΒ, ΒΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΗΖ τῇ ΘΚ, ἡ δὲ ΗΘ τῇ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, ἀλλ' ἡ μὲν ΑΓ ἑκατέρα τῶν ΗΘ, ΖΚ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΒΔ ἑκατέρα τῶν ΗΖ, ΘΚ ἐστὶν ἴση· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΗΘ, ΖΚ ἑκατέρα τῶν ΗΖ, ΘΚ ἐστὶν ἴση. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗΘΚ τετράπλευρον. λέγω ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶγὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΗΒΕΑ, καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΕΒ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΒ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ πρὸς τοῖς Θ, Κ, Ζ γωνίαι ὀρθαί εἰσιν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗΘΚ τετράπλευρον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστί. καὶ περιγέγραπται περὶ τὸ ΑΒΓΔ κύκλον.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τετράγωνον περιγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



Prop. VII. Probl.

Circa datum circulum quadratum circumscribere.

SIT datus circulus ΑΒΓΔ: oportet circa ΑΒΓΔ circulum quadratum circumscribere.

Ducantur circuli ΑΒΓΔ duæ diametri ΑΓ, ΒΔ ad rectos inter se angulos, & per puncta Α, Β, Γ, Δ ducantur [per 17. 3.] rectæ ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΖ contingentes circulum ΑΒΓΔ.

Quoniam igitur ΖΗ contingit circulum ΑΒΓΔ, à centro autem Ε ad contactum qui est ad Α ducitur ΕΑ; erunt [per 18. 3.] anguli ad Α recti. eadem ratione & anguli ad puncta Β, Γ, Δ sunt recti. & quoniam angulus ΑΕΒ est rectus, & ΕΒΗ etiam rectus; erit [per 28. 1.] ΗΘ ipsi ΑΓ parallela. eadem ratione & ΑΓ parallela est ΖΚ. similiter demonstrabimus & utramque ipsarum ΗΖ, ΘΚ ipsi ΒΕΔ parallelam esse. parallelogramma igitur sunt ΗΚ, ΗΓ, ΑΚ, ΖΒ, ΒΚ; ac propterea ΗΖ est [per 34. 1.] æqualis ΘΚ; ΗΘ vero ipsi ΖΚ. & quoniam ΑΓ æqualis est ΒΔ; sed & ΑΓ quidem utrique ipsarum ΗΘ, ΖΚ est æqualis, ΒΔ vero æqualis utrique ΗΖ, ΘΚ; & utraque ΗΘ, ΖΚ utrique ΗΖ, ΘΚ æqualis erit. æquilaterum igitur est ΖΗΘΚ quadrilaterum. dico & rectangulum esse. quoniam enim parallelogrammum est ΗΒΕΑ, atque est rectus ΑΕΒ angulus, & ipse ΑΗΒ [per 34. 1.] rectus erit. similiter demonstrabimus angulos etiam, qui ad puncta Θ, Κ, Ζ, rectos esse: rectangulum igitur est quadrilaterum ΖΗΘΚ. demonstratum autem est & æquilaterum: igitur quadratum est. & circumscriptum est circa circulum ΑΒΓΔ.

Igitur circa datum circulum circumscriptum est quadratum. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον ἐγγεγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον κύκλον ἐγγεγράψαι.

Τετμήσθω ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΑΔ δίχα κατὰ τὸ

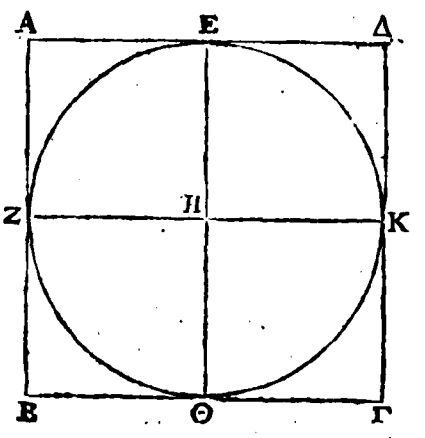
Prop. VIII. Probl.

In dato quadrato circulum inscribere.

SIT datum quadratum ΑΒΓΔ: oportet in ΑΒΓΔ quadrato circulum inscribere.

Secetur [per 10. 1.] utraque ipsarum ΑΒ, ΑΔ bifariam

bifariam in punctis Z, E, & per E alterutri ipſarum AB, ΓΔ [per 31. 1.] parallela ducatur EΘ, per Z vero ducatur ZK parallela alterutri AΔ, BΓ: parallelogrammum igitur eſt unumquodque ipſorum AK, KB, AΘ, ΘΔ, AH, HΓ, BH, HΔ; & latera ipſorum oppoſita [per 34. 1.] ſunt æqualia. & quoniam AΔ eſt æqualis AB, & ipſius quidem AΔ dimidia eſt AE, ipſius vero AB dimidia AZ; erit AE ipſi AZ æqualis: & latera etiam ipſis oppoſita ſunt æqualia, ergo ZH eſt æqualis HE. ſimiliter demonſtrabimus & utramque ipſarum HΘ, HK utrique ZH, HB æqualem eſſe. quatuor igitur HE, HZ, HΘ, HK inter ſe ſunt æquales. itaque centro quidem H intervallo autem æquali uni ipſarum HE, HZ, HΘ, HK circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta; & rectas lineas AB, BΓ, ΓΔ, ΔA continget, propterea quod anguli ad E, Z, Θ, K ſunt recti. ſi enim circulus ſecat rectas lineas AB, BΓ, ΓΔ, ΔA, quæ diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur intra circulum cadet, quod [per 16. 3.] eſt abſurdum. non igitur centro quidem H intervallo autem æquali uni ipſarum HE, HZ, HΘ, HK circulus deſcriptus rectas lineas AB, BΓ, ΓΔ, ΔA ſecabit. ipſas igitur continget, atque erit [per 5. def. 4.] inſcriptus in quadrato ABΓΔ.



In dato igitur quadrato circulus eſt inſcriptus. quod erat faciendum.

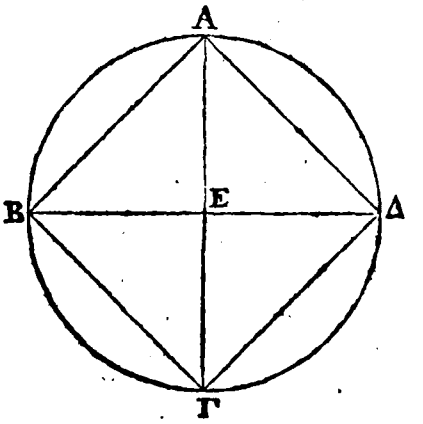
Prop. IX. Probl.

Circa datum quadratum circulum circumſcribere.

SIT datum quadratum ABΓΔ: oportet circa quadratum ABΓΔ circulum circumſcribere.

Jungantur enim AΓ, BΔ, quæ ſe invicem in puncto E ſecent.

Et quoniam ΔA eſt æqualis AB, communis autem AΓ, duæ ΔA, AΓ duabus BA, AΓ ſunt æquales, & baſis ΔΓ æqualis baſi BΓ, erit [per 8. 1.] & angulus ΔAΓ æqualis angulo BAΓ: angulus igitur ΔAB bifariam ſectus eſt à recta linea AΓ. ſimiliter demonſtrabimus unumquemque angulorum ABΓ, BΓΔ, ΓΔA bifariam ſecari à rectis lineis AΓ, ΔB. quoniam igitur angulus ΔAB angulo ABΓ eſt æqualis, eſt autem anguli ΔAB dimidium angulus EAB, anguli vero ABΓ dimidium EBA: & EAB angulus angulo EBA æqualis erit; quare [per 6. 1.] & latus EA lateri EB eſt æquale. ſimiliter demonſtrabimus & utramque rectarum EΓ, EΔ utrique EA, EB



ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

ΕΣτω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ABΓΔ· δεῖ δὴ περὶ τὸ ABΓΔ τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

Επεζεύχθωσαν γὰρ αἱ AΓ, BΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ E.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔA τῇ AB, κοινὴ δὲ ἡ AΓ, δύο δὴ αἱ ΔA, AΓ δυσὶ ταῖς BA, AΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ BΓ ἐστὶν ἴση· ἡ ἄρα γωνία ἡ ὑπὸ ΔAΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ BAΓ ἐστὶν ἴση· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔAB γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τὴν AΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ABΓ, BΓΔ, ΓΔA δίχα τέτμηται ὑπὸ τὰς AΓ, ΔB εὐθείας. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔAB γωνία τῇ ὑπὸ ABΓ, καὶ ἔστι τῆς μὲν ὑπὸ ΔAB ἡμίσεια ἡ ὑπὸ EAB, τῆς δὲ ὑπὸ ABΓ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ EBA· καὶ ἡ ὑπὸ EAB ἄρα τῇ ὑπὸ EBA ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ EA πλευρᾷ τῇ EB ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν EΓ, EΔ εὐθειῶν ἑκατέρᾳ

τέρα

τέρα τῆ ΕΑ, ΕΒ ἴση ἐστίν· αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ε καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος περὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον. περιγεγράφθω ὡς ὁ ΑΒΓΔ.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τετράγωνον κύκλος περιγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

æqualem esse; ergo quatuor rectæ lineæ ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ inter se sunt æquales. centro igitur Ε intervallo autem æquali uni ipsarum ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit, atque erit circumscriptus circa quadratum ΑΒΓΔ. describatur ut ΑΒΓΔ.

Circa datum igitur quadratum circulus est circumscriptus. quod erat faciendum.

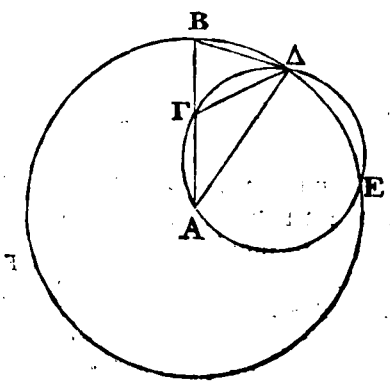
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς.

Prop. X. Probl.

Isosceles triangulum constituere, habens alterutrum angulorum qui sunt ad basim duplum reliqui.

Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΔΕ, καὶ ἐνηρμόσθω εἰς τὸν ΒΔΕ κύκλον τῇ ΑΓ εὐθείᾳ, μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ ΒΔΕ κύκλου διαμέτρου, ἴση εὐθεῖα ἡ ΒΔ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΓ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον κύκλος ὁ ΑΓΔ.



Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ. καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ ΑΓΔ εἴληπταί τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς τὸν ΑΓΔ κύκλον προσπεπτώκασι δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓΑ, ΒΔ, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνει, ἡ δὲ προσπίπτει, καί ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ· ἡ ΒΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΓΔ κύκλου. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τῆς κατὰ τὸ Δ ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΔΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΔΓ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΓ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΓΔΑ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ. ἀλλὰ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ ἴση ἐστὶν ἡ ἐκτὸς ἡ ὑπὸ ΒΓΔ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΒΔΑ τῇ ὑπὸ ΓΒΔ ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἐστὶν ἴση. αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ, ἴση ἐστὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΔ πλευρᾷ τῇ ΔΓ. ἀλλ' ἡ ΒΔ τῇ ΓΑ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῇ ΓΔ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΑ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶν ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ τῆς ὑπὸ ΔΑΓ διπλασίονές εἰσιν. ἴση δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ τῇ ὑπὸ ΓΔΑ, ΔΑΓ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἄρα διπλῆ ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΔΑΓ. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΒΔΑ, ΔΒΑ τῆς ὑπὸ ΔΑΒ ἐστὶ διπλῆ.

POnatur recta quædam linea ΑΒ, & secetur [per 11.2.] in puncto Γ, ita ut rectangulum comprehensum sub ΑΒ, ΒΓ æquale sit quadrato ex ΓΑ; & centro quidem Α intervallo autem ΑΒ [per 3. post.] circulus describatur ΒΔΕ; apteturque [per 1.4.] in ΒΔΕ circulo recta linea ΒΔ, æqualis ipsi ΑΓ, quæ non est major diametro circuli ΒΔΕ; & junctis ΔΑ, ΔΓ, triangulo ΑΓΔ [per 5. 4.] circumscribatur circulus ΑΓΔ.

Itaque quoniam rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ æquale est quadrato quod fit ex ΑΓ; æqualis autem est ΑΓ ipsi ΒΔ; erit sub ΑΒ, ΒΓ rectangulum quadrato quod ex ΒΔ æquale. & quoniam extra circulum ΑΓΔ sumptum est punctum Β, & à puncto Β in circulum ΑΓΔ cadunt duæ rectæ lineæ ΒΓΑ, ΒΔ, quarum altera quidem secat, reliqua vero in eum incidit, & rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ est æquale quadrato quod ex ΒΔ; recta linea ΒΔ [per 37. 3.] circulum ΑΓΔ continget. quoniam igitur ΒΔ contingit, & à contactu Δ ducta est ΔΓ; erit [per 32. 3.] ΒΔΓ angulus æqualis ei qui in alterno circuli segmento constituitur, videlicet angulo ΔΑΓ. cum autem angulus ΒΔΓ æqualis sit ipsi ΔΑΓ, communis addatur ΓΔΑ: totus igitur ΒΔΑ est æqualis duobus angulis ΓΔΑ, ΔΑΓ. sed ipsis ΓΔΑ, ΔΑΓ exterior angulus ΒΓΔ [per 32.1.] est æqualis: ergo & ΒΔΑ æqualis est ipsi ΒΓΔ. sed ΒΔΑ angulus [per 5. 1.] est æqualis angulo ΓΒΔ, quoniam & latus ΑΔ lateri ΑΒ est æquale: ergo & ΔΒΑ ipsi ΒΓΔ æqualis erit. tres igitur anguli ΒΔΑ, ΔΒΑ, ΒΓΔ inter se sunt æquales. & quoniam angulus ΔΒΓ æqualis est angulo ΒΓΔ, latus ΒΔ lateri ΔΓ [per 6. 1.] est æquale. sed ΒΔ ponitur æqualis ipsi ΓΑ: ergo & ΑΓ est æqualis ΓΔ: quare & angulus ΓΔΑ [per 5.1.] æqualis est angulo ΔΑΓ: anguli igitur ΓΔΑ, ΔΑΓ simul ipsius anguli ΔΑΓ dupli sunt. est autem [per 32.1.] & ΒΓΔ angulus æqualis angulis ΓΔΑ, ΔΑΓ: ergo & ΒΓΔ duplus est ipsius ΔΑΓ. sed ΒΓΔ est æqualis alterutri ipsorum ΒΔΑ, ΔΒΑ: quare & alteruter ipsorum ΒΔΑ, ΔΒΑ ipsius ΔΑΒ est duplus.

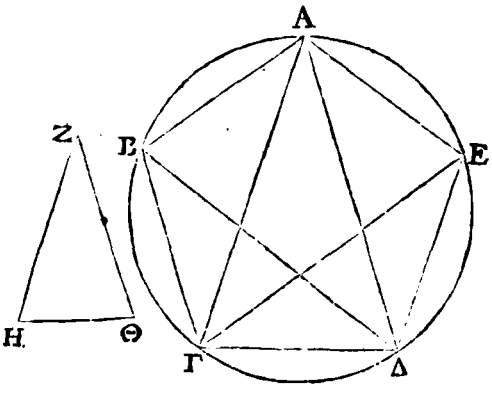
Iſoſceles igitur triangulum ΑΔΒ conſtitutum eſt, habens alterutrum eorum angulorum qui ſunt ad baſim ΒΔ duplum reliqui. quod erat faciendum.

Prop. XI. Probl.

In dato circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum inſcribere.

SIT datus circulus ΑΒΓΔΕ: oportet in ΑΒΓΔΕ circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum inſcribere.

Ponatur [per 10. 4.] triangulum iſoſceles ΖΗΘ, habens alterutrum angulorum ad Η, Θ duplum anguli qui eſt ad Ζ: & inſcribatur [per 2. 4.] in circulo ΑΒΓΔΕ triangulo ΖΗΘ æquiangulum triangulum ΑΓΔ; ita ut angulo quidem qui eſt ad Ζ æqualis ſit angulus ΓΑΔ, utrique vero ipſorum qui ad Η, Θ ſit æqualis uterque ΑΓΔ, ΓΔΑ: alteruter igitur ΑΓΔ, ΓΔΑ duplus eſt anguli ΓΑΔ. ſecetur [per 9. 1.] uterque ipſorum ΑΓΔ, ΓΔΑ bifariam à rectis lineis ΓΕ, ΔΒ, & ducantur ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΑ.



Quoniam igitur uterque ipſorum ΑΓΔ, ΓΔΑ duplus eſt ipſius ΓΑΔ, & ſecti ſunt bifariam à rectis lineis ΓΕ, ΔΒ; quinque anguli ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΒΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ ſunt inter ſe æquales. æquales autem anguli [per 26. 3.] æqualibus circumferentiis inſiſtunt: quinque igitur circumferentiæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ æquales ſunt inter ſe. ſed [per 29. 3.] æquales circumferentias æquales rectæ lineæ ſubtendunt: ergo & quinque rectæ lineæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ inter ſe ſunt æquales: æquilaterum eſt igitur ΑΒΓΔΕ pentagonum. dico & æquiangulum eſſe. quoniam enim circumferentia ΑΒ æqualis eſt circumferentiæ ΔΕ, communis addatur ΒΓΔ: tota igitur ΑΒΓΔ circumferentia toti circumferentiæ ΕΔΓΒ eſt æqualis. & circumferentiæ quidem ΑΒΓΔ inſiſtit angulus ΑΕΔ, circumferentiæ vero ΕΔΓΒ inſiſtit angulus ΒΑΕ: ergo & ΒΑΕ angulus [per 27. 3.] eſt æqualis angulo ΑΕΔ. eadem ratione & unuſquiſque angulorum ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ alterutri ipſorum ΒΑΕ, ΑΕΔ eſt æqualis: æquiangulum igitur eſt ΑΒΓΔΕ pentagonum. oſtenſum autem eſt & æquilaterum eſſe.

In dato igitur circulo inſcriptum eſt pentagonum æquilaterum & æquiangulum. quod erat faciendum.

Prop. XII. Probl.

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum & æquiangulum circumſcribere.

SIT datus circulus ΑΒΓΔΕ: oportet circa circulum ΑΒΓΔΕ pentagonum æquilaterum & æquiangulum circumſcribere.

Ισοσκελὲς ἄρα τρίγωνον συνέσταται τὸ ΑΔΒ, ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ ΒΔ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

ΕΣτω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Εκκείσθω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΖΗΘ, διπλασίονα ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τοῖς Η, Θ γωνιῶν τῆς πρὸς τῷ Ζ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον τῷ ΖΗΘ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΓΔ, ὥστε τὴν μὲν πρὸς τῷ Ζ γωνίαν ἴσην εἶναι τῇ ὑπὸ ΓΑΔ, ἑκατέραν δὲ τῶν πρὸς τοῖς Η, Θ ἴσην ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ τῆς ὑπὸ ΓΑΔ ἐστὶ διπλῆ. τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ δίχα ὑπὸ τῶν ΓΕ, ΔΒ εὐθειῶν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΑ.

Επεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ γωνιῶν διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΑΔ, καὶ τετμημέναι εἰσὶ δίχα ὑπὸ τῶν ΓΕ, ΔΒ εὐθειῶν· αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ πέντε ἄρα περιφέρειαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΔΕ περιφερείᾳ ἴση ἐστί, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΒΓΔ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια ὅλῃ τῇ ΕΔΓΒ περιφερείᾳ ἴση ἐστί. καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τὴν ΑΒΓΔ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΔ, ἐπὶ δὲ τὴν ΕΔΓΒ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΕ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία ἄρα τῇ ὑπὸ ΑΕΔ ἴση ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΒΑΕ, ΑΕΔ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

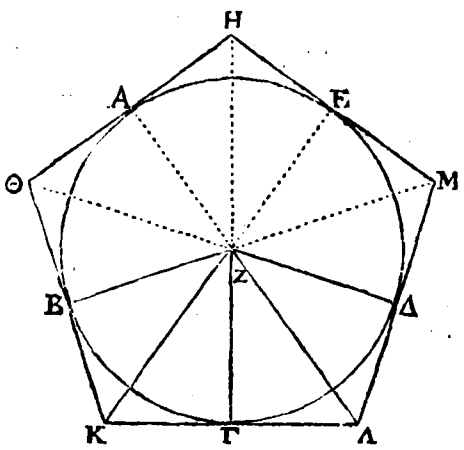
Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

ΕΣτω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ περὶ τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Νενοήθω

Νενοήσθω δὴ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου τῶν γωνιῶν σημεῖα, τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, ὥστε ἴσας εἶναι τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ περιφερείας· καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε ἤχθωσαν δὴ κύκλου ἐφαπτόμεναι αἱ ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ· καὶ εἰλήφθω δὴ ΑΒΓΔΕ κύκλου κέντρον τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ; ΖΚ, ΖΓ, ΖΛ, ΖΔ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ μιᾷ ΚΛ εὐθεῖα ἐφάπτεται μὲν τοῦ ΑΒΓΔΕ κύκλου κατὰ τὸ Γ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ζ κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ Γ ἐπαφὴν ἐπέζευκται ἡ ΖΓ· ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΚΛ· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν πρὸς τῷ Γ γωνιῶν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς ταῖς Β, Δ σημείοις γωνίαι ὀρθαί εἰσι. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΖΓΚ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΖΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΓ, ΓΚ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΚ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΚ ἴσον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΖΓ, ΓΚ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΚ ἐστὶν ἴσα, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἐστὶν ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΚ ἐστὶν ἴσον, ἴση ἄρα ἡ ΒΚ τῇ ΓΚ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ, καὶ κοινὴ ἡ ΖΚ, δύο δὴ αἱ ΒΖ, ΖΚ δυσὶ ταῖς ΓΖ, ΖΚ ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ ΒΚ βάσει τῇ ΓΚ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ μιᾷ ὑπὸ ΒΖΚ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΖΓ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΚΖ τῇ ὑπὸ ΖΚΓ ἐστὶν ἴση· διπλῆ ἄρα ἡ μιᾷ ὑπὸ ΒΖΓ τῆς ὑπὸ ΚΖΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΚΓ τῆς ὑπὸ ΖΚΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μιᾷ ὑπὸ ΓΖΔ τῆς ὑπὸ ΓΖΛ ἐστὶ διπλῆ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΛΔ τῆς ὑπὸ ΓΛΖ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ περιφέρεια τῇ ΓΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΖΓ τῇ ὑπὸ ΓΖΔ. καὶ ἔστιν ἡ μιᾷ ὑπὸ ΒΖΓ τῆς ὑπὸ ΚΖΓ διπλῆ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΓ διπλῆ τῆς ὑπὸ ΛΖΓ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΚΖΓ τῇ ὑπὸ ΓΖΛ. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΖΚΓ, ΖΛΓ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΖΓ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ἴση ἄρα ἡ μιᾷ ΚΓ εὐθεῖα τῇ ΓΛ, ἡ δὲ ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΓ τῇ ΓΛ, διπλῆ ἄρα ἡ ΚΛ τῆς ΚΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται, καὶ ἡ ΘΚ τῆς ΒΚ διπλῆ. καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ἴση ἡ ΒΚ τῇ ΚΓ, καὶ ἔστι διπλῆ ἡ μιᾷ ΚΛ τῆς ΚΓ, ἡ δὲ ΘΚ τῆς ΒΚ· καὶ ΘΚ ἄρα τῇ ΚΛ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν ΗΘ, ΗΜ, ΜΛ ἑκατέρᾳ τῶν ΘΚ, ΚΛ ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΛΜ πεντάγωνον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΓ, καὶ ἐδείχθη τῆς μιᾷ ὑπὸ ΖΚΓ διπλῆ ἡ ὑπὸ ΘΚΛ, τῆς δὲ ὑπὸ ΖΛΓ διπλῆ ἡ ὑπὸ ΚΛΜ· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΛ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΛΜ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΚΘΗ, ΘΗΜ, ΗΜΛ ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘΚΛ,



Intelligantur pentagoni in circulo [per 11.4.] deſcripti angulorum puncta A, B, Γ, Δ, E, ita ut circumferentiæ AB, BΓ, ΓΔ, ΔE, EA ſint æquales; & per puncta A, B, Γ, Δ, E ducantur [per 17. 3.] circulum contingentes HΘ, ΘK, KΛ, ΛM, MH: & ſumpto circuli ABΓΔE centro Z, jungantur ZB, ZK, ZΓ, ZΛ, ZΔ.

Quoniam igitur recta linea KΛ contingit circulum ABΓΔE in puncto Γ, & à centro Z ad contactum qui eſt ad Γ ducta eſt ZΓ; erit [per 18. 3.] ZΓ ad ipſam KΛ perpendicularis: rectus igitur eſt uterque angulorum qui ſunt ad Γ. eadem ratione & anguli qui ad puncta B, Δ ſunt recti. & quoniam rectus eſt angulus ZΓK, quadratum quod fit ex ZK [per 47. 1.] æquale eſt quadratis ex ZΓ, ΓK. & ob eandem cauſam quadratis ex ZB, BK æquale eſt ex ZK quadratum: quadrata igitur ex ZΓ, ΓK quadratis ex ZB, BK ſunt æqualia; è quibus quod fit ex ZΓ ei quod fit ex ZB eſt æquale: ergo reliquum quod fit ex ΓK reliquo ex BK æquale erit; æqualis igitur eſt BK ipſi ΓK. & quoniam ZB eſt æqualis ZΓ, communis autem ZK; duæ BZ, ZK duabus ΓZ, ZK ſunt æquales, & baſis BK eſt æqualis baſi ΓK; erit igitur [per 8. 1.] angulus BZK æqualis angulo KZΓ, & angulus BKZ angulo ZKΓ æqualis: duplus igitur eſt angulus BZΓ anguli KZΓ, & angulus BKΓ duplus ipſius ZKΓ. eadem ratione & angulus ΓZΔ duplus eſt anguli ΓZΛ, angulus vero ΓΛΔ duplus anguli ΓΛZ. & quoniam circumferentia BΓ circumferentiæ ΓΔ eſt æqualis, & angulus BZΓ [per 27. 3.] angulo ΓZΔ æqualis erit. atque eſt angulus quidem BZΓ anguli KZΓ duplus, angulus vero ΔZΓ duplus ipſius ΛZΓ: æqualis igitur eſt angulus KZΓ angulo ΓZΛ. ſunt igitur ZKΓ, ZΛΓ duo triangula habentia duos angulos duobus angulis æquales alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, quod ipſis commune eſt nempe ZΓ; ergo [per 26. 1.] & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habent, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem: recta igitur linea KΓ eſt æqualis rectæ ΓΛ, & angulus ZKΓ æqualis angulo ZΛΓ. & quoniam KΓ eſt æqualis ΓΛ, erit KΛ ipſius KΓ dupla. eadem ratione & ΘK ipſius BK dupla oſtendetur. rurſus, quoniam BK oſtenſa eſt æqualis ipſi KΓ, atque eſt KΛ quidem dupla KΓ, ΘK vero ipſius BK dupla; erit ΘK ipſi KΛ æqualis. ſimiliter & unaquæque ipſarum HΘ, HM, MΛ oſtendetur æqualis alterutri ΘK, KΛ: æquilaterum igitur eſt HΘKΛM pentagonum. dico etiam æquiangulum eſſe. quoniam enim angulus ZKΓ eſt æqualis angulo ZΛΓ, & oſtenſus eſt ipſius quidem ZKΓ duplus angulus ΘKΛ; ipſius vero ZΛΓ duplus KΛM: erit & ΘKΛ angulus angulo KΛM æqualis. ſimili ratione oſtendetur & unuſquiſque ipſorum KΘH, ΘHM, HMΛ alterutri ΘKΛ,

ΚΛΜ æqualis: quinque igitur anguli ΗΘΚ, ΘΚΛ, ΚΛΜ, ΛΜΗ, ΜΗΘ inter ſe ſunt æquales. ergo æquiangulum eſt ΗΘΚΛΜ pentagonum. oſtenſum autem eſt etiam æquilaterum: & circumſcriptum eſt circa ΑΒΓΔΕ circulum. quod erat faciendum.

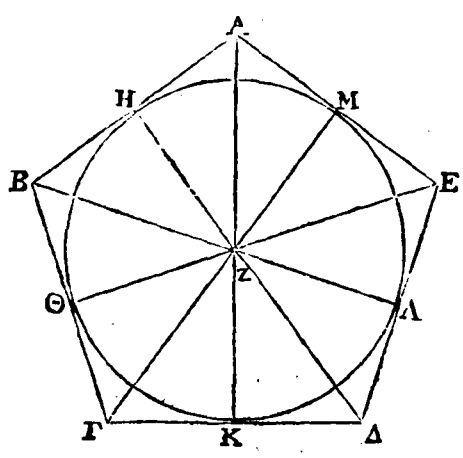
ΚΛΜ ἴση· αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΗΘΚ, ΘΚΛ, ΚΛΜ, ΛΜΗ, ΜΗΘ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΛΜ πεντάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XIII. Probl.

In dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inſcribere.

SIT datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum ΑΒΓΔΕ: oportet in ΑΒΓΔΕ pentagono circulum inſcribere.

Secetur [per 9. 1.] uterque angulorum ΒΓΔ, ΓΔΕ bifariam à rectis lineis ΓΖ, ΔΖ; & à puncto Ζ, in quo conveniunt inter ſe ΓΖ, ΔΖ, ducantur rectæ lineæ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. quoniam autem ΒΓ eſt æqualis ΓΔ, communis autem ΓΖ, duæ ΒΓ, ΓΖ duabus ΔΓ, ΓΖ ſunt æquales, & angulus ΒΓΖ eſt æqualis angulo ΔΓΖ: baſis igitur ΒΖ baſi ΔΖ [per 4. 1.] eſt æqualis, & ΒΖΓ triangulum æquale triangulo ΔΓΖ, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera ſubtenduntur: angulus igitur ΓΒΖ angulo ΓΔΖ æqualis erit. & quoniam angulus ΓΔΕ anguli ΓΔΖ eſt duplus, & angulus quidem ΓΔΕ angulo ΑΒΓ æqualis, angulus vero ΓΔΖ angulo ΓΒΖ æqualis; erit & ΓΒΑ angulus duplus anguli ΓΒΖ; ac propterea angulus ΑΒΖ angulo ΖΒΓ æqualis: angulus igitur ΑΒΓ bifariam ſecatur à recta linea ΒΖ. ſimiliter demonſtrabitur & unumquemque angulorum ΒΑΕ, ΑΕΔ à rectis lineis ΖΑ, ΖΕ bifariam ſecari. itaque à puncto Ζ ad rectas lineas ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ducantur perpendiculares ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ. & quoniam angulus ΘΓΖ eſt æqualis angulo ΚΓΖ, eſt autem & rectus ΖΘΓ recto ΖΚΓ æqualis: erunt ΖΘΓ, ΖΚΓ duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, commune ſcilicet utrique ΖΓ, quod uni æqualium angulorum ſubtenditur: ergo [per 26. 1.] & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, atque erit perpendicularis ΖΘ perpendiculari ΖΚ æqualis. ſimiliter oſtendetur & unaquæque ipſarum ΖΛ, ΖΜ, ΖΗ æqualis alterutri ΖΘ, ΖΚ: quinque igitur rectæ lineæ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ inter ſe ſunt æquales. quare centro Ζ intervallo autem æquali uni ipſarum ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta, & rectas lineas ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ continget, propterea quod anguli ad Η, Θ, Κ, Λ, Μ ſunt recti. ſi enim ipſas non contingit, ſed ſecat; quæ diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate du-



Προτασις ιγ'.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψαι.

ΕΣτω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθω γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑφ' ἑκατέρας τῶν ΓΖ, ΔΖ εὐθειῶν· καὶ ἀπὸ δὴ τοῦ Ζ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ ΓΖ, ΔΖ εὐθεῖαι, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ εὐθεῖαι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, δύο δὴ αἱ ΒΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΔΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΓΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΖ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΒΖ βάσει τῇ ΔΖ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΒΖΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΖ. καὶ ἐπεί ἐστιν ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῆς ὑπὸ ΓΔΖ διπλῆ, ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΑ ἄρα τῆς ὑπὸ ΓΒΖ ἐστὶ διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΒΖ εὐθείας. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΕ, ΑΕΔ δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΖΑ, ΖΕ εὐθειῶν. ἤχθωσαν δὴ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εὐθείας κάθετοι αἱ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΘΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΓΖ, ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΖΘΓ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΖΚΓ ἴση, δύο δὴ τριγώνα ἐστὶ τὰ ΖΘΓ, ΖΚΓ τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΖΓ ὑποτείνουσα ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει· ἴση ἄρα ἡ ΖΘ κάθετος τῇ ΖΚ καθέτῳ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΛ, ΖΜ, ΖΗ ἑκατέρᾳ τῶν ΖΘ, ΖΚ ἴση ἐστίν· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐφάψεται τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς ταῖς Η, Θ, Κ, Λ, Μ σημείοις γωνίας. εἰ γὰρ οὐκ ἐφάψεται αὐτῶν ἀλλὰ τεμεῖ αὐτὰς, συμβήσεται τὴν τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ'

ἀπ' ἄκρας ὀρθογωνίου ἐντὸς πίπτων ἐφ' κύκλου, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ τῷ Ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΖΗ, ΖΘ, ΖΚ, ΖΛ, ΖΜ εὐθειῶν γραφόμενος κύκλος πρὸς τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ εὐθείας ἁφήσεται ἄρα αὐτῶν. γεγράφθω ὡς ὁ ΗΘΚΛΜ.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος ἐγγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

citur intra circulum cadet, quod abſurdum eſſe [per 16. 3.] oſtenſum eſt. centro igitur Z & intervallo æquali uni rectarum ZH, ZΘ, ZK, ZΛ, ZM circulus deſcriptus rectas lineas AB, BΓ, ΓΔ, ΔE, EA non ſecabit: ipſas igitur continget. deſcribatur ut HΘKΛM.

In dato igitur pentagono æquilatero & æquiangulo circulus eſt inſcriptus. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι.

PROP. XIV. PROBL.

Circa datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum circulum circumſcribere.

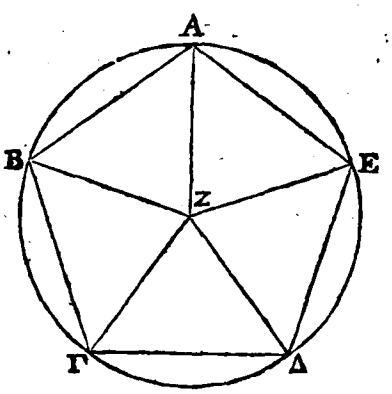
Ἔστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅπερ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον περιγράψαι.

Τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΓΖ, ΖΔ, καὶ ἤχθω τοῦ Ζ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν αἱ ΓΖ, ΖΔ, ἐπὶ τὰ Β, Α, Ε σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ. ὁμοίως δὴ τοῖς πρὸ τούτου δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΕ, ΑΕΔ γωνιῶν δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκάστης τῶν ΒΖ, ΖΑ, ΖΕ εὐθειῶν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΓΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΕ, καὶ ἔστι τοῦ μὲν ὑπὸ ΒΓΔ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΖΓΔ, τοῦ δὲ ὑπὸ ΓΔΕ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΓΔΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΖΓΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΖΓ πλευρᾷ τῇ ΖΔ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΒ, ΖΑ, ΖΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΖΓ, ΖΔ ἐστὶν ἴση· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρον τε ἰσογώνιον. περιγεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ ΑΒΓΔΕ.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος περιγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Sit datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum ABΓΔE: oportet circa pentagonum ABΓΔE circulum circumſcribere.

Secetur [per 9. 1.] uterque ipſorum BΓΔ, ΓΔE angulorum bifariam à rectis lineis ΓZ, ZΔ; & à puncto Z, in quo conveniunt rectæ lineæ, ad puncta B, A, E ducantur ZB, ZA, ZE. ſimiliter ut in antecedenti demonſtrabitur unumquemque angulorum ΓBA, BAE, AEΔ à rectis lineis BZ, ZA, ZE bifariam ſecari. & quoniam angulus BΓΔ angulo ΓΔE eſt æqualis, atque eſt anguli BΓΔ dimidius angulus ZΓΔ, anguli vero ΓΔE dimidius ΓΔZ; erit ZΓΔ angulus æqualis angulo ZΔΓ: quare [per 6. 1.] & latus ZΓ lateri ZΔ eſt æquale. ſimiliter demonſtrabitur unaquæque ipſarum ZB, ZA, ZE æqualis alterutri ZΓ, ZΔ: quinque igitur rectæ lineæ ZA, ZB, ZΓ, ZΔ, ZE ſunt inter ſe æquales. ergo centro Z & intervallo æquali uni ipſarum ZA, ZB, ZΓ, ZΔ, ZE circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta, eritque circumſcriptus circa pentagonum æquilaterum & æquiangulum ABΓΔE. deſcribatur, & ſit ABΓΔE.



Circa datum igitur pentagonum æquilaterum & æquiangulum circumſcriptus eſt circulus. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Εἰς τὸ δοθὲν κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

PROP. XV. PROBL.

In dato circulo hexagonum æquilaterum & æquiangulum inſcribere.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕΖ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕΖ κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

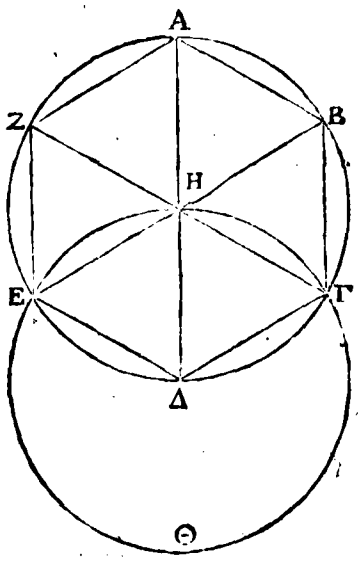
Ἤχθω διάμετρος τοῦ ΑΒΓΔΕΖ κύκλου ἡ ΑΔ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Η, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Δ διαστήματι δὲ τῷ ΔΗ κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΗΓΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΗ, ΓΗ διήχθωσαν δὲ καὶ ἐπὶ τὰ Β, Ζ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ,

Sit datus circulus ABΓΔEZ: oportet in circulo ABΓΔEZ hexagonum æquilaterum & æquiangulum inſcribere.

Ducatur circuli ABΓΔEZ diameter AΔ, ſumaturque centrum circuli H, & centro Δ intervallo autem ΔH [per 3. poſt.] circulus deſcribatur EHΓΘ, junctæque EH, ΓH ad puncta B, Z producantur, & jungantur AB, BΓ,

ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ: dico hexagonum ΑΒΓΔΕΖ æquilaterum eſſe & æquiangulum.

Quoniam enim Η punctum centrum eſt circuli ΑΒΓΔΕΖ, erit ΗΕ ipſi ΗΔ æqualis. rurſus, quoniam Δ centrum eſt circuli ΕΗΓΘ, erit ΔΕ æqualis ΔΗ. ſed ΗΕ ipſi ΗΔ æqualis oſtenſa eſt, ergo ΗΕ ipſi ΕΔ eſt æqualis: æquilaterum igitur eſt ΕΗΔ triangulum, ideoque tres ipſius anguli ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ ſunt inter ſe æquales, quoniam [per 5. 1.] triangulorum iſoſcelium anguli ad baſim ſunt inter ſe æquales. & ſunt [per 32. 1.] trianguli tres anguli æquales duobus rectis: angulus igitur ΕΗΔ eſt tertia pars duorum rectorum. ſimiliter oſtendetur & ΔΗΓ duorum rectorum pars tertia. & quoniam [per 13. 1.] recta linea ΓΗ ſuper rectam ΕΒ inſiſtens angulos qui deinceps ſunt ΒΗΓ, ΓΗΒ duobus rectis æquales efficit, erit & reliquus ΓΗΒ pars tertia duorum rectorum: anguli igitur ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ inter ſe ſunt æquales. & qui ipſis ad verticem ſunt anguli ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ æquales ſunt [per 15. 1.] angulis ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ: quare ſex anguli ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ ſunt inter ſe æquales. ſed [per 26. 3.] æquales anguli æqualibus circumferentiis inſiſtunt: ſex igitur circumferentiæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ inter ſe ſunt æquales. æquales autem circumferentias [per 29. 3.] æquales rectæ lineæ ſubtendunt: ergo & ſex rectæ lineæ inter ſe æquales ſunt, ac propterea æquilaterum eſt ΑΒΓΔΕΖ hexagonum. dico & æquiangulum eſſe. quoniam enim circumferentia ΑΖ circumferentiæ ΕΔ eſt æqualis, communis addatur circumferentia ΑΒΓΔ: tota igitur ΖΑΒΓΔ circumferentia æqualis eſt toti circumferentiæ ΕΔΓΒΑ, & circumferentiæ ΖΑΒΓΔ angulus ΖΕΔ inſiſtit, circumferentiæ vero ΕΔΓΒΑ inſiſtit angulus ΑΖΕ: angulus igitur ΑΖΕ [per 27. 3.] angulo ΔΕΖ eſt æqualis. ſimiliter oſtendentur & reliqui anguli hexagoni ΑΒΓΔΕΖ ſigillatim æquales alterutri ipſorum ΑΖΕ, ΖΕΔ: eſt igitur æquiangulum ΑΒΓΔΕΖ hexagonum. oſtenſum autem eſt & æquilaterum eſſe: & inſcriptum eſt in circulo ΑΒΓΔΕΖ.



In dato igitur circulo inſcriptum eſt hexagonum æquilaterum & æquiangulum. quod erat faciendum.

Corollarium.

Ex hoc manifeſtum eſt hexagoni latus circuli ſemidiametro æquale eſſe.

Et ſi per puncta Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ ducamus contingentes circulum, circa circulum circumſcribetur hexagonum æquilaterum & æquiangulum, ad modum eorum, quæ de pentagono dicta ſunt. ad quorum modum etiam dato hexagono circulum inſcribemus & circumſcribemus.

ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ἰσογώνιον.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΗΔ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΕΗΓΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΔΗ. ἀλλ' ἡ ΗΕ τῇ ΗΔ ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ ΗΕ ἄρα τῇ ΕΔ ἐστὶν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗΔ τρίγωνον, καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αὐτοῦ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΗΔ, ΗΔΕ, ΔΕΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἐπειδήπερ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ εἰσιν αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΗΔ γωνία τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΔΗΓ τρίτον δύο ὀρθῶν. ἐπεὶ ἡ ΓΗ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΕΒ συσταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΗΓ, ΓΗΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν. αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὥστε καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν αἱ ὑπὸ ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ ἴσαι εἰσὶ τῇς ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ· αἱ ἓξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΗΔ, ΔΗΓ, ΓΗΒ, ΒΗΑ, ΑΗΖ, ΖΗΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ ἓξ ἄρα περιφέρειαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ἁρμόττουσιν· αἱ ἓξ ἄρα εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ περιφέρεια τῇ ΕΔ περιφερείᾳ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια· ὅλη ἄρα ἡ ΖΑΒΓΔ περιφέρεια ὅλῃ τῇ ΕΔΓΒΑ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση, καὶ βέβηκε ἐπὶ μὲν τῆς ΖΑΒΓΔ περιφερείας ἡ ὑπὸ ΖΕΔ γωνία, ἐπὶ δὲ τῆς ΕΔΓΒΑ ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ΑΒΓΔΕΖ ἑξαγώνου κατὰ μίαν ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΖΕ, ΖΕΔ γωνιῶν· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒΓΔΕΖ κύκλον.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Καὶ ἐὰν διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ σημείων ἐφαπτόμενοι τοῦ κύκλου ἀχθῶσιν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, ἀναλόγως τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις. καὶ ἔτι διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις, εἰς τὸ δοθὲν ἑξάγωνον κύκλον ἐγγράψομέν τε καὶ περιγράψομεν.

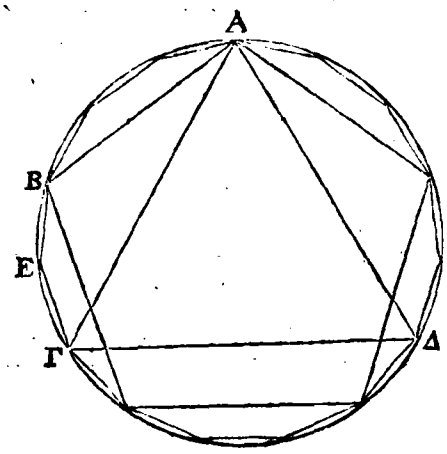
ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τριγώνου μὲν ἰσόπλευρου τὸ εἰς αὐτὸν ἐγγραφόμενον πλευρὰ ἡ ΑΓ, πενταγώνου δὲ ἰσόπλευρος ἡ ΑΒ· οἵων ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἴσων ἁπάντων δεκαπέντε, τοιούτων ἡ μὲν ΑΒΓ περιφέρεια τρίτον ἔσται τοῦ κύκλου ἔσεται πέντε. ἡ δὲ ΑΒ περιφέρεια, πέμπτον ἔσται τοῦ κύκλου, ἔσεται τριῶν· λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΓ τῶν ἴσων δύο. τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, ἑκατέρα ἄρα τῶν ΒΕ, ΕΓ περιφερῶν πεντεκαιδεκατόν ἐστι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. ἐὰν ἄρα ἐπιζεύξαντες ταῖς ΒΕ, ΕΓ εὐθείας, ἴσας αὐταῖς κατὰ τὸ συνεχὲς εὐθείας ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ἔσεται εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



ΟΜΟΙΩΣ δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου, ἐὰν λάβωμεν τὰ κατὰ κύκλου διαιρέσεων ἁφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀναγράψωμεν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. ἔτι δὲ λαβόντες τὰ ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις, καὶ εἰς τὸ δοθὲν πεντεκαιδεκάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψομέν τε καὶ περιγράψομεν.

PROP. XVI. PROBL.

In dato circulo quindecagonum æquilaterum & æquiangulum inscribere.

SIT datus circulus ΑΒΓΔ: oportet in circulo ΑΒΓΔ quindecagonum æquilaterum & æquiangulum inscribere.

Inscribatur circulo ΑΒΓΔ trianguli quidem æquilateri ipsi inscripti latus ΑΓ, pentagoni vero æquilateri latus ΑΒ: qualium igitur partium circulus ΑΒΓΔ est quindecim, talium circumferentia ΑΒΓ (tertia existens circuli) erit quinque. circumferentia vero ΑΒ, quæ quinta est circuli, erit trium: ergo reliqua ΒΓ est duarum. secetur [per 30 3.] ΒΓ bifariam in puncto Ε: quare utraque ipsarum ΒΕ, ΕΓ circumferentiarum quintadecima pars est ΑΒΓΔ circuli. si igitur jungentes ΒΕ, ΕΓ æquales ipsis in continuum rectas lineas circulo ΑΒΓΔ [per 1. 4.] aptemus, erit in ipso inscriptum quindecagonum æquilaterum & æquiangulum. quod erat faciendum.

AD MODUM autem eorum quæ dicta sunt de pentagono, si per circuli divisiones ducamus rectas lineas circulum contingentes, circa ipsum circumscribetur quindecagonum æquilaterum & æquiangulum. & insuper, ad modum eorum quæ dicta sunt de pentagono, dato quindecagono æquilatero & æquiangulo, circulum inscribemus & circumscribemus.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER QUINTUS.

DEFINITIONES.

1. PARS eſt magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando minor majorem metitur.

2. Multiplex eſt major minoris, quando minor majorem metitur.

3. * Ratio eſt duarum magnitudinum ejuſdem generis ſecundum quantuplicitatem mutua quædam habitudo.

4. Rationem inter ſe magnitudines habere dicuntur, quæ multiplicatæ ſe invicem ſuperare poſſunt.

5. In eadem ratione magnitudines eſſe dicuntur, prima ad ſecundam & tertia ad quartam; quando primæ & tertiæ æque multiplices ſecundæ & quartæ æque multiplices, juxta quamvis multiplicationem, utraque utramque vel una ſuperant, vel una æquales ſunt, vel una deficiunt inter ſe comparatæ.

6. Magnitudines quæ eandem rationem habent, proportionales vocentur.

7. Quando autem æque multiplicium, multiplex primæ ſuperaverit multiplicem ſecundæ, multiplex autem tertiæ non ſuperaverit multiplicem quartæ: tunc prima ad ſecundam majorem habere dicitur rationem, quam tertia ad quartam.

ΟΡΟΙ.

α'. ΜΕΡΟΣ ἐστὶ μέγεθος μεγέθους, τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.

β'. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.

γ'. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιά σχέσις.

δ'. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δυνάται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

ε'. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον· ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ μὲν δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων, καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμόν, ἑκάτερον ἅμα ἐλλείπῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ λαμβανόμενα κατάλληλα.

ς'. Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἀνάλογον καλείσθω.

ζ'. Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων, τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου· τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

* *i. e.* Ratio eſt ea magnitudinum homogenearum inter ſe relatio (ſeu habitudo) qua innuitur quomodo ſe habet altera ad alteram, ſecundum quantuplicitatem conſiderata. Vide Cl. *Wallisii* opera Mathematica, Vol. 2. p. 665.

η'. Ανα-

η'. Ἀναλογία δέ ἐστιν ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης.

θ'. Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστοις ἐστίν.

ι'. Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον.

ια'. Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον· καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἐπὶ πλέον, ἕως ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ.

ιβ'. Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται εἶναι, τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις, τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις.

ιγ'. Ἐναλλὰξ λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον.

ιδ'. Ἀνάπαλιν λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἑπομένου ὡς ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον ὡς ἑπόμενον.

ιε'. Σύνθεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου ὡς ἑνὸς πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

ιϛ'. Διαίρεσις δὲ λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ὑπεροχῆς, ἣ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον.

ιζ'. Ἀναστροφὴ λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχήν, ἣ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου.

ιη'. Δι᾽ ἴσου λόγος ἐστί, πλειόνων ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων ἴσων αὐτοῖς τὸ πλῆθος σὺν δύο λαμβανομένων καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅταν ᾖ ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον. ΗΑΛΩΣ. Λῆψις τῶν ἄκρων καθ᾽ ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.

ιθ'. Τεταγμένη ἀναλογία ἐστίν, ὅταν ᾖ ὡς ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον οὕτως ἡγούμενον πρὸς τὸ ἑπόμενον, ᾖ δὲ καὶ ὡς ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι οὕτως ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι.

κ'. Ταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστίν, ὅταν, τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων ἴσων αὐτοῖς τὸ πλῆθος, γίνεται, ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον· ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον.

8. Proportio eſt rationum ſimilitudo.

9. Proportio in tribus ad minimum terminis conſiſtit.

10. Si tres magnitudines ſint proportionales; prima ad tertiam duplicatam habere dicitur rationem ejus quam habet ad ſecundam.

11. Si quatuor magnitudines ſint proportionales, prima ad quartam triplicatam habere dicitur rationem ejus quam habet ad ſecundam; & ſic deinceps uno amplius, quamdiu proportio exſtiterit.

12. Homologæ magnitudines dicuntur, antecedentes quidem antecedentibus, conſequentes vero conſequentibus.

13. Alterna ratio eſt ſumptio antecedentis ad antecedentem, & conſequentis ad conſequentem.

14. Inverſa ratio eſt ſumptio conſequentis ut antecedentis ad antecedentem ut ad conſequentem.

15. Compoſitio rationis eſt ſumptio antecedentis una cum conſequente tanquam unius ad ipſam conſequentem.

16. Diviſio rationis eſt ſumptio exceſſus, quo antecedens ſuperat conſequentem, ad ipſam conſequentem.

17. Converſio rationis eſt ſumptio antecedentis ad exceſſum, quo antecedens ipſam conſequentem ſuperat.

18. Ex æqualitate ratio eſt, quando, pluribus exiſtentibus magnitudinibus & aliis ipſis numero æqualibus, fuerit ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ita in ſecundis magnitudinibus prima ad ultimam. VEL ALITER. Sumptio extremarum per ſubſtractionem mediarum.

19. Ordinata proportio eſt, quando fuerit ut antecedens ad conſequentem ita antecedens ad conſequentem; ut autem conſequens ad aliam quampiam, ita conſequens ad aliam quampiam.

20. Perturbata vero proportio eſt, quando, tribus exiſtentibus magnitudinibus & aliis ipſis numero æqualibus, fuerit ut in primis magnitudinibus antecedens ad conſequentem, ita in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentem: ut autem in primis magnitudinibus conſequens ad aliam quampiam, ita in ſecundis magnitudinibus alia quæpiam ad antecedentem.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Si fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices; quam multiplex est una magnitudo unius, tam multiplices erunt & omnes omnium.

SInt quotcunque magnitudines AB, ΓΔ quotcunque magnitudinum E, Z æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices: dico quam multiplex est AB ipsius E, tam multiplices esse & AB, ΓΔ ipsarum E, Z.

Quoniam enim AB æque multiplex est ipsius E, atque ΓΔ ipsius Z; quot magnitudines sunt in AB æquales ipsi E, tot erunt & in ΓΔ æquales ipsi Z. dividatur AB quidem in partes ipsi E æquales, quæ sint AH, HB; ΓΔ vero dividatur in partes æquales ipsi Z, videlicet ΓΘ, ΘΔ: erit igitur multitudo partium ΓΘ, ΘΔ æqualis multitudini ipsarum AH, HB. & quoniam AH est æqualis E, & ΓΘ æqualis Z; erunt & AH, ΓΘ æquales ipsis E, Z. eadem ratione HB est æqualis E, & ΘΔ ipsi Z; erunt igitur & MB, ΘΔ æquales ipsis E, Z: quot igitur sunt in AB æquales ipsi E, tot sunt & in AB, ΓΔ æquales ipsis E, Z: ergo quam multiplex est AB ipsius E, tam multiplices erunt & AB, ΓΔ ipsarum E, Z.

Si igitur fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices; quam multiplex est una magnitudo unius, tam multiplices erunt & omnes omnium. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον· ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων.

Ἔστω ὁποσαοῦν μεγέθη τὰ AB, ΓΔ ὁποσωνοῦν μεγεθῶν τῶν E, Z ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον· λέγω ὅτι ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ AB τοῦ E, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ AB, ΓΔ τῶν E, Z.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ AB τοῦ E, καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Z· ὅσα ἄρα μεγέθη ἐστὶν ἐν τῷ AB ἴσα τῷ E, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΓΔ ἴσα τῷ Z. διῃρήσθω τὸ μὲν AB εἰς τὰ τῷ E μεγέθη ἴσα τὰ AH, HB, τὸ δὲ ΓΔ εἰς τὰ τῷ Z ἴσα τὰ ΓΘ, ΘΔ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΓΘ, ΘΔ τῷ πλήθει τῶν AH, HB. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν AH τῷ E, τὸ δὲ ΓΘ τῷ Z· ἴσα ἄρα καὶ τὰ AH, ΓΘ τοῖς E, Z. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐστὶ ἴσον τὸ HB τῷ E, καὶ τὸ ΘΔ τῷ Z· ἴσα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ HB, ΘΔ τοῖς E, Z· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ AB ἴσα τῷ E, τοσαῦτα καὶ ἐν τοῖς AB, ΓΔ ἴσα ἐστὶ τοῖς E, Z· ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ AB τοῦ E, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ AB, ΓΔ τῶν E, Z.

Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου πολλαπλάσιον· ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. II. PROBL.

Si prima secundæ æque multiplex fuerit atque tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex atque sexta quartæ; erunt etiam prima & quinta, simul sumptæ, secundæ æque multiplices atque tertia & sexta quartæ.

PRima enim AB secundæ Γ æque multiplex sit atque tertia ΔE quartæ Z; sit autem & quinta BH secundæ Γ æque multiplex atque sexta HΘ quartæ Z: dico primam & quintam simul sumptas AH secundæ Γ æque multiplices esse atque tertiam & sextam ΔΘ quartæ Z.

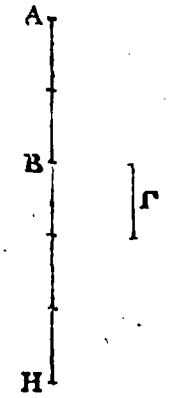
ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

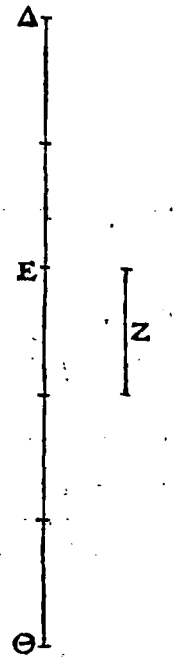
Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τετάρτου· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτου καὶ ἕκτου τετάρτου.

Πρῶτον γὰρ τὸ AB δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΔE τετάρτου τοῦ Z, ἔστω δὲ καὶ πέμπτον τὸ BH δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ EΘ τετάρτου τοῦ Z· λέγω ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ AH δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτου καὶ ἕκτου τὸ ΔΘ τετάρτου τοῦ Z.

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μεγέθη ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ ἴσα τῷ Ζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὅσα ἐστὶν ἐν τῷ ΒΗ ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΕΘ ἴσα τῷ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν ὅλῳ τῷ ΑΗ ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν ὅλῳ τῷ ΔΘ ἴσα τῷ Ζ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΗ τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΘ τοῦ Ζ· καὶ εἰσιν ἀφῃρημένων πρώτων καὶ πέμπτων τὸ ΑΗ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ τετάρτου τοῦ Ζ.





Quoniam enim AB æque multiplex eſt ipſius Γ atque ΔE ipſius Z; quot magnitudines ſunt in AB æquales Γ, tot erunt & in ΔE æquales Z. eadem ratione & quot ſunt in BH æquales Γ, tot & in EΘ erunt æquales Z: quot igitur ſunt in tota AH æquales Γ, tot erunt & in tota ΔΘ æquales Z: ergo quam multiplex eſt AH ipſius Γ, tam multiplex eſt & ΔΘ ipſius Z: prima igitur & quinta ſimul ſumptæ AH ſecundæ Γ æque multiplices erunt atque tertia & ſexta ΔΘ quartæ Z.

Quare ſi prima ſecundæ æque multiplex fuerit atque tertia quartæ, fuerit autem & quinta ſecundæ æque multiplex atque ſexta quartæ; erunt prima & quinta ſimul ſumptæ æque multiplices ſecundæ atque tertia & ſexta quartæ. quod erat demonſtrandum.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τετάρτου· καὶ συνθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτου καὶ ἕκτου τετάρτου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

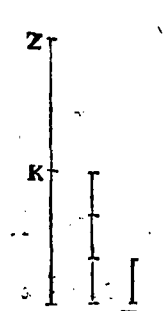
Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου· καὶ δίσου τῶν ληφθέντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, τὸ μὲν τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

Prop. III. Theor.

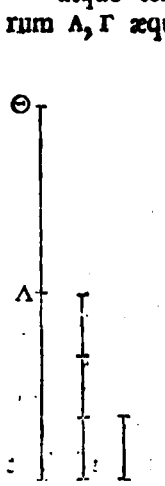
Si prima ſecundæ æque multiplex fuerit atque tertia quartæ, ſumantur autem æque multiplices primæ & tertiæ; erit & ex æquo ſumptarum utraque utriuſque æque multiplex, altera quidem ſecundæ, altera vero quartæ.

Πρῶτον γὰρ τὸ Α δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ Γ τετάρτου τοῦ Δ, καὶ εἰλήφθω τῶν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΕΖ, ΗΘ· λέγω ὅτι ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΖ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Δ.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΖ τοῦ Α καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Γ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΕΖ ἴσα τῷ Α, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΗΘ ἴσα τῷ Γ. διῃρήσθω τὸ ΕΖ εἰς τὰ τῷ Α μεγέθη ἴσα τὰ ΕΚ, ΚΖ, τὸ δὲ ΗΘ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΗΛ, ΛΘ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΕΚ, ΚΖ τῷ πλήθει τῶν ΗΛ, ΛΘ. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Α τοῦ Β καὶ τὸ Γ τοῦ Δ· ἴσον δὲ τὸ μὲν ΕΚ τῷ Α, τὸ δὲ ΗΛ τῷ Γ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΚ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΛ τοῦ Δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΚΖ τοῦ Β, καὶ τὸ ΛΘ τοῦ Δ. ἐπεὶ οὖν πρῶτον τὸ ΕΚ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΗΛ τετάρτου τοῦ Δ, ἔστι δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΚΖ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ ΛΘ τετάρτου τοῦ Δ· καὶ συνθὲν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΕΖ



PRima enim A ſecundæ B æque multiplex ſit atque tertia Γ quartæ Δ: & ſumantur ipſarum A, Γ æque multiplices EZ, HΘ: dico EZ æque multiplicem eſſe ipſius B atque HΘ ipſius Δ.



Quoniam enim EZ æque multiplex eſt ipſius A, atque HΘ ipſius Γ; quot magnitudines ſunt in EZ æquales A, tot erunt & in HΘ æquales Γ. dividatur EZ quidem in magnitudines ipſi A æquales EK, KZ; HΘ vero dividatur in magnitudines æquales ipſi Γ, videlicet HΛ, ΛΘ: erit igitur ipſarum EK, KZ multitudo æqualis multitudini ipſarum HΛ, ΛΘ. & quoniam æque multiplex eſt A ipſius B atque Γ ipſius Δ, æqualis autem EK ipſi A, & HΛ ipſi Γ; erit EK æque multiplex ipſius B atque HΛ ipſius Δ. eadem ratione æque multiplex erit KZ ipſius B atque ΛΘ ipſius Δ. quoniam igitur prima EK ſecundæ B æque multiplex eſt atque tertia HΛ quartæ Δ; eſt autem & quinta KZ ſecundæ B æque multiplex atque ſexta ΛΘ quartæ Δ: erit [per 2. 5.] & compoſita è prima & quinta EZ

ſecundæ B æque multiplex atque tertia & ſexta H Θ quartæ Δ.

Si igitur prima ſecundæ æque fuerit multiplex atque tertia quartæ, ſumantur autem æque multiplices primæ & tertiæ; erit & ex æquo ſumptarum utraque utriuſque æque multiplex, altera quidem ſecundæ, altera vero quartæ. quod erat demonſtrandum.

δεύτερε τῦ Β ἰσάκις ἐςὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ Η Θ τετάρτε τῦ Δ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον δευτέρε ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τέταρτον, ληφθῇ δὲ ἰσάκις πολλαπλάσια τῦ πρώτε καὶ τρίτε· καὶ δίσε τ ληφθέντων ἑκάτερον ἑκατέρε ἰσάκις ἔσεται πολλαπλάσιον, τὸ μὲν τῦ δευτέρε, τὸ δὲ τῦ τετάρτε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. IV. Theor.

Si prima ad ſecundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; & æque multiplices primæ & tertiæ ad æque multiplices ſecundæ & quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem rationem habebunt inter ſe comparatæ.

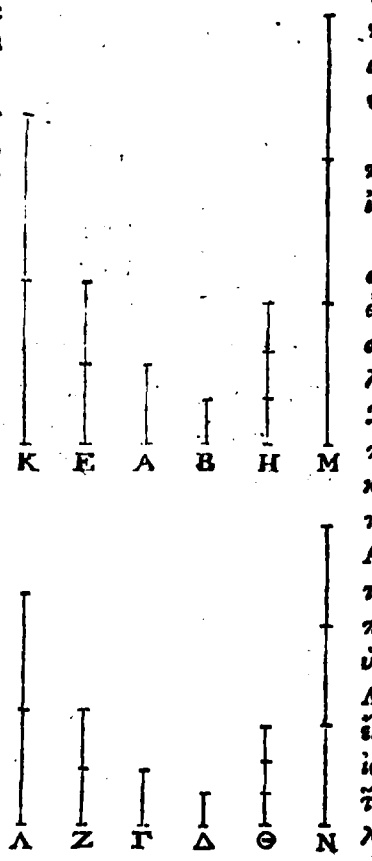
ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τ αὐτὸν ἔχῃ λόγον ᾗ τρίτον πρὸς τέταρτον· ᾗ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τῦτε πρώτε ᾗ τρίτε πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια ἕ δευτέρε καὶ τετάρτε, καθ' ὁποιονῦν πολλαπλασιασμόν, τ αὐτὸν ἕξει λόγον ληφθέντα κατάλληλα.

PRima enim A ad ſecundam B eandem rationem habeat quam tertia Γ ad quartam Δ, & ſumantur ipſarum quidem A, Γ utcunque æque multiplices E, Z, ipſarum vero B, Δ aliæ utcunque æque multiplices H Θ: dico E ad H ita eſſe, ut Z ad Θ.

Sumantur enim ipſarum quidem E, Z æque multiplices K, Λ, & ipſarum H, Θ æque multiplices M, N.

Quoniam igitur E æque multiplex eſt ipſius A atque Z ipſius Γ, ſumuntur autem ipſarum E, Z æque multiplices K, Λ: erit [per 3. 5.] K æque multiplex ipſius A atque Λ ipſius Γ. eadem ratione M æque multiplex erit ipſius B atque N ipſius Δ. & quoniam eſt ut A ad B ita Γ ad Δ, ſumptæ autem ſunt ipſarum A, Γ æque multiplices K, Λ, & ipſarum B, Δ aliæ utcunque æque multiplices M, N: ſi K ſuperat M, ſuperabit [per 5. def. 5.] & Λ ipſam N; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor erit. ſuntque K, Λ quidem ipſarum E, Z æque multiplices; M, N vero ipſarum H, Θ aliæ utcunque æque multiplices: ut igitur E ad H, ita erit [per 5. def. 5.] Z ad Θ.



Πρῶτον γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, καὶ εἰλήφθω τ μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τ δὲ Β, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ· λέγω ὅτι ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η ἐςὶν, ὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Θ.

Εἰλήφθω γὰρ τ μὲν Ε, Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, τ δὲ Η, Θ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐςὶ πολλαπλάσιον τὸ μὲν Ε τῦ Α, τὸ δὲ Ζ τῦ Γ, καὶ εἴληπται τ Ε, Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ· ἰσάκις ἄρα ἐςὶ πολλαπλάσιον τὸ Κ τῦ Α καὶ τὸ Λ τῦ Γ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκις ἐςὶ πολλαπλάσιον τὸ Μ τῦ Β καὶ τὸ Ν τῦ Δ. καὶ ἐπεὶ ἐςὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β ὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τ μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Κ τῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Λ τῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καὶ ἔςι τὰ μὲν Κ, Λ τ Ε, Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Μ, Ν τ Η, Θ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἐςὶν ἄρα ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η, ὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Θ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τ αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον· καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τῦτε πρώτε καὶ τρίτε πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τὸ δευτέρε καὶ τετάρτε, καθ' ὁποιονῦν πολλαπλασιασμὸν, τ αὐτὸν ἔξει λόγον ληφθέντα κατάλληλα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Quare ſi prima ad ſecundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; æque multiplices primæ & tertiæ ad æque multiplices ſecundæ & quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem rationem habebunt inter ſe comparatæ. quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Quoniam igitur demonſtratum eſt, ſi K ſuperat M, & Λ ipſam N ſuperare; & ſi æqualis,

Πόρισμα.

Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὅτι, εἰ ὑπερέχει τὸ Κ τῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Λ τῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον·

ἔλασσον· δηλονότι καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Μ τοῦ Κ, ὑπερέχει καὶ τὸ Ν τοῦ Λ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον· καὶ ἔστω τοῦτο ἔχειν καὶ ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Ε, οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Ζ. * Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ἔσται.

æqualem esse; & si minor, minorem: constat etiam si M superat K, & N superare ipsam Λ; & si æqualis, æqualem esse; & si minor, minorem: ac propterea ut H ad E, ita erit Θ ad Z. Ex hoc manifestum est, si quatuor magnitudines sint proportionales, & inverse proportionales esse.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος· καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.

Prop. V. Theor.

Si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit atque ablata ablatæ; erit & reliqua reliquæ æque multiplex atque tota totius.

Μέγεθος γὰρ τὸ ΑΒ μεγέθους τοῦ ΓΔ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΕ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

Magnitudo enim ΑΒ magnitudinis ΓΔ æque multiplex sit atque ablata ΑΕ ablatæ ΓΖ: dico & reliquam ΕΒ reliquæ ΖΔ æque multiplicem esse atque totam ΑΒ totius ΓΔ.

Ὁσαπλάσιον γάρ ἐστι τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΓΗ.

Quam multiplex enim est ΑΕ ipsius ΓΖ, tam multiplex fiat & ΕΒ ipsius ΓΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΗΖ, κεῖται δὲ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ ἑκατέρου τῶν ΗΖ, ΓΔ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΖ τῷ ΓΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΓ λοιπῷ τῷ ΔΖ ἴσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΗΓ, ἴσον δὲ τῷ ΗΓ τὸ ΔΖ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ. ἰσάκις ἄρα ὑποκειται πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιον ἐστὶ τὸ ὅλον τὸ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

Et quoniam [per 1. 5.] ΑΕ æque multiplex est ipsius ΓΖ atque ΑΒ ipsius ΗΖ, ponitur autem ΑΕ æque multiplex ΓΖ atque ΑΒ ipsius ΓΔ; æque multiplex est ΑΒ utriusque ΗΖ, ΓΔ: ac propterea ΗΖ ipsi ΓΔ est æqualis. communis auferatur ΓΖ: reliqua igitur ΗΓ æqualis est reliquæ ΔΖ. itaque quoniam ΑΕ æque multiplex est ΓΖ atque ΕΒ ipsius ΗΓ, estque ΗΓ æqualis ΔΖ; erit ΑΒ æque multiplex ΓΖ atque ΕΒ ipsius ΖΔ. æque multiplex autem ponitur ΑΕ ipsius ΓΖ atque ΑΒ ipsius ΓΔ: ergo ΕΒ est æque multiplex ipsius ΖΔ atque ΑΒ ipsius ΓΔ: & reliqua igitur ΕΒ reliquæ ΖΔ æque multiplex est atque tota ΑΒ totius ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος· καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Quare si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit atque ablata ablatæ; erit & reliqua reliquæ æque multiplex atque tota totius. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια· καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἤτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.

Prop. VI. Theor.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices sint, & ablatæ quædam sint earundem æque multiplices: erunt & reliquæ vel eisdem æquales, vel ipsarum æque multiplices.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ δύο μεγεθῶν τῶν Ε, Ζ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τὰ ΑΗ, ΓΘ τῶν αὐτῶν τῶν Ε, Ζ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσια· λέγω ὅτι καὶ λοιπὰ τὰ ΗΒ, ΘΔ τοῖς Ε, Ζ ἤτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια.

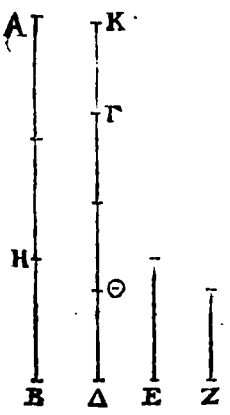
DUÆ enim magnitudines ΑΒ, ΓΔ, duarum magnitudinum Ε, Ζ sint æque multiplices, & ablatæ ΑΗ, ΓΘ earundem Ε, Ζ sint æque multiplices: dico & reliquas ΗΒ, ΘΔ vel ipsis Ε, Ζ æquales esse, vel ipsarum æque multiplices.

Ἔστω γὰρ πρότερον τὸ ΗΒ τῷ Ε ἴσον· λέγω ὅτι καὶ τὸ ΘΔ τῷ Ζ ἴσον ἐστί. κείσθω γὰρ τῷ Ζ ἴσον τὸ ΓΚ.

Sit enim primum ΗΒ æqualis Ε: dico & ΘΔ ipsi Ζ esse æqualem. ponatur enim ipsi Ζ æqualis ΓΚ.

* Aliis in libris *Corollarium* incipit ad hæc verba, Ἐκ δὴ τούτου, &c.

Et quoniam AH æque multiplex eſt ipſius E atque Γ Θ ipſius Z, eſtque H B quidem æqualis E; Γ K vero æqualis Z: erit [per 2.5.] A B æque multiplex ipſius E, atque K Θ ipſius Z. æque autem multiplex ponitur A B ipſius E atque Γ Δ ipſius Z: ergo K Θ æque multiplex eſt ipſius Z atque Γ Δ ipſius Z. quoniam igitur utraque ipſarum K Θ, Γ Δ eſt æque multiplex ipſius Z, erit K Θ æqualis Γ Δ. communis auferatur Γ Θ: ergo reliqua K Γ reliquæ Θ Δ eſt æqualis. ſed K Γ eſt æqualis Z: Θ Δ igitur ipſi Z eſt æqualis. ſi igitur H B ipſi E æqualis fuerit, etiam Θ Δ ipſi Z æqualis erit.



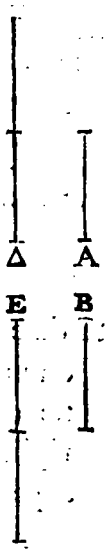
Similiter demonſtrabimus ſi H B [ut in fig. 2.] multiplex fuerit ipſius E, & Θ Δ ipſius Z æque multiplicem eſſe.

Si igitur duæ magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices ſint, & ablatæ quædam ſint earundem æque multiplices: erunt & reliquæ vel iiſdem æquales, vel ipſarum æque multiplices. quod erat demonſtrandum.

Prop. VII. Theor.

Æquales magnitudines eandem habent rationem ad eandem, & eadem ad æquales.

Sint æquales magnitudines A, B, alia autem quævis magnitudo Γ: dico utramque ipſarum A, B ad Γ eandem habere rationem; & etiam Γ ad utramque A, B eandem habere rationem.



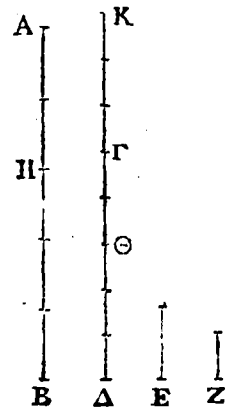
Sumantur enim ipſarum A, B æque multiplices Δ, E, & ipſius Γ alia utcunque multiplex Z.

Quoniam igitur æque multiplex eſt Δ ipſius A atque E ipſius B, eſtque A ipſi B æqualis; erit & Δ æqualis E. alia autem eſt Z utcunque multiplex ipſius Γ: ergo ſi Δ ſuperat Z, & E ipſam Z ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. & ſunt Δ, E quidem ipſarum A, B æque multiplices, Z vero alia utcunque multiplex ipſius Γ: erit igitur [per 5. def. 5.] ut A ad Γ, ita B ad Γ.

Dico inſuper Γ ad utramque ipſarum A, B eandem habere rationem.

Iiſdem enim conſtructis ſimiliter oſtendemus Δ ipſi E æqualem eſſe, aliam vero quandam Z. ſi igitur Z ſuperat Δ, ipſam quoque E ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. atque eſt Z quidem ipſius Γ multiplex, Δ, E vero aliæ utcunque æque multiplices ipſarum A, B: ergo [per 5. def. 5.] ut Γ ad A ita erit Γ ad B.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ A H τοῦ E καὶ τὸ Γ Θ τοῦ Z, ἴσον δὲ τὸ μὲν H B τῷ E, τὸ δὲ Γ K τῷ Z· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ A B τοῦ E, καὶ τὸ K Θ τοῦ Z. ἰσάκις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ A B τοῦ E, καὶ τὸ Γ Δ τοῦ Z· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ K Θ τοῦ Z, καὶ τὸ Γ Δ τοῦ Z. ἐπεὶ οὖν ἑκάτερον τῶν K Θ, Γ Δ τοῦ Z ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ K Θ τῷ Γ Δ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ Γ Θ· λοιπὸν ἄρα τὸ K Γ λοιπῷ τῷ Θ Δ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ K Γ τῷ Z ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ Θ Δ ἄρα τῷ Z ἐστιν ἴσον. ὥστε ὅπου τὸ H B τῷ E ἴσον ἐστί, καὶ τὸ Θ Δ ἴσον ἔσται τῷ Z.



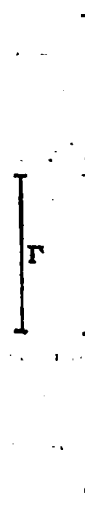
Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν πολλαπλάσιον ᾖ τὸ H B τοῦ E, τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ Θ Δ τοῦ Z.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια· καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἤτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

Ἔστω ἴσα μεγέθη τὰ A, B, ἄλλο δέ τι ὃ ἔτυχε μέγεθος τὸ Γ· λέγω ὅτι ἑκάτερον τῶν A, B πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν A, B.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν A, B ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Δ, E, καὶ ἄλλο δέ τι ὃ ἔτυχε πολλαπλάσιον τὸ Z.

Ἐπεὶ οὖν ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Δ τοῦ A καὶ τὸ E τοῦ B, ἴσον δὲ τὸ A τῷ B· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Δ τῷ E. ἄλλο δέ τι ὃ ἔτυχε τὸ Z τοῦ Γ πολλαπλάσιον· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Δ τοῦ Z, ὑπερέχει καὶ τὸ E τοῦ Z· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καί ἐστι τὰ μὲν Δ, E τῶν A, B ἰσάκις πολλαπλάσια, τὸ δὲ Z τοῦ Γ ἄλλο ὃ ἔτυχε πολλαπλάσιον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ B πρὸς τὸ Γ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν A, B τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Δ τῷ E, ἄλλο δέ τι τὸ Z. εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Z τοῦ Δ, ὑπερέχει καὶ τοῦ E· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καὶ ἔστι τὸ μὲν Z τοῦ Γ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ Δ E, τῶν A, B ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ A, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ E.

Τὰ

Τὰ ἴσα ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Æquales igitur ad eandem eandem habent rationem, & eadem ad æquales. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

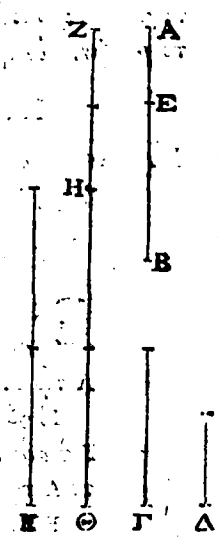
Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν, τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον· καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον.

Prop. VIII. Theor.

Inæqualium magnitudinum, major ad eandem majorem habet rationem quam minor: & eadem ad minorem majorem habet rationem quam ad majorem.

Ἔστω ἄνισα μεγέθη τὰ ΑΒ, Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τὸ ΑΒ τοῦ Γ, ἄλλο δέ τι τὸ Δ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ Γ, κείσθω τῷ Γ ἴσον τὸ ΒΕ, τὸ δὲ ἔλασσον τὸ ΑΕ, ΕΒ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ αὐτοῦ τὸ Δ μεῖζον. ἔστω πρότερον τὸ ΑΕ ἔλαττον τοῦ ΕΒ, καὶ πεπολλαπλασιάσθω τὸ ΑΕ ὥστε τὸ γενόμενον μεῖζον ἔσται τοῦ Δ. καὶ ἔστω αὐτοῦ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ μεῖζον ὂν τοῦ Δ, καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ μὲν ΗΘ τοῦ ΕΒ, τὸ δὲ Κ τοῦ Γ· καὶ εἰλήφθω τοῦ Δ διπλάσιον μὲν τὸ Λ, τριπλάσιον δὲ τὸ Μ, καὶ ἑξῆς ἐπὶ πλεῖον ἕως ἂν τὸ λαμβανόμενον πολλαπλάσιον μὲν γένηται τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ Κ. εἰλήφθω, καὶ ἔστω τὸ Ν τοῦ μὲν Δ πενταπλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ Κ.



Ἐπεὶ οὖν τὸ Κ τοῦ Ν πρώτως ἐστὶν ἔλαττον, τὸ Κ ἄρα τοῦ Μ οὐκ ἔστιν ἔλαττον. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ. ἰσάκις δέ ἐστι πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ, καὶ τὸ Κ τοῦ Γ· τὰ ΖΘ, Κ ἄρα τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ, ἴσον δὲ τὸ ΕΒ τῷ Γ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΗΘ τῷ Κ. τὸ δὲ Κ τοῦ Μ οὐκ ἔστιν ἔλαττον· οὐδ' ἄρα τὸ ΗΘ τοῦ Μ ἔλαττόν ἐστι. μεῖζον δὲ ΖΗ τοῦ Δ· ὅλον ἄρα τὸ ΖΘ συναμφοτέρων τῶν Δ, Μ μεῖζόν ἐστιν. ἀλλὰ συναμφότερα τὰ Δ, Μ τῷ Ν ἐστιν ἴσα· τὸ ΖΘ ἄρα τοῦ Ν ὑπερέχει, τὸ δὲ Κ τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει. καὶ ἔστι τὰ μὲν ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὸ δὲ Ν τοῦ Δ ἄλλο ὅ τι ἔτυχε πολλαπλάσιον· τὸ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν, ὅτι τὸ μὲν Ν τοῦ Κ ὑπερέχει, τοῦ δὲ ΖΘ οὐχ ὑπερέχει. καὶ ἔστι τὸ μὲν Ν τοῦ Δ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ.

Inæqualium igitur magnitudinum major ad eandem majorem habet rationem quam minor: & eadem ad minorem majorem habet rationem quam ad majorem.

Sint inæquales magnitudines ΑΒ, Γ, & ſit ΑΒ major Γ, alia vero quæcunque Δ: dico ΑΒ ad Δ majorem habere rationem quam Γ ad Δ; & Δ ad Γ majorem habere rationem quam ad ΑΒ.

Quoniam enim ΑΒ major eſt quam Γ, ponatur [per 3. 1.] ipſi Γ æqualis ΒΕ; minor igitur ipſarum ΑΕ, ΕΒ multiplicata major aliquando erit [per 4. def. 5.] quam Δ. ſit primum ΑΕ minor quam ΕΒ, & multiplicetur ΑΕ quoad fiat major quam Δ: ſitque ΖΗ ipſius ΑΕ multiplex, quæ ipſa Δ eſt major. quam multiplex autem eſt ΖΗ ipſius ΑΕ, tam multiplex fiat & ΗΘ ipſius ΕΒ, & Κ ipſius Γ: ſumaturque ipſius Δ dupla quidem Λ, tripla vero Μ, & deinceps una major, quoad ea quæ ſumitur multiplex fiat ipſius Δ, & primo major quam Κ. ſumatur, ſitque Ν ipſius Δ quadrupla, & primo major quam Κ.

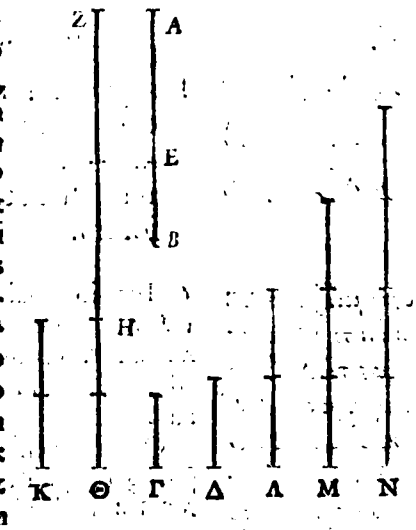
Quoniam igitur Κ primo minor eſt quam Ν, non erit Κ minor quam Μ. & cum æque multiplex ſit ΖΗ ipſius ΑΕ atque ΗΘ ipſius ΕΒ, erit [per 1. 5.] & ΖΗ æque multiplex ipſius ΑΕ atque ΖΘ ipſius ΑΒ. æque autem multiplex eſt ΖΗ ipſius ΑΕ atque Κ ipſius Γ; ergo ΖΘ æque multiplex eſt ipſius ΑΒ atque Κ ipſius Γ; ac propterea ΖΘ, Κ ipſarum ΑΒ, Γ ſunt æque multiplices. rurſus, quoniam ΗΘ æque multiplex eſt ipſius ΕΒ atque Κ ipſius Γ, eſtque ΕΒ æqualis Γ; erit & ΗΘ ipſi Κ æqualis. ſed Κ non eſt minor quam Μ: non eſt igitur ΗΘ minor quam Μ. major autem eſt [per conſtr.] ΖΗ quam Δ; ergo tota ΖΘ utriſque ſimul Δ, Μ major erit. ſed utræque ſimul Δ, Μ ſunt æquales Ν: quare ΖΘ ſuperat Ν; Κ vero ipſam Ν non ſuperat. & ſunt ΖΘ, Κ æque multiplices ipſarum ΑΒ, Γ; & Ν ipſius Δ. alia quædam multiplex: ergo [per 7. def. 5.] ΑΒ ad Δ majorem rationem habet quam Γ ad Δ.

Dico præterea & Δ ad Γ majorem habere rationem, quam Δ ad ΑΒ.

Iiſdem enim conſtructis, ſimiliter oſtendemus Ν ſuperare Κ, ipſam vero ΖΘ non ſuperare. atque eſt Ν multiplex ipſius Δ, & ΖΘ, Κ aliæ quædam ipſarum ΑΒ, Γ æque multiplices;

tiplices; ergo [per 7. def. 5.] Δ ad Γ majorem rationem habet, quam Δ ad AB.

Sed ſit AE major quam EB: erit igitur [per 4. def. 5.] minor EB multiplicata aliquando major quam Δ... multiplicetur, & ſit HΘ multiplex quidem ipſius EB, major vero quam Δ. & quam multiplex eſt HΘ ipſius EB, tam multiplex fiat ZH ipſius AE, & K ipſius Γ. ſimili ratione qua prius oſtendemus ZΘ, K ipſarum AB, Γ æque multiplices eſſe. ſumaturque ſimiliter N multiplex ipſius Δ, primo autem major quam ZH: ergo rurſus ZH non eſt minor quam M. major autem HΘ quam Δ: tota igitur ZΘ ſuperat Δ & M ſimul, hoc eſt N. at K ipſam N non ſuperat, quoniam ZH, quæ major eſt quam HΘ, hoc eſt quam K, non ſuperat N. & ſimiliter ut in iis, quæ ſuperius dicta ſunt, demonſtrationem abſolvemus.



Inæqualium igitur magnitudinum major ad eandem majorem habet rationem, quam minor: & eadem ad minorem majorem rationem habet, quam ad majorem. quod erat demonſtrandum.

PROP. IX. THEOR.

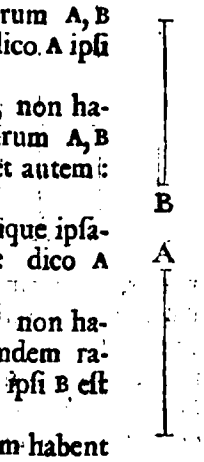
Quæ eandem rationem habent ad eandem, ſunt inter ſe æquales: & ad quas eadem eandem habet rationem, ipſæ etiam ſunt inter ſe æquales.

HAbeat enim utraque ipſarum A, B ad Γ eandem rationem: dico A ipſi B æqualem eſſe.

Si enim non eſſet æqualis, non haberet [per 8. 5.] utraque ipſarum A, B ad Γ eandem rationem. habet autem: æqualis igitur eſt A ipſi B.

HABEAT rurſus Γ ad utramque ipſarum A, B eandem rationem: dico A æqualem eſſe ipſi B.

Si enim non ſit, [per 8. 5.] non haberet Γ ad utramque A, B eandem rationem. habet autem: ergo A ipſi B eſt æqualis.



Quæ igitur eandem rationem habent ad eandem, ſunt inter ſe æquales: & ad quas eadem eandem habet rationem, ipſæ etiam ſunt inter ſe æquales. quod erat demonſtrandum.

PROP. X. THEOR.

Magnitudinum rationem habentium ad eandem, quæ majorem habet rationem, eſt major; ad quam vero eadem majorem habet rationem, illa eſt minor.

HAbeat enim A ad Γ majorem rationem, quam B ad Γ: dico A majorem eſſe quam B.

πλάσιον· τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ AB.

Ἀλλὰ δὴ τὸ AE μεῖζον ἔστω τοῦ EB· τὸ δὴ ἔλαττον τὸ EB πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ Δ μεῖζον. πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ HΘ πολλαπλάσιον μὲν τοῦ EB, μεῖζον δὲ τοῦ Δ· καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ HΘ τοῦ EB, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ μὲν ZH τοῦ AE, τὸ δὲ K τοῦ Γ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ZΘ, K τῶν AB, Γ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. καὶ εἰλήφθω ὁμοίως τὸ N πολλαπλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ ZH· ὥστε πάλιν τὸ ZH τοῦ M οὐκ ἔστιν ἔλασσον. μεῖζον δὲ τὸ HΘ τοῦ Δ· ὅλον ἄρα τὸ ZΘ τῶν Δ, M τουτέστι τοῦ N ὑπερέχει, τὸ δὲ K τοῦ N οὐχ ὑπερέχει, ἐπειδήπερ καὶ τὸ ZH μεῖζον ὂν τοῦ HΘ, τουτέστι τὸ K, τοῦ N οὐχ ὑπερέχει. καὶ ὁσαυτοῦς κατακολουθούντων τοῖς ἐπάνω περαινόμεν τὴν ἀπόδειξιν.

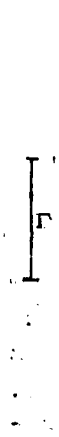
Τῶν ἄρα ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον· καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκεῖνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

ΕΧέτω γὰρ ἑκάτερον τῶν A, B πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ A τῷ B.

Εἰ γὰρ μή, οὐκ ἂν ἑκάτερον τῶν A, B πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δὲ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ A τῷ B.



ΕΧΕΤΩ δὴ πάλιν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν A, B τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ A τῷ B.

Εἰ γὰρ μή, οὐκ ἂν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν A, B τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δὲ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ A τῷ B.

Τὰ ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκεῖνα ἴσα ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι· πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν.

ΕΧέτω γὰρ τὸ A πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον, ἤπερ τὸ B πρὸς τὸ Γ· λέγω ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ A τοῦ B.

Εἰ

Εἰ γὰρ μὴ, ἤτοι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β, ἢ ἔλασσον. ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἔστι τὸ Α τῷ Β, ἑκάτερον γὰρ ἂν τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. οὐκ ἔχει δέ, οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. ἐδείχθη δὲ οὐδὲ ἔλασσον ὂν τὸ Α τοῦ Β. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴσον, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τοῦ Β.

ΕΧΕΤΩ δή πάλιν τὸ Γ πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Α· λέγω ὅτι ἔλασσόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴσον ἐστὶν, ἢ μεῖζον. ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἔστι τὸ Β τῷ Α, τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. οὐκ ἔχει δέ, οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. ἡ δὲ μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α, τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς τὸ Β ἐλάσσονα λόγον εἶχεν ἤπερ πρὸς τὸ Α. οὐκ ἔχει δέ, οὐκ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴσον, ἔλαττον ἄρα ἐστὶ τὸ Β τοῦ Α.

Τῶν ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ μείζονα λόγον ἔχον μεῖζόν ἐστι καὶ πρὸς ὃ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐφ' οὗπερ ἔλασσόν ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si enim non eſt major, vel æqualis eſt, vel minor. æqualis autem non eſt A ipſi B, utraque enim ipſarum A, B ad Γ [per 7. 5.] eandem haberet rationem. atqui eandem non habet: non eſt igitur A æqualis ipſi B. ſed neque minor eſt A quam B, haberet enim A ad Γ [per 8. 5.] minorem rationem quam B ad Γ. atqui non habet minorem: non eſt igitur A minor quam B. oſtenſum autem eſt neque eſſe æqualem: ergo A quam B major erit.

HABEAT rurſus Γ ad B majorem rationem quam Γ ad A: dico B minorem eſſe quam A.

Si enim non eſt minor, vel æqualis eſt, vel major. æqualis utique non eſt B ipſi A, etenim Γ ad utramque ipſarum A, B [per 7. 5.] eandem rationem haberet. non habet autem: ergo A ipſi B non eſt æqualis. ſed neque major eſt B quam A, haberet enim [per 8. 5.] Γ ad B minorem rationem quam ad A. atqui non habet: non eſt igitur B major quam A. oſtenſum autem eſt neque æqualem eſſe: ergo B minor erit quam A.

Magnitudinum igitur rationem habentium ad eandem, quæ majorem habet rationem illa major eſt: & ad quam eadem majorem habet rationem, illa eſt minor. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Οἱ τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.

PROP. XI. THEOR.

Quæ eidem eædem ſunt rationes, & inter ſe ſunt eædem.

ΕΣτωσαν γὰρ ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

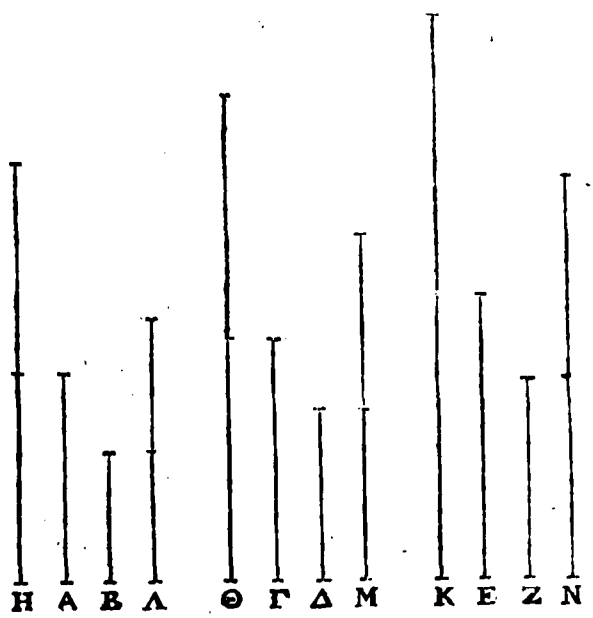
Καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια ἃ ἔτυχε τὰ Λ, Μ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. πάλιν, ἐπεὶ ἐστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἴληπται τῶν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Θ, Κ, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐν τῇ πρώτῃ ὅρῳ τοῦ πέμπτου στοιχείου ὅτι ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ, καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· ἑκάτερον ἄρα τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· καὶ ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. τῶν ἄρα τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SInt enim ut A ad B ita Γ ad Δ, ut autem Γ ad Δ ita E ad Z: dico ut A ad B ita eſſe E ad Z.

Sumantur enim ipſarum quidem A, Γ, E æque multiplices H, Θ, K; ipſarum vero B, Δ, Z aliæ utcunque æque multiplices Λ, M, N.

Quoniam igitur eſt ut A ad B ita Γ ad Δ, & ſumptæ ſunt ipſarum A, Γ æque multiplices H, Θ, & ipſarum B, Δ aliæ utcunque æque multiplices Λ, M: ſi H ſuperat Λ, [per 5. def. 5.] & Θ ipſam M ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. rurſus, quoniam eſt ut Γ ad Δ ita E ad Z, & ſumptæ ſunt ipſarum Γ, E æque multiplices Θ, K; ipſarum vero Δ, Z aliæ utcunque æque multiplices M, N: ſi Θ ſuperat M, & K ipſam N ſuperabit;

perabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. ſed ſi Θ ſuperat M, & H ſuperabit A; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor: quare ſi H ſuperat A, & K ipſam N ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. & ſunt H, K quidem ipſarum A, E æque multiplices, A, N vero ipſarum B, Z aliæ utcunque æque multiplices: ergo [per 5. def. 5.] ut A ad B ita erit E ad Z.



Quæ igitur eidem eædem ſunt rationes, & inter ſe ſunt eædem. quod erat demonſtrandum.

Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. ἀλλὰ τὸ μὲν Η τοῦ Α ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερέχει δὲ τὸ Η τοῦ Α· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον· ὥστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Α, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καὶ ἔστι τὰ μὲν Η, Κ τῶν Α, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Α, Ν τῶν Β, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

Οἱ ἄρα τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

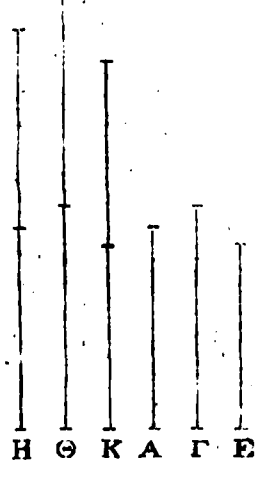
Prop. XII. Theor.

Si quotcunque magnitudines proportionales fuerint; ut una antecedentium ad unam conſequentium, ita erunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

SInt quotcunque magnitudines proportionales A, B, Γ, Δ, E, Z; & ut A ad B ita ſit Γ ad Δ, & E ad Z: dico ut A ad B ita eſſe A, Γ, E ad B, Δ, Z.

Sumantur enim ipſarum A, Γ, E æque multiplices H, Θ, K, & ipſarum B, Δ, Z aliæ utcunque æque multiplices Λ, M, N.

Quoniam igitur ut A ad B ita eſt Γ ad Δ, & E ad Z; & ſumptæ ſunt ipſarum quidem A, Γ, E æque multiplices H, Θ, K, ipſarum vero B, Δ, Z aliæ utcunque æque multiplices Λ, M, N: ſi H ſuperat Λ, [per 5. def. 5.] & Θ ipſam M ſuperabit, & K ipſam N; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. quare & ſi H ſuperat Λ, ſuperabunt & H, Θ, K ipſas Λ, M, N; & ſi æqualis, æquales; & ſi minor, minores. ſuntque H & H, Θ, K ipſarum A & A, Γ, E æque multiplices: quoniam [per 1. 5.] ſi fuerint quotcunq; magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, ſingulæ ſingularum æque multiplices, quam multiplex eſt una magnitudo unius, tam multiplices erunt & una



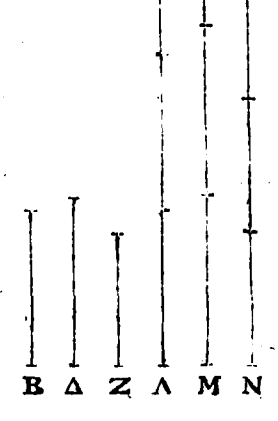
Προτασις ιβ'.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον· ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα.

Ἔστωσαν ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὰ Α, Γ, Ε πρὸς τὰ Β, Δ, Ζ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. ὥστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὰ Η, Θ, Κ τῶν Λ, Μ, Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσα· καὶ εἰ ἔλασσον, ἐλάσσονα. καὶ ἔστι τὰ μὲν Η καὶ τὰ Η, Θ, Κ τοῦ Α καὶ τῶν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια· ἐπεδήπερ ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον ἔστι τοῦ τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλά-



σια ἔσαι καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ Δ καὶ τὰ Λ, Μ, Ν τοῦ Β καὶ τῶν Β, Δ, Ζ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Α, Γ, Ε πρὸς τὰ Β, Δ, Ζ.

Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον· ἔσαι ὡς τὸ ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

omnes omnium. eadem ratione Λ & Λ, Μ, Ν ipſarum Β & Β, Δ, Ζ ſunt æque multiplices: eſt igitur [per 5. def. 5.] ut Α ad Β, ita Α, Γ, Ε ad Β, Δ, Ζ.

Quare ſi quotcunque magnitudines proportionales fuerint; ut una antecedentium ad unam conſequentium, ita erunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

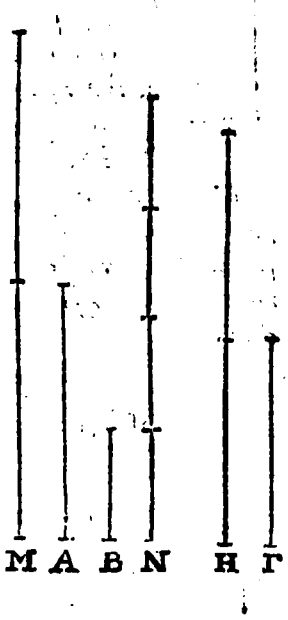
Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τέλιον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον· καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον.

PROP. XIII. THEOR.

Si prima ad ſecundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam majorem habeat rationem quam quinta ad ſextam: & prima ad ſecundam majorem habebit rationem quam quinta ad ſextam.

Πρῶτον γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, τρίτον δὲ τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ πρῶτον τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ἔστι τινὰ τούτων μέρη τὰ Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· καὶ τὸ μὲν τοῦ Γ πολλαπλάσιον ὑπερέχει τοῦ τοῦ Δ πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ Ε πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Ζ πολλαπλασίου οὐχ ὑπερέχει. εἰλήφθω, καὶ ἔστω τῶν μὲν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, ὥστε τὸ μὲν Η τοῦ Κ ὑπερέχειν, τὸ δὲ Θ τοῦ Λ μὴ ὑπερέχειν· καὶ ὁσαπλάσιον μέν ἐστι τὸ Η τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ Μ τοῦ Α· ὁσαπλάσιον δὲ τὸ Κ τοῦ Δ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ Ν τοῦ Β.



Καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Η, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ν, Κ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Μ τοῦ Ν, ὑπερέχει καὶ τὸ Η τοῦ Κ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. ὑπερέχει δὲ τὸ Η τοῦ Κ, ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ Μ τοῦ Ν. τὸ δὲ Θ τοῦ Λ οὐχ ὑπερέχει· καὶ ἔστι τὰ μὲν Μ, Θ τῶν Α, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Ν, Λ τῶν Β, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· τὸ ἄρα Α πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

PRima enim Α ad ſecundam Β eandem rationem habeat quam tertia Γ ad quartam Δ; tertia autem Γ ad quartam Δ majorem habeat rationem quam quinta Ε ad ſextam Ζ: dico & primam Α ad ſecundam Β majorem habere rationem quam quintam Ε ad ſextam Ζ.

Quoniam enim Γ ad Δ majorem habet rationem quam Ε ad Ζ, ſunt [per 7. def. 5.] quædam ipſarum Γ, Ε æque multiplices, & ipſarum Δ, Ζ aliæ quædam æque multiplices: & multiplex quidem ipſius Γ ſuperat multiplicem ipſius Δ, multiplex vero ipſius Ε non ſuperat multiplicem ipſius Ζ. ſumantur, & ſint ipſarum Γ, Ε æque multiplices Η, Θ & ipſarum Δ, Ζ aliæ quædam æque multiplices Κ, Λ, ita ut Η quidem ſuperet Κ, Θ vero ipſam Λ non ſuperet: & quam multiplex eſt Η ipſius Γ, tam multiplex ſit & Μ ipſius Α; quam multiplex autem Κ ipſius Δ, tam multiplex ſit & Ν ipſius Β.

Et quoniam eſt ut Α ad Β ita Γ ad Δ, & ſumptæ ſunt ipſarum Α, Γ æque multiplices Μ, Η, & ipſarum Β, Δ aliæ æque multiplices Ν, Κ: [per 5. def. 5.] ſi Μ ſuperat Ν, & Η ipſam Κ ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. ſed Η ſuperat Κ: ergo & Μ ipſam Ν ſuperabit. Θ vero non ſuperat Λ; ſuntque Μ, Θ ipſarum Α, Ε æque multiplices, & Ν, Λ ipſarum Β, Ζ aliæ quædam æque multiplices: ergo [per 7. def. 5.] Α ad Β majorem rationem habebit quam Ε ad Ζ.

Si igitur prima ad ſecundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam majorem rationem habeat quam quinta ad ſextam: & prima ad ſecundam majorem habebit rationem quam quinta ad ſextam, quod erat demonſtrandum.

Prop. XIV. Theor.

Si prima ad ſecundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam, prima autem major ſit quam tertia: & ſecunda quam quarta major erit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor.

PRima enim A ad ſecundam B eandem rationem habeat quam tertia Γ ad quartam Δ, major autem ſit A quam Γ: dico & B quam Δ majorem eſſe.

Quoniam enim A major eſt quam Γ, & alia utcunque magnitudo B; habebit [per 8. 5.] A ad B majorem rationem quam Γ ad B. ſed ut A ad B ita Γ ad Δ: ergo & Γ ad Δ majorem habebit rationem [per 13. 5.] quam Γ ad B. ad quam vero eadem majorem habet rationem [per 10. 5.] illa minor eſt; quare Δ eſt minor quam B: ac propterea B quam Δ major erit.

Similiter demonſtrabimus & ſi A æqualis ſit ipſi Γ, & B ipſi Δ eſſe æqualem: & ſi A ſit minor quam Γ, & B quam Δ minorem eſſe.

Si igitur prima ad ſecundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam, prima autem major ſit quam tertia: & ſecunda quam quarta major erit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. quod erat demonſtrandum.

Prop. XV. Theor.

Partes inter ſe comparatæ eandem habent rationem, quam habent earum æque multiplices inter ſe.

SIT enim AB æque multiplex ipſius Γ atque ΔE ipſius Z; dico ut Γ ad Z ita eſſe AE ad ΔE.

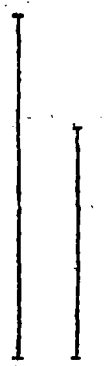
Quoniam enim æque multiplex eſt AB ipſius Γ atque ΔE ipſius Z; quot ſunt magnitudines in AB æquales ipſi Γ, totidem erunt & in ΔE æquales Z. dividatur AB in magnitudines ipſi Γ æquales, quæ ſint AH, HΘ, ΘB; & ΔE dividatur in magnitudines æquales Z, videlicet in ΔK, KΛ, ΛE: erit igitur ipſarum AH, HΘ, ΘB multitudo æqualis multitudini ipſarum ΔK, KΛ, ΛE. & quoniam æquales ſunt inter ſe AH, HΘ, ΘB, ſuntque ΔK, KΛ, ΛE etiam inter ſe æquales; erunt

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸ αὐτὸν ἔχῃ λόγον ᾗ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον· καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸ αὐτὸν ἔχῃ λόγον ᾗ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

ΠΡῶτον γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸ αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, μεῖζον δὲ ἔστω τὸ Α τοῦ Γ· λέγω ὅτι καὶ τὸ Β τοῦ Δ μεῖζόν ἐστιν.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ Α τοῦ Γ μεῖζόν ἐστιν, ἄλλο δέ τι ἔτυχε μέγεθος τὸ Β· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν· ἔλαττον ἄρα τὸ Δ τοῦ Β· ὥστε μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Δ.

ΟΜΟΙΩΣ δὴ δείξομεν ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Β τῷ Δ· κἂν ἔλασσον ᾖ τὸ Α τοῦ Γ, ἔλασσον ἔσται τὸ Β τοῦ Δ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ᾗ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ληφθέντα καταλλήλως.

ΕΣτω γὰρ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μεγέθη ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ ἴσα τῷ Ζ. διῃρήσθω τὸ μὲν ΑΒ εἰς τὰ τῷ Γ μεγέθη ἴσα, τὰ ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ, τὸ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τῷ Ζ ἴσα, τὰ ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ τῷ πλήθει τῶν ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ ἀλλήλοις, ἔστι δὲ καὶ τὰ ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ ἴσα ἀλλήλοις· ἔστιν ἄρα

ὡς

ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΚ οὕτως τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΚΛ, καὶ τὸ ΘΒ πρὸς τὸ ΛΕ· ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΚ οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΗ τῷ Γ, τὸ δὲ ΔΚ τῷ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ.

Τὰ ἄρα μέρη τῆς ὡσαυτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[per 7. 5.] ut ΑΗ ad ΔΚ ita ΗΘ ad ΚΛ, & ΘΒ ad ΛΕ: & erit [per 12. 5.] ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes: est igitur ut ΑΗ ad ΔΚ ita ΑΒ ad ΔΕ. sed ΑΗ ipsi Γ est æqualis, & ΔΚ ipsi Ζ: ergo ut Γ ad Ζ ita erit ΑΒ ad ΔΕ.

Partes igitur inter se comparatæ eandem habent rationem, quam habent earum æque multiplices inter se. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται.

Prop. XVI. Theor.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & alterne proportionales erunt.

Ἔστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τῶν δὲ Γ, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Ε τοῦ Α καὶ τὸ Ζ τοῦ Β, τὰ δὲ μέρη τῆς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ληφθέντα κατάλληλα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. πάλιν, ἐπεὶ τὰ Η, Θ τῶν Γ, Δ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται· καὶ ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Ε τοῦ Η, ὑπερέχει καὶ τὸ Ζ τοῦ Θ· καὶ ἐὰν ἴσον, ἴσον· καὶ ἐὰν ἔλασσον, ἔλασσον. καὶ ἔστι τὰ μὲν Ε, Ζ τῶν Α, Β ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Η, Θ τῶν Γ, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ.

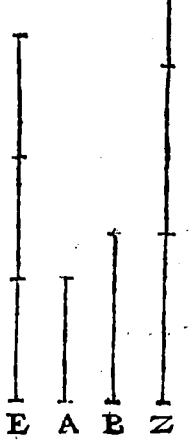
Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

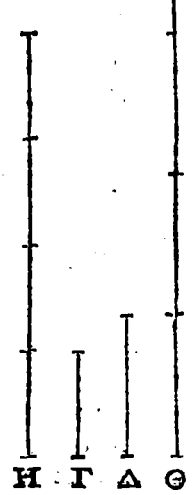
Sint quatuor magnitudines Α, Β, Γ, Δ proportionales, sitque ut Α ad Β ita Γ ad Δ: dico & alterne proportionales esse; videlicet ut Α ad Γ ita esse Β ad Δ.

Sumantur enim ipsarum Α, Β æque multiplices Ε, Ζ, ipsarum vero Γ, Δ aliæ utcunque æque multiplices Η, Θ.

Et quoniam æque multiplex est Ε ipsius Α atque Ζ ipsius Β; partes autem inter se comparatæ [per 15. 5.] eandem habent rationem, quam habent earum æque multiplices inter se: erit ut Α ad Β ita Ε ad Ζ. ut autem Α ad Β ita Γ ad Δ: ergo [per 11. 5.] ut Γ ad Δ ita Ε ad Ζ. rursus, quoniam Η, Θ sunt ipsarum Γ, Δ æque multiplices; erit ut Γ ad Δ ita Η ad Θ. ut autem Γ ad Δ ita Ε ad Ζ: ergo [per 11. 5.] ut Ε ad Ζ ita Η ad Θ. quod si quatuor magnitudines proportionales sint, prima autem major sit quam tertia; [per 14. 5.] & secunda quam quarta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. si igitur Ε superat Η, & Ζ ipsam Θ superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. sunt-que Ε, Ζ ipsarum Α, Β æque multiplices, & Η, Θ ipsarum Γ, Δ aliæ utcunque æque multiplices: ergo [per 5. def. 5.] ut Α ad Γ ita erit Β ad Δ.

Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, & alterne proportionales erunt. quod erat demonstrandum.





ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Prop. XVII. Theor.

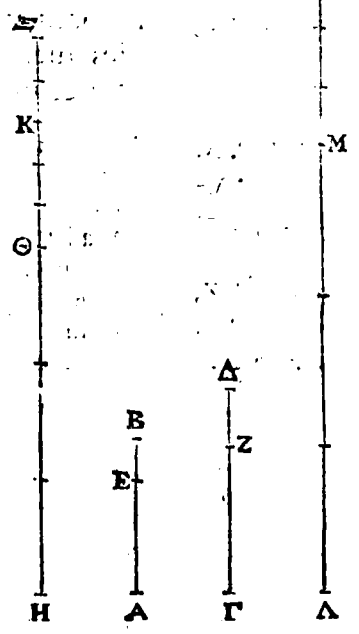
Si compositæ magnitudines sint proportionales, & divisæ proportionales erunt.

Ἔστω συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον τὰ ΑΒ, ΒΕ, ΓΔ, ΔΖ, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως

Sint compositæ magnitudines ΑΒ, ΒΕ, ΓΔ, ΔΖ proportionales, sitque ut ΑΒ ad ΒΕ ita

ΓΔ ad ΔΖ: dico etiam diviſas proportionales eſſe; videlicet ut ΑΕ ad ΕΒ ita eſſe ΓΖ ad ΖΔ.

Sumantur enim ipſarum quidem ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ æque multiplices ΗΘ, ΘΚ, ΛΜ, ΜΝ; ipſarum vero ΕΒ, ΖΔ aliæ utcunque æque multiplices ΚΞ, ΝΠ.



Et quoniam æque multiplex eſt ΗΘ ipſius ΑΕ atque ΘΚ ipſius ΕΒ; erit [per 1. 5.] ΗΘ ipſius ΑΕ æque multiplex atque ΗΚ ipſius ΑΒ. æque autem multiplex eſt ΗΘ ipſius ΑΕ atque ΛΜ ipſius ΓΖ: ergo ΗΚ æque multiplex eſt ipſius ΑΒ atque ΛΜ ipſius ΓΖ. rurſus, quoniam æque multiplex eſt ΛΜ ipſius ΓΖ atque ΜΝ ipſius ΖΔ; erit ΛΜ æque multiplex ipſius ΓΖ atque ΛΝ ipſius ΓΔ. ſed æque multiplex erat ΛΜ ipſius ΓΖ atque ΗΚ ipſius ΑΒ: æque igitur multiplex eſt ΗΚ ipſius ΑΒ atque ΛΝ ipſius ΓΔ: quare ΗΚ, ΛΝ ipſarum ΑΒ, ΓΔ æque multiplices erunt. rurſus, quoniam æque multiplex eſt ΘΚ ipſius ΕΒ atque ΜΝ ipſius ΖΔ; eſt autem & ΚΞ ipſius ΕΒ æque multiplex atque ΝΠ ipſius ΖΔ: etiam [per 2. 5.] compoſita ΘΞ ipſius ΕΒ æque multiplex eſt atque ΜΠ ipſius ΖΔ. cum autem ſit ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad ΔΖ, & ſumptæ ſint ipſarum quidem ΑΒ, ΓΔ æque multiplices ΗΚ, ΛΝ, ipſarum vero ΕΒ, ΖΔ aliæ utcunque æque multiplices ΘΞ ΜΠ: igitur [per 5. def. 5.] ſi ΗΚ ſuperat ΘΞ, & ΛΝ ſuperabit ΜΠ; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. ſuperet igitur ΗΚ ipſam ΘΞ, communique ablata ΘΚ, & ΗΘ ipſam ΚΞ ſuperabit. ſed ſi ΗΚ ſuperat ΘΞ, & ΛΝ ſuperat ΜΠ: ſuperat itaque ΛΝ ipſam ΜΠ; communique ΜΝ ablata, & ΛΜ ſuperabit ΝΠ: quare ſi ΗΘ ſuperat ΚΞ, & ΛΜ ipſam ΝΠ ſuperabit. ſimiliter demonſtrabimus & ſi ΗΘ ſit æqualis ΚΞ, & ΛΜ ipſi ΝΠ eſſe æqualem; & ſi minor, minorem. ſunt autem ΗΘ, ΛΜ ipſarum ΑΕ, ΓΖ æque multiplices, & ipſarum ΕΒ, ΖΔ aliæ utcunque æque multiplices ΚΞ, ΝΠ: ergo [per 5. def. 5.] ut ΑΕ ad ΕΒ ita erit ΓΖ ad ΖΔ.

Si igitur compoſitæ magnitudines ſint proportionales, & diviſæ proportionales erunt. quod erat demonſtrandum.

Prop. XVIII. Theor.

Si diviſæ magnitudines ſint proportionales, & compoſitæ proportionales erunt.

SInt diviſæ magnitudines ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ proportionales, & ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad ΖΔ: dico & compoſitas proportionales eſſe; videlicet ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad ΔΖ.

Sumantur enim ipſarum quidem ΑΒ, ΕΒ, ΓΔ, ΖΔ æque multiplices ΗΘ, ΘΚ, ΛΜ, ΜΝ; ipſarum vero ΕΒ, ΖΔ aliæ utcunque æque multiplices ΚΞ, ΝΠ.

Et quoniam æque multiplex eſt ΗΘ ipſius ΑΒ atque ΘΚ ipſius ΕΒ; erit [per 1. 5.] ΗΘ ipſius ΑΒ æque multiplex atque ΗΚ ipſius ΑΒ. æque autem multiplex eſt ΗΘ ipſius ΑΒ atque ΛΜ ipſius ΓΔ: ergo ΗΚ æque multiplex eſt ipſius ΑΒ atque ΛΜ ipſius ΓΔ. rurſus, quoniam æque multiplex eſt ΛΜ ipſius ΓΔ atque ΜΝ ipſius ΖΔ; erit ΛΜ æque multiplex ipſius ΓΔ atque ΛΝ ipſius ΓΔ. ſed æque multiplex erat ΛΜ ipſius ΓΔ atque ΗΚ ipſius ΑΒ: æque igitur multiplex eſt ΗΚ ipſius ΑΒ atque ΛΝ ipſius ΓΔ: quare ΗΚ, ΛΝ ipſarum ΑΒ, ΓΔ æque multiplices erunt. rurſus, quoniam æque multiplex eſt ΘΚ ipſius ΕΒ atque ΜΝ ipſius ΖΔ; eſt autem & ΚΞ ipſius ΕΒ æque multiplex atque ΝΠ ipſius ΖΔ: etiam [per 2. 5.] compoſita ΘΞ ipſius ΕΒ æque multiplex eſt atque ΜΠ ipſius ΖΔ. cum autem ſit ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad ΔΖ, & ſumptæ ſint ipſarum quidem ΑΒ, ΓΔ æque multiplices ΗΚ, ΛΝ, ipſarum vero ΕΒ, ΖΔ aliæ utcunque æque multiplices ΘΞ ΜΠ: igitur [per 5. def. 5.] ſi ΗΚ ſuperat ΘΞ, & ΛΝ ſuperabit ΜΠ; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. ſuperet igitur ΗΚ ipſam ΘΞ, communique ablata ΘΚ, & ΗΘ ipſam ΚΞ ſuperabit. ſed ſi ΗΚ ſuperat ΘΞ, & ΛΝ ſuperat ΜΠ: ſuperat itaque ΛΝ ipſam ΜΠ; communique ΜΝ ablata, & ΛΜ ſuperabit ΝΠ: quare ſi ΗΘ ſuperat ΚΞ, & ΛΜ ipſam ΝΠ ſuperabit. ſimiliter demonſtrabimus & ſi ΗΘ ſit æqualis ΚΞ, & ΛΜ ipſi ΝΠ eſſe æqualem; & ſi minor, minorem. ſunt autem ΗΘ, ΛΜ ipſarum ΑΕ, ΓΖ æque multiplices, & ipſarum ΕΒ, ΖΔ aliæ utcunque æque multiplices ΚΞ, ΝΠ: ergo [per 5. def. 5.] ut ΑΕ ad ΕΒ ita erit ΓΖ ad ΖΔ.

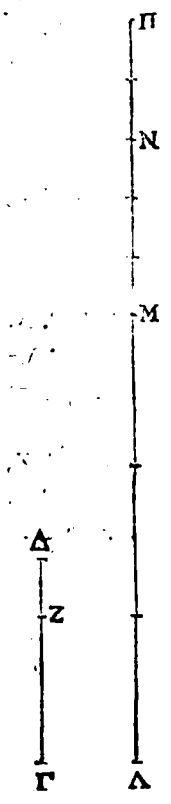
Si igitur compoſitæ magnitudines ſint proportionales, & diviſæ proportionales erunt. quod erat demonſtrandum.

Προτασις ιη'.

Εὰν διηρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσαι.

ΕΣτω διηρημένα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ, ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ ἕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ: λέγω ὅτι καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσαι, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ ἕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΗΘ, ΘΚ, ΛΜ, ΜΝ· τῶν δὲ ΕΒ, ΖΔ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ ΚΞ, ΝΠ.



Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΘΚ τοῦ ΕΒ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ ϗ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ. ἰσάκις δὲ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ ϗ τὸ ΛΜ, τοῦ ΓΖ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ. πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ ϗ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΓΔ. ἰσάκις δὲ ἓν πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ ϗ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ. ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΓΔ· τὰ ΗΚ, ΛΝ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΘΚ τοῦ ΕΒ ϗ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ, ἔστι δὲ ϗ τὸ ΚΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκις πολλαπλάσιον ϗ τὸ ΝΠ τοῦ ΖΔ· ϗ συντεθὲν τὸ ΘΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον ϗ τὸ ΜΠ τοῦ ΖΔ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ ἕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ, ϗ εἴληπται τῶν μὲν ΑΒ, ΓΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΗΚ, ΛΝ, τῶν δὲ ΕΒ, ΖΔ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΘΞ, ΜΠ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ· ϗ εἰ ἴσον, ἴσον· ϗ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. ὑπερεχέτω δὴ τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, ϗ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΘΚ, ὑπερέχει ἄρα ϗ τὸ ΗΘ τοῦ ΚΞ. ἀλλ' εἰ ὑπερέχει τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ· ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ, ϗ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΜΝ ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΝΠ· ὥστε εἰ ὑπερέχει τὸ ΗΘ τοῦ ΚΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΝΠ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ ΗΘ τῷ ΚΞ, ἴσον ἔσαι καὶ τὸ ΛΜ τῷ ΝΠ· κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. καὶ ἔστι δὲ τὰ μὲν ΗΘ, ΛΜ τῶν ΑΕ, ΓΖ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ ΚΞ, ΝΠ τῶν ΕΒ, ΖΔ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ ἕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ.

Ἐαν ἄρα συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πρὸς τὸ ΖΔ· λέγω ὅτι καὶ συνθέντι ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τι τοῦ ΖΔ ἔσται ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ, ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΖΔ, ἢ πρὸς μεῖζον.

Ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον, τὸ ΔΗ. ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΗ, συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν εἰσιν· ὥστε καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ. κατέκειτο δὲ καὶ ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ. μεῖζον δὲ τὸ πρῶτον τὸ ΓΗ τοῦ τρίτου τοῦ ΓΖ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ δεύτερον τὸ ΗΔ τοῦ τετάρτου τοῦ ΖΔ. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΖΔ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεῖζον· πρὸς αὐτὸ ἄρα.

Ἐὰν ἄρα διηρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συνθέντα ἀνάλογον ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Ἐὰν ἡ ὡς ὅλοι πρὸς ὅλον οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλος πρὸς ὅλον.

Ἔστω γὰρ ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΕ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ οὕτως τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΒΑ πρὸς τὸ ΑΕ οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΖ. καὶ ἐπεὶ συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν εἰσι, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ὡς ἄρα τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΕΑ οὕτως τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΔΖ οὕτως τὸ ΕΑ πρὸς τὸ ΖΓ. ὡς δὲ τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ οὕτως ὑπόκειται ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα ἡ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

* Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ ΕΒ πρὸς τὸ ΖΔ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς

ad ΖΔ: dico etiam compositas proportionales esse; videlicet ut ΑΒ ad ΒΕ ita esse ΓΔ ad ΖΔ.

Si enim non est ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad ΖΔ; erit ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ vel ad minorem quam ΖΔ, vel ad majorem.

Sit primum ad minorem, nempe ad ΔΗ. & quoniam est ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad ΔΗ, compositæ magnitudines sunt proportionales: ergo [per 17. 5.] & divisæ proportionales erunt: est igitur ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΗ ad ΗΔ. ponitur autem & ut ΑΕ ad ΕΒ ita ΓΖ ad ΖΔ: quare [per 11. 5.] & ut ΓΗ ad ΗΔ ita ΓΖ ad ΖΔ. at prima ΓΗ major est quam tertia ΓΖ: ergo [per 14. 5.] & secunda ΗΔ major erit quam quarta ΖΔ. sed & minor, quod fieri non potest: non est igitur ut ΑΒ ad ΒΕ ita ΓΔ ad minorem quam ΖΔ. Similiter ostendemus neque esse ad majorem: est igitur ad ipsam.

Quare si divisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt, quod erat demonstrandum.

Prop. XIX. Theor.

Si fuerit ut tota ad totam ita ablata ad ablatam; erit reliqua ad reliquam ut tota ad totam.

SIT enim ut tota ΑΒ ad totam ΓΔ ita ablata ΑΕ ad ablatam ΓΖ; dico & reliquam ΕΒ ad reliquam ΖΔ ita esse ut tota ΑΒ ad totam ΓΔ.

Quoniam enim est ut tota ΑΒ ad totam ΓΔ ita ΑΕ ad ΓΖ; & alterne erit [per 16. 5.] ut ΒΑ ad ΑΕ ita ΔΓ ad ΓΖ. & quoniam compositæ magnitudines sunt proportionales, & [per 17. 5.] divisæ proportionales erunt: ut igitur ΒΕ ad ΕΑ ita ΔΖ ad ΓΖ; rursusque alterne, ut ΒΕ ad ΔΖ, ita ΕΑ ad ΖΓ. sed ut ΑΕ ad ΓΖ ita posita est ΑΒ ad ΓΔ: & igitur [per 11. 5.] reliqua ΕΒ erit ad reliquam ΖΔ ut tota ΑΒ ad totam ΓΔ.

Quare si fuerit ut tota ad totam ita ablata ad ablatam; erit reliqua ad reliquam ut tota ad totam. quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Et quoniam ostensum est [per 16. 5.] ut ΑΒ ad ΓΔ ita esse ΕΒ ad ΖΔ; si fuerit alterne ut

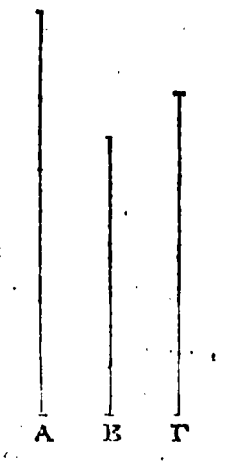
* *Corruptissimus est hic locus; nec ope veterum exemplarium restitui potest: versionem ideo mutavimus, ne sensus conflaret. Magis legitima tamen demonstratio conversionis rationis est hæc.* Si sit ΑΒ ad ΒΕ ut ΓΔ ad ΔΖ, erit, dividendo, ΑΕ ad ΒΕ ut ΓΖ ad ΔΖ: &, invertendo, ΒΕ ad ΑΕ ut ΔΖ ad ΓΖ: &, componendo, erit ΑΒ ad ΑΕ, ut ΓΔ ad ΓΖ, quod est per conversionem rationis.

AB ad BE ita ΓΔ ad ΔZ; nempe compoſitæ magnitudines proportionales. oſtenſum autem eſt [per 16. & 19. 5.] ut AB ad AE ita eſſe ΓΔ ad ΓZ, quod [per 17. def. 5.] eſt per converſionem rationis. Ex hoc igitur perſpicuum eſt ſi compoſitæ magnitudines ſint proportionales, & per converſionem rationis proportionales eſſe. quod erat demonſtrandum.

Prop. XX. Theor.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem ratione, ex æquo autem prima major ſit quam tertia: & quarta quam ſexta major erit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor.

SInt tres magnitudines A, B, Γ, & aliæ ipſis numero æquales Δ, E, Z, binæ ſumptæ in eadem ratione, ſitque ut A ad B ita Δ ad E, & ut B ad Γ ita E ad Z, ex æquo autem major ſit A quam Γ: dico & Δ quam Z majorem eſſe; & ſi æqualis, æqualem; & ſi minor, minorem.



Quoniam enim A major eſt quam Γ, alia vero utcunque B, & [per 8. 5.] major ad eandem majorem habet rationem quam minor; habebit A ad B majorem rationem quam Γ ad B. ſed ut A ad B ita Δ ad E; & invertendo ut Γ ad B ita Z ad E: ergo & Δ ad E majorem habet rationem quam Z ad E. ad eandem vero rationem habentium, quæ majorem habet rationem illa [per 10. 5.] major eſt; major igitur eſt Δ quam Z. Similiter oſtendemus, & ſi A ſit æqualis Γ & Δ ipſi Z æqualem eſſe; & ſi minor, minorem.

Si igitur ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem ratione, ex æquo autem prima major ſit quam tertia: & quarta quam ſexta major erit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. quod erat demonſtrandum.

Prop. XXI. Theor.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur & in eadem ratione; ſit autem perturbata earum proportio, & ex æquo prima major ſit quam tertia: & quarta quam ſexta major erit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor.

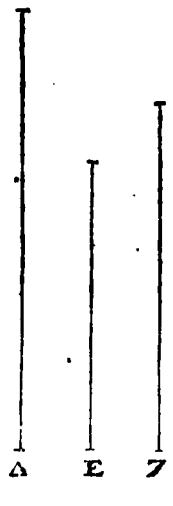
SInt tres magnitudines A, B, Γ, & aliæ ipſis numero æquales Δ, E, Z, binæ ſumptæ &

τὸ BE ἕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔZ· συγκείμθω ἄρα μείζων ἀνάλογον ἔσται. ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ AE ἕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΓZ, ἡ ἔσται ἀναστρέψαντι. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν συγκείμθω μείζων ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀναστρέψαντι ἀνάλογον ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος συνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δίσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ A, B, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, E, Z, συνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ A πρὸς τὸ B ἕτως τὸ Δ πρὸς τὸ E, ὡς δὲ τὸ B πρὸς τὸ Γ ἕτως τὸ E πρὸς τὸ Z, δίσου δὲ μεῖζον ἔστω τὸ A τοῦ Γ· λέγω ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Z μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.



Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ A τοῦ Γ, ἄλλο δέ τι ὑπόκειται τὸ B, τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον· τὸ A ἄρα πρὸς τὸ B μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ B. ἀλλὰ ὡς μὲν τὸ A πρὸς τὸ B ἕτως τὸ Δ πρὸς τὸ E, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ B ἀνάπαλιν ἕτως τὸ Z πρὸς τὸ E· καὶ τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ E μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Z πρὸς τὸ E. τῶν δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ τὴν μείζονα λόγον ἔχον ἐκεῖνο μεῖζόν ἐστι· μεῖζον ἄρα τὸ Δ τοῦ Z. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ A τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Z· κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

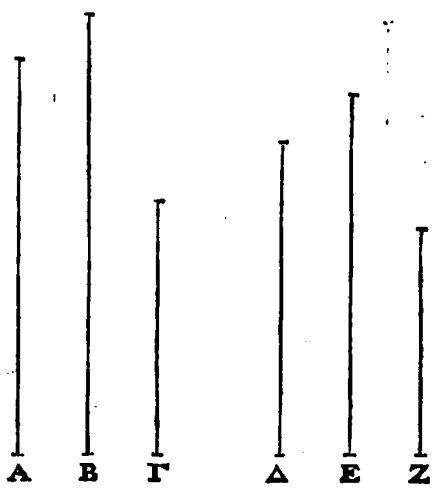
Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος συνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δίσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος συνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾗ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δίσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ A, B, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, E, Z συνδυο λαμβανόμενα

ἐανόμωμα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔστω ἡ ταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, διὰ δὲ τὸ Α τοῦ Γ μεῖζον ἔστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Ζ μεῖζον ἔσται· καὶ ἂν ἴσον, ἴσον· καὶ ἐλάττον, ἔλαττον.



Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Γ, ἄλλο δέ τι τὸ Β· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μεῖζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. ἀλλὰ ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Β ἀναπαλιν οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Ε ἄρα πρὸς τὸ Ζ μεῖζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Δ. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσόν ἐστιν· ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ Ζ τοῦ Δ· μεῖζον ἄρα τὸ Δ τοῦ Ζ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἴσον, ἴσον· δηλονότι καὶ ἐὰν ἡ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσεσθαι καὶ τὸ Δ τῷ Ζ· καὶ ἐὰν ἔλασσον, ἔλασσον.

Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἡ δὲ ταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ δι' ἴσου τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ἢ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται· καὶ ἴσον, ἴσον· καὶ ἔλασσον, ἔλασσον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

is in eadem ratione; sit autem perturbata earum proportio, videlicet ut A ad B ita E ad Z, ut vero B ad Γ ita Δ ad E, & ex æquo A major sit quam Γ: dico & Δ quam Z majorem esse; & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem.

Quoniam enim major est A quam Γ, alia vero B; habebit [per 8. 5.] A ad B majorem rationem quam Γ ad B. sed ut A ad B ita E ad Z, & invertendo ut Γ ad B ita E ad Δ: quare & B ad Z majorem habebit rationem quam B ad Δ: ad quam vero eadem majorem habet rationem [per 10. 5.] illa minor est: minor igitur est Z quam Δ: ac propterea Δ quam Z major erit. Similiter ostendemus & si æqualis, æqualem: *viz.* si A sit æqualis Γ, & Δ ipsi Z esse æqualem; & si minor, minorem.

Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ sumantur & in eadem ratione; sit autem perturbata earum proportio, & ex æquo prima major sit quam tertia; & quarta quam sexta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

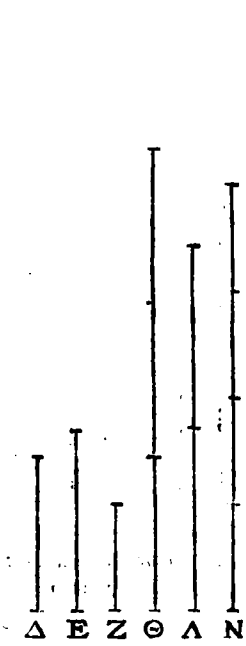
Prop. XXII. Theor.

Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem ratione; & ex æquo in eadem ratione erunt.

Ἔστω ὁποσαοῦν μεγέθη τὰ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, Ε, Ζ συνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Ε ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ, Λ, καὶ ἔτι τῶν Γ, Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν.

Sint quotcunque magnitudines A, B, Γ, & aliæ ipsis numero æquales Δ, E, Z binæ sumptæ in eadem ratione, ut A quidem ad B ita Δ ad E, ut autem B ad Γ ita E ad Z: dico & ex æquo in eadem ratione esse ut A ad Γ ita Δ ad Z.

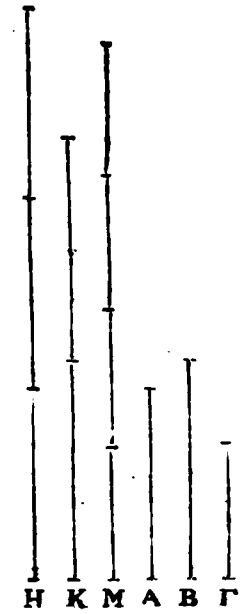


Sumantur enim ipsarum quidem A, Δ æque multiplices H, Θ, ipsarum vero B, E aliæ utcunque æque multiplices K, Λ, & ipsarum Γ, Z aliæ utcunque æque multiplices M, N.

Καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια

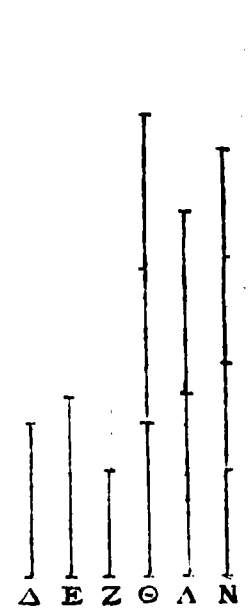
Quoniam igitur est ut A ad B ita Δ ad E, & sumptæ sunt ipsarum A, Δ æque multiplices

H, Θ, & ipſarum B, E aliæ utcunque æque multiplices K, Λ; erit [per 4. 5.] ut H ad K ita Θ ad Λ. eadem quoque ratione erit ut K ad M ita Λ ad N. & cum ſint tres magnitudines H, K, M, & aliæ ipſis numero æquales Θ, Λ, N binæ ſumptæ & in eadem ratione: ex æquo igitur [per 20. 5.] ſi H ſuperat M & Θ ipſam N ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. ſuntque H, Θ ipſarum A, Δ æque multiplices, & M, N ipſarum Γ, Z aliæ utcunque æque multiplices: ut igitur A ad Γ ita erit [per 5. def. 5.] Δ ad Z.



Quare ſi ſint quotcunque magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem ratione; & ex æquo in eadem ratione erunt. quod erat demonſtrandum.

τὰ H, Θ, τῶν δὲ B, E ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ K, Λ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ H πρὸς τὸ K οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Λ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ K πρὸς τὸ M οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ N. ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶ τὰ H, K, M, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος Θ, Λ, N σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· δι᾽ ἴσου ἄρα εἰ ὑπερέχει τὸ H τοῦ M, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ N· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καὶ ἔστι τὰ μὲν H, Θ τῶν A, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ M, N τῶν Γ, Z ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Z.



Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

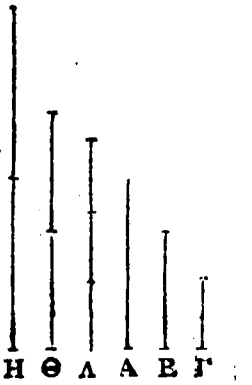
Prop. XXIII. Theor.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem ratione, ſit autem perturbata earum proportio; & ex æquo in eadem ratione erunt.

Sint tres magnitudines A, B, Γ, & aliæ ipſis numero æquales binæ ſumptæ in eadem ratione Δ, E, Z, ſit autem perturbata earum proportio, *viz.* ut A ad B ita E ad Z, & ut B ad Γ ita Δ ad E: dico ut A ad Γ ita eſſe Δ ad Z.

Sumantur ipſarum quidem A, B, Δ æque multiplices H, Θ, K, ipſarum vero Γ, E, Z aliæ utcunque æque multiplices Λ, M, N.

Et quoniam H, Θ æque multiplices ſunt ipſarum A, B; partes autem [per 15. 5.] eandem habent rationem quam earum æque multiplices; erit ut A ad B ita H ad Θ. & ſimili ratione ut E ad Z ita M ad N: atque eſt ut A ad B ita E ad Z. ut igitur H ad Θ ita [per 11. 5.] M ad N. &, quoniam eſt ut B ad Γ ita Δ ad E, & ſumptæ ſunt ipſarum quidem B, Δ æque multiplices Θ, K, ipſarum vero



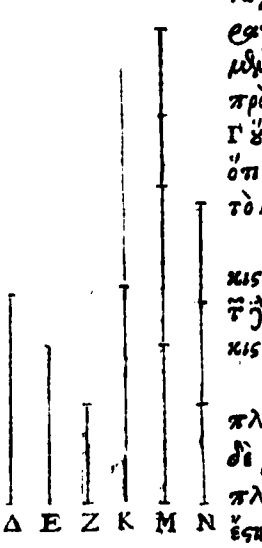
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ ταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία· καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ A, B, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τὰ Δ, E, Z, ἔστω δὲ ταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z, ὡς δὲ τὸ B πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ E· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Z.

Εἰλήφθω τῶν μὲν A, B, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ H, Θ, K, τῶν δὲ Γ, E, Z ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, M, N.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τὰ H, Θ τῶν A, B, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ H πρὸς τὸ Θ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ E πρὸς τὸ Z οὕτως τὸ M πρὸς τὸ N· καὶ ἔστιν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z. καὶ ὡς ἄρα τὸ H πρὸς τὸ Θ οὕτως τὸ M πρὸς τὸ N. καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς τὸ B πρὸς τὸ Γ οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ E, καὶ ἐναλλὰξ τῶν μὲν B, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Θ, K,



τ̃ ἢ Γ, Ε ἄλλα ἃ ἐτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ· ἔστι ἄρα ὡς τὸ Θ πρὸς τὸ Λ ὕτως τὸ Κ πρὸς τὸ Μ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Θ ὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν· * ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶ, τὰ Η, Θ, Λ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, τὰ Κ, Μ, Ν, συνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔστιν αὐτῶν ταραγμένη ἡ ἀναλογία· δι᾽ ἴσου ἄρα εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καὶ ἔστι τὰ μὲν Η, Κ τ̃ Λ, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Λ, Ν τ̃ Γ, Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ ὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος συνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ ταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία· καὶ δι᾽ ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Γ, Β aliæ utcunque æque multiplices Λ, Μ; erit [per 15. 5.] ut Θ ad Λ ita Κ ad Μ. oſtenſum autem eſt & ut Η ad Θ ita eſſe Μ ad Ν: quoniam igitur tres ſunt magnitudines Η, Θ, Λ, & aliæ ipſis numero æquales Κ, Μ, Ν binæ ſumptæ in eadem ratione, eſtque perturbata earum proportio, ex æquo [per 21. 5.] ſi Η ſuperat Λ, & Κ ipſam Ν ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. ſunt autem Η, Κ ipſarum Α, Δ æque multiplices, & Λ, Ν æque multiplices ipſarum Γ, Ζ: ut igitur Α ad Γ ita erit [per 5. def. 5.] Δ ad Ζ.

Quare ſi fuerint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem ratione, ſit autem perturbata earum proportio; & ex æquo in eadem ratione erunt: quod erat demonſtrandum.

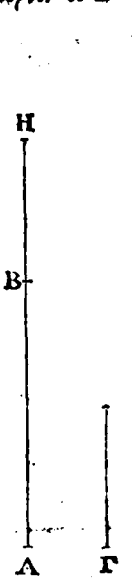
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τ̃ αὐτὸν ἔχῃ λόγον ᾗ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τ̃ αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τ̃ αὐτὸν ἕξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.

Prop. XXIV. Theor.

Si prima ad ſecundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; habeat autem & quinta ad ſecundam eandem rationem quam ſexta ad quartam: & compoſita è prima & quinta ad ſecundam eandem rationem habebit quam compoſita è tertia & ſexta ad quartam.

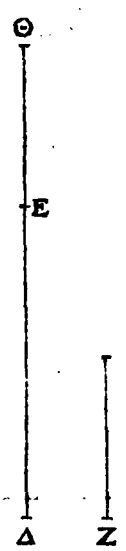
Πρῶτον γὰρ τὸ ΑΒ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τ̃ αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ ΔΕ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ· ἐχέτω δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΒΗ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τ̃ αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον τὸ ΕΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ συντεθὲν τὸ πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΑΗ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ.



Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ΒΗ πρὸς τὸ Γ ὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ ΒΗ ὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ ὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ ΒΗ ὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΗ ὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΘ. καὶ ἐπεὶ διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ὡς ἄρα τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΗΒ ὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΘΕ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ΗΒ πρὸς τὸ Γ ὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ Γ ὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ Ζ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τ̃ αὐτὸν ἔχῃ λόγον ᾗ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τ̃ αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τ̃ αὐτὸν ἕξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PRima enim ΑΒ ad ſecundam Γ eandem habeat rationem quam tertia ΔΕ ad quartam Ζ: habeat autem & quinta ΒΗ ad ſecundam Γ rationem eandem quam ſexta ΕΘ ad quartam Ζ: dico & compoſitam è prima & quinta ΑΗ ad ſecundam Γ eandem habere rationem quam compoſita è tertia & ſexta ΔΘ ad quartam Ζ.



Quoniam enim eſt ut ΒΗ ad Γ ita ΕΘ ad Ζ; erit invertendo [per cor. 4. 5.] ut Γ ad ΒΗ ita Ζ ad ΕΘ. & quoniam ut ΑΒ ad Γ ita eſt ΔΕ ad Ζ, ut autem Γ ad ΒΗ ita Ζ ad ΕΘ; erit ex æquo [per 22. 5.] ut ΑΒ ad ΒΗ ita ΔΕ ad ΕΘ. cum autem diviſæ magnitudines ſint proportionales, & [per 18. 5.] compoſitæ proportionales erunt: ut igitur ΑΗ ad ΗΒ ita eſt ΔΘ ad ΘΕ. ut autem ΗΒ ad Γ ita ΕΘ ad Ζ: ergo ex æquo [per 22. 5.] ut ΑΗ ad Γ ita erit ΔΘ ad Ζ.

Si igitur prima ad ſecundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; habeat autem & quinta ad ſecundam eandem rationem quam ſexta ad quartam: & compoſita è prima & quinta ad ſecundam eandem rationem habebit quam compoſita è tertia & ſexta ad quartam. quod erat demonſtrandum.

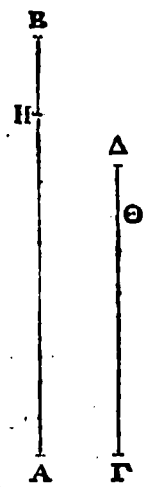
* Antea fuit ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶν ἀνάλογον.

Prop. XXV. Theor.

Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipſarum & minima duabus reliquis majores erunt.

Ἔστω πέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ ἕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ἔστω δὲ μέγιστον αὐτῶν τὸ ΑΒ, ἐλάχιστον δὲ τὸ Ζ· λέγω ὅτι τὰ ΑΒ, Ζ τῶν ΓΔ, Ε μείζονά ἐστι.

Κείσθω γὰρ τῷ μὲν Ε ἴσον τὸ ΑΗ, τῷ δὲ Ζ ἴσον τὸ ΓΘ.



Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ ἕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ἴσον δὲ τῷ μὲν Ε τὸ ΑΗ, τῷ δὲ Ζ τὸ ΓΘ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ ἕτως τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΘ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ ἕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΗ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΓΘ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΘΔ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ. μεῖζον δὲ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΗΒ τοῦ ΘΔ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΗ τῷ Ε, τὸ δὲ ΓΘ τῷ Ζ· τὰ ἄρα ΑΗ, Ζ ἴσα ἐστὶ τοῖς ΓΘ, Ε. καὶ ἐπεὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα· ἐὰν ἄρα τῶν ΗΒ, ΘΔ ἀνίσων ὄντων, καὶ μείζονος τοῦ ΗΒ, τῷ ΗΒ προστεθῇ τὰ ΑΗ, Ζ, τῷ δὲ ΘΔ προστεθῇ τὰ ΓΘ, Ε, συνάγεται τὰ ΑΒ, Ζ μείζονα τῶν ΓΔ, Ε.

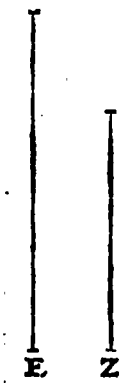
Ἐὰν ἄρα πέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον αὐτῶν καὶ τὸ ἐλάχιστον δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Ἐὰν πέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν.

SInt quatuor magnitudines proportionales AB, ΓΔ, E, Z, & ſit ut AB ad ΓΔ ita E ad Z; ſit autem maxima ipſarum AB, & Z minima: dico AB & Z ipſis ΓΔ & E majores eſſe.

Ponatur enim ipſi quidem E æqualis AH, ipſi vero Z æqualis ΓΘ.



Quoniam igitur eſt ut AB ad ΓΔ ita E ad Z, eſtque AH æqualis E, & ΓΘ æqualis Z; erit ut AB ad ΓΔ ita AH ad ΓΘ. & quoniam eſt ut tota AB ad totam ΓΔ ita ablata AH ad ablatam ΓΘ; erit [per 19. 5.] & reliqua HB ad reliquam ΘΔ ut tota AB ad totam ΓΔ. major autem eſt [ex hyp.] AB quam ΓΔ; ergo & HB major eſt quam ΘΔ. cum autem AH ſit æqualis ipſi E, & ΓΘ ipſi Z; erunt AH & Z æquales ipſis ΓΘ & E. ſi autem inæqualibus æqualia addantur, tota erunt inæqualia: cum igitur HB, ΘΔ ſint inæqualia, ſitque major HB, ſi ipſi quidem HB addantur AH & Z, ipſi vero ΘΔ addantur ΓΘ & E, fient AB & Z ipſis ΓΔ & E majores.

Si igitur quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipſarum & minima duabus reliquis majores erunt. quod erat demonſtrandum.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΚΤΟΝ.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SEXTUS.

ΟΡΟΙ.

α'. Ὅμοια σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τάς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.

β'. Ἀντιπεπονθότα δὲ σχήματά ἐστιν, ὅταν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγοι ὦσιν.

γ'. Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται, ὅταν ἡ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, οὕτως τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλασσον.

δ'. Ὕψος ἐστὶ παντὸς σχήματος ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη.

ε'. Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιαθεῖσαι ποιῶσί * τινά.

DEFINITIONES.

1. Similes figuræ rectilineæ ſunt, quæ & ſingulos angulos ſingulis æquales habent, & circa æquales angulos latera proportionalia.

2. Reciprocæ figuræ ſunt, quando in utraque figura antecedentes & conſequentes rationum termini fuerint.

3. Secundum extremam ac mediam rationem recta linea ſecta eſſe dicitur, quando ut tota ad majus ſegmentum ita majus ſegmentum ad minus ſe habuerit.

4. Altitudo cujuſque figuræ eſt linea perpendicularis à vertice ad baſim ducta.

5. Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum † quantitates inter ſe multiplicatæ illius faciunt quantitatem.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Triangula & parallelogramma, quæ eandem habent altitudinem, ſunt inter ſe ut baſes.

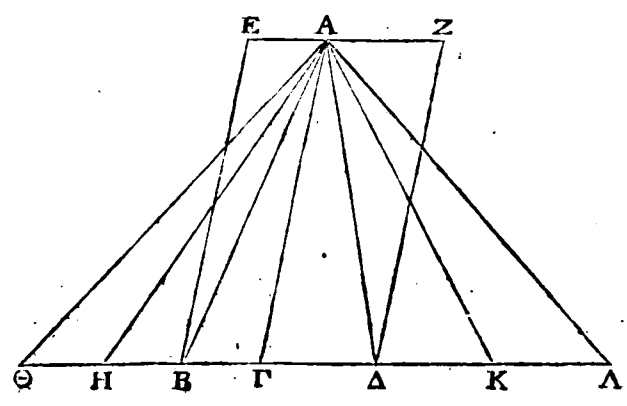
Ἔστω τρίγωνα μὲν τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, παραλληλόγραμμα δὲ τὰ ΕΓ, ΓΖ, ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, τὸ δοθὲν δὴ Α ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετον ἀγομένην· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, καὶ τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον.

Sint triangula quidem ΑΒΓ, ΑΓΔ, parallelogramma vero ΕΓ, ΓΖ, quæ eandem habent altitudinem, videlicet perpendicularem à puncto Α ad ΒΔ ductam: dico ut baſis ΒΓ ad ΓΔ baſim ita eſſe triangulum ΑΒΓ ad triangulum ΑΓΔ, & parallelogrammum ΕΓ ad ΓΖ parallelogrammum.

* Ita cum *Theone.* in libb. vulgatis *πολύς.* † Rectius *exponentes* vertit *Cl. Wallisius*; cum *rationis exponens* ſit *menſura* quantitatis *ejuſdem.* vide *Opera ejus mathematica*, vol. 2. p. 666.

Producatur enim ΒΔ ex utraque parte ad puncta Θ, Λ, & ipſi quidem baſi ΒΓ æquales quotcunque ponantur ΒΗ, ΗΘ, ipſi vero baſi ΓΔ ponantur quotcunque æquales ΔΚ, ΚΛ, & ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ jungantur.

Quoniam igitur ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ inter ſe ſunt æquales, erunt [per 38. 1.] & triangula ΑΗΘ, ΑΗΒ, ΑΒΓ inter ſe æqualia: ergo quam multiplex eſt baſis ΘΓ ipſius ΒΓ baſis, tam multiplex eſt ΑΘΓ triangulum trianguli ΑΒΓ. eadem ratione quam multiplex eſt baſis ΛΓ ipſius baſis ΓΔ, tam multiplex eſt & triangulum ΑΛΓ ipſius ΑΓΔ trianguli; & [per 38. 1.] ſi æqualis eſt baſis ΘΓ baſi ΓΛ, & triangulum ΑΘΓ triangulo ΑΛΓ eſt æquale; & ſi baſis ΘΓ baſim ΓΛ ſuperat, & triangulum ΑΘΓ ſuperabit triangulum ΑΛΓ; & ſi minor, minus erit. quatuor igitur magnitudinibus exiſtentibus, videlicet duabus baſibus ΒΓ, ΓΔ & duobus triangulis ΑΒΓ, ΑΓΔ, ſumpta ſunt æque multiplicia, baſis quidem ΒΓ & ΑΒΓ trianguli, videlicet ΘΓ baſis & ΑΘΓ triangulum; baſis vero ΓΔ & trianguli ΑΓΔ alia utcunque æque multiplicia, nempe ΓΛ baſis & ΑΛΓ triangulum. atque oſtenſum eſt, ſi baſis ΘΓ baſim ΓΛ ſuperat, & triangulum ΑΘΓ ſuperare triangulum ΑΛΓ; & ſi æqualis, æquale; & ſi minor, minus: eſt igitur [per 5. def. 5.] ut ΒΓ baſis ad baſim ΓΔ ita triangulum ΑΒΓ ad ΑΓΔ triangulum.



Et quoniam [per 41. 1.] trianguli ΑΒΓ duplum eſt parallelogrammum ΕΓ, & trianguli ΑΓΔ parallelogrammum ΖΓ duplum, partes autem [per 15. 5.] eandem inter ſe rationem habent quam earum æque multiplices; erit ut ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΑΓΔ ita parallelogrammum ΕΓ ad ΖΓ parallelogrammum. quoniam igitur oſtenſum eſt, ut baſis ΒΓ ad ΓΔ baſim ita eſſe ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΑΓΔ; ut autem ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΑΓΔ ita parallelogrammum ΕΓ ad ΖΓ paralellogrammum: erit [per 11. 5.] ut ΒΓ baſis ad baſim ΓΔ ita parallelogrammum ΕΓ ad ΖΓ parallelogrammum.

Triangula igitur & parallelogramma, quæ eandem habent altitudinem, ſunt inter ſe ut baſes. quod erat demonſtrandum.

Prop. II. Theor.

Si uni laterum trianguli parallela recta linea ducatur, hæc proportionaliter ſecabit ipſius trianguli latera: & ſi trian-

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ὅπου τὰ Θ, Λ σημεῖα, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν ΒΓ βάσει ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΒΗ, ΗΘ, τῇ δὲ ΓΔ βάσει ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΔΚ, ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ ΑΗΘ, ΑΗΒ, ΑΒΓ τρίγωνα ἀλλήλοις· ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΒΓ βάσεως, τοσαυταπλάσιον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλάσιον ἐστὶν ἡ ΛΓ βάσις τῆς ΓΔ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΑΛΓ τρίγωνον τοῦ ΑΓΔ τριγώνου· καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΘΓ βάσις τῇ ΓΛ βάσει, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τῷ ΑΛΓ τριγώνῳ· καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΓΛ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΛΓ τριγώνου· καὶ εἰ ἐλάσσων, ἔλασσον. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων τῶν ΒΓ, ΓΔ δύο δὲ τριγώνων τῶν ΑΒΓ, ΑΓΔ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΒΓ βάσεως καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ἤτοι ΘΓ βάσις καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον· τῆς δὲ ΓΔ βάσεως καὶ τοῦ ΑΓΔ τριγώνου ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια, ἤτοι ΓΛ βάσις καὶ τὸ ΑΛΓ τρίγωνον. καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΓΛ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΛΓ τριγώνου· καὶ εἰ ἴση, ἴσον· καὶ εἰ ἐλάττων, ἔλαττον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον.

Καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν ΑΒΓ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ ΑΓΔ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς ἡ μὲν ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ, ὡς δὲ τὸ ΑΒΓ πρὸς τὸ ΑΓΔ οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον.

Τὰ ἄρα τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

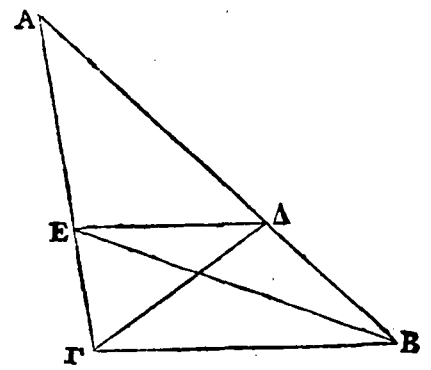
Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώ-

τὴν πλευρὰν ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παράλληλος ἔσται τῇ λοιπῇ τοῦ τριγώνου πλευρᾷ τῇ ΒΓ.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ παράλληλος μιᾷ τῶν πλευρῶν τῇ ΒΓ ἤχθω ἡ ΔΕ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΔ.

Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΔΕ τριγώνῳ, ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τῆς ΔΕ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΔΕ, ΒΓ. ἄλλο δέ τι τὸ ΑΔΕ τρίγωνον· τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ· ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, τὴν ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετον ἀγομένην, πρὸς ἀλλήλα εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. διὰ τὰ αὐτὰ δή, ὡς τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.



Ἀλλὰ δὴ αἱ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΓ ἀνάλογον τετμήσθωσαν κατὰ τὰ Δ, Ε σημεῖα, ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ, ὡς δὲ ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΒΔΕ, ΓΔΕ τριγώνων πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΔΕ τριγώνῳ· καὶ εἰσὶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΔΕ. τὰ δὲ ἴσα τρίγωνα καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παράλληλος ἔσται τῇ λοιπῇ τοῦ τριγώνου πλευρᾷ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

guli latera proportionaliter ſecta fuerint, quæ ſectiones conjungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit.

TRianguli enim ΑΒΓ uni laterum ΒΓ parallela ducatur ΔΕ: dico ut ΒΔ ad ΔΑ ita eſſe ΓΕ ad ΕΑ.

Jungantur enim ΒΕ, ΓΔ.

Triangulum igitur ΒΔΕ [per 37. 1.] triangulo ΓΔΕ eſt æquale; in eadem enim ſunt baſi ΔΕ & intra eaſdem parallelas ΔΕ, ΒΓ. aliud autem triangulum eſt ΑΔΕ; & [per 7. 5.] æqualia ad idem eandem habent rationem: ergo ut triangulum ΒΔΕ ad triangulum ΑΔΕ ita eſt ΓΔΕ triangulum ad triangulum ΑΔΕ. ut autem triangulum ΒΔΕ ad triangulum ΑΔΕ ita eſt ΒΔ ad ΔΑ: nam cum eandem altitudinem habeant, videlicet perpendicularem à puncto Ε ad ΑΒ ductam [per 1. 6.] inter ſe ſunt ut baſes. & ob eandem cauſam ut ΓΔΕ triangulum ad triangulum ΑΔΕ ita ΓΕ ad ΕΑ: ut igitur ΒΔ ad ΔΑ ita eſt [per 11. 5.] ΓΕ ad ΕΑ.

SED trianguli ΑΒΓ latera ΑΒ, ΑΓ proportionaliter ſecta ſint in punctis Δ, Ε, ut ΒΔ ad ΔΑ ita ſit ΓΕ ad ΕΑ, & jungatur ΔΕ: dico ΔΕ ipſi ΒΓ parallelam eſſe.

Iiſdem enim conſtructis, quoniam eſt ut ΒΔ ad ΔΑ ita ΓΕ ad ΕΑ; ut autem ΒΔ ad ΔΑ ita [per 1. 6.] ΒΔΕ triangulum ad triangulum ΑΔΕ; & ut ΓΕ ad ΕΑ ita ΓΔΕ triangulum ad triangulum ΑΔΕ: erit [per 11. 5.] ut triangulum ΒΔΕ ad triangulum ΑΔΕ ita ΓΔΕ triangulum ad triangulum ΑΔΕ. utrumque igitur triangulorum ΒΔΕ, ΓΔΕ ad triangulum ΑΔΕ eandem habet rationem. ideo [per 9. 5.] triangulum ΒΔΕ triangulo ΓΔΕ æquale eſt: & ſunt ſuper eadem baſi ΔΕ. æqualia autem triangula & ſuper eadem baſi conſtituta [per 39. 1.] etiam intra eaſdem ſunt parallelas. ergo ΔΕ ipſi ΒΓ parallela eſt.

Si igitur uni laterum trianguli parallela recta linea ducta fuerit, hæc proportionaliter ſecabit ipſius trianguli latera: & ſi trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint, quæ ſectiones conjungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς· καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως

PROP. III. THEOR.

Si trianguli angulus bifariam ſecetur, ſecans autem angulum recta linea ſecet etiam baſim; baſis ſegmenta eandem rationem habebunt quam reliqua trianguli latera: & ſi baſis ſegmenta

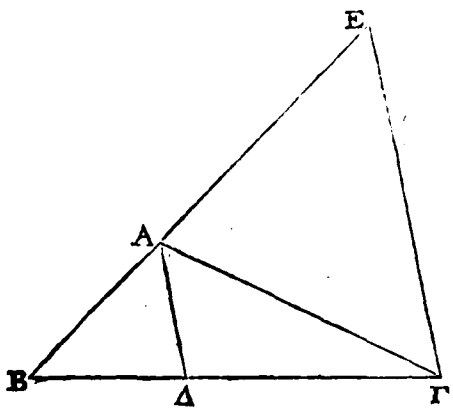
menta eandem habeant rationem, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad ſectionem ducitur recta linea trianguli angulum bifariam ſecabit.

τμήματα τ αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τ τριγώνυ πλευραῖς, ἀπὸ τ κορυφῆς ἐπὶ τ τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τέμνει τ τ τριγώνυ γωνίαν.

SIT triangulum ABΓ, & ſecetur angulus BAΓ bifariam à recta linea AΔ: dico ut BΔ ad ΔΓ ita eſſe BA ad AΓ.

Ducatur enim [per 31. 1.] per Γ ipſi ΔA parallela ΓE, & producta BA conveniat cum ipſa in puncto E.

Quoniam igitur in parallelas AΔ, EΓ incidit recta linea AΓ; erit [per 29. 1.] AΓE angulus angulo ΓAΔ æqualis. ſed ΓAΔ angulus ponitur æqualis angulo BAΔ: ergo & BAΔ ipſi AΓE angulo æqualis erit. rurſus, quoniam in parallelas AΔ, EΓ recta linea BAE incidit, exterior angulus BAΔ æqualis eſt [per 29. 1.] interiori AEΓ. oſtenſus autem eſt & angulus AΓE angulo BAΔ æqualis; ergo & AΓE ipſi AEΓ æqualis erit: & propterea [per 6. 1.] latus AE æquale lateri AΓ. & quoniam uni laterum trianguli BΓE, videlicet ipſi EΓ, parallela ducta eſt AΔ; erit [per 2. 6.] ut BΔ ad ΔΓ ita BA ad AE. æqualis autem eſt AE ipſi AΓ: eſt igitur [per 7. 5.] ut BΔ ad ΔΓ ita BA ad AΓ.



SIT autem ut BΔ ad ΔΓ ita BA ad AΓ; & AΔ jungatur: dico angulum BAΓ bifariam ſectum eſſe à recta linea AΔ.

Iiſdem enim conſtructis, quoniam eſt ut BΔ ad ΔΓ ita BA ad AΓ; eſt autem [per 2. 6.] ut BΔ ad ΔΓ ita BA ad AE (etenim uni laterum trianguli BΓE, videlicet ipſi EΓ, parallela ducta eſt AΔ) erit ut BA ad AΓ ita BA ad AE: ergo [per 9. 5.] AΓ eſt æqualis AE, ac propterea [per 5. 1.] & angulus AEΓ angulo AΓE æqualis. ſed angulus quidem AEΓ [per 29. 1.] eſt æqualis angulo exteriori BAΔ, angulus vero AΓE æqualis alterno ΓAΔ: quare & BAΔ angulus ipſi ΓAΔ æqualis erit. angulus igitur BAΓ bifariam ſectus eſt à recta linea AΔ.

Ergo ſi trianguli angulus bifariam ſecetur, ſecans autem angulum recta linea ſecet etiam baſim; baſis ſegmenta eandem rationem habebunt quam reliqua trianguli latera: & ſi baſis ſegmenta eandem habeant rationem, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad ſectionem ducitur recta linea trianguli angulum bifariam ſecabit. quod erat demonſtrandum.

ΕΣτω τρίγωνον τὸ ABΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ BAΓ γωνία δίχα ὑπὸ τ AΔ εὐθείας· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ BΔ πρὸς τ ΔΓ ἕτως ἡ BA πρὸς τ AΓ.

Ηχθω γὰρ διὰ τ Γ τῇ ΔA παράλληλος ἡ ΓE, καὶ διαχθεῖσα ἡ BA συμπιπτέτω αὐτῇ κατὰ τὸ E.

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς AΔ, EΓ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ AΓ, ἡ ἄρα ὑπὸ AΓE γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΓAΔ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΓAΔ τῇ ὑπὸ BAΔ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ BAΔ ἄρα τῇ ὑπὸ AΓE ἐστὶν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς AΔ, EΓ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ BAE, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ BAΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς τῇ ὑπὸ AEΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ AΓE τῇ ὑπὸ BAΔ ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ AΓE τῇ ὑπὸ AEΓ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ AE πλευρᾷ τῇ AΓ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ τριγώνυ τὸ BΓE παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν EΓ ἦκται ἡ AΔ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ BΔ πρὸς τὴν ΔΓ ἕτως ἡ BA πρὸς τὴν AE. ἴση δὲ ἡ AE τῇ AΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ BΔ πρὸς τὴν ΔΓ ἕτως ἡ BA πρὸς τὴν AΓ.

ΑΛΛΑ δὴ ἔστω ὡς ἡ BΔ πρὸς τὴν ΔΓ ἕτως ἡ BA πρὸς τὴν AΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AΔ· λέγω ὅτι δίχα τέτμηται ἡ ὑπὸ BAΓ γωνία ὑπὸ τ AΔ εὐθείας.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ BΔ πρὸς τὴν ΔΓ ἕτως ἡ BA πρὸς τὴν AΓ, ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ BΔ πρὸς τὴν ΔΓ ἕτως ἡ BA πρὸς τὴν AE· τριγώνυ γὰρ τὸ BΓE παρὰ μίαν τ πλευρῶν τὴν EΓ ἦκται παράλληλος ἡ AΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ BA πρὸς τὴν AΓ ἕτως ἡ BA πρὸς τὴν AE· ἴση ἄρα ἡ AΓ τῇ AE, ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ AEΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ AΓE ἐστὶν ἴση. ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ AEΓ τῇ ἐκτὸς τῇ ὑπὸ BAΔ ἐστὶν ἴση, ἴση δὲ καὶ ἡ ὑπὸ AΓE τῇ ἐναλλὰξ τῇ ὑπὸ ΓAΔ· καὶ ἡ ὑπὸ BAΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΓAΔ ἐστὶν ἴση. ἡ ἄρα ὑπὸ BAΓ δίχα τέτμηται ὑπὸ τ AΔ εὐθείας.

Ἐὰν ἄρα τριγώνυ γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα αὐτὴν εὐθεῖα τέμνει καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τ αὐτὸν ἕξει λόγον τοῖς λοιπαῖς τ τριγώνυ πλευραῖς· καὶ ἐὰν τὰ τ βάσεως τμήματα τ αὐτὸν ἔχῃ λόγον τοῖς λοιπαῖς τ τριγώνυ πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τ κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τέμνει τ γωνίαν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

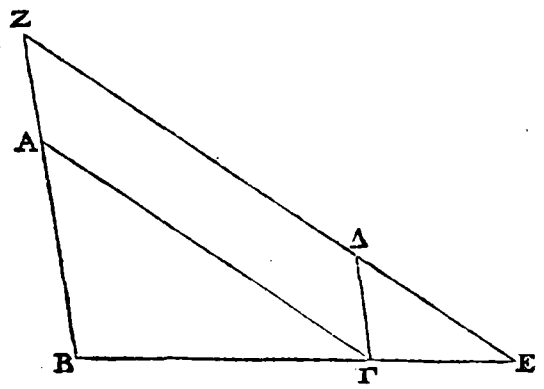
Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί.

Prop. IV. Theor.

Æquiangulorum triangulorum proportionalia ſunt latera quæ circum æquales angulos; & homologa ſunt latera quæ æqualibus angulis ſubtenduntur.

Ἔστωσαν ἰσογώνια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ, ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΔΓΕ, τὴν δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ· λέγω ὅτι τῶν ΑΒΓ, ΔΓΕ τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί.

SInt æquiangula triangula ΑΒΓ, ΔΓΕ, quæ angulum quidem ΑΒΓ angulo ΔΓΕ, angulum vero ΑΓΒ angulo ΔΕΓ æqualem habeant, & præterea angulum ΒΑΓ angulo ΓΔΕ: dico triangulorum ΑΒΓ, ΔΓΕ proportionalia eſſe latera, quæ ſunt circa æquales angulos; & homologa eſſe latera quæ æqualibus angulis ſubtenduntur.



Κείσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΓΒ γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΓ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ ΒΑ, ΕΔ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Ζ.

Ponatur enim ΒΓ in directum ipſi ΓΕ. & quoniam [per 17. 1.] anguli ΑΒΓ, ΑΓΒ duobus rectis ſunt minores, æqualis autem eſt angulus ΑΓΒ angulo ΔΕΓ; erunt ΑΒΓ, ΔΕΓ anguli duobus rectis minores: quare [per 11. ax.] ΒΑ, ΕΔ productæ inter ſe convenient producantur, & conveniant in puncto Ζ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνία τῇ πρὸς τῷ Β, τῇ ΑΒΓ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΖ τῇ ΓΔ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΖΕ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΑΓΔ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΖΑ τῇ ΓΔ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΖΔ. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΖΒΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΖΕ ἦκται ἡ ΑΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΖ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ. ἴση δὲ ἡ ΑΖ τῇ ΓΔ· ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. πάλιν, ἐπεὶ παραλληλός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΒΖ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ. ἴση δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΑΓ· ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΕΔ, ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ.

Ponatur enim ΒΓ in directum ipſi ΓΕ. & quoniam [per 17. 1.] anguli ΑΒΓ, ΑΓΒ duobus rectis ſunt minores, æqualis autem eſt angulus ΑΓΒ angulo ΔΕΓ; erunt ΑΒΓ, ΔΕΓ anguli duobus rectis minores: quare [per 11. ax.] ΒΑ, ΕΔ productæ inter ſe convenient producantur, & conveniant in puncto Ζ.

Et quoniam angulus ΔΓΕ æqualis eſt angulo ΑΒΓ; erit [per 28. 1.] ΒΖ ipſi ΓΔ parallela. rurſus, quoniam æqualis eſt angulus ΑΓΒ angulo ΔΕΓ, parallela erit ΑΓ ipſi ΖΕ: parallelogrammum igitur eſt ΖΑΓΔ; ac propterea [per 34. 1.] ΖΑ quidem ipſi ΓΔ; ΑΓ vero ipſi ΖΔ eſt æqualis. & quoniam uni laterum trianguli ΖΒΕ, videlicet ipſi ΖΕ, parallela ducta eſt ΑΓ; erit [per 2. 6.] ut ΒΑ ad ΑΖ ita ΒΓ ad ΓΕ. æqualis autem eſt ΑΖ ipſi ΓΔ: ut igitur ΒΑ ad ΓΔ ita [per 7. 5.] ΒΓ ad ΓΕ, & alterne [per 16. 5.] ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΔΓ ad ΓΕ. rurſus, quoniam ΓΔ parallela eſt ΒΖ, erit ut ΒΓ ad ΓΕ ita ΖΔ ad ΔΕ. ſed ΔΖ eſt æqualis ΑΓ: ergo ut ΒΓ ad ΓΕ ita ΑΓ ad ΕΔ, & alterne ut ΒΓ ad ΓΑ ita ΓΕ ad ΕΔ. itaque quoniam oſtenſum eſt, ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΔΓ ad ΓΕ, ut autem ΒΓ ad ΓΑ ita ΓΕ ad ΕΔ; erit ex æquo [per 22. 5.] ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΓΔ ad ΔΕ.

Τῶν ἄρα ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραί. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Æquiangulorum igitur triangulorum proportionalia ſunt latera quæ circum æquales angulos, & homologa ſunt latera quæ æqualibus angulis ſubtenduntur. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα· καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Prop. V. Theor.

Si duo triangula latera habeant proportionalia, æquiangula erunt triangula; & æquales habebunt angulos, quibus homologa latera ſubtenduntur.

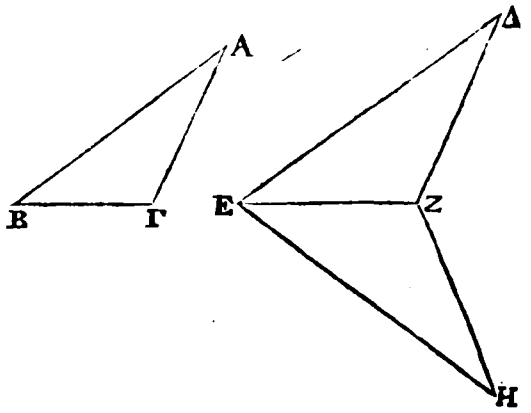
Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν ΑΒ πρὸς τὴν

SInt duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, quæ latera proportionalia habeant; ſitque ut ΑΒ quidem

dem ad BΓ ita ΔE ad EZ; ut autem BΓ ad ΓA ita EZ ad ZΔ; & adhuc ut BA ad AΓ ita EΔ ad ΔZ: dico triangulum ABΓ triangulo ΔEZ æquiangulum esse, & æquales habere angulos quibus homologa latera subtenduntur; angulum quidem ABΓ angulo ΔEZ, angulum vero BΓA angulo EZΔ; & præterea angulum BAΓ angulo EΔZ.

Constituatur enim [per 23. 1.] ad rectam lineam EZ, & ad puncta in ipsa E, Z, angulo quidem ABΓ æqualis angulus ZEH; angulo autem BΓA angulus EZH: quare [per 32. 1.] reliquus BAΓ angulus reliquo EHZ est æqualis.

Ideoque æquiangulum est triangulum ABΓ triangulo EHZ; triangulorum igitur ABΓ, EHZ [per 4. 6.] proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa quæ æqualibus angulis subtenduntur: ergo ut AB ad BΓ ita HE ad EZ. sed ut AB ad BΓ ita ΔE ad EZ: ut igitur ΔE ad EZ ita [per 11. 5.] HE ad EZ: utraque igitur ipsarum ΔE, HE eandem habet rationem ad EZ; & idcirco [per 9. 5.] erit ΔE ipsi HE æqualis. eadem ratione & ΔZ æqualis erit HZ. itaque quoniam ΔE est æqualis EH, communis autem EZ: duæ ΔE, EZ duabus HE, EZ sunt æquales, & basis ΔZ basi HZ æqualis: angulus igitur ΔEZ est [per 8. 1.] æqualis angulo HEZ. & ΔEZ triangulum æquale triangulo HEZ, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur: angulus igitur ΔZE quidem est æqualis angulo HZE, angulus vero EΔZ æqualis angulo EHZ. & quoniam angulus ΔEZ est æqualis angulo HEZ, & [per construct.] angulus HEZ æqualis angulo ABΓ; erit & angulus ABΓ angulo ΔEZ æqualis. eadem ratione & angulus AΓB æqualis est angulo ΔZE, & etiam angulus ad A angulo ad Δ: ergo ABΓ triangulum est æquiangulum triangulo ΔEZ.



Si igitur duo triangula latera habeant proportionalia, æquiangula erunt triangula; & æquales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur. quod erat demonstrandum.

Prop. VI. Theor.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur.

SInt duo triangula ABΓ, ΔEZ, unum angulum BAΓ uni angulo EΔZ æqualem

ΒΓ ὅτως τὴν ΔE πρὸς τὴν EZ, ὡς δὲ τλὺ ΒΓ πρὸς τὴν ΓA ὅτως τὴν EZ πρὸς τὴν ZΔ, καὶ ἔπι ὡς τὸ BA πρὸς τὴν AΓ ὅτως τὴν EΔ πρὸς τλὺ ΔZ· λέγω ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσι, τὴν μὲν ὑπὸ ABΓ τῇ ὑπὸ ΔEZ, τὴν δὲ ὑπὸ BΓA τῇ ὑπὸ EZΔ, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ BAΓ τῇ ὑπὸ EΔZ.

Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ EZ εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς E, Z, τῇ μὲν ὑπὸ ABΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ZEH, τῇ δὲ ὑπὸ BΓA ἴση ἡ ὑπὸ EZH· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ BAΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ EHZ ἐστὶν ἴση.

Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ EHZ τριγώνῳ· τὰ ἄρα ABΓ, EHZ τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσι· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BΓ ὅτως ἡ HE πρὸς τὴν EZ. ἀλλ' ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BΓ ὅτως [ἐστὶν] ἡ ΔE πρὸς τὴν EZ· ὡς ἄρα ἡ ΔE πρὸς τὴν EZ ὅτως ἡ HE πρὸς τλὺ EZ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΔE, HE πρὸς τὴν EZ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔE τῇ HE. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔZ τῇ HZ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔE τῇ EH, κοινὴ δὲ ἡ EZ, δύο δὴ αἱ ΔE, EZ δυσὶ ταῖς HE, EZ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΔZ βάσει τῇ HZ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔEZ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ HEZ ἐστὶν ἴση. καὶ τὸ ΔEZ τρίγωνον τῷ HEZ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔZE γωνία τῇ ὑπὸ HZE, ἡ δὲ ὑπὸ EΔZ τῇ ὑπὸ EHZ. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔEZ τῇ ὑπὸ HEZ ἐστὶν ἴση, ἀλλ' ἡ ὑπὸ HEZ τῇ ὑπὸ ABΓ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ABΓ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ AΓB τῇ ὑπὸ ΔZE ἐστὶν ἴση, καὶ ἔτι ἡ πρὸς τῷ A τῇ πρὸς τῷ Δ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα· καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

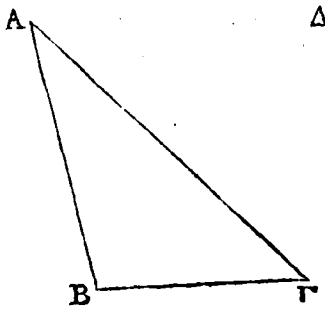
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

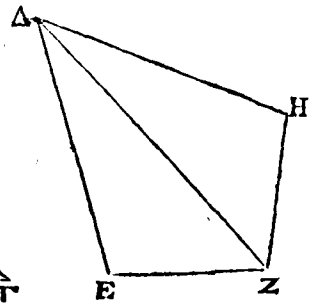
Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

ΕΣτω δύο τρίγωνα τὰ ABΓ, ΔEZ, μίαν γωνίαν τλὺ ὑπὸ BAΓ μιᾷ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ EΔZ ἴσην

ἴσλω ἔχωσι, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ ὕτως τὴν ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· λέγω ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἴσλω ἕξει τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Συνεστάτω γὰρ πρὸς μέν τῇ ΔΖ εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Δ, Ζ, ὁποτέρᾳ μὲν τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΔΗ, τῇ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἡ ὑπὸ ΔΖΗ.





Λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Η ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΗΖ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ ὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ. ἔστω δὲ καὶ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ ὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ ὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ· ἴση ἄρα ἡ ΕΔ τῇ ΔΗ, καὶ κοινὴ ἡ ΔΖ· δύο δὴ αἱ ΕΔ, ΔΖ δυσὶ ταῖς ΗΔ, ΔΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΔΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΔΖ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΕΖ βάσει τῇ ΖΗ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΔΗΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἴσαι) ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ, ἡ δὲ πρὸς τῷ Η τῇ πρὸς τῷ Ε. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴση. ἔστω δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ε ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσλω ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

habentia, circa æquales autem angulos latera proportionalia, ut BA ad AΓ ita EΔ ad ΔZ: dico triangulum ABΓ triangulo ΔEZ æquiangulum esse, & angulum quidem ABΓ habere æqualem angulo ΔEZ, angulum vero AΓB angulo ΔZE.

Constituatur enim [per 23. 1.] ad rectam lineam ΔZ, & ad puncta in ipsa Δ, Z, alterutri angulorum BAΓ, EΔZ æqualis angulus ZΔH, angulo autem AΓB æqualis ΔZH.

Reliquus igitur qui ad B [per 32. 1.] reliquo qui ad H est æqualis: ergo triangulum ABΓ triangulo ΔHZ æquiangulum est; ac propterea [per 4. 6.] ut BA ad AΓ ita est HΔ ad ΔZ. ponitur autem ut BA ad AΓ ita EΔ ad ΔZ: ut igitur EΔ ad ΔZ ita [per 11. 5.] HΔ ad ΔZ: igitur [per 9. 5.] EΔ æqualis est ipsi ΔH, & communis ΔZ: ergo duæ EΔ, ΔZ duabus HΔ, ΔZ sunt æquales, & angulus EΔZ angulo HΔZ est æqualis: basis igitur EZ [per 4. 1.] est æqualis basi ZH, triangulumque ΔEZ æquale triangulo HΔZ, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur: angulus igitur ΔZH est æqualis angulo ΔZE; angulus vero ad H angulo ad E. sed angulus ΔZH æqualis est [per constr.] angulo AΓB: angulus igitur AΓB angulo ΔZE est æqualis. ponitur autem & BAΓ angulus æqualis angulo EΔZ: ergo [per 32. 1.] & reliquus qui ad B æqualis reliquo qui ad E: æquiangulum igitur est triangulum ABΓ triangulo ΔEZ.

Quare si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, quibus homologa latera subtenduntur. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσλω ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τὰς δὲ λοιπὰς ἑκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.

Prop. VII. Theor.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, reliquorum vero utrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, circa quos latera sunt proportionalia.

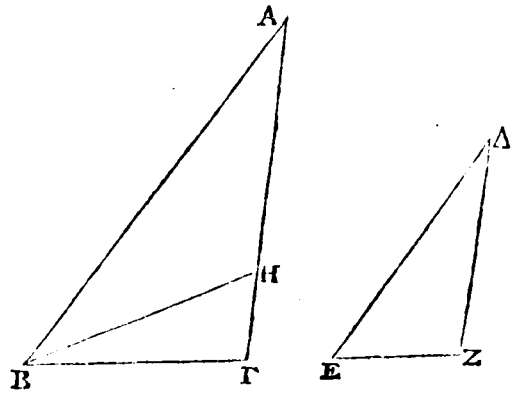
Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσλω ἔχοντα, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ὡς τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ ὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, τὰς δὲ λοιπὰς τὰς πρὸς τοῖς Γ, Ζ πρότερον ἑκατέραν ἅμα ἐλάσσονα

SInt duo triangula ABΓ, ΔEZ, unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum BAΓ angulo EΔZ æqualem, circa alios autem angulos ABΓ, ΔEZ latera proportionalia, ut sit ΔE ad EZ sicut AB ad BΓ, & reliquorum qui ad Γ, Z primo utrumque simul mi-

norem recto: dico triangulum ABΓ triangulo ΔEZ æquiangulum esse, angulumque ABΓ æqualem angulo ΔEZ, & reliquum videlicet qui ad Γ reliquo qui ad Z æqualem.

Si enim inæqualis est angulus ABΓ angulo ΔEZ, unus ipsorum major erit. sit major ABΓ, & constituatur [per 23. 1.] ad rectam lineam AB & ad punctum in ipsa B angulo ΔEZ æqualis angulus ABH.

Et quoniam angulus quidem A est æqualis angulo Δ, angulus vero ABH angulo ΔEZ; erit [per 32. 1.] reliquus AHB reliquo ΔZE æqualis: æquiangulum igitur est ABH triangulum triangulo ΔEZ; quare [per 4. 6.] ut AB ad BH sic ΔE ad EZ. ut vero ΔE ad EZ sic ponitur AB ad BΓ: ut igitur AB ad BΓ, [per 11. 5.] sic AB ad BH, ideo AB ad utramque BΓ, BH eandem habet rationem; erit igitur BΓ ipsi BH æqualis; ac propterea [per 5. 1.] angulus BHΓ est æqualis angulo BΓH. minor autem recto ponitur angulus qui ad Γ: ergo & BHΓ minor est recto, & ob id [per 13. 1.] qui ei deinceps est AHB major recto. atque ostensus est angulus AHB æqualis angulo qui ad Z: angulus igitur qui ad Z recto major est. atqui ponitur minor recto; quod est absurdum: non est igitur angulus ABΓ inæqualis angulo ΔEZ; ergo ipsi est æqualis. est autem & angulus ad A æqualis ei qui ad Δ: quare & reliquus qui ad Γ æqualis reliquo qui ad Z: æquiangulum igitur est ABΓ triangulum triangulo ΔEZ.



Sed rursus ponatur uterque angulorum qui ad Γ, Z non minor recto: dico rursus & sic triangulum ABΓ triangulo ΔEZ æquiangulum esse.

Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus BΓ æqualem ipsi BH, angulumque ad Γ angulo BHΓ æqualem. sed angulus qui ad Γ non est minor recto: non est igitur minor recto BHΓ. quare trianguli BHΓ duo anguli non sunt duobus rectis minores; quod [per 17. 1.] fieri non potest: non igitur rursus est ABΓ angulus inæqualis angulo ΔEZ; ergo æqualis. est autem & qui ad A æqualis ei qui ad Δ: reliquus igitur qui ad Γ [per 32. 1.] reliquo ad Z est æqualis; ac propterea triangulum ABΓ triangulo ΔEZ æquiangulum est.

Si igitur duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, reliquorum vero utrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, circa quos latera sunt proportionalia. quod erat demonstrandum.

ὀρθῆς· λέγω ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, καὶ λοιπὴ δηλονότι ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β, τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΒΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν Α γωνία τῇ Δ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ. ὡς δὲ ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ὑπόκειται ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ, ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τὴν ΒΓ, ΒΗ τὴν αὐτὴν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ· ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ ΒΗΓ γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ ΒΓΗ ἐστὶν ἴση. ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ὑπόκειται ἡ πρὸς τῷ Γ· ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ὀρθῆς καὶ ἡ πρὸς τῷ ΒΗΓ, ὥστε ἡ ἐφεξῆς αὐτῇ γωνία ἡ πρὸς τῷ ΑΗΒ μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. καὶ ἐδείχθη ἴση οὖσα τῇ πρὸς τῷ Ζ, καὶ ἡ πρὸς τῷ Ζ ἄρα μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. ὑπόκειται δὲ ἐλάσσων ὀρθῆς, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Α ἴση τῇ πρὸς τῷ Δ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ὑποκείσθω ἑκατέρα τῶν πρὸς τοῖς Γ, Ζ μὴ ἐλάσσων ὀρθῆς· λέγω πάλιν ὅτι καὶ οὕτως ἐστὶν ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ· ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Γ τῇ ὑπὸ ΒΗΓ ἴση ἐστίν. οὐκ ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ πρὸς τῷ Γ, οὐκ ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς οὐδὲ ἡ ὑπὸ ΒΗΓ. τριγώνου δὲ τοῦ ΒΗΓ αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν οὐκ εἰσὶν ἐλάττονες, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα πάλιν ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τὰ δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

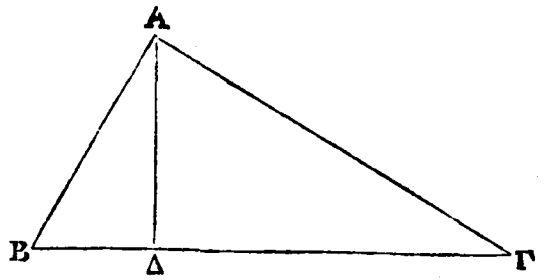
Εὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ· τὰ τρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

PROP. VIII. THEOR.

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad baſim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem ſunt triangula & toti & inter ſe ſunt ſimilia.

ΕΣτω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι ὅμοιόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ τριγώνων ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἔτι ἀλλήλοις.

Επεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ὀρθὴ γάρ ἑκατέρα, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ΑΒΓ καὶ τοῦ ΑΒΔ ἡ πρὸς τῷ Β· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΑ ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΒ ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Γ γωνίαν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΔ ὑποτείνουσαν τὴν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ, τὴν ὑπὸ ΒΑΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου. καὶ ἔτι ἡ ΑΓ τρὸς τῷ ΑΔ ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν, κοινὴν τῶν δύο τριγώνων· τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἰσογώνιόν τέ ἐστι, καὶ τὰς τρὶ τὰς ἴσας γωνίας τολδρὸς ἀνάλογον ἔχει· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τὸ ΑΔΓ τρίγωνον ὁμοιόν ἐστι τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ τριγώνων ὅλῳ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστιν.



SIT triangulum rectangulum ABΓ, rectum habens angulum BAΓ; & à puncto A ad BΓ perpendicularis ducatur AΔ: dico triangula ABΔ, AΔΓ toti triangulo ABΓ & inter ſe ſimilia eſſe.

Quoniam enim angulus BAΓ eſt æqualis angulo AΔB, rectus enim eſt uterque, & angulus qui ad B communis duobus triangulis ABΓ, ABΔ; erit [per 32. 1.] reliquus AΓB reliquo BAΔ æqualis: æquiangulum igitur eſt triangulum ABΓ triangulo ABΔ. quare [per 4. 6.] ut BΓ quæ ſubtendit angulum rectum trianguli ABΓ ad BA ſubtendentem angulum rectum trianguli ABΔ, ſic ipſa AB ſubtendens angulum qui ad Γ trianguli ABΓ ad BΔ ſubtendentem angulum æqualem angulo qui ad Γ, videlicet BAΔ ipſius ABΔ trianguli. & ſic etiam AΓ ad AΔ ſubtendentem angulum qui ad B communem duobus triangulis: ergo triangulum ABΓ triangulo ABΔ æquiangulum eſt, & circa æquales angulos latera habet proportionalia: ſimile igitur eſt [per 1. def. 6.] triangulum ABΓ triangulo ABΔ. eadem ratione demonſtrabimus etiam AΔΓ triangulum triangulo ABΓ ſimile eſſe: quare utrumque ipſorum ABΔ, AΔΓ, toti triangulo ABΓ eſt ſimile.

ΛΕΓΩ δὴ, ὅτι καὶ τὰ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ τρίγωνα.

Επεὶ γὰρ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ ἐστιν ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ πρὸς τῷ Γ ἐδείχθη ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ τρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ τὴν ΑΒΔ τριγώνου, ὑποτείνουσα τὴν ὑπὸ ΒΑΔ, πρὸς τὴν ΔΑ τοῦ ΑΔΓ τριγώνου ὑποτείνουσαν τὴν τρὸς τῷ Γ γωνίαν, οὕτω τὴν ΑΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν, τρὸς τὴν ΔΓ ὑποτείνουσαν τὴν ὑπὸ ΔΑΓ τοῦ ΑΔΓ τριγώνου, οὕτω καὶ ἔτι ἡ ΒΑ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ ΑΔΒ, πρὸς τὴν ΑΓ ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ ΑΔΓ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ.

DICO insuper triangula ABΔ, AΔΓ etiam inter ſe ſimilia eſſe.

Quoniam enim angulus BΔA rectus eſt æqualis recto AΔΓ; ſed & BAΔ oſtenſus æqualis ei qui ad Γ; erit [per 32. 1.] reliquus qui ad B reliquo ΔAΓ æqualis: æquiangulum igitur eſt triangulum ABΔ triangulo AΔΓ. ergo [per 4. 6.] ut BΔ trianguli ABΔ, ſubtendens BAΔ angulum, ad ΔA trianguli AΔΓ ſubtendentem angulum qui ad Γ, æqualem angulo BAΔ; ſic ipſa AΔ trianguli ABΔ, ſubtendens angulum qui ad B, ad ΔΓ trianguli AΔΓ ſubtendentem angulum ΔAΓ, ei qui ad B æqualem. & ſic etiam BA ſubtendens rectum angulum AΔB, ad AΓ ſubtendentem angulum rectum AΔΓ: eſt igitur [per 1. def. 6.] ABΔ triangulum ſimile triangulo AΔΓ.

Εὰν ἄρα ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Quare ſi in triangulo rectangulo ab angulo recto ad baſim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem ſunt triangula & toti & inter ſe ſunt ſimilia. quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Ex hoc manifeſtum eſt, in triangulo rectangulo perpendicularem ab angulo recto ad baſim ductam mediam proportionalem eſſe inter ſegmenta baſis: & præterea inter baſim & baſis ſegmentum utrumlibet, latus ſegmento conterminum medium eſſe proportionale.

Πόρισμα.

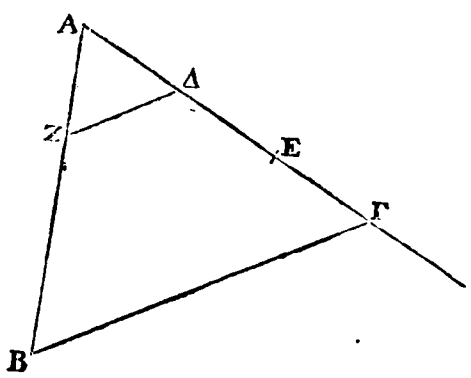
Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστι· καὶ ἔτι τῆς βάσεως καὶ ἑνὸς ὁποτερουοῦν τῶν τμημάτων ἡ πρὸς τῷ τμήματι πλευρὰ μέση ἀνάλογόν ἐστιν.

PROP. IX. PROBL.

A data recta linea imperatam partem abſcindere.

SIT data recta linea AB: oportet ab ipſa AB imperatam partem abſcindere.

Imperetur pars tertia; & ducatur à puncto A quælibet recta linea AΓ, quæ cum ipſa AB angulum quemlibet contineat; ſumaturque in AΓ quodvis punctum Δ, & ipſi AΔ [per 3. 1.] æquales ponantur ΔE, EΓ; deinde jungatur BΓ, & per Δ ipſi BΓ [per 31. 1.] parallela ducatur ΔZ.



Itaque quoniam uni laterum trianguli ABΓ, videlicet ipſi BΓ, parallela ducta eſt ZΔ; erit [per 2. 6.] ut ΓΔ ad ΔA ita BZ ad ZA. dupla autem eſt ΓΔ ipſius ΔA; ergo & BZ ipſius ZA dupla: tripla igitur eſt BA ipſius AZ.

Quare à data recta linea AB imperata pars tertia AZ abſciſſa eſt. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB· δεῖ δὴ τῆς AB τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸ τρίτον· καὶ διήχθω τις εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ A ἡ AΓ, γωνίαν περιέχουσα μετὰ τῆς AB τυχοῦσαν· καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς AΓ τὸ Δ, καὶ κείσθωσαν τῇ AΔ ἴσαι αἱ ΔE, EΓ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ BΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος ἤχθω τῇ BΓ ἡ ΔZ.

Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ABΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν BΓ ἦκται ἡ ZΔ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔA οὕτως ἡ BZ πρὸς τὴν ZA. διπλῆ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔA· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ BZ τῆς ZA· τριπλῆ ἄρα ἡ BA τῆς AZ.

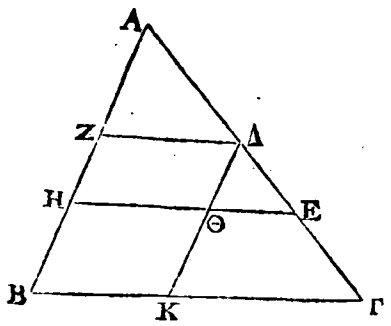
Τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς AB τὸ προσταχθὲν τρίτον μέρος ἀφῄρηται τὸ AZ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. X. PROBL.

Datam rectam lineam inſectam ſimiliter ſecare, ut data recta ſecta eſt.

SIT data recta linea inſecta AB, ſecta vero AΓ: oportet rectam lineam AB inſectam ſimiliter ſecare ut AΓ ſecta eſt.

Sit AΓ ſecta in punctis Δ, E, & ponantur ita ut angulum quemvis comprehendant, jungaturque BΓ, & per puncta Δ, E ipſi BΓ [per 31. 1.] parallelæ ducantur ΔZ, EH, per Δ vero ipſi AB ducatur parallela ΔΘK.



Parallelogrammum igitur eſt utrumque ipſorum ZΘ, ΘB: ac propterea [per 34. 1.] ΔΘ eſt æqualis ZH; ΘK vero ipſi HB. & quoniam uni laterum trianguli ΔKΓ, ipſi ſcilicet KΓ, parallela ducta eſt ΘE; erit [per 2. 6.] ut ΓE ad EΔ ita KΘ ad ΘΔ. æqualis autem eſt KΘ quidem ipſi BH; ΘΔ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄτμητον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ ὁμοίως τμηθῆναι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμητος ἡ AB, ἡ δὲ τετμημένη ἡ AΓ· δεῖ δὴ τὴν AB ἄτμητον τῇ AΓ τετμημένῃ ὁμοίως τμηθῆναι.

Εἰλήφθω τετμημένη ἡ AΓ κατὰ τὰ Δ, E σημεῖα, καὶ κείσθωσαν ὥστε γωνίαν τυχοῦσαν περιέχειν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ BΓ, καὶ διὰ τῶν Δ, E τῇ BΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΔZ, EH, διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ AB παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΘK.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ZΘ, ΘB· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΔΘ τῇ ZH, ἡ δὲ ΘK τῇ HB. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΔKΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν KΓ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΘE· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓE πρὸς τὴν EΔ οὕτως ἡ KΘ πρὸς τὴν ΘΔ. ἴση δὲ ἡ μὲν KΘ τῇ BH, ἡ δὲ ΘΔ

τῇ

τῇ ΗΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ. πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΗΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΗ ἦκται ἡ ΖΔ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ· ἔστιν ἄρα ὡς μὲν ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ, ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ.

Η ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμητος ἡ ΑΒ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ τῇ ΑΓ ὁμοίως τέτμηται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

vero ipſi HZ: eſt igitur ut ΓΕ ad ΕΔ ita ΒΗ ad HZ. rurſus, quoniam uni laterum trianguli ΑΗΕ, nimirum ipſi ΕΗ, parallela ducta eſt ΖΔ; ut ΕΔ ad ΔΑ ita erit HZ ad ZA. ſed oſtenſum eſt ut ΓΕ ad ΕΔ ita eſſe ΒΗ ad HZ: ut igitur ΓΕ ad ΕΔ ita eſt ΒΗ ad HZ, & ut ΒΔ ad ΔΑ ita HZ ad ZA.

Ergo data recta linea inſecta ΑΒ ſimiliter ſecta eſt ut data recta ΑΓ. quod erat faciendum

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

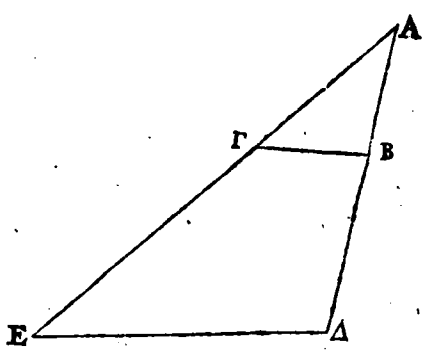
Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

PROP. XI. PROBL.

Duabus datis rectis lineis, tertiam proportionalem invenire.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ, καὶ κείσθωσαν γωνίαν περιέχουσαι τυχοῦσαν· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΑΓ τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἐκβεβλήθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΑΓ ἐπὶ τὰ Δ, Ε σημεῖα, καὶ κείσθω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ ΔΕ.



Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΑΔΕ, παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΔΕ ἦκται ἡ ΒΓ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ. ἴση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΑΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΑΓ, τρίτη ἀνάλογον αὐταῖς προσεύρηται ἡ ΓΕ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Producantur enim ΑΒ, ΑΓ ad puncta Δ, Ε, ponaturque ipſi ΑΓ æqualis ΒΔ, & jungatur ΒΓ, ducaturque [per 31. 1.] per Δ ipſi ΒΓ parallela ΔΕ.

Quoniam igitur uni laterum trianguli ΑΔΕ, videlicet ipſi ΔΕ, parallela ducta eſt ΒΓ; erit [per 2. 6.] ut ΑΒ ad ΒΔ ita ΑΓ ad ΓΕ. æqualis autem eſt ΒΔ ipſi ΑΓ: ut igitur ΑΒ ad ΑΓ ita eſt ΑΓ ad ΓΕ.

Quare duabus datis rectis lineis ΑΒ, ΑΓ, tertia proportionalis inventa eſt ΓΕ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

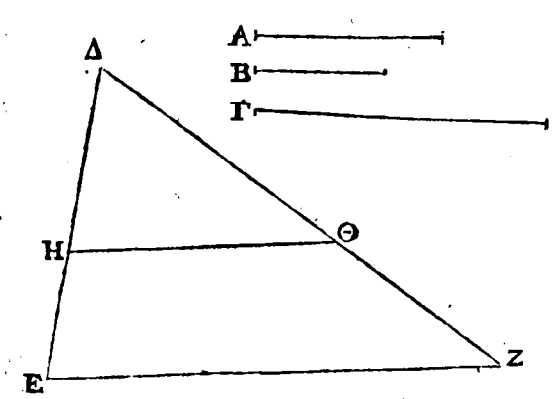
Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

PROP. XII. PROBL.

Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem invenire.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ τῶν Α, Β, Γ εὐθειῶν τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἐκκείσθωσαν δύο εὐθεῖαι, αἱ ΔΕ, ΔΖ, γωνίαν περιέχουσαι τυχοῦσαν τὴν ὑπὸ ΕΔΖ· καὶ κείσθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΗ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΗΕ, καὶ ἔτι τῇ Γ ἴση ἡ ΔΘ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Η τῇ ΗΘ, παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ ΖΕΗ.



Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΔΕΖ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΖ ἦκται ἡ ΗΘ, ἔστιν ἄρα ὡς ΔΗ πρὸς τὴν ΗΕ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΖ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΔΗ τῇ Α, ἡ δὲ ΗΕ τῇ Β, ἡ δὲ ΔΘ τῇ Γ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν ΘΖ.

Exponantur duæ rectæ lineæ ΔΕ, ΔΖ, angulum quemvis ΕΔΖ comprehendentes; & ponatur ipſi quidem Α æqualis ΔΗ, ipſi vero Β æqualis ΗΕ, & ipſi Γ æqualis ΔΘ; junctaque ΗΘ, per Ε ipſi parallela ducatur ΕΖ.

Itaque quoniam uni laterum trianguli ΔΕΖ, nimirum ipſi ΕΖ, parallela ducta eſt ΗΘ; erit [per 2. 6.] ut ΔΗ ad ΗΕ ita ΔΘ ad ΘΖ. eſt autem ΔΗ ipſi Α æqualis, ΗΕ vero æqualis Β, & ΔΘ æqualis Γ: ut igitur Α ad Β ita Γ ad ΘΖ.

Quare

Quare datis tribus rectis lineis A, B, Γ, quarta proportionalis inventa est Θ Z. quod erat faciendum.

Τριῶν ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν Α, Β, Γ, τετάρτη ἀνάλογον συνεστήσηται ἡ Θ Ζ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XIII. Probl.

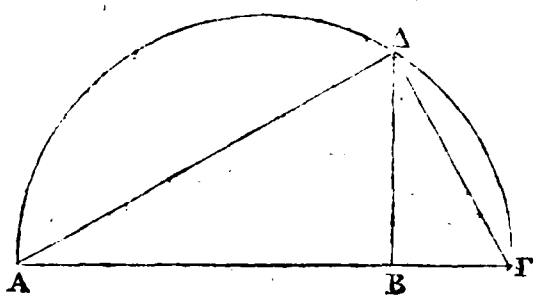
Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem invenire.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, μέσην ἀνάλογον συνεστήσασθαι.

Sint datæ duæ rectæ lineæ A B, B Γ: oportet inter ipsas mediam proportionalem invenire.

Ponantur in directum, & super ipsa A Γ describatur semicirculus A Δ Γ, ducaturque [per 11. 1.] à puncto B ipsi A Γ ad rectos angulos B Δ, & A Δ, Δ Γ jungantur.



Quoniam igitur angulus A Δ Γ est in semicirculo, is [per 31. 3.] rectus est. & quoniam in triangulo rectangulo A Δ Γ ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est Δ B; erit [per cor. 8. 6.] Δ B media proportionalis inter segmenta basis A B, B Γ.

Duabus igitur datis rectis lineis A B, B Γ, media proportionalis inventa est Δ B. quod erat faciendum.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, αἱ Α Β, Β Γ· δεῖ δὴ τῶν Α Β, Β Γ μέσην ἀνάλογον συνστήσασθαι.

Κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς Α Γ ἡμικύκλιον τὸ Α Δ Γ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ Α Γ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ Β Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Α Δ, Δ Γ.

Καὶ ἐπεὶ ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ Α Δ Γ, ὀρθή ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ Α Δ Γ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ Δ Β· ἡ Δ Β ἄρα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν Α Β, Β Γ μέση ἀνάλογόν ἐστιν.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν Α Β, Β Γ, μέση ἀνάλογον συνεστάθη ἡ Δ Β. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

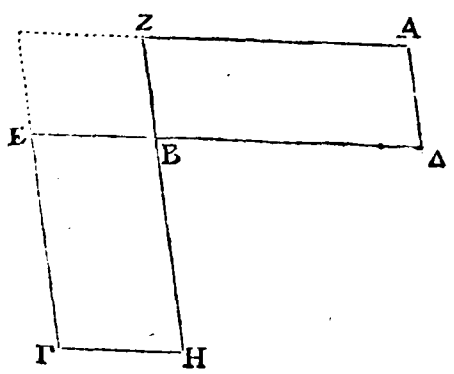
Prop. XIV. Probl.

Parallelogrammorum æqualium & unum angulum uni æqualem habentium reciproce proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos: & quorum parallelogrammorum unum angulum uni æqualem habentium reciproce proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa inter se sunt æqualia.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Τῶν ἴσων τε καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἷς περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν παραλληλογράμμων, μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἷς περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Sint æqualia parallelogramma A B, B Γ, æquales habentia angulos ad B, & ponantur in directum Δ B, B E; ergo [per 14. 1.] & in directum erunt Z B, B H: dico parallelogrammorum A B, B Γ latera, quæ sunt circa æquales angulos, esse reciproce proportionalia; hoc est ut Δ B ad B E ita esse H B ad B Z.



Compleatur enim parallelogrammum Z B.

Et quoniam parallelogrammum A B æquale est parallelogrammo B Γ, est autem Z B parallelogrammum aliud: erit [per 7. 5.] ut A B ad Z B ita B Γ ad Z B. sed [per 1. 6.] ut A B quidem ad Z B ita est Δ B ad B E, ut autem B Γ ad Z B ita H B ad B Z: erit igitur [per 11. 5.] ut Δ B ad B E ita

Ἔστω ἴσα παραλληλόγραμμα τὰ Α Β, Β Γ, ἴσας ἔχοντα τὰς πρὸς τῷ Β γωνίας, καὶ κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας αἱ Δ Β, Β Ε, ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ Ζ Β, Β Η· λέγω ὅτι τῶν Α Β, Β Γ ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τοῦτ' ἔστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ Δ Β πρὸς τὴν Β Ε οὕτως ἡ Η Β πρὸς τὴν Β Ζ.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὸ Ζ Ε παραλληλόγραμμον.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ Α Β παραλληλόγραμμον τῷ Β Γ παραλληλογράμμῳ, ἄλλο δέ τί ἐστι τὸ Ζ Ε· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α Β πρὸς τὸ Ζ Ε οὕτως τὸ Β Γ πρὸς τὸ Ζ Ε. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ Α Β πρὸς τὸ Ζ Ε οὕτως ἡ Δ Β πρὸς τὴν Β Ε, ὡς δὲ τὸ Β Γ πρὸς τὸ Ζ Ε οὕτως ἡ Η Β πρὸς τὴν Β Ζ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Δ Β πρὸς τὴν Β Ε οὕτως ἡ

ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ. τῶν ἄρα ΑΒ, ΒΓ παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

ΑΛΛΑ δὴ ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ᾗ ἔστω ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ οὕτως τὸ ΒΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΕ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ οὕτως τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ.

Τῶν ἄρα ἴσων τε καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν παραλληλογράμμων, μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

HB ad BZ. ergo parallelogrammorum AB, BΓ latera, quæ circum æquales angulos, ſunt reciproce proportionalia.

SINT autem latera, quæ circum æquales angulos, reciproce proportionalia; ſitque ut ΔB ad BE ita HB ad BZ: dico parallelogrammum AB eſſe æquale parallelogrammo BΓ.

Quoniam enim eſt ut ΔB ad BE ita HB ad BZ, ut autem ΔB ad BE ita [per 1. 6.] AB parallelogrammum ad parallelogrammum ZE, & ut HB ad BZ ita BΓ parallelogrammum ad parallelogrammum ZE; erit [per 11. 5.] ut AB ad ZE ita BΓ ad ZE: æquale igitur eſt [per 9. 5.] AB parallelogrammum parallelogrammo BΓ.

Ergo parallelogrammorum æqualium & unum angulum uni æqualem habentium reciproce proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos: & quorum parallelogrammorum unum angulum uni æqualem habentium reciproce proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos, illa inter ſe ſunt æqualia. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

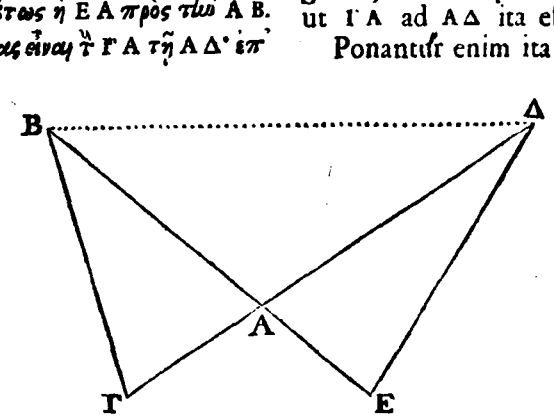
Τῶν ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν, μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις.

PROP. XV. THEOR.

Triangulorum æqualium & unum angulum uni æqualem habentium reciproce proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos: & quorum triangulorum unum angulum uni æqualem habentium reciproce proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos, illa inter ſe ſunt æqualia.

Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΑΔΕ, μίαν μιᾷ ἴσην ἔχοντα γωνίαν, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΔΑΕ· λέγω ὅτι τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τοῦτέστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ.

Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΓΑ τῇ ΑΔ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΑ τῇ ΑΒ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ.



Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΔΕ τριγώνῳ, ἄλλο δέ τί ἐστι τὸ ΑΒΔ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΑΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον οὕτως τὸ ΑΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΑΒ πρὸς τὸ ΒΑΔ οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, ὡς δὲ τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ· τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ τριγώνων ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

ΑΛΛΑ δὴ ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ πλευραὶ τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ τριγώνων, ᾗ ἔστω ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΔΕ τριγώνῳ.

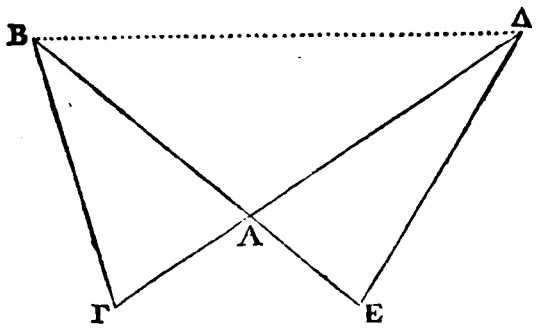
SINT æqualia triangula ABΓ, AΔE, unum angulum uni æqualem habentia, angulum ſcilicet BAΓ angulo ΔAE: dico triangulorum ABΓ, AΔE latera, quæ circum æquales angulos, eſſe reciproce proportionalia, hoc eſt ut ΓA ad AΔ ita eſſe EA ad AB.

Ponantur enim ita ut in directum ſit ΓA ipſi AΔ: ergo [per 14. 1.] & EA ipſi AB in directum erit. & jungatur BΔ.

Quoniam igitur triangulum ABΓ æquale eſt triangulo AΔE, eſt autem aliud triangulum ABΔ; erit [per 7. 5.] ut ΓAB triangulum ad triangulum BAΔ ita triangulum AΔE ad triangulum BAΔ. ſed [per 1. 6.] ut triangulum quidem ΓAB ad BAΔ triangulum ita ΓA ad AΔ, ut autem triangulum EAΔ ad ipſum BAΔ ita EA ad AB: erit igitur [per 11. 5.] ΓA ad AΔ ut EA ad AB: quare triangulorum ABΓ, AΔE latera, quæ circum æquales angulos, ſunt reciproce proportionalia.

SINT autem latera triangulorum ABΓ, AΔE reciproce proportionalia; & ſit ut ΓA ad AΔ ita EA ad AB: dico triangulum ABΓ triangulo AΔE eſſe æquale.

Juncta enim rurſus BΔ, quoniam ut ΓA ad AΔ ita eſt EA ad AB; ut autem ΓA ad AΔ ita [per 1. 6.] ABΓ triangulum ad triangulum BAΔ, & ut EA ad AB ita triangulum EAΔ ad BAΔ triangulum: erit [per 11. 5.] ut ABΓ triangulum ad triangulum BAΔ ita triangulum EAΔ ad BAΔ triangulum: utrumque igitur triangulorum ABΓ, AΔE ad triangulum BAΔ eandem habet rationem; ac propterea [per 9. 5.] æquale eſt ABΓ triangulum triangulo EAΔ.



Æqualium igitur & unum angulum uni æqualem habentium triangulorum reciproce proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos: & quorum triangulorum unum angulum uni æqualem habentium reciproce proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos, illa inter ſe ſunt æqualia. quod erat demonſtrandum.

Επιζευχθείσης γὰρ πάλιν τὴν ΒΔ, ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον· ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒΓ, ΑΔΕ πρὸς τὸ ΒΑΔ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΑΔ τριγώνῳ.

Τῶν ἄρα ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν, μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν, τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἐκεῖνα ἴσα εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XVI. Theor.

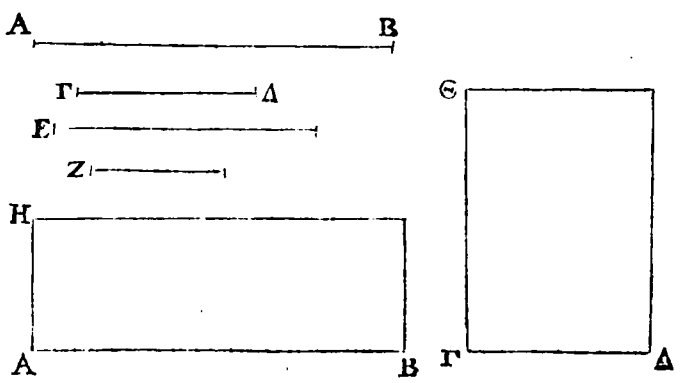
Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum ſub extremis comprehenſum æquale eſt rectangulo quod ſub mediis comprehenditur: & ſi rectangulum ſub extremis comprehenſum æquale fuerit ei quod ſub mediis comprehenditur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις'.

Εὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· καὶ ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

SInt quatuor rectæ lineæ proportionales AB, ΓΔ, E, Z; ut quidem AB ad ΓΔ ita E ad Z: dico rectangulum comprehenſum ſub rectis lineis AB, Z æquale eſſe ei quod ſub ipſis ΓΔ, E comprehenditur.

Ducantur enim [per 11. 1.] à punctis A, Γ ipſis AB, ΓΔ ad rectos angulos AH, ΓΘ; ponaturque ipſi Z æqualis AH; ipſi vero E æqualis ΓΘ; & compleantur BH, ΔΘ parallelogramma.



Quoniam igitur eſt ut AB ad ΓΔ ita E ad Z; eſt autem E quidem æqualis ΓΘ, & Z ipſi AH; erit [per 7. 5.] ut AB ad ΓΔ ita ΓΘ ad AH: parallelogrammorum igitur BH, ΔΘ reciproce proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos. quorum autem æquiangulorum parallelogrammorum reciproce proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos,

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ, Ε, Ζ ἀνάλογον, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Α, Γ σημείων ταῖς ΑΒ, ΓΔ εὐθείαις πρὸς ὀρθὰς αἱ ΑΗ, ΓΘ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Ζ ἴση ἡ ΑΗ, τῇ δὲ Ε ἴση ἡ ΓΘ, καὶ συμπεπληρώσθωσαν τὰ ΒΗ, ΔΘ παραλληλόγραμμα.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ, ἴση δὲ ἡ μὲν Ε τῇ ΓΘ, ἡ δὲ Ζ τῇ ΑΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΑΗ· τῶν ΒΗ, ΔΘ παραλληλογράμμων ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ὧν δὲ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας

γωνίας, ὅτα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΔΘ παραλληλογράμμῳ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τ ΑΒ, Ζ, ἴση γὰρ ἡ ΑΗ τῇ Ζ· τὸ δὲ ΔΘ τὸ ὑπὸ τ ΓΔ, Ε παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον, ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τ ΑΒ, Ζ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, Ε παραλληλογράμμῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ τ ΑΒ, Ζ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ ΓΔ, Ε παραλληλογράμμῳ ὀρθογωνίῳ· λέγω ὅτι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τ ΑΒ, Ζ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τ ΓΔ, Ε, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τ ΑΒ, Ζ τὸ ΒΗ, ἴση γὰρ τῇ Ζ ἡ ΑΗ· τὸ δὲ ὑπὸ τ ΓΔ, Ε τὸ ΔΘ, ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ Ε· τὸ ἄρα ΒΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΘ. καί εἰσιν ἰσογώνια. τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΑΗ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΓΘ τῇ Ε, ἡ δὲ ΑΗ τῇ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τ ἄκρων παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τ μέσων παραλληλογράμμῳ ὀρθογωνίῳ· καὶ εἰ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τ μέσων παραλληλογράμμῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ea [per 14. 6.] inter ſe ſunt æqualia; parallelogrammum igitur BH æquale eſt parallelogrammo ΔΘ. eſt autem parallelogrammum BH ſub rectis lineis AB, Z comprehenſum, eſt enim AH æqualis Z; parallelogrammum vero ΔΘ comprehenditur ſub ipſis ΓΔ, E, cum ΓΘ ipſi E ſit æqualis: rectangulum igitur comprehenſum ſub rectis AB, Z eſt æquale ei quod ſub ipſis ΓΔ, E comprehenditur.

Sed rectangulum comprehenſum ſub AB, Z ſit æquale ei quod comprehenditur ſub ipſis ΓΔ, E: dico quatuor rectas lineas proportionales eſſe, videlicet ut AB ad ΓΔ ita E ad Z.

Iiſdem enim conſtructis, quoniam rectangulum comprehenſum ſub rectis AB, Z eſt æquale ei quod ſub rectis ΓΔ, E comprehenditur, eſt autem rectangulum BH comprehenſum ſub rectis AB, Z, etenim AH eſt æqualis Z; comprehenſum vero ſub rectis ΓΔ, E eſt rectangulum ΔΘ, quod ΓΘ ipſi E ſit æqualis: erit parallelogrammum BH æquale parallelogrammo ΔΘ; & ſunt æquiangula. æqualium autem & æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos [per 14. 6.] ſunt reciproce proportionalia: quare ut AB ad ΓΔ ita ΓΘ ad AH. æqualis autem eſt ΓΘ ipſi E, & AH ipſi Z: ut igitur AB ad ΓΔ ita E ad Z.

Ergo ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum ſub extremis comprehenſum æquale eſt ei quod ſub mediis comprehenditur: & ſi rectangulum ſub extremis comprehenſum æquale fuerit ei quod ſub mediis comprehenditur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· καὶ εἰ τὸ ὑπὸ τ ἄκρων παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

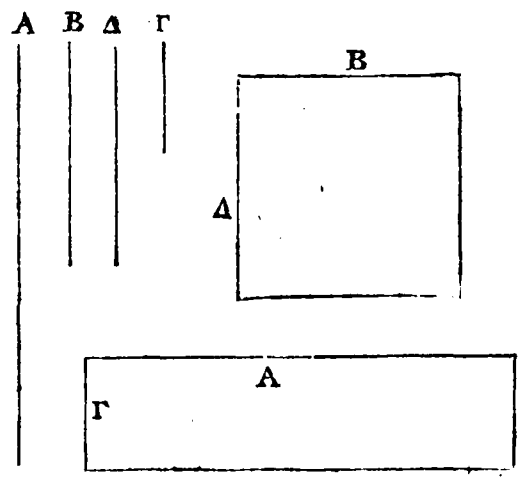
Prop. XVII. Theor.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum ſub extremis comprehenſum æquale eſt ei quod à media fit quadrato: & ſi rectangulum ſub extremis comprehenſum æquale fuerit ei quod à media fit quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt.

Ἐστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τ Α, Γ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τ Β τετραγώνῳ.

Κείσθω τῇ Β ἴση ἡ Δ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ Β τῇ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. ἐὰν ᾖ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τ ἄκρων παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τ μέσων παραλ-

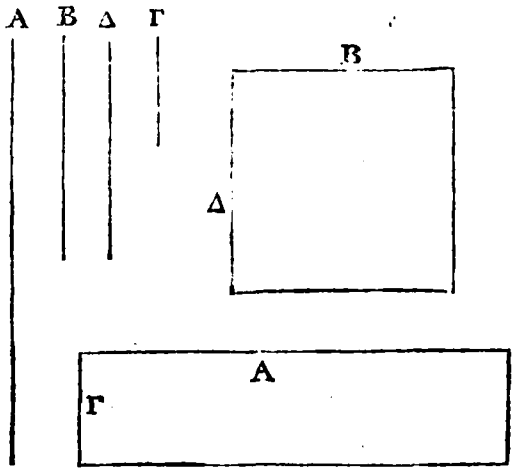


Sint tres rectæ lineæ proportionales A, B, Γ, ut quidem A ad B ita B ad Γ: dico rectangulum comprehenſum ſub rectis A, Γ æquale eſſe ei quod à media B fit quadrato.

Ponatur ipſi B æqualis Δ.

Et quoniam ut A ad B ita B ad Γ, æqualis autem eſt B ipſi Δ; erit ut A ad B ita Δ ad Γ. ſi autem quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum ſub extremis comprehenſum [per 16. 6.] eſt æquale ei quod ſub mediis comprehenditur

henditur: ergo rectangulum comprehenſum ſub rectis A, Γ æquale eſt ei quod comprehenditur ſub rectis B, Δ. ſed rectangulum comprehenſum ſub rectis B, Δ eſt æquale quadrato quod fit ex ipſa B; etenim B eſt æqualis Δ: rectangulum igitur comprehenſum ſub rectis A, Γ eſt æquale ei quod ex B fit quadrato.



SED rectangulum comprehenſum ſub rectis A, Γ æquale ſit quadrato quod fit ex B: dico ut A ad B ita eſſe B ad Γ.

Iiſdem enim conſtructis, quoniam rectangulum comprehenſum ſub rectis A, Γ æquale eſt quadrato quod fit ex B; at quadratum quod fit ex B eſt rectangulum quod ſub ipſis B, Δ comprehenditur, eſt enim B æqualis ipſi Δ: erit rectangulum comprehenſum ſub rectis A, Γ æquale ei quod ſub rectis B, Δ comprehenditur. ſi autem rectangulum ſub extremis comprehenſum æquale fuerit ei quod ſub mediis comprehenditur, quatuor rectæ lineæ [per 16. 6.] proportionales erunt: eſt igitur ut A ad B ita Δ ad Γ. ſed B æqualis eſt Δ: ut igitur A ad B ita B ad Γ.

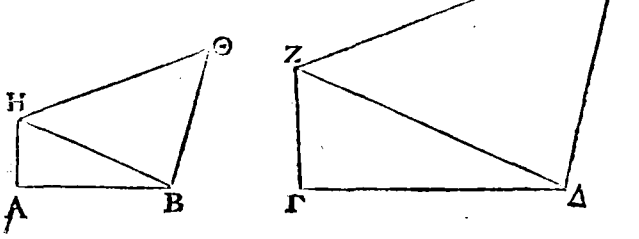
Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum ſub extremis comprehenſum eſt æquale ei quod à media fit quadrato: & ſi rectangulum ſub extremis comprehenſum æquale fuerit ei quod à media fit qnadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt. quod erat demonſtrandum.

PROP. XVIII. PROBL.

A data recta linea rectilineo ſimile & ſimiliter poſitum rectilineum deſcribere.

SIT data recta linea AB, datum autem rectilineum ΓE: oportet à recta linea AB rectilineo ΓE ſimile & ſimiliter poſitum rectilineum deſcribere.

Jungatur ΔZ; & [per 23. 1.] ad rectam lineam AB & ad puncta in ipſâ A, B angulo quidem Γ æqualis angulus conſtituatur HAB, angulo autem ΓΔZ angulus ABH: reliquus igitur ΓZΔ angulus [per 32. 1.] reliquo AHB eſt æqualis: ergo æquiangulum eſt ZΓΔ triangulum triangulo HAB; ac propterea [per 4. 6.] ut ZΔ ad HB ita ZΓ ad HA & ΓΔ ad



χομένῳ ὀρθογωνίῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν B, Δ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν B, Δ τῷ ἀπὸ τῆς B ἐστὶν ἴσον, ἴση γὰρ ἡ B τῇ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς B τετραγώνῳ.

ΑΛΛΑ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν A, Γ ἴσον ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς B· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Γ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν A, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς B, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς B τῷ ὑπὸ τῶν B, Δ, ἴση γὰρ ἡ B τῇ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ B, Δ. ἐὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. ἴση δὲ ἡ B τῇ Δ· ὡς ἄρα ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Γ.

Ἐὰν ἄρα τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· κἂν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Ἀπὸ τῆ δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

ΕΣτω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΓE· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς AB εὐθείας τῷ ΓE εὐθυγράμμῳ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κειμένον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΔZ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς A, B τῇ μὲν πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ ἡ ὑπὸ HAB ἴση, τῇ δὲ ὑπὸ ΓΔZ ἡ ὑπὸ ABH· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓZΔ λοιπῇ τῇ ὑπὸ AHB ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ZΓΔ τρίγωνον τῷ HAB τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ZΔ πρὸς τὴν HB οὕτως ἡ ZΓ πρὸς τὴν HA καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν AB.

ΑΒ. πάλιν, συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΗ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Β, Η τῇ μὲν ὑπὸ ΔΖΕ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΗΘ, τῇ δὲ ὑπὸ ΖΔΕ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΒΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Ε λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Θ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΔΕ τρίγωνον τῷ ΗΒΘ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ καὶ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ οὕτως ἦν Γ Δ πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἔτι ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΓΖΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΗΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΗΘ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΖΕ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΒΘ ἐστὶν ἴση, ἔστι δὲ καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ Γ τῇ πρὸς τῷ Α ἴση, ἡ δὲ πρὸς τῷ Ε τῇ πρὸς τῷ Θ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΘ τῷ ΓΕ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας αὐτῶν πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΘ εὐθυγράμμον τῷ ΓΕ εὐθυγράμμῳ.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΓΕ ὁμοίων τε καὶ ὁμοίως κειμένων εὐθυγράμμων ἀναγέγραπται τὸ ΑΘ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

AB. rursus, constituatur ad rectam lineam BH & ad puncta in ipsa B, H angulo quidem ΔZE æqualis angulus BHΘ, angulo autem ZΔE æqualis HBΘ: ergo reliquus qui ad E reliquo qui ad Θ est æqualis: æquiangulum igitur est triangulum ZΔE triangulo HBΘ: quare [per 4. 6.] ut ZΔ ad HB ita ZE ad HΘ & EΔ ad ΘB. ostensum autem est & ut ZΔ ad HB ita esse ZΓ ad HA & ΓΔ ad AB: & igitur [per 11. 5.] ut ZΓ ad HA ita ΓΔ ad AB & ZE ad HΘ, & adhuc EΔ ad ΘB. itaque quoniam angulus ΓZΔ est [per constr.] æqualis angulo AHB, angulus autem ΔZE angulo BHΘ: erit totus ΓZE angulus toti AHΘ æqualis. eadem ratione & ΓΔE est æqualis ipsi ABΘ, & præterea angulus ad Γ angulo ad A æqualis, angulus vero ad E angulo ad Θ; æquiangulum igitur est AΘ ipsi ΓE, & latera circum æquales angulos habet proportionalia: ergo [per 1. def. 6.] rectilineum AΘ rectilineo ΓB simile erit.

A data igitur recta linea AB dato rectilineo ΓE simile & similiter positum rectilineum AΘ descriptum est. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

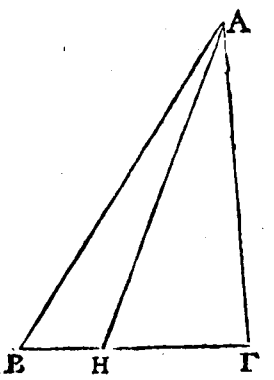
Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Prop. XIX. Theor.

Similia triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

Ἔστω ὅμοια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἴσην ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν τῇ πρὸς τῷ Ε, ὡς μὲν τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὥστε ὁμόλογον εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

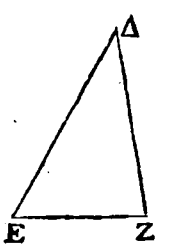
Εἰλήφθω γὰρ τῶν ΒΓ, ΕΖ τρίτη ἀνάλογον ἡ ΒΗ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΑ.



Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἀλλ' ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· τῶν ΑΒΗ, ΔΕΖ τριγώνων ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ὧν δὲ, μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶ κἀκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν ὦσιν, ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην διπλασίονα λόγον

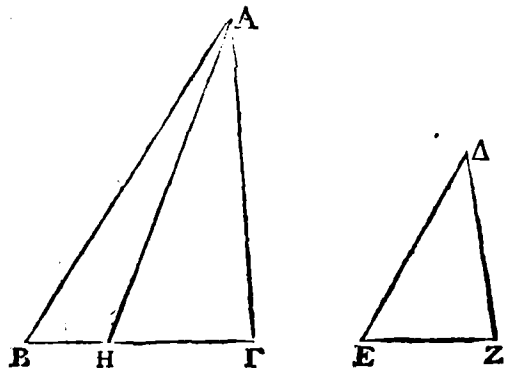
Sunt similia triangula ABΓ, ΔEZ, habentia angulum ad B æqualem angulo ad E; & sit ut AB ad BΓ ita ΔE ad EZ, ita ut latus BΓ homologum sit [per 12. def. 5.] lateri EZ: dico ABΓ triangulum ad triangulum ΔEZ duplicatam rationem habere ejus quam habet BΓ ad EZ.

Sumatur enim [per 11. 6.] ipsis BΓ, EZ tertia proportionalis BH, ut sit sicut BΓ ad EZ ita EZ ad BH: & jungatur HA.



Quoniam igitur ut AB ad BΓ ita est ΔE ad EZ; erit permutando [per 16. 5.] ut AB ad ΔE ita BΓ ad EZ. sed ut BΓ ad EZ ita EZ ad BH, & igitur [per 11. 5.] ut AB ad ΔE ita EZ ad BH: quare triangulorum ABH, ΔEZ latera, quæ circum æquales angulos, reciproce sunt proportionalia. quorum autem triangulorum, unum angulum uni æqualem habentium, latera, quæ circum æquales angulos, reciproce sunt proportionalia, ea [per 15. 6.] inter se sunt æqualia: æquale igitur est ABH triangulum triangulo ΔEZ. & quoniam est ut BΓ ad EZ ita EZ ad BH; si autem tres rectæ lineæ proportionales sint [per 10. def. 5.] prima ad tertiam duplicatam rationem

habet ejus quam habet ad ſecundam; habebit ΒΓ ad ΒΗ duplicatam rationem ejus quam habet ΒΓ ad ΕΖ. ut autem ΒΓ ad ΒΗ ita [per 1. 6.] ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΑΒΗ: ergo & ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΑΒΗ duplicatam rationem habet ejus quam habet ΒΓ ad ΕΖ. eſt autem ΑΒΗ triangulum triangulo ΔΕΖ æquale: & igitur [per 7. 5.] triangulum ΑΒΓ ad triangulum ΔΕΖ duplicatam rationem habebit ejus quam habet ΒΓ ad ΕΖ.



Similia igitur triangula inter ſe ſunt in duplicata ratione laterum homologorum. quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam ita eſſe triangulum quod fit à prima ad triangulum à ſecunda ſimile & ſimiliter deſcriptum: quoniam oſtenſum eſt ut ΓΒ ad ΒΗ ita ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΑΒΗ, hoc eſt ad triangulum ΔΕΖ.

Prop. XX. Theor.

Similia polygona in ſimilia triangula dividuntur & numero æqualia & homologa totis: & polygonum ad polygonum duplicatam rationem habet ejus quam latus homologum habet ad latus homologum.

Sint ſimilia polygona ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, & ſit latus ΑΒ homologum ipſi ΖΗ: dico polygona ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ in ſimilia triangula dividi & numero æqualia & homologa totis; & polygonum ΑΒΓΔΕ ad polygonum ΖΗΘΚΛ duplicatam rationem habere ejus quam habet ΑΒ ad ΖΗ.

Jungantur ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

Et quoniam ſimile eſt ΑΒΓΔΕ polygonum polygono ΖΗΘΚΛ; angulus ΒΑΕ angulo ΗΖΛ eſt æqualis: atque eſt ut ΒΑ ad ΑΕ ita ΗΖ ad ΖΛ. quoniam igitur ΑΒΕ, ΖΗΛ ſunt duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia; erit [per 6. 6.] triangulum ΑΒΕ triangulo ΖΗΛ æquiangulum; ergo [per 4. 6.] & ſimile; angulus igitur ΑΒΕ æqualis eſt angulo ΖΗΛ. eſt autem & totus ΑΒΓ angulus æqualis toti ΖΗΘ, propter ſimilitudinem polygonorum: ergo reliquus ΕΒΓ reliquo ΛΗΘ eſt æqualis. & quoniam ob ſimilitudinem triangulorum ΑΒΕ, ΖΗΛ eſt ut ΕΒ ad ΒΑ ita ΛΗ ad ΗΖ; ſed & propter ſimilitudinem polygonorum ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΖΗ ad

ἔχειν λέγεται ἥπερ πρὸς τὴν δευτέραν· ἡ ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΒΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ τρίγωνον· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἴσον δὲ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Τὰ ἄρα ὅμοια τρίγωνα τὰς ἀλλήλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τρίγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ἐπείπερ ἐδείχθη, ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ τρίγωνον, τουτέστι τὸ ΔΕΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἰς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις· καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἔστω ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ ΑΒ τῇ ΖΗ· λέγω ὅτι τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ πολύγωνα εἰς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ, ΗΛ, ΛΘ.

Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον τῷ ΖΗΘΚΛ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΛ· καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΛ. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΕ, ΖΗΛ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ, ὥστε καὶ ὅμοιον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΛ. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΗΘ ἴση, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΒΓ γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΛΗΘ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΕ, ΖΗΛ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς τὴν ΗΖ, ἀλλὰ μὴν καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς τὴν

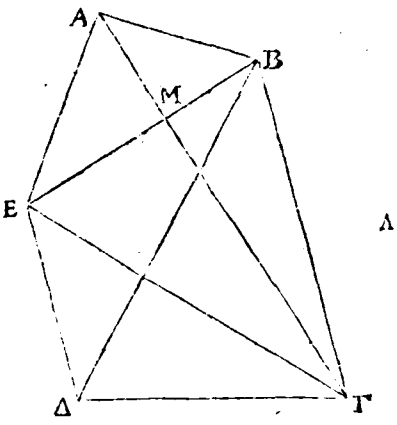
ΗΘ·

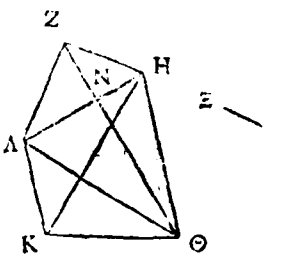
ΗΘ· διὸσ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ περὶ τὰς ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΒΓ, ΛΗΘ αἱ πλευραὶ ἀνάλογον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ, ὥστε καὶ ὅμοιον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΓΔ τρίγωνον ὁμοιόν ἐστι τῷ ΛΘΚ τριγώνῳ· τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ εἰς τε ὅμοια τρίγωνα διήρηται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος.

ΑΕΓΩ ὅτι καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις· τουτέστιν, ὥστε ἀνάλογον εἶναι τὰ τρίγωνα, καὶ ἡγούμενα μὲν εἶναι τὰ ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΔ, ἑπόμενα δὲ αὐτῶν τὰ ΖΗΛ, ΛΗΘ, ΛΘΚ, καὶ ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΖΘ.

Καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΘ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΘ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΗΘ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΗΖΘ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΜ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΝ, ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΜ τῇ ὑπὸ ΖΗΝ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΜΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΖΝΗ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΜ τρίγωνον τῷ ΖΗΝ τριγώνῳ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ ΒΜΓ τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ ΗΝΘ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστίν, ὡς μὲν ἡ ΑΜ πρὸς τὴν ΜΒ οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς τὴν ΝΗ, ὡς δὲ ἡ ΒΜ πρὸς τὴν ΜΓ οὕτως ἡ ΗΝ πρὸς τὴν ΝΘ· ὥστε καὶ διὸσ, ὡς ἡ ΑΜ πρὸς τὴν ΜΓ οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς τὴν ΝΘ. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΜ πρὸς τὴν ΜΓ οὕτως τὸ ΑΒΜ τρίγωνον πρὸς τὸ ΜΒΓ, καὶ τὸ ΑΜΕ πρὸς ΕΜΓ, πρὸς ἀλληλα γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις· καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὡς ἄρα τὸ ΑΜΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΜΓ οὕτως τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΓΒΕ. ἀλλ' ὡς τὸ ΑΜΒ πρὸς τὸ ΒΜΓ οὕτως ἡ ΑΜ πρὸς τὴν ΜΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΜ πρὸς τὴν ΜΓ οὕτως τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΒΓ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΖΝ πρὸς τὴν ΝΘ οὕτως τὸ ΖΗΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον. καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΜ πρὸς τὴν ΜΓ οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς τὴν ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΒΓ τρίγωνον οὕτως τὸ ΖΗΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΛ τρίγωνον, καὶ συναλλὰξ ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον οὕτως τὸ ΕΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΒΔ, ΗΚ, ὅτι καὶ ὡς





ΗΘ: erit [per 22. 5.] ex æquo ut ΕΒ ad ΒΓ ita ΛΗ ad ΗΘ; nempe circum æquales angulos ΕΒΓ, ΛΗΘ latera ſunt proportionalia: æquiangulum igitur eſt [per 6. 6.] ΕΒΓ triangulum triangulo ΛΗΘ, quare [per 4. 6.] & ſimile. eadem ratione & ΕΓΔ triangulum ſimile eſt triangulo ΛΘΚ: ſimilia igitur polygona ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ in ſimilia triangula dividuntur & numero æqualia.

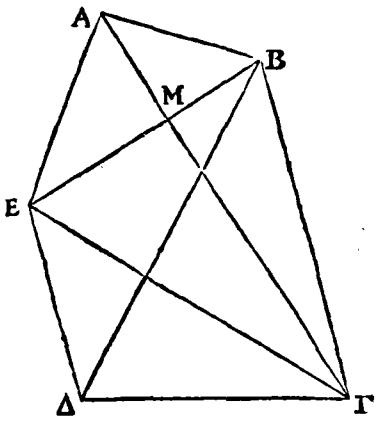
Dico & homologa totis: hoc eſt, ut proportionalia ſint triangula, & antecedentia quidem eſſe ΑΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΔ, conſequentia autem ipſorum ΖΗΛ, ΛΗΘ, ΛΘΚ; & ΑΒΓΔΕ polygonum ad polygonum ΖΗΘΚΛ duplicatam rationem habere ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc eſt ΑΒ ad ΖΗ.

Jungantur enim ΑΓ, ΖΘ.

Et quoniam, propter ſimilitudinem polygonorum, angulus ΑΒΓ eſt æqualis angulo ΖΗΘ, atque eſt ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΖΗ ad ΗΘ; erit [per 6. 6.] triangulum ΑΒΓ triangulo ΖΗΘ æquiangulum: æqualis igitur eſt angulus quidem ΒΑΓ angulo ΗΖΘ, angulus vero ΒΓΑ angulo ΗΘΖ. præterea quoniam æqualis eſt ΒΑΜ angulus angulo ΗΖΝ, oſtenſus autem eſt & ΑΒΜ angulus æqualis angulo ΖΗΝ; erit [per 32. 1.] & reliquus ΑΜΒ reliquo ΖΝΗ æqualis: ergo æquiangulum eſt ΑΒΜ triangulum triangulo ΖΗΝ. ſimiliter oſtendemus & triangulum ΒΜΓ triangulo ΗΝΘ æquiangulum eſſe; igitur [per 4. 6.] ut ΑΜ ad ΜΒ ita eſt ΖΝ ad ΝΗ, & ut ΒΜ ad ΜΓ ita ΗΝ ad ΝΘ: quare & ex æquo [per 22. 5.] ut ΑΜ ad ΜΓ ita ΖΝ ad ΝΘ. ſed ut ΑΜ ad ΜΓ ita ΑΒΜ triangulum ad triangulum ΜΒΓ, & triangulum ΑΜΕ ad ipſum ΕΜΓ, inter ſe enim ſunt [per 1. 6.] ut baſes: & [per 12. 5.] ut unum antecedentium ad unum conſequentium ita omnia antecedentia ad omnia conſequentia: ut igitur ΑΜΒ triangulum ad triangulum ΒΜΓ ita triangulum ΑΒΕ ad ipſum ΓΒΕ. ſed ut ΑΜΒ ad ΒΜΓ ita ΑΜ ad ΜΓ; & igitur [per 11. 5.] ut ΑΜ ad ΜΓ ita ΑΒΕ triangulum ad triangulum ΕΒΓ. eadem ratione & ut ΖΝ ad ΝΘ ita ΖΗΛ triangulum ad triangulum ΗΛΘ. atque eſt ut ΑΜ ad ΜΓ ita ΖΝ ad ΝΘ: ergo [per 11. 5.] ut triangulum ΑΒΕ ad triangulum ΒΕΓ ita triangulum ΖΗΛ ad ΗΛΘ triangulum; & permutando [per 16. 5.] ut ΑΒΕ triangulum ad triangulum ΖΗΛ ita triangulum ΒΕΓ ad triangulum ΗΛΘ. ſimiliter oſtendemus, junctis ΒΔ, ΗΚ, ut

ΒΕΓ

BEΓ triangulum ad triangulum HΛΘ ita esse triangulum EΓΔ ad triangulum ΛΘK. & quoniam est ut ABE triangulum ad triangulum ZHΛ ita triangulum EBΓ ad triangulum ΛHΘ, & adhuc ita triangulum EΓΔ ad ipsum ΛΘK; erit [per 12. 5.] & ut unum antecedentium ad unum consequentium sic omnia antecedentia ad omnia consequentia: ergo ut triangulum ABE ad triangulum ZHΛ ita ABΓΔE polygonum ad polygonum ZHΘKΛ. sed ABE triangulum ad triangulum ZHΛ duplicatam rationem habet ejus quam latus homologum AB habet ad homologum latus ZH; similia enim triangula sunt [per 19. 6.] in duplicata ratione laterum homologorum: ergo & ABΓΔE polygonum ad polygonum ZHΘKΛ duplicatam rationem habet ejus quam AB latus homologum habet ad ZH homologum latus.



Similia igitur polygona in similia triangula dividuntur, & numero æqualia & homologa totis: & polygonum ad polygonum duplicatam habet rationem ejus quam habet latus homologum ad latus homologum. quod erat demonstrandum.

Corollarium 1.

Eodem modo & in similibus quadrilateris ostendetur, ea esse in duplicata ratione laterum homologorum. ostensum autem est [ad corol. 19. 6.] & in triangulis: quare universe similes rectilineæ figuræ inter se sunt in duplicata ratione homologorum laterum.

Corollarium 2.

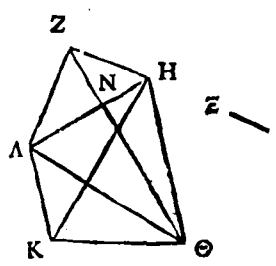
Et si ipsis AB, ZH tertiam proportionalem sumamus, quæ sit Ξ; habebit [per 10.def.5.] AB ad Ξ duplicatam rationem ejus quam habet AB ad ZH. habet autem & polygonum ad polygonum, & quadrilaterum ad quadrilaterum duplicatam rationem ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est quam AB ad ZH: atque ostensum est hoc in triangulis. universe igitur manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam ita esse figuram rectilineam, quæ fit à prima, ad similem & similiter descriptam à secunda.

ALITER.

Ostendemus etiam & aliter expeditius homologa esse triangula.

Exponantur enim rursus polygona ABΓΔE, ZHΘKΛ, & jungantur BE, EΓ, HΛ, ΛΘ: dico ut ABE triangulum ad triangulum ZHΛ ita esse triangulum EBΓ ad triangulum ΛHΘ, & triangulum ΓΔE ad ipsum ΘKΛ.

τὸ BEΓ τρίγωνον πρὸς τὸ HΛΘ τρίγωνον ὅτως τὸ EΓΔ πρὸς τὸ ΛΘK τρίγωνον. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ABE τρίγωνον πρὸς τὸ ZHΛ ὅτως τὸ EBΓ πρὸς τὸ ΛHΘ, καὶ ἔτι EΓΔ πρὸς τὸ ΛΘK· καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων ὅτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ABE τρίγωνον πρὸς τὸ ZHΛ τρίγωνον ὅτως τὸ ABΓΔE πολύγωνον πρὸς τὸ ZHΘKΛ πολύγωνον. ἀλλὰ τὸ ABE τρίγωνον πρὸς τὸ ZHΛ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ AB ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ZH ὁμόλογον πλευράν· τὰ γὰρ ὅμοια τρίγωνα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· καὶ τὸ ABΓΔE ἄρα πολύγωνον πρὸς τὸ ZHΘKΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ AB ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ZH ὁμόλογον πλευράν.



Τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται, καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις· καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα α'.

Ὡσαύτως δὴ καὶ ὅτι τῶν ὁμοίων τετραπλεύρων δειχθήσεται, ὅτι ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ἐδείχθη δὲ καὶ ὅτι τῶν τριγώνων· ὥστε καθόλου τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Πόρισμα β'.

Καὶ ἐὰν τῶν AB, ZH τρίτην ἀνάλογον λάβωμεν τὴν Ξ, ἡ AB πρὸς τὴν Ξ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ AB πρὸς τὴν ZH. ἔχει δὲ καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, καὶ τὸ τετράπλευρον πρὸς τὸ τετράπλευρον διπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον, τουτέστιν ἡ AB πρὸς τὴν ZH· ἐδείχθη δὲ τοῦτο καὶ ὅτι τῶν τριγώνων. ὥστε καὶ καθόλου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην ὅτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον.

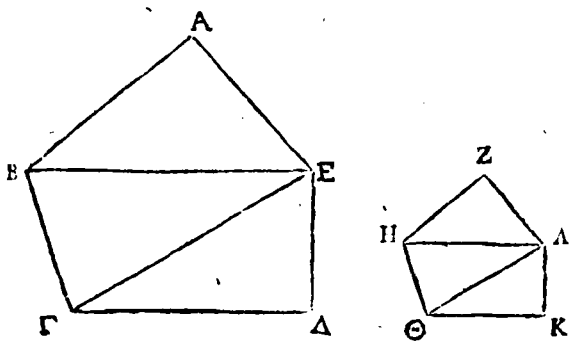
ΑΛΛΩΣ.

Δείξομεν δὴ καὶ ἑτέρως εὐχερέστερον ὁμόλογα τὰ τρίγωνα.

Ἐκκείσθωσαν γὰρ πάλιν τὰ ABΓΔE, ZHΘKΛ πολύγωνα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ BE, EΓ, HΛ, ΛΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ABE τρίγωνον πρὸς τὸ ZHΛ ὅτως τὸ EBΓ πρὸς τὸ ΛHΘ καὶ τὸ ΓΔE πρὸς τὸ ΘKΛ.

Επεὶ

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ, τὸ ΑΒΕ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΗΛ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΗΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ ὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ. πάλιν, ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ· τὸ ΕΒΓ ἄρα πρὸς τὸ ΛΗΘ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΕ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΘΛ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΘΚ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΘΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΕΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΗΘ ὕτως τὸ ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ ὕτως τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΖΗΛ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΖΗΛ ὕτως τὸ ΒΕΓ πρὸς τὸ ΗΛΘ καὶ τὸ ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ· καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων ὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα, καὶ τὰ λοιπὰ ὡς ἐν τῇ πρώτῃ δείξει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Quoniam enim ſimile eſt ABE triangulum triangulo ZHΛ, habet ABE triangulum ad ZHΛ [per 19. 6.] duplicatam rationem ejus quam habet BE ad HΛ. eadem ratione & triangulum BEΓ ad HΛΘ triangulum duplicatam rationem habet ejus quam BE ad HΛ: eſt igitur [per 11. 5.] ut ABE triangulum ad triangulum ZHΛ ita triangulum EBΓ ad ΛHΘ triangulum. rurſus, quoniam ſimile eſt triangulum EBΓ triangulo ΛHΘ, habet [per 19. 6.] EBΓ triangulum ad triangulum ΛHΘ duplicatam rationem ejus quam recta linea ΓE habet ad rectam ΘΛ. eadem ratione & EΓΔ triangulum ad triangulum ΛΘK duplicatam rationem habet ejus quam ΓB ad ΘΛ: eſt igitur [per 11. 5.] ut triangulum EBΓ ad triangulum ΛHΘ ita EΓΔ triangulum ad triangulum ΛΘK. oſtenſum autem eſt & ut EBΓ triangulum ad triangulum ΛHΘ ita triangulum ABE ad triangulum ZHΛ: ergo & ut triangulum ABE ad triangulum ZHΛ ita triangulum BEΓ ad HΛΘ triangulum, & triangulum EΓΔ ad ipſum ΛΘK: & igitur [per 12. 5.] ut unum antecedentium ad unum conſequentium ita omnia antecedentia ad omnia conſequentia, & reliqua ut in priori demonſtratione. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

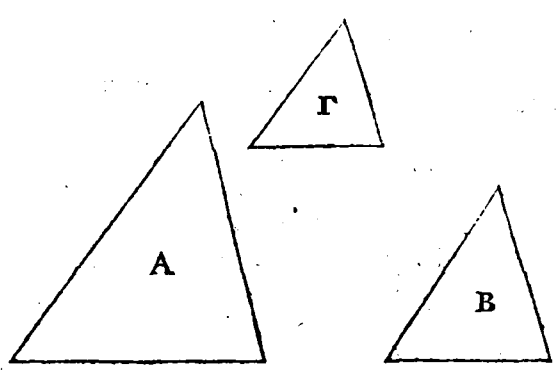
Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια, καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια.

Prop. XXI. Theor.

Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia.

Ἔστω γὰρ ἑκάτερον τῶν Α, Β εὐθυγράμμων τῷ Γ ὅμοιον· λέγω ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἐστὶν ὅμοιον.

Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὅμοιον τὸ Α τῷ Γ, ἰσογώνιόν τε ἐστὶν αὐτῷ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. πάλιν, ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ Β τῷ Γ, ἰσογώνιόν τε ἐστὶν αὐτῷ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ἑκάτερον ἄρα τῶν Α, Β τῷ Γ ἰσογώνιόν τε ἐστὶ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὥστε καὶ τὸ Α τῷ Β ἰσογώνιόν τε ἐστὶ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Sit enim utrumque rectilineorum A, B ſimile rectilineo Γ: dico & rectilineum A rectilineo B ſimile eſſe.

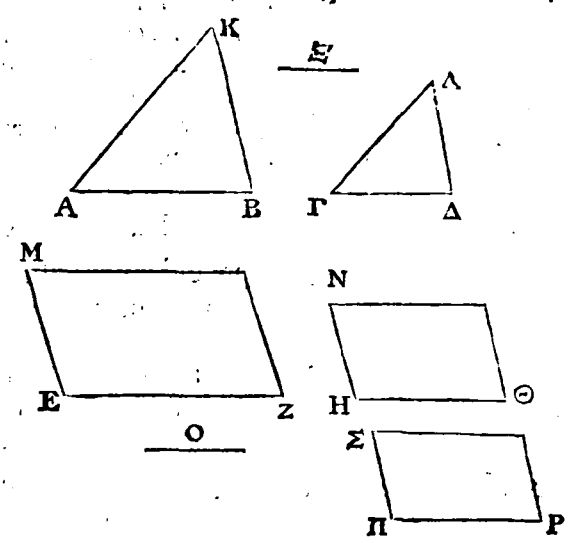
Quoniam enim ſimile eſt A rectilineum rectilineo Γ, & ipſi [per 1. def. 6.] æquiangulum erit, & circum æquales angulos latera habebit proportionalia. rurſus, quoniam ſimile eſt rectilineum B rectilineo Γ, æquiangulum ipſi erit & circum æquales angulos latera proportionalia habebit; utrumque igitur rectilineorum A, B ipſi Γ æquiangulum eſt, & circum æquales angulos latera habet proportionalia: quare & rectilineum A ipſi B eſt [per 1. ax.] æquiangulum, lateraque circum æquales angulos [per 11. 5.] proportionalia habet; ac propterea [per 1. def. 6.] A ipſi B eſt ſimile. quod erat demonſtrandum.

PROP. XXII. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; & rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta, proportionalia erunt: & si rectilinea, quæ ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta proportionalia fuerint; & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

SInt quatuor rectæ lineæ proportionales AB, ΓΔ, EZ, HΘ, ut AB ad ΓΔ ita EZ ad HΘ; describanturque ab ipsis quidem AB, ΓΔ similia & similiter posita rectilinea KAB, ΛΓΔ, ab ipsis vero EZ, HΘ describantur rectilinea similia & similiter posita MZ, NΘ: dico ut KAB rectilineum ad rectilineum ΛΓΔ ita esse rectilineum MZ ad ipsum NΘ rectilineum.

Sumatur enim [per 11. 6.] ipsis quidem AB, ΓΔ tertia proportionalis Ξ; ipsis vero EZ, HΘ tertia proportionalis O. & quoniam est ut AB ad ΓΔ ita EZ ad HΘ, ut autem ΓΔ ad Ξ ita HΘ ad O: erit ex æquo [per 22. 5.] ut AB ad Ξ ita EZ ad O. sed [per 2. cor. 20. 6.] ut AB ad Ξ ita est rectilineum KAB ad ΛΓΔ rectilineum, ut autem EZ ad O ita rectilineum MZ ad rectilineum NΘ: igitur [per 11. 5.] ut KAB ad ΛΓΔ ita MZ ad NΘ.



SED sit ut KAB rectilineum ad rectilineum ΛΓΔ ita rectilineum MZ ad rectilineum NΘ: dico ut AB ad ΓΔ ita esse EZ ad HΘ.

Fiat enim [per 12. 6.] ut AB ad ΓΔ ita EZ ad ΠP, & describatur [per 18. 6.] ab ipsa ΠP alterutri rectilineorum MZ, NΘ simile & similiter positum rectilineum ΣP.

Quoniam igitur est ut AB ad ΓΔ ita EZ ad ΠP, & descripta sunt ab ipsis quidem AB, ΓΔ similia & similiter posita KAB, ΛΓΔ rectilinea, ab ipsis vero EZ, ΠP similia & similiter posita rectilinea MZ, ΣP; est [per part. prior. huj.] ut KAB ad rectilineum ΛΓΔ ita rectilineum MZ ad ΣP rectilineum. ponitur autem & ut rectilineum KAB ad rectilineum ΛΓΔ ita MZ rectilineum ad rectilineum NΘ; rectilineum igitur MZ [per 11. 5.] ad utrumque ipsorum NΘ, ΣP eandem habet rationem: ergo [per 9. 5.] rectilineum NΘ est ipsi ΣP æquale. est autem ipsi simile & similiter positum: ergo [per lemma sequens] HΘ est æqualis ΠP. & quoniam ut AB ad ΓΔ ita est EZ ad ΠP, æqualis autem ΠP ipsi HΘ; erit [per 7. 5.] ut AB ad ΓΔ ita EZ ad HΘ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα, ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα, ἀνάλογον ἔσται· καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ AB, ΓΔ, EZ, HΘ, ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν HΘ, καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ μὲν τῆς AB, ΓΔ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ KAB, ΛΓΔ, ἀπὸ δὲ τῶν EZ, HΘ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ MZ, NΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ KAB πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ NΘ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν AB, ΓΔ τρίτη ἀνάλογον ἡ Ξ, τῶν δὲ EZ, HΘ τρίτη ἀνάλογον ἡ O. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μὲν AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν HΘ, ὡς δὲ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν Ξ οὕτως ἡ HΘ πρὸς τὴν O· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν Ξ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν O. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AB πρὸς τὴν Ξ οὕτως καὶ τὸ KAB πρὸς τὸ ΛΓΔ, ὡς δὲ ἡ EZ πρὸς τὴν O οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ NΘ· ὡς ἄρα τὸ KAB πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ NΘ.

ΑΛΛΑ δὴ ἔστω ὡς τὸ KAB πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ NΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν HΘ.

Γεγονέτω γὰρ ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν ΠP, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΠP ὁποτέρῳ τῶν MZ, NΘ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ ΣP.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν ΠP, καὶ ἀναγεγραπται ἀπὸ μὲν τῶν AB, ΓΔ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ KAB, ΛΓΔ, ἀπὸ δὲ τῶν EZ, ΠP ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ MZ, ΣP· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ KAB πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ ΣP. ἀλλὰ κεῖται δὲ καὶ ὡς τὸ KAB πρὸς τὸ ΛΓΔ οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ NΘ· τὸ MZ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν NΘ, ΣP τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ NΘ τῷ ΣP. ἔστι δὲ αὐτῷ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ HΘ τῇ ΠP. καί ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν ΠP, ἴση δὲ ἡ ΠP τῇ HΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν HΘ.

Ἐὰν

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται· καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; & rectilinea quæ ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta, proportionalia erunt: & si rectilinea quæ ab ipsis fiunt, similia & similiter descripta, proportionalia fuerint; & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt. quod erat demonstrandum.

ΛΗΜΜΑ.

Ὅτι δὲ, ἐὰν εὐθύγραμμα ἴσα τε καὶ ὅμοια ᾖ, αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, δείξομεν ὕστερον.

LEMMA.

At vero, si rectilinea æqualia & similia sint, homologa ipsorum latera inter se æqualia esse hoc modo demonstrabimus.

Ἔστω ἴσα τε καὶ ὅμοια εὐθύγραμμα τὰ ΝΘ, ΣΡ, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ οὕτως ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΡΠ τῇ ΘΗ.

Sint æqualia & similia rectilinea ΝΘ, ΣΡ; & sit ut ΘΗ ad ΗΝ ita ΡΠ ad ΠΣ: dico ΡΠ ipsi ΘΗ esse æqualem.

Εἰ γὰρ ἄνισοί εἰσι, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΡΠ τῆς ΘΗ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΘΗ οὕτως ἡ ΠΣ πρὸς τὴν ΗΝ. μείζων δὲ ἡ ΠΡ τῆς ΘΗ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΠΣ τῆς ΗΝ· ὥστε καὶ τὸ ΡΣ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΘΝ· ἀλλὰ καὶ ἴσον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΡΠ τῆς ΗΘ, ἴση ἄρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si enim inæquales sint, una ipsarum major erit. sit ΡΠ major quam ΘΗ. & quoniam est ut ΡΠ ad ΠΣ ita ΘΗ ad ΗΝ: & permutando erit [per 16. 5.] ut ΡΠ ad ΘΗ ita ΠΣ ad ΗΝ. major autem est ΠΡ quam ΗΘ; ergo & ΠΣ quam ΗΝ major erit: quare [per 20. 6.] & rectilineum ΡΣ rectilineo ΘΝ est majus: sed & æquale, quod fieri non potest: non est igitur ΠΡ inæqualis ipsi ΗΘ; ergo æqualis. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

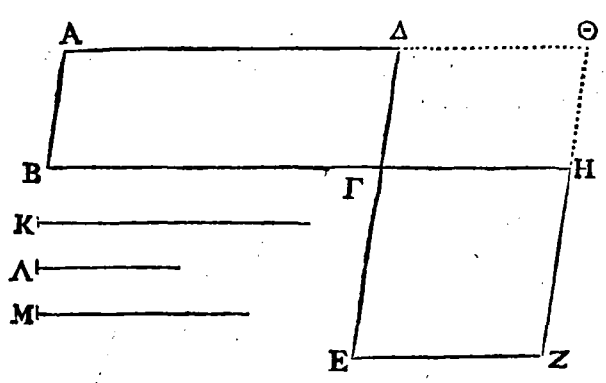
PROP. XXIII. THEOR.

Æquiangula parallelogramma inter se rationem habent *ex lateribus compositam.

Ἔστω ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΓ, ΓΖ, ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΗ· λέγω ὅτι τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, τὸν τε ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τὸν ὃν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ.

Sint æquiangula parallelogramma ΑΓ; ΓΖ, æqualem habentia ΒΓΔ angulum angulo ΕΓΗ: dico parallelogrammum ΑΓ ad parallelogrammum ΓΖ rationem habere compositam ex lateribus; hoc est, compositam ex ratione quam habet ΒΓ ad ΓΗ, & ex ratione quam ΔΓ habet ad ΓΕ.

Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΓΗ, ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ· καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον, καὶ ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ Κ, καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ.



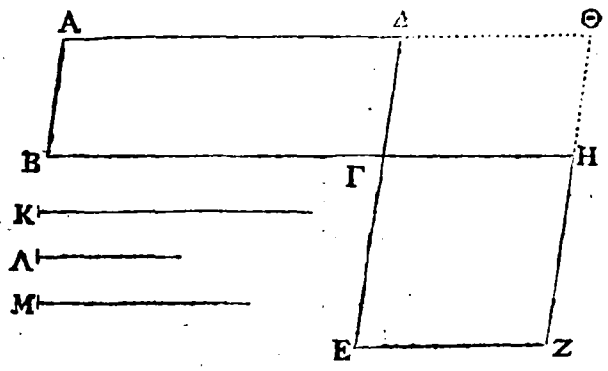
Ponatur enim ΒΓ in directum ipsi ΓΗ, ergo [per 14. 1.] & ΔΓ ipsi ΓΕ in directum erit: & compleatur ΔΗ parallelogrammum, exponaturque recta linea quædam Κ, & fiat [per 12. 6.] ut ΒΓ ad ΓΗ ita Κ ad Λ, ut autem ΔΓ ad ΓΕ ita Λ ad Μ.

Οἱ ἄρα λόγοι τοῦ τε Κ πρὸς τὴν Λ καὶ τοῦ Λ πρὸς τὴν Μ οἱ αὐτοί εἰσι τοῖς λόγοις τῶν πλευρῶν, τοῦ τε ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τοῦ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. ἀλλ' ὁ τοῦ Κ πρὸς τὸν Μ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τοῦ Κ πρὸς τὸν Λ λόγου καὶ τοῦ τοῦ Λ πρὸς τὴν Μ· ὥστε καὶ ἡ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ· ἀλλ' ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ

Rationes igitur ipsius Κ ad Λ & Λ ad Μ eædem sunt quæ rationes laterum, videlicet ΒΓ ad ΓΗ & ΔΓ ad ΓΕ. sed [per 5. def. 6.] ratio Κ ad Μ composita est ex ratione Κ ad Λ & ratione Λ ad Μ: quare & Κ ad Μ rationem habet ex lateribus compositam. & quoniam est [per 1. 6.] ut ΒΓ ad ΓΗ ita ΑΓ parallelogrammum ad parallelogrammum ΓΘ; sed ut ΒΓ ad ΓΗ

* *Rectius ex laterum rationibus.*

ita K ad Λ: erit igitur [per 11. 5.] & ut K ad Λ ita parallelogrammum ΑΓ ad Γ Θ parallelogrammum. rursus, quoniam [per 1. 6.] est ut ΔΓ ad ΓΒ ita Γ Θ parallelogrammum ad parallelogrammum ΓΖ; ut autem ΔΓ ad ΓΒ ita Λ ad Μ: ut igitur Λ ad Μ ita erit [per 11. 5.] parallelogrammum ΓΘ ad ΓΖ parallelogrammum. itaque cum ostensum sit, ut K quidem ad Λ ita esse ΑΓ parallelogrammum ad parallelogrammum ΓΘ; ut autem Λ ad Μ ita parallelogrammum ΓΘ ad ΓΖ parallelogrammum: erit ex æquo [per 22. 5.] ut K ad Μ ita ΑΓ parallelogrammum ad ipsum ΓΖ. habet autem K ad Μ rationem ex lateribus compositam: ergo & ΑΓ parallelogrammum ad parallelogrammum ΓΖ rationem habet compositam ex lateribus.



Æquiangula igitur parallelogramma inter se rationem habent ex lateribus compositam. quod erat demonstrandum.

ἴσως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Λ ἴσως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΘ. πάλιν, ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ ἴσως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ. ἀλλ' ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ ἴσως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Λ πρὸς τὴν Μ ἴσως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς μὲν ἡ Κ πρὸς τὴν Λ ἴσως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ Λ πρὸς τὴν Μ ἴσως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ· διʼ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Μ ἴσως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ. ἡ δὲ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· καὶ τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΖ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Τὰ ἄρα ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXIV. Theor.

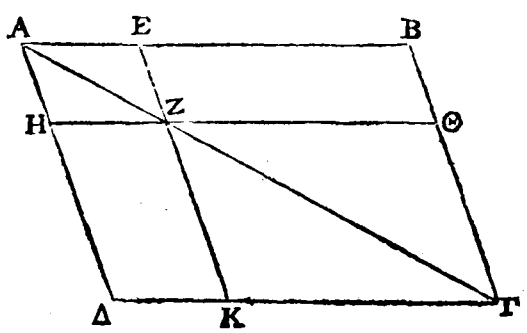
Omnis parallelogrammi quæ circa diametrum sunt parallelogramma sunt similia toti & inter se.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

SIT parallelogrammum ΑΒΓΔ, cujus diameter ΑΓ; circa diametrum vero ΑΓ parallelogramma sint ΕΗ, ΘΚ: dico parallelogramma ΕΗ, ΘΚ & toti ΑΒΓΔ & inter se similia esse.

Quoniam enim uni laterum trianguli ΑΒΓ, videlicet ipsi ΒΓ, parallela ducta est ΕΖ, erit [per 2. 6.] ut ΒΕ ad ΕΑ ita ΓΖ ad ΖΑ. rursus, quoniam uni laterum trianguli ΑΓΔ, nempe ipsi ΓΔ, ducta est parallela ΖΗ, ut ΓΖ ad ΖΑ ita erit ΔΗ ad ΗΑ. sed ut ΓΖ ad ΖΑ, ita ostensa est & ΒΕ ad ΕΑ: ergo [per 11. 5.] ut ΒΕ ad ΕΑ ita ΔΗ ad ΗΑ; componendoque [per 18. 5.] ut ΒΑ ad ΑΕ ita ΔΑ ad ΑΗ; & permutando [per 16. 5.] ut ΒΑ ad ΑΔ ita ΑΒ ad ΑΗ: parallelogrammorum igitur ΑΒΓΔ, ΕΗ latera quæ circa communem angulum ΒΑΔ proportionalia sunt. & quoniam paral-



Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα ἔστω τὰ ΕΗ, ΘΚ· λέγω ὅτι ἑκάτερον τῶν ΕΗ, ΘΚ παραλληλογράμμων ὅμοιόν ἐστιν ὅλῳ τῷ ΑΒΓΔ καὶ ἀλλήλοις.

Ἐπεὶ γὰρ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΓ ἦκται ἡ ΕΖ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ ἴσως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ. πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΓΔ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΓΔ ἦκται ἡ ΖΗ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ ἴσως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ. ἀλλ' ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ ἴσως ἐδείχθη καὶ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ ἴσως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ, καὶ συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ ἴσως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΗ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ ἴσως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΑΗ· τῶν ΑΒΓΔ, ΕΗ ἄρα παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὴν κοινὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΔ. καὶ ἐπεὶ

παρ-

ωδιάλληλός ἐστιν ἡ ΗΖ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΖΑ τῇ ὑπὸ ΔΓΑ, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ ΑΔΓ, ΑΗΖ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΖ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ ΑΖΕ τριγώνῳ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΖ. ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ καὶ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ, καὶ ἔτι ὡς ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ, δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΕ· τῶν ἄρα ΑΒΓΔ, ΕΗ παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΚΘ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστιν· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΕΗ, ΘΚ ωδιαλληλογράμμων τῷ ΑΒΓΔ ωδιαλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστι. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστιν.

Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου τοῦ περὶ τὴν διάμετρον ωδιαλληλογράμμου ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

lela eſt HZ ipſi ΔΓ, angulus quidem AHZ [per 29. 1.] eſt æqualis angulo AΔΓ, angulus vero HZA æqualis angulo ΔΓA, & angulus ΔAΓ communis eſt duobus triangulis AΔΓ, AHZ; erit igitur triangulum AΔΓ triangulo AHZ æquiangulum. eadem ratione & triangulum ABΓ æquiangulum eſt triangulo AZE; totum igitur parallelogrammum ABΓΔ parallelogrammo EH eſt æquiangulum: ergo [per 4. 6.] ut AΔ ad ΔΓ ita AH ad HZ. ut autem ΔΓ ad ΓA ita HZ ad ZA, & ut AΓ ad ΓB ita AZ ad ZE; & præterea ut ΓB ad BA ita ZE ad EA: itaque quoniam oſtenſum eſt ut ΔΓ ad ΓA ita eſſe HZ ad ZA, ut autem AΓ ad ΓB ita AZ ad ZE; erit ex æquo [per 22. 5.] ut ΔΓ ad ΓB ita HZ ad ZE: ergo parallelogrammorum ABΓΔ, EH proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos; ac propterea [per 1. def. 6.] parallelogrammum ABΓΔ parallelogrammo EH eſt ſimile. eadem ratione & parallelogrammum ABΓΔ ſimile eſt parallelogrammo KΘ: utrumque igitur ipſorum EH, ΘK parallelogrammorum parallelogrammo ABΓΔ eſt ſimile. quæ autem eidem rectilineo ſunt ſimilia [per 21. 6.] & inter ſe ſunt ſimilia: parallelogrammum igitur EH ſimile eſt parallelogrammo ΘK.

Quare omnis parallelogrammi quæ circa diametrum ſunt parallelogramma & toti & inter ſe ſunt ſimilia. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

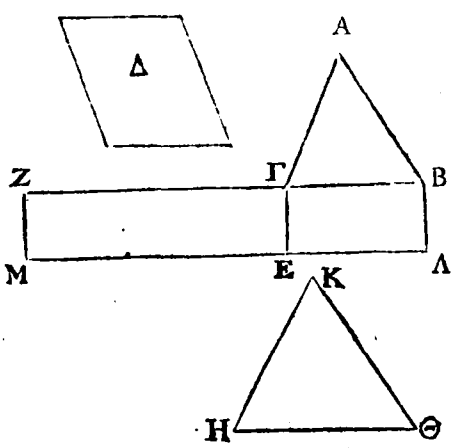
Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

PROP. XXV. PROBL.

Dato rectilineo ſimile, & alteri dato æquale idem conſtituere.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ὅμοιον συστήσασθαι, τὸ ΑΒΓ, ᾧ δὲ ἴσον, τὸ Δ· δεῖ δὴ τῷ μὲν ΑΒΓ ὅμοιον, τῷ δὲ Δ ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

SIT datum quidem rectilineum, cui oportet ſimile conſtituere, ABΓ; cui autem æquale, ſit Δ: oportet ipſi ABΓ ſimile, & ipſi Δ æquale idem conſtituere.



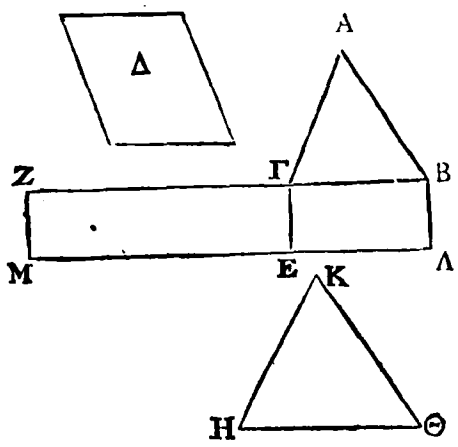
Παραβεβλήσθω γὰρ ωδὶ μὲν τὴν ΒΓ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕ, ωδὶ δὲ τὴν ΓΕ τῷ Δ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΜ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΓΕ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ ὑπὸ ΓΒΛ· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΒΓ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΛΕ τῇ ΕΜ. καὶ εἰλήφθω τῶν ΒΓ, ΓΖ μέση ἀνάλογον ἡ ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΗΘ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ ΚΗΘ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΗΘ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΓΖ, ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς

SIT enim [per 44. & 45. 1.] ad rectam quidem lineam BΓ triangulo ABΓ æquale parallelogrammum BE; ad rectam vero ΓE applicetur parallelogrammum ΓM æquale ipſi Δ in angulo ZΓE, qui ΓBΛ angulo eſt æqualis: in directum igitur eſt [per 14. 1.] BΓ ipſi ΓZ; & ΛE ipſi EM. ſumaturque [per 13. 6.] inter ipſas BΓ, ΓZ media proportionalis HΘ, & ab ipſa HΘ deſcribatur [per 18. 6.] rectilineum KHΘ ſimile & ſimiliter poſitum rectilineo ABΓ.

Et quoniam eſt ut BΓ ad HΘ ita HΘ ad ΓZ, ſi autem tres rectæ lineæ proportionales ſint, ut prima ad tertiam ita [per 2. cor. 20. 6.]

eſt figura rectilinea quæ fit à prima ad ſimilem & ſimiliter deſcriptam à ſecunda: erit igitur ut ΒΓ ad ΓΖ ita ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΚΗΘ. ſed [per 1. 6.] ut ΒΓ ad ΓΖ ita parallelogrammum ΒΕ ad ΕΖ parallelogrammum: & igitur ut triangulum ΑΒΓ ad triangulum ΚΗΘ ita ΒΕ parallelogrammum ad parallelogrammum ΕΖ: quare permutando [per 16. 5.] ut ΑΒΓ triangulum ad parallelogrammum ΒΕ ita triangulum ΚΗΘ ad ΕΖ parallelogrammum. eſt autem [per conſtr.] triangulum ΑΒΓ æquale parallelogrammo ΒΕ: æquale igitur eſt & ΚΗΘ triangulum parallelogrammo ΕΖ. ſed ΕΖ parallelogrammum æquale eſt rectilineo Δ: ergo & triangulum ΚΗΘ ipſi Δ eſt æquale. eſt autem [per conſtr.] ΚΗΘ ſimile triangulo ΑΒΓ.



Dato igitur rectilineo ΑΒΓ ſimile, & alteri dato æquale idem conſtitutum eſt ΚΗΘ. quod erat faciendum.

πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον οὕτως τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον οὕτως τὸ ΚΗΘ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον· ἴσον δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΕ παραλληλογράμμῳ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΚΗΘ τρίγωνον τῷ ΕΖ παραλληλογράμμῳ. ἀλλὰ τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον τῷ Δ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΚΗΘ ἄρα τῷ Δ ἐστὶν ἴσον. ἔστι δὲ τὸ ΚΗΘ καὶ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον.

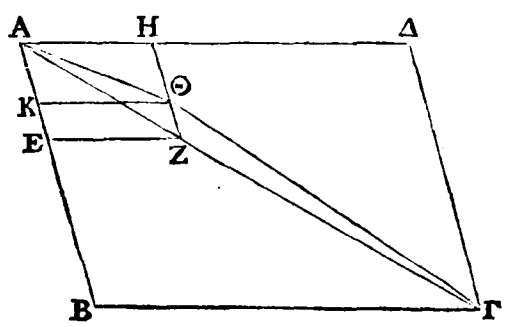
Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον, καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συνέσταται τὸ ΚΗΘ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XXVI. Theor.

Si à parallelogrammo parallelogrammum auferatur, ſimile toti & ſimiliter poſitum, communem cum ipſo angulum habens; circa eandem diametrum eſt cum toto.

A parallelogrammo enim ΑΒΓΔ parallelogrammum ΑΕΖΗ auferatur, ſimile ipſi ΑΒΓΔ & ſimiliter poſitum, communemque cum ipſo angulum habens ΔΑΒ: dico parallelogrammum ΑΒΓΔ circa eandem eſſe diametrum cum parallelogrammo ΑΕΖΗ.

Non enim, ſed, ſi fieri poteſt, ſit ipſorum diameter ΑΘΓ, ducaturque per Θ alterutri ipſarum ΑΔ, ΒΓ parallela ΘΚ.



Quoniam igitur circa eandem diametrum eſt ΑΒΓΔ parallelogrammum cum parallelogrammo ΚΗ, erit [per 24. 6.] parallelogrammum ΑΒΓΔ parallelogrammo ΚΗ ſimile: ergo [per 1. def. 6.] ut ΔΑ ad ΑΒ ita ΗΑ ad ΑΚ. eſt autem & propter ſimilitudinem parallelogrammorum ΑΒΓΔ, ΕΗ, ut ΔΑ ad ΑΒ ita ΗΑ ad ΑΕ: & igitur [per 11. 5.] ut ΗΑ ad ΑΕ ita ΗΑ ad ΑΚ: & proinde ΗΑ ad utramque ipſarum ΑΚ, ΑΕ eandem ra-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ, ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ· περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ.

Ἀπὸ γὰρ παραλληλογράμμου τοῦ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ἀφῃρήσθω τὸ ΑΕΖΗ, ὅμοιον τῷ ΑΒΓΔ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ τὴν ὑπὸ ΔΑΒ· λέγω ὅτι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΑΕΖΗ.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν ἔστω αὐτῶν ἡ διάμετρος ἡ ΑΘΓ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ ὁποτέρα τῶν ΑΔ, ΒΓ παράλληλος ἡ ΘΚ.

Ἐπεὶ οὖν περὶ τὴν διάμετρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ, ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ. ἔστι δὲ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΓΔ, ΕΗ καὶ ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ· ἡ ΗΑ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΑΚ, ΑΕ τὸν αὐτὸν

ἔχει

ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΚ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶ περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα ἐστὶ διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΕΖΗ παραλληλογράμμῳ.

Ἐὰν ἄρα ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ, ὅμοιον τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κειμένον, κοινὴν ἔχον γωνίαν αὐτῷ· περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

tionem habet; erit igitur [per 9. 5.] ΑΒ ipſi ΑΚ æqualis, minor majori, quod fieri non poteſt: non igitur circa eandem diametrum eſt ΑΒΓΔ parallelogrammum cum parallelogrammo ΚΗ: igitur circa eandem diametrum erit parallelogrammum ΑΒΓΔ cum parallelogrammo ΑΕΖΗ.

Si igitur à parallelogrammo parallelogrammum auferatur, ſimile toti & ſimiliter poſitum, communem cum ipſo angulum habens; circa eandem diametrum eſt cum toto. quod erat demonſtrandum.

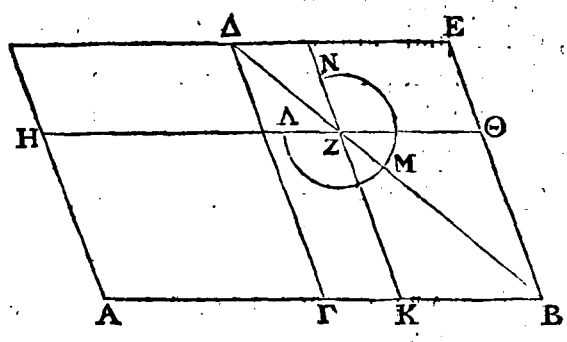
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ, μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον, ὅμοιον ὂν τῷ ἐλλείμματι.

Prop. XXVII. Theor.

Omnium parallelogrammorum ſecundum eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis, ſimilibus & ſimiliter poſitis ei quæ à dimidia deſcribitur, maximum eſt quod ad dimidiam eſt applicatum, ſimile exiſtens defectui.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΓΕ, ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφέντι τὸ ΑΒ, τουτέστι τὸ ΒΓ· λέγω ὅτι πάντων τῶν παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ΓΕ, μέγιστόν ἐστι τὸ ΑΔ. παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΚΘ, ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ΓΕ· λέγω ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΔ τοῦ ΑΖ.



SIT recta linea ΑΒ, ſeceturque bifariam in Γ; & ad ΑΒ rectam lineam applicetur parallelogrammum ΑΔ deficiens figura parallelogramma ΓΕ, ſimili & ſimiliter poſita ei quæ à dimidia ipſius ΑΒ deſcripta eſt, hoc eſt à ΒΓ: dico omnium parallelogrammorum ad rectam lineam ΑΒ applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis, ſimilibus & ſimiliter poſitis ipſi ΓΕ, maximum eſſe ΑΔ. applicetur enim ad rectam lineam ΑΒ parallelogrammum ΑΖ, deficiens figura parallelogramma ΚΘ, ſimili & ſimiliter poſita ipſi ΓΕ; dico ΑΔ parallelogrammum parallelogrammo ΑΖ majus eſſe.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΓΕ παραλληλόγραμμον τῷ ΚΘ παραλληλογράμμῳ, περὶ τὴν αὐτὴν εἰσὶ διάμετρον. ἤχθω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΔΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΖ τῷ ΖΕ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΚΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΘ ὅλῳ τῷ ΚΕ ἐστὶν ἴσον. ἀλλὰ τὸ ΓΘ τῷ ΓΗ ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἐστὶν ἴση· καὶ τὸ ΗΓ ἄρα τῷ ΕΚ ἴσον ἐστί. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΖ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΖ τῷ ΛΜΝ γνώμονί ἐστιν ἴσον· ὥστε καὶ τὸ ΓΕ παραλληλόγραμμον, τουτέστι τὸ ΑΔ, τοῦ ΑΖ παραλληλογράμμου μεῖζόν ἐστιν.

* Ἐστω γὰρ πάλιν ἡ ΑΒ τμηθεῖσα δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ παραβληθὲν τὸ ΑΛ ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ΓΜ, καὶ

Quoniam enim ſimile eſt parallelogrammum ΓΕ parallelogrammo ΚΘ, [per 26. 6.] circa eandem diametrum ſunt. ducatur eorum diameter ΔΒ, & deſcribatur figura.

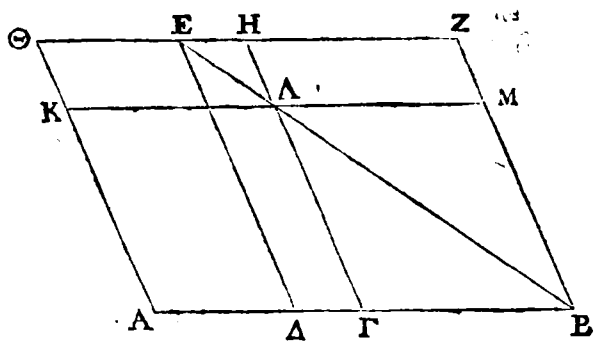
Quoniam igitur [per 43. 1.] ΓΖ eſt æquale ipſi ΖΕ, commune apponatur ΚΘ: totum igitur ΓΘ toti ΚΕ eſt æquale. ſed ΓΘ [per 36. 1.] eſt æquale ΓΗ, quoniam recta linea ΑΓ ipſi ΓΒ eſt æqualis: ergo & ΗΓ ipſi ΕΚ æquale erit. commune apponatur ΓΖ: totum igitur ΑΖ eſt æquale gnomoni ΑΜΝ; quare & ΓΕ, hoc eſt [per 36. 1.] ΑΔ parallelogrammum, parallelogrammo ΑΖ eſt majus.

Sit enim rurſus ΑΒ ſecta bifariam in puncto Γ, & applicatum ſit ΑΛ deficiens figura ΓΜ; &

* Hic eſt hujus theorematis caſus ſecundus, (viz. cum ΑΔ minor eſt quam ΑΓ, cum primus ſit ille, quando ΑΔ major eſt quam ΑΓ,) & non altera propoſitionis demonſtratio: & ideo concluſionem univerſalem in codicibus tam MSS. quam impreſſis caſui primo ſubnexam ad ſecundi finem appoſuimus.

rurſus

rurſus ad rectam lineam AB applicetur parallelogrammum AE deficiens figura ΔZ, ſimili & ſimiliter poſita ei quæ à dimidia AB deſcribitur, videlicet ΓM: dico parallelogrammum AΛ, quod ad dimidiam eſt applicatum, majus eſſe parallelogrammo AE.



Quoniam enim ſimile eſt ΔZ ipſi ΓM; [per 26. 6.] circa eandem ſunt diametrum: ſit ipſorum diameter EB, & deſcribatur figura.

Et quoniam [per 36. 1.] ΛZ æquale eſt ΛΘ, etenim ZH ipſi HΘ eſt æqualis: erit ΛZ ipſo EK majus. eſt autem [per 43. 1.] ΛZ æquale ΔΛ: majus igitur eſt & ΔΛ ipſo EK. commune apponatur KΔ: ergo totum AΛ toto AE eſt majus.

Omnium igitur parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis, ſimilibus & ſimiliter poſitis ei quæ à dimidia deſcribitur, maximum eſt quod ad dimidiam eſt applicatum. quod erat demonſtrandum.

παραβεβλήθω πάλιν παρὰ τὴν AB τὸ AE παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον τῷ ΔZ, ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς AB, τῷ ΓM· λέγω ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆν ἡμισείας παραβληθὲν τὸ AΛ τοῦ AE.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΔZ τῷ ΓM, περὶ τὴν αὐτὴν εἰσὶ διαμέτρου· ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ EB, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΛZ τῷ ΛΘ, ἐπεὶ καὶ ἡ ZH τῇ HΘ· μεῖζον ἄρα τὸ ΛZ τοῦ EK. ἴσον δὲ τὸ ΛZ τῷ ΔΛ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ EK. κοινὸν ἔστω τὸ KΔ· ὅλον ἄρα τὸ AΛ ὅλου τοῦ AE μεῖζόν ἐστιν.

Πάντων ἄρα τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων, καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις, ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ, μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβληθέν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXVIII. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit alteri datæ: oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum eſt, non majus eſſe eo, quod ad dimidiam applicatur, ſimilibus exiſtentibus defectibus & ejus quod ad dimidiam & ejus cui oportet ſimile deficere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐλλεῖπον εἴδει ᾧ ἔστι παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι· δεῖ δὲ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν, μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τοῦ τε ἐλλείματος τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ οὗ ὤν δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν παραλληλογράμμου.

SIT data quidem recta linea AB; datum autem rectilineum, cui oportet æquale ad datam rectam lineam AB applicare, ſit Γ, non majus exiſtens eo quod ad dimidiam applicatum eſt, ſimilibus exiſtentibus defectibus; cui autem oportet ſimile deficere ſit Δ: oportet ad datam rectam lineam AB dato rectilineo Γ æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit ipſi Δ.

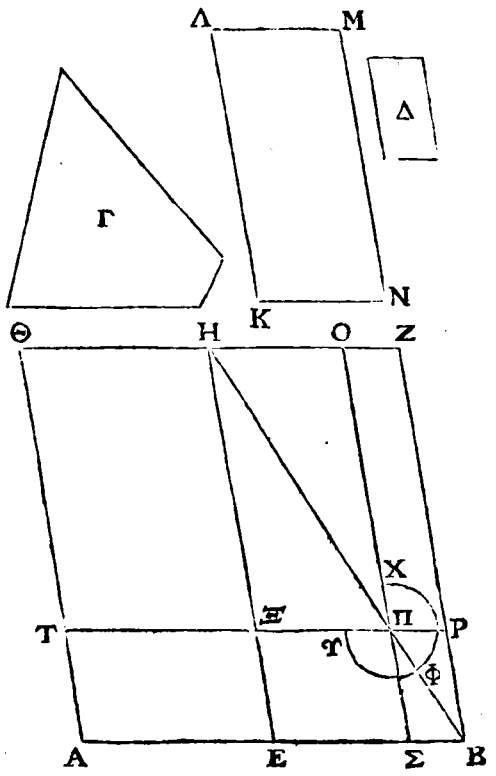
Secetur [per 10. 1.] AB bifariam in E, & ab ipſa EB [per 18. 6.] deſcribatur ſimile & ſimiliter poſitum ipſi Δ, quod ſit EBZH, & compleatur AH parallelogrammum: itaque AH vel æquale eſt ipſi Γ, vel eo majus, ob determinationem. & ſiquidem AH ſit æquale Γ, factum jam erit quod proponebatur; etenim ad rectam lineam AB dato rectilineo Γ æquale parallelogrammum AH applicatum eſt, deficiens figura parallelogramma EZ, ipſi Δ ſimili. ſi autem non eſt æquale, erit ΘE majus quam Γ.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν AB παραβαλεῖν, τὸ Γ, μὴ μεῖζον ὂν τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τῶν ἐλλειμμάτων, ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν τὸ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν AB τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ.

Τετμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ E σημεῖον, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς EB τῷ Δ ὅμοιον τε καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ EBZH, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ AH παραλληλόγραμμον· τὸ δὴ AH ἤτοι ἴσον ἐστὶ τῷ Γ, ἢ μεῖζον αὐτοῦ, διὰ τὸ ὁρισμένον. εἰ μὲν οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ AH τῷ Γ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· παραβέβληται γὰρ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν AB τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ AH, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ EZ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ. εἰ δὲ οὔ, μεῖζόν ἐστι τὸ ΘE τοῦ Γ.

ἴσον

ἴσον δὲ τὸ ΘΕ τῷ ΕΖ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΕΖ τοῦ Γ. ᾧ δὴ μεῖζόν ἐστι τὸ ΕΖ τοῦ Γ, ταύτῃ τῇ ὑπεροχῇ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ ΚΛΜΝ. ἀλλὰ τὸ Δ τῷ ΕΖ ἐστὶν ὅμοιον· καὶ τὸ ΚΜ ἄρα τῷ ΕΖ ἐστὶν ὅμοιον. ἔστω οὖν ὁμόλογος ἡ μὲν ΛΚ τῇ ΗΕ, ἡ δὲ ΛΜ τῇ ΗΖ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΖ τοῖς Γ, ΚΜ, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΖ τοῦ ΚΜ· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΗΕ τῆς ΚΛ, ἡ δὲ ΗΖ τῆς ΛΜ. κείσθω μὲν τῇ ΛΚ ἴση ἡ ΗΞ, τῇ δὲ ΛΜ ἴση ἡ ΗΟ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΞΗΟΠ παραλληλόγραμμον· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΞΟ τῷ ΚΜ. ἀλλὰ τὸ ΚΜ τῷ ΕΖ ὅμοιόν ἐστι· καὶ τὸ ΞΟ ἄρα τῷ ΕΖ ὅμοιόν ἐστι· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὸ ΞΟ τῷ ΕΖ. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΗΠΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.



atque eſt ΘΕ æquale ΕΖ: ergo & ΕΖ quam Γ eſt majus. quo autem ΕΖ ſuperat Γ, ei exceſſui æquale, ipſi vero Δ ſimile & ſimiliter poſitum idem [per 25. 6.] conſtituatur ΚΛΜΝ. ſed Δ eſt ſimile ΕΖ: quare & ΚΜ ipſi ΕΖ ſimile erit. ſit igitur recta linea quidem ΛΚ homologa ipſi ΗΕ, ΛΜ vero ipſi ΗΖ. & quoniam æquale eſt ΕΖ ipſis Γ, ΚΜ, erit ΕΖ ipſo ΚΜ majus: major igitur eſt [per 1. cor. 20. 6.] ΗΕ ipſa ΚΛ, & ΗΖ ipſa ΛΜ. ponatur [per 3. 1.] ΗΞ æqualis ΛΚ, & ΗΟ æqualis ΛΜ, & compleatur [per 31. 1.] ΞΗΟΠ parallelogrammum: æquale igitur eſt & ſimile [per 24. 6.] ΞΟ ipſi ΚΜ. ſed ΚΜ ſimile eſt ΕΖ: ergo [per 21. 6.] & ΞΟ ipſi ΕΖ eſt ſimile: igitur [per 26. 6.] circa eandem diametrum eſt ΞΟ cum ipſo ΕΖ. ſit ipſorum diameter ΗΠΒ, & figura deſcribatur.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΖ τοῖς Γ, ΚΜ, ὧν τὸ ΞΟ τῷ ΚΜ ἐστὶν ἴσον· λοιπὸς ἄρα ὁ ΥΦΧ γνώμων λοιπῷ τῷ Γ ἴσος ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΟΡ τῷ ΞΣ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΡΣ· ὅλον ἄρα τὸ ΟΒ ὅλῳ τῷ ΞΒ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ΞΒ τῷ ΤΕ ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ παραπλήρωμα ἡ ΑΕ παραπλήρωμα τῇ ΕΒ ἐστὶν ἴση· καὶ τὸ ΤΕ ἄρα τῷ ΟΒ ἐστὶν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΞΣ· ὅλον ἄρα τὸ ΤΣ ὅλῳ τῷ ΥΦΧ γνώμονι ἴσον ἐστίν. ἀλλ' ὁ ΥΦΧ γνώμων τῷ Γ ἐδείχθη ἴσος· καὶ ΤΣ ἄρα τῷ Γ ἐστὶν ἴσον.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΤΣ, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΡΣ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ, ἐπειδήπερ τὸ ΡΣ τῷ ΟΞ ὁμοίον ἐστίν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Itaque quoniam ΕΖ eſt æquale ipſis Γ, ΚΜ, quorum ΞΟ eſt æquale ΚΜ, erit reliquus ΥΦΧ gnomon æqualis reliquo Γ. & quoniam [per 43. 1.] ΟΡ eſt æquale ΞΣ, commune apponatur ΡΣ: totum igitur ΟΒ toti ΞΒ eſt æquale. ſed ΞΒ eſt [per 36. 1.] æquale ΤΕ, quoniam & latus ΑΕ æquale lateri ΕΒ: quare & ΤΕ ipſi ΟΒ æquale eſt. commune apponatur ΞΣ: ergo totum ΤΣ eſt æquale toti gnomoni ΥΦΧ. at ΥΦΧ gnomon ipſi Γ oſtenſus eſt æqualis: & igitur ΤΣ ipſi Γ æquale erit.

Ad datam igitur rectam lineam ΑΒ dato rectilineo Γ æquale parallelogrammum ΤΣ applicatum eſt, deficiens figura parallelogramma ΡΣ ipſi Δ ſimili, quoniam & ΡΣ ſimile eſt ipſi ΟΞ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

Prop. XXIX. Probl.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit alteri datæ.

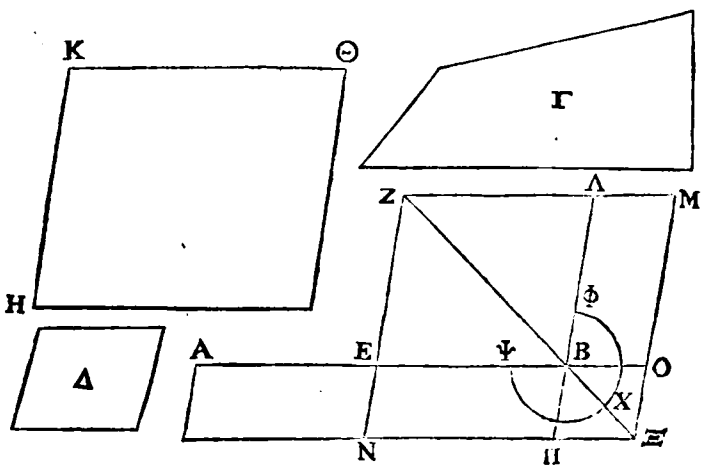
Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλεῖν, τὸ Γ, ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ὑπερβαλεῖν, τὸ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τῷ Γ εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ Δ.

Τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΕΒ τῷ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον

SIT data recta linea ΑΒ, datum vero rectilineum, cui oportet æquale ad ipſam ΑΒ applicare, ſit Γ; cui autem oportet ſimile excedere, ſit Δ: itaque oportet ad ΑΒ rectam lineam dato rectilineo Γ æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma ſimili ipſi Δ.

Secetur [per 9. 1.] ΑΒ bifariam in Ε, atque [per 18. 6.] à recta ΕΒ ipſi Δ ſimile & ſimiliter poſitum

positum parallelogrammum describatur ΕΛ, & utrisque quidem ΕΛ, Γ æquale, ipsi vero Δ simile & similiter positum [per 25. 6.] idem constituatur ΗΘ: simile igitur est ΗΘ ipsi ΕΛ. sitque ΚΘ quidem latus homologum lateri ΖΛ; ΚΗ vero ipsi ΖΕ. & quoniam parallelogrammum ΗΘ majus est ipso ΕΛ, erit recta linea ΚΘ major quam ΖΛ, & ΚΗ major quam ΖΕ. producantur ΖΛ, ΖΕ, & ipsi quidem ΚΘ [per 3. 1.] æqualis sit ΖΛΜ, ipsi vero ΚΗ æqualis ΖΕΝ, & compleatur ΜΝ parallelogrammum: ergo ΜΝ æquale est & simile ipsi ΗΘ. sed ΗΘ est simile ΕΛ: & ΜΝ igitur [per 21. 6.] ipsi ΕΛ simile erit; ac propterea [per 26. 6.] circa eandem diametrum est ΕΛ cum ipso ΜΝ. ducatur ipsorum diameter ΖΞ, & figura describatur.



Itaque quoniam ΗΘ ipsis ΕΛ, Γ est æquale, sed & ΗΘ æquale ΜΝ; erit & ΜΝ æquale ipsis ΕΛ, Γ. commune auferatur ΕΛ: reliquus igitur ΨΧΦ gnomon ipsi Γ est æqualis. & quoniam ΕΑ est æqualis ΕΒ, æquale erit [per 36. 1.] & ΑΝ parallelogrammum parallelogrammo ΝΒ, hoc est [per 43. 1.] ipsi ΛΟ. commune apponatur ΕΞ: totum igitur ΑΞ æquale est gnomoni ΦΧΨ. sed ΦΧΨ gnomon est æqualis Γ: ergo & ΑΞ ipsi Γ æquale est.

Ad datam igitur rectam lineam ΑΒ dato rectilineo Γ æquale parallelogrammum applicatum est ΑΞ, excedens figura parallelogramma ΠΟ ipsi Δ simili, quoniam & ΕΛ simile est ΟΠ. quod erat faciendum.

παραλληλόγραμμον τὸ ΕΛ, ϛ σωαμφοτέροις μὲν τοῖς ΕΛ, Γ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ σωεστάτω τὸ ΗΘ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘ τῷ ΕΛ. ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ μὲν ΚΘ τῇ ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῇ ΖΕ. ϛ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΗΘ τοῦ ΕΛ, μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΚΘ τῆς ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῆς ΖΕ. ἐκβεβλήθωσαν αἱ ΖΛ, ΖΕ, καὶ τῇ μὲν ΚΘ ἴση ἔστω ἡ ΖΛΜ, τῇ δὲ ΚΗ ἴση ἡ ΖΕΝ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΜΝ· τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΗΘ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον. ἀλλὰ τὸ ΗΘ τῷ ΕΛ ἐστὶν ὅμοιον· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τὸ ΕΛ ὅμοιόν ἐστι· πρὸς τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὸ ΕΛ τῷ ΜΝ. ἤχθω αὐτῶν ἡ διάμετρος ἡ ΖΞ, καὶ παραγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΘ τοῖς ΕΛ, Γ, ἀλλὰ τὸ ΗΘ τῷ ΜΝ ἴσον ἐστί· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τοῖς ΕΛ, Γ ἴσον ἐστί. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΕΛ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΨΧΦ γνώμων τῷ Γ ἴσος ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΝ τῷ ΝΒ, τουτέστι τῷ ΛΟ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΕΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ΦΧΨ γνώμονι. ἀλλὰ ὁ ΦΧΨ γνώμων τῷ Γ ἴσος ἐστί· καὶ τὸ ΑΞ ἄρα τῷ Γ ἴσον ἐστίν.

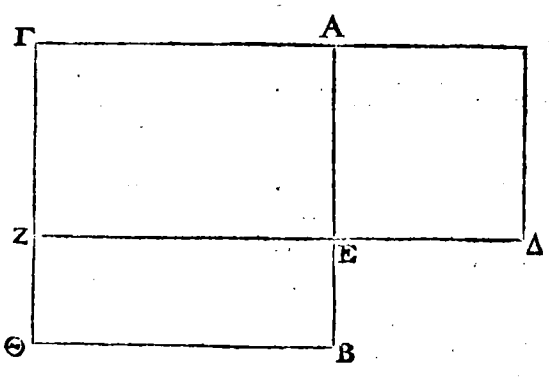
Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΑΞ, ὑπερβάλλον εἴδει ὁμοίῳ τῷ ΠΟ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ, ἐπεὶ καὶ τὸ ΕΛ ἐστὶν ὅμοιον τῷ ΟΠ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XXX. Probl.

Datam rectam lineam terminatam secundum extremam ac mediam rationem secare.

SIT data recta linea terminata ΑΒ: oportet ipsam ΑΒ secundum extremam ac mediam rationem secare.

Describatur enim [per 46. 1.] ex ΑΒ quadratum ΒΓ; & [per 29. 6.] ad ΑΓ ipsi ΒΓ æquale parallelogrammum applicetur ΓΔ, excedens figura ΑΔ ipsi ΒΓ simili.



Quadratum autem est ΒΓ: ergo & ΑΔ

Προτασις λ'.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΒΓ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΑΓ τῷ ΒΓ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΔ, ὑπερβάλλον εἴδει τῷ ΑΔ ὁμοίῳ τῷ ΒΓ.

Τετράγωνον δέ ἐστι τὸ ΒΓ· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ καὶ

καὶ τὸ Α Δ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΓ τῷ ΓΔ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΖ λοιπῷ τῷ ΑΔ ἐστὶν ἴσον. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον· τῶν ΒΖ, ΑΔ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΕ τῇ ΑΓ, τουτέστι τῇ ΑΒ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΑΕ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΕ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ. μείζων δὲ ἡ ΑΒ τῆς ΑΕ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ.

Ἡ ἄρα ΑΒ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ε, καὶ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστι τὸ ΑΕ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

quadratum erit. & quoniam ΒΓ eſt æquale ΓΔ, commune auferatur ΓΕ: reliquum igitur ΒΖ reliquo ΑΔ eſt æquale. eſt autem & ipſi æquiangulum: ergo [per 14.6.] ipſorum ΒΖ, ΑΔ latera quæ circum æquales angulos ſunt reciproce proportionalia: ut igitur ΖΕ ad ΕΔ ita eſt ΑΕ ad ΕΒ. eſt autem [per 34. 1.] ΖΕ æqualis ΑΓ, hoc eſt ipſi ΑΒ; & ΒΔ ipſi ΑΕ: quare ut ΑΒ ad ΑΕ ita ΑΒ ad ΕΒ. ſed ΑΒ major eſt quam ΑΕ: ergo ΑΕ quam ΕΒ eſt major.

Recta igitur linea ΑΒ ſecundum extremam ac mediam rationem ſecta eſt in Ε, & majus ipſius ſegmentum eſt ΑΕ. quod erat faciendum.

ΑΛΛΩΣ.

Ἐκκείσθω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ἡ ἄρα ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ALITER.

Sit data recta linea ΑΒ; oportet ipſam ΑΒ ſecundum extremam ac mediam rationem ſecare.

Secetur enim [per 11. 2.] ΑΒ in Γ, ita ut rectangulum, quod comprehenditur ſub ΑΒ, ΒΓ, æquale ſit quadrato ex ΑΓ.

Quoniam igitur rectangulum quod comprehenditur ſub ΑΒ, ΒΓ æquale eſt quadrato ex ΑΓ; erit [per 17.6.] ut ΑΒ ad ΑΓ ita ΑΓ ad ΓΒ. ergo [per 3. def. 6.] ΑΒ ſecundum extremam & mediam rationem ſecta eſt. quod erat faciendum.

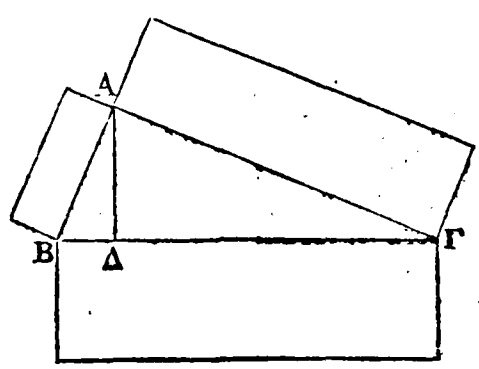
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

PROP. XXXI. THEOR.

In rectangulis triangulis, figura quæ fit à latere rectum angulum ſubtendente æqualis eſt eis quæ à lateribus rectum angulum comprehendentibus fiunt, ſimilibus & ſimiliter deſcriptis.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.



Ἤχθω κάθετος ἡ ΑΔ.

Ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ, ἀπὸ τῆς πρὸς τὸ Α ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ΒΓ βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΑΔ· τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ ἄρα τρίγωνα τῇ καθ' ἑτέρω τριγώνα ὁμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ ὁμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΑΒΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ. καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἔστιν ὡς πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς

SIT triangulum rectangulum ΑΒΓ, rectum habens angulum ΒΑΓ: dico figuram quæ fit à ΒΓ æqualem eſſe eis quæ à ΒΑ, ΑΓ fiunt, ſimilibus & ſimiliter deſcriptis.

Ducatur perpendicularis ΑΔ.

Quoniam igitur in triangulo ΑΒΓ ab angulo recto qui eſt Α ad ΒΓ baſim perpendicularis ducta eſt ΑΔ; erunt [per 8. 6.] triangula ΑΒΔ, ΑΔΓ, quæ ſunt ad perpendicularem, ſimilia toti ΑΒΓ & inter ſe. & quoniam ſimile eſt ΑΒΓ triangulum triangulo ΑΒΔ, erit ut ΓΒ ad ΒΑ ita ΑΒ ad ΒΔ. atqui cum tres rectæ lineæ proportionales ſint; ut prima ad tertiam ita erit [per 2. cor. 20. 6.] figura quæ fit à prima ad ſimilem & ſimiliter deſcriptam à ſecunda: ut igitur ΓΒ ad ΒΔ ita figura quæ fit à ΓΒ ad ſimilem & ſimiliter deſcriptam à ΒΑ. eadem ratione & ut ΒΓ ad ΓΔ ita figura quæ

fit à BΓ ad eam quæ fit à ΓA: quare & ut BΓ ad ipſas BΔ, ΔΓ ita figura quæ fit à BΓ ad eas quæ fiunt à BA, AΓ, ſimiles & ſimiliter deſcriptas. æqualis eſt autem BΓ ipſis BΔ, ΔΓ: ergo figura quæ fit à BΓ æqualis eſt eis quæ à BA, AΓ fiunt, ſimilibus & ſimiliter deſcriptis.

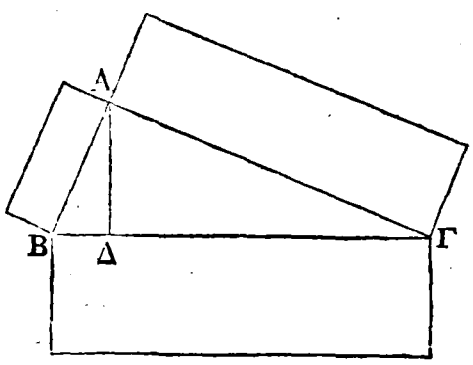
In rectangulis igitur triangulis, figura quæ fit à latere rectum angulum ſubtendente æqualis eſt eis quæ à lateribus rectum angulum comprehendentibus fiunt, ſimilibus & ſimiliter deſcriptis. quod erat demonſtrandum.

ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓA, ὥστε καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὰς ΒΔ, ΔΓ ἕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒA, AΓ, τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα. ἴση δὲ ἡ ΒΓ τῶν ΒΔ, ΔΓ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν ΒA, AΓ εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Aliter.

Quoniam [per 23. 6.] ſimiles figuræ ſunt in duplicata ratione laterum homologorum; figura quæ fit à BΓ ad eam quæ fit à BA duplicatam rationem habebit ejus quam habet BΓ ad BA. habet autem [per 1. cor. 20. 6.] & quadratum ex BΓ ad quadratum ex BA duplicatam rationem ejus quam habet BΓ ad BA: ergo [per 11. 5.] ut figura quæ fit à BΓ ad eam quæ fit à BA ita quadratum ex BΓ ad quadratum ex BA. eadem ratione & ut figura quæ fit à BΓ ad eam quæ fit à ΓA ita quadratum ex BΓ ad quadratum ex ΓA; & igitur ut figura quæ fit à BΓ ad eas quæ fiunt à BA, AΓ ita quadratum ex BΓ ad quadrata ex BA, AΓ. quadratum autem ex BΓ æquale eſt [per 47. 1.] quadratis ex BA, AΓ: ergo & figura quæ fit à BΓ eſt æqualis eis quæ à BA, AΓ fiunt, ſimilibus & ſimiliter deſcriptis. quod erat demonſtrandum.



Αλλως.

Ἐπεὶ τὰ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒA εἶδος διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒA. ἔχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒA τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒA· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒA ἕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒA τετράγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓA εἶδος ἕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓA τετράγωνον· ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒA, AΓ εἴδη ἕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒA, AΓ τετράγωνα. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον τοῖς ἀπὸ τῶν ΒA, AΓ τετραγώνοις· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν ΒA, AΓ εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXII. Theor.

Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habent, componantur ſecundum unum angulum, ita ut homologa latera ipſorum ſint parallela; reliqua triangulorum latera in directum ſibi invicem erunt.

Προτασις λβ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι· αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται.

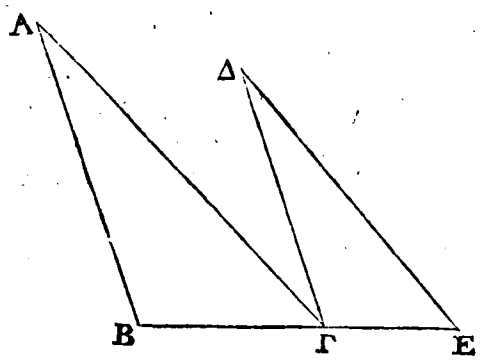
SInt duo triangula ABΓ, ΔΓE, quæ duo latera BA, AΓ duobus lateribus ΓΔ, ΔE proportionalia habeant, ut quidem BA ad AΓ ita ΓΔ ad ΔE; parallela autem ſit AB ipſi ΔΓ, & AΓ ipſi ΔE: dico BΓ ipſi ΓE in directum eſſe.

Quoniam enim AB parallela eſt ΔΓ, & in ipſas incidit recta linea AΓ; erunt [per 29. 1.] anguli alterni BAΓ, AΓΔ æquales inter ſe. ea-

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΓΕ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΒΑ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΓΔ, ΔΕ ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ ἕτως τὴν ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ, παράλληλον δὲ τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΓ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΕ· λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ.

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΑΓ, καὶ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Διὰ τὰ

τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο τρίγωνά ἐστι ΑΒΓ, ΔΓΕ μίαν γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Α μιᾷ γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ Δ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως τὴν ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΕ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΕ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΑΓ ἴση ἐστί. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ, ΑΒΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΑΓ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Γ, δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΓΕ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι, τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΓΕ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ.



Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι· αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

dem ratione & angulus ΓΔΕ æqualis eſt angulo ΑΓΔ: quare & ΒΑΓ ipſi ΓΔΕ eſt æqualis. & quoniam ΑΒΓ, ΔΓΕ ſunt duo triangula unum angulum qui ad Α uni angulo qui ad Δ æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia, ſcilicet ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΓΔ ad ΔΕ; erit [per 6. 6.] triangulum ΑΒΓ triangulo ΔΓΕ æquiangulum: ergo ΑΒΓ angulus eſt æqualis angulo ΔΓΕ. oſtenſus autem eſt & angulus ΑΓΔ æqualis angulo ΒΑΓ: totus igitur ΑΓΕ duobus ΑΒΓ, ΒΑΓ eſt æqualis. communis apponatur ΑΓΒ: ergo anguli ΑΓΕ, ΑΓΒ angulis ΒΑΓ, ΑΓΒ, ΑΒΓ æquales ſunt. ſed [per 32. 1.] ΒΑΓ, ΑΓΒ, ΑΒΓ anguli duobus rectis ſunt æquales: & igitur anguli ΑΓΕ, ΑΓΒ duobus rectis æquales erunt. itaque ad quandam rectam lineam ΑΓ, & ad punctum in ipſa Γ, duæ rectæ lineæ ΒΓ, ΓΕ, non ad eaſdem partes poſitæ, angulos qui ſunt deinceps ΑΓΕ, ΑΓΒ duobus rectis æquales faciunt: ergo [per 14. 1.] ΒΓ ipſi ΓΕ in directum erit.

Si igitur duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habent, ita componantur ſecundum unum angulum, ut homologa latera ipſorum ſint parallela; reliqua triangulorum latera in directum ſibi invicem erunt. quod erat demonſtrandum.

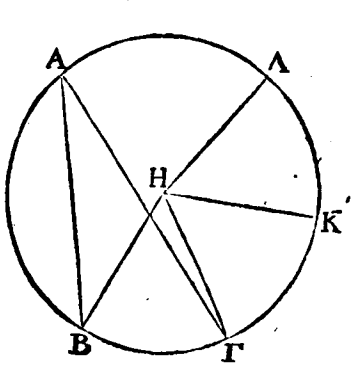
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι· ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνεστάμενοι.

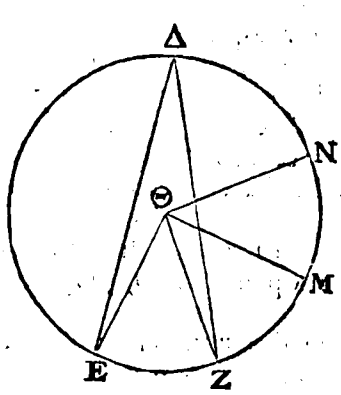
Prop. XXXIII. Theor.

In circulis æqualibus anguli eandem habent rationem quam circumferentiæ quibus inſiſtunt, ſive ad centra ſive ad circumferentias inſiſtant: adhuc etiam & ſectores, quippe qui ad centra ſunt conſtituti.

Ἐστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ πρὸς μὲν ταῖς κέντροις αὐτῶν ταῖς Η, Θ γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν οὕτως καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ· καὶ ἔτι ὁ ΗΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομέα.

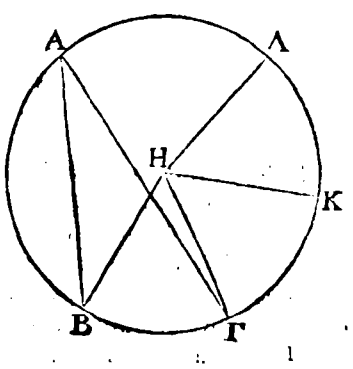


Sint æquales circuli ΑΒΓ, ΔΕΖ, & ad centra quidem ipſorum Η, Θ ſint anguli ΒΗΓ, ΕΘΖ, ad circumferentias vero anguli ΒΑΓ, ΕΔΖ: dico ut circumferentia ΒΓ ad ΕΖ circumferentiam ita eſſe & ΒΗΓ angulum ad angulum ΕΘΖ, & angulum ΒΑΓ ad angulum ΕΔΖ: & adhuc ſectorem ΗΒΓ ad ΘΕΖ ſectorem.



Ponantur enim circumferentiæ quidem ΒΓ æquales quotcumque deinceps ΓΚ, ΚΛ, circumferentiæ vero ΕΖ rurſus æquales quotcumque ΖΜ, ΜΝ, & jungantur ΗΚ, ΗΛ, ΘΜ, ΘΝ.

Quoniam igitur circumferentiæ ΒΓ, ΓΚ, ΚΛ inter ſe ſunt æquales, & anguli ΒΗΓ, ΓΗΚ, ΚΗΛ [per 27. 3.] inter ſe æquales erunt: quam multiplex igitur eſt circumferentia ΒΛ circumferentiæ ΒΓ tam multiplex eſt & ΒΗΛ angulus anguli ΒΗΓ. eadem ratione & quam multiplex eſt circumferentia ΕΝ circumferentiæ ΕΖ tam multiplex & ΕΘΝ angulus anguli ΕΘΖ. & ſi æqualis eſt ΒΛ circumferentia circumferentiæ ΕΝ, & angulus ΒΗΛ angulo ΕΘΝ [per 27. 3.] erit æqualis; & ſi circumferentia ΒΛ major eſt circumferentia ΕΝ, major erit & ΒΗΛ angulus angulo ΕΘΝ; & ſi minor, minor: quatuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, duabus nimirum circumferentiis ΒΓ, ΕΖ & duobus angulis ΒΗΓ, ΕΘΖ, ſumpta ſunt circumferentiæ quidem ΒΓ & ΒΗΓ anguli æque multiplicia *viz.* circumferentia ΒΛ & ΒΗΛ angulus; circumferentiæ vero ΕΖ & ΕΘΖ anguli æque multiplicia, nempe circumferentia ΕΝ & angulus ΕΘΝ. atque oſtenſum eſt ſi circumferentia ΒΛ ſuperat circumferentiam ΕΝ, & ΒΗΛ angulum ſuperare angulum ΕΘΝ; & ſi æqualis, æqualem; & ſi minor, minorem eſſe: igitur [per 5. def. 5.] ut circumferentia ΒΓ ad ΕΖ circumferentiam ita angulus ΒΗΓ ad angulum ΕΘΖ. ſed [per 15. 5.] ut ΒΗΓ angulus ad angulum ΕΘΖ, ita angulus ΒΑΓ ad ΒΔΖ angulum; uterque enim [per 20. 3.] utriuſque eſt duplus: & igitur ut ΒΓ circumferentia ad circumferentiam ΕΖ ita & angulus ΒΗΓ ad angulum ΕΘΖ, & angulus ΒΑΓ ad ΕΔΖ angulum.



In circulis igitur æqualibus anguli eandem habent rationem quam circumferentiæ quibus inſiſtunt, ſive ad centra ſive ad circumferentias inſiſtant. quod erat demonſtrandum.

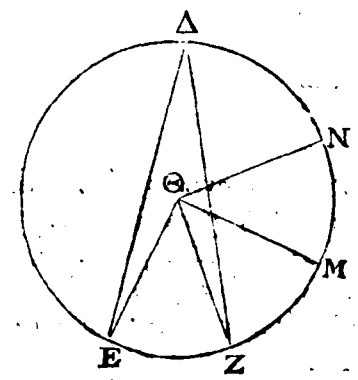
Dico inſuper & ut ΒΓ circumferentia ad circumferentiam ΕΖ ita eſſe ſectorem ΗΒΓ ad ΘΕΖ ſectorem.

Jungantur enim ΒΓ, ΓΚ, & ſumptis in circumferentiis ΒΓ, ΓΚ punctis Ξ, Ο, jungantur & ΒΞ, ΞΓ, ΓΟ, ΟΚ.

Itaque quoniam duæ ΒΗ, ΗΓ duabus ΓΗ, ΗΚ æquales ſunt & angulos æquales comprehendunt; erit & baſis ΒΓ baſi ΓΚ æqualis: æquale igitur eſt [per 4. 1.] & ΗΒΓ triangulum triangulo ΗΓΚ. & quoniam circumferentia ΒΓ circumferentiæ ΓΚ eſt æqualis, & reliqua ἡ εἰς

Κείσθωσαν γὰρ τῇ μὲν ΒΓ περιφερείᾳ ἴσαι οσαιδηποτοῦν κατὰ τὸ ἑξῆς αἱ ΓΚ, ΚΛ, τῇ δὲ ΕΖ περιφερείᾳ ἴσαι οσαιδηποτοῦν ἴσαι αἱ ΖΜ, ΜΝ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΚ, ΗΛ, ΘΜ, ΘΝ.

Επεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ ΒΓ, ΓΚ, ΚΛ περιφέρειαι ἀλλήλαις, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΓ, ΓΗΚ, ΚΗΛ γωνίαι ἀλλήλαις· οσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΒΓ τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΗΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΕΝ περιφέρεια τῆς ΕΖ τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΘΝ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΖ. καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῇ ΕΝ περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΗΛ τῇ ὑπὸ ΕΘΝ· καὶ εἰ μείζων ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΝ γωνίας· καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων· τεσσάρων δὴ οὐτων μεγεθῶν, δύο μὲν περιφερειῶν τῶν ΒΓ, ΕΖ, δύο δὲ γωνιῶν τῶν ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, εἴληπται τῆς μὲν ΒΓ περιφερείας καὶ τῆς ὑπὸ ΒΗΓ γωνίας ἰσάκις πολλαπλασίων, ἥτε ΒΛ περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία, τῆς δὲ ΕΖ περιφερείας καὶ τῆς ὑπὸ ΕΘΖ γωνίας ἥτε ΕΝ περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ ΕΘΝ γωνία. καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΝ· καὶ εἰ ἴση, ἴση· καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων· ἔστιν ἄρα ὡς ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ. ἀλλ' ὡς ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ οὕτως ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ, διπλασίων γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν οὕτως ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ.



Εν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον τοῖς περιφερείαις ἐφ' ὧν βεβήκασιν· ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

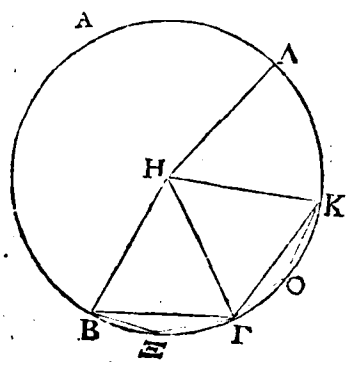
ΛΕΓΩ ὅτι καὶ ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν οὕτως ὁ ΗΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομέα.

Επεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΓ, ΓΚ, καὶ λαφθέντων ἐπὶ τῶν ΒΓ, ΓΚ περιφερειῶν τῶν Ξ, Ο σημείων, ἐπεζεύχθωσαν καὶ αἱ ΒΞ, ΞΓ, ΓΟ, ΟΚ.

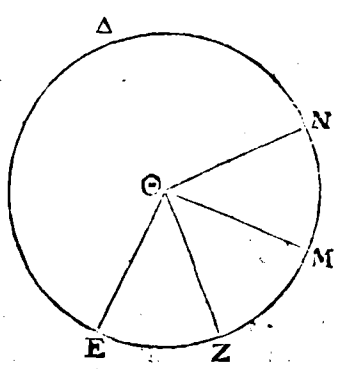
Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΗ, ΗΓ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΚ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, καὶ βάσις ἡ ΒΓ τῇ ΓΚ ἐστὶν ἴση· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΒΗΓ τρίγωνον τῷ ΗΓΚ τριγώνῳ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ περιφέρεια τῇ ΓΚ περιφερείᾳ, καὶ ἡ λοιπὴ

ἡ εἰς

ἡ εἰς τὸ ὅλον ΑΒΓ κύκλον περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ λοιπῇ τῇ εἰς τὸ αὐτὸν κύκλον περιφερείᾳ· ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ ΒΞΓ γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ ΓΟΚ ἐστὶν ἴση· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΞΓ τμῆμα τῷ ΓΟΚ τμήματι· καί εἰσιν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν ΒΓ, ΓΚ. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΞΓ τμῆμα τῷ ΓΟΚ τμήματι. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΒΗΓ τρίγωνον τῷ ΓΗΚ τριγώνῳ ἴσον· καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΗΒΓ τομεὺς ὅλῳ τῷ ΗΓΚ τομεῖ ἴσος ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΗΚΛ τομεὺς ἑκατέρῳ τῶν ΗΚΓ, ΗΓΒ ἴσος ἐστίν· οἱ τρεῖς ἄρα τομεῖς οἱ ΗΒΓ, ΗΓΚ, ΗΚΛ ἴσοι ἀλλήλοις εἰσί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΕΖ, ΘΖΜ, ΘΜΝ τομεῖς ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΓΒ περιφερείας, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς τοῦ ΗΒΓ τομέως. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΕΝ περιφέρεια τῆς ΕΖ περιφερείας, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΘΕΝ τομεὺς τοῦ ΘΕΖ τομέως· καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῇ ΕΝ, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς τῷ ΘΕΝ τομεῖ· καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς τοῦ ΘΕΝ τομέως· καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. πεσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν τῶν ΒΓ, ΕΖ περιφερειῶν, δύο δὲ τῶν ΗΒΓ, ΘΕΖ τομέων, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΒΓ περιφερείας ἡ τε ΗΒΓ τομέως ἥ τε ΒΛ περιφέρεια καὶ ὁ ΗΒΛ τομεύς, τῆς δὲ ΕΖ περιφερείας καὶ τοῦ ΘΕΖ τομέως ἰσάκις πολλαπλάσια ἥ τε ΕΝ περιφέρεια καὶ ὁ ΘΕΝ τομεύς. καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς τοῦ ΘΕΝ τομέως· καὶ εἰ ἴση, ἴσος· καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ὁ ΗΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομέα.



liqua circumferentia quæ complet totum circulum ΑΒΓ æqualis eſt [per 3. ax.] reliquæ quæ eundem circulum complet; quare [per 27. 3.] & angulus ΒΞΓ angulo ΓΟΚ eſt æqualis: ſimile igitur eſt [per 11. def. 3.] ΒΞΓ ſegmentum ſegmento ΓΟΚ: & ſunt ſuper æquales rectas lineas ΒΓ, ΓΚ. quæ autem ſuper æquales rectas lineas ſunt ſimilia circulorum ſegmenta [per 24. 3.] & inter ſe æqualia ſunt: ergo ſegmentum ΒΞΓ eſt æquale ſegmento ΓΟΚ. eſt autem & ΒΗΓ triangulum triangulo ΓΗΚ æquale: & totus igitur ſector ΗΒΓ [per 2. ax.] toti ſectori ΗΓΚ æqualis erit. eadem ratione & ΗΚΛ ſector utrivis ipſorum ΗΚΓ, ΗΓΒ eſt æqualis: tres igitur ſectores ΗΒΓ, ΗΓΚ, ΗΚΛ æquales ſunt inter ſe. ſimiliter & ſectores ΘΕΖ, ΘΖΜ, ΘΜΝ inter ſe ſunt æquales: quam multiplex igitur eſt ΒΛ circumferentia circumferentiæ ΒΓ, tam multiplex eſt & ΗΒΛ ſector ſectoris ΗΒΓ. eadem ratione & quam multiplex eſt circumferentia ΕΝ circumferentiæ ΕΖ, tam multiplex eſt & ΘΕΝ ſector ſectoris ΘΕΖ; & [ex modo oſtenſis] ſi circumferentia ΒΛ circumferentiæ ΕΝ eſt æqualis, & ſector ΗΒΛ æqualis eſt ſectori ΘΕΝ; & ſi circumferentia ΒΛ ſuperat circumferentiam ΕΝ, ſuperat & ΗΒΛ ſector ſectorem ΘΕΝ; & ſi minor, minor. quatuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, duabus quidem circumferentiis ΒΓ, ΕΖ, duobus vero ſectoribus ΗΒΓ, ΘΕΖ; ſumpta ſunt circumferentiæ quidem ΒΓ & ΗΒΓ ſectoris æque multiplicia, *viz.* circumferentia ΒΛ & ΗΒΛ ſector; circumferentiæ vero ΕΖ & ſectoris ΘΕΖ æque multiplicia, nempe circumferentia ΕΝ & ΘΕΝ ſector. atque oſtenſum eſt ſi ΒΛ circumferentia ſuperat circumferentiam ΕΝ, & ſectorem ΗΒΛ ſuperare ſectorem ΘΕΝ; & ſi æqualis æqualem eſſe; & ſi minor, minorem: eſt igitur [per 5. def. 5.] ut ΒΓ circumferentia ad circumferentiam ΕΖ ita ſector ΗΒΓ ad ΘΕΖ ſectorem.



Πόρισμα.

Καὶ δῆλον ὅτι καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸν τομέα οὕτως καὶ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν.

Corollarium.

Perſpicuum etiam eſt [per 11. 5.] & ut ſector ad ſectorem ita eſſe angulum ad angulum.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER SEPTIMUS.

DEFINITIONES.

1. UNITAS eſt, ſecundum quam unumquodque eorum quæ ſunt unum dicitur.

2. Numerus autem, ex unitatibus conſtans multitudo.

3. Pars eſt numerus numeri, minor majoris, cum minor metitur majorem.

4. Partes autem, quando non metitur.

5. Multiplex eſt major minoris, quando minor majorem metitur.

6. Par numerus eſt qui bifariam dividitur.

7. Impar vero, qui bifariam non dividitur: vel qui à pari numero unitate differt.

8. Pariter par numerus eſt, quem par numerus per parem numerum metitur.

9. Pariter vero impar eſt, quem par numerus per numerum imparem metitur.

10. Impariter vero impar numerus eſt, quem impar numerus per numerum imparem metitur.

11. Primus numerus eſt, quem unitas ſola metitur.

12. Primi inter ſe numeri ſunt, quos ſola unitas communis menſura metitur.

13. Compoſitus numerus eſt, quem numerus aliquis metitur.

ΟΡΟΙ.

α'. ΜΟΝΑΣ ἐστι, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται.

β'. Ἀριθμὸς δὲ, τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

γ'. Μέρος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸν μείζονα.

δ'. Μέρη δὲ, ὅταν μὴ καταμετρῇ.

ε'. Πολλαπλάσιος δὲ, ὁ μείζων τοῦ ἐλάττονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.

ϛ'. Ἄρτιος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος.

ζ'. Περισσὸς δὲ, ὁ μὴ διαιρούμενος δίχα· ἢ ὁ μονάδι διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ.

η'. Ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν, ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατ' ἄρτιον ἀριθμόν.

θ'. Ἀρτιάκις δὲ περισσός ἐστιν, ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν ἀριθμόν.

ι'. Περισσάκις δὲ περισσός ἐστιν ἀριθμός, ὁ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν ἀριθμόν.

ια'. Πρῶτος ἀριθμός ἐστιν, ὁ μονάδι μόνῃ μετρούμενος.

ιβ'. Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν, οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

ιγ'. Σύνθετος ἀριθμός ἐστιν, ὁ ἀριθμῷ τινι μετρούμενος.

ιδ'. Σύνθετοι

ιδ'. Σύνθετοι δὲ πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί εἰσιν, οἱ ἀριθμῷ τινι μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

14. Compositi inter se numeri sunt, quos numerus aliquis communis mensura metitur.

ιε'. Ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάζειν λέγεται, ὅταν ὅσαι ἰσαι εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες τοσαύκις συντεθῇ ὁ πολλαπλασιαζόμενος, ἡ γέννηταί τις.

15. Numerus numerum multiplicare dicitur, quando quot unitates sunt in ipso toties componitur multiplicatus, & aliquis gignitur.

ιϛ'. Ὅταν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος ἐπίπεδος καλεῖται· πλευραὶ δὲ αὐτοῦ, οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

16. Quando duo numeri sese multiplicantes aliquem fecerint, qui factus est planus appellatur; latera vero ipsius numeri sese multiplicantes.

ιζ'. Ὅταν δὲ τρεῖς ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος στερεὸς καλεῖται· πλευραὶ δὲ αὐτοῦ, οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

17. Quando autem tres numeri sese multiplicantes aliquem fecerint, factus solidus appellatur: latera vero ipsius, numeri sese multiplicantes.

ιη. Τετράγωνος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἰσάκις ἴσος, ἢ ὁ ὑπὸ δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.

18. Quadratus numerus est qui æqualiter æqualis; vel qui sub duobus æqualibus numeris continetur.

ιθ'. Κύβος δὲ ὁ ἰσάκις ἴσος ἰσάκις, ἢ ὁ ὑπὸ τριῶν ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.

19. Cubus vero, qui æqualiter æqualis æqualiter; vel qui sub tribus æqualibus numeris continetur.

κ'. Ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιος, ἢ τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦσιν.

20. Numeri proportionales sunt, quando primus secundi & tertius quarti æque multiplex est, vel eadem pars, vel eædem partes.

κα'. Ὅμοιοι ἐπίπεδοι καὶ στερεοὶ ἀριθμοί εἰσιν, οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς.

21. Similes plani & solidi numeri sunt, qui latera habent proportionalia.

κβ'. Τέλειος ἀριθμός ἐστιν, ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος ὤν.

22. Perfectus numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Propositio I. Theorema.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἐκκειμένων ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρῇ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ ἕως οὗ ληφθῇ μονάς· οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Si duobus numeris inæqualibus expositis detracto semper minore de majore, reliquus minime metiatur præcedentem quoad assumpta fuerit unitas; numeri à principio positi primi inter se erunt.

Δύο γὰρ ἀνίσων ἀριθμῶν τῶν ΑΒ, ΓΔ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρείτω τὸν πρὸ ἑαυτοῦ ἕως οὗ ληφθῇ μονάς· λέγω ὅτι οἱ ΑΒ, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί, τουτέστιν, ὅτι τοὺς ΑΒ, ΓΔ μονὰς μόνη μετρεῖ.

Duobus enim inæqualibus numeris ΑΒ, ΓΔ detracto semper minore de majore, reliquus minime metiatur præcedentem, quoad assumpta fuerit unitas: dico numeros ΑΒ, ΓΔ inter se primos esse, hoc est, ipsos ΑΒ, ΓΔ unitatem solam metiri.

Α · Θ · · Ζ · · · · · · · · · Β
Γ · · Η · · · Δ
Ε —

Εἰ γὰρ μὴ εἰσὶν οἱ ΑΒ, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Ε, καὶ ὁ μὲν ΓΔ τὸν ΑΒ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΖΑ, ὁ δὲ ΑΖ τὸν ΔΓ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΗΓ, ὁ δὲ ΗΓ τὸν ΖΑ μετρῶν λειπέτω μονάδα τὴν ΘΑ.

Si enim ΑΒ, ΓΔ non sint primi inter se, metietur eos aliquis numerus. metiatur, sitque Ε, & ΓΔ quidem ipsum ΑΒ metiens relinquat seipso minorem ΖΑ; ΑΖ vero metiens ΔΓ relinquat seipso minorem ΗΓ; & ΗΓ metiens ΖΑ unitatem ΘΑ relinquat.

Ἐπεὶ οὖν ὁ Ε τὸν ΓΔ μετρεῖ, ὁ δὲ ΓΔ τὸν ΒΖ μετρεῖ· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν ΒΖ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ

Quoniam igitur numerus Ε ipsum ΓΔ metitur, ΓΔ vero metitur ΒΖ; & Ε ipsum ΒΖ metitur. me-

Euclides in hoc libro literas adhibet alphabeticas pro numerorum symbolis: Nos, alios editores secuti, tot adjecimus puncta, elucidandi gratia, quot numeris istis respondeant.

titur autem & totum BA: ergo & reliquum AZ metietur, ſed AZ metitur ΔH: quare & E ipſum ΔH metietur. metitur autem & totum ΔΓ: ergo & reliquum ΓH metietur. at ΓH metitur ZΘ; & igitur E ipſum ZΘ metietur. ſed & metitur totum ZA; & igitur numerus E metietur reliquam AΘ unitatem, quod [per 3. def. 7.] fieri non poteſt: non igitur ipſos AB, ΓΔ metietur aliquis numerus: ergo AB, ΓΔ primi inter ſe ſunt. quod erat demonſtrandum.

A . Θ . . Z . . . . . B
Γ . . H . . . Δ
E ——

καὶ ὅλον τὸ BA· ἀλλὰ καὶ τὸ AZ μετρήσει ὁ E. ὁ δὲ AZ τὸ ΔH μετρεῖ· καὶ ὁ E ἄρα τὸ ΔH μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΔΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΓH μετρήσει ὁ E. ὁ δὲ ΓH τὸ ZΘ μετρεῖ· καὶ ὁ E ἄρα τὸ ZΘ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ZA· καὶ λοιπὸν ἄρα τὴν ΑΘ μονάδα μετρήσει, ἀριθμὸς ὤν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς AB, ΓΔ ἀριθμοὺς μετρήσει τις ἀριθμός· οἱ AB, ΓΔ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. II. Probl.

Duobus numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram invenire.

SInt dati duo numeri non primi inter ſe AB, ΓΔ, quorum minor ſit ΓΔ: oportet ipſorum AB, ΓΔ maximam communem menſuram invenire.

Si igitur ΓΔ metitur AB, cum etiam ſeipſum metiatur, erit ΓΔ ipſorum ΓΔ, AB communis menſura. & perſpicuum eſt eam maximam eſſe; nullus enim major quam ΓΔ ipſum ΓΔ metietur.

A . . . . . B
Γ . . . . Δ

Si vero ΓΔ non metitur AB, ipſorum AB, ΓΔ detracto ſemper minore de majore, relinquetur aliquis numerus, qui metietur præcedentem. unitas quidem non relinquetur. *ſi enim non, erunt AB, ΓΔ primi inter ſe, † quod non ponitur; relinquetur igitur quidem numerus qui metietur præcedentem. & ΓΔ quidem ipſum AB metiens relinquat ſeipſo minorem AE; AE vero metiens ΓΔ relinquat ſeipſo minorem ΓZ; ΓZ vero ipſum AE metiatur, itaque quoniam ΓZ ipſum AE metitur, AE vero ipſum ΔZ; & ΓZ ipſum ΔZ metietur. ſed & metitur ſeipſum; & igitur metietur totum ΓΔ. at ΓΔ ipſum BE metitur: ergo & ΓZ metitur BE. metitur autem & EA: & igitur totum BA metietur. ſed & metitur ΓΔ: ergo ΓZ ipſos AB, ΓΔ metitur; ac propterea ΓZ ipſorum AB, ΓΔ eſt communis menſura. dico etiam maximam eſſe. ſi enim ΓZ non eſt maxima communis menſura ipſorum AB, ΓΔ, ipſos AB, ΓΔ metietur aliquis numerus major ipſo ΓZ. metiatur, ſitque H. & quoniam H ipſum ΓΔ metitur; ΓΔ vero ipſum BE: & H ipſum BE metitur. metitur autem & totum BA: & reliquum igitur AE metietur. ſed AE metitur ΔZ: ergo & H ipſum ΔZ metietur. metitur autem & totum ΔΓ: quare & reliquum ΓZ metietur, major minorem, quod fieri non poteſt: non igitur ipſos AB, ΓΔ numeros metietur numerus aliquis major ipſo ΓZ: ergo ΓZ eſt ipſorum AB, ΓΔ maxima communis menſura. quod erat demonſtrandum.

A . . . . E . . . . . B
Γ . . Z . . . . Δ
H ——

* &. ſi enim non non relinquatur, *i. e.* ſi relinquatur. † *i. e.* quod eſt contra hypotheſin.

Πρότασις β'.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

ΕΣτωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ AB, ΓΔ, ἔστω δὲ ἐλάσσων ὁ ΓΔ· δεῖ δὴ τῶν AB, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Εἰ μὲν οὖν ὁ ΓΔ τὸν AB μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ ΓΔ ἄρα τῶν ΓΔ, AB κοινὸν μέτρόν ἐστι. φανερὸν ὅτι καὶ μέγιστον, οὐδεὶς γὰρ μείζων τοῦ ΓΔ τὸν ΓΔ μετρήσει.

Εἰ δὲ ὁ μετρεῖ ὁ ΓΔ τὸν AB, τὸν AB, ΓΔ ἀνθυφαιρούμενος ἀεὶ ἑλάττονος ἀπὸ μείζονος, λειφθήσεταί τις ἀριθμὸς, ὃς μετρήσει τὸ πρὸ ἑαυτοῦ. μονὰς μὲν γὰρ οὐ λειφθήσεται). εἰ δὲ μή, ἔσονται οἱ AB, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ὑπόκειται), λειφθήσεταί τις ἀριθμὸς, ὃς μετρήσει τὸ πρὸ ἑαυτοῦ. καὶ ἐπεὶ μὲν ΓΔ τὸν AB μετρῶν λείπετω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν AE, ὁ δὲ AE τὸν ΓΔ μετρῶν λείπετω ἑαυτοῦ τὸν ΓZ, ὁ δὲ ΓZ τὸν AE μετρείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ ΓZ τὸν AE μετρεῖ, ὁ δὲ AE τὸν ΔZ μετρεῖ· καὶ ὁ ΓZ ἄρα τὸν ΔZ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΓΔ μετρήσει. ὁ δὲ ΓΔ τὸν BE μετρεῖ· καὶ ὁ ΓZ ἄρα τὸν BE μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν EA· καὶ ὅλον ἄρα τὸν BA μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΓΔ· ὁ ΓZ ἄρα τοὺς AB, ΓΔ μετρεῖ· ὁ ΓZ ἄρα τῶν AB, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστί. λέγω δὴ ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μὴ ἔστιν ὁ ΓZ τῶν AB, ΓΔ μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς AB, ΓΔ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τὸν ΓZ. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ H. ἐπεὶ ὁ H τὸν ΓΔ μετρεῖ, ὁ δὲ ΓΔ τὸν BE μετρεῖ· καὶ ὁ H ἄρα τὸν BE μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν BA· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν AE μετρήσει. ὁ δὲ AE τὸν ΔZ μετρεῖ· καὶ ὁ H ἄρα τὸν ΔZ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΔΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓZ μετρήσει, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς AB, ΓΔ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει, μείζων ὢν τὸν ΓZ· ὁ ΓZ ἄρα τῶν AB, ΓΔ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πό-

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

Corollarium.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi numerus duos numeros metiatur, & maximam eorum communem menſuram metiri.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Prop. III. Probl.

Tribus numeris datis non primis inter ſe, maximam ipſorum communem menſuram invenire.

Ἐστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

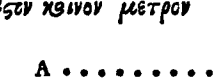
Εἰλήφθω γὰρ δύο τῶν Α, Β τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ· ὁ δὴ Δ τὸν Γ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον, μετρεῖ δὲ καὶ τοὺς Α, Β· ὁ Δ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ· ὁ Δ ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινὸν μέτρον ἐστί. λέγω ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μὴ ἔστιν ὁ Δ τῶν Α, Β, Γ κοινὸν μέγιστον μέτρον, μετρήσει τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ Δ. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Ε. ἐπεὶ οὖν ὁ Ε τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τοὺς Α, Β ἄρα μετρήσει, καὶ τὸν τῶν Α, Β ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ δὲ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ Δ· ὁ Ε ἄρα τὸν Δ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ Δ· ὁ Δ ἄρα τῶν Α, Β, Γ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον.

Μὴ μετρείτω δὴ ὁ Δ τὸν Γ. λέγω πρῶτον, ὅτι οἱ Δ, Γ οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β, Γ οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός· ὁ δὴ τοὺς Α, Β, Γ μετρῶν καὶ τοὺς Α, Β μετρήσει καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον τὸ Δ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· τοὺς Δ, Γ ἄρα ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ Δ, Γ ἄρα οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. εἰλήφθω οὖν αὐτῶν τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, ὁ Ε. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, ὁ δὲ Δ τοὺς Α, Β μετρεῖ· καὶ ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ· ὁ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινόν ἐστι μέτρον. λέγω δὴ ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μὴ ἔστιν ὁ Ε τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν οὗ Ε. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Ζ. καὶ ἐπεὶ ὁ Ζ τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τοὺς Α, Β μετρεῖ, καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ δὲ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ Δ· ὁ Ζ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ζ ἄρα τοὺς Δ, Γ μετρεῖ· καὶ τὸ τῶν Δ, Γ ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρεῖ. τὸ δὲ τῶν Γ, Δ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ Ε· ὁ Ζ ἄρα τὸν Ε μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ ἀριθμός τις μετρήσει μείζων ὢν οὗ Ε· ὁ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον.

Sint dati tres numeri non primi inter ſe A, B, Γ: oportet ipſorum A, B, Γ maximam communem menſuram invenire.

Sumatur enim duorum A, B maxima communis menſura Δ: itaque Δ vel ipſum Γ metitur, vel non metitur. metiatur primum, metitur autem & ipſos A, B: ergo Δ numeros A, B, Γ metitur: & ob id ipſorum eſt communis menſura. dico & maximam eſſe. ſi enim Δ non eſt ipſorum A, B, Γ maxima communis menſura, metietur eos aliquis numerus major ipſo Δ. metiatur, & ſit E. quoniam igitur E metitur numeros A, B, Γ, & ipſos A, B metietur, & [per cor. 2. 7.] ipſorum A, B maximam communem menſuram. ſed ipſorum A, B maxima communis menſura eſt Δ: ergo E ipſum Δ metitur, major minorem, quod fieri non poteſt: non igitur A, B, Γ numeros numerus aliquis major ipſo Δ metietur: ergo Δ ipſorum A, B, Γ maxima eſt communis menſura.

Non metiatur autem Δ ipſum Γ. dico primum numeros Δ, Γ non eſſe primos inter ſe. quoniam enim A, B, Γ non ſunt inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus; & qui metitur ipſos A, B, Γ & ipſos A, B metietur, & [per cor. 2. 7.] ipſorum A, B maximam communem menſuram, videlicet Δ, metietur. metitur autem & ipſum Γ: ergo ipſos Δ, Γ numerus aliquis metietur; ideoque Δ, Γ non ſunt inter ſe primi. ſumatur ipſorum maxima communis menſura E. & quoniam E ipſum Δ metitur, & Δ metitur ipſos A, B, & E ipſos A, B metietur. metitur autem & Γ; ergo & ipſos A, B, Γ metietur: eritque E ipſorum A, B, Γ communis menſura. dico & maximam eſſe. ſi enim E non eſt ipſorum A, B, Γ maxima communis menſura, metietur A, B, Γ numeros numerus aliquis major ipſo E. metiatur, ſitque Z. & quoniam Z metitur numeros A, B, Γ; & ipſos A, B & ipſorum A, B maximam communem menſuram metietur. ſed ipſorum A, B maxima communis menſura eſt Δ: ergo Z ipſum Δ metitur. metitur autem & ipſum Γ: quare Z & ipſos Δ, Γ; & igitur ipſorum Δ, Γ maximam communem menſuram metietur. ſed ipſorum Γ, Δ maxima communis menſura eſt E: ergo Z ipſum E metitur, major minorem, quod fieri non poteſt: non igitur A, B, Γ numeros numerus aliquis major ipſo E metietur; ergo E ipſorum A, B, Γ maxima eſt communis menſura.



Tribus igitur numeris datis non primis inter ſe, eorum maxima communis menſura inventa eſt. quod erat faciendum.

Corollarium.

Ex his manifeſtum eſt, ſi numerus numeros tres metiatur, & ipſorum maximam communem menſuram metiri.

Eodem modo & pluribus numeris datis, maximam communem menſuram inveniemus.

Τριῶν ἄρα ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, εὕρηται τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτων φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοὺς τρεῖς μετρῇ, καὶ τὸν μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ πλειόνων ἀριθμῶν δοθέντων, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρήσομεν.

Prop. IV. Theor.

Omnis numerus omnis numeri, minor majoris, vel pars eſt vel partes.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Πᾶς ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ἤτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη.

SInt duo numeri A, BΓ, quorum BΓ ſit minor: dico BΓ ipſius A vel partem eſſe vel partes.

Numeri enim A, BΓ vel primi ſunt inter ſe, vel non. ſint prius inter ſe primi, & diviſo BΓ in unitates, quæ in ipſo ſunt, erit [per 1. & 2. def. 7.] unaquæque unitas earum quæ in BΓ pars aliqua ipſius A: ergo BΓ ipſius A partes eſt.

A . . . . . .
B . . . . . Γ

Sed non ſint A, BΓ inter ſe primi: itaque BΓ vel ipſum A metitur vel non. &, ſiquidem metitur, erit BΓ pars ipſius A.

A . . . . . .
B . . . . Γ

Si vero non. ſumatur [per 2. 7.] ipſorum A, BΓ maxima communis menſura Δ; & dividatur BΓ in numeros ipſi Δ æquales BE, EZ, ZΓ. quoniam igitur Δ numerum A metitur, erit Δ pars ipſius A. æqualis autem eſt Δ unicuique ipſorum BE, EZ, ZΓ: ergo & unuſquiſque ipſorum BE, EZ, ZΓ pars eſt ipſius A: ac propterea BΓ ipſius A partes eſt.

A . . . . . .
B . . Ε . . Z . . Γ
Δ . .

Omnis igitur numerus omnis numeri, minor majoris, vel pars eſt vel partes. quod erat demonſtrandum.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ A, BΓ, ὧν ἔλασσων ὁ BΓ· λέγω ὅτι ὁ BΓ τοῦ A ἤτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη.

Οἱ A, BΓ πρότερον γὰρ ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὔ. ἔστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, διῃρήσθω δὴ τοῦ BΓ εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἔσται ἑκάστη μονὰς τῶν ἐν τῷ BΓ μέρος τι τοῦ A· ὥστε μέρη ἐστὶν ὁ BΓ τοῦ A.

Μὴ ἔστωσαν δὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ A, BΓ· ὁ δὴ BΓ τὸν A ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὔ μετρεῖ. εἰ μὲν οὖν ὁ BΓ τὸν A μετρεῖ, μέρος ἐστὶν ὁ BΓ τοῦ A.

Εἰ δὲ οὔ. εἰλήφθω τῶν A, BΓ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ, καὶ διῃρήσθω ὁ BΓ εἰς τὰς τῷ Δ ἴσας, τὰς BE, EZ, ZΓ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν A μετρεῖ, μέρος ἐστὶν ὁ Δ τοῦ A. ἴσος δὲ ὁ Δ ἑκατέρᾳ τῶν BE, EZ· ἑκάστη ἄρα τῶν BE, EZ, ZΓ τοῦ A μέρος ἐστί· ὥστε μέρη ἐστὶν ὁ BΓ τοῦ A.

Πᾶς ἄρα ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ἤτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. V. Theor.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars; & uterque utriuſque eadem pars erit, quæ unus unius.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος· καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ εἷς τοῦ ἑνός.

NUmerus A numeri BΓ pars ſit, & alter Δ alterius EZ eadem pars quæ eſt A ipſius BΓ: dico & utrumque A, Δ utriuſque BΓ, EZ eandem partem eſſe, quæ eſt A ipſius BΓ.

Quoniam enim quæ pars eſt A ipſius BΓ eadem eſt & Δ ipſius EZ, quot numeri ſunt in BΓ æquales ipſi A tot erunt & in EZ numeri æquales ipſi Δ. dividatur BΓ quidem in numeros æquales ipſi A, videlicet in BH, HΓ; EZ vero dividatur in numeros ipſi Δ æquales, hoc eſt EΘ, ΘZ; erit utique æqualis multitudo numerorum BH, HΓ multitudini ipſorum EΘ, ΘZ. & quoniam æqualis eſt BH ipſi A, & EΘ ipſi Δ; erunt BH, EΘ ipſis A, Δ,

A . . .
B . . . H . . . Γ
Δ . . . .
E . . . . Θ . . . . Z

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ A ἀριθμοῦ τοῦ BΓ μέρος ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ Δ ἑτέρου τοῦ EZ τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ὁ A τοῦ BΓ· λέγω ὅτι καὶ συναμφότερος ὁ A, Δ συναμφοτέρου τοῦ BΓ, EZ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὁ A τοῦ BΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ A τοῦ BΓ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Δ τοῦ EZ· ὅσοι ἄρα ἀριθμοί εἰσιν ἐν τῷ BΓ ἴσοι τῷ A, τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ EZ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Δ. διῃρήσθω ὁ μὲν BΓ εἰς τὰς τῷ A ἴσας τὰς BH, HΓ· ὁ δὲ EZ εἰς τὰς τῷ Δ ἴσας τὰς EΘ, ΘZ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν BH, HΓ τῷ πλήθει τῶν EΘ, ΘZ. καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ μὲν BH τῷ A, ὁ δὲ EΘ τῷ Δ· ὁ BH ἄρα καὶ EΘ τοῖς A, Δ

ἴσοι

ἴσοι εἰσί. καὶ ἀλλὰ πάντα ὁ ΗΓ τῷ Α ἴσος ἐστὶ, καὶ ὁ ΘΖ τῷ Δ· καὶ αἱ ΗΓ, ΘΖ ἄρα ταῖς Α, Δ ἴσοι εἰσίν· ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Α, τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν ταῖς ΒΓ, ΕΖ ἴσοι ταῖς Α, Δ· ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶν ὁ ΒΓ τοῦ Α, τοσουταπλάσιον ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΒΓ, ΕΖ συναμφοτέρου τοῦ Α, Δ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ ΒΓ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ Α, Δ συναμφοτέρου τοῦ ΒΓ, ΕΖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

æquales. & eadem ratione cum ΗΓ ſit æqualis ipſi Α, & ΘΖ ipſi Δ; & ΗΓ, ΘΖ ipſis Α, Δ æquales erunt: quot igitur numeri ſunt in ΒΓ, æquales ipſi Α tot ſunt & in ΒΓ, ΕΖ æquales ipſis Α, Δ: ergo quotuplex eſt ΒΓ ipſius Α totuplex erit & uterque ΒΓ, ΕΖ utriuſque Α, Δ: quæ igitur pars eſt Α ipſius ΒΓ, eadem pars erit & uterque Α, Δ utriuſque ΒΓ, ΕΖ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη, ᾖ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ᾖ· καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ εἷς τοῦ ἑνός.

PROP. VI. THEOR.

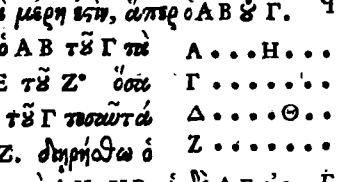
Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes; & uterque utriuſque eædem partes erit, quæ unus unius.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ ΑΒ ἀριθμοῦ τοῦ Γ μέρη ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ ΔΕ ἑτέρου τοῦ Ζ τὰ αὐτὰ μέρη ἅπερ ὁ ΑΒ τοῦ Γ· λέγω ὅτι καὶ συναμφότερος ὁ ΑΒ, ΔΕ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν, ἅπερ ὁ ΑΒ τοῦ Γ.

Ἐπεὶ γὰρ ἃ μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ Γ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μέρη τοῦ Γ τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ ΔΕ μέρη τοῦ Ζ. διῃρήσθω ὁ μὲν ΑΒ εἰς τὰ τοῦ Γ μέρη τὰ ΑΗ, ΗΒ, ὁ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τοῦ Ζ μέρη τὰ ΔΘ, ΘΕ.

Ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ πλήθει τῶν ΔΘ, ΘΕ. καὶ ἐπεὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ Γ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΔΘ τοῦ Ζ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ Γ αὐτὸ τὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΑΗ, ΔΘ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΗΒ τοῦ Γ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΗΒ, ΘΕ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ· ἃ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ Γ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΑΒ, ΔΕ συναμφοτέρου τοῦ Γ, Ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Numerus enim ΑΒ numeri Γ partes ſit, & alter ΔΒ alterius Ζ eædem partes quæ ΑΒ ipſius Γ: dico & utrumque ΑΒ, ΔΕ utriuſque Γ, Ζ eaſdem partes eſſe, quæ ΑΒ ipſius Γ.



Quoniam enim quæ partes eſt ΑΒ ipſius Γ eædem eſt ΔΕ ipſius Ζ, quot ſunt in ΑΒ partes ipſius Γ tot erunt & in ΔΕ partes ipſius Ζ. dividatur ΑΒ quidem in partes ipſius Γ, videlicet ΑΗ, ΗΒ; ΔΕ vero dividatur in in partes ipſius Ζ, hoc eſt ΔΘ, ΘΕ.

Erit ipſorum ΑΗ, ΗΒ multitudo æqualis multitudini ipſorum ΔΘ, ΘΕ. & quoniam quæ pars eſt ΑΗ ipſius Γ eadem eſt pars & ΔΘ ipſius Ζ, quæ pars eſt ΑΗ ipſius Γ eadem pars erit [per 5.7.] & uterque ΑΗ, ΔΘ utriuſque Γ, Ζ. ſimili ratione & quæ pars eſt ΗΒ ipſius Γ eadem pars erit & uterque ΗΒ, ΘΕ utriuſque Γ, Ζ: quæ igitur partes eſt ΑΒ ipſius Γ eædem partes eſt & uterque ΑΒ, ΔΕ utriuſque Γ, Ζ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, ὅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος· καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

PROP. VII. THEOR.

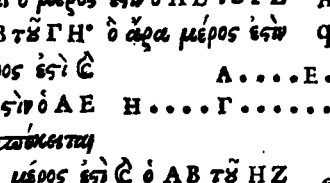
Si numerus numeri fuerit pars, quæ ablatus ablati; & reliquus reliqui eadem pars erit, quæ totus totius.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ ΑΒ ἀριθμοῦ τοῦ ΓΔ μέρος ἔστω, ὅπερ ἀφαιρεθεὶς ὁ ΑΕ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ ὁ λοιπὸς ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν, ὅπερ ὁ ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

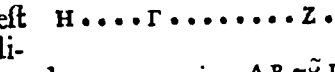
Ὁ γὰρ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ τὸ αὐτὸ μέρος ἔστω καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΓΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΓΗ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΗΖ, ὁ δὲ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ τὸ αὐτὸ μέρος ὑπόκειται καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΗΖ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ὁ ΑΒ ἄρα ἑκατέρου τῶν ΗΖ, ΓΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΗΖ τῷ ΓΔ. κοινὸς ἀφῃρήσθω ὁ ΓΖ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΗΓ λοιπῷ τῷ ΖΔ ἴσος ἐστί. καὶ ἐπεὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΗΓ, ἴσος

Numerus enim ΑΒ numeri ΓΔ pars ſit, quæ ablatus ΑΕ ablati ΓΖ: dico & reliquum ΕΒ reliqui ΖΔ eandem partem eſſe, quæ eſt totus ΑΒ totius ΓΔ.

Quæ enim pars eſt ΑΕ ipſius ΓΖ eadem pars ſit & ΕΒ ipſius ΓΗ. & quoniam quæ pars eſt ΑΕ ipſius ΓΖ eadem pars eſt & ΕΒ ipſius ΓΗ; quæ pars eſt ΑΕ ipſius ΓΖ eadem pars eſt [per 5.7.] & ΑΒ ipſius ΗΖ. quæ autem pars eſt ΑΕ ipſius ΓΖ eadem pars ponitur & ΑΒ ipſius ΓΔ: quæ igitur pars eſt ΑΒ ipſius ΗΖ eadem eſt & ΑΒ ipſius ΓΖ: quare ΑΒ utriuſque ΗΖ, ΓΔ eadem eſt pars: æqualis igitur eſt ΗΖ ipſi ΓΔ. communis auferatur ΓΖ: ergo reliquus ΗΓ reliquo ΖΔ eſt æqualis. & quoniam quæ pars eſt ΑΕ ipſius ΓΖ eadem eſt & ΕΒ ipſius ΗΓ; æqualis



autem est HΓ ipsi ZΔ, quæ pars est AE ipsius ΓZ eadem erit & EB ipsius ZΔ. sed quæ pars est AE ipsius ΓZ eadem est [ex hyp.] & AB ipsius ΓΔ: ergo quæ pars est EB ipsius ZΔ eadem est & AB ipsius ΓΔ: & reliquus igitur EB reliqui ZΔ eadem pars erit quæ totus AB totius ΓΔ. quod erat demonstrandum.



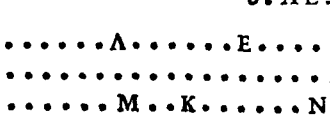
δὲ ὁ ΗΓ τοῦ ΖΔ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΖΔ. ἀλλὰ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΕΒ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὁ ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VIII. Theor.

Si numerus numeri fuerit partes, quæ ablatus ablati; & reliquus reliqui eædem partes erit, quæ totus totius.

NUmerus enim AB numeri ΓΔ sit partes, quæ ablatus AE ablati ΓZ: dico & reliquum EB reliqui ZΔ easdem partes esse, quæ totus AB totius ΓΔ.

Ponatur enim ipsi AB æqualis HΘ: quæ igitur partes est HΘ ipsius ΓΔ eædem est & AE ipsius ΓZ. dividatur HΘ quidem in partes ipsius ΓΔ, videlicet HK, KΘ; AE vero dividatur in partes ipsius ΓZ, videlicet AΛ, ΛE: erit igitur ipsarum HK, KΘ multitudo æqualis multitudini ipsarum AΛ, ΛE.



& quoniam quæ pars est HK ipsius ΓΔ eadem est & AΛ ipsius ΓZ, major autem ΓΔ quam ΓZ; & HK quam AΛ est major. ponatur ipsi AΛ æqualis HM: quæ igitur pars est HK ipsius ΓΔ eadem est & HM ipsius ΓZ: quare [per 7. 7.] & reliquus MK reliqui ZΔ eadem pars est quæ totus HK totius ΓΔ. rursus quoniam quæ pars est KΘ ipsius ΓΔ eadem est & ΛB ipsius ΓZ. major autem ΓΔ quam ΓZ: erit & KΘ quam ΛE major. ponatur ipsi ΛE æqualis KN: quæ igitur pars est KΘ ipsius ΓΔ eadem est & KN ipsius ΓZ: ergo & reliquus NΘ reliqui ZΔ eadem pars est quæ totus KΘ totius ΓΔ. ostensum autem est & reliquum MK reliqui ZΔ eandem partem esse quæ totus HK totius ΔΓ: & uterque igitur simul MK, NΘ ipsius ΔZ eædem partes est quæ totus ΘH totius ΔΓ. æqualis autem est uterque simul MK, NΘ ipsi EB; ΘH vero ipsi BA: & reliquus igitur EB reliqui ZΔ eædem partes est quæ totus AB totius ΓΔ. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, ἅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος· καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

ΑΡιθμὸς γὰρ ὁ ΑΒ ἀριθμοῦ τοῦ ΓΔ μέρη ἔστω, ἅπερ ἀφαιρεθεὶς ὁ ΑΕ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστίν, ἅπερ ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

Κείσθω γὰρ τῷ ΑΒ ἴσος ὁ ΗΘ· ἃ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ ΗΘ τοῦ ΓΔ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ. διῃρήσθω ὁ μὲν ΗΘ εἰς τὰ τοῦ ΓΔ μέρη τὰ ΗΚ, ΚΘ, ὁ δὲ ΑΕ εἰς τὰ τοῦ ΓΖ μέρη τὰ ΑΛ, ΛΕ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΗΚ, ΚΘ τῷ πλήθει τῶν ΑΛ, ΛΕ. καὶ ἐπεὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΗΚ τοῦ ΓΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΛ τοῦ ΓΖ, μείζων δὲ ὁ ΓΔ τοῦ ΓΖ· μείζων ἄρα καὶ ὁ ΗΚ τοῦ ΑΛ. κείσθω τῷ ΑΛ ἴσος ὁ ΗΜ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΗΚ τοῦ ΓΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΜ τοῦ ΓΖ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΜΚ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὅλος ὁ ΗΚ ὅλου τοῦ ΓΔ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΚΘ τοῦ ΓΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΛΕ τοῦ ΓΖ. μείζων δὲ ὁ ΓΔ τοῦ ΓΖ· μείζων ἄρα καὶ ὁ ΚΘ τοῦ ΛΕ. κείσθω ἴσος τῷ ΛΕ ὁ ΚΝ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΚΘ τοῦ ΓΔ τὸ αὐτὸ μέρος καὶ ὁ ΚΝ τοῦ ΓΖ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΝΘ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὅλος ὁ ΚΘ ὅλου τοῦ ΓΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ λοιπὸς ὁ ΜΚ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ὢν ὅπερ ὅλος ὁ ΗΚ ὅλου τοῦ ΔΓ· συναμφότερος ἄρα ὁ ΜΚ, ΝΘ τοῦ ΔΖ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν ἅπερ ὅλος ὁ ΘΗ ὅλου τοῦ ΔΓ. ἴσος δὲ συναμφότερος μὲν ὁ ΜΚ, ΝΘ τῷ ΕΒ, ὁ δὲ ΘΗ τῷ ΒΑ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν ἅπερ ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. IX. Theor.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars; & permutando quæ pars est vel partes primus tertii, eadem erit pars vel eædem partes & secundus quarti.

NUmerus enim A numeri BΓ pars sit, & alter Δ alterius EZ eadem pars quæ A

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος· καὶ ἐναλλὰξ ὁ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου, τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται ἢ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου.

ΑΡιθμὸς γὰρ ὁ Α ἀριθμοῦ τοῦ ΒΓ μέρος ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ Δ ἑτέρου τοῦ ΕΖ τὸ αὐτὸ μέρος ὅπερ ὁ

Α τοῦ

Α τῦ ΒΓ, ἐλάσσων δὲ ἔστω ὁ Α τῦ Δ· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Δ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΒΓ τῦ ΕΖ ἢ μέρη.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ Α τῦ ΒΓ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Δ τῦ ΕΖ· ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Α τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ ΕΖ ἴσοι τῷ Δ. διῃρήσθω ὁ μὲν ΒΓ εἰς τοὺς τῷ Α ἴσους τοὺς ΒΗ, ΗΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους τοὺς ΕΘ, ΘΖ, ἔσον ἔσται δὴ τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΓ τῷ πλήθει τῶν ΕΘ, ΘΖ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΒΗ, ΗΓ ἀριθμοὶ ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΘ, ΘΖ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΓ τῷ πλήθει τῶν ΕΘ, ΘΖ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΒΗ τοῦ ΕΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΓ τῦ ΘΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ὥστε καὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΒΗ τῦ ΕΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΒΓ συναμφοτέρου τῦ ΕΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. ἴσος δὲ ὁ μὲν ΒΗ τῷ Α, ὁ δὲ ΕΘ τῷ Δ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τῦ Δ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΒΓ τῦ ΕΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ipſius ΒΓ, minor autem ſit Α quam Δ: dico & permutando quæ pars eſt Α ipſius Δ vel partes, eandem partem eſſe & ΒΓ ipſius ΕΖ vel eaſdem partes.

Quoniam enim quæ pars eſt Α ipſius ΒΓ eadem eſt & Δ ipſius ΕΖ; quot numeri ſunt in ΒΓ æquales ipſi Α tot ſunt & in ΕΖ æquales ipſi Δ. dividatur ΒΓ quidem in numeros ipſi Α æquales, videlicet in ΒΗ, ΗΓ: ΕΖ vero dividatur in numeros ipſi Δ æquales, ΕΘ, ΘΖ; erit ipſorum ΒΗ, ΗΓ multitudo æqualis multitudini ipſorum ΕΘ, ΘΖ.

Α . . . .
Β . . . . Η . . . . Γ
Δ . . . . .
Ε . . . . . Θ . . . . . Ζ

Et quoniam numeri ΒΗ, ΗΓ inter ſe ſunt æquales, ſunt autem & æquales ΕΘ, ΘΖ; atque eſt ipſorum ΒΗ, ΗΓ multitudo æqualis multitudini ipſorum ΕΘ, ΘΖ: quæ pars eſt ΒΗ ipſius ΕΘ vel partes, eadem pars erit & ΗΓ ipſius ΘΖ vel eædem partes: ergo [per 5. & 6. 7.] quæ pars eſt ΒΗ ipſius ΕΘ vel partes, eadem pars erit & uterque ΒΓ utriuſque ΕΖ vel eædem partes. æqualis autem eſt ΒΗ ipſi Α, & ΕΘ ipſi Δ: quæ igitur pars eſt Α ipſius Δ vel partes, eadem pars erit & ΒΓ ipſius ΕΖ vel eædem partes. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ ἐναλλὰξ ὁ μέρη ἐστὶν ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου ἢ μέρος.

Prop. X. Probl.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: & permutando quæ partes eſt primus tertii vel pars, eædem partes erit & ſecundus quarti vel eadem pars.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ ΑΒ ἀριθμοῦ τοῦ Γ μέρη ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ ΔΕ ἑτέρου τοῦ Ζ τὰ αὐτὰ μέρη, ἔστω δὲ ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἐλάσσων· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ὁ μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ μέρος.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ Γ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μέρη τοῦ Γ τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ μέρη τοῦ Ζ. διῃρήσθω ὁ μὲν ΑΒ εἰς τὰ τοῦ Γ μέρη τὰ ΑΗ, ΗΒ, ὁ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τοῦ Ζ μέρη τὰ ΔΘ, ΘΕ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ πλήθει τῶν ΔΘ, ΘΕ. καὶ ἐπεὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τῷ Γ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΔΘ τοῦ Ζ, καὶ ἐναλλὰξ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΗΒ τῷ ΘΕ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ὥστε καὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. ἀλλ' ὁ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἃ μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ ἢ τὸ αὐτὸ μέρος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Numerus enim ΑΒ numeri Γ partes ſit, & alter ΔΕ alterius Ζ eædem partes; ſit autem ΑΒ minor quam ΔΕ: dico & permutando quæ partes eſt ΑΒ ipſius ΔΕ vel pars, eaſdem partes eſſe & Γ ipſius Ζ vel eandem partem.

Quoniam enim quæ partes eſt ΑΒ ipſius Γ eædem partes eſt & ΔΕ ipſius Ζ, quot ſunt in ΑΒ partes ipſius Γ tot erunt & in ΔΕ partes ipſius Ζ, dividatur ΑΒ quidem in partes ipſius Γ, videlicet ΑΗ, ΗΒ; ΔΕ vero dividatur in partes ipſius Ζ, hoc eſt ΔΘ, ΘΕ: erit utique ipſarum ΑΗ, ΗΒ multitudo multitudini ipſarum ΔΘ, ΘΕ æqualis. & quoniam quæ pars eſt ΑΗ ipſius Γ eadem pars eſt & ΔΘ ipſius Ζ, & permutando [per 9. 7.] quæ pars eſt ΑΗ ipſius ΔΘ vel partes, eadem pars erit & Γ ipſius Ζ vel eædem partes. ſimili ratione & quæ pars eſt ΗΒ ipſius ΘΕ vel partes, eadem pars erit & Γ ipſius Ζ vel eædem partes: ergo [per 5. & 6. 7.] quæ pars eſt ΑΗ ipſius ΔΘ vel partes, eadem pars erit & ΑΒ ipſius ΔΕ vel eædem partes. ſed quæ pars eſt ΑΗ ipſius ΔΘ vel partes, eadem pars eſt & Γ ipſius Ζ vel eædem partes: & igitur quæ partes eſt ΑΒ ipſius ΔΕ vel pars, eædem partes eſt & Γ ipſius Ζ vel eadem pars. quod erat demonſtrandum.

Α . . H . . Β
Γ . . . . . .
Δ . . . . . Θ . . . . . Ε
Ζ . . . . . .

PROP. XI. THEOR.

Si fuerit ut totus ad totum ita ablatus ad ablatum; & reliquus ad reliquum erit ut totus ad totum.

SIT ut totus AB ad totum ΓΔ ita ablatus AE ad ablatum ΓZ: dico & reliquum EB ad reliquum ZΔ ita esse ut totus AB ad totum ΓΔ.

Quoniam enim est ut AB ad ΓΔ ita AE ad ΓZ: [per 20. def. 7.] quæ pars est AB ipsius ΓΔ vel partes, eadem pars erit & AB ipsius ΓZ vel eædem partes: ergo [per 7. & 8. 7.] & reliquus EB reliqui ZΔ eadem pars erit vel eædem partes quæ AB ipsius ΓΔ: est igitur [per 20. def. 7.] ut EB ad ZΔ ita AB ad ΓΔ. quod erat demonstrandum.

A....E..B
Γ.....Z...Δ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλος πρὸς ὅλον οὕτως ἀφαιρεθεὶς πρὸς ἀφαιρεθέντα· καὶ ὁ λοιπὸς πρὸς τὸν λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλος πρὸς ὅλον.

Ἔστω ὡς ὅλος ὁ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸν ΓΔ οὕτως ἀφαιρεθεὶς ὁ ΑΕ πρὸς ἀφαιρεθέντα τὸν ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸν ΖΔ ἐστὶν ὡς ὅλος ὁ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸν ΓΔ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως ὁ ΑΕ πρὸς τὸν ΓΖ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη, ἅπερ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΒ πρὸς τὸν ΖΔ οὕτως ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΓΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XII. THEOR.

Si quotcunque numeri proportionales fuerint; ut unus antecedentium ad unum consequentium, ita erunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

SInt quotcunque numeri proportionales, A, B, Γ, Δ; sitque ut A ad B ita Γ ad Δ: dico ut A ad B ita esse A, Γ ad B, Δ.

Quoniam enim est ut A ad B ita Γ ad Δ; [per 20. def. 7.] quæ pars est A ipsius B vel partes, eadem pars erit & Γ ipsius Δ vel partes: & igitur [per 5. & 6. 7.] uterque A, Γ utriusque B, Δ eadem pars est vel partes, quæ A ipsius B: ergo [per 20. def. 7.] ut A ad B ita est A, Γ ad B, Δ. quod erat demonstrandum.

A....Γ....
B...Δ.....

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον· ἔσται ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως οἱ Α, Γ πρὸς τοὺς Β, Δ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Β ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Δ ἢ μέρη· καὶ συναμφότερος ἄρα ὁ Α, Γ συναμφοτέρου τοῦ Β, Δ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, ἅπερ ὁ Α τοῦ Β· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως οἱ Α, Γ πρὸς τοὺς Β, Δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XIII. THEOR.

Si quatuor numeri proportionales fuerint; & permutando proportionales erunt.

SInt quatuor numeri proportionales A, B, Γ, Δ, sitque ut A ad B ita Γ ad Δ: dico & permutando proportionales esse, videlicet ut A ad Γ ita esse B ad Δ.

Quoniam enim est ut A ad B ita Γ ad Δ, quæ pars est A ipsius B vel partes [per 20. def. 7.] eadem pars erit & Γ ipsius Δ vel eædem partes: permutando igitur [per 9. & 10. 7.] quæ pars est A ipsius Γ vel partes, eadem pars est & B ipsius Δ vel partes: ergo [per 20. def. 7.] ut A ad Γ ita est B ad Δ. quod erat demonstrandum.

A...Γ.....
B...Δ.....

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσι· καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Β ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Δ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ἐναλλὰξ ἄρα ὁ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Γ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Β τοῦ Δ ἢ μέρη· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ διίσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται.

Prop. XIV. Theor.

Si fuerint quotcunque numeri, & alii ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur & in eadem ratione; etiam ex æquo in eadem ratione erunt.

Ἔστωσαν γὰρ ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, οἱ Δ, Ε, Ζ, ὡς μὲν ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· λέγω ὅτι καὶ διίσου ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ.

Sint enim quotcumque numeri Α, Β, Γ, & alii ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur & in eadem ratione, ſc. Δ, Ε, Ζ; ſitque ut Α ad Β ita Δ ad Ε, ut autem Β ad Γ ita Ε ad Ζ: dico etiam ex æquo ut Α ad Γ ita eſſe Δ ad Ζ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ. ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Quoniam enim eſt ut Α ad Β ita Δ ad Ε; erit permutando [per 13. 7.] ut Α ad Δ ita Β ad Ε. rurſus, quoniam eſt ut Β ad Γ ita Ε ad Ζ; permutando ut Β ad Ε ita erit Γ ad Ζ. ut autem Β ad Ε ita eſt Α ad Δ: & igitur ut Α ad Δ ita Γ ad Ζ: ergo permutando ut Α ad Γ ita Δ ad Ζ. quod erat demonſtrandum.

Α . . . . . Δ . . . . . Β ita Δ ad Ε
Β . . . . . Ε . . . . [per 13. 7.] ut Α ad Δ ita Β ad
Γ . . . . Ζ . . Ε. rurſus, quoniam eſt ut Β ad

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Ἐὰν μονὰς ἀριθμόν τινα μετρῇ, ἰσάκις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν μετρῇ· καὶ ἐναλλὰξ ἰσάκις ἡ μονὰς τὸν τρίτον ἀριθμὸν μετρήσει καὶ ὁ δεύτερος τέταρτον.

Prop. XV. Theor.

Si unitas numerum aliquem metiatur, alter autem numerus æqualiter metiatur alium aliquem; & permutando unitas tertium numerum æqualiter metietur atque ſecundus quartum.

Μονὰς γὰρ ἡ Α ἀριθμόν τινα τὸν ΒΓ μετρείτω, ἰσάκις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ Δ ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν τὸν ΕΖ μετρείτω· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἰσάκις ἡ Α μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ΒΓ τὸν ΕΖ.

Unitas enim Α numerum aliquem ΒΓ metiatur, alter autem numerus Δ æqualiter metiatur alium aliquem ΕΖ: dico & permutando unitatem Α æqualiter metiri numerum Δ atque ΒΓ ipſum ΕΖ.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἡ Α μονὰς τὸν ΒΓ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν ΕΖ· ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ μονάδες τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ ΕΖ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Δ. διῃρήσθω ὁ μὲν ΒΓ εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας τὰς ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους, τοὺς ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ τῷ πλήθει τῶν ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ. καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ μονάδες ἀλλήλαις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ μονάδων τῷ πλήθει τῶν ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ ἀριθμῶν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΗ μονὰς πρὸς τὸν ΕΚ ἀριθμὸν οὕτως ἡ ΗΘ μονὰς πρὸς τὸν ΚΛ ἀριθμὸν, καὶ ἡ ΘΓ μονὰς πρὸς τὸν ΛΖ ἀριθμόν. ἔσται ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΗ μονὰς πρὸς τὸν ΕΚ οὕτως ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΒΗ μονὰς τῇ Α μονάδι, ὁ δὲ ΕΚ ἀριθμὸς τῷ Δ ἀριθμῷ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν οὕτως ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΕΖ· ἰσάκις ἄρα ἡ Α μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ ΒΓ τὸν ΕΖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Quoniam enim Α unitas æqualiter metitur numerum ΒΓ atque Δ ipſum ΕΖ, quot unitates ſunt in ΒΓ tot ſunt & in ΕΖ numeri æquales ipſi Δ. dividatur ΒΓ quidem in unitates quæ in ipſo ſunt, videlicet ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ; ΕΖ vero dividatur in numeros ipſi Δ æquales ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ: erit igitur ipſorum ΒΗ, ΗΘ ΘΓ multitudo æqualis multitudini ipſorum ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ. & quoniam ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ unitates inter ſe æquales ſunt, ſuntque numeri ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ inter ſe æquales, & unitatum ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ multitudo æqualis multitudini numerorum ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ: erit ut ΒΗ unitas ad numerum ΕΚ ita ΗΘ unitas ad numerum ΚΛ, & unitas ΘΓ ad ΛΖ numerum. & [per 12. 7.] ut unus antecedentium ad unum conſequentium ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes: eſt igitur ut unitas ΒΗ ad numerum ΕΚ ita ΒΓ ad ΕΖ. æqualis autem eſt ΒΗ unitas unitati Α, & ΕΚ numerus numero Δ: quare ut unitas Α ad numerum Δ ita eſt ΒΓ ad ΕΖ: igitur [per 20. def. 7.] unitas Α numerum Δ æqualiter metitur atque ΒΓ ipſum ΕΖ. quod erat demonſtrandum.

Α . Δ . .
Β . Η . Θ . Γ Ε . . Κ . . Λ . . Ζ

PROP. XVI. THEOR.

Si duo numeri ſeſe multiplicantes fecerint aliquos; facti ex ipſis inter ſe æquales erunt.

SInt duo numeri A, B, & A quidem ipſum B multiplicans faciat Γ; B vero multiplicans A faciat Δ: dico Γ ipſi Δ æqualem eſſe.

Quoniam enim A ipſum B multiplicans fecit Γ [per 15. def. 7.] metietur B ipſum Γ per unitates quæ ſunt in A. metitur autem & E unitas numerum A per unitates quæ in ipſo ſunt: igitur E unitas numerum A æqualiter metitur atque B ipſum Γ: quare permutando [per 15. 7.] unitas E numerum B æqualiter metitur atque A ipſum Γ. rurſus, quoniam B ipſum A multiplicans fecit Δ; A metietur ipſum Δ per unitates quæ ſunt in B. metitur autem & E unitas numerum B per unitates quæ in ipſo ſunt: ergo E unitas numerum B æqualiter metitur atque A ipſum Δ. ſed E unitas numerum B æqualiter metitur atque A ipſum Γ: igitur A utrumque ipſorum Γ, Δ æqualiter metitur: erit ergo Γ ipſi Δ æqualis. quod erat demonſtrandum.

E.
B...
Δ.....
Γ.....

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινας· οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν ἴσοι ἀλλήλοις ἔσονται.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ ὁ μὲν Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω, ὁ δὲ Β τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Γ τῷ Δ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ ὁ Β τὸν Γ· ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ ὁ Α τὸν Γ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Β τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ Α ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Β μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Β κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Δ. ἰσάκις δὲ ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Γ· ἰσάκις ἄρα ὁ Α ἑκάτερον τῶν Γ, Δ μετρεῖ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ τῷ Δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

E.
B...
Γ.....
Δ.....

PROP. XVII. THEOR.

Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos: facti ex ipſis eandem rationem habebunt quam multiplicati.

NUmerus enim A duos numeros B, Γ multiplicans faciat ipſos Δ, E: dico ut B ad Γ ita eſſe Δ ad E.

Quoniam enim A ipſum B multiplicans fecit Δ, [per 15. def. 7.] metietur B ipſum Δ per unitates quæ ſunt in A. metitur autem & Z unitas numerum A per unitates quæ in ipſo ſunt: igitur Z unitas numerum A æqualiter metitur atque B ipſum Δ: ergo [per 20. def. 7.] ut Z unitas ad numerum A ita eſt B ad Δ. eadem ratione & ut Z unitas ad numerum A ita Γ ad E: & igitur ut B ad Δ ita Γ ad E; & permutando [per 13. 7.] ut B ad Γ ita Δ ad E. quod erat demonſtrandum.

Z.
A..
B...
Δ.....
Γ....
E.....

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσας ποιῇ τινας· οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι τοῖς πολλαπλασιαθεῖσιν.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α δύο ἀριθμοὺς τοὺς Β, Γ πολλαπλασιάσας τοὺς Δ, Ε ποιείτω· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ Β ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ζ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ζ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ζ μονὰς πρὸς τὸν Α ἀριθμὸν οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ Ζ μονὰς πρὸς τὸν Α ἀριθμὸν οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Β πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XVIII. THEOR.

Si duo numeri numerum aliquem multiplicantes fecerint aliquos; facti ex ipſis eandem rationem habebunt quam multiplicantes.

DUO enim numeri A, B numerum aliquem Γ multiplicantes faciant ipſos Δ, E: dico ut A ad B ita eſſe Δ ad E.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας· οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν καὶ αὐτὸν ἔξουσι λόγον τοῖς πολλαπλασιάσασι.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀριθμόν τινα τὸν Γ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Δ, Ε ποιείτωσαν· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε.

Ἐπεὶ

Επεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν· ἀριθμὸς δὴ ὁ Γ δύο ἀριθμοὺς τοὺς Α, Β πολλαπλασιάσας τοὺς Δ, Ε πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Quoniam enim Α ipsum Γ multiplicans fecit Δ, & Γ multiplicans Α [per 16. 7.] ipsum Δ fecit. eadem ratione & Γ ipsum Β multiplicans fecit Ε: numerus igitur Γ duos numeros Α, Β multiplicans ipsos Δ, Ε fecit: est igitur [per 17.7.] ut Α ad Β ita Δ ad Ε. quod erat demonstrandum.

Α . . .
Β . . . .
Γ . .
Ε . . . . . Δ . . . . . .

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐκ τῶν ᾱ τετάρτου καὶ τετάρτου γινόμενος ἀριθμὸς ἴσος ἔσται τῷ ἐκ τῶν δευτέρου καὶ τρίτου γινομένῳ ἀριθμῷ· καὶ ἐὰν ὁ ἐκ τῶν ᾱ τετάρτου καὶ δευτέρου γινόμενος ἀριθμὸς ἴσος ᾖ τῷ ἐκ τῶν δευτέρου καὶ τρίτου, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται.

Prop. XIX. Theor.

Si quatuor numeri proportionales fuerint, qui ex primo & quarto fit numerus æqualis erit ei qui fit ex secundo & tertio: & si numerus qui fit ex primo & quarto æqualis fuerit ei qui ex secundo & tertio, quatuor numeri proportionales erunt.

Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ μὲν Α τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Ε τῷ Ζ.

Ο γὰρ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκε, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν· ἀριθμὸς δὴ ὁ Α δύο ἀριθμοὺς τοὺς Γ, Δ πολλαπλασιάσας τοὺς Η, Ε πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε. ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκε· δύο δὴ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀριθμόν τινα τὸν Γ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Η, Ζ πεποιήκασιν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ· ὁ Η ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν Ε, Ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Ε τῷ Ζ.

Ἔστω δὴ πάλιν ἴσος ὁ Ε τῷ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Γ, Δ πολλαπλασιάσας τοὺς Η, Ε πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε. ἴσος δὲ ὁ Ε τῷ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. ἀλλ' ὡς μὲν ὁ Η πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. ὡς δὲ ὁ Η πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SInt quatuor numeri proportionales Α, Β, Γ, Δ; sitque ut Α ad Β ita Γ ad Δ; & Α quidem ipsum Δ multiplicans faciat Ε, Β vero multiplicans ipsum Γ faciat Ζ: dico Ε esse æqualem ipsi Ζ.

Α enim multiplicans Γ faciat Η. quoniam igitur Α ipsum quidem Γ multiplicans fecit Η, ipsum vero Δ multiplicans fecit Ε; numerus Α duos numeros Δ, Γ multiplicans fecit ipsos Η, Ε: est igitur [per 17. 7.] ut Γ ad Δ ita Η ad Ε. ut autem Γ ad Δ ita Α ad Β: quare & ut Α ad Β ita Η ad Ε. rursus, quoniam Α ipsum Γ multiplicans fecit Η; sed & Β ipsum Γ multiplicans fecit Ζ: duo numeri Α, Β numerum quendam Γ multiplicantes fecerunt ipsos Η, Ζ; igitur [per 18. 7.] ut Α ad Β ita est Η ad Ζ. sed & ut Α ad Β ita Η ad Ε: ergo & ut Η ad Ε ita est Η ad Ζ: igitur Η ad utrumque ipsorum Ε, Ζ eandem rationem habet; erit igitur Ε ipsi Ζ æqualis.

Α . . . . . .
Β . . . .
Γ . . .
Δ . .
Ε . . . . . .
Ζ . . . . . .
Η . . . . . .

Sed sit Ε æqualis ipsi Ζ: dico ut Α ad Β ita esse Γ ad Δ.

Iisdem enim constructis, quoniam Α ipsos Γ, Δ multiplicans fecit Η, Ε; erit ut Γ ad Δ ita Η ad Ε. est autem Ε ipsi Ζ æqualis: ut igitur Η ad Ε ita Η ad Ζ. sed ut Η ad Ε ita Γ ad Δ: ergo & ut Γ ad Δ ita Η ad Ζ. ut autem Η ad Ζ ita [per 18. 7.] Α ad Β: & igitur ut Α ad Β ita Γ ad Δ. quod erat demonstrandum.

PROP. XX. THEOR.

Si tres numeri proportionales fuerint, qui ab extremis fit numerus æqualis erit ei qui fit à medio: si autem qui ab extremis fit æqualis fuerit ei qui à medio, tres numeri proportionales erunt.

SInt tres numeri proportionales A, B, Γ; sitque ut A ad B ita B ad Γ: dico numerum qui fit ex A, Γ æqualem esse ei qui fit ex B.

Ponatur enim ipsi B æqualis Δ: est igitur ut A ad B ita Δ ad Γ: ergo [per 19. 7.] qui fit ex A, Γ æqualis est ei qui ex B, Δ. qui autem fit ex B, Δ est æqualis ei qui fit ex B; æqualis etenim est B ipsi Δ: qui igitur fit ex A, Γ ipsi qui fit ex B est æqualis.

A ..... B ..... Δ ..... Γ ....

SED qui fit ex A, Γ æqualis sit ei qui ex B: dico ut A ad B ita esse B ad Γ.

Quoniam enim qui ex A, Γ fit æqualis est ei qui fit ex B; qui autem fit ex B est æqualis ei qui ex B, Δ: erit [per 19. 7.] ut A ad B ita Δ ad Γ. sed B ipsi Δ est æqualis: ut igitur A ad B ita est B ad Γ. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου· καὶ ἐὰν ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται.

ΕΣτωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· λέγω ὅτι ὁ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β.

Κείσθω γὰρ τῷ Β ἴσος ὁ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ· ὁ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Δ. ὁ δὲ ὑπὸ τῶν Β, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β· ἴσος γὰρ ὁ Β τῷ Δ· ὁ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β.

Α ..... Β ..... Γ .... Δ .....

ΑΛΛΑ δὴ ὁ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσος ἔστω τῷ ἀπὸ τοῦ Β· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ Β ἴσος τῷ ὑπὸ τῶν Β, Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. ἴσος δὲ ὁ Β τῷ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXI. PROBL.

Minimi numeri eandem cum ipsis rationem habentium eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, major majorem & minor minorem.

SInt ΓΔ, ΕΖ enim minimi numeri eandem cum A, B rationem habentium: dico ΓΔ æqualiter metiri ipsum A atque ΕΖ ipsum B.

Numerus enim ΓΔ ipsius A non est partes. si enim fieri potest, sit ΓΔ partes ipsius A: ergo [per 20. def. 7.] ΕΖ ipsius B eædem partes erit quæ ΓΔ ipsius A: quot igitur sunt in ΓΔ partes ipsius A tot erunt & in ΕΖ partes ipsius B. dividatur ΓΔ quidem in ipsius A partes ΓΗ, ΗΔ; ΕΖ vero dividatur in ipsius B partes ΕΘ, ΘΖ: erit igitur ipsarum ΓΗ, ΗΔ multitudo æqualis multitudini ipsarum ΕΘ, ΘΖ. & quoniam ΓΗ, ΗΔ æquales inter se sunt: sunt autem & ΕΘ, ΘΖ inter se æquales; atque est ipsarum ΓΗ, ΗΔ multitudo multitudini ipsarum ΕΘ, ΘΖ æqualis: erit ut ΓΗ ad ΕΘ ita ΗΔ ad ΘΖ: erit igitur [per 12. 7.] ut unus antecedentium ad unum consequentium ita omnes antecedentes ad omnes consequentes: quare ut ΓΗ ad ΕΘ ita est ΓΔ ad ΕΖ: ac propterea ΓΗ, ΕΘ in eadem sunt ratione in qua ΓΔ, ΕΖ, minores ipsis existentes, quod fieri non potest; ponuntur enim ΓΔ, ΕΖ minimi numeri eandem quam ipsi rationem habentium: non igitur ΓΔ ipsius A partes est: ergo est pars: & ΕΖ ipsius B pars eadem est

A ..... B ..... Γ ...Η..Δ Ε..Θ.Ζ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὁ, τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα.

ΕΣτωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντες τοῖς Α, Β οἱ ΓΔ, ΕΖ· λέγω ὅτι ἰσάκις ὁ ΓΔ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ ΕΖ τὸν Β.

Ο ΓΔ γὰρ τὸν Α οὐκ ἔστι μέρη. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· ὁ ΕΖ ἄρα τὸν Β τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν ἅπερ ὁ ΓΔ τὸν Α· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΓΔ μέρη τοῦ Α τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ ΕΖ μέρη τοῦ Β. διῃρήσθω ὁ μὲν ΓΔ εἰς τὰ τοῦ Α μέρη τὰ ΓΗ, ΗΔ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τὰ τοῦ Β μέρη τὰ ΕΘ, ΘΖ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΓΗ, ΗΔ τῷ πλήθει τῶν ΕΘ, ΘΖ. καὶ ἐπεὶ οἱ ΓΗ, ΗΔ ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΘ, ΘΖ ἀλλήλοις ἴσοι, καί ἐστιν ἴσον πλῆθος τῶν ΓΗ, ΗΔ τῷ πλήθει τῶν ΕΘ, ΘΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν ΕΘ οὕτως ὁ ΗΔ πρὸς τὸν ΘΖ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν ΕΘ οὕτως ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΕΖ· οἱ ΓΗ, ΕΘ ἄρα τοῖς ΓΔ, ΕΖ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν, ἐλάττονες ὄντες αὐτῶν, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκείσονται γὰρ οἱ ΓΔ, ΕΖ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οὐκ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ ΓΔ τοῦ Α· μέρος ἄρα· καὶ ὁ ΕΖ τοῦ Β αὐτὸ τὸ μέρος ἐστὶν ὅπερ ὁ ΓΔ

σ ΓΔ τῷ Α· ἰσάκις ἄρα ὁ ΓΔ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ ΕΖ τὸν Β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

quæ ΓΔ ipſius A: æqualiter igitur ΓΔ ipſum A metitur atque EZ ipſum B. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϐ'.

Ἐὰν ὦσι τρεῖς ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἡ δὲ ταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία· καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται.

Prop. XXII. Theor.

Si ſint tres numeri, & alii ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur & in eadem ratione; ſit autem perturbata eorum proportio: etiam ex æquo in eadem ratione erunt.

Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ, οἱ Α, Β, Γ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος συνδύο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, οἱ Δ, Ε, Ζ, ἔστω δὲ ἡ ταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν ὁ Α πρὸς τὸν Β ἕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ ἕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· λέγω ὅτι καὶ δι' ἴσου ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ ἕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ.

Α . . . . . Β . . . . Γ . . .
Δ . . . . . Ε . . . . . Ζ . . . . . .

SInt tres numeri A, B, Γ, & alii ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur & in eadem ratione ſc. Δ, E, Z; ſitque perturbata eorum proportio, ut A quidem ad B ita ſit E ad Z, ut autem B ad Γ ita Δ ad E: dico etiam ex æquo ut A ad Γ ita eſſe Δ ad Z.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β ἕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Ζ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Ε. πάλιν, ἐπεὶ ἐστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ ἕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Γ, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Ε. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Ζ ἴσος τῷ ἐκ τῶν Β, Ε· καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Ζ ἄρα ἴσος τῷ ἐκ τῶν Γ, Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ ἕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Quoniam enim eſt ut A ad B ita E ad Z; qui fit ex A, Z æqualis erit [per 19. 7.] ei qui ex B, E. rurſus, quoniam eſt ut B ad Γ ita Δ ad E; qui fit ex Γ, Δ æqualis erit ei qui ex B, E. oſtenſum autem eſt & qui fit ex A, Z æqualem eſſe ei qui ex B, E: ergo & qui fit ex A, Z æqualis eſt ei qui fit ex Γ, Δ: igitur [per 19. 7.] ut A ad Γ ita Δ ad Z. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Prop. XXIII. Theor.

Numeri primi inter ſe minimi ſunt omnium eandem cum ipſis rationem habentium.

Ἔστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· λέγω ὅτι οἱ Α, Β ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

SInt numeri A, B primi inter ſe: dico eos minimos eſſe omnium eandem cum ipſis rationem habentium.

Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ Α, Β ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, ἔσονταί τινες τῶν Α, Β ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β. ἔστωσαν οἱ Γ, Δ.

Si enim A, B non ſint minimi omnium eandem cum ipſis rationem habentium, erunt minimi numeri omnium eandem cum A, B rationem habentium, minores quam A, B. ſint Γ, Δ.

Ἐπεὶ οὖν οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἐχοντας ἰσάκις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα, τουτέστιν ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ἰσάκις ἄρα ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν Β. ὁσάκις δὴ ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε· καὶ ὁ Δ ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν Α, Β ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β· οἱ Α, Β ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Quoniam igitur [per 21. 7.] minimi numeri eandem cum ipſis rationem habentium, eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, major majorem & minor minorem, hoc eſt antecedens antecedentem & conſequens conſequentem; numerus Γ ipſum A æqualiter metietur atque Δ ipſum B. quoties autem Γ metitur ipſum A tot unitates ſint in E: ergo & Δ ipſum B metitur per unitates quæ ſunt in E. & quoniam Γ metitur ipſum A per unitates quæ ſunt in E, numerus E ipſum A per unitates quæ ſunt in Γ metietur. & eadem ratione E metietur B per unitates quæ ſunt in Δ: ergo E ipſos A, B metitur, primos inter ſe exiſtentes, quod fieri non poteſt: non igitur erunt aliqui numeri minores ipſis A, B, eandem habentes rationem cum ipſis A, B: ergo A, B minimi ſunt omnium eandem cum ipſis rationem habentium. quod erat demonſtrandum.

A . . . . . Γ -----
B . . . . E ----
Δ ----

Prop. XXIV. Theor.

Minimi numeri eorum qui eandem cum ipſis rationem habent, primi inter ſe ſunt.

SInt A, B minimi numeri eorum qui eandem cum ipſis rationem habent,: dico A, B primos inter ſe eſſe.

Si enim non ſunt A, B inter ſe primi, eos aliquis numerus metietur. metiatur, ſitque Γ. & quoties Γ ipſum quidem A metitur tot unitates ſint in Δ; quoties vero Γ metitur ipſum B tot unitates ſint in E.

A.....
Γ-------
Δ-----
B.....
E---

Et quoniam Γ ipſum A metitur per unitates quæ ſunt in Δ; Γ multiplicans ipſum Δ fecit A. eadem ratione & Γ multiplicans E ipſum B fecit: itaque cum numerus Γ duos numeros Δ, E multiplicans fecerit A, B, erit [per 17. 7.] ut Δ ad E ita A ad B: ergo Δ, E in eadem ſunt ratione in qua A, B, minores ipſis exiſtentes, quod [ex hyp.] fieri non poteſt: non igitur A, B numeros numerus aliquis metietur; ac propterea A, B primi inter ſe ſunt. quod erat demonſtrandum.

Prop. XXV. Theor.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint, qui unum ipſorum metitur numerus ad reliquum primus erit.

SInt duo numeri primi inter ſe A, B, & aliquis numerus Γ ipſum A metiatur: dico & B, Γ inter ſe primos eſſe.

Si enim B, Γ non ſint inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus. metiatur, ſitque Δ. & quoniam Δ ipſum Γ metitur, & Γ ipſum A; & Δ ipſum A metietur. metitur autem & ipſum B: ergo Δ numeros A, B metitur primos inter ſe exiſtentes, quod [per 12. def. 7.] fieri non poteſt: non igitur numeros Γ, B numerus aliquis metietur; ideoque Γ, B inter ſe primi ſunt. quod erat demonſtrandum.

A.....
B.....
Γ...
Δ—

Prop. XXVI. Theor.

Si duo numeri ad aliquem numerum primi fuerint, & qui fit ex ipſis ad eum primus erit.

DUO enim numeri A, B ad aliquem numerum Γ primi ſint, & A ipſum B multiplicans faciat Δ: dico Γ, Δ inter ſe primos eſſe.

Si enim Γ, Δ non ſint inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus. metiatur, ſitque E. & quoniam Γ, A primi inter ſe ſunt, & ipſum

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Ἔστωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ A, B· λέγω ὅτι οἱ A, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μή εἰσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ A, B μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Γ. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ Γ τὸν A μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Δ, ὁσάκις δὲ ὁ Γ τὸν B μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ E.

Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Γ ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν· ἀριθμὸς δὴ ὁ Γ δύο ἀριθμοὺς τοὺς Δ, E πολλαπλασιάσας τοὺς A, B πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν E οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B· οἱ Δ, E ἄρα τοῖς A, B ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν, ἐλάσσονες ὄντες αὐτῶν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς A, B ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ A, B ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ τὲνα αὐτῶν μετρῶν ἀριθμὸς πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ A, B, τὸν δὲ A μετρείτω τις ἀριθμὸς ὁ Γ· λέγω ὅτι καὶ οἱ B, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ B, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ, ὁ δὲ Γ τὸν A μετρεῖ· καὶ ὁ Δ ἄρα τὸν A μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν B· ὁ Δ ἄρα τοὺς A, B μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς A, B ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ Γ, B ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτοι ὦσιν, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν αὐτὸν πρῶτος ἔσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ A, B πρός τινα ἀριθμὸν τὸν Γ ἔστωσαν πρῶτοι, καὶ ὁ A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· λέγω ὅτι οἱ Γ, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Γ, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ E. καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, A πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί, τὸν δὲ Γ με-

Γ μετρεῖ τις ἀριθμὸς ὁ Ε· οἱ Ε, Α ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὁσάκις δὲ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ζ· καὶ ὁ Ζ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Ε, Ζ τῷ ἐκ τῶν Α, Β. ἐὰν δὲ ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον εἰσίν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ζ. οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ὁ Ε ἄρα τὸν Β μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Β, Γ μετρεῖ πρῶτος ὢν πρὸς αὐτούς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς Γ, Δ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ Γ, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Γ metitur aliquis numerus Ε; erunt [per 25.7.] Β, Α inter se primi. quoties autem Ε ipsum Δ metitur tot unitates sint in Ζ: quare & Ζ metitur ipsum Δ per unitates quæ sunt in Ε: ergo Ε ipsum Ζ multiplicans fecit Δ. sed & Α multiplicans Β ipsum Δ fecit: qui igitur fit ex Ε, Ζ est æqualis ei qui ex Α, Β. si vero qui fit ex extremis æqualis fuerit ei qui ex mediis, [per 19.7.] quatuor numeri proportionales erunt: est igitur ut Β ad Α ita Β ad Ζ. sunt autem Α, Ε inter se primi, & qui primi etiam [per 23.7.] minimi sunt; minimi vero eandem cum ipsis rationem habentium eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, [per 21.7.] major majorem, minor minorem, hoc est antecedens antecedentem & consequens consequentem: ergo Β ipsum Β metitur. metitur autem & ipsum Γ: quare Ε ipsos Β, Γ metitur, primos inter se existentes: quod fieri non potest. non igitur Γ, Δ numeros numerus aliquis metietur; ac propterea Γ, Δ inter se primi sunt. quod erat demonstrandum.

Α . .
Γ . . . . .
Δ . . . . . .
Ε ——
Ζ —

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ ἐκ ἑνὸς αὐτῶν γινόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται.

PROP. XXVII. THEOR.

Si duo numeri primi inter se fuerint, qui fit ab uno ipsorum ad reliquum primus erit.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι οἱ Β, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί.

Κείσθω γὰρ τῷ Α ἴσος ὁ Δ. ἐπεὶ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ἴσος δὲ ὁ Α τῷ Δ· καὶ οἱ Δ, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί· ἑκάτερος ἄρα τῶν Α, Δ πρὸς τὸν Β πρῶτος ἐστί. καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Δ ἄρα γινόμενος πρὸς τὸν Β πρῶτος ἔσται. ὁ δὲ ἐκ τῶν Α, Δ γινόμενος ἀριθμός ἐστιν ὁ Γ· οἱ Γ, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SInt duo numeri inter se primi Α, Β, & Α seipsum multiplicans faciat Γ: dico Β, Γ inter se primos esse.

Ponatur enim ipsi Α æqualis Δ. & quoniam Α, Β sunt primi inter se, æqualis autem Α ipsi Δ; & Δ, Β inter se primi erunt: uterque igitur ipsorum Α, Δ ad Β primus est: ergo & qui ex Α, Δ fit [per 26.7.] primus erit ad Β. sed qui fit ex Α, Δ est numerus Γ: quare Γ, Β inter se primi sunt. quod erat demonstrandum.

Α . .
Β . . .
Γ . . . .
Δ . .

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς δύο ἀριθμούς, ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον, πρῶτοι ὦσι· καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν γινόμενοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

PROP. XXVIII. THEOR.

Si duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrumque, primi fuerint; & qui fiunt ex ipsis inter se primi erunt.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρὸς δύο ἀριθμοὺς τοὺς Γ, Δ, ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον, πρῶτοι ἔστωσαν, καὶ ὁ μὲν Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· λέγω ὅτι οἱ Ε, Ζ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Ἐπεὶ γὰρ ἑκάτερος τῶν Α, Β πρὸς τὸν Γ πρῶτός ἐστι, καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Β ἄρα γινόμενος πρῶτός ἐστι πρὸς τὸν Γ. ὁ δὲ ἐκ τῶν Α, Β γινόμενος ἐστιν ὁ Ε· οἱ Ε, Γ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλή-

DUO enim numeri Α, Β ad duos numeros Γ, Δ, uterque ad utrumque, primi sint; & Α quidem ipsum Β multiplicans faciat Ε; Γ vero multiplicans Δ faciat Ζ: dico Ε, Ζ inter se primos esse.

Quoniam enim uterque ipsorum Α, Β ad Γ primus est, & qui fit ex Α, Β [per 26.7.] ad Γ primus erit. qui autem fit ex Α, Β est Ε: ergo Ε, Γ primi inter se sunt. eadem ratione & Β, Δ primi sunt

Α . . . Β . . . . .
Ε . . . . . .
Γ . . Δ . . . .
Ζ . . . . . .

inter

inter ſe: uterque igitur ipſorum Γ, Δ ad E primus eſt: ac propterea [per 26. 7.] qui fit ex Γ, Δ primus erit ad E. qui vero ex Γ, Δ fit eſt numerus Z: ergo E, Z primi inter ſe erunt. quod erat demonſtrandum.

PROP. XXIX. THEOR.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint, & uterque ſeipſum multiplicans faciat aliquos; facti ex ipſis primi inter ſe erunt: & ſi numeri à principio poſiti eos qui facti ſunt multiplicantes aliquos faciant; & ipſi inter ſe primi erunt: & ſemper circa extremos hoc continget.

SInt duo numeri inter ſe primi A, B, & A ſeipſum quidem multiplicans faciat Γ, multiplicans vero Γ faciat E; & B ſeipſum multiplicans faciat Δ, multiplicans autem Δ faciat ipſum Z: dico Γ, Δ & E, Z inter ſe primos eſſe.

Quoniam enim A, B primi inter ſe ſunt; & A ſeipſum multiplicans fecit Γ; erunt [per 27. 7.] Γ, B primi inter ſe. & quoniam Γ, B inter ſe primi ſunt, & B ſeipſum multiplicans fecit Δ; erunt Γ, Δ inter ſe primi. Rurſus quoniam A, B primi ſunt inter ſe, & B ſeipſum multiplicans fecit Δ; A, Δ inter ſe primi erunt: cum igitur duo numeri A, Γ ad duos numeros B, Δ uterque ad utrumque primi ſint; & qui ex A, Γ fit ad eum qui fit ex B, Δ [per 28. 7.] primus erit. ſed qui fit ex A, Γ eſt numerus E, qui vero ex B, Δ fit eſt Z: ergo E, Z primi inter ſe ſunt. quod erat demonſtrandum.

A . . B . . .
Γ . . . . Δ . . . . . .
E . . . . . Z . . . . . .

PROP. XXX. THEOR.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint, & uterque ſimul ad utrumque ipſorum primus erit: quod ſi uterque ſimul ad unum aliquem ipſorum ſit primus, & numeri à principio poſiti inter ſe primi erunt.

COmponantur enim duo numeri inter ſe primi, AB, BΓ: dico & utrumque ſimul, videlicet AΓ, ad utrumque ipſorum AB, BΓ primum eſſe.

Si enim non ſint ΓA, AB inter ſe primi, metietur eos numerus aliquis. metiatur, & ſit Δ. quoniam igitur Δ metitur ipſos ΓA, AB; & reliquum BΓ metietur. metitur autem & BA: ergo Δ ipſos AB, BΓ metitur, primos inter ſe exiſtentes; quod fieri non poteſt: non igitur

A . . . . . B . . . . Γ
Δ ——

ΓA,

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ πολλαπλασιάσας ἑκάτερος ἑαυτὸν ποιῇ τινα, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται· καὶ ἐξαρχῆς τοὺς γενομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, κἀκεῖνοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται· καὶ ἀεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ A, B, καὶ ὁ A ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω, τὸν δὲ Γ πολλαπλασιάσας τὸν E ποιείτω, ὁ δὲ B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Z ποιείτω· λέγω ὅτι εἰσὶ Γ, Δ καὶ οἱ E, Z πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ A, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ A ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· οἱ Γ, B ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. ἐπεὶ ἄρα οἱ Γ, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, οἱ Γ, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. πάλιν, ἐπεὶ οἱ A, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· οἱ A, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ἐπεὶ ἓν δύο ἀριθμοὶ οἱ A, Γ πρὸς δύο ἀριθμοὺς τοὺς B, Δ ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον πρῶτοί εἰσι· καὶ ὁ ἐκ τῶν A, Γ ἄρα γινόμενος πρὸς τὸν ἐκ τῶν B, Δ πρῶτός ἐστι. καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἐκ τῶν A, Γ ὁ E, ὁ δὲ ἐκ τῶν B, Δ ὁ Z· οἱ E, Z ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Εὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ συναμφότερος πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν πρῶτος ἔσται· καὶ ἐὰν συναμφότερος πρός τινα αὐτῶν πρῶτος ᾖ, καὶ οἱ ἐξαρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ AB, BΓ· λέγω ὅτι καὶ συναμφότερος ὁ AΓ πρὸς ἑκάτερον τῶν AB, BΓ πρῶτός ἐστιν.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ ΓA, AB πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τοὺς ΓA, AB μετρεῖ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν BΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν BA· ὁ Δ ἄρα τοὺς AB, BΓ μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς

ΓΑ, ΑΒ ἀριθμὸς ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ ΑΒ, ΑΓ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὁ ΓΑ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΒΓ πρῶτός ἐστιν.

ΕΣΤΩΣΑΝ δὴ πάλιν οἱ ΓΑ, ΑΒ πρὸς ἀλλήλους πρῶτοι· λέγω ὅτι καὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μή εἰσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ ΑΒ, ΒΓ, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ, καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΓΑ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΑΒ· ὁ Δ ἄρα τοὺς ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΒΓ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ ΑΒ, ΒΓ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΓΑ, ΑΒ numeros numerus aliquis metietur; ac propterea ΑΒ, ΑΓ inter ſe primi ſunt: ergo ΓΑ ad utrumque ipſorum ΑΒ, Β, Γ eſt primus.

SINT rurſus ΓΑ, ΑΒ primi inter ſe: dico & ipſos ΑΒ, ΒΓ inter ſe primos eſſe.

Si enim ΑΒ, ΒΓ non ſint inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus. metiatur, ſitque Δ. & quoniam Δ metitur utrumque ipſorum ΑΒ, ΒΓ, & totum ΓΑ metietur. metitur autem & ΑΒ: ergo Δ ipſos ΓΑ, ΑΒ metitur, primos inter ſe exiſtentes, quod fieri non poteſt: non igitur ipſos ΑΒ, ΒΓ numeros numerus aliquis metietur, ideoque ΑΒ, ΒΓ inter ſe primi ſunt. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

Πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμόν, ὃν μὴ μετρεῖ, πρῶτός ἐστιν.

PROP. XXXI. THEOR.

Omnis primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus eſt.

ΕΣΤΩ πρῶτος ἀριθμὸς ὁ Α, καὶ τὸν Β μὴ μετρείτω· λέγω ὅτι οἱ Β, Α πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ Β, Α πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Γ· ὁ Γ ἄρα τὸν μὲν Α οὐ μετρεῖ· ὁ γὰρ Α μονάς ἐστιν· ὁ δὲ Γ τὸν Β μετρεῖ· ὁ Γ ἄρα τῷ Α οὐκ ἔστιν ὁ αὐτός. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τοὺς Β, Α μετρεῖ· καὶ τὸν Α ἄρα μετρεῖ πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς Β, Α μετρήσει τις ἀριθμός· οἱ Α, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SIT primus numerus Α, & numerum Β non metiatur: dico Β, Α inter ſe primos eſſe.

Si enim non ſint Β, Α inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus. metiatur, & ſit Γ: ergo [per 11. def. 7.] Γ non eſt unitas. & quoniam Γ ipſum Β metitur, Α vero non metitur ipſum Β; non erit Γ idem qui Α. & quoniam Γ ipſos Β, Α metitur, & metietur ipſum Α primum exiſtentem, licet non ſit idem cum eo, quod fieri non poteſt: non igitur ipſos Β, Α numeros numerus aliquis metietur: quare Α, Β inter ſe primi ſunt. quod erat demonſtrandum.

Α ... Β .....
Γ ——

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, τὸ δὲ γενόμενον ὑπ' αὐτῶν μετρῇ τις πρῶτος ἀριθμός· καὶ ἕνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει.

PROP. XXXII. THEOR.

Si duo numeri ſeſe multiplicantes aliquem faciant; eum vero, qui ex ipſis fit, metiatur aliquis numerus primus: & unum ipſorum, qui à principio poſiti ſunt, metietur.

ΔΥΟ γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πολλαπλασιάσαντες τὸν Γ ποιείτωσαν, τὸν δὲ Γ μετρείτω τις πρῶτος ἀριθμὸς ὁ Δ· λέγω ὅτι ὁ Δ ἕνα τῶν Α, Β μετρεῖ.

Τὸν γὰρ Α μὴ μετρείτω, καὶ ἔστι πρῶτος ὁ Δ· οἱ Α, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. καὶ ὁσάκις ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ, τοσοῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε. ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας, ὁ Δ ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ, Ε τῷ ἐκ τῶν Α, Β· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε. οἱ δὲ Δ, Α πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ, τε μεῖζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ὁ Δ ἄρα τὸν Β

ΔΥΟ enim numeri Α, Β ſe invicem multiplicantes faciant Γ, ipſum vero Γ metiatur aliquis numerus primus, qui ſit Δ: dico Δ unum ipſorum Α, Β metiri.

Ipſum enim Α non metiatur, atque eſt Δ numerus primus: ergo [per 31. 7.] Α, Δ primi inter ſe ſunt. & quoties Δ ipſum Γ metitur, tot unitates ſint in Ε. quoniam igitur Δ metitur ipſum Γ per eas quæ ſunt in Ε unitates; numerus Δ ipſum Ε multiplicans fecit Γ. ſed & Α multiplicans Β ipſum Γ fecit: ergo qui fit ex Δ, Ε æqualis eſt ei qui ex Α, Β: eſt igitur [per 19. 7.] ut Δ ad Α ita Β ad Ε. & ſunt Δ, Α primi inter ſe; primi vero [per 23. 7.] ſunt & minimi, ſed [per 21. 7.] minimi eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, major majorem & minor minorem, hoc eſt antecedens antecedentem & conſequens conſequentem; ergo Δ ipſum Β metitur

Α .. Β ......
Γ .....
Δ ...
Ε ....

tur. Similiter demonſtrabimus ſi Δ non metiatur B, metiri ipſum A: quare Δ metitur unum ipſorum A, B. quod erat demonſtrandum.

μετρεῖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κ᾽ ἐὰν ὁ Δ τὸν Β μὴ μετρῇ, τὸν Α μετρήσει· ὁ Δ ἄρα ἕνα τῶν Α, Β μετρεῖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXIII. Theor.

Omnem numerum compoſitum primus aliquis numerus metitur.

SIT compoſitus numerus A: dico primum aliquem numerum metiri ipſum A.

Quoniam enim A eſt compoſitus numerus, [per 13. def. 7.] metietur ipſum aliquis numerus. metiatur, & ſit B. & ſi quidem primus eſt B, manifeſtum eſt quod quæritur. ſi vero compoſitus, ipſum aliquis numerus metietur. metiatur, ſitque Γ. & quoniam Γ metitur ipſum B, B vero ipſum A; & Γ ipſum A metitur. & ſi quidem primus eſt Γ, manifeſtum eſt quod quæritur. ſi vero compoſitus, eum aliquis numerus metitur, & hac conſideratione facta relinquetur tandem aliquis numerus primus, & qui ipſum A metietur. ſi enim non relinquitur, metientur ipſum A infiniti numeri, quorum alter altero eſt minor, quod [per 2. def. 7.] in numeris fieri non poteſt; ergo relinquetur aliquis qui & præcedentem metietur & ipſum A.

A .....
B ....
Γ ..

Omnem igitur numerum compoſitum primus aliquis numerus metitur. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ΄.

Απας σύνθετος ἀριθμὸς ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ μετρεῖται.

ΕΣτω σύνθετος ἀριθμὸς ὁ Α· λέγω ὅτι ὁ Α ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Ἐπεὶ γὰρ σύνθετός ἐστιν ὁ Α, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Β. καὶ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ Β, δῆλον ἂν εἴη τὸ ζητούμενον. εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσῃ τις αὐτὸν ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Γ. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Β μετρεῖ, ὁ δὲ Β τὸν Α μετρεῖ· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Α μετρεῖ. καὶ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ Γ, δῆλον ἂν εἴη τὸ ζητούμενον. εἰ δὲ σύνθετος μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός, τοιαύτης δὴ γινομένης ἐπισκέψεως ληφθήσεταί τις πρῶτος ἀριθμός, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ὃς καὶ τὸν Α μετρήσει. εἰ γὰρ οὐ ληφθήσεται, μετρήσουσι τὸν Α ἀριθμὸν ἄπειροι ἀριθμοί, ὧν ὁ ἕτερος τοῦ ἑτέρου ἐλάσσων ἐστίν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον ἐν ἀριθμοῖς· ληφθήσεταί τις ἄρα, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ὃς καὶ τὸν Α μετρήσει.

Απας ἄρα σύνθετος ἀριθμὸς ὑπό πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Aliter.

SIT compoſitus numerus A: dico primum aliquem numerum ipſum metiri.

Quoniam enim A compoſitus eſt [per 13. def. 7.] metietur ipſum aliquis numerus. ſit B minimus eorum, qui ipſum A metiuntur: dico B primum eſſe.

Si enim non; erit compoſitus: ergo eum aliquis numerus metietur. metiatur, ſitque Γ metiens ipſum: erit igitur Γ minor quam B. & quoniam Γ ipſum B metitur, ſed & B ipſum A; & Γ ipſum A metietur, minor exiſtens ipſo B, qui eſt minimus omnium qui metiuntur A, quod eſt abſurdum: igitur B non eſt compoſitus numerus: ergo eſt primus. quod erat demonſtrandum.

A .....
B ...
Γ --

Αλλως.

ΕΣΤΩ σύνθετος ἀριθμὸς ὁ Α· λέγω ὅτι ὑπό πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Ἐπεὶ γὰρ σύνθετός ἐστιν ὁ Α, μετρηθήσεται ὑπό ἀριθμοῦ. καὶ ἔστω ἐλάχιστος τῶν μετρούντων αὐτὸν ὁ Β· λέγω ὅτι ὁ Β πρῶτός ἐστιν.

Εἰ γὰρ μή, συνθετός ἐστι· μετρηθήσεται ἄρα ὑπό ἀριθμοῦ τινος. μετρείσθω, καὶ ἔστω ὁ Γ ὁ μετρῶν αὐτόν· ὁ Γ ἄρα τοῦ Β ἐλάσσων ἐστί. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Β μετρεῖ, ἀλλὰ καὶ ὁ Β τὸν Α μετρεῖ· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Α μετρεῖ, ἐλάσσων ὢν τοῦ Β, ἐλαχίστου ὄντος τῶν μετρούντων Α, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ Β συνθετός ἐστιν ἀριθμός· πρῶτος ἄρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXIV. Theor.

Omnis numerus vel primus eſt, vel eum primus aliquis numerus metitur.

SIT numerus A: dico A vel primum eſſe, vel primum aliquem numerum ipſum A metiri.

Si quidem igitur primus eſt, manifeſtum eſt quod quæritur. ſi vero compoſitus, [per 33. 7.] ipſum aliquis primus numerus metietur.

Omnis igitur numerus vel primus eſt, vel eum primus aliquis numerus metitur. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ΄.

Απας ἀριθμὸς ἤτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ ὑπό πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

ΕΣτω ἀριθμὸς ὁ Α· λέγω ὅτι ὁ Α ἤτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ ὑπό πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Εἰ μὲν οὖν πρῶτός ἐστιν ὁ Α, δῆλον ἂν εἴη τὸ ζητούμενον. εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσῃ τις αὐτὸν πρῶτος ἀριθμός.

Απας ἄρα ἀριθμὸς ἤτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ ὑπό πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

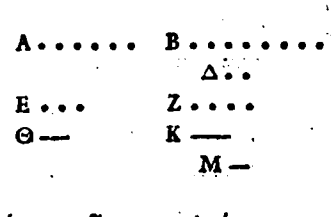
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

Ἀριθμῶν δοθέντων ὁποσωνοῦν, εὑρεῖν τοὺς ἐλαχίστους τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Ἐστωσαν οἱ δοθέντες ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ, οἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ εὑρεῖν τοὺς ἐλαχίστους τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, Γ.

Οἱ Α, Β, Γ ἄρα ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὔ. εἰ μὲν οὖν οἱ Α, Β, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἐλάχιστοί εἰσι τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Εἰ δὲ οὔ. εἰλήφθω τὸ Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ, καὶ ὁσάκις ὁ Δ ἑκαστον τῶν Α, Β, Γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν ἑκάστῳ τῶν Ε, Ζ, Η· ἕκαστος ἄρα τῶν Ε, Ζ, Η ἑκαστον τῶν Α, Β, Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα τοὺς Α, Β, Γ ἰσάκις μετροῦσιν· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα τοῖς Α, Β, Γ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ Ε, Ζ, Η ἐλάχιστοι τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς τοῖς Α, Β, Γ, ἔσονταί τινες τῶν Ε, Ζ, Η ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β, Γ. ἔστωσαν οἱ Θ, Κ, Λ· ἰσάκις ἄρα ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ καὶ ἑκάτερος τῶν Κ, Λ ἑκάτερον τῶν Β, Γ. ὁσάκις δὲ ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Μ· καὶ ἑκάτερος ἄρα τῶν Κ, Λ ἑκάτερον τῶν Β, Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Μ μονάδας. καὶ ἐπεὶ ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Μ μονάδας· καὶ ὁ Μ ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Θ μονάδας. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Μ ἑκάτερον τῶν Β, Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν ἑκατέρῳ τῶν Κ, Λ μονάδας· ὁ Μ ἄρα τοὺς Α, Β, Γ μετρεῖ. καὶ ἐπεὶ ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Μ μονάδας· ὁ Θ ἄρα τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Ε, Δ τῷ ἐκ τῶν Θ, Μ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Δ. μείζων δὲ ὁ Ε τοῦ Θ· μείζων ἄρα καὶ ὁ Μ τοῦ Δ, καὶ μετρεῖ τοὺς Α, Β, Γ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, ὑποκειται γὰρ ὁ Δ τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον· οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν Ε, Ζ, Η ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β, Γ· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, Γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



PROP. XXXV. PROBL.

Numeris quotcunque datis, invenire minimos omnium qui eandem cum ipsis rationem habeant.

Sint dati quotcunque numeri A, B, Γ: oportet invenire minimos omnium qui eandem cum ipsis A, B, Γ rationem habeant.

Vel igitur A, B, Γ primi inter se sunt, vel non. si quidem primi, & minimi erunt [per 23. 7.] omnium eandem cum ipsis rationem habentium.

Si vero non. sumatur [per 3. 7.] ipsorum A, B, Γ maxima communis mensura Δ, & quoties Δ unumquemque ipsorum A, B, Γ metitur, tot unitates sint in unoquoque horum E, Z, H: & unusquisque igitur ipsorum E, Z, H unumquemq; ipsorum A, B, Γ metitur per eas quæ sunt in Δ unitates: ergo E, Z, H ipsos A, B, Γ æqualiter metiuntur, ac propterea [per 18. 7.] E, Z, H in eadem sunt ratione in qua ipsi A, B, Γ. dico eos etiam minimos esse. si enim E, Z, H non sint minimi eandem cum ipsis A, B, Γ rationem habentium, erunt aliqui ipsis E, Z, H minores in eadem ratione in qua A, B, Γ. sint Θ, K, Λ: æqualiter igitur [per 21. 7.] Θ metitur ipsum A ac uterque ipsorum K, Λ utrumque B, Γ metitur. quoties autem Θ metitur ipsum A, tot unitates sint in M: & uterque igitur K, Λ utrumque B, Γ metitur per eas quæ sunt in M unitates. & quoniam Θ ipsum A metitur per unitates quæ sunt in M; & M ipsum A per unitates quæ sunt in Θ metietur. eadem ratione & M utrumque ipsorum B, Γ metietur per unitates quæ sunt in utroque K, Λ: ergo M ipsos A, B, Γ metitur. rursus, quoniam Θ ipsum A metitur per unitates quæ sunt in M; Θ ipsum M multiplicans fecit A. eadem ratione & E multiplicans Δ ipsum A fecit: ergo qui ex E, Δ fit ei qui fit ex Θ, M est æqualis: ut igitur E ad Θ ita [per 19. 7.] M ad Δ. major autem est E quam Θ: ergo & M quam Δ est major, & ipsos A, B, Γ metitur, quod fieri non potest; ponitur enim Δ ipsorum A, B, Γ maxima communis mensura: non igitur erunt aliqui numeri minores ipsis E, Z, H in eadem ratione in qua A, B, Γ: ergo E, Z, H minimi sunt eorum qui eandem cum ipsis A, B, Γ rationem habent. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ'.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων, εὑρεῖν τὸν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.

Ἐστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ, οἱ Α, Β· δεῖ δὴ εὑρεῖν τὸν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.

Οἱ Α, Β ἄρα ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὔ. ἔστωσαν πρότερον οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὁ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· καὶ ὁ Β ἄρα

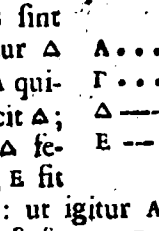
PROP. XXXVI. PROBL.

Duobus numeris datis, invenire minimum numerum quem metiantur.

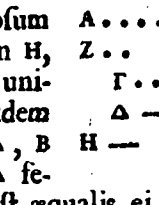
Sint dati duo numeri A, B: oportet invenire minimum numerum quem metiantur.

Numeri enim A, B vel primi inter se sunt, vel non. sint primum A, B inter se primi, & A ipsum B multiplicans faciat Γ; ergo [per 16. 7.]

7.] & B multiplicans A ipſum Γ fecit; ac propterea numeri A, B ipſum Γ metiuntur. dico etiam Γ minimum eſſe. ſi enim non ita ſit, metientur A, B numerum aliquem minorem quam Γ. metiantur ipſum Δ. & quoties A ipſum Δ metitur tot unitates ſint in E, quoties autem B metitur Δ tot unitates ſint in Z: ergo A quidem ipſum B multiplicans fecit Δ; B vero multiplicans Z ipſum Δ fecit: quare numerus qui ex A, E fit eſt æqualis ei qui fit ex B, Z: ut igitur A ad B ita eſt [per 19. 7.] Z ad E. & ſunt A, B primi, primi autem [per 23. 7.] & minimi: ſed [per 21. 7.] minimi eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, major majorem & minor minorem: ergo B ipſum E metitur, conſequens conſequentem. & quoniam A numeros B, E multiplicans fecit Γ, Δ, erit [per 18. 7.] ut B ad E ita Γ ad Δ. metitur autem B ipſum E: ergo & Γ ipſum Δ metitur, major minorem, quod fieri non poteſt: non igitur A, B metiuntur aliquem numerum minorem ipſo Γ, quando A, B primi inter ſe fuerint: ergo numerus Γ eſt minimus quem A, B metiantur.



Sed non ſint A, B primi inter ſe; & ſumantur [per 35. 7.] minimi numeri eandem quam A, B rationem habentium, qui ſint Z, E: æqualis igitur eſt [per 19. 7.] qui ex A, E fit ei qui ex B, Z. & A ipſum E multiplicans faciat Γ: ergo & B multiplicans Z ipſum Γ fecit: quare A, B ipſum Γ metiuntur. dico & minimum eſſe. niſi enim ita ſit, metientur A, B aliquem numerum minorem quam Γ. metiantur ipſum Δ. & quoties A ipſum Δ metitur tot unitates ſint in H, quoties autem B metitur Δ tot unitates ſint in Θ: ergo A quidem ipſum H multiplicans fecit Δ, B vero multiplicans Θ ipſum Δ fecit: qui igitur ex A, H fit eſt æqualis ei qui fit ex B, Θ: ut igitur A ad B ita [per 19. 7.] Θ ad H. ſed ut A ad B ita Z ad E: ergo & ut Z ad E ita Θ ad H. & [per conſtr.] ſunt Z, E minimi; minimi vero eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, [per 21. 7.] major majorem & minor minorem: quare E ipſum H metitur. & quoniam A numeros E, H multiplicans ipſos Γ, Δ fecit, ut E ad H ita erit [per 17. 7.] Γ ad Δ. ſed E metitur ipſum H: ergo [per 20. def. 7.] & Γ ipſum Δ metitur, major minorem, quod fieri non poteſt: non igitur metiuntur A, B aliquem numerum minorem quam Γ: ergo Γ eſt minimus quem A, B metiantur. quod erat demonſtrandum.



Prop. XXXVII. Theor.

Si duo numeri metiantur numerum aliquem, & minimus quem illi metiuntur eundem metietur.

DUO enim numeri A, B numerum aliquem Γ Δ metiantur, minimum autem ipſum E: dico & E ipſum Γ Δ metiri.

τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· οἱ Α, Β ἄρα τὸν Γ μετροῦσι. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστον. εἰ γὰρ μή, μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν οἱ Α, Β ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ. μετρείτωσαν τὸν Δ. καὶ ὁσάκις ὁ Α τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε. ὁσάκις δὴ ὁ Β τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ζ· ὁ μὲν Α ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ δὲ Β τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Α, Ε τῷ ἐκ τῶν Β, Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε. οἱ δὲ Α, Β πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὁ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα· ὁ Β ἄρα τὸν Ε μετρεῖ, ὡς ἐπόμβυος ἐπόμβυον. καὶ ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Β, Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· μετρεῖ δὲ ὁ Β τὸν Ε· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Α, Β μετροῦσί τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ, ὅπερ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν· ὁ Γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν Α, Β μετρεῖται.

Μὴ ἔστωσαν δὴ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, οἱ Ζ, Ε· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Α, Ε τῷ ἐκ τῶν Β, Ζ. εἰ δὲ ὁ Α τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· οἱ Α, Β ἄρα τὸν Γ μετροῦσι. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστον. εἰ γὰρ μή, μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν οἱ Α, Β, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ. μετρείτωσαν τὸν Δ. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ Α τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Η, ὁσάκις δὲ ὁ Β τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Θ· ὁ μὲν Α ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ δὲ Β τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Α, Η τῷ ἐκ τῶν Β, Θ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. οἱ δὲ Ζ, Ε ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα· ὁ Ε ἄρα τὸν Η μετρεῖ. καὶ ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Ε, Η πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ὁ δὲ Ε τὸν Η μετρεῖ· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Α, Β μετροῦσί τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα τοῦ Γ· ὁ Γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν Α, Β μετρεῖται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα μετρῶσι, καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπ' αὐτῶν μετρούμενος τὸν αὐτὸν μετρήσει.

ΔΥΟ γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀριθμόν τινα τὸν Γ Δ μετρείτωσαν, ἐλάχιστον δὲ τὸν Ε· λέγω ὅτι καὶ ὁ Ε τὸν Γ Δ μετρεῖ. Εἰ

Εἰ γὰρ ὁ Ε μετρεῖ τὸν Γ Δ, ὁ Ε τὸν Ζ Δ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν Γ Ζ. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β τὸν Ε μετροῦσιν, ὁ δὲ Ε τὸν Δ Ζ μετρεῖ· καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸ Δ Ζ μετρήσουσι. μετροῦσι δὲ καὶ ὅλον τὸν Γ Δ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν Γ Ζ μετρήσουσιν, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Ε, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ μετρεῖ ὁ Ε τὸν Γ Δ, μετρεῖ ἄρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si enim E non metitur Γ Δ, E metiens Z Δ relinquat seipso minorem Γ Z. & quoniam A, B ipsum E metiuntur, E vero ipsum Δ Z, & A, B metientur Δ Z. sed & metiuntur totum Γ Δ: ergo & reliquum Γ Z minorem ipso E metientur, quod [ex hyp.] fieri non potest: non igitur E non metitur ipsum Γ Δ, metitur igitur. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη'.

Τελῶν ἀριθμῶν δοθέντων, εὑρεῖν τὸν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.

Prop. XXXVIII. Probl.

Tribus numeris datis, invenire minimum numerum quem metiantur.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ εὑρεῖν τὸν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν.

Εἰλήφθω γὰρ τοῦ δύο τῶν Α, Β ἐλάχιστος μετρούμενος ὁ Δ. ὁ δὴ Γ τὸν Δ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον. μετροῦσι δὴ καὶ οἱ Α, Β τὸν Δ· οἱ ἄρα Α, Β, Γ τὸν Δ μετροῦσι. λέγω ὅτι καὶ ἐλάχιστον. εἰ γὰρ μή, μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν οἱ Α, Β, Γ, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Δ. μετρείτωσαν τὸν Ε. ἐπεὶ οὖν οἱ Α, Β, Γ τὸν Ε μετροῦσι, καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν Ε μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα τοῦ τὰ Α, Β μετρούμενος τὸν Ε μετρήσει. ἐλάχιστος δὴ τοῦ τὰ Α, Β μετρούμενός ἐστιν ὁ Δ· ὁ Δ ἄρα τὸν Ε μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Α, Β, Γ μετροῦσί τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Δ· οἱ Α, Β, Γ ἄρα ἐλάχιστον τὸν Δ μετροῦσι.

Sumatur enim [per 36. 7.] numerus Δ minimus quem duo A, B metiuntur. itaque Γ vel metitur Δ, vel non metitur. metiatur primum. sed & A, B metiuntur ipsum Δ: ergo A, B, Γ ipsum Δ metientur. dico illum esse minimum. si enim non, metientur A, B, Γ quendam numerum minorem ipso Δ. metiantur E. quoniam igitur A, B, Γ metiuntur ipsum E, & A, B ipsum E metiuntur: ergo [per 37. 7.] & minimus quem metiuntur A, B ipsum E metietur. minimus autem quem metiuntur A, B est Δ: quare Δ metitur ipsum E, major minorem, quod fieri non potest: non igitur A, B, Γ metiuntur aliquem numerum ipso Δ minorem: ergo Δ est minimus quem A, B, Γ metiuntur.

Μὴ μετρείτω δὴ πάλιν ὁ Γ τὸν Δ, καὶ εἰλήφθω τοῦ τῶν Γ, Δ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, ὁ Ε. ἐπεὶ οὖν οἱ Α, Β τὸν Δ μετροῦσιν, ὁ δὲ Δ τὸν Ε μετρεῖ· καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν Ε μετροῦσι. μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Γ τὸν Ε· καὶ οἱ Α, Β, Γ ἄρα τὸν Ε μετροῦσι. λέγω ἔτι καὶ ἐλάχιστον. εἰ γὰρ μή, μετρήσουσί τινα οἱ Α, Β, Γ, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Ε. μετρείτωσαν τὸν Ζ. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β, Γ τὸν Ζ μετροῦσι· καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν Ζ μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα τοῦ τὰ Α, Β μετρούμενος τὸ Ζ μετρήσει. ἐλάχιστος δὴ τοῦ τὰ Α, Β μετρούμενός ἐστιν ὁ Δ· ὁ Δ ἄρα τὸν Ζ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Γ τὸν Ζ· οἱ Δ, Γ ἄρα τὸν Ζ μετροῦσι· ὥστε καὶ ὁ ἐλάχιστος τοῦ τὰ Δ, Γ μετρούμενος μετρήσει τὸν Ζ. ὁ δὲ ἐλάχιστος τοῦ τὰ Δ, Γ μετρούμενός ἐστιν ὁ Ε· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Α, Β, Γ μετροῦσί τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Ε· ὁ Ε ἄρα ἐλάχιστος ὢν τοῦ τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Non metiatur autem Γ ipsum Δ, & sumatur [per 36. 7.] minimus numerus E, quem Γ, Δ metiantur. itaque quoniam A, B metiuntur ipsum Δ, Δ vero ipsum E; & A, B ipsum E metientur. metitur autem & Γ ipsum E: ergo A, B, Γ ipsum E metiuntur. dico illum etiam esse minimum. si enim non, metientur A, B, Γ numerum minorem ipso E. metiantur Z. & quoniam A, B, Γ metiuntur Z, & A, B ipsum Z metientur: ergo [per 37. 7.] & minimus quem A, B metiuntur metietur ipsum Z. minimus autem quem A, B metiuntur est Δ: quare Δ ipsum Z metitur. sed & Γ metitur ipsum Z: ergo Δ, Γ ipsum Z metiuntur; ac propterea minimus quem metiuntur Δ, Γ metietur & Z. sed [per constr.] minimus quem metiuntur Δ, Γ, est E: ergo E ipsum Z metitur, major minorem, quod fieri non potest: non igitur A, B, Γ metiuntur aliquem numerum minorem ipso E: ergo numerus E est minimus quem ipsi A, B, Γ metiuntur. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ'.

Ἐὰν ἀριθμὸς τοῦ τινος ἀριθμοῦ μερῆται, ὁ μετρούμενος ὁμώνυμον μέρος ἕξει τῷ μερῶντι.

Prop. XXXIX. Theor.

Si numerum numerus aliquis metiatur, ille quem metitur partem habebit à metiente denominatam.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α τοῦ τινος ἀριθμοῦ τοῦ Β μετρείσθω· λέγω ὅτι ὁ Α ὁμώνυμον μέρος ἔχει τῷ Β.

Numerum enim A numerus aliquis B metiatur: dico A partem habere ab ipso B denominatam.

Quoties enim B ipſum A metitur, tot unitates ſint in Γ: & quoniam B metitur ipſum A per eas quæ ſunt in Γ unitates; metitur autem & unitas Δ ipſum Γ per unitates quæ in ipſo ſunt: & Δ unitas ipſum Γ numerum æqualiter metietur atque B ipſum A: quare permutando [per 15. 7.] unitas Δ ipſum B numerum æqualiter metietur atque Γ ipſum A: quæ igitur pars eſt unitas Δ ipſius B numeri, eadem pars eſt & Γ ipſius A. ſed unitas Δ ipſius B numeri pars eſt ab eo denominata: ergo & Γ ipſius A pars eſt denominata ab ipſo B: quare A partem habet ſc. Γ ab ipſo B denominatam. quod erat demonſtrandum.

A . . . . . .
B . . .
Γ . . . . .
Δ .

Οσάκις γὰρ ὁ Β τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Γ· καὶ ἐπεὶ ὁ Β τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Α· ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ Δ μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Γ τὸν Α· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ Δ μονὰς τοῦ Β ἀριθμοῦ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Α. ἡ δὲ Δ μονὰς τοῦ Β ἀριθμοῦ μέρος ἐστὶν ὁμώνυμον αὐτοῦ· καὶ ὁ Γ ἄρα τοῦ Α μέρος ἐστὶν ὁμώνυμον τῷ Β· ὥστε ὁ Α μέρος ἔχει τὸ Γ ὁμώνυμον ὄντα τῷ Β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XL. Theor.

Si numerus partem quamcumque habeat, eum numerus à parte denominatus metietur.

NUmerus enim A partem habeat quamcumque B, & ab ipſa parte B denominatus ſit numerus Γ: dico Γ ipſum A metiri

Quoniam enim B ipſius A pars eſt & denominata ab ipſo Γ, eſt autem & unitas Δ ipſius Γ numeri pars ab ipſo denominata: quæ igitur pars eſt unitas Δ ipſius Γ numeri eadem pars eſt & B ipſius A: ergo unitas Δ æqualiter metitur ipſum Γ numerum atque B ipſum A; & permutando [per 15. 7.] unitas Δ ipſum B numerum æqualiter metitur atque Γ ipſum A: ergo Γ ipſum A metitur. quod erat demonſtrandum.

A . . . . . .
B . .
Γ . . . . . .
Δ .

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

Ἐὰν ἀριθμὸς μέρος ἔχῃ ὁποιονοῦν, τοῦτο ὁμωνύμου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται τῷ μέρει.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α μέρος ἐχέτω ὁποιονοῦν τὸ Β, καὶ τῷ Β μέρει ὁμώνυμος ἔστω ἀριθμὸς ὁ Γ· λέγω ὅτι ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Β τοῦ Α μέρος ἐστὶ καὶ ὁμώνυμον τῷ Γ, ἔστι δὲ καὶ ἡ Δ μονὰς τοῦ Γ μέρος ὁμώνυμον αὐτοῦ· ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ Δ μονὰς τοῦ Γ ἀριθμοῦ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Β τοῦ Α· ἰσάκις ἄρα ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Α· ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ Δ μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Γ τὸν Α· ὁ Γ ἄρα τὸν Α μετρεῖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XLI. Probl.

Numerum invenire, qui minimus cum ſit datas partes habeat.

SInt datæ partes A, B, Γ: oportet numerum invenire, qui cum minimus ſit habeat datas partes A, B, Γ.

Sint ab ipſis A, B, Γ partibus denominati numeri Δ, E, Z, & ſumatur [per 38. 7.] minimus numerus H, quem ipſi Δ, E, Z metiuntur. quoniam igitur Δ, E, Z metiuntur ipſum H; habebit [per 39. 7.] H partes ab ipſis Δ, E, Z denominatas. partes autem denominatæ ab ipſis Δ, E, Z [per conſtr.] ſunt A, B, Γ; ergo H partes A, B, Γ habet. dico & minimum eſſe. ſi enim H non ſit minimus, partes habens A, B, Γ, erit numerus aliquis minor ipſo H, qui eaſdem partes habeat. ſit Θ. quoniam igitur Θ partes habet A, B, Γ; eum [per 40. 7.] metientur numeri ab ipſis A, B, Γ partibus denominati. ſunt autem hi numeri Δ, E, Z: ergo Δ, E, Z ipſum Θ metientur minorem ipſo H, quod [per conſtr.] fieri non poteſt: non igitur erit aliquis numerus minor ipſo H, qui partes A, B, Γ habeat. quod erat demonſtrandum.

A 1/2
B 1/3
Γ 1/4
H . . . . . .
Θ ----------

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μα'.

Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ὢν ἕξει τὰ δοθέντα μέρη.

Ἔστω τὰ δοθέντα μέρη τὰ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ὢν ἕξει τὰ δοθέντα μέρη τὰ Α, Β, Γ.

Ἐστωσαν τοῖς Α, Β, Γ μέρεσιν ὁμώνυμοι ἀριθμοί, οἱ Δ, Ε, Ζ, καὶ εἰλήφθω ὁ τοῦ τῶν Δ, Ε, Ζ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμός, ὁ Η. ἐπεὶ οὖν ὁ Η τοῦ τῶν Δ, Ε, Ζ μετρεῖται, ὁ Η ὁμώνυμα μέρη ἔχει τοῖς Δ, Ε, Ζ. τοῖς δὲ Δ, Ε, Ζ ὁμώνυμα μέρη ἐστὶ τὰ Α, Β, Γ· ὁ Η ἄρα ἔχει τὰ Α, Β, Γ μέρη. λέγω δὴ ὅτι ἐλάχιστος ὤν. εἰ γὰρ μὴ ὁ Η ἐλάχιστος ὢν ἔχει τὰ Α, Β, Γ μέρη, ἔσται δή τις Η ἐλάσσων ἀριθμὸς ὃς ἕξει τὰ Α, Β, Γ μέρη. ἔστω ὁ Θ. ἐπεὶ ὁ Θ ἔχει τὰ Α, Β, Γ μέρη· ὁ Θ ἄρα τοῦ ὁμωνύμων ἀριθμῶν μετρηθήσεται τοῖς Α, Β, Γ μέρεσι. τοῖς δὲ Α, Β, Γ μέρεσιν ὁμώνυμοι ἀριθμοί εἰσιν οἱ Δ, Ε, Ζ· ὁ Θ ἄρα τοῦ τῶν Δ, Ε, Ζ μετρεῖται, καὶ ἔστιν ἐλάσσων ὁ Η, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσται τις τοῦ Η ἐλάσσων ἀριθμὸς, ὃς ἕξει τὰ Α, Β, Γ μέρη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΥΚΛΕΙ-

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER OCTAVUS.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν· ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

ΕΣΤΩΣΑΝ ὁποσοιῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω ὅτι οἱ Α, Β, Γ, Δ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Εἰ γὰρ μή, ἔστωσαν ἐλάττονες τῶν Α, Β, Γ, Δ οἱ Ε, Ζ, Η, Θ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες αὐτοῖς. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς Ε, Ζ, Η, Θ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν

Α, Β, Γ, Δ τῷ πλήθει τῶν Ε,	Α, *8.	Β, 12.	Γ, 18.	Δ, 27.
Ζ, Η, Θ· δίστε ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α	Ε —	Ζ —	Η —	Θ —

πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ.

οἱ δὲ Α, Δ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Ε, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Ε, Ζ, Η, Θ ἐλάσσονες ὄντες τῶν Α, Β, Γ, Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν αὐτοῖς· οἱ Α, Β, Γ, Δ ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. I. Theor.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, quorum extremi ſint inter ſe primi; minimi erunt omnium eandem cum ipſis rationem habentium.

SINT quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, Γ, Δ, quorum extremi A, Δ primi inter ſe ſint: dico A, B, Γ, Δ minimos eſſe omnium eandem cum ipſis rationem habentium.

Si enim non, ſint minores ipſis A, B, Γ, Δ numeri E, Z, H, Θ & in eadem ratione. & quoniam A, B, Γ, Δ ſunt in eadem ratione in qua E, Z, H, Θ, atque eſt ipſorum A, B, Γ, Δ multitudo æqualis multitudini ipſorum E, Z, H, Θ: erit ex æquo [per 14. 7.] ut A ad Δ ita E ad Θ. & ſunt A, Δ primi; primi autem & minimi numeri æqualiter metiuntur eos qui eandem rationem habent, [per 21. 7.] antecedens antecedentem & conſequens conſequentem: ergo A ipſum E metitur, major minorem, quod fieri non poteſt: non igitur E, Z, H, Θ minores ipſis A, B, Γ, Δ exiſtentes in eadem ſunt ratione cum ipſis: ac propterea A, B, Γ, Δ minimi ſunt omnium eandem cum ipſis rationem habentium. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἐξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους, ὁσουσδηποτοῦν ὑπὸ τοσούτων, ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ.

ΕΣΤΩ ὁ δοθεὶς λόγος ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς, ὁ ὃν Α πρὸς τὸν Β· δεῖ δὴ ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἐξῆς

Prop. II. Probl.

Numeros invenire deinceps proportionales minimos, quotcunque quis imperaverit, in data ratione.

SIT data ratio in minimis numeris, ea ſc. quam habet A ad B: oportet numeros invenire dein-

* *In hoc & ſequenti libro Literis adjecimus numeros illis reſpondentes; ne ingens punctorum multitudo, quandoque ex neceſſitate adhibenda, moleſtiam crearet lectoribus.*

ceps

ceps proportionales minimos, quotcumque quis imperaverit, in ratione A ad B.

Imperentur quatuor, & A ſeipſum multiplicans faciat Γ, multiplicans vero B faciat Δ, & B ſeipſum multiplicans faciat E; & adhuc A multiplicans Γ, Δ, E ipſos Z, H, Θ faciat, B vero multiplicans E faciat K.

Quoniam igitur A ſeipſum multiplicans fecit Γ, multiplicans vero B ipſum Δ fecit, numerus A duos numeros A, B multiplicans fecit Γ, Δ: eſt igitur [per 17. 7.] ut A ad B ita Γ ad Δ. rurſus, quoniam A ipſum B multiplicans fecit Δ, & B ſeipſum multiplicans fecit E; uterque ipſorum A, B multiplicans B utrumque ipſorum Δ, E fecit: ut igitur A ad B ita [per 18. 7.] Δ ad E. ſed ut A ad B, ita Γ ad Δ: ergo & ut Γ ad Δ ita Δ ad E. & quoniam A numeros Γ, Δ multiplicans ipſos Z, H fecit: ut Γ ad Δ ita erit Z ad H. ut autem Γ ad Δ ita erat A ad B: & igitur ut A ad B ita Z ad H. rurſus, quoniam A numeros Δ, E multiplicans fecit H, Θ: erit ut Δ ad E ita H ad Θ. ſed ut Δ ad E ita A ad B: ergo & ut A ad B ita H ad Θ. & quoniam A, B ipſum E multiplicantes fecerunt Θ, K; erit ut A ad B ita Θ ad K. oſtenſum autem eſt & ut A ad B ita eſſe & Z ad H & H ad Θ: ergo ut Z ad H ita H ad Θ & Θ ad K: numeri igitur Γ, Δ, E & etiam Z, H, Θ, K proportionales ſunt in ratione quam habet A ad B. dico etiam & minimos eſſe. quoniam enim [ex hyp.] A, B minimi ſunt omnium eandem cum ipſis rationem habentium; minimi vero eandem cum ipſis rationem habentium [per 23. 7.] & primi ſunt inter ſe: erunt ipſi A, B inter ſe primi. & uterque quidem ipſorum A, B ſeipſum multiplicans utrumque Γ, E fecit; utrumque vero Γ, E multiplicans fecit utrumque Z, K: ergo [per 29. 7.] Γ, E & Z, K primi inter ſe ſunt. ſi autem ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, & eorum extremi ſint inter ſe primi; [per 1. 8.] minimi erunt omnium eandem cum ipſis rationem habentium: ergo & Γ, Δ, E & etiam Z, H, Θ, K minimi ſunt omnium eandem cum ipſis A, B rationem habentium. quod erat demonſtrandum.

A, 2.	B, 3.		
Γ, 4.	Δ, 6.	E, 9.	
Z, 8.	H, 12.	Θ. 18.	K, 27.

Corollarium.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi tres numeri deinceps proportionales minimi fuerint omnium eandem cum ipſis rationem habentium, extremos eorum quadratos eſſe; ſi vero quatuor, eſſe cubos.

PROP. III. THEOR.

Si ſint quotcunque numeri deinceps pro-

ἀνάλογον ἐλαχίστοι, ὅσοι ἄν τις ὑπαρίθμῳ, ἐν τῷ δοθέντι τῶν A πρὸς τὸν B λόγῳ.

Ἐπιτεταχθωσαν δὴ πλείονες τῶν δύο ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον οἱ A, B, Γ, Δ, E ἐλάχιστοι τοσοῦτοι ὄντες ὅσοι ἐπιτέτακται ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ τῶν A πρὸς τὸν B· λέγω ὅτι οἱ A, B, Γ, Δ, E τοῦ αὐτοῦ λόγου ἐλάχιστοί εἰσι τοσοῦτοι ὄντες ὅσοι ἐπιτέτακται ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ τῶν A πρὸς τὸν B.

Εἰλήφθωσαν γὰρ τρεῖς μὲν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον οἱ Z, H, Θ ἐλάχιστοι τοῦ αὐτοῦ λόγου ὄντες τοῖς A, B, ὥστε τὸν μὲν A τὸν ἑαυτὸν πολλαπλασιάσαντα τὸν Γ ποιεῖν, τὸν δὲ B πολλαπλασιάσαντα τὸν Δ ποιεῖν, καὶ ἔτι τὸν B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσαντα τὸν E ποιεῖν, καὶ ἔτι τὸν A τοὺς Γ, Δ, E πολλαπλασιάσαντας τοὺς Z, H, Θ ποιεῖν, τὸν δὲ B τὸν E πολλαπλασιάσαντα τὸν K ποιεῖν.

Καὶ ἐπεὶ ὁ A ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκε, τὸν δὲ B πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ἀριθμὸς δὴ ὁ A δύο τοὺς A, B πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ δὲ B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν E πεποίηκεν· ἑκάτερος ἄρα τῶν A, B τὸν B πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Δ, E πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν E. ἀλλ' ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν E. Καὶ ἐπεὶ ὁ A τοὺς Γ, Δ πολλαπλασιάσας τοὺς Z, H πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν H. ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ἐδείχθη ὁ A πρὸς τὸν B· καὶ ὡς ἄρα ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν H. πάλιν, ἐπεὶ ὁ A τοὺς Δ, E πολλαπλασιάσας τοὺς H, Θ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν E οὕτως ὁ H πρὸς τὸν Θ. ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν E οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B· καὶ ὡς ἄρα ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ H πρὸς τὸν Θ. καὶ ἐπεὶ οἱ A, B τὸν E πολλαπλασιάσαντες τοὺς Θ, K πεποιήκασιν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν K. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὅ, τε Z πρὸς τὸν H καὶ ὁ H πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Z πρὸς τὸν H οὕτως ὅ, τε H πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν K· οἱ Γ, Δ, E ἄρα καὶ οἱ Z, H, Θ, K ἀνάλογόν εἰσιν, ἐν τῷ δοθέντι τῶν A πρὸς τὸν B λόγῳ. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. ἐπεὶ γὰρ οἱ A, B ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ δὲ ἐλάχιστοι τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· οἱ A, B ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ἑκάτερος μὲν τῶν A, B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Γ, E πεποίηκεν, ἑκάτερον δὲ τῶν Γ, E πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Z, K πεποιήκεν· οἱ Γ, E ἄρα καὶ οἱ Z, K πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἐὰν δὲ ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οἱ Γ, Δ, E ἄρα καὶ οἱ Z, H, Θ, K ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς A, B. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι ὦσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ ἄκροι αὐτῶν τετράγωνοί εἰσιν· ἐὰν δὲ τέσσαρες, κύβοι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι

ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγων ἐχόντων αὐτοῖς· οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

portionales, minimi omnium eandem cum ipſis rationem habentium; eorum extremi primi inter ſe erunt.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ Α, Β, Γ, Δ· λέγω ὅτι οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰλήφθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ μὲν ἐλάχιστοι ἐν τῷ τῶν Α, Β, Γ, Δ λόγῳ, οἱ Ε, Ζ, τρεῖς δὲ οἱ Η, Θ, Κ, καὶ αἰεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλείους, ἕως ὃ τὸ λαμβανόμενον πλῆθος ἴσον γένηται τῷ πλήθει τῶν Α, Β, Γ, Δ. εἰλήφθωσαν, καὶ ἔστωσαν οἱ Λ, Μ, Ν, Ξ.

Sint quotcunque numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, Δ, minimi omnium eandem cum ipſis rationem habentium: dico eorum extremos Α, Δ inter ſe primos eſſe.

Sumantur enim [per 2. 8.] duo numeri minimi in ratione ipſorum Α, Β, Γ, Δ, qui ſint Ε, Ζ, tres vero Η, Θ, Κ, & ſemper deinceps uno plures, quoad aſſumpta multitudo æqualis fuerit multitudini ipſorum Α, Β, Γ, Δ. ſumantur & ſint Λ, Μ, Ν, Ξ.

Α, 8. Β, 12. Γ, 18. Δ, 27.
Ε, 2. Ζ, 3.
Η, 4. Θ, 6.
Κ, 9.
Λ, 8. Μ, 12. Ν. 18. Ξ, 27.

Οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἐπεὶ γὰρ οἱ Ε, Ζ πρῶτοί εἰσιν, ἑκάτερος δὲ αὐτῶν ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Η, Κ πεποίηκεν, ἑκάτερον δὲ τῶν Η, Κ πολλαπλασιάσας τὸν ἕτερον τῶν Λ, Ξ πεποίηκεν· οἱ Η, Κ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ καὶ οἱ Λ, Ξ. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ Λ, Μ, Ν, Ξ ἐλάχιστοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β, Γ, Δ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ, Δ τῷ πλήθει τῶν Λ, Μ, Ν, Ξ· ἕκαστος ἄρα τῶν Α, Β, Γ, Δ ἑκάστῳ τῶν Λ, Μ, Ν, Ξ ἴσος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν Α τῷ Λ, ὁ δὲ Δ τῷ Ξ. καὶ ἐπεὶ οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ἴσος δὲ ὁ μὲν Λ τῷ Α, ὁ δὲ Ξ τῷ Δ· καὶ οἱ Α, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Extremi igitur ipſorum Α, Ξ primi inter ſe ſunt. quoniam enim Ε, Ζ primi inter ſe ſunt, & uterque ipſorum ſeipſum multiplicans utrumque Η, Κ fecit; utrumque vero Η, Κ multiplicans fecit utrumque Λ, Ξ: erunt [per 29. 7.] & Η, Κ & Λ, Ξ primi. & quoniam Α, Β, Γ, Δ minimi ſunt eorum eandem cum ipſis rationem habentium; ſunt autem & Λ, Μ, Ν, Ξ minimi in eadem ratione in qua Α, Β, Γ, Δ; eſtque ipſorum Α, Β, Γ, Δ multitudo æqualis multitudini ipſorum Λ, Μ, Ν, Ξ: erit unuſquiſque ipſorum Α, Β, Γ, Δ unicuique ipſorum Λ, Μ, Ν, Ξ æqualis: ergo Α quidem eſt æqualis Λ, & Δ ipſi Ξ. & quoniam Λ, Ξ primi ſunt inter ſe, Λ vero ipſi Α æqualis, & Ξ ipſi Δ; & Α, Δ inter ſe primi erunt. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Λόγων δοθέντων ὁποσωνοῦν ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς, ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἐλαχίστους ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις.

PROP. IV. PROBL.

Rationibus datis quotcunque in minimis numeris, numeros invenire deinceps minimos in datis rationibus.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες λόγοι ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς, ὅ τε τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ ὁ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ὁ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ· δεῖ δὴ ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἐλαχίστους, ἔντα τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ, καὶ ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ.

Sint datæ rationes in minimis numeris, videlicet ratio Α ad Β, & ratio Γ ad Δ, & ratio Ε ad Ζ: oportet numeros invenire deinceps minimos in ratione Α ad Β, & in ratione Γ ad Δ; & adhuc in ratione Ε ad Ζ.

Εἰλήφθω γὰρ ὁ τῶν τοῦ Β, Γ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, ὁ Η. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ Β τὸν Η μετρεῖ τοσαυτάκις ὁ Α τὸν Θ μετρείτω, ὁσάκις δὲ ὁ Γ τὸν Η μετρεῖ τοσαυτάκις ὁ Δ τὸν Κ μετρείτω· ὁ δὲ Ε τὸν Κ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον. καὶ ὁσάκις ὁ Ε τὸν Κ μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ ὁ Ζ τὸν Λ μετρείτω. καὶ ἐπεὶ ὁσάκις ὁ Α τὸν Θ μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Η· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Κ, καὶ ἔτι ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ· οἱ Θ, Η, Κ, Λ ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἔντα τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγῳ. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι.

Sumatur enim [per 36. 7.] minimus numerus, quem Β, Γ metiuntur; ſitque Η. & quoties Β metitur Η toties Α ipſum Θ metiatur: quoties vero Γ ipſum Η metitur toties & Δ metiatur Κ: itaque Ε ipſum Κ vel metitur, vel non metitur. metiatur primum. & quoties Ε metitur Κ, toties Ζ ipſum Λ metiatur. & quoniam Α æqualiter metitur Θ atque Β ipſum Η; erit [per 13. 7.] ut Α ad Β ita Θ ad Η. eadem ratione & ut Γ ad Δ ita Η ad Κ, & adhuc ut Ε ad Ζ ita Κ ad Λ: ergo Θ, Η, Κ, Λ deinceps proportionales ſunt in ratione Α ad Β, & in ratione Γ ad Δ, & adhuc in ratione Ε ad Ζ. dico etiam minimos eſſe. ſi

Α, 2. Β, 5. Γ, 3. Δ, 4. Ε, 5, Ζ, 6.
Θ, 6. Η, 15. Κ, 20. Λ, 24.
Ν --- Ξ —— Μ —— Ο ——

enim non ſint Θ, H, K, Λ deinceps minimi in rationibus A ad B, & Γ ad Δ, & E ad Z; erunt aliqui numeri minores ipſis Θ, H, K, Λ deinceps minimi in rationibus A ad B, & Γ ad Δ, & E ad Z. ſint N, Ξ, M, O. & quoniam eſt ut A ad B ita N ad Ξ; & ſunt A, B minimi; minimi autem eos qui eandem habent rationem [per 21. 7.] æqualiter metiuntur, major majorem & minor minorem, hoc eſt antecedens antecedentem & conſequens conſequentem: metietur B ipſum Ξ. eadem ratione & Γ ipſum Ξ metietur: quare B, Γ metiuntur Ξ: ac propterea [per 37. 7.] minimus, quem metiuntur B, Γ, ipſum Ξ metietur. minimus autem quem metiuntur B, Γ [ex hyp.] eſt H: ergo H metietur Ξ, major minorem, quod fieri non poteſt: non igitur erunt aliqui numeri minores ipſis Θ, H, K, Λ deinceps minimi in rationibus A ad B, & Γ ad Δ, & E ad Z.

A, 2.	B, 3.	Γ, 3.	Δ, 4.	E, 3.	Z, 6.
Θ, 6.	H, 15.	K, 20.	Λ, 24.
N —	Ξ ——	M ——	O ———

Sed non metiatur E ipſum K. & ſumatur [per 36. 7.] minimus numerus, quem ipſi B, K metiuntur; ſitque M. quoties autem K metitur M toties & uterque ipſorum Θ, H utrumque N, Ξ metiatur, & quoties E metitur M toties & Z metiatur O. quoniam igitur Θ ipſum N æqualiter metitur atque H ipſum Ξ; erit [per 13. 7.] ut Θ ad H ita N ad Ξ. ut autem Θ ad H ita A ad B: & igitur ut A ad B ita N ad Ξ. eadem ratione & ut Γ ad Δ ita Ξ ad M. rurſus, quoniam E ipſum M æqualiter metitur atque Z ipſum O; erit ut E ad Z ita M ad O: quare N, Ξ, M, O deinceps proportionales ſunt in rationibus A ad B, & Γ ad Δ, & E ad Z. dico minimos quoque eſſe. ſi enim non ſint N, Ξ, M, O deinceps minimi in rationibus A ad B, & Γ ad Δ, & E ad Z, erunt aliqui numeri minores ipſis N, Ξ, M, O deinceps minimi in rationibus A ad B, & Γ ad Δ, & E ad Z. ſint Π, P, Σ, T. & cum ſit ut Π ad P ita A ad B; ſintque A, B minimi; minimi vero eos qui eandem habent rationem [per 21. 7.] æqualiter metiuntur, antecedens antecedentem & conſequens conſequentem: numerus B ipſum P metietur. eadem ratione & Γ metietur ipſum P: ergo B, Γ ipſum P metiuntur: & ob id [per 37. 7.] minimus, quem metiuntur B, Γ, ipſum P metietur. minimus autem, quem metiuntur B, Γ, eſt H: ergo H metitur ipſum P. atque eſt [per 13. 7.] ut H ad P ita K ad Σ: quare [per 20. def. 7.] & K ipſum Σ metitur. metitur autem & E ipſum Σ; ideoque E, K ipſum Σ metiuntur: & minimus igitur, quem metiuntur E, K, metietur ipſum Σ. ſed minimus, quem metiuntur E, K, [ex hyp.] eſt M: ergo M ipſum Σ metietur, major minorem, quod fieri non poteſt: non

A 4.	B, 5.	Γ, 2.	Δ, 3.	E, 4.	Z, 3.
Θ, 8.	H, 10.	K, 15.
N, 32.	Ξ, 40.	M, 60.	O, 45.
Π —	P —	Σ —	T —

εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Θ, H, K, Λ ἑξῆς ἐλάχιστοι, ἔστω τοῖς τὸ Α πρὸς τὸν Β, καὶ τὸ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι τὸ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις, ἔσονταί τινες τῶν Θ, H, K, Λ ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τοῖς τὸ Α πρὸς τὸν Β, καὶ τὸ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι τὸ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις. ἔστωσαν οἱ N, Ξ, M, O. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ N πρὸς τὸν Ξ, οἱ δὲ Α, Β ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα, τουτέστιν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ὁ Β ἄρα τὸν Ξ μετρεῖ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Ξ μετρεῖ· οἱ Β, Γ ἄρα τὸν Ξ μετροῦσιν, καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα τῶν τὸν αὐτὸν Β, Γ μετρούμενος τὸ Ξ μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ τῶν τὸν Β, Γ μετρούμενός ἐστιν ὁ H· ὁ H ἄρα τὸν Ξ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸ ἐλάττονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν Θ, H, K, Λ ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τοῖς τὸ Α πρὸς τὸν Β, καὶ ἐν τῷ τὸ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ἐν τῷ τὸ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγῳ.

Μὴ μετρείτω δὴ ὁ Ε τὸν K. καὶ εἰλήφθω ὁ τῶν τὸν Ε, K ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, ὁ M. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ K τὸν M μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ ἑκάτερος τῶν Θ, H ἑκάτερον τῶν N, Ξ μετρείτω, ὁσάκις δὲ ὁ Ε τὸν M μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ ὁ Ζ τὸν O μετρείτω. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ὁ Θ τὸν N μετρεῖ καὶ ὁ H τὸν Ξ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν H οὕτως ὁ N πρὸς τὸν Ξ. ὡς δὲ ὁ Θ πρὸς τὸν H οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ N πρὸς τὸν Ξ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ξ πρὸς τὸν M. πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ὁ Ε τὸν M μετρεῖ καὶ ὁ Ζ τὸν O, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸ Ζ οὕτως ὁ M πρὸς τὸν O· οἱ N, Ξ, M, O ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἐν τοῖς τὸ Α πρὸς τὸν Β, καὶ τὸ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ τὸ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ N, Ξ, M, O ἑξῆς ἐλάχιστοι ἐν τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ λόγοις, ἔσονταί τινες τῶν N, Ξ, M, O ἐλάττονες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐν τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ λόγοις. ἔστωσαν οἱ Π, P, Σ, T. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Π πρὸς τὸν P οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, οἱ δὲ Α, Β ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ὁ Β ἄρα τὸν P μετρεῖ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν P μετρεῖ· οἱ Β, Γ ἄρα τὸν P μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα τῶν τὸν Β, Γ μετρούμενος τὸν P μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ τῶν τὸν Β, Γ μετρούμενός ἐστιν ὁ H· ὁ H ἄρα τὸν P μετρεῖ. καί ἐστιν ὡς ὁ H πρὸς τὸν P οὕτως ὁ K πρὸς τὸν Σ· καὶ ὁ K ἄρα τὸν Σ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Ε τὸν Σ· οἱ Ε, K ἄρα τὸν Σ μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα τῶν τὸν Ε, K μετρούμενος τὸν Σ μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ τῶν τὸν Ε, K μετρούμενός ἐστιν ὁ M· ὁ M ἄρα τὸν Σ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάττονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ

ἄρα

ἄρα ἔσονταί τινες τῶν N, Ξ, M, O ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἐν τοῖς Δ πρὸς τὸν B καὶ Δ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἐν τῷ E πρὸς τὸν Z λόγοις· οἱ N, Ξ, M, O ἄρα ἐξῆς ἐλάχιστοί εἰσιν ἐν τοῖς A, B, Γ, Δ, E, Z λόγοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

igitur erunt aliqui numeri minores ipſis N, Ξ, M, O deinceps minimi in rationibus A ad B & Γ ad Δ & E ad Z; ergo N, Ξ, M, O deinceps minimi ſunt in rationibus A ad B & Γ ad Δ & E ad Z. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Οἱ ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον.

PROP. V. THEOR.

Plani numeri inter ſe rationem habent * ex lateribus compoſitam.

Ἔστωσαν ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ A, B, καὶ τοῦ μὲν A πλευραὶ ἔστωσαν οἱ Γ, Δ ἀριθμοί, τοῦ δὲ B οἱ E, Z· λέγω ὅτι ὁ A πρὸς τὸν B λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον.

Λόγων γὰρ δοθέντων, τοῦτον ὃν ἔχει ὁ Γ πρὸς τὸν E καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Z, εἰλήφθωσαν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἐλάχιστοι ἐν τοῖς Γ, E, Δ, Z λόγοις, οἱ H, Θ, K, ὥστε εἶναι ὡς μὲν τὸν Γ πρὸς τὸν E οὕτως τὸν H πρὸς τὸν Θ, ὡς δὲ τὸν Δ πρὸς τὸν Z οὕτως τὸν Θ πρὸς τὸν K. [† οἱ ἄρα H, Θ, K πρὸς ἀλλήλους ἔχουσι τοὺς τῶν πλευρῶν λόγους. ἀλλ' ὁ τοῦ H πρὸς τὸν K λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τοῦ H πρὸς τὸν Θ καὶ τοῦ τοῦ Θ πρὸς τὸν K· ὁ H ἄρα πρὸς τὸν K λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἔκ τῶν πλευρῶν· λέγω δή, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ H πρὸς τὸν K.] ὁ Δ γὰρ τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν Λ ποιείτω. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκε, τὸν δὲ E πολλαπλασιάσας τὸν Λ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν E οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Λ. ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν E οὕτως ὁ H πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ H πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Λ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ E τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Λ πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Z πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Z οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν B. ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Z οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν K· καὶ ὡς ἄρα ὁ Θ πρὸς τὸν K οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν B. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ H πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Λ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ H πρὸς τὸν K οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B. ὁ δὲ H πρὸς τὸν K λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἔκ τῶν πλευρῶν· καὶ ὁ A ἄρα πρὸς τὸν B λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἔκ τῶν πλευρῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SInt plani numeri A, B, & ipſius quidem A latera ſint Γ, Δ numeri: ipſius vero B latera ſint E, Z: dico A ad B rationem habere ex lateribus compoſitam.

Rationibus enim datis, videlicet quam habet Γ ad E & quam Δ ad Z, ſumantur [per 4. 8.] numeri deinceps minimi H, Θ, K in rationibus Γ ad E & Δ ad Z, ſitque ut Γ ad E ita H ad Θ: ut autem Δ ad Z ita Θ ad K. [ergo H, Θ, K inter ſe rationes habent laterum. ſed [per 5. def. 6.] ratio H ad K compoſita eſt ex ratione H ad Θ & ratione Θ ad K: quare H ad K rationem habet ex lateribus compoſitam: dico igitur ut A ad B ita eſſe H ad K.] numerus Δ ipſum E multiplicans faciat Λ. & quoniam [per 16. def. 7.] Δ multiplicans Γ ipſum A fecit, multiplicans vero E fecit Λ: erit [per 17. 7.] ut Γ ad E ita A ad Λ. ut autem Γ ad E ita [per conſtr.] H ad Θ: ergo & ut H ad Θ ita A ad Λ. rurſus, quoniam E ipſum quidem Δ multiplicans fecit Λ, multiplicans vero Z ipſum B fecit; ut Δ ad Z ita erit Λ ad B. ſed ut Δ ad Z ita eſt Θ ad K: & igitur ut Θ ad K ita Λ ad B. oſtenſum autem eſt & ut H ad Θ ita A ad Λ: quare ex æquo [per 14. 7.] ut H ad K ita A ad B. ſed [per 5. def. 6.] H ad K rationem habet compoſitam ex lateribus: ergo & A ad B rationem habebit ex lateribus compoſitam. quod erat demonſtrandum.

A, 6. B, 20. Λ, 12. Γ, 2. Δ, 3. E, 4. Z, 5. H, 3. Θ, 6. K, 10.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ς'.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν δεύτερον μὴ μετρεῖ· οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει.

PROP. VI. THEOR.

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundum non metiatur: neque alius aliquis ullum metietur.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ A, B, Γ, Δ, E, ὁ δὲ A τὸν B μὴ μετρείτω· λέγω ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει.

SInt quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, Γ, Δ, E, & A ipſum B non metiatur. dico neque alium aliquem ullum metiri.

* Rectius ex laterum rationibus. † Quæ uncis incluſa dedimus in quibuſdam exemplaribus deſiderantur: & commode quidem abeſſe poſſunt. Deinde eadem exemplaria pro ὁ Δ καὶ τὸν habent ἐπεὶ ὁ Δ τὸν &c.

Et quidem numeros A, B, Γ, Δ, E deinceps ſeſe non metiri, perſpicuum eſt. neque enim A ipſum B metitur. dico neque alium aliquem ullum metiri. dico enim A, ex. gr. non metiri ipſum Γ. nam quot ſunt A, B, Γ,
tot ſumantur [per 35. 7.] A, 16. B, 24. Γ, 36. Δ, 54. E, 81.
minimi numeri eandem Z, 4. H, 6. Θ, 9.
cum ipſis A, B, Γ rationem habentes, & ſint Z, H, Θ. quoniam igitur Z, H, Θ in eadem ſunt ratione in qua A, B, Γ, atque eſt ipſorum A, B, Γ multitudo æqualis multitudini ipſorum Z, H, Θ; erit ex æquo [per 14. 7.] ut A ad Γ ita Z ad Θ. & quoniam eſt ut A ad B ita Z ad H, non metitur autem A ipſum B, neque [per 20. def. 7.] Z ipſum H metietur: non igitur Z unitas eſt; unitas enim [per 1. def. 7.] omnem numerum metitur, & ſunt Z, Θ primi inter ſe: ergo [per 12. def. 7.] neque Z metitur ipſum Θ. atque eſt ut Z ad Θ ita A ad Γ: neque igitur A ipſum Γ metietur. ſimiliter demonſtrabimus neque alium ullum aliquem metiri. quod erat demonſtrandum.

Οτι μὴν οὐκ ἔστιν οἱ A, B, Γ, Δ, E ἑξῆς ἀλλήλους ἀ μετροῦσι, φανερόν. οὐδὲ γὰρ ὁ A τὸν B μετρεῖ. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει. λέγω γὰρ ὅτι ὁ μετρεῖ ὁ A τὸν Γ. ὅσοι γάρ εἰσιν οἱ A, B, Γ τοσοῦτοι ἀλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς A, B, Γ, οἱ Z, H, Θ. καὶ ἐπεὶ οἱ Z, H, Θ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς A, B Γ, ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν A, B, Γ τῷ πλήθει τῶν Z, H, Θ· δίσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ A πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν Θ. καί ἐστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν H, ὁ μετρεῖ δὲ ὁ A τὸν B· ὁ μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Z τὸν H· οὐκ ἄρα μονὰς ἐστιν ὁ Z, ἡ γὰρ μονὰς πάντα μετρεῖ ἀριθμόν, καί εἰσιν οἱ Z, Θ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· οὐδὲ ὁ Z ἄρα τὸν Θ μετρεῖ. καί ἐστιν ὡς ὁ Z πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Γ· οὐδὲ ὁ A ἄρα τὸν Γ μετρεῖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρεῖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VII. Theor.

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem metiatur extremum; & ſecundum metietur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν ἔσχατον μετρεῖ· καὶ τὸν δεύτερον μετρήσει.

SInt quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, Γ, Δ, & A ipſum Δ metiatur: dico A ipſum quoque B metiri.

Si enim A non metitur ipſum B [per 6. 8.] neque alius aliquis ullum metietur, quod eſt abſurdum: ponitur enim A ipſum Δ metiri. metitur autem A ipſum Δ: ergo & A ipſum B metietur. quod erat demonſtrandum.

A, 2. B, 4. Γ, 8. Δ, 16.

Ἑστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ A, B, Γ, Δ, ὁ δὲ A τὸν Δ μετρείτω· λέγω ὅτι καὶ ὁ A τὸν B μετρεῖ.

Εἰ γὰρ μὴ μετρεῖ ὁ A τὸν B, οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει, ὅπερ ἄτοπον· ὑποκείται γὰρ ὁ A τὸν Δ μετρῶν. μετρεῖ δὲ ὁ A τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ A τὸν B. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VIII. Theor.

Si inter duos numeros numeri deinceps proportionales ceciderint; quot inter eos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter alios eandem cum ipſis rationem habentes cadent.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί· ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

INter duos numeros A, B cadant numeri deinceps proportionales Γ, Δ; & fiat ut A ad B ita E ad Z: dico quot numeri deinceps proportionales cadunt inter A, B, totidem & inter B, Z deinceps proportionales cadere.

Quot enim numeri ſunt A, Γ, Δ, B, totidem ſumantur [per 35. 7.] minimi numeri eandem cum ipſis A, Γ, Δ, B rationem habentium H, Θ, K, Λ: ergo [per 3. 8.] extremi ipſorum H, Λ primi inter ſe ſunt. & quoniam A, Γ, Δ, B

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν A, B μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν ἀριθμοί, οἱ Γ, Δ, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Z· λέγω ὅτι ὅσοι εἰς τοὺς A, B μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς E, Z μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Ὅσοι γάρ εἰσι τῷ πλήθει οἱ A, Γ, Δ, B, τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς A, Γ, Δ, B, οἱ H, Θ, K, Λ· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ H, Λ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. καὶ ἐπεὶ οἱ A, Γ, Δ, B

Α, Γ, Δ, Β τοῖς Η, Θ, Κ, Λ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Γ, Β, Δ τῷ πλήθει τῶν Η, Θ, Κ, Λ· δύσις ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β ἕτως ὁ Η πρὸς τὸν Λ. ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Β ἕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Λ ἕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. οἱ δὲ Η, Λ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα· ἰσάκις ἄρα τὸν Ε μετρεῖ ὁ Η καὶ ὁ Λ τὸν Ζ. ὁσάκις δὲ ὁ Η τὸν Ε μετρεῖ τοσαυτάκις καὶ ἑκάτερος τῶν Θ, Κ ἑκάτερον τῶν Μ, Ν μετρείτω· οἱ Η, Θ, Κ, Λ ἄρα τοὺς Ε, Μ, Ν, Ζ ἰσάκις μετροῦσιν· οἱ Η, Θ, Κ, Λ ἄρα τοῖς Ε, Μ, Ν, Ζ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. ἀλλὰ οἱ Η, Θ, Κ, Λ τοῖς Α, Γ, Δ, Β ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν· οἱ Α, Γ, Δ, Β ἄρα τοῖς Ε, Μ, Ν, Ζ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. οἱ δὲ Α, Γ, Δ, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι· καὶ οἱ Ε, Μ, Ν, Ζ ἄρα ἀνάλογόν εἰσιν ἑξῆς· ὅσοι ἄρα εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Ε, Ζ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Α, 2.	Γ, 4.	
Η, 1.	Θ, 2.	
Ε, 3.	Μ, 6.	

ad ipſos Η, Θ, Κ, Λ in eadem ſunt ratione, atque eſt ipſorum Α, Γ, Δ, Β multitudo æqualis multitudini ipſorum Η, Θ, Κ, Λ; erit ex æquo [per 14. 7.] ut Α ad Β ita Η ad Λ. ut autem Α ad Β ita Ε ad Ζ: & igitur ut Η ad Λ ita Ε ad Ζ. & ſunt Η, Λ primi; ſed primi [per 23. 7.] ſunt & minimi; minimi vero eos qui eandem rationem habent [per 21. 7.] æqualiter metiuntur, major majorem & minor minorem: ergo Η æqualiter metitur ipſum Ε atque Λ ipſum Ζ. quoties autem Η metitur ipſum Ε toties & uterque ipſorum Θ, Κ utrumque Μ, Ν metiatur: numeri igitur Η, Θ, Κ, Λ ipſos Ε, Μ, Ν, Ζ æqualiter metiuntur: ideoque [per 20. def. 7.] Η, Θ, Κ, Λ in eadem ſunt ratione in qua ipſi Ε, Μ, Ν, Ζ. at Η, Θ, Κ, Λ ſimiliter in eadem ſunt ratione in qua Α, Γ, Δ, Β: ergo Α, Γ, Δ, Β in eadem ratione erunt in qua Ε, Μ, Ν, Ζ. ſed [ex hyp.] Α, Γ, Δ, Β ſunt deinceps proportionales: ergo & Ε, Μ, Ν, Ζ deinceps proportionales erunt: quot igitur deinceps proportionales cadunt inter Α, Β, totidem deinceps proportionales & inter Ε, Ζ cadent. quod erat demonſtrandum.

Α, 8.	Γ, 12.	
Δ, 18.	Β, 27.	
Η, 3.	Β, 1.	
Λ, 9.	Ζ, 2.	
Ζ, 18.	Ο, 27.	
Θ, 4.	Κ, 6.	
Μ, 8.	Ν, 12.	

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί· ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος ἑξῆς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Prop. IX. Theor.

Si duo numeri inter ſe primi fuerint, & inter ipſos numeri deinceps proportionales ceciderint; quot inter ipſos cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter utrumque ipſorum & unitatem deinceps proportionales cadent.

Ἐστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ Α, Β, καὶ εἰς αὐτοὺς κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν οἱ Γ, Δ, καὶ ἐκκείσθω ἡ Ε μονάς· λέγω ὅτι ὅσοι εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου τῶν Α, Β καὶ τῆς Ε μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Sint duo numeri inter ſe primi Α, Β, & inter ipſos deinceps proportionales cadant Γ, Δ; exponaturque unitas Ε: dico quot numeri deinceps proportionales cadunt inter ipſos Α, Β, totidem & inter utrumque ipſorum Α, Β & unitatem Ε numeros deinceps proportionales cadere.

Εἰλήφθωσαν γὰρ δύο μὲν ἐλάχιστοι ἐν τῷ τῶν Α, Γ, Δ, Β λόγῳ ὄντες, οἱ Ζ, Η, τρεῖς δὲ οἱ Θ, Κ, Λ, καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλείους ἕως ἂν ἴσον γένηται τὸ πλῆθος αὐτῶν τῷ πλήθει τῶν Α, Γ, Δ, Β, εἰλήφθωσαν, καὶ ἔστωσαν οἱ Μ, Ν, Ξ, Ο· φανερὸν δὴ ὅτι ὁ μὲν Ζ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποίηκε, τὸν δὲ Θ πολλαπλασιάσας τὸν Μ πεποίηκε, καὶ ὁ Η ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Λ πεποίηκε, τὸν δὲ Λ πολλαπλασιάσας τὸν Ο πεποίηκε. καὶ ἐπεὶ οἱ Μ, Ν, Ξ, Ο ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Ζ, Η, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ Α, Γ, Δ, Β ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Ζ, Η, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Μ, Ν, Ξ, Ο τῷ πλήθει τῶν

Sumantur enim [per 2. 8.] duo quidem numeri minimi Ζ, Η in eadem ratione in qua ſunt Α, Γ, Δ, Β; tres vero Θ, Κ, Λ, & ſemper deinceps uno plures, quoad fiat ipſorum multitudo æqualis multitudini ipſorum Α, Γ, Δ, Β, ſumantur, & ſint Μ, Ν, Ξ, Ο: itaque manifeſtum eſt [per conſtr. 2. 8.] Ζ ſeipſum quidem multiplicantem feciſſe Θ, multiplicantem vero Θ feciſſe Μ, & Η ſeipſum multiplicantem feciſſe Λ, multiplicantem vero Λ feciſſe Ο. & quoniam Μ, Ν, Ξ, Ο minimi ſunt eandem cum ipſis Ζ, Η rationem habentium; ſunt autem & Α, Γ, Δ, Β minimi eandem quam Ζ, Η rationem habentium; atque eſt ipſorum Μ, Ν, Ξ, Ο multitudo æqualis

multitudini ipſorum A, Γ, Δ, B: erit unuſquiſque ipſorum M, N, Ξ, O unicuique ipſorum A, Γ, Δ, B æqualis: æqualis igitur eſt M ipſi A & O ipſi B. & quoniam Z ſeipſum multiplicans fecit Θ, metitur Z ipſum Θ per unitates quæ ſunt in Z. metitur autem & E unitas numerum Z per unitates quæ in ipſo ſunt: ergo E unitas numerum Z æqualiter metitur atque Z ipſum Θ: eſt igitur [per 20. def. 7.] ut E unitas ad numerum Z ita Z ad Θ. rurſus, quoniam Z multiplicans Θ fecit M; metitur Θ ipſum M per unitates quæ ſunt in Z. metitur autem & E unitas numerum Z per unitates quæ in ipſo ſunt: æqualiter igitur E unitas numerum Z metitur atque Θ ipſum M: ergo ut E unitas ad numerum Z ita Θ ad M. oſtenſum eſt autem & ut E unitas ad numerum Z ita eſſe Z ad Θ: & igitur ut E unitas ad numerum Z ita Z ad Θ & Θ ad M. ſed M eſt æqualis ipſi A: quare ut E unitas ad numerum Z ita Z ad Θ & Θ ad A. eadem ratione & ut E unitas ad numerum H ita H ad Λ & Λ ad B: quot igitur numeri deinceps proportionales cadunt inter A, B totidem & inter utrumque ipſorum A, B & unitatem E numeri deinceps proportionales cadent. quod erat demonſtrandum.

A, 8. Γ, 12. E, 1.
Z, 2. Θ, 4. K, 6.
M, 8. N, 12.

Α, Γ, Δ, Β ἑκαστος ἄρα τῶν Μ, Ν, Ξ, Ο ἑκάστῳ τῶν Α, Γ, Δ, Β ἴσος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν Μ τῷ Α, ὁ δὲ Ο τῷ Β. καὶ ἐπεὶ ὁ Ζ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποίηκεν· ὁ Ζ ἄρα τὸν Θ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ζ μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Ζ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Ζ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Ζ τὸν Θ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμὸν οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Μ πεποίηκεν· ὁ Θ ἄρα τὸν Μ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Ζ ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Ζ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Θ τὸν Μ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμὸν οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Μ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμὸν οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμὸν οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Μ. ὁ δὲ Μ τῷ Α ἴσος ἐστίν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμὸν οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Α. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Η ἀριθμὸν οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Λ καὶ ὁ Λ πρὸς τὸν Β· ὅσοι ἄρα εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπλώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου τῶν Α, Β καὶ μονάδος τῆς Ε μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπλώκασιν ἀριθμοί. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

A, 8. K, 12. Λ, 18. B, 27.
E, 4. Θ, 6. H, 9.
Δ, 2. Z, 3.
Γ, 1.

Prop. X. Theor.

Si inter duos numeros & unitatem deinceps proportionales numeri cecideriſ; quot inter utrumque ipſorum & unitatem cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter ipſos numeri proportionales cadent.

Inter duos enim numeros A, B & unitatem Γ numeri deinceps proportionales cadant Δ, E & Z, H: dico quot inter utrumque ipſorum A, B & unitatem Γ cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter ipſos A, B numeros deinceps proportionales cadere.

Numerus enim Δ ipſum Z multiplicans faciat Θ: uterque autem ipſorum Δ, Z ipſum Θ multiplicans faciat utrumque K, Λ.

Et quoniam eſt ut Γ unitas ad numerum Δ ita Δ ad E, unitas Γ ipſum Δ numerum æqualiter metietur atque Δ ipſum E. ſed unitas Γ numerum Δ metitur per unitates quæ ſunt in Δ: ergo & numerus Δ ipſum E per unitates quæ ſunt in Δ metitur: ac propterea numerus Δ ſeipſum multiplicans fecit E. rurſus, quoniam ut unitas Γ ad Δ numerum ita eſt E ad A; unitas Γ ipſum Δ nu-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν καὶ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπλωσιν ἀριθμοί· ὅσοι ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος ἑξῆς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπλωσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β καὶ μονάδος τῆς Γ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπιπλάτωσαν ἀριθμοὶ οἱ Δ, Ε καὶ οἱ Ζ, Η· λέγω ὅτι ὅσοι ἑκατέρου τῶν Α, Β καὶ μονάδος τῆς Γ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπλώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Ὁ Δ γὰρ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Θ ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Δ, Ζ τὸν Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Κ, Λ ποιείτω.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Γ μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἰσάκις ἄρα ἡ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν Ε. ἡ δὲ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· καὶ ὁ Δ ἄρα τὸν Ε μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Δ ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκε. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Γ μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Α· ἰσάκις ἄρα ἡ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν

μετρεῖ

μετρεῖ ϗ ὁ Ε τὸν Α. ἡ δὲ Γ μονὰς τ̃ Δ ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Δ ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μὲν Ζ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκε, τὸν δὲ Η πολλαπλασιάσας τ̃ Β πεποίηκε, ϗ ἐπεὶ ὁ Δ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τ̃ Ε πεποίηκε, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Θ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Ε πρὸς τ̃ Θ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ϗ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. καὶ ὡς ἄρα ὁ Ε πρὸς τ̃ Θ οὕτως ὁ Θ πρὸς τ̃ Η. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑκάτερον τ̃ Ε, Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τ̃ Α, Κ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ. ἀλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Δ πρὸς τ̃ Ζ· ϗ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ. πάλιν, ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν Δ, Ζ τὸν Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τ̃ Κ, Λ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τ̃ Ζ οὕτως ὁ Κ πρὸς τ̃ Λ. ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ· ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Κ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. ἔτι ἐπεὶ ὁ Ζ ἑκάτερον τ̃ Η, Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τ̃ Λ, Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν Β. ὡς δὲ ὁ Θ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν Β. ἐδείχθη δὲ ϗ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ, τε Α πρὸς τὸν Κ, ϗ ὁ Κ πρὸς τ̃ Λ, ϗ ὁ Λ πρὸς τὸν Β· οἱ Α, Κ, Λ, Β ἄρα κατὰ τὸ συνεχὲς ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον· ὅσοι ἄρα ἑκατέρᾳ τ̃ Α, Β καὶ τῆς Γ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι ϗ εἰς τὰς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

merum æqualiter metitur atque Ε ipſum Α. ſed unitas Γ ipſum Δ numerum metitur per unitates quæ ſunt in Δ: quare & Ε ipſum Α per unitates quæ ſunt in Δ metitur: ideoque Δ ipſum Ε multiplicans fecit Α. eadem ratione & Ζ ſeipſum multiplicans fecit Η, multiplicans vero Η ipſum Β fecit, & quoniam Δ ſeipſum multiplicans fecit Ε, multiplicans vero Ζ fecit Θ; erit [per 17. 7.] ut Δ ad Ζ ita Ε ad Θ. & ob eandem cauſam ut Δ ad Ζ ita Θ ad Η. ut igitur Ε ad Θ ita Θ ad Η. rurſus, quoniam Δ utrumque ipſorum Ε, Θ multiplicans fecit utrumque Α, Κ, erit [per 17.7.] ut Ε ad Θ ita Α ad Κ. ſed ut Ε ad Θ ita Δ ad Ζ: & igitur ut Δ ad Ζ ita Α ad Κ. rurſus, quoniam uterque Δ, Ζ ipſum Θ multiplicans utrumque Κ, Λ fecit; [per 18. 7.] ut Δ ad Ζ ita eſt Κ ad Λ. ut autem Δ ad Ζ ita eſt Α ad Κ: & igitur ut Α ad Κ ita Κ ad Λ. præterea cum Ζ utrumque Θ, Η multiplicans utrumque Λ, Β faciat, erit ut Θ ad Η ita Λ ad Β. ſed ut Θ ad Η ita Δ ad Ζ: ergo & ut Δ ad Ζ ita Λ ad Β. oſtenſum autem eſt & ut Δ ad Ζ ita Α ad Κ & Κ ad Λ & Λ ad Β: quare Α, Κ, Λ, Β numeri deinceps proportionales ſunt: quot igitur inter utrumque ipſorum Α, Β & unitatem Γ cadunt numeri deinceps proportionales, totidem & inter Α, Β numeri deinceps proportionales cadent. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Δύο τετραγώνων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, ϗ ὁ τετράγωνος πρὸς τ̃ τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

Prop. XI. Theor.

Inter duos numeros quadratos unus medius proportionalis cadit; & quadratus ad quadratum duplicatam rationem habet ejus quam latus habet ad latus.

Ἑστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, ϗ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω ὅτι τῶν Α, Β εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, ϗ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τ̃ Δ.

Ο Γ γὰρ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω. καὶ ἐπεὶ τετράγωνός ἐστιν ἀριθμὸς ὁ Α, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ἐστιν ὁ Γ· ὁ Γ ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ϗ ὁ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε· ἐπεὶ οὖν ὁ Γ ἑκάτερον τ̃ Γ, Δ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τ̃ Α, Ε πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τ̃ Ε πεποίηκεν, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε, δύο δὴ ἀριθμοὶ οἱ Γ, Δ ἕνα ἀριθμὸν ϗ τὸν αὐτὸν τ̃ Δ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Ε, Β πεποιήκασιν· ἔστιν ἄρα

Α, 4. Ε, 6. Β, 9. Γ, 2. Δ, 3.

Sint quadrati numeri Α, Β & ipſius quidem Α latus ſit Γ, ipſius vero Β latus Δ: dico inter ipſos Α, Β unum medium proportionalem cadere, & Α ad Β duplicatam rationem habere ejus quam habet Γ ad Δ.

Numerus enim Γ multiplicans Δ faciat Ε. & quoniam Α numerus quadratus eſt cujus latus Γ; [per 18. def. 7.] numerus Γ ſeipſum multiplicans fecit Α. eadem ratione & Δ ſeipſum multiplicans fecit Β: quoniam igitur Γ utrumque ipſorum Γ, Δ multiplicans utrumque Α, Ε fecit, ut Γ ad Δ ita erit [per 17. 7.] Α ad Ε. rurſus, quoniam Γ multiplicans Δ ipſum Ε fecit, & Δ ſeipſum multiplicans fecit Β; duo numeri Γ, Δ unum & eundem numerum Δ multiplicantes ipſos Ε, Β fecerunt: eſt igitur [per 18. 7.] ut Γ

ad

ad Δ ita E ad B. ſed ut Γ ad Δ ita eſt A ad E: ergo & ut A ad E ita E ad B. inter numeros igitur A, B unus medius proportionalis E cadit.

Dico etiam A ad B duplicatam habere rationem ejus quam habet Γ ad Δ. quoniam enim tres numeri proportionales ſunt A, E, B, habebit A ad B duplicatam rationem ejus quam habet A ad E. ut autem A ad E ita Γ ad Δ: ergo A ad B duplicatam rationem habet ejus quam latus Γ habet ad latus Δ. quod erat demonſtrandum.

A, 4. E, 6. B, 9.
Γ, 2. Δ, 3.

Prop. XII. Theor.

Inter duos numeros cubos duo medii proportionales cadunt; & cubus ad cubum triplicatam habet rationem ejus quam latus habet ad latus.

SInt numeri cubi A, B; & ipſius quidem A latus ſit Γ, ipſius vero B latus Δ: dico inter ipſos A, B duos numeros medios proportionales cadere; & A ad B triplicatam habere rationem ejus quam Γ habet ad Δ.

Numerus enim Γ ſeipſum multiplicans faciat E, multiplicans vero Δ ipſum Z faciat; & Δ ſeipſum multiplicans faciat H, & uterque ipſorum Γ, Δ multiplicans Z utrumque Θ, K faciat.

Quoniam igitur A cubus eſt, & ejus latus Γ, numerus Γ ſeipſum multiplicans fecit E; multiplicans vero E [per 19. def. 7.] ipſum A fecit. ſimiliter & Δ ſeipſum multiplicans fecit H, multiplicans vero H fecit ipſum B. & quoniam Γ utrumque ipſorum Γ, Δ multiplicans utrumque E, Z fecit, [per 17. 7.] ut Γ ad Δ ita eſt E ad Z. eadem ratione & ut Γ ad Δ ita Z ad H. rurſus, quoniam Γ utrumque ipſorum E, Z multiplicans fecit utrumque A, Θ, erit ut E ad Z ita A ad Θ. ut autem E ad Z ita Γ ad Δ; & igitur ut Γ ad Δ ita A ad Θ. rurſus, quoniam uterque ipſorum Γ, Δ multiplicans Z utrumque Θ, K fecit, [per 18. 7.] ut Γ ad Δ ita erit Θ ad K. rurſus, quoniam Δ utrumque Z, H multiplicans fecit utrumque K, B, erit ut Z ad H ita K ad B. ut autem Z ad H ita Γ ad Δ: & igitur ut Γ ad Δ ita K ad B. oſtenſum autem eſt ut Γ ad Δ ita eſſe A ad Θ & Θ ad K & K ad B: ac propterea inter ipſos numeros A, B duo numeri medii proportionales Θ, K cadunt.

A, 8. Θ, 12. K, 18. B, 27.
E, 4. Z, 6. H, 9.
Γ, 2. Δ, 3.

Dico etiam A ad B triplicatam rationem habere ejus quam habet Γ ad Δ. quoniam enim quatuor numeri A, Θ, K, B proportionales ſunt, habe-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Δύο κύβων ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί, καὶ ὁ κύβος πρὸς τὸν κύβον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

Ἐστωσαν κύβοι ἀριθμοὶ, οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω ὅτι τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

Ὁ γὰρ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω, ἑκάτερος ἄρα τῶν Γ, Δ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Θ, Κ ποιείτω.

Καὶ ἐπεὶ κύβος ἐστὶν ὁ Α, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ὁ Γ· ὁ Γ ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκε, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Δ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκε, τὸν δὲ Η πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ ἑκάτερον τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ε, Ζ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ ἑκάτερον τῶν Ε, Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Α, Θ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ. ὡς δὲ ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ. πάλιν, ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν Γ, Δ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Θ, Κ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑκάτερον τῶν Ζ, Η πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Κ, Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Β. ὡς δὲ ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Β. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὅ, τε Α πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Κ καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Β· τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, οἱ Θ, Κ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, οἱ Α, Θ, Κ, Β· ὁ Α ἄρα

πρὸς

πρὸς τὴν B τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ A πρὸς τὴν Θ. ὡς δὲ ὁ A πρὸς τὸν Θ ἕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὁ A ἄρα πρὸς τὸν B τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

bit A ad B triplicatam rationem ejus quam habet A ad Θ. ut autem A ad Θ ita Γ ad Δ: ergo A ad B triplicatam habet rationem ejus quam Γ habet ad Δ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, καὶ πολλαπλασιάσας ἕκαστος ἑαυτὸν ποιῇ τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν ἀνάλογον ἔσονται· καὶ ἐὰν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γενομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, καὶ αὐτοὶ ἀνάλογον ἔσονται, καὶ ἀεὶ περὶ τὰς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει.

Prop. XIII. Theor.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, & unuſquiſque ſeipſum multiplicans faciat aliquos, facti ex ipſis proportionales erunt: & ſi poſiti à principio numeri factos multiplicantes alios faciant, & ipſi proportionales erunt; & ſemper circa extremos hoc contingit.

Ἔστωσαν ὁποσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον, οἱ A, B, Γ, ὡς ὁ A πρὸς τὸν B ἕτως ὁ B πρὸς τὸν Γ, καὶ οἱ A, B, Γ ἑαυτοὺς μὲν πολλαπλασιάσαντες τοὺς Δ, E, Z ποιείτωσαν, τοὺς δὲ Δ, E, Z πολλαπλασιάσαντες τοὺς H, Θ, K ποιείτωσαν· λέγω ὅτι οἵτε Δ, E, Z καὶ οἱ H, Θ, K ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν.

Ὁ μὲν γὰρ A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Λ ποιείτω· ἑκάτερος δὲ τῶν A, B τὸν Λ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν M, N ποιείτω. καὶ πάλιν, ὁ μὲν B τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ξ ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν B, Γ τὸν Ξ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν O, Π ποιείτω.

			A, 2.	B, 4.	Γ, 8.			
	Δ, 4.		Λ, 8.	E, 16.	Ξ, 32.	Z, 64.		
H, 8.	M, 16.	N, 32.	Θ, 64.	O, 128.	Π, 256.	K. 512.		

Ὁμοίως δὴ τοῖς ἐπάνω δείξομεν ὅτι οἱ Δ, Λ, E καὶ οἱ H, M, N, Θ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ διπλασίονι τοῦ A πρὸς τὸν B λόγου, καὶ ἔτι οἱ E, Ξ, Z καὶ οἱ Θ, O, Π, K ἐξῆς εἰσιν ἐν τῷ διπλασίονι τοῦ B πρὸς τὸν Γ λόγου. ἔστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B ἕτως ὁ B πρὸς τὸν Γ· ἔστι καὶ οἱ Δ, Λ, E ἄρα τοῖς E, Ξ, Z ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ, καὶ ἔτι οἱ H, M, N, Θ τοῖς Θ, O, Π, K. καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν τῶν Δ, Λ, E πλῆθος τῷ τῶν E, Ξ, Z πλήθει. τὸ δὲ τῶν H, M, N, Θ τῷ τῶν Θ, O, Π, K· ἐστὶν ἄρα ἐστὶν ὡς μὲν ὁ Δ πρὸς τὸν E ἕτως ὁ E πρὸς τὸν Z, ὡς δὲ ὁ H πρὸς τὸν Θ ἕτως ὁ Θ πρὸς τὸν K. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Sint quotcunque numeri proportionales A, B, Γ, ſitque ut A ad B ita B ad Γ, & ipſi A, B, Γ ſeipſos multiplicantes faciant Δ, E, Z, ipſos vero Δ, E, Z multiplicantes faciant H, Θ, K: dico numeros Δ, E, Z & H, Θ, K deinceps proportionales eſſe.

Numerus enim A ipſum B multiplicans faciat Λ; uterque autem ipſorum A, B multiplicans Λ faciat utrumque M, N. & rurſus, B quidem multiplicans Γ ipſum Ξ faciat; uterque vero ipſorum B, Γ multiplicans Ξ faciat utrumque O, Π.

Eodem modo quo prius oſtendemus Δ, Λ, E & H, M, N, Θ deinceps proportionales eſſe in ratione A ad B: & adhuc E, Ξ, Z & Θ, O, Π, K deinceps eſſe proportionales in ratione B ad Γ. atque eſt ut A ad B ita B ad Γ: ergo & Δ, Λ, E in eadem ſunt ratione in qua E, Ξ, Z; & præterea H, M, N, Θ in eadem ratione in qua Θ, O, Π, K. eſtque ipſorum quidem Δ, Λ, E multitudo multitudini ipſorum E, Ξ, Z æqualis. multitudo autem ipſorum H, M, N, Θ æqualis multitudini ipſorum Θ, O, Π, K: ex æquo igitur [per 14.7.] ut Δ ad E ita E ad Z, & ut H ad Θ ita Θ ad K. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἐὰν τετράγωνος τετράγωνον μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει.

Prop. XIV. Theor.

Si numerus quadratus metiatur quadratum numerum, & latus latus metietur: & ſi latus metiatur latus, & quadratus quadratum metietur.

Ἔστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ A, B, πλευραὶ δὲ αὐτῶν οἱ Γ, Δ, ὁ δὲ A τὸν B μετρείτω· λέγω ὅτι καὶ ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ.

Ὁ Γ γὰρ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν E ποιείτω· οἱ A, E, B ἄρα ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ διπλασίονι τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγου. καὶ ἐπεὶ οἱ A, E, B ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ μετρεῖ ὁ A

A, 4.	E, 8.	B, 16.	
Γ, 2.		Δ, 4.	

Sint quadrati numeri A, B, quorum latera Γ, Δ, & A ipſum B metiatur: dico & latus Γ ipſum Δ metiri.

Numerus enim Γ multiplicans Δ ipſum E faciat: ergo A, E, B deinceps proportionales ſunt in ratione Γ ad Δ. & quoniam A, E, B deinceps ſunt proportionales, metiturque A

ipſum B; & [per 7. 8.] A ipſum E metietur. atque eſt ut A ad E ita Γ ad Δ: ergo [per 20. def. 7.] & Γ metitur ipſum Δ.

A, 4. E, 8. B, 16.
Γ, 2. Δ, 4.

SED Γ metiatur ipſum Δ: dico & A ipſum B metiri.

Iiſdem enim conſtructis, ſimiliter oſtendemus A, E, B deinceps proportionales eſſe in ratione Γ ad Δ. & quoniam eſt ut Γ ad Δ ita A ad E, metitur autem Γ ipſum Δ; & A ipſum E metietur. & ſunt A, E, B deinceps proportionales; metitur igitur & A ipſum B.

Si igitur numerus quadratus metiatur quadratum numerum, & latus latus metietur: & ſi latus metiatur latus, & quadratus quadratum metietur. quod erat demonſtrandum.

PROP. XV. THEOR.

Si numerus cubus metiatur cubum numerum, & latus latus metietur: & ſi latus latus metiatur, & cubus cubum metietur.

NUmerus enim cubus A cubum numerum B metiatur, & ipſius quidem A latus ſit Γ, ipſius vero B latus Δ: dico Γ ipſum Δ metiri.

Numerus enim Γ ſeipſum multiplicans faciat E, & multiplicans Δ faciat Z; Δ vero ſeipſum multiplicans faciat H, & uterque ipſorum Γ, Δ multiplicans Z utrumque Θ, K faciat. manifeſtum autem eſt E, Z, H & A, Θ, K, B deinceps proportionales eſſe in ratione Γ ad Δ; & quoniam A, Θ, K, B deinceps proportionales ſunt, metiturque A ipſum B; [per 7. 8.] & A ipſum Θ metietur. eſt autem ut A ad Θ ita Γ ad Δ: ergo [per 20. def. 7.] Γ ipſum Δ metietur.

A, 8. Θ, 16. K, 32. B, 64.
E, 4. Z, 8. H, 16.
Γ, 2. Δ, 4.

SED Γ metiatur Δ: dico & A ipſum B metiri.

Iiſdem enim conſtructis, ſimiliter oſtendemus A, Θ, K, B deinceps proportionales eſſe in ratione Γ ad Δ. & quoniam Γ ipſum Δ metitur, eſtque ut Γ ad Δ ita A ad Θ; & A metitur ipſum Θ: quare & A ipſum B metietur. quod erat demonſtrandum.

PROP. XVI. THEOR.

Si numerus quadratus non metiatur quadratum numerum, neque latus latus metietur: & ſi latus non metiatur latus, neque hic quadratus quadratum.

SInt quadrati numeri A, B, quorum latera Γ, Δ & A non metiatur ipſum B: dico neque Γ ipſum Δ metiri.

τὸν Β· μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Ε. καὶ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ.

ΑΛΛΑ δὴ μετρείτω ὁ Γ τὸν Δ· λέγω ὅτι καὶ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι οἱ Α, Ε, Β ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε, μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Ε. καί εἰσιν οἱ Α, Ε, Β ἐξῆς ἀνάλογον· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Β.

Ἐὰν ἄρα τετράγωνος τετράγωνον μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσει.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον ἀριθμὸν τὸν Β μετρείτω, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω ὅτι ὁ Γ τὸν Δ μετρήσει.

Ο Γ γὰρ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, καὶ ἔτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Γ, Δ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Θ, Κ ποιείτω. φανερὸν δὲ ὅτι οἱ Ε, Ζ, Η καὶ οἱ Α, Θ, Κ, Β ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ, καὶ ἐπεί οἱ Α, Θ, Κ, Β ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι καὶ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸν Θ. καὶ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ.

Α, 8. Θ, 16. Κ, 32. Β, 64.
Ε, 4. Ζ, 8. Η, 16.
Γ, 2. Δ, 4.

ΑΛΛΑ δὴ μετρείτω ὁ Γ τὸν Δ· λέγω ὅτι καὶ ὁ Α τὸν Β μετρήσει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οἱ Α, Θ, Κ, Β ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. ἐπεὶ οὖν ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ, καὶ ἔστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Θ μετρεῖ· ὥστε καὶ τὸν Β μετρεῖ ὁ Α. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις'.

Ἐὰν τετράγωνος ἀριθμὸς τετράγωνον ἀριθμὸν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· κἂν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ὅλως ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει.

Ἐστωσαν τετράγωνοι οἱ Α, Β, πλευραὶ δὲ αὐτῶν οἱ Γ, Δ, καὶ μὴ μετρείτω ὁ Α τὸν Β· λέγω ὅτι οὐδ' ὁ Γ τὸν Δ μετρήσει.

Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Γ τὸν Δ, μετρήσει καὶ ὁ Α τὸν Β. ἀλλὰ μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Β· οὐδ' ἄρα ὁ Γ τὸν Δ μετρήσει.

Si enim metitur Γ ipſum Δ, [per 14 8.] & Α ipſum Β metietur. non metitur autem Α ipſum Β: non igitur Γ ipſum Δ metietur.

A, 9. Γ, 3. B, 16. Δ, 4.

Μὴ μετρείτω δὴ πάλιν ὁ Γ τὸν Δ· λέγω ὅτι οὐδ' ὁ Α τὸν Β μετρήσει.

Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β, μετρήσει καὶ ὁ Γ τὸν Δ. ἀλλὰ μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· οὐδ' ἄρα ὁ Α τὸν Β μετρήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SED non metiatur Γ ipſum Δ: dico neque Α ipſum Β metiri.

Si enim Α metitur ipſum Β, [per 14. 8.] & Γ ipſum Δ metietur. atqui Γ non metitur Δ; neque igitur Α ipſum Β metietur. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μὴ μετρῇ, οὐδ' ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· κἂν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρῇ, οὐδ' ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσει.

PROP. XVII. THEOR.

Si numerus cubus non metiatur cubum numerum, neque latus latus metietur: & ſi latus non metiatur latus, neque cubus cubum metietur.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον ἀριθμὸν τὸν Β μὴ μετρείτω, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω ὅτι ὁ Γ τὸν Δ οὐ μετρήσει.

NUmerus enim cubus Α cubum numerum Β non metiatur; & ipſius quidem Α latus ſit Γ, ipſius vero Β latus Δ: dico Γ ipſum Δ non metiri.

Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Γ τὸν Δ, καὶ ὁ Α τὸν Β μετρήσει. ἀλλὰ μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Β· οὐδ' ἄρα ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ.

A, 8. Γ, 2. B, 27. Δ, 3.

Si enim Γ metitur ipſum Δ, [per 15. 8.] & Α ipſum Β metietur. atqui non metitur Α ipſum Β: non igitur Γ ipſum Δ metietur.

ΑΛΛΑ δὴ μὴ μετρείτω ὁ Γ τὸν Δ· λέγω ὅτι οὐδ' ὁ Α τὸν Β μετρήσει.

Εἰ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ, καὶ ὁ Γ τὸν Δ μετρήσει. ἀλλὰ μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· οὐδ' ἄρα ὁ Α τὸν Β μετρήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SED non metiatur Γ ipſum Δ: dico neque Α ipſum Β metiri.

Si enim Α ipſum Β metitur, [per 15. 8.] & Γ metietur ipſum Δ. non metitur autem Γ ipſum Δ: neque igitur Α ipſum Β metietur. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Δύο ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός· καὶ ὁ ἐπίπεδος πρὸς τὸν ἐπίπεδον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

PROP. XVIII. THEOR.

Inter duos ſimiles planos numeros unus medius proportionalis cadit: & planus ad planum duplicatam rationem habet ejus quam latus homologum habet ad homologum latus.

Ἐστωσαν δύο ἀριθμοὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοι οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευραὶ ἔστωσαν οἱ Γ, Δ ἀριθμοί, τοῦ δὲ Β οἱ Ε, Ζ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. λέγω δή ὅτι τῶν Α, Β εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ ὁ Γ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὸν Ε, ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ.

SInt duo numeri plani inter ſe ſimiles Α, Β, & ipſius quidem Α latera ſint Γ, Δ, ipſius vero Β latera Ε, Ζ. & quoniam [per 21. def. 7.] ſimiles plani ſunt qui latera habent proportionalia; erit ut Γ ad Δ ita Ε ad Ζ. dico inter ipſos Α, Β unum medium proportionalem cadere, & Α ad Β duplicatam rationem habere ejus quam latus homologum Γ habet ad homologum latus Ε, vel Δ ad Ζ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. καὶ ἐπεὶ ἐπίπεδός ἐστιν ὁ Α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Γ, Δ· ὁ Δ ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν, ὁ Δ δὴ τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η. ἀλλ' ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν

Quoniam enim eſt ut Γ ad Δ ita Ε ad Ζ; & permutando [per 13. 7.] ut Γ ad Ε ita erit Δ ad Ζ. & quoniam planus numerus eſt Α, cujus latera Γ, Δ; numerus Δ ipſum Γ multiplicans fecit Α. eadem ratione & Ε multiplicans Ζ ipſum Β fecit; numerus autem Δ ipſum Ε multiplicans faciat Η. & cum Δ ipſum quidem Γ multiplicans faciat Α; multiplicans vero Ε faciat Η, erit [per 17. 7.] ut Γ ad Ε ita Α ad Η. ſed ut Γ ad Ε

A, 6. H, 12. B, 24. Γ, 2. Δ, 3. E, 4. Z, 6.

ita Δ ad Z: & igitur ut Δ ad Z ita A ad H. rurſus, quoniam E ipſum Δ multiplicans fecit H, multiplicans vero Z ipſum B fecit; ut Δ ad Z ita erit H ad B.

oſtenſum eſt autem & ut Δ ad Z ita eſſe A ad H: & igitur ut A ad H ita H ad B:

A, 6. H, 12. B, 24.
Γ, 2. Δ, 3. E, 4, Z, 6.

ergo A, H, B deinceps proportionales ſunt: ac propterea inter A, B unus medius proportionalis cadit.

DICO & A ad B duplicatam rationem habere ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc eſt quam Γ ad E vel Δ ad Z. quoniam enim A, H, B deinceps proportionales ſunt, A ad B duplicatam rationem habebit ejus quam habet ad H. atque eſt ut A ad H ita Γ ad E & Δ ad Z: ergo & A ad B duplicatam rationem habet ejus quam Γ habet ad E vel Δ ad Z. quod erat demonſtrandum.

Ε ἴσως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸ Ζ ἴσως ὁ Α πρὸς τὸν Η. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Ε τὸν μὲν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκε, τὸ δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸ Ζ ἴσως ὁ Η πρὸς τὸ Β. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸ Ζ ἴσως ὁ Α πρὸς τὸ Η· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Η ἴσως ὁ Η πρὸς τὸν Β· οἱ Α, Η, Β ἄρα ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι· τῶν Α, Β ἄρα διπλασίονα λόγον ἔστιν ἀριθμός.

ΛΕΓΩ δὴ ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸ Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸ Ε ἢ ὁ Δ πρὸς τὸ Ζ. ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Η, Β ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ Α πρὸς τὸ Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ Η. ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸ Η ἴσως ὅτε Γ πρὸς τὸ Ε καὶ ὁ Δ πρὸς τὸ Ζ· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸ Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XIX. THEOR.

Inter duos ſimiles ſolidos numeros duo medii proportionales cadunt; & ſolidus ad ſimilem ſolidum triplicatam rationem habet ejus quam latus homologum habet ad homologum latus.

SInt duo numeri ſolidi inter ſe ſimiles A, B, & ipſius quidem A latera ſint Γ, Δ, E, ipſius vero latera Z, H, Θ. & quoniam [per 21. def. 7.] ſimiles ſolidi ſunt qui latera habent proportionalia: erit ut Γ ad Δ ita Z ad H, ut autem Δ ad E ita H ad Θ. dico inter ipſos A, B duos medios proportionales cadere, & A ad B triplicatam rationem habere ejus quam habet Γ ad Z & Δ ad H & adhuc E ad Θ.

Numerus enim Γ ipſum Δ multiplicans faciat K, Z vero multiplicans H ipſum Λ faciat. & quoniam Γ, Δ in eadem ſunt ratione in qua Z, H, & ex ipſis Γ, Δ fit K, ex ipſis vero Z, H fit Λ; erunt K, Λ ſimiles plani numeri:

A, 30. N, 60. Ξ, 120. B, 240.
K, 6. M, 12. Λ, 24.
Γ, 2. Δ, 3. E, 5. Z, 4. H, 6. Θ, 10.

quare [per 18. 8.] inter ipſos unus medius proportionalis cadit. ſit is numerus M: ergo M fit ex Δ, Z, ut oſtenſum eſt in præcedenti theoremate: eſt igitur ut K ad M ita M ad Λ. & quoniam Δ ipſum Γ multiplicans fecit K, multiplicans vero Z fecit M; erit [per 17. 7.] ut Γ ad Z ita K ad M. ſed ut K ad M ita M ad Λ: ergo K, M, Λ deinceps proportionales ſunt in ratione Γ ad Z. & quoniam ut Γ ad Δ ita Z ad H, erit [per 13. 7.] permutando ut Γ ad Z ita Δ ad H. rurſus, quoniam ut Δ ad E ita H ad Θ; & permutando erit ut Δ ad H ita E ad Θ: ergo K, M, Λ deinceps proportionales ſunt in ratione Γ ad Z. & quoniam ut Γ ad Δ ita Z ad H, erit [per 13. 7.] permutando ut Γ ad Z ita Δ ad H. rurſus, quoniam ut Δ ad E ita H ad Θ; & permutando erit ut Δ ad H ita E ad Θ: ergo K, M, Λ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Δύο ὁμοίων στερεῶν ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί· καὶ ὁ στερεὸς πρὸς τὸν ὅμοιον στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

ΕΣτωσαν δύο ὅμοιοι στερεοὶ οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευραὶ ἔστωσαν οἱ Γ, Δ, Ε, τοῦ δὲ Β οἱ Ζ, Η, Θ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιοι στερεοί εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ μὲν Γ πρὸς τὸν Δ ἴσως ὁ Ζ πρὸς τὸ Η, ὡς δὲ ὁ Δ πρὸς τὸν Ε ἴσως ὁ Η πρὸς τὸν Θ. λέγω ὅτι τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ.

Ο Γ γὰρ τὸν μὲν Δ πολλαπλασιάσας τὸ Κ ποιείτω, ὁ δὲ Ζ τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Λ ποιείτω. καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, Δ τοῖς Ζ, Η ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί, καὶ ἐκ μὲν τῶν Γ, Δ ἐστὶν ὁ Κ, ἐκ δὲ τῶν Ζ, Η ὁ Λ· οἱ Κ, Λ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί· τῶν Κ, Λ ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός. ἔστω ὁ Μ· ὁ Μ ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ, Ζ ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου θεωρήματι ἐδείχθη· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Μ ἴσως ὁ Μ πρὸς τὸν Λ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας τὸ Κ πεποίηκε, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Μ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ ἴσως ὁ Κ πρὸς τὸν Μ. ἀλλ' ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Μ ἴσως ὁ Μ πρὸς τὸν Λ· οἱ Κ, Μ, Λ ἄρα ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Ζ λόγῳ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸ Δ ἴσως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ ἴσως ὁ Δ πρὸς τὸν Η. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸ Ε ἴσως ὁ Η πρὸς τὸν Θ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸ Η ἴσως ὁ Ε πρὸς τὸ Θ· οἱ Κ, Μ, Λ ἄρα

Λ ἄρα ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἔντε τῷ τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ τῷ τε Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι τῷ τε Ε πρὸς τὸν Θ λόγῳ. ἑκάτερος δὴ τῶν Ε, Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ν, Ξ ποιείτω. Καὶ ἐπεὶ στερεός ἐστιν ὁ Α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Γ, Δ, Ε· ὁ Ε ἄρα τὸν ἐκ τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, ὁ δὲ ἐκ τῶν Γ, Δ ἐστὶν ὁ Κ· ὁ Ε ἄρα τὸν Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Θ τὸν Λ πολλαπλασιάσας τὸν ἐκ τῶν Ζ, Η τὸν Β πεποίηκε. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Ν πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Μ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ν. ὡς δὲ ὁ Κ πρὸς τὸν Μ οὕτως ὁ, τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ν. πάλιν, ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν Ε, Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ν, Ξ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. ἀλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ, τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ, τε Α πρὸς τὸν Ν καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Ξ πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Λ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Μ πρὸς τὸν Λ οὕτως ὁ Ξ πρὸς τὸν Β. ἀλλ' ὡς ὁ Μ πρὸς τὸν Λ οὕτως ὁ, τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ἑνὸς μόνου ὁ Ξ πρὸς τὸν Β ἀλλὰ καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Ν καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ· οἱ Α, Ν, Ξ, Β ἄρα ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τοῖς εἰρημένοις τῶν πλευρῶν λόγοις.

ΑΕΓΩ ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἥπερ ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ζ ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν οἱ Α, Ν, Ξ, Β· ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Α πρὸς τὸν Ν. ἀλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ν οὕτως ἐδείχθη ὅ, τε Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἥπερ ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ceps proportionales ſunt in ratione Γ ad Ζ & Δ ad Η & Ε ad Θ. uterque autem ipſorum Ε, Θ multiplicans Μ faciat utrumque Ν, Ξ. & quoniam ſolidus eſt Α, latera autem ipſius Γ, Δ, Ε, numerus Ε eum qui fit ex Γ, Δ multiplicans fecit Α, qui vero fit ex Γ, Δ eſt Κ: ergo Ε multiplicans Κ ipſum Α fecit. eadem ratione & Θ multiplicans Λ, qui fit ex Ζ, Η, fecit ipſum Β. & quoniam Ε ipſum Κ multiplicans fecit Α, ſed & multiplicans Μ fecit Ν; erit [per 17. 7.] ut Κ ad Μ ita Α ad Ν. ut autem Κ ad Μ ita Γ ad Ζ & Δ ad Η & adhuc Ε ad Θ: ergo ut Γ ad Ζ & Δ ad Η & Ε ad Θ ita Α ad Ν. rurſus, quoniam uterque ipſorum Ε, Θ multiplicans Μ fecit utrumque Ν, Ξ, erit ut Ε ad Θ ita Ν ad Ξ. ſed ut Ε ad Θ ita Γ ad Ζ & Δ ad Η: eſt igitur ut Γ ad Ζ & Δ ad Η ita & Α ad Ν & Ν ad Ξ. rurſus, quoniam Θ multiplicans Μ fecit ipſum Ξ, ſed & multiplicans Λ fecit Β: erit ut Μ ad Λ ita Ξ ad Β. ſed ut Μ ad Λ ita Γ ad Ζ & Δ ad Η & Ε ad Θ: & igitur ut Γ ad Ζ & Δ ad Η & Ε ad Θ ita non ſolum Ξ ad Β ſed & Α ad Ν & Ν ad Ξ: ergo Α, Ν, Ξ, Β deinceps proportionales ſunt in dictis laterum rationibus.

Dico & Α ad Β triplicatam rationem habere ejus quam habet latus homologum ad homologum latus, hoc eſt quam habet numerus Γ ad Ζ vel Δ ad Η vel Ε ad Θ. quoniam enim quatuor numeri proportionales ſunt Α, Ν, Ξ, Β, habebit Α ad Β triplicatam rationem ejus quam habet Α ad Ν. ſed ut Α ad Ν ita oſtenſus eſt & Γ ad Ζ & Δ ad Η & Ε ad Θ: ergo Α ad Β triplicatam habet rationem ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc eſt quam Γ habet ad Ζ & Δ ad Η & Ε ad Θ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν εἰς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτῃ ἀριθμός, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται ἀριθμοί.

Prop. XX. Theor.

Si inter duos numeros unus medius proportionalis cadat; numeri ſimiles plani erunt.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β εἰς μέσος ἀνάλογον ἐμπιπτέτω ἀριθμὸς ὁ Γ· λέγω ὅτι οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί.

Εἰλήφθωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, οἱ Δ, Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ. ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Β· ἰσάκις ἄρα ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Ε τὸν Γ. ὁσάκις δὴ ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ, τοσαύτας μονάδας ἔστωσαν ἐν τῷ Ζ·

Α, 8. Γ, 12. Β, 18.
Δ, 2. Ε, 3. Ζ, 4. Η, 6.

Sumantur enim [per 35. 7.] Δ, Ε minimi omnium eandem cum ipſis Α, Γ, rationem habentium: eſt igitur ut Δ ad Ε ita Α ad Γ. ut autem Α ad Γ ita Γ ad Β: æqualiter igitur Δ ipſum Α metitur atque Ε ipſum Γ. & quoties Δ metitur Α, tot unitates ſint

in Z; propterea quæ Z multiplicans Δ ipſum A fecit, multiplicans vero E fecit Γ: quare A planus numerus eſt, cujus latera Δ, Z. rurſus, quoniam Δ, E ſunt minimi omnium eandem cum Γ, B rationem habentium; Δ æqualiter ipſum Γ metitur atque E ipſum B. quoties autem E ipſum B metitur, tot unitates ſint in H: ergo E ipſum B metitur per eas quæ ſunt in H unitates: quare H ipſum E multiplicans fecit B: ideoque B numerus planus eſt, cujus latera E, H; ergo numeri A, B ſunt plani. dico & ſimiles eſſe. quoniam enim uterque ipſorum Z, H multiplicans E utrumque Γ, B fecit, [per 18. 7.] ut Z ad H ita erit Γ ad B. ut autem Γ ad B ita Δ ad E: & igitur ut Δ ad E ita Z ad H: quare [per 21. def. 7.] A, B ſimiles plani ſunt; cum ipſorum latera ſint proportionalia. quod erat demonſtrandum.

A, 8.	Γ, 12,	B, 18,		
Δ, 2.	E, 3.	Z, 4.	H, 6.	

ὁ Ζ ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὡς ἄρα ὁ Α ἐπίπεδός ἐστιν, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ Δ, Ζ. πάλιν, ἐπεὶ οἱ Δ, Ε ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Γ, Β ἰσάκις ἄρα ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ καὶ ὁ Ε τὸν Β. ὁσάκις δὴ ὁ Ε τὸν Β μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Η· ὁ Ε ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Η μονάδας· ὁ Η ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ὁ Β ἄρα ἐπίπεδός ἐστι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Ε, Η· οἱ Α, Β ἄρα ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί. λέγω δὴ ὅτι καὶ ὅμοιοι. ἐπεὶ γὰρ ἕκατερος τῶν Ζ, Η τὸν Ε πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Γ, Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Β. ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η· οἱ Α, Β ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί εἰσιν, αἱ γὰρ αὐτῶν πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXI. Probl.

Si inter duos numeros duo medii proportionales cadant; numeri ſimiles ſolidi erunt.

INter duos enim numeros A, B duo medii proportionales cadant Γ, Δ: dico ipſos A, B ſimiles ſolidos eſſe.

Sumantur enim [per 35. 7.] numeri tres minimi omnium eandem cum A, Γ, Δ rationem habentium; qui ſint E, Z, H: extremi igitur ipſorum E, H [per 3. 8.] primi inter ſe ſunt. & quoniam inter E, H unus medius proportionalis Z cecidit, erunt [per 20. 8.] numeri E, H ſimiles plani. ſint ipſius quidem E latera Θ, K, ipſius vero H latera Λ, M: manifeſtum igitur eſt ex antecedente E, Z, H deinceps proportionales eſſe in ratione Θ ad Λ & in ratione K ad M. & quoniam E, Z, H minimi ſunt eandem quam A, Γ, Δ rationem habentium, erit ex æquo [per 14. 7.] ut E ad H ita A ad Δ. ſunt autem E, H primi, ſed [per 23. 7.] primi ſunt & minimi, minimi vero eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, [per 21. 7.]

major majorem & minor minorem, hoc eſt antecedens antecedentem & conſequens conſequentem:	A, 24.	Γ, 72.	Δ, 216.	B, 648.			
		E, 1.	Z, 3.	H, 9.			
	Θ, 1.	K, 1.	N, 24.	Λ, 3.	M, 3.	Ξ, 72.	

ergo E ipſum A æqualiter metitur atque H ipſum Δ. quoties autem E metitur A, tot unitates ſint in N: ergo N ipſum E multiplicans fecit A. ſed E fit ex Θ, K: ac propterea N eum qui fit ex Θ, K multiplicans ipſum A fecit: ſolidus igitur eſt A, cujus latera Θ, K, N. rurſus, quoniam E, Z, H minimi ſunt eandem quam ipſi Γ, Δ, B rationem habentium, E ipſum Γ æqualiter metitur atque H ipſum B. & quoties H metitur B tot unitates ſint in Ξ: ergo H ipſum B metitur per eas quæ ſunt in Ξ unitates; ideoque Ξ mul-

Πρότασις κα'.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅμοιοι στερεοί εἰσιν οἱ ἀριθμοί.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν ἀριθμοί, οἱ Γ, Δ· λέγω ὅτι οἱ Α, Β ὅμοιοι στερεοί εἰσιν.

Εἰλήφθωσαν γὰρ τρεῖς ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, Δ, οἱ Ε, Ζ, Η· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Ε, Η πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. καὶ ἐπεὶ τῶν Ε, Η εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπέπτωκεν ἀριθμὸς ὁ Ζ· οἱ Ε, Η ἄρα ἀριθμοὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί. ἔστωσαν ἑνὸς μὲν Ε πλευραὶ οἱ Θ, Κ, ἑνὸς δὲ Η οἱ Λ, Μ· φανερὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τούτου ὅτι οἱ Ε, Ζ, Η ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἔντι τῷ τὸ Θ πρὸς τὸν Λ λόγῳ καὶ τῷ ὃ Κ πρὸς τὸν Μ. καὶ ἐπεὶ οἱ Ε, Ζ, Η ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, Δ· δίσα ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Δ. οἱ δὲ Ε, Η πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ἰσάκις ἄρα ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Η τὸν Δ. ὁσάκις δὴ ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ν· ὁ Ν ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. ὁ δὲ Ε ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Θ, Κ· ὁ Ν ἄρα τὸν ἐκ τῶν Θ, Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε· στερεὸς ἄρα ἐστὶν ὁ Α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Θ, Κ, Ν. πάλιν, ἐπεὶ οἱ Ε, Ζ, Η ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Γ, Δ, Β· ἰσάκις ἄρα ὁ Ε τὸν Γ μετρεῖ καὶ ὁ Η τὸν Β. ὁσάκις δὲ ὁ Η τὸν Β μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ξ· ὁ Η ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ξ μονάδας· ὁ Ξ ἄρα

ἄρα τὸ Η πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. ὁ δὲ Η ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ Λ,Μ· ὁ Ξ ἄρα τὸν ἀπὸ τοῦ Λ,Μ πολλαπλασιάσας τὸ Β πεποίηκεν [*τὸ δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν] στερεὸς ἄρα ἐστὶν ὁ Β, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Λ,Μ, Ξ· οἱ Α, Β ἄρα στερεοί εἰσι. λέγω δὴ ὅτι καὶ ὅμοιοι. ἐπεὶ γὰρ οἱ Ν, Ξ τὸν Ε πολλαπλασιάσαντες τὰς Α, Γ πεποιήκασιν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ, τουτέστιν ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. ἀλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Λ καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Μ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Θ πρὸς τὸν Λ οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Μ καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. καί εἰσιν οἱ μὲν Θ, Κ, Ν πλευραὶ τοῦ Α, οἱ δὲ Ξ, Λ, Μ πλευραὶ τοῦ Β· οἱ Α, Β ἄρα ὅμοιοι στερεοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

tiplicans Η ipſum Β fecit. at Η ſit ex Λ, Μ: ergo Ξ eum qui fit ex Λ, Μ multiplicans fecit Β; [multiplicans vero Ε ipſum Γ fecit.] ſolidus igitur eſt Β, & ejus latera Α, Μ, Ξ: quare Α, Β ſolidi ſunt. dico etiam eos ſimiles eſſe. quoniam enim Ν, Ξ multiplicantes Ε ipſos Α, Γ fecerunt, [per 17. 7.] ut Ν ad Ξ ita erit Α ad Γ, hoc eſt Ε ad Ζ. ſed ut Ε ad Ζ ita Θ ad Λ & Κ ad Μ: & igitur ut Θ ad Λ ita Κ ad Μ & Ν ad Ξ. ſunt autem Θ, Κ, Ν latera ipſius Α, & Λ, Μ, Ξ latera ipſius Β: ergo Α, Β ſimiles ſolidi erunt. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϐ'.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾖ· καὶ ὁ τρίτος τετράγωνος ἔσται.

PROP. XXII. THEOR.

Si tres numeri deinceps proportionales fuerint, primus autem ſit quadratus; & tertius quadratus erit.

Ἐστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, ὁ δὲ πρῶτος ὁ Α τετράγωνος ἔστω· λέγω ὅτι καὶ ὁ τρίτος ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ τῶν Α, Γ εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς ὁ Β· οἱ Α, Γ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι. τετράγωνος δὲ ὁ Α· τετράγωνος ἄρα καὶ ὁ Γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Α, 4. Β, 6. Γ, 9.

SInt tres numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, ſitque primus Α quadratus: dico & tertium Γ quadratum eſſe.

Quoniam enim inter Α, Γ unus medius proportionalis cadit Β, erunt [per 20. 8.] Α, Γ ſimiles plani. ſed Α eſt quadratus: ergo & Γ quadratus erit. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ· καὶ ὁ τέταρτος κύβος ἔσται.

PROP. XXIII. THEOR.

Si quatuor numeri deinceps proportionales fuerint, primus autem ſit cubus; & quartus cubus erit.

Ἐστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ Α κύβος ἔστω· λέγω ὅτι καὶ ὁ Δ κύβος ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ τῶν Α, Δ δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί, οἱ Β, Γ· οἱ Α, Δ ἄρα ὅμοιοί εἰσι στερεοὶ ἀριθμοί. κύβος δὲ ὁ Α· κύβος ἄρα καὶ ὁ Δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Α, 8. Β, 12. Γ, 18. Δ, 27.

SInt quatuor numeri deinceps proportionales Α, Β, Γ, Δ, & Α ſit cubus: dico & Δ cubum eſſe.

Quoniam enim inter Α, Δ duo medii proportionales cadunt Β, Γ, erunt [per 21. 8.] Α, Δ ſimiles ſolidi. eſt autem Α cubus: ergo & Δ cubus erit. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾖ· καὶ ὁ δεύτερος τετράγωνος ἔσται.

PROP. XXIV. THEOR.

Si duo numeri inter ſe rationem habeant quam numerus quadratus ad quadratum numerum, primus autem ſit quadratus; & ſecundus quadratus erit.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρὸς ἀλλήλους λόγον ἐχέτωσαν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς τε-

DUO enim numeri Α, Β inter ſe rationem habeant quam numerus quadratus

* Illa uncis inclusa desunt in *MS. Bodl.* & commode abesse possunt.

Γ ad

Γ ad quadratum numerum Δ, ſitque A quadratus: dico & B quadratum eſſe.

Quoniam enim Γ, Δ quadrati ſunt, erunt Γ, Δ ſimiles plani: ideoque [per 18. 8.] inter ipſos Γ, Δ unus medius proportionalis cadit. eſt autem ut Γ ad Δ ita A ad B: quare [per 8. 8.] etiam inter A, B cadit unus medius proportionalis. eſtque A quadratus: ergo [per 22. 8.] & B quadratus erit. quod erat demonſtrandum.

A, 4. Γ, 16.

Prop. XXV. Theor.

Si duo numeri inter ſe rationem habeant quam numerus cubus ad cubum numerum, primus autem ſit cubus; & ſecundus cubus erit.

DUO enim numeri A, B inter ſe rationem habeant quam cubus numerus Γ ad numerum cubum Δ, ſitque A cubus: dico & B cubum eſſe.

Quoniam enim Γ, Δ cubi ſunt, erunt Γ, Δ ſimiles ſolidi: idcirco [per 19. 8.] inter ipſos duo medii proportionales cadent. quot autem inter Γ, Δ cadunt medii proportionales, totidem [per 8. 8.] cadent & inter eos qui eandem quam ipſi rationem habent: ergo inter A, B duo medii cadent proportionales. cadant E, Z. quoniam igitur quatuor numeri A, E, Z, B deinceps proportionales ſunt, eſtque A cubus; & [per 23. 8.] B cubus erit. quod erat demonſtrandum.

A, 8. E, 12. Γ, 64.

Prop. XXVI. Theor.

Similes plani numeri inter ſe rationem habent, quam numerus quadratus ad quadratum numerum.

SInt ſimiles plani numeri A, B: dico A ad B rationem habere quam numerus quadratus ad quadratum numerum.

Quoniam enim A, B ſimiles plani ſunt, [per 18. 8.] inter eos cadit unus medius proportionalis. cadat, ſitque Γ, & ſumantur [per 35. 7.] minimi numeri eandem quam A, Γ, B rationem habentium ſc. Δ, E, Z: ergo [per coroll. 2. 8.] ipſorum extremi Δ, Z quadrati ſunt. & quoniam eſt ut Δ ad Z ita A ad B, & ſunt Δ, Z quadrati; habebit A ad B rationem quam numerus quadratus ad quadratum numerum. quod erat demonſtrandum.

A, 6. Γ, 12. B, 24. Δ, 1. E, 2. Z, 4.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ· καὶ ὁ δεύτερος κύβος ἔσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρὸς ἀλλήλους λόγον ἐχέτωσαν ὃν κύβος ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς κύβον ἀριθμὸν τὸν Δ, κύβος δὲ ἔστω ὁ Α· λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ Β κύβος ἐστίν.

Ζ, 18. Β, 27. Δ, 216.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ Γ, Δ κύβοι εἰσίν, οἱ Γ, Δ ὅμοιοι στερεοί εἰσι· τῶν Γ, Δ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. ὅσοι δὲ εἰς τοὺς Γ, Δ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς· ὥστε καὶ τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. ἐμπιπτέτωσαν οἱ Ε, Ζ. ἐπεὶ οὖν τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱ Α, Ε, Ζ, Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστι κύβος ὁ Α· κύβος ἄρα καὶ ὁ Β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Ἔστωσαν ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β· λέγω ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β ἐπίπεδοί εἰσι· τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. ἐμπιπτέτω, καὶ ἔστω ὁ Γ, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, Β, οἱ Δ, Ε, Ζ· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Δ, Ζ τετράγωνοί εἰσι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β καί εἰσιν οἱ Δ, Ζ τετράγωνοι· ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

Οἱ ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν.

Ἔστωσαν ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ, οἱ Α, Β· λέγω ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β ὅμοιοι στερεοί εἰσι· τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. ἐμπιπτέτωσαν οἱ Γ, Δ, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, Δ, Β ἴσοι αὐτοῖς τὸ πλῆθος, οἱ Ε, Ζ, Η, Θ· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Ε, Θ κύβοι εἰσί. καὶ ἔστιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

A, 16. Γ, 24.
E, 8. Z, 12.

PROP. XXVII. THEOR.

Similes ſolidi numeri inter ſe rationem habent, quam numerus cubus ad cubum numerum.

SInt ſimiles ſolidi numeri A, B: dico A ad B rationem habere quam numerus cubus ad cubum numerum.

Quoniam enim A, B ſimiles ſolidi ſunt, [per 19. 8.] inter ipſos duo medii proportionales cadent. cadant Γ, Δ; & ſumantur [per 2. 8.] minimi numeri, qui eandem quam A, Γ, Δ, B rationem habeant, ipſis multitudine æquales E, Z, H, Θ: ergo [per corol. 2. 8.] eorum extremi E, Θ cubi ſunt. atque eſt ut E ad Θ ita A ad B: habet igitur A ad B rationem quam numerus cubus ad cubum numerum. quod erat demonſtrandum.

A, 36. B, 54.
H, 18. Θ, 27.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER NONUS.

PROP. I. THEOR.

Si duo ſimiles plani numeri ſeſe multiplicantes aliquem fecerint, factus quadratus erit.

SINT duo ſimiles plani numeri A, B, & A ipſum B multiplicans faciat Γ: dico Γ quadratum eſſe.

Numerus enim A ſeipſum multiplicans faciat Δ: ergo Δ quadratus eſt. quoniam igitur A ſeipſum multiplicans fecit Δ, multiplicans vero B ipſum Γ fecit; ut A ad B ita erit [per 17. 7.] Δ ad Γ. & quoniam A, B ſimiles plani ſunt, [per 18. 8.] inter ipſos unus medius proportionalis cadet. ſi autem inter duos numeros numeri deinceps proportionales ceciderint, quot inter ipſos cadunt [per 8. 8.] totidem cadent & inter eos qui eandem habent rationem: quare & inter Δ, Γ unus medius proportionalis cadit. atque eſt Δ quadratus: ergo & Γ quadratus erit. quod erat demonſtrandum.

A, 6.
Δ, 36.

PROP. II. THEOR.

Si duo numeri ſeſe multiplicantes quadratum numerum efficiant, ſimiles plani erunt.

DUO enim numeri A, B ſeſe multiplicantes quadratum numerum Γ efficiant: dico A, B ſimiles planos eſſe.

Numerus enim A ſeipſum multiplicans faciat Δ: ergo Δ quadratus eſt. quoniam igitur A ſeipſum multiplicans fecit Δ, multiplicans vero B ipſum Γ fecit; ut A ad B [per 17. 7.] ita erit Δ ad Γ. & quoniam Δ quadratus

A, 3.
Δ, 9.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος τετράγωνος ἔσται.

ΕΣΤΩΣΑΝ δύο ὅμοιοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν.

Ο γὰρ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστι. καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί· τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. ἐὰν δὲ δύο μεταξὺ ἀριθμῶν κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς ἐμπίπτουσι τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας· ὥστε καὶ τῶν Δ, Γ εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. καί ἐστι τετράγωνος ὁ Δ· τετράγωνος ἄρα καὶ ὁ Γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Β, 54.
Γ, 324.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσι τετράγωνον, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι.

ΔΥΟ γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους τετράγωνον τὸν Γ ποιείτωσαν· λέγω ὅτι οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί.

Ο γὰρ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστι. ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τετράγωνός

Β, 12.
Γ, 36.

παρ' ἀγωνός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ὁ Γ· οἱ Δ, Γ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι· τῶν Δ, Γ ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. καὶ ἔστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ τῶν Α, Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί· οἱ Α, Β ἄρα ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

eſt, ſed & Γ etiam; erunt Δ, Γ ſimiles plani: quare [per 18. 8.] inter Δ, Γ unus medius proportionalis cadit. atque eſt ut Δ ad Γ ita A ad B: ergo [per 8. 8.] & inter A, B cadet unus medius proportionalis. ſi autem inter duos numeros unus medius proportionalis cadat, [per 20. 8.] erunt ſimiles plani: ergo A, B ſimiles plani ſunt. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται.

PROP. III. THEOR.

Si cubus numerus ſeipſum multiplicans faciat aliquem, factus cubus erit.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Β κύβος ἐστίν.

Εἰλήφθω γὰρ τοῦ Α πλευρά, ὁ Γ, καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· φανερὸν δή ἐστιν ὅτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ Γ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν· ὁ Δ ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Α. ἀλλ' ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Α· τῆς ἄρα μονάδος καὶ τοῦ Α ἀριθμοῦ δύο μέσοι ἀνάλογον κατὰ τὸ συνεχὲς ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, οἱ Γ, Δ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. τῆς δὲ μονάδος καὶ τοῦ Α δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί· καὶ τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ, καὶ ὁ τέταρτος κύβος ἔσται. καὶ ἔστιν ὁ Α κύβος· καὶ ὁ Β ἄρα κύβος ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Cubus enim numerus A ſeipſum multiplicans faciat B: dico B cubum eſſe.

Sumatur enim ipſius A latus Γ, & Γ ſeipſum multiplicans faciat Δ: manifeſtum igitur eſt [per 19. def. 7.] Γ multiplicantem Δ facere ipſum A. & quoniam Γ ſeipſum multiplicans fecit Δ, metitur Γ ipſum Δ per unitates quæ in ipſo ſunt. ſed & unitas metitur Γ per eas quæ in ipſo ſunt unitates: eſt igitur [per 20. def. 7.] ut unitas ad Γ ita Γ ad Δ. rurſus, quoniam Γ multiplicans Δ ipſum A fecit, metitur Δ ipſum A per unitates quæ ſunt in Γ. metitur autem & unitas ipſum Γ per unitates quæ in ipſo ſunt: ergo ut unitas ad Γ ita Δ ad A. ſed ut unitas ad Γ ita Γ ad Δ: ut igitur unitas ad Γ ita Γ ad Δ & Δ ad A: ideoque inter unitatem & numerum A duo medii deinceps proportionales cadunt Γ, Δ. rurſus, quoniam A ſeipſum multiplicans fecit B, & A ipſum B metitur per unitates quæ in ipſo ſunt. metitur autem & unitas A per unitates quæ ſunt in ipſo: eſt igitur [per 20. def. 7.] ut unitas ad A ita A ad B. ſed inter unitatem & A cadunt duo medii proportionales: ergo [per 8. 8.] & inter A & B duo medii proportionales cadent. quod ſi inter duos numeros cadant duo medii proportionales, primus autem ſit cubus [per 23. 8.] & quartus cubus erit. atque eſt A cubus: ergo & B cubus erit. quod erat demonſtrandum.

A, 8. Δ, 4. Γ, 2. 1. B, 64.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται.

PROP. IV. THEOR.

Si numerus cubus cubum numerum multiplicans faciat aliquem, factus cubus erit.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον ἀριθμὸν τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ κύβος ἐστίν.

Ὁ Α γὰρ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· ὁ Δ ἄρα κύβος ἐστί. καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. καὶ ἐπεὶ οἱ

Numerus enim A ſeipſum multiplicans faciat Δ: ergo [per 3. 9.] Δ cubus eſt. & quoniam A ſeipſum multiplicans fecit Δ; multiplicans vero B ipſum Γ fecit: ut A ad B [per 17. 7.] ita erit Δ ad Γ. & quoniam

A, 8. Δ, 64. B, 27. Γ, 216. A, B

A, B cubi ſunt, erunt ſimiles ſolidi numeri: ac propterea [per 19. 8.] inter A, B cadent duo medii proportionales: quare [per 8. 8.] & inter Δ, Γ duo medii proportionales cadent. eſtque Δ cubus: ergo [per 23. 8.] & Γ cubus erit. quod erat demonſtrandum.

A, 8.
Δ, 64.

Prop. V. Theor.

Si cubus numerus numerum aliquem multiplicans faciat cubum, & multiplicatus cubus erit.

CUbus enim A numerum aliquem B multiplicans faciat cubum Γ: dico B cubum eſſe.

Numerus enim A ſeipſum multiplicans faciat Δ: ergo [per 3. 9.] Δ cubus eſt. & quoniam A ſeipſum quidem multiplicans fecit Δ, multiplicans vero B ipſum Γ fecit; ut A ad B ita erit [per 17. 7.] Δ ad Γ. & quoniam Δ, Γ cubi ſunt, ſimiles ſunt ſolidi; ac propterea [per 19. 8.] inter ipſos cadunt duo medii proportionales. atque eſt ut Δ ad Γ ita A ad B: ergo [per 8. 8.] & inter A, B duo medii proportionales cadent. eſtque A cubus; ergo [per 23. 8.] & B cubus erit. quod erat demonſtrandum.

A, 8.
Δ, 64.
B, 27.
Γ, 216.

Prop. VI. Theor.

Si numerus ſeipſum multiplicans cubum faciat, & ipſe cubus erit.

NUmerus enim A ſeipſum multiplicans cubum B faciat: dico & A cubum eſſe.

Numerus enim A multiplicans B faciat Γ. quoniam igitur A ſeipſum multiplicans fecit B, multiplicans vero B ipſum Γ fecit, erit [per 19. def. 7.] Γ cubus. & quoniam A ſeipſum quidem multiplicans fecit B, multiplicans vero B fecit Γ, ut A ad B [per 17. 7.] ita erit B ad Γ. & quoniam B, Γ cubi ſunt, ſimiles ſolidi erunt: ideoque [per 19. 8.] inter B, Γ, duo medii proportionales cadunt. & eſt ut B ad Γ ita A ad B: quare [per 8. 8.] & inter A, B duo medii proportionales cadunt. atque eſt B cubus: ergo [per 23. 8.] & A cubus erit. quod erat demonſtrandum.

A, 8.
B, 64.
Γ, 512.

Prop. VII. Theor.

Si compoſitus numerus numerum aliquem multiplicans quempiam faciat, factus ſolidus erit.

COmpoſitus enim numerus A numerum aliquem B multiplicans ipſum Γ faciat: dico Γ ſolidum eſſe.

Quoniam enim A compoſitus eſt, [per 13. def. 7.] eum numerus aliquis metietur. metiatur Δ. &

A, B κύβοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοί εἰσι· τῶν A, B ἄρα B, 27. Γ, 216. δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί· ὥστε καὶ τὸν Δ, Γ δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί. καὶ ἔστι κύβος ὁ Δ· κύβος ἄρα καὶ ὁ Γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ ὁ πολλαπλασιαθεὶς κύβος ἔσται.

ΚΥβος γὰρ ὁ A ἀριθμόν τινα τὸν B πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ B κύβος ἐστίν.

Ο γὰρ A ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· κύβος ἄρα ἐστὶν ὁ Δ. καὶ ἐπεὶ ὁ A ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε, τὸν δὲ B πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. Ἐπεὶ οἱ Δ, Γ κύβοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοί εἰσι· τῶν Δ, Γ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. καὶ ἔστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B· καὶ τῶν A, B ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. καὶ ἔστι κύβος ὁ A· κύβος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ B. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται.

ΑΡιθμὸς γὰρ ὁ A ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον τὸν B ποιείτω· λέγω ὅτι καὶ ὁ A κύβος ἐστίν.

Ο γὰρ A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ A ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκε, τὸν δὲ B πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Γ ἄρα κύβος ἐστί. καὶ ἐπεὶ ὁ A ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκε, τὸν δὲ B πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Γ. καὶ ἐπεὶ B, Γ κύβοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοί εἰσι· τῶν B, Γ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί. Ἔστιν ὡς ὁ B πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B· καὶ τῶν A, B ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί. καὶ ἔστι κύβος ὁ B· κύβος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ A. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Ἐὰν σύνθετος ἀριθμὸς ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος στερεὸς ἔσται.

ΣΥνθετος γὰρ ἀριθμὸς ὁ A ἀριθμόν τινα τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ στερεός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ A σύνθετός ἐστιν, ὑπό τινος ἀριθμοῦ τοῦ μετρηθήσεται. μετρείσθω ὑπὸ τοῦ Δ. καὶ ὁσάκις ὁ Δ

ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ τοσαῦτας μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε· ὁ Ε ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸ Α πεποίηκε. ἔστω δὲ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ὁ δὲ Α ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ, Ε· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Δ, Ε τὸ Β πολλαπλασιάσας τὸ Γ πεποίηκεν· ὁ Β ἄρα τὸν ἐκ τῶν Δ, Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Γ ἄρα στερεός ἐστι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Δ, Ε, Β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

A, 6. B, 7. Γ, 42. Δ, 3. E, 2.

quoties Δ ipſum A metitur tot unitates ſint in E: ergo E multiplicans Δ fecit A. & quoniam A ipſum B multiplicans fecit Γ, eſtque A qui fit ex Δ, E, numerus qui fit ex Δ, E ipſum B multiplicans fecit Γ: ergo [per 16. 7.] B multiplicans eum qui fit ex Δ, E ipſum Γ fecit: ac propterea [per 17. def. 7.] Γ ſolidus eſt, cujus latera Δ, E, B. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος τετράγωνός ἐστιν καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ τέταρτος κύβος καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ ἕβδομος κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες.

Prop. VIII. Theor.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, tertius quidem ab unitate quadratus eſt, & unum intermittentes omnes; quartus autem eſt cubus, & duos intermittentes omnes; ſeptimus vero cubus ſimul & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

Ἐστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ· λέγω ὅτι ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Β τετράγωνός ἐστι καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ τέταρτος ὁ Γ κύβος καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ ἕβδομος ὁ Ζ κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος καὶ οἱ πέντε διαλείποντες ἅπαντες.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸ Β· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Β. ἡ μονὰς τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας· ὁ Α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε· τετράγωνος ἄρα ἐστὶν ὁ Β. καὶ ἐπεὶ οἱ Β, Γ, Δ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ μὲν Β τετράγωνός ἐστι· καὶ ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ζ τετράγωνός ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες τετράγωνοί εἰσι. λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Γ κύβος ἐστί, καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Γ. ἡ δὲ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας· ὁ Α ἄρα τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ἐπεὶ οὖν ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκε· κύβος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ. καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, Δ, Ε, Ζ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ Γ κύβος· καὶ ὁ Ζ ἄρα κύβος ἐστίν. ἐδείχθη δὲ καὶ τετράγωνος· ὁ ἄρα ἕβδομος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Ζ κύβος τέ ἐστι καὶ τετράγωνος. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ πέντε διαλείποντες ἅπαντες κύβοι τέ εἰσι καὶ τετράγωνοι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SInt ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, Γ, Δ, E, Z: dico tertium quidem ab unitate ſc. B quadratum eſſe, & unum intermittentes omnes; quartum autem Γ cubum, & duos intermittentes omnes; ſeptimum vero Z cubum ſimul & quadratum, & quinque intermittentes omnes.

Quoniam enim ut unitas ad A ita A ad B, unitas æqualiter metitur numerum A [per 20. def. 7.] atque A ipſum B. ſed unitas metitur A per unitates quæ in ipſo ſunt: ergo & A ipſum B per unitates quæ ſunt in A metitur: quare A ſeipſum multiplicans fecit B; quadratus igitur eſt B. & quoniam B, Γ, Δ deinceps proportionales ſunt, eſtque B quadratus; [per 22. 8.] & Δ quadratus erit. eadem ratione erit & Z quadratus. ſimiliter demonſtrabimus & unum intermittentes omnes quadratos eſſe. Dico & quartum ab unitate, videlicet Γ, eſſe cubum, & duos intermittentes omnes. quoniam enim eſt ut unitas ad A ita B ad Γ: unitas numerum A æqualiter metitur [per 20. def. 7.] atque B ipſum Γ. ſed unitas numerum A metitur per unitates quæ in A ſunt: ergo & B metitur Γ per unitates quæ ſunt in A; & ob id A multiplicans B ipſum Γ fecit. quoniam igitur A ſeipſum multiplicans fecit B, multiplicans vero B fecit Γ; erit [per 19. def. 7.] Γ cubus. quod cum Γ, Δ, E, Z deinceps proportionales ſint, ſitque Γ cubus, [per 23. 8.] & Z cubus erit. oſtenſum autem eſt quadratum eſſe: ſeptimus igitur ab unitate Z & cubus eſt & quadratus. ſimiliter quoque demonſtrabimus quinque intermittentes omnes & cubos & quadratos eſſe. quod erat demonſtrandum.

A, 1. B, 3. Γ, 9. Δ, 27. Ε, 81. Ζ, 243. Η, 729.

PROP. IX. THEOR.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero poſt unitatem ſit quadratus; & reliqui omnes quadrati erunt. ſi poſt unitatem ſit cubus; & reliqui omnes cubi erunt.

SInt ab unitate numeri quotcunque deinceps proportionales A, B, Γ, Δ, E, Z, & qui poſt unitatem A ſit quadratus: dico & reliquos omnes quadratos eſſe.

Tertium quidem ab unitate B 1. A, 4. B, 16. Γ, 64. Δ, 256. E, 1024. Z, 4096. eſſe quadratum, & unum intermittentes omnes demonſtratum jam eſt [in præc.]: dico & reliquos omnes quadratos eſſe. quoniam enim A, B, Γ deinceps ſunt proportionales eſtque A quadratus; [per 22. 8.] & Γ quadratus erit. rurſus, quoniam B, Γ, Δ, deinceps proportionales ſunt; eſt autem B quadratus: & Δ quadratus erit. ſimiliter oſtendemus & reliquos omnes quadratos eſſe.

Sit autem A cubus: dico & reliquos cubos eſſe.

Quartum quidem ab unitate Γ eſſe cubum, & duos intermittentes omnes, jam demonſtratum eſt [in præc.]: dico & reliquos omnes cubos eſſe.

quoniam enim eſt ut 1. A, 8. B, 64. Γ, 512. Δ, 4096. E, 32768. Z, 262144. unitas ad A ita A ad B [per 20. def. 7.] unitas numerum A æqualiter metitur atque A ipſum B. ſed unitas metitur numerum A per unitates quæ ſunt in ipſo: quare & A numerum B metitur per unitates quæ in ipſo ſunt: ergo A ſeipſum multiplicans fecit B, atque eſt A cubus. ſi autem cubus numerus ſeipſum multiplicans fecerit aliquem, [per 3. 9.] factus cubus erit; ergo B eſt cubus. & quoniam quatuor numeri A, B, Γ, Δ deinceps proportionales ſunt, eſtque A cubus; [per 23. 8.] & Δ cubus erit. eadem ratione & E eſt cubus, & ſimiliter reliqui omnes cubi ſunt. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα τετράγωνος ᾖ· καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται. καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος ᾖ· καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι ἔσονται.

Ἐστωσαν ἀπὸ μονάδος ἐξῆς ἀνάλογον ὁποσοιοῦν ἀριθμοί, οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α τετράγωνος ἔστω· λέγω ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται.

Ὅτι μὲν οὖν ὁ τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Β τετράγωνός ἐστι, καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες, δέδεικται· λέγω ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι εἰσιν. ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β, Γ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καί ἐστιν ὁ Α τετράγωνος· καὶ ὁ Γ ἄρα τετράγωνός ἐστι. πάλιν, ἐπεὶ οἱ Β, Γ, Δ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστιν ὁ Β τετράγωνος· καὶ ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι εἰσιν.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὁ Α κύβος· λέγω ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν.

Ὅτι μὲν οὖν ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Γ κύβος ἐστὶ καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, δέδεικται· λέγω δὴ ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Β. ἡ δὲ μονὰς τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ὁ Α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε, καὶ ἔστιν ὁ Α κύβος. ἐὰν δὲ κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἐστί· καὶ ὁ Β ἄρα κύβος ἐστί. καὶ ἐπεὶ τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστιν ὁ Α κύβος· καὶ ὁ Δ ἄρα κύβος ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε κύβος ἐστί, καὶ ὁμοίως οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. X. THEOR.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero poſt unitatem non ſit quadratus; neque alius ullus quadratus erit præter tertium ab unitate & unum intermittentes omnes. ſi qui poſt unitatem non ſit cubus; neque alius ullus cubus erit, præter quartum ab unitate & duos intermittentes omnes.

SInt ab unitate deinceps proportionales numeri A, B, Γ, Δ, E, Z, & qui poſt unitatem ipſe A non ſit quadratus: dico neque alium ullum

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογοι ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα μὴ ᾖ τετράγωνος· οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος ἔσται, χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἕνα διαλειπόντων πάντων. καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος μὴ ᾖ· οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται, χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων πάντων.

Ἐστωσαν ἀπὸ μονάδος ἐξῆς ἀνάλογον ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α μὴ ἔστω τετράγωνος· λέγω ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος

πετράγωνος ἔσῃ, πλὴν δ τρίτος ἀπὸ τ μονάδος καὶ τ ἕνα ἀπολειπόντων.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὁ Γ πετράγωνος. ἔστι δὲ καὶ ὁ Β πετράγωνος· οἱ Β, Γ ἄρα πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν πετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς πετράγωνον ἀριθμόν. καὶ ἔστιν ὡς ὁ Β πρὸς τ Γ οὕτως ὁ Α πρὸς τ Β· οἱ Α, Β ἄρα πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν πετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς πετράγωνον ἀριθμόν· ὥστε οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι. καὶ ἔστι πετράγωνος ὁ Β· πετράγωνος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ Α, ὅπερ οὐκ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ὁ Γ πετράγωνός ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς, χωρὶς δὲ τρίτου ἀπὸ τ μονάδος καὶ τ ἕνα ἀπολειπόντων.

Α Λ Λ Α δὴ μὴ ἔστω ὁ Α κύβος. λέγω δὴ ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσῃ, χωρὶς τοῦ πέμπτου ἀπὸ τ μονάδος καὶ τ δύο ἀπολειπόντων.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὁ Δ κύβος. ἔστι δὴ καὶ ὁ Γ κύβος, πέμπτος γάρ ἐστιν ἀπὸ τ μονάδος, καὶ ἔστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· καὶ ὁ Β ἄρα πρὸς τὸν Γ λόγον ἔχει ὃν κύβος πρὸς κύβον· οἱ Β, Γ ἄρα ὅμοιοι στερεοί. καὶ ἔστιν ὁ Γ κύβος· καὶ ὁ Β ἄρα κύβος ἐστί. ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τ Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, ἡ δὲ μονὰς τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Β πεποίηκεν. ἐὰν δὲ ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται· κύβος ἄρα καὶ ὁ Α, ὅπερ οὐκ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ὁ Δ κύβος ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἐστὶ, χωρὶς δὲ πέμπτου ἀπὸ τ μονάδος καὶ τ δύο ἀπολειπόντων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

quadratum esse, præter tertium ab unitate & unum intermittentes omnes.

Si enim fieri potest, sit Γ quadratus. est autem [per 8. 9.] & Β quadratus: ergo Β, Γ inter se rationem habent quam numerus quadratus ad quadratum numerum. atque est ut Β ad Γ ita Α ad Β: habent igitur Α, Β inter se rationem eam quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ideoque [per 21. def. 1.] Α, Β similes plani sunt. & est Β quadratus: ergo & Α quadratus est, * quod non supponitur; non igitur Γ quadratus erit. similiter ostendemus neque alium ullum quadratum esse, præter tertium ab unitate & unum intermittentes omnes.

Α, 1. Β, 2. Γ, 4. Δ, 8. Ε, 16. Ζ, 32. Η, 64.

Sed non sit Α cubus. dico neque alium ullum cubum esse, præter quartum ab unitate, & duos intermittentes omnes.

Si enim fieri potest sit Δ cubus. est autem [per 8. 9.] & cubus Γ, quartus enim est ab unitate; & ut Γ ad Δ ita est Β ad Γ: ergo & Β ad Γ rationem habet quam cubus ad cubum; ac propterea [per 21. def. 7.] Β, Γ similes solidi sunt. atque est Γ cubus; ergo & Β cubus erit. & quoniam est ut unitas ad numerum Α ita Α ad Β, unitas autem numerum Α metitur per unitates quæ sunt in ipso; & Α metietur Β [per 20. def. 7.] per unitates quæ in ipso sunt: quare Α seipsum multiplicans cubum Β fecit. si autem numerus seipsum multiplicans cubum faciat, [per 6. 9.] & ipse cubus erit: cubus igitur est Α, quod non supponitur: ergo neque Δ est cubus. similiter demonstrabimus neque alium ullum cubum esse, præter quartum ab unitate & duos intermittentes omnes. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐλάττων τ μείζονα μετρεῖ κατά τινα τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

Prop. XI. Theor.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, minor majorem metitur per aliquem eorum qui sunt in numeris proportionalibus.

Ἐστωσαν ἀπὸ μονάδος τῆς Α ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ Β, Γ, Δ, Ε· λέγω ὅτι τ Β, Γ, Δ, Ε ὁ ἐλάσσων ὁ Β τ Ε μείζονα μετρεῖ κατά τινα τῶν Γ, Δ.

Sint ab unitate Α quotcunque numeri deinceps proportionales Β, Γ, Δ, Ε: dico horum Β, Γ, Δ, Ε minorem numerum Β majorem Ε metiri per aliquem ipsorum Γ, Δ.

Ἐπεὶ γὰρ ἔστιν ὡς ἡ Α μονὰς πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ἰσάκις ἄρα ἡ Α μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν Ε· ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ Α μονὰς τὸν Δ μετρεῖ καὶ ὁ Β τ Ε. ἡ δὲ Α μονὰς τ Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Ε μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ὥστε ὁ ἐλάσσων ὁ Β τὸν μείζονα τὸν Ε μετρεῖ κατά τινα ἀριθμὸν τ ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Α, 1. Β, 3. Γ, 9. Δ, 27. Ε, 81.

Quoniam enim est ut Α unitas ad Β ita Δ ad Ε; Α unitas numerum Β æqualiter metitur [per 20. def. 7.] atque Δ ipsum Ε: quare permutando [per 15. 7.] Α unitas numerum Δ æqualiter metitur atque Β ipsum Ε. sed Α unitas metitur Δ per eas quæ sunt in ipso Δ unitates: ergo & Β metitur Ε per unitates quæ sunt in Δ: minor igitur Β majorem Ε metitur per aliquem eorum qui sunt in numeris proportionalibus. quod erat demonstrandum.

* i. e. *Quod est contra Hypothesin.* Atque hoc sæpius in decursu.

Prop.

Prop. XII. Theor.

Si ab unitate quotlibet numeri deinceps proportionales fuerint: quicunque primorum numerorum metiuntur ultimum, iidem & eum qui unitati proximus eſt metientur.

SInt ab unitate quotlibet numeri deinceps proportionales A, B, Γ, Δ: dico quicunque primorum numerorum metiuntur Δ, eoſdem & ipſum A metiri.

Metiatur enim aliquis primus numerus E ipſum Δ: dico E ipſum quoque A metiri. non enim metiatur E ipſum A, atque E eſt primus; omnis autem primus numerus [per 31. 7.] ad omnem numerum quem non metitur primus eſt: ergo E, A numeri inter ſe primi ſunt. & cum E metitur ipſum Δ, metiatur per unitates quæ ſunt in Z: ergo E multiplicans Z ipſum Δ fecit. rurſus, quoniam [per 11. 9.] A metitur ipſum Δ per eas quæ ſunt in Γ unitates, A multiplicans Γ ipſum Δ fecit. ſed & E multiplicans Z fecit Δ: qui igitur fit ex A, Γ ei qui fit ex E, Z eſt æqualis: ergo [per 19. 7.] ut A ad E ita Z ad Γ. ſuntque A, E primi, primi autem [per 23. 7.] & minimi, minimi vero eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, [per 21. 7.] antecedens antecedentem & conſequens conſequentem: metitur igitur E ipſum Γ. metiatur per H: ergo E ipſum H multiplicans fecit Γ. ſed & A multiplicans B ipſum Γ fecit: qui igitur fit ex A, B æqualis eſt ei qui ex E, H: ergo ut A ad E ita H ad B. & ſunt A, E primi, ſed primi etiam & minimi, minimi vero eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur [per 21. 7.] antecedens antecedentem & conſequens conſequentem: quare & E ipſum B metitur. metiatur per Θ: multiplicans igitur E ipſum Θ fecit B. ſed & A ſeipſum multiplicans fecit B; ergo qui fit ex Θ, E eſt æqualis ei qui fit ab ipſo A: eſt igitur [per 20. 7.] ut E ad A ita A ad Θ. ſuntque A, E primi, ſed primi etiam & minimi, minimi vero æqualiter metiuntur eos qui eandem quam ipſi rationem habent, [per 21. 7.] major majorem & minor minorem, hoc eſt antecedens antecedentem & conſequens conſequentem: ergo E metitur ipſum A. ſed & non metitur, quod fieri non poteſt: non igitur A, E ſunt inter ſe primi: ergo compoſiti erunt. compoſitos vero [per 14. def. 7.] primus aliquis numerus metitur: quare ipſos A, E metietur aliquis numerus primus. & quoniam E primus ponitur, primum autem non metitur alius numerus [per 11. def. 7.] præter ſeipſum: metitur igitur E ipſos A, E: ideoque E ipſum A metitur. metitur autem & ipſum Δ: ergo E ipſos A, Δ metietur. ſimiliter demonſtrabimus quicunque primorum numerorum

1. A, 4. B, 16. Γ, 64. Δ, 256.
E, 2. Θ, 8. H, 32. Z, 128.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν· ὑφ' ὅσων ἂν ὁ ἔσχατος πρώτων ἀριθμῶν μετρῇ, καὶ τὸν πρὸ αὐτοῦ μετρήσει.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιηοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ· λέγω ὅτι ὑφ' ὅσων ἂν ὁ Δ πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, καὶ τὸν Α μετρήσει.

Μετρείσθω γὰρ ὁ Δ ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ, οὗ Ε· λέγω ὅτι ὁ Ε καὶ τὸν Α μετρεῖ. μὴ γὰρ μετρείτω ὁ Ε τὸν Α; καὶ ἔστω ὁ Ε πρῶτος, ἅπας δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν ὃν μὴ μετρεῖ πρῶτος ἐστίν· οἱ Ε, Α ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας· ὁ Α ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Ε τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ε, Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Γ. οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Ε τὸν Γ. μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Η· ὁ Ε ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Β ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ε, Η· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Β. οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Ε τὸν Β. μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Θ· ὁ Ε ἄρα τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὁ ἐκ τῶν Θ, Ε ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ Α· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ. οἱ δὲ Α, Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ, τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα, τουτέστιν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Ε τὸν Α. * ἀλλὰ μὴν καὶ μετρεῖ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Α, Ε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί· συνθετοι ἄρα. οἱ δὲ συνθετοι ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ μετροῦνται· οἱ Α, Ε ἄρα ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ μετροῦνται. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε πρῶτος ὑπόκειται, ὁ δὲ πρῶτος ὑπὸ ἑτέρου ἀριθμοῦ οὐ μετρεῖται ἢ ὑφ' ἑαυτόν· ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Ε μετρεῖ· ὡς δὲ ὁ Ε πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Δ· καὶ ὁ Ε ἄρα τοὺς Α, Δ μετρεῖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ὑφ' ὅσων ἂν ὁ Δ πρώτων

* In quibuſdam codicibus quæ ſequuntur rectius abſunt, ſcribiturque οὐκ ἄρα ὁ μετρεῖ ὁ Ε τὸν Α· μετρεῖ ἄρα. ὅπερ ὑπῆν δεῖξαι.

τῶν

τῶν ἀριθμῶν μετρεῖται, καὶ τὸ τ αὐτῶν καὶ ὁ Α μετρηθήσεται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα πρῶτος ᾖ· ὁ μέγιστος ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν προκειμένων καὶ τοῖς ἀναλόγοις ἀριθμοῖς.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, οἱ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α πρῶτος ἔστω· λέγω ὅτι ὁ μέγιστος αὐτῶν ὁ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πάρεξ τ Α, Β, Γ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρείσθω ὑπό τινος Ε, καὶ ὁ Ε μηδενὶ τ Α, Β, Γ ἔστω ὁ αὐτός· φανερὸν δὴ ὅτι ὁ Ε πρῶτος οὐκ ἔστιν. εἰ γὰρ ὁ Ε πρῶτός ἐστι καὶ μετρεῖ τὸν Δ, καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ Ε πρῶτός ἐστι· σύνθετος ἄρα· ἅπας δὴ σύνθετος ἀριθμὸς ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ μετρεῖται. λέγω δὴ ὅτι ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται πρώτου, πλὴν ὧν Α. εἰ γὰρ ὑφ' ἑτέρου μετρεῖται ὁ Ε, ὁ δὲ Ε τὸν Δ μετρεῖ· καὶκεῖνος ἄρα τὸν Δ μετρήσει· ὥστε καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ὁ Α ἄρα τ Ε μετρεῖ. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸ Ζ. λέγω ὅτι ὁ Ζ οὐδενὶ τ Α, Β, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. εἰ γὰρ ὁ Ζ ἑνὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός, καὶ μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὸν Ε· καὶ εἷς ἄρα τ Α, Β, Γ μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὸν Ε. ἀλλὰ εἷς τ Α, Β, Γ τὸν Δ μετρεῖ κατά τινα τ Α, Β, Γ· καὶ ὁ Ε ἄρα ἑνὶ τ Α, Β, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ὁ Ζ ἑνὶ τ Α, Β, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι μετρεῖται ὁ Ζ ὑπὸ τ Α, δεικνύντες πάλιν ὅτι οὐκ ἔστιν ὁ Ζ πρῶτος. εἰ γὰρ ἐστὶ πρῶτος καὶ μετρεῖ τὸν Δ, καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα πρῶτός ἐστιν ὁ Ζ· σύνθετος ἄρα· ὑπὸ πρώτου ἄρα τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. λέγω δὴ ὅτι ὑφ' ἑτέρου πρώτου ὑπὸ τ Α μετρηθήσεται πλὴν ὧν Α. εἰ γὰρ ἑτέρος τις πρῶτος τὸν Ζ μετρεῖ, ὁ δὲ Ζ τὸν Δ μετρεῖ· καὶκεῖνος ἄρα τὸν Δ μετρήσει· ὥστε καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ὁ Α ἄρα τὸν Ζ μετρεῖ. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τ Α, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τ Ε, Ζ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Γ. ὁ δὲ Α τὸν Ε μετρεῖ· καὶ ὁ Ζ ἄρα τὸν Γ μετρεῖ. μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Η. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ὁ Η οὐδενὶ τ Α, Β ἐστὶν ὁ αὐτός, καὶ ὅτι μετρεῖται ὑπὸ τ Α. καὶ ἐπεὶ ὁ Ζ τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὸν Η· ὁ Ζ ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν

merorum metiuntur ipſum Δ, eoſdem & ipſum Α metiri. quod erat demonſtrandum.

Prop. XIII. Theor.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero poſt unitatem primus ſit; maximum nullus alius metietur, præter eos qui ſunt in numeris proportionalibus.

Sint quotcunque numeri ab unitate deinceps proportionales Α, Β, Γ, Δ, & qui poſt unitatem videlicet Α ſit primus: dico maximum Δ nullum alium metiri, præter ipſos Α, Β, Γ.

Si enim fieri poteſt, metiatur Ε ipſum Δ, & non ſit Ε idem qui aliquis ipſorum Α, Β, Γ: manifeſtum eſt Ε primum non eſſe. ſi enim primus ſit, & metiatur Δ; [per 12. 9.] ipſum quoque Α metietur primum exiſtentem, cum non ſit idem qui Α, quod fieri non poteſt: non igitur Ε primus eſt; ergo compoſitus: omnem autem compoſitum numerum [per 33. 7.] primus aliquis numerus metitur. dico nullum alium primum metiri ipſum Ε, præterquam Α. ſi enim alius metitur Ε, & Ε metitur Δ, & alius ille ipſum Δ metietur: quare [per 12. 9.] & ipſum Α primum exiſtentem, cum non ſit idem qui Α, quod fieri non poteſt: ergo Α ipſum Ε metitur. & quoniam Ε metitur Δ, metiatur ipſum per Ζ. dico non eſſe Ζ eundem cum aliquo ipſorum Α, Β, Γ. ſi enim eſt idem, metiturque ipſum Δ per Ε; & unus ipſorum Α, Β, Γ ipſum Δ per Ε metietur. ſed [per 11. 9.] quilibet ipſorum Α, Β, Γ metitur Δ per aliquem ipſorum Α, Β, Γ: quare & Ε idem erit qui unus ipſorum Α, Β, Γ, quod non ſupponitur: non igitur eſt Ζ idem qui unus ipſorum Α, Β, Γ. ſimiliter oſtendemus Α metiri ipſum Ζ, rurſus oſtendentes non eſſe Ζ primum numerum. ſi enim eſt primus, & metitur ipſum Δ, [per 12. 9.] ipſum quoque Α metietur primum exiſtentem, cum non ſit idem qui Α, quod fieri non poteſt: non igitur Ζ primus eſt: ergo compoſitus, & [per 33. 7.] eum aliquis primus metietur. dico nullum alium metiri ipſum Ζ præterquam Α. ſi enim alius metitur Ζ, & Ζ metitur Δ; & alius ille ipſum Δ metietur: quare [per 12. 9.] & ipſum Α primum exiſtentem, cum non ſit idem qui Α, quod fieri non poteſt: ergo Α ipſum Ζ metitur. & quoniam Ε metitur Δ per Ζ; & Ε multiplicans Ζ ipſum Δ fecit. ſed [ex hyp.] & Α multiplicans Γ fecit Δ: qui igitur fit ex Α, Γ eſt æqualis ei qui ex Ε, Ζ: ergo [per 19. 7.] ut Α ad Ε ita eſt Ζ ad Γ. ſed Α metitur Ε: quare [per 20. def. 7.] & Ζ ipſum Γ metitur. metiatur per Η. ſimiliter demonſtrabimus Η non eſſe eundem qui unus ipſorum Α, Β, & Α ipſum Η metiri. & quoniam Ζ ipſum Γ metitur per Η, multiplicans Ζ ipſum Η fecit Γ. ſed & Α multiplicans Β ipſum Γ fecit: ergo

I.	Α, 5.	Β, 25.	
	Ε ——	Θ ——	
Γ, 125.	Δ, 625.		
Η ——	Ζ ——		

qui fit ex A, B ei qui ex Z, H eſt æqualis: ut igitur A ad Z ita eſt H ad B. metitur autem A ipſum Z: ergo & H ipſum B metietur. metiatur per Θ. ſimiliter demonſtrabimus Θ non eſſe eundem qui A. &

quoniam H ipſum B per	1.	A, 5.	B, 25.
Θ metitur, H multipli-		E ——	Θ ——
cans Θ ipſum B fecit.			

ſed & A ſeipſum multiplicans [ex hyp.] fecit B: qui igitur fit ex Θ, H eſt æqualis quadrato qui ex A: ergo [per 20. 7.] ut Θ ad A ita A ad H. metitur autem A ipſum H; quare & Θ ipſum A metietur, primum exiſtentem, cum non ſit idem qui A; quod eſt abſurdum: non igitur aliquis alius metietur ipſum Δ maximum, præter ipſos A, B, Γ. quod erat demonſtrandum.

Prop. XIV. Theor.

Si minimum numerum primi numeri metiantur: nullus alius numerus metietur ipſum, præter eos qui à principio metiebantur.

Minimum enim numerum A primi numeri B, Γ, Δ metiantur: dico nullum alium primum numerum metiri ipſum A, præter ipſos B, Γ, Δ.

Si enim fieri poteſt, metiatur E ipſum A; & non ſit E idem qui aliquis ipſorum B, Γ, Δ. & quoniam E metitur A, ipſum per Z metiatur: ergo E multiplicans Z ipſum A fecit. & metiuntur A primi numeri B, Γ, Δ.

		A, 30.	
ſi autem duo numeri ſeſe mul-			
tiplicantes aliquem faciant, & fa-	B, 2.	Γ, 3.	Δ, 5.
ctum ex ipſis metiatur aliquis pri-		E ——	
mus numerus, [per 32. 7.] &		Z ——	

unum eorum qui à principio poſiti ſunt metietur: ergo numeri B, Γ, Δ metientur unum ipſorum E, Z. ipſum quidem E non metientur, etenim [ex hyp.] E primus eſt; & non idem qui aliquis ipſorum B, Γ, Δ: ergo metientur ipſum Z qui eſt minor quam A, quod fieri non poteſt; ponitur enim A minimus eorum quos B, Γ, Δ metiantur: non igitur ipſum A metietur aliquis primus numerus, præter ipſos B, Γ, Δ. quod erat demonſtrandum.

Prop. XV. Theor.

Si tres numeri deinceps proportionales fuerint, minimi omnium eandem cum ipſis rationem habentium; duo quilibet compoſiti ad reliquum primi erunt.

Sint A, B, Γ tres numeri deinceps proportionales, minimi omnium eandem cum ipſis rationem habentium: dico duos quoſlibet compoſitos ad reliquum primos eſſe, videlicet A, B ad Γ, & B, Γ ad A, & A, Γ ad B.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἐὰν ἐλάχιστος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται· ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρούντων.

Ἐλάχιστος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν τῶν Β, Γ, Δ μετρείσθω· λέγω ὅτι ὁ Α ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου πρώτου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν Β, Γ, Δ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρείσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ Ε, καὶ ὁ Ε μηδενὶ τῶν Β, Γ, Δ ἔστω ὁ αὐτός. ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. καὶ μετρεῖται ὁ Α ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν τῶν Β, Γ, Δ. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, τὸν γεγονότα ἐξ αὐτῶν μετρεῖ τις πρῶτος ἀριθμός, καὶ ἕνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει· οἱ Β, Γ, Δ ἄρα ἕνα τῶν Ε, Ζ μετρήσουσι. τὸν μὲν οὖν Ε οὐ μετρήσουσιν, ὁ γὰρ Ε πρῶτός ἐστι, καὶ οὐδενὶ τῶν Β, Γ, Δ ὁ αὐτός· τὸν Ζ ἄρα μετρήσουσιν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Α, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, ὁ γὰρ Α ὑποτέθη ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν Β, Γ, Δ μετρούμενον· οὐκ ἄρα τὸν Α μετρήσει πρῶτος ἀριθμὸς, πάρεξ τῶν Β, Γ, Δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· δύο ὁποιοῦν συντεθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσιν.

Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ Α, Β, Γ· λέγω ὅτι δύο ὁποιοῦν συντεθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσιν, οἱ μὲν Α, Β πρὸς τὸν Γ, οἱ δὲ Β, Γ πρὸς τὸν Α, καὶ ἔτι οἱ Α, Γ πρὸς τὸν Β.

Εἰλήφθω-

Εἰλήφθωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τοῦ αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, Γ δύο οἱ ΔΕ, ΕΖ. φανερὸν δὲ ὅτι ὁ μὲν ΔΕ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε, τὸν δὲ ΕΖ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε, ἔτι δὲ ὁ ΕΖ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκε. καὶ ἐπεὶ οἱ ΔΕ, ΕΖ ἐλάχιστοί εἰσι, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ συναμφότερος πρὸς ἑκάτερον πρῶτός ἐστιν· καὶ ὁ ΔΖ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτός ἐστιν· οἱ ΔΖ, ΔΕ ἄρα πρῶτοί εἰσι πρὸς τὸν ΕΖ· καὶ ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ ἄρα πρὸς τὸν ΕΖ· πρῶτός ἐστιν. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν· ὥστε ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ καὶ πρὸς τὸν ἀπὸ ΕΖ πρῶτός ἐστιν. ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ ὁ ἀπὸ ΔΕ ἐστὶ μετὰ ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ· ὁ ἄρα ἀπὸ ΔΕ μετὰ ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΕΖ πρῶτός ἐστι. καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἀπὸ ΔΕ ὁ Α, ὁ δὲ ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ ὁ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΖ ὁ Γ· οἱ Α, Β ἄρα συνθέντες πρὸς τὸν Γ πρῶτοί εἰσιν· ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ Β, Γ πρὸς τὸν Α πρῶτοί εἰσι. λέγω δὴ ὅτι καὶ οἱ Α, Γ πρὸς τὸν Β πρῶτοί εἰσιν. ἐπεὶ γὰρ ὁ ΔΖ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν· ὥστε καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΔΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν. ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τοῦ ΔΖ ἴσοι εἰσὶν οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ· καὶ οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα μετὰ τοῦ δὶς ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσι. διελόντι οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἅπαξ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσιν· ἔτι διελόντι οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσι. καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἀπὸ ΔΕ ὁ Α, ὁ δὲ ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ ὁ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΖ ὁ Γ· οἱ Α, Γ ἄρα συνθέντες πρὸς τὸν Β πρῶτοί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Sumantur enim duo minimi numeri eandem cum ipſis Α, Β, Γ rationem habentes, ΔΕ, ΕΖ. manifeſtum eſt [per 2. 8.] ΔΕ ſeipſum quidem multiplicantem facere Α; multiplicantem vero ΕΖ facere Β, & ΕΖ ſeipſum multiplicantem facere Γ. & quoniam ΔΕ, ΕΖ minimi ſunt, [per 24. 7.] primi erunt inter ſe. ſi autem duo numeri primi inter ſe fuerint, [per 30. 7.] & uterque ſimul ad utrumque primus erit: ergo ΔΖ ad utrumque ipſorum ΔΕ, ΕΖ primus eſt. ſed & ΔΕ ad ΕΖ eſt primus: quare ΔΖ, ΔΕ ad ΕΖ primi ſunt: ac propterea [per 26. 7.] qui fit ex ΖΔ, ΔΕ primus eſt ad ΕΖ. ſi autem duo numeri primi inter ſe fuerint [per 27. 7.] qui fit ex uno ipſorum ad reliquum primus erit: ergo qui fit ex ΖΔ, ΔΕ ad eum qui fit ex ΕΖ eſt primus. ſed * qui ex ΖΔ, ΔΕ eſt is qui fit ex ΔΕ una cum eo qui ex ΔΕ, ΕΖ: qui igitur ex ΔΕ una cum eo qui ex ΔΕ, ΕΖ primus eſt ad eum qui ex ΕΖ. ſed qui fit ex ΔΕ eſt Α; qui vero ex ΔΕ, ΕΖ eſt Β, & qui ex ΕΖ eſt Γ: ergo Α, Β compoſiti ad ipſum Γ primi ſunt: ſimiliter oſtendemus & Β, Γ ad Α eſſe primos. Dico & Α, Γ ad Β primos eſſe. quoniam enim [per 30. 7.] ΔΖ ad utrumque ipſorum ΔΕ, ΕΖ eſt primus; & [per 26. & 27. 7.] qui fit ex ΔΖ ad eum qui ex ΔΕ, ΕΖ primus erit. ſed [per 4. 2.] ei qui fit ex ΔΖ æquales ſunt qui ex ΔΕ & ΕΖ fiunt una cum eo qui bis fit ex ΔΕ, ΕΖ: qui igitur ex ΔΕ & ΕΖ fiunt una cum eo qui bis ex ΔΕ, ΕΖ primi ſunt ad eum qui ex ΔΕ, ΕΖ: ergo & dividendo qui fiunt ex ΔΕ & ΕΖ una cum eo qui ſemel fit ex ΔΕ, ΕΖ primi ſunt ad eum qui ex ΔΕ, ΕΖ; & rurſus dividendo, qui fiunt ex ΔΕ & ΕΖ ad eum qui fit ex ΔΕ, ΕΖ primi ſunt. ſed qui fit ex ΔΕ eſt Α; qui vero ex ΔΕ, ΕΖ eſt Β; & qui ex ΕΖ eſt Γ: ergo Α, Γ compoſiti ad ipſum Β primi erunt. quod erat demonſtrandum.

Α, 9. Β, 12. Γ, 16.

Δ . . . Ε . . . . Ζ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον οὕτως ὁ δεύτερος πρὸς ἄλλον τινά.

Prop. XVI. Theor.

Si duo numeri primi inter ſe fuerint; non erit ut primus ad ſecundum ita ſecundus ad alium ullum.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω ὅτι οὐκ ἔστιν ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς ἄλλον τινά.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. οἱ δὲ Α, Β πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Β, ὡς ἡγούμενος ἡγούμενον. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ Α ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἄτοπον ἐστιν· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Α, 5. Β, 8. Γ ——

Duo enim numeri Α, Β primi inter ſe ſint: dico non eſſe ut Α ad Β ita Β ad alium ullum.

Si enim fieri poteſt, ſit ut Α ad Β ita Β ad Γ. & ſunt Α, Β primi, primi vero ſunt [per 23. 7.] & minimi, minimi vero eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, [per 21. 7.] antecedens antecedentem & conſequens conſequentem; metitur igitur Α ipſum Β, ut antecedens antecedentem. ſed & ipſe ſeipſum metitur: ergo Α metitur ipſos Α, Β primos inter ſe exiſtentes, quod eſt abſurdum: non igitur eſt ut Α ad Β ita Β ad Γ. quod erat demonſtrandum.

* Hoc ab *Euclide* demonſtratur in lineis ad *prop. 3. lib. 2.* ſed in numeris à *Barlaam Monacho Theor. 3.* Nos, in ſimilibus caſibus, ſolas *Euclidis* correſpondentes propoſitiones *libri 2.* poſthac citabimus.

Prop. XVII. Theor.

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipſorum primi inter ſe ſint; non erit ut primus ad ſecundum ita ultimus ad alium ullum.

SInt quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, Γ, Δ, extremi autem ipſorum A, Δ primi ſint inter ſe: dico non eſſe ut A ad B ita Δ ad alium ullum.

Si enim fieri poteſt, ſit ut A ad B ita Δ ad E: quare permutando ut A ad Δ ita erit [per 13. 7.] B ad E. & etiam [ex hyp.] ſunt A, Δ primi, [per 23. 7.] primi etiam & minimi, minimi vero eos qui eandem habent rationem æqualiter metiuntur, [per 21. 7.] antecedens antecedentem & conſequens conſequentem: metitur igitur A ipſum B. atque eſt ut A ad B ita B ad Γ: ergo & B metitur ipſum Γ, & ob id A quoque ipſum Γ metitur. & quoniam eſt ut B ad Γ ita Γ ad Δ, metitur autem B ipſum Γ; & Γ ipſum Δ metitur. ſed A metitur Γ; quare & A metitur ipſum Δ. metitur autem & ſeipſum: ergo A ipſos A, Δ primos inter ſe exiſtentes metitur; quod fieri non poteſt: non igitur erit ut A ad B ita Δ ad alium ullum. quod erat demonſtrandum.

A, 8. B, 12. Γ, 18. Δ, 27. E

Prop. XVIII. Theor.

Duobus numeris datis conſiderare, an tertius ipſis proportionalis inveniri poſſit.

SInt dati duo numeri A, B, & oporteat conſiderare, an poſſit tertius ipſis proportionalis inveniri.

Itaque A, B vel primi inter ſe ſunt, vel non primi. ſi quidem primi, jam oſtenſum eſt [ad 16. 9.] fieri non poſſe, ut tertius ipſis proportionalis inveniatur.

A, 4.

Sed non ſint A, B inter ſe primi, & B ſeipſum multiplicans faciat Γ. vel igitur A metitur Γ, vel non metitur. metiatur primum per Δ: ergo A multiplicans Δ ipſum Γ fecit. ſed & B ſeipſum multiplicans fecit Γ: qui igitur fit ex A, Δ eſt æqualis ei qui ex B: ergo [per 20. 7.] ut A ad B ita B ad Δ; ac propterea ipſis A, B tertius proportionalis Δ inventus eſt.

A, 4. B, 6.

Sed non metiatur A ipſum Γ: dico fieri non poſſe, ut ipſis A, B tertius proportionalis inveniatur. ſi enim fieri poteſt, inventus ſit Δ: ergo [per 20. 7.] qui fit ex A, Δ æqualis eſt ei qui fit ex B, ſed qui fit ex B eſt Γ; qui igitur fit ex A, Δ ipſi Γ eſt æqualis: ergo A ipſum Δ multiplicans fecit

A, 6. B, 4. Δ —— Γ, 16.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν· οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον οὕτως ὁ ἔσχατος πρός τινα ἄλλον.

Ἔστωσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ Α, Β, Γ, Δ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω ὅτι οὐκ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρός τινα ἄλλον.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε. οἱ δὲ Α, Δ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Β. ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ, ὥστε καὶ ὁ Α τὸν Γ μετρεῖ. καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, μετρεῖ δὲ ὁ Β τὸν Γ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ. ἀλλ' ὁ Α τὸν Γ μετρεῖ· ὥστε καὶ ὁ Α τὸν Δ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ Α ἄρα τοὺς Α, Δ μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Δ πρός τινα ἄλλον τινά. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ δέον ἔστω ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Οἱ δὴ Α, Β ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὔ. εἰ μὲν οὖν εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί, δέδεικται ὅτι ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

B, 7.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστωσαν οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω. ὁ Α δὴ τὸν Γ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὔ μετρείτω πρότερον κατὰ τὸν Δ· ὁ Α ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιήκει. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τοῦ Β· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ· τοῖς Α, Β ἄρα τρίτος ἀριθμὸς προσεύρηται, ὁ Δ.

A, 4. B, 6. Δ, 9. Γ, 36.

Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρείτω ὁ Α τὸν Γ· λέγω ὅτι τοῖς Α, Β ἀδυνάτον ἐστι τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν. εἰ γὰρ δυνατόν, προσευρήσθω ὁ Δ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ Β ἐστὶν ὁ Γ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ Γ· ὥστε ὁ Α τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν·

A, 6. B, 4. Δ —— Γ, 16.

ὁ Α

ὁ Δ ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὸν Δ. ἀλλὰ μὴν οὐ μετρεῖ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα δυνατόν ἐστι τῶν Α, Β τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν, ὅταν ὁ Α τὸν Γ μὴ μετρῇ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

ΕΣτωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, οὗ δέον ἐστὶν ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Οἱ δὴ Α, Β, Γ ἤτοι ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὔ [*ἀνάλογον μὲν ἑξῆς εἰσιν, οἱ ἄκροι δὲ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν· ἢ ἀνάλογον μὲν ἑξῆς, οὐ πρῶτοι δὲ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν· ἢ οὔτε ἀνάλογον ἑξῆς, οὔτε οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.]

Εἰ μὲν οὖν οἱ Α, Β, Γ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί, δέδεικται ὅτι ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν. Α, 4. Β, 6. Γ, 9.

[Εἰ δ' οὐκ ἀνάλογον μὲν ἑξῆς εἰσι, ἄκροι δὲ οἱ πρῶτοι· λέγω ὅτι τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἐστιν ἀδύνατον. εἰ γὰρ μή, προσευρήσθω, καὶ ἔστω ὁ Δ· ὡς οὖν ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ἐξ ἴσου ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε. ἀλλὰ μὴν οἱ Α, Γ πρῶτοί εἰσι, πρῶτοι δὲ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι δὲ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Γ, ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ Α ἄρα τοὺς Α, Γ μετρεῖ πρώτους πρὸς ἀλλήλους ὄντας, ὅπερ ἀδύνατον· τοῖς Α, Β, Γ ἄρα τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀδύνατον.] Α, 4. Β, 6. Γ, 9. Δ —— Ε ——

Πάλιν, οἱ Α, Β, Γ ἀνάλογον ἑξῆς ἔστωσαν μὲν, οἱ δὲ Α, Γ ἄκροι οὐ πρῶτοι· λέγω ὅτι τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν δυνατόν ἐστιν. ὁ Β γὰρ τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· ὁ δὴ Α τὸν Δ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον κατὰ τὸν Ε· ὁ Α ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Ε ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Γ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε· τῶν Α, Β, Γ ἄρα τέταρτος προσεύρηται ἀνάλογον ὁ Ε. Α, 8. Β, 12. Γ, 18. Ε, 27. Δ, 216.

PROP. XIX. PROBL.

Tribus numeris datis considerare, an quartus ipsis proportionalis inveniri possit.

SInt dati tres numeri A, B, Γ, & oporteat considerare, an possit quartus ipsis proportionalis inveniri.

Itaque A, B, Γ vel deinceps sunt proportionales, & eorum extremi primi inter se sunt; vel non [*deinceps proportionales, & eorum extremi sunt primi inter se; vel proportionales quidem deinceps, non autem extremi ipsorum inter se primi; vel neque proportionales deinceps, neque eorum extremi inter se sunt.]

Si quidem igitur A, B, Γ deinceps sunt proportionales, & eorum extremi A, Γ primi inter se; jam demonstratum est [ad 17. 9.] fieri non posse ut quartus ipsis proportionalis inveniatur.

[Si vero non sunt deinceps proportionales, & extremi ipsorum sunt primi: dico quartum proportionalem inveniri non posse. si enim inveniri potest, sit Δ: ut igitur A ad B ita Γ ad Δ, & ut B ad Γ ita sit Δ ad E: ergo ex æquo [per 14. 7.] ut A ad Γ ita Γ ad E. sed sunt A, Γ primi, primi autem [per 23. 7.] & minimi, minimi vero eos qui eandem rationem habent æqualiter metiuntur, [per 21. 7.] antecedens antecedentem & consequens consequentem: ergo A ipsum Γ metitur, antecedens antecedentem. metitur autem & seipsum: quare A ipsos A, Γ primos inter se existentes metitur; quod fieri non potest: ipsis igitur A, B, Γ non potest quartus proportionalis inveniri.]

Rursus A, B, Γ proportionales quidem sint deinceps, non autem extremi eorum primi: dico quartum proportionalem inveniri posse. multiplicans enim B ipsum Γ faciat Δ: itaque vel A metitur ipsum Δ vel non metitur. metiatur primum per E: ergo A multiplicans E fecit Δ. sed & B multiplicans Γ ipsum Δ fecit: qui igitur fit ex A, E est æqualis ei qui ex B, Γ: propterea que [per 19. 7.] ut A ad B ita est Γ ad E: ipsis igitur A, B, Γ quartus proportionalis E inventus est.

* Corruptissima est hæc propositio. Nos ex auctoritate Codicum MSS. ita corrigendam censemus, ut quæ uncis sunt inclusa pro deletis habeantur. In universum datis tribus numeris quartus proportionalis inveniri potest, quando primus metitur eum qui fit cum secundus multiplicat tertium; alioquin ἀδύνατον: & quartus est numerus per quem primus metitur numerum ita creatum. Ideoque Propositionis divisio in quatuor casus non est necessaria, certe *Euclidis* concinnitati minime respondet: immo casus secundus paralogismus merus est, cum quod falsum probat, tum quod ἀλλοιότως: Patet enim tribus numeris 4, 8, 9 posse quartum proportionalem inveniri nempe 18, licet non sunt deinceps proportionales, & eorum extremi sunt inter se primi.

Sed non metiatur A ipſum Δ: dico fieri non poſſe, ut ipſis A, B, Γ inveniatur quartus proportionalis. ſi enim inveniri poteſt, inveniatur, ſitque E: ergo [per 19. 7.] qui fit ex A, E eſt æqualis ei qui ex B, Γ. ſed qui fit ex B, Γ eſt Δ; quare qui fit ex A, E ipſi Δ eſt æqualis, & ob id A ipſum E multiplicans fecit Δ: metitur igitur A ipſum Δ per E; quare A ipſum Δ metitur. ſed & non metitur; quod eſt abſurdum: non igitur fieri poteſt, ut ipſis A, B, Γ inveniatur quartus proportionalis, quando A ipſum Δ non metitur.

A, 20. B, 30. Γ, 45. E —— Δ, 1350.

[Sed non ſint A, B, Γ neque deinceps proportionales, neque A, Γ inter ſe primi, & B ipſum Γ multiplicans faciat Δ, ſimiliter demonſtrabimus ſi A ipſum Δ metiatur, inveniri poſſe quartum proportionalem: ſin minus, inveniri non poſſe.] quod erat demonſtrandum.

A, 3. B, 4. Γ, 9. E, 12. Δ, 36.

A, 4. B, 5. Γ, 14. E —— Δ, 70.

Αλλὰ δὴ μὴ μετρείτω ὁ Α τὸν Δ· λέγω ὅτι ἀδύνατόν ἐστι τοῖς Α, Β, Γ τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν. εἰ γὰρ δυνατόν, προσευρήσθω ὁ Ε· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Ε ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Γ. ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν Β, Γ ἐστὶν ὁ Δ· καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Ε ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ Δ· ὁ Α ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ Α ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τοὺς Ε· ὥστε μετρεῖ ὁ Α τὸν Δ. ἀλλὰ δὲ μετρεῖ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα δυνατόν ἐστι τοῖς Α, Β, Γ τέταρτον ἀνάλογον ἀριθμὸν προσευρεῖν, ὅταν ὁ Α τὸν Δ μὴ μετρῇ.

[Αλλὰ μὴν ἀλλ' ἀνάλογον ἐχέτω οἱ Α, Β, Γ, ὅτι πρῶτοι οἱ Α, Γ ἄκροι ἔστωσαν, καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ὁ Α τὸν Δ μετρεῖ τέταρτον ἀνάλογον εὑρεῖν δυνατόν ἐστιν· ἐὰν δὲ μὴ μετρῇ, ὅτι ἀδύνατον.] ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XX. THEOR.

Primi numeri plures ſunt omni propoſita multitudine primorum numerorum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν.

SInt propoſiti primi numeri A, B, Γ: dico ipſis A, B, Γ plures eſſe primos numeros.

Sumatur enim [per 38. 7.] minimus, quem ipſi A, B, Γ metiantur, ſitque Δ E, & ipſi Δ E apponatur unitas Δ Z: ergo E Z vel primus eſt, vel non. ſit primum primus: inventi igitur ſunt primi numeri A, B, Γ, E Z plures quam ipſi A, B, Γ.

A, 2. B, 3. Γ, 5. E — 30. — Δ. Z.

Sed non ſit E Z primus: ergo [per 33. 7.] eum primus metitur. metiatur H: dico H nulli ipſorum A, B, Γ eundem eſſe. ſi enim H idem ſit qui unus ipſorum A, B, Γ, ipſi autem A, B, Γ metiantur Δ E; & H ipſum Δ E metietur. metitur autem & E Z; & reliquam igitur Δ Z unitatem metietur H numerus exiſtens, quod eſt abſurdum: ergo H non eſt idem qui unus ipſorum A, B, Γ. & ponitur primus. inventi igitur ſunt primi numeri A, B, Γ, H plures propoſita multitudine primorum numerorum A, B, Γ. quod erat demonſtrandum.

A, 2. B, 3. Γ, 7. E — 105. — Δ. Z. H, 53.

Ἑστωσαν οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ· λέγω ὅτι τῶν Α, Β, Γ πλείους εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοί.

Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ ἐλάχιστος μετρούμενος, καὶ ἔστω ὁ Δ Ε, προσκείσθω τῷ Δ Ε μονὰς ἡ Δ Ζ· ὁ δὴ Ε Ζ ἤτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ οὔ. ἔστω πρότερον πρῶτος· εὑρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, Ε, Ζ πλείους τῶν Α, Β, Γ.

Αλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ Ε Ζ πρῶτος· ὑπό τινος ἄρα πρώτου ἀριθμοῦ μετρεῖται. μετρείσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ Η· λέγω ὅτι ὁ Η οὐδενὶ τῶν Α, Β, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. εἰ γὰρ ὁ Η ἑνί τῶν Α, Β, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός, οἱ δὲ Α, Β, Γ τὸν Δ Ε μετροῦσι, καὶ ὁ Η ἄρα τὸν Δ Ε μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Ε Ζ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὴν Δ Ζ μονάδα μετρήσει ὁ Η ἀριθμὸς ὤν, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ Η ἑνί τῶν Α, Β, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. καὶ ὑπόκειται πρῶτος· εὑρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους τοῦ προτεθέντος πλήθους τῶν Α, Β, Γ, οἱ Α, Β, Γ, Η. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXI. THEOR.

Si pares numeri quotcunque componantur, totus par erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

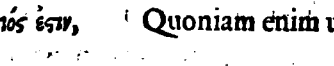
Ἐὰν ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, ὁ ὅλος ἄρτιός ἐστι.

COmponantur enim pares numeri quotcunque A B, B Γ, Γ Δ, Δ E: dico totum A E parem eſſe.

Συγκείσθωσαν γὰρ ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν, οἱ Α Β, Β Γ, Γ Δ, Δ Ε· λέγω ὅτι ὅλος ὁ Α Ε ἄρτιός ἐστιν.

Επεὶ

Επεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ ἄρτιός ἐστιν, ἔχει μέρος ἥμισυ· ὥστε καὶ ὅλος ὁ ΑΕ ἔχει μέρος ἥμισυ. ἄρτιος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΕ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Quoniam enim unuſquiſque ipſorum ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ par eſt, [per 6. def. 7.] habet partem dimidiam: quare & totus ΑΕ partem dimidiam habebit. par autem numerus eſt qui bifariam dividitur: ergo ΑΕ par eſt. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϐ'.

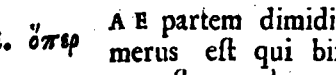
Εὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ὁποσοιῶν συντεθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν ἄρτιον ᾖ· ὅλος ἄρτιος ἔσται.

PROP. XXII. THEOR.

Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipſorum ſit par; totus par erit.

Συγκείσθωσαν γὰρ ὦσιν ὁποσοιοῦν ἄρτιοι τὸ πλῆθος, οἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ· λέγω ὅτι ὅλος ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν.

Επεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ περιττός ἐστιν, ἀφῃρήσθω ἀφ' ἑκάστου, ἕκαστος ἄρα τῶν λοιπῶν ἄρτιος ἔσται· ὥστε καὶ ὁ συγκείμενος ἐξ αὐτῶν ἄρτιος ἔσται. ἔστι δὲ καὶ τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἄρτιον· καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



COmponantur enim impares numeri quotcunque multitudine pares ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ: dico totum ΑΕ parem eſſe.

Quoniam enim unuſquiſque ipſorum ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ impar eſt, detracta ab unoquoque unitate, erit unuſquiſque reliquorum par: quare [per 21. 9.] & compoſitus ex ipſis par erit. eſt autem par & unitatum multitudo: & totus igitur ΑΕ par eſt. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Εὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ὁποσοιῶν συντεθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ᾖ· καὶ ὅλος περισσὸς ἔσται.

PROP. XXIII. THEOR.

Si impares numeri quotcunque componantur, & multitudo ipſorum ſit impar; & totus impar erit.

Συγκείσθωσαν γὰρ ἀριθμοὶ περισσοὶ ὁποσοιῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσὸν ἔστω, οἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ὅλος ὁ ΑΔ περισσός ἐστιν.

Αφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ΓΔ μονὰς ἡ ΔΕ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΓΕ ἄρτιός ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ὁ ΑΓ ἄρτιος· καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστι. καί ἐστιν ἡ μονὰς ἡ ΔΕ· περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

COmponantur enim numeri impares quotcunque, quorum multitudo ſit impar, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ: dico & totum ΑΔ imparem eſſe.

Auferatur ab ipſo ΓΔ unitas ΔΕ: reliquus igitur ΓΕ [per 7. def. 7.] par eſt. eſt autem [per 22. 9.] & ΑΓ par; ergo [per 21. 9.] & totus ΑΕ par erit. atque eſt ΔΕ unitas: impar igitur eſt ΑΔ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

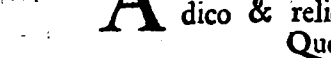
Εὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, καὶ ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται.

PROP. XXIV. THEOR.

Si à pari numero par auferatur, & reliquus par erit.

Απὸ γὰρ ἀρτίου τοῦ ΑΒ ἄρτιος ἀφῃρήσθω ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν.

Επεὶ γὰρ ὁ ΑΒ ἄρτιός ἐστιν, ἔχει μέρος ἥμισυ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΒΓ ἔχει μέρος ἥμισυ· ὥστε καὶ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἔχει μέρος ἥμισυ· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



APari enim numero ΑΒ par auferatur ΒΓ: dico & reliquum ΓΑ parem eſſe.

Quoniam enim ΑΒ par eſt, habet partem dimidiam. eadem ratione & ΒΓ habet partem dimidiam: quare & reliquus ΓΑ partem habet dimidiam: par igitur eſt ΑΓ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Εὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ περισσὸς ἀφαιρεθῇ, καὶ ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται.

PROP. XXV. THEOR.

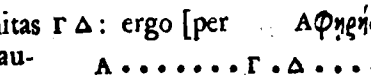
Si à pari numero impar auferatur, & reliquus impar erit.

Απὸ δὲ ἀρτίου τοῦ ΑΒ περισσὸς ἀφῃρήσθω ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ περισσός ἐστιν.

APari enim numero ΑΒ impar ΒΓ auferatur: dico & reliquum ΓΑ imparem eſſe.

Aufe-

Auferatur ab ipſo B Γ unitas Γ Δ: ergo [per 7. def. 7.] Δ B par eſt. eſt autem par & A B; & reliquus igitur A Δ [per 24. 9.] eſt par. atque eſt Γ Δ unitas: ergo Γ A impar eſt. quod erat demonſtrandum.



Αφηρήθω γὰρ ἀπὸ τοῦ ΒΓ μονὰς ἡ ΓΔ· ὁ ΔΒ ἄρα ἄρτιός ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ὁ ΑΒ ἄρτιος· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΔ ἄρτιός ἐστι. καί ἐστι μονὰς ἡ ΓΔ· ὁ ΓΑ ἄρα περισσός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXVI. Theor.

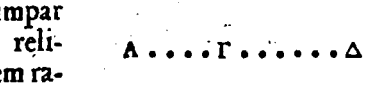
Si ab impari numero impar auferatur, & reliquus par erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Ἐὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ περισσὸς ἀφαιρεθῇ, καὶ ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται.

AB impari enim numero AB impar BΓ auferatur: dico reliquum ΓA parem eſſe.

Quoniam enim AB impar eſt, auferatur unitas BΔ: reliquus AΔ igitur eſt par. eadem ratione & ΓΔ eſt par: quare [per 24. 9.] & reliquus AΓ par eſt. quod erat demonſtrandum.



Ἀπὸ γὰρ περισσοῦ τοῦ ΑΒ περισσὸς ἀφῃρήθω ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ ΑΒ περισσός ἐστιν, ἀφῃρήσθω μονὰς ἡ ΒΔ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΔ ἄρτιός ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΓΔ ἄρτιός ἐστιν· ὥστε καὶ λοιπὸς ὁ ΑΓ ἄρτιός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXVII. Theor.

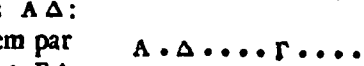
Si ab impari numero par auferatur, reliquus impar erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

Ἐὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται.

AB impari enim numero AB par auferatur BΓ: dico reliquum ΓA imparem eſſe.

Auferatur enim unitas AΔ: ergo ΔB par eſt. eſt autem par & BΓ: & reliquus igitur ΓΔ [per 24. 9.] eſt par. atque eſt ΔA unitas: ergo [per 7. def. 7.] ΓA impar eſt. quod erat demonſtrandum.



Ἀπὸ δὲ περισσοῦ ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφῃρήσθω ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ περισσός ἐστιν.

Ἀφῃρήσθω γὰρ μονὰς ἡ ΑΔ· ὁ ΔΒ ἄρα ἄρτιός ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ὁ ΒΓ ἄρτιος· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΓΔ ἄρτιός ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ μονὰς ἡ ΔΑ· περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ ΓΑ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXVIII. Theor.

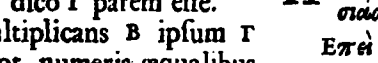
Si impar numerus parem multiplicans faciat aliquem, factus par erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος ἄρτιος ἔσται.

IMpar enim numerus A parem numerum B multiplicans faciat Γ: dico Γ parem eſſe.

Quoniam enim A multiplicans B ipſum Γ fecit, componitur Γ ex tot numeris æqualibus ipſi B quot unitates ſunt in A. atque eſt B par: ergo Γ ex paribus numeris componitur. ſi autem pares numeri quotcunque componantur, [per 21. 9.] totus par erit: ergo Γ eſt par. quod erat demonſtrandum.



Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἄρτιον τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ ἄρτιός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἴσων τῷ Β ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Α μονάδες. καὶ ἔστιν ὁ Β ἄρτιος· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐξ ἀρτίων. ἐὰν δὲ ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, ὁ ὅλος ἄρτιός ἐστιν· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXIX. Theor.

Si impar numerus imparem numerum multiplicans faciat aliquem, factus impar erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς περισσὸν ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος περισσὸς ἔσται.

IMpar enim numerus A numerum imparem B multiplicans faciat Γ: dico Γ imparem eſſe.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α περισσὸν τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ περισσός ἐστιν.

Ἐπεὶ

Επεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ πσύτων ἴσων τῷ Β ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Α μονάδες. καὶ ἔστιν ἑκάτερος τ̃ Α, Β πϑιος· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ πϑίων ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆϑος περισσόν. ὁ δὲ συγκείμενος ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆϑος περισσὸν, περισσός ἐστιν· ὥστε ὁ Γ περισσός ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Quoniam enim A multiplicans B ipſum Γ fecit, componitur Γ ex tot numeris æqualibus ipſi B quot ſunt in A unitates.

A . . .
B . . . . .
Γ . . . . . .

atque eſt uterque ipſorum A, B impar: ergo Γ ex imparibus numeris componitur, quorum multitudo eſt impar. qui autem componitur ex imparibus numeris, quorum multitudo impar, [per 23. 9.] & ipſe impar erit: ergo Γ eſt impar. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ τὴν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἄρτιον τ̃ Β μετρείτω· λέγω ὅτι καὶ τ̃ ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει.

Επεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Γ· λέγω ὅτι ὁ Γ οὐκ ἔστι περισσός. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω. καὶ ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὸν Γ· ὁ Α ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τ̃ Β πεποίηκεν· ὁ ἄρα Β σύγκειται ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆϑος περισσόν ἐστιν· ὁ Β ἄρα περισσός ἐστιν, ὅπερ ἄτοπον, φανερὸν γὰρ ἄρτιος· οὐκ ἄρα ὁ Γ περισσός ἐστιν· ἄρτιος ἄρα ὁ Γ· ὥστε ὁ Α τὸν Β μετρεῖ ἀρτιάκις, λέγω δὴ τοῦτο καὶ τὴν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

A . . .
B . . . . . .
Γ . . .

Quoniam enim A multiplicans B ipſum Γ fecit B: ergo B componitur ex imparibus numeris, quorum multitudo eſt impar; ac propterea impar eſt B, quod eſt abſurdum, par enim ponitur: non igitur Γ eſt impar: ergo par: quare A ipſum B pariter metietur, & ob id ejus quoque dimidium metietur. quod erat demonſtrandum.

PROP. XXX. THEOR.

Si impar numerus parem numerum metiatur, & dimidium ejus metietur.

IMpar enim numerus A parem numerum B metiatur: dico & dimidium ejus metiri.

Quoniam enim A metitur B, metiatur ipſum per Γ: dico Γ non eſſe imparem. nam ſi fieri poteſt, ſit impar. & quoniam A ipſum B metitur per Γ; A multiplicans ipſum Γ fecit B: ergo B componitur ex imparibus numeris, quorum multitudo eſt impar; ac propterea impar eſt B, quod eſt abſurdum, par enim ponitur: non igitur Γ eſt impar: ergo par: quare A ipſum B pariter metietur, & ob id ejus quoque dimidium metietur. quod erat demonſtrandum.

A . . .
B . . . . . .
Γ . . . .

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτος ᾖ, καὶ πρὸς τὸν διπλάσιον αὐτοῦ πρῶτος ἔσται.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α πρός τινα ἀριθμὸν τὸν Β πρῶτος ἔστω, τὸ δὲ Β διπλάσιος ἔστω ὁ Γ· λέγω ὅτι ὁ Α καὶ πρὸς τὸν Γ πρῶτός ἐστιν.

Εἰ γὰρ μὴ εἰσὶν οἱ Α, Γ πρῶτοι, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. καὶ ἔστιν ὁ Α περισσός· περισσὸς ἄρα καὶ ὁ Δ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ περισσὸς ὢν τὸν Γ μετρεῖ, καὶ ἔστιν ὁ Γ ἄρτιος· καὶ τὸν ἥμισυν ἄρα τοῦ Γ μετρήσει ὁ Δ. τοῦ δὲ Γ ἥμισύ ἐστιν ὁ Β· ὁ Δ ἄρα τ̃ Β μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τ̃ Α· ὁ Δ ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ Α πρὸς τ̃ Γ πρῶτος οὐκ ἔστιν· οἱ Α, Γ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

A . . .
B . . . . .
Γ . . . . . .
Δ ——

PROP. XXXI. THEOR.

Si impar numerus ad aliquem numerum ſit primus, & ad ipſius duplum primus erit.

IMpar enim numerus A ad aliquem numerum B ſit primus, & ſit Γ ipſius B duplus: dico A etiam ad Γ primum eſſe.

Si enim non ſint A, Γ primi, eos aliquis numerus metietur. metiatur, ſitque Δ. & eſt A impar: impar igitur eſt & Δ. & quoniam Δ impar exiſtens metitur ipſum Γ, atque eſt Γ par; & Δ [per 30. 9.] ipſius Γ dimidium metietur. ſed ipſius Γ dimidium eſt B: ergo Δ ipſum B metitur. metitur autem & ipſum A: quare Δ ipſos A, B metitur, primos inter ſe exiſtentes, quod fieri non poteſt: non igitur A ad Γ primus non eſt: ergo A, Γ inter ſe primi ſunt. quod erat demonſtrandum.

A . . .
B . . . . .
Γ . . . . . .
Δ ——

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

Τῶν ἀπὸ διάδος διπλασιαζομένων ἀριθμῶν ἕκαστος ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον.

Απὸ γὰρ διάδος τ̃ Α διπλασιάσθωσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ, οἱ Β, Γ, Δ· λέγω ὅτι οἱ Β, Γ, Δ ἀρτιάκις ἄρτιοί εἰσι μόνον.

PROP. XXXII. THEOR.

Numerorum à binario duplatorum unuſquiſque pariter par eſt tantum.

A binario enim A duplentur quotlibet numeri B, Γ, Δ: dico B, Γ, Δ pariter pares eſſe tantum.

At vero unumquemque ipſorum B, Γ, Δ pariter parem eſſe [per 8. def. 7.] manifeſto conſtat: à binario namque duplatus eſt. dico & tantum. exponatur enim unitas E. quoniam igitur ab unitate quotlibet numeri deinceps proportionales ſunt, & poſt unitatem A primus eſt; E, 1. A, 2. B, 4. Γ, 8. Δ, 16. maximum ipſorum numerorum A, B, Γ, Δ, videlicet Δ, nullus alius metietur [per 13. 9.] præter ipſos A, B, Γ. atque eſt unuſquiſque ipſorum A, B, Γ par; ergo Δ pariter par eſt tantum. ſimiliter demonſtrabimus & unumquemque ipſorum A, B, Γ pariter parem eſſe tantum. quod erat demonſtrandum.

Οτι μὴν ἕν ἕκαστος τῶν Β, Γ, Δ ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι, φανερόν· δοτὸ γὰρ ἀφ' ἑνὸς ἐστὶ διπλασιαθείς. λέγω δὴ ὅτι καὶ μόνον. σκείσθω γὰρ μονὰς ἡ Ε. ἐπεὶ οὖν ἀπὸ μονάδος ὁποσωνοῦν ἀριθμοί ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ μετρῶν τὸν μονάδα ὁ Α πρῶτός ἐστιν, ὁ μέγιστος τῶν Α, Β, Γ, Δ ὁ Δ ὑπ' ἐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται πάρεξ τῶν Α, Β, Γ. καὶ ἔστιν ἕκαστος τῶν Α, Β, Γ ἄρτιος· ὁ Δ ἄρα ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκάτερος τῶν Α, Β, Γ ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXIII. Theor.

Si numerus dimidium habeat imparem, pariter impar eſt tantum.

NUmerus enim A dimidium imparem habeat: dico A pariter imparem eſſe tantum.

At vero pariter imparem eſſe [per 9. def. 7.] perſpicuum eſt: dimidium enim ipſius impar exiſtens ipſum pariter metitur. dico & tantum. nam ſi A ſit etiam pariter par, [*dimidius ipſius par erit; A . . . . . atque] eum par numerus [per 8. def. 7.] per parem numerum metietur: ergo dimidium ipſius parem numerum metitur, impar exiſtens, quod eſt abſurdum: quare A pariter impar eſt tantum. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Ἐὰν ἀριθμὸς τὸ ἥμισυ ἔχῃ περισσόν, ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον.

ΑΡιθμὸς γὰρ ὁ Α τὸν ἥμισυ ἐχέτω περισσόν· λέγω ὅτι ὁ Α ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον.

Οτι μὲν οὖν ἀρτιάκις περισσός ἐστι, φανερόν· ὁ γὰρ ἥμισυς αὐτοῦ περισσὸς ὢν μετρεῖ αὐτὸν ἀρτιάκις. λέγω δὴ ὅτι καὶ μόνον. εἰ γὰρ ἔστιν ὁ Α καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος, [*ὁ ἥμισυς αὐτοῦ ἄρτιός ἐστι, καὶ] μετρηθήσεται ὑπὸ ἀρτίου κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν· ὥστε καὶ ὁ ἥμισυς αὐτοῦ μετρηθήσεται ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ, περισσὸς ὤν, ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον· ὁ Α ἄρα ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXIV. Theor.

Si par numerus neque ſit à binario duplatus, neque dimidium imparem habeat; pariter par eſt & pariter impar.

NUmerus enim A neque ſit à binario duplatus, neque dimidium imparem habeat: dico A & pariter parem & pariter imparem eſſe.

At vero A pariter parem eſſe [per 8. def. 7.] manifeſtum eſt; A . . . . . dimidium enim imparem non habet. dico etiam pariter imparem eſſe. nam ſi A bifariam ſecemus, & dimidium ipſius bifariam, & hoc ſemper faciamus, tandem incidemus in aliquem imparem qui ipſum A per numerum parem metietur. ſi enim non incidemus in aliquem imparem qui ipſum A per numerum parem metietur, incidemus in binarium, atque erit A à binario duplatus; quod non ponitur: quare A pariter impar eſt. oſtenſum autem eſt & pariter eſſe parem: eſt igitur A & pariter par & pariter impar. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Ἐὰν ἄρτιος ἀριθμὸς μήτε τῶν ἀπὸ διπλασιαζομένων ᾖ, μήτε τὸ ἥμισυ ἔχῃ περισσόν· ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἐστι, καὶ ἀρτιάκις περισσός.

ΑΡιθμὸς γὰρ ὁ Α μήτε τῶν ἀπὸ διπλασιαζομένων ἔστω, μήτε τὸ ἥμισυν ἐχέτω περισσόν· λέγω ὅτι ὁ Α ἀρτιάκις τε ἐστὶν ἄρτιος, καὶ ἀρτιάκις περισσός.

Οτι μὲν οὖν ὁ Α ἀρτιάκις ἐστὶν ἄρτιος, φανερόν· τὸν γὰρ ἥμισυν οὐκ ἔχει περισσόν. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἀρτιάκις ἐστὶ περισσός. ἐὰν γὰρ τὸ Α πολλαπλασιάσω δύο, καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ δύο, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιῶμεν, καταντήσομεν εἴς τινα περισσόν, ὃς μετρήσει τὸ Α κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν. εἰ γὰρ οὐ καταντήσομεν εἴς τινα περισσὸν ὃς μετρήσει τὸ Α κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν, καταντήσομεν εἰς δυάδα, καὶ ἔσται ὁ Α τῶν ἀπὸ διπλασιαζομένων, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· ὥστε ὁ Α καὶ ἀρτιάκις περισσός ἐστιν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος· ὁ Α ἄρα ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἐστι, καὶ ἀρτιάκις περισσός. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXV. Theor.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, auferantur autem à ſecundo & ultimo æquales primo; erit ut ſecundi exceſſus ad primum ita ul-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ἀφαιρεθῶσι δὲ ἀπό τε τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ ἐσχάτου ἴσοι τῷ πρώτῳ· ἔσται ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπερο-

* Illa uncis inclusa non agnoscunt Codd. MSS. & rectius quidem abesse possunt.

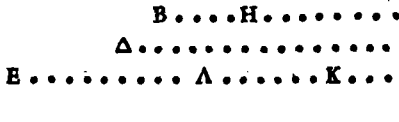
timi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

ΕΣτωσαν ὁποσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον οἱ Α, ΒΓ, Δ, ΕΖ, ἀρχόμενοι ἀπὸ ἐλαχίστου τοῦ Α, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ μὲν ΒΓ τῷ ΕΖ τῷ Α ἴσος, ἑκάτερος τῶν ΗΓ, ΖΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΒΗ πρὸς τὸν Α οὕτως ὁ ΕΘ πρὸς τοὺς Α, ΒΓ, Δ.

SInt quotcunque numeri deinceps proportionales Α, ΒΓ, Δ, ΕΖ incipientes à minimo Α, & auferatur ab ipso ΒΓ & ab ΕΖ æqualis ipsi Α, videlicet ΗΓ, ΖΘ: dico ut ΒΗ ad Α ita esse ΕΘ ad Α, ΒΓ, Δ.

Κείσθω γὰρ τῷ μὲν ΒΓ ἴσος ὁ ΖΚ, τῷ δὲ Δ ἴσος ὁ ΖΛ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΖΚ τῷ ΒΓ ἴσος ἐστίν, ὧν ὁ ΖΘ τῷ ΗΓ ἴσος· λοιπὸς ἄρα ὁ ΘΚ λοιπῷ τῷ ΗΒ ἐστὶν ἴσος. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ ΕΖ πρὸς τὸ Δ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸ ΒΓ καὶ ὁ ΒΓ πρὸς τὸ Α, ἴσος δὲ ὁ μὲν Δ τῷ ΖΛ, ὁ δὲ ΒΓ τῷ ΖΚ, ὁ δὲ Α τῷ ΖΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΖ πρὸς τὸ ΛΖ οὕτως ὁ ΛΖ πρὸς τὸ ΖΚ, καὶ ὁ ΖΚ πρὸς τὸ ΖΘ· διελόντι, ὡς ὁ ΕΛ πρὸς τὸ ΛΖ οὕτως ὁ ΛΚ πρὸς τὸ ΖΚ, καὶ ὁ ΚΘ πρὸς τὸ ΖΘ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΚΘ πρὸς τὸ ΖΘ οὕτως οἱ ΕΛ, ΛΚ, ΚΘ πρὸς τοὺς ΛΖ, ΚΖ, ΘΖ. ἴσος δὲ ὁ μὲν ΚΘ τῷ ΒΗ, ὁ δὲ ΖΘ τῷ Α, οἱ δὲ ΛΖ, ΚΖ, ΘΖ τοῖς Δ, ΒΓ, Α· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΒΗ πρὸς τὸ Α οὕτως ὁ ΕΘ πρὸς τὸ Δ, ΒΓ, Α· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ἀφ' ἑνὸς ὑπεροχὴ πρὸς τὸ πρῶτον οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ponatur enim ipsi quidem ΒΓ æqualis ΖΚ; ipsi vero Δ æqualis ΖΛ. quoniam igitur ΖΚ est æqualis ipsi ΒΓ, quorum ΖΘ est æqualis ΗΓ; erit reliquus ΘΚ reliquo ΗΒ æqualis. & quoniam est ut ΕΖ ad Δ ita Δ ad ΒΓ & ΒΓ ad Α; æqualis autem est Δ ipsi ΖΛ, & ΒΓ ipsi ΖΚ, & Α ipsi ΖΘ: erit ut ΕΖ ad ΛΖ ita ΛΖ ad ΖΚ & ΖΚ ad ΖΘ: quare dividendo ut ΕΛ ad ΛΖ ita ΛΚ ad ΖΚ & ΚΘ ad ΖΘ, & ut unus antecedentium ad unum consequentium ita [per 12. 7.] omnes antecedentes ad omnes consequentes: est igitur ut ΚΘ ad ΖΘ ita ΕΛ, ΛΚ, ΚΘ ad ΛΖ, ΚΖ, ΘΖ. atque est ΚΘ quidem æqualis ΒΗ; ΖΘ vero ipsi Α, & ΛΖ, ΚΖ, ΘΖ æquales ipsis Δ, ΒΓ, Α: ergo ut ΒΗ ad Α ita est ΕΘ ad Δ, ΒΓ, Α: est igitur ut secundi excessus ad primum ita excessus ultimi ad omnes ipsum antecedentes. quod erat demonstrandum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ'.

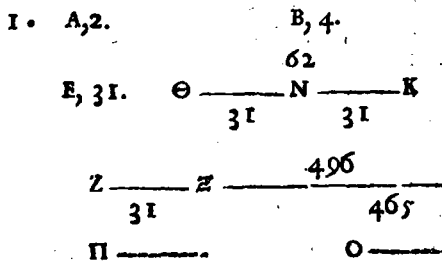
Εὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνατεθῶσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπας συντεθεὶς πρῶτος γένῃ, καὶ ὁ σύμπας ὁπόσιν τὸν ἔσχατον πολλαπλασιασθεὶς ποιῇ τινα· ὁ γενόμενος τέλειος ἔσται.

PROP. XXXVI. THEOR.

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales exponantur in dupla analogia, quoad totus compositus primus fiat, & totus in ultimum multiplicatus faciat aliquem; factus perfectus erit.

ΑΠΟ γὰρ μονάδος ἐκκείσθωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπας συντεθεὶς πρῶτος γένῃ, οἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ τῷ σύμπαντι ἴσος ἔστω ὁ Ε, καὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν ΖΗ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ ΖΗ τέλειός ἐστιν.

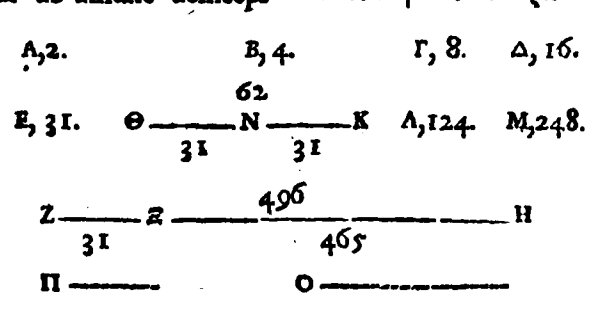
AB unitate enim exponantur quotcunque numeri deinceps proportionales in dupla analogia, sc. Α, Β, Γ, Δ, quoad totus compositus primus fiat, & toti æqualis sit Ε, & Ε ipsum Δ multiplicans faciat ΖΗ: dico ΖΗ perfectum esse.



Ὅσοι γάρ εἰσιν οἱ Α, Β, Γ, Δ τῷ πλήθει τοσοῦτοι ἀπὸ τοῦ Ε ειλήφθωσαν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, οἱ Ε, ΘΚ, Λ, Μ· ἴσοι ἄρα εἰσὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Μ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Ε, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τοῦ Α, Μ. καὶ ἔστιν ὁ ἐκ τῶν Ε, Δ ὁ ΖΗ· καὶ ὁ ἐκ τοῦ Α, Μ ἄρα ἐστὶν ὁ ΖΗ· ὁ Α ἄρα τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν ΖΗ πεποίηκεν· ὁ Μ ἄρα τὸν ΖΗ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. καὶ ἔστι δυὰς ὁ Α· διπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ ΖΗ τοῦ Μ. εἰσὶ δὲ καὶ οἱ Μ, Λ, ΘΚ, Ε ἐξῆς διπλάσιοι ἀλλήλων

Quot enim sunt Α, Β, Γ, Δ multitudine tot sumantur ab ipso Ε in dupla analogia, qui sint Ε, Θ Κ, Λ, Μ: ergo ex æquo ut Α ad Δ ita erit Ε ad Μ: ac propterea [per 19. 7.] qui fit ex Ε, Δ est æqualis ei qui ex Α, Μ. est autem qui ex Ε, Δ ipse ΖΗ: quare ΖΗ est qui fit ex Α, Μ: multiplicans igitur Α ipsum Μ fecit ΖΗ: & Μ metitur ΖΗ per unitates quæ sunt in Α. atque est Α binarius: duplus igitur est ΖΗ ipsius Μ. sunt autem & Μ, Λ, Θ Κ, Ε deinceps dupli

inter ſe: ergo E, ΘK, Λ, M, ZH deinceps proportionales ſunt in dupla analogia. auferatur à ſecundo ΘK, & ab ultimo ZH ipſi primo E æqualis uterque ΘN, ZΞ: eſt igitur [per 35. 9.] ut ſecundi numeri exceſſus ad primum ita exceſſus ultimi ad omnes ipſum antecedentes: quare ut NK ad E ita ΞH ad M, Λ, ΘK, E. atque eſt [per conſtruct.] NK ipſi E æqualis: ergo & ΞH eſt æqualis ipſis M, Λ, ΘK, E. eſt autem [per conſtr.] ZΞ æqualis ipſi E; atque E ipſis A, B, Γ, Δ & unitati æqualis: totus igitur ZH æqualis eſt [per 2. ax.] & ipſis E, ΘK, Λ, M & ipſis A, B, Γ, Δ & unitati, omneſque [per 11. 9.] ipſum ZH metiuntur. dico nullum alium metiri ZH præter ipſos A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M, & unitatem. ſi enim fieri poteſt, metiatur aliquis numerus ipſum ZH, qui ſit O: ſitque O nulli ipſorum A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M idem. & quoties O ipſum ZH metitur tot unitates ſint in Π: ergo Π ipſum O multiplicans fecit ZH. ſed [per conſtr.] & E multiplicans Δ ipſum ZH fecit: eſt igitur [per 19. 7.] ut E ad Π ita O ad Δ. & quoniam ab unitate deinceps proportionales ſunt A, B, Γ, Δ, & qui unitatem ſequitur A primus eſt; non metietur ipſum Δ aliquis alius numerus præter ipſos A, B, Γ [per 13. 9.]: & ponitur O nulli ipſorum A, B, Γ idem: non igitur O ipſum Δ metietur. ut autem O ad Δ ita E ad Π: ergo [per 20. def. 7.] neque E metietur ipſum Π. atque [ex hyp.] eſt E primus, omnis autem primus numerus ad omnem numerum quem non metitur [per 31. 7.] primus eſt: quare E, Π primi inter ſe ſunt. ſed [per 23. 7.] primi etiam & minimi, minimi vero eos qui eandem quam ipſi rationem habent æqualiter metiuntur, [per 21. 7.] antecedens antecedentem & conſequens conſequentem, atque eſt ut E ad Π ita O ad Δ: ergo E æqualiter metitur ipſum O atque Π ipſum Δ. ſed nullus alius metitur numerum Δ præter ipſos A, B, Γ: quare Π idem eſt qui unus ipſorum A, B, Γ. ſit idem qui B, & quot ſunt B, Γ, Δ multitudine tot ab ipſo E ſumantur E, ΘK, Λ: ſuntque [per conſtr.] E, ΘK, Λ in eadem ratione in qua B, Γ, Δ: ex æquo igitur ut B ad Δ ita eſt E ad Λ; ergo [per 19. 7.] qui fit ex B, Λ eſt æqualis ei qui ex Δ, E. ſed qui fit ex Δ, E eſt æqualis ei qui ex Π, O: qui igitur fit ex Π, O ei qui ex B, Λ æqualis erit: quare [per 19. 7.] ut Π ad B ita eſt Λ ad O. eſtque Π idem qui B: ergo & Λ idem erit qui O, quod fieri non poteſt, etenim O nulli ipſorum expoſitorum idem ponitur: non igitur ipſum ZH metitur aliquis numerus præter ipſos A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M, & unitatem. atque oſtenſus eſt ZH æqualis ipſis A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M, & unitati, perfectus autem numerus eſt [per 22. def. 7.] qui ſuis ipſius partibus eſt æqualis: ergo ZH perfectus eſt. quod erat demonſtrandum.



λων· οἱ E, ΘK, Λ, M, ZH ἄρα ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ. ἀφῃρήσθω δὴ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τοῦ ΘK καὶ τῷ ἐσχάτῳ τῷ ZH τῷ πρώτῳ τῷ E ἴσος, ἑκάτερος τῶν ΘN, ZΞ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ NK πρὸς τὸν E οὕτως ὁ ΞH πρὸς τοὺς M, Λ, ΘK, E. καὶ ἔστιν ὁ NK ἴσος τῷ E· καὶ ὁ ΞH ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς M, Λ, ΘK, E. ἔστι δὲ καὶ ὁ ZΞ τῷ E ἴσος, ὁ δὲ E τοῖς A, B, Γ, Δ καὶ τῇ μονάδι· ὅλος ἄρα ὁ ZH ἴσος ἐστὶ τοῖς τε E, ΘK, Λ, M καὶ τοῖς A, B, Γ, Δ καὶ τῇ μονάδι, καὶ μετροῦσιν αὐτὸν. λέγω ὅτι ὁ ZH οὐκ ἄλλος τις μετρηθήσεται παρὲξ τοὺς A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M καὶ τῆς μονάδος. εἰ γὰρ δυνατὸν μετρείτω τις τὸν ZH ὁ O, καὶ ὁ O μηδενὶ τῶν A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M ἔστω ὁ αὐτός. καὶ ὁσάκις ὁ O τὸν ZH μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Π· ὁ Π ἄρα τὸν O πολλαπλασιάσας τὸν ZH πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ E τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν ZH πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ E πρὸς τὸν Π οὕτως ὁ O πρὸς τὸν Δ. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ μονάδος ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν οἱ A, B, Γ, Δ, ὁ δὲ μετρῶν τὸν μονάδα ὁ A πρῶτός ἐστιν· ὁ Δ ἄρα οὐκ ἄλλος τις ἀριθμὸς μετρηθήσεται παρὲξ τοὺς A, B, Γ, καὶ ὑποκείσθω ὁ O μηδενὶ τῶν A, B, Γ ὁ αὐτός· οὐκ ἄρα μετρήσει ὁ O τὸν Δ. ἀλλ' ὡς ὁ O πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Π· οὐδὲ ὁ E ἄρα τὸν Π μετρεῖ. καὶ ἔστιν ὁ E πρῶτος, πᾶς δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν ὃν μὴ μετρεῖ πρῶτός ἐστιν· οἱ E, Π ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὅ, τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον, καὶ ἔστιν ὡς ὁ E πρὸς τὸν Π οὕτως ὁ O πρὸς τὸν Δ· ἰσάκις ἄρα ὁ E τὸν O μετρεῖ καὶ ὁ Π τὸν Δ. ὁ δὲ Δ οὐκ ἄλλος τις μετρεῖται παρὲξ τοὺς A, B, Γ· ὁ Π ἄρα ἑνὶ τῶν A, B, Γ ἐστιν ὁ αὐτός. ἔστω τῷ B ὁ αὐτός. καὶ ὅσοι εἰσὶν οἱ B, Γ, Δ τῷ πλήθει τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἀπὸ τοῦ E, οἱ E, ΘK, Λ, καί εἰσιν οἱ E, ΘK, Λ τοῖς B, Γ, Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ B πρὸς τὸν Δ οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Λ· ὁ ἄρα σὺν τοὺς B, Λ ἴσος ἐστὶ τῷ σὺν τοὺς Δ, E. ἀλλ' ὁ σὺν τοὺς Δ, E ἴσος ἐστὶ τῷ σὺν τῶν Π, O· καὶ ὁ σὺν τῶν Π, O ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ σὺν τοὺς B, Λ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Π πρὸς τὸν B οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν O. καὶ ἔστιν ὁ Π τῷ B ὁ αὐτός· καὶ ὁ Λ ἄρα τῷ O ἐστιν ὁ αὐτός, ὅπερ ἀδύνατον, ὁ γὰρ O ὑποκείσθω μηδενὶ τῶν σκιμμάτων ὁ αὐτός· οὐκ ἄρα τὸν ZH μετρεῖ τις ἀριθμὸς παρὲξ τῶν A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M καὶ τὴν μονάδος. καὶ ἐδείχθη ὁ ZH τοῖς A, B, Γ, Δ, E, ΘK, Λ, M, καὶ τῇ μονάδι ἴσος, τέλειος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος ὤν· τέλειος ἄρα ἐστὶν ὁ ZH. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΥΚΛΕΙ-

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER DECIMUS.

ΟΡΟΙ.

α'. Σύμμετρα μεγέθη λέγεται, τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα.

β'. Ἀσύμμετρα δέ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

γ'. Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροί εἰσιν, ὅταν τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα τῷ αὐτῷ χωρίῳ μετρῆται.

δ'. Ἀσύμμετροι δέ, ὅταν τοῖς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνοις μηδὲν ἐνδέχηται χωρίον κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

ε'. Τούτων ὑποκειμένων, δείκνυται ὅτι τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι πλήθει ἄπειροι σύμμετροί τε καὶ ἀσύμμετροι, αἱ μὲν μήκει καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει μόνον. καλείσθω δὴ ἡ μὲν προτεθεῖσα εὐθεῖα, ῥητή.

ς'. Καὶ αἱ ταύτῃ σύμμετροι, εἴτε μήκει καὶ δυνάμει εἴτε δυνάμει μόνον, ῥηταί.

ζ'. Αἱ δὲ ταύτῃ ἀσύμμετροι ἄλογοι καλείσθωσαν.

η'. Καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς προτεθείσης εὐθείας τετράγωνον, ῥητόν.

θ'. Καὶ τὰ τούτῳ σύμμετρα, ῥητά.

ι'. Τὰ δὲ τούτῳ ἀσύμμετρα, ἄλογα καλείσθω.

ια'. Καὶ αἱ δυνάμεναι αὐτά, ἄλογοι· εἰ μὲν τετράγωνα εἴη, αὐταὶ αἱ πλευραί·

DEFINITIONES.

1. Commensurabiles magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

2. Incommensurabiles autem, quarum nullam esse communem mensuram contingit.

3. Rectæ lineæ potentia commensurabiles sunt, cum ea quæ ab ipsis fiunt quadrata idem spatium metitur.

4. Incommensurabiles autem, cum quadrata quæ ab ipsis fiunt nullum commune spatium metiri contingit.

5. His positis ostenditur, cuicunque rectæ lineæ propositæ rectas lineas multitudine infinitas & commensurabiles esse & incommensurabiles, alias quidem longitudine & potentia, alias vero potentia solum. vocetur autem proposita recta linea, rationalis.

6. Et huic commensurabiles, sive longitudine & potentia sive potentia solum, rationales.

7. Incommensurabiles vero irrationales vocentur.

8. Et quadratum quod à recta linea proposita fit, dicatur rationale.

9. Et huic commensurabilia quidem, rationalia.

10. Incommensurabilia vero dicantur irrationalia.

11. Et lineæ, quæ incommensurabilia possunt, vocentur irrationales: si quidem ea quadrata sint, ipsorum latera;

tera; ſi vero alia quæpiam rectilinea, ipſæ à quibus æqualia quadrata deſcribuntur.

εἰ δὲ ἕτερά τινα εὐθύγραμμα, αἱ ἴσαι αὐτοῖς τετράγωνα ἀναγράφουσι.

PROP. I. THEOR.

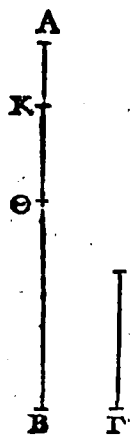
Duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis, ſi à majori auferatur majus quam dimidium, & ab eo quod reliquum eſt rurſus auferatur majus quam dimidium, & hoc ſemper fiat; relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minori magnitudine expoſita minor erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ἀεὶ γίγνηται· λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους.

SInt duæ magnitudines inæquales A B, Γ, quarum major A B: dico ſi ab ipſa A B auferatur majus quam dimidium, & ab eo quod reliquum eſt rurſus auferatur majus quam dimidium, atque hoc ſemper fiat; relinqui tandem magnitudinem quandam quæ magnitudine Γ minor erit.

Etenim Γ multiplicata fiet aliquando major magnitudine A B. multiplicetur, & ſit Δ E ipſius quidem Γ multiplex, major autem quam A B, dividaturque Δ E in partes ipſi Γ æquales Δ Z, Z H, H E, & ab ipſa A B auferatur majus quam dimidium B Θ, ab ipſa vero A Θ rurſus majus quam dimidium auferatur Θ K, atque hoc ſemper fiat quoad diviſiones quæ ſunt in A B multitudine æquales fiant diviſionibus quæ in Δ E: ſint igitur diviſiones A K, K Θ, Θ B diviſionibus Δ Z, Z H, H E multitudine æquales.



Et quoniam major eſt Δ E quam A B, & ablatum eſt ab ipſa quidem Δ E minus quam dimidium, ſc. E H, ab ipſa vero A B majus quam dimidium, ſc. B Θ; erit reliquum H Δ reliquo Θ A majus. rurſus, quoniam major eſt H Δ quam Θ A, & ablatum eſt ab ipſa quidem H Δ dimidium H Z, ab ipſa vero Θ A majus quam dimidium Θ K; reliquum Δ Z reliquo A K majus erit. eſtque Δ Z æqualis ipſi Γ: ergo Γ quam A K eſt major. minor igitur eſt A K quam Γ: ergo ex magnitudine A B relicta eſt magnitudo A K expoſita minori magnitudine Γ minor. quod erat demonſtrandum.

Similiter autem demonſtrabitur, etiam ſi dimidia ablata fuerint.

Ἔστω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ A B, Γ, ὧν μεῖζον τὸ A B· λέγω ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ A B ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος ὃ ἔστιν ἔλασσον τοῦ Γ μεγέθους.

Τὸ γὰρ Γ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ A B μεῖζον. πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ Δ E τοῦ μὲν Γ πολλαπλάσιον, τοῦ δὲ A B μεῖζον, καὶ διῃρήσθω τὸ Δ E εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ Δ Z, Z H, H E, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ μὲν τοῦ A B μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ B Θ, ἀπὸ δὲ τοῦ A Θ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ Θ K, καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω ἕως ἂν αἱ ἐν τῷ A B διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς γένωνται ταῖς ἐν τῷ Δ E διαιρέσεσιν· ἔστωσαν οὖν αἱ A K, K Θ, Θ B διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς οὖσαι τοῖς Δ Z, Z H, H E.

Καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ Δ E τοῦ A B, ᾧ ἀφῄρηται ἀπὸ μὲν τοῦ Δ E ἔλασσον ἢ ἥμισυ τὸ E H, ἀπὸ δὲ τοῦ A B μεῖζον τοῦ ἡμίσεος τὸ B Θ· λοιπὸν ἄρα τὸ H Δ λοιποῦ τοῦ Θ A μεῖζόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ H Δ τοῦ Θ A, καὶ ἀφῄρηται τοῦ μὲν H Δ ἥμισυ τὸ H Z, ἀπὸ δὲ τοῦ Θ A μεῖζον τοῦ ἡμίσεος τὸ Θ K· λοιπὸν ἄρα τὸ Δ Z λοιποῦ τοῦ A K μεῖζόν ἐστιν. ἴσον δὲ τὸ Δ Z τῷ Γ· καὶ τὸ Γ ἄρα τοῦ A K μεῖζόν ἐστιν. ἔλασσον ἄρα τὸ A K τοῦ Γ· καταλείπεται ἄρα ἀπὸ τοῦ A B μεγέθους τὸ A K μέγεθος ἔλασσον ὂν τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους τοῦ Γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ομοίως δὲ δειχθήσεται, κἂν ἡμίσεια ᾖ τὰ ἀφαιρέμενα.

ALITER.

Exponantur duæ magnitudines inæquales A B, Γ, ſitque Γ minor; & quoniam minor eſt Γ, multiplicata erit aliquando magnitudine A B major. fiat ut Z M, dividaturque in partes ipſi Γ æquales M Θ, Θ H, H Z; & ab ipſa A B auferatur majus quam dimidium B E, & ab E A majus quam dimidium E Δ; atque hoc ſemper fiat, quoad diviſiones quæ ſunt in A B numero æquales fiant diviſionibus quæ in Z M. fiant igitur ut B E, E Δ, Δ A, & ipſi Δ A una-

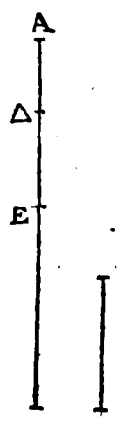
ΑΛΛΩΣ.

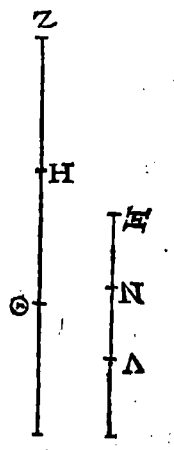
Ἐκκείσθω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ A B, Γ, ἔστω δὲ τὸ Γ ἔλασσον, καὶ ἐπεὶ ἔλασσόν ἐστι τὸ Γ, πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ A B μεῖζον. γεγονέτω ὡς τὸ Z M, καὶ διῃρήσθω εἰς τὰ ἴσα τῷ Γ τὰ M Θ, Θ H, H Z, καὶ ἀπὸ τοῦ A B ἀφῃρήσθω μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ B E, καὶ ἀπὸ τοῦ E A μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ E Δ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω ἕως αἱ ἐν τῷ A B διαιρέσεις ἴσαι γένωνται ταῖς ἐν τῷ Z M διαιρέσεσι. γεγονέτωσαν ὡς αἱ B E, E Δ, Δ A, καὶ τῷ Δ A ἔκα-

ςον

ςων τ̃ ΚΛ, ΛΝ, ΝΞ ἴσῳ ἴσον, καὶ τοῦτο πολλαπλασιάζω ἕως ἂν αἱ διαιρέσεις τῆς ΚΞ ἴσας γένωνται τοῖς τοῦ ΖΜ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ΒΕ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεος τοῦ ΑΒ, τὸ ΒΕ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΕΑ· πολλῷ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΔΑ. ἀλλὰ τῷ ΔΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ΞΝ· τὸ ΒΕ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΞΝ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ ΕΔ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισύ ἐστι τοῦ ΕΑ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ΔΑ. ἀλλὰ τῷ ΔΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ΝΛ· τὸ ΕΔ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΝΛ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΒ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΞΛ. ἀλλὰ καὶ τῷ ΔΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ΛΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΒ μεῖζόν ἐστιν ὅλου τοῦ ΞΚ. ἀλλὰ τοῦ ΒΑ μεῖζόν ἐστι τὸ ΜΖ· πολλῷ ἄρα τὸ ΜΖ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΞΚ. καὶ ἐπεὶ τοῦ ΞΝ, ΝΛ, ΛΚ ἴσοι ἀλλήλοις εἰσὶν, ἔστι δὲ καὶ τοῦ ΜΘ, ΘΗ, ΗΖ ἴσοι ἀλλήλοις, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ἐν τῷ ΜΖ τῷ πλήθει τῶν ἐν τῷ ΞΚ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΚΛ πρὸς τὸ ΖΗ οὕτως τὸ ΞΚ πρὸς τὸ ΖΜ. μεῖζον δὲ τὸ ΖΜ τοῦ ΞΚ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΖΗ τοῦ ΛΚ. καί ἐστι τὸ μὲν ΖΗ ἴσον τῷ Γ, τὸ δὲ ΚΛ τῷ ΑΔ· τὸ Γ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΑΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.





quæque ipſarum ΚΛ, ΛΝ, ΝΞ ſit æqualis, atque hoc fiat quoad diviſiones ipſius ΚΞ numero æquales ſint diviſionibus ipſius ΖΜ.

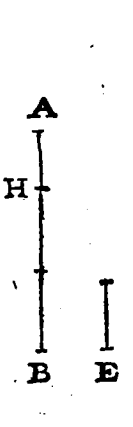
Et quoniam ΒΕ major eſt quam dimidium ipſius ΑΒ, erit ΒΕ major quam ΕΑ: multo igitur major eſt ΒΕ quam ΔΑ. ſed ipſi ΔΑ æqualis eſt ΞΝ: ergo ΒΕ major eſt quam ΞΝ. rurſus, quoniam ΕΔ major eſt quam dimidium ΕΑ, erit ΕΔ major quam ΔΑ. ſed ipſi ΔΑ eſt æqualis ΝΛ: quare ΕΔ quam ΝΛ eſt major: tota igitur ΔΒ major eſt quam ΞΛ. ipſi vero ΔΑ æqualis eſt ΛΚ: quare tota ΑΒ quam tota ΞΚ major erit. ſed ΜΖ major eſt quam ΒΑ: multo igitur ΜΖ quam ΞΚ eſt major. & quoniam ΞΝ, ΝΛ, ΛΚ inter ſe æquales ſunt; ſunt autem & ΜΘ, ΘΗ, ΗΖ inter ſe æquales, atque eſt multitudo earum quæ ſunt in ΜΖ æqualis multitudini ipſarum quæ in ΞΚ: erit [per 12. 5.] ut ΚΛ ad ΖΗ ita ΞΚ ad ΖΜ. major autem eſt ΖΜ quam ΞΚ: ergo [per 14. 5.] & ΖΗ quam ΛΚ eſt major. atque eſt ΖΗ ipſi Γ æqualis; & ΚΛ æqualis ipſi ΑΔ: ergo Γ quam ΑΔ major erit. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἐὰν δύο μεγεθῶν ἐκκειμένων ἀνίσων, ἀνθυφαιρούμενον ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγεθῶν ἐκκειμένων ἀνίσων τῶν ΑΒ, ΓΔ, καὶ ὄντος ἐλάσσονος τοῦ ΑΒ, ἀνθυφαιρούμενον ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρείτω τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· λέγω ὅτι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη.

Εἰ γὰρ ἔστι σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω εἰ δυνατὸν, καὶ ἔστω τὸ Ε, καὶ τὸ μὲν ΑΒ τὸ ΔΖ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΓΖ, τὸ δὲ ΓΖ τὸ ΒΗ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΑΗ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω, ἕως οὗ λειφθῇ τι μέγεθος, ὅ ἐστιν ἔλασσον τοῦ Ε. γεγονέτω, καὶ λελείφθω τὸ ΑΗ ἔλασσον τοῦ Ε. ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ ΑΒ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΔΖ μετρεῖ· καὶ τὸ Ε ἄρα τὸ ΔΖ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΖ μετρήσει. ἀλλὰ τὸ ΓΖ τὸ ΒΗ μετρεῖ· καὶ τὸ Β ἄρα τὸ ΒΗ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΗ μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη μετρήσῃ τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη.



PROP. II. THEOR.

Si duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis, detracta ſemper minore de majore, reliqua minime præcedentem metiatur; magnitudines incommenſurabiles erunt.

DUabus enim magnitudinibus inæqualibus expoſitis ΑΒ, ΓΔ, quarum minor ſit ΑΒ, & detracta ſemper minore de majore, reliqua minime metiatur præcedentem: dico magnitudines ΑΒ, ΓΔ incommenſurabiles eſſe.

Si enim commenſurabiles ſint, eas magnitudo quædam metietur. metiatur, ſi fieri poteſt; ſitque Ε; & ΑΒ quidem metiens ΔΖ relinquat ſeipſa minorem ΓΖ; ΓΖ vero metiens ΒΗ relinquat ſeipſa minorem ΑΗ; & hoc ſemper fiat quoad relinquatur quædam magnitudo quæ ſit minor ipſa Ε. itaque fiat, & relinquatur ΑΗ ipſa Ε minor. quoniam igitur Ε metitur ΑΒ, ΑΒ vero metitur ΔΖ; & Ε ipſam ΔΖ metitur. ſed & metitur totam ΓΔ: ergo & reliquam ΓΖ metietur. at ΓΖ metitur ΒΗ: quare & Β ipſam ΒΗ metitur. metitur autem & totam ΑΒ: & reliquam igitur ΑΗ metietur, major minorem, quod fieri non poteſt: non igitur magnitudines ΑΒ, ΓΔ aliqua magnitudo metietur: ergo ΑΒ, ΓΔ magnitudines incommenſurabiles erunt.

Si

Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, detracta semper minore de majore, reliqua minime præcedentem metiatur; magnitudines incommensurabiles erunt. quod erat demonstrandum.

Prop. III. Probl.

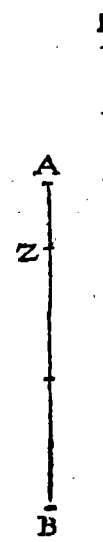
Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram invenire.

SInt datæ duæ magnitudines commensurabiles AB, ΓΔ, quarum minor AB: oportet ipsarum AB, ΓΔ maximam communem mensuram invenire.

Vel igitur AB metitur ΓΔ, vel non metitur. & si quidem AB metitur ΓΔ, metitur autem & seipsam; erit AB ipsarum AB, ΓΔ communis mensura. & perspicuum est maximam esse; magnitudo enim major magnitudine AB ipsam AB non metietur.

Si vero AB non metitur ΓΔ; detracta semper minore de majore, relinquetur tandem [per 2. 10.] quædam magnitudo quæ præcedentem metietur, propterea quod AB, ΓΔ non sint incommensurabiles; & AB quidem metiens ΓΔ relinquat seipsa minorem EΓ, EΓ vero metiens ZB relinquat seipsa minorem AZ; & AZ ipsam ΓE metiatur.

Quoniam igitur AZ metitur ΓE, sed ΓE metitur ZB: & AZ ipsam ZB metitur. metitur autem & seipsam: & totam igitur AB metietur. sed AB metitur ΔE: ergo AZ ipsam ΔE metitur. metitur autem & ΓE; & totam igitur ΓΔ metietur: ergo AZ ipsas AB, ΓΔ metitur: ac propterea AZ ipsarum AB, ΓΔ est communis mensura. dico & maximam esse. nisi enim ita sit, erit aliqua magnitudo major ipsa AZ quæ ipsas AB, ΓΔ metietur. itaque metiatur, & sit H. & quoniam H metitur AB, AB vero metitur EΔ; & H ipsam EΔ metitur. metitur autem & totam ΓΔ: ergo & reliquam ΓE metietur. sed ΓB metitur ZB: quare H ipsam ZB metitur. metitur autem & totam AB: & reliquam igitur AZ metietur, major minorem, quod fieri non potest: non igitur magnitudo quædam major ipsa AZ magnitudines AB, ΓΔ metietur: ergo AZ ipsarum AB, ΓΔ maxima erit communis mensura.



Duabus igitur magnitudinibus commensurabilibus datis AB, ΓΔ, maxima ipsarum communis mensura AZ inventa est. quod erat faciendum.

Corollarium.

Ex hoc manifestum est, si magnitudo duas magnitudines metiatur, & maximam ipsarum communem mensuram metiri.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγεθῶν ἐκκειμένων ἀνίσων, ἀνθυφαιρεμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Δύο μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Ἔστω τὰ δοθέντα δύο σύμμετρα μεγέθη τὰ AB, ΓΔ, ὧν ἔλασσον τὸ AB· δεῖ δὴ τῶν AB, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Τὸ AB δὴ ἤτοι μετρεῖ τὸ ΓΔ ἢ οὔ. εἰ μὲν οὖν τὸ AB τὸ ΓΔ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό· τὸ AB ἄρα κοινὸν μέτρον ἐστὶ τῶν AB, ΓΔ. καὶ φανερὸν ὅτι μέτρον ἐστὶ μέγιστον· μεῖζων γὰρ ὁ AB μεγέθους τὸ AB οὐ μετρήσει.

Μὴ μετρείτω δὴ τὸ AB τὸ ΓΔ· ἀνθυφαιρουμένου ἄρα τοῦ ἐλάσσονος ἀεὶ ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ καταλειπόμενον μετρήσει τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, ἕως τὸ μὴ εἶναι ἀσύμμετρα τὰ AB, ΓΔ, καὶ τὸ μὲν AB τὸ ΓΔ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ EΓ, τὸ δὲ EΓ τὸ ZB καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ AZ, τὸ δὲ AZ τὸ ΓE μετρείτω.

Ἐπεὶ οὖν τὸ AZ τὸ ΓE μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΓE τὸ ZB μετρεῖ· καὶ τὸ AZ ἄρα τὸ ZB μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό· καὶ ὅλον ἄρα τὸ AB μετρήσει τὸ AZ. ἀλλὰ τὸ AB τὸ ΔE μετρεῖ· καὶ τὸ AZ ἄρα τὸ ΔE μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΓE· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΓΔ μετρεῖ· τὸ AZ ἄρα τὰ AB, ΓΔ μετρεῖ· τὸ AZ ἄρα τῶν AB, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστί. λέγω δὴ ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή, ἔσται τι μέγεθος μεῖζον τοῦ AZ, ὃ μετρήσει τὰ AB, ΓΔ. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ H. ἐπεὶ οὖν τὸ H τὸ AB μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ AB τὸ EΔ μετρεῖ· καὶ τὸ H ἄρα τὸ EΔ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΓE μετρήσει τὸ H. ἀλλὰ τὸ ΓE τὸ ZB μετρεῖ· καὶ τὸ H ἄρα τὸ ZB μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ AB· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ AZ μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα μεῖζόν τι μέγεθος τοῦ AZ τὰ AB, ΓΔ μεγέθη μετρήσει· τὸ AZ ἄρα τῶν AB, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστί.

Δύο ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τῶν AB, ΓΔ, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὕρηται τὸ AZ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν μέγεθος δύο μεγέθη μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

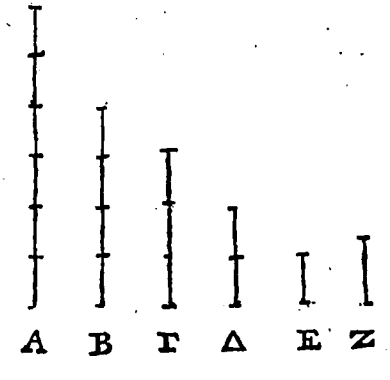
ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ'.

Τριῶν μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Ἔστω τὰ δοθέντα τρία μεγέθη σύμμετρα τὰ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν Α, Β τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Δ· τὸ δὴ Δ τὸ Γ ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ. μετρείτω πρότερον. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὸ Γ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ τὰ Α, Β· τὸ Δ ἄρα τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ· τὸ Δ ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινὸν μέτρον ἐστί. καὶ φανερὸν ὅτι καὶ μέγιστον, μεῖζον γὰρ τοῦ Δ μεγέθους τὰ Α, Β, Γ οὐ μετρήσει. εἰ γὰρ δυνατόν, μετρείτω τὰ Α, Β, Γ μεῖζον τοῦ Δ μεγέθους, τὸ Ε. καὶ ἐπεὶ τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τὰ Α, Β μετρήσει, καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει τὸ Δ, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον, ὅπερ ἀδυνάτον.

Μὴ μετρείτω δὴ τὸ Δ τὸ Γ. λέγω πρῶτον ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ Γ, Δ. ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β, Γ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος, ὃ δηλαδὴ καὶ τὰ Α, Β μετρήσει· ὥστε καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον τὸ Δ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· ὥστε τὸ εἰρημένον μέγεθος μετρήσει τὰ Γ, Δ· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ Γ, Δ. εἰλήφθω αὐτῶν τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Ε. ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ Δ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ Δ τὰ Α, Β μετρεῖ· καὶ τὸ Ε ἄρα τὰ Α, Β μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· τὸ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινόν μέτρον ἐστί. λέγω δὴ ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τι τοῦ Ε μεῖζον μέγεθος τὸ Ζ, καὶ μετρείτω τὰ Α, Β, Γ. καὶ ἐπεὶ τὸ Ζ τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τὰ Α, Β μετρήσει· καὶ τὸ τῶν Α, Β ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ δὲ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ Δ· τὸ Ζ ἄρα τὸ Δ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· τὸ Ζ ἄρα τὰ Γ, Δ μετρεῖ· καὶ τὸ τῶν Γ, Δ ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει τὸ Ζ. τὸ δὲ τῶν Γ, Δ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ Ε· τὸ Ζ ἄρα τὸ Ε μετρεῖ, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα μεῖζόν τι τοῦ Ε μέγεθος μέγεθος τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ· τὸ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστίν, ἐὰν μὴ μετρῇ τὸ Δ τὸ Γ· ἐὰν δὲ μετρῇ, αὐτὸ τὸ Δ.



Τριῶν ἄρα μεγεθῶν δοθέντων συμμέτρων, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὕρηται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν μέγεθος τρία με-

PROP. IV. PROBL.

Tribus magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam ipſarum communem menſuram invenire.

SInt datæ tres magnitudines commenſurabiles A, B, Γ: oportet ipſarum A, B, Γ maximam communem menſuram invenire.

Sumatur enim [per 3. 10.] duarum A, B maxima communis menſura quæ ſit Δ; itaque Δ ipſam Γ vel metitur, vel non metitur. metiatur primum. & quoniam Δ ipſam Γ metitur, metitur autem & A, B, & ipſas A, B, Γ metietur: quare Δ ipſarum A, B, Γ communis eſt menſura. & manifeſtum eſt maximam eſſe; magnitudo enim major magnitudine Δ ipſas A, B, Γ non metietur. nam ſi fieri poteſt, metiatur eas magnitudo major ipſa Δ, quæ ſit E. quoniam igitur E magnitudines A, B, Γ metitur, & ipſas A, B metietur, & [per coroll. 3. 10.] ipſarum A, B maximam communem menſuram Δ, major minorem, quod fieri non poteſt.

Sed non metiatur Δ ipſam Γ. dico primum Γ, Δ commenſurabiles eſſe. quoniam enim commenſurabiles ſunt A, B, Γ, metitur eas aliqua magnitudo, quæ ſcilicet & ipſas A, B metitur; ergo & ipſarum A, B maximam communem menſuram Δ. metitur autem & ipſam Γ: quare dicta magnitudo ipſas Γ, Δ metitur: ideoque [per 1. def. 1.] Γ, Δ commenſurabiles ſunt. ſumatur [per 3. 10.] ipſarum maxima communis menſura; & ſit E. quoniam igitur E metitur Δ, Δ vero metitur A, B, & E ipſas A, B metietur. metitur autem & Γ: ergo E ipſarum A, B, Γ communis eſt menſura. dico & maximam eſſe. ſi enim fieri poteſt, ſit aliqua magnitudo Z major ipſa E, quæ magnitudines A, B, Γ metiatur. & quoniam Z metitur A, B, Γ, & ipſas A, B metietur; & igitur [per coroll. 3. 10.] ipſarum A, B maximam communem menſuram metietur. ſed Δ eſt maxima communis menſura ipſarum A, B; ergo Z metitur Δ. metitur autem & Γ: quare Z ipſas Γ, Δ metitur; & igitur Z metitur ipſarum Γ, Δ maximam communem menſuram. ſed ipſarum Γ, Δ maxima communis menſura eſt E: ergo Z ipſam E metietur, major minorem, quod fieri non poteſt: non igitur magnitudo major ipſa E magnitudines A, B, Γ metietur: ergo E ipſarum A, B, Γ maxima erit communis menſura, ſi Δ ipſam Γ non metiatur; ſi vero metiatur, erit ipſa Δ.

Tribus igitur magnitudinibus commenſurabilibus datis, maxima ipſarum communis menſura inventa eſt. quod erat faciendum.

Corollarium.

Ex hoc perſpicue conſtat, ſi magnitudo tres

metiatur magnitudines, & ipſarum maximam communem menſuram metiri.

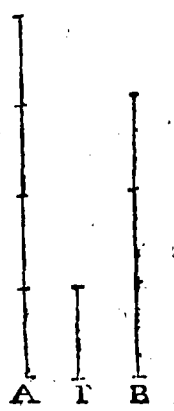
Similiter & in pluribus magnitudinibus maxime communis menſura invenietur, & corollarium procedet.

PROP. V. THEOR.

Commenſurabiles magnitudines inter ſe rationem habent, quam numerus ad numerum.

SInt commenſurabiles magnitudines A, B: dico magnitudinem A ad B rationem habere quam numerus ad numerum.

Quoniam enim A, B commenſurabiles ſunt, metietur ipſas aliqua magnitudo. metiatur, & ſit Γ. & quoties Γ ipſam A metitur tot unitates ſint in Δ; quoties autem Γ metitur B tot unitates ſint in E.



Quoniam igitur Γ ipſam A metitur per unitates quæ ſunt in Δ, metitur autem & unitas numerum Δ per unitates quæ in ipſo ſunt; unitas æqualiter metietur numerum Δ atque magnitudo Γ ipſam A: ergo ut Γ ad A ita eſt unitas ad Δ, & convertendo ut A ad Γ ita Δ ad unitatem. rurſus, quoniam Γ ipſam B metitur per unitates quæ ſunt in E, metiturque unitas numerum E per unitates quæ in ipſo ſunt; unitas numerum E æqualiter metietur atque Γ ipſam B: eſt igitur ut Γ ad B ita unitas ad E. oſtenſum autem eſt & ut A ad Γ ita eſſe Δ ad unitatem: quare ex æquo ut A ad B ita numerus Δ ad E numerum.

Commenſurabiles igitur magnitudines A, B inter ſe rationem habent quam Δ numerus ad numerum E. quod erat demonſtrandum.

PROP. VI. THEOR.

Si duæ magnitudines inter ſe rationem habeant quam numerus ad numerum, magnitudines erunt commenſurabiles.

DUÆ enim magnitudines A, B inter ſe rationem habeant quam Δ numerus ad numerum E: dico A, B magnitudines commenſurabiles eſſe.

Quot enim unitates ſunt in Δ, in tot partes æquales dividatur magnitudo A, & uni ipſarum æqualis ſit Γ: quot autem unitates ſunt in E, ex tot magnitudinibus æqualibus ipſi Γ componatur magnitudo Z.

Quoniam igitur quot ſunt in Δ unitates tot magnitudines ſunt in A ipſi Γ æquales; quæ pars eſt unitas ipſius Δ eadem pars erit & Γ ipſius A: ut igitur Γ ad A ita eſt unitas ad Δ. [metitur autem unitas ipſum Δ numerum: ergo

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Τὰ σύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

ΕΣτω σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β· λέγω ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Επεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Γ. καὶ ὁσάκις τὸ Γ τὸ Α μετρεῖ τοσαῦται μοναὶ ἔστωσαν ἐν τῷ Δ, ὁσάκις δὲ τὸ Γ τὸ Β μετρεῖ τοσαῦται μοναὶ ἔστωσαν ἐν τῷ Ε.

Επεὶ οὖν τὸ Γ τὸ Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Δ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸ Δ μετρεῖ καὶ τὸ Γ μέγεθος τὸ Α· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸ Δ· ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Γ τὸ Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸ Ε κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸ Ε μετρεῖ καὶ τὸ Γ τὸ Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Β οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸ Ε. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε.

Τὰ ἄρα σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει ὃν ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

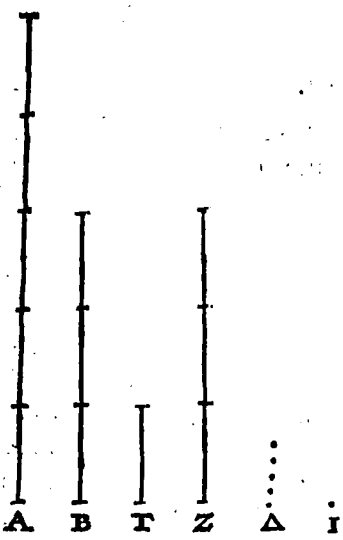
ΔΥΟ γὰρ μεγέθη πρὸς ἄλληλα τὰ Α, Β λόγον ἐχέτω ὃν ἀριθμὸς ὁ Δ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ε· λέγω ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β μεγέθη.

Οσαι γάρ εἰσιν ἐν τῷ Δ μονάδες εἰς τοσαῦται ἴσα διῃρήσθω τὸ Α, καὶ ἑνὶ αὐτῶν ἴσον ἔστω τὸ Γ· ὅσαι δέ εἰσιν ἐν τῷ Ε μονάδες, ἐκ τοσούτων μεγεθῶν ἴσων τῷ Γ συγκείσθω τὸ Ζ.

Επεὶ οὖν ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Δ μονάδες τοσαῦτά εἰσι καὶ ἐν τῷ Α μεγέθη ἴσα τῷ Γ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ μονὰς τὸ Δ τοῦτο μέρος ἐστὶ καὶ τὸ Γ τὸ Α· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ. [* μετρεῖ δὲ ἡ μονὰς τὸν Δ ἀριθμόν· μετρεῖ ἄρα καὶ

* Illa uncis inclusa desiderantur in utroque Cod. MS.

καὶ τὸ Γ τὸ Α. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμόν] ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὴν μονάδα. πάλιν, ἐπεὶ ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Ε μονάδες τοσαῦταί εἰσι καὶ ἐν τῷ Ζ μεγέθη ἴσα τῷ Γ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Ε ἀριθμόν. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Ζ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. ἀλλ᾽ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως τὸ Α πρὸς τὸ Β· καὶ ὡς ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως καὶ τὸ Α πρὸς τὸ Ζ· τὸ Α ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν Β, Ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Β τῷ Ζ. μετρεῖ δὲ τὸ Γ τὸ Ζ· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Β. ἀλλὰ μονὰς καὶ τὸ Α· τὸ Γ ἄρα τὰ Α, Β μετρεῖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.



& Γ ipſam A metietur. & quoniam eſt ut Γ ad A ita unitas ad Δ numerum:] erit igitur convertendo ut A ad Γ ita Δ numerus ad unitatem. rurſus, quoniam quot unitates ſunt in E tot ſunt & in Z magnitudines ipſi Γ æquales; ut Γ ad Z ita erit unitas ad E numerum. oſtenſum autem eſt & ut A ad Γ ita Δ eſſe ad unitatem: ergo ex æquo ut A ad Z ita Δ ad E. ſed ut Δ ad E ita A ad B: & igitur ut A ad B ita A ad Z. quod cum A ad utramque ipſarum B, Z eandem habeat rationem, erit [per 9. 5.] B ipſi Z æqualis. metitur autem Γ ipſam Z: ergo & ipſam B metietur. ſed & metitur A: quare Γ ipſas A, B metitur: commenſurabilis igitur eſt [per 1. def. 10.] A ipſi B.

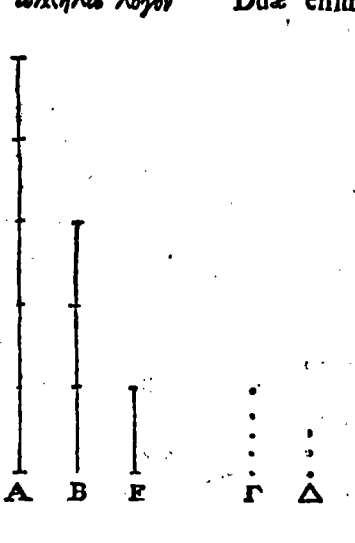
Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Quare ſi duæ magnitudines inter ſe rationem habeant quam numerus ad numerum, magnitudines erunt commenſurabiles. quod erat demonſtrandum.

ΑΛΛΩΣ.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω ὃν ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Δ· λέγω ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ μεγέθη.

Ὅσαι γὰρ εἰσὶν ἐν τῷ Γ μονάδες εἰς τοσαῦτα ἴσα διῃρήσθω τὸ Α, καὶ ἑνὶ αὐτῶν ἴσον ἔστω τὸ Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ ἀριθμὸν οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Α. ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ οὕτως τὸ Α πρὸς τὸ Β· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸν Β. μετρεῖ δὲ ἡ μονὰς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Ε τὸ Β. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Ε τὸ Α, ἐπεὶ καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ· τὸ Ε ἄρα ἑκάτερον τῶν Α, Β μετρεῖ· τὰ Α, Β ἄρα σύμμετρά ἐστι, καὶ ἔστιν αὐτῶν κοινὸν μέτρον τὸ Ε.



ALITER.

Duæ enim magnitudines A, B inter ſe rationem habeant quam numerus Γ ad numerum Δ: dico magnitudines commenſurabiles eſſe.

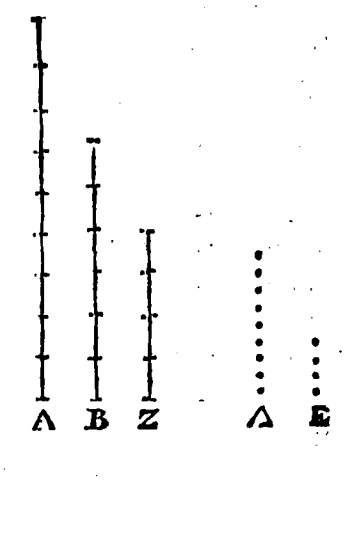
Quot enim unitates ſunt in Γ, in tot partes æquales dividatur A, & uni ipſarum æqualis ſit E: eſt igitur ut unitas ad Γ numerum ita E ad A. eſt autem & ut Γ ad Δ ita A ad B: ergo ex æquo ut unitas ad Δ numerum ita E ad B. ſed unitas metitur Δ: ergo & E ipſam B metitur. metitur autem & E ipſam A, quoniam & unitas metitur Γ: quare E utramque ipſarum A, B metietur; ideoque A, B commenſurabiles ſunt; atque eſt E communis ipſarum menſura.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοὶ ὡς οἱ Δ, Ε, καὶ εὐθεῖα ὡς ἡ Α, δυνατόν ἐστι ποιῆσαι ὡς τὸν Δ ἀριθμὸν πρὸς τὸν Ε ἀριθμὸν οὕτως τὴν εὐθεῖαν πρὸς εὐθεῖαν. ἐὰν δὲ καὶ τῶν Α, Ζ μέση ἀνάλογον ληφθῇ ὡς ἡ Β, ἔσται ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ζ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, τουτέστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ἀλλ᾽ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ζ οὕτως ἐστὶν ὁ Δ ἀριθμὸς

Corollarium.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi ſint duo numeri ut Δ, E & recta linea ut A, fieri poſſe, ut Δ numerus ad numerum E ita eſſe rectam lineam A ad aliam rectam lineam. ſi autem inter ipſas A, Z media proportionalis ſumatur ut B, erit [per cor. 20. 6.] ut A ad Z ita quod fit ex A ad id quod ex B, hoc eſt ut prima ad tertiam ita figura quæ fit à prima ad eam quæ à ſecunda ſimilem & ſimiliter deſcriptam. ſed ut A ad Z ita Δ numerus



ad numerum E: factum igitur est & ut Δ numerus ad numerum E ita quod fit ex recta linea A ad id quod ex recta linea B.

πρὸς τὸν Ε ἀριθμόν· γέγονεν ἄρα καὶ ὡς ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμὸν οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α εὐθείας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β εὐθείας.

Prop. VII. Theor.

Incommensurabiles magnitudines inter se rationem non habent quam numerus ad numerum.

Sint commensurabiles magnitudines A, B: dico A ad B rationem non habere quam numerus ad numerum.

Si enim A ad B rationem habet quam numerus ad numerum; commensurabilis erit [per 6. 10.] A ipsi B. atqui non est commensurabilis: non igitur A ad B rationem habet quam numerus ad numerum.

Quare incommensurabiles magnitudines inter se rationem non habent quam numerus ad numerum. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Ἔστω ἀσύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β· λέγω ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Εἰ γὰρ ἔχει τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρον ἔσται τὸ Α τῷ Β. οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Τὰ ἄρα ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

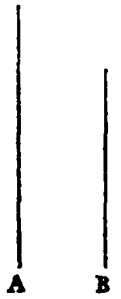
Prop. VIII. Theor.

Si duæ magnitudines inter se rationem non habeant quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt.

Duæ enim magnitudines A, B inter se rationem non habeant quam numerus ad numerum: dico magnitudines A, B incommensurabiles esse.

Si enim commensurabilis est A ipsi B, rationem habet [per 5. 10.] quam numerus ad numerum. atqui non habet: incommensurabiles igitur sunt A, B magnitudines.

Ergo si duæ magnitudines inter se rationem non habeant quam numerus ad numerum, incommensurabiles erunt. quod erat demonstrandum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχῃ ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἐχέτω ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· λέγω ὅτι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β μεγέθη.

Εἰ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Β, λόγον ἔχει ὃν πρὸς ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. οὐκ ἔχει δέ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ Α, Β μεγέθη.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχῃ ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, ἀσύμμετρα ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. IX. Theor.

Quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata inter se rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & quadrata inter se rationem habentia quam quadratus numerus ad quadratum numerum & latera habebunt longitudine commensurabilia: quadrata vero quæ à longitudine incommensurabilibus rectis lineis fiunt inter se rationem non habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & quadrata inter se rationem non habentia quam quadratus

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ αἱ πλευραὶ ἕξουσι μήκει σύμμετρος· τὰ δὲ ἀπὸ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει ὅπερ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχοντα ὅπερ τετράγωνος

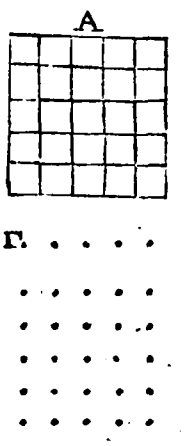
ἀριθμὸς

ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν οὐδὲ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους.

numerus ad quadratum numerum neque latera habebunt longitudine commenſurabilia.

Ἐστωσαν αἱ Α, Β μήκει σύμμετροι· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον λόγον ἔχει ὃν περ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει· ἡ Α ἄρα πρὸς τὴν Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Δ ἀριθμόν, ἀλλὰ μὴν τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγος διπλασίων ἐστὶν ὁ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον (τὰ γὰρ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν)· καὶ ὁ τοῦ Γ ἀριθμοῦ πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν λόγος διπλασίων ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ Δ τετράγωνον, δύο γὰρ τετραγώνων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς πλευράν· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ ἀριθμοῦ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ ἀριθμοῦ τετράγωνον ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

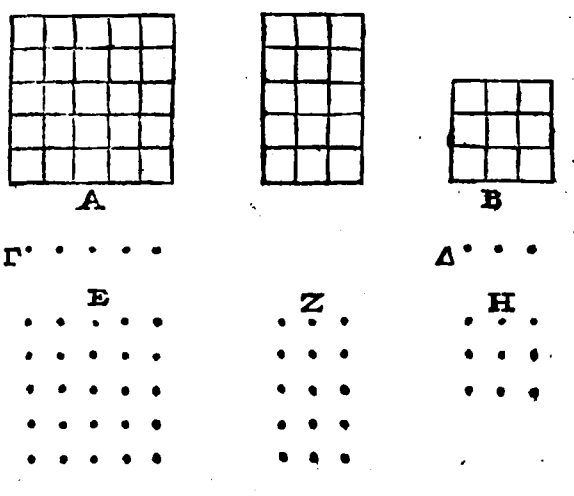


Sint rectæ lineæ A, B longitudine commenſurabiles: dico quadratum quod fit ex A ad quadratum quod ex B eam rationem habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Quoniam enim A ipſi B longitudine eſt commenſurabilis, habebit [per 5. 10.] A ad B rationem quam numerus ad numerum. habeat eam quam numerus Γ ad numerum Δ. quoniam igitur eſt ut A ad B ita Γ numerus ad numerum Δ, & rationis quidem quam habet A ad B duplicata eſt ratio quadrati quod fit ex A ad quadratum quod ex B, ſimiles enim figuræ [per 20. 6.] in duplicata ſunt ratione homologorum laterum; rationis vero quam habet numerus Γ ad numerum Δ duplicata eſt ratio quadrati ipſius Γ ad ipſius Δ quadratum, nam [per 11. 8.] inter duos numeros quadratos unus medius proportionalis eſt numerus; & quadratus ad quadratum duplicatam rationem habet ejus quam latus habet ad latus: erit ut quadratum quod fit ex A ad quadratum quod ex B ita quadratus numerus qui fit ex Γ numero ad quadratum numerum qui ex Δ. quod erat demonſtrandum.

ΑΛΛΩΣ. Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει, λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκε, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, τουτέστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὁμοίως τὸ ἀπὸ τῆς Α, Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὁμοίως τὸ ἀπὸ τῆς Α, Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκε, τὸν δὲ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, τουτέστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως τὸ ὁμοίως τὸ ἀπὸ τῆς Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὁμοίως τὸ ἀπὸ τῆς Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὁμοίως τὸ ἀπὸ τῆς Α, Β οὕτως ἦν ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· διὸ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ

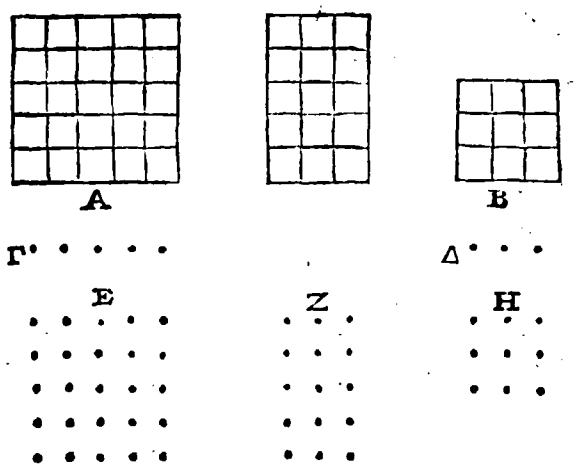
ALITER. Quoniam enim commenſurabilis eſt A ipſi B longitudine, [per 5. 10.] rationem habet quam numerus ad numerum. habeat quam Γ ad Δ, & Γ ſeipſum quidem multiplicans faciat E, multiplicans vero Δ faciat Z, & Δ ſeipſum multiplicans faciat H. itaque quoniam Γ ſeipſum quidem multiplicans fecit E, multiplicans vero Δ fecit Z; erit [per 17. 7.] ut Γ ad Δ, hoc eſt [per conſtr.] ut A ad B ita E ad Z. ſed [per 1. 6.] ut A ad B ita quadratum quod fit ex A ad rectangulum quod fit ſub A, B: eſt igitur ut quadratum quod ex A ad rectangulum ſub A, B ita E ad Z. rurſus, quoniam Δ ſeipſum multiplicans fecit H, multiplicans vero Γ ipſum Z fecit, ut Γ ad Δ, hoc eſt ut A ad B, ita erit [per 17. 7.] Z ad H. ut autem A ad B ita rectangulum quod fit ſub A, B ad quadratum quod fit ex B: ergo ut rectangulum ſub A, B ad quadratum quod ex B ita Z ad H. ſed ut quadratum quod fit ex A ad rectangulum ſub A, B, ita erat E ad Z: ex æquo igitur ut



quadratum ex A ad quadratum ex B ita E ad H. est autem uterque ipsorum E, H quadratus, & E quidem est à numero Γ, H vero ab ipso Δ: quadratum igitur quod fit ex A ad quadratum quod ex B rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum. quod erat demonstrandum.

SED sit ut quadratum quod fit ex A ad quadratum quod ex B ita quadratus numerus qui est à numero Γ ad quadratum numerum qui à numero Δ: dico A ipsi B longitudine commensurabilem esse. quoniam enim est ut quadratum quod fit ex A ad quadratum quod ex B ita quadratus numerus qui est à numero Γ ad quadratum numerum qui à numero Δ, sed [per 20. 6.] ratio quidem quadrati quod fit ex A ad quadratum quod ex B duplicata est rationis quam habet A ad B; ratio vero quadrati numeri qui est à numero Γ ad quadratum numerum qui à numero Δ [per 11. 8.] itidem duplicata est rationis quam habet Γ numerus ad numerum Δ: est igitur ut A ad B ita Γ ad Δ: ergo A ad B rationem habet quam numerus Γ ad Δ numerum: ac propterea [per 6. 10.] A ipsi B longitudine est commensurabilis. quod erat demonstrandum. ALITER. Sed quadratum quod fit ex A ad quadratum quod ex B rationem habeat quam quadratus numerus E ad quadratum numerum H: dico A ipsi B longitudine commensurabilem esse. Sit enim ipsius quidem E latus Γ, ipsius vero H latus Δ, & Γ ipsum Δ multiplicans faciat Z: ergo [per 17. 7.] E, Z, H deinceps proportionales sunt in ratione ipsius Γ ad Δ. & quoniam [per 1. 6.] inter quadrata quæ fiunt ex A, B medium proportionale est rectangulum sub A, B: inter numeros vero quadratos E, H [per 11. 8.] medius proportionalis est Z, erit ut quadratum quod fit ex A ad rectangulum sub A, B ita E ad Z. [* ut autem rectangulum sub A, B ad quadratum ex B ita Z ad H;] sed ut quadratum ex A ad rectangulum sub A, B ita A ad B: ergo A, B commensurabiles sunt; rationem enim habent quam numerus E ad numerum Z, hoc est quam Γ ad Δ, [ut enim Γ ad Δ ita E ad Z: nam Γ seipsum quidem multiplicans fecit E, multiplicans autem Δ ipsum Z fecit: est igitur [per 17. 7.] ut Γ ad Δ ita E ad Z. quod erat demonstrandum.]

SED incommensurabilis sit A ipsi B longitudine: dico quadratum ex A ad quadratum ex B rationem non habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Si enim quadratum ex A ad quadratum ex



τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β ὕτως ⟨ὡ⟩ ὁ Ε πρὸς τὸν Η. ἔστι δὲ ἑκάτερος τῶν Ε, Η τετράγωνος, ὁ μὲν γὰρ Ε ἀπὸ τοῦ Γ ἐστιν, ὁ δὲ Η ἀπὸ τοῦ Δ· τὸ ἀπὸ τῆς Α ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΛΛΑ δὴ ἔστω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον ὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ Δ τετράγωνον· λέγω ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον ὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ Δ τετράγωνον, ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον λόγος διπλασίων ἐστὶ τοῦ τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγου, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τοῦ Γ ἀριθμοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ ἀριθμοῦ τετράγωνον ἀριθμὸν λόγος διπλασίων ἐστὶ τοῦ τοῦ Γ ἀριθμοῦ πρὸς τὸν Δ ἀριθμοῦ λόγου· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β ὕτως ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Δ ἀριθμόν· ἡ Α ἄρα πρὸς τὴν Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Δ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Β μήκει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ΑΛΛΩΣ. Ἀλλὰ δὴ ἐχέτω τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Ε πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν τὸν Η· λέγω ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει. Ἐσω γὰρ ὁ μὲν Ε πλευρὰ ὁ Γ, τοῦ δὲ Η, ὁ Δ, καὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν Α, Β μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, τῶν δὲ Ε, Η ὁ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β ὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. [* ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β ὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η,] ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β ὕτως ἡ Α πρὸς τὴν Β· αἱ Α, Β ἄρα σύμμετροί εἰσι, λόγον γὰρ ἔχουσιν ὃν ἀριθμὸς ὁ Ε πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ζ, τουτέστιν ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. [† ὡς γὰρ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ ὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ὁ γὰρ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκε, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ ὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ.] ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΛΛΑ δὲ ἀσύμμετρος ἔστω ἡ Α τῇ Β μήκει· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Εἰ γὰρ ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ

* Desiderantur in *Codd. MSS.* † Illa uncis inclusa non agnoscunt *Codd. MSS.* Videntur glossemata, & commode abesse possunt.

ἀπὸ

ἀπὸ τ̃ Β τετράγωνον λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, σύμμετρος ἔσται ἡ Α τῇ Β μήκει. ἔστι δὲ· οὐκ ἄρα τὸ ἀπὸ τ̃ Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τ̃ Β τετράγωνον λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

ΠΑΛΙΝ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τ̃ Β τετράγωνον λόγον μὴ ἐχέτω ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· λέγω ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει. Εἰ γὰρ ἐστι σύμμετρος ἡ Α τῇ Β μήκει, ἕξει τὸ ἀπὸ τ̃ Α πρὸς τὸ ἀπὸ τ̃ Β λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει.

Τὰ ἄρα ἀπὸ τ̃ μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Καὶ φανερὸν ἔστω ἐκ τ̃ δεδειγμένων ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει σύμμετροι οὐ πάντως καὶ μήκει, καὶ αἱ μήκει ἀσύμμετροι οὐ πάντως καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει.

Εἴπερ γὰρ τὰ ἀπὸ τ̃ μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, τὰ δὲ λόγον ἔχοντα ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν σύμμετρά ἐστιν· ὥστε αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι οὐ μόνον εἰσὶ μήκει σύμμετροι ἀλλὰ καὶ δυνάμει.

Πάλιν, ἐπεὶ ὅσα τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν μήκει εὐθείᾳ σύμμετρα, καὶ δυνάμει ὅτα σύμμετρα, τῷ τὸ τετράγωνα λόγον ἔχειν ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ὅσα ἄρα τετράγωνα λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀλλ' ἁπλῶς ὃν ἕτερός τις ἀριθμὸς πρὸς ἕτερόν τινα ἀριθμόν, σύμμετρά ἐστι τὰ τετράγωνα, τυγχάνει αἱ εὐθεῖαι ἀφ' ὧν ἀναγράφηται δυνάμει, οὐκέτι δὲ καὶ μήκει· ὥστε αἱ μὴ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει, οὐ μὴ καὶ λόγον ἔχοιεν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ αἱ μήκει ἀσύμμετροι οὐ πάντως καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι. ἐπειδήπερ αἱ δυνάμει σύμμετροι δύνανται λόγον μὴ ἔχειν ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, καὶ διὰ τοῦτο

B rationem habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, [ex demonſtratis] commenſurabilis erit A ipſi B longitudine. non eſt autem: non igitur quadratum ex A ad quadratum ex B rationem habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

RURSUS quadratum ex A ad quadratum ex B rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum: dico A ipſi B longitudine incommenſurabilem eſſe. Si enim commenſurabilis ſit A ipſi B longitudine, habebit quadratum ex A ad quadratum ex B rationem quam quadratus numerus ad quadratum numerum. atqui non habet: non igitur A ipſi B longitudine eſt commenſurabilis.

Ergo quæ à rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata inter ſe rationem habent quam numerus quadratus ad quadratum numerum, & quæ ſequuntur. quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Et manifeſtum eſt ex jam demonſtratis, lineas quæ longitudine ſunt commenſurabiles omnino & potentia commenſurabiles eſſe; quæ vero potentia commenſurabiles non ſemper & longitudine; & quæ longitudine incommenſurabiles ſunt non ſemper & potentia incommenſurabiles; quæ vero potentia incommenſurabiles, omnino & longitudine incommenſurabiles eſſe.

Quoniam enim quadrata quæ fiunt à rectis lineis longitudine commenſurabilibus rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum; quæ vero rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum commenſurabilia ſunt: erunt rectæ lineæ longitudine commenſurabiles, non ſolum longitudine ſed & etiam potentia commenſurabiles.

Rurſus, quoniam quæcunque quadrata inter ſe rationem habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum latera habent longitudine commenſurabilia, ut oſtenſum eſt, quæ etiam latera potentia commenſurabilia ſunt, cum eorum quadrata rationem habeant quam numerus ad numerum: quæcunque igitur quadrata rationem non habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſed ſimpliciter quam aliquis alius numerus ad alium numerum, commenſurabilia ſunt, hoc eſt rectæ lineæ, à quibus ipſa deſcribuntur, commenſurabiles ſunt potentia, non autem & longitudine: ergo rectæ lineæ longitudine quidem commenſurabiles omnino & potentia commenſurabiles ſunt; potentia vero commenſurabiles non ſemper & longitudine, niſi earum quadrata rationem habeant quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Dico & longitudine incommenſurabiles non ſemper potentia incommenſurabiles eſſe. quoniam potentia commenſurabiles poſſunt rationem non habere quam numerus ad numerum,

ideoque

ideoque cum potentia commenſurabiles ſint, longitudine ſunt incommenſurabiles: ergo non quæ longitudine incommenſurabiles ſunt, omnino & potentia: ſed longitudine incommenſurabiles exiſtentes poſſunt potentia & incommenſurabiles & commenſurabiles eſſe.

Potentia vero incommenſurabiles omnino & longitudine incommenſurabiles ſunt: ſi enim longitudine ſint commenſurabiles, [ex hactenus oſtenſis] & potentia commenſurabiles erunt. atqui ponuntur incommenſurabiles, quod eſt abſurdum: potentia igitur incommenſurabiles omnino & longitudine incommenſurabiles erunt.

δυνάμει ἔσαι σύμμετροι μήκει εἰσὶν ἀσύμμετροι· ὥςε οὐκ αἱ μήκει ἀσύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, ἀλλὰ καὶ δυνάμει μήκει ἔσαι ἀσύμμετροι δυνάμει εἶναι καὶ ἀσύμμετροι καὶ σύμμετροι.

Αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι, πάντως καὶ μήκει ἀσύμμετροι· εἰ γὰρ εἰσὶ σύμμετροι, ἔσονται καὶ δυνάμει σύμμετροι. ὑπόκειται δὲ ℭ ἀσύμμετροι, ὅπερ ἄτοπον· αἱ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει.

*Prop. X. Theor.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero ſecundæ fuerit commenſurabilis; & tertia quartæ commenſurabilis erit. & ſi prima ſecundæ fuerit incommenſurabilis; & tertia quartæ incommenſurabilis erit.

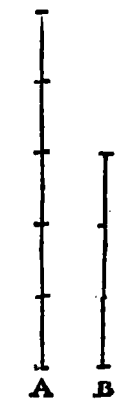
*ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ δὲ πρῶτον τῷ δευτέρῳ σύμμετρον ᾖ· καὶ τὸ τρίτον τῷ τετάρτῳ σύμμετρον ἔσαι. κἂν τὸ πρῶτον τῷ δευτέρῳ ἀσύμμετρον ᾖ· καὶ τὸ τρίτον τῷ τετάρτῳ ἀσύμμετρον ἔσαι.

SInt quatuor magnitudines proportionales, A, B, Γ, Δ; ſitque ut A ad B ita Γ ad Δ, & ſit A ipſi B commenſurabilis: dico & Γ ipſi Δ commenſurabilem eſſe.

Quoniam enim A commenſurabilis eſt ipſi B, habebit [per 5. 10.] A ad B rationem quam numerus ad numerum. atque eſt ut A ad B ita Γ ad Δ: ergo & Γ ad Δ rationem habet quam numerus ad numerum: commenſurabilis igitur [per 6. 10] eſt Γ ipſi Δ.

Sed A ipſi B ſit incommenſurabilis: dico & Γ ipſi Δ incommenſurabilem eſſe. quoniam enim incommenſurabilis eſt A ipſi B, non habebit [per 7. 10.] A ad B rationem quam numerus ad numerum. eſt autem ut A ad B ita Γ ad Δ: ergo neque Γ ad Δ rationem habet quam numerus ad numerum. ſi enim Γ ad Δ rationem habeat quam numerus ad numerum; & A ad B [per 11. 5.] eam quam numerus ad numerum rationem habebit: atque [per 6. 10.] erit A ipſi B commenſurabilis, quod eſt abſurdum; incommenſurabilis enim ponitur: ergo Γ ad Δ rationem non habet quam numerus ad numerum; ideoq; [per 8. 10.] Γ ipſi Δ eſt incommenſurabilis.

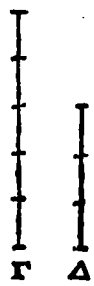


Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, & quæ ſequuntur. quod erat demonſtrandum.

Ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, τὸ δὲ Α τῷ Β σύμμετρον ἔςω· λέγω ὅτι καὶ τὸ Γ τῷ Δ σύμμετρόν ἐςιν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐςι τὸ Α τῷ Β, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. καὶ ἔςιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· σύμμετρον ἄρα ἐςὶ τὸ Γ τῷ Δ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ Α τῷ Β ἀσύμμετρον ἔςω· λέγω ὅτι καὶ τὸ Γ τῷ Δ ἀσύμμετρόν ἐςιν. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρόν ἐςι τὸ Α τῷ Β· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. καὶ ἔςιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· οὐδὲ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. εἰ γὰρ ἔχει λόγον ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔξει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, καὶ ἔσαι σύμμετρον τὸ Α τῷ Β, ὅπερ ἄτοπον, ὑπόκειται γὰρ ἀσύμμετρον· τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐςὶ τὸ Γ τῷ Δ.



Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

LEMMA.

Oſtenſum eſt in arithmeticis [ad 26. 8.] numeros planos ſimiles inter ſe rationem habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & ſi duo numeri inter ſe rationem habeant quam quadratus numerus ad quadratum numerum, eos ſimiles planos eſſe. & manifeſtum eſt ex his, diſſimiles planos numeros, hoc eſt non habentes latera inter ſe propor-

ΛΗΜΜΑ.

Δέδεικται ἐν τοῖς ἀριθμητικοῖς, ὅτι οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσὶν ἐπίπεδοι. καὶ δῆλον ἐκ τούτων, ὅτι οἱ μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ, τουτέςιν οἱ μὴ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευρὰς

* *Codd. MSS.* hanc undecimam, ſequentem vero decimam faciunt.

πολλαπλάσιος ἀεὶ ἀλλήλοις λόγον οὐκ ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. εἰ γὰρ ἔχουσιν, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οἱ ἄρα μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

tionalia) rationem non habere quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Si enim haberent, ſimiles plani eſſent, contra hypotheſin: ergo diſſimiles plani inter ſe rationem non habent quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ πρόσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.

Prop. XI. Probl.

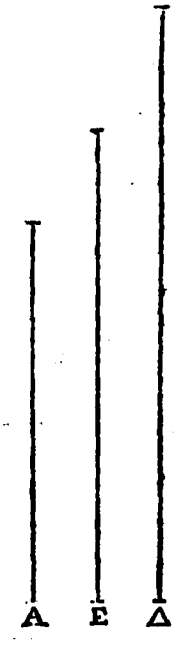
Propoſitæ rectæ lineæ invenire duas rectas lineas incommenſurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia.

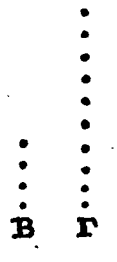
Ἔστω ἡ προτεθεῖσα εὐθεῖα ἡ Α· δεῖ δὴ τῇ Α πρόσθρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.

Ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ οἱ Β, Γ, πρὸς ἀλλήλους λόγον μὴ ἔχοντες ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, τουτέστι μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ τετράγωνον, ἐμάθομεν γάρ· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Δ. καὶ ἐπεὶ ὁ Β πρὸς τὸν Γ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Δ μήκει. εἰλήφθω τῶν Α, Δ μέση ἀνάλογον ἡ Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Δ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε. ἀσύμμετρος δέ ἐστιν ἡ Α τῇ Δ μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς Ε τετραγώνῳ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Ε δυνάμει· τῇ ἄρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ *τῇ ῥητῇ, ἀφ' ἧς ἐφάμεθα τὰ μήκει λαμβάνεσθαι, οἱονεὶ τῇ Α, δυνάμει μόνον σύμμετρος ἡ Δ, τουτέστι ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος, ἄλογος δὲ ἡ Ε. [† ἄλογοι γὰρ καθόλου καλοῦνται αἱ καὶ μήκει καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι τῇ ῥητῇ.] ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Sit propoſita recta linea Α: oportet ipſi Α invenire duas rectas incommenſurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia.

Exponantur enim duo numeri Β, Γ, inter ſe rationem non habentes quam quadratus numerus ad quadratum numerum, hoc eſt diſſimiles plani; & [per coroll. 6. 10.] fiat ut Β ad Γ ita quadratum ex Α ad quadratum ex Δ, hoc enim ante traditum eſt: ergo quadratum ex Α commenſurabile eſt quadrato ex Δ. & quoniam Β ad Γ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque quadratum ex Α ad quadratum ex Δ rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum: incommenſurabilis igitur [per 9. 10.] eſt Α ipſi Δ longitudine. ſumatur inter ipſas Α, Δ media proportionalis Ε: eſt igitur [per coroll. 2. 20. 6.] ut Α ad Δ ita quadratum ex Α ad quadratum ex Ε. ſed Α ipſi Δ longitudine eſt incommenſurabilis: ergo [per 10. 10.] & quadratum ex Α quadrato ex Ε incommenſurabile erit: incommenſurabilis igitur eſt Α ipſi Ε potentia: ergo propoſitæ rectæ lineæ rationali, à qua [in 3. def. 10.] dicebamus menſuras ſumi, nempe Α, potentia quidem commenſurabilis inventa eſt Δ, hoc eſt rationalis potentia tantum commenſurabilis, irrationalis vero Ε. [† irrationales enim univerſe appellantur quæ rationali & longitudine & potentia incommenſurabiles ſunt.] quod erat demonſtrandum.





ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Τὰ τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα.

Prop. XII. Theor.

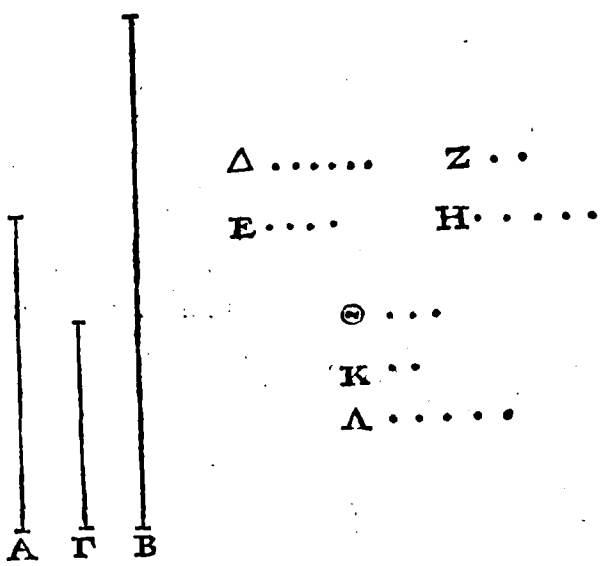
Quæ eidem magnitudini ſunt commenſurabiles & inter ſe commenſurabiles ſunt.

Ἑκάτερον γὰρ τῶν Α, Β τῷ Γ ἔστω σύμμετρον· λέγω ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἐστὶ σύμμετρον.

Utraque enim ipſarum Α, Β ipſi Γ ſit commenſurabilis: dico & Α ipſi Β commenſurabilem eſſe.

* Rectius in Codd. Mſſ. τῇ Α προτεθείσῃ δύο εὐθεῖαι ἀσύμμετροι, αἱ Δ, Ε, μήκει μόνον ἡ Δ, δυνάμει δὲ καὶ μήκει δηλαδὴ ἡ Ε.
† Videtur Scholion.

Quoniam enim A commenſurabilis eſt ipſi Γ, habebit [per 5. 10.] A ad Γ rationem quam numerus ad numerum. habeat quam numerus Δ ad ipſum E. Rurſus, quoniam commenſurabilis eſt B ipſi Γ, habebit Γ ad B rationem quam numerus ad numerum. habeat quam Z ad H. & rationibus datis quibuſcunque, videlicet quam habet Δ ad E & quam habet Z ad H, ſumantur numeri deinceps proportionales Θ, K, Λ in datis rationibus; ſitque ut Δ ad E ita Θ ad K, ut autem Z ad H ita K ad Λ.



Quoniam igitur eſt ut A ad Γ ita Δ ad E; ſed ut Δ ad E ita Θ ad K: erit & ut A ad Γ ita Θ ad K. rurſus, quoniam eſt ut Γ ad B ita Z ad H, ſed ut Z ad H ita K ad Λ; erit & ut Γ ad B ita K ad Λ. eſt autem & ut A ad Γ ita Θ ad K: ex æquo igitur [per 23. 5.] ut A ad B ita Θ ad Λ: ergo A ad B rationem habet quam numerus Θ ad Λ numerum: ac propterea [per 6. 10.] A ipſi B eſt commenſurabilis.

Quæ igitur eidem magnitudini ſunt commenſurabiles & inter ſe commenſurabiles ſunt. quod erat demonſtrandum.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Γ, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Γ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω ὃν ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ Β τῷ Γ, τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω ὃν ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, καὶ λόγων δοθέντων ὁποσωνοῦν, τοῦτο ὃν ἔχει ὁ Δ πρὸς τὸν Ε καὶ ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, συνήφθωσαν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις, οἱ Θ, Κ, Λ· ὥστε εἶναι ὡς μὲν ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως τὸν Θ πρὸς τὸν Κ, ὡς δὲ τὸν Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως τὸ Κ πρὸς τὸν Λ.

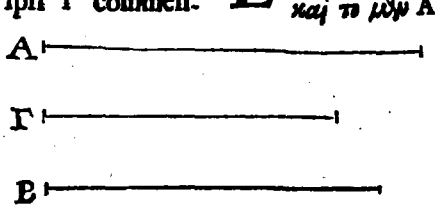
Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· ἐστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ἀλλ' ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Β οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Λ· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς ὁ Θ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Λ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Τὰ ἄρα τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XIII. Theor.

Si ſint duæ magnitudines, & altera quidem eidem ſit commenſurabilis, altera vero incommenſurabilis; magnitudines inter ſe incommenſurabiles erunt.

SInt enim duæ magnitudines A, B, alia autem ſit Γ, & A quidem ipſi Γ commenſurabilis ſit, B vero eidem incommenſurabilis: dico & A ipſi B incommenſurabilem eſſe.



Si enim commenſurabilis eſt A ipſi B, eſt autem & Γ commenſurabilis ipſi A; erit [per 12. 10.] & Γ ipſi B commenſurabilis quod eſt contra hypotheſin.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν ᾖ δύο μεγέθη, καὶ τὸ μὲν σύμμετρον ᾖ τῷ αὐτῷ, τὸ δὲ ἕτερον ἀσύμμετρον· ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Ἔστω γὰρ δύο μεγέθη τὰ Α, Β, ἄλλο δέ τι τὸ Γ, καὶ τὸ μὲν Α τῷ Γ σύμμετρον ἔστω, τὸ δὲ Β τῷ Γ ἀσύμμετρον· λέγω ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Εἰ γὰρ ἔστι σύμμετρον τὸ Α τῷ Β, ἔστι δὲ καὶ τὸ Γ τῷ Α· καὶ τὸ Γ ἄρα τῷ Β σύμμετρόν ἐστιν. ὅπερ οὐκ ὑπόκειται.

Prop. XIV. Theor.

Si duæ magnitudines commenſurabiles ſint, altera autem ipſarum alicui magnitudini ſit incommenſurabilis; &

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἐὰν ᾖ δύο μεγέθη σύμμετρα, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν μεγέθει τινὶ ἀσύμμετρον ᾖ· καὶ

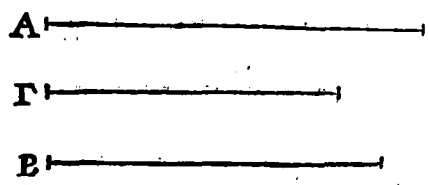
τὸ

τὸ λοιπὸν τῷ αὐτῷ ἀσύμμετρον ἔσται.

reliqua eidem incommenſurabilis erit.

Ἔστω δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ Α, Β, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν τὸ Α ἑτέρῳ τινὶ τῷ Γ ἀσύμμετρον ἔστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ λοιπὸν τὸ Β τῷ Γ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Εἰ γὰρ ἔστι σύμμετρον τὸ Β τῷ Γ, ἀλλὰ καὶ τὸ Α τῷ Β σύμμετρον· καὶ τὸ Α ἄρα τῷ Γ σύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ καὶ ἀσύμμετρον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα σύμμετρόν ἐστι τὸ Β τῷ Γ· ἀσύμμετρον ἄρα.



Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη σύμμετρα, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν μεγέθει τινὶ ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὸ λοιπὸν τῷ αὐτῷ ἀσύμμετρον ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SInt duæ magnitudines commenſurabiles A, B: altera vero ipſarum A alicui magnitudini Γ ſit incommenſurabilis: dico & reliquam B ipſi Γ incommenſurabilem eſſe.

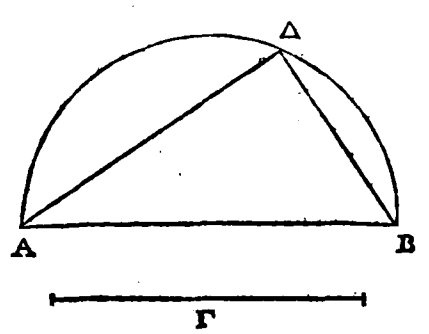
Si enim commenſurabilis eſt B ipſi Γ, eſt autem & A commenſurabilis ipſi B; & [per 12. 10.] A ipſi Γ commenſurabilis erit. ſed & incommenſurabilis, quod fieri non poteſt: non igitur commenſurabilis eſt B ipſi Γ: ergo eſt incommenſurabilis.

Si igitur duæ magnitudines commenſurabiles ſint, altera autem ipſarum alicui magnitudini ſit incommenſurabilis; & reliqua eidem incommenſurabilis erit. quod erat demonſtrandum.

ΛΗΜΜΑ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, εὑρεῖν τίνι μεῖζον δύναται ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος.

Ἐκκείσθωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο ἄνισοι εὐθεῖαι, αἱ ΑΒ, Γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ εὑρεῖν τίνι μεῖζον δύναται ἡ ΑΒ τῆς Γ.



Γεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον, τὸ ΑΔΒ, καὶ εἰς αὐτὸ ἐνηρμόσθω τῇ Γ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ. Φανερὸν δή ὅτι ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ γωνία, καὶ ὅτι ἡ ΑΒ τῆς ΑΔ, τουτέστι τῆς Γ, μεῖζον δύναται τῇ ΔΒ.

Sit datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB, Γ, quarum major ſit AB: oportet invenire id quo AB plus poteſt quam Γ.

Deſcribatur ſuper rectam lineam AB ſemicirculus AΔB, & [per 1.4.] in eo aptetur recta linea AΔ ipſi Γ æqualis, & ΔB jungatur. perſpicuum eſt [per 31.3.] angulum AΔB rectum eſſe & ipſam AB [per 47.1.] plus poſſe quam AΔ, hoc eſt quam Γ, quantum eſt rectæ lineæ ΔB quadratum.

ΟΜΟΙΩΣ δὲ καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, ἡ δυναμένη αὐτὰς εὑρεθήσεται ἕτως.

SIMILITER autem & datis duabus rectis lineis, quæ ipſas poteſt hoc modo invenietur.

Ἐκκείσθωσαν αἱ δύο δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ· καὶ δέον ἔστω εὑρεῖν τὰς τὰ δυναμένην αὐτάς. ἐκκείσθωσαν γὰρ, ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν ὑπὸ ΑΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ· φανερὸν πάλιν, ὅτι ἡ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυναμένη ἐστὶν ἡ ΑΒ.

Sint duæ datæ rectæ lineæ AΔ, ΔB, & oporteat invenire rectam lineam quæ ipſas poſſit. exponantur enim ita ut rectum angulum AΔB contineant, & AB jungatur: patet rurſus [per 47. 7.] rectam lineam AB ipſas AΔ, ΔB poſſe.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, δυνήσεται δὲ ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μεῖζον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἐὰν ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μεῖζον δύηται, τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

PROP. XV. THEOR.

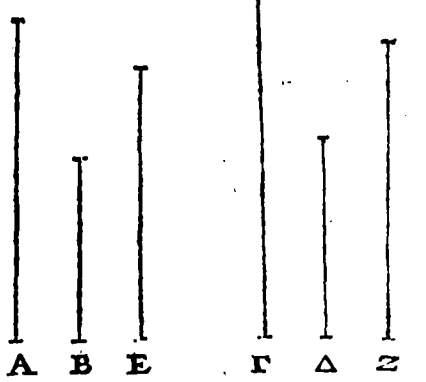
Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima vero tanto plus poſſit quam ſecunda quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine; & tertia tanto plus poterit quam quarta quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. quod ſi prima tanto plus poſſit quam ſecunda quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine; & tertia quam quarta tanto plus poterit quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

Ἔστωσαν δὴ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β ἕτως ἡ Γ πρὸς τὴν

SInt quatuor rectæ lineæ proportionales A, B, Γ, Δ, ſitque ut A ad B ita Γ ad Δ;

& A quidem plus poſſit quam B quadrato quod fit ex E; Γ vero plus poſſit quam Δ quadrato ex Z: dico ſi A ipſi B ſit commenſurabilis, & Γ ipſi Z commenſurabilem eſſe; ſi vero A ipſi E ſit incommenſurabilis, & Γ ipſi Z incommenſurabilem eſſe.

Quoniam enim eſt ut A ad B ita Γ ad Δ, erit [per 1. cor. 22. 6.] ut quadratum ex A ad quadratum ex B ita quadratum ex Γ ad id quod ex Δ fit quadratum. ſed quadrato quidem quod fit ex A æqualia ſunt [ex hyp.] quadrata quæ ex ipſis E, B; quadrato autem ex Γ æqualia ſunt quadrata ex Z, Δ: igitur ut quadrata quæ fiunt ex E, B ad quadratum ex B ita quadrata quæ fiunt ex Z, Δ ad quadratum ex Δ: & dividendo [per 17. 5.] ut quadratum ex E ad quadratum ex B ita quadratum ex Z ad quadratum ex Δ: quare [per 22. 6.] ut E ad B ita eſt Z ad Δ, & [per 4. 5.] convertendo ut B ad E ita Δ ad Z. eſt autem & ut A ad B ita Γ ad Δ: ex æquo igitur [per 22. 5.] ut A ad E ita eſt Γ ad Z: ergo [per 10. 10.] ſi A eſt commenſurabilis ipſi E, & Γ ipſi Z erit commenſurabilis; ſi vero incommenſurabilis eſt A ipſi E, & Γ ipſi Z incommenſurabilis erit.

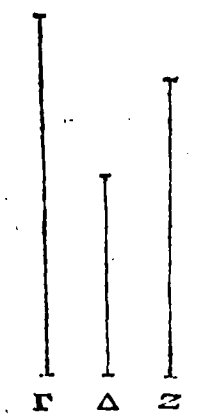


Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales ſint, & quæ ſequuntur. quod erat demonſtrandum.

Δ, καὶ ἡ Α μὴν τοῦ Β μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς Ε, ἡ δὲ Γ τῆς Δ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς Ζ· λέγω ὅτι ἐπὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε σύμμετρος ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ, ἐπὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν Ε, Β, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Γ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν Ζ, Δ· ἔστιν ἄρα ὡς τὰ ἀπὸ τῶν Ε, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν Ζ, Δ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ Ε πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Ζ πρὸς τὴν Δ· ἀναπαλιν ἄρα ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Ε οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ε οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Ζ· ἐπὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ, ἐπὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

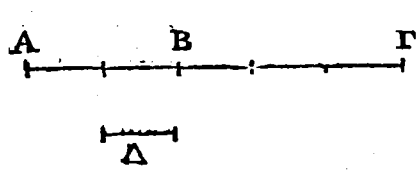


Prop. XVI. Probl.

Si duæ magnitudines commenſurabiles componantur; & tota magnitudo utrique ipſarum commenſurabilis erit. quod ſi tota magnitudo uni ipſarum ſit commenſurabilis; & quæ à principio magnitudines commenſurabiles erunt.

COmponantur enim duæ magnitudines commenſurabiles AB, BΓ: dico & totam magnitudinem AΓ utrique ipſarum AB, BΓ commenſurabilem eſſe.

Quoniam enim commenſurabiles ſunt AB, BΓ, [per 1. def. 10.] metietur eas aliqua magnitudo. metiatur, ſitque Δ. & quoniam Δ metitur ipſas AB, BΓ, & totam AΓ metietur. metitur autem & AB, BΓ: ergo Δ magnitudines AB, BΓ & ipſam AΓ metitur: commenſurabilis igitur eſt AΓ utrique ipſarum AB, BΓ.



Sed AΓ uni ipſarum AB, BΓ ſit commenſurabilis, videlicet ipſi AB: dico & AB, BΓ commenſurabiles eſſe.

Quoniam enim commenſurabiles ſunt AΓ, AB, metietur eas aliqua magnitudo. metiatur, & ſit

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις'.

Ἐὰν δύο μεγέθη σύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν σύμμετρον ἔσται. καὶ ἐὰν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν σύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη σύμμετρα ἔσται.

Συγκείσθω γὰρ δύο μεγέθη σύμμετρα, τὰ ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ ὅλον τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ ΑΒ, ΒΓ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ, καὶ ὅλον τὸ ΑΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ καὶ τὸ ΑΓ μετρεῖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΓ ἑνὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἔστω σύμμετρον, ἔστω δὴ τῷ ΑΒ· λέγω δὴ ὅτι καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ σύμμετρά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ ΑΓ, ΑΒ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Δ.

ἐπεὶ

ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰς ΑΓ, ΑΒ μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα τὰς ΑΒ, ΒΓ μετρήσει· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη σύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν σύμμετρον ἔσται· καὶ τὰ ἐξ ἧς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Δ. itaque quoniam Δ metitur ipſas ΑΓ, ΑΒ, & reliquam ΒΓ metietur. metitur autem & ΑΒ: ergo Δ ipſas ΑΒ, ΒΓ metietur: ac propterea ΑΒ, ΒΓ commenſurabiles ſunt.

Si igitur duæ magnitudines commenſurabiles componantur, & tota magnitudo utrique ipſarum commenſurabilis erit, & quæ ſequuntur. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

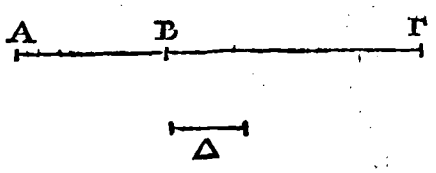
Ἐὰν δύο μεγέθη ἀσύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν ἀσύμμετρον ἔσται. κἂν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται.

PROP. XVII. THEOR.

Si duæ magnitudines incommenſurabiles componantur; & tota magnitudo utrique ipſarum incommenſurabilis erit. quod ſi tota magnitudo uni ipſarum ſit incommenſurabilis; & quæ à principio magnitudines incommenſurabiles erunt.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μεγέθη ἀσύμμετρα, τὰ ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ ὅλον τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ἀσύμμετρα τὰ ΓΑ, ΑΒ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω, εἰ δυνατόν, τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΒΑ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ. ὑπέκειντο δὲ καὶ ἀσύμμετρα, ὅπερ ἀδύνατον ἐστιν· οὐκ ἄρα τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΑ, ΑΒ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τὰ ΑΓ, ΓΒ ἀσύμμετρά ἐστιν· τὸ ΑΓ ἄρα ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρόν ἐστιν.



Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΓ ἑνὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρον ἔστω, καὶ πρῶτον τῷ ΑΒ· λέγω ὅτι καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρά ἐστιν. εἰ γὰρ ἐστὶ σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ, καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΑ, ΑΒ. ὑπέκειντο δὲ καὶ ἀσύμμετρα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν * ὅτι εἰ τὸ ΑΓ τῷ ΓΒ ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρα ἔσται.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη ἀσύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὰ ἐξ ἧς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Comonantur enim duæ magnitudines incommenſurabiles ΑΒ, ΒΓ: dico & totam magnitudinem ΑΓ utrique ipſarum ΑΒ, ΒΓ incommenſurabilem eſſe.

Si enim non ſunt incommenſurabiles ΓΑ, ΑΒ, metietur eas aliqua magnitudo. metiatur, ſitq; Δ, ſi fieri poteſt. quoniam igitur Δ metitur ipſas ΓΑ, ΑΒ, & reliquam ΒΓ metietur. metitur autem & ΒΑ: ergo Δ ipſas ΑΒ, ΒΓ metitur; ac propterea [per 1. def. 10.] commenſurabiles ſunt ΑΒ, ΒΓ. ponuntur autem & incommenſurabiles, quod fieri non poteſt: non igitur ipſas ΓΑ, ΑΒ metietur aliqua magnitudo: quare ΓΑ, ΑΒ incommenſurabiles ſunt. ſimiliter & ΑΓ, ΓΒ incommenſurabiles eſſe demonſtrabimus: ergo ΑΓ utrique ipſarum ΑΒ, ΒΓ eſt incommenſurabilis.

Sed ΑΓ uni ipſarum ΑΒ, ΒΓ incommenſurabilis ſit; & primum ipſi ΑΒ: dico & ΑΒ, ΒΓ incommenſurabiles eſſe. ſi enim ſunt commenſurabiles, [per 1. def. 10.] eas aliqua magnitudo metietur. metiatur, & ſit Δ. quoniam igitur Δ metitur ipſas ΑΒ, ΒΓ, & totam ΑΓ metietur. metitur autem & ΑΒ: ergo Δ ipſas ΓΑ, ΑΒ metitur: ideoque ΓΑ, ΑΒ commenſurabiles ſunt. ponuntur autem & incommenſurabiles, quod fieri non poteſt: non igitur ipſas ΑΒ, ΒΓ metietur aliqua magnitudo: quare ΑΒ, ΒΓ incommenſurabiles erunt. ſimiliter demonſtrabimus, ſi ΑΓ incommenſurabilis ſit ipſi ΓΒ, etiam ΑΒ, ΒΓ incommenſurabiles eſſe.

Si igitur duæ magnitudines incommenſurabiles componantur, & quæ ſequuntur. quod erat demonſtrandum.

ΛΗΜΜΑ.

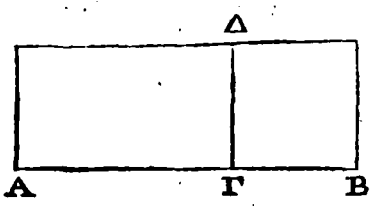
Ἐὰν παρά τινα εὐθεῖαν παραβληθῇ παραλληλόγραμμον, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ· τὸ παραβληθὲν ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ἀπὸ τῆς παραβολῆς γενομένων τμημάτων τῆς εὐθείας.

LEMMA.

Si ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum, deficiens figura quadrata; parallelogrammum applicatum æquale eſt ei rectangulo, quod ſub partibus rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

* Ita reſtituimus ex Codd. MSS. antea in Elzivir erat ὅτι τὸ ΑΓ τῇ λοιπῇ τῇ ΒΓ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Ad aliquam enim rectam AB applicetur AΔ parallelogrammum, deficiens figura quadrata ΔB: dico parallelogrammum AΔ rectangulo ſub AΓ, ΓB æquale eſſe.



Atque hoc per ſe patet: quoniam enim quadratum eſt ΔB, erit ΔΓ ipſi ΓB æqualis; atq; AΔ eſt parallelogrammum quod ſub AΓ, ΓB continetur.

Si igitur ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum, & quæ ſequuntur. quod erat demonſtrandum.

Παρὰ γὰρ τινα εὐθεῖαν τὴν AB παραβεβλήσθω τὸ AΔ παραλληλόγραμμον, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τῷ ΔB· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ AΔ τῷ ὑπὸ τῶν AΓ, ΓB.

Καὶ ἔστιν αὐτόθεν φανερόν· ἐπεὶ γὰρ τετράγωνόν ἐστι τὸ ΔB, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓB, καὶ ἔστι τὸ AΔ τὸ ὑπὸ τῶν AΓ, ΓB.

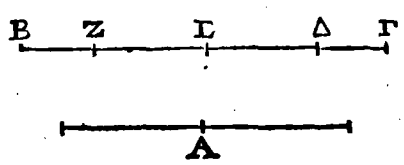
Ἐὰν ἄρα παρά τινα εὐθεῖαν παραβληθῇ παραλληλόγραμμον, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XVIII. Theor.

Si ſint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati quod fit à minori æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commenſurabiles ipſam dividat; major tanto plus poterit quam minor quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. quod ſi major tanto plus poſſit quam minor quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, quartæ autem parti quadrati quod fit à minori æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figura quadrata; in partes longitudine commenſurabiles ipſam dividet.

SInt duæ rectæ lineæ inæquales A, BΓ, quarum major BΓ, quartæ autem parti quadrati quod fit à minori A (hoc eſt ei quod fit à dimidia ipſius A) æquale parallelogrammum ad BΓ applicetur deficiens figura quadrata, & ſit quod continetur ſub BΔ, ΔΓ, ſitque BΔ ipſi ΔΓ commenſurabilis longitudine: dico BΓ plus poſſe quam A quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis.

Secetur enim BΓ bifariam in puncto E, & ipſi ΔE æqualis ponatur BZ: reliqua igitur ΔΓ eſt æqualis BZ. & quoniam recta linea BΓ ſecatur in partes quidem æquales ad E punctum, in partes vero inæquales ad punctum Δ; erit [per 5. 2.] rectangulum ſub BΔ, ΔΓ una cum quadrato ex EΔ æquale quadrato ex EΓ; & eorum quadrupla: quod igitur quater ſub BΔ, ΔΓ continetur una cum quadrato quod quater fit ex EΔ æquale eſt quadrato quod quater fit ex EΓ. ſed ei quidem quod quater ſub BΔ, ΔΓ continetur æquale eſt [ex hyp.] quadratum ex A, ei vero quod quater fit ex ΔE æquale eſt quadratum ex ΔZ; etenim ΔZ ipſius ΔE eſt dupla; & ei quod quater fit ex EΓ æquale eſt quadratum ex BΓ; rurſus enim BΓ dupla eſt ipſius EΓ: ergo quadrata quæ fiunt ex A, ΔZ æqualia ſunt ei quod fit ex BΓ quadrato: ac propterea quadratum quod fit ex BΓ



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιή.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκη· ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ· εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ μήκη.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ A, BΓ, ὧν μείζων ἡ BΓ, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς A, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς A, ἴσον παραβεβλήσθω παρὰ τὴν BΓ παραλληλόγραμμον παραβληθὲν ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν BΔ, ΔΓ, σύμμετρος δὲ ἔστω ἡ BΔ τῇ ΔΓ μήκει· λέγω ὅτι ἡ BΓ τῆς A μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Τετμήσθω γὰρ ἡ BΓ δίχα κατὰ τὸ E σημεῖον, καὶ κείσθω τῷ ΔE ἴση ἡ EZ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΓ ἴση ἐστὶ τῇ BZ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ BΓ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ E, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς EΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EΓ τετραγώνῳ, καὶ τὰ τετραπλάσια· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν BΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετράκις ἀπὸ τῆς EΔ ἴσον ἐστὶ τῷ τετράκις ἀπὸ τῆς EΓ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τῷ μὲν τετράκις ὑπὸ τῶν BΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς A τετραγώνου, τῷ δὲ τετράκις ἀπὸ τῆς ΔE ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔZ τετραγώνου, διπλασίων γάρ ἐστι ΔZ τῆς ΔE· τῷ δὲ τετράκις ἀπὸ τῆς EΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BΓ τετραγώνου, διπλασίων γάρ ἐστι πάλιν ἡ BΓ τῆς EΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν A, ΔZ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς BΓ τετραγώνῳ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς BΓ

τοῦ

τῷ ἀπὸ τῆς Α μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ· ἡ ΒΓ ἄρα τὴν Α μεῖζον δύναται τῇ ΔΖ. δεικτέον ὅτι καὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΔΖ. ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει, σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΔΓ μήκει. ἀλλὰ ἡ ΔΓ τῇς ΓΔ, ΒΖ ἐστὶ σύμμετρος μήκει, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΒΖ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα τῇς ΒΖ, ΓΔ ἐστὶ σύμμετρος μήκει· ὥστε καὶ λοιπὴ τῇ ΖΔ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΒ μήκει· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

ΑΛΛΑ δὴ ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ. δεικτέον ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. δυνάσθω ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ συναμφοτέρῳ τῇ ΒΖ, ΔΓ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει. ἀλλὰ συναμφοτέρος ἡ ΒΖ, ΔΓ τῇ ΔΓ σύμμετρός ἐστι μήκει, ἴση γάρ ἐστὶ ἡ ΒΖ τῇ ΔΓ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ΔΓ· δηλονότι ἄρα ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ ἐστὶ σύμμετρος μήκει.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

majus est quam quadratum quod ex Α quadrato ex ΔΖ: recta igitur linea ΒΓ tanto plus potest quam Α quantum est ipsius ΔΖ quadratum. ostendendum est & ΒΓ ipsi ΔΖ commensurabilem esse. quoniam enim [ex hyp.] ΒΔ commensurabilis est ipsi ΔΓ longitudine, erit [per 16. 10.] & ΒΓ ipsi ΔΓ longitudine commensurabilis. sed [per 6.10.] ΔΓ ipsis ΓΔ, ΒΖ est commensurabilis longitudine, æqualis enim est ΓΔ ipsi ΒΖ: quare & ΒΓ ipsis ΒΖ, ΓΔ longitudine est commensurabilis: & reliquæ igitur ΖΔ [per 16. 10.] longitudine commensurabilis erit: ergo ΒΓ plus potest quam Α quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

Sed ΒΓ plus possit quam Α quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati quod fit ex Α æquale parallelogrammum ad ΒΓ applicetur deficiens figura quadrata; & sit quod continetur sub ΒΔ, ΔΓ. ostendendum est ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine commensurabilem esse.

Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus ΒΓ plus posse quam Α quadrato rectæ lineæ ΖΔ. sed [ex hyp.] ΒΓ plus potest quam Α quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis: ergo ΒΓ commensurabilis est ipsi ΖΔ longitudine; & reliquæ igitur, utrique scilicet ΒΖ, ΔΓ, [per 16. 10.] longitudine est commensurabilis. sed utraque ΒΖ, ΔΓ ipsi ΔΓ commensurabilis est longitudine, etenim ΒΖ est æqualis ΔΓ; ergo & ΒΓ ipsi ΔΓ longitudine est commensurabilis: constat igitur [per 16.10.] ΒΔ ipsi ΔΓ longitudine commensurabilem esse.

Si igitur duæ rectæ lineæ inæquales sint, quartæ autem parti quadrati quod fit à minori æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, & quæ sequuntur. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκει· ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ· εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ μήκει.

PROP. XIX. THEOR.

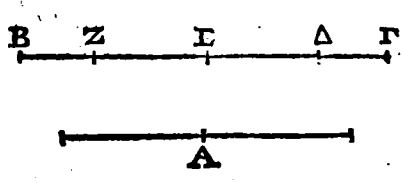
Si sint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati quod fit à minori æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine ipsam dividat; major tanto plus poterit quam minor quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. quod si major tanto plus possit quam minor quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati quod fit à minori æquale parallelogrammum ad majorem applicetur deficiens figura quadrata; in partes longitudine incommensurabiles ipsam dividet.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ Α, ΒΓ, ὧν μείζων ἡ ΒΓ, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ,

Sint duæ rectæ lineæ inæquales Α, ΒΓ, quarum major ΒΓ, quartæ autem parti quadrati quod fit à minori Α æquale parallelogrammum ad ipsam ΒΓ applicetur, deficiens figura quadrata, & sit quod continetur sub ΒΔ, ΔΓ, sitque

ſitque BΔ ipſi ΔΓ longitudine incommenſurabilis: dico BΓ plus poſſe quam A, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

Iiſdem enim quæ ſupra conſtructis, ſimiliter oſtendemus ipſam BΓ plus poſſe quam A quadrato rectæ lineæ ΔZ. oſtendendum igitur eſt BΓ ipſi ΔZ longitudine incommenſurabilem eſſe. quoniam enim incommenſurabilis eſt BΔ ipſi ΔΓ, erit [per 17. 10.] & BΓ ipſi ΔΓ longitudine incommenſurabilis. ſed ΔΓ commenſurabilis eſt utriſque BZ, ΔΓ: ergo [per 14.10.] & BΓ utriſque BZ, ΔΓ longitudine eſt incommenſurabilis: ac propterea BΓ [per 17.10.] reliquæ ZΔ incommenſurabilis eſt longitudine, & BΓ plus poteſt quam A quadrato ex ZΔ: igitur BΓ plus poteſt quam A quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.



Sed BΓ rurſus plus poſſit quam A quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine, quartæ autem parti quadrati quod fit ex A æquale parallelogrammum ad BΓ applicetur deficiens figura quadrata; & ſit quod ſub BΔ, ΔΓ continetur. oſtendendum eſt BΔ ipſi ΔΓ longitudine incommenſurabilem eſſe.

Iiſdem enim conſtructis, ſimiliter demonſtrabimus BΓ plus poſſe quam A quadrato rectæ lineæ ΔZ. ſed [ex hyp.] BΓ plus poteſt quam A quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: incommenſurabilis igitur eſt BΓ ipſi ΔZ longitudine: quare [per 17.10.] & reliquæ, videlicet utrique BZ, ΔΓ, eſt incommenſurabilis. ſed [per 6. 10.] utraque BZ, ΔΓ commenſurabilis eſt longitudine ipſi ΔΓ: ergo [per 14. 10.] & BΓ ipſi ΔΓ eſt incommenſurabilis longitudine; ac propterea dividendo [per 17.10.] BΔ ipſi ΔΓ longitudine incommenſurabilis erit.

Si igitur duæ rectæ lineæ inæquales ſint, & quæ ſequuntur. quod erat demonſtrandum.

SCHOLIUM 1.

Quoniam demonſtratum eſt [ad cor.9.10.] longitudine commenſurabiles omnino & potentia commenſurabiles eſſe, potentia vero commenſurabiles non ſemper & longitudine, ſed poſſe & longitudine commenſurabiles eſſe & incommenſurabiles; manifeſtum eſt, ſi expoſitæ rationali aliqua commenſurabilis fuerit longitudine, illam rationalem vocari, & ipſi commenſurabilem non ſolum longitudine ſed etiam potentia: longitudine enim commenſurabiles omnino & potentia commenſurabiles ſunt. ſi vero expoſitæ rationali aliqua fuerit potentia commenſurabilis, ſi quidem & longitudine, dicetur & ſic rationalis & commenſurabilis ipſi longitudine & potentia. quod ſi expoſitæ rationali rurſus aliqua commenſurabilis exiſtens potentia, longitudine fuerit incommenſurabilis, dicetur & ſic rationalis potentia tantum commenſurabilis.

SCHOLIUM 2.

Rationales vocat eas, quæ expoſitæ rationali vel longitudine & potentia commenſurabiles ſunt, vel potentia tantum. ſunt autem &

ἀσύμμετρος δὲ ἔστω ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει· λέγω ὅτι ἡ ΒΓ τὸ Α μεῖζον δύναται, τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων τῷ πρότερον, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ. δεικτέον ἐν ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΔΖ μήκει. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΔΓ μήκει. ἀλλὰ ἡ ΔΓ σύμμετρός ἐστι συναμφοτέραις ταῖς ΒΖ, ΔΓ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα ἀσύμμετρός ἐστι συναμφοτέραις ταῖς ΒΖ, ΔΓ· ὥστε καὶ λοιπῇ τῇ ΖΔ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει, καὶ ἡ ΒΓ τοῦ Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

Δυνάσθω δὴ πάλιν ἡ ΒΓ τοῦ Α μεῖζον τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ. δεικτέον ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ. ἀλλ' ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΔΖ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ συναμφοτέρῳ τῇ ΒΖ, ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ. ἀλλὰ συναμφοτέρῳ ἡ ΒΖ, ΔΓ τῇ ΔΓ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα τῇ ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει· ὥστε καὶ διελόντι ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΧΟΛΙΟΝ α'.

Ἐπειδὴ δέδεικται ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει σύμμετροι εἶναι εἰ ἀσύμμετροι· φανερὸν ὅτι ἐὰν τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ᾖ μήκει, λέγεται ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ οὐ μόνον μήκει ἀλλὰ καὶ δυνάμει, αἱ γὰρ μήκει σύμμετροι πάντως εἰ δυνάμει. ἐὰν δὲ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ᾖ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει λέγεται, καὶ ἔστω ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ μήκει καὶ δυνάμει. εἰ δὲ τῇ ἐκκειμένῃ πάλιν ῥητῇ σύμμετρός τις ἔστω δυνάμει μήκει ᾗ ἀσύμμετρος, λέγεται καὶ ἔστω ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος.

*ΣΧΟΛΙΟΝ β.

Ῥητὰς καλεῖ τὰς τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ ἤτοι μήκει εἰ δυνάμει συμμέτρους, ἢ δυνάμει μόνον. εἰσὶ δὲ καὶ

* In editis Πρόκλου χάλκου dicitur: ſed in *MSS.* nulla mentio *Procli*. Non tamen ideo *Euclidis* eſſe arbitramur: nam & hoc Scholium & præcedens, ut & alia pleraque Scholia & Lemmata hujuſce libri, *Euclidi* abjudicanda eſſe cenſemus.

ἄλλαι

ἄλλαι εὐθεῖαι, αἱ μήκει μὴ σύμμετροι οὖσαι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καλείσθωσαν πάλιν λέγοντες ῥητὰς καὶ συμμέτρους τοῖς ἀλλήλαις καθ' ὁ ῥητόν, ἀλλὰ συμμέτρους τοῖς ἀλλήλαις, ἤτοι μήκει δηλαδὴ καὶ δυνάμει ἢ δυνάμει μόνον. καὶ εἰ μὲν μήκει, λέγοντες καὶ αὐτὰς ῥητὰς μήκει συμμέτρους, ἐπακολουθεῖ ὅτι καὶ δυνάμει· εἰ δὲ δυνάμει μόνον τοῖς ἀλλήλαις εἰσὶ σύμμετροι, λέγονται καὶ αὐταὶ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. ὅτι δὲ αἱ ῥηταὶ σύμμετροί εἰσιν, ἐντεῦθεν δῆλον· ἐπεὶ γὰρ ῥηταί εἰσιν αἱ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετροι, τὰ δὲ τῷ αὐτῷ σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα· αἱ ἄρα ῥηταὶ σύμμετροί εἰσιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

aliæ rectæ lineæ, quæ longitudine quidem expositæ rationali incommensurabiles sunt, potentia autem solum commensurabiles, atque ob id rursus dicuntur rationales & commensurabiles inter se quatenus rationales; sed commensurabiles inter se, vel longitudine & potentia vel potentia solum. & si quidem longitudine, dicuntur & ipsæ rationales longitudine commensurabiles, ut intelligatur etiam potentia commensurabiles esse: si vero potentia solum inter se sunt commensurabiles, dicuntur ipsæ quoque rationales potentia solum commensurabiles. at vero rationales commensurabiles esse, ex his constat: quoniam enim rationales sunt quæ expositæ rationali sunt commensurabiles, quæ vero eidem commensurabiles [per 12. 10.] etiam inter se commensurabiles sunt; sequitur rationales commensurabiles esse. quod erat demonstrandum.

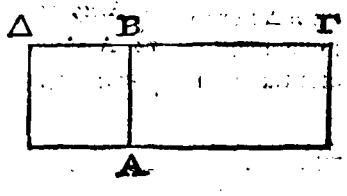
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Τὸ ὑπὸ ῥητῶν μήκει συμμέτρων κατά τινα τῶν προειρημένων τρόπων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ῥητόν ἐστιν.

Ὑπὸ γὰρ ῥητῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι ῥητόν ἐστι τὸ ΑΓ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, ἴση δὲ ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ μήκει. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ, σύμμετρος δὲ ἐστὶν ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ΔΑ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΑΓ.

Τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῶν, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Prop. XX. Theor.

Quod sub rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis secundum aliquem prædictorum modorum continetur rectangulum, rationale est.

Sub rationalibus enim longitudine commensurabilibus rectis lineis AB, BΓ contineatur rectangulum AΓ: dico AΓ rationale esse.

Describatur ex AB quadratum AΔ: ergo AΔ est rationale. & quoniam AB commensurabilis est ipsi BΓ longitudine, atque est AB æqualis BΔ; erit BΔ ipsi BΓ longitudine commensurabilis. est autem [per 1. 6.] & ut BΔ ad BΓ, ita ΔΑ ad ΑΓ, & commensurabilis est BΔ ipsi BΓ: ergo [per 10. 10.] & ΔΑ ipsi ΑΓ commensurabile erit. estque rationale ΔΑ: quare & ΑΓ est rationale.

Quod igitur sub rationalibus, & quæ sequuntur. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Ἐὰν ῥητὸν παρὰ ῥητὴν παραβληθῇ· πλάτος ποιεῖ ῥητήν, καὶ σύμμετρον τῇ παρ' ἣν παραβέβληται μήκει.

Ῥητὸν γὰρ τὸ ΑΓ παρὰ ῥητὴν κατά τινα πάλιν τῶν εἰρημένων τρόπων τὴν ΑΒ παραβεβλήσθω, πλάτος ποιοῦν τὴν ΒΓ· λέγω ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ ΒΓ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΒ μήκει.

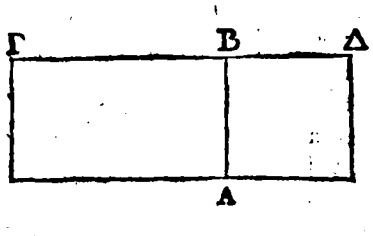
Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. ῥητὸν δὲ καὶ τὸ ΑΓ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ τῷ ΑΓ. καί ἐστιν ὡς τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ· σύμμετρος ἄρα

Prop. XXI. Theor.

Si rationale ad rationalem applicetur, latitudinem efficit rationalem, & ei ad quam applicatum est longitudine commensurabilem.

Rationale enim AΓ ad rationalem secundum aliquem rursus dictorum modorum nempe AB applicetur, latitudinem faciens BΓ: dico BΓ rationalem esse, & ipsi AB longitudine commensurabilem.

Describatur enim ex AB quadratum AΔ: ergo AΔ rationale est. sed & rationale est AΓ: ergo [per 1. schol. 19. 10.] AΔ ipsi AΓ est commensurabile. atque [per 1. 6.] est ut ΔΑ ad ΑΓ ita ΔΒ ad ΒΓ: com-



 mensurabilis

menſurabilis igitur eſt ΑΒ ipſi ΒΓ. eſt autem ΒΔ æqualis ΒΑ: quare ΑΒ ipſi ΒΓ commenſurabilis eſt. ſed ΑΒ eſt rationalis: rationalis igitur eſt & ΒΓ,& ipſi ΒΑ longitudine commenſurabilis.

Si igitur rationale ad rationalem applicetur, & quæ ſequuntur. quod erat demonſtrandum.

ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ. ἴση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΒΑ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ. ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΑΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ, καὶ σύμμετρος τῇ ΒΑ μήκει.

Ἐὰν ἄρα ῥητὸν παρὰ ῥητὴν, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

LEMMA.

Recta linea quæ poteſt irrationale ſpatium, irrationalis eſt.

Poſſit enim recta linea Α ſpatium irrationale, hoc eſt quadratum quod fit ab Α irrationali ſpatio ſit æquale: dico Α irrationalem eſſe.

Α

Si enim Α ſit rationalis, erit quod ab ipſa fit quadratum rationale; ſic enim in definitionibus ponitur. atqui rationale non eſt: ergo Α irrationalis ſit neceſſe eſt. quod erat demonſtrandum.

ΛΗΜΜΑ.

Ἡ δυναμένη ἄλογον χωρίον, ἄλογός ἐστι.

Δυνάσθω γὰρ ἡ Α ἄλογον χωρίον, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον ἴσον ἔστω ἀλόγῳ χωρίῳ· λέγω ὅτι ἡ Α ἄλογός ἐστιν.

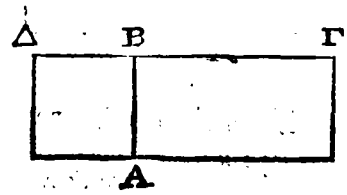
Εἰ γὰρ ἐστι ῥητὴ ἡ Α, ῥητὸν ἔσται καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον, ὅτως γὰρ ἐν τοῖς ὅροις. οὐκ ἔστι δέ· ἄλογον ἄρα ἡ Α ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXII. THEOR.

Quod ſub rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum irrationale eſt; & recta linea ipſum potens eſt irrationalis, vocetur autem media.

SUB rationalibus enim potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis ΑΒ, ΒΓ contineatur rectangulum ΑΓ: dico ΑΓ irrationale eſſe, & rectam lineam quæ ipſum poteſt irrationalem eſſe, vocetur autem media.

Deſcribatur enim ex ΑΒ quadratum ΑΔ: ergo ΑΔ rationale eſt. & quoniam ΑΒ incommenſurabilis eſt ipſi ΒΓ longitudine, potentia enim ſolum ponuntur commenſurabiles, atque eſt ΑΒ æqualis ΒΔ: incommenſurabilis igitur eſt ΑΒ ipſi ΒΓ longitudine. eſt autem [per 1. 6.] ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΑΔ ad ΑΓ: ergo ΑΔ ipſi ΑΓ eſt incommenſurabile. ſed ΑΔ rationale eſt: irrationale igitur eſt ΑΓ: quare [per 11. def. 10.] & recta linea quæ ipſum ΑΓ poteſt, videlicet quæ poteſt quadratum ipſi æquale, eſt irrationalis. vocetur autem media; propterea quod ipſius quadratum eſt æquale rectangulo quod ſub ΑΒ, ΒΓ continetur, & inter ipſas ΑΒ, ΒΓ media fit proportionalis. quod erat demonſtrandum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Τὸ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μέση.

Ὑπὸ γὰρ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι ἄλογόν ἐστι τὸ ΑΓ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μέση.

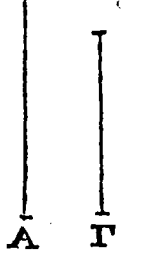
Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον ὑπόκεινται σύμμετροι, ἴση δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ μήκει. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ ὅτως τὸ ΑΔ πρὸς τὸ ΑΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ τῷ ΑΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ΑΔ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ· ὥστε καὶ ἡ δυναμένη τὸ ΑΓ, τουτέστιν ἡ ἴσον αὐτῷ τετράγωνον δυναμένη, ἄλογός ἐστι. καλείσθω δὲ μέση, διὰ τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τ ΑΒ, ΒΓ, καὶ μέσην ἀνάλογον αὐτὴν γίνεσθαι τ ΑΒ, ΒΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SCHOLIUM.

Media eſt irrationalis quæ poteſt ſpatium contentum ſub rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus.

Sub rationalibus enim potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis Α, Β ſpatium contineatur. oſtendendum eſt hujuſmodi ſpatium irrationale eſſe.

Sumatur enim inter ipſas Α, Β media proportionalis Γ; ergo [per 17. 6.] quod fit ſub Α, Β eſt æquale quadrato ex Γ; ac propterea Γ poteſt rectangulum quod ſub ipſis Α, Β continetur: eſt igitur ut Α



*ΣΧΟΛΙΟΝ.

Μέση ἐστὶν ἄλογος ἡ δυναμένη χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων.

Ὑπὸ ῥητῶν γὰρ δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν Α, Β περιεχέσθω χωρίον. δεικτέον ὅτι ἄλογόν ἐστι τὸ τοιοῦτον χωρίον.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν Α, Β μέση ἀνάλογον ἡ Γ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Γ· ὥστε ἡ Γ δυνάσθω τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν

* In *MSS.* non reperitur.

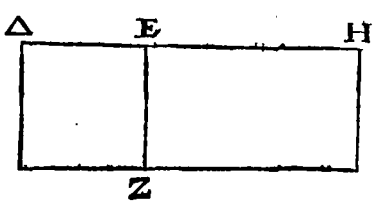
Β ἔστως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Γ, ὡς γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην ἔστως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ πορίσματι τοῦ ιθ' τοῦ ϛ' στοιχείου. ἀσύμμετρος δὲ ἡ Α τῇ Β μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Γ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ἄλογον ἄρα τὸ ἴσον τῶν Α, Β· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Γ. μέση δὲ καλείσθω, ὅτι ἄλογος ἔστι μέσον δύο ῥητῶν τῶν Α, Β ἀναλογόν ἐστιν.

ad Β ita quadratum ex Α ad id quod fit ex Γ quadratum, nam ut prima ad tertiam ita quadratum quod fit ex prima ad quadratum ex secunda, quod demonstratum est in corollario prop. 28. sexti Elementorum. incommensurabilis autem est Α ipsi Β longitudine: ergo [per 10. 10.] & quadratum ex Α quadrato ex Γ est incommensurabile. sed quadratum ex Α rationale est: irrationale igitur est quod sub rectis lineis Α, Β continetur: ergo Γ est irrationalis. media autem idcirco vocatur, quod irrationalis existens inter ipsas Α, Β rationales media est proportionalis.

ΛΗΜΜΑ.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν ἔστως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν.

Ἐκκείσθωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΖΕ, ΕΗ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ ἔστως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΖΕ τετράγωνον τὸ ΔΖ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΗΖ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΗ ἔστως τὸ ΖΔ πρὸς τὸ ΖΗ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ΖΔ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, τὸ δὲ ΖΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΗ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ ἔστως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ. ὁμοίως δὲ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΕ, ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ, τουτέστιν ὡς τὸ ΗΖ πρὸς τὸ ΔΖ, ἔστως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ.

LEMMA.

Si sint duæ rectæ lineæ, erit ut prima ad secundam ita quadratum quod fit à prima ad rectangulum quod sub duabus rectis lineis continetur.

Sint duæ rectæ lineæ ΖΕ, ΕΗ: dico ut ΖΕ ad ΕΗ ita esse quadratum ex ΖΕ ad rectangulum sub ΖΕ, ΕΗ.

Describatur ex ΖΕ quadratum ΔΖ, & ΗΖ compleatur. quoniam igitur [per 1. 6.] est ut ΔΕ ad ΕΗ ita ΖΔ ad ΖΗ, atque est ΖΔ quidem quadratum ex ΖΕ, ΖΗ vero quod sub ΔΕ, ΕΗ continetur, hoc est rectangulum sub ΖΕ, ΕΗ: erit ut ΖΕ ad ΕΗ ita quadratum ex ΖΕ ad rectangulum sub ΖΕ, ΕΗ. similiter autem & ut rectangulum sub ΗΕ, ΕΖ ad quadratum ex ΕΖ, hoc est ut ΗΖ ad ΔΖ, ita est ΗΕ ad ΕΖ.

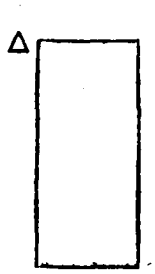
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'

Τὸ ὑπὸ μέσης καὶ ῥητῆς παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητήν, καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ' ἣν παραβέβληται μήκει.

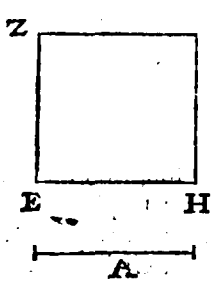
Prop. XXIII. Theor.

Quod fit à media ad rationalem applicatum latitudinem efficit rationalem, & ei ad quam applicatum est longitudine incommensurabilem.

Ἔστω μέση μὲν ἡ Α, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΒ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω χωρίον τὸ ΒΔ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΔ· λέγω ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ ΓΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει.

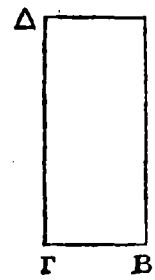


Ἐπεὶ γὰρ μέση ἐστὶν ἡ Α, δυνατὸν χωρίον περιέχομενον ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων. δυνάσθω τὸ ΗΖ. δύναται δὲ καὶ τὸ ΒΔ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔ τῷ ΗΖ. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον, τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΗ ἔστως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἔστως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ. σύμ-

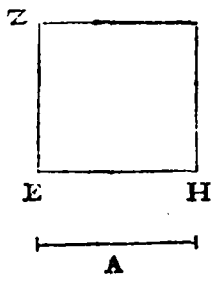


Quoniam enim media est Α, [per 22. 10.] potest spatium contentum sub rationalibus potentia solum commensurabilibus. possit ΗΖ. sed potest & ΒΔ: æquale igitur est ΒΔ ipsi ΗΖ. atque est illi æquiangulum, æqualium autem & æquiangulorum parallelogrammorum latera quæ circum æquales angulos [per 14. 6.] sunt reciproce proportionalia: ergo ut recta ΒΓ ad ΕΗ rectam ita est ΕΖ ad ΓΔ: est igitur & ut quadratum ex ΒΓ ad quadratum ex ΕΗ ita [per 22. 6.] quadratum ex ΕΖ ad id quod fit ex ΓΔ quadratum. sed

quadratum ex ΒΓ commenſurabile eſt quadrato ex ΕΗ, utraque enim ipſarum eſt rationalis: commenſurabile igitur eſt [per 10. 10.] & quadratum ex ΕΖ quadrato ex ΓΔ. eſt autem quadratum ex ΕΖ rationale: ergo & rationale eſt quadratum ex ΓΔ; ac propterea recta linea ΓΔ eſt rationalis. itaque quoniam ΖΕ incommenſurabilis eſt ipſi ΕΗ longitudine, potentia enim ſolum [per 22. 10.] commenſurabiles ſunt, ut autem ΖΕ ad ΕΗ ita [per lem. præc.] quadratum ex ΕΖ ad rectangulum ſub ΖΕ, ΕΗ: erit [per 10. 10.] quadratum ex ΕΖ incommenſurabile rectangulo ſub ΖΕ, ΕΗ. ſed quadrato quidem ex ΕΖ commenſurabile eſt quadratum ex ΓΔ, rationales enim ſunt potentia; rectangulo vero ſub ΕΖ, ΕΗ eſt commenſurabile rectangulum ſub ΔΓ, ΓΒ, utrumque enim eſt æquale quadrato ex Α: ergo [per 13. 10.] quadratum ex ΓΔ incommenſurabile eſt rectangulo ſub ΔΓ, ΓΒ. ſed ut quadratum ex ΓΔ ad rectangulum ſub ΔΓ, ΓΒ ita eſt [per lem. præc.] ΔΓ ad ΓΒ: ergo ΔΓ ipſi ΓΒ incommenſurabilis eſt longitudine; & [per 6.def. 10.] ob id ΔΓ eſt rationalis & ipſi ΓΒ longitudine incommenſurabilis. quod erat demonſtrandum.



μετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ῥητὴ γὰρ ἑκατέρα αὐτῶν· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τ̃ς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ. ῥητὸν δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τ̃ς ΕΖ σύμμετρον τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, ῥηταὶ γὰρ εἰσι δυνάμει, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ σύμμετρόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΒ, ἴσοι γὰρ εἰσι τῷ ἀπὸ τῆς Α· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΒ περιεχομένῳ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΒ οὕτως ἐστὶν ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΒ μήκει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

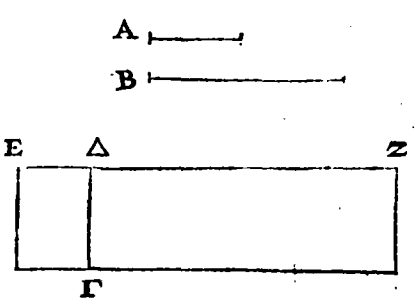


Prop. XXIV. Theor.

Mediæ commenſurabilis media eſt.

SIT media Α, & ipſi Α commenſurabilis ſit Β: dico & Β mediam eſſe.

Exponatur enim rationalis ΓΔ, & quadrato quidem ex Α æquale ad ΓΔ applicetur ſpatium rectangulum ΓΕ latitudinem efficiens ΕΔ: rationalis igitur eſt ΕΔ [per 23. 10.] & ipſi ΓΔ longitudine incommenſurabilis. quadrato autem ex Β æquale ad ΔΓ applicetur ſpatium rectangulum ΓΖ latitudinem efficiens ΔΖ. quoniam igitur Α commenſurabilis eſt ipſi Β, erit [per cor. 9. 10.] quadratum ex Α quadrato ex Β commenſurabile. ſed [per conſtr.] quadrato quidem ex Α æquale eſt rectangulum ΕΓ; quadrato autem ex Β æquale ΓΖ: commenſurabile igitur eſt rectangulum ΕΓ rectangulo ΓΖ. atque eſt [per 1. 6.] ut ΕΓ ad ΓΖ ita ΕΔ ad ΔΖ: ergo ΕΔ ipſi ΔΖ longitudine eſt commenſurabilis. eſt autem [per 23. 10.] ΕΔ rationalis, & longitudine incommenſurabilis ipſi ΔΓ: ergo [per 13. 10.] & ΔΖ rationalis eſt & ipſi ΔΓ longitudine incommenſurabilis: rationales igitur ſunt ΓΔ, ΔΖ potentia ſolum commenſurabiles. quod autem ſub rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum irrationale eſt; & recta linea ipſum potens [per 22. 10.] eſt irrationalis, vocaturque



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Η τῇ μέσῃ σύμμετρος μέση ἐστίν.

ΕΣτω μέση ἡ Α, καὶ τῇ Α σύμμετρος ἔστω ἡ Β· λέγω ὅτι καὶ ἡ Β μέση ἐστίν.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΔ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον παρὰ τὴν ΔΓ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον τὸ ΓΖ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τ̃ς Α τῷ ἀπὸ τ̃ς Β. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τ̃ς Α ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΓ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον τὸ ΓΖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΓ τῷ ΓΖ. καὶ ἔστιν ὡς τὸ ΕΓ πρὸς τὸ ΓΖ οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΔ τῇ ΔΖ μήκει. ῥητὴ δ' ἐστὶν ἡ ΕΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΖ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΓ μήκει· αἱ ΓΔ, ΔΖ ἄρα ῥηταί εἰσι, δυνάμει μόνον σύμμετροι. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ ἡ δυναμένη μέση· ἡ ἄρα

ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΖ δυναμέι μέσον ἐστί, καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΖ ἡ Β· μέσον ἄρα ἐστὶν ἡ Β.

media: ergo recta linea quæ poteſt rectangulum ſub ΓΔ, ΔΖ eſt media. ſed Β poteſt rectangulum ſub ΓΔ, ΔΖ: quare Β media erit.

Πόρισμα.

Ἐκ δὲ τούτου φανερὸν, ὅτι τὸ τῷ μέσῳ χωρίῳ σύμμετρον μέσον ἐστίν. δύνανται γὰρ αὐτὰ εὐθεῖαι αἱ εἰσὶ δυνάμει σύμμετροι, ὧν ἡ ἑτέρα μέση· ὥστε καὶ ἡ λοιπὴ μέση ἐστίν. ὡσαύτως δὲ τοῖς ὑπὸ τῶν ῥητῶν εἰρημένοις καὶ ὑπὸ τῶν μέσων ἐξακολουθεῖ τὸ τῇ μέσῃ μήκει σύμμετρον λέγεσθαι μέσῳ, καὶ σύμμετρον αὐτῇ μὴ μόνον μήκει ἀλλὰ καὶ δυνάμει, ἐπειδήπερ καθόλου αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. ἐὰν δὲ τῇ μέσῃ σύμμετρός τις ᾖ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει, λέγεται καὶ ἔστω μέσον καὶ μήκει καὶ δυνάμει σύμμετροι. εἰ δὲ δυνάμει μόνον, λέγονται μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι. * Εἰσὶ δὲ πάλιν καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἱ μήκει μὲν ἀσύμμετροί εἰσι τῇ μέσῃ, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καὶ λέγονται πάλιν μέσαι, διὰ τὸ σύμμετροι εἶναι δυνάμει τῇ μέσῃ καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, καθὸ μέσαι ἄλλαι σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας ἦσαν μήκει δηλαδὴ καὶ δυνάμει, ἢ δυνάμει μόνον. καὶ εἰ μὲν μήκει, λέγονται καὶ αὗται μέσαι μήκει σύμμετροι, ἐπομένου τῷ ὅπερ καὶ δυνάμει· εἰ δὲ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, λέγονται καὶ ἔστω δυνάμει μόνον σύμμετροι. [† ὅτι δὲ αἱ μέσαι σύμμετροί εἰσιν, ἔστω δεικτέον. ἐπεὶ καὶ μέσαι μέσῃ τινὶ σύμμετροί εἰσι, τὰ δὲ τῷ αὐτῷ σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα· αἱ ἄρα μέσαι σύμμετροί εἰσιν.

Corollarium.

Ex hoc manifeſtum eſt ſpatium medio ſpatio commenſurabile medium eſſe. poſſunt enim ipſa rectæ lineæ quæ ſunt potentia commenſurabiles, quarum altera media eſt: ergo & reliqua media erit. quemadmodum autem & in rationalibus dictum eſt ita & in mediis dicemus, rectam lineam mediæ longitudine commenſurabilem dici mediam, & ipſi commenſurabilem non ſolum longitudine ſed & potentia; univerſe enim quæ longitudine commenſurabiles ſunt etiam potentia ſunt commenſurabiles. ſi vero mediæ commenſurabilis quædam recta linea fuerit potentia, ſiquidem etiam longitudine, dicuntur & ſic mediæ & longitudine & potentia commenſurabiles. ſi autem potentia ſolum, dicuntur mediæ potentia ſolum commenſurabiles. * Rurſus ſunt & aliæ rectæ, longitudine quidem incommenſurabiles mediæ, & potentia tantum illi commenſurabiles, & hæ etiam mediæ dicuntur; quoniam potentia commenſurabiles mediæ ſunt & inter ſe commenſurabiles: nam mediæ aliæ ſunt inter ſe commenſurabiles vel longitudine & potentia vel potentia tantum. & ſiquidem longitudine, dicuntur mediæ longitudine commenſurabiles, & conſequenter etiam & potentia. ſi vero ſunt potentia tantum commenſurabiles, dicuntur potentia tantum commenſurabiles. [† quod vero mediæ ſint inter ſe commenſurabiles ſic oſtenditur. quoniam enim mediæ ſunt cuidam mediæ commenſurabiles, & quæ eidem ſunt commenſurabiles inter ſe ſunt commenſurabiles, erunt mediæ inter ſe commenſurabiles.]

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

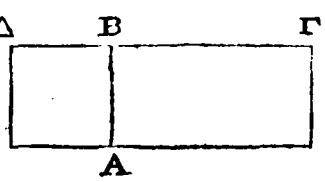
Τὸ ὑπὸ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μέσον ἐστίν.

Prop. XXV. Theor.

Quod ſub mediis longitudine commenſurabilibus rectis lineis continetur, rectangulum medium eſt.

Ὑπὸ γὰρ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχέσθω ὀρθογώνιον τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι τὸ ΑΓ μέσον ἐστίν.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, ἴση δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ μήκει· ὥστε καὶ τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ σύμμετρόν ἐστι. μέσον δὲ τὸ ΑΔ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



SUB mediis enim longitudine commenſurabilibus rectis lineis ΑΒ, ΒΓ contineatur rectangulum ΑΓ: dico ΑΓ medium eſſe.

Deſcribatur enim ex ΑΒ quadratum ΑΔ: ergo ΑΔ medium eſt. & quoniam commenſurabilis eſt ΑΒ ipſi ΒΓ longitudine, æqualis autem ΑΒ ipſi ΒΔ; erit ΔΒ ipſi ΒΓ longitudine commenſurabilis: quare ΔΑ commenſurabile eſt ipſi ΑΓ. ſed ΑΔ eſt medium: ergo [per coroll. 24. 10.] & ΑΓ medium erit. quod erat demonſtr.

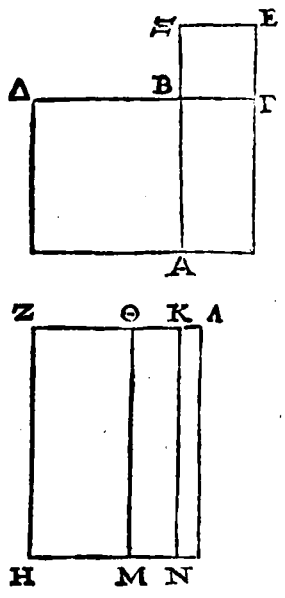
* Quæ ſequuntur deſunt in quibuſdam exemplaribus, nec ea agnoſcit *Commandinus*. † Illa uncis incluſa futilia videntur & ſcioli alicujus gloſſemata.

PROP. XXVI. THEOR.

Quod ſub mediis potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel rationale eſt vel medium.

SUB mediis enim potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis AB, BΓ contineatur rectangulum AΓ: dico AΓ vel rationale eſſe vel medium.

Deſcribantur enim ex AB, BΓ quadrata AΔ, BE: utrumque igitur ipſorum AΔ, BE medium eſt. exponatur rationalis ZH, & [per 45. 1.] ipſi quidem AΔ æquale ad ZH applicetur parallelogrammum rectangulum HΘ latitudinem faciens ZΘ, ipſi vero AΓ æquale ad ΘM applicetur rectangulum MK latitudinem faciens ΘK; & inſuper ipſi BE æquale ſimiliter ad KN applicetur NΛ latitudinem faciens KΛ: in recta igitur linea [per 14. 1.] ſunt ZΘ, ΘK, KΛ. quoniam igitur medium eſt utrumque ipſorum AΔ, BE, atque eſt AΔ quidem æquale ipſi HΘ, BE vero ipſi NΛ; erit & utrumque ipſorum HΘ, NΛ medium, & ad rationalem ZH applicata ſunt: ergo [per 23. 10.] & utraque ipſarum ZΘ, KΛ eſt rationalis, & ipſi ZH longitudine incommenſurabilis. & quoniam commenſurabile eſt [ex hyp.] AΔ ipſi BE, erit & HΘ ipſi NΛ commenſurabile. ſed [per 1. 6.] eſt ut HΘ ad NΛ ita ZΘ ad KΛ: ergo [per 10. 10.] ZΘ ipſi KΛ eſt commenſurabilis longitudine; ac propterea ZΘ, KΛ rationales ſunt longitudine commenſurabiles: rationale igitur eſt rectangulum quod ſub ZΘ, KΛ continetur. & quoniam BΔ quidem ipſi BA eſt æqualis, ΞB vero ipſi BΓ; erit ut ΔB ad BΓ ita AB ad BΞ. ſed [per 1. 6.] ut ΔB ad BΓ ita ΔA quadratum ad rectangulum AΓ. ut autem AB ad BΞ ita AΓ rectangulum ad quadratum ΓΞ: eſt igitur ut ΓΞ ad AΓ ita AΓ ad AΔ. æquale autem eſt AΔ ipſi HΘ, & AΓ ipſi MK, & ΓΞ ipſi NΛ; quare ut HΘ ad MK ita MK ad NΛ; & igitur ut ZΘ ad ΘK ita ΘK ad KΛ: ideoque [per 17. 6.] quod ſub ZΘ, KΛ continetur eſt æquale quadrato quod fit ex ΘK. eſt autem [per 20. 10.] quod continetur ſub ZΘ, KΛ rationale: ergo & rationale eſt quadratum ex ΘK; ac propterea recta linea ΘK rationalis. & ſi quidem ΘK commenſurabilis eſt ipſi ΘM, hoc eſt ipſi ZH, longitudine, erit rectangulum NΘ rationale. ſi vero ΘK eſt incommenſurabilis ipſi ZH longitudine, KΘ, ΘM rationales erunt potentia ſolum commenſurabiles, & ob id [per 22. 10.] rectangulum ΘN medium erit: ergo ΘN vel rationale eſt vel medium. ſed ΘN eſt æquale ipſi AΓ: quare AΓ vel rationale vel medium eſt.



Quod igitur ſub mediis potentia ſolum com-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Τὸ ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἤτοι ῥητόν ἐστιν ἢ μέσον ἐστίν.

ΥΠΟ γὰρ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν AB, BΓ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ AΓ· λέγω ὅτι τὸ AΓ ἤτοι ῥητόν ἐστιν ἢ μέσον.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῶν AB, BΓ τετράγωνα τὰ AΔ, BE· μέσον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν AΔ, BE. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ZH, καὶ τῷ μὲν AΔ ἴσον παρὰ τὴν ZH παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ HΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ZΘ, τῷ δὲ AΓ ἴσον παρὰ τὴν ΘM παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ MK πλάτος ποιοῦν τὴν ΘK, καὶ ἔτι τῷ BE ἴσον ὁμοίως παρὰ τὴν KN παραβεβλήσθω τὸ NΛ πλάτος ποιοῦν τὴν KΛ· ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶν αἱ ZΘ, ΘK, KΛ. ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν AΔ, BE, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν AΔ τῷ HΘ, τὸ δὲ BE τῷ NΛ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκάτερον τῶν HΘ, NΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ZH παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν ZΘ, KΛ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ZH μήκει. ἐπεὶ οὖν σύμμετρόν ἐστι τὸ AΔ τῷ BE· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ HΘ τῷ NΛ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ HΘ πρὸς τὸ NΛ οὕτως ἡ ZΘ πρὸς τὴν KΛ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ZΘ τῇ KΛ μήκει· αἱ ZΘ, KΛ ἄρα ῥητάί εἰσι μήκει σύμμετροι· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ZΘ, KΛ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν BΔ τῇ BA, ἡ δὲ ΞB τῇ BΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔB πρὸς τὴν BΓ οὕτως ἡ AB πρὸς τὴν BΞ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΔB πρὸς τὴν BΓ οὕτως τὸ ΔA πρὸς τὸ AΓ. ὡς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν BΞ οὕτως τὸ AΓ πρὸς τὸ ΓΞ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΞ πρὸς τὸ AΓ οὕτως τὸ AΓ πρὸς τὸ AΔ. ἴσον δέ ἐστι τὸ μὲν AΔ τῷ HΘ, τὸ δὲ AΓ τῷ MK, τὸ δὲ ΓΞ τῷ NΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ HΘ πρὸς τὸ MK οὕτως τὸ MK πρὸς τὸ NΛ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ZΘ πρὸς τὴν ΘK οὕτως ἡ ΘK πρὸς τὴν KΛ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ZΘ, KΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘK. ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ZΘ, KΛ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘK· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘK. καὶ εἰ μὲν ἡ ΘK σύμμετρός ἐστι τῇ ΘM, τουτέστι τῇ ZH, μήκει, ῥητὸν ἐστι τὸ NΘ. εἰ δὲ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ZH μήκει, αἱ KΘ, ΘM ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘN· τὸ ΘN ἄρα ἤτοι ῥητόν ἐστιν ἢ μέσον. ἴσον δὲ τὸ ΘN τῷ AΓ· τὸ AΓ ἄρα ἤτοι ῥητόν ἐστιν ἢ μέσον ἐστί.

Τὸ ἄρα ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων περι-

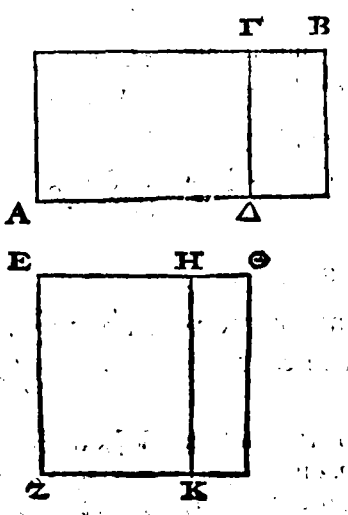
περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

mensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum vel rationale est vel medium. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

Μέσον μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μέσον τὸ ΑΒ μέσου τοῦ ΑΓ ὑπερεχέτω ῥητῷ τῷ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τῷ ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΖΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ, τῷ δὲ ΑΓ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΖΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΔ λοιπῷ τῷ ΚΘ ἴσον ἐστίν. ῥητὸν δὲ ἐστὶ τὸ ΒΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΚΘ. ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΑΓ, καί ἐστι τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΖΘ ἴσον, τὸ δὲ ΑΓ τῷ ΖΗ· μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΖΘ, ΖΗ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΕΘ, ΕΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ ΔΒ, ᾧ ἔστιν ἴσον τὸ ΚΘ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΚΘ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ, καὶ σύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΗ ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΗΘ μήκει, ᾧ ἔστιν ὡς ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΗΘ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΕΗ σύμμετρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ τετράγωνα, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ, διπλάσιον γάρ ἐστι· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· καὶ συναμφότερα ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ, ἀσύμμετρά ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ. ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ· ἄλογον ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ. ἀλλὰ καὶ ῥητή, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.



Οὐκ ἄρα μέσον μέσου ὑπερέχει ῥητῷ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXVII. THEOR.

Medium non superat medium rationali.

SI enim fieri potest, medium ΑΒ superet medium ΑΓ rationali ΔΒ, & exponatur rationalis ΕΖ, atque [per 45. 1.] ipsi quidem ΑΒ æquale ad ΕΖ applicetur parallelogrammum rectangulum ΖΘ latitudinem faciens ΕΘ, ipsi vero ΑΓ æquale auferatur ΖΗ: reliquum igitur ΒΔ reliquo ΚΘ est æquale. rationale autem est ΒΔ: ergo & ΚΘ est rationale. quoniam igitur medium est utrumque ipsorum ΑΒ, ΑΓ, estque ΑΒ æquale ΖΘ, & ΑΓ æquale ΖΗ; erit & utrumque ipsorum ΖΘ, ΖΗ medium. & ad rationalem ΕΖ applicata sunt: rationalis igitur est utraque earum ΕΘ, ΕΗ [per 23. 10.] & ipsi ΕΖ longitudine incommensurabilis. & quoniam rationale est ΔΒ, & ipsi ΚΘ æquale; & ΚΘ rationale erit. est autem ad ΕΖ applicatum: rationalis igitur est ΗΘ [per 21. 10.] & ipsi ΕΖ commensurabilis longitudine. sed & ΕΗ est rationalis, & ipsi ΕΖ longitudine incommensurabilis: ergo [per 13. 10.] ΕΗ incommensurabilis est ipsi ΗΘ longitudine. atque est [per 1. 6.] ut ΕΗ ad ΗΘ ita quadratum ex ΕΗ ad rectangulum quod sub ΕΗ, ΗΘ continetur: incommensurabile igitur [per 10. 10.] est quadratum ex ΕΗ rectangulo sub ΕΗ, ΗΘ. sed quadrato quidem ex ΕΗ commensurabilia sunt ex ΕΗ, ΗΘ quadrata, utraque enim sunt rationalia, rectangulo autem sub ΕΗ, ΗΘ commensurabile est quod bis sub ΕΗ, ΗΘ continetur, est enim ipsius duplum: ergo [per 14. 10.] quadrata ex ΕΗ, ΗΘ incommensurabilia sunt ei quod bis sub ΕΗ, ΗΘ continetur: & utraq; igitur videlicet quadrata ex ΕΗ, ΗΘ & quod bis continetur sub ΕΗ, ΗΘ, hoc est [per 4. 2.] quadratum ex ΕΘ, incommensurabilia sunt [per 17. 10.] quadratis ex ΕΗ, ΗΘ. sunt autem rationalia quæ fiunt ex ΕΗ, ΗΘ quadrata: irrationale igitur [per 10. def. 10.] est quadratum ex ΕΘ: ac propterea ΕΘ est irrationalis. sed & rationalis, quod fieri non potest.

Non igitur medium superat medium rationali. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Μέσας εὑρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους, ῥητὸν περιεχούσας.

Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, καὶ εἰλήφθω τῶν Α, Β μέση ἀνάλογον ἡ Γ, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ.

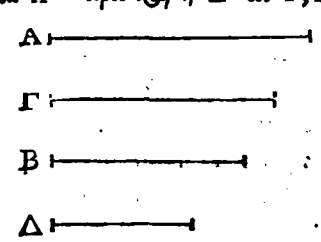
PROP. XXVIII. PROBL.

Medias invenire potentia solum commensurabiles, quæ rationale contineant.

EXponantur duæ rationales potentia solum commensurabiles Α, Β, & sumatur inter ipsas Α, Β [per 13. 6.] media proportionalis Γ, fiatque [per 12. 6.] ut Α ad Β ita Γ ad Δ.

Quoniam

Quoniam igitur A, B rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, erit [per 22. 10.] quod ſub ipſis A, B continetur rectangulum, hoc eſt [per 17. 6.] quadratum ex Γ, medium: ergo recta linea Γ media eſt. & quoniam ut A ad B ita eſt Γ ad Δ, ſuntque A, B potentia ſolum commenſurabiles; & [per 10. 10.] Γ, Δ potentia ſolum commenſurabiles erunt. eſt autem recta linea Γ media: media igitur [per 24. 10.] eſt & Δ: quare Γ, Δ mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles. dico etiam ipſas rationale continere. quoniam enim eſt ut A ad B ita Γ ad Δ, erit permutando [per 16. 5.] ut A ad Γ ita B ad Δ. ſed ut A ad Γ ita Γ ad B: ergo & ut Γ ad B ita B ad Δ: quod igitur ſub ipſis Γ, Δ continetur [per 17. 6.] quadrato ex B eſt æquale. rationale autem eſt quadratum ex B: ergo & quod continetur ſub Γ, Δ rationale erit.



Inventæ igitur ſunt mediæ potentia ſolum commenſurabiles, quæ rationale continent. quod erat faciendum.

Καὶ ἐπεὶ αἱ Α, Β ῥηταὶ εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τ Α, Β, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς Γ, μέσον ἐστί· μέση ἄρα ἡ Γ. καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, αἱ δὲ Α, Β δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ Γ, Δ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καὶ ἔστι μέση ἡ Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ Δ· αἱ Γ, Δ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω δὴ ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Δ. ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Β· καὶ ὡς ἄρα ἡ Γ πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τ Γ, Δ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τ Β. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τ Β· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τ Γ, Δ.

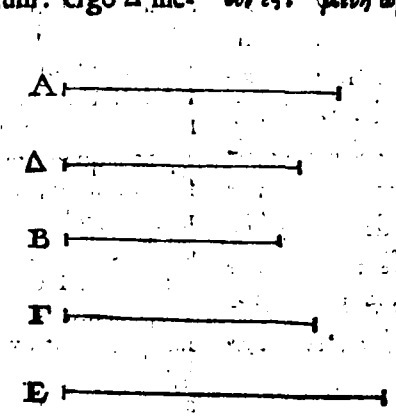
Εὕρηνται ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XXIX. Probl.

Medias invenire potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium contineant.

EXponantur tres rationales potentia ſolum commenſurabiles A, B, Γ, ſumaturque [per 13. 6.] inter ipſas A, B media proportionalis Δ, & [per 12. 6.] fiat ut B ad Γ ita Δ ad E.

Quoniam igitur A, B rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, erit [per 22. 10.] quod ſub A, B continetur rectangulum, hoc eſt [per 17. 6.] quadratum ex Δ, medium: ergo Δ media eſt. & quoniam B, Γ ſunt rationales potentia ſolum commenſurabiles, atque eſt ut B ad Γ ita Δ ad E; rectæ lineæ Δ, E [per 10. 10.] potentia ſolum commenſurabiles erunt. eſt autem Δ media: ergo [per 24. 10.] & E media eſt; ac propterea Δ, E mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles. dico ipſas etiam medium continere. quoniam enim eſt ut B ad Γ ita Δ ad E, erit permutando ut B ad Δ ita Γ ad E. ut autem B ad Δ ita eſt Δ ad A: ergo & ut Δ ad A ita Γ ad E: quod igitur ſub A, Γ continetur rectangulum [per 16. 6.] eſt æquale contento ſub Δ, E. eſt autem [per 22. 10.] quod continetur ſub A, Γ medium: ergo & quod continetur ſub Δ, E medium erit.



Inventæ igitur ſunt mediæ potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium continent. quod erat faciendum.

Lemma.

Invenire duos numeros quadratos, ita ut qui ex ipſis componitur etiam quadratus ſit.

Προτασις κθ'.

Μέσας εὑρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους, μέσον περιεχούσας.

Ἐκκείσθωσαν τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, Γ καὶ εἰλήφθω τ Α, Β μέση ἀνάλογον ἡ Δ, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε.

Ἐπεὶ αἱ Α, Β ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τ Α, Β, τουτέστι τὸ ἀπὸ τ Δ, μέσον ἐστί· μέση ἄρα ἡ Δ. καὶ ἐπεὶ αἱ Β, Γ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, καὶ ἐστιν ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε· αἱ Δ, Ε ἄρα σύμμετροι δυνάμει μόνον εἰσί. μέση δὲ ἡ Δ· μέση ἄρα καὶ ἡ Ε· αἱ Δ, Ε ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω δὴ ὅτι καὶ μέσον περιέχουσι. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε, ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Δ οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Ε. ὡς δὲ ἡ Β πρὸς τὴν Δ οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Α, καὶ ὡς ἄρα ἡ Δ πρὸς τὴν Α οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τ Α, Γ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τ Δ, Ε.

Εὕρηνται ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

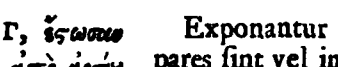
Λημμα.

Εὑρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμούς, ὥστε καὶ τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν εἶναι τετράγωνον.

Ἐκκείσθωσαν

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ, ἴσωσαν δὴ ἤτοι ἄρτιοι ἢ περισσοί. καὶ ἐπεὶ ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ἐὰν ἀπὸ περισσοῦ περισσός, ὁ λοιπὸς ἄρτιός ἐστιν· ὁ λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΓ ἄρτιός ἐστι. πετμήσθω ὁ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ. ἴσωσαν ἢ οὖν οἱ ΑΒ, ΒΓ ἤτοι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἢ τετράγωνοι, εἰ μὲν αὐτοὶ ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι· ὁ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετραγώνῳ. καὶ ἔστι τετράγωνος· ὁ ἄρα τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐπειδήπερ ἐδείχθη ὅτι ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος τετράγωνός ἐστιν· εὕρηται ἄρα δύο τετράγωνοι ἀριθμοί, ὅ, τε ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ ὁ ἀπὸ τῆς ΓΔ, οἱ συναμφότεροι ποιοῦσι τὸν ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Exponantur duo numeri AB, BΓ, qui vel pares ſint vel impares. & quoniam ſive à pari par auferatur, ſive ab impari impar [per 24, & 26. 9.] reliquus par eſt; erit AΓ numerus par. ſecetur AΓ bifariam in Δ. ſint autem AB, BΓ vel ſimiles plani vel quadrati, qui & ipſi ſimiles plani ſunt: ergo [per 6. 2.] qui fit ſub AB, BΓ una cum quadrato ex ΓΔ eſt æqualis ei qui fit ex BΔ quadrato. atque qui fit ex AB, BΓ eſt quadratus; oſtenſum enim eſt [ad 1. 9.] ſi duo ſimiles plani ſeſe multiplicantes aliquem faciant, factum quadratum eſſe: inventi igitur ſunt duo quadrati numeri, videlicet qui fit ſub AB, BΓ & qui fit ex ΓΔ, qui quidem inter ſe compoſiti quadratum numerum faciunt, nempe eum qui fit ex BΔ. quod erat faciendum.



Πόρισμα.

Καὶ φανερὸν ὅτι εὕρηται πάλιν δύο τετράγωνοι, ὅ, τε ὑπὸ τῶν ΒΔ καὶ ὁ ἀπὸ τῆς ΓΔ, ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὴν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ εἶναι τετράγωνον, ὅταν οἱ ΑΒ, ΒΓ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ὦσιν. ὅταν δὲ μὴ ὦσιν ὅμοιοι ἐπίπεδοι, εὕρηται δύο τετράγωνοι, ὅ, τε ἀπὸ τῆς ΒΔ καὶ ὁ ἀπὸ τῆς ΓΔ, ὧν ἡ ὑπεροχή, ὁ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, οὐκ ἔστι τετράγωνον.

Corollarium.

Et manifeſtum eſt rurſus inventos eſſe duos numeros quadratos, & qui fit ex BΔ & qui ex ΓΔ, ita ut ipſorum exceſſus, videlicet qui fit ſub AB, BΓ, ſit quadratus, quando AB, BΓ ſimiles plani ſunt. quando autem non ſunt ſimiles plani, inventi ſunt duo quadrati, & qui fit ex BΔ & qui ex ΓΔ, quorum exceſſus, nempe qui ſub AB, BΓ, non eſt quadratus.

ΛΗΜΜΑ β'.

Εὑρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμοὺς, ὥστε τὸν ἐξ αὐτῶν συγκείμενον μὴ εἶναι τετράγωνον.

Ἔστω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὡς ἔφαμεν, τετράγωνος, καὶ ἄρτιος ὁ ΓΑ, καὶ τετμήσθω ὁ ΓΑ δίχα κατὰ τὸ Δ. φανερὸν δὴ ὅτι ὁ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετραγώνῳ. ἀφῃρήσθω μονὰς ἡ ΔΕ· ὁ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΕ ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετραγώνου. λέγω δή ὅτι ὁ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΕ οὐκ ἔσται τετράγωνος.

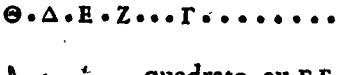
Εἰ γὰρ ἔσται τετράγωνος, ἤτοι ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΕ ἢ ἐλάσσων, οὐκέτι δὲ μείζων, ἵνα μήτε τμηθῇ ἡ μονὰς, μήτε ὁ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ, ὅς ἐστιν ὁ ἀπὸ τῆς ΒΔ, ἴσος ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΕ. ἔστω εἰ δυνατὸν πρότερον ὁ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ τῆς ΒΕ, καὶ ἔστω διπλασίων ὁ ΗΑ τῆς ΔΕ μονάδος. ἐπεὶ οὖν ὅλος ὁ ΑΓ ὅλου τοῦ ΓΔ ἐστὶ διπλασίων, ὧν ὁ ΑΗ ἐστὶ διπλασίων τῆς ΔΕ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΓΗ λοιποῦ τοῦ ΕΓ ἐστὶ διπλασίων. δίχα ἄρα τέτμηται ὁ ΗΓ τῷ Ε· ὁ ἄρα ὑπὸ τῶν ΗΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΕ τετραγώνῳ. ἀλλὰ καὶ ὁ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΕ ἴσος ὑπόκειται τῷ ἀπὸ τῆς ΒΕ τετραγώνῳ· ὁ ἄρα ὑπὸ τῶν ΗΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΕ. καὶ κοινοῦ ἀφῃρήσθω τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΕ, συνάγεται ὁ ΑΒ ἴσος τῷ ΗΒ, ὅπερ ἄτοπον·

LEMMA 2.

Invenire duos quadratos numeros, ita ut qui ex ipſis componitur non ſit quadratus.

Sit enim qui ſub AB, BΓ quadratus, ut dictum eſt [ad lem. præc.] & par numerus ΓA; ſeceturque ΓA bifariam in Δ: perſpicuum eſt [per 6. 2.] quadratum factum ex AB, BΓ una cum quadrato ex ΓΔ æqualem eſſe ei qui fit ex BΔ quadrato. auferatur unitas ΔE; ergo quadratus ex AB, BΓ una cum quadrato ex ΓE minor eſt quadrato ex BΔ. dico igitur quadratum factum ex AB, BΓ una cum quadrato ex ΓE quadratum non eſſe.

Si enim eſt quadratus, vel æqualis eſt quadrato ex BE vel eo minor, non autem major, ut ne unitas ſecetur, neve qui ex AB, BΓ una cum quadrato ex ΓΔ, qui eſt æqualis quadrato ex BΔ, æqualis ſit quadrato facto ex AB, BΓ una cum quadrato ex ΓE. ſit primum, ſi fieri poteſt, qui ex AB, BΓ una cum quadrato ex ΓE æqualis quadrato ex BE; & ſit HA duplus ipſius ΔE unitatis. quoniam igitur totus AΓ totius ΓΔ eſt duplus, quorum AH eſt duplus ΔE; erit & reliquus ΓH reliqui EΓ duplus. ergo HΓ in E bifariam ſecatur: ac propterea qui ex HB, BΓ una cum quadrato ex ΓE æqualis [per 6. 2.] ei qui fit ex BE quadrato. ſed & qui ex AB, BΓ una cum quadrato ex ΓB æqualis ponitur quadrato ex BE: ergo qui ex HB, BΓ una cum quadrato ex ΓE eſt æqualis ei qui ſub AB, BΓ una cum quadrato ex ΓE. & communi detracto quadrato ex ΓE, concludetur AB ipſi HB æqualis, quod eſt abſurdum:



ſurdum: non igitur qui ex AB, BΓ una cum quadrato ex ΓE æqualis eſt quadrato ex BE. dico neque quadrato ex BE minorem eſſe. ſi enim fieri poteſt, ſit quadrato ex BZ æqualis, & ipſius ΔZ duplus ponatur ΘA. concludetur rurſus ΘΓ duplus ΓZ,

ita ut & ΘΓ in Z bifariam dividatur; ac propterea qui ex ΘB, BΓ una cum quadrato ex ΓZ [per 6. 2.] æqualis ſit quadrato ex BZ. ponitur autem & qui ex AB, BΓ una cum quadrato ex ΓE æqualis quadrato ex ZB: ergo ſequitur qui ex AB, BΓ una cum quadrato ex ΓE æqualem eſſe ei qui ex ΘB, BΓ una cum quadrato ex ΓZ, quod eſt abſurdum: non igitur qui ex AB, BΓ una cum quadrato ex ΓE eſt æqualis minori quam ſit quadratus ex BE. oſtenſum eſt autem neque ipſi quadrato ex BE, neque majori eo æqualem eſſe: ergo qui fit ex AB, BΓ una cum quadrato ex ΓE non eſt quadratus. & cum fieri poſſit, ut idem pluribus modis oſtendatur, unus qui proxime dictus eſt nobis ſufficiat, ne longam tractationem longius producamus.

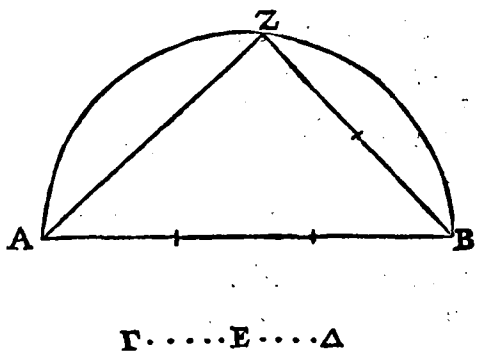
πον· οὐκ ἄρα ὁ σὺν τῷ ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΕ. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ ἴσος, καὶ τοῦ ΔΖ διπλάσιος κείσθω ὁ ΘΑ. συναχθήσεται πάλιν διπλάσιος ὁ ΘΓ τοῦ ΓΖ, ὥστε καὶ τὸ ΘΓ δίχα τετμῆσθαι κατὰ τὸ Ζ· καὶ διὰ τοῦτο τὸ σὺν τῷ ΘΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΖ ἴσον γίνεσθαι τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὁ σὺν τῷ ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ· συναχθήσεται ἄρα ἴσος ὁ σὺν τῷ ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΕ τῷ σὺν τῷ ΘΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΖ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ σὺν τῷ ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐλάσσονι τοῦ ἀπὸ ΒΕ. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ αὐτῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΕ, οὐδὲ μείζονι αὐτοῦ· οὐκ ἄρα ὁ σὺν τῷ ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΕ τετράγωνός ἐστι. δυνατὸν δὴ ὄντος καὶ κατὰ πλείονας τρόπους τὸ εἰρημένον ἀποδεικνύναι, ἀρκείσθω ἡμῖν ὁ εἰρημένος, ἵνα μὴ μακροτέρας ὄσης τῆς πραγματείας ἐπιπλέον αὐτὴν μηκύνωμεν.

Prop. XXX. Probl.

Invenire duas rationales potentia ſolum commenſurabiles, ita ut major plus poſſit quam minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

EXponatur enim quædam rationalis AB, & [per cor. lem. 1.] duo quadrati numeri ΓΔ, ΔΕ, ita ut ipſorum exceſſus ΓΕ non ſit quadratus: deſcribatur autem ſuper rectam lineam AB ſemicirculus AZB, fiatque [per cor. 6. 10.] ut ΔΓ ad ΓΒ ita ex AB quadratum ad quadratum ex AZ; & ZB jungatur.

Quoniam igitur eſt ut quadratum ex BA ad quadratum ex AZ ita ΔΓ ad ΓΒ, habebit quadratum ex BA ad quadratum ex AZ rationem eam quam numerus ΔΓ ad ΓΒ numerum: ergo [per 6. 10.] quadratum ex BA quadrato ex AZ eſt commenſurabile. ſed [per 8. def. 10.] rationale eſt quadratum ex AB: ergo [per 9. def. 10.] & quadratum ex AZ rationale erit; ac propterea [per 6. def. 10.] recta linea AZ eſt rationalis. & quoniam [per conſtr.] ΔΓ ad ΓΒ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque quadratum ex BA ad quadratum ex AZ rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum: incommenſurabilis igitur eſt [per 9. 10.] recta linea BA ipſi AZ longitudine: ergo [per 3. def. 10.] AB, AZ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. quod cum ſit ut ΔΓ ad ΓΕ ita



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Εὑρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους, ὥστε τὸν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

ΕΚκείσθω γάρ τις ῥητὴ ἡ ΑΒ, καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΓΔ, ΔΕ, ὥστε τὸν ὑπερέχοντα αὐτῶν τὴν ΓΕ μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΒ, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ οὕτως ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ, τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς ὁ ΔΓ πρὸς ἀριθμὸν τὸν ΓΕ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΖ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΑΖ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΑΖ μήκει· αἱ ΑΒ, ΑΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ

οὕτως

ἔστως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΑ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ ἔστως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ. ὁ δὲ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΖ μήκει. καὶ ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΒ· ἡ ΑΒ ἄρα τῆς ΑΖ μεῖζον δύναται τῇ ΒΖ συμμέτρῳ ἑαυτῇ μήκει.

Εὕρηνται ἄρα δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΒΑ, ΑΖ, ὥστε τὸν μείζονα τὸν ΒΑ τῆς ἐλάσσονος τῆς ΑΖ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

quadratum ex ΒΑ ad quadratum ex ΖΑ, erit per converſionem rationis [per 19. 5. & 47. 1.] ut ΓΔ ad ΔΕ ita quadratum ex ΑΒ ad quadratum ex ΒΖ. ſed ΓΔ ad ΔΕ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ergo & quadratum ex ΑΒ ad quadratum ex ΒΖ rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & ob id recta linea ΑΒ [per 9. 10.] ipſi ΒΖ longitudine eſt commenſurabilis. atque eſt [per 47. 1.] quadratum ex ΑΒ æquale quadratis ex ΑΖ, ΖΒ: ergo ΑΒ plus poteſt quam ΑΖ quadrato rectæ lineæ ΒΖ ſibi commenſurabilis longitudine.

Inventæ igitur ſunt duæ rationales potentia ſolum commenſurabiles ΒΑ, ΑΖ, ita ut major ΒΑ plus poteſt quam minor ΑΖ quadrato ipſius ΖΒ ſibi longitudine commenſurabilis. quod erat faciendum.

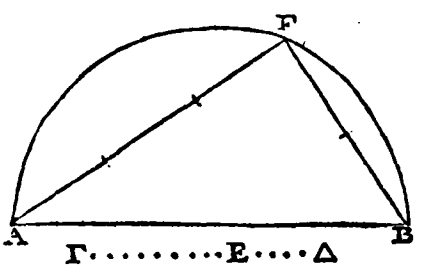
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

Εὑρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους, ὥστε τὸν μείζονα τῆς ἐλάττονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

PROP. XXXI. PROBL.

Invenire duas rationales potentia ſolum commenſurabiles, ita ut major plus poſſit quam minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΑΒ, καὶ δύο τετράγωνοι οἱ ΓΕ, ΕΔ, ὥστε τὸ συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΓΔ μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΒ, καὶ πεπειάσθω ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ ἔστως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ· ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου, ὅτι αἱ ΑΒ, ΑΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ ἔστως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ ἔστως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ. ὁ δὲ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΖ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΑΒ τῆς ΑΖ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ· αἱ ΑΒ, ΒΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΒ τῆς ΑΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



EXponatur rationalis ΑΒ, & [per 2. lem. 30. 10.] duo numeri quadrati ΓΕ, ΕΔ, ita ut ΓΔ qui ex ipſis componitur non ſit quadratus; atque ſuper rectam lineam ΑΒ ſemicirculus ΑΖΒ deſcribatur, & fiat [per cor. 6. 10.] ut ΔΓ ad ΓΕ ita quadratum ex ΑΒ ad quadratum ex ΑΖ, & jungatur ΖΒ: ſimiliter quidem oſtendemus, ut in antecedente, ΑΒ, ΑΖ rationales eſſe potentia ſolum commenſurabiles. & quoniam eſt ut ΔΓ ad ΓΕ ita quadratum ex ΒΑ ad id quod ex ΑΖ quadratum; erit per converſionem rationis ut ΓΔ ad ΔΕ ita quadratum ex ΑΒ ad quadratum ex ΒΖ. ſed [per conſtr.] ΓΔ ad ΔΕ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum: non igitur quadratum ex ΑΒ ad quadratum ex ΒΖ rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ergo [per 9. 5.] ΑΒ ipſi ΒΖ longitudine eſt incommenſurabilis. & ΑΒ plus poteſt quam ΑΖ quadrato rectæ lineæ ΒΖ ſibi incommenſurabilis longitudine: quare ΑΒ, ΒΖ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, & ΑΒ plus poteſt quam ΑΖ quadrato rectæ lineæ ΖΒ ſibi longitudine incommenſurabilis. quod erat faciendum.

*ΛΗΜΜΑ.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινί, ἔσται ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς εὐθεῖαν οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς δύο πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης.

Ἐστωσαν δὴ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ ἐν λόγῳ τινί· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ

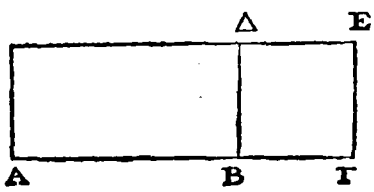
LEMMA.

Si ſint duæ rectæ lineæ in ratione aliqua, erit ut recta linea ad rectam lineam ita rectangulum ſub duabus rectis lineis contentum ad quadratum minoris.

Sint duæ rectæ lineæ ΑΒ, ΒΓ in ratione aliqua: dico ut ΑΒ ad ΒΓ ita eſſe re-

* Lemma hoc non agnoſcunt pleraque exemplaria.

ctangulum ſub AB, BΓ ad quadratum ex BΓ. deſcribatur enim ex BΓ quadratum BΔEΓ, & compleatur AΔ parallelogrammum. manifeſtum eſt [per 1. 6.] ut AB ad BΓ ita eſſe AΔ parallelogrammum ad parallelogrammum BE. atque eſt AΔ quidem quod ſub AB, BΓ continetur, eſt enim BΓ ipſi BΔ æqualis, BE vero eſt quadratum ex BΓ: ut igitur AB ad BΓ ita rectangulum ſub AB, BΓ ad quadratum ex BΓ. quod erat demonſtrandum.

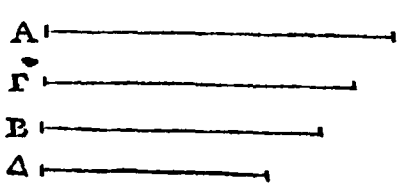


τὸ τῶν AB, BΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BΓ. ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς BΓ τετράγωνον τὸ BΔEΓ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ AΔ παραλληλόγραμμον. φανερὸν δὴ ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BΓ οὕτως τὸ AΔ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ BE παραλληλόγραμμον. καί ἐστι τὸ μὲν AΔ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ, ἴση γὰρ ἡ BΓ τῇ BΔ, τὸ δὲ BE τὸ ἀπὸ τῆς BΓ· ὡς ἄρα ἡ AB πρὸς τὴν BΓ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXXII. Probl.

Invenire duas medias potentia ſolum commenſurabiles, quæ rationale contineant; ita ut major plus poſſit quam minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

EXponantur enim [per 30. 10.] duæ rationales potentia ſolum commenſurabiles A, B, ita ut A major plus poſſit quam B minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. & ſit rectangulo ſub A, B æquale quadratum quod fit à recta linea Γ. medium autem eſt [per 22. 10.] quod ſub A, B: ergo & quadratum ex Γ medium erit; ideoque ipſa Γ media. quadrato vero quod fit ex B æquale ſit rectangulum ſub Γ, Δ; rationale autem eſt quod ex B: ergo & rectangulum ſub Γ, Δ eſt rationale. & quoniam eſt [per lem. præc.] ut A ad B ita rectangulum ſub A, B ad quadratum ex B, ſed [per conſtr.] rectangulo quidem ſub A, B æquale eſt quadratum ex Γ, quadrato autem ex B æquale rectangulum ſub Γ, Δ: erit ut A ad B ita quadratum ex Γ ad rectangulum ſub Γ, Δ. ſed [per lem. præc.] ut quadratum ex Γ ad rectangulum ſub Γ, Δ ita recta linea Γ ad ipſam Δ: ut igitur A ad B ita Γ ad Δ. commenſurabilis autem eſt A ipſi B potentia ſolum: ergo [per 10. 10.] & Γ ipſi Δ potentia ſolum eſt commenſurabilis. atque eſt Γ media: media igitur [per 24. 10.] eſt & Δ. & quoniam eſt ut A ad B ita Γ ad Δ, & A plus poteſt quam B quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine; & Γ plus poterit quam Δ [per 15. 10.] quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.



Inventæ igitur ſunt duæ mediæ potentia ſolum commenſurabiles Γ, Δ, quæ rationale continent, & Γ plus poteſt quam Δ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. quod erat faciendum.

Similiter autem oſtendetur *inveniri poſſe duas medias potentia ſolum commenſurabiles & continentes rationale, ita ut major plus poſſit quam minor* quadrato *rectæ lineæ* ſibi incommenſurabilis *longitudine*, quando A plus poſſit *quam* B quadrato rectæ lineæ ſibi *longitudine* incommenſurabilis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ'.

Εὑρεῖν δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέτρους, ῥητὸν περιεχούσας· ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

ΕΚκείσθωσαν γὰρ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ A, B, ὥστε τὴν A μείζονα οὖσαν τῆς ἐλάσσονος τὴν B μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ τῷ ὑπὸ τῶν A, B ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Γ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν A, B· μέσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ Γ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς B ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ, ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς B· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν A, B πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B, ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν A, B ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Γ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς B ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ· ὡς ἄρα ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· καὶ ὡς ἄρα ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ. σύμμετρος δὲ ἡ A τῇ B δυνάμει μόνον· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ Γ τῇ Δ δυνάμει μόνον. καὶ ἔστι μέση ἡ Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ Δ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἡ δὲ A τῆς B μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· καὶ ἡ Γ ἄρα τῆς Δ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Εὑρέαται ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Γ, Δ ῥητὸν περιέχουσαι, καὶ ἡ Γ τῆς Δ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῷ μήκει. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ομοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τὸ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ A μεῖζον δυνῇ ἢ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

* Lemma.

Si fuerint tres rectæ lineæ in ratione aliqua, erit ut prima ad tertiam ita rectangulum conten-

* Λημμα.

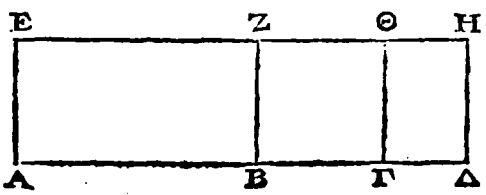
Ἐὰν ὦσι τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινί, ἔσαι ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης

* Lemma hoc non agnoſcunt *Codd. MSS.*

πρώτης καὶ μέσης πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς μέσης καὶ ἐλαχίστης.

Εκκείσθωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινὶ, αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ.

Ηχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΕ, καὶ κείσθω τῇ ΒΓ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου τῇ ΑΔ εὐθείᾳ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΗ, διὰ δὲ τῶν Β, Γ, Δ σημείων τῇ ΑΕ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΖΒ, ΘΓ, ΗΔ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΒΘ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ΒΘ πρὸς τὸ ΓΗ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΗ παραλληλόγραμμον. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ, τὸ δὲ ΓΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ, ἴση γὰρ ἡ ΒΓ τῇ ΓΘ.



Ἐὰν ἄρα τρεῖς ὦσιν εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινὶ, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν πρώτης καὶ μέσης πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν μέσης καὶ τρίτης. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

tum ſub prima & media ad id quod ſub media & tertia continetur.

Sint tres rectæ lineæ in ratione aliqua AB, BΓ, ΓΔ: dico ut AB ad ΓΔ ita eſſe rectangulum contentum ſub AB, BΓ ad id quod ſub BΓ, ΓΔ continetur.

Ducatur enim à puncto A ipſi AB ad rectos angulos AE, ponaturque AE ipſi BΓ æqualis, & per E quidem ipſi AΔ parallela recta ducatur EH, per puncta vero B,Γ,Δ ducantur ZB, ΘΓ, HΔ parallelæ ipſi AE. quoniam igitur eſt [per 1. 6.] ut AB ad BΓ ita AZ parallelogrammum ad BΘ parallelogrammum, ut autem BΓ ad ΓΔ ita parallelogrammum BΘ ad ipſum ΓH: erit ex æquo ut AB ad ΓΔ ita AZ parallelogrammum ad parallelogrammum ΓH. & eſt parallelogrammum quidem AZ quod ſub AB, BΓ continetur, namque AE eſt æqualis BΓ; parallelogrammum vero ΓH eſt quod continetur ſub BΓ, ΓΔ, etenim BΓ eſt æqualis ΓΘ.

Si igitur fuerint tres rectæ lineæ in ratione aliqua, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum quod continetur ſub prima & media ad rectangulum ſub media & tertia contentum. quod erat demonſtrandum.

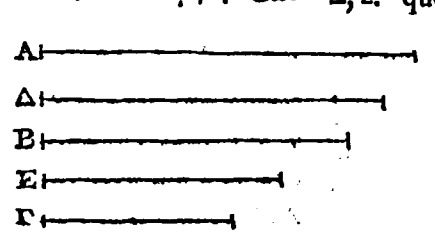
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Εὑρεῖν δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέτρους, μέσον περιεχούσας· ὥστε τὴν μείζονα τοῦ ἐλάττονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

PROP. XXXIII. THEOR.

Invenire duas medias potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium contineant; ita ut major plus poſſit quam minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

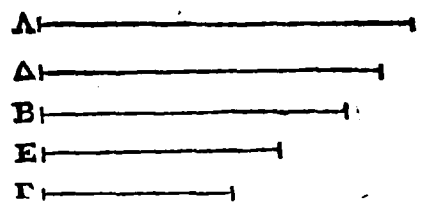
Εκκείσθωσαν τρεῖς ῥηταὶ αἱ Α, Β, Γ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ὥστε τὴν Α τοῦ Γ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· καὶ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ, * μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β· μέσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Δ· καὶ ἡ Δ ἄρα μέση ἐστί. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῆς Δ, Ε. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Β, Γ οὕτως ἡ Α πρὸς τὴν Γ, ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Δ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε. σύμμετρος δὲ ἡ Α τῇ Γ δυνάμει μόνον· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ Δ τῇ Ε δυνάμει μόνον. μέση δὲ ἡ Δ· μέση ἄρα καὶ ἡ Ε. καὶ



Exponantur [per 30.10.] tres rationales A, B, Γ potentia ſolum commenſurabiles, ita ut A plus poſſit quam Γ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, & [per 14. 2.] fit rectangulo ſub ipſis A, B æquale quadratum quod fit ex Δ, medium autem eſt [per 22.10.] rectangulum ſub A, B: ergo & quadratum ex Δ medium erit; ideoque recta linea Δ media. rectangulo autem ſub B,Γ æquale ſit [per 45.1.] rectangulum ſub Δ, E. quoniam igitur eſt [per 1. 6.] ut rectangulum ſub A, B ad rectangulum ſub B, Γ ita recta linea A ad ipſam Γ, ſed rectangulo quidem ſub A, B æquale eſt quod fit ex Δ quadratum, rectangulo autem ſub B,Γ æquale rectangulum ſub Δ, E; erit ut A ad Γ ita quadratum ex Δ ad rectangulum ſub Δ, E. ſed [per lem. 32. 10.] ut quadratum ex Δ ad rectangulum ſub Δ, E ita Δ ad E: & igitur ut A ad Γ ita Δ ad E. commenſurabilis autem eſt [per conſtr.] A ipſi Γ potentia ſolum: ergo [per 10. 10.] & Δ ipſi E potentia ſolum eſt commenſurabilis. atque eſt Δ media: media igitur [per 24. 10.] eſt & E. itaque

* Illa μέση δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β deſiderantur in Codd. MSS.

quoniam eſt ut A ad Γ ita Δ ad E, & A plus poteſt quam Γ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; & Δ plus poterit quam E [per 15. 10.] quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. dico præterea rectangulum ſub Δ, E medium eſſe. quoniam enim rectangulo ſub B, Γ æquale eſt [per conſtr.] rectangulum ſub Δ, E; medium autem eſt quod ſub B, Γ: ergo & quod ſub Δ, E medium erit.



Inventæ igitur ſunt duæ mediæ potentia ſolum commenſurabiles Δ, E, quæ medium contineant; ita ut major plus poſſit quam minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. quod erat faciendum.

Rurſus ſimiliter oſtenditur *quomodo inveniuntur duæ mediæ potentia ſolum commenſurabiles & medium continentes, ita ut major plus poſſit quam minor* quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis *longitudine*; quando A ſcilicet plus poſſit quam Γ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε, ἡ δὲ Α τῆς Γ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· καὶ ἡ Δ ἄρα τῆς Ε μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. λέγω δὴ ὅτι καὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Γ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε, μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Β, Γ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε.

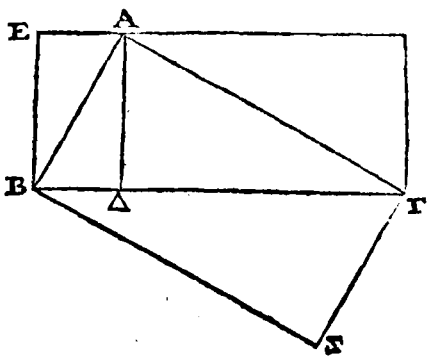
Εὕρηνται ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Δ, Ε, μέσον περιέχουσαι· ὥστε τὸ ἐλάσσονα μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ὁμοίως δὲ πάλιν δειχθήσεται καὶ τὸ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ Α τοῦ ἀπὸ τῆς Γ μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

LEMMA 1.

Sit triangulum rectangulum ABΓ, rectum habens angulum BAΓ, & ducatur AΔ perpendicularis: dico rectangulum quidem ſub ΓB, BΔ æquale eſſe quadrato quod fit ex BA, quod vero ſub BΓ, ΓΔ æquale quadrato ex ΓA, & quod ſub BΔ, ΔΓ æquale quadrato ΔA, & denique rectangulum ſub BΓ, AΔ rectangulo ſub BA, AΓ æquale eſſe. & primum quod rectangulum ſub ΓB, BΔ æquale eſt quadrato ex BA.

Quoniam enim in triangulo rectangulo ab angulo recto ad baſim perpendicularis ducta eſt AΔ, triangula ABΔ, AΔΓ [per 8. 6.] ſimilia ſunt & toti triangulo ABΓ & inter ſeſe. & quoniam ſimile eſt ABΓ triangulum triangulo ABΔ, [per 1. def. 6.] erit ut ΓB ad BA ita BA ad BΔ: ergo [per 17. 6.] rectangulum ſub ΓB, BΔ quadrato ex AB eſt æquale. eadem ratione & rectangulum ſub BΓ, ΓΔ æquale eſt quadrato ex AΓ. & quoniam ſi in triangulo rectangulo ab angulo recto ad baſim perpendicularis ducatur, [per cor. 8. 6.] ducta inter ſegmenta baſis media proportionalis eſt, erit ut BΔ ad ΔA ita AΔ ad ΔΓ; ac propterea rectangulum ſub BΔ, ΔΓ eſt æquale quadrato ex AΔ. dico & rectangulum ſub BΓ, AΔ ei quod ſub BA, AΓ continetur æquale eſſe. quoniam enim, ut diximus, triangulum ABΓ triangulo ABΔ eſt ſimile, ut BΓ ad ΓA ita erit BA ad ΔA. ſi autem quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, [per 16. 6.] rectangulum ſub extremis eſt æquale ei quod ſub mediis: ergo rectangulum ſub BΓ, AΔ rectangulo ſub BA, AΓ æquale erit. dico præterea ſi deſcribamus parallelogrammum re-



ΛΗΜΜΑ α'.

Ἐστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΑ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. καὶ πρῶτον ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΑ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΑΔ, τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ ἄρα τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ Β Α πρὸς τὴν ΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. καὶ ἐπεὶ ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ. λέγω ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. ἐπεὶ γάρ, ὡς ἔφαμεν, ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΑΒΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. ἐὰν ᾖ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. καὶ ὅτι ἐὰν ἀναγράψωμεν τὸ ΕΓ ὀρ-

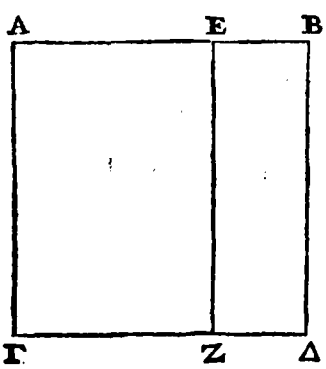
θογώνιον

ϑογώνιον παραλληλόγραμμον, καὶ συμπληρώσωμεν τὸ ΑΖ, ἴσον ἔσται τὸ ΕΓ τῷ ΑΖ, ἑκάτερον γὰρ αὐτῶν διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· καὶ ἔστι τὸ μὲν ΕΓ τὸ ὑπὸ τὰ ΒΓ, ΑΔ, τὸ δὲ ΑΖ τὸ ὑπὸ τὰ ΒΑ, ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τὰ ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

* ΛΗΜΜΑ β'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, ἔσται ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν οὕτως τὸ ὑπὸ τ᾽ ὅλης καὶ τοῦ μείζονος πρὸς τὸ ὑπὸ τ᾽ ὅλης καὶ τ᾽ ἐλάσσονος.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Ε· λέγω ὅτι ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως τὸ ὑπὸ τὰ ΒΑ, ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τὰ ΒΑ, ΒΕ.

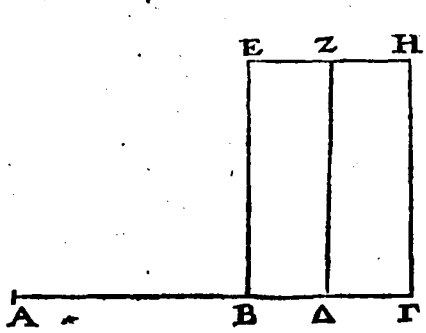


Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τ᾽ ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΓΔΒ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου ὁποτέρᾳ τ᾽ ΑΓ, ΔΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ. Φανερὸν δή ἐστιν ὅτι ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΒ παραλληλόγραμμον. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΖ τὸ ὑπὸ τὰ ΒΑ, ΑΕ, ἴση γὰρ ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, τὸ δὲ ΖΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ, ἴση γὰρ ἡ ΔΒ τῇ ΑΒ· ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως τὸ ὑπὸ τὰ ΒΑ, ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τὰ ΑΒ, ΒΕ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΛΗΜΜΑ γ'.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τμηθῇ δὲ ἡ ἐλάσσων αὐτῶν εἰς ἴσα· τὸ ὑπὸ τὰ δύο εὐθειῶν διπλάσιον ἔσται τοῦ ὑπὸ τὰ μείζονος καὶ τ᾽ ἡμισείας τ᾽ ἐλαχίστης.

Ἐστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τὰ ΑΒ, ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τὰ ΑΒ, ΒΔ.



Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ, καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΒΕ, καὶ παραγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἔστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως τὸ ΒΖ πρὸς τὸ ΔΗ, συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως τὸ ΒΗ πρὸς τὸ ΔΗ. καὶ ἔστιν ἡ ΒΓ τ᾽ ΔΓ διπλασίων· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΗ τοῦ ΔΗ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΑΒ τῇ ΒΕ, τὸ δὲ ΔΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ, ἴση γὰρ τῇ μὲν ΒΔ ἡ ΔΓ, τῇ δὲ ΑΒ ἡ ΔΖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ctangulum ΕΓ, & ipſum ΑΖ compleamus, rectangulum ΕΓ ipſi ΑΖ æquale eſſe, utrumque enim ipſorum duplum eſt trianguli ΑΒΓ: atque eſt rectangulum quidem ΕΓ id quod ſub ΒΓ, ΑΔ continetur, rectangulum vero ΑΖ id quod continetur ſub ΒΑ, ΑΓ: rectangulum igitur ſub ΒΓ, ΑΔ rectangulo ſub ΒΑ, ΑΓ eſt æquale. quod erat demonſtrandum.

* LEMMA 2.

Si recta linea in partes inæquales ſecetur, erit ut major pars ad minorem ita rectangulum ſub tota & majori parte ad rectangulum ſub tota & minori.

Recta enim linea ΑΒ ſecetur in partes inæquales ad Ε: dico ut ΑΕ ad ΕΒ ita eſſe rectangulum ſub ΒΑ, ΑΕ ad id quod ſub ΒΑ, ΒΕ continetur.

Deſcribatur enim ex ΑΒ quadratum ΑΓΔΒ, & per Ε quidem alterutri ipſarum ΑΓ, ΔΒ parallela ducatur ΕΖ. perſpicuum eſt [per 1. 6.] ut ΑΕ ad ΕΒ ita eſſe ΑΖ parallelogrammum ad parallelogrammum ΖΒ. atque eſt ΑΖ quidem parallelogrammum quod ſub ΒΑ, ΑΕ continetur, etenim ΑΓ ipſi ΑΒ eſt æqualis; parallelogrammum vero ΖΒ eſt quod continetur ſub ΑΒ, ΒΕ, æqualis enim eſt ΔΒ ipſi ΑΒ: ut igitur ΑΕ ad ΕΒ ita rectangulum ſub ΒΑ, ΑΕ ad id quod ſub ΑΒ, ΒΕ continetur. quode rat demonſtrandum.

LEMMA 3.

Si ſint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem ipſarum in partes æquales ſecetur; rectangulum contentum ſub duabus rectis lineis duplum erit ejus quod ſub majori & dimidia minoris continetur.

Sint duæ rectæ lineæ inæquales ΑΒ, ΒΓ, quarum major ΑΒ; & ſecetur ΒΓ bifariam in puncto Δ: dico rectangulum ſub ΑΒ, ΒΓ duplum eſſe ejus quod ſub ΑΒ, ΒΔ continetur.

Ducatur enim à puncto Β ipſi ΒΓ ad rectos angulos ΒΕ, ponaturque ΒΕ ipſi ΒΑ æqualis, & figura deſcribatur. quoniam igitur [per 1. 6.] eſt ut ΔΒ ad ΔΓ ita parallelogrammum ΒΖ ad parallelogrammum ΔΗ; erit componendo ut ΒΓ ad ΔΓ ita parallelogrammum ΒΗ ad ipſum ΔΗ. eſt autem ΒΓ dupla ipſius ΔΓ: ergo & parallelógrammum ΒΗ parallelogrammi ΔΗ eſt duplum. atque eſt ΒΗ quidem, quod ſub ΑΒ, ΒΓ continetur, etenim ΑΒ eſt æqualis ΒΕ; ΔΗ vero eſt quod continetur ſub ΑΒ, ΒΔ, nam ΔΓ ipſi ΒΔ & ΔΖ ipſi ΑΒ eſt æqualis. quod erat demonſtrandum.

* Lemmata duo ſequentia deſiderantur in noſtris *Codd. MSS.* nec ab *Euclide* eſſe arbitramur.

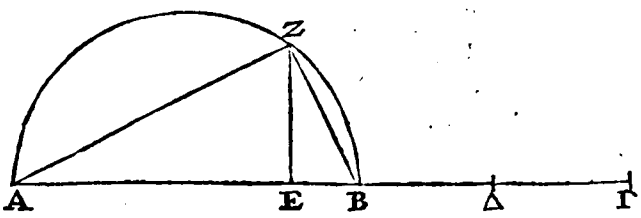
PROP. XXXIV. PROBL.

Invenire duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, rectangulum vero quod ſub ipſis continetur medium.

EXponantur [per 31. 10.] duæ rationales potentia ſolum commenſurabiles AB, BΓ, ita ut major AB plus poſſit quam minor BΓ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, & recta BΓ ſecta ſit bifariam ad Δ, & quadrato quod fit ab alterutra ipſarum BΔ, ΔΓ æquale parallelogrammum ad rectam lineam AB applicetur [per 28. 6.] deficiens figura quadrata, & ſit quod continetur ſub AE, EB, & deſcribatur ſuper rectam lineam AB ſemicirculus AZB, ducaturque ipſi AB ad rectos angulos EZ, & AZ, ZB jungantur.

Quoniam igitur duæ rectæ lineæ AB, BΓ inæquales ſunt, & AB plus poteſt quam BΓ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, quartæ autem parti quadrati quod fit à minori BΓ, hoc eſt quadrato dimidiæ ipſius, æquale parallelogrammum applicatum eſt ad AB, deficiens figura quadrata, quod quidem ſub AE, EB continetur; erit [per 19. 10.] AE ipſi EB incommenſurabilis: & quoniam eſt [per 1. 6.] ut AE ad EB ita rectangulum ſub BA, AE ad rectangulum ſub AB, BE, rectangulum autem ſub AB, AE [per 1. lem. præc.] quadrato ex AZ eſt æquale, & rectangulum ſub AB, BE æquale quadrato ex BZ: quadratum igitur ex AZ incommenſurabile eſt quadrato ex ZB: ideoque rectæ lineæ AZ, ZB potentia ſunt incommenſurabiles. & quoniam AB rationalis eſt, & quadratum quod fit ex AB erit rationale: ergo & rationale compoſitum ex quadratis ipſarum AZ, ZB. Rurſus, quoniam rectangulum ſub AE, EB eſt æquale quadrato ex EZ, ponitur autem rectangulum ſub AE, EB quadrato etiam ex BΔ æquale: ergo ZE eſt æqualis BΔ: ac propterea BΓ ipſius EZ eſt dupla: rectangulum igitur ſub AB, BΓ [per 1. 6.] duplum eſt rectanguli ſub AB, EZ. ſed [per 22. 10.] rectangulum ſub AB, BΓ eſt medium: ergo & medium eſt quod continetur ſub AB, EZ. eſt autem [per 1. lem. præc.] quod ſub AB, EZ continetur æquale contento ſub AZ, ZB: contentum igitur ſub AZ, ZB medium eſt. ſed & oſtenſum eſt rationale eſſe quod componitur ex ipſarum quadratis.

Inventæ igitur ſunt duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles AZ, ZB, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, rectangulum vero quod ſub ipſis continetur medium. quod erat faciendum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον.

ΕΚκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ AB, BΓ, ὥστε τὸ μεῖζον τὸ AB τῆς ἐλάσσονος τῆς BΓ μεῖζον δυνάσθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τετμήσθω ἡ BΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ τῷ ἀφ' ὁποτέρας τῶν BΔ, ΔΓ ἴσον παρὰ τὴν AB παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τὰς AE, EB, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τὴν AB ἡμικύκλιον τὸ AZB, καὶ ἤχθω τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ EZ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AZ, ZB.

Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ AB, BΓ, καὶ ἡ AB τῆς BΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς BΓ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας αὐτῆς, ἴσον παρὰ τὴν AB παραβέβληται παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ποιεῖ τὸ ὑπὸ τὰς AE, EB· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AE τῇ EB. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ AE πρὸς τὴν EB οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν BA, AE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AB, BE, ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν AB, AE τῷ ἀπὸ τῆς AZ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AB, BE τῷ ἀπὸ τῆς BZ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AZ τῷ ἀπὸ τῆς ZB· αἱ AZ, ZB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ἡ AB ῥητή ἐστι, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AZ, ZB ῥητόν ἐστι. καὶ ἐπεὶ πάλιν τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EZ, ὑπόκειται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB καὶ τῷ ἀπὸ τῆς BΔ ἴσον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ZE τῇ BΔ· διπλῆ ἄρα ἡ BΓ τῆς EZ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν AB, EZ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, EZ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB, EZ τῷ ὑπὸ τῶν AZ, ZB· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZB. ἐδείχθη δὲ καὶ ῥητὸν τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων.

Εὕρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ AZ, ZB, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

Prop. XXXV. Probl.

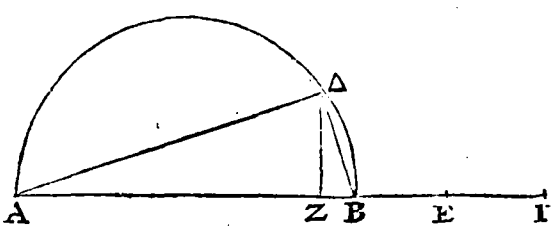
Invenire duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, rectangulum vero quod ſub ipſis continetur rationale.

Ἐκκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπ' αὐτῶν, ὥστε τὴν ΑΒ τῆς ΒΓ μεῖζον δυνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ ΑΔΒ ἡμικύκλιον, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΕ ἴσον παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΒ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ μήκει. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΒ.

Ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΖ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΖ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· * αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, μέσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ διπλάσιόν ἐστιν ἡ ΒΓ τῆς ΔΖ· διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ· ὥστε καὶ σύμμετρον. ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὑποκείται γὰρ ἕκτως· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητόν ἐστιν.

Εὕρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΔ, ΔΒ, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

EXponantur [per 32. 10.] duæ mediæ potentia ſolum commenſurabiles AB, BΓ, quæ rationale contineant, ita ut AB plus poſſit quam BΓ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, & ſuper ipſam AB deſcribatur ſemicirculus AΔB, ſeceturq; BΓ bifariam in E, & [per 28.6.] applicetur ad AB parallelogrammum æquale quadrato ipſius BE deficiens figura quadrata, & ſit quod continetur ſub AZ, ZB: incommenſurabilis igitur eſt [per 19. 10.] AZ ipſi ZB longitudine. à puncto autem Z ipſi AB ad rectos angulos ducatur ZΔ, & AΔ, ΔB jungantur.



Itaque quoniam AZ eſt incommenſurabilis ZB [per 1.6. & 10.10.] erit & rectangulum ſub BA, AZ rectangulo ſub AB, BZ incommenſurabile. eſt autem [per 1. lem. 34. 10.] rectangulum quidem ſub BA, AZ quadrato ipſius AΔ æquale, rectangulum vero ſub AB, BZ æquale quadrato ipſius ΔB: incommenſurabile igitur eſt quadratum ex AΔ ipſius ΔB quadrato; ac propterea rectæ lineæ AΔ, ΔB potentia ſunt incommenſurabiles. & quoniam eſt medium quadratum ipſius AB, erit & compoſitum ex quadratis ipſarum AΔ, ΔB medium. quod cum dupla ſit BΓ ipſius ΔZ, & rectangulum ſub AB, BΓ [per 1.6.] rectanguli ſub AB, ZΔ duplum erit: quare & commenſurabile. rationale autem eſt rectangulum ſub AB, BΓ, ita enim ponitur: ergo & rectangulum ſub AB, ZΔ eſt rationale. ſed rectangulo ſub AB, ZΔ æquale eſt [per 3. lem. 34. 10.] rectangulum ſub AΔ, ΔB: quare & ipſum ſub AΔ, ΔB rectangulum rationale erit.

Inventæ igitur ſunt duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles AΔ, ΔB, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, rectangulum vero quod ſub ipſis continetur rationale. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ'.

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους, ποιούσας τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων.

Prop. XXXVI. Probl.

Invenire duas rectas lineas potentia incommenſurabiles, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis medium, & rectangulum quod ſub ipſis continetur medium, & adhuc incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis.

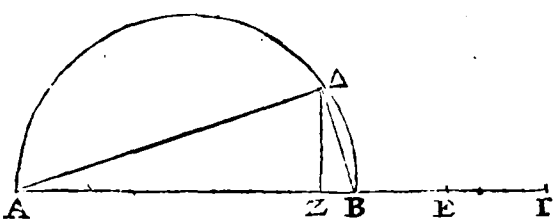
Ἐκκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, μέσον περιέχουσαι, ὥστε τὴν ΑΒ τῆς ΒΓ μεῖζον δυνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου

EXponantur [per 33. 10.] duæ mediæ potentia ſolum commenſurabiles AB, BΓ, quæ medium contineant, ita ut AB plus poſſit quam BΓ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incom-

* Illud αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι abeſt *Codd. MSS.*

menſurabilis, & ſuper AB ſemicirculus AΔB deſcribatur, & reliqua fiant ut in iis quæ ſuperius dicta ſunt.

Quoniam igitur AZ incommenſurabilis eſt ipſi ZB longitudine, erit & AΔ ipſi ΔB potentia incommenſurabilis. & quoniam medium eſt quod fit ex AB, & compoſitum ex quadratis ipſarum ΔA, ΔB eſt medium. quod cum rectangulum ſub AZ, ZB æquale ſit quadrato alterutrius ipſarum BE, ΔZ, erit ΔZ æqualis BE; ac propterea BΓ ipſius ZΔ dupla: rectangulum igitur ſub AB, BΓ duplum eſt ejus quod ſub AB, ZΔ continetur. medium autem eſt [ex hyp.] rectangulum ſub AB, BΓ: ergo & quod continetur ſub AB, ZΔ eſt medium: atque eſt [per 1. lem. 34. 10.] æquale contento ſub AΔ, ΔB; quare & ipſum ſub AΔ, ΔB rectangulum medium erit. & quoniam incommenſurabilis eſt AB ipſi BΓ longitudine, commenſurabilis autem ΓB ipſi BE; erit & AB ipſi BE longitudine incommenſurabilis: ergo [per 1. 6. & 10. 10.] & quadratum ex AB incommenſurabile eſt rectangulo ſub AB, BE. ſed quadrato quidem ex AB æqualia ſunt quæ ex AΔ, ΔB ſunt quadrata: rectangulo autem ſub AB, BE æquale eſt rectangulum ſub AB, ZΔ, hoc eſt rectangulum ſub AΔ, ΔB: compoſitum igitur ex quadratis ipſarum AΔ, ΔB rectangulo ſub AΔ, ΔB eſt incommenſurabile.



Inventæ igitur ſunt duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum ex ipſarum quadratis medium, & rectangulum quod ſub ipſis continetur medium, & adhuc compoſito ex ipſarum quadratis incommenſurabile. quod erat faciendum.

Εἑαυτῇ, καὶ γεγράφθω ὁποῖον τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ τὰ λοιπὰ γεγονέτω ὁμοίως τοῖς ἐπάνω εἰρημένοις.

Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ μήκει, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ δυνάμει. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, μέσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΒ ἐστιν ἴσον τῷ ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΒΕ, ΔΖ, ἴση ἄρα ἡ ΔΖ τῇ ΒΕ· διπλῆ ἄρα ἡ ΒΓ τῆς ΖΔ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ· καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσον, μέσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΑΒ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ ΓΒ τῇ ΒΕ· ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΒΕ μήκει· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, ΔΒ.

Εὕρηται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Principium Senariorum per Compoſitionem.

Ἀρχὴ τῶν κατὰ σύνθεσιν ἑξάδων.

Prop. XXXVII. Theor.

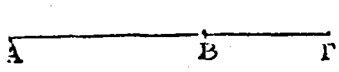
Si duæ rationales potentia ſolum commenſurabiles componantur, tota irrationalis erit, vocetur autem ex binis nominibus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ'.

Ἐὰν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσιν, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Componantur enim duæ rationales potentia ſolum commenſurabiles AB, BΓ: dico AΓ irrationalem eſſe.

Quoniam enim incommenſurabilis eſt AB ipſi BΓ longitudine, potentia enim ſolum commenſurabiles ſunt; & ut AB ad BΓ ita [per 1. 6.] rectangulum ſub AB, BΓ ad id quod fit ex BΓ quadratum: erit [per 10. 10.] rectangulum ſub AB, BΓ quadrato ex BΓ incommenſurabile. ſed rectangulo quidem ſub AB, BΓ [per 6. 10.] commenſurabile eſt id quod bis ſub AB, BΓ continetur, quadrato autem ex BΓ commenſurabilia ſunt [per 16. 10.] quadrata ex AB, BΓ: quod igitur bis ſub AB, BΓ continetur incommenſurabile eſt qua-



Συγκείσθωσαν γὰρ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, αἱ ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρόν

μετρόν ἐστι, καὶ σωθέντι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, τυπίσι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὸν δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ὥστε καὶ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων.

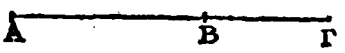
dratis ex ΑΒ, ΒΓ, & componendo quod bis ſub ΑΒ, ΒΓ continetur una cum quadratis ex ΑΒ, ΒΓ, hoc eſt [per 4. 2.] quadratum ex ΑΓ, incommenſurabile eſt compoſito ex ipſarum ΑΒ, ΒΓ quadratis. rationale autem eſt compoſitum ex quadratis ipſarum ΑΒ, ΒΓ: ergo quadratum ex ΑΓ irrationale eſt; & ob id recta linea ΑΓ eſt irrationalis, vocetur autem ex binis nominibus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη'.

Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσι, ῥητὸν περιέχουσαι· ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ῥητὸν περιέχουσαι· λέγω ὅτι ὅλη ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· συνθέντι ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ὑπόκειται δὲ ῥητὸν περιέχουσα· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.



PROP. XXXVIII. THEOR.

Si duæ mediæ potentia ſolum commenſurabiles componantur, quæ rationale contineant; tota irrationalis erit, vocetur autem ex binis mediis prima.

COmponantur enim duæ mediæ potentia ſolum commenſurabiles ΑΒ, ΒΓ, quæ rationale contineant: dico totam ΑΓ irrationalem eſſe.

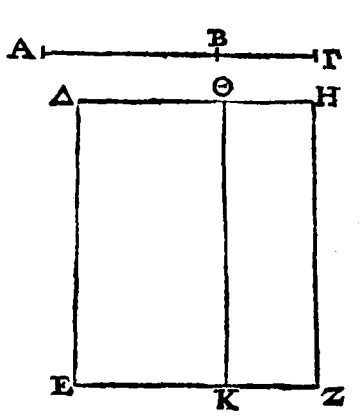
Quoniam enim incommenſurabilis eſt ΑΒ ipſi ΒΓ longitudine, & quadrata ex ΑΒ, ΒΓ [per 13. 10.] incommenſurabilia erunt rectangulo quod bis ſub ΑΒ, ΒΓ continetur: ergo componendo, quadrata ex ΑΒ, ΒΓ una cum eo quod bis ſub ΑΒ, ΒΓ continetur, quod [per 4. 2.] eſt ipſius ΑΓ quadratum, incommenſurabile eſt rectangulo ſub ΑΒ, ΒΓ. ſed rectangulum rationale ponitur: ergo quadratum ex ΑΓ irrationale eſt: igitur & recta linea ΑΓ irrationalis, vocetur autem ex binis mediis prima.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ'.

Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσι, μέσον περιέχουσαι· ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, μέσον περιέχουσαι· λέγω ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ ΑΓ.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, παραβεβλήσθω δὴ παρὰ τὴν ΔΕ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΕΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΘ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. καὶ ἐπεὶ μέση ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΒΓ· μέσα ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. μέσον δὲ ὑπόκειται καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἔστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΕΘ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΘΖ· μέσον ἄρα ἑκάτερον τῶν ΕΘ, ΘΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται·



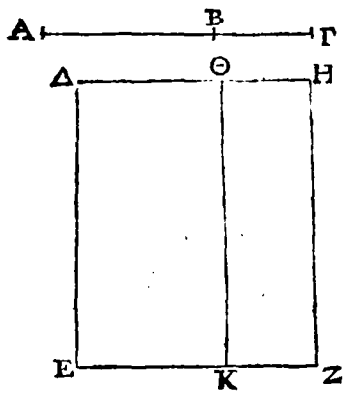
PROP. XXXIX. THEOR.

Si duæ mediæ potentia ſolum commenſurabiles componantur, quæ medium contineant; tota irrationalis erit, vocetur autem ex binis mediis ſecunda.

COmponantur enim duæ mediæ potentia ſolum commenſurabiles, ΑΒ, ΒΓ, quæ medium contineant: dico ΑΓ irrationalem eſſe.

Exponatur rationalis ΔΕ, & [per 45. 1.] quadrato ex ΑΓ æquale parallelogrammum rectangulum ΔΖ ad ipſam ΔΕ applicetur, latitudinem faciens ΔΗ. itaque quoniam [per 4. 2.] quadratum ex ΑΓ æquale eſt quadratis ex ΑΒ, ΒΓ & rectangulo quod bis ſub ΑΒ, ΒΓ continetur, applicetur ad ipſam ΔΕ quadratis ex ΑΒ, ΒΓ æquale parallelogrammum rectangulum ΕΘ: reliquum igitur ΖΘ æquale eſt ei quod bis ſub ΑΒ, ΒΓ continetur. & quoniam media eſt utraque ipſarum ΑΒ, ΒΓ, erunt & quadrata ex ΑΒ, ΒΓ media. medium autem ponitur & quod bis continetur ſub ΑΒ, ΒΓ, atque eſt quadratis quidem ex ΑΒ, ΒΓ æquale parallelogrammum ΕΘ, rectangulo autem bis ſub ΑΒ, ΒΓ contento æquale eſt ipſum ΘΖ; medium igitur eſt utrumque ipſorum ΕΘ, ΘΖ, & ad rationalem ΔΕ applicantur:

ergo [per 23. 10.] utraque recta linea Δ Θ, Θ H eſt rationalis, & ipſi Δ E longitudine incommenſurabilis. & quoniam incommenſurabilis eſt A B ipſi B Γ longitudine, atque eſt ut A B ad B Γ ita [per 1.6.] quadratum ex A B ad rectangulum ſub A B, B Γ; erit [per 10.10.] quadrato ex A B rectangulum ſub A B, B Γ incommenſurabile. ſed quadrato quidem ex A B commenſurabile eſt [ex hyp.] compoſitum ex quadratis ipſarum A B, B Γ, rectangulo autem ſub A B, B Γ eſt commenſurabile quod bis ſub A B, B Γ continetur: ergo per [14.10.] compoſitum ex quadratis ipſarum A B, B Γ incommenſurabile erit ei quod bis continetur ſub A B, B Γ. ſed [per conſtr.] quadratis ex A B, B Γ æquale eſt parallelogrammum E Θ, & rectangulo quod bis ſub A B, B Γ continetur æquale Θ Z parallelogrammum: quare E Θ ipſi Θ Z eſt incommenſurabile; & ob id recta linea Δ Θ ipſi Θ H incommenſurabilis longitudine. oſtenſæ autem ſunt rationales: ergo Δ Θ, Θ H rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea [per 37.10.] Δ H eſt irrationalis. rationalis autem Δ E; & quod ſub irrationali & rationali continetur rectangulum irrationale eſt: ſpatium igitur Δ Z eſt irrationale; & ideo quæ ipſum poteſt eſt irrationalis. poteſt autem ipſum Δ Z [per conſtr.] recta linea A Γ: ergo A Γ irrationalis erit, vocetur autem ex binis mediis ſecunda.



ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τ Δ Θ, Θ H, καὶ ἀσύμμετρος τῇ Δ E μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ A B τῇ B Γ μήκει, ἔστιν ὡς ἡ A B πρὸς τὴν B Γ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A B πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν A B, B Γ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τ A B τὸ ὑπὸ τῶν A B, B Γ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τ A B σύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν A B, B Γ τετραγώνων, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν A B, B Γ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν A B, B Γ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν A B, B Γ τῷ δὶς ὑπὸ τ A B, B Γ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τ A B, B Γ ἴσον ἐστὶ τὸ E Θ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν A B, B Γ ἴσον ἐστὶ τὸ Θ Z· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ E Θ τῷ Θ Z· ὥστε καὶ ἡ Δ Θ τῇ Θ H ἀσύμμετρός ἐστι μήκει. ἐδείχθησαν δὲ ῥηταὶ αἱ Δ Θ, Θ H ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ Δ H ἄλογός ἐστι. ῥητὴ δέ ἡ Δ E, τὸ δὲ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστιν· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ Δ Z χωρίον· ὥστε καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. δυνατὴ δὲ τὸ Δ Z ἡ A Γ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ A Γ, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

SCHOLIUM.

Vocavit illam ex binis mediis ſecundam, quoniam medium eſt, non rationale quod ſub ipſis A B, B Γ continetur, medium enim rationali poſterius eſt. At vero quod ſub rationali & irrationali continetur irrationale eſſe, perſpicue conſtat. nam ſi rationale ſit, & ad rationalem applicetur, [per 21.10.] alterum ejus latus eſſet rationale. ſed & irrationalis, quod eſt abſurdum: illud igitur quod ſub rationali & irrationali continetur eſt irrationale.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο μέσων δευτέραν, διὰ τὸ τὸ μέσον περιέχειν τὸ ὑπ' αὐτῶν, καὶ μὴ ῥητόν, δευτερεύειν δὲ τὸ μέσον ἢ ῥητῷ. Ὅτι δὲ τὸ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ἄλογόν ἐστι, δῆλον. εἰ γὰρ ἔστι ῥητὸν καὶ ἐφαρμοσθείη παρὰ ῥητήν, εἴη ἂν καὶ ἡ ἑτέρα αὐτοῦ παραβολὴ ῥητή. ἀλλὰ καὶ ἄλογος, ὅπερ ἄτοπον· τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου ἄλογόν ἐστιν.

PROP. XL. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale; quod autem ſub ipſis continetur medium: tota recta linea irrationalis erit, vocetur autem major.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντιθῶσι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τ ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον· ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μείζων.

COmponantur enim duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles A B, B Γ, facientes ea quæ propoſita ſunt: dico A Γ irrationalem eſſe.

Quoniam enim id quod ſub A B, B Γ continetur medium eſt; & quod bis continetur ſub A B, B Γ [per cor. 24. 10.] medium erit. compoſitum autem ex ipſarum A B, B Γ quadratis eſt rationale: ergo quod bis ſub A B, B Γ

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ A B, B Γ, ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ A Γ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τ A B, B Γ μέσον ἐστί, καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν A B, B Γ μέσον ἐστί. τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν A B, B Γ ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν A B, B Γ

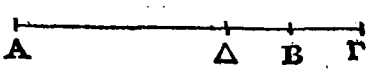
τῷ

τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὸν δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ὥστε καὶ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστι, καλεῖσθω δὲ μείζων.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν μείζονα ἀφ' τὸ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητὰ μείζονα εἶναι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσα, καὶ δέον εἶναι ἀπὸ τῆς τῶν ῥητῶν οἰκειότητος τὴν ὀνομασίαν τίθεσθαι. ὅτι δὲ μείζονά ἐστι τὸ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἔστω δεικτέον.

Φανερὸν μὲν οὖν ὅτι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΑΒ, ΒΓ. εἰ γὰρ ἦσαν ἴσαι, ἴσον ἂν ἦν καὶ τὸ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἦν ἂν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· ἄνισοι ἄρα εἰσὶν αἱ ΑΒ, ΒΓ. ὑποκείσθω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ κείσθω τῇ ΒΓ ἴση ἡ ΒΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ καὶ τῷ ἀπὸ ΔΑ. ἴση δὲ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΑ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

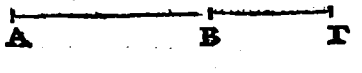


ΠΡΟΤΑΣΙΣ μά'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι, ποιοῦσι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ποιείτωσαν τὸ συγκείμενον· λέγω ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ ΑΓ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἐστί, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ὥστε καὶ συνθέντι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.



ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ῥητὸν δὲ καὶ μέσον δυναμένην αὐτὴν ἐκάλεσε, ἀφ' τὸ δύνασθαι δύο χωρία, τὸ μὲν

continetur incommensurabile est compositio ex quadratis ipsarum AB, BΓ: & ob id quadrata ex AB, BΓ una cum eo quod bis sub AB, BΓ continetur, quod [per 4. 2.] est quadratum ex AΓ, incommensurabile est [per 17. 10.] quadratis ex AB, BΓ. rationale autem est [ex hyp.] compositum ex quadratis AB, BΓ: ergo quadratum ex AΓ irrationale erit; ac propterea recta linea AΓ est irrationalis, vocetur autem major.

SCHOLIUM.

Vocavit autem ipsam majorem, propterea quod rationalia ex AB, BΓ majora sint medio, quod bis sub AB, BΓ continetur; oporteatque à rationalium proprietate nomen imponere. at vero quadrata quæ fiunt ex AB, BΓ majora esse eo quod bis sub AB, BΓ continetur, sic ostendemus.

Manifestum quidem est AB, BΓ inter se inæquales esse. si enim sint æquales, & quadrata quæ fiunt ex AB, BΓ æqualia erunt ei quod bis sub AB, BΓ continetur, & rectangulum sub AB, BΓ rationale erit, quod non ponitur: inæquales igitur sunt AB, BΓ. supponatur major AB, & ipsi BΓ æqualis ponatur BΔ: ergo [per 7. 2.] quadrata ex AB, BΔ æqualia sunt ei quod bis sub AB, BΔ continetur una cum quadrato ex ΔA. æqualis autem est ΔB ipsi BΓ: quadrata igitur ex AB, BΓ æqualia sunt ei quod bis sub AB, BΓ continetur una cum quadrato ex AΔ: ideoque quadrata ex AB, BΓ majora sunt quam id quod bis sub AB, BΓ continetur, quadrato ipsius ΔA. quod erat demonstrandum.

PROP. XLI. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem sub ipsis continetur, rationale: tota recta linea irrationalis erit, vocetur autem rationale ac medium potens.

COmponantur enim duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles AB, BΓ, facientes ea quæ proposita sunt: dico AΓ irrationalem esse.

Quoniam enim compositum ex ipsarum AB, BΓ quadratis medium est, quod autem bis sub AB, BΓ continetur rationale: erit compositum ex ipsarum AB, BΓ quadratis incommensurabile ei quod bis sub AB, BΓ continetur: quare componendo quadratum ex AΓ, est [per 17. 10.] incommensurabile ei quod bis continetur sub AB, BΓ. est autem rationale quod bis sub AB, BΓ continetur: quadratum igitur ex AΓ irrationale est: ideoque recta linea AΓ est irrationalis, vocetur autem rationale ac medium potens.

SCHOLIUM.

Rationale autem ac medium potentem ipsam appellat, quod possit bina spatia, unum quidem

rationale, alterum vero medium: & quoniam rationale præcedit irrationale, ipſius rationalis prius mentionem fecit.

ῥητὸν, τὸ δὲ μέσον· καὶ ἀφ' ὅτι τὸ ῥητὸ πρότερόν ἐστι, πρῶτον τὸ ῥητὸν ἐκάλεσε.

PROP. XLII. THEOR.

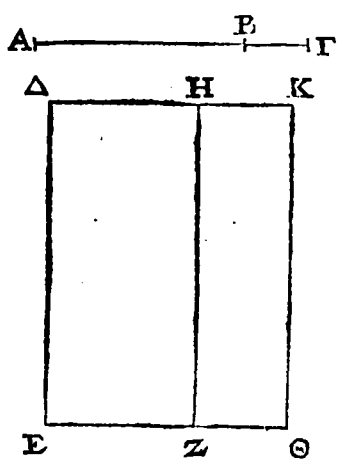
Si duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum ex ipſarum quadratis medium; & quod ſub ipſis continetur medium, & adhuc incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis: tota recta linea irrationalis erit, vocetur autem bina media potens.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι, ποιοῦσι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων· καὶ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ δύο μέσα δυναμένη.

COmponantur enim duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles AB, BΓ, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum AB, BΓ quadratis medium, & quod ſub ipſis continetur medium, & adhuc incommenſurabile compoſito ex ipſarum AB, BΓ quadratis: dico AΓ irrationalem eſſe.

Exponatur enim rationalis ΔE, & [per 45.1.] ad ipſam applicetur parallelogrammum rectangulum ΔZ æquale quadratis ipſarum AB, BΓ, & parallelogrammum HΘ æquale ei quod bis ſub AB, BΓ continetur: totum igitur ΔΘ [per 4.2.] quadrato ipſius AΓ eſt æquale. & quoniam medium eſt compoſitum ex quadratis ipſarum AB, BΓ, & æquale parallelogrammo ΔZ; erit ipſum quoque ΔZ medium, & ad rationalem ΔE applicatum eſt: rationalis igitur eſt ΔH [per 23. 10.] & ipſi ΔE longitudine incommenſurabilis. ob eandem cauſam & HK eſt rationalis, & incommenſurabilis longitudine ipſi ZH, hoc eſt ipſi ΔE. & quoniam compoſitum ex quadratis ipſarum AB, BΓ incommenſurabile eſt ei quod bis ſub AB, BΓ continetur; erit & parallelogrammum ΔZ ipſi ΘH incommenſurabile: ergo & recta linea ΔH [per 1.6. & 10.10.] incommenſurabilis eſt ipſi HK. & ſunt rationales: quare ΔH, HK rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea [per 37. 10.] ΔK eſt irrationalis quæ ex binis nominibus appellatur. rationalis autem ΔE: ergo [per ſch. 39. 10.] parallelogrammum ΔΘ irrationale eſt, & ipſum potens irrationalis. ſed [per conſtr.] ipſum ΔΘ poteſt recta linea AΓ; quare AΓ irrationalis eſt, vocetur autem bina media potens.



Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ AB, BΓ, ποιοῦσα τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν AB, BΓ μέσον, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BΓ τετραγώνων· λέγω ὅτι ἡ AΓ ἄλογός ἐστι.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔE, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΔE τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AB, BΓ ἴσον τὸ ΔZ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ ἴσον τὸ HΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AΓ τετραγώνῳ. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BΓ, καὶ ἴσον τῷ ΔZ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔZ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔE παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔH, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔE μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ HK ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ZH, τουτέστι τῇ ΔE, μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς AB, BΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΔZ τῷ ΘH· ὡς δὲ τὸ ΔZ πρὸς τὸ ΘH, οὕτως ἐστὶν ἡ ΔH πρὸς τὴν HK· ἀσύμμετρός ἐστιν ἄρα καὶ ἡ ΔH τῇ HK. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΔH, HK ἄρα ῥηταὶ εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔK, ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων. ῥητὴ δὲ ἡ ΔE· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΘ, οὗ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. δύναται δὲ τὸ ΔΘ ἡ AΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ AΓ, καλείσθω δὲ δύο μέσα δυναμένη.

SCHOLIUM 1.

Vocavit ipſam bina media potentem, propterea quod poteſt bina ſpatia media, videlicet compoſitum ex ipſarum AB, BΓ quadratis, & illud quod bis ſub AB, BΓ continetur.

ΣΧΟΛΙΟΝ α'.

Καλεῖ δὲ αὐτὴν δύο μέσα δυναμένην, διὰ τὸ δύνασθαι αὐτὴν δύο μέσα χωρία, τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BΓ καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ.

SCHOLIUM 2.

At vero dictas irrationales uno tantum modo dividi in rectas lineas ex quibus componuntur,

ΣΧΟΛΙΟΝ β'.

Οτι δὲ αἱ εἰρημέναι ἄλογοι μοναχῶς διαιροῦνται εἰς τὰς εὐθείας ἐξ ὧν σύγκεινται, πιστωθῆ-

τὰ

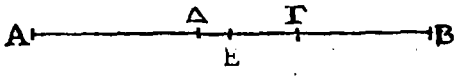
τὰ προκείμενα εἴδη, δείξομεν ἤδη, προεκθέμενοι λημμάτιον τοιοῦτον.

& quæ propoſitas ſpecies conſtituunt, mox demonſtrabimus, ſi prius lemma quoddam expoſuerimus, quod hujuſmodi eſt.

ΛΗΜΜΑ.

Ἐκκείσθω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἡ ὅλη εἰς ἀνίσους καθ' ἑκάτερα τῶν Γ, Δ, ὑποκείσθω δὲ μείζων ἡ ΑΓ τῆς ΔΒ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΔΒ, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΔΓ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΔ λοιπῆς τῆς ΓΒ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ· ἐλάττων ἄρα ἡ ΔΕ τῆς ΕΓ· τὰ Γ, Δ ἄρα σημεῖα οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ. ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· ὥστε καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἔλαττόν ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μεῖζόν ἐστι τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, * ἅπερ συναμφότερα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



LEMMA.

Exponatur recta linea AB, & ſecetur tota in partes inæquales ad utrumque punctorum Γ, Δ; ponatur autem AΓ quam ΔB major: dico quadrata ipſarum AΓ, ΓB quadratis ipſarum AΔ, ΔB majora eſſe.

Secetur enim AB bifariam in E. & quoniam major eſt AΓ quam ΔB, communis auferatur ΔΓ: reliqua igitur AΔ major erit quam reliqua ΓB. eſt autem AE ipſi EB æqualis: ergo ΔE quam EΓ eſt minor, & puncta Γ, Δ non æqualiter diſtant à bipartita ſectione. & quoniam [per 5. 2.] rectangulum ſub AΓ, ΓB una cum quadrato rectæ lineæ ΓE eſt æquale quadrato ipſius EB, ſed & rectangulum ſub AΔ, ΔB una cum quadrato rectæ lineæ ΔE eſt æquale ipſius EB quadrato; erit rectangulum ſub AΓ, ΓB una cum quadrato ipſius EΓ æquale rectangulo ſub AΔ, ΔB una cum quadrato ipſius ΔE. quorum quadratum ipſius ΔE eſt minus quadrato EΓ: & reliquum igitur rectangulum ſub AΓ, ΓB minus eſt rectangulo ſub AΔ, ΔB: quare & quod bis ſub AΓ, ΓB continetur minus eſt eo quod bis continetur ſub AΔ, ΔB: reliquum igitur, nempe compoſitum ex quadratis ipſarum AΓ, ΓB, majus eſt compoſito ex quadratis ipſarum AΔ, ΔB; * ſiquidem utraque tota æqualia ſunt [per 4. 2.] quadrato rectæ AB. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ'.

Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

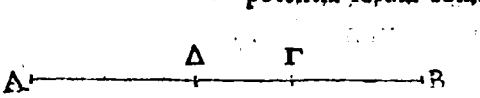
PROP. XLIII. THEOR.

Quæ ex binis nominibus ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται εἰς δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω κατὰ τὸ Δ· ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ ῥητὰς εἶναι, δυνάμει μόνον συμμέτρους. φανερὸν δὴ ὅτι ἡ ΑΒ τῇ ΔΒ οὐκ ἔστιν † ἡ αὐτή. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· ἔστω δὴ καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΓΒ ἡ αὐτή· καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, ‡ ἡ Ε ἔστω ἡ ΑΒ κατὰ τὸ αὐτὸ τῇ κατὰ τὸ Δ διαιρέσει διῃρεθεῖσα ἡ κατὰ τὸ Γ, ὅπερ οὐκ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΔΒ ἐστὶν ἡ αὐτή· διὰ δὴ τοῦτο καὶ τὰ Γ, Δ σημεῖα οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας· ᾧ ἄρα διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ διαφέρει ἡ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, διὰ

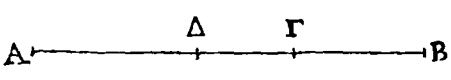
Si enim fieri poteſt, dividatur in Δ, ita ut AΔ, ΔB rationales ſint potentia ſolum commenſurabiles. itaque manifeſtum eſt AB non eſſe eandem quæ ΔB. ſi enim fieri poteſt, ſit eadem: erit igitur & AΔ eadem quæ ΓB; atque erit ut AΓ ad ΓB ita BΔ ad ΔA, & AB in Δ ſimiliter diviſa erit atque in puncto Γ, quod non ponitur: ergo AΓ non eſt eadem quæ ΔB: & propterea puncta Γ, Δ non æqualiter diſtant à bipartita ſectione: quo igitur differunt quadrata rectarum linearum AΓ, ΓB ab ipſarum AΔ, ΔB quadratis, hoc differt & quod bis ſub AΔ, ΔB continetur ab eo quod bis continetur ſub AΓ, ΓB; quo-



* Illa ἅπερ συναμφότερα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ deſunt in *Codd. MSS.* † i. e. ἴση. ‡ In *MSS.* ἔστω ἡ ΑΒ κατὰ τὸ αὐτὸ τμῆμα τῷ Γ, διαιρέσει διαιρεθεῖσα κατὰ τὸ Δ.

niam

niam [per 4. 2.] & quadrata rectarum linearum AΓ, ΓB una cum eo quod bis continetur ſub AΓ, ΓB & quadrata ipſarum AΔ, ΔB una cum eo quod bis ſub AΔ, ΔB continetur æqualia ſunt quadrato ipſius AB. ſed quadrata ipſarum AΓ, ΓB à quadratis ipſarum AΔ, ΔB differunt rationali, etenim rationalia utraque ſunt: ergo & quod bis ſub AΔ, ΔB continetur à contento bis ſub AΓ, ΓB differt rationali, cum ipſa media ſint. atqui [per 27. 10.] medium non ſuperat medium rationali: non igitur quæ ex binis nominibus ad aliud atque aliud punctum dividitur: quare ad unum duntaxat dividitur in nomina. quod erat demonſtrandum.



τὸ κϛ̀ τὰ ἀπὸ τῶν AΓ, ΓB μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν AΓ, ΓB καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AΔ, ΔB μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τὰ AΔ, ΔB ἴσα εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς AB. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν AΓ, ΓB τῶν ἀπὸ τῶν AΔ, ΔB διαφέρει ῥητῷ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν AΔ, ΔB τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν AΓ, ΓB διαφέρει ῥητῷ μέσα ὄντα. μέσον δὲ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ· οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἓν ἄρα μόνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XLIV. THEOR.

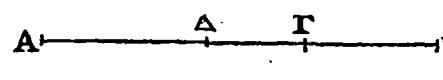
Quæ ex binis mediis prima ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ'.

Ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

SIT ex binis mediis prima AB diviſa in punctо Γ, ita ut AΓ, ΓB mediæ ſint potentia ſolum commenſurabiles, quæ rationale contineant: dico AB in alio puncto non dividi.

Si enim fieri poteſt, dividatur etiam in Δ, ita ut AΔ, ΔB ſint mediæ potentia ſolum commenſurabiles quæ rationale contineant. quoniam igitur quo differt rectangulum contentum bis ſub AΔ, ΔB ab eo quod bis ſub AΓ, ΓB continetur hoc differunt etiam quadrata rectarum linearum AΓ, ΓB ab ipſarum AΔ, ΔB quadratis, rationali autem differt contentum bis ſub AΔ, ΔB ab eo quod bis ſub AΓ, ΓB continetur, utraque enim ſunt rationalia; rationali igitur differunt quadrata ipſarum AΓ, ΓB à quadratis ipſarum AΔ, ΔB, exiſtentia utraque media. illud autem [per 27. 10.] fieri non poteſt: non igitur quæ ex binis mediis prima in alio atque alio puncto dividitur in nomina: quare in uno duntaxat dividatur neceſſe eſt. quod erat demonſtrandum.



Ἔστω δὴ ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ AB διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς AΓ, ΓB μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας· λέγω ὅτι ἡ AB κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς AΔ, ΔB μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας. ἐπεὶ οὖν ᾧ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AΔ, ΔB τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν AΓ, ΓB τούτῳ διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν AΓ, ΓB τῶν ἀπὸ τῶν AΔ, ΔB, ῥητῷ δὲ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AΔ, ΔB τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν AΓ, ΓB, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· ῥητῷ ἄρα διαφέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AΓ, ΓB τῶν ἀπὸ τῶν AΔ, ΔB μέσα ὄντα, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα· καθ' ἓν ἄρα μόνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XLV. THEOR.

Quæ ex binis mediis ſecunda ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ με'.

Ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

SIT ex binis mediis ſecunda AB diviſa in Γ, ita ut AΓ, ΓB mediæ ſint potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium contineant: manifeſtum eſt punctum Γ non eſſe in bipartita ſectione, quoniam non ſunt longitudine commenſurabiles. dico ipſam AB in alio puncto non dividi.

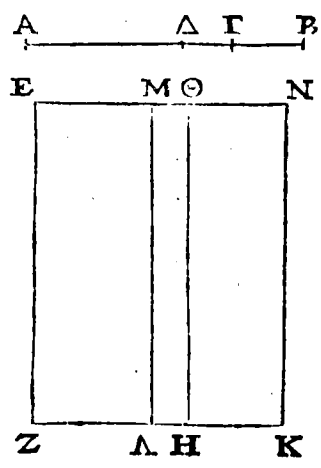
Si enim fieri poteſt, dividatur in Δ, ita ut AΓ non ſit eadem quæ ΔB, ſed AΓ major ex hyp. itaque conſtat quadrata ex AΓ, ΓB quadratis ex AΔ, ΔB majora eſſe, ut ſupra oſtendimus [ad lem. 43. 10.] & AΔ, ΔB medias eſſe potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium contineant. exponatur rationalis EZ, & quadrato quidem ex AB æquale parallelogrammum EK ad ipſam EZ

Ἔστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ AB διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς AΓ, ΓB μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας· φανερὸν δὴ ὅτι τὸ Γ οὐκ ἔστι κατὰ τὴν διχοτομίαν, ἐπειδήπερ οὐκ εἰσὶ μήκει σύμμετροι. λέγω ὅτι ἡ AB κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥστε τὴν AΓ τῇ ΔB μὴ εἶναι τὴν αὐτὴν, ἀλλὰ μείζονα καθ' ὑπόθεσιν τὴν AΓ. δῆλον δὴ ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν AΓ, ΓB μείζονα τῶν ἀπὸ τῶν AΔ, ΔB, ὡς ἐπάνω ἐδείξαμεν, καὶ τὰς AΔ, ΔB μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας. ἐκκείσθω ῥητὴ EZ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AB ἴσον παραλληλόγραμμον EZ παρα-

βεβλήσθω

βληθω τὸ ΕΚ, τοῖς δὲ ἀπὸ τ̃ ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἀφῃρήθω τὸ ΕΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΚ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. πάλιν δὴ τοῖς ἀπὸ τ̃ ΑΔ, ΔΒ, ἅπερ ἐλάσσονα ἐδείχθη τ̃ ἀπὸ τ̃ ΑΓ, ΓΒ, ἴσον ἀφῃρήθω τὸ ΕΛ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΜΚ ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ τ̃ ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ μέσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τ̃ ΑΓ, ΓΒ· μέσον ἄρα τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΝ ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ ἕτως τὸ ἀπὸ τ̃ ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τ̃ ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τ̃ ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, δυνάμει γάρ εἰσι σύμμετροι αἱ ΑΓ, ΓΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· καὶ τὰ ἀπὸ τ̃ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τ̃ ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΘΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΚ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΝ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ εἰσι ῥηταί· αἱ ΕΘ, ΘΝ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐὰν δὲ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσιν, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων· ἡ ΕΝ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσονται καὶ αἱ ΕΜ, ΜΝ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἔσται ἡ ΕΝ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο διῃρημένη, τό, τε Θ καὶ τὸ Μ, καὶ οὐκ ἔστιν ἡ ΕΘ τῇ ΜΝ ἡ αὐτή, ἐπειδήπερ τὰ ἀπὸ τ̃ ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τ̃ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μείζονά ἐστι τ̃ δὶς ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ· πολλῷ ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτέστι τὸ ΕΗ, μεῖζόν ἐστι τ̃ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τουτέστι τ̃ ΜΚ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΜΝ μεῖζων ἐστίν· ἡ ἄρα ΕΘ τῇ ΜΝ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτή. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



applicetur, quadratis vero ex AΓ, ΓB æquale auferatur EH: reliquum igitur ΘK [per 4. 2.] æquale eſt ei quod bis ſub AΓ, ΓB continetur. rurſus, quadratis ex AΔ, ΔB, quæ minora ſunt quadratis ex AΓ, ΓB, ut oſtenſum eſt, æquale parallelogrammum auferatur EΛ: ergo reliquum MK eſt æquale ei quod bis continetur ſub AΔ, ΔB. & quoniam media ſunt quæ ex AΓ, ΓB quadrata, erit EH medium, & ad rationalem EZ applicatum eſt: quare [per 23. 10] EΘ rationalis eſt, & ipſi EZ longitudine incommenſurabilis. eadem ratione & ΘN eſt rationalis, & ipſi EZ incommenſurabilis longitudine. quod cum AΓ, ΓB mediæ ſint potentia ſolum commenſurabiles, erit AΓ ipſi ΓB incommenſurabilis longitudine. ut autem AΓ ad ΓB ita [per 1. 6.] quadratum ex AΓ ad id quod ſub AΓ, ΓB continetur: quadratum igitur ex AΓ incommenſurabile eſt [per 10. 10.] ei quod continetur ſub AΓ, ΓB. ſed quadrato quidem ex AΓ commenſurabilia ſunt [per 16. 10.] quadrata ex AΓ, ΓB, etenim AΓ, ΓB potentia ſunt commenſurabiles; ei vero quod continetur ſub AΓ, ΓB commenſurabile eſt illud quod bis ſub AΓ, ΓB continetur: ergo & quadrata ex AΓ, ΓB incommenſurabilia ſunt ei quod bis ſub AΓ, ΓB continetur. quadratis autem ex AΓ, ΓB æquale eſt parallelogrammum EH, & ei quod bis continetur ſub AΓ, ΓB æquale eſt ΘK: ergo EH ipſi ΘK eſt incommenſurabile; & ob id recta linea EΘ ipſi ΘN incommenſurabilis longitudine, ſuntque rationales: ergo EΘ, ΘN rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. ſi autem duæ rationales potentia ſolum commenſurabiles componantur [per 37. 10.] tota irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur: quare EN ex binis nominibus eſt diviſa in puncto Θ. eadem ratione & EM, MN oſtendentur rationales potentia ſolum commenſurabiles, & erit EN ex binis nominibus ad aliud atque aliud punctum diviſa, videlicet ad Θ & ad M, & non eſt EΘ eadem quæ MN, quoniam [per lem. 43. 10.] quadrata ex AΓ, ΓB quadratis ex AΔ, ΔB ſunt majora. quadrata autem ex AΔ, ΔB majora ſunt eo quod bis ſub AΔ, ΔB continetur: ergo quadrata ex AΓ, ΓB, hoc eſt parallelogrammum EH, multo majus eſt eo quod bis continetur ſub AΔ, ΔB, hoc eſt parallelogrammo MK: quare & EΘ quam MN eſt major: non igitur EΘ eadem eſt quæ MN. quod erat demonſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μϛ'.

Ἡ μείζων κατὰ τὸ αὐτὸ μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

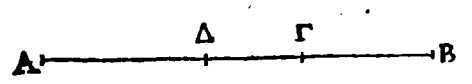
Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιοῦσι δὲ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τ̃ ἀπὸ τ̃ ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπὸ τ̃ ΑΓ, ΓΒ μέσον· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Prop. XLVI. Theor.

Major ad idem duntaxat punctum dividitur in nomina.

SIT major AB diviſa in Γ, ita ut AΓ, ΓB potentia incommenſurabiles ſint, facientes compoſitum quidem ex ipſarum AΓ, ΓB quadratis rationale, rectangulum vero quod ſub ipſis continetur medium: dico AB in alio puncto non dividi.

Si enim fieri poteſt, dividatur in Δ, ita ut AΔ, ΔB potentia incommenſurabiles ſint, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale; quod autem ſub ipſis continetur medium. & quoniam quo differunt quadrata ex AΓ, ΓB à quadratis ex AΔ, ΔB, hoc differt [per 4. 2.] & id quod bis continetur ſub AΔ, ΔB ab eo quod bis ſub AΓ, ΓB continetur, ſed quadrata ex AΓ, ΓB ſuperant quadrata ex AΔ, ΔB rationali, etenim utraque rationalia ſunt: ergo quod bis continetur ſub AΔ, ΔB rationali ſuperat id quod bis ſub AΓ, ΓB continetur, cum media ſint, quod [per 27.10.] eſt impoſſibile: non igitur major ad aliud atque aliud punctum dividitur: ergo ad idem duntaxat dividatur neceſſe eſt. quod erat demonſtrandum.



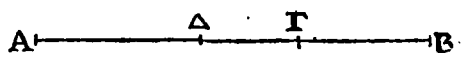
Εἰ γὰρ δυνατὸν, διῃρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον. καὶ ἐπεὶ ᾧ διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα ῥητῷ ὑπερέχει τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, μέσα ὄντα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ μείζων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· κατὰ τὸ αὐτὸ ἄρα διαιρεῖται μόνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XLVII. Theor.

Rationale ac medium potens ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

SIT rationale ac medium potens AB, diviſa in Γ, ita ut AΓ, ΓB potentia incommenſurabiles ſint, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum AΓ, ΓB quadratis medium, quod autem ſub ipſis continetur rationale: dico AB in alio puncto non dividi.

Si enim fieri poteſt, dividatur in Δ, ita ut etiam AΔ, ΔB potentia incommenſurabiles ſint, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis medium; quod autem ſub ipſis continetur rationale. quoniam igitur [per 4. 2.] quo differt rectangulum bis contentum ſub AΔ, ΔB ab eo quod bis ſub AΓ, ΓB continetur, hoc differunt & quadrata ex AΓ, ΓB à quadratis ex AΔ, ΔB, rectangulum autem bis contentum ſub AΔ, ΔB rationali ſuperat id quod bis ſub AΓ, ΓB continetur; ergo & quadrata ex AΓ, ΓB ſuperant quadrata ex AΔ, ΔB rationali, cum media ſint, quod [per 27.10.] eſt impoſſibile: non igitur rationale ac medium potens dividitur ad aliud atque aliud punctum: quare ad unum duntaxat punctum dividetur. quod erat demonſtrandum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ'.

Η ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη κατ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

ΕΣτω ῥητὸν τὸ μέσον δυναμένη ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον, τὸ δ' ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητόν· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, διῃρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσον, τὸ δ' ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητόν. ἐπεὶ ἔν ᾧ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητῷ ὑπερέχουσι, μέσα ὄντα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἓν ἄρα σημεῖον διαιρεῖται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XLVIII. Theor.

Bina media potens ad unum duntaxat punctum dividitur in nomina.

SIT bina media potens AB diviſa in Γ, ita ut AΓ, ΓB potentia incommenſurabiles ſint, facientes compoſitum ex ipſarum AΓ, ΓB quadratis medium; & quod ſub ipſis continetur medium, & adhuc compoſitum ex ipſarum quadratis incommenſurabile compoſito ex binis rectangulis ſub ipſis: dico AB ad aliud punctum non dividi, ita ut faciat quæ propoſita ſunt.

Si enim fieri poteſt, dividatur in Δ, ita ut rurſus AΓ non ſit eadem quæ ΔB, ſed ſit

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μη'.

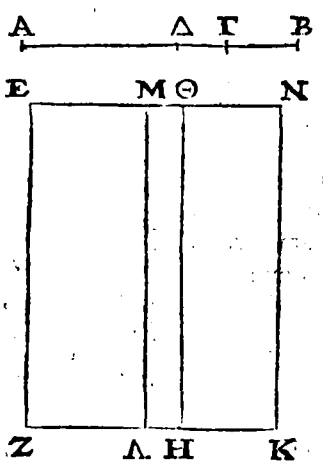
Η δύο μέσα δυναμένη κατ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

ΕΣτω δύο μέσα δυναμένη ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ὑπ' αὐτῶν· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται, ποιοῦσα τὰ προκείμενα.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, διῃρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥστε πάλιν δηλονότι τὴν ΑΓ τῇ ΔΒ μὴ εἶναι τὴν αὐτὴν, ἀλλὰ

(μείζονα

μείζονα καθ' ὑποθεσιν τὴν ΑΓ, καὶ κείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τῷ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΕΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΘΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΕΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. πάλιν δὴ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τῷ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον τὸ ΕΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ λοιπῷ τῷ ΜΚ ἴσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ μέσον ὑπόκειται τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΕ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΝ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα τῷ ΘΚ ἀσύμμετρόν ἐστι· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΝ ἀσύμμετρός ἐστιν. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΕΘ, ΘΝ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΕΝ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ κατὰ τὸ Μ διῄρηται, καὶ οὐκ ἔστιν ἡ ΕΘ τῇ ΜΝ ἡ αὐτή· ἡ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διῄρηται, ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ δύο μέσα δυναμένη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἓν ἄρα μόνον σημεῖον διαιρεῖται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ΑΓ ex hypotheſi major; exponaturque rationalis ΕΖ, & ad ipſam ΕΖ quadratis quidem ex ΑΓ, ΓΒ æquale parallelogrammum ΕΗ applicetur; rectangulo autem bis contento ſub ΑΓ, ΓΒ æquale applicetur ΘΚ: totum igitur ΕΚ [per 4. 2.] eſt æquale ei quod fit ex ΑΒ quadrato. rurſus ad ΕΖ applicetur parallelogrammum ΕΛ æquale quadratis ex ΑΔ, ΔΒ: ergo [per 4. 2.] reliquum quod bis ſub ΑΔ, ΔΒ continetur reliquo ΜΚ eſt æquale. & quoniam compoſitum ex quadratis ipſarum ΑΓ, ΓΒ medium ponitur, erit & parallelogrammum ΕΗ medium, & ad rationalem ΕΖ applicatum eſt: rationalis igitur eſt ΘΕ [per 23. 10.] & ipſi ΕΖ longitudine incommenſurabilis. eadem ratione & ΘΝ eſt rationalis, ipſique ΕΖ incommenſurabilis longitudine. & quoniam [ex hyp.] compoſitum ex quadratis ipſarum ΑΓ, ΓΒ incommenſurabile eſt ei quod bis ſub ΑΓ, ΓΒ continetur; erit & parallelogrammum ΕΗ ipſi ΘΚ incommenſurabile: ergo [per 10.10.] & recta linea eſt ΕΘ incommenſurabilis rectæ ΘΝ. & ſunt rationales: quare ΕΘ, ΘΝ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, & ob id ΕΝ ex binis nominibus eſt diviſa in puncto Θ. ſimiliter oſtendemus ipſam in puncto quoque Μ dividi, & non eſt ΕΘ eadem quæ ΜΝ: ergo quæ ex binis nominibus ad aliud atque aliud punctum dividitur quod [per 43.10.] eſt abſurdum: non igitur bina media potens dividitur ad aliud atque aliud punctum: quare ad unum duntaxat punctum dividetur. quod erat demonſtrandum.

ΟΡΟΙ ΔΕΥΤΕΡΟΙ.

α'. Ὑποκειμένης ῥητῆς, καὶ τοῦ ἐκ δύο ὀνομάτων διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα, ἧς τὸ μεῖζον ὄνομα τοῦ ἐλάσσονος μεῖζον δυνάται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν μὲν τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ὅλη ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη.

β'. Ἐὰν δὲ τὸ ἐλάσσον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα.

γ'. Ἐὰν δὲ μηδέτερον τῶν ὀνομάτων σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτη.

δ'. Πάλιν δὴ ἐὰν τὸ μεῖζον ὄνομα τοῦ ἐλάσσονος μεῖζον δυνῆται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν μὲν τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτη.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

1. Expoſita rationali, & quæ ex binis nominibus diviſa in nomina, cujus majus nomen plus poſſit quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; ſi quidem majus nomen expoſitæ rationali commenſurabile ſit longitudine, tota dicatur ex binis nominibus prima.

2. Si vero minus nomen expoſitæ rationali longitudine ſit commenſurabile, dicatur ex binis nominibus ſecunda.

3. Quod ſi neutrum ipſorum nominum ſit longitudine commenſurabile expoſitæ rationali, vocetur ex binis nominibus tertia.

4. Rurſus ſi majus nomen plus poſſit quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; ſi quidem majus nomen expoſitæ rationali ſit commenſurabile longitudine, dicatur ex binis nominibus quarta.

5. Si vero minus, dicatur quinta.

6. Quod ſi neutrum, dicatur ſexta.

ε'. Ἐὰν δὲ τὸ ἔλαττον, πέμπτη.

ϛ'. Ἐὰν δὲ μηδέτερον, ἕκτη.

* SCHOLIUM.

Cum igitur ſex rectæ lineæ ita ſumantur, primas ordine facit tres, in quibus major plus poteſt quam minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; ſecundas vero tres reliquas, in quibus *major* plus poteſt *quam minor*, quadrato *rectæ lineæ* ſibi incommenſurabilis *longitudine*, propterea quod commenſurabile antecedit incommenſurabile: & adhuc primam quidem, in qua majus nomen commenſurabile eſt expoſitæ rationali; ſecundam autem, in qua minus nomen, quoniam rurſus majus antecedit minus, cum ipſum contineat; tertiam vero, in qua neutrum expoſitæ rationali eſt commenſurabile; & in reliquis tribus eodem modo, primam dicti ſecundi ordinis quartam appellans, ſecundam quintam, & tertiam ſextam.

* ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἐξ ὧν ἀσῶν τὰ ἄτω καταλαμβανομένων εὐθειῶν, πάσῃ πρώτας τῇ τάξει τρεῖς, ἐφ' ὧν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· δευτέρας δὲ τῇ τάξει τὰς λοιπὰς τρεῖς, ἐφ' ὧν δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, διὰ τὸ πρότερον τὸ σύμμετρον τοῦ ἀσυμμέτρου· καὶ ἔτι πρώτην μέν, ἐφ' ἧς τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ· δευτέραν δέ, ἐφ' ἧς τὸ ἔλαττον διὰ τὸ πάλιν πρότερον εἶναι τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος τῷ ἐμπεριέχειν τὸ ἔλασσον· τρίτην δὲ, ἐφ' ὧν μηδέτερον τῶν ὀνομάτων ἐστὶ σύμμετρον τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ· καὶ διὰ τῶν ἐξῆς τριῶν ὁμοίως, τὴν πρώτην τῆς εἰρημένης δευτέρας τάξεως τετάρτην καλῶν, καὶ τὴν δευτέραν πέμπτην, καὶ τὴν τρίτην ἕκτην.

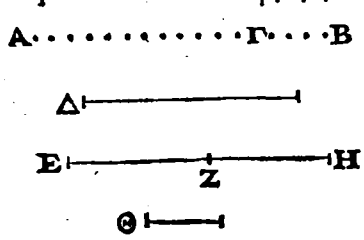
PROP. XLIX. PROBL.

Invenire ex binis nominibus primam.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μθ'.

Εὑρεῖν πρώτην ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.

EXponantur [per coroll. lem. 1. 30. 10.] duo numeri AΓ, ΓB, ita ut compoſitus ex ipſis, videlicet AB ad ipſum quidem BΓ rationem habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ad ipſum vero ΓA rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum, & exponatur quædam rationalis Δ, & ipſi Δ longitudine commenſurabilis ſit EZ: ergo [per 6. def. 10.] EZ eſt rationalis. fiat autem [per coroll. 6. 10.] ut BA numerus ad numerum AΓ ita ipſius EZ quadratum ad quadratum ZH. ſed BA ad AΓ rationem habet quam numerus ad numerum: ergo & quadratum ipſius EZ ad quadratum ZH rationem habebit quam numerus ad numerum: commenſurabile igitur eſt [per 6. 10.] quadratum ex EZ quadrato ex ZH. atque eſt EZ rationalis: ergo & rationalis ZH. & quoniam BA ad AΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque quadratum ex EZ ad quadratum ex ZH rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ergo [per 9. 10.] EZ ipſi ZH incommenſurabilis eſt longitudine: & ob id EZ, ZH rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: igitur [per 37. 10.] ex binis nominibus eſt EH. dico & primam eſſe.



Quoniam enim eſt ut BA numerus ad numerum AΓ ita quadratum ex EZ ad id quod ex ZH quadratum, major autem eſt BA quam AΓ: ergo & quadratum ex EZ quadrato ex ZH eſt majus. ſint quadrato ex EZ æqualia quadrata ex ZH, Θ. quoniam igitur eſt ut BA ad AΓ ita quadratum ex EZ ad quadratum ex ZH, erit per converſionem rationis [per coroll. 19. 5.] ut AB ad BΓ ita quadratum ex EZ ad quadratum ex Θ. ſed AB ad BΓ rationem habet quam numerus

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ AΓ, ΓB, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν AB πρὸς τὸν BΓ λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΓA λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ EZ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ EZ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ BA ἀριθμὸς πρὸς τὸν AΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH. ὁ δὲ BA πρὸς τὸν AΓ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ὥστε σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς EZ τῷ ἀπὸ τῆς ZH. καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ EZ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ZH. καὶ ἐπεὶ ὁ BA πρὸς τὸν AΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς EZ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ EZ τῇ ZH μήκει· αἱ EZ, ZH ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ EH. λέγω ὅτι καὶ πρώτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ BA ἀριθμὸς πρὸς τὸν AΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH, μείζων δὲ ὁ BA τοῦ AΓ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ τοῦ ἀπὸ τῆς ZH. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς EZ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ZH, Θ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ BA πρὸς τὸν AΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ AB πρὸς τὸν BΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ Θ. ὁ δὲ AB πρὸς τὸν BΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς

* Scholium hoc reperitur in *Codice Savilliano.*

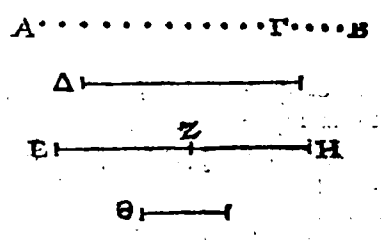
ἀριθμὸς πρὸς πεντάγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν πεντάγωνος ἀριθμὸς πρὸς πεντάγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος· ἄρα ἐστὶν ἡ EZ τῇ Θ μήκει· ἡ EZ ἄρα τῆς ZH μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσι ῥηταὶ αἱ EZ, ZH, καὶ σύμμετρος· ἡ EZ τῇ Δ μήκει· ἡ EH ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

quadratus ad quadratum numerum: & quadratum igitur ex EZ ad quadratum ex Θ rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum: quare [per 9. 10.] EZ ipsi Θ longitudine est commensurabilis: ideoque EZ plus potest quam ZH quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. sunt autem EZ, ZH rationales, & EZ ipsi Δ longitudine est commensurabilis: ergo [per 1. def. secund. 10.] EH ex binis nominibus est prima. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ν'.

Εὑρεῖν πλεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ AΓ, ΓB, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν AB πρὸς μὲν τὸν BΓ λόγον ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν AΓ λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω ἡ ZH μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ZH. γεγονέτω δὴ καὶ ὡς ὁ ΓA ἀριθμὸς πρὸς τὸν AB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς HZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZE· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς HZ τῷ ἀπὸ τῆς ZE· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ZE. καί, ἐπεὶ ὁ ΓA ἀριθμὸς πρὸς τὸν AB λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς HZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZE λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ HZ τῇ ZE μήκει· αἱ EZ, ZH ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ EH. δεικτέον δὴ ὅτι καὶ δευτέρα.



Ἐπεὶ γὰρ ἀνάπαλίν ἐστιν ὡς ὁ BA ἀριθμὸς πρὸς τὸν AΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH, μεῖζων δὲ ὁ BA τοῦ AΓ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ τοῦ ἀπὸ τῆς ZH. ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς EZ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ZH, Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ AB πρὸς τὸν BΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἀλλ' ὁ AB πρὸς τὸν BΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς EZ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος· ἄρα ἐστὶν ἡ EZ τῇ Θ μήκει· ὥστε ἡ EZ τῆς ZH μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσι ῥηταὶ αἱ EZ, ZH δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ ZH ἔλαττον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Δ μήκει· ἡ EH ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. L. PROBL.

Invenire ex binis nominibus secundam.

EXponantur [per coroll. 1. lem. 30. 10.] duo numeri AΓ, ΓB, ita ut compositus ex ipsis sc. AB ad ipsum BΓ quidem rationem habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum, ad AΓ vero rationem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum, & exponatur rationalis Δ, & sit ZH ipsi Δ longitudine commensurabilis: ergo ZH rationalis est. fiatque [per coroll. 6. 10.] ut ΓA numerus ad numerum AB ita quadratum ex HZ ad quadratum ex ZE: commensurabile igitur est [per 6. 10.] quadratum ex HZ quadrato ex ZE: ergo [per 6. def. 10.] & ZE est rationalis. & quoniam ΓA numerus ad ipsum AB rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum, neque quadratum ex HZ ad quadratum ex ZE rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommensurabilis igitur est [per 9. 10.] HZ ipsi ZE longitudine: quare EZ, ZH rationales sunt potentia solum commensurabiles; ac propterea [per 37. 10.] ex binis nominibus est EH. ostendendum est & secundam esse.

Quoniam enim convertendo est [per 16. 5.] ut BA numerus ad numerum AΓ ita quadratum ex EZ ad quadratum ex ZH, major autem est BA quam AΓ: ergo & quadratum ex EZ quadrato ex ZH est majus. sint quadrato ex EZ æqualia quadrata ex ZH, Θ: est igitur per conversionem rationis [per coroll. 19. 5.] ut AB ad BΓ ita quadratum ex EZ ad quadratum ex Θ. sed AB ad BΓ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ergo & quadratum ex EZ ad quadratum ex Θ rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & ob id [per 9. 10.] EZ ipsi Θ longitudine est commensurabilis: quare EZ plus potest quam ZH quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. suntque rationales EZ, ZH potentia solum commensurabiles, & ZH minus nomen longitudine commensurabile est ipsi Δ expositæ rationali: ergo [per 2. def. secund. 10.] EH est ex binis nominibus secunda. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ να'.

Εὑρεῖν πλεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην.

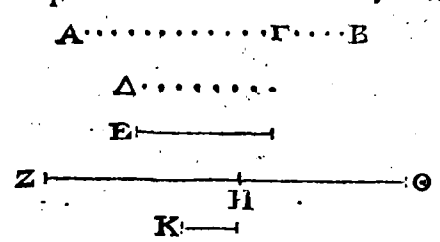
Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ AΓ, ΓB, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν AB πρὸς μὲν τὸν

PROP. LI. PROBL.

Invenire ex binis nominibus tertiam.

EXponantur duo numeri AΓ, ΓB, ita ut compositus ex ipsis videlicet AB ad BΓ quidem

quidem rationem habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ad AΓ vero rationem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum; exponatur etiam alius numerus Δ non quadratus, qui ad utrumque ipsorum BA, AΓ rationem non habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; denique exponatur rationalis quædam recta linea E; fiatque ut Δ ad AB ita quadratum ex E ad quadratum ex ZH: quadratum igitur ex E quadrato ex ZH est commensurabile. rationalis autem est E: ergo [per 6. 10.] & ZH est rationalis. & quoniam Δ ad AB rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque quadratum ex E ad quadratum ex ZH rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum: incommensurabilis igitur est [per 9. 10.] E ipsi ZH longitudine. rursus, fiat ut BA numerus ad numerum AΓ ita quadratum ex ZH ad quadratum ex HΘ: ergo quadratum ex ZH quadrato ex HΘ est commensurabile. rationalis autem est ZH: quare & HΘ est rationalis. & quoniam AB ad AΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, neque quadratum ex ZH ad quadratum ex HΘ rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum: incommensurabilis igitur est [per 9. 10.] ZH ipsi HΘ longitudine: quare ZH, HΘ rationales sunt potentia solum commensurabiles: ideoque [per 37. 10.] ZΘ ex binis nominibus est. dico & tertiam esse.



Quoniam enim est ut Δ numerus ad AB ita quadratum ex E ad quadratum ex ZH; ut autem BA ad AΓ ita quod fit ex ZH quadratum ad quadratum ex HΘ: erit ex æquo [per 22. 5.] ut Δ ad AΓ ita quadratum ex E ad quadratum ex HΘ. sed Δ ad AΓ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo [per 9. 10.] E ipsi HΘ incommensurabilis est longitudine. & quoniam ut BA ad AΓ ita quadratum ex ZH ad id quod ex HΘ quadratum; erit quadratum ex ZH majus quadrato ex HΘ. sint quadrato ex ZH æqualia quadrata ex HΘ, K: per conversionem igitur rationis est [per coroll. 19. 5.] ut AB ad BΓ ita quadratum ex ZH ad quadratum ex K. sed AB ad BΓ rationem habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo & quadratum ex ZH ad quadratum ex K rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: commensurabilis igitur est ZH ipsi K longitudine; & ob id ZH plus potest quam HΘ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. suntque ZH, HΘ rationales potentia solum commensurabiles, & neutra ipsarum commensurabilis est ipsi E longitudine: ergo [per 3. deff. secund. 10.] ZΘ est ex binis nominibus tertia. quod erat demonstrandum.

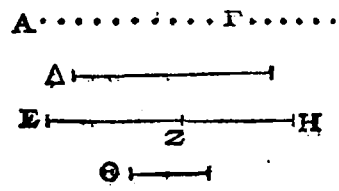
ΒΓ λόγον ἔχειν ὃν ἀριθμὸς τετράγωνος πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ λόγον μὴ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἐκκείσθω δέ τις ᾗ ἄλλως μὴ τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Δ, καὶ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγον μὴ ἐχέτω ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ εὐθεῖα ἡ Ε, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ῥητὴ δὲ ἡ Ε· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΖΗ μήκει. γεγονέτω δὲ πάλιν ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ῥητὴ δὲ ἡ ΖΗ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΗΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει· αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. λέγω δὴ ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸ ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ὁ δὲ Δ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ Ε τῇ ΗΘ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΗΘ, Κ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει· ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μεῖζον δυνάσται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ ΖΗ, ΗΘ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ Ε μήκει· ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Εὑρεῖν τινὶ ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτιον.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΕΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΖ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΕΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστί. λέγω δὴ ὅτι καὶ τετάρτη.

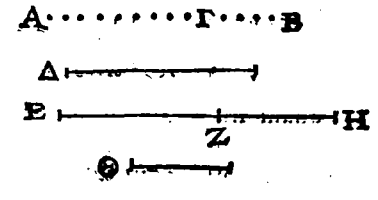


Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, μεῖζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΑΒ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς τετράγωνος πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ἡ ΕΖ ἄρα τῆς ΖΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ ΕΖ, ΖΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΕΖ τῇ Δ σύμμετρός ἐστι μήκει· ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Εὑρεῖν τινὶ ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἡ ΖΗ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΕ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· οὐκ ἄρα δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΗ. λέγω δὴ ὅτι καὶ πέμπτη.



PROP. LII. PROBL.

Invenire ex binis nominibus quartam.

EXponantur duo numeri AΓ, ΓB, ita ut AB ad utrumque ipsorum rationem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum; exponaturque rationalis Δ, & ipsi Δ commensurabilis sit EZ longitudine: ergo EZ est rationalis. fiat autem ut BA numerus ad numerum AΓ ita quadratum ex EZ ad quadratum ex ZH: commensurabile igitur est quadratum ex EZ quadrato ex ZH: ideoque recta linea ZH est rationalis. & quoniam BA ad AΓ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum, erit [per 9. 10.] EZ ipsi ZH longitudine incommensurabilis: ergo EZ, ZH rationales sunt potentia solum commensurabiles; & ob id [per 37. 10.] EH ex binis nominibus est. dico eam & quartam esse.

Quoniam enim est ut BA ad AΓ ita quadratum ex EZ ad quadratum ex ZH; major autem est BA quam AΓ: erit quadratum ex EZ quadrato ex ZH majus. sint quadrato ex EZ æqualia quadrata ex ZH, Θ: per conversionem igitur rationis est ut AB numerus ad numerum BΓ ita quadratum ex EZ ad id quod fit ex Θ quadratum. sed AB ad BΓ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo EZ ipsi Θ longitudine est incommensurabilis: ac propterea EZ plus potest quam ZH quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. suntque EZ, ZH rationales potentia solum commensurabiles; & EZ ipsi Δ commensurabilis est longitudine: ergo [per 4. defl. secund. 10.] EH ex binis nominibus est quarta. quod erat faciendum.

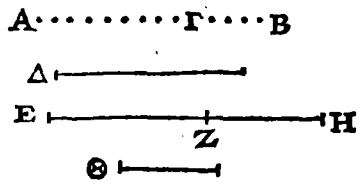
PROP. LIII. PROBL.

Invenire ex binis nominibus quintam.

EXponantur duo numeri AΓ, ΓB, ita ut AB ad utrumq; ipsorum rationem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum; exponaturque recta linea quædam rationalis Δ, & ipsi longitudine commensurabilis sit ZH: ergo ZH est rationalis. & fiat ut ΓA ad AB ita quadratum ex HZ ad id quod fit ex ZE quadratum: rationalis igitur est ZE. & quoniam ΓA numerus ad AB rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex HZ ad quadratum ex ZE rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo [per 9. 10.] EZ, ZH rationales sunt potentia solum commensurabiles: & ob id [per 37. 10.] EH ex binis nominibus est. dico eam & quintam esse.

Quoniam

Quoniam enim eſt ut ΓA ad AB ita quadratum ex HZ ad quadratum ex ZE; erit convertendo [per 16. 5.] ut BA ad AΓ ita quadratum ex EZ ad quadratum ex ZH: ergo quadratum ex EZ quadrato ex ZH eſt majus. ſint quadrato ex EZ æqualia quadrata ex ZH, Θ: per converſionem igitur rationis eſt ut AB numerus ad numerum BΓ ita quadratum ex EZ ad id quod ex Θ quadratum. ſed AB ad BΓ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum: ergo neque quadratum ex EZ ad quadratum ex Θ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ac propterea EZ ipſi Θ longitudine eſt incommenſurabilis: quare EZ plus poteſt quam ZH quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. ſuntque EZ, ZH rationales potentia ſolum commenſurabiles, & ZH minus nomen expoſitæ rationali Δ commenſurabilis eſt longitudine: ergo [per 5.deff.ſecund.10.] EH ex binis nominibus eſt quinta. quod erat faciend.

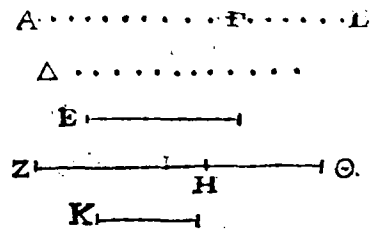


Επεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΓA πρὸς τὸν AB ἕτως τὸ ἀπὸ τῆς HZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZE· ἀναπαλιν ἄρα ὡς ὁ BA πρὸς τὸν AΓ ἕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς EZ τοῦ ἀπὸ τῆς ZH. ἔστω ὃν τῷ ἀπὸ τῆς EZ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ZH, Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ AB ἀριθμὸς πρὸς τὸν BΓ ἕτως τὸ ἀπὸ τῆς EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ AB πρὸς τὸν BΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ EZ τῇ Θ μήκει· ὥστε ἡ EZ τῇ ZH μεῖζον δυνάται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ EZ, ZH ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ ZH ἔλαττον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Δ μήκει· ἡ EH ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. LIV. PROBL.

Invenire ex binis nominibus ſextam.

EXponantur duo numeri AΓ, ΓB, ita ut AB ad utrumque ipſorum rationem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ſit etiam alius numerus Δ non quadratus, qui ad utrumque ipſorum BA, AΓ rationem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum, & exponatur rationalis quædam recta linea E, fiatque ut Δ ad AB ita quadratum ex E ad quadratum ex ZH: commenſurabilis igitur eſt E ipſi ZH potentia. atque E eſt rationalis: quare [per 6. def. 10.] & rationalis eſt ZH. & quoniam Δ ad AB rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex E ad quadratum ex ZH rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo [per 9. 10.] E ipſi ZH longitudine eſt incommenſurabilis. itaque rurſus fiat ut BA ad AΓ ſic quadratum ex ZH ad quadratum ex HΘ: quadratum igitur ex ZH quadrato ex HΘ eſt commenſurabile. rationale autem eſt quadratum ex ZH: ergo & quadratum ex HΘ eſt rationale; & ob id recta linea HΘ eſt rationalis. & quoniam BA ad AΓ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex ZH ad quadratum ex HΘ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommenſurabilis igitur eſt [per 9. 10.] ZH ipſi HΘ longitudine; & ideo ZH, HΘ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: quare [per 37. 10.] ex binis nominibus eſt ZΘ. oſtendendum eſt & ſextam eſſe.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ νδ'.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην.

ΕΚκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ AΓ, ΓB, ὥστε τὸν AB πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἔστω δὲ καὶ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ Δ μὴ τετράγωνος ὤν, μηδὲ πρὸς ἑκάτερον τῶν BA, AΓ λόγον ἔχων ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ εὐθεῖα ἡ E, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν AB ἕτως τὸ ἀπὸ τῆς E πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ E τῇ ZH δυνάμει. καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ E· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ZH. καὶ ἐπεὶ οὐκ ἔχει ὁ Δ πρὸς τὸν AB λόγον ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὁδὲ τὸ ἀπὸ τῆς E ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ E τῇ ZH μήκει. γεγονέτω δὴ πάλιν ὡς ὁ BA πρὸς τὸν AΓ ἕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HΘ· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZH τῷ ἀπὸ τῆς HΘ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ZH· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς HΘ· ῥητὴ ἄρα ἡ HΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ BA πρὸς τὸν AΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὁδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ZH ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ZH τῇ HΘ μήκει· αἱ ZH, HΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ZΘ. δεικτέον δὴ ὅτι καὶ ἕκτη.

Επεὶ

Επεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ὁ δὲ Δ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΗΘ μήκει. ἐδείχθη δὲ καὶ τῇ ΖΗ ἀσύμμετρος· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ Ε μήκει. καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ἔστω δὴ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΗΘ, Κ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὥστε οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει· ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰσὶν αἱ ΖΗ, ΗΘ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Ε· ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

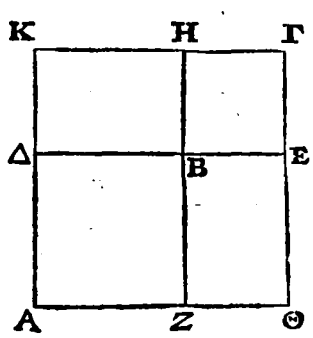
Quoniam enim ut Δ ad ΑΒ ita eſt quadratum ex Ε ad quadratum ex ΖΗ; eſt autem & ut ΒΑ ad ΑΓ ita quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex ΗΘ: ex æquo eſt ut Δ ad ΑΓ ita quadratum ex Ε ad quadratum ex ΗΘ. ſed Δ ad ΑΓ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo neque quadratum ex Ε ad quadratum ex ΗΘ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommenſurabilis igitur eſt Ε [per 9.10.] ipſi ΗΘ longitudine. oſtenſum autem eſt & ipſi ΖΗ incommenſurabilem eſſe: quare utraque ipſarum ΖΗ, ΗΘ ipſi Ε longitudine eſt incommenſurabilis. & quoniam eſt ut ΒΑ ad ΑΓ ita quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex ΗΘ, erit quadratum ex ΖΗ quadrato ex ΗΘ majus. ſint quadrato ex ΖΗ æqualia quadrata ex ΗΘ, Κ: ergo per converſionem rationis ut ΑΒ ad ΒΓ ita eſt quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex Κ. ſed ΑΒ ad ΒΓ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: neque igitur quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex Κ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ac propterea ΖΗ ipſi Κ longitudine eſt incommenſurabilis: ergo ΖΗ plus poteſt quam ΗΘ quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. ſuntque ΖΗ, ΗΘ rationales potentia ſolum commenſurabiles; & neutra ipſarum longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali Ε: quare [per 6. deff. ſecund.10.] ΖΘ eſt ex binis nominibus ſexta. quod erat faciendum.

ΛΗΜΜΑ.

Εστω δύο τετράγωνα τὰ ΑΒ, ΒΓ, καὶ κείσθωσαν ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΔΒ τῇ ΒΕ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΒΗ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον· λέγω ὅτι τετράγωνόν ἐστι τὸ ΑΓ, καὶ ὅτι τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΗ, καὶ ἔτι τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΓ.

LEMMA.

Sint duo quadrata ΑΒ, ΒΓ, & ponantur ita ut ΔΒ ſit in directum ipſi ΒΕ: ergo [per 14. 1] & ΖΒ ipſi ΒΗ in directum erit: & compleatur ΑΓ parallelogrammum: dico ΑΓ quadratum eſſe, & inter quadrata ΑΒ, ΒΓ rectangulum ΔΗ medium eſſe proportionale, itemque inter ipſa ΑΓ, ΓΒ medium proportionale eſſe ΔΓ.



Επεὶ γάρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΖΒ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΒΗ μήκει· ὅλη ἄρα ἡ ΔΕ ὅλῃ τῇ ΖΗ ἐστιν ἴση. ἀλλ' ἡ μὲν ΔΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΚ, ΘΓ ἐστιν ἴση· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΘ, ΚΓ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΚ, ΘΓ ἐστιν ἴση· ἰσοπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον. ἔστι δὲ καὶ ὀρθογώνιον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΗ, ὡς δὲ ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως τὸ ΔΗ πρὸς τὸ ΒΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΗ οὕτως τὸ ΔΗ πρὸς τὸ ΒΓ· τῶν ΑΒ, ΒΓ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΗ. λέγω δὴ ὅτι καὶ τῶν ΑΓ, ΒΓ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΓ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΚ οὕτως ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΗΓ, ἴση γάρ ἐστιν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΔ οὕτως ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΗ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΔ οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΒ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΓ πρὸς

Quoniam enim ΔΒ quidem eſt æqualis ΖΒ, ΒΕ vero ipſi ΒΗ; erit tota ΔΕ toti ΖΗ æqualis. ſed ΔΕ æqualis eſt utrivis ipſarum ΑΚ, ΘΓ: ergo & utravis ΑΘ, ΚΓ utrivis ΑΚ, ΘΓ eſt æqualis; æquilaterum igitur eſt ΑΓ parallelogrammum. eſt autem & rectangulum: ergo quadratum eſt ΑΓ. & quoniam eſt ut ΖΒ ad ΒΗ ita ΔΒ ad ΒΕ, ut autem ΖΒ ad ΒΗ ita [per 1. 6.] ΑΒ ad ΔΗ, & ut ΔΒ ad ΒΕ ita ΔΗ ad ΒΓ: ut igitur ΑΒ ad ΔΗ ita eſt [per 11. 5.] ΔΗ ad ΒΓ: ideoque inter ΑΒ, ΒΓ medium proportionale eſt ΔΗ. dico præterea inter ipſa ΑΓ, ΓΒ medium proportionale eſſe ΔΓ. nam cum ſit ut ΑΔ ad ΔΚ ita ΚΗ ad ΗΓ, eſt enim utraque utrique æqualis: & componendo erit ut ΑΚ ad ΚΔ ita ΚΓ ad ΓΗ. ſed [per 1. 6.] ut ΑΚ ad ΚΔ ita ΑΓ ad ΓΔ, & ut ΚΓ ad ΓΗ ita ΔΓ ad ΓΒ: & igitur ut ΑΓ ad ΓΔ

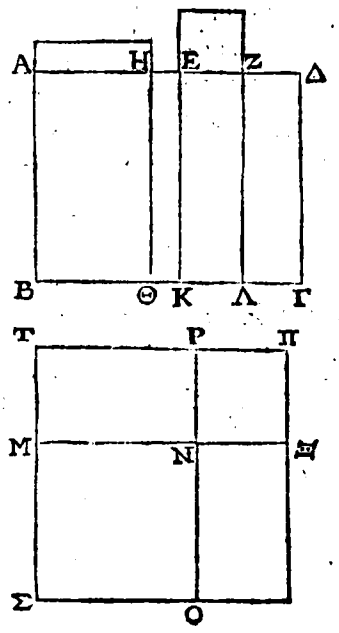
ita eſt ΔΓ ad ΓΒ: ac propterea inter ipſa ΑΓ, ΓΒ medium proportionale eſt ΓΔ. quod demonſtrandum proponebatur.

PROP. LV. THEOR.

Si ſpatium contineatur ſub rationali, & ex binis nominibus prima; recta linea ſpatium potens irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur.

SPatium enim ΑΒΓΔ contineatur ſub rationali ΑΒ, & ex binis nominibus prima ΑΔ: dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium ΑΓ irrationalem eſſe, quæ ex binis nominibus appellatur.

Quoniam enim ΑΔ eſt ex binis nominibus prima, dividatur in nomina ad punctum Ε; & ſit ΑΕ majus nomen. manifeſtum eſt [per 1. deff. ſecund. 10.] ΑΕ, ΕΔ rationales eſſe potentia ſolum commenſurabiles, & ΑΕ plus poſſe quam ΕΔ quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: & præterea ΑΕ expoſitæ rationali ΑΒ longitudine commenſurabilem eſſe. ſecetur ΕΔ bifariam in Ζ. quoniam igitur ΑΕ plus poteſt quam ΕΔ quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, ſi quartæ parti quadrati, quod fit à minori, hoc eſt quadrato ex ΕΖ, æquale parallelogrammum ad majorem ΑΕ applicetur deficiens figura quadrata, [per 18. 10.] in partes commenſurabiles ipſam dividet. applicetur igitur [per 28. 6.] ad ΑΕ quadrato ipſius ΕΖ æquale rectangulum ſub ΑΗ, ΗΕ: ergo ΑΗ ipſi ΗΕ longitudine eſt commenſurabilis. deinde per puncta Η, Ε, Ζ alterutri ipſarum ΑΒ, ΔΓ parallelæ ducantur ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, & [per 14. 2.] parallelogrammo quidem ΑΘ æquale quadratum conſtituatur ΣΝ, parallelogrammo autem ΗΚ æquale quadratum ΝΠ, & ponantur ita ut ΜΝ ſit in directum ipſi ΝΞ: ergo [per 14. 1.] ΡΝ ipſi ΝΟ in directum erit. & parallelogrammum ΣΠ compleatur: quadratum igitur [per lem. præc.] eſt ΣΠ. & quoniam rectangulum ſub ΑΗ, ΗΕ eſt æquale quadrato ex ΕΖ, erit [per 17. 6.] ut ΑΗ ad ΕΖ ita ΕΖ ad ΕΗ: quare [per 1. 6.] ut ΑΘ ad ΕΛ ita eſt ΕΛ ad ΚΗ: ac propterea inter parallelogramma ΑΘ, ΗΚ medium proportionale eſt ΕΛ. ſed [per conſtr.] parallelogrammo ΑΘ æquale eſt quadratum ΣΝ, & ΗΚ æquale quadrato ΝΠ: ergo inter quadrata ΣΝ, ΝΠ medium proportionale eſt ΕΛ. ſed [per lem. præced.] inter eadem ΣΝ, ΝΠ medium proportionale eſt & ΜΡ: æquale igitur eſt ΜΡ ipſi ΕΛ. ſed [per 43. 1.] ΜΡ eſt æquale ΟΞ, & [per 36. 1.] ΕΛ ipſi ΖΓ: ergo totum ΕΓ ipſis ΜΡ, ΟΞ eſt æquale. ſunt autem & ΑΘ, ΗΚ æqualia ipſis ΣΝ, ΝΠ: totum igitur ΑΓ eſt æquale toti ΣΠ, hoc eſt quadrato ex ΜΞ; ideoque ipſa ΜΞ



τὸ ΓΔ ἔτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΒ· τ᾽ ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΓΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νέ.

Ἐὰν χωρίον περιέχῃ ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

ΧΩρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

Ἐπεὶ γὰρ ἐστιν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη ἡ ΑΔ, διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω τὸ μεῖζον ὄνομα τὸ ΑΕ. φανερὸν δὴ ὅτι αἱ ΑΕ, ΕΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΒ μήκει. τετμήσθω δὲ ἡ ΕΔ δίχα κατὰ τὸ Ζ σημεῖον. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τῶν ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος, τουτέστι τῶν ἀπὸ τῆς ΕΖ, ἴσον παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. παραβεβλήσθω ἔν παρὰ τὴν ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΕ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΕΗ μήκει. καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Η, Ε, Ζ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΔΓ παράλληλοι αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ· καὶ τῷ μὲν ΑΘ παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον συνεστάτω τὸ ΣΝ, τῷ δὲ ΗΚ ἴσον τὸ ΝΠ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ᾽ εὐθείας εἶναι τὴν ΜΝ τῇ ΝΞ· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΡΝ τῇ ΝΟ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΣΠ παραλληλόγραμμον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΣΠ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΕΖ ἔτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΕΗ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΘ πρὸς τὸ ΕΛ ἔτως τὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΚΗ· τῶν ΑΘ, ΗΚ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΛ. ἀλλὰ τῷ μὲν ΑΘ ἴσον ἐστὶ τὸ ΣΝ, τὸ δὲ ΗΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΝΠ· τῶν ΣΝ, ΝΠ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΛ. ἔστι δὲ τῶν αὐτῶν τῶν ΣΝ, ΝΠ μέσον ἀνάλογον καὶ τὸ ΜΡ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΜΡ τῷ ΕΛ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΜΡ τῷ ΟΞ ἴσον ἐστί, τὸ δὲ ΕΛ τῷ ΖΓ· ὅλον ἄρα τὸ ΕΓ τοῖς ΜΡ, ΟΞ ἴσον ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ τὰ ΑΘ, ΗΚ τοῖς ΣΝ, ΝΠ ἴσα· ὅλον ἄρα τὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶ ὅλῳ τῷ ΣΠ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΜΞ τετραγώνῳ· τὸ ΑΓ

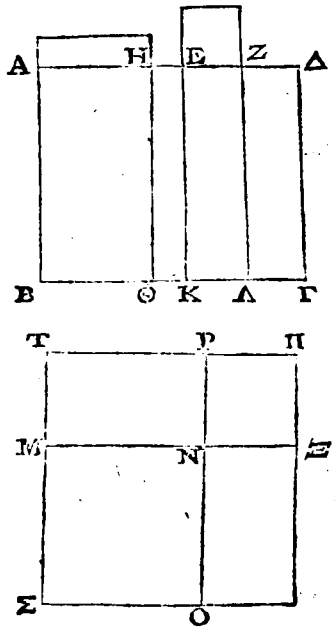
ἄρα

ἄρα δυνάμει) ἡ ΜΞ· λέγω ὅτι ἡ ΜΞ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΗ, ΗΕ. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ σύμμετρος μήκει· καὶ αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα τῇ ΑΒ σύμμετροί εἰσι. καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ ΑΒ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΗ, ΗΕ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΘ, ΗΚ, καὶ ἔστι σύμμετρον τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἴσον ἐστί, τὸ δὲ ΗΚ τῷ ΝΠ· καὶ τὰ ΣΝ, ΝΠ ἄρα, τουτέστι τὰ ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ, ῥητά ἐστι καὶ σύμμετρα. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΑΗ ἐστὶ σύμμετρος, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρος· ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΗ τῇ ΕΖ μήκει· ὥστε καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρον. ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἐστιν ἴσον, τὸ δὲ ΕΛ τῷ ΜΡ· καὶ τὸ ΣΝ ἄρα τῷ ΜΡ ἀσύμμετρός ἐστιν. ἀλλ' ὡς τὸ ΣΝ πρὸς τὸ ΜΡ οὕτως ἡ ΟΝ πρὸς ΝΡ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΝ τῇ ΝΡ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΟΝ τῇ ΜΝ, ἡ δὲ ΝΡ τῇ ΝΞ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ. καὶ ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ σύμμετρον τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ, καὶ ῥητὸν ἑκάτερον· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΜΞ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστί, καὶ δυνατὴ τὸ ΑΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νϛ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τὸ ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, καλουμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ΑΒΓΔ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τὸ ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη ἐστίν.



Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα ἐστὶν ἡ ΑΔ, διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τοῦ ΕΔ μεῖζον δυνατὴ τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τὸ ἔλαττον ὄνομα ἡ ΕΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΒ μήκει. πετμήσθω ἡ ΕΔ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΕ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, τὸ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΕ· σύμμετρος ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει. καὶ διὰ τῶν Η, Ε, Ζ παράλληλοι ἤχθωσαν τῇ ΑΒ, ΔΓ αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, καὶ τῷ μὲν ΑΘ παραλληλόγραμμον ἴσον τετράγωνον συνεστάτω τὸ ΣΝ, τῷ δὲ

potest parallelogrammum ΑΓ: dico ΜΞ ex binis nominibus esse. quoniam enim ΑΗ commensurabilis est ipsi ΗΕ, erit [per 16. 10.] ΑΕ utrique ipsarum ΑΗ, ΗΕ commensurabilis. ponitur autem & ΑΕ commensurabilis ipsi ΑΒ longitudine: ergo [per 12. 10.] & ΑΗ, ΗΕ ipsi ΑΒ commensurabiles sunt. atque est ΑΒ rationalis: rationalis igitur est & utraque ipsarum ΑΗ, ΗΕ; & ob id [per 20. 10.] rationale utrumque ipsorum ΑΘ, ΗΚ, & ΑΘ ipsi ΗΚ [per 10. 10.] est commensurabile. sed ΑΘ est æquale ipsi ΣΝ, & ΗΚ ipsi ΝΠ: ergo & quadrata ΣΝ, ΝΠ, videlicet quæ fiunt ex ΜΝ, ΝΞ, rationalia sunt & commensurabilia. & quoniam [per 37. 10.] incommensurabilis est ΑΕ ipsi ΕΔ longitudine, & ΑΕ quidem est commensurabilis ipsi ΑΗ & ΔΕ commensurabilis ipsi ΕΖ; erit & ΑΗ ipsi ΕΖ longitudine incommensurabilis: ergo & ΑΘ est incommensurabile ipsi ΕΛ. sed ΑΘ est æquale ΣΝ, & ΕΛ ipsi ΜΡ: quare ΣΝ est incommensurabile ipsi ΜΡ. ut autem ΣΝ ad ΜΡ ita ΟΝ ad ΝΡ: incommensurabilis igitur est [per 10. 10.] ΟΝ ipsi ΝΡ. est autem ΟΝ æqualis ΜΝ, & ΝΡ ipsi ΝΞ: ergo ΜΝ ipsi ΝΞ est incommensurabilis. atque est quadratum ex ΜΝ commensurabile quadrato ex ΝΞ, & utrumque rationale: quare ΜΝ, ΝΞ rationales sunt potentia solum commensurabiles: ideoque [per 37. 10.] ΜΞ ex binis nominibus est, & potest parallelogrammum ΑΓ. quod erat demonstrandum.

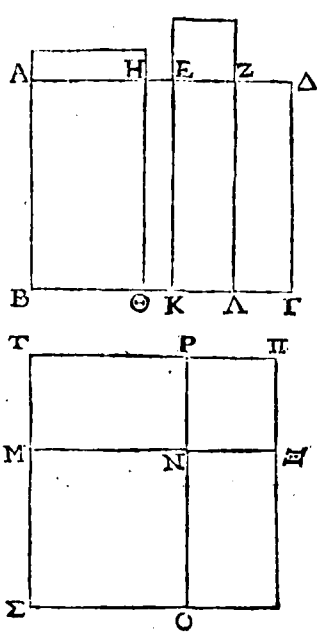
PROP. LVI. PROBL.

Si spatium contineatur sub rationali, & ex binis nominibus secunda; recta linea spatium potens irrationalis est, quæ ex binis mediis prima appellatur.

SPatium enim ΑΒΓΔ contineatur sub rationali ΑΒ, & ex binis nominibus secunda ΑΔ: dico rectam lineam, quæ spatium ΑΓ potest, ex binis mediis primam esse.

Quoniam enim ΑΔ est ex binis nominibus secunda, dividatur in nomina ad punctum Ε, ita ut ΑΕ sit majus nomen: ergo [per 2. defl. secund. 10.] ΑΕ, ΕΔ rationales sunt potentia solum commensurabiles, & ΑΕ plus potest quam ΕΔ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, & minus nomen ΕΔ commensurabile est ipsi ΑΒ longitudine. secetur ΕΔ bifariam in Ζ, & quadrato ipsius ΕΖ æquale parallelogrammum ad rectam lineam ΑΕ applicetur deficiens figura quadrata, rectangulum nempe sub ΑΗ, ΗΕ: commensurabilis igitur est [per 18. 10.] ΑΗ ipsi ΗΕ longitudine. & per puncta Η, Ε, Ζ ipsis ΑΒ, ΔΓ parallelæ ducantur ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, parallelogrammo autem ΑΘ æquale quadratum ΣΝ constituatur, & paralle-

logrammo HK æquale quadratum NΠ, & ponatur ita ut MN ſit in directum ipſi NΞ: ergo & PN ipſi NO in directum erit. & compleatur ΣΠ quadratum: manifeſtum igitur eſt ex iis quæ demonſtrata ſunt [in antec.] parallelogrammum MP medium eſſe proportionale inter quadrata Σ N, N Π, & parallelogrammo E Λ æquale; & præterea rectam lineam MΞ poſſe ſpatium AΓ: oſtendendum igitur eſt ipſam MΞ ex binis mediis primam eſſe. quoniam enim [per 37. 10.] incommenſurabilis eſt AB ipſi EΔ longitudine, commenſurabilis autem EΔ ipſi AB; erit [per 14. 10.] AE ipſi AB longitudine incommenſurabilis. & quoniam AH commenſurabilis eſt longitudine ipſi HE, erit [per 16. 10.] AE utrique ipſarum AH, HE longitudine commenſurabilis. atque eſt AE rationalis: rationalis igitur & utraque AH, HE. quod cum AE ſit incommenſurabilis quidem ipſi AB longitudine, commenſurabilis autem AE utrique ipſarum AH, HE; erunt AH, HE ipſi AB longitudine incommenſurabiles: quare BA, AH, HE rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: medium igitur eſt [per 22. 10.] utrumque parallelogrammorum AΘ, HK: & ob id utrumque quadratorum Σ N, N Π eſt medium: ergo rectæ lineæ MN, NΞ mediæ ſunt. rurſus, quoniam commenſurabilis eſt AH ipſi HE longitudine, erit [per 1.6. & 10.10] parallelogrammum AΘ parallelogrammo HK commenſurabile, hoc eſt quadratum Σ N ipſi N Π, hoc eſt quadratum ex MN quadrato ex NΞ: ergo MN, NΞ potentia commenſurabiles ſunt. & quoniam incommenſurabilis eſt AE ipſi EΔ longitudine, & AE quidem eſt commenſurabilis ipſi AH, EΔ vero ipſi EZ: erit AH ipſi EZ longitudine incommenſurabilis: quare & parallelogrammum AΘ incommenſurabile parallelogrammo EΛ, hoc eſt Σ N ipſi MP, hoc eſt [per 1.6.] ON ipſi NP, hoc eſt MN ipſi NΞ incommenſurabilis eſt longitudine. oſtenſæ autem ſunt MN, NΞ & mediæ & potentia commenſurabiles: ergo MN, NΞ mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles. dico & rationale continere. quoniam enim ΔE ponitur commenſurabilis utrique ipſarum AB, EZ, erit EZ ipſi EK longitudine commenſurabilis. atque eſt rationalis utraque ipſarum: rationale igitur eſt [per 20. 10.] parallelogrammum EΛ, hoc eſt MP; eſtque MP quod ſub MN, NΞ continetur. ſi autem duæ mediæ potentia ſolum commenſurabiles componantur, quæ rationale contineant, tota [per 38. 10.] irrationalis eſt, quæ ex binis mediis prima appellatur: ergo MΞ ex binis mediis eſt prima. quod erat demonſtrandum.



ΗΚ ἴσον πεπράγωνον τὸ ΝΠ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΜΝ τῇ ΝΞ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΡΝ τῇ ΝΟ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΣΠ πεπράγωνον· φανερὸν δὴ ἐκ δὲ προδεδειγμένων, ὅτι τὸ ΜΡ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τῷ ΣΝ, ΝΠ, καὶ ἴσον τῷ ΕΛ, καὶ ὅτι τὸ ΑΓ χωρίον δύναται ἡ ΜΞ· δεικτέον δὴ ὅτι ἡ ΜΞ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ μήκει. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΕ ἑκατέρα τῶν ΑΗ, ΗΕ. καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ ΑΕ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΗ, ΗΕ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ, σύμμετρος δὲ ἡ ΑΕ ἑκατέρα τῶν ΑΗ, ΗΕ· αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι τῇ ΑΒ μήκει· αἱ ΒΑ, ΑΗ, ΗΕ ἄρα ῥητήν εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΘ, ΗΚ· ὥστε ἑκάτερον τῶν ΣΝ, ΝΠ μέσον ἐστί· καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα μέσαι εἰσί. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ, τουτέστι τὸ ΣΝ τῷ ΝΠ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῆς ΜΝ τῷ ὑπὸ τῆς ΝΞ· ὥστε δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι αἱ ΜΝ, ΝΞ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, ἀλλ' ἡ μὲν ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΗ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΕΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΕΖ· ὥστε καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστι, τουτέστι τὸ ΣΝ τῷ ΜΡ, τουτέστιν ἡ ΟΝ τῇ ΝΡ, τουτέστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει. ἐδείχθησαν δὲ αἱ ΜΝ, ΝΞ καὶ μέσαι οὖσαι καὶ δυνάμει σύμμετροι· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω δὴ ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΔΕ ὑποκειται ἑκατέρᾳ τῶν ΑΒ, ΕΖ σύμμετρος· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ. καὶ ῥητὴ ἑκατέρα αὐτῶν· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, τὸ δὲ ΜΡ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. ἐὰν δὲ δύο μέσαι δυνάμει σύμμετροι σωτὴν ῥητὸν περιέχωσιν, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι, καλείτω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη· ἡ ΜΞ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. LVII. Theor.

Si ſpatium contineatur ſub rationali, & ex binis nominibus tertia; recta li-

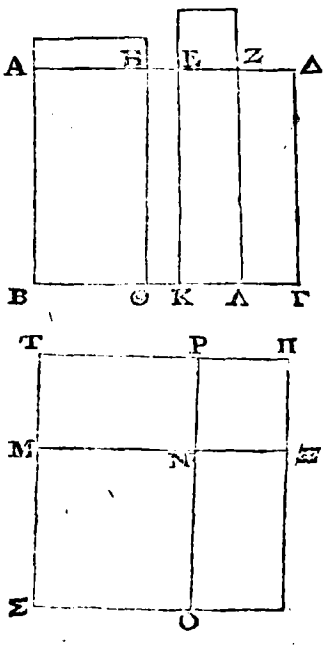
ΠΡΟΤΑΣΙΣ νζ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη

δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

nea ſpatium potens irrationalis eſt, quæ appellatur ex binis mediis ſecunda.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης τῆς ΑΔ, διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὧν μεῖζον ἔστω τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα.



Καταγεγράφθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετὴ ἡ ΑΔ· αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δυνάται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἑκάτερα τῶν ΑΕ, ΕΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΒ μήκει. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δεδειγμένοις δείξομεν ὅτι ἡ ΜΞ ἐστὶν ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη, καὶ ὅτι αἱ ΜΝ, ΝΞ ἐκ δύο μέσων εἰσί· δεικτέον δὴ ὅτι καὶ δευτέρα. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτέστι τῇ ΕΚ, σύμμετρος δὲ ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ μήκει. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΖΕ, ΕΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τὰ ΜΝ, ΝΞ· ἡ ΜΞ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Spatium enim ΑΒΓΔ contineatur ſub rationali ΑΒ, & ex binis nominibus tertia ΑΔ diviſa in nomina ad punctum Ε, quorum majus ſit ΑΕ: dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium ΑΓ, irrationalem eſſe; quæ ex binis mediis ſecunda appellatur.

Conſtruantur enim eadem quæ ſupra. & quoniam ΑΔ ex binis nominibus tertia eſt; erunt [per 3. deff. ſecund. 10.] ΑΕ, ΕΔ rationales potentia ſolum commenſurabiles, & ΑΕ plus poterit quam ΕΔ quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, neutraque ipſarum ΑΕ, ΕΔ ipſi ΑΒ longitudine erit commenſurabilis. ſimiliter [atque in præc.] oſtendemus ΜΞ eam eſſe quæ ſpatium ΑΓ poteſt, & ΜΝ, ΝΞ eſſe ex binis mediis: itaque oſtendendum eſt & ſecundam eſſe. quoniam enim ΔΕ incommenſurabilis eſt longitudine ipſi ΑΒ, hoc eſt ipſi ΕΚ; atque eſt ΔΕ commenſurabilis ΕΖ: erit ΕΖ ipſi ΕΚ longitudine incommenſurabilis. & ſunt rationales: ergo ΖΕ, ΕΚ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; & ob id ΕΛ, hoc eſt ΜΡ, medium eſt, & continetur ſub ΜΝ, ΝΞ: medium igitur eſt quod ſub ΜΝ, ΝΞ continetur: quare [per 39. 10.] ΜΞ ex binis mediis eſt ſecunda. quod erat demonſtrandum.

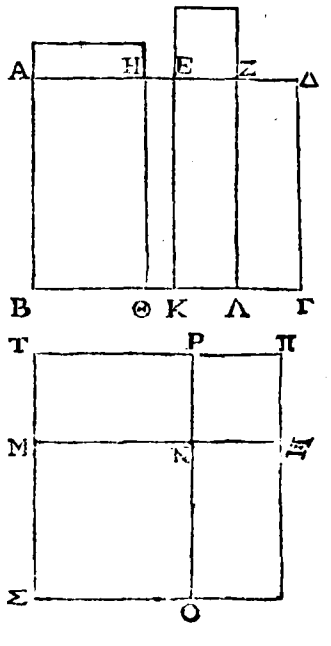
ΠΡΟΤΑΣΙΣ νή.

Ἐὰν χωρίον περιέχῃ ὑπὸ ῥητῆς, καὶ ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων.

Prop. LVIII. Theor.

Si ſpatium contineatur ſub rationali, & ex binis nominibus quarta; recta linea ſpatium potens irrationalis eſt, quæ vocatur major.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΓ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης τῆς ΑΔ, διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὧν μεῖζον ἔστω τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων.

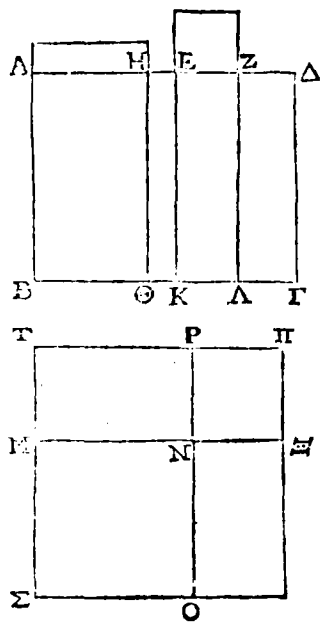


Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη, αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δυνάται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ σύμμετρός ἐστι μήκει. τετμήσθω δὴ ἡ ΔΕ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΕ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΕ· ἀσύμμετρον ἄρα

Spatium enim ΑΓ contineatur ſub rationali ΑΒ, & ex binis nominibus quarta ΑΔ, diviſa in nomina ad punctum Ε, quorum majus ſit ΑΕ: dico rectam lineam, quæ ſpatium ΑΓ poteſt, irrationalem eſſe; quæ major appellatur.

Quoniam enim ΑΔ ex binis nominibus eſt quarta, erunt [per 4. deff. ſecund. 10.] ΑΕ, ΕΔ rationales potentia ſolum commenſurabiles; & ΑΕ plus poterit quam ΕΔ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, & ΑΕ ipſi ΑΒ commenſurabilis erit longitudine. dividatur ΔΕ bifariam in Ζ, & quadrato ipſius ΕΖ æquale parallelogrammum ad ΑΕ applicetur deficiens figura quadrata, rectangulum nempe ſub ΑΗ, ΗΕ: erit igitur [per

19.10.] AH ipſi HE longitudine incommenſurabilis. ducantur ipſi AB parallelæ HΘ, EK, ZΛ, & eadem fiant quæ ſupra: conſtat igitur MΞ poſſe ſpatium AΓ. oſtendendum autem eſt MΞ irrationalem eſſe, quæ vocatur major. quoniam enim AH ipſi HE incommenſurabilis eſt longitudine, erit [per 1.6. & 10.10.] & AΘ ipſi HK incommenſurabile, hoc eſt [per conſtr.] ΣN ipſi NΠ: ergo MN, NΞ potentia incommenſurabiles ſunt. & quoniam AE ipſi AB longitudine eſt commenſurabilis, parallelogrammum AK rationale eſt, atque eſt æquale quadratis ipſarum MN, NΞ: ergo compoſitum ex quadratis ipſarum MN, NΞ eſt rationale. quod cum ΔE ſit incommenſurabilis longitudine ipſi AB, hoc eſt ipſi EK, ſit autem ΔE commenſurabilis ipſi EZ: erit EZ ipſi EK incommenſurabilis longitudine: quare KE, EZ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: & ob id [per 22. 10.] medium eſt AE, hoc eſt MP; & continetur ſub MN, NΞ; medium igitur eſt quod ſub MN, NΞ continetur; eſtque compoſitum ex quadratis ipſarum MN, NΞ rationale; & MN ipſi NΞ potentia incommenſurabilis. ſi autem duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ſub ipſis continetur medium; tota [per 40. 10.] irrationalis erit. vocatur autem major: ergo MΞ irrationalis eſt, quæ major appellatur, & poteſt ſpatium AΓ. quod erat demonſtrandum.



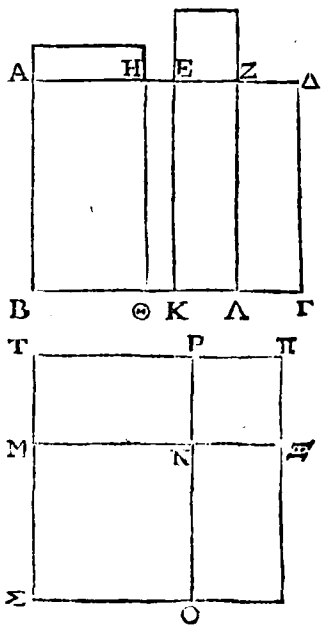
ἡ AH τῇ HE μήκει. ἤχθωσαν ὡσάμηλοι τῇ AB αἱ HΘ, EK, ZΛ, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου γεγονέτω· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ τὸ AΓ χωρίον δυναμένη ἐστὶν ἡ MΞ. δεικτέον δὲ ὅτι ἡ MΞ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ AH τῇ HE μήκει, ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ AΘ τῷ HK, τουτέστι τὸ ΣN τῷ NΠ· αἱ MN, NΞ ἄρα εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ AE τῇ AB μήκει, ῥητὸν ἐστι τὸ AK, καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν MN, NΞ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν MN, NΞ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΔE τῇ AB μήκει, τουτέστι τῇ EK, ἀλλὰ ἡ ΔE σύμμετρός ἐστι τῇ EZ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ EZ τῇ EK μήκει· αἱ KE, EZ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα τὸ ΛE, τουτέστι τὸ MP, καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν MN, NΞ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν MN, NΞ, καὶ ῥητὸν τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν MN, NΞ, καὶ ἔστιν ἀσύμμετρον ἡ MN τῇ NΞ δυνάμει. ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ ὑπὸ αὐτῶν μέσον, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι. καλείσθω δὲ μείζων· ἡ MΞ ἄρα ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων, καὶ δυνατὸν τὸ AΓ χωρίον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. LIX. THEOR.

Si ſpatium contineatur ſub rationali, & ex binis nominibus quinta; recta linea ſpatium potens irrationalis eſt, quæ vocatur rationale & medium potens.

SPatium enim AΓ contineatur ſub rationali AB, & ex binis nominibus quinta AΔ, diviſa in nomina ad punctum E, ita ut majus nomen ſit AE: dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium AΓ, irrationalem eſſe; quæ vocatur rationale ac medium potens.

Conſtruantur enim eadem quæ ſupra: manifeſtum igitur eſt MΞ poſſe ſpatium AΓ. oſtendere autem oportet MΞ eſſe quæ rationale ac medium poteſt. quoniam enim AH ipſi EH incommenſurabilis eſt longitudine, & [per 1. 6. & 10. 10.] parallelogrammum AΘ eſt incommenſurabile parallelogrammo ΘE, hoc eſt quadratum ex MN quadrato ex NΞ: ergo MN, NΞ potentia incommenſurabiles ſunt. & quoniam



ΠΡΟΤΑΣΙΣ νθ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Χωρίον γὰρ τὸ AΓ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς AB, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης τῆς AΔ, διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ E, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ AE· λέγω ὅτι ἡ τὸ AΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Κατασκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ τὸ AΓ χωρίον δυναμένη ἐστὶν ἡ MΞ. δεικτέον δὲ ὅτι ἡ MΞ ἐστὶν ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ AH τῇ EH, ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ AΘ τῷ ΘE, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς MN τῷ ἀπὸ τῆς NΞ· αἱ MN, NΞ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ἡ

ΑΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη, καὶ ἔστω ἔλασσον αὐτῆς τμῆμα τὸ ΕΔ· σύμμετρος ἄρα ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ μήκει. ἀλλὰ ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ ἐστὶν ἀσύμμετρος μήκει, καὶ ἡ ΑΒ ἄρα τῇ ΑΕ ἐστὶν ἀσύμμετρος μήκει· αἱ ΒΑ, ΑΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ, τουτέστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτέστι τῇ ΕΚ, ἀλλὰ ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρός ἐστι· καὶ ἡ ΕΖ ἄρα τῇ ΕΚ σύμμετρός ἐστι. ῥητὴ δὲ ἡ ΕΚ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροί εἰσι, ποιοῦσι δὲ τὸ μὴ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἡ ΜΞ ἄρα ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστί, καὶ δύναται τὸ ΑΓ χωρίον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΔ est ex binis nominibus quinta, ſitque minor ipſius portio ΕΔ; erit [per 5. deff. ſecund. 10.] ΕΔ ipſi ΑΒ commenſurabilis longitudine. ſed ΑΒ ipſi ΕΔ eſt incommenſurabilis: ergo [per 13.10.] & ΑΒ incommenſurabilis eſt longitudine ipſi ΑΕ: ac propterea ΒΑ, ΑΕ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: medium igitur [per 22. 10.] eſt ΑΚ, hoc eſt compoſitum ex quadratis ipſarum ΜΝ, ΝΞ. & quoniam ΔΕ commenſurabilis eſt longitudine ipſi ΑΒ, hoc eſt ipſi ΕΚ, eſtque ΔΕ commenſurabilis ipſi ΕΖ: erit & ΕΖ ipſi ΕΚ commenſurabilis. rationalis autem eſt ΕΚ: rationale igitur eſt [per 20.10.] & ΕΛ, hoc eſt ΜΡ, hoc eſt parallelogrammum quod ſub ΜΝ, ΝΞ continetur; quare ΜΝ, ΝΞ potentia incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem ſub ipſis continetur rationale: ergo [per 41. 10.] ΜΞ eſt rationale ac medium potens, & poteſt ſpatium ΑΓ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξ'.

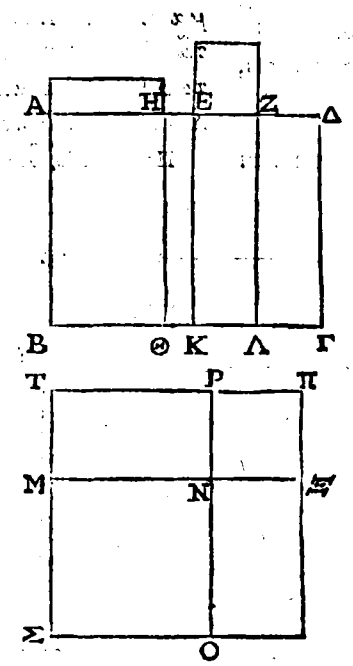
Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη δύο μέσα δυναμένη.

Prop. LX. Theor.

Si ſpatium contineatur ſub rationali, & ex binis nominibus ſexta; quæ ſpatium poteſt recta linea irrationalis eſt, quæ vocatur bina media potens.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης τῆς ΑΔ, διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ δυναμένη ἡ δύο μέσα δυναμένη ἐστί.

Spatium enim ΑΒΓΔ contineatur ſub rationali ΑΒ, & ex binis nominibus ſexta ΑΔ, quæ dividatur in nomina ad punctum Ε, ita ut ΑΕ ſit majus nomen: dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium ΑΓ, eſſe bina media potentem.



Κατασκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. φανερὸν δὴ ὅτι ἡ τὸ ΑΓ δυναμένη ἐστὶν ἡ ΜΞ, καὶ ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ δυνάμει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ μήκει· αἱ ΕΔ, ΑΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ, τουτέστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ μήκει, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΕΚ· καὶ αἱ ΖΕ, ΕΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΕΔ τῇ ΕΖ, καὶ τὸ ΑΚ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΚ ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ, τὸ δὲ ΕΛ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ τῷ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. ἔστι δὲ μέσον ἑκάτερον αὐτῶν, ἔστι δὲ καὶ ΜΝ, ΝΞ. καὶ ἔστι μέσον ἑκάτερον αὐτῶν, καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμ-

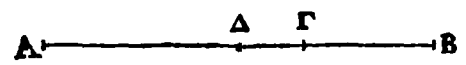
Conſtruantur enim eadem quæ ſupra. manifeſtum igitur eſt ΜΞ poſſe ſpatium ΑΓ, & ΜΝ ipſi ΝΞ potentia incommenſurabilem eſſe. & quoniam ΕΔ ipſi ΑΒ incommenſurabilis eſt longitudine, erunt ΕΔ, ΑΒ rationales potentia ſolum commenſurabiles: medium igitur [per 22. 10.] eſt ΑΚ, hoc eſt compoſitum ex quadratis ipſarum ΜΝ, ΝΞ. rurſus, quoniam incommenſurabilis eſt ΕΔ ipſi ΑΒ longitudine, erit & ΖΕ ipſi ΕΚ longitudine incommenſurabilis: ergo & ΖΕ, ΕΚ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea medium eſt ΕΛ, hoc eſt ΜΡ, hoc eſt quod ſub ΜΝ, ΝΞ continetur. & quoniam ΕΔ eſt incommenſurabilis ipſi ΕΖ, & parallelogrammum ΑΚ parallelogrammo ΕΛ incommenſurabile erit. ſed ΑΚ quidem eſt compoſitum ex quadratis ipſarum ΜΝ, ΝΞ; ΕΛ vero eſt quod ſub ΜΝ, ΝΞ continetur: incommenſurabile igitur eſt compoſitum ex quadratis ipſarum ΜΝ, ΝΞ ei quod ſub ΜΝ, ΝΞ continetur. atque eſt utrumque ipſorum medium; & ΜΝ, ΝΞ potentia ſunt incommenſurabiles:

les: ergo [per 42. 10.] MΞ est bina media potens, & potest spatium AΓ. quod erat demonstrandum.

LEMMA.

Si recta linea in partes inæquales secetur, ipsarum partium quadrata majora sunt rectangulo quod bis sub dictis partibus continetur.

Sit recta linea AB, & secetur in puncto Γ, & sit AΓ major: dico quadrata ex AΓ, ΓB majora esse rectangulo quod bis sub AΓ, ΓB continetur.



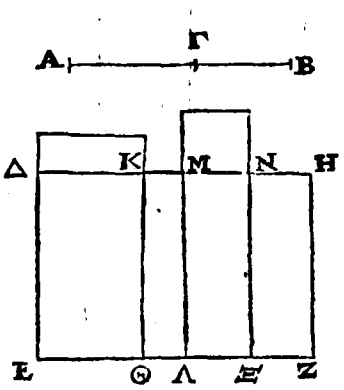
Secetur enim AB bifariam in Δ. & quoniam recta linea AB in partes quidem æquales secatur ad Δ, in partes vero inæquales ad Γ; rectangulum sub AΓ, ΓB una cum quadrato ipsius ΓΔ [per 5. 2.] est æquale ei quod fit ex AΔ quadrato: ergo rectangulum sub AΓ, ΓB quadrato ex AΔ est minus: quod igitur bis continetur sub AΓ, ΓB minus est quam duplum quadrati ex AΔ. sed [per 9. 2.] quadrata ex AΓ, ΓB dupla sunt quadratorum ex AΔ, ΔΓ: ergo quadrata ex AΓ, ΓB majora sunt eo quod bis sub AΓ, ΓB continetur. quod erat demonstrandum.

PROP. LXI. THEOR.

Quadratum ejus quæ est ex binis nominibus ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus primam.

SIT ex binis nominibus AB divisa in nomina ad punctum Γ, ita ut AΓ sit majus nomen, exponaturque rationalis ΔE, & quadrato rectæ lineæ AB æquale ad ipsam ΔE applicetur rectangulum parallelogrammum ΔEZH, latitudinem faciens ΔH: dico ΔH ex binis nominibus primam esse.

Applicetur enim [per 45. 1.] ad rationalem ΔE quadrato quidem ipsius AΓ æquale parallelogrammum ΔΘ, quadrato autem ipsius BΓ æquale KΛ; reliquum igitur quod bis sub AΓ, ΓB continetur [per 4. 2.] est æquale parallelogrammo MZ. secetur MH bifariam in N, & alterutri ipsarum MΛ, HZ parallela ducatur NΞ: utrumque igitur parallelogrammorum MΞ, NZ est æquale ei quod semel sub AΓ, ΓB continetur. & quoniam ex binis nominibus est AB divisa in nomina ad punctum Γ, erunt [per 37. 10.] AΓ, ΓB rationales potentia solum commensurabiles: ergo quadrata ex AΓ, ΓB rationalia sunt & commensurabilia inter se: & ob id [per 16. 10.] compositum ex quadratis ipsarum AΓ, ΓB commensurabile est ipsarum AΓ, ΓB quadratis: rationale igitur est compositum ex quadratis ipsarum AΓ, ΓB. atq; est æquale parallelogrammo ΔΛ: ergo & ΔΛ est rationale, & ad rationalem ΔE applicatum est: rationalis igitur est ΔM [per 23. 10.]



μετρος· ἡ ΜΞ ἄρα δύο μέσα δυναμένη ἐστὶ, καὶ δυνατὸν τὸ ΑΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΛΗΜΜΑ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τετράγωνα μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ἀνίσων περιεχομένου ὀρθογωνίου.

Ἐστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα γραμμὴ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Δ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Γ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῶν ΑΔ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἔλαττόν ἐστι τοῦ διπλασίου τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξα'.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.

Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ, διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΕΖΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη.

Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΔΕ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον τὸ ΔΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἴσον τὸ ΚΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΖ. τετμήσθω ἡ ΜΗ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ παρὰ ἑκατέραν τῶν ΜΛ, ΗΞ ἤχθω ἡ ΝΞ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΜΞ, ΝΖ ἴση ἐστὶ τῷ ἡμίσει τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· τὸ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητόν ἐστι καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ σύμμετρόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΔΛ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ, καὶ

σύμμετρος

σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτέστι τὸ ΜΖ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΜΛ, τουτέστι τῇ ΕΔ, μήκει. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΜΔ ῥητή, καὶ τῇ ΔΕ μήκει σύμμετρος· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ. δεικτέον δὴ ὅτι καὶ πρώτη. ἐπεὶ γὰρ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· καὶ τῶν ΔΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΜΞ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΜΞ οὕτως τὸ ΜΞ πρὸς τὸ ΚΛ, τουτέστιν ὡς ἡ ΔΚ πρὸς τὴν ΜΝ οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΜΚ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ σύμμετρός ἐστι μήκει. καὶ ἐπεὶ μείζονά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ μείζων ἐστί. καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΗ, ᾧ σύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ μήκει. ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάττονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ, ἡ μείζων τὴν ἐλάσσονα μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσι ῥηταὶ αἱ ΔΜ, ΜΗ, καὶ ἡ ΔΜ μεῖζον ὄνομα ἔστι σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΕ μήκει· ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

& ipſi ΔΕ commenſurabilis longitudine. rurſus, quoniam ΑΓ, ΓΒ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, medium eſt quod bis ſub ΑΓ, ΓΒ continetur, hoc eſt rectangulum ΜΖ. & ad rationalem ΜΛ applicatum eſt: rationalis igitur eſt ΜΗ [per 23. 10.] & ipſi ΜΛ, hoc eſt ipſi ΕΔ, longitudine incommenſurabilis. eſt autem & ΜΔ rationalis, & ipſi ΔΕ commenſurabilis longitudine: ergo [per 13. 10.] ΔΜ ipſi ΜΗ longitudine eſt incommenſurabilis. ſuntque rationales: ergo ΔΜ, ΜΗ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea [per 37. 10.] ΔΗ eſt ex binis nominibus. oſtendendum eſt & primam eſſe. quoniam enim inter quadrata ex ΑΓ, ΓΒ [per lem. 55. 10.] medium proportionale eſt, quod ſub ΑΓ, ΓΒ continetur, erit etiam inter parallelogramma ΔΘ, ΚΛ medium proportionale ΜΞ: eſt igitur ut ΔΘ ad ΜΞ ita ΜΞ ad ΚΛ, hoc eſt [per 1. 6.] ut recta linea ΔΚ ad ΜΝ ita ΜΝ ad ΜΚ: ergo [per 17. 6.] rectangulum ſub ΔΚ, ΚΜ quadrato ex ΜΝ eſt æquale. & quoniam quadratum ex ΑΓ commenſurabile eſt quadrato ex ΓΒ, erit [per 14. 10.] & parallelogrammum ΔΘ parallelogrammo ΚΛ commenſurabile: ergo & ΔΚ ipſi ΚΜ longitudine eſt commenſurabilis. quod cum quadrata ex ΑΓ, ΓΒ majora ſint [per lem. præc.] eo quod bis ſub ΑΓ, ΓΒ continetur; erit & parallelogrammum ΔΛ majus parallelogrammo ΜΖ: ideoque recta linea ΔΜ ipſa ΜΗ eſt major. atque eſt rectangulum ſub ΔΚ, ΚΜ æquale quadrato ex ΜΝ, hoc eſt quartæ parti quadrati ex ΜΗ, & ΔΚ ipſi ΚΜ longitudine eſt commenſurabilis. ſi autem ſint duæ rectæ lineæ inæquales, & quartæ parti quadrati minoris æquale parallelogrammum ad majorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes commenſurabiles ipſam dividat, major plus poterit [per 18. 10.] quam minor quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. ſuntque rationales ΔΜ, ΜΗ; atque ΔΜ, quæ eſt majus nomen, expoſitæ rationali ΔΕ longitudine eſt commenſurabilis: ergo [per 1. deff. ſecund. 10.] ΔΗ eſt ex binis nominibus prima. quod erat demonſtrand.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξϚ'.

Τὸ ἀπὸ ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν.

Prop. LXII. Probl.

Quadratum ejus quæ eſt ex binis mediis prima ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam.

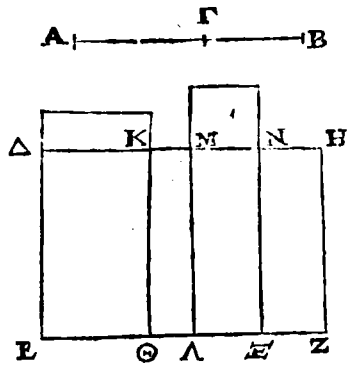
Ἔστω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ, διῃρημένη εἰς τὸ μέσον κατὰ τὸ Γ, ὧν μείζων ἡ ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΔΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι· ὥστε καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ΑΓ, ΓΒ μέσα ἐστί· μέσον ἄρα τὸ ΔΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν παράκειται· ῥητὴ ἄρα

SIT ex binis mediis prima ΑΒ, diviſa in medias ad punctum Γ, quarum ΑΓ ſit major, exponaturque rationalis ΔΕ, & ad ipſam ΔΕ applicetur parallelogrammum æquale quadrato ipſius ΑΒ, quod ſit ΔΖ, latitudinem faciens ΔΗ: dico ΔΗ ex binis nominibus ſecundam eſſe.

Conſtruantur enim eadem quæ ſupra. & quoniam ΑΒ ex binis mediis eſt prima, diviſa ad punctum Γ, erunt [per 38. 10.] ΑΓ, ΓΒ mediæ potentia ſolum commenſurabiles, quæ rationale continent: quare & quæ fiunt ex ΑΓ, ΓΒ quadrata media ſunt; ideoque ΔΛ eſt medium, & ad rationalem applicatum eſt: rationalis igi-

tur eſt [per 23. 10.] MΔ, & ipſi ΔE longitudine incommenſurabilis. rurſus, quoniam rationale eſt quod bis ſub AΓ, ΓB continetur, erit & MZ rationale, & ad rationalem MΛ applicatum eſt: ergo [per 21. 10.] & MH eſt rationalis, & ipſi MΛ, hoc eſt ipſi ΔE, commenſurabilis longitudine: incommenſurabilis igitur eſt [per 13. 10.] ΔM ipſi MH. & ſunt rationales: quare ΔM, MH rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea ΔH eſt ex binis nominibus. oſtendendum eſt & ſecundam eſſe. quoniam enim [per lem. 61. 10.] quadrata ex AΓ, ΓB majora ſunt eo quod bis ſub AΓ, ΓB continetur, erit & ΔΛ parallelogrammum parallelogrammo MZ majus: ergo & recta linea ΔM major eſt ipſa MH. quod cum quadratum ex AΓ quadrato ex ΓB ſit commenſurabile, & ΔΘ parallelogrammum parallelogrammo KΛ commenſurabile erit: quare & ΔK commenſurabilis ipſi KM. atque eſt [per conſtr.] quod ſub ΔK, KM continetur quadrato ipſius MN æquale: ergo [per 18. 10.] ΔM plus poteſt quam MH quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. eſtque MH commenſurabilis longitudine ipſi ΔE; quare [per 2. deff. ſecund. 10.] ΔH eſt ex binis nominibus ſecunda. quod erat demonſtrandum.



ἐστὶν ἡ ΜΔ, ᾗ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ΔΕ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ ῥητὸν ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ῥητὸν καὶ τὸ ΜΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΗ, καὶ μήκει σύμμετρός ἐστι τῇ ΜΛ, τουτέστι τῇ ΔΕ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. δεικτέον δὴ ὅτι καὶ δευτέρα. ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ ΜΖ, ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ σύμμετρός ἐστι. καὶ ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ ἔστιν ἡ ΜΗ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει· ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. LXIII. Theor.

Quadratum ejus quæ eſt ex binis mediis ſecunda ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

SIT ex binis mediis ſecunda AB, diviſa in medias ad Γ, ita ut AΓ ſit major portio, rationalis autem ſit ΔE, & ad ipſam ΔE quadrato ex AB æquale parallelogrammum ΔZ applicetur, latitudinem faciens ΔH: dico ΔH ex binis nominibus tertiam eſſe.

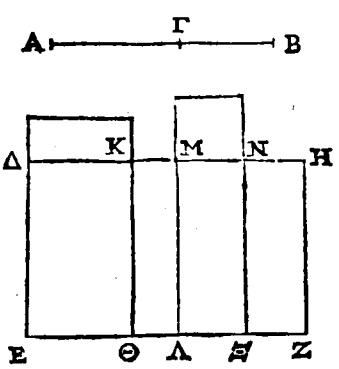
Conſtruantur enim eadem quæ ſupra. & quoniam AB eſt ex binis mediis ſecunda, diviſa ad punctum Γ, erunt [per 39. 10.] AΓ, ΓB mediæ potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium continent: ergo & compoſitum ex ipſarum AΓ, ΓB quadratis medium eſt. atque eſt æquale ipſi ΔΛ: medium igitur eſt ΔΛ; & ad rationalem ΔE applicatur: ergo [per 23. 10.] rationalis eſt MΔ, & ipſi ΔE longitudine incommenſurabilis. eadem ratione & MH eſt rationalis, & incommenſurabilis ipſi MΛ, hoc eſt ipſi ΔE: utraque igitur ipſarum ΔM, MH rationalis eſt, & ipſi ΔE longitudine incommenſurabilis. & quoniam incommenſurabilis eſt AΓ ipſi ΓB longitudine, ut autem AΓ ad ΓB ita [per 1. 6.] quadratum ex AΓ ad rectangulum ſub AΓ, ΓB; erit & quadratum ex

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξγ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην.

ΕΣτω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ ΑΒ, διῃρημένη εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ μεῖζον τμῆμα εἶναι τὸ ΑΓ, ῥητὴ δέ τις ἔστω ἡ ΔΕ, καὶ παρὰ τὴν ΔΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη.

Κατασκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἐστὶν ἡ ΑΒ, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἐστί. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΔΛ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ· καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΜΗ ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΜΛ, τουτέστι τῇ ΔΕ μήκει· ῥηταὶ ἄρα εἰσὶν ἑκατέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ, καὶ ἀσύμμετροι τῇ ΔΕ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τὰς ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ



τῆς

τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ὥςε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἀσύμμετρόν ἐςι, τουτέςι τὸ ΔΛ τῷ ΜΖ· ὥςε ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ ἀσύμμετρός ἐςι. καί εἰσι ῥηταί· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐςὶν ἡ ΔΗ. δεικτέον δὴ ὅτι καὶ τρίτη. ὁμοίως δὴ τοῖς πρόσθεν ἐπιλογιούμεθα, ὅτι μείζων ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ. καὶ ἔςι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ σύμμετρός ἐςι τῇ ΔΕ μήκει· ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐςὶ τρίτη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΓ rectangulo ſub ΑΓ, ΓΒ incommenſurabile: ergo compoſitum ex quadratis ipſarum ΑΓ, ΓΒ incommenſurabile eſt ei quod bis ſub ΑΓ, ΓΒ continetur; hoc eſt ΔΛ incommenſurabile ipſi ΜΖ: & ob id recta linea ΔΜ ipſi ΜΗ eſt incommenſurabilis. ſuntque rationales: ergo ΔΗ eſt ex binis nominibus. oſtendendum eſt & tertiam eſſe. ſimiliter enim [atque in præced.] concludemus ΔΜ ipſa ΜΗ majorem eſſe, & ΔΚ ipſi ΚΜ commenſurabilem. atque eſt rectangulum ſub ΔΚ, ΚΜ quadrato ipſius ΜΝ æquale: ergo [per 18. 10.] ΔΜ plus poteſt quam ΜΗ quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. & neutra ipſarum ΔΜ, ΜΗ eſt longitudine commenſurabilis ipſi ΔΕ: quare [per 3. deff. ſecund. 10.] ΔΗ eſt ex binis nominibus tertia. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξδ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην.

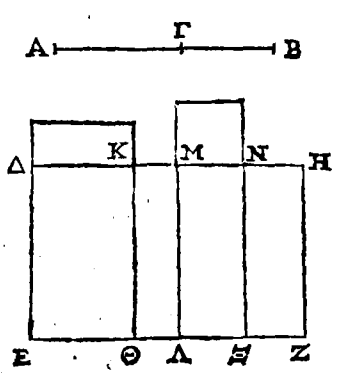
PROP. LXIV. THEOR.

Quadratum majoris ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥςε μείζονα εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ, ῥητὴ δέ τις ἔςω ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ παραλληλόγραμμον, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐςὶ τετάρτη.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς προδιαγεγραμμένοις. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐςὶν ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον. ἐπεὶ οὖν ῥητόν ἐςι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΔΛ· ῥητὴ ἄρα ἐςὶ καὶ ἡ ΔΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐςὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτέςι τὸ ΜΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐςὶ καὶ ἡ ΜΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐςὶ καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐςὶν ἡ ΔΗ. δεικτέον δὴ ὅτι καὶ τετάρτη. ὁμοίως δὴ τοῖς πρόσθεν ἐπιλογιούμεθα, ὅτι μείζων ἐςὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον ἐςὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ. ἐπεὶ οὖν ἀσύμμετρόν ἐςι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥςε καὶ ἡ ΚΔ τῇ ΚΜ ἀσύμμετρός ἐςιν. ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν μεί-

SIT major ΑΒ, diviſa in puncto Γ, ita ut ΑΓ major ſit quam ΓΒ; rationalis autem quædam ſit ΔΕ, & quadrato ex ΑΒ æquale ad ipſam ΔΕ applicetur parallelogrammum ΔΖ, latitudinem faciens ΔΗ: dico ΔΗ eſſe ex binis nominibus quartam.



Conſtruantur enim eadem quæ ſupra. & quoniam ΑΒ eſt major diviſa in Γ, erunt [per 40. 10.] ΑΓ, ΓΒ potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ſub ipſis continetur medium. itaque quoniam rationale eſt compoſitum ex quadratis ipſarum ΑΓ, ΓΒ, erit & parallelogrammum ΔΛ rationale: ergo [per 21. 10.] & rationalis eſt recta linea ΔΜ, ipſique ΔΕ longitudine commenſurabilis. rurſus, quoniam medium eſt quod bis ſub ΑΓ, ΓΒ continetur, hoc eſt ΜΖ, & ad rationalem ΜΛ eſt applicatum, erit [per 23. 10.] & ΜΗ rationalis, & ipſi ΔΕ incommenſurabilis longitudine: ergo & ΔΜ ipſi ΜΗ longitudine incommenſurabilis eſt; ac propterea ΔΜ, ΜΗ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: quare [per 37. 10.] ex duobus nominibus eſt ΔΗ. oſtendendum eſt & quartam eſſe. ſimiliter enim atque in ſuperioribus concludemus ΔΜ majorem eſſe quam ΜΗ, & rectangulum ſub ΔΚ, ΚΜ quadrato ex ΜΝ æquale. quoniam igitur quadratum ex ΑΓ incommenſurabile eſt quadrato ex ΓΒ, erit [per 10. 10.] & ΔΘ parallelogrammum incommenſurabile parallelogrammo ΚΛ: & ob id recta linea ΚΔ ipſi ΚΜ incommenſurabilis. ſi autem ſint duæ rectæ lineæ inæquales, & quartæ parti quadrati minoris æquale parallelogrammum ad majorem applice-

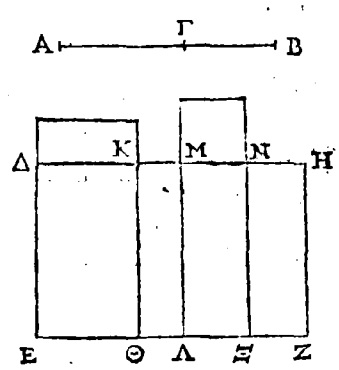
tur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine incommenſurabiles ipſam dividat, [per 19. 10.] major plus poterit quam minor quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis: ergo Δ M plus poteſt quam M H quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. ſuntque Δ M, M H rationales potentia ſolum commenſurabiles, atque eſt Δ M commenſurabilis expoſitæ rationali Δ E: quare [per 4. deff. ſecund. 10.] Δ H eſt ex binis nominibus quarta. quod erat demonſtrandum.

Prop. LXV. Theor.

Quadratum ejus quæ rationale ac medium poteſt ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

SIT rationale ac medium potens A B, diviſa in rectas lineas ad punctum Γ, ita ut A Γ ſit major; exponaturque rationalis Δ E, & quadrato ipſius A B æquale parallelogrammum Δ Z ad ipſam Δ E applicetur, latitudinem faciens Δ H: dico Δ H eſſe ex binis nominibus quintam.

Conſtruantur enim quæ ſupra. & quoniam rationale ac medium potens eſt A B, diviſa ad Γ punctum, erunt [per 41. 10.] A Γ Γ B potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem ſub ipſis continetur rationale. quoniam igitur medium eſt compoſitum ex ipſarum A Γ, Γ B quadratis, erit & parallelogrammum Δ Λ medium: ideoque [per 23. 10.] recta linea Δ M rationalis eſt, & ipſi Δ E longitudine incommenſurabilis. rurſus, quoniam rationale eſt quod bis ſub A Γ, Γ B continetur, hoc eſt parallelogrammum M Z; erit [per 21. 10.] M H rationalis, & ipſi Δ E longitudine commenſurabilis: incommenſurabilis igitur eſt [per 13. 10.] Δ M ipſi M H: quare Δ M, M H rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea [per 37. 10.] Δ H eſt ex binis nominibus. dico & quintam eſſe. ſimiliter enim demonſtrabitur rectangulum ſub Δ K, K M quadrato ex M N eſſe æquale; & Δ K ipſi K M longitudine eſſe incommenſurabilem: quare [per 19. 10.] Δ M plus poteſt quam M H quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. ſuntque Δ M, M H rationales potentia ſolum commenſurabiles, & minor M H commenſurabilis eſt ipſi Δ E longitudine: ergo [per 5. deff. ſecund. 10.] Δ H eſt ex binis nominibus quinta. quod erat demonſtrandum.



Prop. LXVI. Theor.

Quadratum ejus quæ bina media poteſt ad rationalem applicatum latitudinem facit ex binis nominibus ſextam.

SIT bina media potens A B, diviſa ad punctum Γ, rationalis autem ſit Δ E, & ad ipſam

ζονα ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκει, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἡ Δ M ἄρα τῆς M H μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ Δ M, M H ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ Δ M σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Δ E· ἡ Δ H ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξε'.

Τὸ ἀπὸ ῥητῆς καὶ μέσον δυναμένης μετὰ ῥητῆς μετὰ παντὸς τοῦ συγκειμένου ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην.

ΕΣτω ῥητὴ καὶ μέσον δυναμένη ἡ A B, διῃρημένη εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ Γ, ὥστε μείζονα εἶναι τὴν A Γ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Δ E, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς A B ἴσον παρὰ τὴν Δ E παραβεβλήσθω τὸ Δ Z, πλάτος ποιοῦν τὴν Δ H· λέγω ὅτι ἡ Δ H ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου. ἐπεὶ οὖν ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ A B, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ· αἱ A Γ, Γ B ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν A Γ, Γ B· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Δ Λ· ὥστε ῥητή ἐστιν ἡ Δ M, καὶ μήκει ἀσύμμετρος τῇ Δ E. πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν A Γ, Γ B, τουτέστι τὸ M Z· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ M H, καὶ σύμμετρος τῇ Δ E μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ Δ M τῇ M H· αἱ Δ M, M H ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ Δ H. λέγω δὴ ὅτι καὶ πέμπτη. ὁμοίως γὰρ δειχθήσεται ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Δ K, K M ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς M N, καὶ ἀσύμμετρος ἡ Δ K μήκει τῇ K M· ἡ Δ M ἄρα τῆς M H μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ Δ M, M H ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ἐλάττων ἡ M H σύμμετρος τῇ Δ E μήκει· ἡ Δ H ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξϛ'.

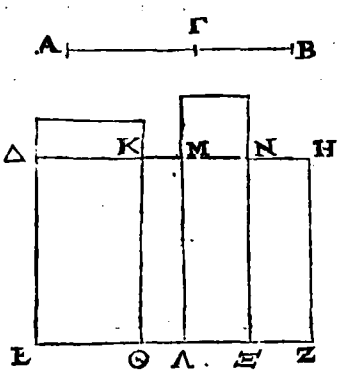
Τὸ ἀπὸ τῆς δύο μέσα δυναμένης μετὰ ῥητὸν μετὰ παντὸς τοῦ ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην.

ΕΣτω δύο μέσα δυναμένη ἡ A B, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ῥητὴ δὲ ἔστω ἡ Δ E, καὶ τῷ

Δ E

ΔΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἐκτη.

Κατασκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρόσθεν. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ δύο μέσα δυναμένη ἐστὶ, διῄρηται κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῷ ὑπ' αὐτῶν· ὥστε κατὰ τὰ προδεδειγμένα μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΔΛ, ΜΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει, καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ τῷ ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ. λέγω ὅτι καὶ ἕκτη. ὁμοίως γὰρ πάλιν τοῖς πρόσθεν τοῦτο δείξομεν ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, καὶ ὅτι ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ μήκει ἐστὶν ἀσύμμετρος· καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἑκάτερα τῶν ΔΜ, ΜΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΕ μήκει· ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ΔΕ quadrato ex AB æquale parallelogrammum ΔΖ applicetur, latitudinem faciens ΔΗ: dico ΔΗ esse ex binis nominibus sextam.

Construantur enim eadem quæ supra. & quoniam AB est bina media potens: divisa ad Γ, erunt [per 42. 10.] ΑΓ, ΓΒ potentia incommensurabiles, facientes & compositum ex ipsarum quadratis medium, & quod sub ipsis continetur medium, & adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis: ergo ex jam demonstratis medium est utrumque parallelogrammorum ΔΛ, ΜΖ, & ad rationalem ΔΕ applicata sunt: rationalis igitur est [per 23. 10] & utraque ΔΜ, ΜΗ, & ipsi ΔΕ longitudine incommensurabilis. & quoniam compositum ex ipsarum ΑΓ, ΓΒ quadratis incommensurabile est ei quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur, erit & ΔΛ parallelogrammum parallelogrammo ΜΖ incommensurabile; & idcirco [per 10. 10.] ΔΜ incommensurabilis ΜΗ: quare ΔΜ, ΜΗ rationales sunt potentia solum commensurabiles, igitur ΔΗ est ex binis nominibus. dico & sextam esse. similiter enim atque in præcedentibus rursus ostendemus rectangulum sub ΔΚ, ΚΜ quadrato ex ΜΝ æquale, & ΔΚ ipsi ΚΜ longitudine incommensurabilem esse: ergo [per 19. 10.] ΔΜ plus potest quam ΜΗ quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. & neutra ipsarum ΔΜ, ΜΗ longitudine commensurabilis est expositæ rationali ΔΕ: quare [per 6. deff. secund. 10.] ΔΗ est ex binis nominibus sexta. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξζ'.

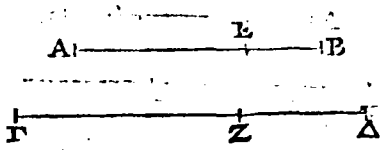
Ἡ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος καὶ αὐτὴ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Prop. LXVII. Theor.

Ei quæ est ex binis nominibus longitudine commensurabilis & ipsa ex binis nominibus est atque ordine eadem.

Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ, διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω μεῖζον ὄνομα τὸ ΑΕ· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. γεγονέτω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΕΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΖΔ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΕΒ τῇ ΖΔ. καί εἰσι ῥηταὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ· ῥηταὶ ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ. αἱ δὴ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καί εἰσι ῥηταί· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων

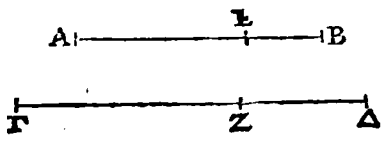


SIT ex binis nominibus AB, & ipsi AB longitudine commensurabilis sit ΓΔ: dico ΓΔ ex binis nominibus esse & ordine eandem ipsi AB.

Quoniam enim ex binis nominibus est AB, dividatur in nomina ad punctum E, & sit AE majus nomen: ergo [per 37. 10.] AE, EB rationales sunt potentia solum commensurabiles. fiat [per 12. 6.] ut AB ad ΓΔ ita AE ad ΓΖ: & reliqua igitur EB ad reliquam ΖΔ est [per 19. 5.] ut AB ad ΓΔ. commensurabilis autem est AB ipsi ΓΔ longitudine: ergo [per 10. 10.] & AE ipsi ΓΖ & EB ipsi ΖΔ longitudine est commensurabilis. suntque rationales AE, EB: rationales igitur sunt & ΓΖ, ΖΔ. & quoniam est ut AE ad ΓΖ ita EB ad ΖΔ, erit permutando ut AE ad EB ita ΓΖ ad ΖΔ. sunt autem AE, EB potentia solum commensurabiles: ergo & ΓΖ, ΖΔ potentia solum commensurabiles erunt. & sunt rationales: ex binis igitur nominibus [per 37.

10.] est ΓΔ. dico & ipsi AB ordine eandem esse.

Vel enim AE plus potest quam EB quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. si quidem igitur AE plus possit quam EB quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & ΓZ plus poterit quam ZΔ [per 15. 10.] quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine. quod si AE sit commensurabilis expositæ rationali, & ΓZ [per 12. 10.] eidem commensurabilis erit: & ob id utraque ipsarum AB, ΓΔ ex binis nominibus est prima, hoc est ordine eadem. si vero EB sit commensurabilis expositæ rationali, & ZΔ eidem erit commensurabilis: eamque ob causam ΓΔ ipsi AB ordine eadem est, utraque enim est ex binis nominibus secunda. quod si neutra ipsarum AE, EB sit expositæ rationali commensurabilis, & neutra ipsarum ΓZ, ZΔ eidem commensurabilis erit; & utraque est tertia. at si AE plus possit quam EB quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, & ΓZ plus poterit quam ZΔ [per 15. 10.] quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. & si AE sit commensurabilis expositæ rationali, & ΓZ eidem commensurabilis erit, & est utraque quarta. quod si EB sit, & ipsa ZΔ erit, & est utraque quinta. si vero neutra ipsarum AE, EB sit, & neutra ΓZ, ZΔ expositæ rationali erit commensurabilis, & est utraque sexta.



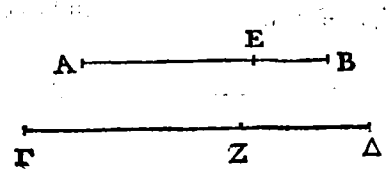
Ergo ei quæ est ex binis nominibus longitudine commensurabilis & ipsa ex binis nominibus est & ordine eadem. quod erat demonstrandum.

PROP. LXVIII. THEOR.

Ei quæ est ex binis mediis longitudine commensurabilis & ipsa ex binis mediis est atque ordine eadem.

SIT ex binis mediis AB, & ipsi AB commensurabilis longitudine sit PΔ: dico ΓΔ ex binis mediis esse, & ipsi AB ordine eandem.

Quoniam enim AB ex binis mediis est, divisa in medias ad punctum E, erunt [per 38. & 39. 10.] & AE, EB mediæ potentia solum commensurabiles. itaque fiat ut AB ad ΓΔ ita AE ad ΓZ: ergo & reliqua EB ad reliquam ZΔ est ut AB ad ΓΔ. commensurabilis autem est [ex hyp.] AB ipsi ΓΔ longitudine: quare & AE ipsi ΓZ longitudine commensurabilis erit, & EB ipsi ZΔ. suntque mediæ AE, EB: mediæ igitur [per 24. 10.] & ΓZ, ZΔ. & quoniam est ut AE ad EB ita ΓZ ad ZΔ, & sunt AE, EB commensurabiles potentia solum; erunt & ΓZ, ZΔ potentia solum commensurabiles. ostensæ autem sunt & mediæ: ergo [per 38. & 39. 10.] ΓΔ est ex binis mediis. dico & ipsi AB ordine eandem esse.



Quoniam enim est ut AE ad EB ita ΓZ ad ZΔ, erit [per 11. 5. & 1. 6.] & ut quadratum ex AE ad rectangulum sub AE, EB ita quadratum ex ΓZ ad rectangulum sub ΓZ, ZΔ: quare

ἐστὶν ἡ ΓΔ. λέγω δὴ ὅτι τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ AB.

Η γὰρ AE τῆς EB μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ AE τὴν EB μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓZ τῆς ZΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ AE τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΓZ σύμμετρός ἐστιν αὐτῇ· καὶ λέγε τὸ πάλιν τῇ τάξει ἡ αὐτὴ ἔσται τῇ AB, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἐστιν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα. εἰ δὲ ἡ ἑτέρα τῶν AE, EB σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, ἑτέρα τῶν ΓZ, ZΔ σύμμετρος αὐτῇ ἔσται, καὶ ἐστιν ἑκατέρα τρίτη. εἰ δὲ ἡ AE τὴν EB μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓZ τῆς ZΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν ἡ AE σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΓZ σύμμετρός ἐστιν αὐτῇ, καὶ ἐστιν ἑκατέρα τετάρτη. εἰ δὲ ἡ EB, καὶ ἡ ZΔ, καὶ ἔσται ἑκατέρα πέμπτη. εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν AE, EB, καὶ τῶν ΓZ, ZΔ οὐδετέρα σύμμετρος ἔσται τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἔσται ἑκατέρα ἕκτη.

Ὡστε ἡ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξθ'.

Η τῇ ἐκ δύο μέσων μήκει σύμμετρος ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων ἡ AB, καὶ τῇ AB σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ AB.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο μέσων ἐστὶν ἡ AB, διῃρημένη εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ E· αἱ AE, EB ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ AE πρὸς τὴν ΓZ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ EB πρὸς λοιπὴν τὴν ZΔ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ. σύμμετρος δὲ ἡ AB τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετροι ἄρα καὶ ἡ μὲν AE τῇ ΓZ, ἡ δὲ EB τῇ ZΔ. καί εἰσι μέσαι αἱ AE, EB· μέσαι ἄρα καὶ αἱ ΓZ, ZΔ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ AE πρὸς τὴν EB οὕτως ἡ ΓZ πρὸς τὴν ZΔ, αἱ δὲ AE, EB δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· καὶ αἱ ΓZ, ZΔ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. ἐδείχθησαν δὲ καὶ μέσαι· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστί. λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή ἐστι τῇ AB.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ AE πρὸς τὴν EB οὕτως ἡ ΓZ πρὸς τὴν ZΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓZ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ, ZΔ· ἐναλ-

λὰξ

ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ ἕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. ἔστι δὲ ῥητὸν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ ῥητόν ἐστι· καὶ δύο ἄρα τὰ ΓΖ, ΖΔ ῥητόν ἐστιν ἐκ δύο μέσων πρώτη. ἔστι μέσον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, μέσον καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. καὶ ἔστιν ἑκατέρα δευτέρα· καὶ λέγε τὰ ΓΖ, ΖΔ ἡ ΓΔ τῇ ΑΒ τῇ τάξει ἡ αὐτή. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

permutando ut quadratum ex AE ad quadratum ex ΓZ ita rectangulum ſub AE, EB ad rectangulum ſub ΓZ, ZΔ. commenſurabile autem eſt quadratum ex AE quadrato ex ΓZ: ergo & rectangulum ſub AE, EB rectangulo ſub ΓZ, ZΔ eſt commenſurabile. ſive igitur rationale eſt rectangulum ſub AE, EB, & rectangulum ſub ΓZ, ZΔ rationale erit; atque ob id [per 38.10.] eſt ex binis mediis prima. ſive vero medium eſt rectangulum ſub AE, EB, & ipſum ſub ΓZ, ZΔ erit medium. atque [per 39.10.] eſt utraque ex binis mediis ſecunda: & propterea ΓΔ ipſi AB ordine eadem eſt. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξθ'.

Η τῇ μείζονι σύμμετρος καὶ αὐτὴ μείζων ἐστίν.

PROP. LXIX. THEOR.

Majori commenſurabilis & ipſa major eſt.

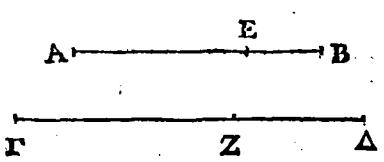
Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΓΔ μείζων ἐστί.

Διῃρήσθω ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον. καὶ γεγονέτω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ ἕτως ἥτε ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ καὶ ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ ἕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ ἑκατέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ ἕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ ἕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ· καὶ συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ ἕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ ἕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ ἕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ ἕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ ἕτως τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ· σύμμετρα ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. καὶ ἔστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ ἅμα ῥητόν· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ ἅμα ῥητόν ἐστιν. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ σύμμετρόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. καὶ ἔστι μέσον τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον· ὅλη ἄρα ἡ ΓΔ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων.

Η ἄρα τῇ μείζονι σύμμετρος μείζων ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SIT major AB: & ipſi AB commenſurabilis ſit ΓΔ: dico ΓΔ majorem eſſe.

Dividatur AB in E: ergo [per 40. 10.] AE, EB potentia ſunt incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ſub ipſis continetur medium. & fiant eadem quæ ſupra. quoniam igitur eſt ut AB ad ΓΔ ita AE ad ΓZ & EB ad ZΔ; erit [per 11. 5.] ut AE ad ΓZ ita EB ad ZΔ. commenſurabilis autem eſt AB ipſi ΓΔ: ergo & utraque ipſarum AE, EB utrique ΓZ, ZΔ eſt commenſurabilis. & quoniam eſt ut AE ad ΓZ ita EB ad ZΔ; permutandoque ut AE ad EB ita ΓZ ad ZΔ, & componendo ut AB ad BE ita ΓΔ ad ΔZ: ut igitur quadratum ex AB ad quadratum ex BE ita [per 22. 6.] quadratum ex ΓΔ ad quadratum ex ΔZ. ſimiliter demonſtrabimus & ut quadratum ex AB ad quadratum ex AE ita eſſe quadratum ex ΓΔ ad quadratum ex ΓZ: ergo & ut quadratum ex AB ad quadrata ex AE, EB ita quadratum ex ΓΔ ad quadrata ex ΓZ, ZΔ: permutando igitur ut quadratum ex AB ad quadratum ex ΓΔ ita quadrata ex AE, EB ad quadrata ex ΓZ, ZΔ. commenſurabile autem eſt quadratum ex AB quadrato ex ΓΔ: ergo & quadrata ex AE, EB quadratis ex ΓZ, ZΔ ſunt commenſurabilia. atque eſt [per 40. 10.] compoſitum ex quadratis ipſarum AE, EB rationale: ergo [per 9.def.10.] & rationale erit compoſitum ex quadratis ipſarum ΓZ, ZΔ. ſimiliter autem & quod bis continetur ſub AE, EB commenſurabile eſt ei quod bis ſub ΓZ, ZΔ continetur. atque [per 40.10.] eſt medium quod bis continetur ſub AE, EB: medium igitur [per 24.10.] eſt & quod bis ſub ΓZ, ZΔ continetur: ergo ΓZ, ZΔ potentia ſunt incommenſurabiles, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ſub ipſis continetur medium: tota igitur [per 40. 10.] irrationalis eſt, quæ vocatur major.



Ergo majori commenſurabilis & ipſa major eſt. quod erat demonſtrandum.

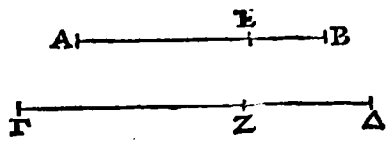
PROP.

PROP. LXX. THEOR.

Rationale ac medium potenti commensurabilis & ipsa rationale ac medium potens est.

SIT rationale ac medium potens AB: & ipsi AB commensurabilis sit ΓΔ: ostendendum est & ΓΔ rationale ac medium potentem esse.

Dividatur AB in rectas suas ad punctum E: ergo [per 41. 10.] AE, EB potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum ex ipsarum quadratis medium; quod autem sub ipsis continetur rationale: & eadem quæ prius construantur. similiter [atque in præcedentibus] demonstrabimus ΓZ, ZΔ potentia esse incommensurabiles; & compositum ex quadratis ipsarum AE, EB commensurabile esse composito ex quadratis ipsarum ΓZ, ZΔ, quod autem continetur sub AE, EB commensurabile esse ei quod sub ΓZ, ZΔ continetur: ergo [per 24. 10.] & compositum ex quadratis ipsarum ΓZ, ZΔ est medium, quod autem continetur sub ΓZ, ZΔ rationale: & igitur [per 41. 10.] ΓΔ est rationale ac medium potens. quod erat dem.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ο'.

Η τῇ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένῃ σύμμετρος καὶ αὐτὴ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.

ΕΣτω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ AB, καὶ τῇ AB σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· δεικτέον ὅτι ἡ ΓΔ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστί.

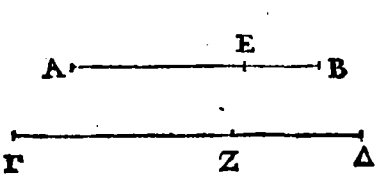
Διῃρήσθω ἡ AB εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ E· αἱ AE, EB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· καὶ τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω τοῖς πρότερον. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ ΓZ, ZΔ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE, EB τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ, ZΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AE, EB τῷ ὑπὸ τῶν ΓZ, ZΔ· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ, ZΔ μέσον, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓZ, ZΔ ῥητόν· ῥητὸν ἄρα καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΓΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. LXXI. THEOR.

Bina media potenti commensurabilis & ipsa bina media potens est.

SIT bina media potens AB, & ipsi AB commensurabilis sit ΓΔ: ostendendum est ΓΔ bina media potentem esse.

Quoniam enim bina media potens est AB, dividatur in rectas suas ad punctum E: quare [per 42. 10.] AE, EB potentia sunt incommensurabiles, quæ faciunt compositum ex ipsarum quadratis medium, quod autem sub ipsis continetur medium, & adhuc compositum ex quadratis ipsarum AE, EB incommensurabile rectangulo sub ipsis AE, EB: & construantur eadem quæ supra. similiter [atque supra] demonstrabimus ΓZ, ZΔ potentia incommensurabiles esse; & compositum ex quadratis ipsarum AE, EB commensurabile composito ex quadratis ipsarum ΓZ, ZΔ; quod autem sub AE, EB continetur commensurabile esse ei quod continetur sub ΓZ, ZΔ: quare [per 24. 10.] & compositum ex quadratis ipsarum ΓZ, ZΔ medium est; itemque medium quod sub ΓZ, ZΔ continetur; & adhuc incommensurabile est compositum ex quadratis ipsarum ΓZ, ZΔ rectangulo sub ipsis ΓZ, ZΔ: ergo [per 42. 10.] ΓΔ est bina media potens. quod erat demonstrandum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ οα'.

Η τῇ δύο μέσα δυναμένῃ σύμμετρος δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

ΕΣτω δύο μέσα δυναμένη ἡ AB, καὶ τῇ AB σύμμετρος ἡ ΓΔ· δεικτέον δὴ ὅτι καὶ ἡ ΓΔ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

Επεὶ γὰρ δύο μέσα δυναμένη ἐστὶν ἡ AB, διῃρήσθω εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ E· αἱ AE, EB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE, EB τετραγώνων τῷ ὑπὸ τῶν AE, EB· καὶ κατασκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ ΓZ, ZΔ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE, EB τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ, ZΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AE, EB τῷ ὑπὸ τῶν ΓZ, ZΔ· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ, ZΔ τετραγώνων μέσον ἐστί, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ, ZΔ μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ, ZΔ τετραγώνων τῷ ὑπὸ τῶν ΓZ, ZΔ· ἡ ΓΔ ἄρα δύο μέσα δυναμένη ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. LXXII. THEOR.

Si rationale & medium componantur, quatuor irrationales fiunt, vel quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οβ'.

Ρητῷ καὶ μέσῳ συνθεμένῳ, τέσσαρες ἄλογοι γίνονται ἤτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἢ ἐκ δύο μέσων

μέσων πρώτη, ἢ μείζων, ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

ΕΣτω ῥητὸν μὲν τὸ ΑΒ, μέσον δὲ τὸ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη, ἤτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν, ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἢ μείζων, ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Τὸ γὰρ ΑΒ τῷ ΓΔ ἤτοι μεῖζόν ἐστιν, ἢ ἔλασσον. ἔστω πρότερον μεῖζον· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τῷ ΑΒ ἴσον τὸ ΕΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ· τῷ δὲ ΓΔ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ, τουτέστι τὴν ΘΗ, παραβεβλήσθω τὸ ΘΙ πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ. καὶ ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ ΑΒ, καί ἐστιν ἴσον τὸ ΕΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ καὶ σύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον τὸ ΓΔ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ΘΙ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΘΙ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, τουτέστι τὴν ΘΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ΓΔ, ῥητὸν δὲ τὸ ΑΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ· ὥστε καὶ τὸ ΕΗ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ ΘΙ. ὡς δὲ τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΙ οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΚ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΚ μήκει· καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΕΘ, ΘΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΚ διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΕΗ, τὸ δὲ ΓΔ τῷ ΘΙ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΕΗ τοῦ ΘΙ· καὶ ἡ ΕΘ ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς ΘΚ. ἤτοι οὖν ἡ ΕΘ τὴν ΘΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΘΕ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη, ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ. ἐὰν δὲ χωρίον παρέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. ἀλλὰ δὴ δυνάσθω ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη, ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ. ἐὰν δὲ χωρίον παρέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη μείζων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ δυναμένη μείζων ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἔλασσον τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα ἔλαττόν ἐστι τοῦ ΘΙ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ

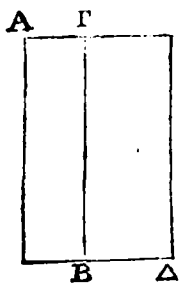
mediis prima, vel major, vel rationale ac medium potens.

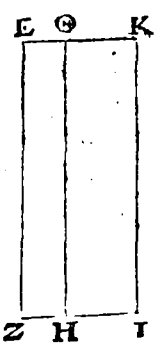
SIT rationale quidem ſpatium AB, medium autem ΓΔ: dico eam, quæ poteſt ſpatium AΔ, vel eſſe ex binis nominibus, vel ex binis mediis primam, vel majorem, vel rationale ac medium potentem.

Etenim AB vel majus eſt quam ΓΔ, vel minus. ſit primum majus, exponaturque rationalis EZ, & ad ipſam applicetur parallelogrammum EH ipſi AB æquale, quod latitudinem faciat EΘ; ipſi vero ΓΔ æquale ad EZ, hoc eſt ad ΘH, applicetur ΘI latitudinem faciens ΘK. & quoniam rationale eſt AB, & ipſi eſt æquale EH, erit & EH rationale, & ad rationalem EZ applicatum eſt latitudinem faciens EΘ: ergo [per 21. 10.] EΘ eſt rationalis, & ipſi EZ longitudine commenſurabilis. rurſus, quoniam medium eſt ΓΔ, & ipſi eſt æquale ΘI, erit & ΘI medium; & ad rationalem EZ, hoc eſt ΘH, applicatum eſt latitudinem faciens ΘK: quare [per 23. 10.] ΘK eſt rationalis, & incommenſurabilis ipſi EZ longitudine. quod cum medium ſit ΓΔ, rationale autem AB; erit AB ipſi ΓΔ incommenſurabile: ergo & EH incommenſurabile eſt ipſi ΘI. ut autem EH ad ΘI ita eſt [per 1. 6.] recta linea EΘ ad ΘK: ergo EΘ ipſi ΘK longitudine eſt incommenſurabilis. & ſunt ambæ rationales: quare EΘ, ΘK rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; & ob id ex binis nominibus eſt EK, diviſa ad punctum Θ. & quoniam majus eſt AB quam ΓΔ, æquale autem AB ipſi EH & ΓΔ ipſi ΘI; erit & EH quam ΘI majus: ergo & EΘ major eſt quam ΘK. vel igitur EΘ plus poteſt quam ΘK quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, vel incommenſurabilis. poſſit primum quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, & ſit major ΘE expoſitæ rationali EZ commenſurabilis: ergo [per 1. deff. ſecund. 10.] EK ex binis nominibus eſt prima, atque eſt EZ rationalis. ſi autem ſpatium contineatur ſub rationali & ex binis nominibus prima, recta linea ſpatium potens [per 55. 10.] ex binis nominibus eſt: ergo quæ poteſt ſpatium EI eſt ex binis nominibus: quare & ea quæ poteſt ſpatium AΔ eſt ex binis nominibus. ſed EΘ plus poſſit quam ΘK quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, & ſit major EΘ expoſitæ rationali EZ commenſurabilis longitudine: ergo [per 4. deff. ſecund. 10.] EK ex binis nominibus eſt quarta, & eſt rationalis EZ. ſi autem ſpatium contineatur ſub rationali & ex binis nominibus quarta, recta linea ſpatium potens [per 58. 10.] irrationalis eſt, quæ major appellatur: potens igitur ſpatium EI major eſt: ergo & potens ſpatium AΔ major.

Sed ſit ſpatium AB minus quam ΓΔ: erit & EH quam ΘI minus; & ob id recta linea EΘ

minor quam recta Θ K: vel igitur K Θ plus poteſt quam E Θ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. poſſit primum quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, & ſit minor E Θ commenſurabilis expoſitæ rationali E Z longitudine: ergo [per 2. deff. ſecund. 10.] E K ex binis nominibus eſt ſecunda, rationalis autem E Z. quod ſi ſpatium contineatur ſub rationali & ex binis nominibus ſecunda, recta linea ſpatium potens [per 56.10.] eſt ex binis mediis prima: potens igitur ſpatium E I eſt ex binis mediis prima: ergo & potens ſpatium A Δ. ſed K Θ plus poſſit quam E Θ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; ſitque minor E Θ expoſitæ rationali E Z commenſurabilis longitudine: quare [per 5. deff. ſecund. 10.] E K eſt ex binis nominibus quinta; atque eſt rationalis E Z. ſi autem ſpatium contineatur ſub rationali & ex binis nominibus quinta, quæ ſpatium poteſt recta linea [per 59. 10.] rationale ac medium potens eſt: quæ igitur poteſt ſpatium E I rationale & medium potens eſt; ideoque rationale & medium potens eſt quæ poteſt ſpatium A Δ.





Si igitur rationale & medium componantur, quatuor irrationales fiunt; vel ea quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis mediis prima, vel major, vel rationale ac medium potens. quod erat demonſtrandum.

ἐλάσσων ἐστὶ τὸ Θ K· ἤτοι δὲ ἡ Θ K τοῦ E Θ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἔστω ἡ ἐλάσσων ἡ E Θ· σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ E Z μήκει· ἡ ἄρα E K ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα, ῥητὴ δὲ ἡ E Z. ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη· ἡ ἄρα τὸ E I χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη· ὥστε καὶ ἡ τὸ A Δ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ἀλλὰ δὴ ἡ Κ Θ τοῦ E Θ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστω ἡ ἐλάσσων ἡ E Θ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ E Z· ἡ ἄρα E K ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη, ῥητὴ δὲ ἡ E Z. ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητόν ἐστι μέσον δυναμένη ἐστίν· ἡ ἄρα τὸ E I χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ A Δ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.

Ῥητὸν ἄρα καὶ μέσα συντεθέντα τέσσαρες ἄλογοι γίνονται· ἤτοι ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων, ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἢ μείζων, ἢ καὶ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. LXXIII. Theor.

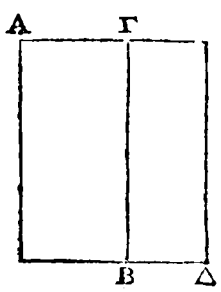
Si duo media inter ſe incommenſurabilia componantur, duæ reliquæ irrationales fiunt; vel ex binis mediis ſecunda, vel bina media potens.

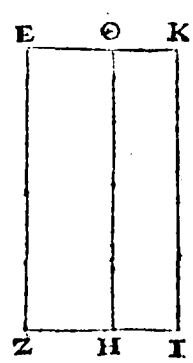
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ογ'.

Δύο μέσων ἀσυμμέτρων ἀλλήλοις συντεθέντων, αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται· ἤτοι ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα, ἢ ἡ δύο μέσα δυναμένη.

COmponantur enim duo media incommenſurabilia inter ſe A B, Γ Δ: dico rectam lineam, quæ ſpatium A Δ poteſt, vel ex binis mediis ſecundam eſſe, vel bina media potentem.

Spatium enim A B vel majus eſt quam Γ Δ, vel minus. ſit primum majus; exponaturque rationalis E Z: & ad E Z ſpatio quidem A B æquale applicetur E H, latitudinem faciens E Θ; ipſi vero Γ Δ æquale applicetur Θ I latitudinem faciens Θ K. & quoniam medium eſt utrumque ipſorum A B, Γ Δ, erit & utrumque E H, Θ I medium; & ad rationalem E Z applicata ſunt, quæ latitudinem faciunt E Θ, Θ K: ergo [per 23. 10.] utraque E Θ, Θ K rationalis eſt, & ipſi E Z longitudine incommenſurabilis. quod cum A B

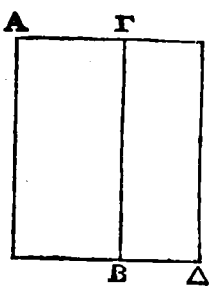




Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσα ἀσύμμετρα ἀλλήλοις τὰ A B, Γ Δ· λέγω ὅτι ἡ τὸ A Δ χωρίον δυναμένη, ἤτοι ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα, ἢ δύο μέσα δυναμένη.

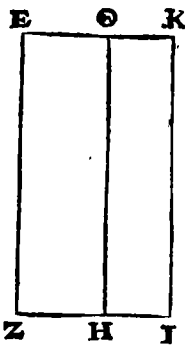
Τὸ γὰρ A B τῷ Γ Δ ἤτοι μεῖζόν ἐστιν, ἢ ἔλασσον. ἔστω πρότερον μεῖζον τὸ A B τοῦ Γ Δ· καὶ συνεστάτω ῥητὴ ἡ E Z, καὶ τῷ μὲν A B ἴσον παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν E Z παραβεβλήσθω τὸ E H πλάτος ποιοῦν τὴν E Θ, τῷ δὲ Γ Δ ἴσον τὸ Θ I πλάτος ποιοῦν τὴν Θ K. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν A B, Γ Δ· μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν E H, Θ I, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν E Z παράκειται πλάτος ποιοῦν τὰς E Θ, Θ K· ἑκατέρα ἄρα τῶν E Θ, Θ K ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ E Z μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν

μετρόν ἐστι τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ, καὶ ἔστω ἴσον τὸ μὴ ΑΒ τῷ ΕΗ, τὸ δὲ ΓΔ τῷ ΘΙ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΙ. ὡς δὲ τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΙ οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΚ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΘΚ μήκει· αἱ ΕΘ, ΘΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΚ. ἤτοι δὲ ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΘ, ΘΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ΕΚ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη, ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ. ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ, τουτέστι τὸ ΑΔ δυναμένη, ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα. ἀλλὰ δὴ ἡ ΕΘ τοῦ ΘΚ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΕΘ, ΘΚ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη. ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη δύο μέσα δυναμένη ἐστίν· ὥστε ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη δύο μέσα δυναμένη ἐστίν. Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι, κἂν ἔλαττον ᾖ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ, ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη, ἢ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἐστὶν, δύο ἢ μέσα δυναμένη.



Δύο ἄρα μέσων ἀσυμμέτρων ἀλλήλοις συντιθεμένων, αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται, ἤτοι ἐκ δύο μέσων δευτέρα, ἢ δύο μέσα δυναμένη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

incommenſurabile ſit ipſi ΓΔ; ſitque ΑΒ quidem æquale ipſi ΕΗ; ΓΔ vero ipſi ΘΙ: erit & ΕΗ ipſi ΘΙ incommenſurabile. ſed ut ΕΗ ad ΘΙ ita eſt ΕΘ ad ΘΚ: incommenſurabilis igitur eſt ΕΘ ipſi ΘΚ longitudine: ideoque ΕΘ, ΘΚ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: quare ex binis nominibus eſt ΕΚ. itaque vel ΕΘ plus poteſt quam ΘΚ quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, vel incommenſurabilis. poſſit primum quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine; & neutra ipſarum ΕΘ, ΘΚ longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali ΕΖ: ergo ΕΚ eſt ex binis nominibus tertia, & eſt ΕΖ rationalis. ſi autem ſpatium contineatur ſub rationali & ex binis nominibus tertia, recta linea ſpatium potens [per 57.10.] eſt ex binis mediis ſecunda: ergo quæ poteſt ſpatium ΕΙ, hoc eſt ΑΔ, eſt ex binis mediis ſecunda. ſed ΕΘ plus poſſit quam ΘΚ quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine; & utraque ipſarum ΕΘ, ΘΚ longitudine incommenſurabilis eſt expoſitæ rationali ΕΖ: quare [per 6. deff. ſecund. 10.] ΕΚ eſt ex binis nominibus ſexta. at ſi ſpatium contineatur ſub rationali & ex binis nominibus ſexta, quæ ſpatium poteſt recta linea [per 60. 10.] eſt bina media potens: ergo quæ poteſt ſpatium ΑΔ bina media poteſt. Similiter demonſtrabimus, ſi & ΑΒ ſit minus quam ΓΔ, rectam lineam, quæ ſpatium poteſt ΑΔ, vel ex binis mediis ſecundam eſſe, vel bina media potentem.



Si igitur duo media inter ſe incommenſurabilia componantur, reliquæ duæ irrationales fiunt; vel ex binis mediis ſecunda, vel bina media potens. quod erat demonſtrandum.

* Πόρισμα.

Η ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλογοι ἔτε τῇ μέσῃ ἔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταί, τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ, τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μεῖζον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῶν δύο μέσα δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην· ἐπεὶ οὖν τὰ ἀρτίως πλάτη διαφέρει τοῦτο πρώτου καὶ ἀλλήλων,

* *Corollarium.*

Quæ ex binis nominibus & quæ poſt ipſam ſunt irrationales neque mediæ neque inter ſe eædem ſunt, quadratum enim quod fit à media ad rationalem applicatum [per 23.10.] latitudinem efficit rationalem & ei ad quam applicatur longitudine incommenſurabilem; quod autem fit ab ea quæ eſt ex binis nominibus ad rationalem applicatum [per 61.10.] latitudinem effieit ex binis nominibus primam; quod ab ea quæ eſt ex binis mediis prima ad rationalem applicatum [per 62.10.] latitudinem efficit ex binis nominibus ſecundam; quod ab ea quæ eſt ex binis mediis ſecunda ad rationalem applicatum [per 63. 10.] latitudinem efficit ex binis nominibus tertiam; quod à majori ad rationalem applicatum [per 64. 10.] latitudinem efficit ex binis nominibus quartam; quod ab ea quæ rationale ac medium poteſt ad rationalem applicatum [per 65.10.] latitudinem efficit ex binis nominibus quintam; quod ab ea quæ bina media poteſt ad rationalem applicatum [per 66. 10.] latitudinem efficit ex binis nominibus ſextam: quoniam igitur dictæ latitudines differunt & à prima & inter ſeſe,

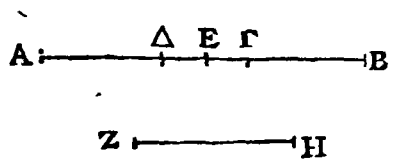
* In quibuſdam Exemplaribus perperam *Lemma* dicitur.

à prima quidem quod rationalis ſit, inter ſeſe vero quod ordine non ſint eædem, conſtat & ipſas irrationales inter ſe differentes eſſe.

SCHOLIUM.

Septem ſunt ſenarii uſque ad ea de quibus hactenus dictum eſt; quorum primus quidem oſtendit [in 37. 38. 39. 40. 41. 42] ortum linearum irrationalium; ſecundus autem diviſionem, nempe [in 43. 44. 45. 46. 47. 48.] quod ad unum duntaxat punctum dividuntur; tertius earum quæ ex binis nominibus inventionem, videlicet primæ 49, ſecundæ 50, tertiæ 51, quartæ 52, quintæ 53, & ſextæ 54; deinceps ſequitur quartus ſenarius, oſtendens quomodo hæ lineæ inter ſe differant; namque uſus iis quæ ex binis nominibus, oſtendit [ad 55. 56. 57. 58. 59. 60.] differentiam ſex irrationalium. quintum & ſextum expoſuit, oſtendens in quinto [ad 61. 62. 63. 64. 65. 66.] quidem applicationes quadratorum quæ ex irrationalibus, videlicet quales irrationales faciant latitudines applicatorum ſpatiorum. in ſexto autem [ad 67. 68. 69. 70. 71.] quomodo irrationalibus commenſurabiles ejuſdem ſpeciei ſint. rurſus in ſeptimo [in 72. 73.] manifeſte oſtendit differentiam ipſarum.

Apparet etiam & in his irrationalibus arithmetica analogia: & quæ ſumitur mediâ proportionalis inter portiones cujuſque lineæ irrationalis juxta arithmeticam analogiam, & ipſa eſt ejuſdem ſpeciei cum iis, inter quarum portiones media interjicitur. atque primum arithmeticam medietatem in his eſſe, ſic apparet. ponatur enim exempli gratia ex binis nominibus AB, & in nomina ad punctum Γ dividatur: manifeſtum eſt AΓ majorem eſſe quam ΓB. auferatur à recta linea AΓ ipſi ΓB æqualis AΔ, & ΓΔ bifariam in E ſecetur: conſtat igitur AE ipſi EB æqualem eſſe. ponatur alterutri ipſarum æqualis ZH: manifeſtum eſt quo differt AΓ ab ipſa ZH, eo differre EB ab ipſa ΓB; etenim AΓ ab ipſa ZH differt magnitudine EΓ, & eadem magnitudine differt ZH ab ipſa ΓB, quod eſt arithmeticæ analogiæ proprium. manifeſtum autem eſt ZH commenſurabilem eſſe ipſi AB, eſt enim ejus dimidiæ æqualis; ergo [per 67. 10.] ZH ex binis nominibus eſt. ſimiliter oſtendetur & in aliis.



τὸ μὲν πρώτῳ ὅτι ῥητή ἐστιν, ἀλλήλων δὲ ὅτι τῇ τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί, δῆλον ὡς καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι διαφέρουσιν ἀλλήλων.

*ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἑπτά εἰσιν ἑξάδες ἄχρι τῶν εἰρημένων· ὧν ἡ μὲν πρώτη ἐδείκνυ τὴν γένεσιν αὐτῶν· ἡ δὲ δευτέρα τὴν διαίρεσιν, ὅτι καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιροῦνται· ἡ δὲ τρίτη τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων εὕρεσιν, πρώτης, δευτέρας, τρίτης, τετάρτης, πέμπτης, ἕκτης, ἀφ' ἧς ἡ τετάρτη ἑξὰς τὴν διαφορὰν ἐπεδείκνυε τῶν ἀλόγων, πρὸς διαφέρουσι· προσχρώμενος γὰρ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων ἀποδείκνυσι τὴν διαφορὰν τῶν ἓξ ἀλόγων. πέμπτῃ καὶ ἕκτῃ ἐχρῆτο, δεικνύων ἐν μὲν τῇ πέμπτῃ τὰς παραβολὰς, τὰς ἀπὸ τῶν ἀλόγων, ποίας ἀλόγους ποιοῦσι τὰ πλάτη τῶν παραβαλλομένων χωρίων. ἐν δὲ τῇ ἕκτῃ, πῶς αἱ σύμμετροι ταῖς ἀλόγοις ὁμοιοειδεῖς αὐταῖς εἰσί. πάλιν, ἐν τῇ ἑβδόμῃ σαφῶς διαφορὰν αὐτῶν ἡμῖν δείκνυσιν.

Ἀναφαίνεται δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἀλόγων τούτων ἡ ἀριθμητικὴ ἀνάλογον· καὶ ἡ μέση λαμβανομένη ἀνάλογον τῶν τμημάτων οἱασδήποτε ἀλόγου κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν, καὶ αὐτὴ ὁμοειδής ἐστιν ὧν ἐστι μέση ἀνάλογον. καὶ πρῶτον ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ μεσότης ἐν τούτοις ἐστί. κείσθω γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων εὐθεῖα ἡ AB, καὶ διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ· φανερὸν ὅτι ἡ AΓ τῆς ΓB ἐστὶ μείζων. ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς AΓ τῇ ΓB ἴση ἡ AΔ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ ΓΔ κατὰ τὸ E· φανερὸν ὅτι ἡ AE τῇ EB ἐστὶν ἴση. κείσθω ὁποτέρᾳ αὐτῶν ἴση ἡ ZH· φανερὸν δὴ ὅτι ᾧ διαφέρει ἡ AΓ τοῦ ZH τούτῳ διαφέρει καὶ ἡ EB τῆς ΓB, ἡ μὲν γὰρ AΓ τῆς ZH τῇ EΓ, τῷ αὐτῷ δὲ καὶ ἡ ZH τῆς ΓB, ὅπερ ἐστὶν ἀριθμητικῆς ἀναλογίας. δῆλον δὲ ὅτι ἡ ZH σύμμετρός ἐστι τῇ AB, τῇ γὰρ ἡμισείᾳ αὐτῆς ἐστιν ἴση· ὥστε ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. ὁμοίως δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.

Principium Senariorum per Detractionem.

PROP. LXXIV. THEOR.

Si à rationali rationalis auferatur, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti; reliqua irrationalis eſt, vocetur autem apotome.

A Rationali enim AB rationalis auferatur BΓ, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens

Ἀρχὴ τῶν κατ' ἀφαίρεσιν ἑξάδων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οδ'.

Ἐὰν ἀπὸ ῥητῆς ῥητὴ ἀφαιρεθῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἀποτομή.

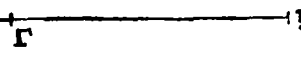
ΑΠΟ γὰρ ῥητῆς τῆς AB ῥητὴ ἀφῃρήσθω ἡ BΓ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ·

* Scholium hoc non agnoſcunt noſtri *Codd. MSS.* Atque in *Editis* Græcis male collocatur poſt Prop. LXX.

λέγω

λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ λοιπῷ ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐπεὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ἀποτομή.



toti: dico reliquam ΑΓ irrationalem eſſe, quæ vocatur apotome.

Quoniam enim incommenſurabilis eſt ΑΒ ipſi ΒΓ longitudine, atque eſt [per 1.6.] ut ΑΒ ad ΒΓ ita quadratum ex ΑΒ ad id quod continetur ſub ΑΒ, ΒΓ, erit quadratum ex ΑΒ incommenſurabile ei quod ſub ΑΒ, ΒΓ continetur: ſed quadrato ex ΑΒ commenſurabilia ſunt [per 16.10.] quadrata ex ΑΒ, ΒΓ; ei vero quod continetur ſub ΑΒ, ΒΓ commenſurabile eſt quod bis ſub ΑΒ, ΒΓ continetur: quadrata igitur ex ΑΒ, ΒΓ ei quod bis continetur ſub ΑΒ, ΒΓ ſunt incommenſurabilia: ergo reliquo, nempe quadrato ex ΑΓ, incommenſurabilia ſunt quadrata ex ΑΒ, ΒΓ; quoniam quadrata ex ΑΒ, ΒΓ [per 7. 2.] æqualia ſunt ei quod bis ſub ΑΒ, ΒΓ continetur una cum quadrato ex ΑΓ. rationalia autem ſunt quadrata ex ΑΒ, ΒΓ: ergo [per 11.def.10.] recta linea ΑΓ eſt irrationalis, vocetur autem apotome.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οε'.

Ἐὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν τὸ περιέχῃ· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

Ἀπὸ γὰρ μέσης τῆς ΑΒ μέση ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ΑΒ, μετὰ δὲ τῆς ΑΒ ῥητὸν ποιοῦσα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ μέσαι εἰσὶ, μέσα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἀσύμμετρα ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ λοιπῷ ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἐπεὶ καὶ τὸ ὅλον ἐπὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ἦ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται. ῥητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

PROP. LXXV. THEOR.

Si à media media auferatur potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota rationale continet: reliqua irrationalis eſt, vocetur autem mediæ apotome prima.

A Media enim ΑΒ auferatur media ΒΓ, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens ipſi ΑΒ, & cum ea rationale faciens, videlicet quod ſub ΑΒ, ΒΓ continetur: dico reliquam ΑΓ irrationalem eſſe, vocetur autem mediæ apotome prima.

Quoniam enim ΑΒ, ΒΓ mediæ ſunt, erunt & quadrata quæ ex ΑΒ, ΒΓ media. rationale autem eſt [ex hyp.] quod bis continetur ſub ΑΒ, ΒΓ, quadrata igitur ex ΑΒ, ΒΓ incommenſurabilia ſunt ei quod bis ſub ΑΒ, ΒΓ continetur: ergo & reliquo, ſc. [per 7.2.] quadrato ex ΑΓ, incommenſurabile eſt id quod bis ſub ΑΒ, ΒΓ continetur: quoniam ſi tota magnitudo uni componentium ſit incommenſurabilis, [per 17. 10.] & quæ à principio magnitudines incommenſurabiles erunt. rationale autem eſt quod bis continetur ſub ΑΒ, ΒΓ: irrationale igitur eſt quadratum ex ΑΓ: ideoque irrationalis eſt ΑΓ, vocaturq; media apotome prima.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οϛ'.

Ἐὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον τὸ περιέχῃ· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα.

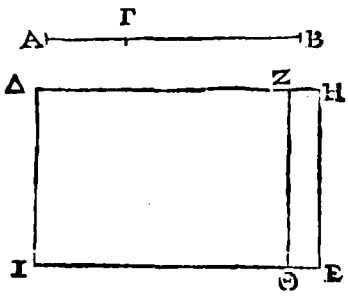
Ἀπὸ γὰρ μέσης τῆς ΑΒ μέση ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης τῆς ΑΒ μέσον περιέχουσα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα.

PROP. LXXVI. THEOR.

Si à media media auferatur, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota medium continet; & reliqua irrationalis eſt, vocetur autem mediæ apotome ſecunda.

A Media enim ΑΒ auferatur media ΒΓ potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti ΑΒ, & cum ea medium continens, videlicet quod continetur ſub ΑΒ, ΒΓ: dico reliquam ΑΓ irrationalem eſſe, vocetur autem mediæ apotome ſecunda.

Exponatur enim rationalis Δ I, & quadratis quidem ex AB, BΓ æquale parallelogrammum Δ E ad ipſam Δ I applicetur, latitudinem faciens Δ H; ei vero quod bis ſub AB, BΓ continetur æquale parallelogrammum Δ Θ ad eandem Δ I applicetur, latitudinem faciens Δ Z: reliquum igitur Z E [per 7. 2.] eſt æquale quadrato ex AΓ. & quoniam media ſunt quadrata ex AB, BΓ; erit & parallelogrammum Δ E medium. & ad rationalem Δ I applicatum eſt, latitudinem faciens Δ H: ergo [per 23.10.] Δ H eſt rationalis, & ipſi Δ I longitudine incommenſurabilis. rurſus, quoniam medium eſt quod ſub AB, BΓ continetur, erit & quod bis continetur ſub AB, BΓ medium. atque eſt æquale parallelogrammo Δ Θ: ergo & Δ Θ eſt medium, & ad rationalem Δ I applicatum eſt, latitudinem faciens Δ Z: rationalis igitur eſt Δ Z, & ipſi Δ I longitudine incommenſurabilis. & quoniam AB, BΓ potentia ſolum commenſurabiles ſunt; erit AB ipſi BΓ incommenſurabilis longitudine: ergo [per 1. 6. & 10.10.] quadratum ex AB incommenſurabile eſt ei quod ſub AB, BΓ continetur. ſed quadrato quidem ex AB commenſurabilia ſunt [per 16. 10.] quæ ex AB, BΓ fiunt quadrata; ei vero quod ſub AB, BΓ continetur [per 6.10.] commenſurabile eſt id quod bis continetur ſub AB, BΓ: quadrata igitur ex AB, BΓ incommenſurabilia ſunt ei quod bis ſub AB, BΓ continetur. Δ E autem eſt [per conſtr.] æquale quadratis ex AB, BΓ; & parallelogrammum Δ Θ æquale eſt ei quod bis continetur ſub AB, BΓ: ergo Δ E ipſi Δ Θ eſt incommenſurabile. ſed [per 1.6.] ut Δ E ad Δ Θ ita recta linea H Δ ad Δ Z: incommenſurabilis igitur eſt H Δ ipſi Δ Z longitudine. & ſunt ambæ rationales: quare H Δ, Δ Z rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: ergo [per 74.10.] Z H apotóme eſt, & Δ I eſt rationalis. quod autem ſub rationali & irrationali continetur rectangulum [per ſch.39. 10.] irrationale eſt, ideo & ipſum potens eſt irrationalis. ſed recta linea AΓ poteſt Z E parallelogrammum: ergo AΓ eſt irrationalis, vocetur autem mediæ apotome ſecunda.



Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ Δ I, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AB, BΓ ἴσον τῷ αὐτῷ τῷ Δ I παραβεβλήσθω τὸ Δ E πλάτος ποιοῦν τὴν Δ H, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ ἴσον παρὰ τὴν Δ I παραβεβλήσθω τὸ Δ Θ πλάτος ποιοῦν τὴν Δ Z· λοιπὸν ἄρα τὸ Z E ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AΓ. καὶ ἐπεὶ μέσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ· μέσον ἄρα καὶ τὸ Δ E. ᾧ παρὰ ῥητὴν τὴν Δ I παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν Δ H· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Δ H, καὶ ἀσύμμετρος τῇ Δ I μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν AB, BΓ μέσον ἐστί. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ Δ Θ· καὶ τὸ Δ Θ ἄρα μέσον ἐστί, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν Δ I παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν Δ Z· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Δ Z, καὶ ἀσύμμετρος τῇ Δ I μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ AB, BΓ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ BΓ μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τῷ ὑπὸ τῶν AB, BΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AB σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AB, BΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ. ἴσον δὲ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AB, BΓ τὸ Δ E, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ τὸ Δ Θ· ἀσύμμετρον ἄρα τὸ Δ E τῷ Δ Θ. ὡς δὲ τὸ Δ E πρὸς τὸ Δ Θ οὕτως ἡ H Δ πρὸς τὴν Δ Z· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ H Δ τῇ Δ Z μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα H Δ, Δ Z ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ Z H ἄρα ἀποτομή ἐστι, ῥητὴ δὲ ἡ Δ I. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι· καὶ ἡ δυναμένη ἄρα αὐτὸ ἄλογός ἐστι. καὶ δύναται τὸ Z E ἡ AΓ· ἡ AΓ ἄρα ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μέση ἀποτομὴ δευτέρα.

PROP. LXXVII. THEOR.

Si à recta linea recta linea auferatur, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ſub ipſis continetur medium; reliqua irrationalis eſt, vocetur autem minor.

A Recta linea AB auferatur recta BΓ, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, faciensque cum tota AB compoſitum quidem ex ipſarum AB, BΓ quadratis rationale, quod autem

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οζ'.

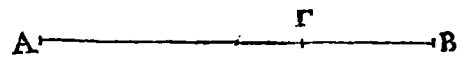
Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν ἀπ' αὐτῶν ἅμα ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἐλάσσων.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς AB εὐθεῖα ἀφῃρήσθω ἡ BΓ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ποιοῦσα μετὰ τῆς ὅλης τῆς AB τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BΓ ἅμα ῥητόν, τὸ δὲ

δὶς

δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἅμα μέσον· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ ἐλάσσων.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων ῥητόν ἐστι, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ ἀναστρέψαντι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ἐλάσσων.



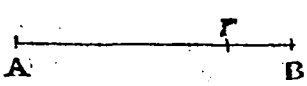
bis ſub ΑΒ, ΒΓ continetur medium: dico reliquam ΑΓ irrationalem eſſe, quæ vocatur minor.

Quoniam enim compoſitum quidem ex ipſarum ΑΒ, ΒΓ quadratis rationale eſt: quod autem bis ſub ΑΒ, ΒΓ continetur medium; erunt quadrata ipſarum ΑΒ, ΒΓ incommenſurabilia ei quod bis continetur ſub ΑΒ, ΒΓ: ergo [per 17. 10.] per converſionem, quadrata ex ΑΒ, ΒΓ quadrato ex ΑΓ ſunt incommenſurabilia. ſed [ex hyp.] quadrata ex ΑΒ, ΒΓ rationalia ſunt: irrationale igitur eſt quadratum ex ΑΓ; ideoque recta linea ΑΓ eſt irrationalis, vocetur autem minor.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οη'.

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒ, ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων μέσον ἐστί, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. καί ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ ἄλογόν ἐστιν· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οθ'.

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον, ᾧ ἔτι καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν τετραγώνα ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ' αὐτῶν· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ΑΒ, ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον, ἔτι δὲ καὶ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ

PROP. LXXVIII. THEOR.

Si à recta linea recta linea auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem ſub ipſis bis continetur rationale; reliqua irrationalis eſt, vocetur autem cum rationali medium totum efficiens.

A Recta enim linea ΑΒ recta linea ΒΓ auferatur incommenſurabilis exiſtens toti ΑΒ, facienſque compoſitum quidem ex ipſarum ΑΒ, ΒΓ quadratis medium; quod autem bis ſub ΑΒ, ΒΓ continetur, rationale: dico reliquam ΑΓ irrationalem eſſe, vocetur autem cum rationali medium totum efficiens.

Quoniam enim compoſitum ex ipſarum ΑΒ, ΒΓ quadratis medium eſt, quod autem bis continetur ſub ΑΒ, ΒΓ rationale; erunt ex ΑΒ, ΒΓ quadrata incommenſurabilia ei quod bis ſub ΑΒ, ΒΓ continetur: & reliquum igitur quadratum ex ΑΓ incommenſurabile eſt [per 17. 10.] ei quod bis continetur ſub ΑΒ, ΒΓ. atque eſt quod bis continetur ſub ΑΒ, ΒΓ rationale: ergo quadratum ex ΑΓ irrationale eſt: & ob id recta linea ΑΓ irrationalis, vocetur autem cum rationali medium totum efficiens.

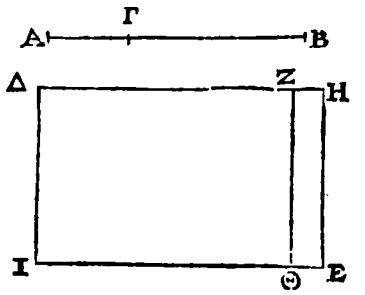
PROP. LXXIX. THEOR.

Si à recta linea recta linea auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem ſub ipſis bis continetur medium, & adhuc ipſorum quadrata incommenſurabilia ei quod bis continetur ſub ipſis; reliqua irrationalis eſt, vocetur autem cum medio medium totum efficiens.

A Recta enim linea ΑΒ recta linea ΒΓ auferatur, potentia incommenſurabilis exiſtens toti ΑΒ, facienſque compoſitum quidem ex ipſarum ΑΒ, ΒΓ quadratis medium, quod autem bis ſub ΑΒ, ΒΓ continetur medium, & adhuc quadrata ipſarum ΑΒ, ΒΓ incommenſurabilia rectangulo quod bis continetur ſub ΑΒ, ΒΓ: dico reliquam ΑΓ irratio-

irrationalem esse, vocetur autem cum medio medium totum efficiens.

Exponatur enim rationalis Δ I, & quadratis quidem ex A B, B Γ æquale parallelogrammum Δ E ad ipsam Δ I applicetur, latitudinem faciens Δ H; ei vero quod bis continetur sub A B, B Γ æquale auferatur Δ Θ, latitudinem faciens Δ Z: ergo [per 7.2.] reliquum Z E est æquale quadrato ex A Γ; & ob id recta linea A Γ ipsum Z E potest. itaque quoniam compositum ex ipsarum A B, B Γ quadratis medium est, & parallelogrammo Δ E æquale; erit ipsum Δ E medium, & ad rationalem Δ I applicatum est, latitudinem faciens Δ H: quare [per 23. 10.] Δ H est rationalis, & ipsi Δ I longitudine incommensurabilis. rursus, quoniam id quod bis sub A B, B Γ continetur medium est, & æquale parallelogrammo Δ Θ, erit Δ Θ medium, & ad rationalem Δ I applicatum est, latitudinem faciens Δ Z: ergo Δ Z est rationalis, ipsique Δ I incommensurabilis longitudine. & quoniam quadrata ex A B, B Γ incommensurabilia sint ei quod bis sub A B, B Γ continetur, & parallelogrammum Δ E ipsi Δ Θ est incommensurabile. ut autem Δ E ad Δ Θ ita est [per 1. 6.] recta linea Δ H ad ipsam Δ Z: incommensurabilis igitur est [per 10.10.] Δ H ipsi Δ Z. & sunt ambæ rationales: ergo Δ H, Δ Z rationales sunt potentia solum commensurabiles: apotome igitur est Z H [per 74.10.], & Z Θ est rationalis. quod autem sub rationali & apotoma continetur rectangulum [per sch. 39.10.] irrationale est, ipsumque potens est irrationalis, atque A Γ potest parallelogrammum Z E: ergo A Γ irrationalis est, vocetur autem cum media medium totum efficiens.



ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

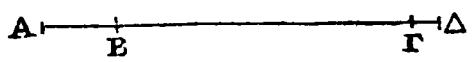
Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ Δ I, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν A B, B Γ ἴσον παρὰ ῥητὴν τὴν Δ I παραβεβλήσθω τὸ Δ E πλάτος ποιοῦν τὴν Δ H, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν A B, B Γ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ Δ Θ πλάτος ποιοῦν τὴν Δ Z· λοιπὸν ἄρα τὸ Z E ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς A Γ· ὥστε ἡ A Γ δύναται τὸ Z E. καὶ ἐπεὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν A B, B Γ τετραγώνων μέσον ἐστί, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ Δ E· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ Δ E, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν Δ I παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν Δ H· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Δ H, καὶ ἀσύμμετρος τῇ Δ I μήκει. πάλιν, ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν A B, B Γ μέσον ἐστί, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ Δ Θ· τὸ ἄρα Δ Θ μέσον ἐστί, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν Δ I παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν Δ Z· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Δ Z, καὶ ἀσύμμετρος τῇ Δ I μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῶν A B, B Γ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν A B, B Γ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Δ E τῷ Δ Θ. ὡς δὲ τὸ Δ E πρὸς τὸ Δ Θ οὕτως ἐστὶ καὶ ἡ Δ H πρὸς τὴν Δ Z· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Δ H τῇ Δ Z. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ Δ H, Δ Z ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Z H, ῥητὴ δὲ ἡ Z Θ. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καὶ δύναται τὸ Z E ἡ A Γ· ἡ A Γ ἄρα ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Prop. LXXX. Theor.

Apotomæ una tantum congruit recta linea potentia solum commensurabilis existens toti.

SIT apotome A B, congruens autem ipsi sit B Γ: ergo [per 74. 10.] A Γ, Γ B rationales sunt potentia solum commensurabiles. dico ipsi A B alteram non congruere rationalem, quæ potentia solum sit commensurabilis toti.

Si enim fieri potest, congruat B Δ: ergo [per 74.10.] A Δ, Δ B rationales sunt potentia solum commensurabiles. & quoniam quo excessu quadrata ex A Δ, Δ B excedunt id quod bis continetur sub A Δ, Δ B, eo & quadrata ex A Γ, Γ B excedunt id quod bis sub A Γ, Γ B continetur; utraque enim excedunt eodem quadrato, nempe quod fit ex A B: & permutando, quo excessu quadrata ex A Δ, Δ B excedunt quadrata ex A Γ, Γ B, eodem & id quod bis continetur sub A Δ, Δ B excedet id quod bis sub A Γ, Γ B continetur. sed quadrata ex A Δ, Δ B excedunt quadrata ex A Γ, Γ B rationali:



ΠΡΟΤΑΣΙΣ π'.

Τῇ ἀποτομῇ μία μόνον πρόσαρμόζει εὐθεῖα ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ A B, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ B Γ· αἱ A Γ, Γ B ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω ὅτι τῇ A B ἑτέρα ἡ προσαρμόσουσα ῥητή, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ B Δ· αἱ A Δ, Δ B ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν A Δ, Δ B τὸ δὶς ὑπὸ τῶν A Δ, Δ B, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν A Γ, Γ B τὸ δὶς ὑπὸ τῶν A Γ, Γ B· τῷ γὰρ αὐτῷ τῷ ἀπὸ τῆς A B ἀμφότερα ὑπερέχει· ἐναλλὰξ ἄρα ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν A Δ, Δ B τῶν ἀπὸ τῶν A Γ, Γ B, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν A Δ, Δ B τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν A Γ, Γ B. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς A Δ, Δ B τοῦ ἀπὸ τῆς A Γ, Γ B ὑπερέχει ῥητῷ·

ῥητὴ

ῥητὴ γὰρ ἑκατέρα· καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, μέσαι γὰρ ἀμφότεραι, μέσον δὲ μέσα οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ· τῇ ἄρα ΑΒ ἑτέρα ἀ πεσσαρμόζει ῥητὴ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.

Μία ἄρα μόνον τῇ ἀποτομῇ πεσσαρμόσει ῥητὴ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[ex hyp.] utraque rectarum linearum rationalis eſt; quod igitur bis continetur ſub ΑΔ, ΔΒ excedit id quod bis ſub ΑΓ, ΓΒ continetur rationali, quod fieri non poteſt, ambo enim media ſunt, medium autem [per 27. 10.] medium non ſuperat rationali; ergo rectæ lineæ ΑΒ altera non congruit rationalis, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti.

Igitur apotomæ una tantum congruit rationalis, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πα'.

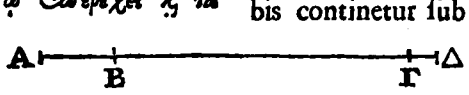
Τῇ μέσῃ ἀποτομῇ πρώτῃ μόνον μία πεσσαρμόζει εὐθεῖα μέση, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τοῦ ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.

Prop. LXXXI. Theor.

Mediæ apotomæ primæ una tantum congruit recta linea media, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota rationale continens.

Ἔστω γὰρ μέση ἀποτομὴ πρώτη ἡ ΑΒ, ᾗ τῇ ΑΒ πεσσαρμοζέτω ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα ἀ πεσσαρμόζει μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τοῦ ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, πεσσαρμοζέτω καὶ ἡ ΔΒ· αἱ ἄρα ΑΔ, ΔΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ (τῷ γὰρ αὐτῷ πάλιν ὑπερέχουσι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ·) ἀναλλὰξ ἄρα ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, μέσαι γὰρ ἀμφότεραι, μέσον δὲ μέσα οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.



Τῇ ἄρα μέσῃ ἀποτομῇ πρώτῃ μία μόνον πεσσαρμόζει εὐθεῖα μέση, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τοῦ ὅλης ῥητὸν περιέχουσα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si enim fieri poteſt, congruat ΔΒ: ergo [per 75. 10.] ΑΔ, ΔΒ mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quæ rationale continent, nempe quod fit ſub ΑΔ, ΔΒ. & quoniam quo exceſſu quadrata ex ΑΔ, ΔΒ excedunt id quod bis continetur ſub ΑΔ, ΔΒ, eodem & quadrata ex ΑΓ, ΓΒ excedunt quod bis ſub ΑΓ, ΓΒ continetur; (excedunt enim [per 7. 2.] eodem quadrato ex ΑΒ;) & permutando quo exceſſu quadrata ex ΑΔ, ΔΒ excedunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, eodem & quod bis continetur ſub ΑΔ, ΔΒ excedit id quod bis ſub ΑΓ, ΓΒ continetur. ſed quod bis continetur ſub ΑΔ, ΔΒ excedit id quod bis ſub ΑΓ, ΓΒ continetur rationali; ambo enim rationalia ſunt: ergo & quadrata ex ΑΔ, ΔΒ excedunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ rationali, quod fieri non poteſt; ambo enim [ex hyp.] ſunt media, medium autem [per 27.10.] medium non ſuperat rationali.

Quare mediæ apotomæ primæ una tantum congruit recta linea media, quæ potentia ſolum toti ſit commenſurabilis, & cum tota rationale contineat. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πβ'.

Τῇ μέσῃ ἀποτομῇ δευτέρᾳ μία μόνον πεσσαρμόζει εὐθεῖα μέση, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τοῦ ὅλης μέσον περιέχουσα.

Prop. LXXXII. Theor.

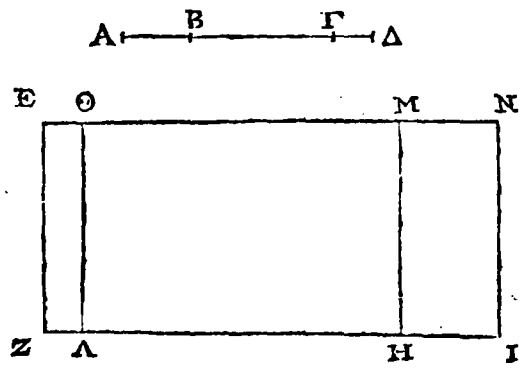
Mediæ apotomæ ſecundæ una tantum congruit recta linea, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota medium continens.

Ἔστω μέση ἀποτομὴ δευτέρα ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ πεσσαρμόζουσα ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα ἀ πεσσαρμόσει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον

SIT media apotome ſecunda ΑΒ, & ipſi ΑΒ congruat ΒΓ: ergo [per 76. 10.] ΑΓ, ΓΒ mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, mediumque continentes ſub ΑΓ, ΓΒ: dico ipſi ΑΒ alteram non congruere mediam quæ poten-

tia ſolum ſit commenſurabilis toti, & cum tota medium contineat.

Si enim fieri poteſt, congruat B Δ; quare [per 76.10.] A Δ, Δ B mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium ſub A Δ, Δ B continent. & exponatur rationalis E Z, quadratiſque ex A Γ, Γ B æquale parallelogrammum E H ad ipſam E Z applicetur, latitudinem faciens E M; & ei quod bis continetur ſub A Γ, Γ B æquale auferatur parallelogrammum Θ H, latitudinem faciens Θ M: reliquum igitur E Λ [per 7. 2.] eſt æquale ei quod fit ex A B quadrato: ergo A B ipſum E Λ poteſt. rurſus, quadratis ex A Δ, Δ B æquale parallelogrammum E I ad ipſam E Z applicetur, latitudinem faciens E N, eſt autem & E Λ æquale quadrato ex A B: reliquum igitur Θ I [per 7. 2.] eſt æquale ei quod bis ſub A Δ, Δ B continetur. & quoniam mediæ ſunt A Γ, Γ B, erunt & quadrata ex A Γ, Γ B media. ſuntque æqualia parallelogrammo E H: quare E H eſt medium, & ad rationalem E Z applicatum eſt, latitudinem faciens E M: ergo [per 23.10.] E M eſt rationalis, & ipſi E Z longitudine incommenſurabilis. rurſus, quoniam medium eſt quod continetur ſub A Γ, Γ B; & quod bis ſub A Γ, Γ B continetur medium erit. atque eſt æquale parallelogrammo Θ H: ergo & Θ H eſt medium, & ad rationalem E Z applicatum eſt latitudinem faciens Θ M: rationalis igitur eſt Θ M, & ipſi E Z incommenſurabilis longitudine. & quoniam [ex hyp.] A Γ, Γ B potentia ſolum ſunt commenſurabiles, erit A Γ incommenſurabilis ipſi Γ B longitudine. ut autem A Γ ad Γ B ita [per 1.6.] quadratum ex A Γ ad id quod continetur ſub A Γ, Γ B: incommenſurabile igitur eſt & quadratum ex A Γ ei quod ſub A Γ, Γ B continetur. ſed quadrato quidem ex A Γ commenſurabilia ſunt [per 16. 10.] quadrata ex A Γ, Γ B; ei vero quod continetur ſub A Γ, Γ B commenſurabile eſt quod bis ſub A Γ, Γ B continetur: ergo quadrata ex A Γ, Γ B incommenſurabilia ſunt ei quod bis ſub A Γ, Γ B continetur. atque eſt [per conſtr.] quadratis ex A Γ, Γ B æquale parallelogrammum E H; ei vero quod bis ſub A Γ, Γ B continetur æquale ipſum Θ H: ergo E H ipſi Θ H eſt incommenſurabile. ſed ut E H ad Θ H ita eſt [per 1. 6.] recta linea E M ad ipſam Θ M: quare E M ipſi Θ M eſt incommenſurabilis longitudine. & ſunt ambæ rationales: ergo E M, Θ M rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, ac propterea [per 74.10.] apotome eſt E Θ, & ipſi congruens Θ M. ſimiliter demonſtrabimus & Θ N ipſi congruere: apotomæ igitur alia atque alia congruit recta linea, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, quod [per 80.10.] fieri non poteſt.



Ergo mediæ apotomæ ſecundæ una tantum congruit recta linea media, quæ potentia ſolum

Εἰ γὰρ δυνατόν, συναρμοζέτω ἡ Β Δ· αἱ Α Δ, Δ Β ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσι τὸ ὑπὸ τῶν Α Δ, Δ Β. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Ε Ζ, καὶ παρὰ τὴν Ε Ζ παραβεβλήσθω τὸ Ε Η, πλάτος ποιοῦν τὴν Ε Μ· τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν Α Γ, Γ Β ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ Θ Η, πλάτος ποιοῦν τὴν Θ Μ· λοιπὸν ἄρα τὸ Ε Λ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α Β· ὥστε ἡ Α Β δύναται τὸ Ε Λ. πάλιν δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν Α Δ, Δ Β ἴσον παρὰ τὴν Ε Ζ παραβεβλήσθω τὸ Ε Ι, πλάτος ποιοῦν τὴν Ε Ν· ἔστι δὲ καὶ τὸ Ε Λ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς Α Β τετραγώνῳ· λοιπὸν ἄρα τὸ Θ Ι ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν Α Δ, Δ Β. καὶ ἐπεὶ μέσαι εἰσὶν αἱ Α Γ, Γ Β, μέσα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν Α Γ, Γ Β. καὶ ἔστιν ἴσα τῷ Ε Η· μέσον ἄρα καὶ τὸ Ε Η, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν Ε Ζ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν Ε Μ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Ε Μ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ Ε Ζ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α Γ, Γ Β, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν Α Γ, Γ Β μέσον ἐστί. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ Θ Η· καὶ τὸ Θ Η ἄρα μέσον ἐστί, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν Ε Ζ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν Θ Μ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ Θ Μ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ Ε Ζ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ Α Γ, Γ Β δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α Γ τῇ Γ Β μήκει. ὡς δὲ ἡ Α Γ πρὸς τὴν Γ Β οὕτως καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α Γ, Γ Β· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α Γ τῷ ὑπὸ τῶν Α Γ, Γ Β. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α Γ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν Α Γ, Γ Β, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Α Γ, Γ Β σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν Α Γ, Γ Β· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν Α Γ, Γ Β τῷ δὶς ὑπὸ τῶν Α Γ, Γ Β. καὶ ἔστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν Α Γ, Γ Β ἴσον τὸ Ε Η, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν Α Γ, Γ Β ἴσον τὸ Θ Η· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Ε Η τῷ Θ Η. ὡς δὲ τὸ Ε Η πρὸς τὸ Θ Η οὕτως ἐστὶν ἡ Ε Μ πρὸς τὴν Θ Μ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε Μ τῇ Θ Μ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ Ε Μ, Θ Μ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Ε Θ, συναρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ Θ Μ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ Θ Ν αὐτῇ συναρμόζει· τῇ ἄρα ἀποτομῇ ἄλλη καὶ ἄλλη συναρμόζει εὐθεῖα, δυνάμει μόνον σύμμετρος τῇ ὅλῃ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Τῇ ἄρα μέσῃ ἀποτομῇ δευτέρᾳ μία μόνον συναρμόζει εὐθεῖα μέση, δυνάμει μόνον σύμμετρος

μετρῷ οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

sit commensurabilis toti, & cum tota medium contineat. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πγ'.

Τῇ ἐλάσσονι μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ποιοῦσα μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον.

Prop. LXXXIII. Theor.

Minori una tantum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem bis sub ipsis continetur medium.

Ἔστω ἐλάσσων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἔστω ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα εὐθεῖα οὐ προσαρμόσει, τὰ αὐτὰ ποιοῦσα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα ἅμα ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσον. καὶ ἐπεὶ ᾧ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τὸ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΑΒ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, μέσα γὰρ ἀμφότερα.

Τῇ ἄρα ἐλάσσονι μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, καὶ ποιοῦσα μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Sit minor ΑΒ, & ipsi ΑΒ congruat ΒΓ: ergo [per 77. 10.] ΑΓ, ΓΒ potentia sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod autem bis sub ipsis continetur medium: dico ipsi ΑΒ alteram non congruere rectam lineam, quæ eadem faciat.

Si enim fieri potest, congruat ΒΔ: ergo [per 77.10.] ΑΔ, ΔΒ potentia sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale; quod autem bis sub ipsis continetur medium. & quoniam [per 7.2.] quo excessu quadrata ex ΑΔ, ΔΒ excedunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ, eodem & quod bis continetur sub ΑΔ, ΔΒ excedit id quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur: quadrata autem ex ΑΔ, ΔΒ excedunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ rationali; ambo enim [ex hyp.] rationalia sunt: igitur & quod bis continetur sub ΑΔ, ΔΒ id quod bis sub ΑΓ, ΓΒ continetur rationali excedet, quod [per 27. 10] fieri non potest, etenim [ex hyp.] ambo sunt media.

Ergo minori una tantum congruit recta linea, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis rationale, quod vero bis sub ipsis continetur medium. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πδ'.

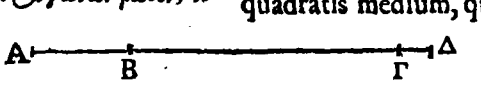
Τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσῃ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

Prop. LXXXIV. Theor.

Ei quæ cum rationali medium totum facit una tantum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis medium, quod autem bis sub ipsis continetur rationale.

Ἔστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, προσαρμόζουσα δὲ ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητόν· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα εὐθεῖα οὐ προσαρμόσει τὰ αὐτὰ ποιοῦσα.

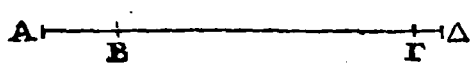
Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν



Sit cum rationali medium totum faciens ΑΒ, congruens autem ipsi ΒΓ; ergo [per 78.10.] ΑΓ, ΓΒ potentia sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum ΑΓ, ΓΒ quadratis medium, quod autem bis sub ipsis continetur rationale: dico ipsi ΑΒ alteram non congruere eadem facientem.

Si enim fieri potest, congruat ΒΔ: ergo [per 78. 10.] ΑΔ, ΔΒ potentia sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum ΑΔ, ΔΒ quadratis medium, quod autem bis sub

ipſis continetur rationale. quoniam igitur [per 7. 2.] quo exceſſu quadrata ex A Δ, Δ B excedunt quadrata ex A Γ, Γ B, eodem quod bis continetur ſub A Δ, Δ B excedit id quod bis ſub A Γ, Γ B continetur; quod autem bis continetur ſub A Δ, Δ B excedit id quod bis ſub A Γ, Γ B continetur rationali, etenim [ex hyp.]

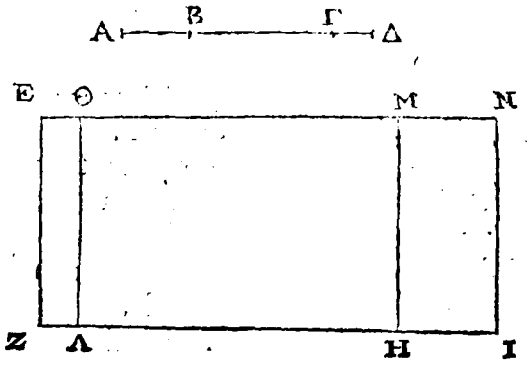


ambo rationalia ſunt: igitur & quadrata ex A Δ, Δ B rationali excedent quadrata ex A Γ, Γ B, quod [per 27. 10] fieri non poteſt, cum ambo ſint media: non igitur ipſi A B altera congruit, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem bis ſub ipſis continetur rationale: quare ei quæ cum rationali medium totum facit una tantum congruet recta linea. quod erat demonſtrandum.

Prop. LXXXV. Theor.

Ei quæ cum medio medium totum facit una tantum congruit recta linea, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem bis ſub ipſis continetur medium, & adhuc incommenſurabile compoſito ex quadratis ipſarum.

SIT cum medio medium totum faciens A B, ipſi vero congruens B Γ: ergo [per 79. 10.] A Γ, Γ B potentia ſunt incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium; quod autem bis ſub ipſis A Γ, Γ B continetur medium, & adhuc compoſitum ex quadratis ipſarum A Γ, Γ B incommenſurabile ei quod bis continetur ſub ipſis A Γ, Γ B: dico ipſi A B alteram non congruere potentia incommenſurabilem toti, & cum tota facientem ea quæ propoſita ſunt.



Si enim fieri poteſt, congruat B Δ, ita ut A Δ, Δ B potentia incommenſurabiles ſint, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum A Δ, Δ B quadratis medium; quod autem bis ſub ipſis A Δ, Δ B continetur medium, & adhuc compoſitum ex quadratis ipſarum A Δ, Δ B incommenſurabile ei quod bis continetur ſub ipſis A Δ, Δ B. & exponatur rationalis E Z; & quadratis ipſarum A Γ, Γ B æquale parallelogrammum E H ad ipſam E Z applicetur, latitudinem faciens E M; ei vero quod bis continetur ſub A Γ, Γ B æquale parallelogrammum auferatur Θ H, latitudinem faciens Θ M: reliquum igitur quadratum ex A B [per 7. 2.] eſt æquale parallelogrammo E Λ: ergo A B ipſum E Λ poteſt. rurſus, quadratis ex A Δ, Δ B æquale parallelogrammum E I ad ipſam E Z applicetur, latitudinem faciens E N.

Α Δ, Δ Β ῥητόν. ἐπεὶ οὖν ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν Α Δ, Δ Β τῶν ἀπὸ τῶν Α Γ, Γ Β, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν Α Δ, Δ Β τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν Α Γ, Γ Β, ἀνῃρέθω τῶν αὐτῶν. τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν Α Δ, Δ Β τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν Α Γ, Γ Β ὑπερέχει ῥητῷ, ῥητὰ γάρ ἐστιν ἀμφότερα· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν Α Δ, Δ Β ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν Α Γ, Γ Β ὑπερέχει ῥητῷ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· μέσα γὰρ ἀμφότερα· οὐκ ἄρα τῇ Α Β ἑτέρα προσαρμόσει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· τῇ ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσῃ μία μόνον προσαρμόσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πε'.

Τῇ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὸ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν.

Ἔστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ Α Β, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ Β Γ· αἱ ἄρα Α Γ, Γ Β δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν Α Γ, Γ Β μέσον, ἔτι δὲ τὰ ἀπὸ τῶν Α Γ, Γ Β τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν Α Γ, Γ Β· λέγω ὅτι τῇ Α Β ἑτέρα εὐθεῖα οὐ προσαρμόσει δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὰ προκείμενα.

Εἰ γὰρ δυνατὸν προσαρμοζέτω ἡ Β Δ, ὥστε καὶ τὰς Α Δ, Δ Β δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιοῦσας τὰ μὲν ἀπὸ τῶν Α Δ, Δ Β τετράγωνα ἅμα μέσον, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν Α Δ, Δ Β μέσον, καὶ ἔτι τὰ ἀπὸ τῶν Α Δ, Δ Β ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν Α Δ, Δ Β. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Ε Ζ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν Α Γ, Γ Β ἴσον παρὰ τὴν Ε Ζ παραβεβλήσθω τὸ Ε Η, πλάτος ποιοῦν τὴν Ε Μ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν Α Γ, Γ Β ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ Θ Η, πλάτος ποιοῦν τὴν Θ Μ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α Β ἴσον ἐστὶ τῷ Ε Λ· ἡ ἄρα Α Β δύναται τὸ Ε Λ. πάλιν, τοῖς ἀπὸ τῶν Α Δ, Δ Β ἴσον παρὰ τὴν Ε Ζ παραβεβλήσθω τὸ Ε Ι, πλάτος ποιοῦν τὴν Ε Ν. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α Β ἴσον τῷ

est autem & quadratum ex A B æquale parallelo-

Ε Λ·

ΕΛ· λοιπὴ ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΙ. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΕΗ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ· καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἴσον τὸ ΘΗ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΘΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τ ΑΓ, ΓΒ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΜ τῇ ΜΘ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΕΜ, ΜΘ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΜ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἡ ΕΘ πάλιν ἀποτομή ἐστι, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΝ· τῇ ἄρα ἀποτομῇ ἄλλη καὶ ἄλλη προσαρμόζει ῥητὴ, δυνάμει μόνον ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τῇ ΑΒ ἑτέρα προσαρμόσει εὐθεῖα· τῇ ἄρα ΑΒ μία μόνον προσαρμόσει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὰ περὶ αὐτῶν τετράγωνα ἅμα μέσον, ἔτι τε τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ' αὐτῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

grammo ΕΛ: ergo [per 7.2.] reliquum quod bis ſub ΑΔ, ΔΒ continetur ipſi ΘΙ eſt æquale. & quoniam [ex hyp.] compoſitum ex quadratis ipſarum ΑΓ, ΓΒ medium eſt, & [per conſtr.] æquale parallelogrammo ΕΗ, erit & ΕΗ medium: & ad rationalem ΕΖ applicatum eſt, latitudinem faciens ΕΜ; quare [per 23. 10.] ΕΜ eſt rationalis, & ipſi ΕΖ longitudine incommenſurabilis. rurſus, quoniam quod bis ſub ΑΓ, ΓΒ continetur eſt medium, & æquale ipſi ΘΗ; erit & ΘΗ medium, & ad rationalem ΕΖ applicatum eſt, latitudinem faciens ΘΜ: rationalis igitur eſt ΘΜ [per 23. 10.] & ipſi ΕΖ incommenſurabilis longitudine. & quoniam quadrata ex ΑΓ, ΓΒ incommenſurabilia ſint ei quod bis ſub ΑΓ, ΓΒ continetur, erit & ΕΗ incommenſurabile ipſi ΘΗ, ideoque [per 1. 6. & 10. 10.] recta linea ΕΜ rectæ ΜΘ longitudine eſt incommenſurabilis. & ſunt ambæ rationales: cum igitur ΕΜ, ΜΘ rationales ſint potentia ſolum commenſurabiles, recta linea ΕΘ [per 74. 10.] apotome eſt, & ipſi congruens ΘΜ. ſimiliter demonſtrabimus ΕΘ rurſus apotomen eſſe, ipſique congruentem ΘΝ: ergo apotomæ alia atque alia congruit rationalis, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, quod fieri non poſſe [per 80. 10.] oſtenſum eſt: non igitur ipſi ΑΒ altera congruet recta linea: ipſi igitur ΑΒ una tantum congruet, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem bis ſub ipſis continetur medium, & adhuc compoſitum ex quadratis ipſarum incommenſurabile ei quod bis continetur ſub ipſis. quod erat demonſtrandum.

ΟΡΟΙ ΤΡΙΤΟΙ.

α'. Ὑποκειμένης ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς, ἐὰν μὴ ὅλη ἡ προσαρμόζουσα μεῖζον δυνῆται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καλείσθω ἀποτομὴ πρώτη.

β'. Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη τὸν προσαρμόζουσαν μεῖζον δυνῆται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καλείσθω ἀποτομὴ δευτέρα.

γ'. Ἐὰν δὲ μηδετέρα σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, ἡ δὲ ὅλη τὴν προσαρμόζουσαν μεῖζον δυνῆται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καλείσθω ἀποτομὴ τρίτη.

δ'. Πάλιν, ἐὰν ἡ ὅλη τὴν προσαρμόζουσαν μεῖζον δυνῆται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν μὲν ἡ ὅλη σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καλείσθω ἀποτομὴ τετάρτη.

ε'. Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα, πέμπτη.

ς'. Ἐὰν δὲ μηδετέρα, ἕκτη.

DEFINITIONES TERTIÆ.

1. Expoſita rationali & apotoma, ſi quidem tota plus poſſit quam congruens quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, ſitque tota expoſitæ rationali longitudine commenſurabilis; vocetur apotome prima.

2. Si vero congruens ſit longitudine commenſurabilis expoſitæ rationali, & tota plus poſſit quam congruens quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine; vocetur apotome ſecunda.

3 Quod ſi neutra ſit longitudine commenſurabilis expoſitæ rationali, & tota plus poſſit quam congruens quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine; dicatur apotome tertia.

4. Rurſus ſi tota plus poſſit quam congruens quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine, ſi quidem tota ſit longitudine commenſurabilis expoſitæ rationali; vocetur apotome quarta.

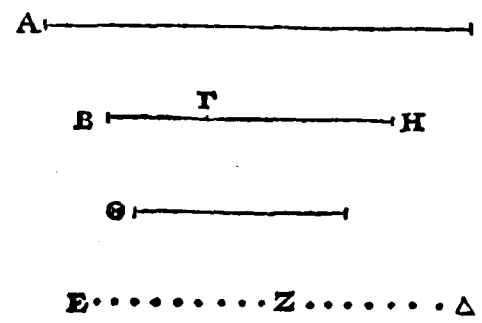
5. Si vero congruens, vocetur apotome quinta.

6. Quod ſi neutra, dicatur apotome ſexta.

PROP. LXXXVI. PROBL.
Invenire primam apotomen.

EXponatur rationalis A, & ipſi A longitudine commenſurabilis ſit BH: ergo & BH eſt rationalis. & [per coroll. lem. 1.30.10.] exponantur duo quadrati numeri EΔ, EZ, quorum exceſſus ΔZ non ſit quadratus: neque igitur EΔ ad ΔZ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum. & fiat ut EΔ ad ΔZ ita quadratum ex BH ad quadratum ex HΓ.

Commenſurabile igitur [per 6. 10.] eſt quadratum ex BH quadrato ex HΓ. rationale autem eſt quadratum ex BH; ergo & quadratum ex HΓ eſt rationale: ideoque recta linea HΓ rationalis eſt. & quoniam EΔ ad ΔZ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque [per 9.10.] quadratum ex BH ad quadratum ex HΓ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommenſurabilis igitur eſt BH ipſi HΓ longitudine. & ſunt ambæ rationales: ergo BH, HΓ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, & ob id [per 74.10.] BΓ apotome eſt. dico & primam eſſe. ſit enim quadratum ex Θ id quo quadratum ex BH excedit quadratum ex HΓ. & quoniam eſt ut BΔ ad ΔZ ita quadratum ex BH ad quadratum ex HΓ, erit per converſionem [per coroll. 19.5.] ut ΔE ad EZ ita quadratum ex BH ad quadratum ex Θ. ſed ΔE ad EZ rationem habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum; uterq; enim [per conſtr.] quadratus eſt: ergo & quadratum ex BH ad quadratum ex Θ rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum: commenſurabilis igitur eſt [per 9.10.] BH ipſi Θ longitudine. & BH plus poteſt quam HΓ quadrato ex Θ: ergo BH plus poterit quam HΓ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. atque eſt tota BH expoſitæ rationali A commenſurabilis longitudine: ergo [per 1. deff. tert. 10.] BH eſt apotome prima.



Inventa igitur eſt prima apotome. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πϛ'.
Εὑρεῖν τὴν πρώτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΒΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΕΔ, ΕΖ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ἡ ΔΖ μὴ ἔστω τετράγωνος· ὁ δ' ἄρα ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ πεπιήσθω ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ.

Σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΗΓ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἐστι. λέγω ὅτι καὶ πρώτη. ᾧ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΔΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΓ· καὶ ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἑκάτερος γὰρ τετράγωνός ἐστι· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΗΒ τοῦ ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἔστιν ὅλη ἡ ΒΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ πρώτη ἀποτομὴ ἡ ΒΓ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. LXXXVII. PROBL.
Invenire ſecundam apotomen.

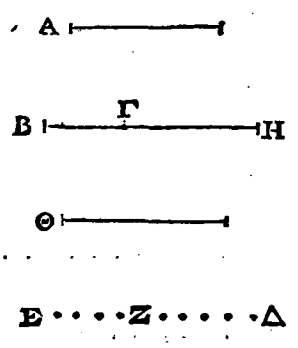
EXponatur rationalis A; & ipſi A longitudine commenſurabilis ſit ΓH: ergo ΓH eſt rationalis. & [per coroll. lem. 1.30.10.] exponantur duo numeri quadrati ΔE, EZ, quorum exceſſus ΔZ non ſit quadratus. fiatque ut ZΔ ad ΔE ita quadratum ex ΓH ad quadratum ex HB.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πζ'.
Εὑρεῖν τὴν δευτέραν ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α σύμμετρος μήκει ἡ ΗΓ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΗΓ. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔΕ, ΕΖ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ ΔΖ μὴ ἔστω τετράγωνος. καὶ πεπιήσθω ὡς ὁ ΖΔ πρὸς τὸν ΔΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ.

Σύμμετρον

Σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ τετραγώνῳ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ τῆς ΓΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΗ τῇ ΗΒ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΓΗ, ΗΒ ἄρα ῥηταὶ εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι. λέγω δὴ ὅτι καὶ δευτέρα. ἐφ' ᾧ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ οὕτως ὁ ΕΔ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΔΖ ἀριθμόν· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ οὕτως ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΕΖ. καὶ ἔστιν ἑκάτερος τῶν ΕΔ, ΕΖ τετράγωνος· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἔστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΓΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι δευτέρα.



Commensurabile igitur est [per 6. 10.] quadratum ex ΓΗ quadrato ex ΗΒ. sed quadratum ex ΓΗ est rationale: ergo & rationale est quadratum ex ΗΒ; ac propterea ipsa ΗΒ est rationalis. & quoniam quadratum ex ΓΗ ad quadratum ex ΗΒ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum, erit [per 9. 10.] ΓΗ ipsi ΗΒ incommensurabilis longitudine. & ambæ sunt rationales: ergo ΓΗ, ΗΒ rationales sunt potentia solum commensurabiles, & ob id [per 74. 10.] ΒΓ est apotome. dico & secundam esse. sit enim quadratum ex Θ illud quo quadratum ex ΒΗ excedit quadratum ex ΗΓ. quoniam igitur est ut quadratum ex ΒΗ ad quadratum ex ΗΓ ita ΕΔ numerus ad numerum ΔΖ, erit per conversionem rationis ut quadratum ex ΒΗ ad quadratum ex Θ ita ΔΕ ad ΕΖ. atque est [per constr.] uterque ipsorum ΔΕ, ΕΖ quadratus: quadratum igitur ex ΒΗ ad quadratum ex Θ rationem habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ideoque [per 9. 10.] ΒΗ ipsi Θ longitudine est commensurabilis. & [per constr.] plus potest ΒΗ quam ΗΓ quadrato ex Θ: ergo ΒΗ plus potest quam ΗΓ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. atque est congruens ΓΗ expositæ rationali Α commensurabilis longitudine: ergo [per 2. deff. tert. 10.] ΒΓ est apotome secunda.

Εὕρηται ἄρα ἡ δευτέρα ἀποτομὴ ἡ ΒΓ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Inventa igitur est secunda apotome ΒΓ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πή'.

Εὑρεῖν τὴν τρίτην ἀποτομήν.

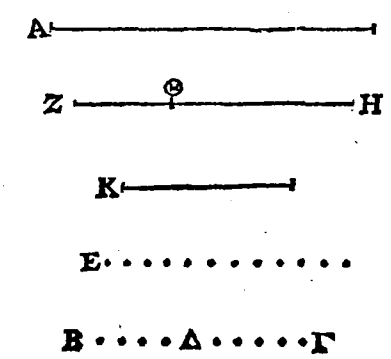
PROP. LXXXVIII. PROBL.

Invenire tertiam apotomen.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ ἐκκείσθωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Ε, ΒΓ, ΓΔ, λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὁ δὲ ΒΓ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον ἐχέτω ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ τετράγωνον.

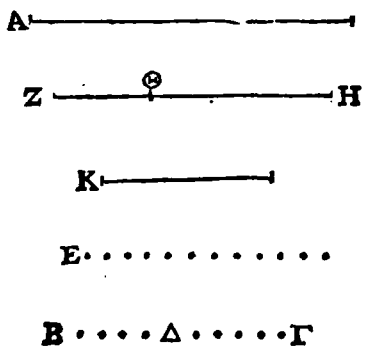
EXponatur rationalis Α, & exponantur tres numeri Ε, ΒΓ, ΓΔ, non habentes inter se rationem quam numerus quadratus habet ad quadratum numerum; ΒΓ vero ad ΒΔ rationem habeat quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & fiat ut Ε ad ΒΓ ita quadratum ex Α ad quadratum ex ΖΗ, ut autem ΒΓ ad ΓΔ ita quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex ΗΘ.

Σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ ΖΗ μήκει. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ·



Commensurabile igitur [per 6. 10.] est quadratum ex Α quadrato ex ΖΗ. atque est quadratum ex Α rationale: ergo & rationale est quadratum ex ΖΗ; ac propterea recta linea ΖΗ est rationalis. & quoniam Ε ad ΒΓ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum, neque quadratum ex Α ad quadratum ex ΖΗ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommensurabilis igitur [per 9. 10.] est Α ipsi ΖΗ longitudine. rursus, quoniam est ut ΒΓ ad ΓΔ ita quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex ΗΘ;

HΘ; erit quadratum ex ZH quadrato ex HΘ commenſurabile. rationale autem eſt quadratum ex ZH; ergo & quadratum ex HΘ eſt rationale, & ob id recta linea HΘ rationalis. quod cum BΓ ad ΓΔ rationem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex ZH ad quadratum ex HΘ rationem habebit quam quadratus numerus ad quadratum numerum: incommenſurabilis igitur [per 9.10.] eſt ZH ipſi HΘ longitudine. & ſunt ambæ rationales: ergo ZH, HΘ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: ac propterea [per 74.10.] apotome eſt ZΘ. dico & tertiam eſſe. quoniam enim eſt ut E quidem ad BΓ ita quadratum ex A ad quadratum ex ZH; ut autem BΓ ad ΓΔ ita quadratum ex ZH ad quadratum ex HΘ:



erit ex æquo [per 22.5.] ut E ad ΓΔ ita quadratum ex A ad quadratum ex HΘ. ſed [per conſtr.] E ad ΓΔ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum, neque igitur quadratum ex A ad quadratum ex HΘ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum. ergo [per 9. 10.] A ipſi HΘ longitudine eſt incommenſurabilis: neutra igitur ipſarum ZH, HΘ expoſitæ rationali A commenſurabilis eſt longitudine. quo autem quadratum ex ZH plus poteſt quam quadratum ex HΘ, ſit quod ex K fit quadratum. quoniam igitur [per conſtr.] ut BΓ ad ΓΔ ita quadratum ex ZH ad quadratum ex HΘ; erit per converſionem rationis [per 19.5.] ut ΓB ad BΔ ita quadratum ex ZH ad quadratum ex K. at ΓB ad BΔ rationem habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo & quadratum ex ZH ad quadratum ex K rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: commenſurabilis igitur [per 9. 10.] eſt ZH ipſi K longitudine. & plus poteſt ZH quam HΘ quadrato ex K: ergo ZH plus poteſt quam HΘ quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. & neutra ipſarum ZH, HΘ longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali A: quare [per 3. deff. tert. 10.] ZΘ eſt apotome tertia.

Inventa igitur eſt tertia apotome ZΘ. quod erat faciendum.

PROP. LXXXIX. PROBL.

Invenire quartam apotomen.

EXponatur rationalis A, & ipſi A longitudine commenſurabilis ſit BH: ergo BH eſt rationalis. exponantur præterea duo numeri ΔZ, ZE, ita ut totus ΔE ad utrumque ipſorum ΔZ EZ rationem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum: & fiat ut ΔE ad EZ, ita quadratum ex BH ad quadratum ex HΓ.

Commenſurabile igitur [per 6.10.] eſt quadra-

σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ZH τῷ ἀπὸ τῆς HΘ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ZH· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς HΘ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ HΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ BΓ πρὸς ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐκ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ZH τῇ HΘ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ZH, HΘ ἄρα ῥηταὶ εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ZΘ. λέγω δὴ ὅτι καὶ τρίτη. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς μὲν ὁ E πρὸς τὸ BΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH, ὡς δὲ ὁ BΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HΘ. δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ E πρὸς τὸ ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HΘ· ὁ δὲ E πρὸς τὸ ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἡ A τῇ HΘ μήκει· οὐδετέρα ἄρα τῶν ZH, HΘ σύμμετρος ἐστὶ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ A. ἃ δὲ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπό, τῆς ZH τὸ ἀπὸ τῆς HΘ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς K. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ BΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HΘ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΓB πρὸς τὸν BΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς K. ὁ δὲ ΓB πρὸς τὸν BΔ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ZH ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς K λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ZH τῇ K μήκει. καὶ δύναται ἡ ZH τῆς HΘ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς K· ἡ ἄρα ZH τῆς HΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα τῶν ZH, HΘ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ A μήκει· ἡ ZΘ ἄρα ἀποτομή ἐστι τρίτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ τρίτη ἀποτομὴ, ἡ ZΘ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

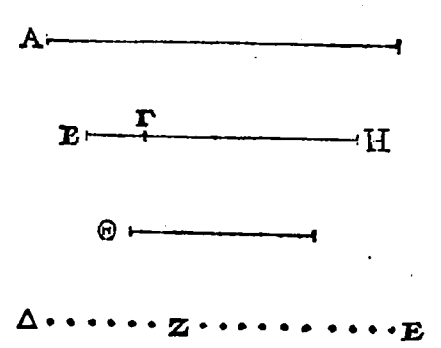
ΠΡΟΤΑΣΙΣ πθ′.

Εὑρεῖν τὴν τετάρτην ἀποτομήν.

ΕΚκείσθω ῥητὴ ἡ A, καὶ τῇ A μήκει σύμμετρος ἡ BH· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ BH. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔZ, ZE· ὥστε τὸν ΔE ὅλον πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔZ, EZ λόγον μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΔE πρὸς τὸν EZ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BH τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HΓ.

Σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BH τῷ ἀπὸ τῆς

τῆς ΗΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΓ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ῥηταὶ εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ. λέγω δὲ ὅτι καὶ τετάρτη. ᾧ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει· καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ἄρα ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἔστιν ἡ ὅλη ἡ ΒΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ Α· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι τετάρτη.



Εὕρηται ἄρα ἡ ΒΓ τετάρτη ἀποτομή. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

tum ex ΒΗ quadrato ex ΗΓ. eſt autem quadratum ex ΒΗ rationale: quare & rationale eſt quadratum ex ΗΓ; ideoque recta linea ΗΓ eſt rationalis. & quoniam ΔΕ ad ΕΖ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum, neque quadratum ex ΒΗ ad quadratum ex ΗΓ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommenſurabilis igitur eſt [per 9. 10.] ΒΗ ipſi ΗΓ longitudine. & ſunt ambæ rationales: ergo ΒΗ, ΗΓ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; & ob id [per 74.10.] ΒΓ eſt apotome. dico & quartam eſſe. quo enim plus poteſt ΒΗ quam ΗΓ ſit illud quadratum ex Θ. & quoniam eſt ut ΔΕ ad ΕΖ ita quadratum ex ΒΗ ad quadratum ex ΗΓ; erit per converſionem rationis ut ΕΔ ad ΔΖ ita quadratum ex ΒΗ ad quadratum ex Θ. ſed ΕΔ ad ΔΖ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: neque igitur quadratum ex ΒΗ ad quadratum ex Θ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommenſurabilis igitur [per 9. 10.] eſt ΒΗ ipſi Θ longitudine; & [ex hyp.] plus poteſt ΒΗ quam ΗΓ quadrato ex Θ: ergo ΒΗ plus poteſt quam ΗΓ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. atque eſt tota ΒΗ longitudine commenſurabilis expoſitæ rationali Α: ergo [per 4. deff. tert. 10.] ΒΓ eſt apotome quarta.

Inventa igitur eſt quarta apotome ΒΓ. quod erat faciendum.

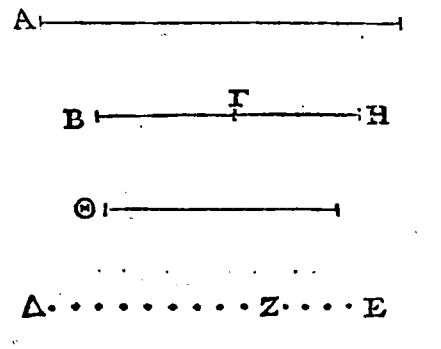
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξ'.

Εὑρεῖν τὴν πέμπτην ἀποτομήν.

Prop. XC. Probl.

Invenire quintam apotomen.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΗ. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ, ΖΕ, ὥστε τὸν ΔΕ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΖ, ΖΕ λόγον πάλιν μὴ ἔχειν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΖΕ πρὸς τὸν ΕΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ.

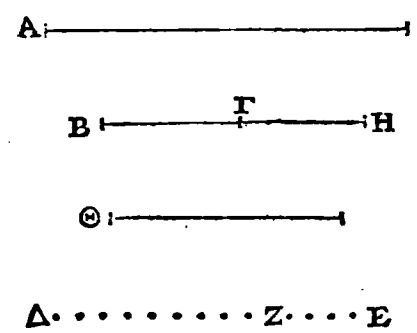


Σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ὁ δὲ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί·

Exponatur rationalis Α, & ipſi Α commenſurabilis ſit ΓΗ: ergo ΓΗ eſt rationalis. & exponantur duo numeri ΔΖ, ΖΕ, ita ut ΔΕ ad utrumque ipſorum ΔΖ, ΖΕ rationem rurſus non habeat quam numerus quadratus ad quadratum numerum: fiatque ut ΖΕ ad ΕΔ ita quadratum ex ΓΗ ad quadratum ex ΗΒ.

Ergo [per 6.10.] quadratum ex ΓΗ commenſurabile eſt quadrato ex ΗΒ. eſt autem quadratum ex ΓΗ rationale: ergo & rationale eſt quadratum ex ΗΒ; & idcirco recta linea ΗΒ eſt rationalis. & quoniam ut ΔΕ ad ΕΖ ita eſt quadratum ex ΒΗ ad quadratum ex ΗΓ, & ΔΕ ad ΕΖ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex ΒΗ ad quadratum ex ΗΓ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommenſurabilis igitur [per 9. 10.] eſt ΒΗ ipſi ΗΓ longitudine. & ſunt ambæ rationales:

ergo BH, HΓ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; & igitur [per 74.10.] BΓ eſt apotome. dico & quintam eſſe. quo enim majus eſt quadratum ex BH quam quadratum ex HΓ, ſit illud quadratum ex Θ. quoniam igitur quadratum ex BH ad quadratum ex HΓ eſt ut ΔE ad EZ, erit per converſionem rationis ut EΔ ad ΔZ ita quadratum ex BH ad id quod fit ex Θ quadratum. ſed EΔ ad ΔZ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: neque igitur quadratum ex BH ad quadratum ex Θ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum; ideoque [per 9. 10.] recta linea BH ipſi Θ longitudine eſt incommenſurabilis. & plus poteſt BH quam HΓ quadrato ex Θ: ergo BH plus poteſt quam HΓ quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. atque [per conſtr.] eſt congruens ΓH expoſitæ rationali A longitudine commenſurabilis: quare [per 5. deff. tert. 10.] BΓ eſt apotome quinta.



Inventa igitur eſt quinta apotome BΓ. quod erat faciendum.

αἱ BH, HΓ ἄρα ῥηταὶ εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ BΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι. λέγω δὴ ὅτι καὶ πέμπτη. ᾧ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς BH τοῦ ἀπὸ τῆς HΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς BH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HΓ οὕτως ὁ ΔE πρὸς τὸν EZ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ EΔ πρὸς τὸν ΔZ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BH πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ Θ. ὁ δὲ EΔ πρὸς τὸν ΔZ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς BH πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ Θ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ BH τῇ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ BH τοῦ HΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τοῦ Θ· ἡ BH ἄρα τοῦ HΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἔστιν ἡ συγκειμένη ῥητὴ τῇ Γ H σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ A μήκει· ἡ ἄρα BΓ ἀποτομή ἐστι πέμπτη.

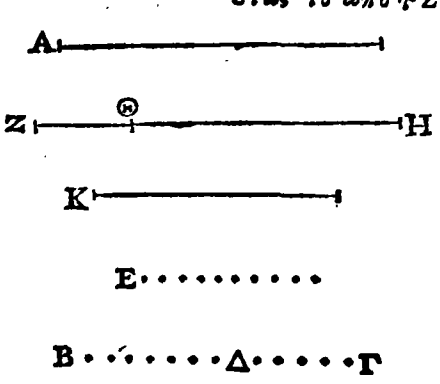
Εὕρηται ἄρα ἡ πέμπτη ἀποτομὴ ἡ BΓ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XCI. Probl.

Invenire ſextam apotomen.

EXponatur rationalis A, & tres numeri E, BΓ, ΓΔ rationem non habentes inter ſe quam quadratus numerus ad quadratum numerum: & & fiat ut E ad BΓ ita quadratum ex A ad quadratum ex ZH; ut autem BΓ ad ΓΔ ita quadratum ex ZH ad quadratum ex HΘ.

Quoniam igitur eſt ut E ad BΓ ita quadratum ex A ad quadratum ex ZH; erit quadratum ex A quadrato ex ZH commenſurabile. rationale autem eſt quadratum ex A: ergo & quadratum ex ZH rationale erit; & ob id recta linea ZH rationalis. & quoniam [per conſtr.] E ad BΓ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum; neque quadratum ex A ad quadratum ex ZH rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommenſurabilis igitur [per 9. 10.] eſt A ipſi ZH longitudine. rurſus, quoniam eſt ut BΓ ad ΓΔ ita quadratum ex ZH ad quadratum ex HΘ, erit quadratum ex ZH commenſurabile quadrato ex HΘ. eſt autem quadratum ex ZH rationale: rationale igitur [per 6.10.] eſt & quadratum ex HΘ, & ipſa HΘ rationalis. quod cum BΓ ad ΓΔ rationem non habeat quam numerus quadratus ad quadratum



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζα'.

Εὑρεῖν τὴν ἕκτην ἀποτομήν.

ΕΚκείσθω ῥητὴ ἡ A, καὶ τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ E, BΓ, ΓΔ λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ὁ E πρὸς τὸν BΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τοῦ A πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ ZH, ὡς δὲ ὁ BΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τοῦ ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ HΘ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ E πρὸς τὸν BΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τοῦ A πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ ZH· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς A τῷ ἀπὸ τοῦ ZH. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς A· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ZH· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ZH. καὶ ἐπεὶ ὁ E πρὸς τὸν BΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ A τῇ ZH μήκει. πάλιν, ἐπεὶ ἐστιν ὡς ὁ BΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HΘ· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZH τῷ ἀπὸ τῆς HΘ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ZH· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς HΘ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ HΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ BΓ πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν·

μόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. καί ἐστιν ἀμφότερα ῥητά· αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ἄρα ΖΘ ἀποτομή ἐστι. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἕκτη. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ὁ δὲ Ε πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ ΗΘ μήκει. καὶ ἑκατέρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ Α ῥητῇ μήκει. ᾧ δὲ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἀπὸ τοῦ ΗΘ, ἔστω τὸ ἀπὸ τοῦ Κ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τοῦ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ Κ. ὁ δὲ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τοῦ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ Κ λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει. Ἡ δυνάτω ἡ ΖΗ τῆς ΗΘ μεῖζον τῷ ἀπὸ τοῦ Κ· ἡ ΖΗ ἄρα τοῦ ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Ἡ δὲ ἑκατέρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ Α· ἡ ἄρα ΖΘ ἀποτομή ἐστιν ἕκτη.

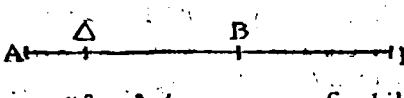
Εὕρηται ἄρα ἡ ἕκτη ἀποτομὴ ἡ ΖΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

numerum; neque quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex ΗΘ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo [per 9. 10.] ΖΗ ipsi ΗΘ longitudine est incommensurabilis. & sunt ambæ rationales: quare ΖΗ, ΗΘ rationales sunt potentia solum commensurabiles, & igitur [per 74. 10.] ΖΗ apotome est. dico & sextam esse. quoniam enim est ut Ε ad ΒΓ ita quadratum ex Α ad quadratum ex ΖΗ, ut autem ΒΓ ad ΓΔ ita quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex ΗΘ: erit ex æquo ut Ε ad ΓΔ ita quadratum ex Α ad quadratum ex ΗΘ. sed Ε ad ΓΔ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: neque igitur quadratum ex Α ad quadratum ex ΗΘ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo [per 9. 10.] Α ipsi ΗΘ longitudine est incommensurabilis. & neutra ipsarum ΖΗ, ΗΘ expositæ rationali Α commensurabilis est longitudine. quo plus potest quadratum ex ΖΗ quam quadratum ex ΗΘ sit illud quadratum ex Κ. & quoniam est ut ΒΓ ad ΓΔ ita quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex ΗΘ, erit per conversionem rationis [per 19. 5.] ut ΓΒ ad ΒΔ ita quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex Κ. at ΓΒ ad ΒΔ rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: neque igitur quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex Κ rationem habebit quam numerus quadratus ad quadratum numerum: ergo [per 9. 10.] incommensurabilis est ΖΗ ipsi Κ longitudine. & ΖΗ plus potest quam ΗΘ quadrato ex Κ: plus igitur potest ΖΗ quam ΗΘ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. & neutra ipsarum ΖΗ, ΗΘ est longitudine commensurabilis expositæ rationali Α: ergo [per 6. deff. tert. 10.] ΖΘ est apotome sexta.

Inventa est igitur sexta apotome ΖΘ. quod erat faciendum.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἔστι δὲ καὶ συντομώτερον δεῖξαι τὴν εὕρεσιν τῶν εἰρημένων ἐξ ἀποτομῶν. Ἔστω δὴ ἐξ ὑπαρχῆς τὴν πρώτην, ἐκκείσθω ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη ἡ ΑΓ, ἧς μεῖζον ὄνομα ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΒΓ ἴση κείσθω ἡ ΒΔ· αἱ ΑΒ, ΒΓ ἄρα, τουτέστιν αἱ ΑΒ, ΒΔ, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ, τουτέστι τῆς ΒΔ, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ σύμμετρου ἑαυτῇ. καὶ ἡ ΑΒ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ πρώτη. Ὁμοίως δὴ καὶ τὰς λοιπὰς ἀποτομὰς εὑρήσομεν, ἐκθεμένους πρὸς ἰσαρίθμους ἐκ δύο ὀνομάτων.



SCHOLIUM.

Sed & expeditius sex dictarum linearum inventionem ostendere licet. si enim oporteat invenire primam apotomen, exponatur [per 49. 10.] ex binis nominibus prima ΑΓ cujus major nomen sit ΑΒ; & ponatur ΒΔ ipsi ΒΓ æqualis. ergo [per 1. deff. secund. 10.] ΑΒ, ΒΓ, hoc est ΑΒ, ΒΔ, rationales sunt potentia solum commensurabiles; & ΑΒ plus potest quam ΒΓ, hoc est quam ΒΔ, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, & ΑΒ est commensurabilis longitudine expositæ rationali; & igitur [per 1. deff. tert. 10.] ΑΒ est apotome prima. similiter & reliquas apotomas inveniemus, eas quæ sunt ex binis nominibus ejusdem ordinis exponentes [per 50, 51, 52, 53 & 54. lib. 10.]

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϟβ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

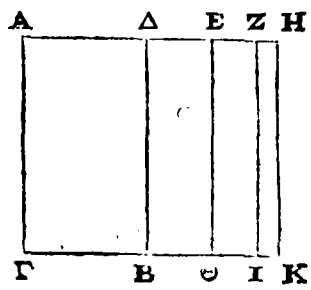
Περιεχέσθω γάρ χωρίον τὸ ΑΒ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

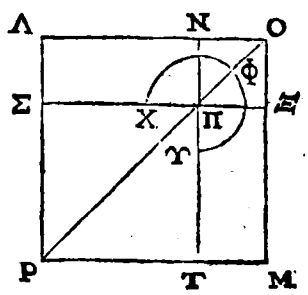
PROP. XCII. THEOR.

Si spatium contineatur sub rationali & apotoma prima, recta linea spatium potens apotome est.

COntineatur enim spatium ΑΒ sub rationali ΑΓ & apotoma prima ΑΔ: dico rectam lineam quæ potest spatium ΑΒ apotomen esse.

Quoniam enim Α Δ prima apotome eſt, ſit ipſi congruens Δ Η: ergo [per 1. deff. tert. 10.] Α Η, Η Δ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. & tota Α Η longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali Α Γ, & præterea Α Η plus poteſt quam Η Δ quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: ſi igitur quartæ parti quadrati, quod fit ex Δ Η, æquale parallelogrammum ad Α Η applicetur, deficiens figura quadrata, [per 18. 10.] in partes longitudine commenſurabiles ipſam dividet. ſecetur Δ Η bifariam in Ε, & quadrato ex Ε Η æquale parallelogrammum ad Α Η applicetur, deficiens figura quadrata, quod ſc. continetur ſub Α Ζ, Ζ Η: commenſurabilis igitur eſt Α Ζ ipſi Ζ Η longitudine. & per Ε, Ζ, Η puncta ipſi Α Γ parallelæ ducantur Ε Θ, Ζ Ι, Η Κ. & quoniam Α Ζ ipſi Ζ Η longitudine eſt commenſurabilis, erit [per 16. 10.] & Α Η utrique ipſarum Α Ζ, Ζ Η commenſurabilis longitudine. ſed Α Η commenſurabilis eſt ipſi Α Γ: utraque igitur Α Ζ, Ζ Η [per 12. 10.] ipſi Α Γ longitudine eſt commenſurabilis. atque eſt Α Γ rationalis: ergo & rationalis utraque Α Ζ, Ζ Η; ac propterea [per 20. 10.] utrumque parallelogrammorum Α Ι, Ζ Κ eſt rationale. & quoniam Δ Ε ipſi Ε Η longitudine eſt commenſurabilis, erit & Δ Η utrique Δ Ε, Ε Η commenſurabilis longitudine. eſtque rationalis Δ Η, & ipſi Α Γ longitudine incommenſurabilis: ergo & utraque Δ Ε, Ε Η rationalis eſt, & incommenſurabilis ipſi Α Γ longitudine; & ob id [per 22. 10.] utrumque parallelogrammorum Δ Θ, Ε Κ medium eſt. ponatur [per 14. 2.] ipſi quidem Α Ι parallelogrammo æquale quadratum Λ Μ: parallelogrammo autem Ζ Κ æquale quadratum auferatur Ν Ξ, communem cum ipſo angulum Λ Ο Μ habens, ſcilicet Ν Ξ: ergo [per 26. 6.] quadrata Λ Μ Ν Ξ circa eandem ſunt diametrum. ſit ipſorum diameter Ο Ρ, & figura deſcribatur. itaque quoniam rectangulum ſub Α Ζ, Ζ Η eſt æquale, quadrato ex Ε Η erit [per 17. 6.] ut Α Ζ ad Ε Η ita Ε Η ad Ζ Η. ſed [per 1. 6.] ut Α Ζ ad Ε Η ita eſt parallelogrammum Α Ι ad ipſum Ε Κ, & ut Ε Η ad Ζ Η ita parallelogrammum Ε Κ ad ipſum Ζ Κ: inter parallelogramma igitur Α Ι, Ζ Κ medium proportionale eſt Ε Κ. eſt autem & inter quadrata Λ Μ, Ν Ξ medium proportionale Μ Ν, ut ſuperius [ad lem. 55. 10.] oſtenſum eſt; parallelogrammumque Α Ι [per conſtr.] eſt æquale quadrato Λ Μ, & parallelogrammum Ζ Κ quadrato Ν Ξ æquale: ergo & parallelogrammum Μ Ν eſt æquale ipſi Ε Κ. ſed parallelogrammum quidem Ε Κ [per 37. 1.] eſt æquale parallelogrammo Δ Θ, parallelogrammum vero Μ Ν [per 43. 1.] ipſi Λ Ξ: parallelogrammum igitur Δ Κ eſt æquale gnomoni Τ Φ Χ & quadrato Ν Ξ. eſt autem [per conſtr.] & parallelogrammum Α Κ quadratis Λ Μ, Ν Ξ æquale: ergo & reliquum Α Β eſt æquale quadrato Σ Τ. at quadratum Σ Τ eſt id quod fit ex Λ Ν: quadratum igitur ex Λ Ν eſt æquale parallelogrammo Α Β; ideoque recta linea Λ Ν ipſum Α Β poteſt.





Ἐπεὶ οὖν ἀσύμμετρός ἐστι πρώτη ἡ Α Δ, ἔστω αὐτῇ σύμμετρος ἡ Δ Η· αἱ Α Η, Η Δ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ὅλη ἡ Α Η σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α Γ, καὶ ἡ Α Η τῆς Η Δ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς Δ Η ἴσον παρὰ τὴν Α Η παραλληλόγραμμον παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. τετμήσθω ἡ Δ Η δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Ε Η ἴσον παρὰ τὴν Α Η παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν Α Ζ, Ζ Η· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α Ζ τῇ Ζ Η. καὶ διὰ τῶν Ε, Ζ, Η σημείων τῇ Α Γ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ Ε Θ, Ζ Ι, Η Κ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ Α Ζ τῇ Ζ Η μήκει· καὶ ἡ Α Η ἄρα ἑκατέρα τῶν Α Ζ, Ζ Η σύμμετρός ἐστι μήκει. ἀλλὰ ἡ Α Η σύμμετρός ἐστι τῇ Α Γ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν Α Ζ, Ζ Η σύμμετρός ἐστι τῇ Α Γ μήκει. καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ Α Γ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν Α Ζ, Ζ Η· ὥστε καὶ ἑκάτερον τῶν Α Ι, Ζ Κ ῥητόν ἐστι. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ Δ Ε τῇ Ε Η μήκει, καὶ ἡ Δ Η ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν Δ Ε, Ε Η σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ Δ Η, καὶ ἀσύμμετρος τῇ Α Γ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν Δ Ε, Ε Η, καὶ ἀσύμμετρος τῇ Α Γ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν Δ Θ, Ε Κ μέσον ἐστί. πεπλάσθω δὴ τῷ μὲν Α Ι ἴσον τετράγωνον τὸ Λ Μ, τῷ δὲ Ζ Κ ἴσον τετράγωνον ἀφῃρήσθω, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, τὴν ὑπὸ Λ Ο Μ, τὸ Ν Ξ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ Λ Μ, Ν Ξ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ Ο Ρ, καὶ κατεγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α Ζ, Ζ Η τῷ ἀπὸ τῆς Ε Η, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α Ζ πρὸς τὴν Ε Η οὕτως ἡ Ε Η πρὸς τὴν Ζ Η. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ Α Ζ πρὸς τὴν Ε Η οὕτως τὸ Α Ι πρὸς τὸ Ε Κ, ὡς δὲ ἡ Ε Η πρὸς τὴν Ζ Η οὕτως τὸ Ε Κ πρὸς τὸ Ζ Κ· καὶ τὸ ἄρα Α Ι, Ζ Κ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ Ε Κ. ἔστι δὲ καὶ τῶν Λ Μ, Ν Ξ μέσον ἀνάλογον τὸ Μ Ν, ὡς ἐν τοῖς ἔμπροσθεν ἐδείχθη, καὶ ἔστι τὸ Α Ι τῷ Λ Μ τετραγώνῳ ἴσον, τὸ δὲ Ζ Κ τῷ Ν Ξ· καὶ τὸ Μ Ν ἄρα τῷ Ε Κ ἴσον ἐστί. ἀλλὰ τὸ μὲν Ε Κ τῷ Δ Θ ἴσον ἐστί, τὸ δὲ Μ Ν τῷ Λ Ξ· τὸ ἄρα Δ Κ ἴσον ἐστὶ τῷ Γ Φ Χ γνώμονι καὶ τῷ Ν Ξ. ἔστι δὲ καὶ τὸ Α Κ ἴσον τοῖς Λ Μ, Ν Ξ τετραγώνοις· ὅλον ἄρα τὸ Α Β ἴσον ἐστὶ τῷ Σ Τ, τὸ δὲ Σ Τ τὸ ἀπὸ τῆς Λ Ν ἐστὶ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς Λ Ν τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ Α Β· ἡ Λ Ν ἄρα δύναται τὸ Α Β.

λέγω δὴ ὅτι ἡ ΑΝ ἀποτομή ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΑΙ, ΖΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς ΛΜ, ΝΞ· καὶ ἑκάτερον ἄρα τῶν ΛΜ, ΝΞ ῥητόν ἐστι, τυτέστι τὸ ὑπὸ ἑκατέρων τῶν ΛΟ, ΟΝ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΛΟ, ΟΝ ῥητή ἐστι. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ΔΘ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΛΞ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛΞ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΛΞ μέσον ἐστί, τὸ δὲ ΝΞ ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛΞ τῷ ΝΞ· ὡς δὲ τὸ ΛΞ πρὸς τὸ ΝΞ οὕτως ἐστὶν ἡ ΛΟ πρὸς τὴν ΟΝ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΟ τῇ ΟΝ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΛΟ ΟΝ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΝ. καὶ δυνατὸν τὸ ΑΒ χωρίον· ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

Ἐὰν ἄρα χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

dico ΑΝ apotomen esse. quoniam enim rationale est utrumque parallelogrammorum ΑΙ, ΖΚ, & sunt æqualia quadratis ΛΜ, ΝΞ; erit & utrumque ΛΜ, ΝΞ rationale, hoc est utrumque ipsorum quæ fiunt ex ΛΟ, ΟΝ: & utraque igitur ΛΟ, ΟΝ rationalis est. rursus, quoniam parallelogrammum ΔΘ est medium, atque est æquale ipsi ΛΞ; erit & ΛΞ medium. cum igitur ΛΞ quidem medium sit, ΝΞ vero rationale, incommensurabile est ΛΞ ipsi ΝΞ; utque ΛΞ ad ΝΞ ita est [per 1. 6.] recta linea ΛΟ ad ΟΝ: ergo [per 10.10.] ΛΟ ipsi ΟΝ longitudine est incommensurabilis. & sunt ambæ rationales; quare ΛΟ, ΟΝ rationales sunt potentia solum commensurabiles: idcirco [per 74. 10.] ΑΝ est apotome. & potest spatium ΑΒ: quæ igitur potest spatium ΑΒ est apotome.

Ergo si spatium contineatur sub rationali & apotoma prima, recta linea spatium potens apotome est. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛγ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη.

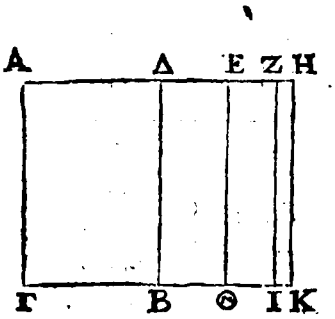
Prop. XCIII. Theor.

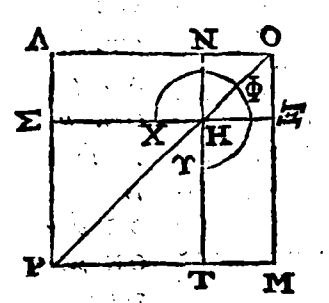
Si spatium contineatur sub rationali & apotoma secunda, recta linea spatium potens mediæ est apotome prima.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς δευτέρας τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Ἐστω γὰρ τῇ ΑΔ συμμέτρως ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ συμμέτρως ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ΑΗ ὅλη τῆς συμμέτρως τῇ ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΔ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. καὶ διὰ τῶν Ε, Ζ, Η σημείων τῇ ΑΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΘΚ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστι ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει· καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΑΖ, ΖΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ ΑΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΖ, ΖΗ ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΙ,

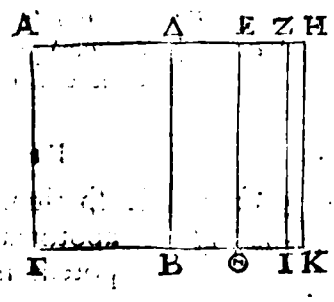
Spatium enim ΑΒ contineatur sub rationali ΑΓ & apotoma secunda ΑΔ: dico rectam lineam quæ spatium ΑΒ potest esse mediæ apotomen primam.

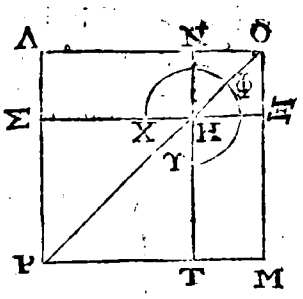




Sit enim ipsi ΑΔ congruens ΔΗ; ergo [per 2. deff. tert. 10.] ΑΗ, ΗΔ rationales sunt potentia solum commensurabiles, & congruens ΔΗ commensurabilis est expositæ rationali ΑΓ, totaque ΑΗ plus potest quam ΗΔ quadrato rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: quoniam igitur ΑΗ plus potest quam ΗΔ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, si quartæ parti quadrati ipsius ΗΔ æquale parallelogrammum ad ΑΗ applicetur, deficiens figura quadrata, [per 18. 10.] in partes commensurabiles ipsam dividet. Itaque secetur ΔΗ bifariam in Ε; & quadrato ipsius ΕΗ æquale parallelogrammum ad ΑΗ applicetur, deficiens figura quadrata, quod sc. continetur sub ΑΖ, ΖΗ: ergo commensurabilis est ΑΖ ipsi ΖΗ longitudine. & per puncta Ε, Ζ, Η ipsi ΑΓ parallelæ ducantur ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. quoniam igitur ΑΖ ipsi ΖΗ longitudine est commensurabilis, erit [per 16. 10.] ΑΗ utrique ipsarum ΑΖ, ΖΗ commensurabilis longitudine. rationalis autem est ΑΗ, & ipsi ΑΓ longitudine incommensurabilis: ergo & utraque ΑΖ, ΖΗ est rationalis, ipsique ΑΓ incommensurabilis longitudine; & ob id [per 22.10.] utrumque parallelogrammorum ΑΙ,

ZK medium eſt. rurſus, quoniam AB commenſurabilis eſt ipſi EH, erit & AH utrique AE, EH commenſurabilis. ſed AH commenſurabilis eſt ipſi AΓ longitudine: ergo & utraque AE, EH rationalis eſt, & ipſi AΓ longitudine commenſurabilis; ac propterea utrumque parallelogrammorum AΘ, EK eſt rationale. conſtituatur igitur [per 14. 2.] parallelogrammo quidem AI æquale quadratum ΛM; parallelogrammo autem ZK æquale quadratum auferatur NΞ, communem cum ipſo ΛM angulum ΛOM habens: ergo [per 26. 6.] circa eandem diametrum ſunt quadrata ΛM, NΞ. ſit ipſorum diameter OP, & figura deſcribatur. cum igitur parallelogramma AI, ZK media ſint, & ſibi ipſis commenſurabilia, & æqualia quadratis ex ΛO, ON, erunt & quadrata ex ΛO, ON media: ergo rectæ lineæ ΛO, ON mediæ ſunt, potentia commenſurabiles. & quoniam rectangulum ſub AZ, ZH eſt æquale quadrato ex EH, erit [per 17. 6.] ut AZ ad EH ita EH ad HZ; ſed [per 1. 6.] ut AZ ad EH ita eſt parallelogrammum AI ad ipſum EK. ut autem EH ad HZ ita parallelogrammum EK ad ZK: inter parallelogramma igitur AI, ZK medium proportionale eſt EK. eſt autem [per lem. 25. 10.] & inter quadrata ΛM, NΞ medium proportionale MN, & parallelogrammum AI quidem eſt [per conſtr.] æquale quadrato ΛM; parallelogrammum vero ZK æquale quadrato NΞ: ergo MN ipſi EK eſt æquale. ſed [per 34. 1.] ΔΘ eſt æquale ipſi EK, & [per 43. 1.] ΛΞ ipſi MN: totum igitur ΔK gnomoni ΤΦΧ & quadrato NΞ æquale erit. itaque quoniam totum AK æquale eſt quadratis ΛM, NΞ, quorum ΔK eſt æquale gnomoni ΤΦΧ & quadrato NΞ; erit reliquum AB æquale ΣΤ, hoc eſt ei quod fit ex ΛN: quadratum igitur ex ΛN eſt æquale ſpatio AB; ideoque recta linea ΛN ſpatium AB poteſt. dico ΛN mediæ apotomen eſſe primam. quoniam enim rationale eſt EK, & æquale ipſi MN, hoc eſt ipſi ΛΞ; erit & ΛΞ rationale, illud ſc. quod ſub ΛO, ON continetur. medium autem oſtenſum eſt NΞ: quare ΛΞ eſt incommenſurabile ipſi NΞ: & [per 1. 6.] ut ΛΞ ad NΞ ita ΛO ad ON: ergo ΛO, ON longitudine ſunt incommenſurabiles: ac propterea ΛO, ON mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles quæ rationale continent: quare [per 75. 10.] ΛN eſt mediæ apotome prima, & poteſt ſpatium AB: recta igitur linea ſpatium AB potens eſt mediæ apotomæ primæ. quod erat demonſtrandum.





ZK μέσον ἐστί. πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔE τῇ EH, καὶ ἡ ΔH ἄρα ἑκατέρα τῶν ΔE, EH σύμμετρός ἐστιν. ἀλλ' ἡ ΔH συμμετρός ἐστι τῇ AΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν ΔE, EH; καὶ σύμμετρος τῇ AΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ, EK ῥητόν ἐστι. σαφεστέρω δὴ τῷ μὲν AE ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ AM, τῷ δὲ ZK ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ NΞ, ὥστε τὸν αὐτὸν γωνίαν ὑπὸ τῷ AM, τὴν ὑπὸ ΛOM· ὥστε τὸν αὐτὸν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ AM, NΞ παραλληλόγραμμα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ OP, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν τὰ AI, ZK μέσα ἐστί, καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΛO, ON· ᾗ τὰ ἀπὸ τῶν ΛO, ON ἄρα μέσα ἐστί· καὶ αἱ ΛO, ON ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει σύμμετροι. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZH ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EH, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AZ πρὸς τὴν EH οὕτως ἡ EH πρὸς τὴν ZH· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AZ πρὸς τὴν EH οὕτως τὸ AI πρὸς τὸ EK. ὡς δὲ ἡ EH πρὸς τὴν HZ, οὕτως ἐστὶ τὸ EK πρὸς τὸ ZK· τὸ ἄρα AI, ZK μέσον ἀνάλογον ἐστὶ τὸ EK. ἔστι δὲ καὶ τῶν ΛM, NΞ παραλληλογράμμων μέσον ἀνάλογον τὸ MN, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν AI τῷ ΛM, τὸ δὲ ZK τῷ NΞ· καὶ τὸ MN ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ EK. ἀλλὰ τῷ μὲν EK ἴσον ἐστὶ τὸ ΔΘ, τῷ δὲ MN ἴσον τὸ ΛΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΔK ἴσον ἐστὶ τῷ ΤΦΧ γνώμονι, καὶ τῷ NΞ. ἐπεὶ οὖν ὅλον τὸ AK ἴσον ἐστὶ τοῖς ΛM, NΞ, ὧν τὸ ΔK ἴσον ἐστὶ τῷ ΤΦΧ γνώμονι, καὶ τῷ NΞ· λοιπὸν ἄρα τὸ AB ἴσον ἐστὶ τῷ ΣT, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΛN· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΛN ἴσον ἐστὶ τῷ AB χωρίῳ· ἡ ΛN ἄρα δυνατὴ τὸ AB χωρίον δύναται. λέγω δὴ ὅτι ἡ ΛN μέσης ἀποτομὴ ἐστὶ πρώτη. ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ EK, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ MN, τουτέστι τῷ ΛΞ· ῥητὸν ἄρα τὸ ΛΞ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΛO, ON. μέσον δὲ ὑπέκειτο τὸ NΞ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΞ τῷ NΞ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΛΞ πρὸς τὸ NΞ οὕτως ἐστὶν ἡ ΛO πρὸς τὴν ON· αἱ ΛO, ON ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι μήκει· αἱ ἄρα ΛO, ON μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι· ἡ ΛN ἄρα μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη, ᾗ δυνατὴ τὸ AB χωρίον· ἡ ἄρα τὸ AB χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛδ'.

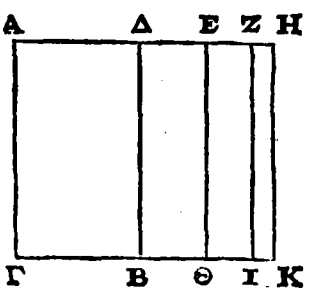
Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

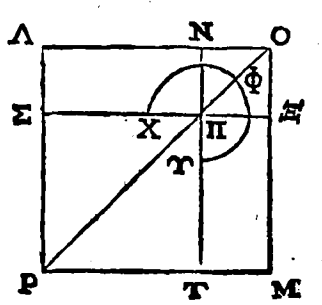
Prop. XCIV. Theor.

Si ſpatium continetur ſub rationali & apotome tertia, recta linea ſpatium potens mediæ eſt apotome ſecunda.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς τρίτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Ἐκκείσθω γὰρ τῇ ΑΔ συμμέτρος ἡ ΔΗ· αἱ ΑΗ, ΗΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἐλάσσων τῶν ΑΗ, ΗΔ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς συναμφοτέρου τῆς ΔΗ μεῖζον δυνάται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΔΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ. καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η σημείων τῇ ΑΓ παράλληλοι αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ· σύμμετροι ἄρα εἰσὶν αἱ ΑΖ, ΖΗ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΖ, ΖΗ σύμμετροί εἰσι μήκει, καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΑΖ, ΖΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ ΑΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΖ, ΖΗ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· καὶ ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΙ, ΖΚ μέσον ἐστί. πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ μήκει, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΔΕ, ΕΗ σύμμετρός ἐστι. ῥητὴ δὲ ἡ ΔΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ μέσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΗΔ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ μήκει ἡ ΑΗ τῇ ΗΔ. ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΗ τῇ ΑΖ σύμμετρός ἐστι μήκει, ἡ δὲ ΔΗ τῇ ΗΕ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΕΗ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΕΚ. συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΝΞ, ὃ ἴσην τὴν αὐτὴν γωνίαν ἔχει τῷ ΛΜ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ αὐτὸ ἄρα μέτρον ἐστὶ τὰ ΛΜ, ΝΞ. ἔστω αὐτῶν μέτρον ἡ ΟΡ, καὶ κατεγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς



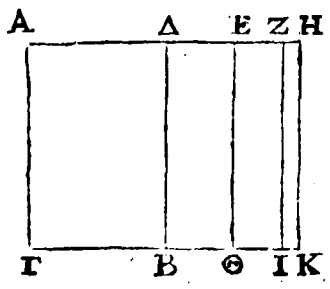


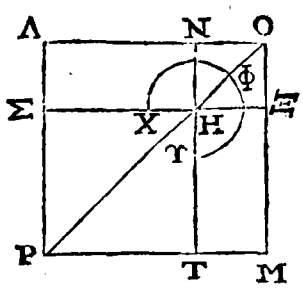
Spatium enim ΑΒ contineatur ſub rationali ΑΓ & apotoma tertia ΑΔ: dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium ΑΒ, mediæ eſſe apotomen ſecundam.

Sit enim ipſi ΑΔ congruens ΔΗ: ergo [per 3. deff. tert. 10.] ΑΗ, ΗΔ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, & neutra ipſarum ΑΗ, ΗΔ longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali ΑΓ, tota autem ΑΗ plus poteſt quam congruens ΔΗ quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. quoniam ideo recta ΑΗ plus poteſt quam ΔΗ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis: ſi quartæ parti quadrati ipſius ΔΗ æquale parallelogrammum ad ΑΗ applicetur deficiens figura quadrata, [per 18. 10.] in partes commenſurabiles ipſam dividet. Itaque ſecetur ΔΗ bifariam in Ε, & quadrato ipſius ΕΗ æquale ad ΑΗ applicetur deficiens figura quadrata, ſitque quod continetur ſub ΑΖ, ΖΗ; & per puncta Ε, Ζ, Η ipſi ΑΓ parallelæ ducantur ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ: ergo ΑΖ, ΖΗ commenſurabiles ſunt; atque ob id parallelogrammum ΑΙ parallelogrammo ΖΚ eſt commenſurabile. & quoniam ΑΖ, ΖΗ commenſurabiles ſunt longitudine, erit [per 16. 10.] & ΑΗ utrique ipſarum ΑΖ, ΖΗ longitudine commenſurabilis. eſt autem rationalis ΑΗ, & ipſi ΑΓ incommenſurabilis longitudine: & utraque igitur ΑΖ, ΖΗ rationalis eſt & ipſi ΑΓ longitudine incommenſurabilis; ac propterea [per 22. 10.] utrumque parallelogrammorum ΑΙ, ΖΚ eſt medium. rurſus quoniam ΔΕ commenſurabilis eſt ipſi ΕΗ longitudine, erit & ΔΗ utrique ΔΕ, ΕΗ commenſurabilis. ſed ΔΗ rationalis eſt, & ipſi ΑΓ incommenſurabilis longitudine: rationalis igitur eſt & utraque ΔΕ, ΕΗ, & ipſi ΑΓ longitudine incommenſurabilis: ergo [per 22. 10.] utrumque parallelogrammorum ΔΘ, ΕΚ medium eſt. quod cum ΑΗ, ΗΔ potentia ſolum commenſurabiles ſint, ΑΗ ipſi ΗΔ longitudine erit incommenſurabilis. ſed ΑΗ commenſurabilis eſt ipſi ΑΖ longitudine, & ΔΗ ipſi ΗΕ: eſt igitur [per 13. 10.] ΑΖ ipſi ΕΗ longitudine incommenſurabilis. ut autem ΑΖ ad ΕΗ ita [per 1. 6.] parallelogrammum ΑΙ ad ΕΚ parallelogrammum: ergo incommenſurabilis eſt ΑΙ ipſi ΕΚ. conſtituatur [per 14. 2.] ipſi quidem ΑΙ æquale quadratum ΛΜ; ipſi vero ΖΚ æquale auferatur ΝΞ, angulum habens eundem quem ΛΜ: ergo [per 26. 6.] quadrata ΛΜ, ΝΞ circa eandem ſunt diametrum. ſit ipſorum diameter ΟΡ, & figura deſcribatur. quoniam igitur rectangulum ſub ΑΖ, ΖΗ eſt æquale quadrato ex ΕΗ, erit [per 17. 6.] ut ΑΖ

ad

ad EH ita EH ad ZH. ut autem AZ ad EH ita [per 1. 6.] parallelogrammum AI ad EK parallelogrammum; & ut EH ad HZ ita EK ad ZK: ergo & ut AI ad EK ita EK ad ZK. inter parallelogramma igitur AI, ZK medium proportionale eſt EK. eſt autem & inter quadrata ΛM, NΞ medium proportionale MN; & [per conſtr.] parallelogrammum AI quidem æquale eſt quadrato ΛM, ZK vero ipſi NΞ: ergo & EK eſt æquale MN. ſed [per 43. 1.] MN æquale eſt ΛΞ, & [per 37. 1.] EK ipſi ΔΘ: totum igitur ΔK gnomoni ΥΦX & quadrato NΞ eſt æquale. eſt autem & parallelogrammum AK æquale quadratis ΛM, NΞ: ergo reliquum AB eſt æquale ipſi ΣT, hoc eſt quadrato ex ΛN: & ob id recta linea ΛN ipſum AB ſpatium poteſt. dico ΛN mediæ apotomen eſſe ſecundam. quoniam enim parallelogramma AI, ZK oſtenſa ſunt media, & ſunt æqualia quadratis ex ΛO, ON, erit & utrumque quadratorum ex ΛO, ON medium; igitur utraque recta linea ΛO, ON media eſt. & quoniam commenſurabile eſt AI ipſi ZK, erit & quadratum ex ΛO quadrato ex ON commenſurabile. rurſus, quoniam oſtenſum eſt AI incommenſurabile ipſi EK, & ΛM ipſi MN incommenſurabile erit, hoc eſt quadratum ex ΛO rectangulo ſub ΛO, ON: quare & recta linea ΛO longitudine incommenſurabilis eſt ipſi ON; ſunt igitur ΛO, ON mediæ potentia ſolum commenſurabiles. dico eas etiam medium continere. quoniam enim EK demonſtratum eſt medium, atque eſt æquale rectangulo ſub ΛO, ON; erit & rectangulum ſub ΛO, ON medium. ergo ΛO, ON mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quæ medium continent; ac propterea [per 76. 10.] ΛN eſt mediæ apotome ſecunda; & poteſt ſpatium AB: recta igitur linea ſpatium AB potens eſt mediæ apotome ſecundæ. quod erat demonſtrandum.





Prop. XCV. Theor.

Si ſpatium contineatur ſub rationali & apotoma quarta, recta linea ſpatium potens minor eſt.

SPatium enim AB contineatur ſub rationali AΓ & apotoma quarta AΔ: dico rectam lineam, quæ ſpatium AB poteſt, minorem eſſe.

Sit enim ipſi AΔ congruens ΔH: ergo [per 4. deff. tert. 10.] AH, HΔ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, & AH longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali AΓ, totaque AH plus poteſt quam HΔ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. quoniam igitur AH plus poteſt quam HΔ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; ſi quartæ parti quadrati ex ΔH æquale parallelogrammum ad AH applicetur, deficiens figura quadrata, in partes commenſurabiles longitudine ipſis, in quas AH dividit rectam lineam ex qua quadratum eſt totum; recta linea, quæ ſpatium AB poteſt, minor eſt. ſpatium enim AB contineatur ſub rationali AΓ & apotoma quarta AΔ: dico rectam lineam, quæ ſpatium AB poteſt, minorem eſſe.

τῷ EH ἔστως ἡ EH πρὸς τὴν ZH. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AZ πρὸς τὴν EH ἕστως ἐστὶ τὸ AI πρὸς τὸ EK· ὡς δὲ ἡ EH πρὸς τὴν HZ ἕστως τὸ EK πρὸς τὸ ZK· καὶ ὡς ἄρα τὸ AI πρὸς τὸ EK ἕστως τὸ EK πρὸς τὸ ZK· τῶν ἄρα AI, ZK μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ EK. ἔστι δὲ καὶ τῶν ΛM, NΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ MN, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν AI τῷ ΛM, τὸ δὲ ZK τῷ NΞ, καὶ τὸ EK ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ MN. ἀλλὰ τὸ μὲν MN ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΞ, τὸ δὲ EK ἴσον τῷ ΔΘ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΔK ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦX γνώμονι καὶ τῷ NΞ· ἔστι δὲ καὶ τὸ AK ἴσον τοῖς ΛM, NΞ· λοιπὸν ἄρα τὸ AB ἴσον ἐστὶ τῷ ΣT, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΛN τετραγώνῳ· ἡ ΛN ἄρα δύναται τὸ AB χωρίον. λέγω ὅτι ἡ ΛN μέση ἀποτομή ἐστι δευτέρα. ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ AI, ZK, ᾧ ἔστιν ἴσον τὸ ἀπὸ τῶν ΛO, ON· μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ἀπὸ τῶν ΛO, ON· μέση ἄρα ἑκατέρα τῶν ΛO, ON. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ AI τῷ ZK, σύμμετρον ἄρα ᾧ τὸ ἀπὸ τὴν ΛO τῷ ἀπὸ τῆς ON. πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ AI τῷ EK, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛM τῷ MN, τουτέστι τὸ ἀπὸ τὴν ΛO τῷ ἀπὸ τῶν ΛO, ON· ὥστε ᾧ ἡ ΛO ἀσύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ON· αἱ ΛO, ON ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω δὴ ὅτι καὶ μέσον περιέχουσιν. ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ EK, ᾧ ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τὴν ΛO, ON· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τὴν ΛO, ON· ὥστε καὶ αἱ ΛO, ON μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι. ἡ ΛN ἄρα μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα καὶ δύναται τὸ AB· ἡ ἄρα τὸ AB χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

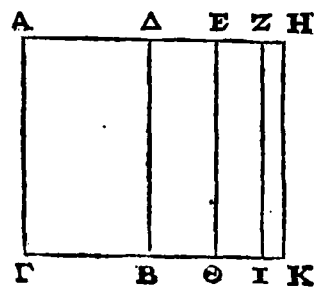
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛε'.

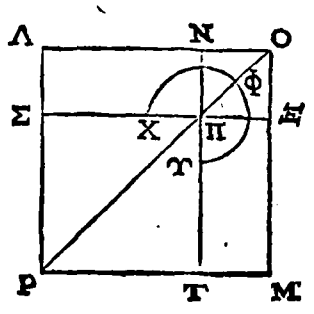
Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστί.

ΧΩρίον γὰρ τὸ AB περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς AΓ καὶ ἀποτομῆς τετάρτης τὴν AΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ AB χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν.

Ἐστω γὰρ τῇ AΔ συναρμόζουσα ἡ ΔH· αἱ ἄρα AH, HΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ AH σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ AΓ μήκει, ἡ δὲ ὅλη ἡ AH τῆς συναρμοζούσης τῆς HΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ AH τὴν HΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τὴν ΔH ἴσον παρὰ τὴν AH παραβληθῇ,

βληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Ε, Ζ, Η παράλληλοι ταῖς ΑΓ, ΒΔ αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. ἐπεὶ οὖν ῥητή ἐστιν ἡ ΑΗ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ῥητὸν ἄρα ἐστὶν ὅλον τὸ ΑΚ. πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΗ τῇ ΑΓ μήκει, καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΚ. πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ. συνεστάτω γὰρ τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΝΞ, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΛΟΜ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ, ΝΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΗΖ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ, ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· τῶν ἄρα ΑΙ, ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. ἔστι δὲ καὶ τῶν ΛΜ, ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΛΜ, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΕΚ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΕΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΘ, τὸ δὲ ΜΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΤΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ. ἐπεὶ οὖν ὅλον τὸ ΑΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ΛΜ, ΝΞ τετραγώνοις, ὧν τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΤΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ τετραγώνῳ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΛΝ τετραγώνῳ· ἡ ΛΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ χωρίον. λέγω δὴ ὅτι ἡ ΛΝ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ ΑΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ τετραγώνοις· τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ ῥητόν ἐστι. πάλιν, ἐπεὶ τὸ ΔΚ μέσον ἐστί, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ΔΚ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ μέσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ· αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσι δὲ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον· ἡ ΛΝ ἄρα ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάσσων, καὶ δυνάται τὸ ΑΒ χωρίον· ἡ ἄρα τὸ





cetur deficiens figura quadrata, [per 18. 10.] in partes incommenſurabiles ipſam dividet. itaque ſecetur ΔH bifariam in E, & quadrato ex EH æquale ad ipſam AH applicetur deficiens figura quadrata, quod ſc. continetur ſub AZ, ZH: ergo AZ ipſi ZH longitudine eſt incommenſurabilis. ducantur per puncta E, Z, H ipſis AΓ, BΔ parallelæ EΘ, ZI, HK. quoniam igitur AH rationalis eſt, & ipſi AΓ longitudine commenſurabilis; erit [per 20. 10.] totum parallelogrammum AK rationale. rurſus, quoniam incommenſurabilis eſt ΔH ipſi AΓ longitudine, & ſunt ambæ rationales; erit [per 22. 10.] parallelogrammum ΔK medium. quod cum AZ ipſi ZH longitudine ſit incommenſurabilis, erit [per 1. 6.] & parallelogrammum AI incommenſurabile ZK. conſtituatur parallelogrammo quidem AI æquale quadratum ΛM; parallelogrammo autem ZK æquale quadratum NΞ auferatur, angulum habens eundem ΛOM quem ΛM: quadrata igitur ΛM, NΞ [per 26. 6.] circa eandem ſunt diametrum. ſit ipſorum diameter OP, & figura deſcribatur. itaque quoniam rectangulum ſub AZ, ZH eſt æquale quadrato ex EH, ut AZ ad EH [per 17. 6.] ita erit EH ad HZ. ſed [per 1. 6.] ut AZ quidem ad EH ita eſt parallelogrammum AI ad ipſum EK: ut autem EH ad ZH ita EK ad ZK: inter parallelogramma igitur AI, ZK medium proportionale eſt EK. eſt autem & inter quadrata ΛM, NΞ medium proportionale MN, atque [per conſtr.] eſt parallelogrammum AI æquale quadrato ΛM, & parallelogrammum ZK æquale eſt ipſi NΞ: eſt igitur EK æquale ipſi MN. ſed [per 37. 1.] EK quidem eſt æquale parallelogrammo ΔΘ; MN vero [per 43. 1.] ipſi ΛΞ: totum igitur parallelogrammum gnomoni TΦX & quadrato NΞ eſt æquale. & quoniam totum AK æquale eſt quadratis ΛM, NΞ, quorum ΔK eſt æquale gnomoni TΦX & NΞ quadrato; erit reliquum AB æquale quadrato ΣT, hoc eſt quadrato ex ΛN: ergo ΛN ſpatium AB poteſt. dico ΛN irrationalem eſſe quæ minor appellatur. quoniam enim parallelogrammum AK rationale eſt, & æquale quadratis ipſarum ΛO, ON; erit & compoſitum ex quadratis ipſarum ΛO, ON rationale. rurſus, quoniam parallelogrammum ΔK medium eſt, atque eſt æquale ei quod bis continetur ſub ΛO, ON, erit & quod bis ſub ΛO, ON continetur medium. & quoniam oſtenſum eſt AI incommenſurabile ipſi ZK: erit & quadratum ex ΛO incommenſurabile quadrato ex ON; ac propterea ΛO, ON potentia ſunt incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum ex ipſarum quadratis rationale, quod autem bis ſub ipſis continetur medium: quare [per 77. 10.] ΛN irrationalis eſt, quæ minor appellatur. & poteſt ſpatium AB: recta igitur linea

ſpatium AB potens minor eſt. quod erat demonſtrandum.

AB χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XCVI. THEOR.

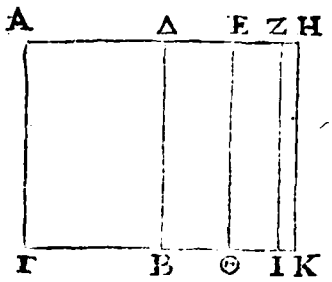
Si ſpatium contineatur ſub rationali & apotoma quinta, recta linea ſpatium potens eſt quæ cum rationali medium totum efficit.

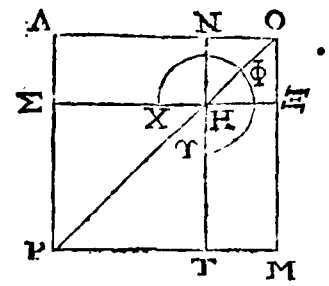
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστι.

SPatium enim AB contineatur ſub rationali AΓ & apotoma quinta AΔ: dico rectam lineam quæ ſpatium AB poteſt eſſe eam quæ cum rationali medium totum efficit.

Sit enim ipſi AΔ congruens ΔH: ergo [per 5. deff. tert. 10.] AH, HΔ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; & congruens ΔH longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali AΓ; totaque AH plus poteſt quam ΔH quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine: ſi igitur quartæ parti quadrati ex ΔH æquale parallelogrammum ad AH applicetur deficiens figura quadrata, [per 19. 10.] in partes incommenſurabiles ipſam dividet. Itaque ſecetur ΔH bifariam in puncto E, & quadrato ex EH æquale ad ipſam AH applicetur deficiens figura quadrata, quod ſc. continetur ſub AZ, ZH: ergo AZ incommenſurabilis eſt ipſi ZH longitudine. ducantur per puncta E, Z, H ipſi AΓ parallelæ EΘ, ZI, HK. & quoniam AH incommenſurabilis eſt ipſi AΓ longitudine, & ſunt ambæ rationales; erit [per 22. 10.] parallelogrammum AK medium. rurſus, quoniam rationalis eſt ΔH, & ipſi AΓ longitudine commenſurabilis; [per 20. 10.] parallelogrammum ΔK rationale erit. conſtituatur igitur parallelogrammo quidem AI æquale quadratum ΛM; ipſi vero ZK æquale quadratum auferatur NΞ, angulum habens eundem quem ΛM, videlicet ΛOM: ergo [per 26. 6.] quadrata ΛM, NΞ circa eandem ſunt diametrum. ſit diameter ipſorum OP, & figura deſcribatur. ſimiliter oſtendemus rectam lineam ΛN ſpatium AB poſſe. dico ΛN eſſe eam, quæ cum rationali medium totum efficit. quoniam enim oſtendimus parallelogrammum AK medium eſſe; atque eſt æquale quadratis ipſarum ΛO, ON; erit & compoſitum ex quadratis ipſarum ΛO, ON medium. rurſus, quoniam ΔK rationale eſt, & æquale ei quod bis continetur ſub ΛO, ON; erit & quod bis ſub ΛO, ON continetur rationale. & quoniam AI eſt incommenſurabile ipſi ZK, incommenſurabile igitur eſt quadratum ex ΛO quadrato ex ON; ideoque ΛO, ON potentia incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium; quod autem ſub ipſis bis





Χωρίον γὰρ τὸ AB περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς AΓ καὶ ἀποτομῆς πέμπτης τῆς AΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ AB χωρίον δυναμένη ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἐκκείσθω γὰρ τῇ AΔ συμμέτρος κατὰ μῆκος ἡ ΔH· αἱ ἄρα AH, HΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ συναμφότερος ἡ ΔH σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ AΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ AH τῆς συναμφοτέρου τῆς ΔH μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμέτρου ἑαυτῇ· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔH ἴσον παρὰ τὴν AH παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔH δίχα κατὰ τὸ E σημεῖον, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς EH ἴσον παρὰ τὴν AH παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, ᾧ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZH· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZH μήκει. καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν E, Z, H τῇ AΓ παράλληλοι αἱ EΘ, ZI, HK. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ AH τῇ AΓ μήκει, καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ AK. πάλιν, ἐπεὶ ῥητή ἐστιν ἡ ΔH, καὶ σύμμετρος τῇ AΓ μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ ΔK. συνεστάτω ἴσον τῷ μὲν AI ἴσον τετράγωνον τὸ ΛM, τῷ δὲ ZK ἴσον τετράγωνον ἀφῃρήσθω πρὸς τὴν αὐτὴν τὸν τῶν ΛM γωνίαν, τὴν ὑπὸ ΛOM, τὸ NΞ· πρὸς τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛM, NΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ OP, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἡ ΛN τὸ AB. λέγω ὅτι ἡ ΛN ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ AK, καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΛO, ON· τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΛO, ON μέσον ἐστί. πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ ΔK, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΛO, ON· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΛO, ON ῥητόν ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ AI τῷ ZK, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛO τῷ ἀπὸ τῆς ON· αἱ ΛO, ON ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον· τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν

αὐτῶν ῥητόν· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΝ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μεσὸν ῥητὸν τὸ ὅλον ποιοῦσα, καὶ δυναται τὸ ΑΒ χωρίον· ἡ τὸ ΑΒ ἄρα χωρίον δυναμένη, ἡ μετὰ ῥητὸν μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

continetur rationale: ergo [per 78.10.] reliqua ΑΝ irrationalis eſt, quæ vocatur cum rationali medium totum efficiens, & poteſt ſpatium ΑΒ: recta igitur linea ſpatium ΑΒ potens eſt quæ cum rationali medium totum efficit. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛζ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστι.

PROP. XCVII. THEOR.

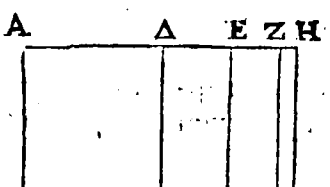
Si ſpatium contineatur ſub rationali & apotoma ſexta, recta linea ſpatium potens eſt quæ cum medio medium totum efficit.

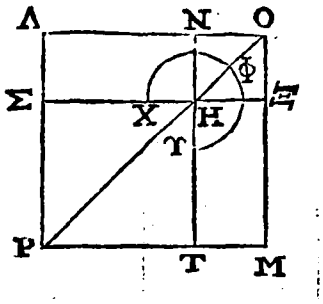
Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς ἕκτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἐστω γὰρ τῇ ΑΔ συμμέτρος ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἐστὶν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δυνάται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δυνάται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβάλλωμεν ἔλλειπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἔλλειπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΖΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΑΓ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον ἐστὶ τὸ ΑΚ. πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΔΗ ῥηταί εἰσι καὶ ἀσύμμετροι μήκει, μέσον ἐστὶ καὶ τὸ ΔΚ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗ, ΗΔ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΔ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΔ οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΚ πρὸς τὸ ΚΔ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ τῷ ΚΔ. συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω πρὸς τὴν αὐτὴν τὴν ΛΜ γωνίαν τὸ ΝΞ· πρὸς τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΑΜ, ΝΞ παραλληλόγραμμα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ὁμοίως δὴ τοῖς ἐπάνω δείξομεν ὅτι ἡ ΑΝ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον. λέγω ὅτι ἡ ΑΝ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐστὶ τὸ ΑΚ, ᾧ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ· τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ

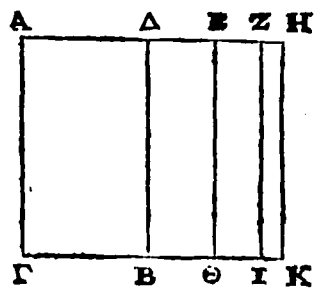
Spatium enim ΑΒ contineatur ſub rationali ΑΓ & apotoma ſexta ΑΔ: dico rectam lineam, quæ ſpatium ΑΒ poteſt, eſſe eam quæ cum medio medium totum efficit.

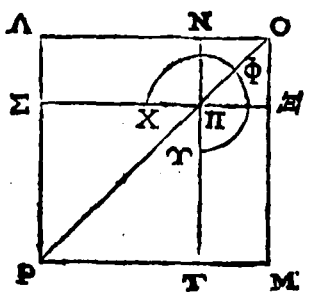
Sit enim ipſi ΑΔ congruens ΔΗ: ergo [per 6.deff.tert.10.] ΑΗ, ΗΔ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; & neutra ipſarum ΑΗ, ΗΔ commenſurabilis eſt longitudine expoſitæ rationali ΑΓ, totaque ΑΗ plus poteſt quam congruens ΔΗ quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. itaque quoniam ΑΗ plus poteſt quam ΗΔ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommmenſurabilis: ſi quartæ parti quadrati ex ΔΗ æquale ad rectam lineam ΑΗ applicetur deficiens figura quadrata, [per 19.10.] in partes incommenſurabiles ipſam dividet. itaque ſecetur ΔΗ bifariam in Ε, & quadrato ex ΕΗ æquale parallelogrammum ad ΑΗ applicetur deficiens figura quadrata, nempe quod continetur ſub ΑΖ, ΖΗ: incommenſurabilis igitur eſt ΑΖ ipſi ΖΗ longitudine. ut autem ΑΖ ad ΖΗ ita eſt [per 1.6.] ΑΙ ad ipſum ΖΚ: ergo [per 10. 10.] ΑΙ ipſi ΖΚ eſt incommenſurabile. & quoniam ΑΗ, ΑΓ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, erit [per 22.10.] ΑΚ medium. rurſus, quoniam ΑΓ, ΔΗ rationales ſunt & incommenſurabiles longitudine, medium erit & ΔΚ. quod cum ΑΗ, ΗΔ potentia ſolum commenſurabiles ſint, erit ΑΗ ipſi ΗΔ longitudine incommenſurabilis. ſed ut ΑΗ ad ΗΔ ita eſt [per 1.6.] ΑΚ ad ΚΔ: incommenſurabile igitur [per 10. 10.] eſt ΑΚ ipſi ΚΔ. itaque conſtituatur [per 14.2.] parallelogrammo ΑΙ æquale quadratum ΛΜ; parallelogrammo autem ΖΚ æquale auferatur quadratum ΝΞ, angulum habens eundem quem ΛΜ: ergo [per 26.6.] quadrata ΛΜ, ΝΞ circa eandem ſunt diametrum. ſit eorum diameter ΟΡ, & figura deſcribatur. ſimiliter ut ſupra oſtendemus rectam lineam ΑΝ poſſe ſpatium ΑΒ. dico ΑΝ eſſe eam quæ cum medio medium totum efficit. quoniam enim ΑΚ oſtenſum eſt medium, atque eſt æquale quadratis ipſarum ΛΟ, ΟΝ, erit & compoſitum ex quadra-





tis ipſarum AO, ON medium. rurſus, quoniam ΔK oſtenſum eſt medium, & eſt æquale ei, quod bis continetur ſub AO, ON, & quod bis ſub AO, ON continetur medium erit. & quoniam oſtenſum eſt AK incommenſurabile ipſi KΔ: ergo & quadrata ex AO, ON incommenſurabilia ſunt ei quod bis ſub AO, ON continetur, & quoniam incommenſurabile eſt AI ipſi ZK, erit & quadratum ex AO quadrato ex ON incommenſurabile: ergo AO, ON potentia incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem bis ſub ipſis continetur medium, & adhuc quadrata ipſarum incommenſurabilia ei quod bis ſub ipſis continetur: ergo [per 79. 10.] AN irrationalis eſt, quæ vocatur cum medio medium totum efficiens. & poteſt AB ſpatium: recta igitur linea ſpatium AB potens eſt quæ cum medio medium totum efficit. quod erat demonſtrandum.





τὸ ἀπὸ τὸ ΑΟ, ΟΝ μέσον ἐστί. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐδείχθη τὸ ΔΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ μέσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ ΑΚ τῷ ΔΚ, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ τετράγωνα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΟ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ· αἱ ΑΟ, ΟΝ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον, ἔτι τε τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ' αὐτῶν· ἡ ἄρα ΑΝ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον· ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XCVIII. Theor.

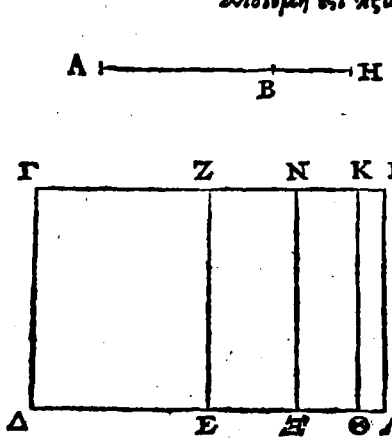
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛη'.

Quadratum apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam.

Τὸ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην.

SIT apotome AB, rationalis autem ΓΔ, & quadrato ex AB æquale parallelogrammum ΓE ad ipſam ΓΔ applicetur latitudinem faciens ΓZ: dico ΓZ eſſe apotomen primam.

Sit enim ipſi AB congruens BH: ergo [per 74.10.] AH, HB rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. & [per 45.1.] ad ipſam ΓΔ applicetur quadrato quidem ex AH æquale ΓΘ; quadrato autem ex BH æquale KΛ: totum igitur ΓΛ eſt æquale quadratis ex AH, HB. ex quibus parallelogrammum ΓE æquale eſt quadrato ex AB: ergo [per 7.2.] reliquum ZΛ ei quod bis ſub AH, HB continetur eſt æquale. ſecetur ZM bifariam in N; & per N ipſi ΓΔ parallela ducatur NΞ: utrumque igitur ipſorum ZΞ, ΛN eſt æquale ei quod ſub AH, HB continetur. & quoniam quadrata ex AH, HB rationalia ſunt, atque eſt quadratis ex AH, HB æquale parallelogrammum ΔM; erit ipſum ΔM rationale. & ad rationalem ΓΔ applicatum eſt, latitudinem faciens ΓM: ergo [per 21.10.] ΓM eſt rationalis, & ipſi ΓΔ commenſurabilis longitudine. rurſus, quoniam medium eſt quod bis continetur ſub AH, HB, eſtque ei quod bis ſub AH, HB continetur æquale



Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Ἐπεζεύχθω γὰρ τῇ ΑΒ συμβαλλέτω ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ τὸ ΚΛ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τετμήσθω ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΛΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητά ἐστι, καὶ ἔστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΔΜ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΜ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβέβληται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἔστι τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον

τὸ

τὸ ΑΖ· μέσον ἄρα τὸ ΑΖ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβέβληται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἡ ΖΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητά ἐστι, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον, ἀσύμμετρα ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἔστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστι. λέγω ὅτι καὶ πρώτη. ἐπεὶ γὰρ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ᾧ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΝΛ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον τὸ ΚΛ· καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ. ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· [*ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ·] τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ, καὶ ἔστι σύμμετρος ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ· ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἔστιν ἡ ΓΜ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ μήκει· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

parallelogrammum ΛΖ; erit ipſum ΛΖ medium & applicatum eſt ad rationalem ΓΔ latitudinem faciens ΖΜ: quare [per 23.10.] ΖΜ eſt rationalis, ipſique ΓΔ longitudine incommenſurabilis. & quoniam quadrata quidem ex ΑΗ, ΗΒ rationalia ſunt; quod autem bis continetur ſub ΑΗ, ΗΒ medium: quadrata ex ΑΗ, ΗΒ incommenſurabilia ſunt ei quod bis ſub ΑΗ, ΗΒ continetur. ſed quadratis ex ΑΗ, ΗΒ æquale eſt parallelogrammum ΓΛ, ei vero quod bis continetur ſub ΑΗ, ΗΒ æquale eſt ΖΛ: ergo ΓΛ ipſi ΖΛ eſt incommenſurabile. ut autem ΓΛ ad ΖΛ ita eſt [per 1.6.] recta linea ΓΜ ad ΜΖ: incommenſurabilis igitur eſt ΓΜ ipſi ΜΖ longitudine. & ſunt ambæ rationales: ergo ΓΜ, ΜΖ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea [per 74.10.] ΓΖ eſt apotome. dico & primam eſſe. quoniam enim inter quadrata ex ΑΗ, ΗΒ [per lem.55.10.] medium proportionale eſt quod ſub ΑΗ, ΗΒ continetur, atque [per conſtr.] eſt quadrato quidem ex ΑΗ æquale parallelogrammum ΓΘ; ei vero quod ſub ΑΗ, ΗΒ continetur æquale ΝΛ, & quadrato ex ΒΗ æquale ΚΛ: erit inter ipſa ΓΘ, ΚΛ medium proportionale ΝΛ: ut igitur ΓΘ ad ΝΛ ita ΝΛ ad ΚΛ. ſed ut ΓΘ ad ΝΛ ita eſt recta linea ΓΚ ad ipſam ΝΜ. ut autem ΝΛ ad ΚΛ ita recta linea ΝΜ ad ΜΚ: [*ergo ut ΓΚ ad ΝΜ ita eſt ΝΜ ad ΚΜ:] & ob id [per 17.6.] rectangulum ſub ΓΚ, ΚΜ eſt æquale quadrato ex ΜΝ, hoc eſt quartæ parti quadrati ex ΖΜ. & quoniam [ex hyp.] quadratum ex ΑΗ commenſurabile eſt quadrato ex ΗΒ, erit & parallelogrammum ΓΘ parallelogrammo ΚΛ commenſurabile. ſed ut ΓΘ ad ΚΛ ita eſt recta linea ΓΚ ad ipſam ΚΜ; commenſurabilis igitur [per 10.10.] eſt ΓΚ ipſi ΚΜ. itaque cum duæ rectæ lineæ inæquales ſint ΓΜ, ΜΖ, & quartæ parti quadrati ex ΖΜ æquale parallelogrammum ad ipſam ΓΜ applicatum ſit deficiens figura quadrata, quod ſcilicet ſub ΓΚ, ΚΜ continetur; ſitque ΓΚ commenſurabilis ipſi ΚΜ: [per 18.10.] recta linea ΓΜ plus poterit quam ΜΖ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. atque eſt ΓΜ commenſurabilis longitudine expoſitæ rationali ΓΔ: ergo [per 1.def.tert.10.] ΓΖ eſt prima apotome.

Quadratum igitur apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϟθ'.

Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν.

Prop. XCIX. Theor.

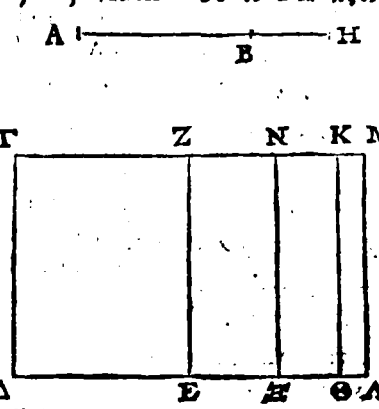
Quadratum mediæ apotomæ primæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen ſecundam.

Ἔστω μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι δευτέρα,

SIT mediæ apotome prima ΑΒ, rationalis autem ΓΔ, & quadrato ex ΑΒ æquale parallelogrammum ΓΕ ad ipſam ΓΔ applicetur, latitudinem faciens ΓΖ; dico ΓΖ eſſe apotomen ſecundam.

* Uncis incluſa deſunt in Cod. MS. Illa tamen retinenda cenſemus.

Sit enim ipſi AB congruens BH: ergo [per 75. 10.] AH, HB mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quæ rationale continent. & [per 45.1.] quadrato quidem ex AH æquale parallelogrammum ΓΘ ad ΓΔ applicetur, latitudinem faciens ΓK; quadrato autem ex HB æquale KΛ ad eandem applicetur, latitudinem faciens KM: totum igitur ΓΛ eſt æquale quadratis ex AH, HB quæ media ſunt: quare & ΓΛ eſt medium. & ad rationalem ΓΔ applicatum eſt, latitudinem faciens ΓM: rationalis igitur eſt ΓM [per 23.10.] & ipſi ΓΔ longitudine incommenſurabilis. itaque quoniam ΓΛ eſt æquale quadratis ex AH, HB, ex quibus quadratum ex AB æquale eſt parallelogrammo ΓE; erit [per 7.2.] reliquum, ſc. quod bis continetur ſub AH, HB, æquale ipſi ZΛ. eſt autem quod bis ſub AH, HB continetur rationale: rationale igitur eſt & ZΛ, & ad rationalem ZE applicatum eſt latitudinem faciens ZM: quare [per 21.10.] ZM eſt rationalis & ipſi ΓΔ commenſurabilis longitudine. & quoniam quadrata quidem ex AH, HB, hoc eſt parallelogrammum ΓΛ, medium eſt; quod autem bis continetur ſub AH, HB, videlicet ZΛ, eſt rationale: erit ΓΛ incommenſurabile ipſi ZΛ. ut autem ΓΛ ad ZΛ, ita [per 1.6.] recta linea ΓM ad MZ: ergo ΓM ipſi MZ longitudine eſt incommenſurabilis. & ſunt ambæ rationales: ſunt igitur ΓM, MZ rationales potentia ſolum commenſurabiles: ideoque [per 74. 10.] ΓZ eſt apotome. dico & ſecundam eſſe. ſecetur enim ZM bifariam in puncto N, & per N ipſi ΓΔ parallela ducatur NΞ: alterutrum igitur parallelogrammorum ZΞ, NΛ eſt æquale ei quod continetur ſub AH, HB. & quoniam inter quadrata ex AH, HB medium proportionale eſt quod ſub AH, HB continetur, eſtque quadratum ex AH æquale parallelogrammo ΓΘ, quod autem continetur ſub AH, HB æquale parallelogrammo NΛ, & quadratum ex HB æquale ipſi KΛ; erit inter parallelogramma ΓΘ, KΛ medium proportionale NΛ: eſt igitur ut ΓΘ ad NΛ ita NΛ ad KΛ. ſed ut ΓΘ ad NΛ ita eſt [per 1. 6.] recta linea ΓK ad ipſam NM, & ut NΛ ad KΛ ita NM ad KM: ergo ut ΓK ad NM ita eſt NM ad KM: ac propterea [per 17. 6.] rectangulum ſub ΓK, KM eſt æquale quadrato ex NM; hoc eſt, quartæ parti quadrati ex ZM. & quoniam quadratum ex AH commenſurabile eſt quadrato ex HB, erit & ΓΘ parallelogrammum parallelogrammo KΛ commenſurabile, hoc eſt, recta linea ΓK commenſurabilis ipſi KM. quoniam itaque duæ rectæ lineæ inæquales ſunt ΓM, MZ, quartæ autem parti quadrati ex MZ æquale ad majorem ΓM applicatum ſit deficiens figura quadrata, quod ſc. continetur ſub ΓK, KM, & in partes commenſurabiles ipſam dividat; [per 18.10.] recta linea ΓM plus poterit quam MZ quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. atq; [ex hyp.] eſt congruens ZM



Εσω γὰρ τῇ AB συναρμόζουσα ἡ BH· αἱ ἄρα AH, HB μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβέβληθω τὸ ΓΘ, πλάτος ποιὸν τὴν ΓK, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς HB ἴσον τὸ KΛ, πλάτος ποιὸν τὴν KM· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH, HB μέσοις ὄσι· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΓΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβέβληται, πλάτος ποιὸν τὴν ΓM· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓM, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. ἐπεὶ τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH, HB, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς AB ἴσον ἐστὶ τῷ ΓE· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AH, HB ἴσον ἐστὶ τῷ ZΛ. ῥητὸν δέ ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AH, HB· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ZΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ZE παράκειται, πλάτος ποιὸν τὴν ZM· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ZM, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ἀπὸ τῶν AH, HB, τουτέστι τὸ ΓΛ, μέσον ἐστί, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν AH, HB, τουτέστι τὸ ZΛ, ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ZΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ZΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓM πρὸς τὴν MZ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓM τῇ MZ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓM, MZ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓZ ἄρα ἀποτομή ἐστι. λέγω δὴ ὅτι καὶ δευτέρα. τετμήσθω γὰρ ἡ ZM δίχα κατὰ τὸ N, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ N τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ NΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ZΞ, NΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AH, HB. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν AH, HB τετραγώνων μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν AH, HB, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ἀπὸ τῆς AH τῷ ΓΘ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AH, HB τῷ NΛ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς HB τῷ KΛ· καὶ τῶν ΓΘ, KΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ NΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ NΛ οὕτως τὸ NΛ πρὸς τὸ KΛ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ NΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓK πρὸς τὴν NM, ὡς δὲ τὸ NΛ πρὸς τὸ KΛ οὕτως ἐστὶν ἡ NM πρὸς τὴν KM· ὡς ἄρα ἡ ΓK πρὸς τὴν NM οὕτως ἐστὶν ἡ NM πρὸς τὴν KM· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓK, KM ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς NM, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τὸ ἀπὸ τῆς ZM. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς AH τῷ ἀπὸ τῆς HB, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΓΘ τῷ KΛ, τουτέστιν ἡ ΓK τῇ KM. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓM, MZ, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τὸ ἀπὸ τῆς MZ ἴσον παραβέβληται τῷ μείζονα τὴν ΓM παραβεβληκέναι ἐλλείπον εἴδει τετραγώνῳ τῷ ὑπὸ τῶν ΓK, KM, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ· ἡ ἄρα ΓM τῆς MZ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καί ἐστιν ἡ συναρμόζουσα ἡ ZM σύμμετρος

τῷ Δ· τῇ σκαληνῷ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Τὸ ἄρα ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν ὡδιβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

expositæ rationali ΓΔ commensurabilis: quare [per 2. deff. tert. 10.] ΓΖ est apotome secunda.

Quadratum igitur mediæ apotomæ primæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen secundam. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρ'.

Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας ὡδὶ ῥητὴν ὡδιβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην.

PROP. C. THEOR.

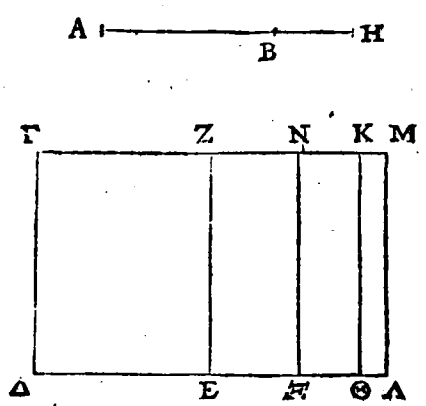
Quadratum mediæ secundæ apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam.

Ἔστω μέση ἀποτομὴ δευτέρα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ ὡδιβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι τρίτη.

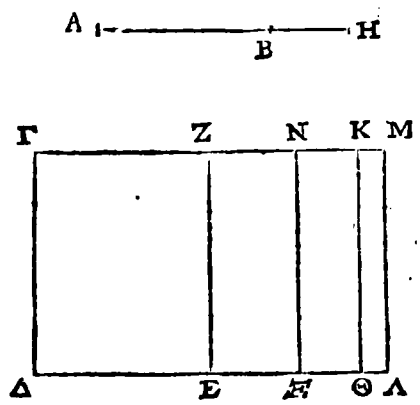
Ἐφ' ᾗ γὰρ τῇ ΑΒ συναρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ ὡδιβεβλήσθω τὸ ΓΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον παρὰ τὴν ΚΘ ὡδιβεβλήσθω τὸ ΚΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἔστι μέσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΓΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ ὡδιβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τετμήσθω δὴ ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ τῇ ΓΔ ὡδὶ παράλληλος ἤχθω ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΖΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΗΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ μήκει ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΖΜ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥη-

SIT mediæ apotome secunda ΑΒ, rationalis autem ΓΔ, & quadrato ex ΑΒ æquale parallelogrammum ΓΒ ad ipsam ΓΔ applicetur latitudinem faciens ΓΖ: dico ΓΖ esse apotomen tertiam.

Sit enim ipsi ΑΒ congruens ΒΗ; ergo [per 76. 10.] ΑΗ, ΗΒ mediæ sunt potentia solum commensurabiles, quæ medium continent. & [per 45. 1.] quadrato quidem ex ΑΗ æquale ad ΓΔ applicetur ΓΘ latitudinem faciens ΓΚ; quadrato autem ex ΗΒ æquale ad ΚΘ applicetur ΚΛ, latitudinem faciens ΚΜ: totum igitur ΓΛ est æquale quadratis ex ΑΗ, ΗΒ. & sunt quadrata ex ΑΗ, ΗΒ media: ergo & ΓΛ est medium, & ad rationalem ΓΔ applicatum est, latitudinem faciens ΓΜ: ergo [per 23. 10.] ΓΜ est rationalis, & ipsi ΓΔ incommensurabilis longitudine. & quoniam totum ΓΛ est æquale quadratis ex ΑΗ, ΗΒ, ex quibus ΓΕ æquale est quadrato ex ΑΒ; erit [per 7. 2.] reliquum ΖΛ æquale ei quod bis continetur sub ΑΗ, ΗΒ. secetur ΖΜ bifariam in Ν; & ipsi ΓΔ parallela ducatur ΝΞ: alterutrum igitur parallelogrammorum ΖΞ, ΝΛ est æquale ei quod sub ΑΗ, ΗΒ continetur. est autem quod continetur sub ΑΗ, ΗΒ medium: ergo & medium est ΖΛ, & ad rationalem ΕΖ applicatum est, latitudinem faciens ΖΜ: quare [per 23. 10.] & ΖΜ est rationalis, & ipsi ΓΔ longitudine incommensurabilis. & quoniam ΑΗ, ΗΒ potentia solum commensurabiles sunt, erit ΑΗ ipsi ΗΒ incommensurabilis longitudine: ideoque [per 1. 6. & 10. 10.] quadratum ex ΑΗ rectangulo sub ΑΗ, ΗΒ est incommensurabile. sed quadrato quidem ex ΑΗ commensurabilia sunt ex ΑΗ, ΗΒ quadrata; rectangulo autem sub ΑΗ, ΗΒ commensurabile est quod bis sub ΑΗ, ΗΒ continetur: ergo quadrata ex ΑΗ, ΗΒ sunt incommensurabilia ei quod bis sub ΑΗ, ΗΒ continetur. at [per constr.] quadratis ex ΑΗ, ΗΒ æquale est parallelogrammum ΓΛ; ei vero quod bis continetur sub ΑΗ, ΗΒ æquale est ΖΛ: incommensurabile igitur est ΓΛ ipsi ΖΛ. ut autem ΓΛ ad ΖΛ ita est recta linea ΓΜ ad ΖΜ: ergo [per 10. 10.] ΓΜ ipsi ΖΜ incommensurabilis est longitudine. & sunt ambæ rationales:



les: quare Γ M, Z M rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles: & ob id [per 74. 10.] Γ Z eſt apotome. dico & tertiam eſſe. quoniam enim quadratum ex A H commenſurabile eſt quadrato ex H B, erit parallelogrammum Γ Θ parallelogrammo K Λ commenſurabile: ergo & recta linea Γ K eſt commenſurabilis ipſi K M. & quoniam inter quadrata ex AH, HB [per lem. 55. 10.] medium proportionale eſt rectangulum ſub A H, H B; atque eſt quadrato quidem ex A H æquale parallelogrammum Γ Θ; quadrato autem ex H B æquale K Λ, & rectangulo ſub A H, H B æquale N Λ; erit inter parallelogramma Γ Θ, K Λ medium proportionale N Λ: eſt igitur ut Γ Θ ad N Λ ita N Λ ad K Λ. ſed [per 1. 6.] ut Γ Θ ad N Λ ita eſt recta linea Γ K ad N M; ut autem N Λ ad K Λ ita N M ad K M: ergo & ut Γ K ad N M ita N M ad K M; ac propterea [per 17. 10.] rectangulum ſub Γ K, K M eſt æquale quadrato ex N M, hoc eſt quartæ parti quadrati ex Z M. quoniam igitur duæ rectæ lineæ inæquales ſunt Γ M, M Z; & quartæ parti quadrati ex Z M æquale ad Γ M applicatum eſt deficiens figura quadrata, quod in partes commenſurabiles ipſam dividit; [per 18. 10.] recta linea Γ M plus poterit quam M Z quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. & neutra ipſarum Γ M, M Z longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali Γ Δ: ergo [per 3. deff. tert. 10.] Γ Z eſt apotome tertia.



Quadratum igitur mediæ apotomæ ſecundæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen tertiam. quod erat demonſtrandum.

PROP. CI. THEOR.

Quadratum minoris ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam.

SIT minor A B, rationalis autem Γ Δ, & quadrato ex A B æquale parallelogrammum Γ E ad ipſam Γ Δ applicetur latitudinem faciens Γ Z: dico Γ Z eſſe apotomen quartam.

Sit enim ipſi A B congruens B H: ergo [per 77. 10.] A H, H B potentia incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex ipſarum A H, H B quadratis rationale, quod autem bis ſub ipſis continetur medium. & [per 45. 1.] quadrato ex A H æquale ad Γ Δ applicetur Γ Θ latitudinem faciens Γ K: quadrato autem ex B H æquale [*ad K Θ applicetur] K Λ latitudinem faciens K M: totum igitur Γ Λ quadratis ex A H, H B eſt æquale. atque eſt compoſitum ex quadratis A H, H B rationale: ergo & rationale eſt Γ Λ; & ad rationalem Γ Δ applicatum

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρα'.

Τὸ ἀπὸ ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην.

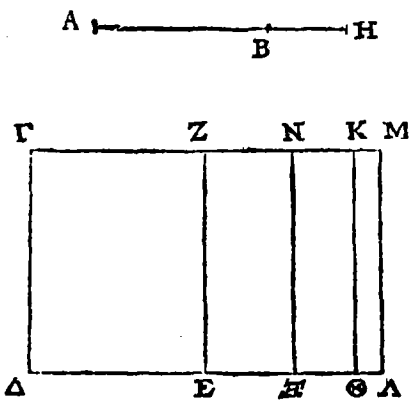
ΕΣτω ἐλάσσων ἡ A B, ῥητὴ δὲ ἡ Γ Δ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς A B ἴσον παρὰ τὴν Γ Δ παραβεβλήσθω τὸ Γ E, πλάτος ποιὸν τὴν Γ Z· λέγω ὅτι ἡ Γ Z ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

Ἐπεὶ γὰρ τῇ A B συμμέτρος ἐστὶν ἡ B H· αἱ ἄρα A H, H B δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν A H, H B τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν A H, H B μέσον. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς A H ἴσον παρὰ τὴν Γ Δ παραβεβλήσθω τὸ Γ Θ, πλάτος ποιὸν τὴν Γ K, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς B H ἴσον [*παρὰ τὴν K Θ παραβεβλήσθω] τὸ K Λ πλάτος ποιὸν τὴν K M· ὅλον ἄρα τὸ Γ Λ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν A H, H B. ἔστι δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν A H, H B ῥητόν· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Γ Λ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν Γ Δ παράκειται

* Illa uncis incluſa rectius deſiderantur in *Codd. MSS.*

πλάτος

κειται παλάτος ποιὸν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ ἡ ΓΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. ἐπεὶ οὖν ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τετμήσθω δὴ ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, ΜΛ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἐστὶ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΛΖ· καὶ τὸ ΛΖ ἄρα μέσον ἐστὶ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιὸν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ μὴ συγκεῖσθαι ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητόν ἐστι, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον, ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. ἴσον δέ ἐστι τὸ ΓΛ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΖΜ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥητὰ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ. λέγω δὴ ὅτι καὶ τετάρτη. ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. καὶ ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ μήκει. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τὸ ΚΛ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΝΛ· τῶν ἄρα ΓΘ, ΚΛ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΜΝ. ὡς δὲ ἡ ΝΛ πρὸς τὴν ΚΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΜΝ οὕτως ἐστὶν ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΖ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΖ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ, καὶ εἰς ἀσυμμέτρα αὐτὴν διαιρεῖ· ἡ ἄρα ΓΜ τοῦ ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ ἔστιν ὅλη ἡ ΓΜ σύμμετρος μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι τετάρτη.



est latitudinem faciens ΓM: quare [per 21.10.] ΓM est rationalis & ipsi ΓΔ longitudine commensurabilis. & quoniam totum ΓΛ est æquale quadratis ex AH, HB, ex quibus ΓE æquale est quadrato ex AB; erit [per 7. 2.] reliquum ZΛ æquale ei quod bis sub AH, HB continetur. itaque secetur ZM bifariam in puncto N, & per N alterutri ipsarum ΓΔ, MΛ parallela ducatur NΞ: utrumque igitur parallelogrammorum ZΞ, NΛ est æquale ei quod continetur sub AH, HB. & quoniam quod bis continetur sub AH, HB medium est & æquale parallelogrammo ΛZ; erit & ΛZ medium, & ad rationalem ZE applicatum est latitudinem faciens ZM: ergo [per 23. 10.] ZM est rationalis, & ipsi ΓΔ longitudine incommensurabilis. & quoniam compositum ex quadratis ipsarum AH, HB est rationale, quod autem bis sub AH, HB continetur medium; erunt quadrata ex AH, HB ei quod bis continetur sub AH, HB incommensurabilia. quadratis autem ex AH, HB æquale est parallelogrammum ΓΛ, & ei quod bis sub AH, HB continetur est æquale ZΛ: incommensurabile igitur est ΓΛ ipsi ΛZ. sed [per 1. 6.] ut ΓΛ ad ZΛ ita est ΓM ad ZM: quare [per 10. 10.] ΓM ipsi ZM longitudine est incommensurabilis. & sunt ambæ rationales: ergo ΓM, MZ rationales sunt potentia solum commensurabiles: & igitur [per 74. 10.] ΓZ est apotome. dico & quartam esse. quoniam enim AH, HB potentia sunt incommensurabiles; erit quadratum ex AH incommensurabile quadrato ex HB. & quadrato quidem ex AH [per constr.] æquale est parallelogrammum ΓΘ; quadrato autem ex HB est æquale KΛ: incommensurabile igitur est ΓΘ ipsi KΛ. sed ut ΓΘ ad KΛ ita est ΓK ad KM: ergo ΓK ipsi KM est incommensurabilis longitudine. & quoniam inter quadrata ex AH, HB [per lem. 55. 10.] medium proportionale est rectangulum sub AH, HB, atque est quadrato quidem ex AH æquale parallelogrammum ΓΘ, quadrato autem ex HB æquale KΛ, & rectangulo sub AH, HB æquale NΛ; erit NΛ medium proportionale inter parallelogramma ΓΘ, KΛ: est igitur ut ΓΘ ad NΛ ita NΛ ad KΛ. sed ut ΓΘ ad NΛ ita ΓK ad MN. & ut NΛ ad KΛ ita MN ad KM: ergo ut ΓK ad MN ita MN ad KM; ac propterea [per 17. 6.] rectangulum sub ΓK, KM est æquale quadrato ex MN, hoc est quartæ parti quadrati ex MZ. itaque quoniam duæ rectæ lineæ inæquales sunt ΓM, MZ, & quartæ parti quadrati ex MZ æquale ad ΓM applicatum est deficiens figura quadrata, sc. contentum sub ΓK, KM, & in partes incommensurabiles ipsam dividit: recta linea ΓM [per 19. 10.] plus poterit quam MZ quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine. & est tota ΓM longitudine commensurabilis expositæ rationali ΓΔ: ergo [per 4. deff. tert. 10.] ΓZ est apotome quarta.

Quadratum igitur minoris ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quartam. quod erat demonſtrandum.

Τὸ ἄρα ὑπὸ ἐλάσσονος τῶν δυνάμει ῥητὸν παραβαλλόμενον παρὰ ῥητὴν τὸ μῆκος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. CII. Theor.

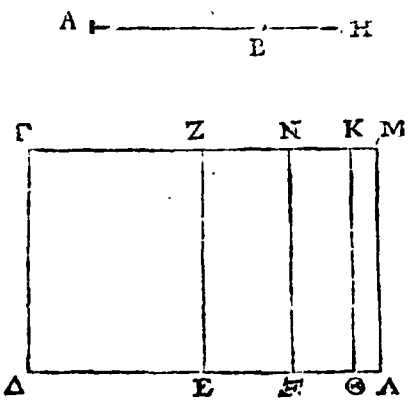
Quadratum ejus quæ cum rationali medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen quintam.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρϐ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης τὸν δυνάμει ῥητὸν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην.

SIT quæ cum rationali medium totum efficit AB, rationalis autem Γ Δ, & quadrato ex AB æquale ad Γ Δ applicetur parallelogrammum Γ E latitudinem faciens Γ Z: dico Γ Z apotomen eſſe quintam.

Sit enim ipſi AB congruens B H: ergo [per 78. 10.] AH, HB rectæ lineæ potentia ſunt incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis medium, quod autem bis ſub ipſis continetur rationale. & [per 45. 1.] quadrato ex AH æquale parallelogrammum Γ Θ ad ipſam Γ Δ applicetur, latitudinem faciens Γ K; quadrato autem ex HB æquale applicetur K Λ latitudinem faciens K M: totum igitur Γ Λ eſt æquale quadratis ex AH, HB. ſed compoſitum ex quadratis ipſarum AH, HB eſt medium: ergo & medium eſt parallelogrammum Γ Λ. & ad rationalem Γ Δ applicatum eſt, latitudinem faciens Γ M: quare [per 23. 10.] Γ M eſt rationalis, & ipſi Γ Δ longitudine incommenſurabilis. & quoniam totum Γ Λ eſt æquale quadratis ex AH, HB, ex quibus Γ E æquale eſt quadrato ex AB; erit [per 7. 2.] reliquum Z Λ æquale ei quod bis ſub AH, HB continetur. Itaque ſecetur Z M bifariam in puncto N, & ab ipſo N alterutri ipſarum Γ Δ, M Λ parallela ducatur N Ξ· utrumque igitur Z Ξ, N Λ eſt æquale ei quod ſub AH, HB continetur. & quoniam quod bis continetur ſub AH, HB rationale eſt, & æquale parallelogrammo Z Λ; erit & Z Λ rationale. & ad rationalem E Z applicatum eſt, latitudinem faciens Z M: ergo [per 21. 10.] Z M eſt rationalis, & ipſi Γ Δ commenſurabilis longitudine. & quoniam parallelogrammum Γ Λ eſt medium, & Z Λ rationale: incommenſurabile eſt Γ Λ ipſi Z Λ. & [per 1. 6.] ut Γ Λ ad Z Λ ita Γ M ad M Z: ergo [per 10. 10.] Γ M ipſi M Z longitudine eſt incommenſurabilis. & ſunt ambæ rationales; quare Γ M, M Z rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ideoque [per 74. 10.] Γ Z eſt apotome. dico & quintam eſſe. ſimiliter enim [ut in præc.] demonſtrabimus rectangulum ſub Γ K, K M eſſe æquale quadrato ex N M, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex Z M. quod cum quadratum ex AH incommenſurabile ſit quadrato ex HB; ſitque quadratum ex Λ H parallelogrammo Γ Θ æquale, quadratum autem ex HB parallelogrammo K Λ: erit Γ Θ ipſi K Λ incommenſura-



Ἔστω ἡ μετὰ ῥητῆς μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ AB, ῥητὴ δὲ ἡ Γ Δ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν Γ Δ παραβεβλήσθω τὸ Γ E πλάτος ποιὸν τὴν Γ Z· λέγω ὅτι ἡ Γ Z ἀποτομή ἐστι πέμπτη.

Ἐπεὶ γὰρ τῇ AB συναρμόζουσα ἡ BH· αἱ ἄρα AH, HB εὐθεῖαί δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον παρὰ τὴν Γ Δ παραβεβλήσθω τὸ Γ Θ· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς HB ἴσον τὸ K Λ· ὅλον ἄρα τὸ Γ Λ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH, HB. τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AH, HB ἅμα μέσον ἐστὶ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ Γ Λ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν Γ Δ παράκειται πλάτος ποιὸν τὴν Γ M· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Γ M, καὶ ἀσύμμετρος τῇ Γ Δ. καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ Γ Λ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH, HB, ὧν τὸ Γ E ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB· λοιπὸν ἄρα τὸ Z Λ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν AH, HB. τετμήσθω δὴ ἡ Z M δίχα κατὰ τὸ N, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ N ὁποτέρᾳ τῶν Γ Δ, M Λ παράλληλος ἡ N Ξ· ἑκάτερον ἄρα τῶν Z Ξ, N Λ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AH, HB. καὶ ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AH, HB ῥητόν ἐστι, καί ἐστιν ἴσον τῷ Z Λ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ Z Λ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν E Z παράκειται πλάτος ποιὸν τὴν Z M· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Z M, καὶ σύμμετρος τῇ Γ Δ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν Γ Λ μέσον ἐστί, τὸ δὲ Z Λ ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Γ Λ τῷ Z Λ. ὡς δὲ τὸ Γ Λ πρὸς τὸ Z Λ οὕτως ἐστὶν ἡ Γ M πρὸς τὴν M Z· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Γ M τῇ M Z μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα Γ M, M Z ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Γ Z. λέγω δὴ ὅτι καὶ πέμπτη. ὁμοίως γὰρ δείξομεν ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Γ K, K M ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς N M, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς Z M. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς AH τῷ ἀπὸ τῆς HB, ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς AH τῷ Γ Θ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς HB τῷ K Λ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Γ Θ τῷ

K Λ,

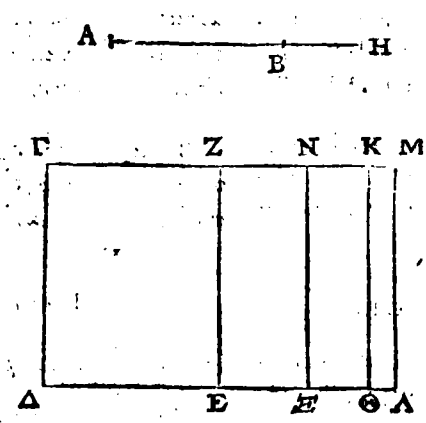
ΚΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ μήκει. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα διαιρεῖ αὐτήν· ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ ἔστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΜ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι πέμπτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ργ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην.

Ἔστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστιν ἕκτη.



Ἐστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον, ἔτι δὲ ἀσύμμετρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΓΔ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ τὸ ΚΛ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΓΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. ἐπεὶ γὰρ τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἔστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον· καὶ τὸ ΖΛ ἄρα μέσον ἐστί. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἔστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. αἱ ΓΜ, ΜΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστι. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἕκτη.

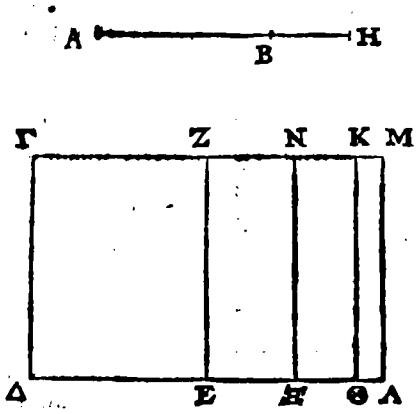
PROP. CIII. THEOR.

Quadratum ejus quæ cum medio medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen sextam.

SIT quæ cum medio medium totum efficit AB, rationalis autem ΓΔ; & quadrato ex AB æquale parallelogrammum ΓΕ ad ipsam ΓΔ applicetur latitudinem faciens ΓΖ: dico ΓΖ esse apotomen sextam.

Sit enim ipsi AB congruens BH: ergo [per 79. 10.] AH, HB potentia sunt incommensurabiles, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem bis sub ipsis AH, HB continetur medium, & adhuc quadrata ipsarum AH, HB incommensurabilia rectangulo quod bis continetur sub ipsis AH, HB. itaque ad ΓΔ applicetur quadrato ex AH æquale parallelogrammum ΓΘ latitudinem faciens ΓΚ; quadrato autem ex BH æquale applicetur ΚΛ; totum igitur ΓΛ est æquale quadratis ex AH, HB: ac propterea ΓΛ est medium. & ad rationalem ΓΔ applicatum est latitudinem faciens ΓΜ: ergo [per 23. 10.] ΓΜ rationalis est & ipsi ΓΔ longitudine incommensurabilis. quoniam igitur ΓΛ est æquale quadratis ex AH, HB, ex quibus ΓΕ æquale est quadrato ex AB; erit [per 7. 2.] reliquum ΖΛ æquale ei quod bis sub AH, HB continetur. atque est quod bis continetur sub AH, HB medium: ergo & ΖΛ est medium. & ad rationalem ΖΕ applicatum est latitudinem faciens ΖΜ; est igitur ΖΜ rationalis, & ipsi ΓΔ longitudine incommensurabilis. & quoniam quadrata ex AH, HB incommensurabilia sunt ei quod bis sub AH, HB continetur; atque est quadratis quidem ex AH, HB æquale parallelogrammum ΓΛ, ei vero quod bis continetur sub AH, HB æquale ΖΛ; erit ΓΛ ipsi ΖΛ incommensurabile. sed [per 1. 6.] ut ΓΛ ad ΖΛ ita est ΓΜ ad ΜΖ: quare [per 10. 10.]

Γ M ipſi M Z incommenſurabilis eſt longitudine. & ſunt ambæ rationales: ergo Γ M, M Z rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; & ob id [per 74. 10.] Γ Z eſt apotome. dico & ſextam eſſe. quoniam enim Z Λ eſt æquale ei quod bis continetur ſub A H, H B, ſecetur Z M bifariam in puncto N; & per N ipſi Γ Δ parallela ducatur N Ξ: utrumque igitur parallelogrammorum ZΞ, NΛ eſt æquale rectangulo ſub A H, H B. & quoniam A H, H B potentia ſunt incommenſurabiles; erit quadratum ex A H incommenſurabile quadrato ex H B. ſed [per conſtr.] quadrato quidem ex A H eſt æquale parallelogrammum Γ Θ, quadrato autem ex H B æquale K Λ: ergo Γ Θ ipſi K Λ eſt incommenſurabile. ut autem Γ Θ ad K Λ ita [per 1. 6.] eſt Γ K ad K M: incommenſurabilis igitur eſt Γ K ipſi K M. & quoniam [per lem. 55. 10.] inter quadrata ex A H, H B medium proportionale eſt rectangulum ſub A H, H B, eſtque quadrato ex A H æquale Γ Θ, & quadrato ex H B æquale K Λ, rectangulo quoque ſub A H, H B æquale N Λ; erit & inter parallelogramma Γ Θ, K Λ medium proportionale N Λ. & eadem ratione [atque in præced.] Γ M plus poterit quam M Z quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. & neutra ipſarum eſt commenſurabilis longitudine expoſitæ rationali Γ Δ: ergo [per 6. deff. tert. 10.] Γ Z eſt ſexta apotome.



Quadratum igitur ejus quæ cum medio medium totum efficit ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen ſextam. quod erat demonſtrandum.

μετρῷ· ἄρα ἐστὶν ἡ Γ M τῇ M Z μήκει. καί εἰσιν αἱ Γ M, M Z ἄρα ῥηταὶ εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Γ Z. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἕκτη. ἐπεὶ γὰρ τὸ Z Λ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν A H, H B, τετμήσθω δίχα ἡ Z M κατὰ τὸ N, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ N τῇ Γ Δ παράλληλος ἡ N Ξ· ἑκάτερον ἄρα τῶν Z Ξ, N Λ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν A H, H B. καὶ ἐπεὶ αἱ A H, H B δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς A H τῷ ἀπὸ τῆς H B. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς A H ἴσον ἐστὶ τὸ Γ Θ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς H B ἴσον ἐστὶ τὸ K Δ· ἀσύμμετρον ἄρα τὸ Γ Θ τῷ K Λ. ὡς δὲ τὸ Γ Θ πρὸς τὸ K Λ οὕτως ἡ Γ K πρὸς τὴν K M· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Γ K τῇ K M. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν A H, H B μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν A H, H B, καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς A H ἴσον τὸ Γ Θ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς H B ἴσον τὸ K Λ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν A H, H B ἴσον τὸ N Λ· καὶ τῶν ἄρα Γ Θ, K Λ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ N Λ. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ ἡ Γ M τῆς M Z μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Γ Δ· ἡ Γ Z ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἕκτη.

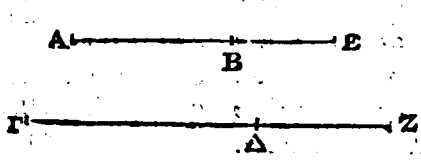
Τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. CIV. Theor.

Recta linea apotomæ longitudine commenſurabilis & ipſa apotome eſt atque ordine eadem.

SIT apotome A B, & ipſi A B longitudine commenſurabilis ſit Γ Δ: dico Γ Δ apotomen eſſe atque ordine eandem quæ A B.

Quoniam enim A B eſt apotome, ſit ipſi congruens B E; ergo [per 74. 10.] A E, E B rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. & fiat ratio B E ad Δ Z eadem quæ eſt A B ad Γ Δ: quare [per 12. 5.] ut una ad unam ita erunt omnes ad omnes: eſt igitur ut tota A E ad totam Γ Z ita A B ad Γ Δ. commenſurabilis autem eſt A B ipſi Γ Δ longitudine: ergo [per 10. 10.] & A E ipſi Γ Z longitudine commenſurabilis erit, & B E ipſi Δ Z. ſunt autem A E, E B rationales potentia ſolum commenſurabiles: ergo [per 10. 10.] & Γ Z, Z Δ rationales erunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea [per 74. 10.] Γ Δ eſt apo-



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρδ'.

Η τῇ ἀποτομῇ μήκει σύμμετρος ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ A B, καὶ τῇ A B σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ Γ Δ· λέγω ὅτι καὶ ἡ Γ Δ ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ A B.

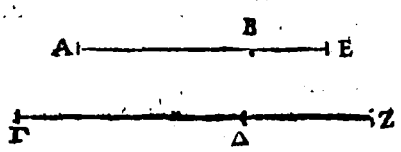
Ἐπεὶ γὰρ ἀποτομή ἐστιν ἡ A B, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ B E. αἱ A E, E B ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τῷ τῆς A B πρὸς τὴν Γ Δ λόγῳ ὁ αὐτὸς γεγονέτω ὁ τῆς B E πρὸς τὴν Δ Z· καὶ ὡς ἓν ἄρα ἐστὶ πρὸς ἕν, πάντα ἐστὶ πρὸς πάντα· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ὅλη ἡ A E πρὸς ὅλην τὴν Γ Z οὕτως ἡ A B πρὸς τὴν Γ Δ. σύμμετρος δὲ ἡ A B τῇ Γ Δ μήκει· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ μὲν A E τῇ Γ Z, ἡ δὲ B E τῇ Δ Z. αἱ δὲ A E, E B ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ Γ Z, Z Δ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Γ Δ.

ἡ ΓΔ. λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ ἕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΖΔ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ ἕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ. ἤτοι δὲ ἡ ΑΕ τοῦ ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΕ τοῦ ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τοῦ ΖΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓΖ. εἰ δὲ ἡ ΕΒ, καὶ ἡ ΔΖ. εἰ δὲ ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ ἑκατέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ. εἰ δὲ ἡ ΑΕ τοῦ ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τοῦ ΖΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓΖ. εἰ δὲ ἡ ΒΕ, καὶ ἡ ΖΔ. εἰ δὲ ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ, ἑκατέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρε'.

Ἡ τῇ μέσης ἀποτομῇ σύμμετρος μέσης ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Ἔστω μέσης ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΓΔ μέσης ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.



Ἐπεὶ γὰρ μέσης ἀποτομή ἐστιν ἡ ΑΒ, ἔστω αὐτῇ συγκειμένη ἡ ΒΕ· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ ἕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ, αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσης ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἡ ΓΔ. δεικτέον δὴ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ ἕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ ἕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ὡς δὲ ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ ἕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ ἕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ ἕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. ἔστι δὲ ῥητὸν ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ῥητὸν ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ἔστι μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, μέσον ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· μέσης ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἡ ΓΔ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

tome: dico & ordine eandem esse quæ AB. quoniam enim est ut AE ad ΓZ ita BE ad ZΔ, erit permutando [per 16. 5.] ut AE ad EB ita ΓZ ad ZΔ. vel igitur AE plus potest quam EB quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. si quidem AE plus potest quam EB quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, & ΓZ plus poterit quam ZΔ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. & si quidem AE commensurabilis est longitudine expositæ rationali, & ΓZ etiam erit. si vero EB est commensurabilis, & ΔZ commensurabilis erit. & si neutra ipsarum AE, EB commensurabilis est longitudine expositæ rationali, & neutra ipsarum ΓZ, ZΔ eidem longitudine erit commensurabilis. quod si AE plus possit quam EB quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine, & ΓZ plus poterit quam ZΔ quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. & si quidem AE sit commensurabilis expositæ rationali longitudine, & ΓZ eidem longitudine commensurabilis erit. si vero BE, & ZΔ. & si neutra ipsarum AB, EB, & neutra ipsarum ΓZ, ZΔ erit expositæ rationali longitudine commensurabilis: ergo [per deff. tert.] ΓΔ apoome est & ordine eadem quæ AB. quod erat demonstr.

PROP. CV. THEOR.

Recta linea mediæ apotomæ commensurabilis & ipsa mediæ apotome est atque ordine eadem.

SIT mediæ apotome AB, & ipsi AB longitudine commensurabilis sit ΓΔ: dico ΓΔ mediæ apotomen esse & ordine eandem quæ AB.

Quoniam enim mediæ apotome est AB, sit BE ipsi AB congruens: ergo [per 75 & 76. 10.] AE, EB mediæ sunt potentia solum commensurabiles. & fiat ut AB ad ΓΔ ita BE ad ΔZ, sunt autem AE, EB mediæ potentia solum commensurabiles: [*ergo & ΓZ, ZΔ mediæ potentia solum commensurabiles erunt;] ac propterea mediæ apotome est ΓΔ. ostendendum est & ordine eandem esse quæ AB. quoniam enim ut AE ad EB ita ΓZ ad ZΔ; ut autem AE ad EB ita [per 1. 6.] quadratum ex AE ad rectangulum sub AE, EB; & ut ΓZ ad ZΔ ita quadratum ex ΓZ ad rectangulum sub ΓZ, ZΔ: erit & ut quadratum ex AE ad rectangulum sub AE, EB ita quadratum ex ΓZ ad rectangulum sub ΓZ, ZΔ. permutando igitur est ut quadratum ex AE ad quadratum ex ΓZ ita rectangulum sub AE, EB ad rectangulum sub ΓZ, ZΔ. sed quadratum ex AB commensurabile est quadrato ex ΓZ: rectangulum igitur sub AE, EB rectangulo sub ΓZ, ZΔ est commensurabile. & si quidem rationale est rectangulum sub AE, EB, & rectangulum sub ΓZ, ZΔ rationale erit: si vero rectangulum sub AE, EB medium est, & medium erit rectangulum sub ΓZ, ZΔ: mediæ igitur apotome est ΓΔ atque ordine eadem quæ AB. quod erat demonstr.

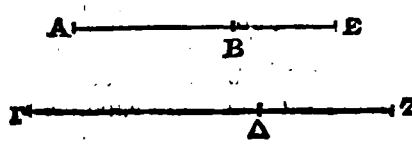
*Illa uncis inclusa non exstant in exemplaribus Græcis.

PROP. CVI. THEOR.

Recta linea minori commenſurabilis & ipſa minor eſt.

SIT minor AB, & ipſi AB commenſurabilis ſit ΓΔ: dico & ΓΔ minorem eſſe.

Fiant enim eadem quæ prius. & quoniam AE, EB potentia ſunt incommenſurabiles, & ΓZ, ZΔ potentia incommenſurabiles erunt. quoniam autem eſt ut AE ad EB ita ΓZ ad ZΔ: erit [per 22.6.] & ut quadratum ex AE ad quadratum ex EB ita quadratum ex ΓZ ad quadratum ex ZΔ; & componendo [per 18. 5.] ut quadrata ex AE, EB ad quadratum ex EB ita quadrata ex ΓZ, ZΔ ad quadratum ex ZΔ, & permutando. commenſurabile autem eſt quadratum ex BE quadrato ex ΔZ: ergo [per 10.10.] & compoſitum ex quadratis ipſarum AE, EB compoſito ex quadratis ipſarum ΓZ, ZΔ commenſurabile erit. ſed compoſitum ex quadratis ipſarum AE, EB eſt rationale; ergo & rationale erit compoſitum ex quadratis ipſarum ΓZ, ZΔ. rurſus, quoniam eſt ut quadratum ex AE ad rectangulum ſub AE, EB ita quadratum ex ΓZ ad rectangulum ſub ΓZ, ZΔ, & permutando: commenſurabile autem eſt quadratum ex AE quadrato ex ΓZ; erit igitur & rectangulum ſub AE, EB rectangulo ſub ΓZ, ZΔ commenſurabile. ſed rectangulum ſub AE, EB medium eſt: medium igitur eſt [per 24.10.] & rectangulum ſub ΓZ, ZΔ: quare ΓZ, ZΔ potentia incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis rationale, quod autem ſub ipſis continetur medium: ergo [per 77.10.] ΓΔ eſt minor. quod erat demonſtrandum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρϛ'.

Η τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος καὶ ἐλάσσων ἐστίν.

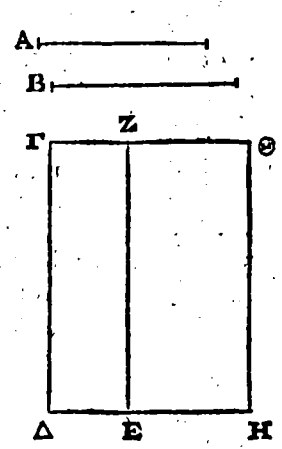
ΕΣτω ἐλάσσων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ἐλάσσων ἐστί.

Γεγονέτω γὰρ τὰ αὐτὰ τῷ πρότερον. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ· συνθέντι ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ, καὶ ἐναλλάξ. σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων. ῥητὸν δέ ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, καὶ ἐναλλάξ· σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον· ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ALITER.

Sit minor A, & ipſi A commenſurabilis ſit B: dico B minorem eſſe.

Exponatur enim ΓΔ rationalis, & quadrato ex A æquale prallelogrammum ΓE ad ipſam ΓΔ applicetur latitudinem faciens ΓZ: apotome igitur quarta eſt ΓZ [per 101. 10.]. quadrato autem ex B æquale ad ZE applicetur ZH latitudinem faciens ZΘ. quoniam igitur A commenſurabilis eſt ipſi B, erit & quadratum ex A quadrato ex B commenſurabile. ſed quadrato quidem ex A æquale eſt parallelogrammum ΓE, quadrato autem ex B æquale ZH: ergo ΓE commenſurabile eſt ipſi ZH. ut autem ΓE ad ZH ita [per 1. 6.] ΓZ ad ZΘ: commenſurabilis igitur [per 10.10.] eſt ΓZ ipſi ZΘ longitudine. ſed ΓZ eſt apotome quarta: ergo [per 104.10.] & ZΘ apotome quarta eſt: ergo & ſpatium ZH ſub rationali & apotoma quarta continetur: recta igitur linea ſpatium potens [per 95.



ΑΛΛΩΣ.

Ἐστω ἐλάσσων ἡ Α, καὶ τῇ Α σύμμετρος ἔστω ἡ Β· λέγω ὅτι ἡ Β ἐλάσσων ἐστίν.

Ἐκκείσθω γὰρ ἡ ΓΔ ῥητή, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον παρὰ τὴν ΖΕ παραβεβλήσθω τὸ ΖΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΘ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Β. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον τὸ ΓΕ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον τὸ ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΕ τῷ ΖΗ. ὡς δὲ τὸ ΓΕ πρὸς τὸ ΖΗ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΘ· σύμμετρος ἄρα ἡ ΓΖ τῇ ΖΘ μήκει. ἀποτομὴ δέ ἐστι πρώτη ἡ ΓΖ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΘ πρώτη· τὸ ΖΗ ἄρα περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης· ἡ τὸ χωρίον ἄρα δυναμένη ἐλάσσων

ἐλάσσων ἐστί. δυνατὴ δὲ τὸ ΖΗ ἡ Β· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ Β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10.] minor est. potest autem spatium Z H ipsa B: ergo B est minor. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρζ'.

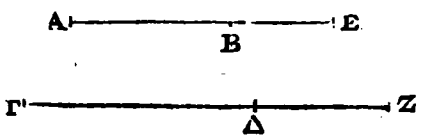
Ἡ τῇ μὴ ῥητῇ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα σύμμετρος καὶ αὐτὴ μὴ ῥητὴ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Prop. CVII. Theor.

Recta linea commensurabilis ei quæ cum rationali medium totum efficit & ipsa cum rationali medium totum efficiens est.

Ἔστω μετὰ ῥητὴν μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ μετὰ ῥητὴν μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

SIT cum rationali medium totum efficiens AB: & ipsi AB commensurabilis sit ΓΔ: dico ΓΔ esse eam, quæ cum rationali medium totum efficit.



Ἐπεὶ γὰρ τῇ ΑΒ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΕ. αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ ὑπὸ αὐτῶν ῥητόν. καὶ τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω. ὁμοίως δὴ δείξομεν τοῖς πρόσθεν, ὅτι ἡ ΓΖ, ΖΔ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ ταῖς ΑΕ, ΕΒ, καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ὥστε καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ ὑπὸ αὐτῶν ῥητόν· ἡ ΓΔ ἄρα μετὰ ῥητὴν μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

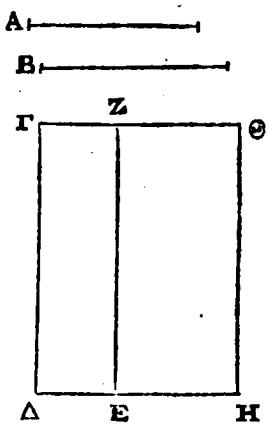
Sit enim ipsi AB congruens BE. ergo [per 78. 10.] AE, EB potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis medium; quod autem sub ipsis continetur rationale. & eadem construantur. similiter demonstrabitur atque prius, ΓZ, ZΔ in eadem esse ratione in qua AE, EB; & compositum ex quadratis ipsarum AE, EB commensurabile esse composito ex quadratis ipsarum ΓZ, ZΔ; rectangulum autem sub AE, EB rectangulo sub ΓZ, ZΔ commensurabile: quare & ΓZ, ZΔ potentia incommensurabiles sunt, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum ΓZ, ZΔ medium, quod autem sub ipsis continetur rationale: ergo [per 78. 10.] ΓΔ est quæ cum rationali medium totum efficit. quod erat demonstrandum.

ΑΛΛΩΣ.

Ἔστω ἡ μετὰ ῥητὴν μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ Α, σύμμετρος δὲ αὐτῇ ἡ Β· λέγω ὅτι ἡ Β μετὰ ῥητὴν μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Aliter.

Sit cum rationali medium totum efficiens A, & ipsi A sit commensurabilis B: dico B esse eam quæ cum rationali medium totum efficit.



Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ πέμπτη ἡ ΓΖ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον παρὰ τὴν ΖΕ παραβεβλήσθω τὸ ΖΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΘ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Β. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον τὸ ΓΕ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον τὸ ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΕ τῷ ΖΗ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΖΘ μήκει. ἀποτομὴ δὲ πέμπτη ἡ ΓΖ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ πέμπτη καὶ ἡ ΖΘ, ῥητὴ δὲ ἡ ΖΕ. ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ ῥητὴν μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστι. δύναται δὲ τὸ ΖΗ ἡ Β· ἡ Β ἄρα μετὰ ῥητὴν μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

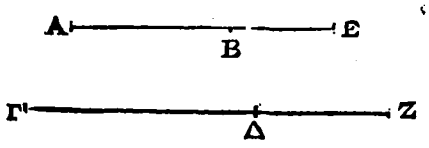
Exponatur enim rationalis ΓΔ, & quadrato quidem ex A æquale parallelogrammum ΓΕ ad ipsam ΓΔ applicetur latitudinem faciens ΓΖ: ergo [per 102. 10.] ΓΖ est apotome quinta. quadrato autem ex B æquale ZH ad ipsam ZE applicetur latitudinem faciens ZΘ. quoniam igitur A commensurabilis est ipsi B, erit & quadratum ex A quadrato ex B commensurabile. sed quadrato ex A æquale est parallelogrammum ΓΕ; quadrato autem ex B æquale ZH: ergo ΓΕ est commensurabile ipsi ZH: & ob id recta linea ΓΖ ipsi ZΘ longitudine est commensurabilis. apotome autem quinta est ΓΖ: ergo [per 104. 10.] & ZΘ est apotome quinta; estque ZE rationalis. si autem spatium contineatur sub rationali & apotoma quinta, recta linea spatium potens [per 96. 10.] est quæ cum rationali medium totum efficit. sed [per constr.] ipsa B potest spatium ZH: ergo ipsa B cum rationali medium totum efficiens est. quod erat demonstrandum.

Prop.

Prop. CVIII. Theor.

Recta linea commenſurabilis ei quæ cum medio medium totum efficit & ipſa cum medio medium totum efficiens eſt.

SIT cum medio medium totum efficiens AB, & ipſi AB commenſurabilis ſit ΓΔ: dico ΓΔ eſſe eam quæ cum medio medium totum efficit.



Sit ipſi AB congruens BE, & eadem conſtruantur. ergo [per 79. 10.] AE, EB potentia incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum ex quadratis ipſarum medium, quod autem ſub ipſis continetur medium, & adhuc compoſitum ex ipſarum quadratis incommenſurabile ei quod ſub ipſis continetur. & ſunt AE, EB commenſurabiles ipſis ΓZ, ZΔ ut [ſupra] oſtenſum eſt; & compoſitum ex quadratis ipſarum AE, EB commenſurabile compoſito ex quadratis ipſarum ΓZ, ZΔ; rectangulumque ſub AB, EB rectangulo ſub ΓZ, ZΔ: ergo ΓZ, ZΔ potentia incommenſurabiles ſunt, facientes compoſitum quidem ex quadratis ipſarum medium, quod autem ſub ipſis continetur medium, & adhuc compoſitum ex ipſarum quadratis incommenſurabile ei quod ſub ipſis continetur: ergo [per 79.10.] ΓΔ eſt quæ cum medio medium totum efficit. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρη'.

Η τῇ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος καὶ αὐτὴ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ AB, καὶ τῇ AB σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

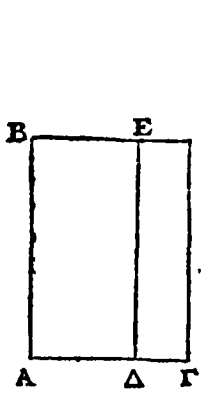
Ἐκκείσθω γὰρ τῇ AB ὡσαύτως μόζουσα ἡ BE, καὶ τὰ αὐτὰ κατασκευάσθω. αἱ AE, EB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῷ ὑπ' αὐτῶν. καί εἰσιν, ὡς ἐδείχθη, αἱ AE, EB σύμμετροι ταῖς ΓZ, ZΔ, καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE, EB τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ, ZΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AE, EB τῷ ὑπὸ τῶν ΓZ, ZΔ· καὶ αἱ ΓZ, ZΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσα τὸ, τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῷ ὑπ' αὐτῶν· ἡ ΓΔ ἄρα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. CIX. Theor.

Medio de rationali detracto, recta linea quæ reliquum ſpatium poteſt una ex duabus irrationalibus fit, vel apotome, vel minor.

DE rationali enim BΓ medium BΔ detrahatur: dico eam quæ reliquum ſpatium EΓ poteſt unam fieri ex duabus irrationalibus, vel apotomen, vel minorem.

Exponatur enim rationalis ZH; & parallelogrammo quidem BΓ æquale HΘ ad ZH applicetur; parallelogrammo autem BΔ æquale auferatur HK: reliquum igitur ΓE eſt æquale ΛΘ. itaque quoniam rationale eſt BΓ, medium autem BΔ; atque eſt BΓ æquale HΘ, & BΔ ipſi HK; erit HΘ rationale, medium autem HK: & ad rationalem ZH applicatum eſt; rationalis igitur [per 21.10.] eſt ZΘ & ipſi ZH longitudine commenſurabilis, ZK vero [per 23. 10.] rationalis & incommenſurabilis ipſi ZH longitudine; ergo [per 13.10.] ZΘ ipſi ZK longitudine incommenſurabilis eſt: quare ZΘ, ZK rationales ſunt

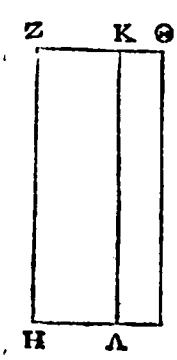


ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρθ'.

Ἀπὸ ῥητοῦ μέσου ἀφαιρουμένου, ἡ τὸ λοιπὸν χωρίον δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται, ἤτοι ἀποτομή, ἢ ἐλάττων.

Ἀπὸ γὰρ ῥητοῦ τοῦ BΓ μέσον ἀφῃρήσθω τὸ BΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν χωρίον δυναμένη τὸ BΓ μία δύο ἀλόγων γίνεται, ἤτοι ἀποτομή, ἢ ἐλάττων.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ZH, καὶ τῷ μὲν BΓ ἴσον παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ HΘ, τῷ δὲ BΔ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ HK· λοιπὸν ἄρα τὸ ΓE ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΘ. ἐπεὶ οὖν ῥητὸν μέν ἐστι τὸ BΓ, μέσον δὲ τὸ BΔ, ἴσον δὲ τὸ BΓ τῷ HΘ, τὸ δὲ BΔ τῷ HK· ῥητὸν μὲν ἄρα ἐστὶ τὸ HΘ, μέσον δὲ τὸ HK· καὶ παράκειται ῥητῇ τινὶ τῇ ZH· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ZΘ καὶ σύμμετρος τῇ ZH μήκει, ῥητὴ δὲ ἡ ZK καὶ ἀσύμμετρος τῇ ZH μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ZΘ τῇ ZK μήκει· αἱ ZΘ, ZK ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει



δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ, τῇ συναμφοτέρῳ δὲ αὐτῇ ἡ ΚΖ. ἤτοι δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου. καὶ ἔστιν ὅλη ἡ ΘΖ συμμέτρῳ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης ἡ δυναμένη ἀποτομή ἐστιν· ἡ ἄρα τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΓΕ, δυναμένη ἀποτομή ἐστιν. εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν ὅλη ἡ ΘΖ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα τετάρτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιεχόμενον ἡ δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν· ἡ ἄρα τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

potentia ſolum commenſurabiles: ac propterea [per 74. 10.] ΚΘ eſt apotome, ipſi vero congruens ΚΖ. vel igitur ΘΖ plus poteſt quam ΖΚ quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, vel incommenſurabilis. poſſit primum quadrato rectæ lineæ commenſurabilis. atque eſt tota ΘΖ commenſurabilis longitudine expoſitæ rationali ΖΗ: ergo [per 1. deff. tert. 10.] ΚΘ eſt apotome prima. recta autem linea quæ poteſt ſpatium ſub rationali & apotoma prima contentum [per 92. 10.] eſt apotome: ergo quæ poteſt ΛΘ, hoc eſt ipſum ΓΕ, apotome eſt. quod ſi ΘΖ plus poſſit quam ΖΚ quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine, eſtque tota ΘΖ expoſitæ rationali ΖΗ longitudine commenſurabilis; erit [per 4. deff. tert. 10.] ΚΘ apotome quarta. & quæ poteſt ſpatium ſub rationali & apotoma quarta contentum [per 95. 10.] minor eſt: quæ igitur poteſt ſpatium ΛΘ, hoc eſt ipſum ΕΓ, eſt minor. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρ΄.

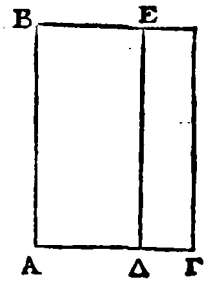
Ἀπὸ μέσου ῥητοῦ ἀφαιρουμένου, ἄλλαι δύο ἄλογοι γίνονται, ἤτοι μέσης ἀποτομὴ πρώτη, ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Prop. CX. Theor.

Rationali de medio detracto, aliæ duæ irrationales fiunt, vel mediæ apotome prima, vel cum rationali medium totum efficiens.

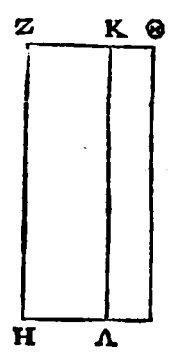
Ἀπὸ γὰρ μέσου τοῦ ΒΓ ῥητὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΒΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν τὸ ΕΓ δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται, ἤτοι μέσης ἀποτομὴ πρώτη, ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

De medio enim ΒΓ rationale ΒΔ detrahatur: dico rectam lineam, quæ reliquum ſpatium ΕΓ poteſt, unam duarum irrationalium fieri, vel mediæ apotomen primam, vel eam quæ cum rationali medium totum efficit.



Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ παραβεβλήσθω ὁμοίως τοῖς χωρίοις· ἔστι δὴ ἀναλύσεως ῥητὴ μὲν ἡ ΖΘ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ ΖΚ, καὶ σύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΖΘ, ΖΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ, τῇ δὲ συναμφοτέρῳ αὐτῇ ἡ ΖΚ. ἤτοι δὲ ἡ ΖΘ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν ἡ συναμφοτέρος ἡ ΖΚ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ δευτέρα ἡ ΘΚ. ῥητὴ δὲ ἡ ΖΗ· ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΓΕ, δυναμένη, μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη. εἰ δὲ ἡ ΘΖ μεῖζον τῆς ΖΚ δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν ἡ συναμφοτέρος ἡ ΖΚ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα πέμπτη ἐστὶν ἡ ΘΚ· ὥστε ἡ τὸ ΕΓ δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

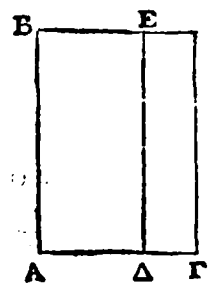
Exponatur enim rationalis ΖΗ, & ad ipſam ſimiliter [ut in præc.] ſpatia applicentur; erit [per 21. 10.] rationalis quidem ΖΘ, & ipſi ΖΗ longitudine incommenſurabilis. rationalis autem ΖΚ [per 23. 10.] & incommenſurabilis ipſi ΖΗ longitudine: ergo ΖΘ, ΖΚ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea [per 74. 10.] ΘΚ eſt apotome, & ipſi congruens ΖΚ. vel igitur ΖΘ plus poteſt quam ΖΚ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. & ſi quidem ΘΖ plus poteſt quam ΖΚ quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; atque eſt congruens ΖΚ commenſurabilis expoſitæ rationali ΖΗ longitudine: erit [per 2. deff. tert. 10.] ΘΚ apotome ſecunda. eſt autem ΖΗ rationalis: ergo [per 93. 10.] quæ poteſt ſpatium ΛΘ, hoc eſt ipſum ΓΕ, eſt mediæ apotome prima. quod ſi ΘΖ plus poteſt quam ΖΚ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; atque eſt congruens ΖΚ commenſurabilis expoſitæ rationali ΖΗ longitudine: erit [per 5. deff. tert. 10.] ΘΚ apotome quinta: recta igitur linea potens ſpatium ΕΓ [per 96. 10.] eſt quæ cum rationali medium totum efficit. quod erat demonſtr.



Prop. CXI. Theor.

Medio de medio detracto, quod ſit incommenſurabile toti, reliquæ duæ irrationales fiunt, vel mediæ apotome ſecunda, vel cum medio medium totum efficiens.

DEtrahatur ut in propoſitis figuris de medio ΒΓ medium ΒΔ, quod ſit incommenſurabile toti: dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium ΓΕ, unam eſſe ex duabus irrationalibus, vel mediæ apotomen ſecundam, vel eam quæ cum medio medium totum efficit.



Quoniam enim medium eſt utrumque ipſorum ΒΓ, ΒΔ, & ΒΓ incommenſurabile eſt ipſi ΒΔ, hoc eſt ΗΘ ipſi ΗΚ; erit [per 1.6. & 10. 10.] ΘΖ ipſi ΖΚ incommenſurabilis longitudine: ergo [per 23.10.] ΘΖ, ΖΚ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; & ob id [per 74.10.] ΘΚ eſt apotome, & ipſi congruens ΚΖ. itaque vel ΘΖ plus poteſt quam ΖΚ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis vel incommenſurabilis. & ſi quidem ΘΖ plus poteſt quam ΖΚ quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, & neutra ipſarum ΘΖ, ΖΚ commenſurabilis eſt expoſitæ rationali ΖΗ longitudine; erit [per 3. deff. tert. 10.] ΘΚ apotome tertia. rationalis autem eſt ΚΛ; & [per 94. 10.] rectangulum ſub rationali & apotoma tertia contentum irrationale eſt; & recta linea, quæ ipſum poteſt, eſt irrationalis; & vocatur mediæ apotome ſecunda. ſi vero ΘΖ plus poteſt quam ΖΚ quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine, & neutra ipſarum ΘΖ, ΖΚ longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali ΖΗ; erit [per 6. deff. tert. 10.] ΘΚ apotome ſexta. at [per 97. 10.] recta linea potens quod ſub rationali & apotoma ſexta continetur eſt quæ cum medio medium totum efficit: ergo quæ poteſt ſpatium ΛΘ, hoc eſt ipſum ΕΓ, eſt cum medio medium totum efficiens. quod erat demonſtrandum.

Prop. CXII. Theor.

Apotome non eſt eadem quæ ex binis nominibus.

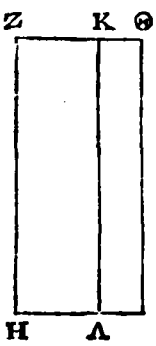
SIT apotome ΑΒ: dico ΑΒ non eſſe eandem quæ ex binis nominibus.

Sit enim ſi fieri poteſt; exponaturque rationalis ΔΓ, & [per 45.1.] quadrato ex ΑΒ æquale rectangulum ΓΕ ad ipſam ΔΓ applicetur, latitudinem faciens ΔΕ. quoniam igitur ΑΒ eſt apotome, erit [per 98.10.] ΔΕ apotome prima. ſit ipſi congruens ΕΖ: ergo [per 1. deff. tert. 10.] ΔΖ, ΖΕ rationales ſunt potentia ſolum commen-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ρια'.

Ἀπὸ μέσου μέσου ἀφαιρεθὲν ἀσυμμέτρου τῷ ὅλῳ, αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται, ἤτοι μέσης ἀποτομὴ δευτέρα, ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀφῃρήσθω γὰρ ὡς ὅτι τὸ προκειμένων καταγραφῶν ἀπὸ μέσου τοῦ ΒΓ μέσον τὸ ΒΔ, ἀσύμμετρον τῷ ὅλῳ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΓΕ δυναμένη μία ἐστὶ δύο ἀλόγων, ἤτοι μέσης ἀποτομὴ δευτέρα, ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.



* Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΒΓ, ΒΔ, καὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, τουτέστι τὸ ΗΘ τῷ ΗΚ, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΘΖ τῇ ΖΚ· αἱ ΘΖ, ΖΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ, προσαρμόζουσα δὲ ἡ ΚΖ. ἤτοι δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ᾗ δὲ ἑτέρα τῶν ΘΖ, ΖΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΖΗ μήκει· ἀποτομή ἐστιν ἄρα τρίτη ἡ ΘΚ. ῥητὴ δὲ ἡ ΚΛ, τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τρίτης περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ ἀποτομὴ μέσης δευτέρα. εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἑκατέρα τῶν ΘΖ, ΖΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομή ἐστιν ἄρα ἕκτη ἡ ΘΚ. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς ἕκτης ἡ δυναμένη ἐστὶν ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα· ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριβ'.

Ἡ ἀποτομὴ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

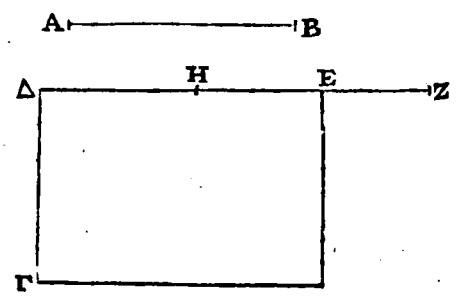
Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΓ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΔΓ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΕ. ἐπεὶ οὖν ἀποτομή ἐστιν ἡ ΑΒ, ἀποτομὴ πρώτη ἐστὶν ἡ ΔΕ. ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΕΖ· αἱ ΔΖ, ΖΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον

* Ita in *Codd. MSS.* ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΒΓ, ΒΔ, καὶ ἀσύμμετρον τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, ἴσον ἄρα ἐστὶ παραλληλογράμμῳ τῷ ΖΘ, ΖΚ, καὶ ἀσύμμετρον τῇ ΖΗ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, τουτέστι τὸ ΗΘ τῷ ΗΚ.

σύμ-

σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΖΕ μεῖζον δυνάται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ᾧ ἡ ΔΖ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ μήκει. πάλιν, ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη ἡ ΔΕ. διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Η, καὶ ἔστω μεῖζον ὄνομα τὸ ΔΗ· αἱ ΔΗ, ΗΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἡ ΔΗ τῆς ΗΕ μεῖζον δυνάται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ μεῖζων ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΓ μήκει· ἡ ΔΖ ἄρα τῇ ΔΗ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ λοιπὴ ἄρα τῇ ΖΗ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΖ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ, ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ μήκει, ἀσύμμετρος δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΖΕ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΖΕ μήκει. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΗΖ, ΖΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΗ. ἀλλὰ καὶ ῥητὴ, ὅπερ ἀδύνατον.



Η ἄρα ἀποτομὴ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Η ἀποτομὴ καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλογοι ὅτι τῇ μέσῃ ὅτι ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταί· τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει. τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην. τὸ δὲ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν. τὸ δὲ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην. τὸ δὲ ἀπὸ ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῶν μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῶν μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην. Ἐπεὶ οὖν τὰ εἰρημένα πλάτη διαφέρει τόπῳ πρώτῃ καὶ ἀλλήλων· ὅ μὲν πρώτῃ, ὅτι ῥητή ἐστιν, ἀλλήλων δὲ, ὅτι τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί· δῆλον ὡς καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι διαφέρουσιν ἀλλήλων. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ ἀποτομὴ οὐκ οὖσα ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων· ποιοῦσι δὲ πλάτη παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενα αἱ μὲν μετὰ τὴν ἀποτομὴν ἀποτομὰς ἀκολούθως ἑκάστῃ τῇ τάξει καθ' αὐτήν· αἱ δὲ

surabiles, & ΔΖ plus poteſt quam ΖΕ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, atque eſt ΔΖ commenſurabilis expoſitæ rationali ΓΔ longitudine. rurſus, quoniam [ex hyp.] ΑΒ eſt ex binis nominibus, erit [per 61.10.] ΔΕ ex binis nominibus prima. dividatur in nomina ad punctum Η, ſitque ΔΗ majus nomen: ergo [per 1. deff. ſecund. 10.] ΔΗ, ΗΕ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. & ΔΗ plus poteſt quam ΗΕ quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, & major ΔΗ longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali ΔΓ: quare [per 12. 10.] ΔΖ ipſi ΔΗ longitudine eſt commenſurabilis: & reliquæ igitur ΖΗ commenſurabilis erit. itaque quoniam ΔΖ commenſurabilis eſt ipſi ΖΗ, atque eſt rationalis ΔΖ; erit & ΖΗ rationalis. rurſus, quoniam ΔΖ commenſurabilis eſt ipſi ΖΗ longitudine, atque eſt ΔΖ ipſi ΖΕ incommenſurabilis longitudine; erit & ΖΗ ipſi ΖΕ longitudine incommenſurabilis. & ſunt rationales: ergo ΗΖ, ΖΕ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; ac propterea [per 74.10.] ΕΗ eſt apotome. ſed & rationalis, quod fieri non poteſt.

Ergo apotome non eſt eadem quæ ex binis nominibus. quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Apotome & quæ ipſam conſequuntur irrationales neque mediæ neque inter ſe eædem ſunt: quadratum enim quod à media fit ad rationalem applicatum latitudinem facit rationalem, [per 23. 10.] & ei ad quam applicatur longitudine incommenſurabilem. quod autem ab apotoma fit ad rationalem applicatum [per 98.10.] latitudinem facit apotomen primam. quod fit à mediæ apotoma prima ad rationalem applicatum [per 99.10.] latitudinem facit apotomen ſecundam. quod fit à mediæ apotoma ſecunda ad rationalem applicatum [per 100. 10.] latitudinem facit apotomen tertiam. quod fit à minori ad rationalem applicatum [per 101. 10.] latitudinem facit apotomen quartam. quod ab ea quæ cum rationali medium totum efficit ad rationalem applicatum [per 102.10.] latitudinem facit apotomen quintam. quod ab ea quæ cum medio medium totum efficit ad rationalem applicatum [per 103. 10.] latitudinem facit apotomen ſextam. quoniam igitur dictæ latitudines differunt tum à prima tum inter ſeſe; à prima quidem, quod illa rationalis ſit, inter ſe vero, quod ordine non ſint eædem: manifeſtum eſt & ipſas haſce irrationales inter ſe differentes eſſe. & quoniam oſtenſum eſt [per 112.10.] apotomen non eſſe eandem quæ ex binis nominibus: & quadrata quidem apotomæ & earum quæ ſequuntur apotomen ad rationalem applicata [per propoſitiones modo citatas] latitudines facere apotomas ejuſdem ordinis cujus illæ ſunt quæ apotomen ſequuntur; quadrata

vero ejus quæ eſt ex binis nominibus & earum quæ ipſam ſequuntur ad rationalem applicata [per 61,62,63,64,65, & 66.10] latitudines facere eas, quæ ex binis nominibus ejuſdem ordinis, cujus illæ ſunt quæ ſequuntur eam quæ ex binis nominibus: ergo rectæ lineæ quæ ſequuntur apotomen, & quæ ſequuntur eam quæ ex binis nominibus, inter ſe diverſæ erunt, ita ut omnes irrationales ſint numero tredecim,

μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τὰς ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αὐτὰς τῇ τάξει ἀκολούθως· ἕτεραι ἄρα εἰσὶν αἱ μετὰ τὴν ἀποτομὴν, καὶ ἑτέραι αἱ μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ὡς εἶναι τῇ τάξει πάσας ἀλόγους ιγ',

1. Media.	α'. Μέσην.
2. Quæ ex binis nominibus.	β'. Ἐκ δύο ὀνομάτων.
3. Quæ ex binis mediis prima.	γ'. Ἐκ δύο μέσων πρώτην.
4. Quæ ex binis mediis ſecunda.	δ'. Ἐκ δύο μέσων δευτέραν.
5. Major.	ε'. Μείζονα.
6. Rationale ac medium potens.	ς'. Ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένην.
7. Bina media potens.	ζ'. Δύο μέσα δυναμένην.
8. Apotome.	η'. Ἀποτομήν.
9. Mediæ apotome prima.	θ'. Μέσης ἀποτομὴν πρώτην.
10. Mediæ apotome ſecunda.	ι'. Μέσης ἀποτομὴν δευτέραν.
11. Minor.	ια'. Ἐλάσσονα.
12. Cum rationali medium totum efficiens.	ιβ'. Μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν.
13. Cum medio medium totum efficiens.	ιγ'. Μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν.

PROP. CXIII. THEOR.

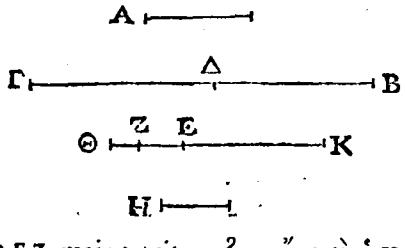
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριγ'.

Quadratum rationalis ad eam quæ ex binis nominibus applicatum latitudinem facit apotomen, cujus nomina commenſurabilia ſunt nominibus ejus quæ eſt ex binis nominibus & in eadem ratione; & adhuc apotome quæ fit eundem habet ordinem quem ea quæ eſt ex binis nominibus.

Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομήν, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι, καὶ ἔτι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ καὶ ἔτι ἡ γινομένη ἀποτομὴ τὴν αὐτὴν ἔχει τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

SIT rationalis A; ea quæ eſt ex binis nominibus BΓ, cujus majus nomen ΓΔ; & quadrato ex A æquale rectangulum ſit quod ſub BΓ, EZ continetur: dico EZ apotomen eſſe, cujus nomina commenſurabilia ſunt ipſis ΓΔ, ΔB, & in eadem ratione; & adhuc EZ eundem ordinem habere, quem habet BΓ.

Sit enim rurſus quadrato ex A æquale rectangulum quod ſub BΔ & H continetur. itaque quoniam rectangulum contentum ſub BΓ, EZ eſt æquale ei quod ſub BΔ, H continetur, erit [per 16.6] ut ΓB ad BΔ ita H ad EZ. major autem eſt ΓB quam BΔ: ergo & H quam EZ major erit. fit ipſi H æqualis EΘ: eſt igitur ut ΓB ad BΔ ita ΘE ad EZ: & dividendo [per 17.5.] ut ΓΔ ad ΔB ita ΘZ ad ZE. fiat ut ΘZ ad ZE ita ZK ad KE: ergo & tota ΘK ad totam KZ eſt ut ZK ad KE; ut enim unum antecedentium ad unum conſequentium ita [per 12.5.]



Ἔστω ῥητὴ μὲν ἡ Α, ἐκ δύο δὲ ὀνομάτων ἡ ΒΓ, ἧς μεῖζον ὄνομα ἔστω ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΖ· λέγω ὅτι ἡ ΕΖ ἀποτομή ἐστιν, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς ΓΔ, ΔΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ ΕΖ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν τῇ ΒΓ.

Ἔστω γὰρ πάλιν τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, Η. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ, Η· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ Η πρὸς τὴν ΕΖ. μείζων δὲ ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ· μείζων ἄρα καὶ ἡ Η τῆς ΕΖ. ἔστω οὖν τῇ Η ἡ ΕΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΖ· διελόντι ἄρα ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ. γεγονέτω ὡς ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς τὴν ΕΚ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΘΚ πρὸς ὅλην τὴν ΚΖ ἐστιν ὡς ἡ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΕ, ὡς γὰρ ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντα

ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ὡς δὲ ἡ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΕ ἕτως ἐστὶν ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΖ ἕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΖ. καὶ ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ ἕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΕ, ἐπεὶ αἱ τρεῖς αἱ ΘΚ, ΚΖ, ΚΕ ἀνάλογόν εἰσι· σύμμετρος ἄρα ἡ ΘΚ τῇ ΚΕ μήκει· ὥστε καὶ ἡ ΘΕ τῇ ΕΚ σύμμετρός ἐστι μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΘΕ, ΒΔ, ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΘΕ, ΒΔ. παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΔ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΕ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει· ὥστε καὶ ἡ σύμμετρος αὐτῇ ἡ ΕΚ ῥητή ἐστι καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ ἕτως ἡ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΕ, αἱ δὲ ΓΔ, ΔΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· καὶ αἱ ΖΚ, ΚΕ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΚΕ, καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΚ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει· αἱ ΖΚ, ΚΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ. ἤτοι δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΔ. εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ. εἰ δὲ ἑκατέρα τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ ἑκατέρα τῶν ΖΚ, ΚΕ. εἰ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΚ. εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ. εἰ δὲ ἑκατέρα τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ ἑκατέρα τῶν ΖΚ, ΚΕ· ὥστε ἀποτομή ἐστιν ἡ ΖΕ, ἧς τὰ ὀνόματα τὰ ΖΚ, ΚΕ σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι, τοῖς ΓΔ, ΔΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ τάξει αὐτῷ ἔχει τάξιν τῇ ΒΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριδ'.

Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ ἀποτομὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ἔτι δὲ ἡ γινομένη ἐκ δύο ὀνομάτων τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει τῇ ἀποτομῇ.

ΕΣτω ῥητὴ μὲν ἡ Α, ἀποτομὴ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΚΘ, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς Α ῥητῆς παρὰ τὴν ΒΔ ἀποτομὴν

antecedentia omnia ad omnia conſequentia. ſed ut ΖΚ ad ΚΕ ita ΓΔ ad ΔΒ: & igitur ut ΘΚ ad ΚΖ ita ΓΔ ad ΔΒ. commenſurabile autem [per 37. 10.] eſt quadratum ex ΓΔ quadrato ex ΔΒ: ergo [per 10. 10.] & quadratum ex ΘΚ quadrato ex ΚΖ eſt commenſurabile. atque [per 2. coroll. 20. 6.] eſt ut quadratum ex ΘΚ ad quadratum ex ΚΖ ita recta linea ΘΚ ad ΚΕ, quoniam tres rectæ lineæ ΘΚ, ΚΖ, ΚΕ deinceps proportionales ſunt: commenſurabilis igitur eſt ΘΚ ipſi ΚΕ longitudine: ergo [per 16. 10.] & ΘΕ ipſi ΕΚ longitudine eſt commenſurabilis. & quoniam quadratum ex Α eſt æquale ei quod ſub ΘΕ, ΒΔ continetur, rationale autem eſt quadratum ex Α: erit & quod ſub ΘΕ, ΒΔ continetur rationale. & ad rationalem ΒΔ applicatum eſt: rationalis igitur [per 21. 10.] eſt ΘΕ & ipſi ΒΔ longitudine commenſurabilis; ideoque & ΕΚ quæ eſt commenſurabilis ipſi ΘΕ rationalis erit, & ipſi ΒΔ commenſurabilis longitudine. quoniam igitur eſt ut ΓΔ ad ΔΒ ita ΖΚ ad ΚΕ; ſunt autem ΓΔ, ΔΒ potentia ſolum commenſurabiles: & ΖΚ, ΚΕ potentia ſolum commenſurabiles erunt. rationalis autem eſt ΚΕ, & ipſi ΒΔ commenſurabilis longitudine: quare & ΖΚ eſt rationalis, ipſique ΓΔ longitudine commenſurabilis; ſunt igitur ΖΚ, ΚΕ rationales, & potentia ſolum commenſurabiles; & idcirco [per 74. 10.] ΕΖ apotome eſt. itaque vel ΓΔ plus poteſt quam ΔΒ quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine, vel incommenſurabilis. & ſi quidem ΓΔ plus poteſt quam ΔΒ quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine, etiam ΖΚ plus poterit quam ΚΕ quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. & ſi ΓΔ eſt commenſurabilis expoſitæ rationali longitudine, & ΖΚ eidem commenſurabilis erit. ſi autem ΒΔ, & ΚΕ. & ſi neutra ipſarum ΓΔ, ΔΒ, & neutra ipſarum ΖΚ, ΚΕ. quod ſi ΓΔ plus poteſt quam ΔΒ quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine, & ΖΚ plus poterit quam ΚΕ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. & ſi quidem ΓΔ eſt longitudine commenſurabilis expoſitæ rationali, erit & ΖΚ eidem commenſurabilis. & ſi ΒΔ, & ΚΕ. at ſi neutra ipſarum ΓΔ, ΔΒ, & neutra ipſarum ΖΚ, ΚΕ: ergo ΖΕ apotome eſt, cujus nomina ΖΚ, ΚΕ commenſurabilia ſunt nominibus ΓΔ, ΔΒ ejus quæ eſt ex binis nominibus & in eadem ratione, & eundem habet ordinem quem ΓΒ. quod erat demonſtrandum.

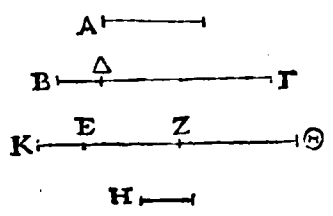
Prop. CXIV. Theor.

Quadratum rationalis ad apotomen applicatum latitudinem facit eam quæ ex binis nominibus, cujus nomina commenſurabilia ſunt apotomæ nominibus, & in eadem ratione; & adhuc quæ ex binis nominibus fit eundem habet ordinem quem ipſa apotome.

SIT rationalis quidem Α, apotome autem ΒΔ; & quadrato ex Α æquale ſit quod ſub ΒΔ, ΚΘ continetur, ita ut quadratum rationalis Α ad ΒΔ

applicatum latitudinem faciat ΚΘ: dico ΚΘ eſſe ex binis nominibus, cujus nomina commenſurabilia ſunt nominibus ipſius ΒΔ, & in eadem ratione; & ΚΘ eundem habere ordinem quem habet ΒΔ.

Sit enim ipſi ΒΔ congruens ΔΓ: ergo [per 74.10.] ΒΓ, ΓΔ rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. & quadrato ex Α æquale ſit quod ſub ΒΓ, Η continetur. rationale autem eſt quadratum ex Α: ergo quod ſub ΒΓ, Η continetur eſt rationale. & ad rationalem ΒΓ applicatum eſt: rationalis igitur [per 21.10.] eſt recta linea Η, ipſique ΒΓ longitudine commenſurabilis. itaque quoniam rectangulum contentum ſub ΒΓ, Η eſt æquale ei quod ſub ΒΔ, ΚΘ continetur, erit [per 16.6.] ut ΓΒ ad ΒΔ ita ΚΘ ad Η. major autem eſt ΓΒ quam ΒΔ: ergo & ΚΘ quam Η eſt major. ponatur ipſi Η æqualis ΚΕ: commenſurabilis igitur eſt ΚΒ ipſi ΒΓ longitudine. & quoniam eſt ut ΓΒ ad ΒΔ ita ΘΚ ad ΚΒ, erit per converſionem rationis ut ΒΓ ad ΓΔ ita ΚΘ ad ΘΒ. fiat ut ΚΘ ad ΘΕ ita ΘΖ ad ΖΕ: & reliqua igitur ΚΖ ad ΖΘ eſt [per 19.5.] ut ΚΘ ad ΘΕ, hoc eſt, ut ΒΓ ad ΓΔ. ſed ΒΓ, ΓΔ potentia ſolum ſunt commenſurabiles: ergo & ΚΖ, ΖΘ potentia ſolum commenſurabiles erunt. & cum ſit ut ΚΘ ad ad ΘΒ ita ΚΖ ad ΖΘ; ut autem ΚΘ ad ΘΕ ita ΘΖ ad ΖΒ; erit & ut ΚΖ ad ΖΘ ita ΘΖ ad ΖΒ: quare [per 2. corol. 20.6] ut prima ad tertiam ita quadratum ex prima ad quadratum ex ſecunda: ut igitur ΚΖ ad ΖΕ ita quadratum ex ΚΖ ad id quod fit ex ΖΘ quadratum. commenſurabile autem eſt quadratum ex ΚΖ quadrato ex ΖΘ; ſunt enim ΚΖ, ΖΘ potentia commenſurabiles: ergo & ΚΖ ipſi ΖΕ commenſurabilis eſt longitudine: ac propterea [per 16.10.] ΖΚ ipſi ΚΕ longitudine commenſurabilis. ſed ΚΒ rationalis eſt & ipſi ΒΓ longitudine commenſurabilis: ergo & ΚΖ rationalis erit & ipſi ΒΓ commenſurabilis longitudine. & quoniam eſt ut ΒΓ ad ΓΔ ita ΚΖ ad ΖΘ, erit permutando ut ΒΓ ad ΚΖ ita ΔΓ ad ΖΘ. commenſurabilis autem eſt ΒΓ ipſi ΚΖ: quare [per 10.10.] & ΓΔ ipſi ΖΘ eſt commenſurabilis. ſuntque ΒΓ, ΓΔ rationales potentia ſolum commenſurabiles; ergo & ΚΖ, ΖΘ rationales erunt potentia ſolum commenſurabiles: ex binis igitur nominibus [per 37.10.] eſt ΚΘ. & ſi quidem ΒΓ plus poteſt quam ΓΔ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, & ΚΖ plus poterit quam ΖΘ quadrato rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine. & ſi ΒΓ longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali, & ΚΖ eidem commenſurabilis erit. ſi vero ΓΔ eſt commenſurabilis longitudine expoſitæ rationali, erit & ipſa ΖΘ eidem commenſurabilis. & ſi neutra ipſarum ΒΓ, ΓΔ, & neutra ipſarum ΚΖ, ΖΘ. at ſi ΒΓ plus poterit quam ΓΔ quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, & ΚΖ plus poterit quam ΖΘ quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine. & ſiquidem ΒΓ



ὑποτεμνέτω ὡς ἐν ἀμφοτέροις τὰ Η τὴν ΚΘ· λέγω ὅτι ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΚΘ, καὶ τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ΒΔ ὀνόμασι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ὅτι ἡ ΚΘ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν τῇ ΒΔ.

Ἐστω γὰρ τῇ ΒΔ συμμέτρως ἡ ΔΓ· αἱ ΒΓ, ΓΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΓ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Η, καὶ σύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η ἐστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΚΘ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν Η. μείζων δὲ ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΚΘ τῆς Η. κείσθω τῇ Η ἴση ἡ ΚΕ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΕ τῇ ΒΓ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΕ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ. γεγονέτω ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ ἐστὶν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ, τουτέστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ. αἱ δὲ ΒΓ, ΓΔ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· καὶ αἱ ΚΖ, ΖΘ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ οὕτως ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ, ἀλλ' ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ· ὥστε καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ. σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΘ, αἱ γὰρ ΚΖ, ΖΘ δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΖ τῇ ΖΕ μήκει· ὥστε ἡ ΖΚ τῇ ΚΕ σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΚΕ, καὶ σύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΚΖ, καὶ σύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΚΖ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΖΘ. σύμμετρος δὲ ἡ ΒΓ τῇ ΚΖ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΖΘ μήκει. αἱ δὲ ΒΓ, ΓΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΚΖ, ΖΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΚΘ. εἰ μὴ γάρ ἐστιν ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ μεῖζον δυνάμενον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΚΖ τῆς ΖΘ μεῖζον δυνάμενον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὴ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΚΖ. εἰ δὲ ἡ ΓΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΘ. εἰ δὲ ἑκατέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ, καὶ ἑκατέρα τῶν ΚΖ, ΖΘ. εἰ δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ μεῖζον δυνάμενον τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΚΖ τῆς ΖΘ μεῖζον δυνάμενον τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὴ

σύμμετρός

σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΚΖ. εἰ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἡ ΖΘ. εἰ δὲ ἑκατέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ, καὶ ἑκατέρα τῶν ΚΖ, ΖΘ· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΚΘ, ἧς τὰ ὀνόματα τὰ ΚΖ, ΖΘ σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς ΒΓ, ΓΔ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ ἔτι ἡ ΚΘ τῇ ΒΓ τὸν αὐτὸν ἔχει τάξιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ rationali, & ΚΖ eidem commenſurabilis erit. ſi vero ΓΔ, & ipſa ΖΘ. quod ſi neutra ipſarum ΒΓ, ΓΔ, & neutra ipſarum ΚΖ, ΖΘ: ex binis igitur nominibus eſt ΚΘ, cujus nomina ΚΖ, ΖΘ commenſurabilia ſunt nominibus apotomæ ΒΓ, ΓΔ, & in eadem ratione: & [per deff. ſecund. & tert. 10.] ΚΘ eundem tenet ordinem quem ipſa ΒΓ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριέ.

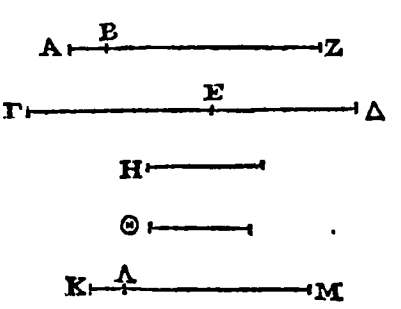
Ἐὰν χωρίον παρέχηται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητή ἐστι.

Prop. CXV. Theor.

Si ſpatium contineatur ſub apotoma & ea quæ ex binis nominibus, cujus nomina commenſurabilia ſunt nominibus apotomæ, & in eadem ratione; recta linea ſpatium potens eſt rationalis.

Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ, ὑπὸ ἀποτομῆς τὴν ΑΒ, καὶ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τὴν ΓΔ, ἧς μεῖζον ὄνομά ἐστι τὸ ΓΕ· καὶ ἔστω τὰ ὀνόματα τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τὰ ΓΕ, ΕΔ σύμμετρά τε τοῖς ἀπὸ τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς ΑΖ, ΖΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τὰ ΑΒ, ΓΔ δυναμένη ἡ Η· λέγω ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ Η.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ Θ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Θ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω πλάτος ποιοῦν τὸ ΚΛ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΛ, ἧς τὰ ὀνόματα ἔστω τὰ ΚΜ, ΜΛ, σύμμετρα τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι τοῖς ΓΕ, ΕΔ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. ἀλλὰ καὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ σύμμετροί εἰσι ταῖς ΑΖ, ΖΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΒ ἕτως ἡ ΚΜ πρὸς τὴν ΜΛ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΚΜ ἕτως ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΛΜ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΚΛ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΚΜ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΖ τῇ ΚΜ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΚΛ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΚΛ ἕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΚΛ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΚΛ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τὰ ΓΔ, ΚΛ τῷ ἀπὸ τῆς Θ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς Θ. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Η· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η τῷ ἀπὸ τῆς Θ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Θ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Η, καὶ δυνατὴ τὸ ὑπὸ τὰ ΓΔ, ΑΒ.



Exponatur enim rationalis Θ, & [per 45. 1.] quadrato ex Θ æquale ad ipſam ΓΔ applicetur, latitudinem faciens ΚΛ; apotome igitur [per 113.10.] eſt ΚΛ, cujus nomina ΚΜ, ΜΛ commenſurabilia ſint nominibus ejus quæ eſt ex binis nominibus ſc. ΓΕ, ΕΔ, & in eadem ratione. ſed [ex hyp.] ΓΕ, ΕΔ commenſurabiles ſunt ipſis ΑΖ, ΖΒ, atque in eadem ratione: eſt igitur [per 11. 5.] ut ΑΖ ad ΖΒ ita ΚΜ ad ΜΛ: & permutando ut ΑΖ ad ΚΜ ita ΖΒ ad ΜΛ: quare [per 19. 5.] & reliqua ΑΒ ad reliquam ΚΛ eſt ut ΑΖ ad ΚΜ. commenſurabilis autem eſt ΑΖ ipſi ΚΜ: ergo [per 10.10.] & ΑΒ ipſi ΚΛ eſt commenſurabilis. eſtq[per 1.6.] ut ΑΒ ad ΚΛ ita rectangulum contentum ſub ΓΔ, ΑΒ ad id quod continetur ſub ΓΔ, ΚΛ: commenſurabile igitur eſt rectangulum contentum ſub ΓΔ, ΑΒ rectangulo quod ſub ΓΔ, ΚΛ continetur. ſed [per conſtr.] rectangulum contentum ſub ΓΔ, ΚΛ eſt æquale quadrato ex Θ: ergo rectangulum quod continetur ſub ΓΔ, ΑΒ quadrato ex Θ eſt commenſurabile. rectangulum autem quod continetur ſub ΓΔ, ΑΒ [ex hyp.] eſt æquale quadrato ex Η: ergo quadratum ex Η commenſurabile eſt quadrato ex Θ. atqui eſt quadratum ex Θ rationale: rationale igitur eſt quadratum ex Η; & idcirco ipſa Η eſt rationalis, & poteſt quod ſub ΓΔ, ΑΒ continetur.

Ἐὰν ἄρα χωρίον παρέχηται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητή ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si igitur ſpatium contineatur ſub apotoma & ea quæ ex binis nominibus, cujus nomina commenſurabilia ſunt nominibus apotomæ, & in eadem ratione; recta linea ſpatium potens eſt rationalis. quod erat demonſtrandum.

Corol-

Corollarium.

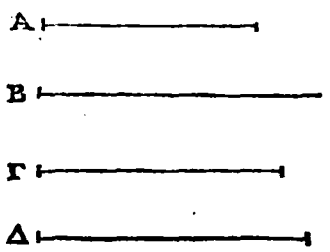
Ex iis manifeſto conſtat fieri poſſe, ut ſpatium rationale ſub irrationalibus rectis lineis contineatur.

PROP. CXVI. THEOR.

A media infinitæ irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium eſt eadem.

SIT media A: dico ex ipſa A infinitas irrationales fieri, & nullam alicui antecedentium eandem eſſe.

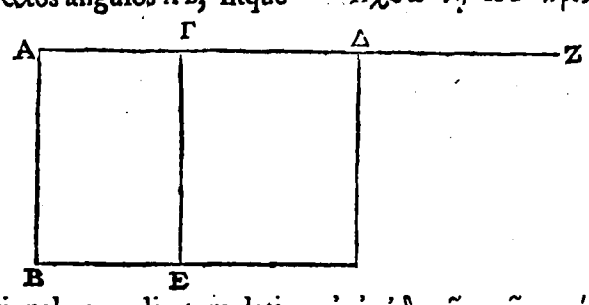
Exponatur rationalis B, & rectangulo contento ſub A, B æquale ſit quadratum ex Γ: irrationalis igitur [per 11.def.10.] eſt ipſa Γ: nam [per ſch.39.10.] quod ſub irrationali & rationali continetur irrationale eſt. & eſt eadem nulli earum quæ prius [in hoc lib.]; non enim [per 61,62,63,64,65,66, & 98,99,100,101,102,103. lib. 10.] quadratum alicujus antecedentium ad rationalem applicatum latitudinem efficit mediam. rurſus, rectangulo quod ſub B,Γ continetur æquale ſit quadratum ex Δ: irrationale igitur [per ſchol. 39.10.] eſt quod fit ex Δ: & idcirco ipſa Δ eſt irrationalis, & nulli antecedentium eadem: neque enim quadratum alicujus earum quæ prius ſunt ad rationalem applicatum latitudinem efficit ipſam Γ. ſimiliter & eodem ordine infinite protracto, manifeſtum eſt à media infinitas irrationales fieri, & nullam alicui antecedentium eandem eſſe. quod erat demonſtrandum.



*ALITER.

Sit media AΓ: dico ex ipſa AΓ infinitas irrationales fieri, & nullam alicui priorum eandem eſſe.

Ducatur ipſi AΓ ad rectos angulos AB, ſitque AB rationalis, & BΓ compleatur: irrationale igitur eſt BΓ, & ipſum potens eſt irrationalis. poſſit autem ipſum recta linea ΓΔ; ergo ΓΔ irrationalis eſt, & nulli priorum eadem; non enim quadratum alicujus priorum ad rationalem applicatum latitudinem efficit mediam. rurſus, compleatur EΔ, erit EΔ irrationale; & recta linea ipſum potens irrationalis. poſſit ipſum recta linea ΔZ: ergo ΔZ irrationalis eſt, & nulli priorum eadem; nullius enim priorum quadratum ad rationalem applicatum latitudinem efficit ipſam ΓΔ.



Ergo à media infinitæ irrationales fiunt, & nulla alicui priorum eſt eadem.

Πόρισμα.

Καὶ γέγονεν ἡμῖν ἐκ δὴ τούτων φανερὸν, ὅτι δυνατόν ἐστι ῥητὸν χωρίον ὑπὸ ἀλόγων εὐθειῶν περιέχεσθαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριϛ'.

Ἀπὸ μέσης ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή.

ΕΣτω μέση ἡ Α· λέγω ὅτι ἀπὸ τῆς Α ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερόν ἐστιν ἡ αὐτή.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Β, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Γ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Γ· τὸ γὰρ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς ἄλογόν ἐστι. καὶ οὐδεμιᾷ πρότερόν ἐστιν ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπὸ οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ μέσην. πάλιν δὴ, τῷ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Δ, καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερόν ἐστιν ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν Γ. ὁμοίως δὴ τῆς τοιαύτης τάξεως ἐπ' ἄπειρον προβαινούσης, φανερὸν ὅτι ἀπὸ τῆς μέσης ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

*ΑΛΛΩΣ.

Ἔστω μέση ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι ἀπὸ τῆς ΑΓ ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ πρότερόν ἐστιν ἡ αὐτή.

Ἤχθω τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΒ, καὶ ἔστω ῥητὴ ἡ ΑΒ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΒΓ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΓ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. δυνάσθω αὐτὸ ἡ ΓΔ· ἄλογος ἄρα ἡ ΓΔ, καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ μέσην. πάλιν, συμπεπληρώσθω τὸ ΕΔ· ἄλογον ἄρα τὸ ΕΔ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. δυνάσθω αὐτὸ ἡ ΔΖ· ἄλογος ἄρα ἡ ΔΖ, καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ΓΔ.

Ἀπὸ τῆς μέσης ἄρα ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρόσθεν ἡ αὐτή.

* Demonſtratio hæc, quæ pro alia habetur tam in *Codd. MSS.* quam in *Editis*, parum differt à præcedente. Illam tamen cum *Commandino* retinuimus: duas licet propoſitiones, quæ ſequuntur in *Græcis Exemplaribus*, plane ejiciendas cenſuimus; utpote eaſdem cum propp. 106 & 107.

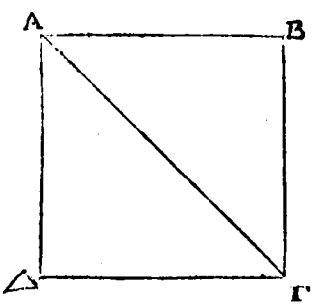
ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ριϛ'.

Προκείσθω ἡμῖν δεῖξαι, ὅτι ἐπὶ τῶν πεπαγώνων σχημάτων ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ μήκει.

Ἔστω πεπάγωνον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι ἡ ΑΓ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ΑΒ μήκει.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω σύμμετρος· λέγω ὅτι συμβήσεται τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἄρτιον εἶναι καὶ περισσόν. Φανερὸν μὲν οὖν ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω ὃν ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Η, καὶ ἔστωσαν οἱ ΕΖ, Η ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οὐκ ἄρα μονὰς ἐστὶν ὁ ΕΖ. εἰ γὰρ ἔσται μονὰς ὁ ΕΖ, καὶ ἔχει λόγον πρὸς τὸν Η ὃν ἔχει ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΒ, καὶ μείζων ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΖ μονὰς τοῦ Η ἀριθμοῦ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα μονὰς ὁ ΕΖ· ἀριθμὸς ἄρα. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Η, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η. διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ· διπλάσιον ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η· ἄρτιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ· ὥστε καὶ αὐτὸς ὁ ΕΖ ἄρτιός ἐστιν. εἰ γὰρ μή ἐστιν, οἱ ΕΖ, Η δύο ἂν εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἵτινες τὸν αὐτὸν λόγον ἔχουσι τοῖς ΕΖ, Η· ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. καὶ ἔστιν ὁ ΕΖ ἄρτιος· περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ Η. εἰ γὰρ ἦν ἄρτιος, τοὺς ΕΖ, Η δύο ἂν εἴη μέτρει, πᾶς γὰρ ἄρτιος ἔχει μέρος ἥμισυ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἄρτιός ἐστιν ὁ Η· περισσὸς ἄρα. καὶ ἐπεὶ διπλάσιόν ἐστιν ὁ ΕΖ τοῦ ΕΘ, πεπαπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΘ· διπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ Η τοῦ ἀπὸ τοῦ ΕΘ· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ Η· ἄρτιος ἄρα διὰ τὰ εἰρημένα ὁ Η. ἀλλὰ περισσός, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ΑΛΛΩΣ.

Δεικτέον δὴ καὶ ἑτέρως, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ τοῦ πεπαγώνου διάμετρος τῇ πλευρᾷ.

Ἔστω γὰρ ἀντὶ μὲν τῆς διαμέτρου ἡ Α, ἀντὶ δὲ τῆς πλευρᾶς ἡ Β· λέγω ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω σύμμετρος, καὶ γεγονέτω πάλιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ὁ ΕΖ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Η, καὶ ἔστωσαν ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οἱ ΕΖ, Η ἄρα πρῶ-

Prop. XCVII. Theor.

Propoſitum ſit nobis oſtendere in quadratis figuris diametrum lateri incommenſurabilem eſſe longitudine.

SIT quadratum ΑΒΓΔ, cujus diameter ΑΓ: dico ΑΓ ipſi ΑΒ longitudine incommenſurabilem eſſe.

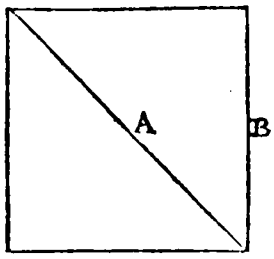
Si enim fieri poteſt, ſit commenſurabilis: dico ex hoc ſequi eundem numerum parem eſſe & imparem: itaque manifeſtum eſt [per 47.1.] quadratum ex ΑΓ duplum eſſe quadrati ex ΑΒ. & quoniam ΑΓ commenſurabilis eſt ipſi ΑΒ, habebit ΑΓ ad ΑΒ rationem eam, quam habet numerus ad numerum. habeat quam ΕΖ ad Η: ſintque ΕΖ, Η numeri minimi eandem cum ipſis rationem habentium: non igitur unitas eſt ΕΖ. ſi enim eſt unitas, & habet ad Η rationem eam quam ΑΓ ad ΑΒ, eſtque ΑΓ major quam ΑΒ; & ΕΖ unitas quam Η numerus major erit, quod eſt abſurdum: ergo ΕΖ non eſt unitas; quare numerus ſit neceſſe eſt. & quoniam ut ΑΓ ad ΑΒ ita eſt ΕΖ ad Η, erit & ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΑΒ ita quadratus ex ΕΖ ad eum qui fit ex Η quadratum. duplum autem eſt quadratum ex ΑΓ quadrati ex ΑΒ: ergo & quadratus ex ΕΖ quadrati ex Η eſt duplus: ac propterea quadratus ex ΕΖ par eſt, & ipſe ΕΖ par. ſi enim eſſet impar, & qui fit ab ipſo quadratus impar eſſet, quoniam [per 23.9.] ſi impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipſorum ſit impar; & totus impar erit: ergo ΕΖ eſt par. ſecetur bifariam in Θ. & quoniam numeri ΕΖ, Η minimi ſunt eandem cum ipſis rationem habentium, inter ſe primi ſunt. & eſt ΕΖ par: impar igitur eſt Η. ſi enim eſſet par, binarius metiretur numeros ΕΖ, Η, (omnis enim par dimidiam partem habet) primos inter ſe exiſtentes, quod fieri non poteſt: non igitur Η eſt par, ergo impar. & quoniam ΕΖ duplus eſt ipſius ΕΘ, erit [per 11.8.] quadratus ex ΕΖ quadrati ex ΕΘ quadruplus. eſt autem quadratus ex ΕΖ duplus quadrati ex Η: duplus igitur eſt quadratus ex Η quadrati ex ΕΘ; ergo qui fit ex Η quadratus eſt par: ideoque ex jam dictis [ad 29.9.] ipſe Η eſt par. ſed & impar, quod fieri non poteſt: non igitur ΑΓ commenſurabilis eſt ipſi ΑΒ longitudine: ergo eſt incommenſurabilis. quod erat demonſtrandum.

Aliter.

Sed & aliter oſtendendum eſt incommenſurabilem eſſe quadrati diametrum ipſius lateri.

Sit enim pro diametro quidem Α, pro latere autem Β: dico Α ipſi Β longitudine incommenſurabilem eſſe. ſi enim fieri poteſt, ſit commenſurabilis; & rurſus, fiat ut Α ad Β ita ΕΖ numerus ad ipſum Η; ſintque minimi eorum qui eandem habent rationem: ergo [per 24. 7.] ΕΖ,

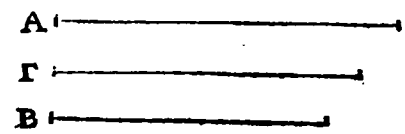
H primi inter ſe ſunt. dico primum H non eſſe unitatem. ſi enim fieri poteſt, ſit H unitas. & quoniam eſt ut A ad B ita EZ ad H, erit & ut quadratum ex A ad quadratum ex B ita quadratus ex EZ ad eum qui fit ex H quadratum. duplum autem eſt quadratum ex A quadrati ex B: ergo & quadratus ex EZ quadrati ex H eſt duplus. atque eſt H unitas: binarius igitur eſt quadratus ex EZ, quod fieri non poteſt: ergo H non eſt unitas; igitur eſt numerus. & quoniam eſt ut quadratum ex A ad quadratum ex B ita quadratus ex EZ ad quadratum ex H, & invertendo ut quadratum ex B ad quadratum ex A ita quadratus ex H ad quadratum ex EZ. ſed quadratum ex B metitur quadratum ex A: ergo & qui fit ex H quadratus metitur eum qui fit ex EZ; & propterea [per 14.8.] latus H ipſum EZ latus metitur. metitur autem & ſeipſum: ergo H numeros EZ, H metitur, primos inter ſe exiſtentes, quod fieri non poteſt: non igitur A ipſi B longitudine eſt commenſurabilis: ergo eſt incommenſurabilis. quod erat demonſtrandum.



τοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. λέγω πρῶτον ὅτι ὁ H οὐκ ἔστι μονάς. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μονάς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ A πρὸς τὸν B οὕτως ὁ EZ πρὸς τὸν H· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τοῦ A πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ B οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ EZ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ H. διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς A τοῦ ἀπὸ τοῦ B· διπλάσιος ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ EZ τοῦ ἀπὸ τοῦ H. καὶ ἔστι μονὰς ὁ H· δυὰς ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ EZ τετράγωνος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ H· ἀριθμὸς ἄρα. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ EZ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ H, καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς B πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ A οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ H πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ EZ. μετρεῖ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς B τὸ ἀπὸ τοῦ A· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ H τετράγωνος τὸ ἀπὸ τοῦ EZ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ὁ H τὸν EZ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν ὁ H· ὁ H ἄρα τοὺς EZ, H μετρεῖ, πρώτους ὄντας ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ A τῇ B μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SCHOLIUM.

* Itaque inventis longitudine incommenſurabilibus rectis lineis, ut A, B, invenientur & aliæ quamplurimæ magnitudines ex duabus dimenſionibus, nimirum ſuperficies incommenſurabiles inter ſeſe. ſi enim [per 13.6.] inter ipſas A, B mediam proportionalem ſumamus rectam lineam Γ, erit [per 20.6.] ut A ad B ita figura quæ fit ex A ad eam quæ ex Γ ſimilem & ſimiliter deſcriptam, ſive quadrata, ſive alia rectilinea ſimilia, ſive circuli qui circa diametros A Γ deſcribantur; quandoquidem circuli [per 2.12.] inter ſe ſunt ut diametrorum quadrata: inventa ſunt igitur ſpatia plana inter ſe incommenſurabilia. quod erat demonſtrandum.



Oſtenſis autem figuris diverſis incommenſurabilibus duarum dimenſionum, oſtendemus ex ſolidorum contemplatione dari etiam ſolida commenſurabilia & incommenſurabilia inter ſeſe. nam ſi ſuper quadrata ex A, B, vel rectilinea quæ ipſis æqualia ſint, ſolida æque alta conſtituamus, ſive pyramides ſive priſmata, erunt [per 32.11. & 5. vel 6.12.] ea inter ſe uti baſes. & ſi quidem baſes commenſurabiles ſint, [per 10.10.] erunt ſolida commenſurabilia: ſi vero incommenſurabiles, & ipſa incommenſurabilia erunt. quod erat demonſtrandum.

Sed & duobus circulis exiſtentibus A, B, ſi ſuper ipſos conos æque altos ſive cylindros conſtituamus, erunt hi [per 11.12.] inter ſe uti ipſorum baſes, hoc eſt ut A, B circuli. & ſi quidem circuli commenſurabiles ſint, [per 10.10.] commenſurabiles erunt & coni inter ſeſe & cylindri: ſi vero incommenſurabiles, & coni & cylindri incommenſurabiles erunt. ex quibus perſpicuum eſt non ſolum in lineis & ſuperficiebus eſſe commenſurabilitatem & incommenſurabilitatem, ſed & in ſolidis figuris.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

* Εὑρημένων δὴ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν, οἷς τῶν A, B, εὑρίσκεται καὶ ἄλλα πλείονα μεγέθη οὐκ δύο διαστάσεων, λέγω δὴ ἐπίπεδα ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. ἐὰν γὰρ τῶν A, B μέσον ἀνάλογον λάβωμεν τὴν Γ, ἔσται ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Γ, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, εἴτε τετράγωνα εἴη τὰ ἀναγεγραμμένα, εἴτε ἕτερα εὐθύγραμμα ὅμοια, εἴτε κύκλοι ὡσὶ διάμετροι τοῖς A, Γ, ἐπείπερ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα· εὕρηνται ἄρα ἐπίπεδα χωρία ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Δεδειγμένων δὴ καὶ τῶν ἐκ δύο διαστάσεων διαφόρων χωρίων ἀσυμμέτρων, δείξομεν ἀπὸ τῶν στερεῶν θεωρίας, ὡς ἔστι καὶ στερεὰ σύμμετρά τε καὶ ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῶν ἀπὸ τῶν A, B τετραγώνων, ἢ τῶν ἴσων αὐτοῖς εὐθυγράμμων, ἀναστήσωμεν ἰσοϋψῆ στερεά, τουτέστι παραλληλεπίπεδα, ἢ πυραμίδας, ἢ πρίσματα, ἔσται τὰ ἀναστα θέντα πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις. καὶ εἰ μὲν σύμμετροί εἰσιν αἱ βάσεις, σύμμετρα ἔσται τὰ στερεά· εἰ δὲ ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀλλὰ μὴν καὶ δύο κύκλων ὄντων τῶν A, B, ἐὰν ἀπ' αὐτῶν ἰσοϋψεῖς κῶνοι, ἢ κυλίνδροι ἀναγράψωμεν, ἔσονται πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ βάσεις, τουτέστιν ὡς οἱ A, B κύκλοι. καὶ εἰ μὲν σύμμετροί εἰσιν οἱ κύκλοι, σύμμετροι ἔσονται καὶ οἱ κῶνοι καὶ οἱ κύλινδροι· εἰ δὲ ἀσύμμετροί εἰσιν οἱ κύκλοι, ἀσύμμετροι ἔσονται καὶ οἱ κῶνοι καὶ οἱ κύλινδροι. καὶ φανερὸν ἡμῖν γέγονεν ὅτι ἐπὶ μόνον τοῦ μήκους ἐστὶ συμμετρία καὶ ἀσυμμετρία, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τῶν στερεῶν σχημάτων.

* Sequentia videntur non eſſe Euclidis. Saltem loco non ſuo poſita ſunt; quippe ex ſequentibus pendentia.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΝΔΕΚΑΤΟΝ,
Καὶ Στερεῶν πρῶτον.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER UNDECIMUS,
Et Solidorum primus.

ΟΡΟΙ.

α'. ΣΤΕΡΕΟΝ ἐστι, τὸ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἔχον.

β'. Στερεοῦ δὲ πέρας, ἐπιφάνεια.

γ'. Εὐθεῖα πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιῇ γωνίας.

δ'. Επίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς εἰσιν.

ε'. Εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστίν, ὅταν ἀπὸ τοῦ μετεώρου πέρατος τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου καὶ ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρατος τῆς εὐθείας εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῆς ἀχθείσης καὶ τῆς ἐφεστώσης.

ς'. Επιπέδων πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστίν, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ τομῇ ἀγομένων πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων.

ζ'. Επίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κε-

DEFINITIONES.

1. SOLIDUM est, quod longitudinem & latitudinem & crassitudinem habet.

2. Solidi autem terminus est superficies.

3. Recta linea ad planum recta est, quando ad rectas omnes lineas, quæ ipsam contingunt & in subjecto plano jacent, rectos angulos efficiat.

4. Planum ad planum rectum est, quando rectæ lineæ, quæ communi planorum sectioni ad rectos angulos & in uno plano ducuntur, alteri plano ad angulos rectos fuerint.

5. Rectæ lineæ ad planum inclinatio est, quando à sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum acta perpendiculari, à puncto facto ad terminum lineæ, qui est in plano, recta linea juncta fuerit, angulus nempe acutus qui juncta linea & insistente continetur.

6. Plani ad planum inclinatio est angulus acutus rectis lineis contentus, quæ ad rectos angulos communi planorum sectioni ad unum ipsius punctum in utroque planorum ducuntur.

7. Planum ad planum similiter incli-

nari dicitur, atque alterum ad alterum, quando dicti inclinationum anguli inter ſe fuerint æquales.

8. Plana parallela ſunt, quæ inter ſe non conveniunt.

9. Similes figuræ ſolidæ ſunt, quæ ſimilibus planis ac multitudine æqualibus continentur.

10. Æquales vero & ſimiles figuræ ſolidæ ſunt, quæ ſimilibus planis multitudine ſimul & magnitudine æqualibus continentur.

11. Solidus angulus eſt plurium, quam duarum linearum, quæ ſeſe contingant & non in eadem ſint ſuperficie, ad omnes lineas inclinatio. ALITER. Solidus angulus eſt, qui pluribus quam duobus planis angulis in eodem non jacentibus plano atque ad unum punctum conſtitutis comprehenditur.

12. Pyramis eſt figura ſolida planis comprehenſa, quæ ab uno plano ad unum punctum conſtituitur.

13. Priſma eſt figura ſolida planis comprehenſa, quorum adverſa duo æqualia & ſimilia parallela ſunt; reliqua vero parallelogramma.

14. Sphæra eſt figura quidem comprehenſa, cum circa manentem diametrum ſemicirculus convertitur, donec in eundem locum, à quo moveri cœperat, rurſus reſtituatur.

15. Axis vero ſphæræ eſt manens illa recta linea, circa quam ſemicirculus convertitur.

16. Centrum autem ſphæræ eſt idem illud quod & ſemicirculi.

17. Diameter vero ſphæræ eſt recta linea quædam per centrum ducta, & ex utraque parte à ſphæræ ſuperficie terminata.

18. Conus eſt figura quidem comprehenſa, cum rectanguli trianguli manente uno latere eorum, quæ circa rectum angulum ſunt, triangulum ipſum convertitur, donec in eundem locum, à quo moveri cœperat, rurſus reſtituatur. Verum ſi manens recta linea æqualis fuerit reliquo lateri, quod circa rectum angulum convertitur, conus orthogonius erit: ſi vero minor, amblygonius: & ſi major, oxygonius.

19. Axis autem coni eſt manens illa recta linea circa quam triangulum convertitur.

κλίσθαι λέγεται, ἡ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ εἰρημέναι τῶν κλίσεων γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι.

ν'. Παράλληλα ἐπίπεδά ἐστι τὰ ἀσύμπτωτα.

ξ'. Ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τὸ πλῆθος.

ο'. Ἴσα δὲ καὶ ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι τὰ πρὸς ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει.

οα'. Στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο γραμμῶν ἀπομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ οὐσῶν πρὸς πάσας τὰς γραμμὰς κλίσις. ΑΛΛΩΣ. Στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο ἐπιπέδων γωνιῶν περιεχομένη, μὴ οὐσῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων.

οβ'. Πυραμίς ἐστι σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ἀπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνεστώς.

ογ'. Πρίσμα ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύο τὰ ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστι καὶ παράλληλα, τὰ δὲ λοιπὰ παραλληλόγραμμα.

οδ'. Σφαῖρά ἐστιν, ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα.

οε'. Ἄξων δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα περὶ ἣν τὸ ἡμικύκλιον στρέφεται.

οϛ'. Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶ τὸ αὐτὸ ὃ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου.

οζ'. Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν εὐθεία τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἑφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

οη'. Κῶνός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου τριγώνου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. καὶ ἂν μὲν ἡ μένουσα εὐθεῖα ἴση ᾖ τῇ λοιπῇ τῇ περὶ τὴν ὀρθὴν περιφερομένῃ, ὀρθογώνιος ἔσται κῶνος· ἐὰν δὲ ἐλάσσων, ἀμβλυγώνιος· ἐὰν δὲ μείζων, ὀξυγώνιος.

οθ'. Ἄξων δὲ κώνου ἐστὶν ἡ μένουσα περὶ ἣν τὸ τρίγωνον στρέφεται.

ν'. Βάσις

κ'. Βάσις δὲ, ὁ κύκλος ὁ ὑπὸ τῆ περιφερομένης εὐθείας γραφόμενος.

κα'. Κύλινδρος δὲ, ὅταν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν, περιενεχθὲν τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκαταστᾶθῆ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα.

κβ. Ἄξων δὲ τοῦ κυλίνδρου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα περὶ ἣν τὸ παραλληλόγραμμον στρέφεται.

κγ'. Βάσεις δὲ, οἱ κύκλοι οἱ ὑπὸ τῶν ἀπεναντίον περιαγομένων δύο πλευρῶν γραφόμενοι.

κδ'. Ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροί εἰσιν, ὧν οἵ τε ἄξονες καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων ἀνάλογόν εἰσιν.

κε'. Κύβος ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενον.

κϛ'. Τετράεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ τεσσάρων τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

κζ'. Ὀκτάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

κη'. Δωδεκάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον.

κθ'. Εἰκοσάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

20. Basis vero, circulus à conversa recta linea descriptus.

21. Cylindrus est figura comprehensa, quando rectanguli parallelogrammi manente uno latere eorum quæ circa rectum angulum sunt, parallelogrammum ipsum convertitur, donec in eundem locum, à quo moveri cœperat, rursus restituatur.

22. Axis vero cylindri est manens illa recta linea, circa quam parallelogrammum convertitur.

23. Bases autem sunt circuli, qui à duobus ex adverso circumactis lateribus describuntur.

24. Similes coni & cylindri sunt, quorum & axes & basium diametri proportionales sunt.

25. Cubus est figura solida sex quadratis æqualibus contenta.

26. Tetraëdrum est figura solida quatuor triangulis æqualibus & æquilateris comprehensa.

27. Octaëdrum est figura solida octo triangulis æqualibus & æquilateris comprehensa.

28. Dodecaëdrum est figura solida quæ duodecim pentagonis æqualibus & æquilateris & æquiangulis continetur.

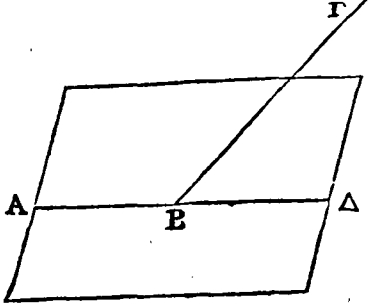
29. Icosaëdrum est figura solida quæ viginti triangulis æqualibus & æquilateris comprehenditur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Εὐθείας γραμμῆς μέρος μέν τι ἐστὶν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν τῷ μετεώρῳ.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, εὐθείας γραμμῆς τῆς ΑΒΓ μέρος μόν τι τὸ ΑΒ ἔστω ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι τὸ ΒΓ ἐν μετεώρῳ.

Ἔσται δή τις τῇ ΑΒ συνεχὴς εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. ἔστω ἡ ΒΔ.* δύο δὴ δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒΓ, ΑΒΔ κοινὸν τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ, ὅπερ ἀδύνατον· εὐθεῖα γὰρ εὐθείᾳ οὐ συμβάλλει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ καθ' ἕν· αἱ δὲ μὴ, ἐφαρμόσουσιν ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.



Εὐθείας ἄρα γραμμῆς μέρος μόν τι οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν τῷ μετεώρῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. I. Theor.

Rectæ lineæ pars quædam non est in subjecto plano, quædam vero in sublimi.

Si enim fieri potest, rectæ lineæ ΑΒΓ pars quidem ΑΒ sit in subjecto plano, pars vero ΒΓ in sublimi.

Erit igitur recta linea quædam ipsi ΑΒ in directum continuata in subjecto plano. sit ΒΔ. duabus igitur datis rectis lineis ΑΒΓ, ΑΒΔ commune segmentum est ΑΒ, quod fieri non potest: recta enim linea cum recta linea non convenit in pluribus punctis, quam uno; alias rectæ lineæ sibi ipsis congruent.

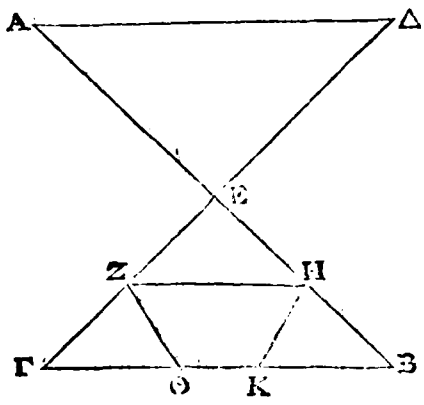
Non igitur rectæ lineæ pars quædam est in subjecto plano, quædam vero in sublimi. quod erat demonstrandum.

* Hic in ora *Codd. MSS.* adscribitur πᾶσαν γὰρ δυνατὸν εὐθεῖαν ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.

PROP. II. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ se invicem secent, in uno sunt plano, item omne triangulum in uno plano consistit.

DUÆ enim rectæ lineæ AB, ΓΔ se invicem in puncto E secent: dico ipsas AB, ΓΔ in uno esse plano, nec non omne triangulum in uno plano consistere.



Sumantur enim in ipsis EB, EΓ quævis puncta Z, H; jungunturque ΓB, ZH, atque ducantur ZΘ, HK: dico primum EBΓ triangulum consistere in uno plano. si enim trianguli EBΓ pars quidem ZΘΓ, vel HBK in subjecto plano est, reliqua vero in alio plano; erit & unius linearum EΓ, EB pars in subjecto plano, & pars in alio. quod si trianguli EΓB pars ZΓBH sit in subjecto plano, reliqua vero in alio, utrarumque rectarum linearum EΓ EB quædam pars erit in subjecto plano, quædam vero in alio. quod absurdum esse ostendimus: triangulum igitur EBΓ in uno est plano. in quo autem plano est BΓE triangulum in hoc est utraque ipsarum EΓ, EB: in quo autem utraque ipsarum EΓ, EB, in hoc [per 1.11.] sunt & AB, ΓΔ: ergo rectæ lineæ AB, ΓΔ in uno sunt plano, & omne triangulum in uno plano consistit. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ.

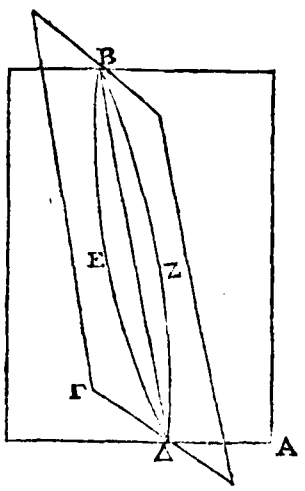
Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ AB, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ E σημεῖον· λέγω ὅτι αἱ AB, ΓΔ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῶν EB, EΓ τυχόντα σημεῖα, τὰ Z, H, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓB, ZH, καὶ διήχθωσαν αἱ ZΘ, HK· λέγω πρῶτον ὅτι τὸ EBΓ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. εἰ γὰρ ἔστι τοῦ EBΓ τριγώνου μέρος ἡ τὸ ZΘΓ, ἢ τὸ HBK ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται τι μιᾶς τῶν EΓ, EB εὐθειῶν μέρος μέν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ. εἰ δὲ τὸ EΓB τρίγωνον τὸ ZΓBH μέρος ἐστὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται τι ἀμφοτέρων τῶν EΓ, EB εὐθειῶν μέρος μέν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη· τὸ ἄρα EBΓ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἐν ᾧ δὲ ἐστι τὸ BΓE τρίγωνον ἐν τούτῳ ἕκατέρα τῶν EΓ, EB, ἐν ᾧ δὲ ἑκατέρα τῶν EΓ, EB ἐν τούτῳ καὶ αἱ AB, ΓΔ· αἱ AB, ΓΔ ἄρα εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. III. THEOR.

Si duo plana se invicem secent, communis ipsorum sectio est linea recta.

DUO enim plana AB, BΓ se invicem secent, communis autem ipsorum sectio sit ΔB linea: dico lineam ΔB rectam esse.



Si enim non ita sit, ducatur à puncto Δ ad B in plano quidem AB recta linea ΔEB; in plano autem BΓ recta linea ΔZB: erunt ergo duarum rectarum linearum ΔEB, ΔZB iidem termini, & ipsæ spatium continebunt, quod [per 12.ax.] est absurdum; non igitur ΔEB, ΔZB rectæ lineæ sunt. similiter ostendemus neque aliam quampiam, quæ à puncto Δ ad B ducitur rectam esse, præter ipsam ΔB, communem scilicet planorum AB, BΓ sectionem.

Si igitur duo plana se invicem secent, communis ipsorum sectio recta linea erit. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνῃ ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεῖά ἐστι.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ AB, BΓ τεμνέτωσαν ἀλλήλα, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΔB γραμμή· λέγω ὅτι ἡ ΔB γραμμὴ εὐθεῖά ἐστιν.

Εἰ γὰρ μή, ἐπεζεύχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ B, ἐν μὲν τῷ AB ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ ΔEB, ἐν δὲ τῷ BΓ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ ΔZB· ἔσται δὴ δύο εὐθειῶν τῶν ΔEB, ΔZB τὰ αὐτὰ πέρατα, καὶ περιέξουσι δηλαδὴ χωρίον, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα αἱ ΔEB, ΔZB εὐθεῖαί εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις, πλὴν τῆς Δ ἐπὶ τὸ B ἐπιζευγνυμένης, εὐθεῖα ἔσται· μία ἄρα τῆς ΔB κοινῆς τομῆς τῶν AB, BΓ ἐπιπέδων.

Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα τέμνῃ ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεῖά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

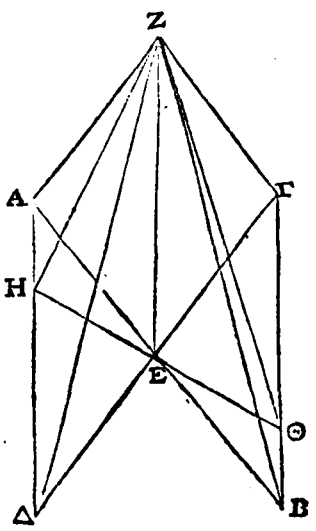
ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Ἐὰν εὐθεῖα δύο εὐθείαις τεμνούσας ἀλλήλας ταῖς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπιζευχθῇ, καὶ τῷ διʼ αὐτῶν ἐπιπέδῳ ταῖς ὀρθὰς ἔσται.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΕΖ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ τεμνέτω ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον ὥστε τὰς ὑπὸ ΑΕΖ, ΖΕΒ, ΖΕΓ, ΖΕΔ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι· λέγω ὅτι ἡ ΕΖ καὶ τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐπιπέδῳ ταῖς ὀρθὰς ἐστί.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΓΕ, ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ διήχθω τις διὰ τοῦ Ε, ὡς ἔτυχεν, ἡ ΗΕΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΓΒ, καὶ ἔτι ἀπὸ τυχόντος τοῦ Ζ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΑ, ΖΗ, ΖΔ, ΖΓ, ΖΘ, ΖΒ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΕ, ΕΔ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΒ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσους περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΓΒ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΕΔ τρίγωνον τῷ ΓΕΒ ἴσον ἔσται, ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΒΓ ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΕΘ ἴση· δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΗΕ, ΒΕΘ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν ΑΕ τῇ ΕΒ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΗΕ τῇ ΕΘ, ἡ δὲ ΑΗ τῇ ΒΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΕ, βάσις ἄρα ἡ ΖΑ βάσει τῇ ΖΒ ἴση ἐστί· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΖΔ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΓΒ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΖΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΔ δυσὶ ταῖς ΖΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ βάσις ἡ ΖΔ βάσει τῇ ΖΓ ἐδείχθη ἴση· καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΑΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση ἐστίν. καὶ πάλιν ἐδείχθη ἡ ΑΗ τῇ ΒΘ ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΖΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΗ δυσὶ ταῖς ΖΒ, ΒΘ ἴσαι εἰσί. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΑΗ ἐδείχθη ἴση τῇ ὑπὸ ΖΒΘ· βάσις ἄρα ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΘ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ πάλιν ἐδείχθη ἴση ἡ ΗΕ τῇ ΕΘ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΗΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΘΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσί. καὶ βάσις ἡ ΖΘ βάσει τῇ ΖΗ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΕΖ ἴση ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΗΕΖ, ΘΕΖ γωνιῶν· ἡ ΖΕ ἄρα πρὸς τὴν ΗΘ τυχόντως διὰ τοῦ Ε ἀχθεῖσαν ὀρθή ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἡ ΖΕ καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. εὐθεῖα δὲ πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας



PROP. IV. THEOR.

Si recta linea duabus rectis lineis ſe invicem ſecantibus in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, etiam ducto per ipſas plano ad rectos angulos erit.

REcta enim linea quædam EZ duabus rectis lineis AB, ΓΔ ſe invicem ſecantibus in E puncto ab ipſo E ad rectos angulos inſiſtat: dico EZ etiam plano per AB, ΓΔ ducto ad rectos angulos eſſe.

Sumantur enim rectæ lineæ AE, EB, ΓE, EΔ inter ſe æquales: perque E ducatur recta linea HEΘ utcunque, & jungantur AΔ, ΓB; deinde à quovis puncto Z ducantur ZA, ZH, ZΔ, ZΓ, ZΘ, ZB. & quoniam duæ rectæ lineæ AE, EΔ duabus rectis lineis ΓE, EB æquales ſunt, & [per 15. 1.] angulos æquales continent, erit [per 4. 1.] AΔ baſis baſi ΓB æqualis, & triangulum AEΔ triangulo ΓEB æquale, & etiam angulus ΔAE æqualis eſt angulo EBΓ. eſt autem [per 15. 1.] & angulus AEH æqualis angulo BEΘ: duo igitur triangula ſunt AHE, BEΘ duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus AE uni lateri EB æquale, quod æqualibus adjacet angulis: quare [per 26. 1.] & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt: ergo HE quidem eſt æqualis EΘ; AH vero ipſi BΘ. & quoniam AE eſt æqualis EB, communis autem & ad rectos angulos ZE; erit [per 4. 1.] baſis ZA baſi ZB æqualis: eadem quoque ratione & ZΓ æqualis erit ipſi ZΔ. præterea quoniam AΔ eſt æqualis ΓB, & ZA ipſi ZB; erunt duæ ZA, AΔ duabus ZB, BΓ æquales, altera alteri. & oſtenſa eſt baſis ZΔ æqualis baſi ZΓ: angulus igitur ZAΔ angulo ZBΓ [per 8. 1.] eſt æqualis. rurſus oſtenſa eſt AH æqualis BΘ; ſed & ZA ipſi ZB eſt æqualis: duæ igitur ZA, AH duabus ZB, BΘ æquales ſunt. & angulus ZAH oſtenſus eſt æqualis angulo ZBΘ: baſis igitur ZH baſi ZΘ [per 4. 1.] eſt æqualis. & quoniam rurſus HE oſtenſa eſt æqualis EΘ, communis autem EZ; erunt duæ HE, EZ æquales duabus ΘE, EZ. & baſis ZΘ eſt æqualis baſi ZH; angulus igitur HEZ angulo ΘEZ [per 8. 1.] eſt æqualis; & idcirco rectus eſt uterque angulorum HEZ, ΘEZ: ergo ZE ad HΘ utcunque per E ductam rectos efficit angulos. ſimiliter oſtendemus ZE etiam ad omnes rectas lineas, quæ ipſam contingunt, & in ſubjecto ſunt plano, rectos angulos efficere. recta autem ad planum recta eſt [per 3. def. 11.] quando ad omnes rectas lineas ipſam contin-

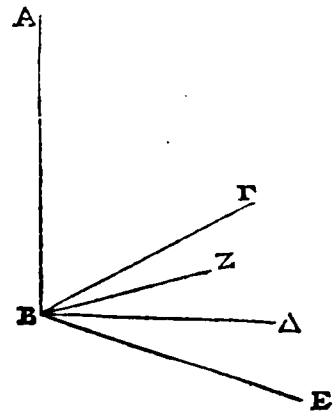
contingentes & in eodem exiſtentes plano rectos efficit angulos: quare E Z ſubjecto plano ad rectos angulos inſiſtit. at ſubjectum planum eſt quod per rectas lineas A B, Γ Δ ducitur: ergo E Z ad rectos angulos erit ducto per A B, Γ Δ plano.

Si igitur recta linea duabus rectis lineis ſe invicem ſecantibus in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, etiam ducto per ipſas plano ad rectos angulos erit. quod erat demonſtrandum.

Prop. V. Theor.

Si recta linea tribus rectis lineis ſeſe tangentibus in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, tres illæ rectæ lineæ in uno plano erunt.

Recta enim linea quædam A B tribus rectis lineis B Γ, B Δ, B E in contactu B ad rectos angulos inſiſtat: dico B Γ, B Δ, B E in uno plano eſſe.



Non enim, ſed ſi fieri poteſt, ſint B Δ, B E quidem in ſubjecto plano, B Γ vero in ſublimi, & planum per A B, B Γ producatur: communem igitur ſectionem in ſubjecto plano faciet [per 3. 11.] rectam lineam. faciat B Z. in uno igitur ſunt plano per A B, B Γ ducto tres rectæ lineæ A B, B Γ, B Z. & quoniam A B utrique ipſarum B Δ, B E ad rectos angulos inſiſtit, & ducto per ipſas Δ B, B E plano [per 4. 11.] ad rectos angulos erit. planum autem per Δ B, B E eſt ſubjectum planum: ergo A B ad ſubjectum planum recta eſt: quare [per 3. deff. 11.] & ad omnes rectas lineas ipſam contingentes, quæ in eodem plano ſunt, rectos faciet angulos. ſed ipſam tangit B Z in ſubjecto exiſtens plano: ergo angulus A B Z rectus eſt. ponitur autem & angulus A B Γ rectus: æqualis igitur eſt angulus A B Z angulo A B Γ. & in eodem ſunt plano: quod [per 9. ax.] fieri non poteſt: recta igitur linea B Γ non eſt in plano ſublimi: quare tres rectæ lineæ B Γ, B Δ, B E ſunt in uno plano.

Si igitur recta linea tribus rectis lineis ſeſe tangentibus in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, tres illæ rectæ in uno plano erunt. quod erat demonſtrandum.

Prop. VI. Theor.

Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, parallelæ erunt ipſæ rectæ lineæ.

Duæ enim rectæ lineæ A B, Γ Δ ſubjecto plano ſint ad rectos angulos: dico A B ipſi Γ Δ parallelam eſſe.

νας αὐτῆς εὐθείας κ᾽ ὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας· ἡ Ε Ζ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. τὸ δὲ ὑποκείμενον ἐπίπεδόν ἐστι τὸ διὰ τῶν Α Β, Γ Δ εὐθειῶν· ἡ Ε Ζ ἄρα πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ διὰ τῶν Α Β, Γ Δ ἐπιπέδῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα δύο εὐθείας τεμνούσας ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἀπὶ τὴν κοινὴν τομὴν ἐπιζευθῇ, κ᾽ τῷ δι᾽ αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε΄.

Ἐὰν εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἀπομμένοις ἀλλήλων πρὸς ὀρθὰς ἀπὶ τὴν κοινὴν τομὴν ἀπιζευθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Ἐυθεῖα γάρ τις ἡ Α Β τρισὶν εὐθείαις ταῖς Β Γ, Β Δ, Β Ε πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῇ κατὰ τὸ Β ἁφῆς ἐφθέτω· λέγω ὅτι αἱ Β Γ, Β Δ, Β Ε ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Μὴ γάρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατόν, ἔστωσαν αἱ μὲν Β Δ, Β Ε ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ Β Γ ὑμετεώρῳ, κ᾽ ἐκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν Α Β, Β Γ ἐπίπεδον· κοινὴν τομὴν δὴ ποιήσει ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιείτω τὴν Β Ζ. ἐν ἑνὶ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ τῷ δηγμένῳ διὰ τῶν Α Β, Β Γ αἱ τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α Β, Β Γ, Β Ζ. κ᾽ ἐπεὶ ἡ Α Β ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκάτερον τῶν Β Δ, Θ Ε· κ᾽ τῷ διὰ τῶν Δ Β, Β Ε ἄρα ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ Α Β. τὸ δὲ διὰ τῶν Δ Β, Β Ε ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενόν ἐστιν· ἡ Α Β ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· ὥστε κ᾽ πρὸς πάσας τὰς ἁπομμένας αὐτῇ εὐθείας κ᾽ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἡ Α Β. ἅπτεται δὲ ἡ Β Ζ αὐτῆς οὔσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ἡ ἄρα ὑπὸ Α Β Ζ γωνία ὀρθή ἐστιν. ὑπόκειται δὲ κ᾽ ἡ ὑπὸ Α Β Γ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ Α Β Ζ γωνία τῇ ὑπὸ Α Β Γ. καί εἰσιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ Β Γ εὐθεῖα ἐν μετεώρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ Β Γ, Β Δ, Β Ε ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἀπομέναις ἀλλήλων πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῇ κοινῇ τομῇ ἐπιζευθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ΄.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ Α Β, Γ Δ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστωσαν· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ Α Β τῇ Γ Δ.

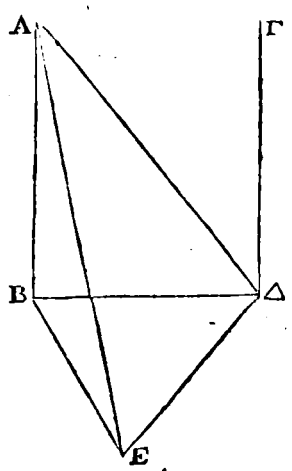
Συμβαλλέ-

Συμβαλλέτωσαν γὰρ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Β, Δ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ εὐθεῖα, καὶ ἤχθω τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ ΔΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ.

Occurrant enim ſubjecto plano in punctis Β, Δ, jungaturque ΒΔ recta linea, cui ad rectos angulos in ſubjecto plano ducatur ΔΕ; & poſita ΔΕ ipſi ΑΒ æquali jungantur ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθάς, ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ τῆς ΑΒ ἑκατέρα τῶν ΒΔ, ΒΕ, οὖσαι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΒΕ γωνιῶν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΔΒ, ΓΔΕ ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΔ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΔ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΒ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΕ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΒΕ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΕ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΒ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΑΕ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΑ ἴση ἐστίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΔΑ· ἡ ΕΔ ἄρα πρὸς τὴν ΔΑ ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΔ, ΔΓ ὀρθή· ἡ ΕΔ ἄρα τρισὶν εὐθείαις ταῖς ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς ἁφῆς ἐφέστηκεν· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. ἐν ᾧ δὲ αἱ ΔΒ, ΔΑ, ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΑΒ, πᾶν γὰρ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ· αἱ ἄρα ΑΒ, ΒΔ, ΔΓ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΒΔΓ γωνιῶν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Quoniam igitur ΑΒ recta eſt ad ſubjectum planum; & ad omnes rectas lineas quæ ipſam contingunt & in ſubjecto ſunt plano [per 3. def. 11.] rectos angulos efficiet. contingit autem ipſam ΑΒ utraque ipſarum ΒΔ, ΒΕ exiſtens in ſubjecto plano: ergo uterque angulorum ΑΒΔ, ΑΒΕ rectus eſt. eadem ratione rectus etiam eſt uterque ipſorum ΓΔΒ, ΓΔΕ. quoniam autem ΑΒ æqualis eſt ipſi ΔΕ, communis autem ΒΔ, duæ quidem ΑΒ, ΒΔ duabus ΕΔ, ΔΒ ſunt æquales, & rectos angulos continent: baſis igitur ΑΔ [per 4. 1.] baſi ΒΕ eſt æqualis. & quoniam ΑΒ eſt æqualis ΔΕ & ΑΔ ipſi ΒΕ, duæ quidem ΑΒ, ΒΕ duabus ΕΔ, ΔΒ æquales ſunt, & baſis ipſarum ΑΕ communis: ergo [per 8. 1.] angulus ΑΒΕ angulo ΕΔΑ eſt æqualis. ſed ΑΒΕ rectus eſt: rectus igitur & ΕΔΑ; & idcirco ΕΔ ad ΔΑ eſt perpendicularis. ſed & perpendicularis eſt ad utramque ipſarum ΒΔ, ΔΓ: quare ΕΔ tribus rectis lineis ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ in contactu ad rectos inſiſtit angulos: tres igitur rectæ lineæ ΒΔ, ΔΑ, ΔΓ [per 5. 11.] in uno ſunt plano. in quo autem ſunt ΒΔ, ΔΑ, in hoc eſt & ΑΒ, omne enim triangulum [per 2. 11.] in uno eſt plano: ergo ΑΒ, ΒΔ, ΔΓ in uno plano ſunt. atque eſt uterque angulorum ΑΒΔ, ΒΔΓ rectus: parallela igitur [per 28. 1.] eſt ΑΒ ipſi ΓΔ.



Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Quare ſi duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, parallelæ erunt ipſæ rectæ lineæ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

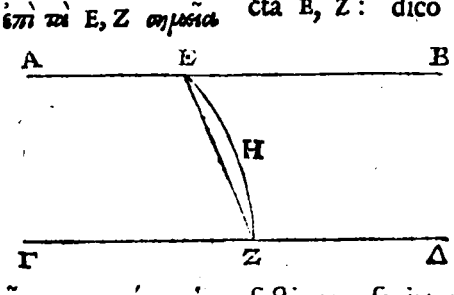
Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῇ δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα· ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.

PROP. VII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ parallelæ ſint, ſumantur autem in utraque ipſarum quælibet puncta; quæ dicta puncta conjungit recta linea in eodem cum parallelis plana erit.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ Ε, Ζ· λέγω ὅτι ἡ ἐπὶ τὰ Ε, Ζ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.

Sint duæ rectæ lineæ parallelæ ΑΒ, ΓΔ, & in utraque ipſarum ſumantur quælibet puncta Ε, Ζ: dico rectam lineam quæ puncta Ε, Ζ conjungit in eodem plano eſſe cum parallelis.



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν ἔστω ἐν μετεώρῳ, ὡς ἡ ΕΗΖ, καὶ διήχθω τὸ διὰ τῆς ΕΗΖ ἐπίπεδον· τεμεῖ δὴ τὸ ποιήσει ἐν ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιείτω ὡς τὴν ΕΖ· δύο ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΕΗΖ, ΕΖ χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα

Non enim ſit, ſed ſi fieri poteſt, ſit in ſublimi ut ΕΗΖ, & per ΕΗΖ planum ducatur, quod in ſubjecto plano [per 3. 11.] ſectionem faciat rectam lineam. faciat ut ΕΖ: ergo duæ rectæ lineæ ΕΗΖ, ΕΖ ſpatium continebunt, quod [per 12. ax.] fieri non poteſt: non igi-

tur quæ à puncto E ad Z ducitur recta linea in ſublimi eſt plano: quare erit in eo quod per parallelas AB, Γ Δ tranſit.

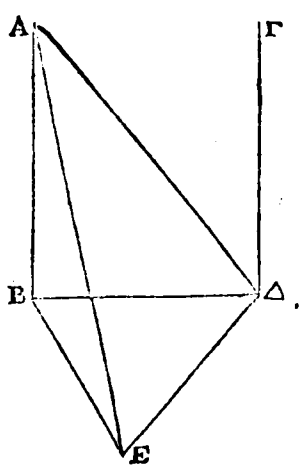
Si igitur duæ rectæ lineæ parallelæ ſint, ſumantur autem in utraque ipſarum quælibet puncta; quæ dicta puncta conjungit recta linea in eodem cum parallelis plano erit. quod erat demonſtrandum.

PROP. VIII. THEOR.

Si fuerint duæ rectæ lineæ parallelæ, atque altera earum plano alicui ſit ad rectos angulos; & reliqua quoque eidem plano ad rectos angulos erit.

SInt duæ rectæ lineæ parallelæ AB, Γ Δ, & altera ipſarum AB ſubjecto plano ſit ad rectos angulos: dico & reliquam Γ Δ eidem plano ad rectos angulos eſſe.

Occurrant enim AB, Γ Δ ſubjecto plano in punctis B, Δ, & B Δ jungatur: ergo [per 7. 11.] A B, Δ Γ, B Δ in uno ſunt plano. ducatur ipſi B Δ ad rectos angulos in ſubjecto plano Δ E, dein ponatur Δ E ipſi AB æqualis, junganturque BE, A E, A Δ. quoniam autem A B perpendicularis eſt ad ſubjectum planum, & ad omnes rectas lineas quæ ipſam contingunt, atque in ſubjecto plano ſunt [per 3. deff. 11.] perpendicularis erit: rectus igitur eſt uterque angulorum ABΔ, ABE: quoniam vero in parallelas rectas lineas AB, Γ Δ recta incidit BΔ, erunt anguli ABΔ, ΓΔB [per 29. 1.] duobus rectis æquales. rectus autem eſt ABΔ: ergo & ΓΔB eſt rectus; quare Γ Δ perpendicularis eſt ad BΔ. & quoniam AB eſt æqualis Δ E, communis autem BΔ, duæ quidem AB, BΔ duabus EΔ, ΔB æquales ſunt, & angulus AΔB eſt æqualis angulo EΔB, rectus enim uterque eſt; baſis igitur AΔ [per 4. 1.] baſi BE eſt æqualis. & quoniam AB æqualis eſt Δ E, & BE ipſi AΔ, duæ quidem AB, BE duabus EΔ, Δ A erunt æquales, altera alteri, & baſis earum communis AE: ergo [per 8. 1.] angulus ABE eſt æqualis angulo EΔA. rectus autem eſt ABE; ergo & EΔA eſt rectus, adeoque EΔ ad ΔA perpendicularis. ſed & perpendicularis eſt ad BΔ: ergo [per 4. 11.] EΔ etiam ad planum per BΔ, ΔA perpendicularis erit: & ad omnes rectas lineas quæ in eodem plano ipſam contingunt rectos faciet angulos. at in plano per BA, AΔ eſt Δ Γ, quia in plano per BΔ, ΔA [per 2. 11.] ſunt AB, BΔ. in quo autem ſunt AB, BΔ [per 7. 11.] in eodem eſt & ipſa Δ Γ: quare EΔ ipſi Δ Γ eſt ad rectos angulos: ideoque Γ Δ ad rectos angulos eſt ipſi Δ E. ſed & Γ Δ ipſi BΔ: ergo Γ Δ duabus rectis lineis Δ E, ΔB ſe mutuo ſecantibus in communi ſectione Δ ad rectos angulos inſiſtit; ac propterea ipſa Γ Δ [per 4. 11.] plano



ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν μεπώρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· ἐν τῷ διὰ τῶν ΔΒ, ΓΔ ἄρα παραλλήλων ἐστὶν ἐπιπέδῳ ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῇ δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα· ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ· καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἡ ΑΒ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω ὅτι καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΓΔ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Συμβαλλέτωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΓΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Β, Δ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ· αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ, ΒΔ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. ἤχθω τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ ΔΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΑΕ, ΑΔ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπομένας αὐτῇ εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ὀρθή ἐστιν ἡ ΑΒ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΒΕ γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθείας ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΔ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΔ, ΓΔΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΒ· ἡ ΓΔ ἄρα πρὸς τὴν ΒΔ ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΔ· δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΔ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΒ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΒ ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΕ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΑΔ· δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΕ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΑ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΑΕ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΑ ἐστὶν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΔΑ· ἡ ΕΔ ἄρα πρὸς τὴν ΑΔ ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ πρὸς τὴν ΒΔ ὀρθή· ἡ ΕΔ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστι· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπομένας αὐτῇ εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἡ ΕΔ. ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν ΒΑ, ΑΔ ἐπιπέδῳ ἐστὶν ἡ ΔΓ, ἐπειδήπερ ἐν τῷ διὰ τῶν ΒΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ εἰσὶν αἱ ΑΒ, ΒΔ. ἐν ᾧ δὲ αἱ ΑΒ, ΒΔ ἐν τούτῳ ἐστὶ καὶ ἡ ΔΓ· ἡ ΕΔ ἄρα τῇ ΔΓ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ὥστε καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΒΔ· ἡ ΓΔ ἄρα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας ταῖς ΔΕ, ΔΒ ἀπὸ τοῦ κατὰ τὸ Δ τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν· ὥστε καὶ ἡ ΓΔ καὶ τῷ

ἀφὰ τ ΔΕ, ΔΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι· τὸ δὲ ἀφὰ τῶν ΔΕ, ΔΒ ἐπίπεδον τὸ ὑπκειμένον ἐστὶν· ἡ ΓΔ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

per ΔΕ, ΔΒ est ad rectos angulos. planum autem per ΔΕ, ΔΒ est subjectum planum: ergo ΓΔ subjecto plano ad rectos angulos erit. quod erat demonstrandum.

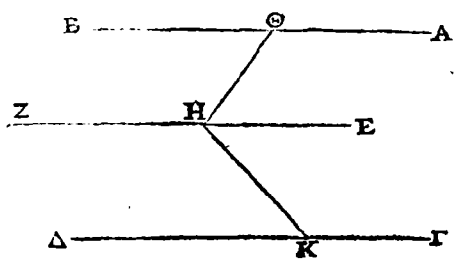
ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, κὰ μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, κὰ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

PROP. IX. THEOR.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano, etiam inter se parallelæ sunt.

ΕΣτω γὰρ ἑκατέρα τ ΑΒ, ΓΔ παράλληλος τῇ ΕΖ, μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.



Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τ ΕΖ τυχὸν σημεῖον τὸ Η, κὰ ἀπ' αὐτοῦ τῇ ΕΖ ἐν μὲν τῷ ἀφὰ τ ΕΖ, ΑΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΘ, ἐν δὲ τῷ διὰ τ ΖΕ, ΓΔ τῇ ΕΖ πάλιν πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΚ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΕΖ πρὸς ἑκατέραν τ ΗΘ, ΗΚ ὀρθή ἐστιν, ἡ ΕΖ ἄρα κὰ τῷ διὰ τ ΗΘ, ΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. καί ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ παράλληλος· κὰ ἡ ΑΒ ἄρα τῷ διὰ τ Θ, Η, Κ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ κὰ ἡ ΓΔ τῷ διὰ τ Θ, Η, Κ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ἑκατέρα ἄρα τ ΑΒ, ΓΔ τῷ διὰ τ Θ, Η, Κ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι, παράλληλοι εἰσὶν αἱ εὐθεῖαι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Sumatur in ΕΖ quodvis punctum Η, à quo ipsi ΕΖ in plano quidem per ΕΖ, ΑΒ transeunte ad rectos angulos ducatur ΗΘ; in plano autem transeunte per ΖΕ, ΓΔ rursus ducatur ipsi ΕΖ ad rectos angulos ΗΚ. quoniam ergo ΕΖ ad utramque ipsarum ΗΘ, ΗΚ est perpendicularis, erit ΕΖ [per 4. 11.] etiam ad rectos angulos plano per ΗΘ, ΗΚ transeunte. atque ΕΖ ipsi ΑΒ parallela est: ergo [per 8. 11.] & ΑΒ plano per Θ, Η, Κ ad rectos angulos est. eadem ratione & ΓΔ plano per Θ, Η, Κ est ad rectos angulos: utraque igitur ipsarum ΑΒ, ΓΔ plano per Θ, Η, Κ ad rectos angulos erit. si autem duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint [per 6. 11.] parallelæ erunt inter se: ergo ΑΒ ipsi ΓΔ parallela est. quod erat demonstrandum.

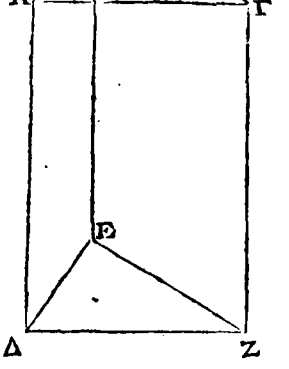
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· ἴσας γωνίας περιέξουσι.

PROP. X. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; illæ æquales angulos continebunt.

ΔΥο γὰρ εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΑΒ, ΒΓ παρὰ δύο εὐθείας τὰς ΔΕ, ΕΖ ἁπτομένας ἀλλήλων ἔστωσαν, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ.



Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ ΒΑ, ΒΓ, ΕΔ, ΕΖ ἴσαι ἀλλήλαις, κὰ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΓΖ, ΒΕ, ΑΓ, ΔΖ. κὰ ἐπεὶ ἡ ΒΑ τῇ ΕΔ ἴση ἐστὶ κὰ παράλληλος, *κὰ ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΕ ἴση ἐστὶ κὰ παράλληλος. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ κὰ ἡ ΓΖ τῇ ΒΕ ἴση ἐστὶ κὰ παράλληλος· ἑκατέρα ἄρα τ ΑΔ, ΓΖ τῇ ΒΕ ἴση ἐστὶ κὰ παράλληλος. αἱ δὲ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι κὰ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΓΖ καὶ ἴση. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΑΓ, ΔΖ· καὶ ἡ ΑΓ

Duæ enim rectæ lineæ sese tangentes ΑΒ, ΒΓ duabus rectis lineis ΔΕ, ΕΖ sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano: dico angulum ΑΒΓ angulo ΔΕΖ æqualem esse.

Assumantur enim ΒΑ, ΒΓ, ΕΔ, ΕΖ inter se æquales; & jungantur ΑΔ, ΓΖ, ΒΕ, ΑΓ, ΔΖ. quoniam igitur ΒΑ ipsi ΕΔ æqualis est & parallela, erit [per 33. 1.] & ΑΔ æqualis & parallela ipsi ΒΕ. eadem ratione & ΓΖ ipsi ΒΕ æqualis & parallela erit: utraque igitur ipsarum ΑΔ, ΓΖ ipsi ΒΕ æqualis est & parallela. quæ autem eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, [per 9. 11.] & inter se parallelæ erunt: ergo ΑΔ parallela est ipsi ΓΖ & æqualis. & ipsas conjungunt rectæ ΑΓ, ΔΖ; quare

* Illa κὰ ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΕ ἴση ἐστὶ κὰ παράλληλος supplevimus ex *Codd. MSS.*

ΑΓ ipſi ΔΖ æqualis eſt & parallela. & quoniam duæ rectæ lineæ ΑΒ, ΒΓ duabus ΔΕ, ΕΖ æquales ſunt, & baſis ΑΓ æqualis eſt baſi ΔΖ; erit [per 8. 1.] angulus ΑΒΓ angulo ΔΕΖ æqualis.

Si igitur duæ rectæ lineæ ſeſe tangentes duabus rectis lineis ſeſe tangentibus ſint parallelæ, non autem in eodem plano; illæ æquales angulos continebunt. quod erat demonſtrandum.

ἄρα τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι, μὴ ἐπὶ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XI. Probl.

A dato puncto in ſublimi ad ſubjectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

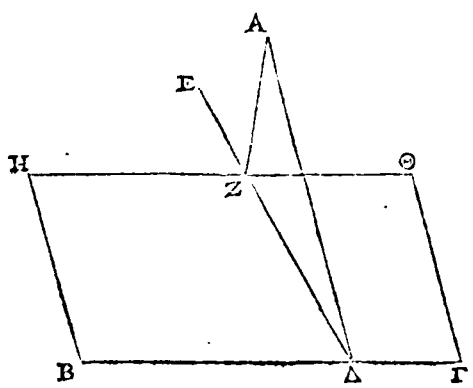
Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου μετεώρου ὑπὶ τὸ ὑποκείμενον ὑπίπεδον καθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

SIT datum quidem punctum in ſublimi Α, datum autem planum illud quod ſubjectum eſt: oportet à puncto Α ad ſubjectum planum perpendicularem rectam ducere.

In ſubjecto plano ducatur quædam recta linea utcunque ΒΓ, & [per 12. 1.] à puncto Α ad ΒΓ perpendicularis agatur ΑΔ. ſi igitur ΑΔ ſit etiam perpendicularis ad ſubjectum planum; factum jam erit, quod proponebatur: ſin minus, ducatur [per 11. 1.] à puncto Δ ipſi ΒΓ in ſubjecto plano ad rectos angulos ΔΕ; & [per 12. 1.] à puncto Α ad ΔΕ perpendicularis ducatur ΑΖ; denique per Ζ ducatur ΗΘ ipſi ΒΓ parallela.

Et quoniam ΒΓ utrique ipſarum ΔΑ, ΔΕ eſt ad rectos angulos, erit [per 4. 11.] & ΒΓ ad rectos angulos plano per ΕΔ, ΔΑ tranſeunti, atque eſt ipſi parallela ΗΘ. ſi vero ſint duæ rectæ lineæ parallelæ, quarum una plano alicui ſit ad rectos angulos; & reliqua [per 8. 11.] eidem plano ad rectos angulos erit: quare & ΗΘ plano per ΕΔ, ΔΑ tranſeunti ad rectos angulos eſt: ac propterea [per 3. def. 11.] ad omnes rectas lineas, quæ in eodem plano exiſtentes ipſam contingunt, eſt perpendicularis. ipſam autem ΗΘ contingit recta ΑΖ exiſtens in plano per ΕΔ, ΔΑ: ergo ΗΘ perpendicularis eſt ad ΖΑ: & ob id ΖΑ eſt perpendicularis ad ΗΘ. eſt autem [per conſtr.] & ΑΖ ad ΔΕ perpendicularis: ergo ΑΖ perpendicularis eſt ad utramque ipſarum ΗΘ, ΔΕ. ſi autem recta linea duabus rectis lineis ſeſe contingentibus in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat, [per 4. 11.] etiam plano per ipſas ducto ad rectos angulos erit: quare ΖΑ plano per ΕΔ, ΗΘ ducto eſt ad rectos angulos. planum autem per ΕΔ, ΗΘ eſt ſubjectum planum; ergo ΑΖ ad ſubjectum planum eſt perpendicularis.

A dato igitur puncto ſublimi Α ad ſubjectum planum perpendicularis recta linea ducta eſt ΑΖ. quod erat faciendum.



Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον μετέωρον τὸ Α, τὸ δὲ δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ συγκείμενον ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Διήχθω γάρ τις ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ὡς ἔτυχεν ἡ ΒΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ. εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΔ κάθετός ἐστι, ἓν ἐπὶ τὸ συγκείμενον ἐπίπεδον, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῇ ΒΓ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετος ἡ ΑΖ, καὶ διὰ τοῦ Ζ σημείου τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΓ ἑκατέρα τῶν ΔΑ, ΔΕ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἡ ΒΓ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΕΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ ἔστιν αὐτῇ παράλληλος ἡ ΗΘ. ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· καὶ ἡ ΗΘ ἄρα, τῷ διὰ τῶν ΕΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι· καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν ΕΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ, ὀρθή ἐστιν ἡ ΗΘ. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΑΖ οὖσα ἐν τῷ διὰ τῶν ΕΔ, ΔΑ ἐπιπέδῳ· ἡ ΗΘ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν ΖΑ· ὥστε καὶ ἡ ΖΑ ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν ΗΘ. ἔστι δὲ ἡ ΑΖ καὶ πρὸς τὴν ΔΕ ὀρθή· ἡ ΑΖ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΗΘ, ΔΕ ὀρθή ἐστιν. ἐὰν δὲ εὐθεῖα δυσὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων ἐπὶ τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπιζευχθῇ, καὶ τῷ διὰ αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ἡ ΖΑ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΕΔ, ΗΘ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. τὸ δὲ διὰ τῶν ΕΔ, ΗΘ ἐπίπεδόν ἐστι τὸ ὑποκείμενον· ἡ ΑΖ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

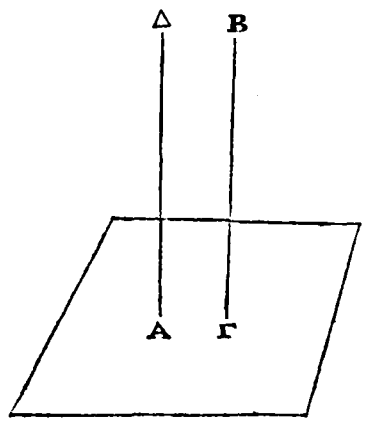
Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου μετεώρου τοῦ Α ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΑΖ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Τὸ δοθέντι ἐπιπέδῳ, ἀπὸ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον, τὸ δὲ πρὸς αὐτῷ σημεῖον τὸ Α· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναγαγεῖν.



Νενοήσθω τὸ σημεῖον μετέωρον τὸ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΔ.

Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν αἱ ΑΔ, ΓΒ, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἡ ΒΓ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι.

Τῷ ἄρα δοθέντι ἐπιπέδῳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος σημείου, πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα γραμμὴ ἀνέσται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. XII. PROBL.

Dato plano, à puncto quod in ipso datum est, ad rectos angulos rectam lineam constituere.

SIT datum quidem planum subjectum, punctum autem quod in ipso sit A: oportet à puncto A subjecto plano ad rectos angulos rectam lineam constituere.

Intelligatur aliquod punctum sublime B, à quo [per 11. 11.] ad subjectum planum agatur perpendicularis BΓ; & [per 31. 1.] per A ipsi BΓ parallela ducatur AΔ.

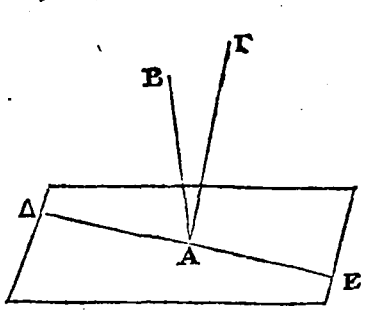
Quoniam igitur duæ rectæ lineæ parallelæ sunt AΔ, ΓB, una autem ipsarum BΓ subjecto plano est ad rectos angulos; & reliqua AΔ [per 8. 11.] subjecto plano ad rectos angulos erit.

Dato igitur plano, à puncto quod in ipso datum est, ad rectos angulos recta linea constituta est. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

* Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου, δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς οὐκ ἀναγήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατόν, τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου τοῦ Α δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάθωσαν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ διήχθω διὰ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐπίπεδον, τεμνέτω δὴ αὐτὸ διὰ τοῦ Α ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα. τεμνέτω τὰρ ΔΑΕ· αἱ ἄρα ΑΒ, ΑΓ, ΔΑΕ εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΑ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΔΑΕ οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΓΑΕ γωνία ὀρθή ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ ὀρθή ἐστιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΑΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ, καί εἰσιν ἐν τῷ ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.



Οὐκ ἄρα τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου, δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀναγήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XIII. PROBL.

Dato plano, à puncto quod in ipso est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non constituentur ab eadem parte.

SI enim fieri possit, dato plano, à puncto A quod in ipso est, duæ rectæ lineæ AB, AΓ ad rectos angulos constituantur ab eadem parte; & ducatur planum per BA, AΓ, quod [per 3. 11.] faciet sectionem per A in subjecto plano rectam lineam. faciat ΔAE: ergo rectæ lineæ AB, AΓ, ΔAE in uno sunt plano. quoniam vero ΓA subjecto plano ad rectos angulos est, [per 3. deff. 11.] & ad omnes rectas lineas, quæ in subjecto plano existentes ipsam contingunt, rectos faciet angulos. ipsam autem ΓA contingit recta ΔAE, in subjecto plano existens: angulus igitur ΓAE est rectus. eadem ratione & BAE est rectus: ergo angulus ΓAE ipsi BAE est æqualis, & in uno sunt plano, quod [per 9. ax.] fieri non potest.

Non igitur dato plano, à puncto quod in ipso est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos constituentur ab eadem parte. quod erat demonstrandum.

* Ἀπὸ δοθέντος σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι &c. melius in *Codd. MSS.*

Prop. XIV. Theor.

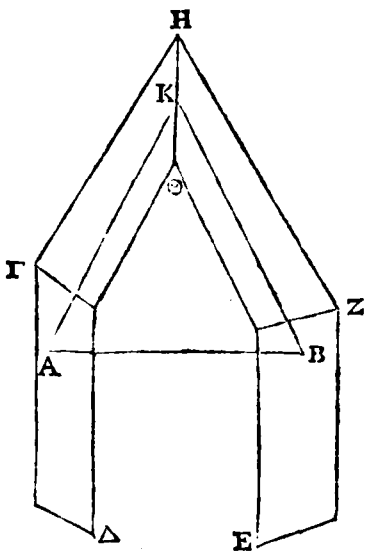
Ad quæ plana eadem recta linea eſt perpendicularis, ea parallela ſunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστι, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα.

REcta enim linea quædam AB ad utrumque ipſorum planorum ΓΔ, EZ ſit perpendicularis: dico ea plana parallela eſſe.

Si enim non ita ſit, producta convenient inter ſe conveniant, facient autem [per 3. 11.] communem ſectionem rectam lineam. faciant HΘ; & in ipſa HΘ, ſumpto quovis puncto K, jungantur AK, BK. quoniam igitur AB recta eſt ad planum EZ, erit [per 3. def. 11.] & perpendicularis ad ipſam BK, rectam in plano EZ producto exiſtentem: quare angulus ABK rectus eſt. eadem ratione & BAK eſt rectus; ideoque trianguli ABK duo anguli ABK, BAK duobus rectis ſunt æquales; quod [per 17. 1.] fieri non poteſt: non igitur plana ΓΔ, EZ producta inter ſe convenient: parallela igitur ſunt plana ΓΔ, EZ.



Ad quæ igitur plana eadem recta linea eſt perpendicularis, ea parallela ſunt. quod erat demonſtrandum.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ AB πρὸς ἑκάτερον τῶν ΓΔ, EZ ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω ὅτι παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα.

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. συμπιπτέτωσαν· ποιήσει δὴ κοινὴν τομὴν εὐθεῖαν. ποιείτωσαν τὴν HΘ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς HΘ τυχὸν σημεῖον τὸ K, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AK, BK. καὶ ἐπεὶ ἡ AB ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ EZ ἐπίπεδον, καὶ πρὸς τὴν BK ἄρα εὐθεῖαν οὖσαν ἐν τῷ EZ ἐκβεβληθέντι ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ AB· ἡ ἄρα ὑπὸ ABK γωνία ὀρθή ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ BAK ὀρθή ἐστι, τριγώνου δὲ τοῦ ABK αἱ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ABK, BAK δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὰ ΓΔ, EZ ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσεῖται· παράλληλα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΔ, EZ ἐπίπεδα.

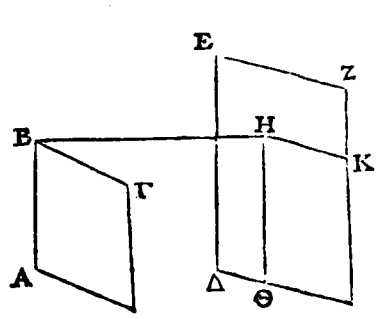
Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἄρα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστι, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XV. Theor.

Si duæ rectæ lineæ ſeſe tangentes duabus rectis lineis ſeſe tangentibus ſint parallelæ, non autem in eodem plano; & quæ per ipſas tranſeunt plana parallela erunt.

DUÆ enim rectæ lineæ ſeſe tangentes AB, BΓ duabus rectis lineis ſeſe tangentibus ΔE, EZ parallelæ ſint, & non in eodem plano: dico plana quæ per AB, BΓ, ΔE, EZ tranſeunt, ſi producantur, inter ſe non convenire.

Ducatur enim [per 11. 11.] à puncto B ad planum quod per ΔE, EZ tranſit perpendicularis BH, quæ plano in puncto H occurrat; & per H [per 31. 1.] ducatur ipſi quidem EΔ parallela HΘ, ipſi vero EZ parallela HK. itaque quoniam BH perpendicularis eſt ad planum per ΔE, EZ, & [per 3. def. 11.] ad omnes rectas lineas quæ ipſam contingunt, & in eodem ſunt plano, rectos faciet angulos. contingit autem illam utraque ipſarum HΘ, HK, quæ ſunt in plano per ΔE, EZ: rectus igitur eſt uterque angulorum BHΘ,



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

**Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων τοῦ διὰ δύο εὐθειῶν ἁπτομένων

ΒΗΚ γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΒΑ τῇ ΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΗΒΑ, ΒΗΘ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΗΒΑ· ἡ ΗΒ ἄρα τῇ ΒΑ πρὸς ὀρθάς ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΗ καὶ τῇ ΒΓ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΒΗ δυσὶν εὐθείαις ταῖς ΒΑ, ΒΓ τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν, ἡ ΒΗ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΑ, ΒΓ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. [* διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΒΗ καὶ τῷ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, τὸ δὲ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΚ ἐπίπεδόν ἐστι τὸ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ· ἡ ΒΗ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. ἐδείχθη δὲ ἡ ΒΗ καὶ τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς.] ἔστι δὲ καὶ τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδῳ ὀρθή· ἡ ΒΗ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδων ὀρθή ἐστι. πρὸς ἃ δὲ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστι, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα· παράλληλον ἄρα ἐστὶ τὸ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπίπεδον τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, παράλληλά ἐστι τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΒΗΚ. & quoniam ΒΑ parallela eſt ipſi ΗΘ, [per 29. 1.] anguli ΗΒΑ, ΒΗΘ duobus rectis ſunt æquales. rectus autem eſt ΒΗΘ: ergo & ΗΒΑ rectus erit; ideoque ΗΒ ad ΒΑ eſt perpendicularis. eadem ratione & ΒΗ eſt perpendicularis ad ΒΓ. quoniam igitur recta linea ΒΗ duabus rectis lineis ΒΑ, ΒΓ ſe invicem ſecantibus ad rectos angulos inſiſtit, erit [per 4. 11.] ΒΗ etiam ad planum per ΑΒ, ΒΓ ductum perpendicularis. *[& ob eandem cauſam ΒΗ eſt perpendicularis ad planum per ΗΘ, ΗΚ. ſed planum per ΗΘ, ΗΚ eſt illud, quod per ΔΕ, ΕΖ tranſit: quare ΒΗ ad planum quod tranſit per ΔΕ, ΕΖ eſt perpendicularis. oſtenſa autem eſt ΒΗ etiam perpendicularis ad planum per ΑΒ, ΒΓ.] atque eſt ad planum per ΔΕ, ΕΖ perpendicularis: ergo ΒΗ perpendicularis eſt ad utrumque planorum quæ per ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ tranſeunt. ad quæ vero plana eadem recta linea eſt perpendicularis [per 14. 11.] ea parallela ſunt: parallelum igitur eſt planum per ΑΒ, ΒΓ plano per ΔΕ, ΕΖ.

Quare ſi duæ rectæ lineæ ſeſe tangentes duabus rectis lineis ſeſe tangentibus ſint parallelæ, non autem in eodem plano; & quæ per ipſas tranſeunt plana parallela erunt. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

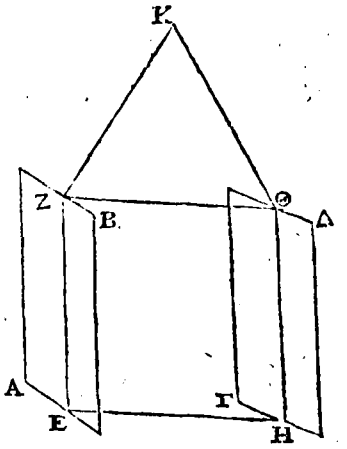
Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπό τινος ἐπιπέδου πίπτῃ, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι.

Prop. XVI. Theor.

Si duo plana parallela ab aliquo plano ſecentur, communes ipſorum ſectiones ſunt etiam parallelæ.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΕΖΗΘ τεμνέσθω, κοιναὶ δὲ αὐτῶν τομαὶ ἔστωσαν αἱ ΕΖ, ΗΘ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΗΘ.

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται αἱ ΕΖ, ΗΘ, ἤτοι ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ Ε, Η. ἐκβεβλήσθω πρότερον ὡς ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ. ἐπεὶ ἡ ΕΖΚ ἐν τῷ ΑΒ ἐστὶν ἐπιπέδῳ, καὶ πάντα ἄρα τὰ ἐπὶ τῆς ΕΖΚ σημεῖα ἐν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ ἐστίν. ἓν δὲ τῶν ἐπὶ τῆς ΕΖΚ εὐθείας σημεῖόν ἐστι τὸ Κ· τὸ Κ ἄρα ἐν τῷ ΑΒ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ Κ ἐν τῷ ΓΔ ἐστιν ἐπιπέδῳ· τὰ ΑΒ, ΓΔ ἄρα ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. οὐ συμπίπτουσι δέ, διὰ τὸ παράλληλα ὑποκεῖσθαι· οὐκ ἄρα αἱ ΕΖ, ΗΘ εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ Ζ, Θ μέρη. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι αἱ ΕΖ, ΗΘ εὐθεῖαι οὐδὲ ἐπὶ τὰ Ε, Η μέρη ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. αἱ δὲ μηδέτερα μέρη συμπίπτουσαι παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΗΘ.



Duo enim plana parallela ΑΒ, ΓΔ à plano aliquo ΕΖΗΘ ſecentur, communes autem ipſorum ſectiones ſint ΕΖ, ΗΘ: dico ΕΖ ipſi ΗΘ parallelam eſſe.

Si enim non eſt parallela, productæ ΕΖ, ΗΘ inter ſe convenient, vel ad partes Ζ, Θ, vel ad partes Ε, Η. producantur prius, ut ad partes Ζ, Θ, & conveniant in Κ. quoniam igitur ΕΖΚ eſt in plano ΑΒ, & omnia quæ in ΕΖΚ ſumuntur puncta in eodem plano erunt. unum autem punctorum quæ ſunt in ΕΖΚ eſt ipſum Κ punctum: ergo Κ eſt in plano ΑΒ. eadem ratione & Κ eſt in ΓΔ plano: ergo plana ΑΒ, ΓΔ producta inter ſe convenient. non conveniunt autem, cum parallela ponantur: non igitur ΕΖ, ΗΘ rectæ lineæ productæ convenient ad partes Ζ, Θ. ſimiliter demonſtrabimus neque rectas ΕΖ, ΗΘ ad partes Ε, Η convenire, ſi producantur. quæ autem neutra ex parte conveniunt [per 35. def. 1.] parallelæ ſunt, ergo ΕΖ ipſi ΗΘ eſt parallela.

* Illa uncis incluſa omitti debent: integra quidem non exſtant in *Codd. MSS.*

Si

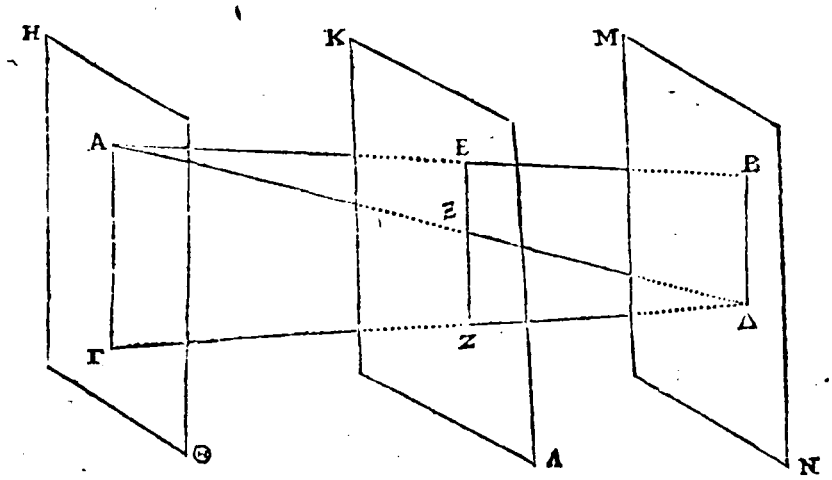
Si igitur duo plana parallela ab aliquo plano secentur, communes ipsorum sectiones parallelæ erunt. quod erat demonstrandum.

Prop. XVII. Theor.

Si duæ rectæ lineæ à parallelis planis secentur, in eadem ratione secabuntur.

DUÆ enim rectæ lineæ AB, ΓΔ à parallelis planis HΘ, KΛ, MN secentur in punctis A, E, B, Γ, Z, Δ: dico ut AE recta linea ad ipsam EB ita esse ΓZ ad ZΔ.

Jungantur enim AΓ, BΔ, AΔ, & occurrat AΔ plano KΛ in puncto Ξ, & EΞ, ΞZ jungantur. quoniam igitur duo plana parallela KΛ, MN à plano EBΔΞ secantur, [per 16. 11.] communes ipsorum sectiones EΞ, BΔ parallelæ sunt. eadem ratione quoniam duo plana parallela HΘ, KΛ à plano AΞZΓ secantur, communes ipsorum sectiones AΓ, ZΞ sunt parallelæ. quoniam autem uni laterum trianguli ABΔ, videlicet ipsi BΔ, parallela ducta est EΞ, [per 2. 6.] ut AB ad EB ita erit AΞ ad ΞΔ. rursus quoniam uni laterum trianguli AΔΓ, nempe ipsi AΓ, parallela ducta est ΞZ, erit ut AΞ ad ΞΔ ita ΓZ ad ZΔ. ostensum autem est & ut AΞ ad ΞΔ ita esse AE ad EB: erit igitur [per 11. 5.] ut AE ad EB ita ΓZ ad ZΔ.



Quare si duæ rectæ lineæ à parallelis planis secentur, in eadem ratione secabuntur. quod erat demonstrandum.

Prop. XVIII. Theor.

Si recta linea plano alicui sit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipsam transeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

RECta enim linea quædam AB subjecto plano sit ad rectos angulos: dico & omnia plana, quæ per ipsam AB transeunt, subjecto plano ad rectos angulos esse.

Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπό ἐπιπέδου τινὸς τέμνηται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται.

ΔΥΟ γὰρ εὐθεῖαι αἱ AB, ΓΔ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν HΘ, KΛ, MN τετμήσθωσαν κατὰ τὰ A, E, B, Γ, Z, Δ σημεῖα· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AE εὐθεῖα πρὸς τὴν EB οὕτως ἡ ΓZ πρὸς τὴν ZΔ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ AΓ, BΔ, AΔ, καὶ συμβαλλέτω ἡ AΔ τῷ KΛ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ξ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ EΞ, ΞZ. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ KΛ, MN ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ EBΔΞ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ EΞ, BΔ παράλληλοί εἰσι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ HΘ, KΛ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ AΞZΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ AΓ, ZΞ παράλληλοί εἰσι. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ABΔ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν BA εὐθεῖα ἦκται ἡ EΞ, ἀνάλογον ἄρα ὡς ἡ AE πρὸς τὴν EB οὕτως ἡ AΞ πρὸς τὴν ΞΔ. πάλιν ἐπεὶ τριγώνου τοῦ AΔΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν AΓ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΞZ, ἀνάλογον ἄρα ὡς ἡ AΞ πρὸς τὴν ΞΔ οὕτως ἡ ΓZ πρὸς τὴν ZΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ AΞ πρὸς τὴν ΞΔ οὕτως ἡ AE πρὸς τὴν EB· καὶ ὡς ἄρα ἡ AE πρὸς τὴν EB οὕτως ἡ ΓZ πρὸς τὴν ZΔ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται, εἰς τὰς αὐτὰς λόγους τμηθήσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

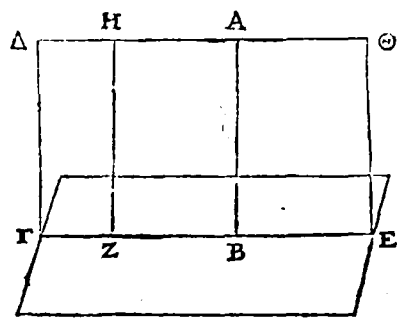
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ διὰ αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

ΕΥθεῖα γάρ τις ἡ AB τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω ὅτι καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς AB ἐπίπεδα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Exten-

Ἐκβεβλήθω γὰρ ἀπὸ τοῦ ΑΒ ἐπιπέδου τὸ ΔΕ, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τοῦ ΔΕ ἐπιπέδου καὶ τοῦ ὑποκειμένου ἡ ΓΕ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΓΕ τοχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ τῇ ΓΕ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ ΔΕ ἐπιπέδῳ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθή ἐστι, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ ΑΒ· ὥστε καὶ πρὸς τὴν ΓΕ ὀρθή ἐστιν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΖ γωνία ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΗΖΒ ὀρθή· παράλληλος ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΖΗ. ἡ δὲ ΑΒ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι· καὶ ἡ ΖΗ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. καὶ ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ὦσι, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῷ ΓΕ πρὸς ὀρθὰς ἀκθείσαι ἡ ΖΗ ἐδείχθη τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς· τὸ ἄρα ΔΕ ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὁμοίως δὴ δείξομεν καὶ πάντα τὰ διὰ τοῦ ΑΒ ἐπίπεδα ὀρθὰ τυγχάνοντα πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον.



Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ διὰ αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Producatur enim per rectam AB planum ΔE, ſitque plani ΔE & ſubjecti plani communis ſectio recta ΓE; & ſumatur in ΓE quodvis punctum Z, à quo ipſi ΓE ad rectos angulos in ΔE plano ducatur ZH. quoniam igitur recta AB ad ſubjectum planum eſt perpendicularis; & [per 3. def. 11.] ad omnes rectas lineas quæ ipſam contingunt & in ſubjecto plano jacent perpendicularis erit: quare etiam ad ΓE eſt perpendicularis: angulus igitur ABZ rectus eſt. ſed & HZB eſt rectus: ergo [per 28. 1.] AB parallela eſt ipſi ZH. eſt autem AB ſubjecto plano ad rectos angulos: quare [per 8. 11.] etiam ZH eidem plano ad rectos angulos erit. at [per 4. def. 11.] planum ad planum rectum eſt, quando communi planorum ſectioni ad rectos angulos ductæ in uno plano rectæ lineæ reliquo plano ad rectos angulos ſunt; communi ergo planorum ſectioni ΓE in uno plano ΔE ad rectos angulos ducta ZH oſtenſa eſt ſubjecto plano ad rectos angulos eſſe: ergo planum ΔE rectum eſt ad ſubjectum planum. ſimiliter demonſtrabuntur & omnia quæ per AB tranſeunt plana ſubjecto plano recta eſſe.

Si igitur recta linea plano alicui ſit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipſam tranſeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπίπεδόν τινι πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

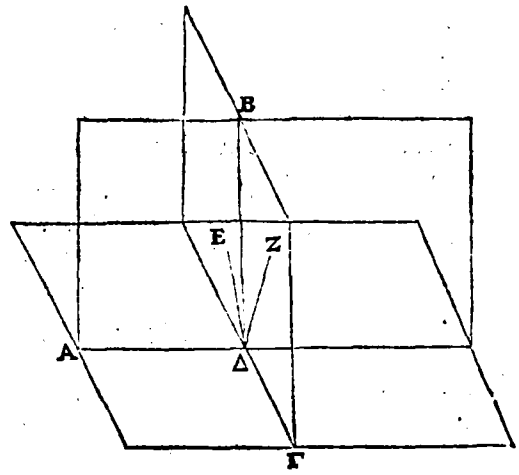
Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ ΑΒ, ΒΓ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι ἡ ΒΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Μὴ γάρ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐν μὲν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ τῇ ΑΔ εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ, ἐν δὲ τῷ ΒΓ ἐπιπέδῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΒ ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον, καὶ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ ἦκται ἡ ΔΕ· ἡ ΔΕ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΔΖ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ

Prop. XIX. Theor.

Si duo plana ſe invicem ſecantia plano alicui ſint ad rectos angulos, communis ipſorum ſectio eidem plano ad rectos angulos erit.

Duo enim plana ſe invicem ſecantia AB, BΓ ſubjecto plano ſint ad rectos angulos, communis autem ipſorum ſectio ſit BΔ: dico rectam BΔ ſubjecto plano ad rectos angulos eſſe.



Non enim ſit, atque [per 11. 1.] à puncto Δ ducatur in plano quidem AB rectæ lineæ AΔ ad rectos angulos ipſa ΔB; in plano autem BΓ ducatur ipſi ΓΔ ad rectos angulos ΔZ. quoniam ergo planum AB ad ſubjectum planum rectum eſt, & communi ipſorum ſectioni AΔ ad rectos angulos in plano AB ducta eſt ΔE; erit ΔE ad ſubjectum planum perpendicularis. ſimiliter oſtendemus & ΔZ perpendicularem eſſe ad ſubjectum planum: quare ab eo-

dem puncto Δ ſubjecto plano duæ rectæ lineæ ad rectos angulos conſtitutæ ſunt ex eadem parte, quod [per 13.11.] fieri non poteſt: non igitur ſubjecto plano à puncto Δ ad rectos angulos conſtituentur aliæ rectæ lineæ, præter ipſam Δ B communem planorum A B, B Γ ſectionem.

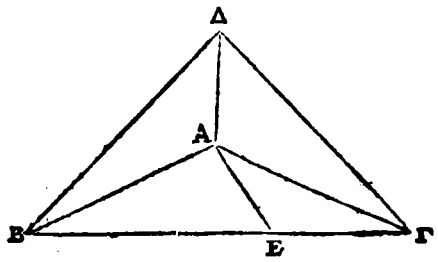
Ergo ſi duo plana ſe invicem ſecantia plano alicui ſint ad rectos angulos, & communis ipſorum ſectio eidem plano ad rectos angulos erit. quod erat demonſtrandum.

Prop. XX. Theor.

Si ſolidus angulus ſub tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo majores ſunt quomodocunque ſumpti.

SOlidus enim angulus ad A ſub tribus angulis planis B A Γ, Γ A Δ, Δ A B contineatur: dico angulorum B A Γ, Γ A Δ, Δ A B duos quoſlibet reliquo majores eſſe quomodocunque ſumptos.

Si enim B A Γ, Γ A Δ, Δ A B anguli inter ſe æquales ſint, perſpicuum eſt duos quoſlibet reliquo majores eſſe quomodocunque ſumptos. ſin aliter, ſit major B A Γ, & ad rectam lineam A B & ad punctum in ipſa A [per 23. 1.] conſtituatur angulo Δ A B in plano per B A Γ tranſeunte æqualis angulus B A E; ponaturque [per 3. 1.] ipſi A Δ æqualis A E; dein per E ducta B E Γ ſecet rectas lineas A B, A Γ in punctis B, Γ; & Δ B, Δ Γ jungantur. itaque quoniam Δ A eſt æqualis A E, communis autem A B, duæ Δ A, A B duabus A E, A B æquales ſunt. & angulus Δ A B æqualis eſt angulo B A E; baſis igitur Δ B [per 4.1.] baſi B E eſt æqualis. & quoniam duæ Δ B, Δ Γ ipſa B Γ majores ſunt, ex quibus Δ B æqualis oſtenſa eſt ipſi B E; erit reliqua Δ Γ quam reliqua E Γ major. quoniam autem Δ A eſt æqualis A E, communis autem A Γ, & baſis Δ Γ major baſi E Γ; erit [per 25. 1.] angulus Δ A Γ angulo E A Γ major. oſtenſus autem eſt & Δ A B angulus æqualis ipſi B A E: quare Δ A B, Δ A Γ anguli angulo B A Γ majores ſunt. ſimiliter quoque demonſtrabimus, ſi duo quilibet alii ſumantur, eos reliquo eſſe majores.



Si igitur ſolidus angulus ſub tribus angulis planis contineatur; duo quilibet reliquo majores ſunt quomodocunque ſumpti. quod erat demonſtrandum.

Prop. XXI. Theor.

Omnis ſolidus angulus ſub minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur.

SIT ſolidus angulus ad A ſub planis angulis B A Γ, Γ A Δ, Δ A B contentus: dico angulos

ἂρα σημεῖα τὰ Δ τῷ ὑπκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀνεσταμέναι εἰσὶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τῷ ὑπκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου πρὸς ὀρθὰς ἀναβήσονται πλείω τῶν Δ B κοινῆς τομῆς τῶν A B, B Γ ἐπιπέδων.

Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐὰν στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχηται, δύο οἱαιδηποτοῦν τῶν λοιπῶν μείζονές εἰσι πάντη μεταλαμβανόμενα.

Στερεὰ γὰρ γωνία ἡ πρὸς τῷ A ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ B A Γ, Γ A Δ, Δ A B περιεχέσθω· λέγω ὅτι τῶν ὑπὸ B A Γ, Γ A Δ, Δ A B γωνιῶν δύο οἱαιδηποτοῦν τῶν λοιπῶν μείζονές εἰσι πάντη μεταλαμβανόμεναι.

Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ B A Γ, Γ A Δ, Δ A B γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, φανερὸν ὅτι δύο οἱαιδηποτοῦν τῶν λοιπῶν μείζονές εἰσι πάντη μεταλαμβανόμεναι. εἰ δὲ οὔ, ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ B A Γ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ A B εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ ὑπὸ Δ A B γωνίᾳ ἴση τῇ ὑπὸ B A Γ ἐπιπέδῳ ἴση ἡ ὑπὸ B A E, καὶ κείσθω τῇ A Δ ἴση ἡ A E, καὶ διὰ τοῦ E σημείου διαχθεῖσα ἡ B E Γ τεμνέτω τὰς A B, A Γ εὐθείας, κατὰ τὰ B, Γ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Δ B, Δ Γ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ Δ A τῇ A E, κοινὴ δὲ ἡ A B, δύο δὴ αἱ Δ A, A B δυσὶν A E, A B ἴσαι, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ Δ A B γωνίᾳ τῇ ὑπὸ B A E ἴση· βάσις ἄρα ἡ Δ B βάσει τῇ B E ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ Δ B, Δ Γ τῆς B Γ μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ Δ B τῇ B E ἐδείχθη ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ Δ Γ λοιπῆς τῆς E Γ μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ Δ A τῇ A E, κοινὴ δὲ ἡ A Γ, καὶ βάσις ἡ Δ Γ βάσεως τῆς E Γ μείζων ἐστὶν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ Δ A Γ γωνίας τῆς ὑπὸ E A Γ μείζων ἐστίν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ Δ A B τῇ ὑπὸ B A E ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ Δ A B, Δ A Γ τῆς ὑπὸ B A Γ μείζονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ συνδυο λαμβανόμεναι τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν.

Ἐὰν ἄρα στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχηται, δύο οἱαιδηποτοῦν τῶν λοιπῶν μείζονές εἰσι πάντη μεταλαμβανόμεναι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

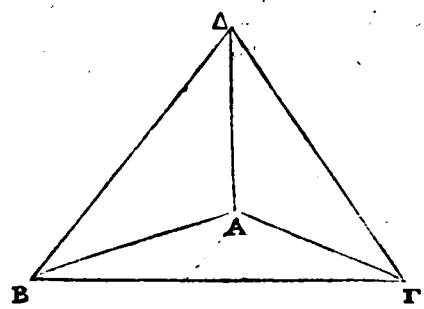
Ἁπασα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται.

Ἔστω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ A περιεχομένη ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν ὑπὸ B A Γ, Γ A Δ, Δ A B· λέγω ὅτι

ὅτι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν.

Εἰλήφθω γὰρ ἑφ' ἑκάστης τῶν ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ τυχόντα σημεῖα τὰ Β, Γ, Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΓ, ΓΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Β ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΓΒΔ, δύο ὁποιαιοῦν τῶν λοιπῶν μείζονές εἰσιν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ τῶν ὑπὸ ΓΒΔ μείζονές εἰσι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ μὲν ὑπὸ ΒΓΑ, ΑΓΔ τῶν ὑπὸ ΒΓΔ μείζονές εἰσι, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΓΔΑ, ΑΔΒ τῶν ὑπὸ ΓΔΒ μείζονές εἰσιν· αἱ ἓξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΑΔΓ, ΑΔΒ τριῶν τῶν ὑπὸ ΓΒΔ, ΒΓΔ, ΓΔΒ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ ΓΒΔ, ΒΓΔ, ΓΔΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἓξ ἄρα αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΑΔΓ, ΑΔΒ δύο ὀρθῶν μείζονές εἰσι. καὶ ἐπεὶ ἑκάστῳ τῶν ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΒ τριγώνων αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, αἱ ἄρα τῶν τριῶν τριγώνων ἐννέα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΓΒ, ΒΑΓ, ΑΓΔ, ΔΑΓ, ΓΔΑ, ΑΔΒ, ΔΒΑ, ΒΑΔ ἓξ ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὧν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ, ΔΒΑ ἓξ γωνίαι δύο ὀρθῶν μείζονές εἰσι· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ τρεῖς γωνίαι περιέχουσι τὴν στερεὰν γωνίαν τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν.

Ἅπασα ἄρα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



BAΓ, ΓAΔ, ΔAB quatuor rectis esse minores.

Sumantur enim in unaquaque ipsarum AB, AΓ, AΔ quævis puncta B, Γ, Δ, & BΓ, ΓΔ, ΔB jungantur. quoniam igitur solidus angulus ad B continetur sub tribus angulis planis ΓBA, ABΔ, ΓBΔ, [per 20. 11.] duo quilibet reliquo majores sunt: anguli igitur ΓBA, ABΔ angulo ΓBΔ sunt majores. eadem ratione & anguli quidem BΓA, AΓΔ majores sunt angulo BΓΔ; & adhuc anguli ΓΔA, AΔB majores angulo ΓΔB: quare sex anguli ΓBA, ABΔ, BΓA, AΓΔ, AΔΓ, AΔB tribus angulis ΓBΔ, BΓΔ, ΓΔB sunt majores. sed tres anguli ΓBΔ, BΓΔ, ΓΔB [per 32. 1.] sunt æquales duobus rectis: sex igitur anguli ΓBA, ABΔ, BΓA, AΓΔ, AΔΓ, AΔB duobus rectis majores sunt. quoniam vero singulorum triangulorum ABΓ, AΓΔ, AΔB tres anguli sunt æquales duobus rectis, trium triangulorum novem anguli ΓBA, AΓB, BAΓ, AΓΔ, ΔAΓ, ΓΔA, AΔB, ΔBA, BAΔ sunt æquales sex rectis, ex quibus sex anguli ABΓ, BΓA, AΓΔ, ΓΔA, AΔB, ΔBA duobus rectis sunt majores: reliqui igitur tres anguli BAΓ, ΓAΔ, ΔAB, qui solidum continent angulum, quatuor rectis minores erunt.

Quare omnis solidus angulus sub minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

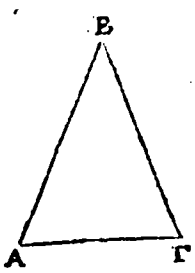
Ἐὰν ὦσι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, ὧν αἱ δύο τῶν λοιπῶν μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι· δυνατὸν ἐστιν ἐκ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς ἴσας εὐθείας τρίγωνον συστήσασθαι.

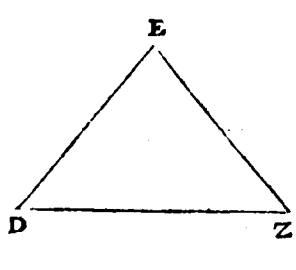
Prop. XXII. Theor.

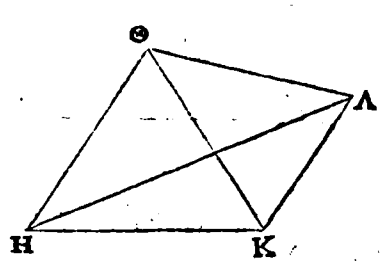
Si sint tres anguli plani, quorum duo reliquo sunt majores quomodocunque sumpti, contineant autem ipsos rectæ lineæ æquales; fieri potest ut ex iis, quæ rectas æquales conjungunt, triangulum constituatur.

Ἔστωσαν τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῶν λοιπῶν μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν ὑπὸ

SInt tres anguli plani ABΓ, ΔEZ, HΘK, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, videlicet anguli quidem







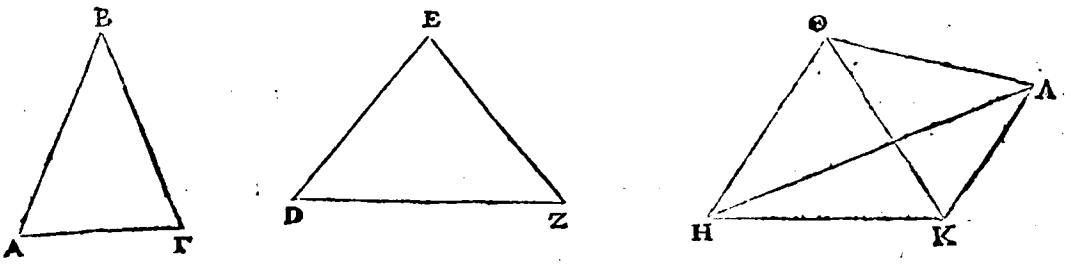
ΑΒΓ, ΔΕΖ τῆς ὑπὸ ΗΘΚ, αἱ δὲ ὑπὸ ΔΕΖ, ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΗΘΚ, ΑΒΓ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ, καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ,

ABΓ, ΔEZ majores angulo HΘK, anguli vero ΔEZ, HΘK majores angulo ABΓ, & præterea anguli HΘK, ABΓ angulo ΔEZ majores, sintque æquales rectæ lineæ AB, BΓ, ΔE, EZ,

ΗΘ, ΘΚ; atque demum ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ jungantur: dico fieri poſſe, ut ex æqualibus ipſis ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ triangulum conſtituatur; hoc eſt, ipſarum ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ duas quaſlibet reliqua eſſe majores quomodocunque ſumptas.

Si quidem igitur anguli ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ inter ſe æquales ſint; manifeſtum eſt æqualibus adeo factis ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ ex æqualibus ipſis triangulum conſtitui poſſe. ſin minus, ſint inæquales, & ad rectam lineam ΘΚ, atque ad punctum in ipſa Θ, angulo ΑΒΓ æqualis [per 23. 1.] angulus conſtituatur ΚΘΛ; & ponatur uni ipſarum ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ

Ει μὲν οὖν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, φανερὸν ὅτι καὶ τὰ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ ἴσων γενομένων δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συνίστασθαι. εἰ δὲ ἄ, ἔστωσαν ἄνισοι, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΘΚ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ, τῇ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΚΘΛ· καὶ κείσθω μιᾷ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ,



æqualis ΘΛ; atque ΗΛ, ΚΛ jungantur. itaque quoniam duæ ΑΒ, ΒΓ duabus ΚΘ, ΘΛ æquales ſunt, & angulus ad Β angulo ΚΘΛ æqualis; erit [per 4. 1.] baſis ΑΓ æqualis baſi ΚΛ. & quoniam anguli ΑΒΓ, ΗΘΚ angulo ΔΕΖ ſunt majores, æqualis autem eſt angulus ΑΒΓ angulo ΚΘΛ: erit ΗΘΛ angulo ΔΕΖ major: item quoniam duæ ΗΘ, ΘΛ duabus ΔΕ, ΕΖ æquales ſunt, & angulus ΗΘΛ angulo Ε major; baſis ΗΛ [per 24. 1.] baſi ΔΖ major erit. ſed [per 20. 1.] ΗΚ, ΚΛ ipſa ΗΛ ſunt majores: multo igitur majores ſunt ΗΚ, ΚΛ ipſa ΔΖ. eſt autem ΚΛ æqualis ΑΓ: ergo ΑΓ, ΗΚ reliqua ΔΖ ſunt majores. ſimiliter demonſtrabimus & ipſas quidem ΑΓ, ΔΖ majores eſſe ΗΚ, ipſas vero ΗΚ, ΔΖ majores ΑΓ: fieri igitur poteſt [per 22. 1.] ut ex æqualibus ipſis ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ triangulum conſtituatur.

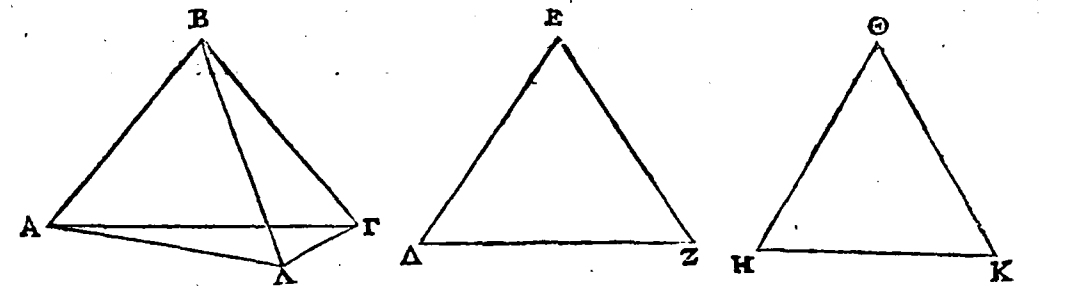
ΘΚ ἴση ἡ ΘΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΛ, ΚΛ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΚΘ, ΘΛ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Β γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΘΛ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΚΛ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ τῶν ὑπὸ ΔΕΖ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΚΘΛ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΗΘΛ τῶν ὑπὸ ΔΕΖ μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΗΘ, ΘΛ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΘΛ γωνίας τῆς πρὸς τῷ Ε μείζων· βάσις ἄρα ἡ ΗΛ βάσεως τῆς ΔΖ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ αἱ ΗΚ, ΚΛ τῆς ΚΛ μείζονές εἰσι· πολλῷ ἄρα αἱ ΗΚ, ΚΛ τῆς ΔΖ μείζονές εἰσιν. ἴση δὲ ἡ ΚΛ τῇ ΑΓ· αἱ ΑΓ, ΗΚ ἄρα τῆς λοιπῆς τῆς ΔΖ μείζονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ μὲν ΑΓ, ΔΖ τῆς ΗΚ μείζονές εἰσι, αἱ δὲ ΗΚ, ΔΖ τῆς ΑΓ· δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συνίστασθαι.

Aliter.

Sint dati tres anguli plani ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, quorum duo reliquo ſint majores quomodocunque ſumpti; contineant autem ipſos æqua-

Αλλως.

Ἐστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντη μεταλαμβανόμεναι, συνεχέ-



les rectæ lineæ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, atque ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ jungantur: dico fieri poſſe ut ex æqualibus ipſis ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ triangulum conſtituatur; hoc eſt rurſus duas reliqua majores eſſe quomodocunque ſumptas. ſi igitur rurſus anguli ad puncta Β, Ε, Θ ſint æquales, &

τωσαν δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ· λέγω ὅτι δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συνίστασθαι, τουτέστιν πάλιν ὅτι αἱ δύο τῶν λοιπῶν μείζονές εἰσι πάντη μεταλαμβανόμεναι. εἰ μὲν οὖν πάλιν αἱ πρὸς τοῖς Β, Ε, Θ σημείοις γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἔστιν

ἴσον) ἑ αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ ἴσαι, καὶ ἴσονται αἱ δύο τὰς λοιπῆς μείζονες. ἐὰν δὲ ὦ, ἔσονται αἱ πρὸς τῇ Β, Ε, Θ σημείοις γωνίαι, ἑ μείζων ἡ πρὸς τῷ Β ἑκατέρας τῶν πρὸς τῇ Ε, Θ· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΑΓ εὐθεῖα ἑκατέρας τῶν ΔΖ, ΗΚ. ἑ φανερὸν ὅτι ἡ ΑΓ μιᾷ ἑκατέρας τῶν ΔΖ, ΗΚ τῆς λοιπῆς μείζων ἐστί. λέγω ὅτι καὶ αἱ ΔΖ, ΗΚ τὰς ΑΓ μείζονές εἰσι. συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β τῇ ὑπὸ ΗΘΚ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΒΛ, καὶ κείσθω μιᾷ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ἴση ἡ ΒΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΛ, ΛΓ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΛ δυσὶ ταῖς ΗΘ, ΘΚ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΛ βάσει τῇ ΗΚ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τοῖς Ε, Θ σημείοις γωνίαι τοῦ ὑπὸ ΑΒΓ μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ ὑπὸ ΗΘΚ τῇ ὑπὸ ΑΒΛ ἐστιν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Ε γωνία τοῦ ὑπὸ ΔΒΓ μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΛΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίας τοῦ ὑπὸ ΛΒΓ μείζων ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΔΖ βάσεως τῆς ΛΓ μείζων ἐστίν. ἴση ᾗ ἐδείχθη ἡ ΗΚ τῇ ΑΛ· αἱ ἄρα ΔΖ, ΗΚ τῶν ΑΛ, ΛΓ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ αἱ ΑΛ, ΛΓ τῆς ΑΓ μείζονές εἰσι· πολλῷ ἄρα αἱ ΔΖ, ΗΚ μείζονές εἰσι τῆς ΑΓ· τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ ἄρα εὐθειῶν αἱ δύο τὰς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· δυνατὸν ἄρα ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ [per 4. 1.] æquales erunt, & duæ reliqua majores. ſin minus, ſint inæquales anguli ad puncta Β, Ε, Θ, & major qui eſt ad Β utrovis ipſorum qui ſunt ad Ε, Θ: major igitur eſt [per 24. 1.] & recta linea ΑΓ utravis ipſarum ΔΖ, ΗΚ. & manifeſtum eſt ipſam ΑΓ una cum alterutra ipſarum ΔΖ, ΗΚ reliqua eſſe majorem. dico & ΔΖ, ΗΚ ipſa ΑΓ majores eſſe. conſtituatur [per 23. 1.] ad rectam lineam ΑΒ & ad punctum in ea Β angulo ΗΘΚ æqualis angulus ΑΒΛ, & uni ipſarum ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ponatur æqualis ΒΛ, atque ΑΛ, ΛΓ jungantur. quoniam igitur duæ ΑΒ, ΒΛ duabus ΗΘ, ΘΚ æquales ſunt, altera alteri, & angulos æquales continent; erit [per 4. 1.] baſis ΑΛ baſi ΗΚ æqualis. & quoniam anguli ad puncta Ε, Θ angulo ΑΒΓ majores ſunt, ex quibus angulus ΗΘΚ eſt æqualis ipſi ΑΒΛ; erit reliquus qui ad Ε angulo ΛΒΓ major. item quoniam duæ ΔΒ, ΒΓ duabus ΔΕ, ΕΖ æquales ſunt, altera alteri, & angulus ΔΕΖ angulo ΔΒΓ major; baſis ΔΖ [per 24. 1.] baſi ΛΓ major erit. oſtenſa eſt autem ΗΚ æqualis ΑΛ: ergo ΔΖ, ΗΚ ipſis ΑΛ, ΛΓ ſunt majores. ſed [per 20. 1.] ΑΛ, ΛΓ majores ſunt ipſa ΑΓ: multo igitur ΔΖ, ΗΚ ipſa ΑΓ majores erunt: quare rectarum linearum ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ duæ reliqua majores ſunt quomodocunque ſumptæ: ac propterea [per 22. 1.] fieri poteſt, ut ex æqualibus ipſis ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ triangulum conſtituatur. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

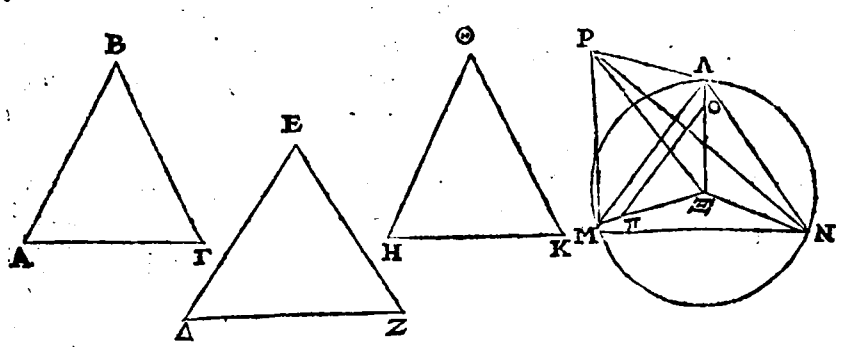
Ἐκ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσὶ πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι· δεῖ δὲ τὰς τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι.

Prop. XXIII. Probl.

Ex tribus angulis planis, quorum duo reliquo ſunt majores quomodocunque ſumpti, ſolidum angulum conſtituere: oportet autem tres angulos quatuor rectis eſſe minores.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, ἔτι δὲ αἱ τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

SInt dati tres anguli plani ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, quorum duo reliquo ſint majores quomodocunque ſumpti, ſintque tres anguli quatuor rectis minores: oportet ex æqualibus ipſis ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ ſolidum angulum conſtituere.

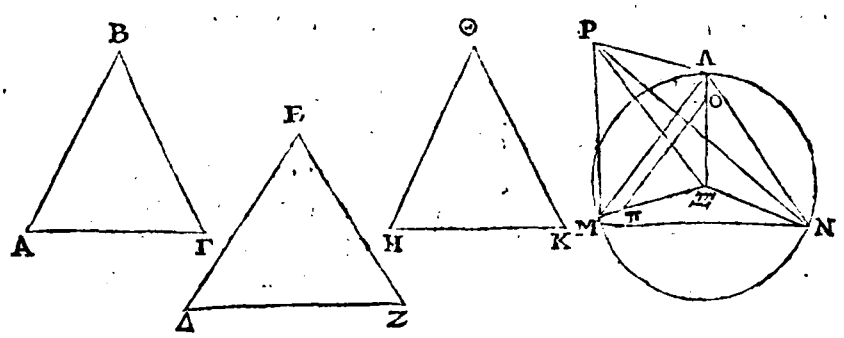


ἐκκείσθωσαν ἴσαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ· δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι. συνεστάτω τὸ ΛΜΝ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΑΓ τῇ ΛΜ, τὴν δὲ ΔΖ τῇ ΜΝ, καὶ ἔτι

Abſcindantur æquales ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ; atque ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ jungantur. igitur [per 22. 11.] fieri poteſt ut ex æqualibus ipſis ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ conſtituatur triangulum. itaque [per 22. 1.] conſtituatur ΛΜΝ, ita ut ΑΓ quidem ſit æqualis ΛΜ, ΔΖ vero ipſi ΜΝ; & præterea

HK ipſi ΛN: dein [per 5.4.] circa ΛMN triangulum circulus ΛMN deſcribatur; ſumatur vero circuli centrum, quod vel erit intra triangulum ΛMN, vel in uno ejus latere, vel extra.

Sit primum intra; ſitque Ξ; atque ΛΞ, MΞ, NΞ jungantur: dico AB majorem eſſe ipſa ΛΞ. ſi enim non ita ſit, vel AB erit æqualis ΛΞ, vel ea minor. ſit primum æqualis. quoniam igitur AB eſt æqualis ΛΞ, atque eſt AB ipſi BΓ æqualis; erit ΛΞ æqualis BΓ. eſt autem ΛΞ æqualis ΞM: duæ igitur AB, BΓ duabus ΛΞ, ΞM æquales ſunt altera alteri; & AΓ baſis baſi ΛM æqualis ponitur: quare [per 8. 1.] angulus ABΓ angulo ΛΞM eſt æqualis. eadem ratione & angulus quidem ΔEZ eſt æqualis angulo MΞN, angulus vero HΘK angulo NΞΛ: tres igitur anguli ABΓ, ΔEZ, HΘK tribus ΛΞM, MΞN, NΞΛ æquales ſunt. ſed tres ΛΞM, MΞN, NΞΛ quatuor rectis ſunt æquales: ergo & tres ABΓ, ΔEZ, HΘK æquales erunt quatuor rectis. atqui ponuntur quatuor rectis minores, quod eſt abſurdum: non igitur AB ipſi ΛΞ eſt æqualis. dico præterea neque AB minorem eſſe ipſa ΛΞ. ſi enim fieri poteſt, ſit minor, ponaturque rectæ AB æqualis ΞO, ipſi vero BΓ æqualis ΞΠ, & OΠ jungatur. quoniam igitur AB eſt æqualis BΓ, & ΞO ipſi ΞΠ



æqualis erit: ergo & reliqua OΛ reliquæ ΠM eſt æqualis: quare [per 2. 6.] ΛM parallela eſt ipſi OΠ, & ΛMΞ triangulum eſt triangulo OΠΞ æquiangulum: eſt igitur [per 4. 6.] ut ΞΛ ad ΛM ita ΞO ad OΠ; & permutando [per 16. 5.] ut ΛΞ ad ΞO ita ΛM ad OΠ. major autem eſt ΛΞ quam ΞO; ergo & ΛM quam OΠ eſt major. ſed ΛM poſita eſt [per conſtr.] æqualis AΓ; quare & AΓ quam OΠ major erit. itaque quoniam duæ rectæ lineæ AB, BΓ duabus OΞ, ΞΠ æquales ſunt, & baſis AΓ major baſi OΠ; erit [per 24. 1.] angulus ABΓ angulo OΞΠ major. ſimiliter demonſtrabimus & ΔEZ angulum majorem eſſe angulo MΞN, & angulum HΘK angulo NΞΛ: tres igitur anguli ABΓ, ΔEZ, HΘK tribus ΛΞM, MΞN, NΞΛ ſunt majores. at anguli ABΓ, ΔEZ, HΘK quatuor rectis minores ponuntur: multo igitur anguli ΛΞM, MΞN, NΞΛ minores erunt quatuor rectis. ſed & æquales, quod eſt abſurdum: non igitur AB minor eſt quam ΛΞ. oſtenſum autem eſt neque eſſe æqualem: major ergo eſt AB quam ΛΞ. con-

τὴν HK τῇ ΛN, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΛMN τρίγωνον κύκλος ὁ ΛMN, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον· ἔστω δὴ ἤτοι ἐντὸς ἐν τῷ ΛMN τριγώνῳ, ἢ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ἢ ἐκτός.

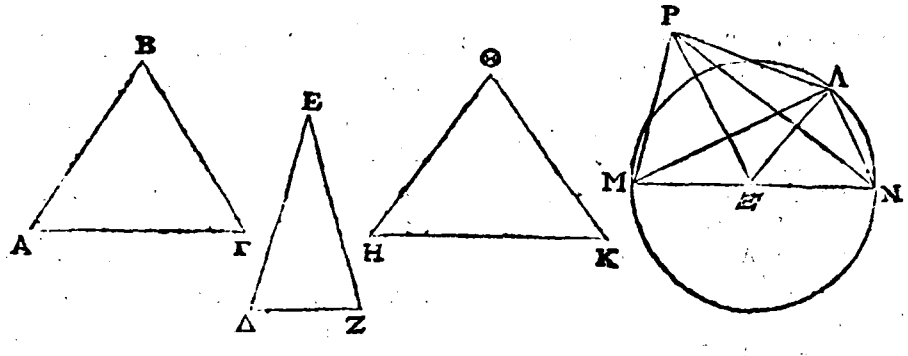
Ἐστω πρότερον ἐντὸς, καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΞ, MΞ, NΞ· λέγω ὅτι ἡ AB μείζων ἐστὶ τῆς ΛΞ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ ΛΞ, ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ ΛΞ, ἀλλ' ἡ μὲν AB τῇ BΓ ἐστιν ἴση· ἡ ΛΞ ἄρα τῇ BΓ ἐστιν ἴση. ἡ δὲ ΛΞ τῇ ΞM, δύο δὴ αἱ AB, BΓ δυσὶ ταῖς ΛΞ, ΞM ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ AΓ βάσει τῇ ΛM ὑπόκειται ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ABΓ τῇ ὑπὸ ΛΞM ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔEZ τῇ ὑπὸ MΞN ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ HΘK τῇ ὑπὸ NΞΛ· αἱ ἄρα τρεῖς αἱ ὑπὸ ABΓ, ΔEZ, HΘK γωνίαι τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΛΞM, MΞN, NΞΛ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ ΛΞM, MΞN, NΞΛ τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ ABΓ, ΔEZ, HΘK τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὑπόκεινται δὲ καὶ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ AB τῇ ΛΞ ἐστιν ἴση. λέγω ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ AB τῇ ΛΞ. εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω· καὶ κείσθω τῇ μὲν AB ἴση ἡ ΞO, τῇ δὲ BΓ ἴση ἡ ΞΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ OΠ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ BΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΞO τῇ ΞΠ· ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ OΛ λοιπῇ τῇ ΠM ἐστιν ἴση· παράλληλος ἄρα ἡ ΛM τῇ OΠ, καὶ ἰσογώνιον τὸ ΛMΞ τῷ OΠΞ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΞΛ πρὸς τὴν ΛM οὕτως ἡ ΞO πρὸς τὴν OΠ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΛΞ πρὸς τὴν ΞO οὕτως ἡ ΛM πρὸς τὴν OΠ. μείζων δὲ ἡ ΛΞ τῆς ΞO· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΛM τῆς OΠ. ἀλλ' ἡ ΛM τῇ AΓ ἴση· καὶ ἡ AΓ ἄρα τῆς OΠ μείζων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι αἱ AB, BΓ δυσὶ ταῖς OΞ, ΞΠ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ AΓ βάσεως τῆς OΠ μείζων ἐστὶ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ABΓ γωνίας τῆς ὑπὸ OΞΠ μείζων ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔEZ τῆς ὑπὸ MΞN μείζων ἐστὶν, ἡ δὲ ὑπὸ HΘK τῆς ὑπὸ NΞΛ· αἱ ἄρα τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ABΓ, ΔEZ, HΘK τριῶν τῶν ὑπὸ ΛΞM, MΞN, NΞΛ μείζονές εἰσιν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ABΓ, ΔEZ, HΘK τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες ὑπόκεινται· πολλῷ ἄρα αἱ ὑπὸ ΛΞM, MΞN, NΞΛ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. ἀλλὰ καὶ ἴσαι, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ AB ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ΛΞ. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴση· μείζων ἄρα ἡ AB τῆς ΛΞ. ἀνεσάτω δὴ

δὴ ἀπὸ τοῦ Ξ σημείου τῷ ΔΜΝ κύκλου ἐπίπεδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΞΡ· καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκείνῳ δὲ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΞΡ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ΔΜΝ κύκλου ἐπίπεδον· καὶ πρὸς ἁπάσας ἄρα τὰς ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ ὀρθή ἐστιν ἡ ΡΞ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΞ τῇ ΞΜ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΞΡ· βάσις ἄρα ἡ ΛΡ βάσει τῇ ΡΜ ἴση ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ΡΛ, ΡΜ ἴση ἐστὶν· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐπεὶ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκείνῳ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΞ, ΞΡ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΛΞ, ΞΡ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΡΛ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΛΞΡ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΡΛ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΡΛ. ἀλλὰ τῇ μὲν ΑΒ ἴσαι ἐστὶν ἑκάστη τῶν ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, τῇ δὲ ΡΛ ἴσαι ἑκατέρα τῶν ΡΜ, ΡΝ· ἑκάστη ἄρα τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ἑκάστῃ τῶν ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ ἴση ἐστί. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΛΡ, ΡΜ δυσὶ ταῖς ΑΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΛΜ βάσει τῇ ΑΓ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΡΜ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΜΡΝ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΛΡΝ τῇ ὑπὸ ΗΘΚ· ἐκ τριῶν ἄρα γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ ΛΡΜ, ΜΡΝ, ΛΡΝ, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, στερεὰ γωνία συνέστακεν ἡ πρὸς τῷ Ρ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΛΡΜ, ΜΡΝ, ΛΡΝ γωνιῶν.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τῆς ΜΝ, καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΞΛ· λέγω πάλιν ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ, ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση· δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ, τουτέστιν αἱ ΔΕ, ΕΖ, δυσὶ ταῖς ΜΞ, ΞΛ, τουτέστι τῇ ΜΝ, ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΔΖ κεῖται ἴση· καὶ αἱ ΔΕ, ΕΖ ἄρα τῇ ΔΖ ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ ἴση τῇ ΛΞ. ὁμοίως δὲ δείξομεν οὐδὲ ἐλάττων, πολλῷ γὰρ τὸ ἀδύνατον μεῖζον· ἡ ἄρα ΑΒ μείζων ἐστὶ τῆς ΛΞ. καὶ ἐὰν ὁμοίως τῷ μείζονι ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκείνῳ ἴσον πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἀναστήσωμεν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΡΞ, συσταθήσεται τὸ πρόβλημα.

ſtituatur [per 12. 11.] à puncto Ξ circuli ΔΜΝ plano ad rectos angulos recta ΞΡ; & exceſſui, quo quadratum ex ΑΒ ſuperat quadratum ex ΛΞ, ponatur [per lem. ſubnex.] æquale quadratum quod fit ex ΞΡ, atque ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ jungantur. quoniam igitur ΞΡ perpendicularis eſt ad planum ΔΜΝ circuli, & ad unumquamque ipſarum ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ [per 3. def. 11.] erit perpendicularis. atque quoniam ΛΞ eſt æqualis ΞΜ, communis autem & ad rectos angulos ΞΡ, erit [per 4. 1.] baſis ΛΡ æqualis baſi ΡΜ. eadem ratione & ΡΝ utrique ipſarum ΡΛ, ΡΜ eſt æqualis: tres igitur rectæ lineæ ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ inter ſe æquales ſunt. & quoniam quadratum ex ΞΡ ponitur æquale exceſſui, quo quadratum ex ΑΒ ſuperat quadratum ex ΛΞ; erit quadratum ex ΑΒ quadratis ex ΛΞ, ΞΡ æquale. quadratis autem ex ΛΞ, ΞΡ æquale eſt [per 47. 1.] quadratum ex ΡΛ, rectus enim angulus eſt ΛΞΡ: ergo quadratum ex ΑΒ quadrato ex ΡΛ æquale erit; ideoque ΑΒ ipſi ΡΛ eſt æqualis. ſed ipſi quidem ΑΒ æqualis eſt unaquæque ipſarum ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ; ipſi vero ΡΛ æqualis utravis ipſarum ΡΜ, ΡΝ: unaquæque igitur ipſarum ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ unicuique ipſarum ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ eſt æqualis. quoniam vero duæ ΛΡ, ΡΜ duabus ΑΒ, ΒΓ æquales ſunt, & baſis ΛΜ ponitur æqualis baſi ΑΓ: erit [per 8. 1.] angulus ΛΡΜ æqualis angulo ΑΒΓ. eadem ratione & angulus quidem ΜΡΝ angulo ΔΕΖ, angulus autem ΛΡΝ angulo ΗΘΚ eſt æqualis: ex tribus igitur angulis planis ΛΡΜ, ΜΡΝ, ΛΡΝ, qui æquales ſunt tribus datis ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ſolidus angulus conſtitutus eſt ad Ρ, qui ſub angulis ΛΡΜ, ΜΡΝ, ΛΖΝ continetur.

Sed ſit centrum circuli in uno laterum trianguli, videlicet in ΜΝ, & ſit Ξ, atque ΞΛ jungatur: dico rurſus ΑΒ majorem eſſe ipſa ΛΞ. ſi enim non ita ſit, vel ΑΒ eſt æqualis ΛΞ vel ipſa minor. ſit primum æqualis: duæ igitur ΑΒ, ΒΓ, hoc eſt ΔΕ, ΕΖ, duabus ΜΞ, ΞΛ, hoc eſt ipſi ΜΝ, æquales ſunt. ſed ΜΝ ponitur æqualis ΔΖ; ergo

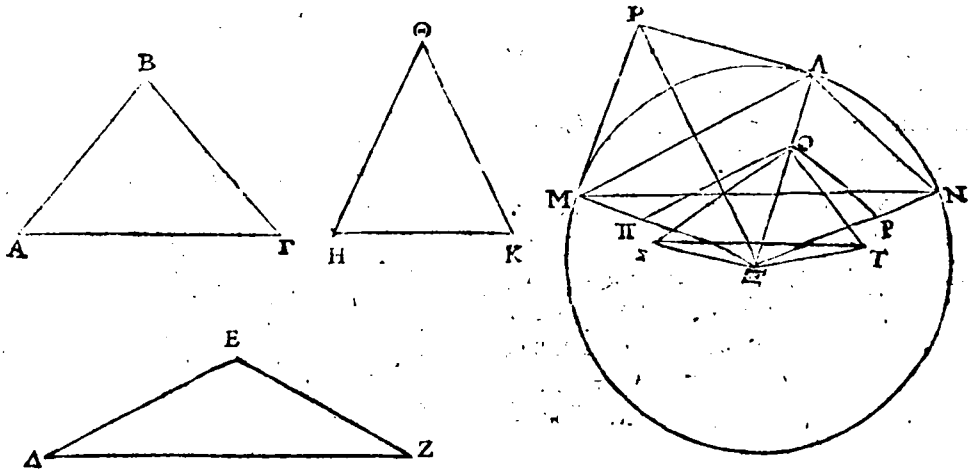


ΔΕ, ΕΖ ipſi ΔΖ ſunt æquales, quod [per 20. 1.] fieri non poteſt: non igitur ΑΒ eſt æqualis ΛΞ. ſimiliter neque minor; exinde enim majus abſurdum ſequeretur: ergo ΑΒ ipſa ΛΞ major eſt. & ſi, ſimiliter atque prius, exceſſui quo quadratum ex ΑΒ ſuperat quadratum ex ΛΞ, æquale ponatur [per lemma ſubnexum] quadratum ex ΡΞ, & ipſa ΡΞ circuli plano ad rectos angulos conſtituatur, fiet problema.

Deinde

Deinde vero ſit centrum circuli extra triangulum ΛMN, ſitque Ξ, atque ΛΞ, MΞ, NΞ jungantur: dico & ſic AB ipſa ΛΞ majorem eſſe. ſi enim non ita ſit, vel æqualis eſt, vel minor. ſit primum æqualis: duæ ideo AB, BΓ duabus MΞ, ΞΛ æquales ſunt altera alteri, & baſis AΓ etiam æqualis baſi MΛ: angulus igitur ABΓ [per 8. 1.] æqualis eſt angulo MΞΛ. eadem ratione & HΘK angulus ipſi ΛΞN eſt æqualis: quare totus MΞN eſt æqualis duobus ABΓ, HΘK. ſed & anguli ABΓ, HΘK angulo ΔEZ majores ſunt: & angulus igitur MΞN ipſo ΔEZ eſt major. & quoniam duæ ΔE, EZ duabus MΞ, ΞN æquales ſunt, & baſis ΔZ æqualis baſi MN; erit [per 8. 1.] MΞN angulus angulo ΔEZ æqualis. oſtenſus autem eſt major, quod eſt abſurdum: non igitur AB eſt æqualis ΛΞ. deinceps vero oſtendemus neque minorem eſſe: quare major neceſſario erit. & ſi rurſus circuli plano ad rectos angulos conſtituamus ΞP, & ipſam æqualem ponamus [per lem. ſubnexum] lateri quadrati ejus, quo quadratum ex AB ſuperat quadratum ex ΛΞ, problema conſtituetur. dico autem neque minorem eſſe AB ipſa ΛΞ. ſi enim fieri poteſt, ſit minor; & ipſi quidem AB æqualis ponatur ΞO, ipſi vero BΓ æqualis ΞΠ, & OΠ jungatur. quoniam igitur AB ipſi BΓ eſt æqualis, erit ΞO æqualis ΞΠ: ergo & reliqua OΛ reliquæ ΠM æqualis: parallela igitur eſt [per 2. 6.] ΛM ipſi ΠO, adeoque triangulum ΛMΞ triangulo ΠΞO æquiangulum: quare [per 4. 6.] ut ΛΞ ad ΛM ita ΞO ad OΠ; & permutando ut ΛΞ ad ΞO ita ΛM ad OΠ. major autem eſt ΛΞ quam ΞO; ergo ΛM quam OΠ eſt major. ſed [per conſtr.] ΛM eſt æqualis AΓ; quare & AΓ ipſa OΠ major erit. itaque quoniam duæ AB, BΓ duabus OΞ, ΞΠ ſunt æquales altera alteri, & baſis AΓ major eſt baſi OΠ; erit [per 25. 1.] angulus ABΓ angulo OΞΠ major. ſimiliter & ſi ΞP ſumatur æqualis utrivis ipſarum ΞO, ΞΠ, & jungatur OP, oſtendemus angulum HΘK angulo OΞP eſſe majorem. conſtituatur ad rectam lineam ΛΞ & ad punctum in ipſa Ξ angulo quidem ABΓ æqualis angulus ΛΞΣ, angulo autem HΘK æqualis

Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τοῦ ΛMN τριγώνου, καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΞ, MΞ, NΞ· λέγω δὴ ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ AB τῆς ΛΞ. εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν, ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση· δύο δὴ αἱ AB, BΓ δυσὶ ταῖς MΞ, ΞΛ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ AΓ βάσει τῇ MΛ ἐστιν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ABΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ MΞΛ ἴση ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ HΘK τῇ ὑπὸ ΛΞN ἐστιν ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ MΞN δυσὶ ταῖς ὑπὸ ABΓ, HΘK ἐστιν ἴση. ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ ABΓ, HΘK τῶν ὑπὸ ΔEZ μείζονές εἰσι· καὶ ἡ ὑπὸ MΞN ἄρα τῆς ὑπὸ ΔEZ μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΔE, EZ δυσὶ ταῖς MΞ, ΞN ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΔZ βάσει τῇ MN ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ MΞN γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔEZ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ μείζων, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἴση ἡ AB τῇ ΛΞ. ἐχῆς δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων· μείζων ἄρα. καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πάλιν ἀναστήσωμεν τὸ ΞP, καὶ ἴσῃ αὐτῇ ὑποθώμεθα, ᾧ μείζον δύναται τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, συσταθήσεται τὸ πρόβλημα. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ AB τῆς ΛΞ. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω· καὶ κείσθω τῇ μὲν AB ἴση ἡ ΞO, τῇ δὲ BΓ ἴση ἡ ΞΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ OΠ. καὶ



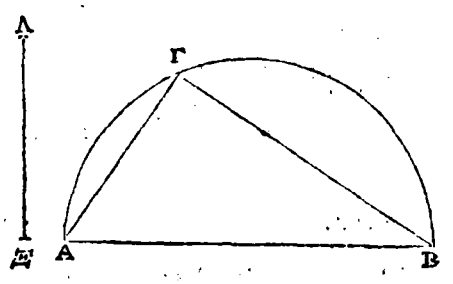
ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ BΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΞO τῇ ΞΠ· ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ OΛ λοιπῇ τῇ ΠM ἐστιν ἴση· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛM τῇ ΠO, καὶ ἰσογώνιον τὸ ΛMΞ τριγώνον τῷ ΠΞO τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΛΞ πρὸς τὴν ΛM οὕτως ἡ ΞO πρὸς τὴν OΠ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΛΞ πρὸς τὴν ΞO οὕτως ἡ ΛM πρὸς τὴν OΠ. μείζων δὲ ἡ ΛΞ τῆς ΞO· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΛM τῆς OΠ. ἀλλὰ ἡ ΛM τῇ AΓ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ AΓ ἄρα τῆς OΠ ἐστι μείζων. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ AB, BΓ δυσὶ ταῖς OΞ, ΞΠ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ AΓ βάσεως τῆς OΠ μείζων ἐστὶ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ABΓ γωνίας τῆς ὑπὸ OΞΠ μείζων ἐστίν. ὁμοίως δὴ κἂν τιθῶ Ξ P ἴσην ἑκατέραν τῶν ΞO, ΞΠ δεικνύωμεν, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν OP, δείξομεν ὅτι ἡ ὑπὸ HΘK γωνία τῆς ὑπὸ OΞP μείζων ἐστίν. συνιστάτω δὴ πρὸς τῇ ΛΞ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ξ τῇ μὲν ὑπὸ ABΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΛΞΣ, τῇ δὲ ὑπὸ HΘK

ἴση

ἴση ἡ ὑπὸ ΛΞΤ, καὶ κείσθω ἑκατέρα τῶν ΞΣ, ΞΤ τῇ ΟΞ ἴση, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΟΣ, ΟΤ, ΣΤ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΟΞ, ΞΣ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΟΞΣ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ, τουτέστιν ἡ ΛΜ, βάσει τῇ ΟΣ ἐστιν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΛΝ τῇ ΟΤ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΜΛ, ΛΝ δυσὶ ταῖς ΟΣ, ΟΤ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΜΛΝ γωνίας τῆς ὑπὸ ΣΟΤ μείζων ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΜΝ βάσεως τῆς ΣΤ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΔΖ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΔΖ ἄρα τῆς ΣΤ μείζων ἐστιν. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΔΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΣΞ, ΞΤ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσεως τῆς ΣΤ μείζων· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίας τῆς ὑπὸ ΣΞΤ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΣΞΤ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ· καὶ ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΕΖ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων, ὅπερ ἀδύνατον.

ΛΗΜΜΑ.

Ὅτι δὲ πρόπον ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ ἐκείνῳ ἴσον λαβεῖν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, δείξομεν οὕτως.



Ἐκκείσθωσαν αἱ ΑΒ, ΛΞ εὐθεῖαι, καὶ ἔστω μεῖζων ἡ ΑΒ, καὶ γεγράφθω ἐπ' αὐτῆς ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ, καὶ εἰς τὸ ΑΒΓ ἡμικύκλιον ἐναρμόσθω τῇ ΛΞ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἐν ἡμικυκλίῳ τῷ ΑΒΓ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῆς ΑΓ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ. ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΛΞ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ. ἐὰν οὖν τῇ ΓΒ ἴσῳ τῇ ΞΡ ἀποτιθῶμεν, ἔσται τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς ΞΡ. ὅπερ προσῆκεν ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Ἐὰν στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχηται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστι.

Στερεὸν γὰρ τὸ ΓΔΘΗ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχέσθω τῶν ΑΓ, ΗΖ, ΑΘ, ΔΖ, ΖΒ, ΑΕ· λέγω ὅτι τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΗ, ΓΕ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ. πάλιν, ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΖ, ΔΕ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ παράλληλος· παρ-

ΛΞ, & ponatur utraque ΞΣ, ΞΤ ipſi ΟΞ æqualis, junganturque ΟΣ, ΟΤ, ΣΤ. quoniam autem duæ ΑΒ, ΒΓ duabus ΟΞ, ΞΣ æquales ſunt, & angulus ΑΒΓ æqualis angulo ΟΞΣ, erit [per 4.1.] baſis ΑΓ, hoc eſt ΛΜ, baſi ΟΣ æqualis. eadem ratione & ΛΝ eſt æqualis ipſi ΟΤ. & quoniam duæ ΜΛ, ΛΝ duabus ΟΣ, ΟΤ ſunt æquales, & angulus ΜΛΝ major angulo ΣΟΤ; erit [per 24.1.] & baſis ΜΝ baſi ΣΤ major. ſed ΜΝ eſt æqualis ΔΖ: ergo & ΔΖ quam ΣΤ major erit. quoniam igitur duæ ΔΕ, ΕΖ duabus ΣΞ, ΞΤ æquales ſunt, & baſis ΔΖ major baſi ΣΤ; erit [per 25.1.] angulus ΔΕΖ angulo ΣΞΤ major. æqualis autem eſt angulus ΣΞΤ angulis ΑΒΓ, ΗΘΚ: ergo ΔΕΖ angulus angulis ΑΒΓ, ΗΘΚ major eſt. ſed & minor, quod fieri non poteſt.

LEMMA.

Quo autem modo ſumatur quadratum ex ΡΞ æquale ei, quo quadratum ex ΑΒ ſuperat quadratum ex ΛΞ, ita oſtendemus.

Exponantur rectæ lineæ ΑΒ, ΛΞ, ſitque major ΑΒ, & ab ipſa deſcribatur ſemicirculus ΑΒΓ: & in ΑΒΓ aptetur recta linea ΑΓ ipſi ΛΞ æqualis, & ΒΓ jungatur.

Itaque quoniam angulus ΑΓΒ eſt in ſemicirculo ΑΒΓ, erit [per 31.3.] ΑΓΒ rectus. quadratum igitur quod fit ex ΑΒ æquale eſt [per 47.1.] & quadrato quod ex ΑΓ & ei quod ex ΓΒ: ergo quadratum ex ΑΒ ſuperat quadratum ex ΑΓ quadrato ex ΓΒ. æqualis autem eſt ΑΓ ipſi ΛΞ: quadratum igitur ex ΑΒ ſuperat quadratum ex ΛΞ quadrato ex ΓΒ. quare ſi ipſi ΓΒ æqualem ſumamus ΞΡ, quadratum ex ΑΒ ſuperabit quadratum ex ΛΞ eo quod fit ex ΞΡ quadrato. quod facere ſuſcepimus.

PROP. XXIV. THEOR.

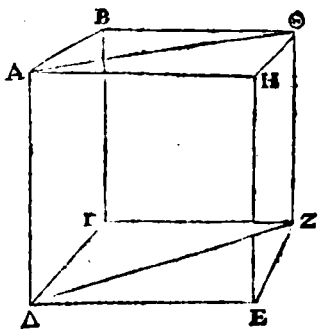
Si ſolidum parallelis planis contineatur, oppoſita ipſius plana & æqualia & parallelogramma ſunt.

Solidum enim ΓΔΘΗ ſub parallelis planis ΑΓ, ΗΖ, ΑΘ, ΔΖ, ΖΒ, ΑΕ contineatur: dico oppoſita ejus plana & æqualia & parallelogramma eſſe.

Quoniam enim duo plana parallela ΒΗ, ΓΕ à plano ΑΓ ſecantur, communes ipſorum ſectiones [per 16. 11.] parallelæ ſunt: ergo ΑΒ ipſi ΔΓ eſt parallela. rurſus, quoniam duo plana parallela ΒΖ, ΑΕ ſecantur à plano ΑΓ, communes ipſorum ſectiones parallelæ ſunt: parallela igitur eſt ΑΔ ipſi ΒΓ. oſtenſa autem eſt & ΑΒ parallela ipſi ΔΓ: ergo ΑΓ

parallelogrammum eſt. ſimiliter demonſtrabimus & unumquodque ipſorum Δ Z, Z H, H B, B Z, A E parallelogrammum eſſe.

Jungantur A Θ, Δ Z. & quoniam parallela eſt A B quidem ipſi Δ Γ, B Θ vero & ipſi Γ Z; duæ quidem A B, B Θ ſeſe tangentes duabus rectis Δ Γ, Γ Z ſeſe tangentibus parallelæ erunt, & non in eodem plano: quare [per 10. 11.] æquales angulos continebunt: angulus igitur A B Θ angulo Δ Γ Z eſt æqualis. & quoniam [per 34. 1.] duæ A B, B Θ duabus Δ Γ, Γ Z æquales ſunt, & angulus A B Θ æqualis angulo Δ Γ Z; erit [per 4. 1.] baſis A Θ baſi Δ Z æqualis, & A B Θ triangulum æquale triangulo Δ Γ Z. & eſt [per 34. 1.] ipſius quidem A B Θ trianguli duplum B H parallelogrammum; ipſius vero Δ Γ Z trianguli duplum parallelogrammum Γ E; erit ergo B H parallelogrammum æquale parallelogrammo Γ E. ſimiliter demonſtrabimus & A Γ parallelogrammum parallelogrammo H Z, & parallelogrammum A E parallelogrammo B Z æquale eſſe.



Si igitur ſolidum parallelis planis contineatur, oppoſita ipſius plana & æqualia & parallelogramma ſunt. quod erat demonſtrandum.

εαλληλόγραμμον ἄρα τὸ Α Γ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκάτερον τῶν Δ Ζ, Ζ Η, Η Β, Β Ζ, Α Ε παραλληλόγραμμόν ἐστιν.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ Α Θ, Δ Ζ. ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ μὲν Α Β τῇ Δ Γ, ἡ δὲ Β Θ τῇ Γ Ζ· δύο δὴ αἱ Α Β, Β Θ ἁπτόμεναι ἀλλήλων τοῖς δύο εὐθείαις ταῖς Δ Γ, Γ Ζ ἁπτομέναις ἀλλήλων ᾗ μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· ἴσας ἄρα γωνίας περιέχουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ Α Β Θ γωνία τῇ ὑπὸ Δ Γ Ζ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ Α Β, Β Θ δυσὶ ταῖς Δ Γ, Γ Ζ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ Α Β Θ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ Δ Γ Ζ ἴση· βάσις ἄρα ἡ Α Θ βάσει τῇ Δ Ζ ἴση ἐστὶν, καὶ τὸ Α Β Θ τρίγωνον τῷ Δ Γ Ζ τριγώνῳ ἴσον ἐστί. καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν Α Β Θ διπλάσιον τὸ Β Η παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ Δ Γ Ζ διπλάσιον τὸ Γ Ε παραλληλόγραμμον· ἴσον ἄρα τὸ Β Η παραλληλόγραμμον τῷ Γ Ε παραλληλογράμμῳ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ μὲν Α Γ τῷ Η Ζ ἐστιν ἴσον, τὸ δὲ Α Ε τῷ Β Ζ.

Ἐὰν ἄρα στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχηται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XXV. Theor.

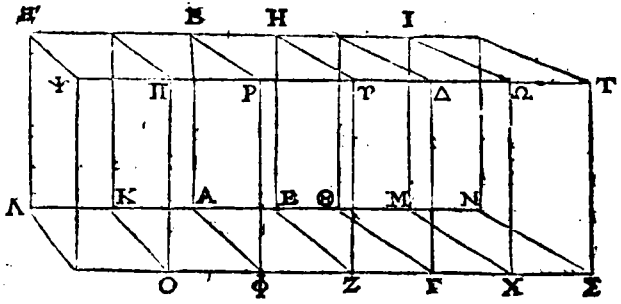
Si ſolidum parallelepipedum plano ſecetur oppoſitis planis parallelo, erit ut baſis ad baſim ita ſolidum ad ſolidum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν οὕτω τὸ στερεὸν πρὸς τὸ στερεόν.

SOlidum enim parallelepipedum A B Γ Δ plano Υ Ε ſecetur oppoſitis planis P A, Δ Θ parallelo: dico ut baſis A E Z Φ ad baſim E Θ Γ Z ita eſſe A B Z Υ ſolidum ad ſolidum E H Γ Δ.

Producatur enim A Θ ex utraque parte, & ponantur ipſi quidem E Θ æquales quotcunque Θ M, M N, ipſi vero A E æquales quotcunque A K, K Λ, & compleantur parallelogramma Λ O, K Φ, Θ X, M Σ, & ſolida Λ Π, K Ψ, Δ M, M Υ. quoniam igitur æquales inter ſe ſunt Λ K, K A, A E rectæ lineæ, erunt [per 38. 1.] & parallelogramma Λ O, K Φ, A Z inter ſe æqualia, itemque æqualia inter ſe parallelogramma K Z, K B, A H, & adhuc [per 24. 11.] parallelogramma Λ Ψ, K Π, A P inter ſe æqualia; oppoſita enim ſunt. eadem ratione & parallelogramma B Γ, Θ X, M Σ æqualia ſunt inter ſe: itemque parallelogramma Θ H, Θ I, I N inter ſe



Στερεὸν δὴ παραλληλεπίπεδον τὸ Α Β Γ Δ ἐπιπέδῳ τῷ Υ Ε τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς Ρ Α, Δ Θ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ Α Ε Ζ Φ βάσις πρὸς τὴν Ε Θ Γ Ζ βάσιν οὕτως τὸ Α Β Ζ Υ στερεὸν πρὸς τὸ Ε Η Γ Δ στερεόν.

Ἐκβεβλήθω γὰρ ἡ Α Θ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν Ε Θ ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ Θ Μ, Μ Ν, τῇ δὲ Α Ε ἴσαι αἱ Α Κ, Κ Λ, καὶ συμπεπληρώσθωσαν τὰ Λ Ο, Κ Φ, Θ Χ, Μ Σ παραλληλόγραμμα, καὶ τὰ Λ Π, Κ Ψ, Δ Μ, Μ Τ στερεά. ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ Α Κ, Κ Α, Α Ε εὐθεῖαι ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ μὲν Λ Ο, Κ Φ, Α Ζ παραλληλόγραμμα ἀλλήλοις, τὰ δὲ Κ Ξ, Κ Β, Α Η ἀλλήλοις, καὶ ἔτι τὰ Λ Ψ, Κ Π, Α Ρ ἀλλήλοις· ἀπεναντίον γάρ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ Β Γ, Θ Χ, Μ Σ παραλληλόγραμμα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, τὰ δὲ Θ Η, Θ Ι, Ι Ν ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, καὶ

καὶ ἔστι τοῦ ΔΘ, ΜΩ, ΝΤ· τρία ἄρα ἐπίπεδα τὰ ΑΠ, ΚΡ, ΑΤ στερεῶν τρισὶν ἐπιπέδοις ἴσων ἴσα. ἀλλὰ τὰ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσων ἴσα· τὰ ἄρα τρία στερεὰ τὰ ΑΠ, ΚΡ, ΑΤ ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ τρία στερεὰ τὰ ΕΔ, ΔΜ, ΜΤ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὁσαπλάσιον ἄρα ἡ ΑΖ βάσις τῆς ΑΖ βάσεως τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΑΤ στερεὸν τοῦ ΑΥ στερεοῦ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΝΖ βάσις τῆς ΖΘ βάσεως τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΝΤ στερεὸν τοῦ ΘΥ στερεοῦ. καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ βασις τῇ ΝΖ βάσει ἴσον καὶ τὸ ΑΤ στερεὸν τῷ ΝΥ στερεῷ, καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΑΖ βάσις τῆς ΝΖ βάσεως ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΤ στερεὸν τοῦ ΝΥ στερεοῦ, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει· τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων τῶν ΑΖ, ΖΘ, δύο δὲ στερεῶν τῶν ΑΥ, ΥΘ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΑΖ βάσεως καὶ τοῦ ΑΥ στερεοῦ, ἥτις ΑΖ βάσις καὶ τὸ ΑΥ στερεόν, τῆς δὲ ΘΖ βάσεως καὶ τοῦ ΘΥ στερεοῦ, ἥτις ΝΖ βάσις καὶ τὸ ΝΥ στερεόν· καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΑΖ βάσις τῆς ΝΖ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΥ στερεὸν τοῦ ΝΥ· καὶ εἰ ἴση, ἴσον· καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ βάσις πρὸς τὴν ΖΘ βάσιν οὕτω τὸ ΑΥ στερεὸν πρὸς τὸ ΥΘ στερεόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

æqualia, & insuper parallelogramma ΔΘ, ΜΩ, ΝΤ: tria igitur plana solidorum ΑΠ, ΚΡ, ΑΤ tribus planis æqualia sunt. sed tria tribus oppositis sunt æqualia: ergo [per 10. def. 11.] tria solida ΑΠ, ΚΡ, ΑΤ inter se æqualia erunt. eadem ratione & tria solida ΕΔ, ΔΜ, ΜΤ sunt æqualia inter se: quotuplex igitur est basis ΑΖ ipsius ΑΖ basis totuplex est & ΑΤ solidum solidi ΑΥ. eadem ratione quotuplex est ΝΖ basis ipsius basis ΘΖ totuplex est & solidum ΝΤ ipsius ΘΥ solidi. porro si basis ΑΖ est æqualis basi ΝΖ & solidum ΑΤ solido ΝΤ erit æquale, & si ΑΖ basis superat ΝΖ basim & solidum ΑΤ solidum ΝΤ superabit, & si minor minus: quatuor igitur magnitudinibus expositis, duabus scilicet basibus ΑΖ, ΖΘ, & duobus solidis ΑΥ, ΥΘ, sumpta sunt æque multiplicia, basis quidem ΑΖ & ΑΥ solidi, videlicet basis ΑΖ & solidum ΑΥ; basis vero ΘΖ & ΘΥ solidi, nempe basis ΝΖ & solidum ΝΥ: demonstratum autem est si basis ΑΖ superat basim ΝΖ, & ΑΥ solidum solidum ΝΥ superare; & si æqualis, æquale; & si minor, minus: est igitur [per 5. def. 5.] ut ΑΖ basis ad basim ΖΘ ita ΑΥ solidum ad solidum ΥΘ. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

PROP. XXVI. PROBL.

Ad datam rectam lineam & ad datum in ipsa punctum dato angulo solido æqualem angulum constituere.

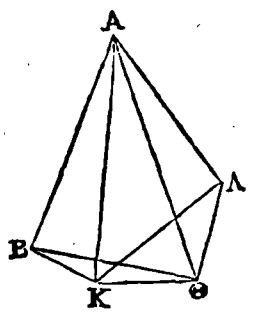
Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τὸ Δ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΕΔΓ, ΕΔΖ, ΖΔΓ γωνιῶν ἐπιπέδων· δεῖ δὴ πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΔΖ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΕΔ, ΔΓ ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΖΗ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΗ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ μὲν ὑπὸ ΕΔΓ γωνίᾳ ἴσῃ ἡ ὑπὸ ΒΑΛ, τῇ δὲ ὑπὸ ΕΔΗ ἴσῃ ἡ ὑπὸ ΒΑΚ, καὶ κείσθω τῇ ΔΗ ἴση ἡ ΑΚ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Κ σημείου τῷ διὰ τῶν ΒΑΛ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΚΘ, καὶ κείσθω ἴση τῇ ΗΖ ἡ ΚΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΑ· λέγω ὅτι ἡ πρὸς τῷ Α στερεὰ γωνία ὑπὸ τῶν ΒΑΛ, ΒΑΘ, ΘΑΛ γωνιῶν ἴσῃ ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Δ στερεᾷ γωνίᾳ τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν ΕΔΓ, ΕΔΖ, ΖΔΓ γωνιῶν.

SIT data quidem recta linea ΑΒ, datum autem in ipsa punctum Α, & datus solidus angulus ad Δ qui sub ΕΔΓ, ΕΔΖ, ΖΔΓ angulis planis contineatur: oportet vero ad datam rectam lineam ΑΒ & ad datum in ipsa punctum Α dato angulo solido ad Δ æqualem solidum angulum constituere.

Sumatur enim in linea ΔΖ quodvis punctum Ζ, à quo ad planum per ΕΔ, ΔΓ transiens [per 11. 11.] ducatur perpendicularis ΖΗ, quæ plano in puncto Η occurrat; jungaturque ΔΗ; dein [per 23. 1.] ad rectam lineam ΑΒ & ad datum in ipsa punctum Α angulo quidem ΕΔΓ æqualis angulus constituatur ΒΑΛ, angulo autem ΕΔΗ constituatur æqualis ΒΑΚ, deinde [per 3. 1.] ipsi ΔΗ ponatur æqualis ΑΚ, & à puncto Κ plano per ΒΑΛ [per 12. 11.] ad rectos angulos erigatur ΚΘ; ponaturque demum ipsi ΗΖ æqualis ΚΘ, & ΘΑ jungatur: dico angulum solidum ad Α, qui sub angulis ΒΑΛ, ΒΑΘ, ΘΑΛ comprehenditur, æqualem esse solido angulo ad Δ sub angulis ΕΔΓ, ΕΔΖ, ΖΔΓ comprehenso.

Sumantur enim æquales rectæ lineæ AB, ΔE, & jungantur ΘB, KB, ZB, HE. quoniam igitur ZH perpendicularis eſt ad ſubjectum planum; & ad omnes rectas lineas quæ ipſam contingunt ſuntque in ſubjecto plano [per 3. def. 11.] rectos faciet angulos: uterque igitur angulorum ZHΔ, ZHE rectus eſt. eadem ratione & uterque ipſorum ΘKA, ΘKB eſt rectus. & quoniam duæ KA, AB duabus HΔ, ΔE æquales ſunt altera alteri & angulos æquales continent; erit [per 4. 1.] baſis BK baſi EH æqualis. eſt autem & KΘ æqualis HZ, atque angulos rectos continent: æqualis igitur eſt & ΘB ipſi ZE. rurſus quoniam duæ AK, KΘ duabus ΔH, HZ æquales ſunt, & rectos continent angulos; erit baſis AΘ ipſi ΔZ æqualis. eſtque AB æqualis ΔE: duæ igitur ΘA, AB duabus ZΔ, ΔE ſunt æquales, & baſis ΘB eſt æqualis baſi ZE: ergo angulus BAΘ angulo EΔZ æqualis erit. eadem ratione & angulus ΘAΛ angulo ZΔΓ eſt æqualis: nempe ſi aſſumamus æquales AΛ, ΔΓ, & jungamus KΛ, ΘΛ, HΓ, ZΓ, quia totus angulus BAΛ eſt æqualis toti EΔΓ, quorum BAK ipſi EΔH ponitur æqualis; erit reliquus KAΛ æqualis reliquo HΔΓ. & quoniam duæ KA, AΛ duabus HΔ, ΔΓ æquales ſunt, & angulos æquales continent; baſis KΛ [per 4. 1.] baſi HΓ æqualis erit. eſt autem & KΘ æqualis HZ; duæ igitur ΛK, KΘ duabus ΓH, HZ ſunt æquales, angulosque rectos continent: ergo baſis ΘΛ æqualis eſt baſi ZΓ. rurſus quoniam duæ ΘA, AΛ duabus ZΔ, ΔΓ æquales ſunt, & baſis ΘΛ æqualis baſi ZΓ; erit [per 8. 1.] angulus ΘAΛ æqualis angulo ZΔΓ. atque eſt angulus BAΛ angulo EΔΓ æqualis.



Ad datam igitur rectam lineam & ad datum in ipſa punctum dato angulo ſolido æqualis angulus ſolidus conſtitutus eſt. quod erat faciendum.

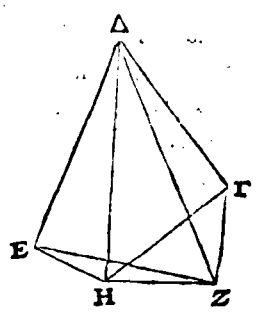
Prop. XXVII. Probl.

A data recta linea dato ſolido parallelepipedo ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere.

SIT recta quidem linea AB; datum vero ſolidum parallelepipedum ΔΓ: oportet autem à data recta linea AB dato ſolido parallelepipedo ΔΓ ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere.

Conſtituatur enim ad rectam lineam AB & ad datum in ipſa punctum A angulo ſolido ad Γ æqualis angulus qui ſub angulis EAΘ, ΘAK,

Απειλήφθωσαν γὰρ ἴσαι αἱ AB, ΔE, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘB, KB, ZE, HE. καὶ ἐπεὶ ἡ ZH ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ZHΔ, ZHE γωνιῶν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΘKA, ΘKB γωνιῶν ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ KA, AB, δυσὶ ταῖς HΔ, ΔE ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ BK βάσει τῇ EH ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ KΘ τῇ ZH ἴση, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΘB τῇ ZE. πάλιν ἐπεὶ δύο αἱ AK, KΘ δυσὶ ταῖς ΔH, HZ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ AΘ βάσει τῇ ΔZ ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ AB τῇ ΔE ἴση· δύο δὴ αἱ ΘA, AB δυσὶ ταῖς ZΔ, ΔE ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ ΘB βάσει τῇ ZE ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ BAΘ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ EΔZ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΘAΛ τῇ ὑπὸ ZΔΓ ἴση ἐστίν· ἐπειδήπερ ἐὰν ἐπιλάβωμεν ἴσας τὰς AΛ, ΔΓ, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὰς KΛ, ΘΛ, HΓ, ZΓ, ἐπεὶ ὅλη ἡ ὑπὸ BAΛ ὅλῃ τῇ ὑπὸ EΔΓ ἐστιν ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ BAK τῇ ὑπὸ EΔH ὑπόκειται ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ KAΛ λοιπῇ τῇ ὑπὸ HΔΓ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ KA, AΛ δυσὶ ταῖς HΔ, ΔΓ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ KΛ βάσει τῇ HΓ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ KΘ τῇ HZ ἴση· δύο δὴ αἱ ΛK, KΘ δυσὶ ταῖς ΓH, HZ εἰσιν ἴσαι, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΘΛ βάσει τῇ ZΓ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΘA, AΛ δυσὶ ταῖς ZΔ, ΔΓ ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ ΘΛ βάσει τῇ ZΓ ἐστιν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘAΛ γωνία τῇ ὑπὸ ZΔΓ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ BAΛ τῇ ὑπὸ EΔΓ ἴση.



Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσλεν στερεὰν γωνίαν συνέστα. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

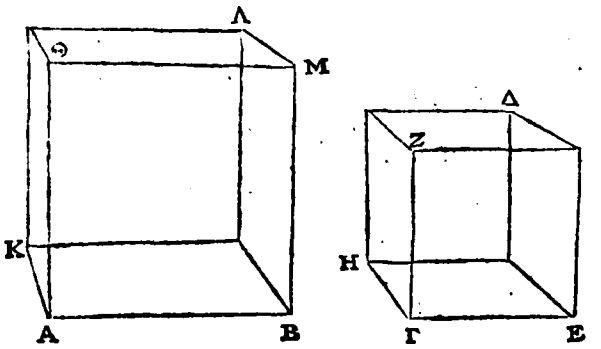
Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ὁμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

ΕΣτω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB, τὸ δὲ δοθὲν στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΔΓ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς AB τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ ΔΓ ὁμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ πρὸς τῷ Γ στερεᾷ γωνίᾳ ἴση, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν BAΘ, ΘAK,

KAB,

ΚΑΒ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ ΒΑΘ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΑΚ τῇ ὑπὸ ΕΓΗ, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΚΑΘ τῇ ὑπὸ ΗΓΖ, καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΚ, ὡς δὲ ἡ ΗΓ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΑΘ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΘ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΒΘ παραλληλόγραμμον καὶ τὸ ΑΛ στερεόν.



Καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΗ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΚ, καὶ ὡσὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΓΗ, ΒΑΚ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα τὸ ΗΕ παραλληλόγραμμον τῷ ΚΒ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΚΘ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΖ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστι, καὶ ἔτι τὸ ΖΕ τῷ ΘΒ· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ ΓΔ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ΑΛ στερεοῦ ὅμοιά ἐστιν. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε ἐστὶ καὶ ὅμοια· ὅλον ἄρα τὸ ΓΔ στερεὸν ὅλῳ τῷ ΑΛ στερεῷ ὅμοιόν ἐστιν.

Ἀπὸ τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ ΓΔ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγέγραπται. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

KAB contineatur, ita ut angulus quidem BAΘ æqualis ſit angulo EΓZ, angulus vero BAK angulo EΓH, & adhuc angulus KAΘ angulo HΓZ æqualis; dein [per 12. 6.] fiat ut EΓ ad ΓH ita BA ad AK, atque ut HΓ ad ΓZ ita KA ad AΘ: ergo ex æquo [per 22. 5.] ut EΓ ad ΓZ ita erit BA ad AΘ. compleantur deniq; parallelogrammum BΘ & AΛ ſolidum.

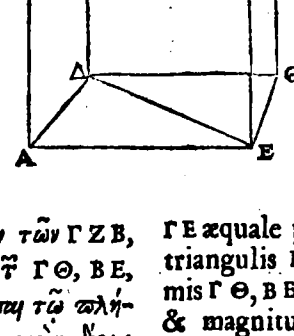
Quoniam igitur eſt ut EΓ ad ΓH ita BA ad AK; erunt circa æquales angulos EΓH, BAK latera proportionalia; ideoque [per 4. 6.] parallelogrammo KB parallelogrammum HB ſimile. eadem quoq; ratione parallelogrammum KΘ ſimile eſt parallelogrammo HZ, & parallelogrammo ΘB parallelogrammum ZE: tria igitur parallelogramma ſolidi ΓΔ tribus parallelogrammis ſolidi AΛ ſimilia ſunt. ſed [per 24. 11.] tria tribus oppoſitis ſunt æqualia & ſimilia: ergo totum ΓΔ ſolidum toti ſolido AΛ ſimile erit.

A data igitur recta linea AB dato ſolido parallelepipedo ΓΔ ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum AΛ deſcriptum eſt. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου.

Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΒ ἐπιπέδῳ τῷ ΓΔΕΖ τετμήσθω κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τὰς ΓΖ, ΔΕ· λέγω ὅτι δίχα τμηθήσεται τὸ ΑΒ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ΓΔΕΖ ἐπιπέδου.



Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΓΗΖ τρίγωνον τῷ ΓΒΖ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΑΔΕ τῷ ΔΕΘ, ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν ΓΑ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΕ ἴσον, ἀπεναντίον γὰρ, τὸ δὲ ΗΕ τῷ ΓΘ· καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΓΗΖ, ΑΔΕ τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΗΕ, ΑΓ, ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΓΖΒ, ΔΕΘ τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΓΘ, ΒΕ, ΓΕ, ὑπὸ γὰρ ἴσων ἐπιπέδων περιέχονται τῷ τε πλήθει καὶ τῷ μεγέθει· ὥστε ὅλον τὸ ΑΒ στερεὸν δίχα τέτμηται ὑπὸ τοῦ ΓΔΕΖ ἐπιπέδου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXVIII. THEOR.

Si ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per diagonales oppoſitorum planorum, ſolidum ab ipſo plano bifariam ſecabitur.

SOlidum enim parallelepipedum AB ſecetur plano ΓΔEZ per diagonales oppoſitorum planorum, videlicet ΓZ, ΔE: dico ſolidum AB à plano ΓΔEZ bifariam ſecari.

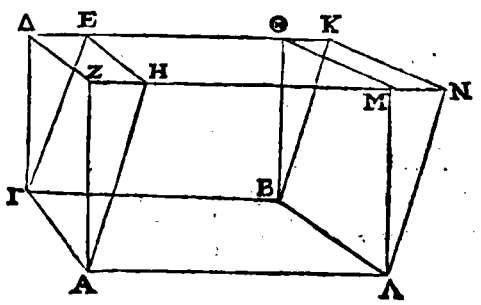
Quoniam enim æquale eſt [per 34. 1.] ΓHZ triangulum triangulo ΓBZ, triangulum vero AΔE triangulo ΔEΘ; eſt autem [per 24. 11.] & ΓA parallelogrammum parallelogrammo BE æquale, oppoſitum enim eſt; & parallelogrammum HE æquale parallelogrammo ΓΘ: erit [per 10. def. 11.] priſma contentum ſub duobus triangulis ΓHZ, AΔE & tribus parallelogrammis HE, AΓ ΓE æquale priſmati quod continetur ſub duobus triangulis ΓZB, ΔEΘ & tribus parallelogrammis ΓΘ, BE, ΓE; namque ſub planis & numero & magnitudine æqualibus continentur: ergo totum AB ſolidum à plano ΓΔEZ bifariam ſecatur. quod erat demonſtrandum.

PROP. XXIX. THEOR.

Solida parallelepipeda in eadem basi eademque altitudine, quorum insistentes lineæ in eisdem lineis rectis collocantur, inter se sunt æqualia.

SInt enim in eadem basi AB eademque altitudine solida parallelepipeda ΓM, ΓN, quorum lineæ insistentes AZ, AH, ΛM, ΛN, ΓΔ, ΓE, BΘ, BK sint in eisdem rectis lineis ZN, ΔK: dico solidum ΓM solido ΓN æquale esse.

Quoniam enim utrumque ipsorum ΓΘ, ΓK est parallelogrammum, erit [per 34. 1.] ΓB utrique ipsarum ΔΘ, EK æqualis: ergo & ΔΘ est æqualis ipsi EK. communis auferatur EΘ: reliqua igitur ΔE æqualis est reliquæ ΘK: quare [per 8. 1.] & ΔEΓ triangulum est æquale triangulo ΘKB; parallelogrammum autem ΔH [per 36. 1.] est æquale parallelogrammo ΘN. eadem ratione & AZH triangulum æquale est triangulo ΛMN. est autem [per 24. 11.] parallelogrammum ΓZ parallelogrammo BM, & parallelogrammum ΓH parallelogrammo BN æquale; oppolita enim sunt: ergo [per 10. def. 11.] & prisma contentum sub duobus triangulis AZH, ΔEΓ & tribus parallelogrammis AΔ, ΔH, HΓ est æquale prismati quod sub duobus triangulis ΛMN, ΘBK & tribus parallelogrammis BM, NΘ, BN continetur. commune apponatur solidum, cujus basis quidem parallelogrammum AB, oppositum autem ipsi HEΘM: ergo totum ΓM solidum parallelepipedum toti solido parallelepipedo ΓN est æquale.



Solida igitur parallelepipeda in eadem basi eademque altitudine, quorum insistentes lineæ in eisdem lineis rectis collocantur, inter se sunt æqualia. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Τὰ ὑπὶ τ αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι ὑπὶ τ αὐτῶν εἰσιν εὐθεῖαι, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω ὑπὶ τ αὐτῆς βάσεως τ ΑΒ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΓΜ, ΓΝ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΖ, ΑΗ, ΛΜ, ΛΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ ἐπὶ τ αὐτῶν εὐθειῶν ἔστωσαν τ ΖΝ, ΔΚ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΜ στερεὸν τῷ ΓΝ στερεῷ.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστιν ἑκάτερον τ ΓΘ, ΓΚ, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ ἑκατέρα τ ΔΘ, ΕΚ· ὥστε καὶ ἡ ΔΘ τῇ ΕΚ ἐστιν ἴση. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΕΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΕ λοιπῇ τῇ ΘΚ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ τὸ ΔΕΓ τρίγωνον τῷ ΘΚΒ τριγώνῳ ἴσον ἐστί, τὸ δὲ ΔΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΘΝ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΖΗ τρίγωνον τῷ ΛΜΝ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ τὸ μὴν ΓΖ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΜ παραλληλογράμμῳ ἴσον, τὸ δὲ ΓΗ τῷ ΒΝ, ἀπεναντίον γάρ· καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΑΖΗ, ΔΕΓ τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΑΔ, ΔΗ, ΗΓ ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τ ΛΜΝ, ΘΒΚ τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΒΜ, ΝΘ, ΒΝ. κοινὸν προσκείσθω τὸ στερεόν, ᾧ βάσις μὲν τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΗΕΘΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΜ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ ΓΝ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἴσον ἐστί.

Τὰ ἄρα ἐπὶ τ αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι ἐπὶ τ αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXX. THEOR.

Solida parallelepipeda in eadem basi eademque altitudine, quorum lineæ insistentes in eisdem lineis rectis non collocantur, inter se æqualia sunt.

SInt enim in eadem basi AB & eadem altitudine solida parallelepipeda ΓM, ΓN, quorum insistentes lineæ AZ, AH, ΛM, ΛN, ΓΔ, ΓE, BΘ, BK non sint in eisdem rectis lineis: dico solidum ΓM solido ΓN æquale esse.

Producantur enim NK, ΔΘ & etiam HE, ZM, atque conveniant inter se in punctis O, P, Π, Ξ: & AΞ, ΛO, ΓΠ, BP junganturæ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

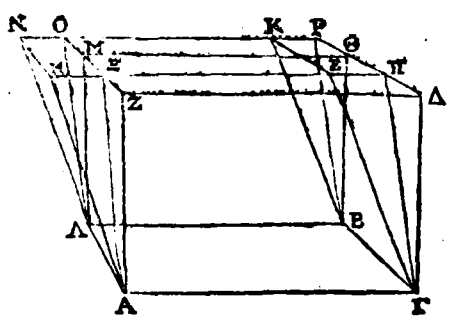
Τὰ ὑπὶ τ αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ὑφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τ αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Ἐστω γὰρ ἐπὶ τ αὐτῆς βάσεως τ ΑΒ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΓΜ, ΓΝ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ὑφεστῶσαι αἱ ΑΖ, ΑΗ, ΛΜ, ΛΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ μὴ ἔστωσαν ἐπὶ τ αὐτῶν εὐθειῶν· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΜ στερεὸν τῷ ΓΝ στερεῷ.

Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ αἱ ΝΚ, ΔΘ καὶ ἐπὶ αἱ ΗΕ, ΖΜ, καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὰ Ο, Ρ, Π, Ξ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ΑΞ, ΛΟ, ΓΠ, ΒΡ.

ἴσον

ἴσον δὴ ἐστὶ ΓΜ στερεὸν, ὃ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΖΔΘΜ τῷ ΓΟ στερεῷ, ὃ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΞΠΡΟ, ὅτι τὰ γὰρ τὰ αὐτῆς βάσεώς εἰσι τὸ ΑΓΒΛ, καὶ αὐτῶν αἱ ὑφεστῶσαι αἱ ΑΖ, ΑΞ, ΛΜ, ΛΟ, ΓΔ, ΓΠ, ΒΘ, ΒΡ ὅτι τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ΖΟ, ΔΡ. ἀλλὰ τὸ ΓΟ στερεὸν, ὃ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΞΠΡΟ, ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΝ στερεῷ, ὃ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΗΕΚΝ, ὅτι τὰ γὰρ τὰ αὐτῆς βάσεώς εἰσι τὸ ΑΓΒΛ, καὶ αὐτῶν αἱ ὑφεστῶσαι αἱ ΑΗ, ΑΞ, ΓΕ, ΓΠ, ΛΝ, ΛΟ, ΒΚ, ΒΡ ὅτι τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ΗΠ, ΝΡ· ὥστε καὶ τὸ ΓΜ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΝ στερεῷ.



Τὰ ἄρα ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ὑφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

solidum ΓΜ, cujus baſis quidem ΑΓΒΛ parallelogrammum ipſi autem oppoſitum ΖΔΘΜ, eſt [per 29. 11.] æquale ſolido ΓΟ cujus baſis parallelogrammum ΑΓΒΛ & ei oppoſitum ΞΠΡΟ, in eadem enim ſunt baſi ΑΓΒΛ, & ipſorum inſiſtentes lineæ ΑΖ, ΑΞ, ΛΜ, ΛΟ, ΓΔ, ΓΠ, ΒΘ, ΒΡ ſunt in eiſdem rectis lineis ΖΟ, ΔΡ. ſed ſolidum ΓΟ, cujus baſis quidem parallelogrammum ΑΓΒΛ ipſi autem oppoſitum ΞΠΡΟ, eſt [per 29. 11.] æquale ſolido ΓΝ, cujus baſis ΑΓΒΛ parallelogrammum & ipſi oppoſitum ΗΕΚΝ; etenim in eadem ſunt baſi ΑΓΒΛ, & eorum inſiſtentes lineæ ΑΗ, ΑΞ, ΓΕ, ΓΠ, ΛΝ, ΛΟ, ΒΚ, ΒΡ ſunt in eiſdem rectis lineis ΗΠ, ΝΡ: quare & ſolidum ΓΜ ſolido ΓΝ æquale erit.

Solida igitur parallelepipeda in eadem baſi eademque altitudine, quorum lineæ inſiſtentes in eiſdem rectis lineis non collocantur, inter ſe æqualia ſunt. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

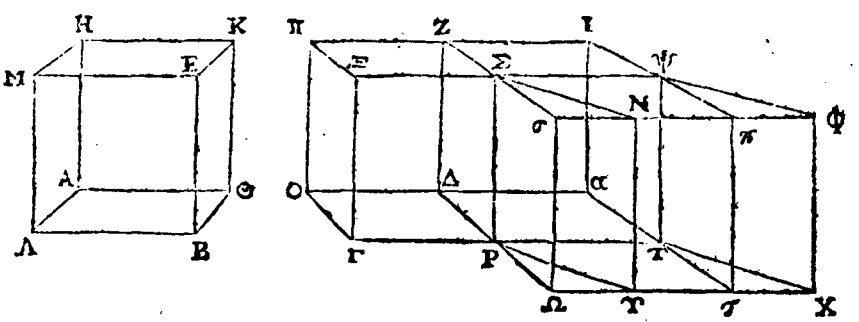
Τὰ ὑπὸ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Prop. XXXI. Theor.

Solida parallelepipeda, quæ in æqualibus ſunt baſibus & eadem altitudine, inter ſe ſunt æqualia.

Ἔστω ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΕ, ΓΖ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕ στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ.

Sint in æqualibus baſibus ΑΒ, ΓΔ ſolida parallelepipeda ΑΕ, ΓΖ, & in eadem altitudine: dico ſolidum ΑΕ ſolido ΓΖ æquale eſſe.

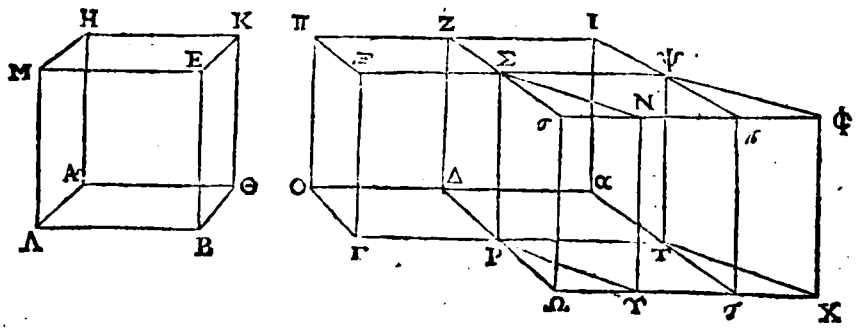


Ἐφεστάτω δὴ ἀφ' ὁτέρων αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΘΚ, ΒΕ, ΑΗ, ΑΜ, ΟΠ, ΔΖ, ΓΞ, ΡΣ πρὸς ὀρθὰς τοῖς ΑΒ, ΓΔ βάσεσιν, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΛΒ τῇ ὑπὸ ΓΡΔ ἄνισος, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΓΡ εὐθείᾳ τῇ ΓΡ εὐθείᾳ ἡ ΡΤ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΡΤ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ρ τῇ ὑπὸ ΑΛΒ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΤΡΓ, καὶ κείσθω τῇ μὲν ΑΛ ἴση ἡ ΡΤ, τῇ δὲ ΛΒ ἴση ἡ ΡΥ, καὶ πρὸς τῷ Υ σημείῳ τῇ ΡΤ εὐθείᾳ ἤχθω ἡ ΥΧ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ τε ΡΧ βάσις καὶ τὸ ΨΥ στερεόν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΤΡ, ΡΥ δυσὶ ταῖς ΑΛ, ΛΒ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι

Sint autem primo inſiſtentes lineæ ΘΚ, ΒΕ, ΑΗ, ΛΜ, ΟΠ, ΔΖ, ΓΞ, ΡΣ ad rectos angulos baſibus ΑΒ, ΓΔ, angulus autem ΑΛΒ angulo ΓΡΔ ſit inæqualis, & producatur ipſi ΓΡ in directum ΡΤ, conſtituaturque [per 23. 1.] ad rectam lineam ΡΤ, & ad punctum in ipſa Ρ angulo ΑΛΒ æqualis angulus ΤΡΥ, & ponatur ipſi quidem ΑΛ æqualis ΡΤ, ipſi vero ΛΒ æqualis ΡΥ, & per punctum Υ ipſi ΡΤ parallela ducatur ΧΥ, compleanturque baſis ΡΧ & ΨΥ ſolidum. quoniam igitur duæ ΤΡ, ΡΥ duabus ΑΛ, ΛΒ æquales ſunt, & angulos continent æquales;

æquales; erit parallelogrammum PX æquale & ſimile parallelogrammo ΘΛ & rurſus quoniam ΑΛ eſt æqualis PT, & ΛM ipſi PΣ, anguloſque æquales continet; parallelogrammum PΨ parallelogrammo AM æquale & ſimile erit. eadem ratione ΛE parallelogrammum ipſi ΣT æquale eſt & ſimile: tria igitur parallelogramma ſolidi AE tribus parallelogrammis ſo-

ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον τὸ PX παραλληλόγραμμον τῷ ΘΛ παραλληλογράμμῳ. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΛ τῇ PT, ἡ δὲ ΛM τῇ PΣ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ ὅμοιον τὸ PΨ παραλληλόγραμμον τῷ AM παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΛE τῷ ΣT ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ AE στερεὰ τρισὶ

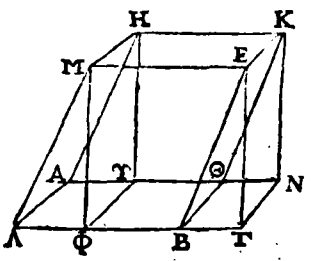


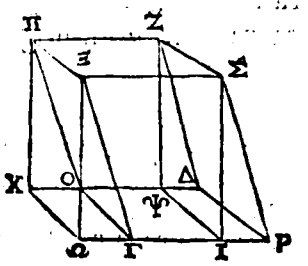
lidi ΨT æqualia & ſimilia ſunt. ſed [per 24. 11.] tria tribus oppoſita æqualia ſunt & ſimilia: totum igitur AB ſolidum parallelepipedum [per 10. def. 11.] toti ſolido parallelepipedo ΨT eſt æquale. producantur ΔP, XT conveniantque inter ſe in puncto Ω, & per T ipſi ΔΩ parallela ducatur Tτ, & producantur Tτ, OΔ donec conveniant in α, compleanturque ſolida ΩΨ, PI: ſolidum igitur ΨΩ, cujus baſis eſt PΨ parallelogrammum ipſi autem oppoſitum Ωπ, eſt [per 29. 11.] æquale ſolido ΨT cujus baſis eſt PΨ parallelogrammum & ipſi oppoſitum Υ Φ, in eadem enim ſunt baſi PΨ & eadem altitudine, & eorum inſiſtentes lineæ PΩ, PT, Tτ, TX, Σσ, ΣN, Ψπ, ΨΦ in eiſdem ſunt rectis lineis ΩX, σΦ. ſed ſolidum ΨT æquale eſt ſolido AE: ergo & ΨΩ ſolido AB eſt æquale. præterea quoniam parallelogrammum PTXT [per 35. 1.] eſt æquale parallelogrammo ΩT, etenim in eadem ſunt baſi PT & in eiſdem parallelis PT, ΩX; ſed & parallelogrammum PTXT parallelogrammo ΓΔ eſt æquale, quoniam & ipſi AB: parallelogrammum igitur ΩT æquale eſt parallelogrammo ΓΔ. aliud autem eſt parallelogrammum ΔT: eſt igitur [per 7. 5.] ut ΓΔ baſis ad baſim ΔT ita ΩT ad ipſam ΔT. & quoniam ſolidum parallelepipedum ΓI ſecatur plano PZ planis oppoſitis parallelo; erit [per 25. 11.] ut ΓΔ baſis ad baſim ΔT ita ſolidum ΓZ ad PI ſolidum. eadem ratione quoniam ſolidum parallelepipedum ΩI ſecatur plano PΨ oppoſitis planis parallelo, ut ΩT baſis ad baſim ΔT ita erit ſolidum ΩΨ ad PI ſolidum. ſed ut ΓΔ baſis ad baſim ΔT ita baſis ΩT ad ipſam TΔ: ut igitur ſolidum ΓZ ad PI ſolidum ita [per 11. 5.] ſolidum ΩΨ ad ſolidum PI. quod cum utrumque ſolidorum ΓZ, ΩΨ ad ſolidum PI eandem habet rationem, ſolidum ΓZ [per 9. 5.] ſolido ΩΨ eſt æquale. ſolidum autem ΩΨ oſtenſum eſt æquale ſolido AE: ergo & AB ipſi ΓZ æquale erit. Sed non ſint inſiſtentes lineæ AH, ΘK, BE, ΛM, ΓΞ, OΠ, ΔZ, PΣ ad

παραλληλογράμμοις δὲ ΨΥ στερεὰ ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια· ὅλον ἄρα τὸ AE στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ ΨΥ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἴσον ἐστί. διήχθωσαν αἱ ΔP, XΥ καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Ω, καὶ διὰ δὲ Τ τῇ ΔΩ παράλληλος ἤχθω ἡ Tτ, καὶ συνεζεύχθωσαν ἡ Tτ καὶ ἡ OΔ καὶ συνεζεύχθωσαν κατὰ τὸ α, καὶ συμπεπληρώσθωσαν τὰ ΩΨ, PI στερεά· ἴσον δή ἐστι τὸ ΨΩ στερεὸν, ὧν βάσις μέν ἐστι τὸ PΨ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ Ωπ τῷ ΨΥ στερεῷ, ὧν βάσις ἐστὶ τὸ PΨ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ Υ Φ, διότι καὶ τὰ αὐτῆς βάσεώς εἰσι τὰ PΨ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ αὐτῶν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ PΩ, PΥ, Tτ, TX, Σσ, ΣN, ΨΠ, ΨΦ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ΩX, σΦ. ἀλλὰ τὸ ΨΥ στερεὸν τῷ AE ἴσον ἐστί· καὶ τὸ ΨΩ ἄρα στερεὸν τῷ AE στερεῷ ἴσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ PΥXT παραλληλόγραμμον τῷ ΩT παραλληλογράμμῳ, ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς PT, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις τῇ PT, ΩX, ἀλλὰ τὸ PΥXT τῷ ΓΔ ἐστιν ἴσον ἐπεὶ καὶ τῷ AB· καὶ τὸ ΩT ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ ΓΔ ἐστιν ἴσον. ἄλλο δέ τὸ ΔT· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΔT οὕτως ἡ ΩT πρὸς τὴν ΔT. καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδόν τὸ ΓI ὑπιπέδῳ τῷ PZ τέτμηται, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ὑπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΔT βάσιν οὕτως τὸ ΓZ στερεὸν πρὸς τὸ PI στερεόν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδόν τὸ ΩI ἐπιπέδῳ τῷ PΨ τέτμηται, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ὑπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἡ ΩT βάσις πρὸς τὴν ΔT βάσιν οὕτως τὸ ΩΨ στερεὸν πρὸς τὸ PI στερεόν. ἀλλ' ὡς ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΔT οὕτως ἡ ΩT πρὸς τὴν TΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΓZ στερεὸν πρὸς τὸ PI στερεὸν οὕτως τὸ ΩΨ στερεὸν πρὸς τὸ PI στερεόν· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΓZ, ΩΨ στερεῶν πρὸς τὸ PI τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα τὸ ΓZ στερεὸν τῷ ΩΨ στερεῷ. ἀλλὰ τὸ ΩΨ τῷ AE ἐδείχθη ἴσον· καὶ τὸ AE ἄρα τῷ ΓZ ἐστὶν ἴσον. Μὴ ἐστωσαν δὴ αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ AH, ΘK, BE, ΛM, ΓΞ, OΠ, ΔZ, PΣ

πρὸς

πρὸς ὀρθὰς τὰς ΑΒ, ΓΔ βάσεσι· λέγω πάλιν ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕ στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ. ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Κ, Ε, Η, Μ, Π, Ζ, Ξ, Σ σημείων ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον κάθετοι αἱ ΚΝ, ΕΤ, ΗΥ, ΜΦ, ΠΧ, ΖΨ, ΞΩ, ΣΙ, καὶ συμβαλλέτωσαν τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Ν, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω, Ι σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΤ, ΤΦ, ΝΥ, ΤΦ, ΧΨ, ΧΩ, ΩΙ, ΨΙ· ἴσον δή ἐστι τὸ ΚΦ στερεὸν τῷ ΠΙ στερεῷ· ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΚΜ, ΠΣ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι πρὸς ὀρθὰς εἰσι τοῖς βάσεσιν. ἀλλὰ τὸ μὲν ΚΦ στερεὸν τῷ ΑΕ στερεῷ ἴσον ἐστί, τὸ δὲ ΠΙ τῷ ΓΖ, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσιν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν· καὶ τὸ ΑΕ ἄρα στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ ἐστιν ἴσον.





Τὰ ἄρα ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

rectos angulos ipſis ΑΒ, ΓΔ baſibus: dico rurſus ſolidum ΑΕ æquale eſſe ſolido ΓΖ. ducantur [per 11. 11.] à punctis Κ, Ε, Η, Μ, Π, Ζ, Ξ, Σ ad ſubjectum planum perpendiculares ΚΝ, ΕΤ, ΗΤ, ΜΦ, ΠΧ, ΖΨ, ΞΩ, ΣΙ quæ plano in punctis Ν, Τ, Τ, Φ, Χ, Ψ, Ω, Ι occurrant, & jungantur ΝΤ, ΤΦ, ΝΤ, ΤΦ, ΧΨ, ΧΩ, ΩΙ, ΨΙ: æquale igitur eſt [per 31. 11.] ſolidum ſolido ΠΙ; in æqualibus enim ſunt ΚΦ baſibus ΚΜ, ΠΣ & in eadem altitudine, & illorum inſiſtentes ad rectos angulos ſunt baſibus. ſed [per 30. 11.] ΚΦ ſolidum ſolido ΑΕ eſt æquale; ſolidum vero ΠΙ æquale ſolido ΓΖ, ſi quidem in eadem ſunt baſi & in eadem altitudine, & illorum inſiſtentes lineæ non ſunt in eiſdem rectis lineis: ergo & ſolidum ΑΕ ſolido ΓΖ æquale erit.

Solida igitur parallelepipeda, quæ in æqualibus ſunt baſibus & eadem altitudine, inter ſe ſunt æqualia. quod erat demonſtrandum.

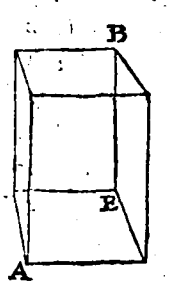
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϐ'.

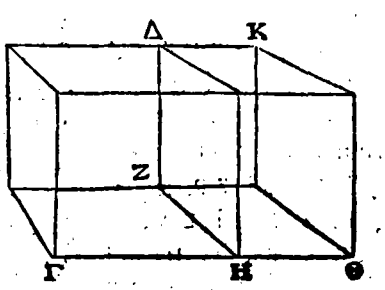
Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ· λέγω ὅτι τὰ ΑΒ, ΓΔ στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις, τουτέστιν ὡς ἡ ΑΕ βάσις πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεόν.

Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΖΗ τῷ ΑΕ ἴσον τὸ ΖΘ, καὶ διὰ τοῦ βάσεως μὲν τοῦ ΖΘ ὕψους δὲ αὐτῷ τῷ ΓΔ στερεὸν παραλληλεπίπεδον συμπεπληρώσθω τὸ ΗΚ· ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΗΚ στερεῷ, ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΑΕ, ΖΘ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΚ ἐπιπέδῳ τῷ ΔΗ τέμνηται, παραλλήλως ὑπὸ τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΘΖ βάσις πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν οὕτως τὸ ΘΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΔΓ στερεόν. ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΘ βάσις τῇ ΑΕ βάσει, τὸ δὲ ΗΚ στερεὸν τῷ ΑΒ στερεῷ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΑΕ βάσις πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεόν.

Τὰ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.





PROP. XXXII. THEOR.

Solida parallelepipeda, quæ eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes.

SInt ſolida parallelepipeda ΑΒ, ΓΔ, quæ eandem altitudinem habeant: dico inter ſe eſſe ut baſes; hoc eſt, ut ΑΕ baſis ad baſim ΓΖ ita ſolidum ΑΒ ad ΓΔ ſolidum.

Applicetur enim [per 45. 1.] ad ΖΗ parallelogrammo ΑΕ æquale ΖΘ, à baſi vero ΖΘ & eadem altitudine, cum ipſo ΓΔ ſolidum parallelepipedum ΗΚ compleatur: ſolidum igitur ΑΒ [per 31. 11.] ſolido ΗΚ eſt æquale; in æqualibus enim ſunt baſibus ΑΕ, ΖΘ, & in eadem altitudine. itaque quoniam ſolidum parallelepipedum ΓΚ plano ΔΗ ſecatur, oppoſitis planis parallelo; erit [per 25. 11.] ut ΘΖ baſis ad baſim ΓΖ ita ſolidum ΘΔ ad ΔΓ ſolidum. ſed baſis quidem ΖΘ baſi ΑΕ æqualis eſt, ſolidum vero ΗΚ æquale ſolido ΑΒ: & igitur eſt ut ΑΕ baſis ad baſim ΓΖ ita ſolidum ΑΒ ad ſolidum ΓΔ.

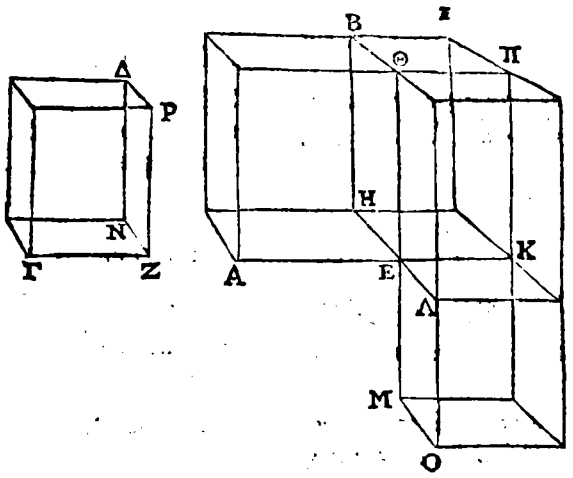
Quare ſolida parallelepipeda, quæ eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes. quod erat demonſtrandum.

PROP. XXXIII. THEOR.

Similia ſolida parallelepipeda inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum laterum.

SInt ſimilia ſolida parallelepipeda AB, ΓΔ, latus autem AE homologum ſit lateri ΓZ: dico ſolidum AB ad ΓΔ ſolidum triplicatam rationem habere ejus quam habet AE ad ΓZ.

Producantur enim EK, EΛ, EM in directum ipſis AE, HE, ΘE: & ipſi quidem ΓZ æqualis ponatur EK, ipſi vero ZN æqualis EΛ; & adhuc ipſi ZP æqualis EM, & KΛ parallelogrammum & KO ſolidum compleantur. quoniam igitur duæ EK, EA duabus ΓZ, ZN æquales ſunt; ſed & angulus KEΛ angulo ΓZN æqualis, quia & angulus AEH ipſi ΓZN æqualis eſt ob ſimilitudinem ſolidorum AB, ΓΔ; erit & KΛ parallelogrammum æquale ac ſimile parallelogrammo ΓN. eadem ratione. & parallelogrammum KM æquale eſt & ſimile parallelogrammo ΓP, & adhuc parallelogrammum OE ipſi ΔZ parallelogrammo: tria igitur parallelogramma ſolidi KO tribus parallelogrammis ſolidi ΓΔ æqualia & ſimilia ſunt. ſed [per 24. 11.] tria tribus oppoſitis æqualia ſunt & ſimilia; totum igitur KO ſolidum [per 10. def. 11.] æquale eſt & ſimile toti ſolido ΓΔ. compleatur HK parallelogrammum, & à baſibus quidem HK, KΛ parallelogrammis, altitudine vero eadem cum ipſo AB ſolida, compleantur EΞ, ΛΠ. & quoniam ob ſimilitudinem ſolidorum AB, ΓΔ eſt ut AE ad ΓZ ita EH ad ZN, & EΘ ad ZP, æqualis autem ZΓ ipſi EK, & ZN ipſi EΛ, & ZP ipſi EM; erit ut AE ad EK ita HE ad EΛ, & ΘE ad EM. ſed [per 1. 6.] ut AE quidem ad EK ita AH parallelogrammum ad parallelogrammum HK; ut autem HE ad EΛ ita HK ad KΛ, & ut ΘE ad EM ita ΠE ad KM: & igitur ut AH parallelogrammum ad parallelogrammum HK ita HK ad KΛ, & ΠE ad KM. ſed [per 32. 11.] ut AH quidem ad HK ita AB ſolidum ad ſolidum EΞ; ut autem HK ad KΛ ita ſolidum ΞE ad ΠΛ ſolidum; & ut ΠE ad KM ita ΠΛ ſolidum ad ſolidum KO: & igitur ut ſolidum AB ad ſolidum EΞ ita EΞ ad ΠΛ, & ΠΛ ad KO. ſi autem quatuor ſint magnitudines dein-



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Τὰ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

ΕΣτω ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ AB, ΓΔ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ AE τῇ ΓZ· λέγω ὅτι τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ AE πρὸς τὴν ΓZ.

Ἐκβεβλήθωσαν γὰρ ἐπ' εὐθείας ταῖς AE, HE, ΘE αἱ EK, EΛ, EM, καὶ κείσθω τῇ μὲν ΓZ ἴση ἡ EK, τῇ δὲ ZN ἴση ἡ EΛ, καὶ ἔτι τῇ ZP ἴση ἡ EM, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ KΛ παραλληλόγραμμον, καὶ τὸ KO στερεόν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ EK, EΛ δυσὶ ταῖς ΓZ, ZN ἴσαι εἰσὶν, ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ KEΛ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓZN ἐστιν ἴση, ἐπειδήπερ καὶ ἡ ὑπὸ AEH τῇ ὑπὸ ΓZN ἐστιν ἴση διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν AB, ΓΔ στερεῶν· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ ὅμοιον τὸ KΛ παραλληλόγραμμον τῷ ΓN παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν KM παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον τῷ ΓP παραλληλογράμμῳ, καὶ ἔτι τὸ OE τῷ ΔZ· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ KO στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῖς ΓΔ στερεοῖς ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια· ὅλον ἄρα τὸ KO στερεὸν ὅλῳ τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον. συμπεπληρώσθω τὸ HK παραλληλόγραμμον, καὶ ἀπὸ βάσεων μὲν τῶν HK, KΛ παραλληλογράμμων, ὕψους δὲ αὐτὸ τῷ AB, στερεὰ συμπεπληρώσθω τὰ EΞ, ΛΠ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν AB, ΓΔ στερεῶν ἐστιν ὡς ἡ AE πρὸς τὴν ΓZ οὕτως ἡ EH πρὸς τὴν ZN, καὶ ἡ EΘ πρὸς τὴν ZP, ἴση δὲ ἡ μὲν ZΓ τῇ EK, ἡ δὲ ZN τῇ EΛ, ἡ δὲ ZP τῇ EM· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AE πρὸς τὴν EK οὕτως ἡ HE πρὸς τὴν EΛ, καὶ ἡ ΘE πρὸς τὴν EM. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AE πρὸς τὴν EK οὕτως τὸ AH παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ HK παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ HE πρὸς τὴν EΛ οὕτως τὸ HK πρὸς τὸ KΛ, ὡς δὲ ἡ ΘE πρὸς τὴν EM οὕτως τὸ ΠE πρὸς τὸ KM· καὶ ὡς ἄρα τὸ AH παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ HK οὕτως τὸ HK πρὸς τὸ KΛ καὶ τὸ ΠE πρὸς τὸ KM. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ AH πρὸς τὸ HK οὕτως τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ EΞ στερεόν, ὡς δὲ τὸ HK πρὸς τὸ KΛ οὕτως τὸ ΞE στερεὸν πρὸς τὸ ΠΛ στερεόν, ὡς δὲ τὸ ΠE πρὸς τὸ KM οὕτως τὸ ΠΛ στερεὸν πρὸς τὸ KO στερεόν· καὶ ὡς ἄρα τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ EΞ οὕτως τὸ EΞ πρὸς τὸ ΠΛ, καὶ τὸ ΠΛ πρὸς τὸ KO. ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη κατὰ τὸ

συνεχὲς

στοιχὲς ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ πέμπτον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον· καὶ τὸ ΑΒ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΞ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΞ ἕτως τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΚ, καὶ ἡ ΑΕ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΕΚ· ὥστε καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΚΟ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἡ δὲ ΕΚ εὐθεῖα τῇ ΓΖ· καὶ τὸ ΑΒ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος αὐτοῦ πλευρὰ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν ΓΖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης στερεὸν παραλληλεπίπεδον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ἐπειδήπερ καὶ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν δευτέραν.

ceps proportionales, prima [per 11. def. 5.] ad quartam triplicatam rationem habet ejus quam habet ad ſecundam: ergo & AB ſolidum ad ſolidum KO triplicatam habet rationem ejus quam habet AB ad EΞ. ſed [per 32. 11.] ut AB ad EΞ ita AH parallelogrammum ad parallelogrammum HK, & [per 1.6.] AE recta ad ipſam EK: quare & AB ſolidum ad ſolidum KO triplicatam rationem habebit ejus quam AE habet ad EK. æquale autem eſt ſolidum KO ſolido ΓΔ, & recta EK rectæ ΓZ eſt æqualis: ergo & AB ſolidum ad ſolidum ΓΔ triplicatam habet rationem ejus quam ipſius latus homologum AE habet ad homologum latus ΓZ. quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Ex hoc vero manifeſtum eſt, ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad quartam ita eſſe ſolidum parallelepipedum quod fit à prima ad ſolidum à ſecunda ſimile & ſimiliter deſcriptum; quoniam ſcil. prima ad quartam triplicatam rationem habet ejus quam habet ad ſecundam.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

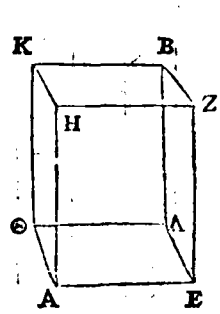
Τῶν ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι· καὶ ὧν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

PROP. XXXIV. THEOR.

Æqualium ſolidorum parallelepipedorum baſes ſunt reciproce proportionales altitudinibus; & quorum ſolidorum parallelepipedorum baſes ſunt reciproce proportionales altitudinibus, ea inter ſe ſunt æqualia.

Ἔστω ἴσα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ· λέγω ὅτι τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν ἕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος.

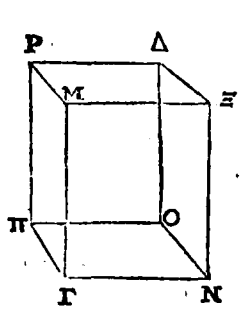
Ἐστωσαν γὰρ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΑΗ, ΕΖ, ΛΒ, ΘΚ, ΓΜ, ΝΞ, ΟΔ, ΠΡ πρὸς ὀρθὰς τὰς βάσεις αὐτῶν· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν ἕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΑΗ. εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ βάσει, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον, ἔσται καὶ ἡ ΓΜ τῇ ΑΗ ἴση. εἰ γὰρ, τῶν ΕΘ, ΝΠ βάσεων ἴσων οὐσῶν, μὴ ἔστι καὶ ἡ ΑΗ, ΓΜ ὕψη ἴσα· οὐκ ἄρα τὸ ΑΒ στερεὸν ἴσον ἔσται τῷ ΓΔ. κεῖται δὲ ἴσον· οὐκ ἄρα ἄνισον τὸ ΓΜ ὕψος τῷ ΑΗ ὕψει· ἴσον ἄρα, καὶ ἔσται ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ ἕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΑΗ, καὶ φανερὸν ὅτι τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι.



Μὴ ἔστω δὴ ἴση ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ βάσει, ἀλλ' ἔστω μείζων ἡ ΕΘ. ἔστι δὴ καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΓΜ τῆς ΑΗ. εἰ γὰρ μὴ, ἴσον

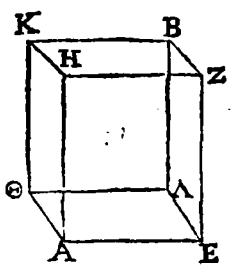
SInt æqualia ſolida parallelepipeda AB, ΓΔ: dico ipſorum baſes eſſe reciproce proportionales altitudinibus; hoc eſt ut EΘ baſis ad baſim NΠ ita eſſe altitudinem ſolidi ΓΔ ad ſolidi AB altitudinem.

Sint enim primum inſiſtentes AH, EZ, ΛB, ΘK, ΓM, NΞ, OΔ, ΠP ad rectos angulos baſibus ipſorum: dico ut EΘ baſis ad baſim NΠ ita eſſe ΓM ad AH. ſi quidem baſis EΘ baſi NΠ ſit æqualis, eſt autem & AB ſolidum æquale ſolido ΓΔ; erit & ΓM æqualis ipſi AH. ſi enim, baſibus EΘ, NΠ æqualibus exiſtentibus, non ſint altitudines AH, ΓM æquales; neque AB ſolidum [per 31. 11.] ſolido ΓΔ æquale erit. ponitur autem æquale: non igitur inæqualis eſt altitudo ΓM altitudini AH; ergo eſt æqualis: ac propterea ut EΘ baſis ad baſim NΠ ita erit ΓM ad AH. unde conſtat ſolidorum parallelepipedorum AB, ΓΔ baſes eſſe reciproce proportionales altitudinibus.



At vero non ſit baſis EΘ æqualis baſi NΠ, ſed EΘ ſit major. eſt autem & AB ſolidum ſolido ΓΔ æquale: ergo major eſt ΓM ipſa AH. ſi enim non,

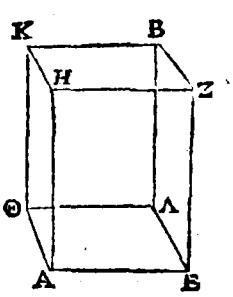
neque rurſus [per 31. 11.] forent ſolida AB, ΓΔ æqualia. ponuntur autem æqualia: itaque ponatur ΓΤ æqualis ipſi AH; & à baſi quidem NΠ, altitudine autem ΓΤ, ſolidum parallelepipedum ΦΓ compleatur. quoniam igitur ſolidum AB ſolido ΓΔ eſt æquale, aliud autem eſt ſolidum ΦΓ, & [per 7. 5.] æqualia ad idem eandem habent rationem; erit ut AB ſolidum ad ſolidum ΓΦ ita ΓΔ ſolidum ad ſolidum ΓΦ. ſed [per 32. 11.] ut AB ſolidum ad ſolidum ΓΦ ita baſis EΘ ad NΠ baſim, æqualia enim ſunt AB, ΓΦ ſolida; ut autem ſolidum ΓΔ ad ipſum ΓΦ [per 25. 11.] ita MΠ baſis ad baſim ΠΤ, & [per 1.6.] MΓ ad ΓΤ: & igitur ut baſis EΘ ad NΠ baſim ita MΓ ad ΓΤ. eſt autem ΓΤ æqualis AH; ergo & ut EΘ baſis ad baſim NΠ ita MΓ ad AH: quare ſolidorum parallelepipedorum AB, ΓΔ baſes ſunt reciproce proportionales altitudinibus.



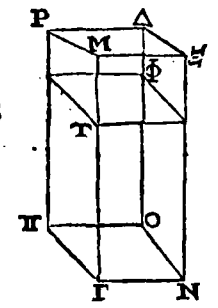
RURSUS, ſolidorum parallelepipedorum AB, ΓΔ baſes ſint reciproce proportionales altitudinibus; ſitque ut EΘ baſis ad baſim MΠ ita ſolidi ΓΔ altitudo ad altitudinem ſolidi AB: dico ſolidum AB ſolido ΓΔ æqualem eſſe.

Sint enim rurſus inſiſtentes ad rectos angulos baſibus. & ſi quidem baſis EΘ ſit æqualis baſi NΠ, eſtque ut EΘ baſis ad baſim NΠ ita altitudo ſolidi ΓΔ ad ſolidi AB altitudinem: erit ſolidi ΓΔ altitudo altitudini ſolidi AB æqualis. ſolida autem parallelepipeda, quæ ſunt in æqualibus baſibus & eadem altitudine [per 31. 11.] inter ſe æqualia ſunt: ergo ſolidum AB ſolido ΓΔ eſt æquale.

Sed non ſit EΘ baſis æqualis baſi NΠ, & ſit EΘ major. major igitur eſt & ſolidi ΓΔ altitudo altitudine ſolidi AB, hoc eſt, ΓM ipſa AH. ponatur rurſus ipſi AH æqualis ΓΤ, & ſimiliter ſolidum ΓΦ compleatur. itaque quoniam eſt ut EΘ baſis ad baſim NΠ ita ΓM ad ipſam AH: æqualis autem eſt AH ipſi ΓΤ; erit ut baſis EΘ ad NΠ baſim ita MΓ ad ΓΤ. ſed [per 32. 11.] ut baſis EΘ ad NΠ baſim ita AB ſolidum ad ſolidum ΓΦ, æquealta enim ſunt ſolida AB, ΓΦ; ut autem MΓ ad ΓΤ ita [per 1.6.] & MΠ baſis ad baſim ΠΤ, & [per 25. 11.] ſolidum ΓΔ ad ΓΦ ſolidum: & igitur ut ſolidum AB ad ſolidum ΓΦ ita ſolidum ΓΔ ad ſolidum ΓΦ: igitur utrumque ſolidorum AB, ΓΔ ad ipſum ΓΦ eandem rationem habet; erit igitur [per 9. 5.] AB ſolidum ſolido ΓΔ æquale. quod erat demonſtrandum.



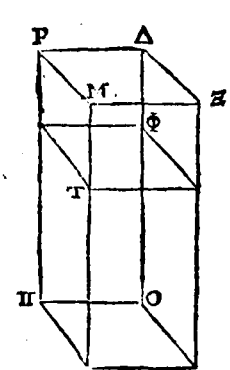
ἄρα πάλιν τὰ AB, ΓΔ στερεὰ ἴσα ἔσται· ὑπόκειται δὲ ἴσα. κείσθω ἴση τῇ AH ἴση ἡ ΓΤ, καὶ συμπεπληρώσθω ὑπὸ βάσεως μὲν τῆς NΠ, ὕψους δὲ τοῦ ΓΤ, στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΦΓ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ AB στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἄλλο δέ τι τὸ ΦΓ, τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ὡς ἄρα τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν ἐστιν τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν ἐστιν ἡ EΘ βάσις πρὸς τὴν NΠ βάσιν, ἰσουψῆ γὰρ τὰ AB, ΓΦ στερεά· ὡς δὲ τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν ἐστιν ἡ MΠ βάσις πρὸς τὴν ΠΤ βάσιν, καὶ ἡ MΓ πρὸς τὴν ΓΤ· καὶ ὡς ἄρα ἡ EΘ βάσις πρὸς τὴν NΠ βάσιν ἐστὶν ἡ MΓ πρὸς τὴν ΓΤ. ἴση δὲ ἡ ΓΤ τῇ AH· καὶ ὡς ἄρα ἡ EΘ βάσις πρὸς τὴν NΠ βάσιν ἐστὶν ἡ MΓ πρὸς τὴν AH· τῶν AH, ΓΔ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.



ΠΑΛΙΝ δὴ τῶν AB, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ EΘ βάσις πρὸς τὴν NΠ βάσιν οὕτως τὸ Ξ ΓΔ στερεὸν ὕψος πρὸς τὸ τοῦ AB στερεοῦ ὕψος· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ AB στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

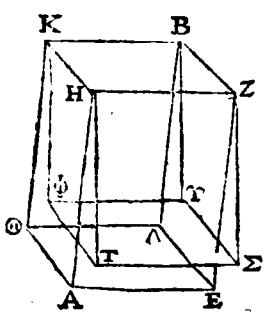
Ἐστωσαν γὰρ πάλιν αἱ ἐφεξῆς πρὸς ὀρθὰς τοῖς βάσεσιν. καὶ εἰ μὲν ἴση ἐστὶν ἡ EΘ βάσις τῇ NΠ βάσει, καὶ ἔστιν ὡς ἡ EΘ βάσις πρὸς τὴν NΠ βάσιν οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ AB στερεοῦ ὕψος· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Ξ ΓΔ στερεοῦ ὕψος τῷ τοῦ AB στερεοῦ ὕψει. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ἴσων τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ AB στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Μὴ ἔστω δὴ ἡ EΘ βάσις τῇ NΠ ἴση, καὶ ἔστω μείζων ἡ EΘ· μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ Ξ ΓΔ στερεὸν ὕψος τοῦ AB στερεοῦ ὕψους, τετμήσθω ἡ ΓM τῇ AH. κείσθω τῇ AH ἴση πάλιν ἡ ΓΤ, καὶ συμπεπληρώσθω ὁμοίως τὸ ΓΦ στερεόν. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ EΘ βάσις πρὸς τὴν NΠ βάσιν οὕτως ἡ ΓM πρὸς τὴν AH, ἴση δὲ ἡ AH τῇ ΓΤ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ EΘ βάσις πρὸς τὴν NΠ βάσιν οὕτως ἡ MΓ πρὸς τὴν ΓΤ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ EΘ βάσις πρὸς τὴν NΠ βάσιν οὕτως τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν, ἰσουψῆ γάρ ἐστι τὰ AB, ΓΦ στερεά, ὡς δὲ ἡ MΓ πρὸς τὴν ΓΤ οὕτως ἦν ἡ MΠ βάσις πρὸς τὴν ΠΤ βάσιν, καὶ τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ· καὶ ὡς ἄρα τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ οὕτως τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν· ἑκάτερον ἄρα τῶν AB, ΓΔ πρὸς τὸ ΓΦ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα τὸ AE στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Μὴ

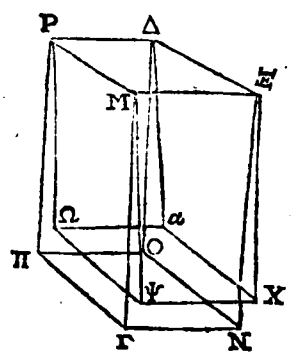
Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΖΕ, ΒΑ, ΗΑ, ΚΘ, ΞΝ, ΔΟ, ΜΓ, ΡΠ πρὸς ὀρθὰς τὰ βάσεσιν αὐτῶν, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Ζ, Η, Β, Κ, Ξ, Μ, Δ, Ρ σημείων ἐπὶ τὰς τῶν ΕΘ, ΝΠ βάσεων ἐπιπέδοις κάθετοι, καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ τὰ Σ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, α, Ω σημεῖα, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ΖΦ, ΞΩ στερεά· λέγω ὅτι καὶ ἴσων ὄντων τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν ἕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος. ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἀλλὰ τῷ μὲν ΑΒ τὸ ΒΤ ἐστιν ἴσον, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆ ΖΚ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, τὸ δὲ ΔΓ στερεὸν τῷ ΔΨ ἴσον, ἐπί τε πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆ ΞΡ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν· καὶ τὸ ΒΤ ἄρα στερεὸν τῷ ΔΨ στερεῷ ἴσον ἐστί. τὰ δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων, ὧν τὰ ὕψη πρὸς ὀρθὰς εἰσὶ τοῖς βάσεσιν αὐτῶν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν ἕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ ὕψος. ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΚ βάσις τῆ ΕΘ βάσει, ἡ δὲ ΞΡ βάσις τῆ ΝΠ βάσει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν ἕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν ΔΨ, ΒΤ στερεῶν καὶ τῶν ΔΓ, ΒΑ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν ἕτως τὸ τοῦ ΔΓ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΑ στερεοῦ ὕψος· τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν ἄρα παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.



ΠΑΛΙΝ δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν ἕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν ἕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος, ἴση δὲ ἡ μὲν ΕΘ βάσις τῆ ΖΚ βάσει, ἡ δὲ ΝΠ τῆ ΞΡ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν ἕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν καὶ τῶν ΒΤ, ΔΨ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν ἕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος· τῶν ΒΤ, ΔΨ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων τὰ ὕψη πρὸς ὀρθάς εἰσι τοῖς βάσεσιν αὐτῶν, ἀντιπεπόνθασι δὲ αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα τὸ ΒΤ στερεὸν τῷ ΔΨ στερεῷ. ἀλλὰ τῷ μὲν ΒΤ

Non ſint autem inſiſtentes ΖΒ, ΒΛ, ΗΑ, ΚΘ, ΞΝ, ΔΟ, ΜΓ, ΡΠ ad rectos angulos baſibus ipſorum, & [per 11. 11.] à punctis Ζ, Η, Β, Κ, Ξ, Μ, Δ, Ρ ad plana baſium ΕΘ, ΝΠ ducantur perpendiculares, quæ planis in punctis Σ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, α, Ω occurrant, & compleantur ſolida ΖΦ, ΞΩ: dico & ſic æqualibus exiſtentibus ſolidis ΑΒ, ΓΔ baſes eſſe reciproce proportionales altitudinibus; & ut ΕΘ baſis ad baſim ΝΠ ita eſſe altitudinem ſolidi ΓΔ ad ſolidi ΑΒ altitudinem. quoniam enim ſolidum ΑΒ ſolido ΓΔ eſt æquale, ſolido autem ΑΒ [per 30. 11.] æquale eſt ſolidum ΒΤ; in eadem namque ſunt baſi ΖΚ & eadem altitudine & illorum inſiſtentes non ſunt in eiſdem rectis lineis; & ſolidum ΔΓ eſt æ- ſolido ΔΨ, in eadem enim rurſus ſunt baſi ΞΡ & eadem altitudine & illorum inſiſtentes non ſunt in eiſdem rectis lineis: erit & ſolidum ΒΤ ſolido ΔΨ æquale. æqualium autem ſolidorum parallelepipedorum, quorum altitudines baſibus ipſorum ſunt ad rectos angulos, baſes [per part. prior. hujus] ſunt reciproce proportionales altitudinibus: eſt igitur ut ΖΚ baſis ad baſim ΞΡ ita altitudo ſolidi ΔΨ ad altitudinem ſolidi ΒΤ. atque [per 24. 11.] eſt baſis quidem ΖΚ baſi ΕΘ æqualis, baſis vero ΞΡ æqualis baſi ΝΠ: quare ut ΕΘ baſis ad baſim ΝΠ ita eſt altitudo ſolidi ΔΨ ad ſolidi ΒΤ altitudinem. eædem autem ſunt altitudines ſolidorum ΔΨ, ΒΤ quæ ſolidorum ΔΓ, ΒΑ: eſt igitur ut ΕΘ baſis ad baſim ΝΠ ita ſolidi ΔΓ altitudo ad altitudinem ſolidi ΒΑ: ergo ſolidorum parallelepipedorum ΑΒ, ΓΔ baſes ſunt reciproce proportionales altitudinibus.



Rursus ſolidorum parallelepipedorum ΑΒ, ΓΔ baſes ſint reciproce proportionales altitudinibus, ſitque ut ΕΘ baſis ad baſim ΝΠ ita altitudo ſolidi ΓΔ ad ſolidi ΑΒ altitudinem: dico ſolidum ΑΒ ſolido ΓΔ æquale eſſe.

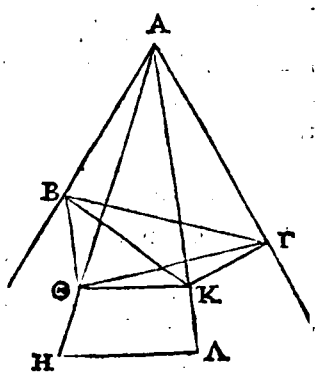
Iiſdem namque conſtructis, quoniam ut ΕΘ baſis ad baſim ΝΠ ita ſolidi ΓΔ altitudo ad altitudinem ſolidi ΑΒ; & baſis quidem ΕΘ eſt æqualis baſi ΖΚ, ΝΠ vero ipſi ΞΡ: erit ut ΖΚ baſis ad baſim ΞΡ ita altitudo ſolidi ΓΔ ad ſolidi ΑΒ altitudinem. eædem autem ſunt altitudines ſolidorum ΑΒ, ΓΔ quæ ipſorum ΒΤ, ΔΨ: eſt igitur ut ΖΚ baſis ad baſim ΞΡ ita ſolidi ΔΨ altitudo ad altitudinem ſolidi ΒΤ: quare ſolidorum parallelepipedorum ΒΤ, ΔΨ baſes ſunt reciproce proportionales altitudinibus. quorum autem ſolidorum parallelepipedorum altitudines ſunt ad rectos angulos baſibus ipſorum, & baſes reciproce proportionales altitudinibus, ea [per part. prior. hujus] inter ſe ſunt æqualia: ergo ΒΤ ſolidum ſolido ΔΨ eſt æquale. ſed [per 30. 11.] ſolido quidem ΒΤ

æquale eſt ſolidum BA, etenim in eadem ſunt baſi ZK & eadem altitudine & illorum inſiſtentes non ſunt in eiſdem rectis lineis; ſolidum vero ΔΨ eſt æquale ſolido ΔΓ, ſiquidem in eadem ſunt baſi ΞP & eadem altitudine & illorum inſiſtentes non in eiſdem rectis lineis: ergo & ſolidum AB ſolido ΓΔ eſt æquale. quod erat demonſtrandum.

Prop. XXXV. Theor.

Si ſint duo anguli plani æquales, & in ipſorum verticibus rectæ ſublimes conſtituantur, quæ cum rectis lineis à principio poſitis angulos contineant æquales, alterum alteri; in ſublimibus autem ſumantur quævis puncta, atque ab ipſis ad plana, in quibus ſunt anguli primi, perpendiculares ducantur; & à punctis, quæ à perpendicularibus fiunt in planis, ad primos angulos jungantur rectæ lineæ: cum ſublimibus æquales angulos continebunt.

SInt duo anguli rectilinei æquales BAΓ, EΔZ, & à punctis A, Δ ſublimes rectæ lineæ AH, ΔM conſtituantur, quæ cum rectis lineis à principio poſitis æquales angulos contineant, alterum alteri, angulum quidem MΔE æqualem angulo HAB, angulum vero MΔZ angulo HAΓ æqualem; & ſumantur in ipſis AH, ΔM quævis puncta H, M, à quibus ad plana per BAΓ, EΔZ ducantur perpendiculares HΛ, MN, occurrentes planis in punctis Λ, N, & ΛA, NΔ jungantur: dico angulum HAΛ angulo MΔN æqualem eſſe.

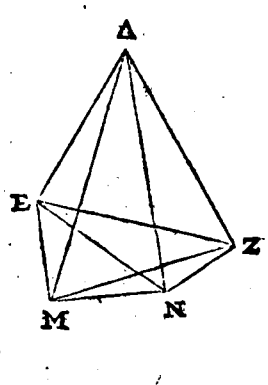


Ponatur ipſi ΔM æqualis AΘ, & per Θ ipſi HΛ parallela ducatur ΘK. eſt autem HΛ perpendicularis ad planum per BAΓ; ergo [per 8. 11.] & ΘK ad planum per BAΓ perpendicularis erit. ducantur à punctis K, N ad rectas lineas AB, AΓ, ΔZ, ΔE perpendiculares KB, KΓ, NZ, NE; & ΘΓ, ΓB, MZ, ZE jungantur. quoniam igitur [per 47. 1.] quadratum ex ΘA æquale eſt quadratis ex ΘK, KA; quadrato autem ex KA æqualia ſunt quadrata ex KΓ, ΓA; erit quadratum ex ΘA quadratis ex ΘK, KΓ, ΓA æquale. quadratis autem ex ΘK, KΓ æquale eſt quadratum ex ΘΓ: quadratum igitur ex ΘA quadratis ex ΘΓ, ΓA æquale erit: & idcirco angulus ΘΓA eſt rectus. eadem ratione & angulus ΔZM re-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

Ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπὶ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐπιζαθῶσιν ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἐπὶ δὲ τῶν μετεώρων ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, κάθετοι ἀχθῶσιν, ἀπὸ δὲ τῶν γενομένων σημείων ἐπὶ τῶν καθέτων ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἐπὶ τὰς ἐξ ἀρχῆς γωνίας ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι· ἴσας γωνίας περιέξουσι μετὰ τῶν μετεώρων.

Ἔστωσαν δύο γωνίαι εὐθύγραμμοι ἴσαι, αἱ ὑπὸ BAΓ, EΔZ, ἀπὸ δὲ τῶν A, Δ σημείων μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστάτωσαν αἱ AH, ΔM ἴσας περιέχουσαι γωνίας μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ MΔE τῇ ὑπὸ HAB, τὴν δὲ ὑπὸ MΔZ τῇ ὑπὸ HAΓ, καὶ εἰλήφθωσαν ἐπὶ τῶν AH, ΔM τυχόντα σημεῖα, τὰ H, M, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ H, M σημείων ἐπὶ τὸ διὰ τῶν BAΓ, EΔZ ἐπίπεδα κάθετοι αἱ HΛ, MN, καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ Λ, N, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛA, NΔ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ HAΛ γωνία τῇ ὑπὸ MΔN γωνίᾳ.



Κείσθω τῇ ΔM ἴση ἡ AΘ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ σημείου τῇ HΛ παράλληλος ἡ ΘK. ἡ δὲ HΛ κάθετος ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν BAΓ ἐπίπεδον· καὶ ἡ ΘK ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν BAΓ ἐπίπεδον. ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν K, N σημείων ἐπὶ τὰς AB, AΓ, ΔZ, ΔE εὐθείας κάθετοι αἱ KB, KΓ, NZ, NE, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΓ, ΓB, MZ, ZE. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘA ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘK, KA, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς KA ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν KΓ, ΓA· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘA ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘK, KΓ, ΓA. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΘK, KΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΘA ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΓ, ΓA· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΓA γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΔZM γωνία

ὀρθή

ὀρθὴ ἐστὶ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΜ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ὑπὸ ΜΔΖ ἴση· δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΜΔΖ, ΘΑΓ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν ΑΘ τῇ ΔΜ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· ἴση ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΔΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση ἐστίν. ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΒ, ΜΕ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΚ, ΚΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΚ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΚ, ΚΘ ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ. ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΚ, ΚΘ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΘ, ὀρθὴ γάρ ἡ ὑπὸ ΘΚΒ γωνία, διὰ τὸ καὶ τὴν ΘΚ κάθετον εἶναι ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΘ· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΘ γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΕΜ γωνία ὀρθή ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΘ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ ΕΔΜ, ἐπεὶ γάρ, καὶ ἔστιν ἡ ΑΘ τῇ ΔΜ ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΔΕ· δύο δὴ αἱ ΓΑ, ΑΒ δυσὶ ταῖς ΖΔ, ΔΕ ἴσαι εἰσίν· ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΑΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΔΕ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστί. καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΕ. ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΓΚ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΔΖΝ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΚ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΖΝ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΝ ἴση ἐστίν. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΓΒΚ, ΖΕΝ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν· ἴση ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΖΝ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΔΖ ἴση, δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΚ δυσὶ ταῖς ΔΖ, ΖΝ ἴσαι εἰσὶ καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΚ βάσει τῇ ΔΝ ἴση ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΘ τῇ ΔΜ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΜ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΚ, ΚΘ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΚΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΔΜ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΔΝ, ΝΜ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΔΝΜ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΚ, ΚΘ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΝ, ΝΜ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΝ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ· ἴση ἄρα ἡ ΘΚ τῇ ΜΝ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΘΑ, ΑΚ δυσὶ ταῖς ΜΔ, ΔΝ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΘΚ βάσει τῇ ΝΜ ἐδείχθη ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΚ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΜΔΝ ἐστὶν ἴση. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ctus est: ergo angulus ΑΓΘ ipsi ΔΖΜ est æqualis. est autem & ΘΑΓ angulus æqualis angulo ΜΔΖ; duo igitur triangula sunt ΜΔΖ, ΘΑΓ duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulorum subtenditur; videlicet [per constr.] ΑΘ ipsi ΔΜ; ergo [per 26. 1.] & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, alterum alteri: quare ΑΓ est æqualis ΔΖ. similiter demonstrabimus & ΑΒ ipsi ΔΕ æquale esse. jungantur ΘΒ, ΜΕ: & quoniam quadratum ex ΑΘ est æquale quadratis ex ΑΚ, ΚΘ; quadrato autem ex ΑΚ æqualia sunt quadrata ex ΑΒ, ΒΚ: erunt quadrata ex ΑΒ, ΒΚ, ΚΘ quadrato ex ΑΘ æqualia. sed quadratis ex ΒΚ, ΚΘ æquale est ex ΒΘ quadratum; rectus enim angulus est ΘΚΒ, propterea quod ΘΚ perpendicularis est ad subjectum planum: quadratum igitur ex ΑΘ æquale est quadratis ex ΑΒ, ΒΘ: quare angulus ΑΒΘ rectus est. eadem ratione & angulus ΔΕΜ est rectus. est autem & ΒΑΘ angulus æqualis angulo ΕΔΜ, ita enim ponitur; at vero ΑΘ æqualis ΔΜ: ergo & ΑΒ ipsi ΔΕ est æqualis. quoniam igitur ΑΓ quidem est æqualis ΔΖ, ΑΒ vero ipsi ΔΕ; adeoque duæ ΓΑ, ΑΒ duabus ΖΔ, ΔΕ sunt æquales. sed & angulus ΓΑΒ angulo ΖΔΕ æqualis: basis igitur ΒΓ [per 4. 1.] basi ΕΖ æqualis est. & triangulum triangulo, & reliqui anguli reliquis æquales sunt: ergo angulus ΑΓΒ æqualis est angulo ΔΖΕ. est autem [per constr.] & rectus ΑΓΚ æqualis recto ΔΖΝ: quare & reliquus ΒΓΚ reliquo ΕΖΝ est æqualis. eadem ratione & ΓΒΚ angulus est æqualis angulo ΖΕΝ. itaque ΓΒΚ, ΖΕΝ sunt duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, quod æqualibus adjacet angulis, sc. ΒΓ ipsi ΕΖ: ergo [per 26. 1.] & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt: æqualis igitur est ΓΚ ipsi ΖΝ. est autem & ΑΓ ipsi ΔΖ æqualis; quare duæ ΑΓ, ΓΚ duabus ΔΖ, ΖΝ æquales sunt, & rectos continent angulos: basis igitur ΑΚ [per 4. 1.] est æqualis basi ΔΝ. & cum ΑΘ sit æqualis ΔΜ; erit & quadratum ex ΑΘ quadrato ex ΔΜ æquale. sed [per 47. 1.] quadrato ex ΑΘ æqualia sunt ex ΑΚ, ΚΘ quadrata, etenim rectus est angulus ΑΚΘ; quadrato autem ex ΔΜ æqualia sunt quadrata ex ΔΝ, ΝΜ, quia angulus ΔΝΜ est rectus: quadrata igitur ex ΑΚ, ΚΘ quadratis ex ΔΝ, ΝΜ sunt æqualia; ex quibus quadratum ex ΑΚ æquale est quadrato ex ΔΝ; ergo reliquum ex ΚΘ quadratum reliquo quadrato ex ΝΜ est æquale: & ideo recta linea ΘΚ ipsi ΜΝ æqualis. & cum duæ ΘΑ, ΑΚ duabus ΜΔ, ΔΝ æquales sint, altera alteri, & basis ΘΚ basi ΝΜ ostensa sit æqualis; [per 8. 1.] angulus ΘΑΚ angulo ΜΔΝ æqualis erit. quod erat dem.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι ἴσαι, ἀφαφθῶσι δὲ ἀπ' αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἴσαι ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ,

Corollarium.

Ex hoc vero manifestum est, si sint duo anguli plani rectilinei æquales, ab ipsis autem constituantur sublimes rectæ lineæ æquales, quæ cum rectis lineis à principio positis æquales contineant angulos, alterum alteri, perpendiculares,

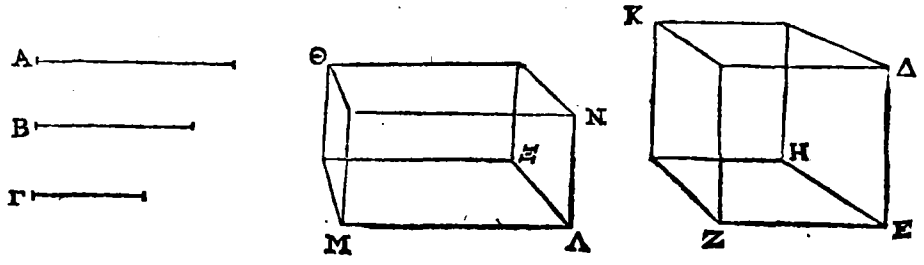
culares, quæ ab ipſis ad plana in quibus ſunt primi anguli ducuntur, inter ſe æquales eſſe.

PROP. XXXVI. THEOR.

Si tres rectæ lineæ proportionales ſint; ſolidum parallelepipedum quod à tribus fit æquale eſt ſolido parallelepipedo quod fit à media, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto.

SInt tres rectæ lineæ proportionales A, B, Γ, ſitque ut A ad B ita B ad Γ: dico ſolidum quod fit ex ipſis A, B, Γ æquale eſſe ſolido quod fit ex B, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto.

Exponatur ſolidus angulus ad E contentus ſub tribus angulis planis ΔEH, HEZ, ZEΔ; & ipſi quidem B ponatur æqualis unaquæque ipſarum ΔE, HE, EZ, & ſolidum parallelepipedum EK compleatur; ipſi vero A ponatur æqualis ΛM, & ad rectam lineam ΛM & ad punctum in ipſa Λ [per 26. 11.] conſtituatur angulo ſolido ad E æqualis angulus



contentus ſub NΛΞ, ΞΛM, MΛN, & ponatur ipſi quidem B æqualis ΛΞ, ipſi vero Γ æqualis ΛN. quoniam igitur eſt ut A ad B ita B ad Γ, æqualis autem eſt A ipſi ΛM, & B unicuique ipſarum ΛΞ, EZ, EH, EΔ, & Γ ipſi ΛN; erit ut ΛM ad EZ ita ΔE ad ΛN: & circum æquales angulos MΛN, ΔEZ latera ſunt reciproce proportionalia: ergo [per 14.6.] MN parallelogrammum parallelogrammo ΔZ eſt æquale. & quoniam duo anguli plani rectilinei ΔEZ, NΛM, æquales ſunt & in ipſis ſublimes rectæ conſtituuntur ΛΞ, EH æquales inter ſe, & cum rectis lineis à principio poſitis æquales continentes angulos, alterum alteri; erunt [per cor. 35. 11.] perpendiculares, quæ à punctis H, Ξ ad plana per NΛM, ΔEZ ducuntur, inter ſe æquales: ergo ſolida ΛΘ, EK in eadem ſunt altitudine. quæ vero in æqualibus baſibus ſunt ſolida parallelepipeda, & in eadem altitudine [per 31. 11.] inter ſe ſunt æqualia: ergo ſolidum Θ Λ æquale eſt ſolido EK. atque Θ Λ quidem eſt ſolidum, quod fit à tribus A, B, Γ; ſolidum vero EK quod fit ex B: ergo ſolidum quod fit ex ipſis A, B, Γ æquale eſt ſolido quod fit ex B, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto.

Si igitur tres rectæ lineæ proportionales ſint, ſolidum parallelepipedum quod à tribus fit æquale eſt ſolido parallelepipedo quod fit à media, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ'.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ἀπ' αὐτῶν τρισὶν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσης στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ, ἰσοπλεύρῳ μέν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ A, B, Γ, ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Γ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῶν A, B, Γ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ B στερεῷ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἐκκείσθω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ E περιεχομένη ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ ΔEH, HEZ, ZEΔ, καὶ κείσθω τῇ μὲν B ἴση ἑκάστη τῶν ΔE, HE, EZ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ EK στερεὸν παραλληλεπίπεδον, τῇ δὲ A κείσθω ἴση ἡ ΛM, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΛM εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Λ τῇ πρὸς τῷ E στερεᾷ γωνίᾳ ἴση περιεχο-

μένη ὑπὸ τῶν ΝΛΞ, ΞΛM, MΛN, καὶ κείσθω τῇ μὲν B ἴση ἡ ΛΞ, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ ΛN. καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ μὲν A τῇ ΛM, ἡ δὲ B ἑκάστη τῶν ΛΞ, EZ, EH, EΔ, ἡ δὲ Γ τῇ ΛN· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΛM πρὸς τὴν EZ οὕτως ἡ ΔE πρὸς τὴν ΛN. καὶ περὶ ἴσας γωνίας, τὰς ὑπὸ MΛN, ΔEZ αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν· ἴσον ἄρα τὸ MN παραλληλόγραμμον τῷ ΔZ παραλληλογράμμῳ. καὶ ἐπεὶ δύο γωνίαι ἐπιπέδοι εὐθυγράμμοι ἴσαι εἰσὶν αἱ ὑπὸ ΔEZ, ΝΛM, καὶ ἐπ' αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστήκασιν αἱ ΛΞ, EH ἴσαι τε ἀλλήλαις καὶ ἴσας γωνίας περιέχουσι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· αἱ ἄρα ἀπὸ τοῦ H, Ξ σημείων κάθετοι, ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ διὰ τῶν ΝΛM, ΔEZ ἐπίπεδα, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὥστε τὰ Λ Θ, EK στερεὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐστί. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα τὸ Θ Λ στερεὸν τῷ EK στερεῷ. καὶ ἔστι τὸ μὲν Θ Λ τὸ ἀπὸ τῶν A, B, Γ στερεόν, τὸ δὲ EK τὸ ἀπὸ τοῦ B στερεόν· τὸ ἄρα ἀπὸ τῶν A, B, Γ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ B στερεῷ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἐὰν ἄρα τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ἀπὸ τῶν τριῶν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσης στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ'.

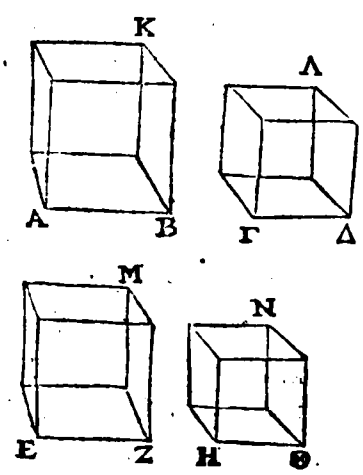
Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι· καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν σερεὰ παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται. καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν σερεὰ παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ· καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Prop. XXXVII. Theor.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales ſint; & quæ ab ipſis fiunt ſolida parallelepipeda ſimilia & ſimiliter deſcripta proportionalia erunt. & ſi quæ ab ipſis fiunt ſolida parallelepipeda ſimilia & ſimiliter deſcripta proportionalia ſint; & ipſæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα παραλληλεπίπεδα τὰ ΚΑ, ΛΓ, ΜΕ, ΝΗ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΛΓ οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶ τὸ ΚΑ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τῷ ΛΓ ὅμοιον, τὸ ΚΑ ἄρα πρὸς τὸ ΛΓ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. ἔστιν δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΚ πρὸς τὸ ΛΓ οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ.



Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ ΛΓ στερεὸν οὕτως τὸ ΜΕ στερεὸν πρὸς τὸ ΝΗ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

Ἐπεὶ γὰρ πάλιν τὸ ΑΚ πρὸς τὸ ΛΓ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, ἔχει δὲ καὶ τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καί ἐστιν ὡς τὸ ΑΚ πρὸς τὸ ΛΓ οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι· καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν σερεὰ παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται. καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν σερεὰ παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ· καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SInt quatuor rectæ lineæ proportionales AB, ΓΔ, EZ, HΘ, ſitque ut AB ad ΓΔ ita EZ ad HΘ, & deſcribantur ab ipſis AB, ΓΔ, EZ, HΘ ſimilia & ſimiliter poſita ſolida parallelepipeda KA, ΛΓ, ME, NH: dico ut KA ad ΛΓ ita eſſe ME ad NH.

Quoniam enim ſolidum parallelepipedum KA ſimile eſt ipſi ΛΓ, habebit [per 33. 11.] KA ad ΛΓ triplicatam rationem ejus quam AB habet ad ΓΔ. eadem ratione & ſolidum ME ad ipſum NH triplicatam rationem habebit ejus quam habet EZ ad HΘ. atque [ex hyp.] ut AB ad ΓΔ ita EZ ad HΘ: ut igitur AK ad ΛΓ ita ME ad NH.

SED ſit ut ſolidum AK ad ſolidum ΛΓ ita ME ſolidum ad ſolidum NH: dico ut recta linea AB ad rectam ΓΔ ita eſſe rectam EZ ad ipſam HΘ.

Quoniam enim rurſus AK ad ΛΓ triplicatam rationem habet ejus quam AB habet ad ΓΔ; habet autem & ME ad NH triplicatam rationem ejus quam EZ ad HΘ; atque ut AK ad ΛΓ ita ME ad NH: erit ut AB ad ΓΔ ita EZ ad HΘ.

Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales ſint; & quæ ab ipſis fiunt ſolida parallelepipeda ſimilia & ſimiliter deſcripta proportionalia erunt. & ſi quæ ab ipſis fiunt ſolida parallelepipeda ſimilia & ſimiliter deſcripta proportionalia ſint; & ipſæ rectæ lineæ proportionales erunt. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη'.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν ᾖ, καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐν ἑνὶ τῶν στερεοῦ παραλληλεπιπέδου ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ· ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν πεσεῖται τῶν ἐπιπέδων ἡ ἀχθεῖσα κάθετος.

Prop. XXXVIII. Theor.

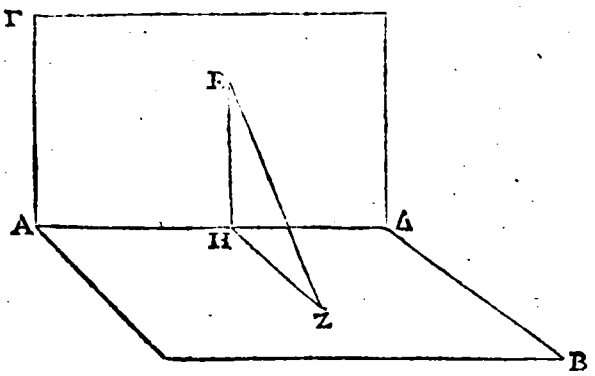
Si planum ad planum rectum ſit; & ab aliquo puncto eorum quæ ſunt in uno plano ad alterum planum perpendicularis ducatur: ea in communem planorum ſectionem cadet.

Ἐπίπεδον γὰρ τὸ ΓΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΑΔ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τοῦ ΓΔ ἐπιπέδου τυχὸν σημεῖον τὸ Ε·

PLanum enim ΓΔ ad planum AB rectum ſit, communis autem eorum ſectio ſit AΔ, & in ipſo ΓΔ plano quodvis punctum E ſumatur:

dico perpendicularem, quæ à puncto E ad planum AB ducitur, cadere in ipsam AΔ.

Non enim, sed si fieri potest, cadat extra, ut EZ, & plano AB in puncto Z occurrat: à puncto autem Z [per 10. 1.] ad ΔA in plano AB perpendicularis ducatur ZH, quæ quidem [per 4. def. 11.] & plano ΓΔ ad rectos angulos erit; & EH jungatur. quoniam igitur ZH plano ΓΔ est ad rectos angulos, contingit autem ipsam recta linea EH, quæ est in eodem ΓΔ plano: erit [per 3. def. 11.] angulus ZHE rectus. sed & EZ plano AB ad rectos angulos est; rectus igitur est angulus EZH. quare trianguli EZH duo anguli duobus rectis sunt æquales; quod [per 17. 1.] est absurdum: non igitur à puncto E ad AB planum perpendicularis ducta extra rectam lineam ΔA cadet: cadet igitur in ipsam AΔ.



Si igitur planum ad planum rectum sit, & ab aliquo puncto eorum quæ sunt in uno plano ad alterum planum perpendicularis ducatur: ea in communem planorum sectionem cadet. quod erat demonstrandum.

λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ E ἐπὶ τὸ AB ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὴν ΔA πεσεῖται.

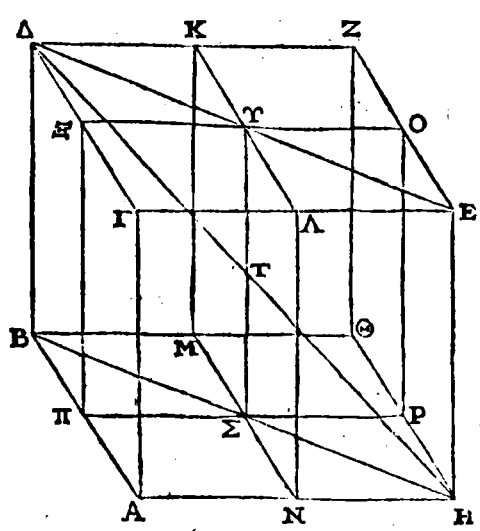
Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ EZ, καὶ συμβαλλέτω τῷ AB ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Z σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τινὰ ΔA ἐν τῷ AB ἐπιπέδῳ κάθετος ἤχθω ἡ ZH, ἥτις καὶ τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ EH. ἐπεὶ οὖν ἡ ZH τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ EH, ἔστιν ἐν τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ZHE γωνία. ἀλλὰ δὴ καὶ ἡ EZ τῷ AB ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ἡ ἄρα ὑπὸ EZH ὀρθή ἐστι. τριγώνου δὴ τοῦ EZH αἱ δύο γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ E ἐπὶ τὸ AB ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τῆς ΔA· ἐπὶ τινὰ ΔA ἄρα πεσεῖται.

Εἰ ἄρα ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν ᾖ, καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ· ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων ἡ ἀγομένη κάθετος πεσεῖται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XXXIX. THEOR.

Si in solido parallelepipedo oppositorum planorum latera secentur bifariam, per sectiones vero plana ducantur; communis planorum sectio & solidi parallelepipedi diameter se mutuo bifariam secabunt.

IN solido enim parallelepipedo AZ oppositorum planorum ΓZ, AΘ latera bifariam secentur in punctis K, Λ, M, N, Ξ, Π, O, P, & per sectiones plana ducantur KN, ΞP, communis autem planorum sectio sit TΣ, & solidi parallelepipedi diameter ΔH: dico TΣ, ΔH sese bifariam secare; hoc est, TT quidem ipsi TΣ; ΔT vero ipsi TH æqualem esse.



Jungantur enim ΔT, TE, BΣ, ΣH. quoniam igitur ΔΞ parallela est ipsi OE, alterni anguli ΔΞT, TOE [per 29. 1.] inter se æquales sunt. & quoniam ΔΞ quidem est æqualis OE; ΞT vero ipsi TO, & angulos æquales continent; erit [per 4. 1.] basis ΔT æqualis basi TE, & triangulum ΔΞT triangulo OE, ἡ δὲ ΞT τῇ TO, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΔT βάσει τῇ TE ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΔΞT τρίγωνον

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ'.

Ἐὰν στερεοῦ παραλληλεπιπέδου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσι, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ· ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἡ τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου διάμετρος δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας.

Στερεοῦ γὰρ παραλληλεπιπέδου τοῦ AZ τὰ ἀπεναντίον ἐπίπεδα τὰ ΓZ, AΘ αἱ πλευραὶ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ K, Λ, M, N, Ξ, Π, O, P σημεῖα, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθωσαν τὰ KN, ΞP, κοινὴ δὲ τομὴ ἐπιπέδων τῶν ἐπιπέδων ἔστω ἡ TΣ, τοῦ δὲ AB στερεοῦ παραλληλεπιπέδου διαγώνιος ἡ ΔH· λέγω ὅτι αἱ TΣ, ΔH δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας, τουτέστιν ὅτι ἡ μὲν TT τῇ TΣ ἴση ἐστὶν, ἡ δὲ ΔT τῇ TH.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΔΥ, TE, BΣ, ΣH. καὶ ἐπεὶ παραλληλός ἐστιν ἡ ΔΞ τῇ OE, αἱ ἐναλλὰξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΞT, TOE ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΞ τῇ OE, ἡ δὲ ΞT τῇ TO, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΔT βάσει τῇ TE ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΔΞT τρίγωνον

γωνον τῷ ΤΟΕ τριγώνῳ ἴσον ἐστί, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΞΤΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΟΤΕ. διὰ δὴ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΣΗ εὐθεῖά ἐστιν ἴση ἡ ΒΣ τῇ ΣΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΑ τῇ ΔΒ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, ἀλλὰ ἡ ΓΑ καὶ τῇ ΕΗ ἴση τε ἐστὶ καὶ παράλληλος· καὶ ἡ ΔΒ ἄρα τῇ ΕΗ ἴση τε ἐστὶ καὶ παράλληλος. ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΗΒ· παράλληλος ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΒΗ. καὶ εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ Δ, Υ, Η, Σ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΗ, ΥΣ· ἐν ἑνὶ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ αἱ ΔΗ, ΥΣ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΒΗ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΤ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΠΤ, ἐναλλαξ γάρ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΤΥ τῇ ὑπὸ ΗΤΣ ἴση· δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΔΤΥ, ΗΤΣ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν ΔΤ τῇ ΗΣ, ἡμίσεια γάρ εἰσι τῶν ΔΕ, ΒΗ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξει· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΔΤ τῇ ΤΗ, ἡ δὲ ΥΤ τῇ ΤΣ.

Ἐὰν ἄρα στερεὸν παραλληλεπίπεδον τμηθῇ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰς ἀπεναντίον ἐπιπέδων, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

gulo ΤΟΕ, & reliqui anguli reliquis angulis æquales: angulus igitur ΞΤΔ eſt æqualis angulo ΟΤΕ, & ob id [per 14. 1.] ΔΤΕ eſt recta linea: eademque ratione & ΒΣΗ recta eſt, atque ΒΣ æqualis ipſi ΣΗ. & quoniam [per 34. 1.] ΓΑ ipſi ΔΒ æqualis eſt & parallela, ſed & ΓΑ æqualis & parallela ipſi ΕΗ; erit & ΔΒ ipſi ΕΗ æqualis & [per 30. 1.] parallela. & ipſas conjungunt rectæ lineæ ΔΕ, ΒΗ: parallela igitur eſt [per 33. 1.] ΔΕ ipſi ΒΗ. & ſumpta ſunt in utraque ipſarum quædam puncta Δ, Υ, Η, Σ, & junctæ ſunt ΔΗ, ΥΣ: ergo [per 7. 11.] ΔΗ, ΥΣ in uno ſunt plano. quoniam igitur ΔΕ parallela eſt ipſi ΒΗ, erit [per 29. 1.] & ΕΔΤ angulus angulo ΒΗΤ æqualis, alterni enim ſunt. eſt autem & ΔΤΤ angulus [per 15. 1.] æqualis ipſi ΗΤΣ: duo igitur ſunt triangula ΔΤΤ, ΗΤΣ duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulorum ſubtenditur, videlicet ΔΤ ipſi ΗΣ; dimidia enim ſunt ipſorum ΔΕ, ΒΗ: ergo [per 26. 1.] & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt: quare ΔΤ quidem eſt æqualis ΤΗ, ΤΤ vero ipſi ΤΣ.

Si igitur in ſolido parallelepipedo, & quæ ſequuntur. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

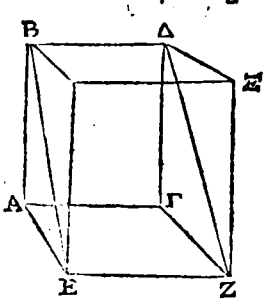
Ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσοῦψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου· ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα.

Prop. XL. Theor.

Si ſint duo priſmata æqualta, quorum unum quidem baſim habeat parallelogrammum, alterum vero triangulum, & parallelogrammum duplum ſit trianguli; æqualia erunt ipſa priſmata.

Ἔστω πρίσματα ἰσοῦψῆ τὰ ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚΛΜΝ, καὶ τὸ μὲν ἐχέτω βάσιν τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τὸ ΗΘΚ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ἔστω τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΘΚ τριγώνου· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα τῷ ΗΘΚΛΜΝ πρίσματι.

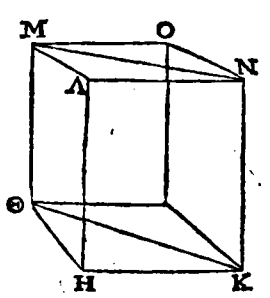
Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΑΞ, ΗΟ στερεά. καὶ ἐπεὶ διπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΘΚ τριγώνου, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ΘΚ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ ΗΘΚ τριγώνου· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΞ στερεὸν τῷ ΗΟ στερεῷ. καὶ ἔστι τοῦ μὲν ΑΞ στερεοῦ ἥμισυ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα, τοῦ δὲ ΗΟ στερεοῦ ἥμισυ τὸ ΗΘΚΛΜΝ πρίσμα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα τῷ ΗΘΚΛΜΝ πρίσματι.



Ἐὰν ἄρα ᾖ δύο πρίσματα ἰσοῦψῆ, καὶ τὰ ἑξῆς. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SInt priſmata æqualta ΑΒΓΔΕΖ, ΗΘΚΛΜΝ, & unum quidem baſim habeat parallelogrammum ΑΖ, alterum vero ΗΘΚ triangulum, & duplum ſit ΑΖ parallelogrammum trianguli ΗΘΚ: dico priſma ΑΒΓΔΕΖ priſmati ΗΘΚΛΜΝ æquale eſſe.

Compleantur enim ΑΞ, ΗΟ ſolida. & quoniam parallelogrammum ΑΖ trianguli ΗΘΚ eſt duplum, eſt autem [per 34. 1.] & ΘΚ parallelogrammum duplum trianguli ΗΘΚ; erit ΑΖ parallelogrammum parallelogrammo ΘΚ æquale. quæ vero in æqualibus ſunt baſibus ſolida parallelepipeda & eadem altitudine [per 31. 11.] inter ſe æqualia ſunt: æquale igitur ΑΞ ſolidum ſolido ΗΟ. atque eſt ſolidi quidem ΑΞ dimidium ΑΒΓΔΕΖ priſma, ſolidi vero ΗΟ dimidium priſma ΗΘΚΛΜΝ: ergo ΑΒΓΔΕΖ priſma priſmati ΗΘΚΛΜΝ eſt æquale.



Si igitur ſint duo priſmata æquealta, & quæ ſequuntur. quod erat demonſtrandum.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΥΟΔΕΚΑΤΟΝ,
Καὶ Στερεῶν δεύτερον.

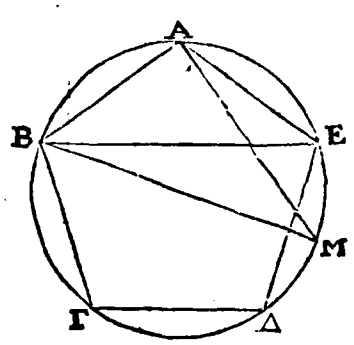
EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER DUODECIMUS,
Et Solidorum ſecundus.

PROP. I. THEOR.

Similia polygona circulis inſcripta inter ſe ſunt ut quadrata à diametris.

SINT circuli ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, & in ipſis ſimilia polygona ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ; diametri autem circulorum ſint ΒΜ, ΗΝ: dico ut quadratum ex ΒΜ ad quadratum ex ΗΝ ita eſſe ΑΒΓΔΕ polygonum ad polygonum ΖΗΘΚΛ.

Jungantur enim ΒΕ, ΑΜ, ΗΛ, ΖΝ. & quoniam polygonum ΑΒΓΔΕ ſimile eſt polygono ΖΗΘΚΛ, & [per 1. def. 6.] ΒΑΕ angulus angulo ΗΖΛ eſt æqualis, atque eſt ut ΒΑ ad ΑΕ ita ΗΖ ad ΖΛ: igitur ΒΑΕ, ΗΖΛ ſunt duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum ΒΑΕ angulo ΗΖΛ, circa æquales autem angulos latera proportionalia: quare [per 6. 6.] triangulum ΑΒΕ triangulo ΖΗΛ æquiangulum eſt; ac propterea angulus ΑΕΒ æqualis eſt angulo ΖΛΗ. ſed [per 21. 3.]

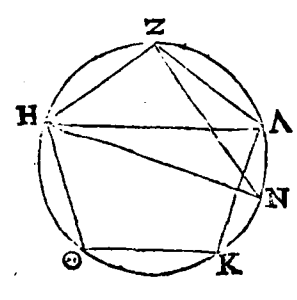


ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

ΕΣΤΩΣΑΝ κύκλοι οἱ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, καὶ ἐν αὐτοῖς ὅμοια πολύγωνα ἔστω τὰ ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν αἱ ΒΜ, ΗΝ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΜ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΝ τετράγωνον οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΑΜ, ΗΛ, ΖΝ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον τῷ ΖΗΘΚΛ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΛ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΛ· δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΒΑΕ, ΗΖΛ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, τὴν ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΗΖΛ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΗ. ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ



ὑπὸ ΑΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΜΒ ἴση ἐστίν, ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς περιφερείας βεβήκασιν. ἡ δὲ ὑπὸ ΖΛΗ τῇ ὑπὸ ΖΝΗ· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΜΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΝΗ ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΑΜ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΗΖΝ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΒΜ τρίγωνον τῷ ΖΗΝ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΜ πρὸς τὴν ΗΝ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΗΖ. ἀλλὰ μὴν τοῦ ΒΜ πρὸς τὴν ΗΝ λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ΒΜ τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΝ τετράγωνον, ὁ δὲ τοῦ ΒΑ πρὸς τὴν ΗΖ διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ΑΒΓΔΕ πολυγώνου πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τοῦ ΒΜ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ ΗΝ οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον.

Τὰ ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

angulus quidem AEB angulo AMB eſt æqualis, in eadem enim circumferentia conſiſtunt. angulus autem ZΛH æqualis eſt angulo ZNH: ergo & AMB angulus eſt æqualis angulo ZNH. eſt autem & [per 31.3.] rectus angulus BAM æqualis recto HZN: quare & reliquus reliquo æqualis: æquiangulum igitur eſt triangulum ABM triangulo ZHN: ergo [per 4.6.] ut BM ad HN ita BA ad HZ. ſed [per 20.6.] rationis quidem BM ad HN duplicata eſt ratio quadrati ex BM ad quadratum ex HN; rationis vero BA ad HZ duplicata eſt ratio ABΓΔE polygoni ad polygonum ZHΘKΛ: & igitur [per 11.5.] ut quadratum ex BM ad quadratum ex HN ita polygonum ABΓΔE ad ZHΘKΛ polygonum.

Quare ſimilia polygona circulis inſcripta inter ſe ſunt ut quadrata à diametris. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

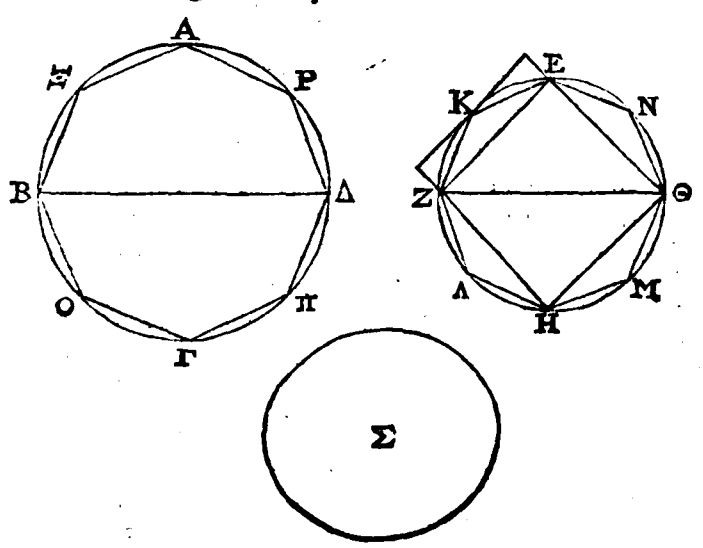
Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

PROP. II. THEOR.

Circuli inter ſe ſunt ut quadrata à diametris.

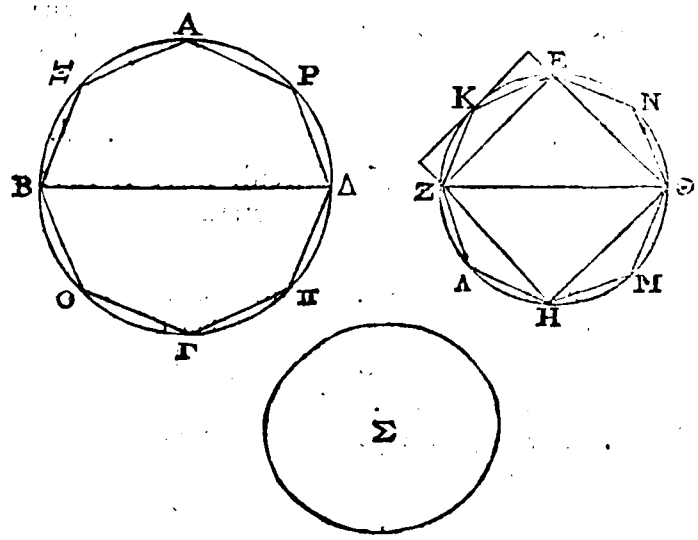
Ἐστωσαν κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, διάμετροι δὲ αὐτῶν ἔστωσαν αἱ ΒΔ, ΖΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, ἔστω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Σ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ δὴ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου διαγάγωμεν, τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου ἥμισύ ἐστι τὸ ΕΖΗΘ τετράγωνον. τοῦ δὲ περιγραφέντος τετραγώνου ἔλασσόν ἐστιν ὁ κύκλος· ὥστε τὸ ΕΖΗΘ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. τετμήσθωσαν δίχα αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ· καὶ ἑκάτερον ἄρα τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΘΜΗ, ΘΝΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου· ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Κ, Λ, Μ, Ν



Si enim non ita eſt; erit ut quadratum ex BΔ ad quadratum ex ZΘ ita circulus ABΓΔ vel ad ſpatium aliquod minus circulo EZHΘ vel ad majus. Sit primum ad minus, quod ſit Σ. & in circulo EZHΘ deſcribatur quadratum EZHΘ. itaque deſcriptum in circulo quadratum majus eſt dimidio circuli EZHΘ; quoniam ſi per puncta E, Z, H, Θ contingentes circulum ducamus, erit [per 47.1.&31.3.] deſcripti circa circulum quadrati dimidium quadratum EZHΘ. deſcripto autem circa circulum quadrato minor eſt circulus: ergo quadratum EZHΘ majus eſt dimidio circuli EZHΘ. ſecentur bifariam circumferentiæ EZ, ZH, HΘ, ΘE in punctis K, Λ, M, N; & EK, KZ, ZΛ, ΛH, HM, MΘ, ΘN, NE jungantur: unumquodque igitur triangulorum EKZ, ZΛH, ΘMH, ΘNE majus eſt dimidio ſegmenti circuli in quo conſiſtit; quoniam ſi per puncta K, Λ, M, N

contingentes circulum ducamus, & parallelogramma quæ ſuper rectis lineis ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ compleamus, erit [per 37. 1.] unumquodque triangulorum ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ dimidium parallelogrammi quod ad ipſum eſt. ſed ſegmentum minus eſt parallelogrammo: quare unumquodque triangulorum ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ majus eſt dimidio ſegmenti circuli in quo conſiſtit: reliquas igitur circumferentias bifariam ſecantes, & jungentes rectas lineas, atque hoc ſemper facientes, relinquemus tandem quædam circuli ſegmenta, quæ minora erunt exceſſu, quo circulus ΕΖΗΘ ipſum Σ ſpatium ſuperat. etenim oſtenſum eſt, in primo theoremate decimi libri, duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis, ſi à majori auferatur majus quam dimidium, & ab eo quod relinquitur rurſus majus quam dimidium, & hoc ſemper fiat, relinqui tandem magnitudinem aliquam, quæ minore magnitudine expoſita ſit minor. itaque relicta ſint ſegmenta circuli ΕΖΗΘ in rectis lineis ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ, quæ majora ſint exceſſu quo circulus ΕΖΗΘ ipſum Σ ſpatium ſuperat: ergo reliquum ΕΚΖΛΗΜΘΝ polygonum majus erit ſpatio Σ. deſcribatur etiam in ΑΒΓΔ circulo polygono ΕΚΖΛΗΜΘΝ ſimile polygonum ΑΞΒΟΓΠΔΡ: eſt igitur [per 1. 12.] ut quadratum ex ΒΔ ad quadratum ex ΖΘ ita polygonum ΑΞΒΟΓΠΔΡ ad ΕΚΖΛΗΜΘΝ polygonum. ſed [ex hypoth.] ut quadratum ex ΒΔ ad quadratum ex ΖΘ ita ΑΒΓΔ circulus ad ſpatium Σ: ergo & ut circulus ΑΒΓΔ ad ſpatium Σ ita polygonum ΑΞΒΟΓΠΔΡ ad ΕΚΖΛΗΜΘΝ polygonum, & permutando ut circulus ΑΒΓΔ ad polygonum quod in ipſo eſt ita ſpatium Σ ad polygonum ΕΚΖΛΗΜΘΝ. major autem eſt circulus ΑΒΓΔ eo qui in ipſo eſt polygono: quare & ſpatium Σ majus eſt polygono ΕΚΖΛΗΜΘΝ. ſed & [ex hyp.] minus; quod fieri non poteſt: non igitur eſt ut quadratum ex ΒΔ ad quadratum ex ΖΘ ita ΑΒΓΔ circulus ad ſpatium aliquod minus circulo ΕΖΗΘ. ſimiliter oſtendemus, neque eſſe ut quadratum ex ΖΘ ad quadratum ex ΒΔ ita circulum ΕΖΗΘ ad aliquod ſpatium minus circulo ΑΒΓΔ. Dico etiam neque eſſe ut quadratum ex ΒΔ ad quadratum ex ΖΘ ita circulum ΑΒΓΔ ad aliquod ſpatium majus circulo ΕΖΗΘ. ſi enim fieri poteſt,



σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, καὶ ἀναπληρώσωμεν τὰ ἀπὸ τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ εὐθειῶν παραλληλόγραμμα· ὥστε ἕκαστον τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνων ἥμισυ ἔσται τοῦ καθ' ἑαυτὸ παραλληλογράμμου. ἀλλὰ τὸ καθ' ἑαυτὸ τμῆμα ἔλαττόν ἐστι τοῦ παραλληλογράμμου· ὥστε ἕκαστον τῶν ΕΚΖ, ΖΛΗ, ΗΜΘ, ΘΝΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου· τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα τμήματα τοῦ κύκλου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ ΕΖΗΘ κύκλος τοῦ Σ χωρίου. ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ θεωρήματι τοῦ ι', ὅτι δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους. λελείφθω ἔστω, καὶ ἔστω τὰ ὑπὸ τῶν ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ τμήματα τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου ἐλάσσονα τοῦ ὑπεροχῆς ᾗ ὑπερέχει ὁ ΕΖΗΘ κύκλος τοῦ Σ χωρίου· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ Σ χωρίου. ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολυγώνῳ ὅμοιον πολύγωνον τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Σ χωρίον· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Σ χωρίον, οὕτως τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ἐν αὐτῷ πολύγωνον, οὕτως τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον. μεῖζων δὲ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τοῦ ἐν αὐτῷ πολυγώνου· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Σ χωρίον τοῦ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολυγώνου. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον. λέγω δὴ ὅτι οὐδ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον. εἰ γὰρ δυνατόν,

ἔστω

ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Σ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Ζ Θ πετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β Δ ἕτως τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ κύκλον· ἀλλ' ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ἕτως ὁ ΕΖΗΘ πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Ζ Θ πετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β Δ ἕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον, ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Β Δ πετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ζ Θ ἕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Β Δ πετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ζ Θ πετράγωνον ἕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον.

Οἱ ἄρα κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

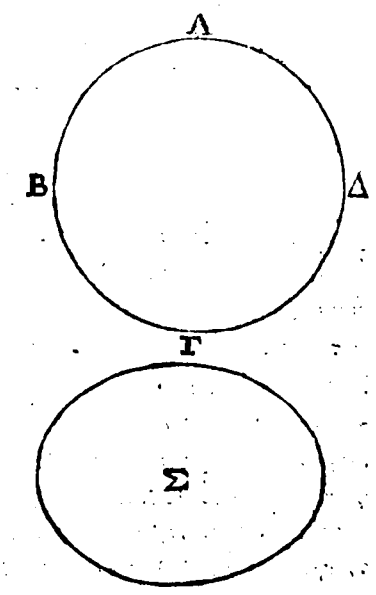
sit ad majus, nempe Σ; erit igitur invertendo ut quadratum ex Z Θ ad quadratum ex Β Δ ita ſpatium Σ ad ΑΒΓΔ circulum: ſed [ut infra oſtendetur] ut ſpatium Σ ad circulum ΑΒΓΔ ita circulus ΕΖΗΘ ad aliquod ſpatium minus circulo ΑΒΓΔ; ergo & ut quadratum ex Z Θ ad quadratum ex Β Δ ita ΕΖΗΘ circulus ad aliquod ſpatium minus circulo ΑΒΓΔ, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt: non igitur eſt ut quadratum ex Β Δ ad quadratum ex Z Θ ita circulus ΑΒΓΔ ad ſpatium aliquod majus ΕΖΗΘ circulo. oſtenſum autem eſt neque ad minus: quare ut quadratum ex Β Δ ad quadratum ex Z Θ ita erit ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ.

Circuli igitur inter ſe ſunt, ut quadrata à diametris. quod erat demonſtrandum.

ΛΗΜΜΑ.

Λέγω δή, ὅτι τοῦ Σ χωρίου μείζονος ὄντος τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, ἐστὶν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ἕτως ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον.

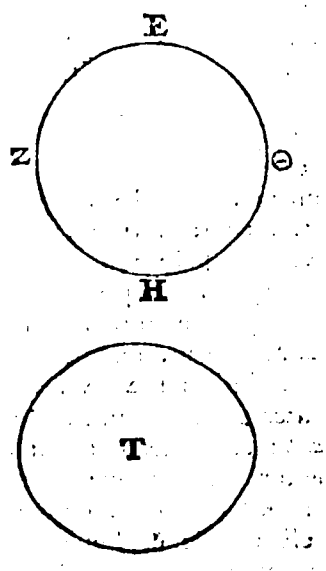
Γεγονέτω γὰρ ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ἕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον· λέγω ὅτι ἔλαττόν ἐστι τὸ Τ χωρίον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ἕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον ἕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον. μεῖζον δὲ τὸ Σ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· μεῖζον ἄρα καὶ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τοῦ Τ χωρίου· ὥστε ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ἕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον.



LEMMA.

Itaque dico, ſi ſpatium Σ ſit majus circulo ΕΖΗΘ, eſſe ut ſpatium Σ ad circulum ΑΒΓΔ ita circulum ΕΖΗΘ ad ſpatium aliquod circulo ΑΒΓΔ minus.

Fiat enim ut ſpatium Σ ad circulum ΑΒΓΔ ita ΕΖΗΘ circulus ad ſpatium Τ: dico ſpatium Τ circulo ΑΒΓΔ minus eſſe. quoniam enim eſt ut ſpatium Σ ad circulum ΑΒΓΔ ita ΕΖΗΘ circulus ad ſpatium Τ; erit permutando [per 16. 5.] ut ſpatium Σ ad circulum ΕΖΗΘ ita ΑΒΓΔ circulus ad ſpatium Τ. majus autem eſt [ex hyp.] ſpatium Σ circulo ΕΖΗΘ; ergo ΑΒΓΔ circulus ſpatio Τ eſt major; ac propterea ut ſpatium Σ ad circulum ΑΒΓΔ ita eſt ΕΖΗΘ circulus ad ſpatium aliquod circulo ΑΒΓΔ minus.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Πᾶσα πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ· καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα,

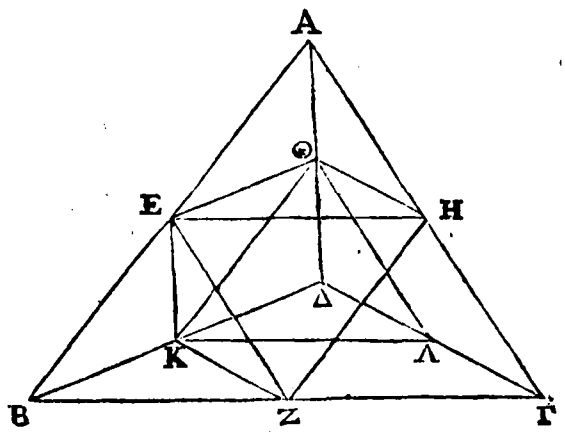
PROP. III. THEOR.

Omnis pyramis triangularem habens baſim dividitur in duas pyramides æquales & ſimiles inter ſe quæ triangulares baſes habent, eaſque ſimiles toti; necnon in duo priſmata æqualia,

æqualia, quæ dimidio quidem totius pyramidis ſunt majora.

SIT pyramis, cujus baſis quidem ΑΒΓ triangulum, vertex autem punctum Δ: dico pyramidem ΑΒΓΔ dividi in duas pyramides æquales & ſimiles inter ſe triangulares baſes habentes, ſimileſque toti; necnon in duo priſmata æqualia, duo vero priſmata dimidio totius pyramidis eſſe majora.

Secentur enim ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ, ΔΓ bifariam in punctis Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ, & ΕΘ, ΕΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΑ, ΛΘ, ΕΚ, ΚΖ, ΖΗ jungantur. quoniam igitur ΑΕ quidem eſt æqualis ΕΒ; ΑΘ vero ipſi ΘΔ; erit [per 2. 6.] ΕΘ ipſi ΔΒ parallela. eadem ratione & ΘΚ eſt parallela ipſi ΑΒ: parallelogrammum igitur eſt ΘΕΒΚ: quare [per 34. 1.] ΘΚ eſt æqualis ΕΒ. ſed ΕΒ ipſi ΑΕ eſt æqualis: ergo & ΑΕ ipſi ΘΚ æqualis erit. eſt autem & ΑΘ æqualis ΘΔ: duæ igitur ΑΕ, ΑΘ duabus ΚΘ, ΘΔ æquales ſunt, altera alteri, & [per 29. 1.] angulus ΕΑΘ æqualis angulo ΚΘΔ: baſis igitur ΕΘ [per 4. 1.] baſi ΚΔ eſt æqualis: quare triangulum ΑΕΘ æquale eſt & ſimile triangulo ΘΚΔ. eadem ratione & triangulum ΑΘΗ triangulo ΘΔΛ æquale eſt & ſimile. & quoniam duæ rectæ lineæ ſeſe tangentes ΕΘ, ΘΗ duabus rectis lineis ſeſe tangentibus ΚΔ, ΔΛ parallelæ ſunt, non autem in eodem plano, [per 10. 11.] æquales angulos continebunt: ergo angulus ΕΘΗ eſt æqualis angulo ΚΔΛ. rurſus quoniam duæ rectæ lineæ ΕΘ, ΘΗ duabus ΚΔ, ΔΛ æquales ſunt altera alteri, & angulus ΕΘΗ æqualis angulo ΚΔΛ; erit baſis ΕΗ baſi ΚΛ æqualis; æquale igitur eſt & ſimile triangulum ΕΘΗ triangulo ΚΔΛ. eadem ratione & ΑΕΗ triangulum eſt æquale & ſimile triangulo ΘΚΛ; quare pyramis, cujus baſis quidem eſt ΑΕΗ triangulum, vertex autem punctum Θ, æqualis & ſimilis eſt pyramidi, cujus baſis eſt triangulum ΘΚΛ, & vertex Δ punctum. & quoniam uni laterum trianguli ΑΔΒ, videlicet ipſi ΑΒ, parallela ducta eſt ΘΚ; erit [per 29. 1.] triangulum ΑΔΒ triangulo ΔΘΚ æquiangulum, & [per 4. 6.] latera habent proportionalia: ſimile igitur eſt ΑΔΒ triangulum triangulo ΔΘΚ. & eadem ratione triangulum quidem ΔΒΓ ſimile eſt triangulo ΔΚΛ; triangulum vero ΑΔΓ triangulo ΔΘΛ. quod cum duæ rectæ lineæ ſeſe tangentes ΒΑ, ΑΓ duabus rectis lineis ſeſe tangentibus ΚΘ, ΘΛ parallelæ ſint, non exiſtentes in eodem plano, [per 10. 11.] æquales angulos continebunt: angulus igitur ΒΑΓ angulo ΚΘΛ eſt æqualis. atque



ἢ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

ΕΣτω πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον· λέγω ὅτι ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας, καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

Τετμήσθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ, ΔΓ δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΘ, ΕΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΑ, ΛΘ, ΕΚ, ΚΖ, ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΒ, ἡ δὲ ΑΘ τῇ ΘΔ· παραλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΔΒ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΑΒ παραλληλός ἐστιν· παραλληλόγραμμον ἄρα τὸ ΘΕΒΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ τῇ ΕΒ. ἀλλὰ ἡ ΕΒ τῇ ΑΕ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΑΕ ἄρα τῇ ΘΚ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΘ τῇ ΘΔ ἴση· δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΑΘ δυσὶ ταῖς ΚΘ, ΘΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΘ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΘΔ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΕΘ βάσει τῇ ΚΔ ἐστιν ἴση· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΕΘ τριγώνον τῷ ΘΚΔ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΘΗ τρίγωνον τῷ ΘΛΔ τριγώνῳ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΕΘ, ΘΗ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΚΔ, ΔΛ εἰσιν, οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσας, ἴσας γωνίας περιέχουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΘΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΔΛ γωνίᾳ. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΘ, ΘΗ δυσὶ ταῖς ΚΔ, ΔΛ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΘΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΔΛ ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΕΗ βάσει τῇ ΚΛ ἐστιν ἴση· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΘΗ τριγώνον τῷ ΚΔΛ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΕΗ τριγώνον τῷ ΘΚΑ τριγώνῳ ἴσον καὶ ὅμοιόν ἐστιν· ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον, ἴση καὶ ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΔΒ παραλληλόγραμμον συμπέπληται τὸ ΑΒΚΘ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΔΒ τρίγωνον τῷ ΔΘΚ τριγώνῳ, καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσιν· ὅμοιον ἄρα τὸ ΑΔΒ τρίγωνον τῷ ΔΘΚ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΚΛ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστι, τὸ δὲ ΑΔΓ τῷ ΔΘΛ τριγώνῳ. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΒΑ, ΑΓ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΚΘ, ΘΛ εἰσιν, οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσας, ἴσας γωνίας περιέχουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΘΚ. καὶ

ἔστι

ἔστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ ὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΛ· ὅμοιον ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΘΚΛ τριγώνῳ· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΘΚΛ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. ἀλλὰ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΘΚΛ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἐδείχθη ὁμοία πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΗ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον· ὥστε καὶ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΗ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΕΗΘ, ΘΚΛΔ πυραμίδων ὁμοία ἐστὶ τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒΓΔ πυραμίδι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΖ τῇ ΖΓ, διπλάσιόν ἐστι τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΖΓ τριγώνου. καὶ ἐπεὶ ἐὰν δύο πρίσματα ἰσοῦψῆ ὦσι, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ἡ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα εἰσὶν ἀλλήλοις τὰ πρίσματα· ἴσον ἄρα τὸ πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΒΚΖ, ΕΘΗ τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΕΒΖΗ, ΕΒΚΘ, ΚΘΗΖ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΗΖΓ, ΘΚΛ τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΚΖΓΛ, ΛΓΗΘ, ΘΚΖΗ. καὶ φανερὸν ὅτι ἑκάτερον τῶν πρισμάτων, οὗ μὲν βάσις τὸ ΕΒΗΖ παραλληλόγραμμον ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, καὶ οὗ βάσις τὸ ΗΖΓ τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΚΛΘ τρίγωνον, μεῖζόν ἐστιν ἑκατέρας τῶν πυραμίδων, ὧν βάσις μὲν τὸ ΑΕΗ, ΘΚΛ τρίγωνα κορυφαὶ δὲ τὰ Θ, Δ σημεῖα· ἐπειδήπερ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς ΕΖ, ΕΚ εὐθείας, τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μέν τὸ ΕΒΖ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον. ἀλλ' ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΒΖ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΕΗ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον, ἐπὶ γὰρ ἴσων καὶ ὁμοίων ὑπιπέδων περιέχονται· ὥστε καὶ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστι πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΕΗ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον. ἴσον δὲ τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, τῷ πρίσματι, οὗ βάσις μὲν τὸ ΗΖΓ τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΘΚΛ τρίγωνον· ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΕΗ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΘΚΛ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον· τὰ ἄρα εἰρημένα δύο πρίσματα μείζονά ἐστι τῶν εἰρημένων δύο πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΑΕΗ, ΘΚΛ τρίγωνα κορυφαὶ δὲ τὰ Θ, Δ σημεῖα· ἡ ἄρα ὅλη πυραμὶς, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, διήρηται εἰς δύο πυραμίδας, ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

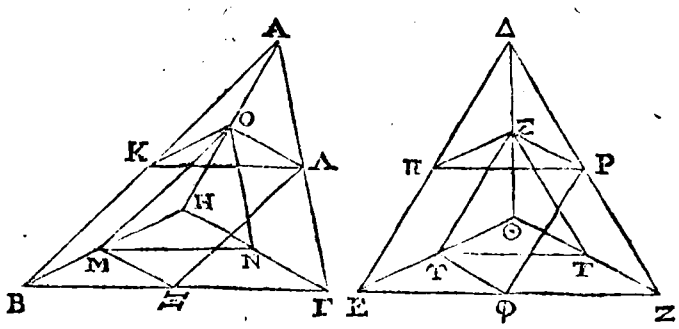
est ut BA ad AΓ ita KΘ ad ΘΛ: ergo [per 6.6.] ABΓ triangulum ſimile eſt triangulo ΘKΛ: ideoque pyramis, cujus baſis quidem triangulum ABΓ vertex autem punctum Δ, ſimilis eſt pyramidi, cujus triangulum ΘKΛ & vertex punctum Δ. ſed pyramis, cujus baſis quidem ΘKΛ triangulum vertex autem punctum Δ, oſtenſa eſt ſimilis pyramidi, cujus baſis triangulum AEH & vertex Θ punctum: quare & pyramis, cujus baſis triangulum ABΓ & vertex punctum Δ, ſimilis eſt pyramidi, cujus baſis AEH triangulum & vertex punctum Θ: utraque igitur ipſarum AEHΘ, ΘKΛΔ pyramidum ſimilis eſt toti pyramidi ABΓΔ. & quoniam BZ eſt æqualis ZΓ, erit [per 41. 1.] EBZH parallelogrammum duplum trianguli HZΓ. & quoniam ſi ſint duo priſmata æquealta, quorum unum quidem baſim habet parallelogrammum, alterum vero triangulum, ſitque parallelogrammum duplum trianguli; ſunt [per 40. 11.] ea priſmata inter ſe æqualia: ergo priſma contentum ſub duobus triangulis BKZ, EΘH & tribus parallelogrammis EBZH, EBKΘ, KΘHZ eſt æquale priſmati quod ſub duobus triangulis HZΓ, ΘKΛ & tribus parallelogrammis KZΓΛ, ΛΓHΘ, ΘKZH continetur. & manifeſtum eſt utrumque ipſorum priſmatum, & cujus baſis eſt EBZH parallelogrammum oppoſita autem ipſi ΘK recta linea, & cujus baſis eſt HZΓ triangulum & oppoſitum ipſi triangulum KΛΘ, majus eſſe utraque pyramidum, quarum baſes quidem AEH, ΘKΛ triangula vertices autem puncta Θ, Δ: quoniam ſi jungamus EZ, EK rectas lineas, priſma quidem, cujus baſis eſt EBZH parallelogrammum & oppoſita ipſi recta linea ΘK, majus eſt pyramide, cujus baſis EBZ triangulum vertex autem punctum K. ſed pyramis, cujus baſis triangulum EBZ, & vertex K punctum, [per 10. def. 11.] eſt æqualis pyramidi, cujus baſis AEH triangulum & vertex punctum Θ; æqualibus enim & ſimilibus planis continentur: quare & priſma, cujus baſis parallelogrammum EBZH oppoſita autem ipſi recta linea ΘK, majus eſt pyramide, cujus baſis AEH triangulum & vertex punctum Θ. priſma vero, cujus baſis parallelogrammum EBZH & oppoſita ipſi recta linea ΘK, eſt æquale priſmati, cujus baſis HZΓ triangulum & ipſi oppoſitum triangulum ΘKΛ; & pyramis, cujus baſis triangulum AEH vertex autem Θ punctum, eſt æqualis pyramidi, cujus baſis ΘKΛ triangulum & vertex punctum Δ: ergo duo priſmata, de quibus dictum eſt, ſunt majora duabus dictis pyramidibus, quorum baſes triangula AEH, ΘKΛ vertices autem Θ, Δ puncta: tota igitur pyramis, cujus baſis ABΓ triangulum vertex autem punctum Δ, diviſa eſt in duas pyramides æquales & ſimiles inter ſe & ſimiles toti; & in duo priſmata æqualia, quæ dimidio quidem totius pyramidis ſunt majora. quod erat demonſtrandum.

PROP. IV. THEOR.

Si ſint duæ pyramides æquealtæ, quæ triangulares baſes habent, dividatur autem utraque ipſarum, & in duas pyramides æquales inter ſe ſimileſque toti, & in duo priſmata æqualia, atque ortarum pyramidum utraque eodem modo dividatur, idque ſemper fiat; erit ut unius pyramidis baſis ad baſim alterius ita priſmata omnia in una pyramde ad priſmata omnia in altera pyramide numero æqualia.

SInt duæ pyramides æquealtæ, quæ triangulares baſes habent ΑΒΓ, ΔΕΖ, vertices autem ſint puncta Η, Θ, & dividatur utraque ipſarum in duas pyramides æquales inter ſe ſimileſque toti, & in duo priſmata æqualia, atque ortarum pyramidum utraque eodem modo diviſa intelligatur, atque hoc ſemper fiat: dico ut ΑΒΓ baſis ad baſim ΔΕΖ ita eſſe priſmata omnia quæ ſunt in pyramide ΑΒΓΗ ad priſmata omnia in pyramide ΔΕΖΘ numero æqualia.

Quoniam enim ΒΞ quidem eſt æqualis ΞΓ, ΑΛ vero æqualis ΛΓ; erit [per 2. 6.] ΞΛ ipſi ΑΒ parallela, & [per 4. 6.] triangulum ΛΞΓ triangulo ΑΒΓ ſimile. eadem ratione & triangulum ΔΕΖ ſimile eſt triangulo ΡΦΖ. & quoniam ΒΓ quidem eſt dupla ΓΞ, & ΕΖ dupla ipſius ΖΦ, ut ΒΓ ad ΓΞ ita erit ΕΖ ad ΖΦ. & deſcripta ſunt ab ipſis ΒΓ, ΓΞ ſimilia & ſimiliter poſita rectilinea ΑΒΓ, ΛΞΓ, ab ipſis vero ΕΖ, ΖΦ ſimilia & ſimiliter poſita rectilinea ΔΕΖ, ΡΦΖ: eſt igitur [per 22. 6.] ut ΒΑΓ triangulum ad triangulum ΛΞΓ ita triangulum ΔΕΖ ad ΡΦΖ triangulum; & permutando ut triangulum ΑΒΓ ad triangulum ΔΕΖ ita ΛΞΓ triangulum ad triangulum ΡΦΖ. ſed [ut oſtendetur infra] ut ΛΞΓ triangulum ad triangulum ΡΦΖ ita priſma, cujus baſis eſt triangulum ΛΞΓ oppoſitum autem ipſi ΟΜΝ, ad priſma, cujus baſis ΡΦΖ triangulum & oppoſitum ipſi ΣΤΤ: igitur [per 11. 5.] ut ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΔΕΖ ita priſma, cujus baſis eſt triangulum ΛΞΓ oppoſitum autem ipſi ΟΜΝ, ad priſma, cujus baſis ΡΦΖ triangulum & oppoſitum ipſi ΣΤΤ. & quoniam duo priſmata, quæ ſunt in pyramide ΑΒΓΗ, inter ſe æqualia ſunt, ſed &



ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Ἐὰν ὦσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τριγώνους ἐχούσας βάσεις, διαιρεθῇ δὲ ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τῶν γενομένων πυραμίδων ἑκατέρα τὸν αὐτὸν τρόπον, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίνηται· ἔστιν ὡς ἡ τῆς μιᾶς πυραμίδος βάσις πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας πυραμίδος βάσιν οὕτως καὶ τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

Ἔστωσαν δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τριγώνους ἐχούσας βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφὰς δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα, καὶ διηρήσθω ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τῶν γενομένων πυραμίδων ἑκατέρα τὸν αὐτὸν τρόπον νενοήσθω διῃρημένη, καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΞ τῇ ΞΓ, ἡ δὲ ΑΛ τῇ ΛΓ· διπλασίων ἄρα ἡ ΓΑ τῆς ΑΛ, καὶ ὅμοιον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΞΓ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ ΡΦΖ τριγώνῳ. ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ μὲν ΒΓ τῆς ΓΞ, ἡ δὲ ΕΖ τῆς ΖΦ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΞ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΦ. ἐὰν ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν ΒΓ, ΓΞ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΑΒΓ, ΛΞΓ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΖΦ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΔΕΖ, ΡΦΖ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΞΓ τρίγωνον οὕτως τὸ ΔΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον· ἀναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον οὕτως τὸ ΛΞΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον. ἀλλ' ὡς τὸ ΛΞΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΛΞΓ τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μέν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΤ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μέν τὸ ΛΞΓ τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μέν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον ἀπεναντίον ἢ τὸ ΣΤΤ. καὶ ἐπεὶ τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, ἀλλὰ μὴν καὶ

καὶ τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΚΛΞΒ παραλληλόγραμμον ἀπεναντίον δὲ ἡ ΜΟ εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΛΞΓ τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν ΕΠΡΦ ἀπεναντίον ἡ ΣΤ εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον ἀπεναντίον τὸ ΣΤΥ· συνθέντι ἄρα ὡς τὰ ΚΒΞΛΜΟ, ΛΞΓΜΝΟ πρίσματα πρὸς τὸ ΛΞΓΜΝΟ πρίσμα οὕτως τὰ ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΥ πρίσματα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὰ ΚΒΞΛΟΜ, ΛΞΓΟΜΝ πρὸς τὰ ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΥ πρίσματα οὕτως τὸ ΛΞΓΜΝΟ πρίσμα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα. ὡς δὲ ΛΞΓΜΝΟ πρίσμα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα οὕτως ἐδείχθη ἡ ΛΞΓ βάσις πρὸς τὴν ΡΦΖ βάσιν, καὶ ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι δύο πρίσματα. ὁμοίως δὲ καὶ τὰς γενομένας πυραμίδας δείξομεν τὸν αὐτὸν τρόπον οἷον ὡς τὰ ΟΜΝΗ, ΣΤΥΘ, ἔσται ὡς ἡ ΟΜΝ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν οὕτως τὰ ἐν τῇ ΟΜΝΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΣΤΥΘ πυραμίδι δύο πρίσματα. ἀλλ' ὡς ἡ ΟΜΝ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν οὕτως ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν οὕτως καὶ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τὰ ἐν τῇ ΟΜΝΗ δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΣΤΥΘ πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ ποτέρα πρὸς ποτέρα. τὰ αὐτὰ δὲ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν γενομένων πρισμάτων ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν ΑΚΛΟ καὶ ΔΠΡΣ πυραμίδων καὶ πάντων ἁπλῶς τῶν ἰσοπληθῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

quæ in pyramide ΔΕΖΘ prismata inter se sunt æqualia; erit ut prisma, cujus basis parallelogrammum ΚΛΞΒ opposita vero ipsi recta linea ΜΟ, ad prisma, cujus basis ΛΞΓ triangulum & oppositum ipsi ΟΜΝ, ita prisma, cujus basis parallelogrammum ΒΠΡΦ & opposita recta linea ΣΤ, ad prisma, cujus basis ΡΦΖ triangulum oppositum vero ipsi ΣΤΥ: quare componendo [per 18. 5.] ut prismata ΚΒΞΛΜΟ, ΛΞΓΜΝΟ ad prisma ΛΞΓΜΝΟ ita prismata ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΥ ad prisma ΡΦΖΣΤΥ: & permutando ut prismata ΚΒΞΛΟΜ, ΛΞΓΟΜΝ ad prismata ΠΕΦΡΣΤ, ΡΦΖΣΤΥ ita prisma ΛΞΓΜΝΟ ad prisma ΡΦΖΣΤΥ. ut autem prisma ΛΞΓΜΝΟ ad prisma ΡΦΖΣΤΥ ita ostensa est basis ΛΞΓ ad ΡΦΖ basim, & ΑΒΓ basis ad basim ΔΕΖ: ergo & ut triangulum ΑΒΓ ad triangulum ΔΕΖ ita quæ in pyramide ΑΒΓΗ duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide ΔΕΖΘ. similiter autem & si factas pyramides dividamus eodem modo velut ΟΜΝΗ, ΣΤΥΘ, erit ut ΟΜΝ basis ad basim ΣΤΥ ita quæ in pyramide ΟΜΝΗ duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide ΣΤΥΘ. sed ut ΟΜΝ basis ad basim ΣΤΥ ita basis ΑΒΓ ad ΔΕΖ basim: & igitur ut ΑΒΓ basis ad basim ΔΕΖ ita quæ in pyramide ΑΒΓΗ duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide ΔΕΖΘ, & quæ in pyramide ΟΜΝΗ duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide ΣΤΥΘ, & quatuor ad quatuor. eadem autem ostendentur & in cæteris prismatum quæ oriuntur divisione pyramidum ΑΚΛΟ, & ΔΠΡΣ & omnium simpliciter multitudine æqualium. quod erat demonstrandum.

ΛΗΜΜΑ.

Οτι δέ ἐστιν ὡς τὸ ΛΞΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις τὸ ΛΞΓ τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ, οὕτως δειχτέον.

Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς νενοήθωσαν ἀπὸ τῶν Η, Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τρίγωνα ἐπίπεδα, ἴσαι δηλαδὴ τυγχάνουσαι διὰ τὸ ἰσοϋψεῖς ὑπονοεῖσθαι τὰς πυραμίδας. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι, ἥτε ΗΓ ἐστὶ καὶ ἀπὸ τοῦ Η κάθετος ἀπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΑΒΓ, ΟΜΝ πίπτουσι, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται. καὶ τέτμηται ἡ ΗΓ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον· καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἄρα κάθετος ἐπὶ τὸ ΑΒΓ ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ΟΜΝ ἐπιπέδου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Θ κάθετος ἐπὶ τὸ ΔΕΖ ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ΣΤΥ ἐπιπέδου. καὶ εἰσὶν ἴσαι αἱ ἀπὸ τῶν Η, Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπίπεδα· ἴσαι ἄρα καὶ αἱ ἀπὸ τῶν ΟΜΝ, ΣΤΥ τριγώνων ἐπὶ

LEMMA.

At vero ut ΛΞΓ triangulum ad triangulum ΡΦΖ, ita esse prisma, cujus basis triangulum ΛΞΓ oppositum autem ipsi ΟΜΝ, ad prisma, cujus basis ΡΦΖ triangulum & oppositum ipsi ΣΤΥ, hoc modo ostendemus.

In eadem enim figura intelligantur ab ipsis Η, Θ punctis perpendiculares ductæ ad ΑΒΓ, ΔΕΖ triangulorum plana, quæ inter se æquales erunt; propterea quod pyramides ipsæ æqualtæ ponuntur. & quoniam duæ rectæ lineæ ΗΓ & perpendicularis à puncto Η ducta secantur à parallelis planis ΑΒΓ, ΟΜΝ, [per 17. 11.] in eadem ratione secabuntur. secatur vero ΗΓ bifariam a plano ΟΜΝ in puncto Ν: ergo & à puncto Η ducta perpendicularis ad ΑΒΓ planum bifariam secabitur à plano ΟΜΝ. eadem ratione & quæ à puncto Θ ducitur perpendicularis ad ΔΕΖ planum à plano ΣΤΥ bifariam secabitur. sunt autem æquales perpendiculares, quæ ab ipsis Η, Θ ducuntur ad plana ΑΒΓ, ΔΕΖ: ergo & æquales quæ à triangulis ΟΜΝ, ΣΤΥ ad ipsa

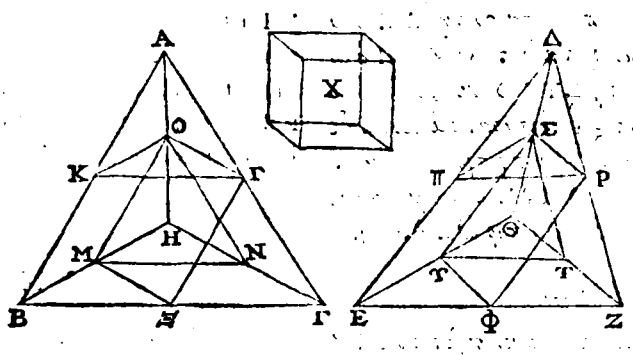
ABΓ, ΔEZ perpendiculares ducuntur: æquealta igitur ſunt priſmata, quorum baſes triangula ΛΞΓ, PΦΣ, oppoſita autem ipſis OMN, ΣTT: quare [per 32. 11.] & ſolida parallelepipeda quæ à dictis priſmatibus deſcribuntur æquealta inter ſe ſunt ut baſes; pariterque de illorum dimidiis, ut AΞΓ baſis ad baſim PΦZ ita erunt inter ſe & dicta priſmata. quod erat demonſtrandum.

Prop. V. Theor.

Pyramides quæ in eadem ſunt altitudine & triangulares baſes habent inter ſe ſunt ut baſes.

SInt enim in eadem altitudine pyramides, quarum baſes quidem triangula ABΓ, ΔEZ, vertices autem puncta H, Θ: dico ut ABΓ baſis ad baſim ΔEZ ſic eſſe pyramidem ABΓH ad ΔEZΘ pyramidem.

Si enim non ita ſit, erit ut ABΓ baſis ad baſim ΔEZ ſic ABΓH pyramis vel ad ſolidum minus pyramide ΔEZΘ vel ad majus. eſto primum ad ſolidum minus, ſitque X; & dividatur pyramis ΔEZΘ in duas pyramides æquales inter ſe, & ſimiles toti, & in duo priſmata æqualia; ſunt igitur [per 3. 12.] duo priſmata dimidio totius pyramidis majora. & rurſus pyramides ex diviſione factæ ſimiliter dividantur, atque hoc ſemper fiat quoad ſumantur quædam pyramides à pyramide ΔEZΘ, quæ ſint minores exceſſu, quo pyramis ΔEZΘ ſolidum X ſuperat. itaque ſumantur, & ſint exempli cauſa pyramides ΔΠPΣ, ΣTTΘ: erunt igitur reliqua in pyramide ΔEZΘ priſmata ſolido X majora. dividatur etiam ABΓH pyramis ſimiliter & in totidem partes atque pyramis ΔEZΘ: ergo [per 4. 12.] ut ABΓ baſis ad baſim ΔEZ ita quæ in pyramide ABΓH priſmata ad priſmata quæ in pyramide ΔEZΘ. ſed [ex hyp.] ut ABΓ baſis ad baſim ΔEZ ita pyramis ABΓH ad ſolidum X: & igitur ut ABΓH pyramis ad ſolidum X ita quæ in pyramide ABΓH priſmata ad priſmata quæ in pyramide ΔEZΘ: & permutando ut ABΓH pyramis ad priſmata quæ in ipſa ſunt ita ſolidum X ad priſmata quæ ſunt in pyramide ΔEZΘ. major autem eſt pyramis ABΓH priſmatibus quæ in ipſa ſunt: ergo & ſolidum X priſmatibus quæ ſunt in pyramide ΔEZΘ eſt majus. ſed & minus, quod



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

ΕΣτωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ ὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν ὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα, ἔστω ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν ὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεὸν ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Χ· καὶ διῃρήσθω ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς εἰς τὰ δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· τὰ δὴ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ὅλης πυραμίδος. καὶ πάλιν αἱ ἐκ τῆς διαιρέσεως γινόμεναι δυὸ πυραμίδες ὁμοίως διῃρήσθωσαν καὶ εἰς πρίσματα ἴσα· καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω ἕως οὗ λειφθῶσί τινες πυραμίδες ἀπὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος, αἵ εἰσιν ἐλάσσονες τοῦ ὑπερέχοντος, ἧς ὑπερέχει ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς τοῦ Χ στερεοῦ. λελείφθωσαν καὶ ἔστωσαν λόγου ἕνεκα αἱ ΔΠΡΣ, ΣΤΤΘ· λοιπὰ ἄρα τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα μείζονά ἐστι τοῦ Χ στερεοῦ. διῃρήσθω καὶ ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς ὁμοίως καὶ ἰσοπληθῶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν ὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν ὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὸ Χ στερεόν· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὸ Χ στερεὸν ὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα· ἀναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὰ ἐν αὐτῇ πρίσματα ὕτως τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα. μείζων δὲ ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῶν ἐν αὐτῇ πρισμάτων· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Χ στερεὸν τῶν ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρισμάτων. ἀλλὰ καὶ ἔλασσον, ὅπερ ἐστὶν

ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν ἕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ὡς ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν ἕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΗ πυραμίδος στερεόν. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν ἕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Χ· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν ἕτως τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΗ πυραμίδα. ὡς δὲ τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΗ πυραμίδα ἕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΗ πυραμίδος, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν ἕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΗ πυραμίδος, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν ἕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν ἕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα.

Αἱ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

fieri non poteſt: non igitur ut ΑΒΓ baſis ad baſim ΔΕΖ ita eſt pyramis ΑΒΓΗ ad ſolidum aliquod minus pyramide ΔΕΖΘ. ſimiliter oſtendemus neque ut ΔΕΖ baſis ad baſim ΑΒΓ ita eſſe pyramidem ΔΕΖΘ ad ſolidum aliquod pyramide ΑΒΓΗ minus. Dico porro neque eſſe ut ΑΒΓ baſis ad baſim ΔΕΖ ita ΑΒΓΗ pyramidem ad aliquod ſolidum majus pyramide ΔΕΖΘ. ſi enim fieri poteſt, ſit ad majus, videlicet ad ſolidum Χ: erit igitur invertendo ut ΔΕΖ baſis ad baſim ΑΒΓ ita ſolidum Χ ad ΑΒΓΗ pyramidem. ut autem ſolidum Χ ad ΑΒΓΗ pyramidem ita ΔΕΖΘ pyramis ad ſolidum aliquod minus pyramide ΑΒΓΗ, ut proxime oſtenſum fuit: & igitur ut ΔΕΖ baſis ad baſim ΑΒΓ ita pyramis ΔΕΖΘ ad ſolidum aliquod pyramide ΑΒΓΗ minus, quod eſt abſurdum: non igitur ut ΑΒΓ baſis ad baſim ΔΕΖ ita eſt ΑΒΓΗ pyramis ad ſolidum aliquod majus pyramide ΔΕΖΘ. oſtenſum autem eſt neque eſſe ad minus: quare ut ΑΒΓ baſis ad baſim ΔΕΖ ita eſt pyramis ΑΒΓΗ ad ΔΕΖΘ pyramidem.

Pyramides igitur quæ in eadem ſunt altitudine & triangulares baſes habent inter ſe ſunt ut baſes. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

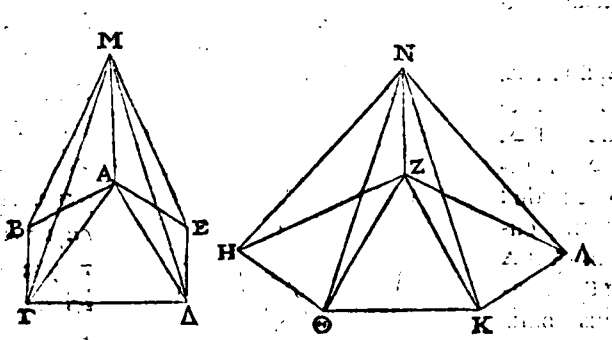
Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

PROP. VI. THEOR.

Pyramides quæ in eadem ſunt altitudine & polygonas baſes habent inter ſe ſunt ut baſes.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, κορυφὰς δὲ τὰ Μ, Ν σημεῖα· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν ἕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα.

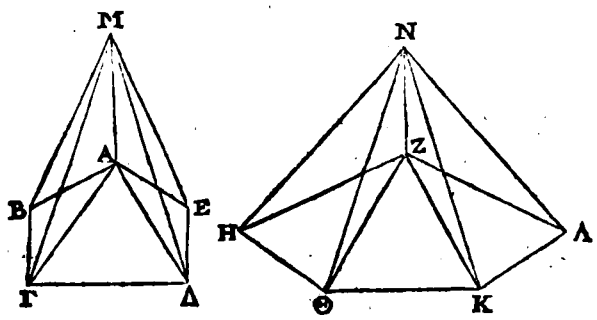
Διῃρήσθω γὰρ ἡ μὲν ΑΒΓΔΕ βάσις εἰς τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ τρίγωνα· ἡ δὲ ΖΗΘΚΛ εἰς τὰ ΖΗΘ, ΖΘΚ, ΖΚΛ τρίγωνα, καὶ νενοήσθωσαν ἐφ' ἑκάστου τριγώνου πυραμίδες ἰσοϋψεῖς τῇ ἐξ ἀρχῆς πυραμίσι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον ἕτως ἡ ΑΒΓΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα, καὶ συνθέντι ὡς τὸ ΑΒΓΔ τραπέζιον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον ἕτως ἡ ΑΒΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον ἕτως ἡ ΑΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν ἕτως ἡ ΑΒΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα. καὶ συνθέντι πάλιν, ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ ἕτως ἡ ΑΒΓ



Sint in eadem altitudine pyramides, quæ polygonas baſes habeant ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, vertices autem Μ, Ν puncta: dico ut ΑΒΓΔΕ baſis ad baſim ΖΗΘΚΛ ita eſſe ΑΒΓΔΕΜ pyramidem ad pyramidem ΖΗΘΚΛΝ.

Dividatur enim baſis quidem ΑΒΓΔΕ in triangula ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ; baſis vero ΖΗΘΚΛ dividatur in triangula ΖΗΘ, ΖΘΚ, ΖΚΛ; & ſuper unoquoque triangulo intelligantur pyramides æqualtæ ac pyramides quæ à principio, quoniam igitur [per 5. 12.] eſt ut triangulum ΑΒΓ ad triangulum ΑΓΔ ita ΑΒΓΜ pyramis ad pyramidem ΑΓΔΜ: & componendo [per 18. 5.] ut ΑΒΓΔ trapezium ad triangulum ΑΓΔ ita ΑΒΓΔΜ pyramis ad pyramidem ΑΒΓΜ. ſed & ut ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΑΔΕ ita pyramis ΑΓΔΜ ad ΑΔΕΜ pyramidem: ergo ex æquo [per 22. 5.] ut ΑΒΓΔ baſis ad baſim ΑΔΕ ita ΑΒΓΔΜ pyramis ad pyramidem ΑΔΕΜ. & rurſus componendo ut ΑΒΓΔΕ baſis ad baſim ΑΔΕ ita ΑΒΓ

ΔΕΜ pyramis ad pyramidem ΑΔΕΜ. eadem ratione & ut ΖΗΘΚΛ baſis ad baſim ΖΚΛ ita & ΖΗΘΚΛΝ pyramis ad ΖΚΛΝ pyramidem. & quoniam ΑΔΕΜ, ΖΚΛΝ ſunt duæ pyramides, quæ triangulares baſes habent & in eadem ſunt altitudine; erit ut ΑΔΕ baſis ad baſim ΖΚΛ ita ΑΔΕΜ pyramis ad pyramidem ΖΚΛΝ. quoniam igitur eſt ut ΑΒΓΔΕ baſis ad baſim ΑΔΕ, ita ΑΒΓΔΕΜ pyramis ad pyramidem ΑΔΕΜ; ut autem ΑΔΕ baſis ad baſim ΖΚΛ ita ΑΔΕΜ pyramis ad pyramidem ΖΚΛΝ: erit, ex æquo, ut baſis ΑΒΓΔΕ ad ΖΚΛ baſim ita ΑΒΓΔΕΜ pyramis ad pyramidem ΖΚΛΝ. ſed & ut ΖΚΛ baſis ad baſim ΖΗΘΚΛ ita erat & ΖΚΛΝ pyramis ad pyramidem ΖΗΘΚΛΝ: quare rurſus ex æquo, ut ΑΒΓΔΕ baſis ad baſim ΖΗΘΚΛ ita eſt ΑΒΓΔΕΜ pyramis ad pyramidem ΖΗΘΚΛΝ.



Pyramides igitur quæ in eadem ſunt altitudine & polygonas baſes habent inter ſe ſunt ut baſes. quod erat demonſtrandum.

ΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΖΗΘΚΛ βάσις πρὸς τὴν ΖΚΛ βάσιν ἔτως καὶ ἡ ΖΗΘΚΛΝ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΚΛΝ πυραμίδα, καὶ ἐπεὶ δύο πυραμίδες εἰσὶν αἱ ΑΔΕΜ, ΖΚΛΝ τρίγωνα ἔχουσι βάσεις, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΚΛ βάσιν ἔτως ἡ ΑΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΚΛΝ πυραμίδα. ἐπὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν ἔτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα, ὡς δὲ ἡ ΑΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΚΛ βάσιν ἔτως ἡ ΑΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΚΛΝ πυραμίδα· δἰσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΚΛ βάσιν ἔτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΚΛΝ πυραμίδα. ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ἡ ΖΚΛ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν ἔτως ἐστὶ καὶ ἡ ΖΚΛΝ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα· καὶ δἰσου πάλιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν ἔτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα.

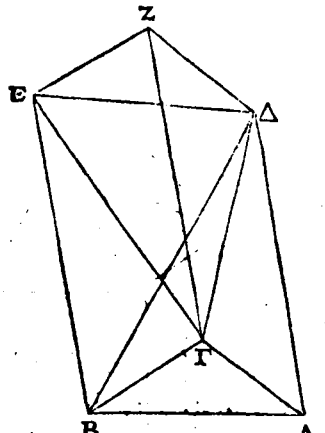
Πυραμίδες ἄρα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄσαι καὶ πολυγώνους ἔχουσι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VII. Theor.

Omne priſma triangularem habens baſim dividitur in tres pyramides æquales inter ſe, quæ triangulares baſes habent.

SIT priſma cujus baſis quidem triangulum ΑΒΓ, oppoſitum autem ipſi ΔΕΖ: dico priſma ΑΒΓΔΕΖ dividi in tres pyramides æquales inter ſe, quæ triangulares habent baſes.

Jungantur enim ΒΔ, ΕΓ, ΓΔ. & quoniam ΑΒΕΔ eſt parallelogrammum, cujus diameter ΒΔ, erit [per 34. 1.] ΑΒΔ triangulum triangulo ΕΔΒ æquale: ergo [per 5. 12.] pyramis, cujus baſis eſt triangulum ΑΒΔ vertex autem punctum Γ, æqualis eſt pyramidi, cujus baſis ΕΔΒ triangulum & vertex punctum Γ. ſed pyramis, cujus baſis ΕΔΒ triangulum & vertex punctum Γ, eadem eſt cum pyramide cujus baſis triangulum ΕΒΓ & vertex Δ punctum, iiſdem enim planis continetur: ergo & pyramis, cujus baſis triangulum ΑΒΔ vertex autem punctum Γ, æqualis eſt pyramidi, cujus baſis ΕΒΓ triangu-



Προτασις ζ'.

Πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας.

ΕΣτω πρίσμα οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΔ, ΕΓ, ΓΔ. καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΕΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΔ· ἴσον ἄρα τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΕΔΒ τριγώνῳ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΒΔ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΔΒ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον. ἀλλ' ἡ πυραμὶς, οὗ βάσις μὲν τὸ ΕΔΒ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, οὗ βάσις μὲν τὸ ΕΒΓ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχεται· καὶ πυραμὶς ἄρα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον

γωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΖΓΒΕ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΓΖ τρίγωνον τῷ ΓΒΕ τριγώνῳ· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΒΕΓ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΓΖ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. ἡ δὲ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΒΓΕ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐδείχθη πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΓΕΖ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον· διήρηται ἄρα τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας. καὶ ἐπεὶ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις μέν τὸ ΓΑΒ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἀνάπαλιν γὰρ τῶν αὐτῶν ὑπιπέδων περιέχονται, ἡ δὲ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν τὸ ΑΒΔ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, τρίτον ἐδείχθη τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, τρίτον ἐστὶ τοῦ πρίσματος οὗ ἔχοντος βάσιν τὸν αὐτὸν, τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

lum & vertex punctum Δ. rurſus, quoniam ΖΓΒΕ parallelogrammum eſt, cujus diameter ΓΕ, triangulum ΕΓΖ [per 34. 1.] triangulo ΓΒΕ eſt æquale: ergo [per 5. 11.] & pyramis, cujus baſis ΒΕΓ triangulum vertex autem punctum Δ, æqualis eſt pyramidi, cujus baſis triangulum ΕΓΖ & vertex punctum Δ. ſed pyramis, cujus baſis quidem ΒΓΕ triangulum vertex autem punctum Δ, oſtenſa eſt æqualis pyramidi, cujus baſis triangulum ΑΒΔ & vertex Γ punctum; quare & pyramis, cujus baſis triangulum ΓΕΖ & vertex punctum Δ, æqualis eſt pyramidi, cujus baſis triangulum ΑΒΔ & vertex Γ punctum. priſma igitur ΑΒΓΔΕΖ dividitur in tres pyramides inter ſe æquales, quæ triangulares baſes habent. & quoniam pyramis, cujus baſis ΑΒΔ triangulum vertex autem punctum Γ, eadem eſt cum pyramide, cujus baſis triangulum ΓΑΒ & vertex Δ punctum, iiſdem namque planis continentur; pyramis autem, cujus baſis triangulum ΑΒΔ & vertex punctum Γ, oſtenſa eſt tertia pars priſmatis, cujus baſis ΑΒΓ triangulum & oppoſitum ipſi ΔΕΖ: & pyramis igitur, cujus baſis triangulum ΑΒΓ vertex autem Δ punctum, tertia pars eſt priſmatis eandem baſim habentis, videlicet ΑΒΓ triangulum & oppoſitum ipſi triangulum ΔΕΖ. quod erat demonſtrandum.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος, τὴν αὐτὴν βάσιν τῇ αὐτῇ ἔχοντος καὶ τὸ ὕψος ἴσον· ἐπειδήπερ καὶν ἕτερόν τι σχῆμα εὐθύγραμμον ἔχῃ ἡ βάσις τοῦ πρίσματος ᾖ τὸ αὐτὸ ἀπεναντίον, διαιρεῖται εἰς πρίσματα τριγώνους ἔχοντα βάσεις καὶ τὰς ἀπεναντίον.

Corollarium.

Ex hoc manifeſtum eſt omnem pyramidem tertiam partem eſſe priſmatis baſim habentis eandem & altitudinem æqualem: quoniam ſi baſis priſmatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat & ipſi oppoſita eandem, dividitur in priſmata quæ triangulares habent baſes, baſibuſque oppoſita etiam triangula.

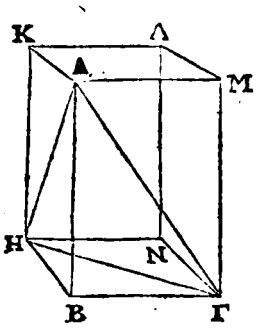
ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες, αἳ τριγώνους ἔχουσι βάσεις, ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Prop. VIII. Theor.

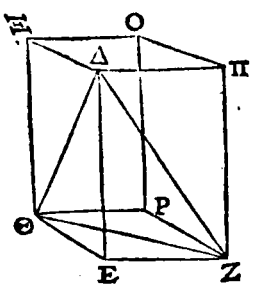
Similes pyramides, quæ triangulares baſes habent, ſunt in triplicata ratione homologorum laterum.

Ἔστωσαν ὅμοιαι καὶ ὁμοίως κείμεναι πυραμίδες, ὧν βάσεις μέν εἰσι τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τρίγωνα κορυφαὶ δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα· λέγω ὅτι ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.



Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ στερεὰ παραλληλεπίπεδα. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστιν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι· ἴση ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΗ τῇ ὑπὸ ΔΕΘ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως

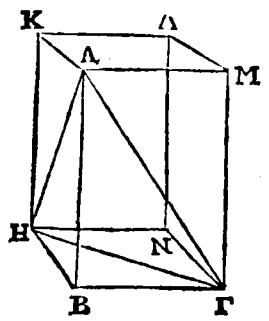
Sint ſimiles & ſimiliter poſitæ pyramides, quarum baſes quidem triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, vertices autem Η, Θ puncta: dico ΑΒΓΗ pyramidem ad pyramidem ΔΕΖΘ triplicatam rationem habere ejus quam ΒΓ habet ad ΕΖ.



Compleantur enim ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ ſolida parallelepipeda. & quoniam pyramis ΑΒΓΗ ſimilis eſt pyramidi ΔΕΖΘ, erit [per 9. def. 11.] angulus ΑΒΓ angulo ΔΕΖ æqualis, angulusque ΗΒΓ æqualis angulo ΘΕΖ, & angulus ΑΒΗ angulo ΔΕΘ, atque eſt ut ΑΒ ad ΔΕ ita

ΒΓ

ΒΓ ad ΕΖ & ΒΗ ad ΕΘ. quoniam igitur eſt ut ΑΒ ad ΔΕ ita ΒΓ ad ΕΖ, & circum æquales angulos latera ſunt proportionalia; parallelogrammum ΒΜ parallelogrammo ΕΠ ſimile erit. eadem ratione & parallelogrammum ΒΝ ſimile eſt parallelogrammo ΕΡ, & parallelogrammum ΒΚ ipſi ΕΞ parallelogrammo: tria igitur parallelogramma ΒΜ, ΚΒ, ΒΝ tribus ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ ſunt ſimilia.



ſed [per 24. 11.] tria quidem ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ tribus oppoſitis æqualia & ſimilia ſunt, tria vero ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ tribus oppoſitis æqualia & ſimilia: quare ſolida ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ ſimilibus planis & numero æqualibus continentur; ac propterea [per 9. def. 11.] ſimile eſt ΒΗΜΛ ſolidum ſolido ΕΘΠΟ. ſimilia autem ſolida parallelepipeda [per 33. 11.] ſunt in triplicata ratione homologorum laterum: ergo ſolidum ΒΗΜΘ ad ſolidum ΕΘΠΟ triplicatam habet rationem ejus quam habet latus homologum ΒΓ ad ΕΖ homologum latus. ſed [per 15. 5.] ut ΒΗΜΛ ſolidum ad ſolidum ΕΘΠΟ ita ΑΒΓΗ pyramis ad pyramidem ΔΕΖΘ; pyramis enim ſexta pars eſt ipſius ſolidi, cum priſma, quod eſt dimidium ſolidi parallelepipedi, ſit pyramidis triplum: quare & pyramis ΑΒΓΗ ad pyramidem ΔΕΖΘ triplicatam rationem habet ejus quam ΒΓ habet ad ΕΖ. quod erat demonſtrandum.

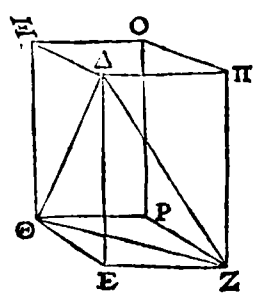
Corollarium.

Ex hoc perſpicuum eſt ſimiles pyramides, quæ polygonas baſes habent, inter ſe eſſe in triplicata ratione homologorum laterum. ipſis enim diviſis in pyramides triangulares baſes habentes, quoniam [per 20. 6.] ſimilia polygona baſium in ſimilia triangula dividuntur & numero æqualia & homologa totis; erit ut una pyramis in altera pyramide triangularem habens baſim ad unam pyramidem in altera triangularem baſim habentem ita & omnes pyramides in pyramide altera triangulares habentes baſes ad omnes in altera triangulares baſes habentes; hoc eſt ita pyramis ipſa polygonam habens baſim ad pyramidem quæ polygonam baſim habet. ſed pyramis triangularem habens baſim ad pyramidem quæ triangularem baſim habet eſt in triplicata ratione homologorum laterum; & igitur pyramis polygonam habens baſim ad pyramidem ſimilem baſim habentem triplicatam rationem habet ejus quam latus homologum habet ad homologum latus.

Prop. IX. Theor.

Æqualium pyramidum, triangulares baſes habentium, baſes ſunt altitudinibus reciproce proportionales. & qua-

ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΕΘ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ ὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΠ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὴν ΒΝ τῷ ΕΡ ὅμοιόν ἐστι, τὸ δὲ ΒΚ τῷ ΕΞ· τὰ τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ΒΜ, ΚΒ, ΒΓ τρισὶ τοῖς ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ ὅμοιά ἐστιν. ἀλλὰ τὰ μὴν τρία τὰ ΜΒ, ΒΚ, ΒΝ τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσοις τέ ἐστι καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τὰ ΕΠ, ΕΞ, ΕΡ τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσοι τέ ἐστι καὶ ὅμοια· τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ ἄρα στερεὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων ἴσων τὸ πλῆθος περέχονται· ὅμοιον ἄρα τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ. τὰ δὲ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· τὸ ΒΗΜΛ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΕΘΠΟ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν ΕΖ. ὡς δὲ τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΘΠΟ στερεὸν ὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα, ἐπειδήπερ ἡ πυραμὶς ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ στερεοῦ, διὰ τὸ καὶ τὸ πρίσμα ἥμισυ ὂν τοῦ στερεοῦ παραλληλεπίπεδόν τρίπλασιον εἶναι τῆς πυραμίδος· καὶ ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι καὶ αἱ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. διαιρεθεισῶν γὰρ αὐτῶν εἰς τὰς ἐν αὐταῖς πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας, τῷ δὲ τὰ ὅμοια πολύγωνα τῶν βάσεων εἰς ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖσθαι, καὶ εἰς ἴσα τῷ πλήθει καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, ἔσται ὡς ἐν τῇ ἑτέρᾳ μίᾳ πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ μίαν πυραμίδα τρίγωνον βάσιν ἔχουσαν, οὕτω καὶ ἅπασαι αἱ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδες τρίγωνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς πάσας τὰς ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδας τρίγωνους βάσεις ἐχούσας· τυγχάνει δὲ αὐτὴ ἡ πολύγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν πολύγωνον βάσιν ἔχουσαν. ἡ δὲ τρίγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν τρίγωνον βάσιν ἔχουσαν ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· καὶ ἡ πολύγωνον ἄρα βάσιν ἔχουσα πρὸς τὴν ὁμοίαν βάσιν ἔχουσαν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἐχόντων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ

ὧν

ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι.

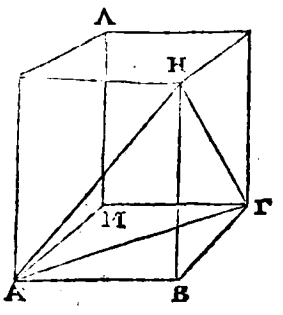
rum pyramidum triangulares baſes habentium baſes ſunt altitudinibus reciproce proportionales, illæ inter ſe æquales ſunt.

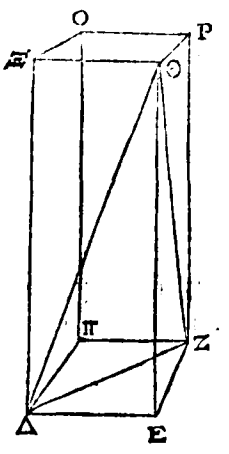
ΕΣτωσαν γὰρ πυραμίδες ἴσαι, τριγώνους ἐχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφὰς δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα· λέγω ὅτι τῶν ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος.

SInt enim pyramides æquales quæ triangulares baſes habeant ΑΒΓ, ΔΕΖ, vertices vero Η, Θ puncta: dico pyramidum ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ baſes eſſe reciproce proportionales altitudinibus, hoc eſt, ut ΑΒΓ baſis ad baſim ΔΕΖ ita eſſe pyramidis ΔΕΖΘ altitudinem ad altitudinem pyramidis ΑΒΓΗ.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ στερεὰ παραλληλεπίπεδα. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι, ἐστὶ δὲ τῆς μὲν ΑΒΓΗ πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ ΒΗΜΛ στερεόν, τῆς δὲ ΔΕΖΘ πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ ΕΘΠΟ στερεόν· ἴσον ἄρα τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ. τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΛ στερεοῦ ὕψος. ἀλλ' ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΛ στερεοῦ ὕψος. ἀλλὰ τοῦ μὲν τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψει, τοῦ δὲ τοῦ ΒΗΜΛ στερεοῦ ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τοῦ ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος· τῶν ἄρα ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Compleantur enim ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ ſolida parallelepipeda. & quoniam pyramis ΑΕΓΗ eſt æqualis pyramidi ΔΕΖΘ, atque eſt pyramidis quidem ΑΒΓΗ ſextuplum ΒΗΜΛ ſolidum, pyramidis vero ΔΕΖΘ ſextuplum ſolidum ΕΘΠΟ; erit [per 15. 5.] ſolidum ΒΗΜΛ ſolido ΕΘΠΟ æquale. æqualium autem ſolidorum parallelepipedorum [per 34. 11.] baſes ſunt reciproce proportionales altitudinibus: eſt igitur ut ΒΜ baſis ad baſim ΕΠ ita ΕΘΠΟ ſolidi altitudo ad altitudinem ſolidi ΒΗΜΛ. ſed ut ΒΜ baſis ad baſim ΕΠ ita ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΔΕΖ: ergo & ut ΑΒΓ triangulum ad triangulum ΔΕΖ ita ſolidi ΕΘΠΟ altitudo ad altitudinem ſolidi ΒΗΜΛ. ſed ſolidi quidem ΕΘΠΟ altitudo eadem eſt cum altitudine pyramidis ΔΕΖΘ; ſolidi vero ΒΗΜΛ altitudo eadem eſt cum altitudine pyramidis ΑΒΓΗ: eſt igitur ut ΑΒΓ baſis ad baſim ΔΕΖ ita pyramidis ΔΕΖΘ altitudo ad altitudinem pyramidis ΑΒΓΗ: quare pyramidum ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ baſes ſunt reciproce proportionales altitudinibus.





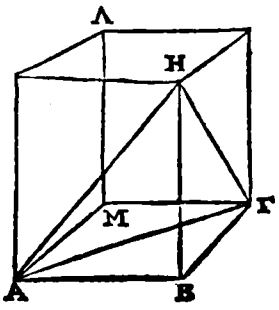
ΑΛΛΑ δὴ τῶν ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ πυραμίδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, τουτέστιν ὡς ἔστω ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι.

DEINDE vero pyramidum ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ baſes ſint reciproce proportionales altitudinibus, ſitque ut ΑΒΓ baſis ad baſim ΔΕΖ ita pyramidis ΔΕΖΘ altitudo ad altitudinem pyramidis ΑΒΓΗ: dico ΑΒΓΗ pyramidem pyramidi ΔΕΖΘ æqualem eſſe.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος, ἀλλ' ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΠ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΠ, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος. ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ ΕΘΠΟ παραλληλεπιπέδου ὕψει, τὸ δὲ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ

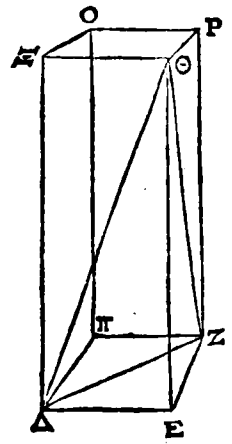
Iiſdem enim conſtructis, quoniam ut ΑΒΓ baſis ad baſim ΔΕΖ ita eſt ΔΕΖΘ pyramidis altitudo ad altitudinem pyramidis ΑΒΓΗ; atque ut ΑΒΓ baſis ad baſim ΔΕΖ ita ΒΜ parallelogrammum ad parallelogrammum ΕΠ: erit & ut parallelogrammum ΒΜ ad ΕΠ parallelogrammum ita altitudo pyramidis ΔΕΖΘ ad altitudinem pyramidis ΑΒΓΗ. ſed pyramidis quidem ΔΕΖΘ altitudo eadem eſt cum altitudine ſolidi parallelepipedi ΕΘΠΟ; pyramidis vero ΑΒΓΗ altitudo eadem eſt cum

altitudine ſolidi parallelepipedi ΒΗΜΛ: eſt igitur ut ΒΜ baſis ad baſim ΕΠ ita ΕΘΠΟ ſolidi parallelepipedi altitudo ad altitudinem ſolidi parallelepipedi ΒΗΜΛ. quorum autem ſolidorum parallelepipedorum baſes ſunt reciproce proportionales altitudinibus [per 34. 11.] ea ſunt æqualia: ſolidum igitur parallelepipedum ΒΗΜΛ æquale eſt ſolido parallelepipedo ΕΘΠΟ. atque eſt ſolidi quidem ΒΗΜΛ ſexta pars pyramis ΑΒΓΗ, ſolidi vero ΕΘΠΟ itidem ſexta pars pyramis ΔΕΖΘ; ergo pyramis ΑΒΓΗ pyramidi ΔΕΖΘ eſt æqualis.



Æqualium igitur pyramidum, triangulares baſes habentium, baſes ſunt altitudinibus reciproce proportionales. & quarum pyramidum triangulares baſes habentium baſes ſunt altitudinibus reciproce proportionales, illæ ſunt inter ſe æquales. quod erat demonſtrandum.

τῶ ΒΗΜΛ παραλληλεπιπέδω ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΜ πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν ἕτως τὸ ΕΘΠΟ παραλληλεπιπέδου ὕψος πρὸς τὸ ΒΗΜΛ. ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν παραλληλεπιπέδον τῶ ΕΘΠΟ στερεῶ παραλληλεπιπέδω. καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν ΒΗΜΛ ἕκτον μέρος ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς, τοῦ δὲ ΕΘΠΟ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου ἕκτον μέρος ἡ ΔΕΖΘ πυραμίς· ἡ ἄρα ΑΒΓΗ πυραμὶς τῆ ΔΕΖΘ πυραμίδι ἴση ἐστί.



Τῶν ἄρα ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἐχόντων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχόντων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. X. Theor.

Omnis conus tertia pars eſt cylindri, qui eandem baſim habet & altitudinem æqualem.

HAbeat enim conus eandem baſim quam cylindrus, videlicet circulum ΑΒΓΔ, & altitudinem æqualem: dico conum tertiam partem eſſe cylindri, hoc eſt cylindrum coni triplum eſſe.

Si enim cylindrus non ſit triplus coni; vel major erit quam triplus, vel minor. ſit primum major quam triplus; & deſcribatur in ΑΒΓΔ circulo quadratum ΑΒΓΔ: & quadratum ΑΒΓΔ majus eſt quam dimidium ΑΒΓΔ circuli. & à quadrato ΑΒΓΔ erigatur priſma æquealtum cylindro, quod quidem priſma majus erit quam cylindri dimidium; quoniam ſi circa circulum ΑΒΓΔ quadratum deſcribatur, erit inſcriptum quadratum dimidium circumſcripti; & ſunt ab iis baſibus erecta ſolida parallelepipeda æquealta, nimirum priſmata ipſa: quare priſmata inter ſe ſunt ut baſes: & igitur priſma erectum à quadrato ΑΒΓΔ dimidium eſt priſmatis erecti à quadrato quod circa circulum ΑΒΓΔ deſcribitur; atque eſt cylindrus minor priſmate erecto à quadrato quod deſcribitur circa circulum ΑΒΓΔ: priſma igitur erectum à quadrato ΑΒΓΔ æquealtum cylindro majus eſt dimidio cylindri. ſecentur circumferentiæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ bifariam in punctis Ε, Ζ, Η, Θ, & ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ἰσοῦψὲς τῶ κυλίνδρω μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ κυλίνδρου.

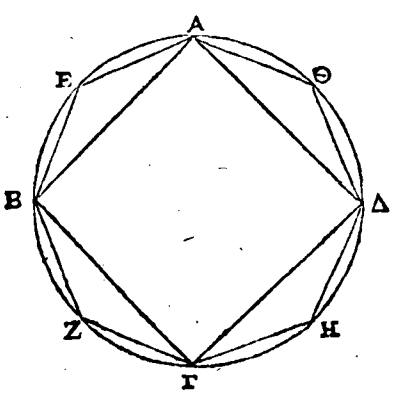
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῶ καὶ ὕψος ἴσον.

ΕΧέτω γὰρ κῶνος κυλίνδρω βάσιν τε τὴν αὐτὴν τὸν ΑΒΓΔ κύκλον καὶ ὕψος ἴσον· λέγω ὅτι ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου τρίτον ἐστὶ μέρος, τουτέστιν ὅτι ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλασίων ἐστί.

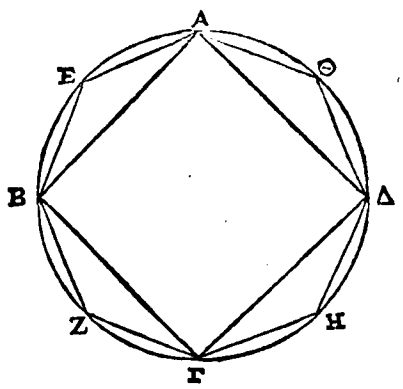
Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλασίων, ἔσται ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἢ τοι μείζων ἢ τριπλασίων, ἢ ἐλάσσων ἢ τριπλασίων. ἔστω πρότερον μείζων ἢ τριπλασίων, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· τὸ δὴ ΑΒΓΔ τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πρίσμα ἰσοῦψὲς τῶ κυλίνδρω, τὸ δὴ ἀνεσταμμένον πρίσμα μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κυλίνδρου, ἐπειδήπερ καὶ ἂν περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον περιγράψωμεν, τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον ἥμισύ ἐστι τοῦ περιγραμμένου, καὶ ἔστι τὰ ἀπ' αὐτῶν ἀνιστάμενα ἰσοῦψῆ στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρίσματα· τὰ ἄρα πρίσματα ἐστὶν ὡς αἱ βάσεις· καὶ τὸ μὲν ἐπὶ τοῦ ΑΒΓΔ ἄρα κύκλου ἀνασταθὲν πρίσμα ἥμισύ ἐστι τοῦ ἀνασταθέντος πρίσματος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου, καὶ ἔστιν ὁ κύλινδρος ἐλάττων τοῦ πρίσματος τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· τὸ ἄρα πρίσμα τὸ ἀνασταθὲν ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου τετμήθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ,

ΘΑ· καὶ ἑκάστου ἄρα τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ, τετραγώνων μεῖζόν ἐστιν ἡ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν. ἀνεσάτω ἐφ' ἑκάστου τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τετραγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ· καὶ ἑκάστου ἄρα τῶν ἀναστάντων πρισμάτων μεῖζόν ἐστιν ἡ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κυλίνδρου, ἐπείπερ ἐὰν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ σημείων παραλλήλους τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἀγάγωμεν, καὶ συμπληρώσωμεν τὰ ὑπὸ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ παραλληλόγραμμα, καὶ ἐπ' αὐτῶν ἀναστήσωμεν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ, ἑκάστου τῶν ἀναστάντων ἡμίσεά ἐστι τὰ ὑπὸ τὰ ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τετραγώνων. καὶ ἔστι τὰ τοῦ κυλίνδρου ὑποτμήματα ἐλάττονα τῶν ἀναστάντων στερεῶν παραλληλεπιπέδων· ὥστε καὶ τὰ ὑπὸ τὰ ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τοῦ κυλίνδρου τμημάτων· τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ὑποζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα ὑποτμήματα τοῦ κυλίνδρου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ἣ ὑπερέχει ὁ κύλινδρος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· λοιπὸν ἄρα τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μεῖζόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τοῦ κώνου. ἀλλὰ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, τριπλάσιόν ἐστι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν ΑΒΓΔ κύκλον. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων, ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσται ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων ἢ τριπλάσιος. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἢ τριπλάσιός ἐστιν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἐλάττων ἢ τριπλάσιος ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· ἀναπαλὶν ἄρα ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· τὸ ΑΒΓΔ ἄρα τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. καὶ ἀνεσάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πυραμὶς, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀναστᾶσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου, ἐπείπερ, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν, ὅτι ἐὰν διὰ τῶν κύλινδρον περιγράψωμεν τετράγωνον, ἔσται τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον ἥμισυ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου· καὶ ἐὰν ἀπὸ τῶν τετραγώνων στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀναστήσωμεν ἰσοϋψῆ τῷ κώνῳ, ἃ δὴ καλοῦσι πρίσματα, ἔσται τὸ ἀναστὰν ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ



ΘA jungantur. unumquodque igitur triangulorum AEB, BZΓ, ΓHΔ, ΔΘA majus eſt dimidio ſegmenti circuli ABΓΔ, in quo conſiſtit, ut ſuperius [ad 2. 12.] oſtendimus. erigantur ab unoquoque triangulorum AEB, BZΓ, ΓHΔ, ΔΘA priſmata æquealta cylindro: ergo & unumquodque erectorum priſmatum majus eſt dimidio reſpectivi ſegmenti cylindri, quoniam ſi per puncta E, Z, H, Θ parallelæ ipſis AB, BΓ, ΓΔ, ΔA ducantur, & compleantur ad ipſas AB, BΓ, ΓΔ, ΔA parallelogramma, à quibus ſolida parallelepipeda cylindro æquealta erigantur: erunt uniuſcujuſque erectorum dimidia priſmata ea quæ ſunt in triangulis AEB, BZΓ, ΓHΔ, ΔΘA. & ſunt cylindri ſegmenta erectis ſolidis parallelepipedis minora; ergo & priſmata quæ in triangulis AEB, BZΓ, ΓHΔ, ΔΘA majora ſunt dimidio reſpectivorum ſegmentorum cylindri. itaque reliquas circumferentias ſecantes bifariam, jungenteſque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes priſmata æquealta cylindro, & hoc ſemper facientes donec tandem [per 1. 10.] relinquantur quædam ſegmenta cylindri quæ ſint minora exceſſu, quo cylindrus ſuperat triplum ipſius coni. reliquantur jam, & ſint AE, EB, BZ, ZΓ, ΓH, HΔ, ΔΘ, ΘA: reliquum igitur priſma, cujus baſis quidem eſt polygonum AEBZΓHΔΘ altitudo autem eadem quæ cylindri, majus eſt quam triplum coni. ſed [per cor. 7. 12.] priſma, cujus baſis AEBZΓHΔΘ polygonum & altitudo eadem quæ cylindri, triplum eſt pyramidis, cujus baſis polygonum AEBZΓHΔΘ vertex autem idem qui coni: & igitur pyramis, cujus baſis polygonum AEBZΓHΔΘ vertex autem idem qui coni, major eſt cono, qui baſim habet ABΓΔ circulum. ſed & minor, ab ipſo enim comprehenditur, quod fieri non poteſt: non igitur cylindrus major erit quam triplus coni. Dico inſuper neque cylindrum minorem eſſe quam triplum coni. ſi enim fieri poteſt, ſit cylindrus minor quam triplus coni; erit igitur invertendo conus major quam tertia pars cylindri. deſcribatur in ABΓΔ circulo quadratum ABΓΔ; ergo quadratum ABΓΔ majus eſt quam dimidium circuli ABΓΔ. & à quadrato ABΓΔ erigatur pyramis, verticem habens eundem quem conus: pyramis igitur erecta major eſt quam coni dimidium; quoniam, ut ante demonſtravimus, ſi circa circulum quadratum deſcribatur, erit quadratum ABΓΔ dimidium ejus, quod circa circulum deſcriptum eſt. & ſi à quadratis erigantur ſolida parallelepipeda æquealta cono, quæ & priſmata appellantur; erit quod à quadrato ABΓΔ

erigitur dimidium ejus quod erectum eſt à quadrato circa circulum deſcripto, etenim [per 32. 11.] inter ſe ſunt ut baſes: quare etiam tertiæ partes ipſarum; pyramis igitur, cujus baſis quadratum ΑΒΓΔ, dimidia eſt ejus pyramidis quæ à quadrato circa circulum deſcripto erigitur. ſed pyramis erecta à quadrato deſcripto circa circulum major eſt cono, ipſum namque comprehendit: ergo pyramis, cujus baſis ΑΒΓΔ quadratum vertex autem idem qui coni, major eſt quam coni dimidium. ſecentur circumferentiæ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ bifariam in punctis Ε, Ζ, Η, Θ, & jungantur ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ; & unumquodque igitur triangulorum ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ majus eſt quam dimidium reſpectivi ſegmenti circuli ΑΒΓΔ: erigantur ab unoquoque triangulorum ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ pyramides verticem habentes eundem quem conus; ergo & unaquæque pyramidum ſic erectarum major eſt quam dimidium reſpectivi ſegmenti coni. itaque reliquas circumferentias ſecantes bifariam, jungenteſque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramidem verticem habentem eundem quem conus, & hoc ſemper facientes, relinquemus tandem [per 1.10.] quaſdam coni portiones quæ minores erunt exceſſu, quo conus tertiam cylindri partem ſuperat. relinquantur, & ſint quæ in ipſis ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ: reliqua igitur pyramis, cujus baſis polygonum ΑΕΒΖΓΗΔΘ & vertex idem qui coni, major eſt quam tertia cylindri pars. ſed [per cor. 7.12.] pyramis, cujus baſis polygonum ΑΕΒΖΓΗΔΘ vertex autem idem qui coni, tertia pars eſt priſmatis, cujus baſis polygonum ΑΕΒΖΓΗΔΘ altitudo autem eadem quæ cylindri: priſma igitur, cujus baſis ΑΕΒΖΓΗΔΘ polygonum & altitudo eadem quæ cylindri, majus eſt cylindro cujus baſis eſt circulus ΑΒΓΔ. ſed & minus; ab ipſo enim comprehenditur, quod fieri non poteſt: non igitur cylindrus minor eſt quam triplus coni. oſtenſum autem eſt neque majorem eſſe quam triplum: ergo cylindrus coni triplus eſt; ac propterea conus tertia pars cylindri.



Omnis igitur conus eſt tertia pars cylindri eandem quam ipſe baſim habentis & altitudinem æqualem. quod erat demonſtrandum.

Prop. XI. Theor.

Coni & cylindri, qui eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes.

SInt in eadem altitudine coni & cylindri, quorum baſes circuli ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, axes

πτεραγώνῳ ἥμισυ τοῦ ἀναγραφέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος πτεραγώνου, πρὸς ἄλληλά εἰσιν ὡς αἱ βάσεις· ὥστε καὶ τὸ τέταρτον· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, ἡμίσειά ἐστι τῆς πυραμίδος τῆς ἀναγραφείσης ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος πτεραγώνου. καὶ ἔστι μείζων ἡ πυραμὶς ἡ ἀναγραφεῖσα ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου τοῦ κώνου, ἐμπεριέχει γὰρ αὐτόν· ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. τετμήθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· καὶ ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. καὶ ἀνεστάτωσαν ἀφ' ἑκάστου τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πυραμίδες, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἐχούσας τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀναγραφεισῶν πυραμίδων κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδα τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἐχούσαν τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα τμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τοῦ ὑπερέχοντος, ἢ ὑπερέχει ὁ κῶνος τοῦ τρίτου μέρους τοῦ κυλίνδρου. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου. ἀλλ' ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος, ὃ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ· τὸ ἄρα πρίσμα, ὃ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μεῖζόν ἐστι τοῦ κυλίνδρου, ὃ βάσις ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μείζων ἢ τριπλάσιος· τριπλάσιος ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· ὥστε ὁ κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου.

Πᾶς ἄρα κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

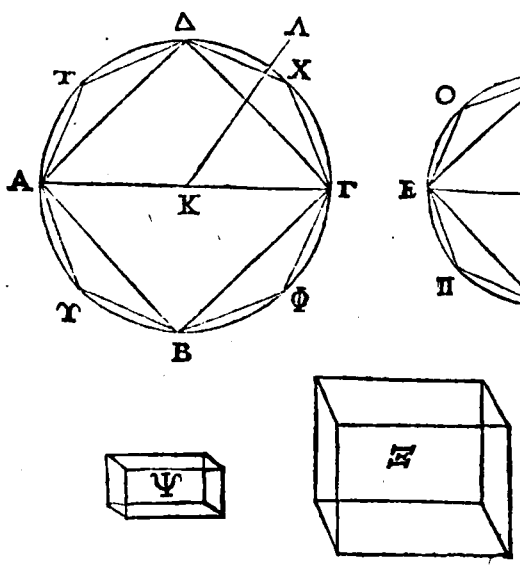
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

ΕΣτωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μέν εἰσιν οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, ἄξονες

ἄξονες δὲ οἱ ΚΛ, ΜΝ, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ ΑΓ, ΕΗ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΝ.

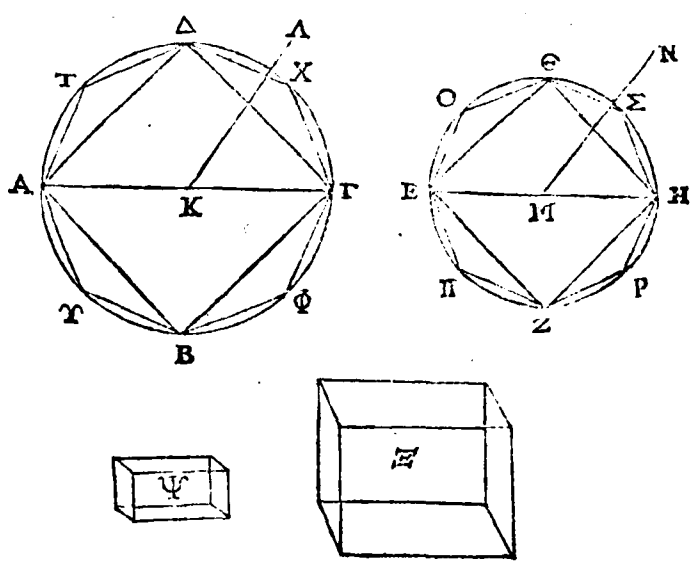
Εἰ γὰρ μή, ἔστω ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος ἢ πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεὸν ἢ πρὸς μεῖζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Ξ, καὶ ὡς ἔλασσόν ἐστι τὸ Ξ στερεὸν τοῦ ΕΝ κώνου, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ Ψ στερεόν· ὁ ΕΝ κῶνος ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς Ξ, Ψ στερεοῖς. ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ ἄρα τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κύκλου. ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀναστᾶσα πυραμὶς μεῖζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου· ἐπεὶ διήχθω ἐὰν περιγράψωμεν περὶ τὸν κύκλον τετράγωνον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀναστήσωμεν πυραμίδα ἰσοϋψῆ τῷ κώνῳ, ἡ ἐγγραφεῖσα πυραμὶς ἥμισύ ἐστι τῆς περιγραφείσης, πρὸς ἀλλήλας γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. ἐλάττων δὲ ὁ κῶνος τῆς περιγραφείσης πυραμίδος· ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις τὸ ΕΖΗΘ τετράγωνον κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μεῖζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ο, Π, Ρ, Σ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ· ἕκαστον ἄρα τῶν ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. ἀνεστάτω ἀφ' ἑκάστου τῶν ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ τριγώνων πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀναστάντων πυραμίδων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κώνου· τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ διὰ τῶν διγνυούσης εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐπὶ ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας ἰσοϋψεῖς τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ Ψ στερεοῦ. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ὑπὸ τὰ ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μεῖζων ἐστὶ τοῦ Ξ στερεοῦ. ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολυγώνῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ, καὶ ἀνεστάτω ἐπ' αὐτῷ πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ ΑΛ κώνῳ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τοῦ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ ΕΗ οὕτως τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, ὡς



autem ΚΛ, ΜΝ, & diametri baſium ΑΓ, ΕΗ: dico ut ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita eſſe conum ΑΛ ad ΕΝ conum.

Si enim non ita ſit; erit ut ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita conus ΑΛ vel ad aliquod ſolidum minus cono ΕΝ vel ad majus. ſit primo ad minus quod ſit Ξ, & quo minus eſt ſolidum Ξ cono ΕΝ ei æquale ſit Ψ ſolidum: conus igitur ΕΝ ipſis ſolidis Ξ, Ψ eſt æqualis. deſcribatur in ΕΖΗΘ circulo quadratum ΕΖΗΘ: ergo iſtud quadratum majus eſt quam dimidium circuli. erigatur à quadrato ΕΖΗΘ pyramis æquealta cono: pyramis igitur erecta major eſt quam coni dimidium: nam ſi circa circulum quadratum deſcribamus, & ab ipſo erigamus pyramidem æquealtam cono; erit inſcripta pyramis circumſcriptæ pyramidis dimidia; etenim [per 6. 12.] inter ſe ſunt ut baſes. conus autem circumſcripta pyramide eſt minor: ergo pyramis, cujus baſis quadratum ΕΖΗΘ vertex autem idem qui coni, major eſt quam coni dimidium. ſecentur circumferentiæ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ bifariam in punctis Ο, Π, Ρ, Σ; & ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ jungantur: unumquodque igitur triangulorum ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ majus eſt quam dimidium reſpectivi ſegmenti circuli. erigatur ab unoquoque triangulorum ΘΟΕ, ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ pyramis æquealta cono: ergo & unaquæque erectarum pyramidum major eſt quam dimidium reſpectivi ſegmenti coni: itaque reliquas circumferentias ſecantes bifariam, & jungentes rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides æquealtas cono, atque hoc ſemper facientes, relinquemus tandem [per 1. 10.] aliqua ſegmenta coni quæ ſolido Ψ minora erunt. relinquantur, & ſint quæ in ipſis ΘΟ, ΟΕ, ΕΠ, ΠΖ, ΖΡ, ΡΗ, ΗΣ, ΣΘ: reliqua igitur pyramis, cujus baſis polygonum ΘΟΕΠΖΡΗΣ altitudo autem eadem quæ coni, major eſt ſolido Ξ. deſcribatur in circulo ΑΒΓΔ polygono ΘΟΕΠΖΡΗΣ ſimile & ſimiliter poſitum polygonum ΔΤΑΥΒΦΓΧ, & ab ipſo erigatur pyramis æquealta cono ΑΛ. quoniam igitur eſt [per 20. 6. & 1. 12.] ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΕΗ ita ΔΤΑΥΒΦΓΧ polygonum ad polygonum ΘΟΕΠΖΡΗΣ; ut

autem quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΕΗ ita [per 2. 12.] ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ: erit [per 11. 5.] ut ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita polygonum ΔΤΑΤΒΦΓΧ ad polygonum ΘΟΕΠΖΡΗΣ. ſed [per conſtr.] ut ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita conus ΑΛ ad Ξ ſolidum; & [per 6. 12.] ut polygonum ΔΤΑΤΒΦΓΧ ad polygonum ΘΟΕΠΖΡΗΣ ita pyramis, cujus baſis ΔΤΑΤΒΦΓΧ polygonum vertex autem punctum Λ, ad pyramidem, cujus baſis polygonum ΘΟΕΠΖΡΗΣ & vertex punctum Ν: ut igitur conus ΑΛ ad Ξ ſolidum ita pyramis, cujus baſis polygonum ΔΤΑΤΒΦΓΧ & vertex punctum Λ, ad pyramidem, cujus baſis polygonum ΘΟΕΠΖΡΗΣ & vertex Ν punctum: quare permutando, ut conus ΑΛ ad pyramidem quæ in ipſo eſt ita ſolidum Ξ ad pyramidem quæ eſt in cono ΕΝ. conus autem ΑΛ major eſt pyramide quæ eſt in ipſo: majus igitur eſt ſolidum Ξ pyramide quæ in cono ΕΝ. ſed & minus, quod eſt abſurdum: non igitur ut ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita eſt ΑΛ conus ad ſolidum aliquod minus cono ΕΝ. ſimiliter demonſtrabitur, neque ut ΕΖΗΘ circulus ad circulum ΑΒΓΔ ita eſſe conum ΕΝ ad aliquod ſolidum minus cono ΑΛ. Dico præterea neque eſſe ut ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita ΑΛ conum ad aliquod ſolidum majus cono ΕΝ. ſi enim fieri poteſt, ſit ad ſolidum majus, quod ſit Ξ: ergo invertendo, ut ΕΖΗΘ circulus ad circulum ΑΒΓΔ ita erit ſolidum Ξ ad ΑΛ conum. ſed ut ſolidum Ξ ad ΑΛ conum ita conus ΕΝ ad aliquod ſolidum minus cono ΑΛ; & igitur ut ΕΖΗΘ circulus ad circulum ΑΒΓΔ ita conus ΕΝ ad aliquod ſolidum minus cono ΑΛ, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt: non igitur ut ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita conus ΑΛ ad aliquod ſolidum majus cono ΕΝ. oſtenſum autem eſt neque eſſe ad minus: ergo ut ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita eſt conus ΑΛ ad ΕΝ conum. Sed ut conus ad conum ita eſt cylindrus ad cylindrum, eſt enim [per 10. 12.] alter alterius triplus: & igitur ut ΑΒΓΔ circulus ad circulum ΕΖΗΘ ita in ipſis cylindri æqualti conis.



Ergo coni & cylindri, qui eandem habent

ἢ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἔτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον· ἢ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον ἔτως τὸ ΔΤΑΤΒΦΓΘ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον. ὡς δὲ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον ἔτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸ Ξ στερεόν, ὡς δὲ τὸ ΔΤΑΤΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον ἔτως ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΔΤΑΤΒΦΓΧ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸ Ξ στερεὸν ἔτως ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΔΤΑΤΒΦΓΧ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα ἔτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸ ἐν τῷ ΕΝ κώνῳ πυραμίδα. μείζων δὲ ὁ ΑΛ κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Ξ στερεὸν τοῦ ἐν τῷ ΕΝ κώνῳ πυραμίδος. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον ἔτως ὁ ΑΛ κῶνος πρός τινα ἔλαττόν τε τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ὡς ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ἔτως ὁ ΕΝ κῶνος πρός τινα ἔλαττόν τε τοῦ ΑΛ κώνου στερεόν. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἔστιν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον ἔτως ὁ ΑΛ κῶνος πρός τινα μεῖζόν τε τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω πρὸς μεῖζόν τι τὸ Ξ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ἔτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΛ κῶνον. ἀλλ' ὡς τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΛ κῶνον ἔτως ὁ ΕΝ κῶνος πρός τινα ἔλαττόν τε τοῦ ΑΛ κώνου στερεόν· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ἔτως ὁ ΕΝ κῶνος πρός τινα ἔλαττόν τε τοῦ ΑΛ κώνου στερεόν, ὅπερ ἐδείχθη ἀδυνάτον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον ἔτως ὁ ΑΛ κῶνος πρός τινα μεῖζόν τε τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ ἔτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΝ κῶνον. Αλλ' ὡς ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον ἔτως ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, τριπλάσιον γὰρ ἑκάτερος ἑκατέρου· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον ἔτως οἱ ἐπ' αὐτῶν ὁμοιοῦψεις τῶν κώνων κύλινδροι.

Οἱ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλιν-

δοι

ὄροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

altitudinem, inter se sunt ut bases. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

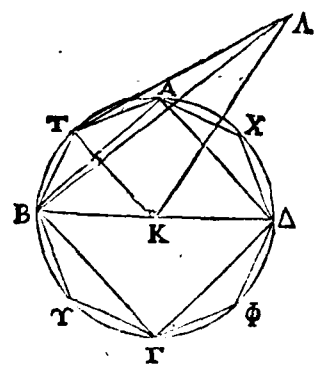
Οἱ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

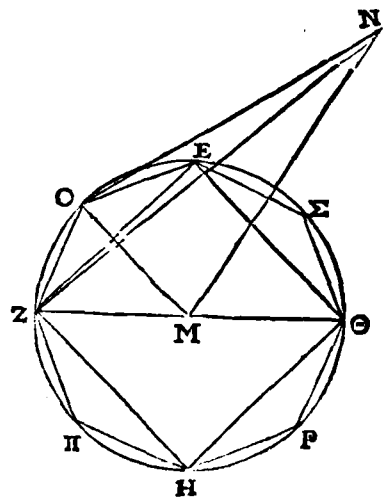
PROP. XII. THEOR.

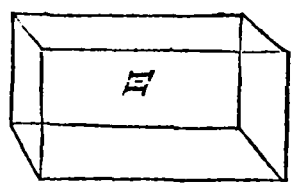
Similes coni & cylindri inter se sunt in triplicata ratione diametrorum basium.

Ἔστωσαν ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ ΒΔ, ΖΘ, ἄξονες δὲ τῶν κώνων ἢ κυλίνδρων οἱ ΚΛ, ΜΝ· λέγω ὅτι ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσις μὲν ὁ ΕΖΗΘ κύκλος κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

SInt similes coni & cylindri, quorum bases quidem circuli ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ, diametri vero basium ΒΔ, ΖΘ, & axes conorum vel cylindrorum ΚΛ, ΜΝ: dico conum, cujus basis ΑΒΓΔ circulus vertex autem punctum Λ, ad conum, cujus basis circulus ΕΖΗΘ vertex autem Λ punctum, triplicatam habere rationem ejus quam habet ΒΔ ad ΖΘ.





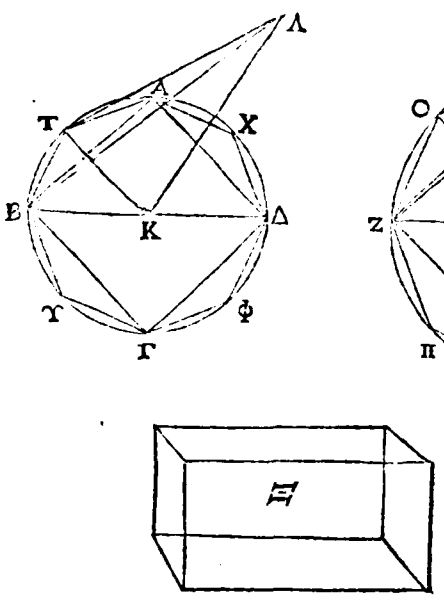


Εἰ γὰρ μὴ ἔχει ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, ἕξει ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος ἢ πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον, ἢ πρὸς μεῖζον. ἐχέτω πρὸς ἔλασσον πρότερον τὸ Ξ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ ἄρα ΕΖΗΘ τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. καὶ ἀνεσταθω ἀπὸ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀναστᾶσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν δὴ αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ τοῖς περιφερείαις δίχα κατὰ τὰ Ο, Π, Ρ, Σ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ· καὶ ἑκάτερον ἄρα τῶν ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. καὶ ἀνεσταθω ἐφ' ἑκάστου τῶν ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ τριγώνων πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀναστᾶσῶν πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἐχούσας τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ ὑπεροχῆς, ἣ ὑπερέχει ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος τοῦ Ξ στερεοῦ. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ὅπὶ

Si enim non habet conus ΑΒΓΔΛ ad conum ΕΖΗΘΝ triplicatam rationem ejus quam ΒΔ habet ad ΖΘ, habebit ΑΒΓΔΛ conus triplicatam rationem, vel ad aliquod solidum minus cono ΕΖΗΘΝ, vel ad majus. habeat primum ad minus, quod sit Ξ; & describatur in ΕΖΗΘ circulo quadratum ΕΖΗΘ: quadratum igitur ΕΖΗΘ majus est quam dimidium ΕΖΗΘ circuli. dein erigatur à quadrato ΕΖΗΘ pyramis æquealta cono: ergo erecta pyramis major est quam coni dimidium. itaque secentur ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ circumferentiæ bifariam in punctis Ο, Π, Ρ, Σ, & jungantur ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ: unumquodque igitur triangulorum ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ majus est quam dimidium respectivi segmenti circuli ΕΖΗΘ. porro erigatur ab unoquoque triangulorum ΕΟΖ, ΖΠΗ, ΗΡΘ, ΘΣΕ pyramis, eundem verticem habens quem conus: ergo & unaquæque erectarum pyramidum major est quam dimidium respectivi segmenti coni. secantes igitur reliquas circumferentias bifariam, jungentesque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides eundem habentes verticem quem conus, atque hoc semper facientes, tandem relinquemus [per 1.10.] quædam coni segmenta, quæ minora erunt excessu quo conus ΕΖΗΘΝ ipsum Ξ solidum superat. relinquantur, sintque quæ super

ipsa

ipſa ΕΟ; ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ: reliqua igitur pyramis, cujus baſis quidem polygonum ΕΟΖΠΗΡΘΣ vertex autem Ν punctum, major eſt ſolido Ξ. deſcribatur etiam in circulo ΑΒΓΔ polygono ΕΟΖΠΗΡΘΣ ſimile & ſimiliter poſitum polygonum ΑΤΒΥΓΦΔΧ; ex illo autem erigatur pyramis eundem verticem habens quem conus, & triangulorum continentium pyramidem, cujus baſis quidem eſt polygonum ΑΤΒΥΓΦΔΧ vertex autem punctum Λ, unum ſit ΛΒΤ: triangulorum vero continentium pyramidem, cujus baſis ΕΟΖΠΗΡΘΣ polygonum & vertex punctum Ν, unum ſit ΝΖΟ; denique jungantur ΚΤ, ΜΟ. quoniam igitur conus ΑΒΓΔΛ ſimilis eſt cono ΕΖΗΘΝ; erit [per 24. def. 11.] ut ΒΔ ad ΖΘ ita ΚΛ axis ad axem ΜΝ. ut autem ΒΔ ad ΖΘ ita ΒΚ ad ΖΜ: ergo & ut ΒΚ ad ΖΜ ita ΚΛ ad ΜΝ: permutando igitur ut ΒΚ ad ΚΛ ita ΖΜ ad ΜΝ: & anguli ΒΚΛ, ΖΜΝ æquales ſunt, quia recti, & circa æquales angulos ΒΚΛ ΖΜΝ, latera ſunt proportionalia: ſimile igitur eſt [per 6. 6.] ΒΚΛ triangulum triangulo ΖΜΝ. rurſus, quoniam eſt ut ΒΚ ad ΚΤ ita ΖΜ ad ΜΟ, ſuntque circa æquales angulos ΒΚΤ, ΖΜΟ; etenim quæ pars eſt angulus ΒΚΤ quatuor rectorum qui ſunt ad Κ centrum, eadem eſt pars & angulus ΖΜΟ quatuor rectorum qui ſunt ad centrum Μ: quoniam igitur circa æquales angulos latera ſunt proportionalia, erit [per 6. 6.] triangulum ΒΚΤ triangulo ΖΜΟ ſimile. rurſus, quoniam oſtenſum eſt ut ΒΚ ad ΚΛ ita eſſe ΖΜ ad ΜΝ; æqualis autem eſt ΒΚ ipſi ΚΤ & ΖΜ ipſi ΜΟ: erit ut ΚΤ ad ΚΛ ita ΟΜ ad ΜΝ: & circa æquales angulos ΤΚΛ, ΟΜΝ (nempe rectos) latera ſunt proportionalia; triangulum igitur ΛΚΤ ſimile eſt triangulo ΝΜΟ. quoniam vero ob ſimilitudinem triangulorum ΒΚΛ, ΖΜΝ eſt ut ΛΒ ad ΒΚ ita ΝΖ ad ΖΜ; ob ſimilitudinem vero triangulorum ΒΚΤ, ΖΜΟ ut ΚΒ ad ΒΤ ita ΜΖ ad ΖΟ: erit ex æquo [per 22. 5.] ut ΛΒ ad ΒΤ ita ΝΖ ad ΖΟ rurſus, quoniam ob ſimilitudinem triangulorum ΛΤΚ, ΝΟΜ eſt ut ΛΤ ad ΤΚ ita ΝΟ ad ΟΜ; & ob ſimilitudinem triangulorum ΚΒΤ, ΟΜΖ ut ΚΤ ad ΤΒ ita ΜΟ ad ΟΖ. πάλιν, ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΛΤΚ, ΝΟΜ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΛΤ πρὸς τὴν ΤΚ οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΜ, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΚΒΤ, ΟΜΖ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΚΤ πρὸς τὴν ΤΒ οὕτως ἡ ΜΟ



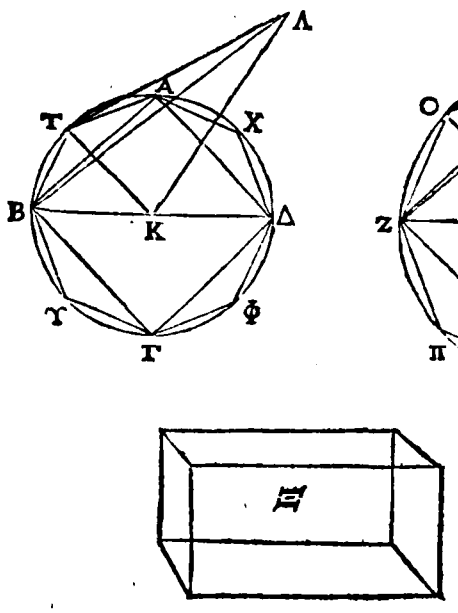
τῶν ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, μείζων ἐστὶ τοῦ Ξ στερεοῦ. ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολυγώνῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ, καὶ ἀνεστάτω ἀπ' αὐτοῦ πυραμὶς, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ, καὶ τὴν μὲν περιέχουσαν τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, ἐν τρίγωνον ἔστω τὸ ΛΒΤ, τὴν δὲ περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, ἐν τρίγωνον ἔστω τὸ ΝΖΟ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΤ, ΜΟ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιός ἐστιν ὁ ΑΒΓΔ κῶνος τῷ ΕΖΗΘ κώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ οὕτως ὁ ΚΛ ἄξων πρὸς τὸν ΜΝ ἄξονα. ὡς δὲ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΜΝ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΝ, καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΚΛ, ΖΜΝ ἴσαι, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΒΚΛ, ΖΜΝ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα τὸ ΒΚΛ τρίγωνον τῷ ΖΜΝ τριγώνῳ. πάλιν, ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΤ οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΟ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΒΚΤ, ΖΜΟ, ἐπιζευγνυμένη δὲ ἡ ὑπὸ ΒΚΤ γωνία τῶν πρὸς τῷ Κ κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν, τὰ αὐτὰ μέρος ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΜΟ γωνία τῶν πρὸς τῷ Μ κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν. ἐπεὶ οὖν περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα τὸ ΒΚΤ τρίγωνον τῷ ΖΜΟ τριγώνῳ. πάλιν, ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΝ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΒΚ τῇ ΚΤ, ἡ δὲ ΖΜ τῇ ΜΟ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΚΤ πρὸς τὴν ΚΛ οὕτως ἡ ΟΜ πρὸς τὴν ΜΝ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΤΚΛ, ΟΜΝ, ὀρθὰς γάρ, αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα τὸ ΛΚΤ τρίγωνον τῷ ΝΜΟ τριγώνῳ. καὶ ἐπειδὴ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΒΚΛ, ΖΜΝ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΚ οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς τὴν ΖΜ, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΒΚΤ, ΖΜΟ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΚΒ πρὸς τὴν ΒΤ οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΟ· δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΤ οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς τὴν ΖΟ. πάλιν, ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΛΤΚ, ΝΟΜ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΛΤ πρὸς τὴν ΤΚ οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΜ

MO

ΜΟ πρὸς τὴν ΟΖ· διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα ὡς ἡ ΛΤ πρὸς τὴν ΤΒ οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΖ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΤΒ πρὸς τὴν ΒΛ οὕτως ἡ ΟΖ πρὸς τὴν ΖΝ· διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα ὡς ἡ ΤΛ πρὸς τὴν ΛΒ οὕτως ἡ ΟΝ πρὸς τὴν ΝΖ· αἱ τοῦ ΛΤΒ, ΝΟΖ ἄρα τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί· ἰσογώνια ἄρα ἐστὶ τὰ ΛΤΒ, ΝΟΖ τρίγωνα· ὥστε καὶ ὅμοια· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΒΚΤ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΖΜΟ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, ἐπὶ γὰρ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται ἴσων τὸ πλῆθος. αἱ δὲ ὁμοίας πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις εἰς τριπλασίονα λόγον εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ἡ ἄρα ΒΚΤΛ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΜΟΝ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ. ὁμοίως δὴ δείξομεν καὶ ἀπὸ τῶν Α, Χ, Δ, Φ, Γ, Υ εὐθείας ἐπὶ τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Σ, Θ, Ρ, Η, Π ἐπὶ τὸ Μ, καὶ ἀνιστάντες ἐπὶ τῶν τριγώνων πυραμίδας τὰς αὐτὰς κορυφὰς ἐχούσας τοῖς κώνοις, δείξομεν ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὁμοταγῶν πυραμίδων πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔξει ἥπερ ἡ ΒΚ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΜ ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἥπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. ἀλλ' ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ΒΚΤΛ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΜΟΝ πυραμίδα οὕτως ἡ ὅλη πυραμὶς, ἧς βάσις τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν ὅλην πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον· ὥστε καὶ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. ὑπόκειται δὲ ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὸ Ξ στερεὸν, τριπλασίονα λόγον ἔχων ἥπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὸ Ξ στερεὸν, οὕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Λ. πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Ν. ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Λ, οὕτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Ν. μείζων δὲ ὁ εἰρημένος κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος, ἐμπεριέχει γὰρ αὐτήν· μείζον ἄρα καὶ τὸ Ξ στερεὸν τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ κῶνος, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ κώνου στερεὸν, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ ΕΖΗΘ κύκλος κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὁ ΕΖΗ

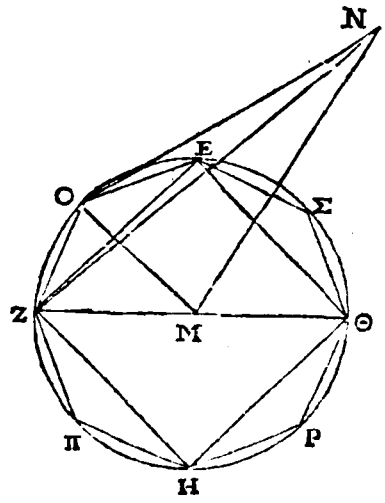
ad ΟΖ: ex æquo erit ut ΛΤ ad ΤΒ ita ΝΟ ad ΟΖ. oſtenſum autem eſt & ut ΤΒ ad ΒΛ ita ΟΖ ad ΖΝ: quare rurſus ex æquo ut ΤΛ ad ΛΒ ita ΟΝ ad ΝΖ: triangulorum igitur ΛΤΒ, ΝΟΖ proportionalia ſunt latera: ideoque [per 5. 6.] æquiangula ſunt ΛΤΒ, ΝΟΖ triangula & inter ſe ſimilia: quare [per 9. def. 11.] & pyramis, cujus baſis triangulum ΒΚΤ vertex autem Λ punctum, ſimilis eſt pyramidi, cujus baſis ΖΜΟ triangulum & vertex punctum Ν; ſimilibus enim planis continentur & multitudine æqualibus. pyramides autem ſimiles, quæ triangulares baſes habent, ſunt [per 8. 12.] in triplicata ratione homologorum laterum: ergo pyramis ΒΚΤΛ ad pyramidem ΖΜΟΝ triplicatam habet rationem ejus quam ΒΚ habet ad ΖΜ. ſimiliter à punctis quidem Α, Χ, Δ, Φ, Γ, Υ ad Κ, à punctis vero Ε, Σ, Θ, Ρ, Η, Π ad Μ ducentes rectas lineas, & à triangulis erigentes pyramides vertices eoſdem habentes quos coni, oſtendemus & unamquamque pyramidum ejuſdem ordinis ad unamquamque alterius ordinis triplicatam rationem habere ejus quam habet ΒΚ latus homologum ad homologum latus ΖΜ, hoc eſt quam ΒΔ habet ad ΖΘ. ſed [per 12. 5.] ut unum antecedentium ad unum conſequentium ita omnia antecedentia ad omnia conſequentia: eſt igitur & ut ΒΚΤΛ pyramis ad pyramidem ΖΜΟΝ ita tota pyramis, cujus baſis ΑΤΒΥΓΦΔΧ polygonum vertex autem punctum Λ, ad totam pyramidem, cujus baſis polygonum ΕΟΖΠΗΡΘΣ & vertex punctum Ν: quare & pyramis, cujus baſis ΑΤΒΥΓΦΔΧ polygonum vertex autem punctum Λ ad pyramidem, cujus baſis polygonum ΕΟΖΠΗΡΘΣ & vertex punctum Ν, triplicatam rationem habet ejus quam ΒΔ habet ad ΖΘ. ponitur autem conus, cujus baſis circulus ΑΒΓΔ, vertex autem punctum Λ, ad ſolidum Ξ triplicatam rationem habere ejus quam habet ΒΔ ad ΖΘ: ut igitur conus, cujus baſis circulus ΑΒΓΔ vertex autem punctum Λ, ad ſolidum Ξ ita eſt pyramis, cujus baſis ΑΤΒΥΓΦΔΧ polygonum vertex autem punctum Λ, ad pyramidem, cujus baſis polygonum ΕΟΖΠΗΡΘΣ & vertex punctum Ν. & permutando [per 16. 5.] ut conus, cujus baſis circulus ΑΒΓΔ vertex autem punctum Λ, ad pyramidem quæ in ipſo eſt, cujus baſis ΑΤΒΥΓΦΔΧ polygonum vertex autem punctum Λ, ita ſolidum Ξ ad pyramidem, cujus baſis polygonum ΕΟΖΠΗΡΘΣ & vertex punctum Ν. dictus autem conus major eſt pyramide quæ in ipſo eſt; etenim eam comprehendit: majus igitur eſt & ſolidum Ξ pyramide, cujus baſis polygonum ΕΟΖΠΗΡΘΣ vertex autem punctum Ν. ſed & minus, quod fieri non poteſt: non igitur conus, cujus baſis ΑΒΓΔ circulus & vertex punctum Λ, ad aliquod ſolidum minus cono, cujus baſis circulus ΕΖΗΘ & vertex Ν punctum, triplicatam rationem habet ejus quam ΒΔ habet ad ΖΘ. ſimiliter demonſtrabimus neque conum ΕΖΗ

ΘΝ ad aliquod ſolidum minus cono ΑΒΓΔΛ triplicatam rationem habere ejus quam habet ΖΘ ad ΒΔ. Dico neque ΑΒΓΔΘ conum ad ſolidum majus cono ΕΖΗΘΝ triplicatam habere rationem ejus quam ΒΔ habet ad ΖΘ. ſi enim fieri poteſt, habeat ad aliquod ſolidum majus, quod ſit Ξ: invertendo igitur, ſolidum Ξ ad conum ΑΒΓΔΛ triplicatam ratio nem habet ejus quam ΖΘ habet ad ΒΔ. ut autem ſolidum Ξ ad conum ΑΒΓΔΛ ita ΕΖΗΘΝ conus ad aliquod ſolidum minûs cono ΑΒΓΔΛ: ergo & conus ΕΖΗΘΝ ad ſolidum aliquod minus cono ΑΒΓΔΛ triplicatam rationem habebit ejus quam ΖΘ habet ad ΒΔ, quod fieri non poſſe demonſtratum eſt: non igitur ΑΒΓΔΛ conus ad ſolidum aliquod majus cono ΕΖΗΘΝ triplicatam rationem habet ejus quam ΒΔ habet ad ΖΘ. oſtenſum autem eſt neque ad minus: quare conus ΑΒΓΔΛ ad ΕΖΗΘΝ conum triplicatam rationem habet ejus quam ΒΔ habet ad ΖΘ. Ut autem conus ad conum ita & cylindrus ad cylindrum, cylindrus enim in eadem exiſtens baſi in qua conus, & ipſi æqualtus coni triplus eſt, cum [per 10. 12.] oſtenſum ſit omnem conum tertiam partem eſſe cylindri eandem quam ipſe baſim habentis & æqualem altitudinem: ergo & cylindrus ad cylindrum triplicatam rationem habebit ejus quam ΒΔ habet ad ΖΘ.



Similes igitur coni & cylindri inter ſe ſunt in triplicata ratione diametrorum baſium. quod erat demonſtrandum.

ΘΝ κώνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ. Λέγω ὅτι οὐδὲ ὁ ΑΒΓΔΘ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. εἰ γὰρ δυνατόν, ἐχέτω πρὸς μεῖζον τὸ Ξ· ἀνάπαλιν ἄρα τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΛ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ. ὡς δὲ τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΛ κῶνον οὕτως ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεόν· καὶ ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος ἄρα πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ, ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττον· ὁ ΑΒΓΔΛ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Ὡς δὲ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον οὕτως ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, τριπλάσιος γὰρ ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ὁ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῷ κώνῳ καὶ ἰσοϋψὴς αὐτῷ· ἐδείχθη γὰρ πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον· καὶ κύλινδρος ἄρα πρὸς τὸν κύλινδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.



Οἱ ἄρα ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XIII. Theor.

Si cylindrus plano ſecetur oppoſitis planis parallelo; erit ut cylindrus ad cylindrum ita axis ad axem.

Cylindrus enim ΑΔ plano ΗΘ ſecetur oppoſitis planis ΑΒ, ΓΔ parallelo, & occurrat axi ΕΖ in Κ puncto: dico ut ΒΗ cylindrus ad cylindrum ΗΔ ita eſſe ΕΚ axem ad axem ΚΖ.

Producatur enim ΕΖ axis ex utraque parte ad puncta Λ, Μ, & ipſi quidem ΕΚ axi

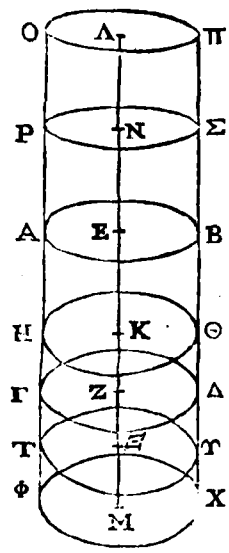
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν κύλινδρος ὑπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὀπιπέδοις, ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον οὕτως ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

Κύλινδρος γὰρ ὁ ΑΔ ὑπιπέδῳ τῷ ΗΘ τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ὑπιπέδοις τοῖς ΑΒ, ΓΔ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ΕΖ ἄξονι κατὰ τὸ Κ σημεῖον· λέγω ὅτι ὡς ὁ ΒΗ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον οὕτως ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξονα.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ ΕΖ ἄξων ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Λ, Μ σημεῖα, καὶ εἰλήφθωσαν τῷ μὲν ΕΚ ἄξονι ἴσοι

ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ ΕΝ, ΝΛ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ ΖΞ, ΞΜ, καὶ διήχθωσαν διὰ τῶν Λ, Ν, Ξ, Μ σημείων ὀπίπεδα παράλληλα τοῖς ΑΒ, ΓΔ, καὶ νενοήθωσαν ἐν τοῖς διὰ τῶν Λ, Ν, Ξ, Μ ὀπιπέδοις περὶ κέντρα τὰ Λ, Ν, Ξ, Μ κύκλοι οἱ ΟΠ, ΡΣ, ΤΥ, ΦΧ ἴσοι τοῖς ΑΒ, ΓΔ, καὶ νενοήθωσαν κύλινδροι οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΔΤ, ΤΧ. καὶ ἐπεὶ οἱ ΑΝ, ΝΕ, ΕΚ ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις· οἱ ἄρα ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δέ εἰσιν αἱ βάσεις· ἴσοι ἄρα εἰσὶ οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι. ἐπεὶ οὖν οἱ ΑΝ, ΝΕ, ΕΚ ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι ἴσοι ἀλλήλοις, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΝ, ΝΕ, ΕΚ τῷ πλήθει τῶν ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ· ὁσαπλάσιών ἄρα ὁ ΚΛ ἄξων τοῦ ΕΚ ἄξονος τοσαυταπλασίων ἔσται καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΒ κυλίνδρου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ὁ ΜΚ ἄξων τοῦ ΚΖ ἄξονος τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΧΗ κύλινδρος τοῦ ΗΔ κυλίνδρου. καὶ εἰ μὲν ἴσος ἐστὶν ὁ ΚΛ ἄξων τῷ ΚΜ ἄξονι, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τῷ ΗΧ κυλίνδρῳ· εἰ δὲ μείζων ὁ ΚΛ ἄξων τοῦ ΚΜ ἄξονος, μείζων καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυλίνδρου, καὶ εἰ ἐλάσσων ἐλάσσων· τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, ἀξόνων μὲν τῶν ΕΚ, ΚΖ κυλίνδρων δὲ τῶν ΒΗ, ΗΔ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια, τοῦ μὲν ΕΚ ἄξονος καὶ τοῦ ΒΗ κυλίνδρου, ὅ, τε ΚΛ ἄξων καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος, τοῦ δὲ ΚΖ ἄξονος καὶ τοῦ ΗΔ κυλίνδρου, ὅ, τε ΚΜ ἄξων καὶ ὁ ΗΧ. καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ὁ ΚΛ ἄξων τοῦ ΚΜ ἄξονος, ὑπερέχει καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυλίνδρου, καὶ εἰ ἴσος ἴσος, καὶ εἰ ἐλάττων ἐλάττων· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξονα οὕτως ὁ ΒΗ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



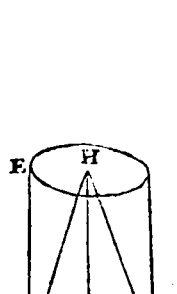
ponantur æquales quotcunque ΕΝ, ΝΛ; ipſi vero ΖΚ æquales quotcunque ΖΞ, ΞΜ; dein per puncta Λ, Ν, Ξ, Μ ducantur plana ipſis ΑΒ, ΓΔ parallela; atque in planis per Λ, Ν, Ξ, Μ circa centra Λ, Ν, Ξ, Μ intelligantur circuli ΟΠ, ΡΣ, ΤΥ, ΦΧ æquales ipſis ΑΒ, ΓΔ; cylindri denique ΠΡ, ΡΒ, ΔΤ, ΤΧ conſtitui intelligantur. quoniam igitur axes ΛΝ, ΝΒ, ΕΚ inter ſe ſunt æquales, erunt [per 11. 12.] cylindri ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ inter ſe ut baſes. baſes autem æquales ſunt: ergo & cylindri ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ ſunt æquales. quoniam autem axes ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ inter ſe æquales ſunt, itemque cylindri ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ inter ſe æquales, atque eſt ipſorum ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ multitudo æqualis multitudini ipſorum ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ: quotuplex igitur eſt axis ΚΛ ipſius ΕΚ axis totuplex erit & ΠΗ cylindrus cylindri ΗΒ. eadem ratione & quotuplex eſt ΜΚ axis ipſius axis ΚΖ totuplex eſt & ΧΗ cylindrus cylindri ΗΔ. & ſi quidem axis ΚΛ ſit æqualis axi ΚΜ, erit & ΠΗ cylindrus cylindro ΗΧ æqualis: ſi autem axis ΚΛ major ſit axe ΚΜ, & cylindrus ΠΗ major erit cylindro ΗΧ; & ſi minor, minor: quatuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, videlicet axibus ΕΚ, ΚΖ & cylindris ΒΗ, ΗΔ, ſumpta ſunt æquemultiplicia, axis quidem ΕΚ & ΒΗ cylindri, nempe axis ΚΛ & cylindrus ΠΗ; axis vero ΚΖ & cylindri ΗΔ æquemultiplicia, axis ſcilicet ΚΜ & ΗΧ cylindrus. demonſtratum etiam eſt, quod ſi ΚΛ axis ſuperat axem ΚΜ, & ΠΗ cylindrus ſuperabit cylindrum ΗΧ; & ſi æqualis erit, æqualis; & ſi minor, minor: eſt igitur [per 4. def. 5.] ut axis ΕΚ ad axem ΚΖ ita cylindrus ΒΗ ad cylindrum ΗΔ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Οἱ ὑπὸ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη.

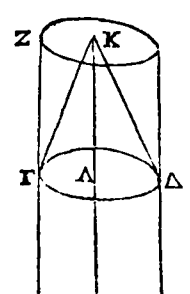
Ἔστωσαν γὰρ ὑπὸ ἴσων βάσεων τῶν ΑΒ, ΓΔ κύλινδροι οἱ ΖΔ, ΕΒ· λέγω ὅτι ὡς ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον οὕτως ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ ΚΛ ἄξων ἐπὶ τὸ Ν σημεῖον, καὶ κείσθω τῷ ΗΘ ἄξονι ἴσος ὁ ΛΝ, καὶ περὶ ἄξονα τὸν ΛΝ κύλινδρος νενοήσθω ὁ ΓΜ. ἐπεὶ οὖν οἱ ΕΒ, ΓΜ κύλινδροι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶ πρὸς ἀλλήλους



PROP. XIV. THEOR.

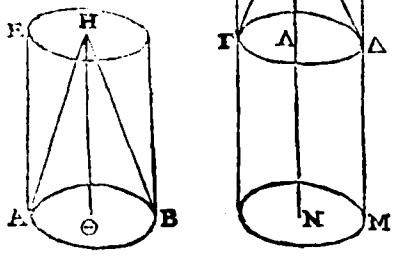
Æqualibus baſibus inſiſtentes coni aut cylindri inter ſe ſunt ut altitudines.



SInt enim in æqualibus baſibus ΑΒ, ΓΔ cylindri ΖΔ, ΕΒ: dico ut ΕΒ cylindrus ad cylindrum ΖΔ ita eſſe Η Θ axem ad axem ΚΛ.

Producatur enim ΚΛ axis ad punctum Ν; ponaturque ipſi ΗΘ axi æqualis ΛΝ; dein circa axem ΛΝ intelligatur conſtitutus cylindrus ΓΜ. quoniam igitur cylindri ΕΒ, ΓΜ eandem habent altitudinem,

nem, [per 11.12.] inter se sunt ut bases. bases autem sunt æquales: ergo & cylindri EB, ΓM inter se æquales erunt. quoniam vero cylindrus ZM secatur plano ΓΔ oppositis planis parallelo; erit [per 13.12.] ut ΓM cylindrus ad cylindrum ZΔ ita axis ΛN ad KΛ axem. æqualis autem est cylindrus quidem ΓM cylindro EB, axis vero ΛN axi HΘ: est igitur ut EB cylindrus ad cylindrum ZΔ ita axis HΘ ad KΛ axem. Ut autem EB cylindrus ad cylindrum ZΔ ita ABH conus ad conum ΓΔK; cylindri enim sunt [per 10.12.] conorum tripli: ergo & ut HΘ axis ad axem KΛ ita est ΛBH conus ad conum ΓΔK, & cylindrus EB ad ZΔ cylindrum. quod erat demonstrandum.



λως εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δέ εἰσιν αἱ βάσεις ἀλλήλαις· ἴσοι ἄρα εἰσὶ καὶ οἱ EB, ΓM κύλινδροι ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ κύλινδρος ὁ ZM ἐπιπέδῳ τέτμηται τῷ ΓΔ ᾠδαλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓM κύλινδρος πρὸς τὸν Z Δ κύλινδρον οὕτως ὁ ΛN ἄξων πρὸς τὸν KΛ ἄξονα. ἴσος δὲ ἐστὶν ὁ μὲν ΓM κύλινδρος τῷ EB κυλίνδρῳ, ὁ δὲ ΛN ἄξων τῷ HΘ ἄξονι· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ EB κύλινδρος πρὸς τὸν Z Δ κύλινδρον οὕτως ὁ HΘ ἄξων πρὸς τὸν KΛ ἄξονα. Ὡς δὲ ὁ EB κύλινδρος πρὸς τὸν Z Δ κύλινδρον οὕτως ὁ ABH κῶνος πρὸς τὸν ΓΔK κῶνον, τριπλάσιον γὰρ οἱ κύλινδροι τῶν κώνων· καὶ ὡς ἄρα ὁ HΘ ἄξων πρὸς τὸν KΛ ἄξονα οὕτως ὁ ABH κῶνος πρὸς ΓΔK κῶνον καὶ ὁ EB κύλινδρος πρὸς τὸν Z Δ κύλινδρον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XV. THEOR.

Æqualium conorum aut cylindrorum bases sunt altitudinibus reciproce proportionales: item quorum conorum aut cylindrorum bases altitudinibus reciproce proportionales sunt, illi inter se sunt æquales.

SInt æquales coni & cylindri, quorum bases quidem ABΓΔ, EZHΘ circuli, & diametri ipsorum AΓ, EH; axes vero KΛ, MN, qui quidem & conorum vel cylindrorum sunt altitudines, atque compleantur cylindri AΞ, EO: dico cylindrorum AΞ, EO bases esse reciproce proportionales altitudinibus, hoc est, ut ABΓΔ basis ad basim EZHΘ ita esse altitudinem MN ad altitudinem KΛ.

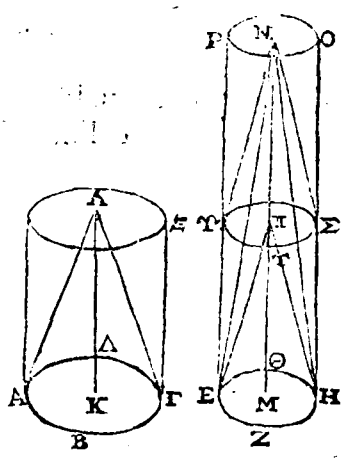
Altitudo enim KΛ vel æqualis est altitudini MN, vel non æqualis. sit primum æqualis. est autem AΞ cylindrus æqualis cylindro EO. qui vero eandem habent altitudinem coni aut cylindri [per 11. 12.] inter se sunt ut bases: æqualis igitur est basis ABΓΔ basi EZHΘ; ac propterea sunt reciproce proportionales, hoc est, ut basis ABΓΔ ad EZHΘ basim ita MN altitudo ad altitudinem KΛ. Non sit autem altitudo KΛ altitudini MN æqualis, sed sit MN major, atque auferatur ab ipsa MN altitudini KΛ æqualis ΠM, & per Π secetur EO cylindrus plano TTΣ oppositis planis circulorum EZHΘ, PO parallelo, intelligaturque constitutus cylindrus EΣ, cujus basis quidem EZHΘ circulus, altitudo autem ΠM. quoniam igitur [ex hyp.] AΞ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Τῶν ἴσων κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν ἴσοι εἰσὶν ἐκεῖνοι.

Ἔστωσαν ἴσοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ ABΓΔ, EZHΘ κύκλοι, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ AΓ, EH, ἄξονες δὲ οἱ KΛ, MN, οἵτινες καὶ ὕψη εἰσὶν κώνων ἢ κυλίνδρων, καὶ συμπεπληρώσθωσαν οἱ AΞ, EO κύλινδροι· λέγω ὅτι τῶν AΞ, EO κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, τουτέστιν ὡς ἡ ABΓΔ βάσις πρὸς τὴν EZHΘ βάσιν οὕτως τὸ MN ὕψος πρὸς τὸ KΛ ὕψος.

Τὸ γὰρ KΛ ὕψος τῷ MN ὕψει ἤτοι ἴσον ἐστὶν, ἢ οὔ. ἔστω πρότερον ἴσον. ἔστι δὲ καὶ ὁ AΞ κύλινδρος τῷ EO κυλίνδρῳ ἴσος. οἱ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ABΓΔ βάσις τῇ EZHΘ βάσει· ὥστε καὶ ἀντιπεπόνθασιν, ὡς ἡ ABΓΔ βάσις πρὸς τὴν EZHΘ βάσιν οὕτως τὸ MN ὕψος πρὸς τὸ KΛ ὕψος. Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω τὸ KΛ ὕψος τῷ MN ἴσον, ἀλλ' ἔστω τὸ MN μεῖζον, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ MN ὕψους τῷ KΛ ἴσον τὸ ΠM, καὶ διὰ τοῦ Π σημείου τετμήσθω ὁ EO κύλινδρος ἐπιπέδῳ τῷ TTΣ ᾠδαλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς EZHΘ, PO κύκλων, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τοῦ EZHΘ κύκλου ὕψος δὲ τὸ ΠM κύλινδρος νενοήσθω ὁ EΣ. καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ἡ AΞ κύλιν-



λινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ, ἄλλος δέ τις ὁ ΕΣ κύλινδρος· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸ ΕΣ κύλινδρον οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸ ΕΣ κύλινδρον. ἀλλ' ὡς μὲν ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ οὕτως ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, ἴσοι γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν οἱ ΑΞ, ΕΣ κύλινδροι. ὡς δὲ ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΜΠ ὕψος, ὁ γὰρ ΕΟ κύλινδρος ὑπιπέδῳ τέτμηται τῷ ΤΥΣ ὠδαλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΜΠ ὕψος. ἴσον δὲ τὸ ΜΠ ὕψος τῷ ΚΛ ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος· τῶν ἄρα ΑΞ, ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

ΑΛΛΑ δὴ τῶν ΑΞ, ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος· λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος, ἴσον δὲ τὸ ΚΛ ὕψος τῷ ΜΠ ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΜΠ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν οὕτως ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον, ἴσοι γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσίν. ὡς δὲ τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΜΠ ὕψος οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον· ἴσος ἄρα ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ. ὡσαύτως δὴ καὶ ἐπὶ τῶν κώνων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

cylindrus æqualis est cylindro ΕΟ, alius autem aliquis est cylindrus ΕΣ; erit [per 7. 5.] ut ΑΞ cylindrus ad cylindrum ΕΣ ita cylindrus ΕΟ ad ΕΣ cylindrum. sed [per 11. 12.] ut ΑΞ cylindrus ad cylindrum ΕΣ ita basis ΑΒΓΔ ad ΕΖΗΘ basim; cylindri enim ΑΞ, ΕΣ eandem habent altitudinem. ut autem cylindrus ΕΟ ad ΕΣ cylindrum ita [per 13. 12.] ΜΝ altitudo ad altitudinem ΜΠ; nam cylindrus ΕΟ secatur plano ΤΥΣ oppositis planis parallelo; est igitur ut ΑΒΓΔ basis ad basim ΕΖΗΘ ita altitudo ΜΝ ad ΜΠ altitudinem. æqualis autem est ΜΠ altitudo altitudini ΚΛ: quare ut basis ΑΒΓΔ ad ΕΖΗΘ basim ita ΜΝ altitudo ad altitudinem ΚΛ: æqualium igitur cylindrorum ΑΞ, ΕΟ bases sunt reciproce proportionales altitudinibus.

Sed cylindrorum ΑΞ, ΕΟ bases sint reciproce proportionales altitudinibus, sitque ut ΑΒΓΔ basis ad basim ΕΖΗΘ ita altitudo ΜΝ ad ΚΛ altitudinem: dico ΑΞ cylindrum cylindro ΕΟ æqualem esse.

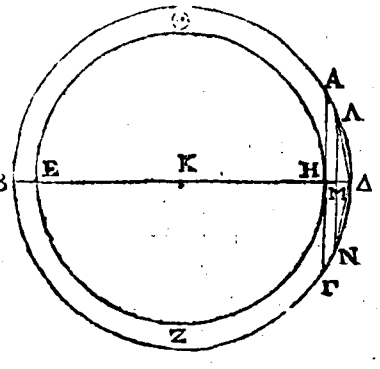
Iisdem enim constructis, quoniam ut ΑΒΓΔ basis ad basim ΕΖΗΘ ita est altitudo ΜΝ ad ΚΛ altitudinem, altitudo autem ΚΛ est æqualis altitudini ΜΠ: erit ut ΑΒΓΔ basis ad basim ΕΖΗΘ ita ΜΝ altitudo ad altitudinem ΜΠ. sed [per 11. 12.] ut ΑΒΓΔ basis ad basim ΕΖΗΘ ita est & ΑΞ cylindrus ad cylindrum ΕΣ: eandem enim habent altitudinem. ut autem ΜΝ altitudo ad altitudinem ΜΠ ita [per 13. 12.] cylindrus ΕΟ ad ΕΣ cylindrum: est igitur ut ΑΞ cylindrus ad cylindrum ΕΣ ita cylindrus ΕΟ ad ΕΣ cylindrum: cylindrus igitur ΑΞ [per 9. 5.] cylindro ΕΟ est æqualis. similiter autem & in conis. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων, εἰς τὸν μείζονα κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τὸν ἐλάσσονος κύκλου.

Ἐστωσαν οἱ δοθέντες δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Κ· δεῖ δὴ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΑΒΓΔ πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Κ κέντρου εὐθεῖα ἡ ΒΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η σημείου τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΑΗ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Γ· ἡ ΑΓ ἄρα ἐφάψεται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· πεπονήσθω δὴ τοῦ ΒΑΔ περιφερείας δίχα, καὶ τοῦ ἡμισείας αὐτῆς δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομεν περιφέρειαν ἐλάττονα τοῦ ΑΔ. λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ ΛΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τοῦ ΒΔ κάθετος ἤχθω



Prop. XVI. Probl.

Duobus circulis circa idem centrum consistentibus, in majori polygonum æqualium ac parium numero laterum describere, quod minorem circulum non tangat.

Sint dati duo circuli ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ circa idem centrum Κ: oportet in majori circulo ΑΒΓΔ polygonum æqualium ac parium numero laterum describere, non tangens minorem circulum ΕΖΗΘ.

Ducatur enim per Κ centrum recta linea ΒΔ, atque à puncto Η ipsi ΒΔ ad rectos angulos ducatur ΑΗ, & ad Γ producatur: ergo [per 16. 3.] ΑΓ circulum ΕΖΗΘ tangit: itaque circumferentiam ΒΑΔ bifariam secantes, & ejus dimidium rursus bifariam, & hoc semper facientes, tandem relinquemus [per 1. 10.] circumferentiam minorem ipsa ΑΔ. relinquatur, sitque ΛΔ, & à puncto Λ ad ΒΔ perpendicularis

agatur ΛM, & ad N producatur, junganturque ΛΔ, ΔN: ergo ΛΔ ipſi ΔN eſt æqualis. & quoniam ΛN parallela eſt ipſi AΓ, ipſa vero AΓ tangit circulum EZHΘ; ipſa ΛN circulum EZHΘ non tanget, & multo minus tangent circulum EZHΘ rectæ lineæ ΛΔ, ΔN. quod ſi [per 1. 4.] ipſi ΛΔ æquales deinceps circulo ABΓA aptabimus, deſcribetur in eo polygonum æqualium ac parium numero laterum, non tangens minorem circulum EZHΘ. quod erat faciendum.

ἡ ΛM, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ N, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΔ, ΔN. ΛM· ἴση ἄρα ἡ ΛΔ τῇ ΔN. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΛN τῇ AΓ, ἡ δὲ AΓ ἐφάπτεται τοῦ EZHΘ κύκλου· ἡ ΛN ἄρα οὐκ ἐφάπτεται τοῦ EZHΘ κύκλου· πολλῷ ἄρα αἱ ΛΔ, ΔN οὐκ ἐφάπτονται τοῦ EZHΘ κύκλου. ἐὰν ἄρα τῇ ΛΔ εὐθείᾳ ἴσας κατὰ τὸ συνεχὲς ἁρμόσωμεν εἰς τὸν ABΓΔ κύκλον, ἐγγραφήσεται εἰς τὸν ABΓΔ κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον, μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάττονος κύκλου τοῦ EZHΘ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XVII. Probl.

Duabus ſphæris circa idem centrum conſiſtentibus, in majori ſolidum polyedrum deſcribere, quod minoris ſphæræ ſuperficiem non tangat.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

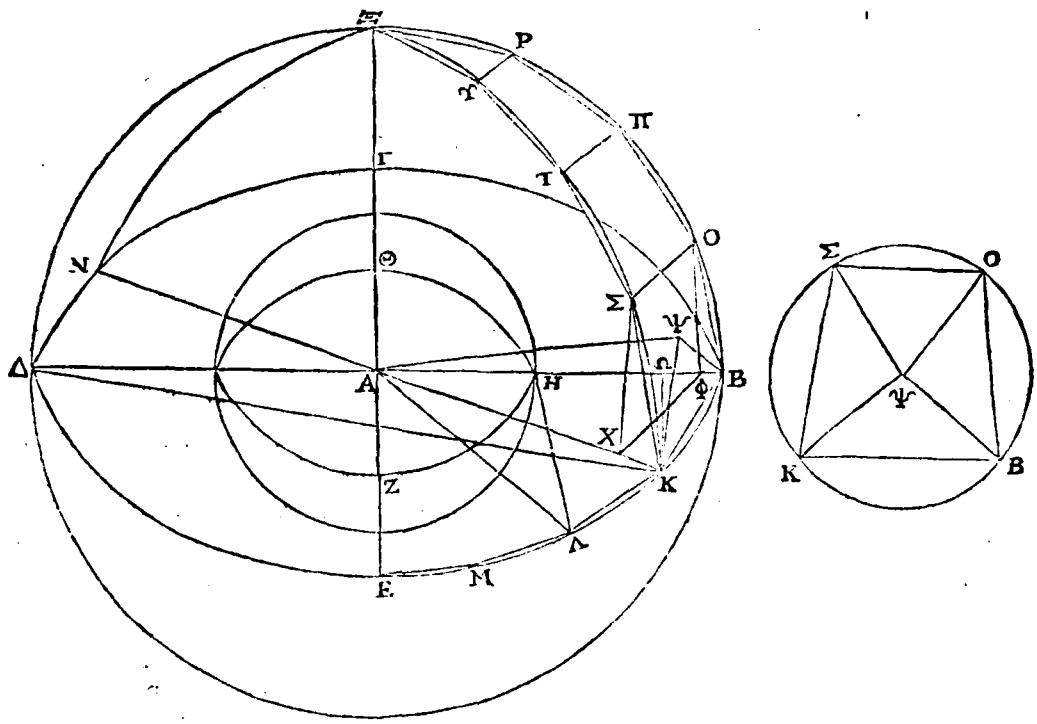
Δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν, εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ὑπιφάνειαν.

INtelligantur duæ ſphæræ circa idem centrum A: oportet in majori ſphæra deſcribere ſolidum polyedrum, quod ſphæræ minoris ſuperficiem non tangat.

Νενοήθωσαν δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ A· δεῖ δὴ εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάττονος σφαίρας κατὰ τὴν ὑπιφάνειαν.

Secentur ſphæræ plano aliquo per centrum

Τετμήθωσαν αἱ σφαῖραι ὑπιπέδῳ τινὶ διὰ τοῦ



ducto: erunt igitur ſectiones circuli, quoniam [per 14. def. 11.] diametro manente & ſemicirculo circumducto ſphæra facta eſt: ergo in quacunque poſitione ſemicirculum intelligamus, quod per ipſum producitur planum in ſuperficie ſphæræ circulum efficiet. conſtat vero circulum maximum eſſe, quia diameter ſphæræ, (quæ & ſemicirculi diameter eſt) major eſt [per 15. 3.] omnibus rectis lineis quæ in circulo vel ſphæra ducuntur. ſit igitur in majori quidem ſphæra circulus BΓΔE; in minori autem circulus ZHΘ; & ducantur ipſo-

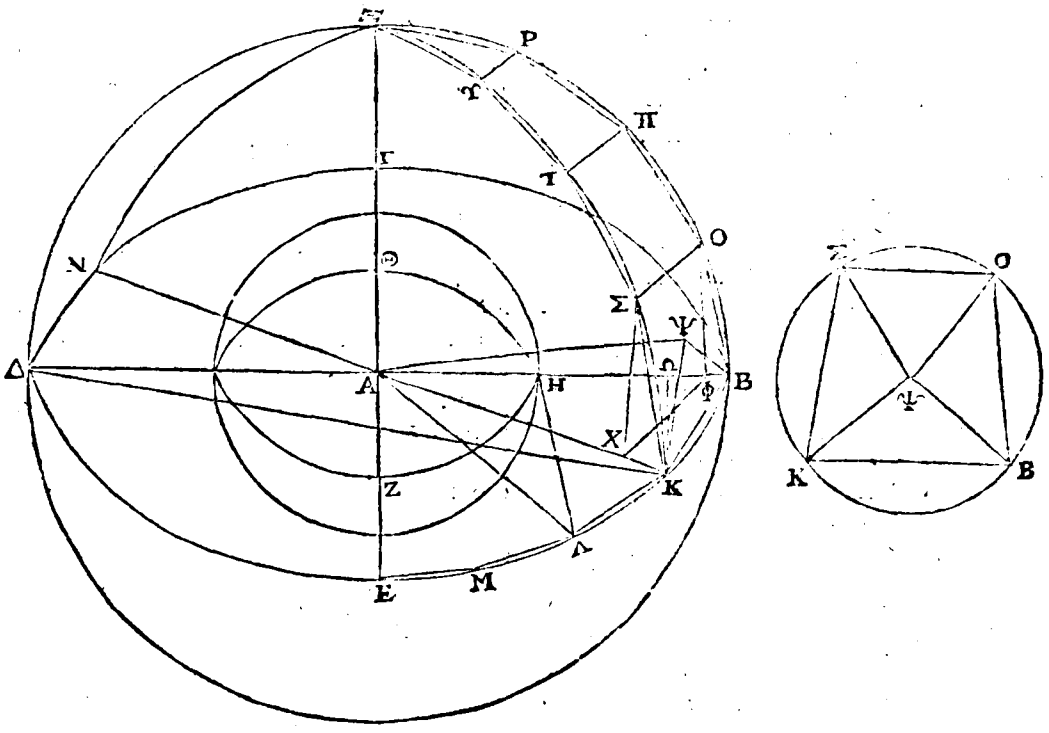
κέντρου· ἔσονται δὴ αἱ τομαὶ κύκλοι, ἐπειδήπερ μενούσης τῆς διαμέτρου τὸ ἡμικύκλιον περιφερόμενον ἡμικυκλίου ἐγένετο ἡ σφαῖρα· ὥστε καθ' οἵους ἂν θέσεως νοήσωμεν τὸ ἡμικύκλιον, τὸ διὰ αὐτοῦ ἐκβαλλόμενον ἐπίπεδον ποιήσει ἐπὶ τῆς ὑπιφανείας τῆς σφαίρας κύκλον. καὶ φανερὸν ὅτι καὶ μέγιστον, ἐπειδήπερ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, ἥτις ἐστὶ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου διάμετρος, δηλαδὴ καὶ τοῦ κύκλου, μείζων ἐστὶ πασῶν τῶν εἰς τὸν κύκλον ἢ τὴν σφαῖραν διαγομένων εὐθειῶν. ἔστω δὴ ἐν μὲν τῇ μείζονι σφαίρᾳ κύκλος ὁ BΓΔE, ἐν δὲ τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ κύκλος ὁ ZHΘ, καὶ ἤχθωσαν αὐτῶν

αὐτῶν δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΒΔ, ΓΕ, καὶ δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων τῶν ΒΓΔΕ, ΖΗΘ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΒΓΔΕ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγεγράφθω, μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ ΖΗΘ, καὶ πολυγωνὶ ἔστωσαν ἐν τῷ ΒΕ τεταρτημορίῳ αἱ ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ, καὶ ἐπεζεύχθεισαν ἡ ΚΑ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῷ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου διπίπεδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΞ, καὶ συμβαλλέτω τῇ διπλασίᾳ τοῦ σφαίρας κατὰ τὸ Ξ, καὶ διὰ τῆς ΑΞ καὶ ἑκατέρας τῶν ΒΔ, ΚΝ ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω, ποιήσουσι δὴ διὰ τὰ εἰρημένα ἐπὶ τῆς διπλασίας τῆς σφαίρας μείζονας κύκλους. ποιείτωσαν, ὧν ἡμικύκλια ἔστωσαν ἐπὶ τῶν ΒΔ, ΚΝ διαμέτρων τὰ ΒΞΔ, ΚΞΝ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΞΑ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου διπίπεδον, καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ΞΑ διπίπεδα ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον· ὥστε καὶ τὰ ΒΞΔ, ΚΞΝ ἡμικύκλια ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ ΒΞΕ, ΚΞΝ ἡμικύκλια, ἐπὶ γὰρ ἴσων εἰσὶ διαμέτρων τῶν ΒΔ, ΚΝ, ἴσαι ἐστὶ καὶ τὰ ΒΕ, ΒΞ, ΚΞ περιφέρειαι ἀλλήλαις· ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΕ τεταρτημορίῳ πολυγώνου πλευραὶ τοσαῦταί εἰσι καὶ ἐν ταῖς ΒΞ, ΚΞ περιφερείαις ἴσαι τῷ ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ εὐθείαις. ἐγγεγράφθωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ ΒΟ, ΟΠ, ΠΡ, ΡΞ, ΚΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΞ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΣΟ, ΤΠ, ΥΡ, καὶ ἀπὸ τῶν Ο, Σ ἐπὶ τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον κάθετοι ἤχθωσαν· πεσοῦνται δὴ ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν διπιπέδων τὰς ΒΔ, ΚΝ, ἐπιδήπερ καὶ τὸ τῶν ΒΞΔ, ΚΞΝ ἐπίπεδα ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον. πιπτέτωσαν, καὶ ἔστωσαν αἱ ΟΦ, ΣΧ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΦΧ. καὶ ἐπεὶ ἐν ἴσοις ἡμικυκλίοις τοῖς ΒΞΔ, ΚΞΝ ἴσαι ἀπειλημμέναι εἰσὶν αἱ ΒΟ, ΚΣ, καὶ κάθετοι ἠγμέναι εἰσὶν αἱ ΟΦ, ΣΧ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΟΦ τῇ ΣΧ, ἡ δὲ ΒΦ τῇ ΚΧ. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ΒΑ ὅλῃ τῇ ΚΑ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΦΑ λοιπῇ τῇ ΧΑ ἐστιν ἴση· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΦ πρὸς τὴν ΦΑ οὕτως ἡ ΚΧ πρὸς τὴν ΧΑ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΦΧ τῇ ΚΒ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΟΦ, ΣΧ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΦ τῇ ΣΧ. ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση· αἱ ΧΦ, ΣΟ ἄρα ἴσαι εἰσὶ καὶ παράλληλοι. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΧΦ τῇ ΣΟ, ἀλλὰ ἡ ΧΦ τῇ ΚΒ ἐστὶ παράλληλος· καὶ ἡ ΣΟ ἄρα τῇ ΚΒ ἐστι παράλληλος. καὶ διὰ συγνύσιν αὐταῖς αἱ ΒΟ, ΚΣ· τὸ ΚΒΟΣ ἄρα τετράπλευρον ἐν ἑνί ἐστι διπιπέδῳ, ἐπιδήπερ ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, καὶ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα διπλασιγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ διπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ΣΟΠ, ΤΠΡ τετραπλεύρων ἐν ἑνί ἐστι διπιπέδῳ. ἔστι δὲ τὸ ΥΡΞ τρίγωνον ἐν ἑνὶ διπιπέδῳ· ἐὰν δὴ νοήσωμεν ἀπὸ τῶν Ο, Σ, Π, Τ, Ρ, Υ σημείων ἐπὶ τὸ Α διπλασιγνυμένας εὐθείας, συστήσεταί τι χῆμα στερεὸν πολύεδρον μεταξὺ τῶν ΒΖ, ΚΞ περιφερειῶν ἐκ πυραμίδων συγκείμενον, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΚΒΟΣ, ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ

rum duæ diametri ad rectos inter ſe angulos ΒΔ, ΓΕ: & duobus circulis circa idem centrum conſiſtentibus ΒΓΔΕ, ΖΗΘ in majori ΒΓΔΕ polygonum æqualium ac parium numero laterum deſcribatur [per 16. 12.] non tangens minorem circulum ΖΗΘ; cujus latera ſint in ΒΕ circuli quadrante ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ; & juncta ΚΑ producatur ad Ν; & à puncto Α plano circuli ΒΓΔΕ ad rectos angulos excitetur ΑΞ, quæ ſuperficiei ſphæræ in puncto Ξ occurrat; & per ΑΞ & utramque ipſarum ΒΔ, ΚΝ plana ducantur, quæ ex jam dictis efficient in ſuperficie ſphæræ maximos circulos. efficiant itaque, & ſint à diametris ΒΔ, ΚΝ eorum ſemicirculi ΒΞΔ, ΚΞΝ. quoniam igitur ΞΑ recta eſt ad planum circuli ΒΓΔΕ, erunt [per 18. 11.] omnia plana quæ per ipſam ΞΑ tranſeunt ad planum circuli ΒΓΔΕ recta: quare & ſemicirculi ΒΞΔ, ΚΞΝ recti ſunt ad idem planum. & quoniam ſemicirculi ΒΞΔ, ΚΞΝ æquales ſunt, ſunt enim ſuper æquales diametros ΒΔ, ΚΝ; erunt & eorum quadrantes ΒΕ, ΒΞ, ΚΞ inter ſe æquales: quot igitur latera polygoni ſunt in quadrante ΒΕ, tot erunt & in quadrantibus ΒΞ, ΚΞ æqualia ipſis ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ. deſcribantur & ſint ΒΟ, ΟΠ, ΠΡ, ΡΞ, ΚΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΞ; junganturque ΣΟ, ΤΠ, ΥΡ; & ab ipſis Ο, Ξ punctis ad planum circuli ΒΓΔΕ perpendiculares ducantur: cadent quidem ipſæ [per 38. 11.] in communes planorum ſectiones ΒΔ, ΚΝ, quoniam plana ſemicirculorum ΒΞΔ, ΚΞΝ [per conſtr.] ad planum circuli ΒΓΔΕ recta ſunt. itaque cadant, ſintque ΟΦ, ΣΧ; & ΦΧ jungatur. quoniam igitur in æqualibus ſemicirculis ΒΞΔ, ΚΞΝ æquales circumferentiæ ſumptæ ſunt ΒΟ, ΚΣ, & ductæ perpendiculares ΟΦ, ΣΧ; erit ΟΦ quidem ipſi ΣΧ æqualis, ΒΦ vero æqualis ΚΧ. eſt autem & tota ΒΑ æqualis toti ΚΑ; ergo & reliqua ΦΑ reliquæ ΧΑ eſt æqualis: ut igitur ΒΦ ad ΦΑ ita ΚΧ ad ΧΑ: ideoque [per 2. 6.] ΦΧ ipſi ΚΒ parallela eſt. & quoniam utraque ipſarum ΟΦ, ΣΧ recta eſt ad circuli ΒΓΔΕ planum, erit [per 6. 11.] ΟΦ ipſi ΣΧ parallela. oſtenſa autem eſt & ipſi æqualis: ergo [per 33. 1.] ΧΦ, ΣΟ æquales ſunt & parallelæ. & quoniam ΧΦ parallela eſt ipſi ΣΟ, ſed & parallela ipſi ΚΒ; erit [per 9. 11.] & ΣΟ ipſi ΚΒ parallela. & ipſas conjungunt ΒΟ, ΚΣ: ergo & ΚΒΟΣ quadrilaterum eſt in uno plano; nam [per 7. 11.] ſi duæ rectæ lineæ parallelæ ſint, & in utraque ipſarum quævis puncta ſumantur, quæ dicta puncta conjungit recta linea in eodem eſt plano in quo parallelæ. & eadem ratione utraque ipſorum quadrilaterorum ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ in uno ſunt plano. eſt autem [per 2. 11.] in uno plano & triangulum ΥΡΞ: ſi igitur à punctis Ο, Σ, Π, Τ, Ρ, Υ ad Α ductas rectas lineas intelligamus, conſtituetur quædam figura ſolida polyedra inter circumferentias ΒΞ, ΚΞ, ex pyramidibus compoſita, quarum baſes quidem ΚΒΟΣ, ΣΟΠΤ, ΤΠΡΥ

ΤΠΡΥ quadrilatera & triangulum ΤΡΞ, vertex autem punctum A. quod si in unoquoque laterum ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ, quemadmodum in ΚΒ eadem construamus & etiam in reliquis tribus quadrantibus, & in reliquo hemisphærio; constituetur figura quædam polyedra in sphæra descripta & composita ex pyramidibus, quarum bases sunt quadrilatera jam dicta & ΤΡΞ triangulum & quæ ejusdem ordinis cum illis sunt, vertex autem A punctum: dico dictam figuram polyedram non tangere superficiem minoris sphæræ, in qua est circulus ΖΗΘ. ducatur [per 11. 11.] à puncto A ad planum quadrilateri ΚΒΟΣ perpendicularis ΑΨ, cui in puncto Ψ occurrat, & ΒΨ, ΨΚ jungantur. itaque quoniam ΑΨ recta est ad quadrilateri ΚΒΟΣ planum, & [per 3. def. 11.] ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt & in eodem sunt plano rectos angulos faciet: ergo ΑΨ ad utramque ipsarum ΒΨ, ΨΚ est perpendicularis. quoniam autem ΑΒ est æqua-

τετράπλευρα καὶ τὸ ΤΡΞ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον. ἐὰν δὲ καὶ ἐπὶ ἑκάστης τῶν ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ πολυρῶν, καθάπερ ἐπὶ τῆς ΚΒ τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν τριῶν τεταρτημορίων, καὶ ἐπὶ τὸ λοιπὸν ἡμισφαίριον συσταθήσεταί τι σχῆμα πολύεδρον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν ὃ οὐκ ἐφάπτεται τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐφ' ἧς ἐστὶ τὸ ΖΗΘ κύκλος. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ ΚΒΟΣ τετραπλεύρου ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΑΨ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ψ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΨ, ΨΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΨ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΚΒΟΣ τετραπλεύρου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ τετραπλεύρου ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ ΑΨ· ἡ ΑΨ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΨ, ΨΚ. καὶ ἐπεὶ ἴση



lis ΑΚ; erit & quadratum ex ΑΒ quadrato ex ΑΚ æquale. & sunt quadrato quidem ex ΑΒ [per 47. 1.] æqualia quadrata ex ΑΨ, ΨΒ, etenim [per constr.] angulus ad Ψ rectus est; quadrato autem ex ΑΚ æqualia sunt ex ΑΨ, ΨΚ quadrata: ergo quadrata ex ΑΨ, ΨΒ quadratis ex ΑΨ, ΨΚ æqualia sunt. commune auferatur quadratum ex ΑΨ: reliquum igitur quod ex ΒΨ reliquo quod ex ΨΚ est æquale; ideoque recta linea ΒΨ rectæ ΨΚ æqualis. similiter ostendemus & quæ à puncto Ψ ad Ο, Σ ducuntur utrivis ipsarum ΒΨ, ΨΚ æquales esse: circulus igitur centro Ψ & intervallo æquali uni ipsarum ΨΒ, ΨΚ descriptus etiam per puncta Ο, Σ transibit, adeoque ΚΒΟΣ quadrilaterum erit in circulo. & quoniam ΚΒ major est quam ΧΦ, æqualis autem ΧΦ ipsi ΣΟ; erit & ΚΒ quam ΣΟ major. sed

ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΑΚ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΚ. καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΒ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Ψ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΚ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΒ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΨ, ΨΚ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΨ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΨ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΨΚ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΒΨ τῇ ΨΚ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Ψ ἐπὶ τὰ Ο, Σ ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν ΒΨ, ΨΚ· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ψ καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν ΨΒ, ΨΚ γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν Ο, Σ, καὶ ἔσται ἐν κύκλῳ τὸ ΚΒΟΣ τετράπλευρον. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΚΒ τῆς ΧΦ, ἴση δὲ ἡ ΧΦ τῇ ΣΟ· μείζων ἄρα ἡ ΚΒ τῆς ΣΟ. ἴση δὲ

δὲ ἡ ΚΒ ἑκατέρα τῶν ΚΣ, ΒΟ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΚΣ, ΒΟ τῆς ΣΟ μείζων ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΚΒΟΣ, καὶ ἴσαι αἱ ΚΒ, ΒΟ, ΚΣ, καὶ ἐλάσσων ἡ ΟΣ, ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐστὶν ἡ ΒΨ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΚΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Κ σημείου ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετος ἡ ΚΩ. ἐπεὶ ἡ ΒΔ τῆς ΔΩ ἐλάττων ἐστὶν ἢ διπλῆ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΩ ἕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΩ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΩ, ΩΒ· ἀναγεγράφωσι δὴ ἀπὸ μὲν τῆς ΒΩ τετράγωνον καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ἐπὶ τῆς ΩΔ παραλληλογράμμου, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΩ ἄρα τοῦ ὑπὸ τῶν ΔΩ, ΩΒ ἐλαττόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. καὶ ἔστι τῆς ΑΒ ἐπιζευγνυμένης, τὸ μὲν ὑπὸ ΔΒ, ΒΩ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΚΒ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΔΩ, ΩΒ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΚΩ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΚΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΩ ἐλαττόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΚΩ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΚΑ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΑ. καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΒΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΚΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΚΩ, ΩΑ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΚΩ, ΩΑ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΚΩ μεῖζον τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΩΑ ἐλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΨΑ· μείζων ἄρα ἡ ΑΨ τῆς ΑΩ· πολλῷ ἄρα ἡ ΑΨ μείζων ἐστὶ τῆς ΑΗ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΑΨ ἐπὶ μέσου τοῦ πολυέδρου βάσιν, ἡ δὲ ΑΗ ἐπὶ τὴν τῆς ἐλάσσονος σφαίρας ἐπιφάνειαν· ὥστε τὸ πολύεδρον οὐ ψαύσει τῆς ἐλάττονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

ΑΛΛΩΣ.

Δεικτέον δὴ καὶ ἐπίρρως εὐχερέστερον, ὅτι μείζων ἡ ΑΨ τῆς ΑΗ. ἤχθω ἀπὸ μὲν Η τῇ ΑΗ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΗΛ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΛ. τετμήσθω δὴ τὴν ΕΒ περιφέρειαν δίχα, καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα περιφέρειαν, ἣ ἔστω ἐλάσσων τῆς ὑπερεχούσης τῆς ΒΓΔ κύκλου περιφερείας, ἴσην τῇ ἴσῃ τῇ ΗΛ. λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ ΚΒ περιφέρεια· ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ ΚΒ εὐθεῖα τῆς ΚΛ. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ ἐστὶ τὸ ΒΚΣΟ τετράπλευρον, καί εἰσιν ἴσαι αἱ ΟΒ, ΒΚ, ΚΣ, καὶ ἐλάσσων ἡ ΟΣ· ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΨΚ γωνία· μείζων ἄρα ἡ ΒΚ τῆς ΒΨ. ἀλλὰ τῆς ΒΚ μείζων ἡ ΗΛ· πολλῷ ἄρα ἡ ΗΛ μείζων τῆς ΒΨ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΛ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΛ τῇ ΑΒ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΛ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΛ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΛ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΛ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΒΨ ἐλάσσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΨΑ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΗ· μείζων ἄρα ἡ ΑΨ τῆς ΑΗ.

ΚΒ est æqualis utrivis ipsarum ΚΣ, ΒΟ: ergo utravis ΚΣ, ΒΟ quam ΣΟ est major. cum igitur in circulo quadrilaterum sit ΚΒΟΣ, & æquales sint ΚΒ, ΒΟ, ΚΣ, & minor ΟΣ, sitque ex centro circuli ipsa ΒΨ; erit quadratum ex ΚΒ majus quam duplum quadrati ex ΒΨ. ducatur autem à puncto Κ ad ΒΔ perpendicularis ΚΩ. & quoniam ΒΔ minor est quam dupla ipsius ΔΩ, atque est [per 1. 6.] ut ΔΒ ad ΔΩ ita rectangulum contentum sub ΔΒ, ΒΩ ad rectangulum, quod sub ΔΩ, ΩΒ continetur; describatur igitur ex ΒΩ quadrato & completo parallelogrammo super ipso ΩΔ, erit & rectangulum contentum sub ΔΒ, ΒΩ minus quam duplum ejus quod sub ΔΩ, ΩΒ continetur. & adhuc juncta ΚΔ, quod sub ΔΒ, ΒΩ continetur est [per 8. 6.] æquale quadrato ex ΚΒ, & quod continetur sub ΔΩ, ΩΒ æquale quadrato ex ΚΩ: quadratum igitur ex ΚΒ minus est quam duplum quadrati ex ΚΩ. sed quadratum ex ΚΒ majus est quam duplum quadrati ex ΒΨ: ergo quadratum ex ΚΩ quadrato ex ΒΨ est majus. & quoniam ΒΑ est æqualis ΚΑ, erit quadratum ex ΒΑ quadrato ex ΚΑ æquale. & sunt [per 47. 1.] quadrato quidem ex ΒΑ æqualia quadrata ex ΒΨ, ΨΑ, quadrato autem ex ΚΑ æqualia quadrata ex ΚΩ, ΩΑ: quadrata igitur ex ΒΨ, ΨΑ quadratis ex ΚΩ, ΩΑ sunt æqualia; ex quibus quadratum ex ΚΩ majus est quadrato ex ΒΨ: ergo reliquum ex ΩΑ quadratum quadrato ex ΨΑ est minus; ac propterea recta linea ΑΨ major quam recta ΑΩ: multo igitur major est ΑΨ quam ΑΗ. at vero est ΑΨ quidem ad unam polyedri basim, ΑΗ vero ad superficiem minoris sphæræ: quare polyedrum minoris sphæræ superficiem non tangit.

ALITER.

Ostendendum autem aliter & expeditius, majorem esse ΑΨ quam ΑΗ. ducatur à puncto Η ipsi ΑΗ ad rectos angulos ΗΛ, & ΑΛ jungatur. itaque circumferentiam ΕΒ bifariam secantes, & dimidiam ipsius bifariam, atque hoc semper facientes, tandem relinquemus [per 1. 10.] quandam circumferentiam minorem arcu circumferentiæ circuli ΒΓΔ quæ subtenditur arcui æquali ipsi ΗΛ. relinquatur, sitque circumferentia ΚΒ: minor igitur est recta linea ΚΒ quam ΗΛ. quoniam vero in circulo est ΒΚΣΟ quadrilaterum, & sunt æquales ΟΒ, ΒΚ, ΚΣ, & minor ΟΣ; erit angulus ΒΨΚ obtusus: ideoque ΒΚ major est quam ΒΨ. sed ΗΛ [per constr.] quam ΒΚ est major: multo igitur major est ΗΛ quam ΒΨ, & quadratum ex ΗΛ quadrato ex ΒΨ majus. quoniam vero æqualis sit ΑΛ ipsi ΑΒ, erit & quadratum ex ΑΛ quadrato ex ΑΒ æquale. sed quadrato quidem ex ΑΛ æqualia sunt quadrata ex ΑΗ, ΗΛ; quadrato autem ex ΑΒ æqualia quadrata ex ΒΨ, ΨΑ: quadrata igitur ex ΑΗ, ΗΛ quadratis ex ΒΨ, ΨΑ æqualia sunt; ex quibus quadratum ex ΒΨ minus est quadrato ex ΗΛ: ergo reliquum ex ΨΑ quadratum majus est quadrato ex ΑΗ: & ob id recta linea ΑΨ quam recta ΑΗ est major.

Duabus igitur ſphæris circa idem centrum conſiſtentibus, in majori ſolidum polyedrum deſcriptum eſt, quod minoris ſphæræ ſuperficiem non tangit. quod erat faciendum.

Corollarium.

Quod ſi etiam ſolido polyedro deſcripto in ſphæra ΒΓΔΕ ſimile ſolidum polyedrum in altera ſphæra deſcribatur, habebit ſolidum polyedrum in ſphæra ΒΓΔΕ ad ſolidum polyedrum in altera ſphæra triplicatam rationem ejus quam diameter ſphæræ ΒΓΔΕ habet ad alterius ſphæræ diametrum. diviſis enim ſolidis in pyramides numero æquales & ejuſdem ordinis, erunt pyramides ſimiles. ſimiles autem pyramides [per cor. 8. 12.] ſunt inter ſe in triplicata ratione homologorum laterum: ergo pyramis, cujus baſis eſt ΚΒΟΣ quadrilaterum vertex autem punctum Α, ad pyramidem in altera ſphæra ejuſdem ordinis triplicatam rationem habet ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc eſt, quam habet ΑΒ ex centro ſphæræ circa centrum Α exiſtentis ad eam quæ eſt ex centro alterius ſphæræ. ſimiliter & unaquæque pyramis earum, quæ ſunt in ſphæra circa centrum Α, ad unamquamque pyramidum ejuſdem ordinis, quæ ſunt in altera ſphæra, triplicatam rationem habebit ejus quam habet ΑΒ ad eam quæ eſt ex centro alterius ſphæræ. ſed [per 12. 5.] ut unum antecedentium ad unum conſequentium ita ſunt omnia antecedentia ad omnia conſequentia: quare totum ſolidum polyedrum, quod eſt in ſphæra circa centrum Α, ad totum ſolidum polyedrum, quod in altera ſphæra, triplicatam rationem habebit ejus quam habet ΑΒ ad eam quæ eſt ex centro alterius ſphæræ, hoc eſt, quam habet ΒΔ diameter ad alterius ſphæræ diametrum. quod erat demonſtrandum.

Prop. XVIII. Theor.

Sphæræ inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum.

Intelligantur ſphæræ ΑΒΓ, ΔΕΖ, quarum diametri ΒΓ, ΕΖ: dico ΑΒΓ ſphæram ad ſphæram ΔΕΖ triplicatam rationem habere ejus quam habet ΒΓ ad ΕΖ.

Si enim non, ſphæra ΑΒΓ vel ad ſphæram minorem, vel ad majorem ipſa ΔΕΖ triplicatam rationem habebit ejus quam habet ΒΓ ad ΕΖ. habeat primo ad minorem, videlicet ad ΗΘΚ; intelligatur autem ſphæra ΔΕΖ circa idem centrum, circa quod eſt ſphæra ΗΘΚ: deſcribaturque [per 17. 12.] in majori ſphæra ΔΕΖ ſolidum polyedrum quod non tangat ſuperficiem minoris ſphæræ ΗΘΚ; atque in ſphæra ΑΒΓ deſcribatur ſolidum polyedrum ſimile ei quod in ΔΕΖ deſcriptum eſt: ſolidum igitur polyedrum, quod eſt in ſphæra ΑΒΓ, ad ſolidum polyedrum, quod in ſphæra ΔΕΖ, [per cor. 17. 12.] triplicatam rationem ha-

Δύο ἄρα σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὐσῶν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγέγραπται, μὴ ψαῦον τὴν ἐλάττονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ἐὰν δὲ καὶ εἰς ἑτέραν σφαῖραν τῷ ἐν τῇ ΒΓΔΕ σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον ἐγγραφῇ, τὸ ἐν τῇ ΒΓΔΕ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ τῆς ΒΓΔΕ σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας διάμετρον. διαιρεθέντων γὰρ τῶν στερεῶν εἰς τὰς ὁμοπληθεῖς καὶ ὁμοτάξεις πυραμίδας, ἔσονται αἱ πυραμίδες ὅμοιαι. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΚΒΟΣ τετράπλευρον κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ ὁμοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν, ἤπερ ἡ ΑΒ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περὶ τὸ κέντρον τὸ Α πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. ὁμοίως δὲ καὶ ἑκάστη πυραμὶς τῶν ἐν τῇ περὶ τὸ κέντρον τὸ Α σφαίρᾳ πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τῶν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων ὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὅλον ἄρα τὸ ἐν τῇ περὶ τὸ κέντρον τὸ Α στερεὸν πολύεδρον πρὸς ὅλον τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΒΔ διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων.

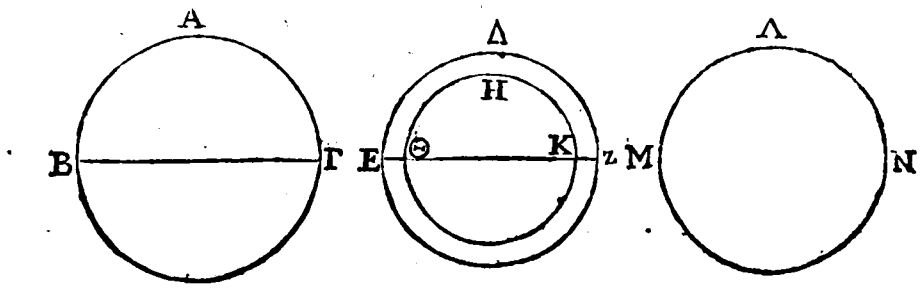
Νενοήσθωσαν σφαῖραι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΒΓ, ΕΖ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Εἰ γὰρ μή, ἕξει ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΔΕΖ σφαίρας ἢ πρὸς μείζονα τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἐχέτω πρότερον πρὸς ἐλάσσονα τὴν ΗΘΚ, καὶ γεγονέτω ἡ ΔΕΖ σφαῖρα τῇ ΗΘΚ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν τὴν ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον μὴ ψαῦον τῆς ἐλάττονος σφαίρας τῆς ΗΘΚ κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐγγεγράφθω δὲ καὶ εἰς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν τῷ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον· τὸ ἄρα ἐν τῇ ΑΒΓ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει

ἤπερ

ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἔχει δὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ σφαῖραν οὕτως τὸ ἐν τῇ ΑΒΓ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν αὐτῇ πολύεδρον οὕτως ἡ ΗΘΚ σφαῖρα

bet ejus quam ΒΓ ad ΕΖ. habet autem [ex hyp.] ΑΒΓ ſphæra ad ſphæram ΗΘΚ triplicatam rationem ejus quam ΒΓ habet ad ΕΖ: ergo [per 11.5.] ut ΑΒΓ ſphæra ad ſphæram ΗΘΚ ita ſolidum polyedrum in ſphæra ΑΒΓ ad ſolidum polyedrum in ſphæra ΔΕΖ; permutando igitur ut ΑΒΓ ſphæra ad ſolidum polyedrum quod in ipſa eſt ita ΗΘΚ ſphæra ad ſolidum polyedrum quod eſt in ſphæra ΔΕΖ. major autem eſt ſphæra ΑΒΓ ſolido polyedro quod eſt in ipſa: ergo & ΗΘΚ ſphæra major eſt polyedro quod in ſphæra ΔΕΖ. ſed & minor, ab ipſo enim comprehenditur; quod fieri non poteſt: non igitur ΑΒΓ ſphæra ad ſphæram minorem ipſa ΔΕΖ triplicatam rationem habet ejus quam ΒΓ habet ad ΕΖ. ſimiliter oſtendemus neque ΔΕΖ ſphæram ad ſphæram minorem ipſa ΑΒΓ triplicatam habere rationem ejus quam habet ΕΖ ad ΒΓ. Dico inſuper ſphæram ΑΒΗ neque ad majorem ſphæram ipſa ΔΕΖ triplicatam rationem habere ejus quam ΒΓ habet ad ΕΖ. ſi enim fieri poteſt, habeat ad majorem ΛΜΝ: invertendo igitur ſphæra ΛΜΝ ad ΑΒΓ ſphæram triplicatam rationem habet ejus quam diameter ΕΖ habet ad ΒΓ diametrum. ut autem ſphæra ΛΜΝ ad ΑΒΓ ſphæram ita ſphæra ΔΕΖ ad ſphæram quandam minorem ipſa ΑΒΓ, ut ante demonſtravimus, quoniam ſphæra ΛΜΝ major eſt ipſa ΔΕΖ: ergo & ΔΕΖ ſphæra ad ſphæram minorem ipſa ΑΒΓ triplicatam rationem habet ejus quam ΕΖ habet ad ΒΓ, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt; non igitur ΑΒΓ ſphæra ad ſphæram majorem ipſa ΔΕΖ triplicatam rationem habet ejus quam ΒΓ habet ad ΕΖ. oſtenſum autem eſt neque ad minorem: ergo ΑΒΓ ſphæra ad ſphæram ΔΕΖ triplicatam rationem habebit ejus quam ΒΓ habet ad ΕΖ. quod erat demonſtrandum.



πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον. μείζων δὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα τοῦ ἐν αὐτῇ πολυέδρου· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΗΘΚ σφαῖρα τοῦ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ πολυέδρου. ἀλλὰ καὶ ἐλάσσων, ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ διάμετρος πρὸς τὴν ΕΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἡ ΔΕΖ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΑΒΓ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ. λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. εἰ γὰρ δυνατόν, ἐχέτω πρὸς μείζονα τὴν ΛΜΝ· ἀνάπαλιν ἄρα ἡ ΛΜΝ σφαῖρα πρὸς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ διάμετρος πρὸς τὴν ΒΓ διάμετρον. ὡς δὲ ἡ ΛΜΝ σφαῖρα πρὸς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν οὕτως ἡ ΔΕΖ σφαῖρα πρὸς ἐλάττονά τινα τῆς ΑΒΓ σφαίρας, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη, ἐπειδήπερ μείζων ἐστὶν ἡ ΛΜΝ τῆς ΔΕΖ· καὶ ἡ ΔΕΖ ἄρα σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΑΒΓ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ, ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἐλάσσονα· ἡ ἄρα ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΣΚΑΙΔΕΚΑΤΟΝ,
Καὶ Στερεῶν τρίτον.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER DECIMUS TERTIUS,
Et Solidorum tertius.

PROP. I. THEOR.

Si recta linea extrema ac media ratione secta fuerit, major portio assumens dimidiam totius quintuplum potest ejus quod à dimidia totius fit quadrati.

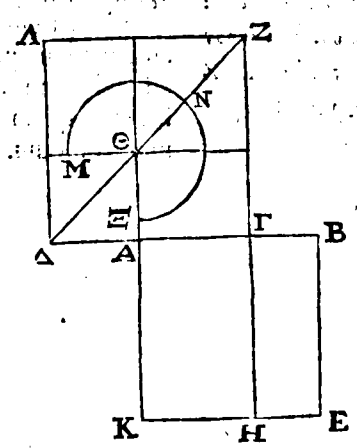
ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμα τῷ σὺν ἡμίσει τοῦ ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τοῦ ἡμισείας τοῦ ὅλης.

RECTA enim linea AB extrema ac media ratione secetur in puncto Γ; & sit AΓ major portio; atque producatur in directum ipsi AΓ recta linea AΔ, & ponatur AΔ ipsius AB dimidia: dico quadratum ex ΓΔ quadrati ΔA quintuplum esse.

Ἔστω γὰρ γραμμὴ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένη κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ AΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ AΓ εὐθεῖα ἡ AΔ, καὶ κείσθω τῇ AB ἡμίσεια ἡ AΔ· λέγω ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τοῦ ΓΔ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΔA.

Descriptis enim ex AB, ΔΓ quadratis AE, ΔZ, deinde in ΔZ describatur figura, & ZΓ ad H producatur. itaque quoniam AB extrema ac media ratione secatur in Γ; [per 3. def. & 17. 6.] quod sub AB, BΓ continetur æquale erit quadrato ex AΓ. verum rectangulum quidem ΓE est quod continetur sub AB, BΓ; quadratum vero ex AΓ est ZΘ: ergo rectangulum ΓE quadrato ZΘ est æquale. quoniam vero BA dupla est ipsius AΔ, æqualis autem BA ipsi KA, & AΔ ipsi AΘ; erit & KA ipsius AΘ dupla. ut autem KA ad AΘ ita est [per 1. 6.] rectangulum KΓ ad ipsum ΓΘ: duplum igitur est KΓ rectanguli rectanguli ΓΘ. sunt autem [per 43. 1.] rectangula AΘ, ΘΓ ipsius ΓΘ dupla: ergo rectangulum KΓ rectangulis AΘ, ΘΓ est æquale. ostensum autem est & rectangulum ΓE æquale quadrato ZΘ: totum igitur AE quadrato



Ἀναγεγράφθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν AB, ΔΓ τετράγωνα τὰ AE, ΔZ, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ ΔZ τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ ZΓH· ἐπεὶ οὖν ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB, BΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ AΓ. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν AB, BΓ τὸ ΓE, τὸ δὲ ἀπὸ τοῦ AΓ τὸ ZΘ· ἴσον ἄρα τὸ ΓE τῷ ZΘ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ BA τῆς AΔ, ἴση δὲ ἡ μὲν BA τῇ KA, ἡ δὲ AΔ τῇ AΘ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ KA τῆς AΘ. ὡς δὲ ἡ KA πρὸς τὴν AΘ οὕτως τὸ KΓ πρὸς τὸ ΓΘ· διπλάσιον ἄρα τὸ KΓ. εἰσὶ δὲ καὶ τοῦ ΛΘ, ΘΓ διπλάσια τὰ ΓΘ· ἴσον ἄρα τὸ KΓ τοῖς ΛΘ, ΘΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ΓE τῷ ZΘ ἴσον· ὅλον ἄρα τὸ AE

τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝΞ γνώμονι. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τουτέστι τὸ ΑΕ τῷ ΔΘ. ἴσον δὲ τὸ ΑΕ τῷ ΜΝΞ γνώμονι, καὶ ὁ ΜΝΞ ἄρα γνώμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ΔΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΖ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ΔΘ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΔΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, τὸ δὲ ΔΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμα τριπλασίων τοῦ ἡμισείας τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

*ΣΧΟΛΙΟΝ.

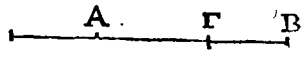
Ἀνάλυσίς ἐστι λῆψις τοῦ ζητουμένου ὡς ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολούθων ἐπί τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον.

Σύνθεσίς ἐστι λῆψις τοῦ ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολούθων ἐπὶ τοῦτο τοῦ ζητουμένου κατάληξιν ἢ κατάληψιν.

† Τοῦ εἰρημένου θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις ἄνευ ἀναγραφῆς.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς ΑΒ ἴση κείσθω ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ.

Ἐπεὶ γὰρ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΔ ἐστι καὶ ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ· διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. ἀλλὰ τῷ μὲν δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, διπλῆ γὰρ ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἐστί· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραπλάσιόν τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. ἐστὶ δέ, διπλῆ γάρ ἐστιν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ.



Σύνθεσις τοῦ αὐτοῦ.

Ἐπεὶ οὖν τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐστι μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν

dratum est æquale gnomoni ΜΝΞ. rursus, quoniam ΒΑ dupla est ipsius ΑΔ; erit [per cor. 20. 6.] quadratum ex ΒΑ quadrati ex ΑΔ quadruplum, hoc est quadratum ΑΕ quadrati ΔΘ. æquale autem quadratum ΑΕ gnomoni ΜΝΞ; ergo & ΜΝΞ gnomon quadruplus est quadrati ΔΘ; quare totum ΔΖ ipsius ΔΘ est quintuplum. atque est ΔΖ quidem quadratum ex ΓΔ; ΔΘ vero quadratum ex ΔΑ: quadratum igitur ex ΓΔ quadrati ex ΔΑ est quintuplum.

Ergo si recta linea extrema ac media ratione secta fuerit, major portio assumens dimidiam totius quintuplum potest ejus quod à dimidia totius fit quadrati. quod erat demonstrandum.

*SCHOLIUM.

Resolutio est sumptio quæsiti tanquam concessi per ea quæ consequuntur in aliquod verum concessum.

Compositio est sumptio concessi per ea quæ consequuntur in quæsiti conclusionem seu deprehensionem.

† *Antecedentis theorematis resolutio absque figurarum descriptione.*

Recta enim linea quædam ΑΒ extrema ac media ratione secetur in Γ, sitque major portio ΑΓ, & ponatur ΑΔ ipsius ΑΒ dimidiæ æqualis: dico quadratum ex ΓΔ quadrati ex ΔΑ quintuplum esse.

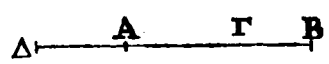
Quoniam enim quintuplum est [ex hyp.] quadratum ex ΓΔ quadrati ex ΔΑ, quadrato autem ex ΓΔ æqualia sunt [per 4. 2.] quadrata ex ΓΑ, ΑΔ una cum eo quod bis sub ΓΑ, ΑΔ continetur; erunt quadrata ex ΓΑ, ΑΔ una cum eo quod bis sub ΓΑ, ΑΔ continetur quadrati ex ΑΔ quintupla: ergo dividendo quadratum ex ΓΑ cum eo quod bis continetur sub ΓΑ, ΑΔ quadruplum est quadrati ex ΑΔ. sed ei quidem quod bis sub ΓΑ, ΑΔ continetur æquale est rectangulum sub ΒΑ, ΑΓ, est enim ΒΑ ipsius ΑΔ dupla; quadrato autem ex ΑΓ [per 17. 6.] est æquale rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ, namque [ex hyp.] ΑΒ extrema ac media ratione secta est: rectangulum igitur sub ΒΑ, ΑΓ una cum rectangulo sub ΑΒ, ΒΓ quadruplum est quadrati ex ΑΔ. sed [per 2. 2.] rectangulum sub ΒΑ, ΑΓ una cum rectangulo sub ΑΒ, ΒΓ est quadratum ex ΑΒ: ergo quadratum ex ΑΒ quadruplum est quadrati ex ΑΔ. quod quidem [per cor. 20. 6.] ita se habet; est enim ΒΑ ipsius ΑΔ dupla.

Compositio ejusdem.

Quoniam igitur quadruplum est quadratum ΒΑ quadrati ex ΑΔ; quadratum autem ex ΑΒ est [per 2. 2.] rectangulum sub ΒΑ, ΑΓ una cum rectangulo sub ΑΒ, ΒΓ: erit rectangulum sub ΒΑ, ΑΓ una cum rectangulo sub ΑΒ, ΒΓ quadrati ex ΑΔ quadruplum. sed rectangulum quidem sub ΒΑ, ΑΓ est æquale ei quod bis sub

* Deest in *Codd. MS.* † Pariter & resolutio & compositio hujus theorematis, ut & cujusvis ex quatuor sequentibus, desideratur in *Codd. MSS.*

ΔA, AΓ continetur; rectangulum autem ſub AB, BΓ eſt æquale quadrato ex AΓ: ergo quadratum ex AΓ una cum eo quod bis continetur ſub ΔA, AΓ quadruplum eſt quadrati ex ΔA; quare quadrata ipſarum ΔA, AΓ una cum eo quod bis ſub ΔA, AΓ continetur quintuplum eſt quadrati ex ΔA. ſed [per 4. 2.] quadrata ex ΔA, AΓ una cum eo quod bis continetur ſub ΔA, AΓ eſt quadratum ex ΔΓ: quadratum igitur ex ΔΓ quadrati ex ΔA quintuplum eſt. quod erat demonſtrandum.



ΔA, AΓ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AB, BΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔA, AΓ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔA· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΔA, AΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔA, AΓ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔA. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΔA, AΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔA, AΓ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ ἐστι· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔA. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. II. Theor.

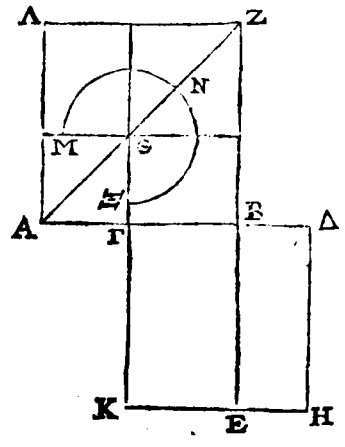
Si recta linea partis ſui ipſius quintuplum poſſit, atque duplum dictæ partis extrema ac media ratione ſecetur; major portio eſt pars reliqua ejus quæ à principio rectæ lineæ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύνηται, τὸ δὲ διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης· τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπόν ἐστι μέρος τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.

Recta enim linea AB partis ipſius AΓ quintuplum poſſit, & ipſius AΓ dupla ſit ΓΔ: dico ſi ΓΔ extrema ac media ratione ſecetur, ΓB eſſe majorem ejus portionem.

Deſcribantur enim ex utraque ipſarum AB, ΓΔ quadrata AZ, ΓH; & in AZ figura deſcribatur, & producatur ZB in E. quoniam igitur quadratum ipſius AB quintuplum eſt quadrati ipſius AΓ, hoc eſt quadratum AZ quintuplum ipſius AΘ, erit MNΞ gnomon ipſius AΘ quadruplus. & quoniam ΔΓ dupla eſt ΓA, quadratum ex ΔΓ [per 20. 6.] quadrati ex ΓA quadruplum eſt, videlicet quadratum ΓH quadruplum quadrati AΘ. oſtenſus eſt autem MNΞ gnomon quadruplus ipſius AΘ quadrati; ergo gnomon MNΞ quadrato ΓH eſt æqualis. & quoniam ΔΓ dupla eſt ΓA, æqualis autem eſt ΔΓ ipſi ΓK, & AΓ ipſi ΓΘ; erit & KΓ ipſius ΓΘ dupla: parallelogrammum igitur KB duplum eſt parallelogrammi BΘ. & [per 43. 1.] ſunt parallelogramma ΛΘ, ΘB ſimul ipſius ΘB dupla: ergo KB æquale eſt ipſis ΛΘ, ΘB. ſed & totus MNΞ gnomon toti ΓH oſtenſus eſt æqualis: & reliquum igitur ΘZ æquale eſt reliquo BH. atque eſt BH quidem quod ſub ΓΔ, ΔB continetur, etenim ΓΔ eſt æqualis ΔH; ipſum vero ΘZ eſt quadratum ipſius BΓ: ergo quod continetur ſub ΓΔ, ΔB quadrato ex ΓB eſt æquale: & igitur [per 17. 6.] ut ΔΓ ad ΓB ita eſt ΓB ad BΔ. major autem eſt ΔΓ quam ΓB: ergo & ΓB quam BΔ eſt major. itaque recta linea ΓΔ extrema ac media ratione ſecta eſt, & major ejus portio eſt ΓB.



Si igitur recta linea partis ſui ipſius quintuplum poſſit, atque duplum dictæ partis extrema ac media ratione ſecetur; major portio eſt pars reliqua ejus quæ à principio rectæ lineæ. quod erat demonſtrandum.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ AB τμήματος ἑαυτῆς τοῦ AΓ πενταπλάσιον δυνάσθω, τὸ δὲ AΓ διπλῆ ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι τὸ ΓΔ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης, τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΓB.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ ἑκατέρας τῶν AB, ΓΔ τετράγωνα τὰ AZ, ΓH, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ AZ τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ ZB ἐπὶ τὸ E. Καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ, τουτέστι τὸ AZ τοῦ AΘ, τετράπλασιος ἄρα ὁ MNΞ γνώμων τοῦ AΘ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΔΓ τῆς ΓA, τετράπλασιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓA, τουτέστι τὸ ΓH τοῦ AΘ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ MNΞ γνώμων τετράπλασιος τοῦ AΘ, ἴσος ἄρα ὁ MNΞ γνώμων τῷ ΓH. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΔΓ τῆς ΓA, ἴση δὲ ἡ μὲν ΔΓ τῇ ΓK, ἡ δὲ AΓ τῇ ΓΘ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ KΓ τῆς ΓΘ· διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ KB τοῦ BΘ. εἰσὶ δὲ καὶ τὰ ΛΘ, ΘB διπλάσια τοῦ ΘB· ἴσον ἄρα τὸ KB τοῖς ΛΘ, ΘB. ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλος ὁ MNΞ γνώμων ὅλῳ τῷ ΓH ἴσος· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΘZ τῷ BH ἐστιν ἴσον. καὶ ἔστι τὸ μὲν BH τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔB, ἴση γὰρ ἡ ΓΔ τῇ ΔH, τὸ δὲ ΘZ τὸ ἀπὸ τῆς BΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔB ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓB· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓB οὕτως ἡ ΓB πρὸς τὴν BΔ. μεῖζων δὲ ἡ ΔΓ τῆς ΓB· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΓB τῆς BΔ. τῆς ΓΔ ἄρα εὐθείας ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΓB.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύνηται, τὸ δὲ διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης· τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπόν ἐστι μέρος τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΛΗΜΜΑ.

Οτι δὲ ἡ διπλῆ τ̃ ΑΓ μείζων ἐστὶ τ̃ ΒΓ, ἔτως δεικτέον.

Εἰ γὰρ μὴ, ἔσω, εἰ δυνατὸν, ἡ ΒΓ τ̃ ΓΑ διπλῆ· πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τ̃ ΒΓ τ̃ ἀπὸ τ̃ ΓΑ· πενταπλάσιον ἄρα ἑκάτερον τ̃ ἀπὸ τ̃ ΒΓ, ΓΑ τ̃ ἀπὸ τ̃ ΓΑ. συγκει) δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πενταπλάσιον τ̃ ἀπὸ τ̃ ΓΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ τ̃ ΒΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΓ, ΓΑ, ὅπερ ἀδυνάτον· οὐκ ἄρα ἡ ΒΓ διπλασία τ̃ ΓΑ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἐλάττων τ̃ ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τ̃ ΓΑ, πολλῷ γὰρ μεῖζον τὸ ἄτοπον· ἡ ἄρα τ̃ ΑΓ διπλῆ μείζων ἐστὶ τ̃ ΒΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τ̃ εἰρημένου θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΓΔ τμήματος ἑαυτῆς τ̃ ΔΑ πενταπλάσιον δυνάσθω, τ̃ δὲ ΔΑ διπλῆ κείσθω ἡ ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ, ἥτις ἐστὶ τὸ λοιπὸν μέρος τ̃ ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τ̃ ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τ̃ ἀπὸ τ̃ ΑΓ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τ̃ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἴσον, διπλῆ γὰρ ἐστιν ἡ ΒΑ τ̃ ΑΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τ̃ ΑΒ, ΒΓ μετὰ τ̃ δὶς ὑπὸ τ̃ ΒΑ, ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ, ἴσον ἐστὶ τ̃ ὑπὸ τ̃ ΔΑ, ΑΓ, μετὰ τ̃ ἀπὸ τ̃ ΑΓ. πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τ̃ ΑΒ τ̃ ἀπὸ τ̃ ΔΑ· πενταπλάσιον ἄρα καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ μετὰ τ̃ ἀπὸ τ̃ ΑΓ τ̃ ἀπὸ τ̃ ΑΔ· ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τ̃ ΔΑ, ΑΓ μετὰ τ̃ δὶς ὑπὸ τ̃ ΔΑ, ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τ̃ ΓΔ, πενταπλάσιά ἐστι τ̃ ἀπὸ τ̃ ΔΑ. ἔστι δὲ λοιπὸν τὴν σύνθεσιν.

Σύνθεσις τ̃ αὐτ̃.

Ἐπεὶ οὖν πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τ̃ ΓΔ τ̃ ἀπὸ τ̃ ΔΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τ̃ ΓΔ τὰ ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἐστὶ μετὰ τ̃ δὶς ὑπὸ τ̃ ΔΑ, ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τ̃ δὶς ὑπὸ τ̃ ΔΑ, ΑΓ πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ· διπλόνη ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τ̃ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τ̃ ἀπὸ τ̃ ΑΒ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τ̃ ΑΒ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τ̃ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΔΓ μετὰ τ̃ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τ̃ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τ̃ ἀπὸ τ̃ ΑΓ· καὶ κοινῆ ἀφαιρεθέντος τ̃ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ ἕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. μείζων

LEMMA.

At vero duplam ipſius ΑΓ majorem eſſe quam ΓΒ, [ut in præc. aſſumptum eſt,] ſic demonſtrabitur.

Si enim non, ſit, ſi fieri poteſt, ΒΓ ipſius ΓΑ dupla: quadratum igitur ex ΒΓ quadruplum eſt quadrati ex ΓΑ; quare ſimul utraque quadrata ipſarum ΒΓ, ΓΑ quadrati ex ΓΑ quintuplum eſt. ſed quadratum ex ΒΑ quadrati ex ΓΑ quintuplum ponitur: ergo quadratum ex ΒΑ æquale eſt quadratis ex ΒΓ, ΓΑ, quod [per 4.2.] fieri non poteſt; non igitur ΒΓ dupla eſt ipſius ΓΑ. ſimiliter demonſtrabimus quod neque minor quam ΒΓ dupla eſt ipſius ΓΑ; multo enim majus abſurdum ſequeretur: ergo dupla ipſius ΑΓ major eſt quam ΒΓ. quod erat demonſtrandum.

SCHOLIUM.

Antecedentis theorematis reſolutio.

Recta enim linea quædam ΓΔ partis ipſius ΔΑ quintuplum poſſit, & ipſius ΔΑ dupla ponatur ΑΒ: dico ΑΒ extrema ac media ratione ſectam eſſe in puncto Γ, & majorem ejus portionem eſſe ΑΓ, quæ quidem eſt reliqua pars ejus quæ à principio rectæ lineæ.

Quoniam enim ΑΒ extrema ac media ratione ſecta eſt in Γ, & ΑΓ eſt major portio; erit [per 17.6.] rectangulum ſub ΑΒ, ΒΓ quadrato ex ΑΓ æquale. eſt autem & rectangulum ſub ΒΑ, ΑΓ æquale ei quod bis ſub ΔΑ, ΑΓ continetur; etenim ΒΑ ipſius ΑΔ eſt dupla: ergo rectangulum ſub ΑΒ, ΒΓ una cum rectangulo ſub ΒΑ, ΑΓ, quod quidem [per 2.2.] eſt ipſius ΒΑ quadratum, æquale eſt ei quod bis ſub ΔΑ, ΑΓ continetur una cum quadrato ex ΑΓ. quadratum autem ex ΑΒ [per 20.6.] quadruplum eſt quadrati ex ΔΑ: ergo quod bis ſub ΔΑ, ΑΓ continetur una cum quadrato ex ΑΓ quadruplum eſt quadrati ex ΑΔ: ergo & quadrata ex ΔΑ, ΑΓ una cum eo quod bis continetur ſub ΔΑ, ΑΓ, hoc eſt [per 4.2.] quadratum ex ΓΔ, quintupla ſunt quadrati ex ΑΔ. & hoc eſt ſecundum hypotheſin.

Compoſitio ejuſdem.

Quoniam igitur quadratum ex ΓΔ quintuplum eſt quadrati ex ΔΑ; quadrato autem ex ΓΔ æqualia ſunt [per 4.2.] quadrata ex ΔΑ, ΑΓ una cum eo quod bis ſub ΔΑ, ΑΓ continetur; erunt quadrata ex ΔΑ, ΑΓ una cum eo quod bis continetur ſub ΔΑ, ΑΓ quintupla quadrati ex ΔΑ: dividendo ergo, quod bis ſub ΔΑ, ΑΓ continetur una cum quadrato ex ΑΓ quadrupla ſunt quadrati ex ΑΔ. eſt autem [per 20.6.] & quadratum ex ΑΒ quadrati ex ΑΔ quadruplum: ergo quod bis continetur ſub ΔΑ, ΑΓ hoc eſt quod ſemel continetur ſub ΒΑ, ΑΓ una cum quadrato ex ΑΓ, eſt æquale quadrato ex ΑΒ. ſed [per 2.2.] quadratum ex ΑΒ eſt rectangulum ſub ΑΒ, ΒΓ una cum rectangulo ſub ΒΑ, ΑΓ: rectangulum igitur ſub ΒΑ, ΑΓ una cum rectangulo ſub ΑΒ, ΒΓ eſt æquale rectangulo ſub ΒΑ, ΑΓ una cum quadrato ex ΑΓ: & ablato communi rectangulo ſub ΒΑ, ΑΓ, erit reliquum rectangulum ſub ΑΒ, ΒΓ quadrato ex ΑΓ æquale: eſt igitur [per 17.6.] ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΑΓ ad ΓΒ. major autem

autem est BA quam AΓ: ergo & AΓ quam ΓB est major: quare [per 3. def. 6.] AB extrema ac media ratione secta est in Γ, & AΓ est major ejus portio. quod erat demonstrandum.

ζων δὲ ἡ ΒΑ τῆς ΑΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ· ἡ ΑΒ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. III. THEOR.

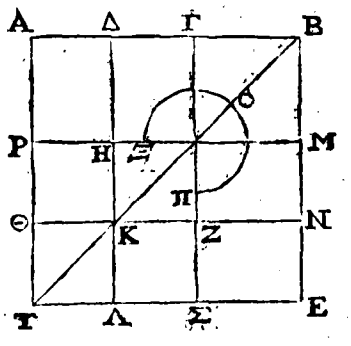
Si recta linea extrema ac media ratione secta fuerit; portio minor, assumens dimidiam majoris portionis, quintuplum potest ejus quod à dimidia majoris portionis fit quadrati.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ· τὸ ἔλασσον τμῆμα, τοῦ λαβόντος τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος, πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου.

RECta enim linea quævis AB extrema ac media ratione secetur in Γ, sitque AΓ major portio, & secetur AΓ bifariam in Δ: dico quadratum ex BΔ quadrati ex ΔΓ quintuplum esse.

Describatur enim ex AB quadratum AE, & figura compleatur. quoniam igitur AΓ dupla est ΓΔ, erit quadratum ex AΓ quadrati ex ΓΔ quadruplum, hoc est quadratum PΣ ipsius ZH. & quoniam [per 17. 6.] rectangulum quod sub AB, BΓ continetur est æquale quadrato ex AΓ, atque est rectangulum quidem sub AB, BΓ ipsum ΓE; quadratum vero ex AΓ est PΣ; erit rectangulum ΓE quadrato PΣ æquale. quadruplum autem est quadratum PΣ quadrati ZH: ergo & ΓE rectangulum quadrati ZH quadruplum erit. rursus quoniam AΔ æqualis est ΔΓ, erit [per 34. 1.] & ΘK ipsi KZ æqualis: ideoque quadratum HZ est æquale quadrato ΘΛ: æqualis igitur est HK ipsi KΛ, hoc est MN ipsi NE: ergo [per 36. 1.] & parallelogrammum MZ parallelogrammo ZE est æquale. sed [per 43. 1.] MZ est æquale ΓH: quare & ΓH ipsi EZ æquale erit. commune apponatur ΓN: gnomon igitur ΞOΠ est æqualis parallelogrammo ΓE. ostensum autem est ΓE esse quadruplum HZ quadrati: & gnomon igitur ΞOΠ ipsius HZ quadruplus est: quare quadratum ΔN quintuplum est ipsius HZ. est autem ΔN quadratum ipsius ΔB; HZ vero quadratum ipsius ΔΓ: quadratum igitur ex ΔB quadrati ex ΔΓ est quintuplum. quod erat demonstrandum.



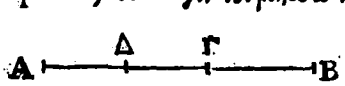
Ἐυθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ἔστω δὲ μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΕ, καὶ κατεσκευάσθω τὸ σχῆμα. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΓΔ, τετραπλάσιον ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ, τουτέστι τὸ ΡΣ τοῦ ΖΗ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ ΓΕ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΡΣ· τὸ ἄρα ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ΡΣ. τετραπλάσιον δὲ τὸ ΡΣ τοῦ ΖΗ· τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ΓΕ τοῦ ΖΗ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΚΖ· ὥστε καὶ τὸ ΗΖ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΛ τετραγώνῳ· ἴση ἄρα ἡ ΗΚ τῇ ΚΛ, τουτέστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΕ· ὥστε καὶ τὸ ΜΖ τῷ ΖΕ ἐστιν ἴσον. ἀλλὰ τὸ ΜΖ τῷ ΓΗ ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ ΓΗ ἄρα τῷ ΖΕ ἐστιν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΝ· ὁ ἄρα ΞΟΠ γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ΓΕ. ἀλλὰ τὸ ΓΕ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ΗΖ· καὶ ὁ ΞΟΠ ἄρα γνώμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ΗΖ· τὸ ἄρα ΔΝ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ΗΖ τετραγώνου. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΔΝ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ, τὸ δὲ ΗΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΒ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SCHOLIUM.

Antecedentis theorematis resolutio.

Recta enim linea AB extrema ac media ratione secetur in Γ; & sit AΓ major portio, cujus dimidia ΓΔ: dico quadratum ex BΔ quadrati ex ΓΔ quintuplum esse.



Quoniam enim [ex hyp.] quadratum ex BΔ quintuplum est quadrati ex ΔΓ; quadratum autem ex BΔ est [per 6. 2.] quod continetur sub AB, BΓ

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τοῦ εἰρημένου θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ, καὶ τοῦ ΑΓ ἡμίσεια ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ.

Ἐπεὶ γὰρ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἴσου τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐστι μετὰ

μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ· διελόντι ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. ἔστι δὲ, διπλῆ γὰρ ἡ ΑΓ τῆς ΓΔ.

Σύνθεσις δ' αὐτοῦ.

Ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΔΓ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ· συνθέντι ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

una cum quadrato ex ΔΓ: ergo quod ſub ΑΒ, ΒΓ continetur una cum quadrato ex ΔΓ quintuplum eſt quadrati ex ΔΓ: dividendo igitur quod ſub ΑΒ, ΒΓ continetur quadrati ex ΔΓ quadruplum eſt. ei vero quod continetur ſub ΑΒ, ΒΓ æquale eſt [per 17.6.] quadratum ex ΑΓ, etenim [ex hyp.] ΑΒ extrema ac media ratione ſecta eſt in Γ: ergo quadratum ex ΑΓ quadrati ex ΓΔ quadruplum eſt. quod quidem ita ſe habet; eſt enim ΑΓ ipſius ΓΔ dupla.

Compoſitio ejuſdem.

Quoniam dupla eſt ΑΓ ipſius ΔΓ, erit quadratum ex ΑΓ quadrati ex ΓΔ quadruplum. ſed [per 17.6.] quadratum ex ΑΓ eſt æquale ei quod bis ſub ΑΒ, ΒΓ continetur: quod igitur ſub ΑΒ, ΒΓ continetur quadruplum eſt quadrati ex ΔΓ: ideoque componendo, quod continetur ſub ΑΒ, ΒΓ una cum quadrato ex ΔΓ, quod quidem [per 6.2.] eſt quadratum ex ΔΒ, quintuplum eſt quadrati ipſius ΔΓ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

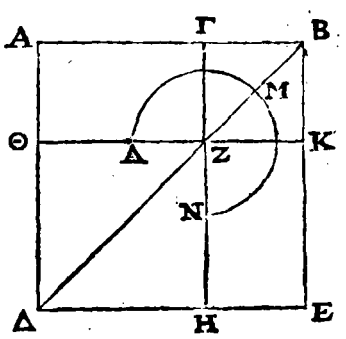
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ· τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἐλάττονος τμήματος, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου.

PROP. IV. THEOR.

Si recta linea extrema ac media ratione ſecta fuerit; totius & minoris portionis utraque ſimul quadrata tripla ſunt quadrati ejus quod à majori fit portione.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ κατεσκευάσθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ ΑΚ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΘΗ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ τῷ ΘΗ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΖ τῷ ΖΕ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΚ ὅλῳ τῷ ΓΕ ἐστὶν ἴσον· τὰ ἄρα ΓΕ, ΑΚ τοῦ ΑΚ ἐστὶ διπλάσια. ἀλλὰ τὰ ΑΚ, ΓΕ ὁ ΛΜΝ γνώμων ἐστὶ καὶ τὸ ΓΚ τετράγωνον· ὁ ἄρα ΛΜΝ γνώμων καὶ τὸ ΓΚ τετράγωνον διπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΚ. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ΑΚ τῷ ΘΗ ἐδείχθη ἴσον· ὁ ἄρα ΛΜΝ γνώμων, καὶ τὸ ΓΚ τετράγωνον διπλάσιά ἐστι τοῦ ΘΗ· ὥστε καὶ ὁ ΛΜΝ γνώμων καὶ τὰ ΓΚ, ΘΗ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ΘΗ τετραγώνου. καὶ ἔστιν ὁ μὲν ΛΜΝ γνώμων καὶ τὰ ΓΚ, ΘΗ τετράγωνα ὅλον τὸ ΑΕ καὶ τὸ ΓΚ, ἅπερ ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα, τὸ δὲ ΗΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



SIT recta linea ΑΒ, quæ extrema ac media ratione ſecetur in Γ, & ſit ΑΓ major portio: dico quadrata ex ΑΒ, ΒΓ quadrati ex ΑΓ tripla eſſe.

Deſcribatur enim ex ΑΒ quadratum ΑΔΕΒ, & figura compleatur. itaque quoniam ΑΒ extrema ac media ratione ſecta eſt in Γ, & major portio eſt ΑΓ: erit [per 17.6.] rectangulum contentum ſub ΑΒ, ΒΓ quadrato ex ΑΓ æquale. atque eſt rectangulum quidem ΑΚ quod ſub ΑΒ, ΒΓ continetur, quadratum vero ΘΗ eſt quadratum ipſius ΑΓ: æquale igitur eſt ΑΚ ipſi ΘΗ. & quoniam [per 43. 1.] rectangulum ΑΖ eſt æquale ΖΕ, commune apponatur ΓΚ, erit totum ΑΚ toti ΓΕ æquale: ergo rectangula ΓΕ, ΑΚ ipſius ΑΚ ſunt dupla. ſed rectangula ΑΚ, ΓΕ ſunt gnomon ΛΜΝ & quadratum ΓΚ; gnomon igitur ΛΜΝ & quadratum ΓΚ dupla ſunt ipſius ΑΚ. rectangulum autem ΑΚ oſtenſum eſt æquale quadrato ΘΗ: ergo gnomon ΛΜΝ & quadratum ΓΚ ipſius ΘΗ ſunt dupla: ac propterea gnomon ΛΜΝ & quadrata ΓΚ, ΘΗ tripla ſunt quadrati ΘΗ. & gnomon quidem ΛΜΝ & quadrata ΓΚ, ΘΗ ſunt totum ΑΕ quadratum & quadratum ΓΚ, quæ quidem ſunt quadrata ipſarum ΑΒ, ΒΓ; quadratum autem ΗΘ eſt quod fit ex ΑΓ: quadrata igitur ex ΑΒ, ΒΓ quadrati ex ΑΓ ſunt tripla. quod erat demonſtrandum.

SCHOLIUM.

Antecedentis theorematis reſolutio.

Recta enim linea AB extrema ac media ratione ſecetur in Γ, & ſit AΓ major portio: dico quadrata ex AB, BΓ tripla eſſe quadrati ex AΓ.

Quoniam enim quadrata ex AB, BΓ tripla ſunt quadrati ex AΓ; ſuntque [per 7. 2.] quadrata ex AB, BΓ æqualia rectangulo quod bis ſub AB, BΓ continetur una cum quadrato ex AΓ: erit rectangulum quod bis continetur ſub AB, BΓ una cum quadrato ex AΓ triplum quadrati ex AΓ: dividendo igitur, quod bis continetur ſub AB, BΓ duplum eſt quadrati ex AΓ; ergo quod ſemel ſub AB, BΓ continetur quadrato ex AΓ eſt æquale. quod quidem ita ſe habet; recta enim linea AB [ex hyp.] extrema ac media ratione ſecta eſt in puncto Γ.

Compoſitio ejuſdem.

Itaque quoniam AB extrema ac media ratione ſecta eſt in Γ, atque eſt AΓ major portio; erit [per 17. 6.] rectangulum quod ſub AB, BΓ continetur quadrato ex AΓ æquale: ergo quod bis continetur ſub AB, BΓ duplum eſt quadrati ex AΓ: & componendo, quod bis continetur ſub AB, BΓ una cum quadrato ex AΓ triplum eſt quadrati ex AΓ: ſed [per 7. 2.] quod bis ſub AB, BΓ continetur una cum quadrato ex AΓ eſt æquale quadratis ipſarum AB, BΓ: quadrata igitur ex AB, BΓ quadrati ex AΓ ſunt tripla.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τῆ εἰρημένη θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ AΓ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ.

Ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ, ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ ἐστὶ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ· διελόντι ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ· ὥστε τὸ ἅπαξ ὑπὸ τῶν AB, BΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AΓ. ἔστι δὲ, ἡ γὰρ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένη κατὰ τὸ Γ.

Συνθεσις τοῦ αὐτοῦ.

Ἐπεὶ οὖν ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένη κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστι μεῖζον τμῆμα ἡ AΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB, BΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AΓ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ· συνθέντι ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ· ἀλλὰ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ ἐστὶ τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB, BΓ τετράγωνα τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς AΓ.

PROP. V. THEOR.

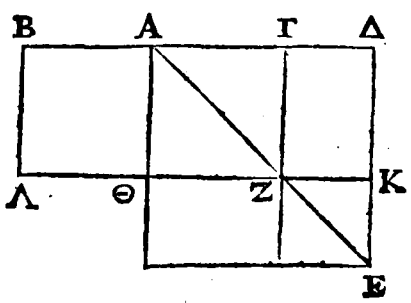
Si recta linea extrema ac media ratione ſecetur, adjiciaturque ipſi æqualis majori portioni; erit tota linea extrema ac media ratione ſecta, & major portio erit ea quæ à principio poſita eſt recta linea.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, καὶ προστεθῇ ἴση τῷ μείζονι τμήματι· ὅλη ἡ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα.

REcta enim linea AB extrema ac media ratione ſecetur in Γ, & ſit AΓ major portio, ponaturque ipſi AΓ æqualis AΔ: dico rectam lineam ΔB extrema ac media ratione ſecari in puncto A, & majorem portionem eſſe AB, quæ à principio poſita eſt.

Deſcribatur enim ex AB quadratum AE, & figura compleatur. quoniam igitur AB extrema ac media ratione ſecta eſt in Γ, erit [per 17. 6.] rectangulum quod continetur ſub AB, BΓ quadrato ex AΓ æquale. ſed rectangulum quidem quod continetur ſub AB, BΓ eſt ΓE: quadratum vero ex AB eſt ΓΘ: ergo ΓE ipſi ΓΘ eſt æquale. ſed ΓE eſt [per 43. 1.] æquale ΘE, & ΓΘ ipſi ΔΘ: quare & ΔΘ ipſi ΘE æquale erit. commune apponatur ΘB. totum igitur ΔK toti



ΕΥΘΕΙΑ γὰρ γραμμὴ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ AΓ, καὶ τῇ AΓ ἴση κείσθω ἡ AΔ· λέγω ὅτι ἡ ΔB εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ A, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα ἡ AB.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ AE, καὶ κατεσκευάσθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB, BΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AΓ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν AB, BΓ τὸ ΓE, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς AΓ τὸ ΓΘ· ἴσον ἄρα τὸ ΓE τῷ ΓΘ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΓE ἴσον ἐστὶ τῷ ΘE, τὸ δὲ ΓΘ ἴσον τῷ ΔΘ· καὶ τὸ ΔΘ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΘE. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΘB. ὅλον ἄρα τὸ ΔK ἴσον

ἐστὶ

ἐστὶν ὅλῳ τῷ ΑΕ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΔΚ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΑ, ἴση γὰρ ἡ ΑΔ τῇ ΔΛ, τὸ δὲ ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. μείζων δὲ ἡ ΒΔ τῆς ΒΑ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ· ἡ ἄρα ΒΔ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

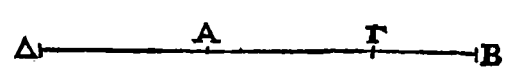
AE eſt æquale. atque eſt ΔK quidem quod ſub BΔ, ΔA continetur, eſt enim AΔ æqualis ΔΛ; quadratum autem AE eſt æquale quadrato ex AB: ergo quod ſub BΔ, ΔA continetur eſt æquale quadrato ex AB: quare [per 17. 6.] ut BΔ ad BA ita eſt BA ad AΔ. ſed BΔ eſt major quam BA: major igitur eſt BA quam AΔ: ergo ΔB extrema ac media ratione ſecta eſt in A, & AB eſt major ejus portio. quod erat demonſtrandum.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τῆς εἰρημένης θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τῇ ΑΓ ἴση κείσθω ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΒΑ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΒΑ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· διελόντι ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ἔστι δὲ, ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ.



SCHOLIUM.

Antecedentis theorematis reſolutio.

Recta enim linea AB extrema ac media ratione ſecetur in Γ, & ſit major portio AΓ, ponaturque AΔ ipſi AΓ æqualis: dico ΔB extrema ac media ratione ſecari in puncto A, & BA majorem eſſe portionem.

Quoniam enim ΔB extrema ac media ratione ſecta eſt in A, & major portio eſt BA; erit [per 30. 6.] ut ΔB ad BA ita BA ad AΔ. æqualis autem eſt AΔ ipſi AΓ: ut igitur ΔB ad BA ita BA ad AΓ; ergo per converſionem rationis [per cor. 19. 5.] ut BΔ ad ΔA ita AB ad BΓ: quare dividendo [per 17. 5.] ut BA ad AΔ ita AΓ ad ΓB. æqualis autem [per conſtr.] eſt AΔ ipſi AΓ: eſt igitur ut BA ad AΓ ita AΓ ad ΓB. quod quidem ita ſe habet; etenim [ex hyp.] AB extrema ac media ratione ſecatur in Γ puncto.

Συνθεσις τῶν αὐτῶν.

Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ· συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΒΓ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ. ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ· ἡ ἄρα ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Compoſitio ejuſdem.

Itaque quoniam AB extrema ac media ratione ſecatur in Γ, erit ut BA ad AΓ ita AΓ ad ΓB. æqualis autem eſt AΓ ipſi AΔ: ergo ut BA ad AΔ ita AΓ ad ΓB: ergo componendo [per 18. 5.] ut BΔ ad ΔA ita BA ad BΓ; & convertendo [per coroll. 19. 5.] ut ΔB ad BA ita BA ad AΓ. ſed eſt AΓ æqualis AΔ: eſt igitur ut ΔB ad BA ita BA ad AΔ: quare [per 3. def. 6.] ΔB extrema ac media ratione ſecatur in puncto A, & AB eſt portio major. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἔστω εὐθεῖα ῥητὴ ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι ἑκατέρα τῶν ΑΓ, ΓΒ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

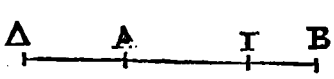
Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἡμίσεια ἡ ΑΔ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΒ τέτμηται ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ τῷ μείζονι τμήματι τῷ ΑΓ πρόσκειται ἡ ΑΔ, ἡμίσεια οὖσα τῆς ΑΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ πενταπλάσιόν ἐστι.

PROP. VI. THEOR.

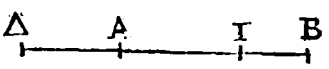
Si recta linea rationalis extrema ac media ratione ſecta fuerit; utraque portio irrationalis eſt quæ apotome appellatur.

SIT recta linea rationalis AB, & ſecetur extrema ac media ratione in Γ, ſitque AΓ major portio: dico utramque portionem AΓ, ΓB irrationalem eſſe quæ apotome appellatur.

Producatur enim BA in Δ, & ſit ipſius BA dimidia AΔ. itaque quoniam recta linea AB extrema ac media ratione ſecatur in Γ, & majori portioni AΓ adjicitur AΔ, quæ eſt ipſius AB dimidia: erit [per 1. 13.] quadratum ex ΓΔ quadrati ex ΔA quintuplum



quadratum igitur ex ΓΔ ad quadratum ex ΔΑ rationem habet quam numerus ad numerum; ideoque [per 6. 10.] quadratum ex ΓΔ commensurabile est quadrato ex ΔΑ. rationale autem est quadratum ex ΔΑ; etenim ΔΑ est rationalis, cum sit ipsius ΑΒ rationalis dimidia: ergo [per 6. def. 10.] & quadratum ex ΓΔ est rationale; ac propterea [per 8. def. 10.] ipsa ΓΔ rationalis. quoniam vero quadratum ex ΓΔ ad quadratum ex ΔΑ rationem non habet quam quadratus numerus ad quadratum numerum, recta linea ΓΔ [per 9. 10.] ipsi ΔΑ incommensurabilis est longitudine: quare ΓΔ, ΔΑ rationales sunt potentia solum commensurabiles; & idcirco [per 74. 10.] ΑΓ apotome est. rursus, quoniam ΑΒ extrema ac media ratione secta est, & major portio est ΑΓ; erit rectangulum sub ΑΒ, ΒΓ æquale quadrato ex ΑΓ: quadratum igitur apotomæ ΑΓ ad rationalem ΑΒ applicatum latitudinem facit ΒΓ. sed [per 98. 10.] quadratum apotomæ ad rationalem applicatum latitudinem facit apotomen primam; ergo ΒΓ est apotome prima. ostensa est autem & ΑΓ apotome.



Si igitur recta linea rationalis extrema ac media ratione secta fuerit; utraque portio irrationalis est quæ apotome appellatur. quod erat demonstrandum.

τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΑ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ, ῥητὸν γάρ ἐστιν ἡ ΔΑ ἡμίσεια οὖσα τῆς ΑΒ ῥητῆς οὔσης· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀσύμμετρος ἄρα μήκει ἡ ΓΔ τῇ ΔΑ· αἱ ΓΔ, ΔΑ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβληθὲν πλάτος ποιεῖ τὴν ΑΒ ῥητήν παραβεβλήθω πλάτος ποιεῖ τὴν ΒΓ. τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἡ ΒΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΑΓ ἀποτομή.

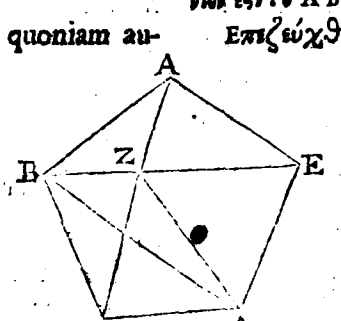
Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VII. Theor.

Si pentagoni æquilateri tres anguli, sive deinceps sive non deinceps, inter se fuerint æquales; æquiangulum erit pentagonum.

PEntagoni enim æquilateri ΑΒΓΔΕ tres anguli primum deinceps, qui ad puncta Α, Β, Γ, æquales inter se sint: dico pentagonum ΑΒΓΔΕ æquiangulum esse.

Jungantur enim ΑΓ, ΒΕ, ΖΔ. quoniam autem duæ ΓΒ, ΒΑ duabus ΒΑ, ΑΕ, æquales sunt, altera alteri, & angulus ΓΒΑ æqualis angulo ΒΑΕ, erit [per 4. 1.] basis ΑΓ æqualis basi ΒΕ, & triangulum ΑΒΓ triangulo ΑΒΕ æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquales quibus æqualia latera subtenduntur, angulus quidem ΒΓΑ angulo ΒΕΑ, angulus vero ΑΒΕ angulo ΓΑΒ: quare [per 6. 1.] & latus ΑΖ est æquale lateri ΒΖ. ostensa autem est & tota ΑΓ toti ΒΕ æqualis: ergo & reliqua ΖΓ est æqualis reliquæ ΖΕ. atque est ΓΔ æqualis ΔΕ; duæ igitur ΖΓ, ΓΔ duabus ΖΕ, ΕΔ æquales sunt, & basis ipsorum ΖΔ est communis: quare [per 8. 1.] angulus ΖΓΔ angulo ΖΕΔ est æqualis. ostensus autem est & angulus ΒΓΑ æqualis angulo ΑΕΒ: totus igitur ΒΓΔ æqualis est toti ΑΕΔ. sed [ex hyp.] angulus ΒΓΔ positus est æqualis angulis, qui sunt ad puncta Α, Β: ergo & ΑΕΔ angulus angulis qui sunt ad Α, Β æqualis erit. simili-



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι, ἤτοι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς ἢ αἱ μὴ κατὰ τὸ ἑξῆς, ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν· ἰσογώνιον ἔσται τὸ πεντάγωνον.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου τοῦ ΑΒΓΔΕ αἱ τρεῖς γωνίαι πρότερον αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς αἱ πρὸς τοῖς Α, Β, Γ ἴσαι ἀλλήλαις ἔστωσαν· λέγω ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΕ, ΖΔ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΓΒ, ΒΑ δυσὶ ταῖς ΒΑ, ΑΕ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΒΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΕ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΕ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΒΕΑ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΓΑΒ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΑΖ πλευρᾷ τῇ ΒΖ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλη ἡ ΑΓ ὅλῃ τῇ ΒΕ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΖΓ λοιπῇ τῇ ΖΕ ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ ἴση· δύο δὴ αἱ ΖΓ, ΓΔ δυσὶ ταῖς ΖΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΖΔ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΕΔ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΒ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ ἐστιν ἴση. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ὑπόκειται καὶ τοῖς πρὸς τοῖς Α, Β· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΔ ἄρα ταῖς πρὸς τοῖς Α, Β γωνίαις ἴση ἐστίν. ὁμοίως δὴ

δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τοῖς Α, Β γωνίαις· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

ΑΛΛΑ δὴ μὴ ἐστωσαν ἴσαι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς γωνίαι, ἀλλ' ἔστωσαν ἴσαι αἱ πρὸς τοῖς Α, Γ, Δ σημείοις· λέγω ὅτι καὶ οὕτως ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΒΔ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΑ, ΑΕ δυσὶ ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΒΕ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΔΕ ἴση, ἐπεὶ πλευρὰ ἡ ΒΕ πλευρᾷ τῇ ΒΔ ἐστιν ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΔ γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστιν ἴση. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ ταῖς πρὸς τοῖς Α, Γ γωνίαις ὑπόκειται ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΔ ἄρα γωνία ταῖς πρὸς τοῖς Α, Γ ἴση ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς Α, Γ, Δ γωνίαις· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ter demonstrabimus & angulum ΓΔΕ angulis qui sunt ad Α, Β esse æqualem: æquiangulum igitur est ΑΒΓΔΕ pentagonum.

SED non sint anguli deinceps sibi ipsis æquales, sed qui sunt ad Α, Γ, Δ: dico & sic æquiangulum esse ΑΒΓΔΕ pentagonum.

Jungatur enim ΒΔ. & quoniam duæ ΒΑ, ΑΕ duabus ΒΓ, ΓΔ æquales sunt, & angulos æquales continent; erit [per 4. 1.] basis ΒΕ æqualis basi ΒΔ, & ΑΒΕ triangulum triangulo ΒΓΔ, & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt quibus æqualia latera subtenduntur: æqualis igitur est angulus ΑΕΒ angulo ΓΔΒ. est autem [per 6. 1.] & ΒΕΔ angulus ipsi ΒΔΕ æqualis, quoniam latus ΒΕ est æquale lateri ΒΔ: totus igitur angulus ΑΕΔ toti ΓΔΕ est æqualis. sed [ex hyp.] angulus ΓΔΕ angulis qui sunt ad puncta Α, Γ æqualis ponitur: ergo & ΑΕΔ angulus angulis qui sunt ad Α, Γ est æqualis. eadem ratione & angulus ΑΒΓ æqualis est angulis qui sunt ad Α, Γ, Δ puncta: æquiangulum igitur est ΑΒΓΔΕ pentagonum. quod erat demonstrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

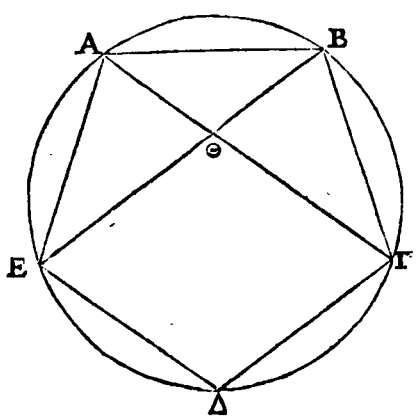
Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς δύο γωνίαι ὑποτείνωσιν εὐθεῖαι, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνουσιν ἀλλήλας, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

PROP. VIII. THEOR.

Si pentagoni æquilateri & æquianguli duos qui deinceps sunt angulos subtendant rectæ lineæ, extrema ac media ratione se mutuo secant; & majores ipsarum portiones pentagoni lateri sunt æquales.

ΠΕντάγωνον γὰρ ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕ δύο γωνίας, τὰς κατὰ τὸ ἑξῆς τὰς πρὸς τοῖς Α, Β, ὑποτεινέτωσαν εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΕ, τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Θ σημεῖον· λέγω ὅτι ἑκατέρα αὐτῶν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα εἰσὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

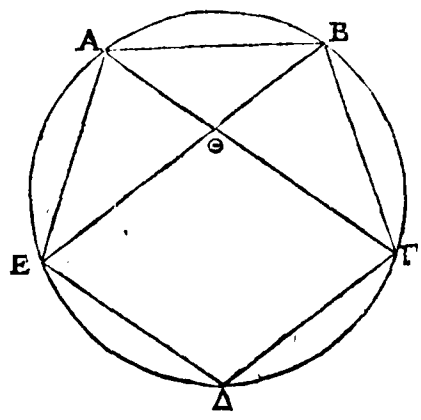
PEntagoni enim æquilateri & æquianguli ΑΒΓΔΕ duos qui sunt deinceps angulos ad puncta Α, Β subtendant rectæ lineæ ΑΓ, ΒΕ, quæ sese in puncto Θ secent: dico utramque ipsarum extrema ac media ratione secari in puncto Θ; & majores earum portiones pentagoni lateri æquales esse.



Περιγεγράφθω γὰρ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΑ, ΑΒ δυσὶ ταῖς ΑΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ ΒΕ βάσει τῇ ΑΓ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσι· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΕ· διπλῆ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΘΕ τῆς ὑπὸ ΒΑΘ γωνίας, ἐκτὸς γάρ ἐστι τοῦ ΑΒΘ τριγώνου. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ διπλῆ, ἐπειδὴ καὶ περιφέρεια ἡ ΕΔΓ περιφερείας τῆς ΓΒ ἐστι διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΘΕ· ὥστε καὶ ἡ ΘΕ εὐθεῖα τῇ ΕΑ, τουτέστι

Describatur enim [per 14. 4.] circa ΑΒΓΔΕ pentagonum circulus ΑΒΓΔΕ. & quoniam duæ rectæ lineæ ΕΑ, ΑΒ duabus ΑΒ, ΒΓ æquales sunt & angulos æquales continent; erit [per 4. 1.] basis ΒΕ basi ΑΓ æqualis, & ΑΒΕ triangulum æquale triangulo ΑΒΓ, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur: æqualis igitur est ΒΑΓ angulus angulo ΑΒΕ: ergo [per 6 & 32. 1.] ΑΘΕ angulus anguli ΒΑΘ est duplus; est etenim extra triangulum ΑΒΘ. est autem [per 33. 6.] & angulus ΕΑΓ duplus anguli ΒΑΓ, quoniam circumferentia ΕΔΓ circumferentiæ ΓΒ est dupla: ergo ΘΑΕ angulus æqualis est angulo ΑΘΕ; quare [per 6. 1.] recta ΘΕ est æqualis ipsi ΕΑ, hoc

est, ipsi AB. & quoniam BA est æqualis AE; erit & angulus ABE [per 5. 1.] angulo AEB æqualis. sed angulus ABE ostensus est æqualis angulo BAΘ; ergo & BEA angulus æqualis est angulo BAΘ. verum angulus ABE est communis duobus triangulis, videlicet triangulo ABE & triangulo ABΘ; reliquus igitur BAE [per 32. 1.] reliquo AΘB est æqualis: ergo triangulum ABE æquiangulum est triangulo AΘB; ideoque [per 4. 6.] ut EB ad BA ita est AB ad BΘ. æqualis autem est BA ipsi EΘ: & igitur ut BE ad EΘ ita EΘ ad ΘB. sed BE major est quam EΘ: ergo & EΘ quam ΘB est major: recta igitur linea BE [per 30. 6.] extrema ac media ratione secta est in Θ, & major ejus portio ΘE pentagoni lateri est æqualis. similiter demonstrabimus & AΓ extrema ac media ratione secari in Θ, & majorem ejus portionem ΓΘ pentagoni lateri æqualem esse. quod erat demonstrandum.



τῇ AB ἐστιν ἴση. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ BA εὐθεῖα τῇ AE, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ABE τῇ ὑπὸ AEB. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ABE τῇ ὑπὸ BAΘ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ BEA ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ BAΘ ἐστιν ἴση. καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ABE καὶ τοῦ ABΘ ἐστιν ἡ ὑπὸ ABE· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ BAE γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ AΘB ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ABE τριγώνον τῷ ABΘ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ EB πρὸς τὴν BA οὕτως ἡ AB πρὸς τὴν BΘ. ἴση δὲ ἡ BA τῇ EΘ· ὡς ἄρα ἡ BE πρὸς τὴν EΘ οὕτως ἡ EΘ πρὸς τὴν ΘB. μείζων δὲ ἡ BE τῆς EΘ· μείζων ἄρα καὶ ἡ EΘ τῆς ΘB· ἡ BE ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα τὸ ΘE ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ AΓ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα τὸ ΓΘ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. IX. THEOR.

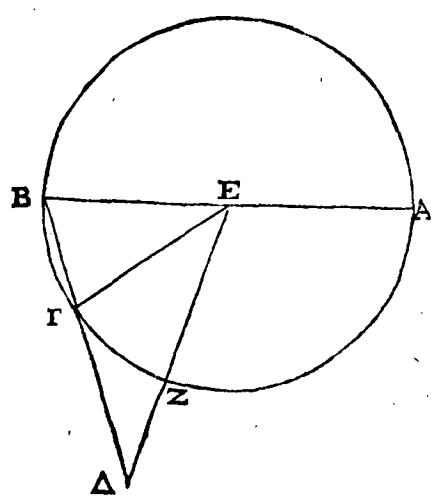
Si latera hexagoni & decagoni in eodem circulo descriptorum componantur; erit tota recta extrema ac media ratione secta, & major ipsius portio erit hexagoni latus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Ἐὰν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ καὶ ἡ τοῦ δεκαγώνου τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένων συντεθῶσιν· ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρά.

SIT circulus ABΓ, &, descriptarum in ABΓ circulo figurarum, sit decagoni quidem latus BΓ, hexagoni vero ΓΔ, & in directum sibi ipsis constituantur: dico totam rectam lineam BΔ extrema ac media ratione secari in Γ, & majorem ejus portionem esse ΓΔ.

Sumatur enim centrum circuli, quod sit E; jungunturque EB, EΓ, EΔ, & BE ad A producatur. quoniam igitur BΓ est decagoni æquilateri latus, erit AΓB circumferentia circumferentiæ BΓ quintupla; quare circumferentia AΓ quadrupla est circumferentiæ ΓB. ut autem circumferentia AΓ ad ipsam ΓB ita [per 33. 6.] AEΓ angulus ad angulum ΓEB: anguli igitur AEΓ anguli ΓEB quadruplus est. & quoniam [per 5. 1.] EBΓ angulus est æqualis angulo EΓB, erit [per 32. 1.] angulus AEΓ anguli EΓB duplus. & quoniam recta linea EΓ æqualis ipsi ΓΔ; utraque enim [per hyp. & 15. 4.] est æqualis



Ἔστω κύκλος ὁ ABΓ, καὶ τοῦ εἰς τὸν ABΓ κύκλον ἐγγραφομένων σχημάτων, δεκαγώνου μὲν ἔστω πλευρὰ ἡ BΓ, ἑξαγώνου δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας· λέγω ὅτι ἡ ὅλη εὐθεῖα ἡ BΔ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΓΔ.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ E σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ EB, EΓ, EΔ, καὶ διήχθω ἡ BE ἐπὶ τὸ A. καὶ ἐπεὶ δεκαγώνου ἰσοπλεύρου πλευρά ἐστιν ἡ BΓ, πενταπλασίων ἄρα ἡ AΓB περιφέρεια τῆς BΓ περιφερείας· πενταπλασίων ἄρα ἡ AΓ περιφέρεια τῆς ΓB. ὡς δὲ ἡ AΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΓB οὕτως ἡ ὑπὸ AEΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΓEB· πενταπλασίων ἄρα ἡ ὑπὸ AEΓ τῆς ὑπὸ ΓEB. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ EBΓ γωνία τῇ ὑπὸ EΓB, ἡ ἄρα ὑπὸ AEΓ γωνία διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ EΓB. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ EΓ εὐθεῖα τῇ ΓΔ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση

ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾷ, τοῦ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἐγγραφομένου, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΕΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ· διπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΓΒ τῆς ὑπὸ ΕΔΓ. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΕΓΒ διπλασία ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΑΕΓ· τετραπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ τῆς ὑπὸ ΒΕΓ τετραπλασία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΓ τῇ ὑπὸ ΒΕΓ. κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ΒΕΓ ⟨καὶ⟩ οὗ ΒΕΔ, ἡ ὑπὸ ΕΒΔ γωνία· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΔ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΓΒ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΕΒΔ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΓ. ἴση δὲ ἡ ΕΒ τῇ ΓΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ. μείζων δὲ ἡ ΒΔ τῆς ΔΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΔΓ τῆς ΓΒ· ἡ ΒΔ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα αὐτῆς ἐστιν ἡ ΔΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

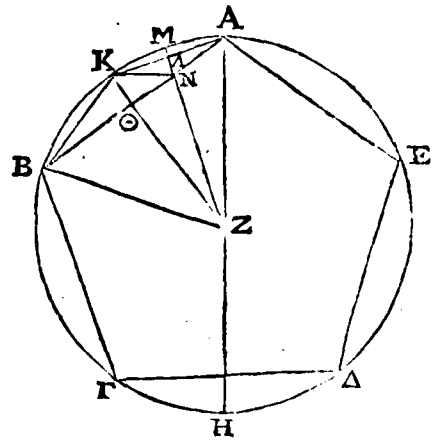
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγράψαι· ἥ τε τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δυνατή ἐστι τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ, οὗ ἡ μὲν τοῦ ἐγγραφομένου ἰσοπλεύρου πενταγώνου πλευρὰ ἔστω ἡ ΑΒ, ἡ δὲ τοῦ ἑξαγώνου ἡ ΑΖ, ἡ δὲ τοῦ δεκαγώνου ἡ ΑΗ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ καὶ ΑΖ δυνατὴν εἶναι ἐν τῷ ΑΒΓΔΕ κύκλῳ.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΖΒ, καὶ διήχθωσαν ἐπὶ τὸ Η σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΘ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΚΒ, καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΑΚ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΛ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Μ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΝ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ περιφέρεια τῇ ΑΕΔΗ περιφερείᾳ, ὧν ἡ ΑΒΓ τῇ ΑΕΔ ἐστιν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΗ περιφέρεια λοιπῇ τῇ ΔΗ ἐστιν ἴση. πενταγώνου γάρ ἐστιν ἡ ΓΔ· δεκαγώνου ἄρα ἡ ΓΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, καὶ κάθετος ἡ ΖΘ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΖΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΖΒ· ὥστε καὶ περιφέρεια ἡ ΑΚ τῇ ΚΒ ἐστιν ἴση· διπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας· δεκαγώνου ἄρα πλευρά ἐστιν ἡ ΑΚ εὐθεῖα. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΚ τῇ ΚΜ ἐστι διπλῆ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΒ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας, ἴση δὲ ἡ ΓΔ περιφέρεια τῇ ΑΒ περιφερείᾳ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΓΔ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας. ἔστι δὲ ἡ ΓΔ περιφέρεια καὶ τῆς ΓΗ διπλῆ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΒ περιφέρεια λοιπῆς τῆς ΒΚ διπλῆ ἐστιν· καὶ ἡ ΑΚ ἄρα τῆς ΚΒ διπλῆ ἐστιν. ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΝ, ΝΑ, ΑΜ, ΜΚ· καὶ ἐπεὶ ἡ ΚΑ τῆς ΚΒ διπλῆ ἐστιν, ἀλλὰ τῆς μὲν ΚΑ διπλῆ ἐστιν ἡ ΚΜ, τῆς δὲ ΚΒ διπλῆ ἐστιν ἡ ΚΝ· καὶ ἡ ΚΜ ἄρα τῆς ΚΝ διπλῆ ἐστιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΜ τῇ ΚΝ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΚΖ τῇ ΚΖ ἐστιν ἴση· δύο δὴ αἱ ΜΚ, ΚΖ δυσὶ ταῖς ΝΚ, ΚΖ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΜΚΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΝΚΖ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΜΖ βάσει τῇ ΝΖ ἐστιν ἴση· καὶ τὸ ΜΚΖ ἄρα τρίγωνον τῷ ΝΚΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν· καὶ λοιπαὶ ἄρα γωνίαι λοιπαῖς ταῖς ὑφ' ἃς ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν ἴσαι ἐστίν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΚΜΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΝΖ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΚΝΖ τῇ ὑπὸ ΝΑΖ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΚΜΖ ἄρα τῇ ὑπὸ ΝΑΖ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΜΑΝ ἄρα γωνία διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΚΜΖ γωνίας. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΚΜΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΜΚΖ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΜΚΖ ἄρα τῇ ὑπὸ ΝΚΖ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΜΚΝ ἄρα γωνία διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΜΚΖ γωνίας. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΜΚΖ τῆς ὑπὸ ΚΜΖ ἐστι διπλῆ· καὶ ἡ ὑπὸ ΜΚΝ ἄρα τῆς ὑπὸ ΚΜΖ ἐστι διπλῆ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΜΚΝ τῇ ὑπὸ ΜΑΝ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΜΑΝ ἄρα τῆς ὑπὸ ΚΜΖ ἐστι διπλῆ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΜΑΝ τῆς ὑπὸ ΚΜΖ ἐδείχθη διπλασία· ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΜΑΝ, ΚΜΖ γωνιῶν ὀρθή ἐστιν· καὶ ἡ ὑπὸ ΚΜΑ ἄρα ὀρθή ἐστιν· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΚΜΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΝΖ ἐστιν ἴση, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΚΜΖ ὀρθή ἐστιν· καὶ ἡ ὑπὸ ΚΝΖ ἄρα ὀρθή ἐστιν· καὶ ἡ ὑπὸ ΜΝΑ ἄρα ὀρθή ἐστιν· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΚΜΑ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΜΑ· καὶ ἡ ΚΑ ἄρα διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΒΓΔΕ κύκλου· ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΔ, ΔΑ, ΑΓ, ΓΚ· καὶ ἐπεὶ ἡμικύκλιον ἐστὶ τὸ ΚΓΑ, ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΚΓΑ γωνία· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΚΓΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΔΑ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΚΔΑ ἄρα ὀρθή ἐστιν· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΚΝΑ ὀρθή ἐστιν, ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΝΑ· καὶ ἡ ὑπὸ ΚΔΑ ἄρα ὀρθή ἐστιν· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΚΜΑ ὀρθή ἐστιν, ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΜ

ipſius ΓH: ergo ΓH eſt æqualis BK. ſed BK ipſius KM eſt dupla, quoniam & AK: & ΓH igitur ipſius KM dupla erit. eſt autem & ΓB circumferentia circumferentiæ BK dupla; etenim ΓB eſt æqualis BA: ergo & tota HB dupla eſt ipſius BM, & [per 33. 6.] angulus HZB anguli BZM duplus. ſed [per 32. 1.] & angulus HZB eſt duplus anguli ZAB; etenim [per 5. 1.] ZAB angulus æqualis eſt angulo ABZ: ergo & angulus BZN angulo ZAB eſt æqualis. communis autem duobus triangulis ABZ, BZN eſt ABZ angulus: reliquus igitur AZB [per 32. 1.] eſt æqualis reliquo BNZ, & triangulum ABZ triangulo BZN æquiangulum: ergo [per 4. 6.] ut AB ad BZ ita ZB ad BN: rectangulum igitur ſub AB, BN [per 17. 6.] eſt æquale quadrato ex ZB. rurſus quoniam AΛ eſt æqualis AK, communis autem & ad rectos angulos AN; erit [per 4. 1.] baſis KN æqualis baſi AN: ergo & angulus AKN angulo AΛN eſt æqualis. ſed [per 5. 1.] angulus AΛN eſt æqualis angulo KBN: & igitur angulus AKN eſt æqualis angulo KBN. angulus autem NAK eſt communis duobus triangulis AKB & AKN: ergo [per 32. 1.] reliquus AKB reliquo KNA eſt æqualis, & triangulum KBA triangulo KNA æquiangulum; igitur ut BA ad AK ita [per 4. 6.] KA ad AN; quare [per 17. 6.] rectangulum ſub BA, AN eſt æquale quadrato ex AK. oſtenſum eſt autem & rectangulum ſub AB, BN quadrato ex BZ æquale: rectangulum igitur ſub AB, BN una cum rectangulo ſub BA, AN, quod [per 2. 2.] eſt quadratum ex AB, eſt æquale quadrato ex BZ una cum quadrato ex AK. ſed eſt AB quidem pentagoni latus, BZ vero latus hexagoni, & AK latus decagoni.



Ergo pentagoni latus poteſt & latus hexagoni & latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum. quod erat demonſtrandum.

πλῆ· ἴση ἄρα ἡ ΓH περιφέρεια τῇ BK περιφερείᾳ. ἀλλὰ, ἡ BK τῇ KM ἐστι διπλῆ, ἐπεὶ καὶ ἡ KA· καὶ ἡ ΓH ἄρα τῇ KM ἐστι διπλῆ. ἀλλὰ ἡ ΓB περιφέρεια τῇ ΓK περιφερείας ἐστὶ διπλῆ, ἴση γὰρ ἡ ΓB περιφέρεια τῇ BA περιφερείᾳ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ HB περιφέρεια τῇ BM ἐστι διπλῆ· ὥστε ἡ γωνία ἡ ὑπὸ HZB γωνίας τῆς ὑπὸ BZM ἐστι διπλῆ. ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ HZB καὶ τῆς ὑπὸ ZAB διπλῆ, ἴση γὰρ ἡ ὑπὸ ZAB τῇ ὑπὸ ABZ· καὶ ἡ ὑπὸ BZN ἄρα τῇ ὑπὸ ZAB ἐστιν ἴση. κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ABZ καὶ BZN, ἡ ὑπὸ ABZ γωνία· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AZB λοιπῇ τῇ ὑπὸ BNZ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ABZ τρίγωνον τῷ BZN τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ AB εὐθεῖα πρὸς τὴν BZ οὕτως ἡ ZB πρὸς τὴν BN· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB, BN ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ZB. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AΛ τῇ AK, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ AN· βάσις ἄρα ἡ KN βάσει τῇ AN ἐστιν ἴση· καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ AKN γωνίᾳ τῇ ὑπὸ AΛN ἐστιν ἴση. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ AΛN τῇ ὑπὸ KBN ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ AKN ἄρα τῇ ὑπὸ KBN ἐστιν ἴση. καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε AKB καὶ τοῦ AKN, ἡ ὑπὸ NAK· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AKB λοιπῇ τῇ ὑπὸ KNA ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ KBA τρίγωνον τῷ KNA τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ BA εὐθεῖα πρὸς τὴν AK οὕτως ἡ KA εὐθεῖα πρὸς τὴν AN· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BA, AN ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AK. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BN ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς BZ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB, BN μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν BA, AN, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς BZ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AK. καὶ ἔστιν ἡ μὲν AB πενταγώνου πλευρά, ἡ δὲ BZ ἑξαγώνου, ἡ δὲ AK δεκαγώνου.

Η ἄρα τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δυνάται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. XI. Theor.

Si in circulo rationalem diametrum habente pentagonum æquilaterum deſcribatur; pentagoni latus eſt linea irrationalis quæ minor appellatur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πενταγώνου ἰσοπλεύρου ἐγγραφῆ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

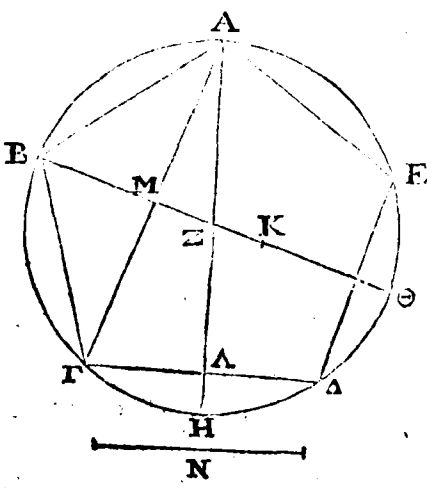
IN circulo enim ABΓΔE rationalem diametrum habente pentagonum æquilaterum deſcribatur ABΓΔE: dico pentagoni ABΓΔE latus irrationalem eſſe lineam, quæ minor appellatur.

Sumatur enim circuli centrum Z; & junctæ AZ, BZ ad puncta H, Θ producantur, & jungatur AΓ; ponaturque ZK ipſius AZ pars

ΕΙΣ γὰρ κύκλον τὸν ABΓΔE ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πενταγώνου ἰσοπλεύρου ἐγγεγράφθω τὸ ABΓΔE· λέγω ὅτι ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἡ ABΓΔE ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Z σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AZ, ZB, καὶ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ H, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AΓ, καὶ κείσθω τῇ AZ τετρα-

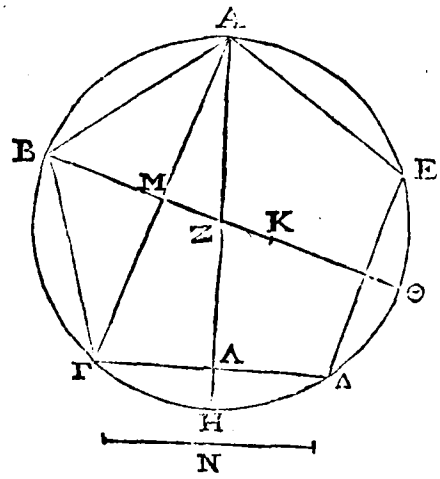
τέταρτον μέρος ἡ Z K. ῥητὴ δὲ ἡ A Z· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ Z K. ἔστι δὲ καὶ ἡ B Z ῥητή· ὅλη ἄρα ἡ B K ῥητή ἐστι. Ὡ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ A Γ H περιφέρεια τῇ A Δ H περιφερείᾳ, ὧν ἡ A B Γ τῇ A E Δ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ Γ H λοιπῇ τῇ H Δ ἐστιν ἴση. καὶ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν A Δ, συναγον) ὀρθαὶ αἱ πρὸς τῷ Λ γωνίαι, Ὡ διπλῆ ἡ Γ Δ τῆς Γ Λ. Διὰ τὰ αὐτὰ καὶ αἱ πρὸς τῷ M ὀρθαί εἰσι, Ὡ διπλῆ ἡ A Γ τῆς Γ M. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ A Λ Γ γωνία τῇ ὑπὸ A M Z, κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τῶν τε A Λ Γ καὶ τοῦ A M Z, ἡ ὑπὸ Λ A Γ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ A Γ Λ λοιπῇ τῇ ὑπὸ M Z A ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα τὸ A Γ Λ τριγωνον τῷ A M Z τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Λ Γ πρὸς τὴν Γ A οὕτως ἡ M Z πρὸς τὴν Z A, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια· ὡς ἄρα ἡ τοῦ Λ Γ διπλῆ πρὸς τὴν Γ A οὕτως ἡ τοῦ M Z διπλῆ πρὸς τὴν Z A. ἀλλ' ὡς ἡ τοῦ M Z διπλῆ πρὸς τὴν Z A οὕτως ἡ M Z πρὸς τὴν ἡμίσειαν τοῦ Z A· καὶ ὡς ἄρα ἡ τοῦ Λ Γ διπλῆ πρὸς τὴν Γ A οὕτως ἡ M Z πρὸς τὴν ἡμίσειαν τοῦ Z A, καὶ τῶν ἑπομένων τὰ ἡμίσεια· ὡς ἄρα ἡ τοῦ Λ Γ διπλῆ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τοῦ Γ A οὕτως ἡ M Z πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ Z A. καὶ ἔστι τοῦ μὲν Λ Γ διπλῆ ἡ Δ Γ, τοῦ δὲ Γ A ἡμίσεια ἡ Γ M, τοῦ δὲ Z A τέταρτον μέρος ἡ Z K· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Δ Γ πρὸς τὴν Γ M οὕτως ἡ M Z πρὸς τὴν Z K. συνθέντι καὶ ὡς συναμφότερος ἡ Δ Γ M πρὸς τὴν Γ M οὕτως ἡ M K πρὸς τὴν Z K· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τοῦ Δ Γ M πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ Γ M οὕτως τὸ ἀπὸ τοῦ M K πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ K Z. καὶ ἐπεὶ τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς δ πενταγώνου ὑποτεινούσης, οἷον τοῦ Λ Γ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, τὸ μεῖζον τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῇ δ πενταγώνου πλευρᾷ, τουτέστι τῷ Δ Γ, τὸ δὲ μεῖζον τμῆμα τριπλάσιον τοῦ ἡμίσειαν τοῦ ὅλης πενταπλάσιον δυνάται) τὸ ἀπὸ τοῦ ἡμισείας τοῦ ὅλης, καὶ ἔστιν ὅλης τοῦ Λ Γ ἡμίσεια ἡ Γ M· τὸ ἄρα ἀπὸ τοῦ Δ Γ M ὡς μιᾶς πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τοῦ Γ M. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τοῦ Δ Γ M ὡς μιᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ Γ M οὕτως ἐδείχθη τὸ ἀπὸ τοῦ M K πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ K Z· πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τοῦ M K τοῦ ἀπὸ τῆς K Z. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τοῦ K Z, ῥητὴ γὰρ ἡ διάμετρος· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ M K· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ M K, λόγον γὰρ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν τὸ ἀπὸ τοῦ M K πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ K Z. Ὡ ἐπεὶ τετραπλασία ἐστὶν ἡ B Z τῆς Z K, πενταπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ B K τῆς K Z· εἴκοσι πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τοῦ B K τοῦ ἀπὸ τοῦ K Z. πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τοῦ M K τοῦ ἀπὸ τοῦ K Z· πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τοῦ B K τοῦ ἀπὸ τοῦ K M· τὸ ἄρα ἀπὸ τοῦ B K πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ K M λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ B K τῇ K M μήκει. καί ἐστι ῥητὴ ἑκατέρα αὐτῶν· αἱ B K, K M



quarta. rationalis autem eſt A Z: ergo & Z K eſt rationalis. ſed & rationalis eſt B Z: tota igitur B K rationalis erit. quoniam vero circumferentia A Γ H æqualis eſt circumferentiæ A Δ H, ex quibus A B Γ eſt æqualis ipſi A E Δ; erit reliqua Γ H reliquæ H Δ æqualis. quod ſi jungamus A Δ, fient anguli ad Λ recti, & [per 3. 3.] Γ Δ dupla ipſius Γ Λ. eadem ratione & anguli ad M recti ſunt, & A Γ dupla Γ M. quoniam igitur angulus A Λ Γ eſt æqualis angulo A M Z, communis autem duobus triangulis A Λ Γ & A M Z eſt angulus Λ A Γ; reliquus A Γ Λ [per 32. 1.] reliquo M Z A æqualis erit: ideoque triangulum A Γ Λ triangulo A M Z æquiangulum: ergo [per 4. 6.] ut Λ Γ ad Γ A ita M Z ad Z A, & antecedentium dupla: quare ut dupla ipſius Λ Γ ad Γ A ita dupla ipſius M Z ad Z A. ſed ut ipſius M Z dupla ad Z A ita eſt M Z ad dimidiam ipſius Z A: & igitur ut dupla ipſius Λ Γ ad Γ A ita M Z ad ipſius Z A dimidiam; & conſequentium dimidia: quare ut dupla Λ Γ ad dimidiam ipſius Γ A ita M Z ad quartam partem ipſius Z A. atque ipſius quidem Λ Γ dupla eſt Δ Γ; ipſius vero Γ A dimidia Γ M, & ipſius Z A quarta pars Z K: eſt igitur ut Δ Γ ad Γ M ita M Z ad Z K. & componendo [per 18. 5.] ut utraque *Δ Γ M ad Γ M ita M K ad Z K: ergo [per 22. 6.] ut quadratum quod fit ex utraque Δ Γ M ad quadratum ex Γ M ita quadratum ex M K ad quadratum ex K Z. quoniam autem [per 8. 13.] recta linea, quæ duo pentagoni latera ſubtendit, ut A Γ, extrema ac media ratione ſecta, major ejus portio eſt æqualis lateri pentagoni, hoc eſt ipſi Δ Γ; & [per 1. 13.] major portio aſſumens dimidium totius quintuplum poteſt dimidiæ totius; atque eſt totius A Γ dimidia Γ M: erit quadratum ex Δ Γ M tanquam ex una linea quintuplum quadrati ex Γ M. ut autem quadratum ex Δ Γ M tanquam ex una linea ad quadratum ex Γ M ita oſtendimus eſſe quadratum ex M K ad quadratum ex K Z: quintuplum igitur eſt quadratum ex M K quadrati ex K Z. eſt autem [per 6. def 10.] quadratum ex K Z rationale: namq; diameter rationalis eſt: ergo & rationale eſt [per 6. 10.] quadratum ex M K, & ipſa M K rationalis, quadratum enim ex M K ad quadratum ex K Z rationem habet quam numerus ad numerum. quoniam autem B Z quadrupla eſt ipſius Z K, erit B K ipſius K Z quintupla: & [per cor. 20. 6.] quadratum ex B K vigintiquintuplum quadrati ex K Z. quadratum autem ex M K quintuplum eſt quadrati ex K Z: ergo quadratum ex B K quadrati ex K M eſt quintuplum; ac propterea ad illud rationem non habet quam numerus quadratus ad quadratum numerum: incommenſurabilis igitur eſt [per 9. 10.] B K ipſi K M longitudine. ſed eſt & utraque ipſarum rationalis: ergo B K, K M rationa-

* In ſequentibus frequenter enunciatur aggregatum duarum rectarum contiguarum, ut E Γ & Γ M per Δ Γ M.

les ſunt potentia ſolum commenſurabiles. ſi autem à rationali rationalis auferatur potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, [per 74. 10.] reliqua irrationalis eſt: quare MB eſt apotome, & ipſi congruens MK. dico & ipſam MB quartam eſſe. quo enim quadratum ex BK ſuperat quadratum ex KM, illi ſit æquale quadratum ex N: ergo BK plus poteſt quam KM quadrato ex N. quoniam vero commenſurabilis eſt KZ ipſi ZB; & componendo KB commenſurabilis eſt ipſi BZ. ſed & BZ eſt commenſurabilis ipſi BΘ longitudine; erit igitur [per 12.10.] & KB ipſi BΘ commenſurabilis. quoniam autem quadratum ex BK quintuplum eſt quadrati ex KM, habebit quadratum ex BK ad quadratum ex KM rationem eam quam habet quinque ad unum: ergo convertendo [per cor. 19. 5.] quadratum ex BK ad N rationem habet quam quinque ad quatuor, & non eam quam quadratus numerus ad quadratum numerum: incommenſurabilis igitur eſt [per 9. 10.] BK ipſi N: quare BK plus poteſt quam KM quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis. itaque quoniam tota BK plus poteſt quam congruens MK quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, & tota BK commenſurabilis eſt expoſitæ rationali BΘ; erit [per 4. defl. tert. 10] MB apotome quarta. quod autem ſub rationali & apotome quarta continetur rectangulum [per 95. 10.] irrationale eſt, & ipſum potens eſt irrationalis quæ minor appellatur. ſed [per 17.6.] AB poteſt id quod continetur ſub ΘB, BM, propterea quod, juncta AΘ, triangulum ABΘ eſt [per 8.6.] æquiangulum triangulo ABM, atque eſt [per 4. 6.] ut ΘB ad BA ita AB ad BM: ergo pentagoni latus AB eſt linea irrationalis quæ minor appellatur. quod erat dem.

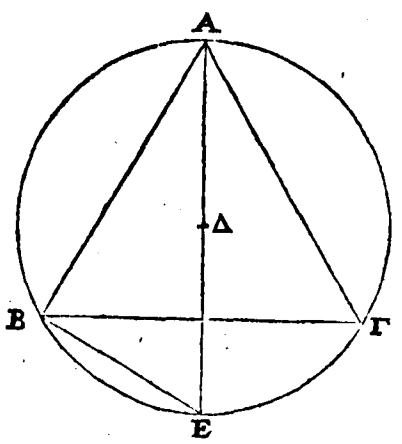


ἄρα ῥητή ἐστι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐὰν δὲ ἀπὸ ῥητῆς ῥητὴ ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος ὅσαι τῇ ὅλῃ, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· ἀποτομὴ ἄρα ἡ MB, ᾧ συναρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ MK. λέγω δὴ ὅτι καὶ τετάρτη. ᾧ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς BK τοῦ ἀπὸ τῆς KM, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς N· ἡ BK ἄρα τῆς KM μεῖζον δυνάται τῇ N. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ KZ τῇ ZB, καὶ συνθέντι σύμμετρός ἐστιν ἡ KB τῇ BZ. ἀλλὰ ἡ BZ τῇ BΘ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ ἡ BK ἄρα τῇ BΘ σύμμετρός ἐστι. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς BK τοῦ ἀπὸ τῆς KM, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς BK πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς KM λόγον ἔχει ὃν E πρὸς A· ἀναστρέψαντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς BK πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς N λόγον ἔχει ὃν E πρὸς Δ, ἐχ ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον· ἀσύμμετρος ἄρα μήκει ἐστὶν ἡ BK τῇ N· ἡ BK ἄρα τῆς KM μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ BK τῇ συναρμοζούσῃ τῆς MK μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ὅλη ἡ BK σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ BΘ· ἀποτομὴ ἄρα τετάρτη ἐστὶν ἡ MB. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ ἐλάττων. δυνάσθω δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΘB, BM ἡ AB, λέγω τὸ ὑπερβαλλόμενον τῆς AΘ ἰσογώνιον γίγραπται τὸ ABΘ τριγώνῳ τῷ ABM, καὶ εἶναι ὡς τὴν ΘB πρὸς τὴν BA οὕτως τὴν AB πρὸς τὴν BM· ἡ ἄρα AB τῆς παραγωνίου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

PROP. XII. THEOR.

Si in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; trianguli latus potentia tripla eſt ejus quæ ex circuli centro.

SIT circulus ABΓ, & in ipſo triangulum æquilaterum deſcribatur ABΓ: dico trianguli ABΓ latus potentia triplum eſſe ejus quæ eſt ex circuli ABΓ centro.



Sumatur enim circuli centrum Δ, & juncta AΔ producatur ad E, & BE jungatur. itaque quoniam æquilaterum eſt ABΓ triangulum, erit BEΓ circumferentia tertia pars circumferentiæ circuli ABΓ: ergo circumferentia BE eſt

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Εἰὰν εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

ΕΣτω κύκλος ὁ ABΓ, καὶ εἰς αὐτὸν τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ ABΓ· λέγω ὅτι ἡ τοῦ ABΓ τριγώνου μία πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ABΓ κύκλου.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἡ AΔ διήχθω ἐπὶ τὸ E, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ BE. καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ ABΓ τρίγωνον, BEΓ ἄρα περιφέρεια τρίτον μέρος ἐστὶ τῆς ABΓ κύκλου περιφερείας· ἡ ἄρα BE περιφέρεια ἐκτου

ἕκτον μέρος ἐστὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας· ἐξαγώνου ἄρα πλευρά ἐστιν ἡ ΒΕ εὐθεῖα· ἴση ἄρα ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, τῇ ΔΕ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ, τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ· διπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τριπλασίου ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ. ἴση δὲ ἡ ΒΕ τῇ ΔΕ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τριπλασίου ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ.

Η ἄρα τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

fexta pars circumferentiæ circuli: ideoque recta linea ΒΕ eſt latus hexagoni, & [per 15. 4.] æqualis ipſi ΔΕ quæ eſt ex circuli centro. quoniam vero ΑΕ eſt dupla ipſius ΔΕ, erit [per cor. 20.6.] quadratum ex ΑΒ quadrati ex ΔΕ, hoc eſt quadrati ex ΒΕ, quadruplum. quadratum autem ex ΑΕ [per 47. 1. & 31. 3.] eſt æquale quadratis ex ΑΒ, ΒΕ: ergo quadrata ex ΑΒ, ΒΕ quadrupla ſunt quadrati ex ΒΕ; unde dividendo, erit quadratum ex ΑΒ quadrati ex ΒΕ triplum. at vero eſt ΒΕ æqualis ΔΕ: quadratum igitur ex ΑΒ triplum eſt quadrati ex ΔΕ.

Ergo trianguli latus eſt potentia triplum ejus quæ ex circuli centro. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

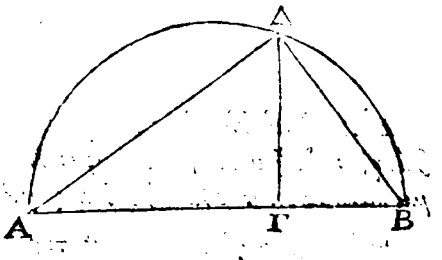
Πυραμίδα συστήσασθαι, καὶ σφαῖραν περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ· καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

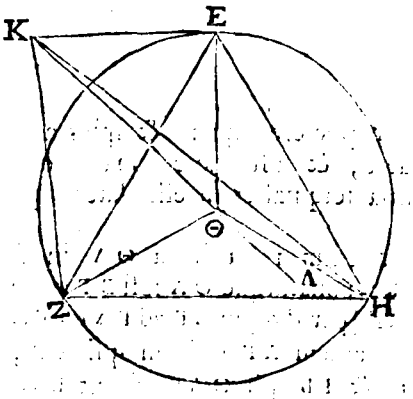
Prop. XIII. Probl.

Pyramidem conſtituere, & ſphæra comprehendere data; atque etiam demonſtrare quod ſphæræ diameter eſt potentia ſeſquialtera lateris ipſius pyramidis.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ὥστε διπλασίαν εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΒΓ· καὶ γεγράφθω ἐπὶ

EXponatur enim datæ ſphæræ diameter ΑΒ, & [per 9.6.] ſecetur in Γ, ita ut ΑΓ ipſius ΒΓ ſit dupla; deſcribaturque ſuper ΑΒ ſemicirculus



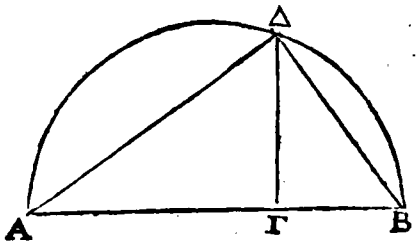


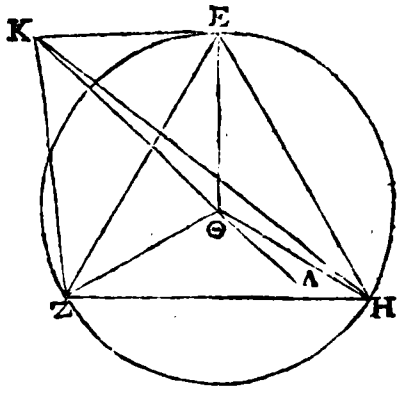
τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΑ· καὶ ἐκκείσθω κύκλος ἡ ΕΖΗ, ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ΔΓ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΗΖ κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΕΖΗ· καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Θ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΘ, ΘΖ, ΘΗ· καὶ ἀνεσάτω ἀπὸ τοῦ Θ σημείου τῷ ΕΖΗ κύκλῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΘΚ· καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς ΘΚ τῇ ΑΓ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΘΚ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ΕΖΗ κύκλου πίπεδον, πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ ΕΖΗ κύκλου πιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκάστη τῶν ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ· ἡ ΘΚ ἄρα πρὸς ἑκάστην τῶν ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ ὀρθή ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΘΚ, ἡ δὲ ΓΔ τῇ ΘΕ, καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΔΑ βάσει τῇ ΚΕ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ΚΖ, ΚΗ τῇ ΔΑ ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. καὶ ἐπεὶ διπλῆ

ΑΔΒ, & à puncto Γ ipſi ΑΒ ad rectos angulos ducatur ΓΔ, & ΔΑ jungatur: exponatur præterea circulus ΕΖΗ habens eam quæ ex centro æqualem ipſi ΔΓ, in quo deſcribatur [per 2.4.] triangulum æquilaterum ΕΖΗ; ſumaturque centrum circuli Θ, & jungantur ΕΘ, ΘΖ, ΘΗ; atque à puncto Θ ipſi plano circuli ΕΖΗ ad rectos angulos erigatur ΘΚ; & auferatur ΘΚ ipſi ΑΓ æqualis, & ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ jungantur. quoniam igitur ΘΚ recta eſt ad planum circuli ΕΖΗ; & [per 3. def. 11.] ad omnes rectas lineas, quæ in eodem circuli plano exiſtentes ipſam contingunt, rectos angulos faciet. contingit autem ipſam unaquæque linearum ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ: ergo ΘΚ ad unamquamque ipſarum ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ eſt perpendicularis. quoniam autem ΑΓ eſt æqualis ΘΚ, & ΓΔ ipſi ΘΕ, & rectos angulos continent; erit [per 4. 1.] baſis ΔΑ æqualis baſi ΚΕ. eadem ratione & utravis ΚΖ, ΚΗ ipſi ΔΑ eſt æqualis: tres igitur ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ inter ſe æquales ſunt. & quoniam du-

pla eſt ΑΓ ipſius ΓΒ, erit ΑΒ ipſius ΒΓ tripla. ut autem ΑΒ ad ΒΓ ita quadratum ex ΑΔ ad quadratum ex ΔΓ, ut deinceps [in lem. ſeq.] demonſtrabitur: triplum igitur eſt quadratum ex ΑΔ quadrati ex ΔΓ. eſt autem [per 12.13.] & quadratum ex ΖΕ quadrati ex ΕΘ triplum, atque eſt ΔΓ æqualis ΕΘ: ergo & ΔΑ ipſi ΕΖ eſt æqualis. ſed ΔΑ oſtenſa eſt æqualis unicuique ipſarum ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ: & igitur unaquæque ipſarum ΕΖ, ΖΗ, ΗΕ unicuique ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ eſt æqualis: quare æquilatera ſunt quatuor triangula ΕΖΗ, ΚΕΖ, ΚΖΗ, ΚΗΕ: pyramis igitur conſtituta eſt ex quatuor triangulis æqualibus & æquilateris, cujus baſis quidem eſt triangulum ΕΖΗ vertex autem Κ punctum.

ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ, τριπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ, ὡς ἐξῆς δειχθήσεται· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τ ΑΔ τοῦ ἀπὸ τ ΔΓ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τ ΖΕ τοῦ ἀπὸ τ ΕΘ τριπλάσιον, καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΔΓ τῇ ΕΘ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΔΑ τῇ ΕΖ. ἀλλὰ ἡ ΔΑ ἑκάστῃ τ̃ ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἑκάστη ἄρα τ̃ ΕΖ, ΖΗ, ΗΕ ἑκάστῃ τ̃ ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ ἐστιν ἴση· ἰσόπλευρα ἄρα ἐστὶ τὰ τέσσαρα τρίγωνα τὰ ΕΖΗ, ΚΕΖ, ΚΖΗ, ΚΗΕ· πυραμὶς ἄρα συνέστηκε ἐκ τεσσάρων τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΖΗ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον.





OPORTET præterea ipſam & ſphæra data comprehendere, & oſtendere ſphæræ diametrum potentia ſeſquialteram eſſe lateris pyramidis.

Producatur enim recta linea ΘΛ in directum ipſi ΘΚ; ponaturque ΘΛ ipſi ΒΓ æqualis. & quoniam eſt [per 8.6.] ut ΑΓ ad ΓΔ ita ΓΔ ad ΓΒ; æqualis autem ΑΓ quidem ipſi ΚΘ, & ΓΔ ipſi ΘΕ, & ΓΒ ipſi ΘΛ; erit ut ΚΘ ad ΘΕ ita ΕΘ ad ΘΛ: rectangulum igitur ſub ΚΘ, ΘΛ eſt æquale quadrato ex ΕΘ. atque eſt rectus uterque angulorum ΚΘΕ, ΕΘΛ: ergo ſuper ΚΛ deſcriptus ſemicirculus per punctum Ε tranſibit. nam ſi jungamus ΕΛ, angulus ΛΕΚ fiet rectus, cum triangulum ΕΛΚ æquiangulum ſit unicuique triangulorum ΕΛΘ, ΕΚΘ. ſi igitur manente ΚΛ ſemicirculus converſus in eundem rurſus locum reſtituatur à quo cœpit moveri, etiam per puncta Ζ, Η tranſibit, junctis ΖΛ, ΛΗ, & rectis ſimiliter factis ad puncta Ζ, Η angulis; atque pyramis comprehendetur data ſphæra, etenim ſphæræ diameter ΛΚ eſt æqualis diametro datæ ſphæræ ΑΒ, quoniam ipſi quidem ΑΓ ponitur æqualis ΚΘ, ipſi vero ΓΒ æqualis ΘΛ.

DICO denique ſphæræ diametrum potentia ſeſquialteram eſſe lateris pyramidis.

Quoniam enim ΑΓ [per conſtr.] dupla eſt ipſius ΓΒ, erit ΑΒ ipſius ΒΓ tripla: ergo convertendo, ΑΒ ſeſquialtera eſt ipſius ΑΓ. ut autem ΒΑ ad ΑΓ ita eſt quadratum ex ΒΑ

ΔΕΙ δὴ αὐτὴν καὶ σφαίρα περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τ σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τ̃ πλευρᾶς τ̃ πυραμίδος.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῇ ΘΚ εὐθεῖα ἡ ΘΚ, καὶ κείσθω τῇ ΒΓ ἴση ἡ ΘΛ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΓΒ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΚΘ, ἡ δὲ ΓΔ τῇ ΘΕ, ἡ δὲ ΓΒ τῇ ΘΛ· ἐστιν ἄρα ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΛ· τὸ ἄρα ὑπὸ τ̃ ΚΘ, ΘΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τ ΕΘ. καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἑκατέρα τ̃ ὑπὸ ΚΘΕ, ΕΘΛ γωνιῶν· τὸ ἄρα ἐπὶ τ ΚΛ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ε. ἐπεὶ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΕΛ, ὀρθὴ γίνεται ἡ ὑπὸ ΛΕΚ γωνία, διὰ τὸ ἰσογώνιον γίγνεσθαι τὸ ΕΛΚ τρίγωνον ἑκατέρῳ τ̃ ΕΔΘ, ΕΘΚ τριγώνων. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς ΚΛ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τ̃ Ζ, Η σημείων, διὰ τῶν ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, καὶ ὀρθῶν ὁμοίως γενομένων τ̃ πρὸς τοῖς Ζ, Η γωνιῶν· καὶ ἔσται ἡ πυραμὶς σφαίρᾳ περιειλημμένη τῇ δοθείσῃ, ἡ δὲ ΚΛ τ σφαίρας διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ τ δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ τῇ ΑΒ. ἐπειδήπερ τῇ μὲν ΑΓ ἴση κεῖται ἡ ΚΘ, τῇ δὲ ΓΒ ἡ ΘΛ.

ΛΕΓΩ δὴ ὅτι ἡ τ σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει τ̃ πλευρᾶς τ̃ πυραμίδος.

Ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τ̃ ΓΒ, τριπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ τ̃ ΒΓ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἡμιολία ἐστὶν ἡ ΑΒ τ̃ ΑΓ. ὡς δὲ ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τ ΒΑ

πρὸς

πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ, ἐπειδήπερ διπλῆ ἐστὶν ἡ ΒΔ τῆς ΔΑ· ἔστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΓ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΔΑΒ, ΔΑΓ τριγώνων, καὶ εἶναι ὡς τὴν πρώτην πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. καί ἐστιν ἡ μὲν ΒΑ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ ΑΔ ἴση τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος.

Ἡ ἄρα τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

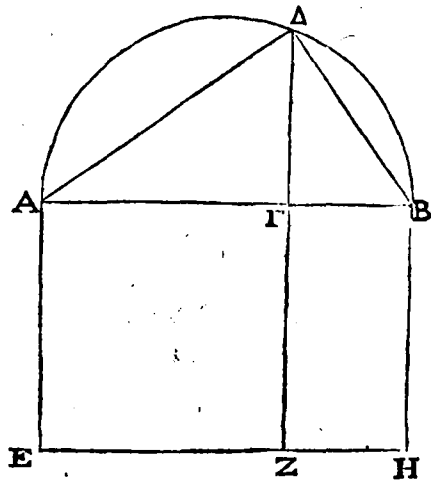
ad quadratum ex ΑΔ, quia, juncta ΒΔ, eſt [per 8. 6.] ut ΒΑ ad ΑΔ ita ΔΑ ad ΑΓ, ob ſimilitudinem triangulorum ΔΑΒ, ΔΑΓ, & quod [per cor. 20. 6.] ut prima ad tertiam ita quadratum ex prima ad quadratum ex ſecunda: ergo quadratum ex ΒΑ ſeſquialterum eſt quadrati ex ΑΔ. ſed eſt ΒΑ quidem datæ ſphæræ diameter, ΑΔ vero æqualis lateri pyramidis.

Sphæræ igitur diameter potentia ſeſquialtera eſt lateris pyramidis. quod erat demonſtrandum.

ΛΗΜΜΑ.

Δεικτέον ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ.

Ἐκκείσθω γὰρ ἡ τοῦ ἡμικυκλίου καταγραφή, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον τὸ ΕΓ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΖΒ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ ΔΑΒ τρίγωνον τῷ ΔΑΓ τριγώνῳ, ἔστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ. καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΕΒ πρὸς τὸ ΒΖ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ΕΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΕΑ τῇ ΑΓ, τὸ δὲ ΒΖ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΓ, ἡ γὰρ ΔΓ κάθετος τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν ΑΓ, ΓΒ μέση ἀνάλογόν ἐστι, διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ ΑΔΒ· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



LEMMA.

Demonſtrandum autem eſt, ut ΑΒ ad ΒΓ ita eſſe quadratum ex ΑΔ ad quadratum ex ΔΓ.

Exponatur enim ſemicirculi figura, jungaturque ΔΒ, & ex ΑΓ deſcribatur quadratum ΕΓ, & parallelogrammum ΖΒ compleatur. quoniam igitur eſt [per 4. 6.] ut ΒΑ ad ΑΔ ita ΔΑ ad ΑΓ, propterea quod triangulum ΔΑΒ æquiangulum eſt triangulo ΔΑΓ; erit [per 17. 6.] rectangulum ſub ΒΑ, ΑΓ quadrato ex ΑΔ æquale. quoniam vero eſt [per 1. 6.] ut ΑΒ ad ΒΓ ita parallelogrammum ΕΒ ad parallelogrammum ΒΖ; atque eſt parallelogrammum quidem ΕΒ quod continetur ſub ΒΑ, ΑΓ, eſt enim ΕΑ æqualis ΑΓ; parallelogrammum vero ΒΖ æquale eſt ei quod ſub ΑΓ, ΓΒ continetur: erit ut ΑΒ ad ΒΓ ita rectangulum contentum ſub ΒΑ, ΑΓ ad contentum ſub ΑΓ, ΓΒ. eſt autem rectangulum ſub ΒΑ, ΑΓ æquale quadrato ex ΑΔ, & rectangulum ſub ΑΓ, ΓΒ quadrato ex ΔΓ æquale; perpendicularis enim ΔΓ [per 1. 6.] media eſt proportionalis inter baſis portiones ΑΓ, ΓΒ, cum angulus ΑΔΒ ſit rectus: quare ut ΑΒ ad ΒΓ ita quadratum ex ΑΔ ad quadratum ex ΔΓ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ὀκτάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν ἣ καὶ τὴν πυραμίδα· καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου.

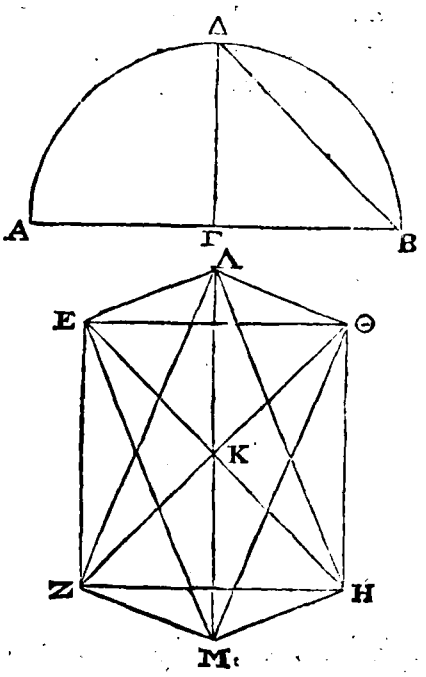
PROP. XIV. PROBL.

Octaedrum conſtituere, & eadem ſphæra comprehendere qua & pyramidem: atque demonſtrare ſphæræ diametrum potentia duplam eſſe lateris ipſius octaedri.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ γεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ ἴσην ἔχον ἑκάστην τῶν πλευρῶν τῇ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΖ, ΕΗ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Κ σημείου τῷ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου ἐπίπεδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα ἡ ΚΛ,

EXponatur datæ ſphæræ diameter ΑΒ, & in Γ bifariam ſecetur, deſcribaturque ſuper ΑΒ ſemicirculus ΑΔΒ, & à puncto Γ ipſi ΑΒ ad rectos angulos ducatur ΓΔ, & ΔΒ jungatur; & exponatur quadratum ΕΖΗΘ habens unumquodque latus æquale ipſi ΒΔ, & junctis ΘΖ, ΕΗ erigatur à puncto Κ ipſi plano quadrati ΕΖΗΘ ad rectos angulos ΚΛ, produ-

caturque ad alteras partes plani ut KM, & auferatur ab utraque rectarum linearum KΛ, KM uni ipsarum KE, KZ, KH, KΘ æqualis utraque KΛ, KM, & jungantur ΛE, ΛZ, ΛH, ΛΘ, ME, MZ, MH, MΘ. quoniam igitur KB est æqualis KΘ, atque est angulus EKΘ rectus; erit [per 47. 1.] quadratum ex ΘB quadrati ex EK duplum. rursus, quoniam ΛK est æqualis KE, & angulus ΛKE rectus; erit quadratum ex EΛ duplum quadrati ex EK. ostensum est autem & quadratum ex ΘE quadrati ex EK duplum: ergo quadratum ex ΛE æquale est quadrato ex EΘ, & ΛE ipsi EΘ æqualis. eadem ratione & ΛΘ est æqualis ΘE: æquilaterum igitur est ΛEΘ triangulum. similiter ostendemus & unumquodque reliquorum triangulorum, quorum bases sunt latera quadrati EZHΘ vertices autem Λ, M puncta, æquilaterum esse: octaedrum igitur constitutum est, quod octo triangulis æquilateris continetur.



OPORTET vero ipsum & data sphæra comprehendere; & demonstrare sphæræ diametrum potentia duplam esse lateris octaedri.

Quoniam enim tres rectæ lineæ ΛK, KM, KB inter se æquales sunt, semicirculus super ΛM descriptus etiam per punctum E transibit. præterea si manente ΛM, conversus semicirculus in eundem locum restituatur à quo cœpit moveri, transibit etiam per puncta Z, H, Θ; atque erit octaedrum sphæra comprehensum. dico etiam ipsum comprehensum esse data sphæra. quoniam enim ΛK est æqualis KM, communis autem KE, & angulos æquales continent; erit [per 4. 1.] basis ΛE basi EM æqualis. & quoniam [per 31. 3.] rectus est ΛEM angulus, est enim in semicirculo; erit [per 47. 1.] quadratum ex ΛM quadrati ex ΛE duplum. rursus, quoniam [per constr.] AΓ est æqualis ΓB; erit AB dupla ipsius BΓ. ut autem AB ad BΓ ita [per 8. & 20. 6.] quadratum ex AB ad quadratum ex BΔ: duplum igitur est quadratum ex AB quadrati ex BΔ. ostensum autem est & quadratum ex ΛM quadrati ex ΛE duplum. & est quadratum ex BΔ æquale quadrato ex ΛE; posita est enim EΘ ipsi ΔB æqualis: ergo quadratum ex AB est æquale quadrato ex ex ΛM; ac propterea ipsa AB est æqualis ΛM. est autem AB diameter datæ sphæræ: quare ΛM est æqualis datæ sphæræ diametro.

Octaedrum igitur comprehensum est data sphæra: & simul demonstratum est sphæræ diametrum potentia duplam esse lateris ipsius octaedri. quod erat faciendum.

ΠΡΟ-

καὶ διήχθω ἀπὸ τὰ ἕτερα μέρη δ διπλῆ ἑκάτερος ἡ KM, καὶ ἀφηρήσθω ἀφ' ἑκατέρας τ ΚΛ. KM μιᾷ τ KE, KZ, KH, KΘ ἴση ἑκατέρα τ ΚΛ, KM, & ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛE, ΛZ, ΛH, ΛΘ, ME, MZ, MH, MΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ KE τῇ KΘ, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ EKΘ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τ ΘE διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τ EK. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΛK τῇ KE, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΛKE γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τ EΛ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς EK. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘE διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τ EK· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΛE ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EΘ· ἴση ἄρα ἡ ΛE τῇ EΘ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΛΘ τῇ ΘE ἐστιν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛEΘ τρίγωνον. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἕκαστον τ λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ τοῦ EZHΘ τετραγώνου πλευραί, κορυφαὶ δὲ τὰ Λ, M σημεῖα, ἰσόπλευρόν ἐστιν· ὀκτάεδρον ἄρα συνίσταται, ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

ΔΕΙ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς.

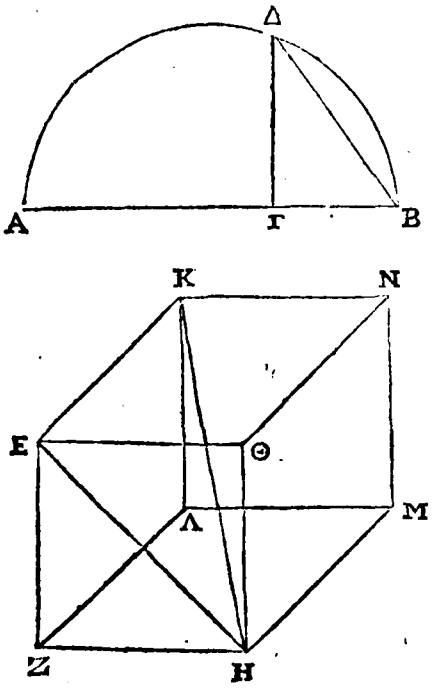
Ἐπεὶ γὰρ αἱ τρεῖς αἱ ΛK, KM, KE ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΛM γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τ E. καὶ διὰ τὰ αὐτά, ἐὰν μενούσης τῆς ΛM περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τ Z, H, Θ σημείων, καὶ ἔσται σφαῖρα περιειλημμένον τὸ ὀκτάεδρον. λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΛK τῇ KM, κοινὴ δὲ ἡ KE, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ ΛE βάσει τῇ EM ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΛEM γωνία, ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΛM διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τ ΛE. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AΓ τῇ ΓB, διπλασία ἐστὶν ἡ AB τ BΓ. ὡς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν BΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔB· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς BΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛM διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τ ΛE. καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς BΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΛE· ἴση γὰρ κεῖται ἡ EΘ τῇ ΔB. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τῷ ἀπὸ τῆς ΛM· ἴση ἄρα ἡ AB τῇ ΛM. καί ἐστιν ἡ AB ἡ τ δοθείσης σφαίρας διάμετρος· ἡ ΛM ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τ δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ.

Περιείληπται ἄρα τὸ ὀκτάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ· καὶ συναποδέδεικται ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Κύβον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν ἣ καὶ τὰ πρότερα, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλῆ ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς.

Ἐκκείσθω ἡ δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ ὥστε διπλῆν εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ συνεστάθω τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ ἴσην ἔχον ἑκάστην πλευρὰν τῇ ΔΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ τῷ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ, καὶ ἀφῃρήσθωσαν ἀπὸ ἑκάστης τῶν ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ μιᾷ τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ ἴσαι ἑκάστη τῶν ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΚ· κύβος ἄρα συνίσταται ὁ ΖΝ ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενον. δεῖ δὴ αὐτὸν καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου.



Ἐπεζεύχθωσαν δὴ αἱ ΚΗ, ΕΗ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΚΕΗ γωνία, διὰ τὸ τὴν ΚΕ ὀρθὴν εἶναι πρὸς τὸ ἐπίπεδον δηλαδὴ καὶ πρὸς τὴν ΕΗ εὐθεῖαν, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΚΗ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ΖΗ ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΖΛ, ΖΕ, καὶ πρὸς τὸ ΖΚ ἄρα ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν ἡ ΖΗ· ὥστε καὶ ἐπιζευχθεῖσα τὴν ΖΚ, ἡ ΖΗ ὀρθὴ ἔσται καὶ πρὸς τὴν ΖΚ· καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τὸ ἐπὶ τῆς ΗΚ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ζ. ὁμοίως δὲ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν τοῦ κύβου σημείων ἥξει. ἐὰν δὴ, μενούσης τῆς ΚΗ, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἔσται σφαῖρα περιειλημμένος ὁ κύβος. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΖ τῇ ΖΕ, καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ πρὸς τὸ Ζ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΗΕ, ΕΚ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ. καὶ ἐπεὶ τριπλασίων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ, ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΕ τριπλάσιον. καὶ κεῖται ἴση τῇ ΒΔ ἡ ΚΕ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΗ

Prop. XV. Probl.

Cubum conſtituere & eadem ſphæra comprehendere qua & priores; atque demonſtrare ſphæræ diametrum lateris potentia triplam eſſe.

Exponatur enim datæ ſphæræ diameter AB, & ſecetur in Γ, ita ut AΓ ipſius ΓB ſit dupla; deſcribaturque ſuper AB ſemicirculus AΔB, & à puncto Γ ipſi AB ad rectos angulos ducatur ΓΔ, & ΔB jungatur; deinde exponatur quadratum EZHΘ, habens unumquodque latus æquale ipſi ΔB; & à punctis E, Z, H, Θ quadrati EZHΘ plano ad rectos angulos ducantur EK, ZΛ, HM, ΘN, & auferatur inſuper ab unaquaque rectarum linearum EK, ZΛ, HM, ΘN uni ipſarum EZ, ZH, HΘ, ΘE æqualis unaquæque EK, ZΛ, HM, ΘN; & KΛ, ΛM, MN, NK jungantur: cubus igitur conſtitutus eſt ZN, qui ſex quadratis æqualibus continetur. oportet vero ipſum & ſphæra data comprehendere, & demonſtrare ſphæræ diametrum potentia triplam eſſe lateris ipſius cubi.

Jungantur enim KH, EH. & quoniam rectus eſt KEH angulus, propterea quod & KE perpendicularis ſit ad EH, planum videlicet & [per 3. def. 11.] ad rectam lineam EH; ſemicirculus ſuper KH deſcriptus [per 31. 3.] per punctum E tranſibit. rurſus, quoniam ZH perpendicularis eſt ad utramque ipſarum ZΛ, ZE; & [per 4. 11.] ad ZK planum eſt perpendicularis: quare ſi jungamus ZK, ipſa ZH ad ZK erit perpendicularis; ac propterea rurſus ſuper HK deſcriptus ſemicirculus tranſibit per punctum Z. ſimiliter autem & per reliqua cubi puncta tranſibit. ſi igitur, manente KH, converſus ſemicirculus in eundem rurſus locum reſtituatur, à quo cœpit moveri, erit cubus ſphæra comprehenſus. Dico ipſum & data ſphæra comprehendi. quoniam enim HZ eſt æqualis ZE, atque eſt rectus qui ad Z angulus; erit [per 47. 1.] quadratum ex EH quadrati ex EZ duplum. æqualis autem eſt EZ ipſi EK; quadratum igitur ex EH duplum eſt quadrati ex EK: ergo quadrata ex HE, EK, hoc eſt [per 47. 1.] quadratum ex HK, triplum eſt quadrati ex EK. & quoniam [per conſtr.] AB eſt ipſius BΓ tripla, & [per 8. & 20. 6.] ut AB ad BΓ ita quadratum ex AB ad quadratum ex BΔ; erit quadratum ex AB quadrati ex BΔ triplum. oſtenſum eſt autem & quadratum ex HK triplum quadrati ex KE, & poſita eſt KE ipſi BΔ æqualis: ergo & KH eſt

æqualis

æqualis AB. at vero AB eſt datæ ſphæræ diameter: quare & KH æqualis erit diametro datæ ſphæræ.

Cubus igitur data ſphæra eſt comprehenſus; & ſimul demonſtratum eſt ſphæræ diametrum lateris cubi potentia triplam eſſe. quod erat faciendum.

PROP. XVI. PROBL.

Icoſaedrum conſtituere & eadem ſphæra comprehendere qua & prædictas figuras; atque etiam demonſtrare icoſaedri latus irrationalem eſſe lineam quæ minor appellatur.

EXponatur datæ ſphæræ diameter AB, ſecetur que in Γ, ita ut AΓ ipſius ΓB ſit quadrupla; & ſuper AB deſcripto ſemicirculo AΔB ducatur à puncto Γ ipſi AB ad rectos angulos recta linea ΓΔ, & ΔB jungatur; deinde exponatur circulus EZHΘK, cujus ea quæ ex centro ſit æqualis ipſi ΔB; deſcribaturque [per 11.4.] in circulo EZHΘK pentagonum æquilaterum & æquiangulum EZHΘK; præterea [per 30. 3.] circumferentiæ EZ, ZH, HΘ, ΘK, KE bifariam ſecentur in Λ, M, N, Ξ, O punctis; jungunturque EΛ, ΛZ, ZM, MH, HN, NΘ, ΘΞ, ΞK, KO, OE; & ſimiliter ΛM, MN, NΞ, ΞO, OΛ: æquilaterum igitur eſt ΛMNΞO pentagonum; & recta linea EO eſt decagoni latus. porro à punctis E, Z, H, Θ, K ipſi plano circuli [per 12.11.] ad rectos angulos erigantur EΠ, ZP, HΣ, ΘT, KΥ æquales quidem ei quæ ex centro circuli EZHΘK, & jungantur ΠP, PΣ, ΣT, TΥ, ΥΠ, ΠΛ, ΛP, PM, MΣ, ΣN, NΥ, TΞ, ΞΥ, ΥO, OΠ. quoniam igitur utraque ipſarum EΠ, KΥ eidem plano eſt ad rectos angulos: erit [per 6.11.] EΠ ipſi KΥ parallela. ſed eſt ipſi quoque æqualis; quæ autem æquales & parallelas ad eaſdem partes ſunt, æquidistans igitur eſt ΕΠ ipſi ΚΥ. eſt autem & ipſi æqualis, æquidistantes autem

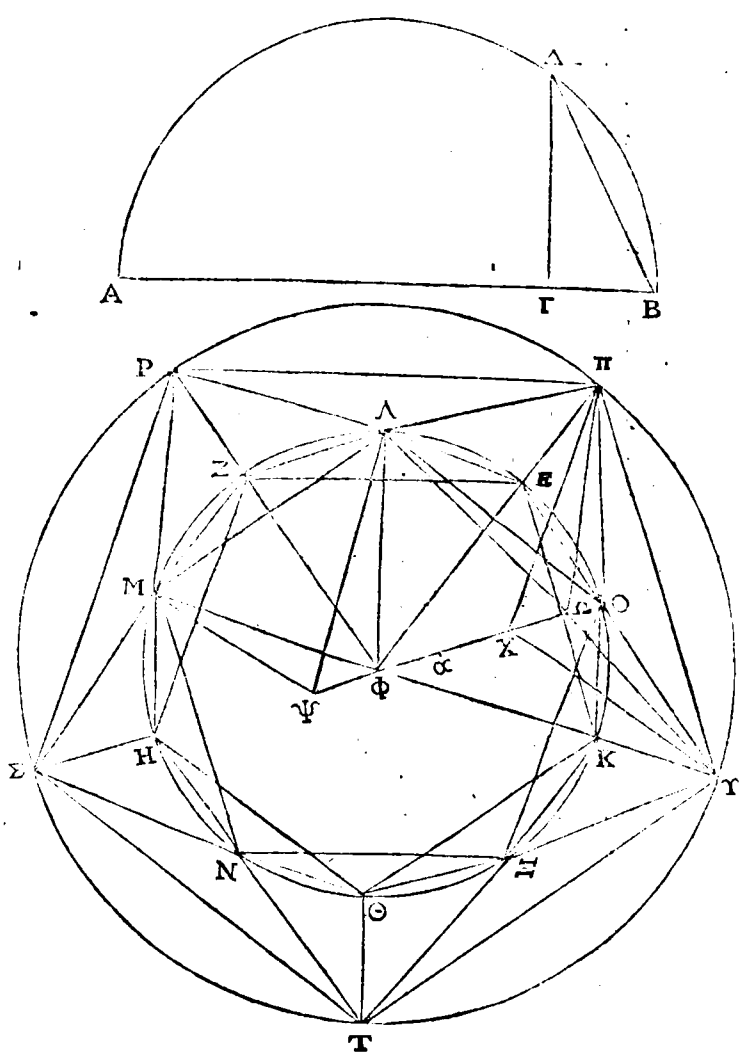
τῇ AB. καὶ ἔστιν ἡ AB τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· καὶ ἡ KH ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ.

Τῇ δοθείσῃ ἄρα σφαίρᾳ περιείληπται ὁ κύβος· καὶ συναποδέδεικται ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Εἰκοσάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν ἣ καὶ τὰ πρειρημένα σχήματα· καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων.

ΕΚκείσθω ἡ τοῦ δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ AB, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, ὥστε τετραπλῆν εἶναι τὴν AΓ τῆς ΓB, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ AΔB, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ AB πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔB, καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ EZHΘK, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔστω τῇ ΔB, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν EZHΘK κύκλον πενταγώνου ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ EZHΘK, καὶ τετμήσθωσαν αἱ EZ, ZH, HΘ, ΘK, KE περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Λ, M, N, Ξ, O σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ EΛ, ΛZ, ZM, MH, HN, NΘ, ΘΞ, ΞK, KO, OE, καὶ ὁμοίως ΛM, MN, NΞ, ΞO, OΛ· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛMNΞO πενταγώνον, καὶ δεκαγώνου ἡ EO εὐθεῖα. καὶ ἀνεστάτωσαν ἀπὸ τῶν E, Z, H, Θ, K σημείων τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαι αἱ EΠ, ZP, HΣ, ΘT, KΥ ἴσαι ἑκατέρᾳ τῶν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ EZHΘK κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΠP, PΣ, ΣT, TΥ, ΥΠ, ΠΛ, ΛP, PM, MΣ, ΣN, NΥ, TΞ, ΞΥ, ΥO, OΠ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν EΠ, KΥ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς



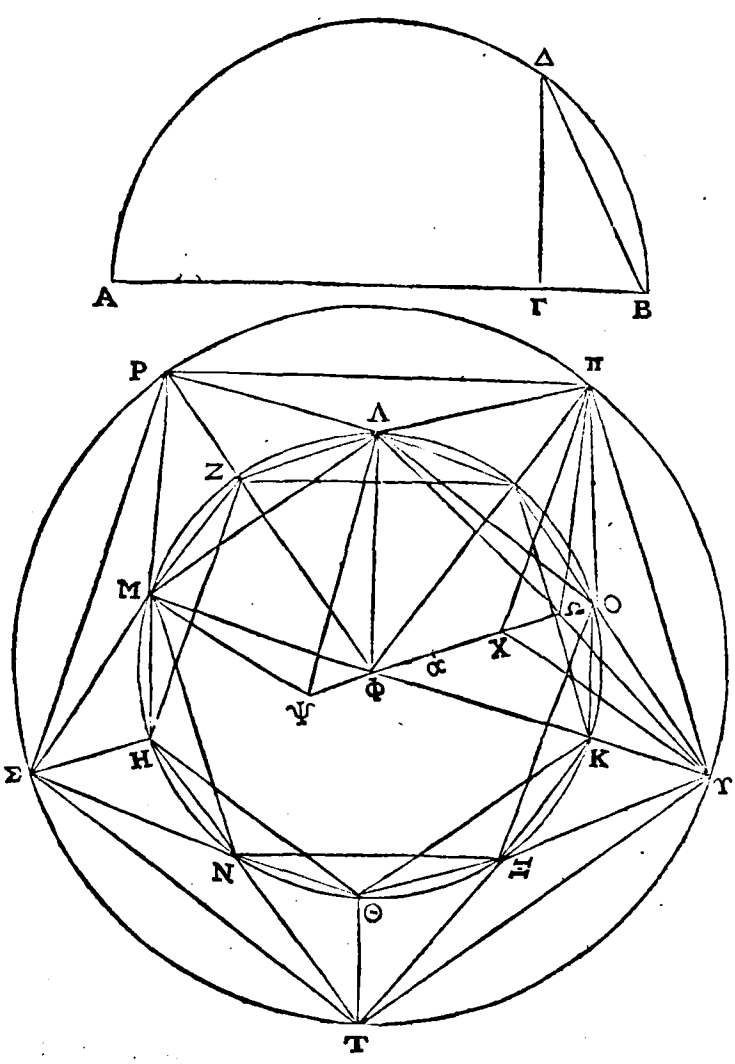
αὐτὰ μέρη ὑπιζεύγνυσαι εὐθεῖαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· ἡ ΠΤ ἄρα τῇ ΕΚ ἴση τε ἐστὶ καὶ ὁμόλληλος. πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ ΕΚ· πενταγώνου ἄρα ἰσοπλεύρου καὶ ἡ ΠΤ, τοῦ εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον περιγραφομένου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ πενταγώνου ἐστὶ ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον ἐγγραφομένου· ἰσόπλευρον ἄρα καὶ τὸ ΠΡΣΤΥ πεντάγωνον. καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μέν ἐστιν ἡ ΠΕ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΕΟ, καὶ ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΠΕΟ· πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΟ· ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δυνάται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΟΥ πενταγώνου ἐστὶ πλευρά, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΠΥ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΟΥ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστου τῶν ΠΑΡ, ΡΜΣ, ΣΝΤ, ΤΞΥ τριγώνων ἰσόπλευρόν ἐστι. καὶ ἐπεὶ πενταγώνου ἐδείχθη ἑκατέρα τῶν ΠΛ, ΠΟ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΟ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΛΟ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστου τῶν ΛΡΜ, ΜΣΝ, ΝΤΞ, ΞΥΟ τριγώνων ἰσόπλευρόν ἐστιν. εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ ΕΖΗΘΚ τὸ Φ σημεῖον. καὶ ἀπὸ τοῦ Φ τῷ τοῦ κύκλου ὑπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτω ἡ ΦΩ, καὶ ἐκβεβλήσθω ὑπὶ τὰ ἕτερα μέρη ὡς ἡ ΦΨ, καὶ ἀφηρήσθω ἑξαγώνου μὲν ἡ ΦΧ, δεκαγώνου δὲ ἑκατέρα τῶν ΦΨ, ΧΩ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΠΩ, ΠΧ, ΥΩ, ΕΦ, ΛΦ, ΛΨ, ΨΜ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΦΧ, ΠΕ τῷ τοῦ κύκλου ὑπιπέδῳ πρός ὀρθάς ἐστι, ὁμόλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΦΧ τῇ ΠΕ. εἰσὶ δὲ καὶ ἴσαι· καὶ αἱ ΕΦ, ΠΧ ἄρα ἴσαι τε καὶ ὁμόλληλοί εἰσιν. ἑξαγώνου δὲ ἡ ΕΦ· ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ ΠΧ. καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μέν ἐστιν ἡ ΠΧ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΠΧΩ γωνία· πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΩ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΥΩ πενταγώνου ἐστίν, ἐπειδήπερ ἐὰν ὑπιζεύξωμεν τὰς ΦΚ, ΧΥ ἴσαι καὶ ἀπεναντίον εἰσὶ καὶ ἔστιν ἡ ΦΚ ἐκ τοῦ κέντρου ἴσου ἑξαγώνου· ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ ΧΥ. δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΥΧΩ· πενταγώνου ἄρα ἡ ΥΩ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΠΥ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα τὸ ΠΥΩ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ εὐθεῖαι κορυφὴ δὲ τὸ Ω σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστιν. πάλιν, ἐπεὶ ἑξαγώνου μέν ἡ ΦΛ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΦΨ, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΛΦΨ γωνία· πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΨ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐὰν ὑπιζεύξωμεν τὴν ΜΨ ἴσαν ἑξαγώνου, συνάγεται καὶ ἡ ΜΨ πενταγώνου. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΜ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα τὸ ΛΜΨ τρίγωνον. ὁμοίως δειχθήσεται καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ κορυφὴ δὲ τὸ Ψ σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστι· συνέσταται ἄρα εἰκοσάεδρον ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

ΔΕΙ δὴ αὐτὸν καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

partes conjungunt rectæ lineæ & ipſæ [per 33. 1.] æquales & parallelæ ſunt: ergo ΠΤ ipſi ΕΚ æqualis eſt & parallela. ſed ΕΚ eſt latus pentagoni æquilateri; ergo & ΠΤ eſt pentagoni æquilateri latus in circulo ΕΖΗΘΚ deſcripti. eadem ratione & unaquæque ipſarum ΡΠ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ eſt latus pentagoni æquilateri in eodem circulo deſcripti: æquilaterum igitur eſt ΠΡΣΤΥ pentagonum. & quoniam [per conſtr.] ΠΕ eſt hexagoni quidem latus, ΕΟ vero latus decagoni, atque eſt rectus ΠΕΟ angulus; erit ΠΟ latus pentagoni. etenim [per 10. 13.] latus pentagoni poteſt & hexagoni & decagoni latus in eodem circulo deſcriptorum. eadem ratione & ΟΥ eſt pentagoni latus; eſt autem & ΠΥ latus pentagoni: ergo ΠΟΥ eſt triangulum æquilaterum. ob eandem quoque cauſam unumquodque triangulorum ΠΑΡ, ΡΜΣ, ΣΝΤ, ΤΞΥ eſt æquilaterum. quoniam igitur utraque ipſarum ΠΛ, ΠΟ oſtenſa eſt latus pentagoni, atque eſt ΛΟ latus pentagoni; erit ΠΛΟ æquilaterum triangulum. eadem ratione & unumquodque triangulorum ΛΡΜ, ΜΣΝ, ΝΤΞ, ΞΥΟ æquilaterum eſt. ſumatur [per 1. 3.] centrum circuli ΕΖΗΘΚ, quod ſit punctum Φ; & à puncto Φ ipſi circuli plano ad rectos angulos erigatur ΦΩ, & ad alteras partes producatur, ut ΦΨ; dein auferatur hexagoni quidem latus ΦΧ, decagoni vero utraque ipſarum ΦΨ, ΧΩ; & jungantur ΠΩ, ΠΧ, ΥΩ, ΕΦ, ΛΦ, ΛΨ, ΨΜ. quoniam igitur utraque ipſarum ΦΧ, ΠΕ circuli plano eſt ad rectos angulos; erit [per 6. 11.] ΦΧ ipſi ΠΕ parallela. ſunt autem [per conſtr.] & æquales: ergo [per 33. 1.] ΕΦ, ΠΧ & æquales ſunt & parallelæ. verum ΕΦ eſt hexagoni latus: hexagoni igitur latus eſt & ΠΧ. quoniam igitur hexagoni quidem latus eſt ΠΧ, decagoni vero ΧΩ, & rectus ΠΧΩ angulus; erit [per 10. 13.] ΠΩ latus pentagoni. eadem ratione & ΥΩ eſt pentagoni latus: quoniam ſi jungamus ΦΚ, ΧΥ, & æquales & oppoſitæ ſunt, atque eſt ΦΚ ex centro circuli, videlicet hexagoni latus: ergo & ΧΥ eſt latus hexagoni. decagoni autem latus eſt ΧΩ, & rectus angulus eſt ΥΧΩ: pentagoni igitur latus eſt ΥΩ. ſed eſt etiam ΠΥ latus pentagoni: quare æquilaterum eſt ΠΥΩ triangulum. eadem ratione & æquilaterum eſt unumquodque reliquorum triangulorum, quorum baſes ſunt ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ rectæ lineæ, vertex autem Ω punctum. rurſus, quoniam hexagoni latus eſt ΦΛ, decagoni vero ΦΨ, & angulus ΛΦΨ rectus; erit [per 10. 13.] ΛΨ latus pentagoni. eadem ratione ſi jungamus ΜΦ, quæ eſt latus hexagoni, concludetur & ΜΨ pentagoni latus eſſe. eſt autem & ΛΜ pentagoni latus: æquilaterum igitur eſt ΛΜΨ triangulum. ſimiliter oſtendetur & æquilaterum eſſe unumquodque reliquorum triangulorum, quorum baſes ſunt ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ, vertex autem Ψ punctum: conſtitutum igitur eſt icoſaedrum viginti triangulis æquilateris contentum.

OPORTET vero ipſum ſphæra data comprehendere, & demonſtrare icoſaedri latus eſſe lineam irrationalem quæ minor appellatur.

Quoniam enim hexagoni latus eſt Φ Χ, decagoni vero Χ Ω, recta linea Φ Ω [per 9. 13.] extrema ac media ratione ſecta eſt in Χ, & Φ Χ eſt major portio : eſt igitur [per 3. def. 6.] ut Ω Φ ad Φ Χ ita Φ Χ ad Χ Ω. atque [per conſtr.] eſt Φ Χ ipſi Φ Λ æqualis, & Χ Ω ipſi Φ Ψ : quare ut Ω Φ ad Φ Λ ita Φ Λ ad Φ Ψ. ſunt autem anguli Ω Φ Λ, Λ Φ Ψ recti. ſi igitur jungamus rectam lineam Λ Ω, erit [per 6. 6.] Ψ Λ Ω rectus angulus ob ſimilitudinem triangulorum Ψ Λ Φ, Φ Λ Ω : ergo [per 31. 3.] ſemicirculus ſuper Ψ Ω deſcriptus etiam per Λ tranſibit. eadem ratione quoniam eſt ut Ω Φ ad Φ Χ ita Φ Χ ad Χ Ω, & æqualis eſt [per conſtr.] Ω Φ quidem ipſi Ψ Χ ; Φ Χ vero ipſi Χ Π ; erit ut Ψ Χ ad Π Χ ita Π Χ ad Χ Ω. ideoque ſi rurſus jungamus Π Ψ, erit angulus qui ad Π rectus : ſemicirculus igitur deſcriptus ſuper Ψ Ω tranſibit & per Π. quod ſi manente Ψ Ω converſus ſemicirculus in eundem rurſus locum reſtituatur à quo cœpit moveri, etiam per Π & per reliqua icoſaedri puncta tranſibit ; atque erit icoſaedrum ſphæra comprehenſum. Dico & ipſum data comprehendi. ſecetur enim Φ Χ bifariam in α. & quoniam recta linea Ω Φ extrema ac media ratione ſecta eſt in Χ, & Ω Χ eſt minor ipſius portio, ipſa Ω Χ aſſumens dimidiam majoris portionis, videlicet Χ α, quintuplum poterit [per 3. 13.] quadrati ejus quod à dimidia majoris portionis deſcribitur : quadratum igitur ex Ω α quadrati ex α Χ quintuplum eſt. ſed [per 3. 13.] ipſius quidem α Ω dupla eſt Ω Ψ ; ipſius vero α Χ dupla Χ Φ : ergo quadratum ex Ω Ψ quintuplum eſt quadrati ex Φ Χ. & quoniam Α Γ quadrupla eſt ipſius Γ Β, erit Α Β ipſius Β Γ quintupla. ut autem Α Β ad Β Γ ita [per 8. & 20. 6.] quadratum ex Α Β ad quadratum ex Β Δ : quadratum igitur ex Α Β quadrati ex Β Δ eſt quintuplum. oſtenſum autem eſt & quadratum ex Ω Ψ quintu-



Επειδὴ γὰρ ἑξαγώνου μὲν ἡ Φ Χ, δεκαγώνου δὲ ἡ Χ Ω· ἡ Φ Ω ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένη κατὰ τὸ Χ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ Φ Χ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ω Φ πρὸς τὴν Φ Χ οὕτως ἡ Φ Χ πρὸς τὴν Χ Ω. ἴση δὲ ἡ μὲν Φ Χ τῇ Φ Λ, ἡ δὲ Χ Ω τῇ Φ Ψ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ω Φ πρὸς τὴν Φ Λ οὕτως ἡ Φ Λ πρὸς τὴν Φ Ψ. καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ Ω Φ Λ, Λ Φ Ψ γωνίαι· ἐὰν ἄρα ἁπτομένων εὐθειῶν τὴν Λ Ω εὐθεῖαι, ὀρθὴ ἔσται ἡ ὑπὸ Ψ Λ Ω γωνία διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν Ψ Λ Φ, Φ Λ Ω τριγώνων· τὸ ἄρα ἅπτῃ τοῦ Ψ Ω γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Λ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Ω Φ πρὸς τὴν Φ Χ οὕτως ἡ Φ Χ πρὸς τὴν Χ Ω, ἴση δὲ ἡ μὲν Ω Φ τῇ Ψ Χ, ἡ δὲ Φ Χ τῇ Χ Π· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ψ Χ πρὸς τὴν Π Χ οὕτως ἡ Π Χ πρὸς τὴν Χ Ω. καὶ διὰ τοῦτο πάλιν ἐὰν ἁπτομένων εὐθεῖα γραμμὴ τὴν Π Ψ, ὀρθὴ ἔσται ἡ πρὸς τῷ Π γωνία· τὸ ἄρα ἅπτον τοῦ Ψ Ω γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Π. καὶ ἐὰν μενούσης τῆς Ψ Ω περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν. ὥστε καταστὰς ἔσται ἔνθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τῶν Π καὶ τῶν λοιπῶν σημείων τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ ἔσται σφαῖρα περιειλημμένον τὸ εἰκοσάεδρον. λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. τετμήσθω γὰρ ἡ Φ Χ δίχα κατὰ τὸ α. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ Ω Φ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένη κατὰ τὸ Χ, καὶ τὸ ἔλαττον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ Ω Χ· ἡ ἄρα Ω Χ τετραπλασίων τοῦ ἀπὸ τοῦ ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος τῆς Χ α πενταπλάσιον δυνάται τοῦ ἀπὸ τοῦ ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τοῦ Ω α τοῦ ἀπὸ τοῦ α Χ. καὶ ἔστι τοῦ μὲν α Ω διπλῆ ἡ Ω Ψ, τοῦ δὲ α Χ διπλῆ ἡ Χ Φ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τοῦ Ω Ψ τοῦ ἀπὸ τοῦ Φ Χ. καὶ ἐπεὶ τετραπλασίων ἐστὶν ἡ Α Γ τοῦ Γ Β, πενταπλασίων ἄρα ἡ Α Β τοῦ Β Γ ἐστίν. ὡς δὲ ἡ Α Β πρὸς τὴν Β Γ οὕτως τὸ ἀπὸ τοῦ Α Β πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ Β Δ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τοῦ Α Β τοῦ ἀπὸ τοῦ Β Δ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ Ω Ψ

πενταπλα-

πενταπλάσιον δ ἀπὸ τ ΦΧ, καὶ ἔστιν ἡ ΑΒ ἴση τῇ ΦΧ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ΕΖΗΘΚ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΨΩ. καὶ ἔστιν ἡ ΑΒ ἡ τ δοθείσης σφαίρας διάμετρος· καὶ ἡ ΨΩ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τ δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ· τῇ ἄρα δοθείσῃ σφαίρᾳ περιείληπται τὸ εἰκοσάεδρον.

ΛΕΓΩ δὴ ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. ἐπεὶ γὰρ ῥητή ἐστιν ἡ τ σφαίρας διάμετρος, καὶ ἔστι δυνάμει πενταπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου· ὥστε καὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ ῥητή ἐστιν. ἐὰν δὲ εἰς κύκλον ῥητὸν ἔχοντα τὴν διάμετρον πενταγώνου ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. ἡ δὲ τοῦ ΕΖΗΘΚ πενταγώνου πλευρὰ ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐστίν· ἡ ἄρα τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ τ σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίων ἐστὶ τ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται, καὶ ὅτι ἡ τ σφαίρας διάμετρος συγκεῖται ἔκ τε τ ἑξαγώνου καὶ τ δύο τῶν δεκαγώνου τ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

plum quadrati ex ΦΧ, atque est ΑΒ æqualis ΦΧ; utraque enim ipsarum est [per constr.] æqualis ei quæ ex centro circuli ΕΖΗΘΚ: quare & ΑΒ est æqualis ΨΩ. est autem ΑΒ datæ sphæræ diameter; quare & ΨΩ erit æqualis diametro datæ sphæræ: ergo icosaedrum comprehensum est data sphæra.

Dico insuper icosaedri latus esse irrationalem lineam quæ minor appellatur. quoniam enim sphæræ diameter est rationalis, atque est potentia quintupla ejus quæ ex centro ΕΖΗΘΚ circuli; erit [per 6. def. 10.] & quæ ex centro circuli ΕΖΗΘΚ rationalis: quare & diameter ipsius rationalis erit. si autem in circulo rationalem diametrum habente pentagonum æquilaterum describatur, erit [per 11.13.] latus pentagoni linea irrationalis quæ minor appellatur. sed pentagoni ΕΖΗΘΚ latus est latus icosaedri: ergo icosaedri latus est linea irrationalis quæ minor appellatur. quod erat demonstrandum.

Corollarium.

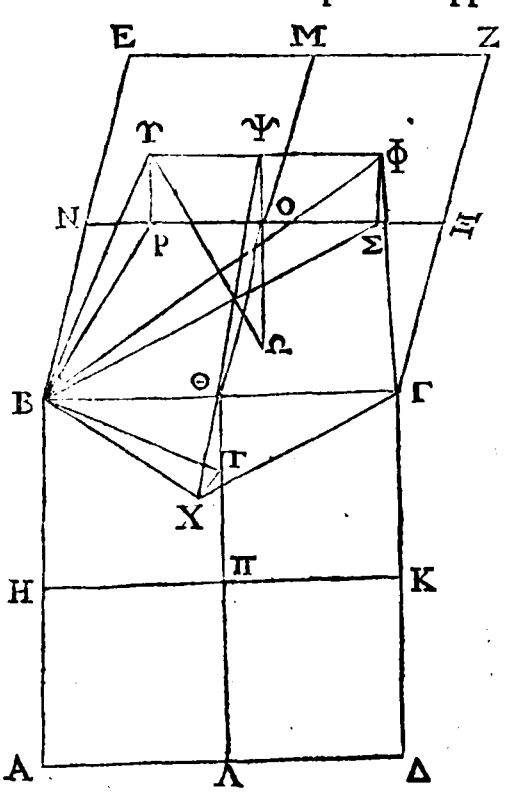
Ex hoc manifestum est quod sphæræ diameter potentia quintupla est ejus quæ ex centro circuli, à quo icosaedrum describitur; & quod sphæræ diameter composita est ex latere hexagoni & duobus decagoni lateribus, quæ in eodem circulo describuntur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Δωδεκάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν ἣ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα· καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Prop. XVII. Probl.

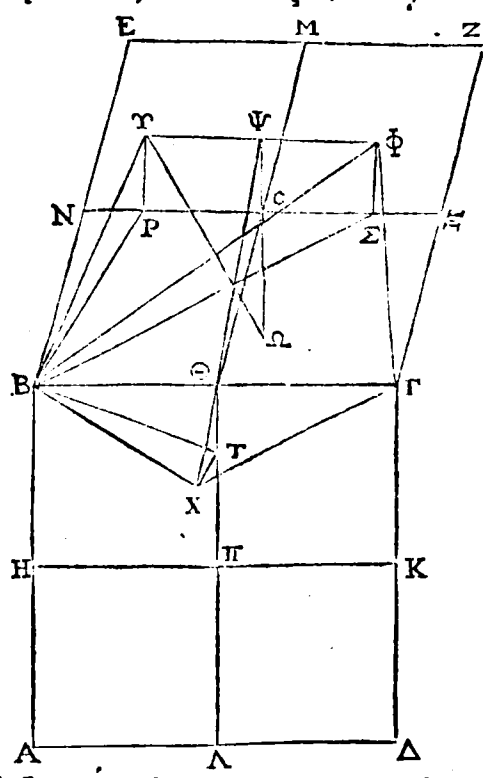
Dodecaedrum constituere, & eadem sphæra comprehendere qua & prædictas figuras; atque etiam demonstrare dodecaedri latus esse irrationalem quæ apotome appellatur.



Κείσθωσαν τοῦ προειρημένου κύβου δύο ἐπίπεδα πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις τὰ ΑΒΓΔ, ΓΒΕΖ, καὶ τετμήσθω ἑκάστη τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΕΖ, ΕΒ, ΖΓ πλευρῶν δίχα κατὰ τὰ Η, Θ, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ σημεῖα· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΚ, ΘΛ, ΜΘ, ΝΞ, καὶ τετμήσθωσαν αἱ ΝΟ, ΟΞ, ΘΠ εὐθεῖαι ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὰ Ρ, Σ, Τ σημεῖα, καὶ ἔστω αὐτῶν μείζονα τμήματα τὰ ΦΟ, ΟΣ, ΤΠ, καὶ ἀνεστάτωσαν ἀπὸ τῶν Ρ, Σ, Τ σημείων τοῖς τοῦ κύβου ἐπιπέδοις πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὰ ἐντὸς μέρη τοῦ κύβου αἱ ΡΥ, ΣΦ, ΤΧ, καὶ κείσθωσαν ἴσαι τῶν ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΥΒ, ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ, ΦΥ· λέγω ὅτι τὸ ΥΒΧΓΦ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, καὶ ἔτι ἰσογώνιόν ἐστιν. ἐπεὶ

Exponantur prædicti [ad 15.13.] cubi duo plana ad rectos angulos inter se ΑΒΓΔ, ΓΒΕΖ, & secetur unumquodque ipsorum laterum ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΕΖ, ΕΒ, ΖΓ bifariam in punctis Η, Θ, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, atque ΗΚ, ΘΛ, ΜΘ, ΝΞ jungantur; deinde secentur rectæ lineæ ΝΟ, ΟΞ, ΘΠ extrema ac media ratione in Ρ, Σ, Τ punctis, sintque ipsorum majores portiones ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ, & à punctis Ρ, Σ, Τ ad rectos angulos cubi planis [per 12.11.] erigantur ΡΥ, ΣΦ, ΤΧ ad exteriores partes cubi, quæ ipsis ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ æquales ponantur; jungunturque ΥΒ, ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ, ΦΥ: dico pentagonum ΥΒΧΓΦ æquilaterum esse, & in uno plano, & præterea æquiangulum. jun-

gantur enim PB, ΣB, ΦB. & quoniam recta linea NO extrema ac media ratione ſecta eſt in P, & OP eſt major ipſius portio; erunt [per 4.13.] quadrata ex ON, NP tripla quadrati ex OP. æqualis autem eſt ON ipſi NB, & OP ipſi PT: quadrata igitur ex BN, NP quadrati ex PT ſunt tripla. ſed quadratis ex BN, NP æquale eſt [per 47. 1.] quadratum ex BP: ergo quadratum ex BP triplum eſt quadrati ex PT: quare quadrata ex BP, PT quadrati ex PT ſunt quadrupla. quadratis autem ex BP, PT æquale eſt quadratum ex BT: ergo quadratum ex BT quadruplum eſt quadrati ex TP: quare [per 20.6.] BT eſt dupla ipſius TP. verum ΦT ipſius TP dupla eſt, quoniam & PΣ eſt dupla ipſius PO, hoc eſt ipſius PT: ergo BT eſt æqualis TΦ. ſimiliter demonſtrabitur & unaquæque ipſarum BX, XΓ, ΓΦ utrivis BT, TΦ æqualis: æquilaterum igitur eſt BTΦΓX pentagonum. dico & in uno eſſe plano. ducatur enim à puncto O ipſa OΨ utrique ipſarum PT, ΣΦ parallela ad exteriores cubi partes, & jungantur ΨΘ, ΘX: dico ΨΘX rectam lineam eſſe. nam cum ΘΠ extrema ac media ratione ſecta ſit in T, & ΠT ſit major ipſius portio; erit [per 3. def. 6.] ut ΘΠ ad ΠT ita ΠT ad TΘ. æqualis autem eſt ΘΠ quidem ipſi ΘO; ΠT vero utrivis ipſarum TX, OΨ: eſt igitur ut ΘO ad OΨ ita XT ad TΘ. ſed [per 6. 11.] ΘO parallela eſt ipſi TX, quia utraque ipſarum plano BΔ eſt ad rectos angulos; TΘ vero eſt parallela OΨ, quia utraque ipſarum eſt ad rectos angulos plano BZ. ſi autem duo triangula componantur ad unum angulum, ut ΨOΘ, ΘTX, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita ut homologa latera etiam ſint parallela, reliqua ipſorum latera [per 32. 6.] in directum ſibi ipſis conſtituta erunt: ergo ΨΘ eſt in directum ipſi ΘX. omnis autem recta linea eſt in uno plano: in uno igitur plano eſt TBXΓΦ pentagonum. dico etiam & æquiangulum eſſe. quoniam enim recta linea NO extrema ac media ratione ſecta eſt in P, & OP eſt major portio: erit [per 5. 13.] ut utraque NO, OP ad ON ita NO ad OΣ. æqualis autem eſt PO ipſi OΣ: quare ut ΣN ad NO ita NO ad OΣ: ergo [per 3. def. 6.] NΣ extrema ac media ratione ſecta eſt in O, & major portio eſt NO: quadrata igitur ex NΣ, ΣO [per 4. 13.] quadrati ex ON ſunt tripla. æqualis autem eſt ON ipſi NB, & OΣ ipſi ΣΦ: ergo quadrata ex NΣ, ΣΦ tripla



ζεύχθωσαν γὰρ αἱ PB, ΣB, ΦB. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ NO ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ P, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ OP· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ON, NP τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς OP. ἴση δὲ ἡ μὲν ON τῇ NB, ἡ δὲ OP τῇ PT· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν BN, NP τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς PT. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν BN, NP τὸ ἀπὸ τῆς BP ἐστιν ἴσον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς BP τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς PT· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν BP, PT τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς PT. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν BP, PT ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BT· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς BT τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς PT· διπλῆ ἄρα ἡ BT τῆς TP. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΦT τῆς TP διπλῆ, ἐπειδήπερ καὶ ἡ PΣ τῆς PO, τουτέστι τῆς PT ἐστὶ διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ BT τῇ TΦ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν BX, XΓ, ΓΦ ἑκατέρᾳ τῶν BT, TΦ ἐστιν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ BTΦΓX πεντάγωνον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ O ἑκατέρα τῶν PT, ΣΦ παράλληλος ἐπὶ τὰ ἐκτὸς μέρη τοῦ κόσμου ἡ OΨ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΨΘ, ΘX· λέγω ὅτι ἡ ΨΘX εὐθεῖά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΘΠ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ T, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΠT· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΠ πρὸς τὴν ΠT οὕτως ἡ ΠT πρὸς τὴν TΘ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΘΠ τῇ ΘO, ἡ δὲ ΠT ἑκατέρα τῶν TX, OΨ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘO πρὸς τὴν OΨ οὕτως ἡ XT πρὸς τὴν TΘ. καὶ ἔστι παράλληλος ἡ μὲν ΘO τῇ TX, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ BΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἡ δὲ T Θ τῇ OΨ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ BZ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. ἐὰν δὲ δύο τρίγωνα συνιστῶσι κατὰ μίαν γωνίαν (ὡς τὰ ΨOΘ, ΘTX) τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ εὐθεῖαι ἐπ' εὐθείας ἔσονται· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΨΘ τῇ ΘX. πᾶσα δὲ εὐθεῖα ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ· ἐν ἑνὶ ἄρα ἐπιπέδῳ ἐστὶ τὸ TBXΓΦ πεντάγωνον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιόν ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ NO ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ P, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ OP, ἔστιν ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ NO, OP πρὸς τὴν ON οὕτως ἡ NO πρὸς τὴν OΣ. ἴση δὲ ἡ PO τῇ OΣ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΣN πρὸς τὴν NO οὕτως ἡ NO πρὸς τὴν OΣ· ἡ NΣ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ O, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ NO· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν NΣ, ΣO τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ON. ἴση δὲ ἡ μὲν ON τῇ NB, ἡ δὲ OΣ τῇ ΣΦ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν NΣ, ΣΦ τετράγωνα τριπλάσιά

ἐστι

ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ· ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΦΣ, ΣΝ, ΝΒ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΣΝ, ΝΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΣ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΣ, ΣΦ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΦΒ, ὀρθὴ γάρ ἡ ὑπὸ ΦΣΒ γωνία, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ· διπλῆ ἄρα ἡ ΦΒ τῆς ΒΝ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΒΝ διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ΦΒ τῇ ΒΓ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΥ, ΥΦ δυσὶ ταῖς ΒΧ, ΧΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΦΒ βάσει τῇ ΒΓ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΥΦ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΧΓ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΥΦΓ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΒΧΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΧΓ, ΒΥΦ, ΥΦΓ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐὰν δὲ πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, ἰσογώνιόν ἐστι τὸ πενταγώνον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΥΦΓΧ πεντάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τὸ ἄρα ΒΥΦΓΧ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν ἐστι καὶ ἰσογώνιον, ἔστι δὲ ἑκάστης τῶν τοῦ κύβου πλευρᾶς τὸ ΒΓ. ἐὰν ἄρα ἐφ' ἑκάστης τῶν τοῦ κύβου δώδεκα πλευρῶν τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, συσταθήσεταί τι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ιβ'. πενταγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον.

ΔΕΙ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρα περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐκβεβλήσθω γάρ ἡ ΨΟ, καὶ ἔστω ἡ ΨΩ· συμβάλλῃ ἄρα ἡ ΨΩ τῇ τοῦ κύβου διαμέτρῳ, καὶ δίχα τεμνέτωσαν ἀλλήλας, τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ προπλευτῷ θεωρήματι τοῦ ια'. βιβλίου. τεμνέτωσαν κατὰ τὸ Ω· τὸ Ω ἄρα κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, καὶ ἡ ΟΩ ἡμίσεια πλευρᾶς τοῦ κύβου. ἐπεζεύχθω δὴ ἡ ΥΩ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΝΣ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ο, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΝΟ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΝΣ, ΣΟ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΝΣ τῇ ΨΩ, ἐπειδήπερ καὶ ἡ μὲν ΝΟ τῇ ΟΩ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΨΟ τῇ ΟΣ· ἀλλὰ μὲν καὶ ἡ ΟΣ τῇ ΨΥ, ἐπεὶ καὶ τῇ ΡΟ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΩΨ, ΨΥ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΩΨ, ΨΥ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΥΩ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΥΩ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον δυνάμει τριπλασίων τῆς ἡμισείας τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς, ἐπεδείχθη γὰρ κύβον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. εἰ δὲ ὅλη τῆς ὅλης, καὶ ἡ ἡμίσεια τῆς ἡμισείας· καὶ ἔστιν ἡ ΝΟ ἡμίσεια τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· ἡ ἄρα ΥΩ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον. καὶ ἔστι τὸ Ω κέντρον τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον· τὸ Υ ἄρα σημεῖον πρὸς τῇ ὑπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν λοιπῶν γωνιῶν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας· περιείληπται ἄρα τὸ δωδεκάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ.

Λέγω δὴ ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐπεὶ γὰρ τῆς ΝΟ ἄκρον καὶ μέσον τετμημένης,

sunt quadrati ex ΝΒ: quapropter quadrata ex ΦΣ, ΣΝ, ΝΒ quadrati ex ΝΒ sunt quadrupla. sed [per 47.1.] quadratis ex ΣΝ, ΝΒ æquale est quadratum ex ΒΣ: quadrata igitur ex ΒΣ, ΣΦ, hoc est quadratum ex ΦΒ, quia angulus ΦΣΒ est rectus, quadruplum est quadrati ex ΝΒ: ideoque ipsa ΦΒ ipsius ΒΝ est dupla. est autem & ΒΓ dupla ipsius ΒΝ: ergo ΦΒ est æqualis ΒΓ. & quoniam duæ ΒΥ, ΥΦ duabus ΒΧ, ΧΓ æquales sunt, & basis ΦΒ æqualis basi ΒΓ: erit [per 8. 1.] angulus ΒΥΦ angulo ΒΧΓ æqualis. similiter ostendemus & ΥΦΓ angulum æqualem esse angulo ΒΧΓ: tres igitur anguli ΒΧΓ, ΒΥΦ, ΥΦΓ inter se æquales sunt. si autem pentagoni æquilateri tres anguli sint æquales [per 7. 13.] pentagonum æquiangulum erit: æquiangulum igitur est pentagonum ΒΥΦΓΧ. ostensum est autem & æquilaterum: ergo pentagonum ΒΥΦΓΧ æquilaterum est & æquiangulum; atque est super unum cubi latus ΒΓ. si igitur in unoquoque duodecim cubi laterum eadem construamus, figura solida constituetur duodecim pentagonis æquilateris & æquiangulis contenta.

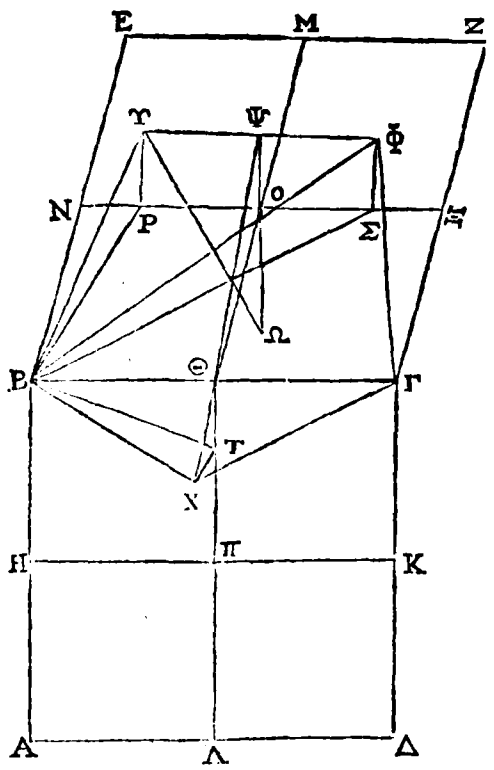
OPORTET autem ipsum & data sphæra comprehendere; atque demonstrare dodecaedri latus esse irrationalem lineam quæ apotome appellatur.

Producatur enim ΨΟ, & sit ΨΩ: occurrit igitur ΨΩ diametro cubi, & bifariam se mutuo secant, hoc enim ostensum est penultimo theoremate undecimi libri. secent in Ω: ergo Ω est centrum sphæræ quæ cubum comprehendit, & ΟΩ dimidium lateris cubi. jungantur ΥΩ. & quoniam recta linea ΝΣ extrema ac media ratione secta est in Ο, & ΝΟ est ipsius portio major; erunt [per 4. 13.] quadrata ex ΝΣ, ΣΟ tripla ejus quod fit ex ΝΟ. æqualis autem est ΝΣ ipsi ΨΩ, quoniam & ΝΟ ipsi ΟΩ est æqualis, & [per constr.] ΨΟ ipsi ΟΣ; sed & ΟΣ quidem est æqualis ΨΥ, quoniam & ipsi ΡΟ: quadrata igitur ex ΩΨ, ΨΥ tripla sunt quadrati quod fit ex ΝΟ. sed [ad 47.1.] quadratis ex ΩΨ, ΨΥ æquale est quadratum ex ΥΩ: ergo quadratum ex ΥΩ triplum est quadrati ex ΝΟ. est autem quæ ex centro sphæræ cubum comprehendentis potentia tripla dimidii lateris cubi, prius enim [ad 15. 13.] ostensum est cubum constituere, & sphæra comprehendere, atque demonstrare sphæræ diametrum potentia triplam esse lateris cubi. si autem sit tota totius, erit & dimidia dimidiæ: & est ΝΟ dimidia lateris cubi; ergo ΥΩ est æqualis ei quæ est ex centro sphæræ cubum comprehendentis. estque Ω centrum sphæræ comprehendentis cubum: quare punctum Υ est ad sphæræ superficiem. similiter demonstrabimus & unumquemque reliquorum angulorum dodecaedri esse ad superficiem sphæræ: dodecaedrum igitur est data sphæra comprehensum.

DICO dodecaedri latus irrationalem esse lineam quæ apotome appellatur.

Quoniam enim rectæ lineæ ΝΟ extrema ac media

dia ratione ſectæ major portio eſt PO; erit tota NΞ extrema ac media ratione ſecta, & major portio PΣ. nam cum ſit ut NO ad OP ita OP ad PN, & earum duplæ; nam [per 15.5.] partes cum æque multiplicibus eandem habent rationem: erit ut NΞ ad PΣ ita PΣ ad utramque NP, ΣΞ. major autem eſt NΞ quam PΣ: ergo & PΣ eſt major quam utraque NP, ΣΞ: eſt igitur NΞ extrema ac media ratione ſecta, & PΣ eſt ipſius major portio. æqualis autem eſt PΣ ipſi ΥΦ; ergo NΞ extrema ac media ratione ſecta eſt, & major portio eſt ΥΦ. & quoniam ſphæræ diameter eſt rationalis, atque [per 15. 13.] eſt potentia tripla lateris cubi; erit [per 6.def.11.] & rationalis NΞ quæ eſt cubi latus. ſi autem recta linea rationalis extrema ac media ratione ſecta fuerit, utraque portio [per 6.13.] irrationalis eſt quæ apotome appellatur: ergo ΥΦ, quæ eſt latus dodecaedri, irrationalis eſt quæ apotome appellatur. quod erat demonſtrandum.



Corollarium.

Ex hoc manifeſtum eſt, latere cubi extrema ac media ratione ſecto, ejus portionem majorem eſſe dodecaedri latus.

Prop. XVIII. Probl.

Latera quinque figurarum exponere & inter ſe comparare.

EXponatur datæ ſphæræ diameter AB, & ſecetur in Γ quidem ita ut AΓ ſit æqualis ΓB, in Δ vero ita ut AΔ ipſius ΔB ſit dupla; dein deſcribatur ſuper AB ſemicirculus *AEB, & à punctis Γ, Δ ipſi AB ad rectos angulos ducantur ΓE, ΔZ, & AZ, ZB, jungantur. & quoniam AΔ dupla eſt ipſius ΔB, erit AB ipſius BΔ tripla; & per converſionem rationis BA ſeſquialtera ipſius AΔ. ut autem BA ad AΔ ita [per 20. 6.] quadratum ex BA ad quadratum ex AZ; eſt enim [per 8.6.] triangulum AZB triangulo AZΔ æquiangulum: ergo quadratum ex BA ſeſquialterum eſt quadrati ex AZ. eſt autem [per 13. 13.] & ſphæræ diameter potentia ſeſquialtera lateris pyramidis, atque eſt AB ſphæræ diameter: ergo AZ pyramidis lateri eſt æqualis.

RURSUS, quoniam AΔ dupla eſt ΔB, erit AB ipſius BΔ tripla. ſed [per 8. & 20. 6.] ut AB ad BΔ ita quadratum ex AB ad quadratum ex ZB: quadratum igitur ex AB triplum eſt quadrati ex BZ. eſt autem [per 15.

τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ PO· ὅλης ἄρα τῆς NΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ PΣ. οἷον ἐπεὶ ὡς ἡ NO πρὸς τὴν OP ὕτως ἡ OP πρὸς τὴν PN καὶ τὰ διπλάσια· τὰ γὰρ μέρη τῶν ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ὡς ἄρα ἡ NΞ πρὸς τὴν PΣ ὕτως ἡ PΣ πρὸς συναμφότερον τὴν NP, ΣΞ. μείζων δὲ ἡ NΞ τῆς PΣ· μείζων ἄρα καὶ ἡ PΣ συναμφοτέρου τῆς NP, ΣΞ· ἡ NΞ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ PΣ. ἴση δὲ ἡ PΣ τῇ ΥΦ· καὶ ἡ NΞ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΥΦ. καὶ ἐπεὶ ῥητή ἐστιν ἡ τοῦ σφαίρας διάμετρος, καὶ ἔστι δυνάμει τριπλασίων τοῦ τοῦ κύβου πλευρᾶς· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ NΞ πλευρὰ ὅσα τὸν κύβον. ἐὰν δὲ ῥητὴ γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή· ἡ ΥΦ ἄρα πλευρὰ ὅσα τὸν δωδεκαέδρου ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι τοῦ εἰς κύβου πλευρᾶς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρά.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Τὰς πλευρὰς τῶν πέντε σχημάτων συνθεῖναι καὶ συγκρῖναι πρὸς ἀλλήλας.

ΕΚκείσθω ἡ τοῦ δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ AB, καὶ τετμήσθω κατὰ μὲν τὸ Γ ὥστε ἴσην εἶναι τὴν AΓ τῇ ΓB, κατὰ δὲ τὸ Δ ὥστε διπλασίονα εἶναι τὴν AΔ τοῦ ΔB, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ EB, καὶ ἀπὸ τῶν Γ, Δ τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΓE, ΔZ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AZ, ZB. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ AΔ τοῦ ΔB, τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῆς BΔ· ἀναστρέψαντι ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ BA τῆς AΔ. ὡς δὲ ἡ BA πρὸς τὴν AΔ ὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ· ἰσογώνιον γὰρ ἐστὶ τὸ AZB τρίγωνον τῷ AZΔ τριγώνῳ· ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BA τοῦ ἀπὸ τῆς AZ. ἔστι δὲ καὶ ἡ τοῦ σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος, καὶ ἔστιν ἡ AB ἡ τοῦ σφαίρας διάμετρος· ἡ AZ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πλευρᾷ πυραμίδος.

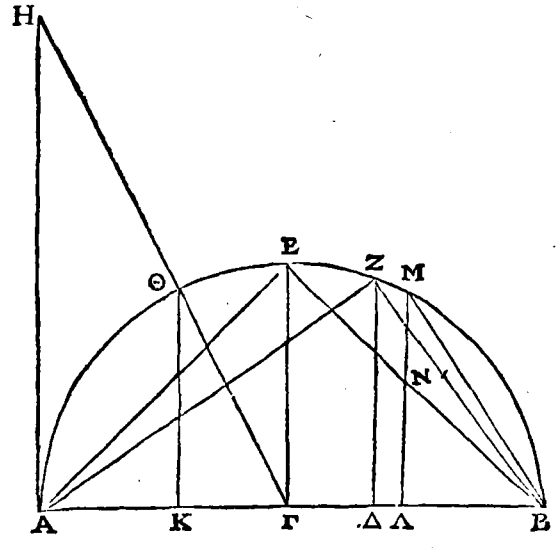
ΠΑΛΙΝ, ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ AΔ τῆς ΔB, τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῆς BΔ. ὡς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν BΔ ὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZB· τριπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς BZ. ἔστι δὲ

καὶ

13.] ſphæræ diameter potentia tripla lateris cubi. atque eſt AB ſphæræ diameter: ergo BZ eſt latus cubi.

ITEM quoniam AΓ eſt æqualis ΓB, erit AB ipſius BΓ dupla. ut autem AB ad BΓ ita quadratum ex AB ad quadratum ex BE: quadratum igitur ex AB quadrati ex BE eſt duplum. at vero [per 14. 13.] ſphæræ diameter eſt potentia dupla lateris octaedri, & AB eſt diameter datæ ſphæræ: quare BE eſt octaedri latus.

DUCATUR à puncto A ipſi AB ad rectos angulos AH, ponaturque AH æqualis AB, & juncta HΓ à puncto Θ ad AB perpendicularis ducatur ΘK. quoniam igitur AH dupla eſt ipſius AΓ, etenim HA eſt æqualis AB, ut autem HA ad AΓ ita [per 4. 6.] ΘK ad KΓ: erit ΘK ipſius KΓ dupla: ergo [per 20.6.] quadratum ex ΘK quadruplum eſt quadrati ex KΓ: quadrata igitur ex ΘK, KΓ, quod [per 47.1.] eſt quadratum ex ΘΓ quintuplum eſt quadrati ex KΓ. æqualis autem eſt ΘΓ ipſi ΓB: ergo quadratum ex BΓ quintuplum eſt quadrati ex ΓK. & quoniam AB eſt dupla ipſius BΓ, ex quibus AΔ dupla eſt ΔB: erit reliqua BΔ dupla reliquæ ΔΓ; ideoque BΓ ipſius ΓΔ eſt tripla: nonuplum igitur eſt [per 20. 6.] quadratum ex BΓ quadrati ex ΓΔ: ſed quadratum ex BΓ quadrati ex ΓK eſt quintuplum: ergo quadratum ex ΓK majus eſt quadrato ex ΓΔ, & ΓK ipſa ΓΔ major. ponatur ipſi ΓK æqualis ΓΛ; atque à puncto Λ ipſi AB ad rectos angulos ducatur ΛM, & MB jungatur. & quoniam quadratum ex BΓ quintuplum eſt quadrati ex ΓK, atque eſt ipſius quidem ΓB dupla AB, ipſius vero ΓK dupla KΛ; erit quadratum ex AB quadrati ex KΛ quintuplum. ſed [per coroll. 16. 13.] ſphæræ diameter potentia quintupla eſt ejus quæ ex centro circuli à quo icoſaedrum deſcribitur, atque eſt AB diameter ſphæræ: ergo KΛ eſt hexagoni latus dicti circuli. præterea, quoniam [per cor. 16.13.] ſphæræ diameter compoſita eſt ex latere hexagoni & duobus lateribus decagoni in dicto circulo deſcriptorum; atque eſt AB quidem diameter ſphæræ, KΛ vero hexagoni latus, & AK eſt æqualis AB: erit utraque ipſarum AK, ΛB latus decagoni deſcripti in eodem circulo, à quo icoſaedrum deſcribitur. & quoniam ΛB eſt latus decagoni, MΛ vero latus hexagoni; eſt enim æqualis ipſi KΛ, quia [per 14. 3.] æqualis eſt ipſi ΘK; namque æqualiter à centro diſtant; & eſt utraque ΘK,



Ἐὰν ἡ τοῦ σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων τοῦ τοῦ κύβου πλευρᾶς. καὶ ἔστιν ἡ AB τοῦ σφαίρας διάμετρος· ἡ BZ ἄρα τοῦ κύβου ἐστὶ πλευρά.

ΚΑΙ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AΓ τῇ ΓB, διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ AB τοῦ BΓ. ὡς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν BΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BE· διπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς BE. ἔστι δὲ καὶ ἡ τοῦ σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων τοῦ τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς, ἧς ἐστιν ἡ AB ἡ τοῦ δοθείσης σφαίρας διάμετρος· ἡ BE ἄρα τοῦ ὀκταέδρου ἐστὶ πλευρά.

ΗΧΘΩ δὴ ἀπὸ τοῦ A σημείου τῇ AB εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ AH, καὶ κείσθω ἡ AH τῇ AB ἴση, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ HΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἤχθω τῇ AB κάθετος ἡ ΘK. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ AH τῆς AΓ, ἴση γὰρ ἡ HA τῇ AB, ὡς δὲ ἡ HA πρὸς τὴν AΓ οὕτως ἡ ΘK πρὸς τὴν KΓ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΘK τῆς KΓ· τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘK τοῦ ἀπὸ τῆς KΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΘK, KΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΓ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς KΓ. ἴση δὲ ἡ ΘΓ τῇ ΓB· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓK. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ AB τῆς BΓ, ὧν ἡ AΔ τῆς ΔB ἐστὶ διπλῆ· λοιπὴ ἄρα ἡ BΔ λοιπῆς τῆς ΔΓ ἐστὶ διπλῆ· τριπλῆ ἄρα ἡ BΓ τῆς ΓΔ· ἐννεαπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς BΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς BΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓK· μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓK τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ· μείζων ἄρα ἡ ΓK τῆς ΓΔ. κείσθω τῇ ΓK ἴση ἡ ΓΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΛM, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ MB. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς BΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓK, ἧς ἐστι τῆς μὲν BΓ διπλῆ ἡ AB, τῆς δὲ ΓK διπλῆ ἡ KΛ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς KΛ. ἔστι δὲ καὶ ἡ τοῦ σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. καὶ ἔστιν ἡ AB ἡ τοῦ σφαίρας διάμετρος· ἡ KΛ ἄρα ἐξαγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ εἰρημένου κύκλου. καὶ ἐπεὶ τῆς σφαίρας ἡ διάμετρος σύγκειται, ἔκ τε τῆς ἐξαγώνου καὶ δύο τῶν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν εἰρημένον κύκλον ἐγγραφομένων, καὶ ἔστιν ἡ μὲν AB ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ KΛ ἐξαγώνου πλευρά, καὶ ἴση ἡ AK τῇ ΛB· ἑκατέρα ἄρα τῶν AK, ΛB δεκαγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. καὶ ἐπεὶ δεκαγώνου μὲν ἡ ΛB, ἐξαγώνου δὲ ἡ MΛ, ἴση γάρ ἐστι τῇ KΛ, ἐπεὶ καὶ τῇ ΘK, ἴσον γὰρ ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστιν ἑκατέρα τῶν ΘK,

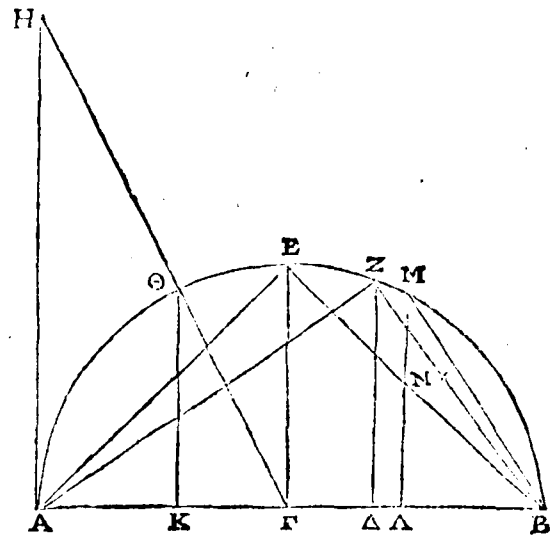
ΚΛ dupla ipſius ΚΓ: erit [per 10. 13.] ΜΒ latus pentagoni. quod autem eſt latus pentagoni idem eſt [per 16. 13.] & icoſaedri: ergo ΜΒ eſt icoſaedri latus.

ΕΤ quoniam ΖΒ eſt latus cubi, ſecetur extrema ac media ratione in Ν, & ΝΒ ſit major portio; erit ergo [per cor. 17.13.] ΝΒ dodecaedri latus.

QUONIAM autem ſphæræ diameter oſtenſa eſt ipſius quidem ΑΖ lateris pyramidis potentia ſeſquialtera, ipſius vero ΒΕ octaedri potentia dupla, & ipſius ΖΒ cubi potentia tripla; quarum partium ſphæræ diameter potentia eſt ſex, earum pyramidis quidem latus erit quatuor, octaedri vero trium, & cubi duarum: ergo latus pyramidis octaedri quidem lateris potentia eſt ſeſquitertium; lateris vero cubi potentia duplum. & octaedri latus lateris cubi potentia eſt ſeſquialterum: latera igitur trium figurarum jam dicta, videlicet & octaedri & cubi, inter ſe ſunt in rationibus rationalibus. Dico vero quod reliquorum duorum, nempe icoſaedri & dodecaedri latera, neque inter ſe neque ad jam dicta ſunt in rationalibus rationibus; irrationales enim ſunt, illius quidem [per 16. 13.] minor, hujus vero [per 17.13.] apotome.

QUOD vero ΜΒ latus icoſaedri majus ſit dodecaedri latere ΝΒ, ita demonſtrabimus.

Quoniam enim [per 8.6.] triangulum ΖΑΒ æquiangulum eſt triangulo ΖΑΒ; erit [per 4.6.] ut ΑΒ ad ΒΖ ita ΖΒ ad ΒΑ. & cum tres rectæ lineæ proportionales ſint, ut prima ad tertiam ita erit [per cor. 20.6.] quadratum primæ ad quadratum ſecundæ: eſt igitur ut ΑΒ ad ΒΑ ita quadratum ex ΑΒ ad quadratum ex ΒΖ. & invertendo [per coroll. 4 5.] ut ΑΒ ad ΒΔ ita quadratum ex ΖΒ ad quadratum ex ΒΔ. tripla autem eſt ΑΒ ipſius ΒΔ: ergo quadratum ex ΖΒ quadrati ex ΒΔ eſt triplum. verum quadratum ex ΑΔ quadruplum eſt quadrati ex ΑΒ; eſt enim ΑΔ ipſius ΑΒ dupla: ergo quadratum ex ΑΔ eſt majus quadrato ex ΖΒ; ac propterea ΑΔ quam ΖΒ eſt major: multo igitur major eſt ΑΛ quam ΖΒ. & [per 9. 13.] ipſa quidem ΑΛ extrema ac media ratione ſecta eſt, & major ejus portio eſt ΛΚ; quoniam ΚΛ eſt hexagoni latus, & ΚΑ latus decagoni. ipſa vero ΖΒ [per conſtr.] extrema ac media ratione ſecta eſt, & major portio eſt ΝΒ: major igitur eſt ΚΛ quam ΝΒ. eſt autem ΚΛ ipſi ΛΜ æqualis: ergo ΛΜ quam ΝΒ eſt major. ſed [per 19. 1.] ΒΜ eſt major



ΚΛ διπλασίων τῆς ΚΓ· πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΒ. ἡ δὲ τοῦ πενταγώνου ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου· εἰκοσαέδρου ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΒ.

ΚΑΙ ἐπεὶ ἡ ΖΒ κύβου ἐστὶ πλευρά, τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Ν, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΝΒ· ἡ ΝΒ ἄρα δωδεκαέδρου ἐστὶ πλευρά.

ΚΑΙ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἐδείχθη τῆς μὲν ΑΖ πλευρᾶς τοῦ πυραμίδος δυνάμει ἡμιολία, τῆς δὲ τοῦ ὀκταέδρου ΒΕ δυνάμει τριπλασίων, τῆς δὲ τοῦ κύβου τῆς ΖΒ δυνάμει τετραπλασίων· ὧν ἄρα ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἓξ, τούτων ἡ μὲν τῆς πυραμίδος τεσσάρων, ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τριῶν, ἡ δὲ τοῦ κύβου δύο· ἡ ἄρα τῆς πυραμίδος πλευρὰ τῆς μὲν τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς δυνάμει ἐστὶν ἡμιόλιος, τῆς δὲ τοῦ κύβου δυνάμει διπλῆ. ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τῆς τοῦ κύβου δυνάμει ἡμιολία· αἱ μὲν ἓν εἰρημέναι τῶν τριῶν σχημάτων πλευραὶ, λέγω δὴ πυραμίδος καὶ ὀκταέδρου καὶ κύβου, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς· αἱ δὲ λοιπαὶ δύο, λέγω δὴ ἥτε τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ ἡ τοῦ δωδεκαέδρου, ἔτε πρὸς ἀλλήλας ἔτε πρὸς τὰς προειρημένας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς, ἄλογοι γάρ εἰσιν, ἡ μὲν ἐλάττων, ἡ δὲ ἀποτομή.

ΟΤΙ δὲ μείζων ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἡ ΜΒ τῆς τοῦ δωδεκαέδρου τῆς ΝΒ δείξομεν ὕστερον.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΖΔΒ τρίγωνον τῷ ΖΑΒ τριγώνῳ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΖ οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΒΑ. καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ. ἀναπαλιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ. τριπλῆ δὲ ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετραπλάσιον· διπλῆ γὰρ ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΔ τῆς ΖΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ΑΛ τῆς ΖΒ μείζων ἐστί. καὶ τῆς μὲν ΑΛ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΚΑ, ἐπειδήπερ ἡ μὲν ΑΚ ἑξαγώνου ἐστὶν, ἡ δὲ ΚΑ δεκαγώνου. τῆς δὲ ΖΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΝΒ· μείζων ἄρα ἡ ΚΛ τῆς ΝΒ. ἴση δὲ ἡ ΚΛ τῇ ΛΜ· μείζων ἄρα ἡ ΛΜ τῆς ΝΒ. τῆς δὲ ΛΜ μείζων ἡ ΜΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ΜΒ

ἡ ΜΒ πλαδρὰ ἤτοι τὸ εἰκοσάεδρον μείζων ἐστὶ τῆς ΝΒ πλαδρᾶς ἤτοι τοῦ δωδεκαέδρου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΑΛΛΩΣ ὅτι μείζων ἡ ΜΒ τῆς ΝΒ.

Ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ, τριπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ, διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ ΖΑΒ τρίγωνον τῷ ΖΒΔ τριγώνῳ· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΖ. ἐδείχθη δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΛ πενταπλάσιον· πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς ΚΛ τρισὶ τοῖς ἀπὸ τῆς ΖΒ ἴσοι εἰσίν. ἀλλὰ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἓξ τῶν ἀπὸ τῆς ΝΒ μείζονά ἐστιν· ὥστε καὶ ἓν τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ ἑνὸς τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ μεῖζόν ἐστι· μείζων ἄρα ἡ ΚΛ τῆς ΝΒ. ἴση δὲ ἡ ΚΛ τῇ ΛΜ· μείζων ἄρα ἡ ΚΛ τῆς ΝΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ΜΒ τῆς ΝΒ μείζων ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΛΗΜΜΑ.

Ὅτι δὲ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἓξ τῶν ἀπὸ τῆς ΒΝ μείζονά ἐστι, δείξομεν ὕστερον.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΒΝ τῆς ΝΖ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΖΒ, ΒΝ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΖ, ΖΝ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΖ, ΒΝ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΖ, ΖΝ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ ΒΖ, ΖΝ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΖΒ, ΒΝ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΒΖ, ΒΝ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἐστι. τὸ δὲ ὑπὸ ΒΖ, ΖΝ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΝ, ἄκρον γὰρ καὶ μέσον λόγον τέτμηται ἡ ΒΖ κατὰ τὸ Ν, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς μέσης· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΖΒ μεῖζόν ἐστι διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΝ· ἓν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ δύο τῶν ἀπὸ τῆς ΒΝ μεῖζόν ἐστιν· ὥστε καὶ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἓξ τῶν ἀπὸ τῆς ΒΝ μείζονά ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Λέγω δὴ ὅτι πρὸς τοῖς εἰρημένοις ε΄. σχήμασιν ἄλλο σχῆμα στερεὸν περιέχεται ὑπὸ ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων ἴσων ἀλλήλοις.

Τὸ μὲν γὰρ δύο τριγώνων, ἀλλ' οὐδὲ ἄλλων δύο ἐπιπέδων σχῆμα στερεὰ γωνία οὐ συνίσταται. ὑπὸ δὲ τριῶν τριγώνων ἡ τῆς πυραμίδος, ὑπὸ δὲ τεττάρων ἡ τοῦ ὀκταέδρου, ὑπὸ δὲ ε΄. ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου· ὑπὸ δὲ ἓξ τριγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων οὐκ ἔσται στερεὰ γωνία, ἅτε γὰρ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου γωνίας διμοίρου ὀρθῆς, ἔσονται αἱ ἓξ τετράσιν ὀρθαῖς ἴσαι, ὅπερ ἀδύνατον, ἅπασα γὰρ στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλαττόνων ἢ τεττάρων ὀρθῶν περιέχεται. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ οὐδὲ ὑπὸ πλειόνων ἢ ἓξ γωνιῶν ἐπιπέδων στερεὰ γωνία συνίσταται. ὑπὸ δὲ τετραγώνων τριῶν ἡ τοῦ κύβου γωνία περιέχεται· ὑπὸ δὲ τεττάρων ἀδύνατον, ἐπεὶ τὰ τέσσαρα τετράγωνα τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ· ὑπὸ δὲ πλειόνων ἢ τεττάρων ἀδύνατον· ὥστε ὑπὸ τριῶν μόνων τετραγώνων στερεὰ γωνία περιέχεται. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὑπὸ τριῶν μόνων πενταγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων στερεὰ γωνία περιέχεται, ἡ τοῦ δωδεκαέδρου· ὑπὸ δὲ τριῶν ἑξαγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων οὐκ ἔσται στερεὰ γωνία· ἐπεὶ καὶ ἡ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου γωνία τοῦ ἑξαγώνου τριῶν ἐστιν ἴση· ὥστε τὰ τρία ἑξάγωνα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ποιήσει τὸ στερεὸν γωνίαν, ὅπερ ἀδύνατον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ οὐδὲ ὑπὸ πλειόνων ἢ τριῶν ἑξαγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων στερεὰ γωνία περιέχεται· ὑπὸ δὲ τριῶν ἑπταγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων καὶ τριῶν ὀκταγώνων καὶ τριῶν ἐννεαγώνων καὶ τριῶν δεκαγώνων καὶ τριῶν ἑνδεκαγώνων καὶ τριῶν δωδεκαγώνων καὶ τριῶν πάντων τῶν ἐφεξῆς ἀναγραφομένων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων οὐκ ἔσται στερεὰ γωνία συνεστῶσα· ἐπεὶ καὶ ἡ τοῦ ἑπταγώνου ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου γωνία μείζων ἐστὶ τῆς τοῦ ἑξαγώνου· ἡ δὲ τοῦ ἑξαγώνου τριῶν ἐστιν ἴση ὀρθῶν· ὥστε τὰ τρία ἑπτάγωνα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ποιήσει τὸ στερεὸν γωνίαν, ὅπερ ἀδύνατον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ οὐδὲ ὑπὸ πλειόνων ἢ τριῶν ἑπταγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων στερεὰ γωνία περιέχεται· ὑπὸ δὲ τῶν λοιπῶν πολυγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων στερεὰ γωνία οὐ περιέχεται διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὰ εἰρημένα· ὑπὸ μόνων ἄρα τριῶν τριγώνων καὶ τετραγώνων καὶ πενταγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων στερεὰ γωνία περιέχεται· καὶ ὑπὸ μόνων τούτων πέντε σχημάτων στερεὰ συνίσταται, ὑπὸ μὲν τριγώνων τριῶν ἡ τῆς πυραμίδος, ὑπὸ δὲ τετραγώνων τριῶν ἡ τοῦ κύβου, ὑπὸ δὲ τριγώνων τεττάρων ἡ τοῦ ὀκταέδρου, ὑπὸ δὲ πενταγώνων τριῶν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου, ὑπὸ δὲ τριγώνων πέντε ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

quam ΜΛ: ergo ΜΕ, quæ eſt latus icoſaedri, major eſt ipſa ΝΒ dodecaedri latere. quod erat demonſtrandum.

ALITER oſtenditur ΜΒ majorem eſſe quam ΝΒ.

Quoniam enim ΑΔ dupla eſt ipſius ΔΒ, erit ΑΒ ipſius ΒΔ tripla. ut autem ΑΒ ad ΔΒ ita quadratum ex ΑΒ ad quadratum ex ΒΖ, propterea quod triangulum ΖΑΒ [per 8.6.] triangulo ΖΒΔ æquiangulum eſt: triplum igitur eſt quadratum ex ΑΒ quadrati ex ΒΖ. oſtenſum autem eſt quadratum ex ΑΒ quadrati ex ΚΛ quintuplum: ergo quinque quadrata ex ΚΛ tribus quadratis ex ΖΒ ſunt æqualia. ſed [ut mox demonſtrabitur] tria quadrata ex ΖΒ majora ſunt quam ſex eorum, quæ fiunt ex ΝΒ: & igitur quinque ex ΚΛ quam ſex eorum quæ ex ΝΒ ſunt majora: ergo & unum ex ΚΛ majus eſt uno ex ΝΒ; ac propterea ΚΛ quam ΝΒ major. æqualis autem eſt ΚΛ ipſi ΛΜ; major igitur eſt ΛΜ quam ΝΒ: multo igitur major eſt ΜΒ quam ΝΒ. quod erat demonſtrandum.

LEMMA.

Tria vero quadrata ex ΖΒ majora eſſe quam ſex eorum quæ ex ΒΝ, hoc modo oſtendemus.

Quoniam enim major eſt ΒΝ quam ΝΖ, erit rectangulum quod continetur ſub ΖΒ, ΒΝ majus contento ſub ΒΖ, ΖΝ: quod igitur continetur ſub ΖΒ, ΒΝ una cum contento ſub ΒΖ, ΖΝ majus eſt quam duplum ejus quod ſub ΒΖ, ΖΝ continetur. ſed [per 2. 2.] quod quidem continetur ſub ΖΒ, ΒΝ una cum contento ſub ΒΖ, ΖΝ eſt quadratum ex ΖΒ. contentum autem ſub ΒΖ, ΖΝ eſt æquale quadrato ex ΒΝ; etenim [ex hyp.] ΒΖ extrema ac media ratione ſecta eſt in Ν, & [per 17. 6.] quod ſub extremis continetur eſt æquale ei quod fit à media: quadratum igitur ex ΖΒ majus eſt quam duplum quadrati ex ΒΝ: quare unum quadratum ex ΖΒ duobus ex ΒΝ eſt majus; idcirco tria quadrata quæ fiunt ex ΖΒ majora ſunt quam ſex eorum quæ fiunt ex ΒΝ. quod erat demonſtrandum.

SCHOLIUM.

Dico præter jam dictas quinque figuras non conſtitui aliam figuram, quæ ſub figuris æquilateris & æquiangulis inter ſe æqualibus contineatur.

Ex duobus enim triangulis, vel ex aliis duobus planis [per 11. def. 11.] non conſtituetur angulus ſolidus. ex tribus autem triangulis conſtituitur angulus pyramidis; ex quatuor octaedri; ex quinque icoſaedri: ſed ex ſex *triangulis* æquilateris & æquiangulis ad unum punctum conſtitutis non eſt angulus ſolidus; cum enim [per 32. 1.] trianguli æquilateri angulus ſit duæ tertiæ recti, erunt horum ſex quatuor rectis æquales, quod fieri non poteſt, omnis enim ſolidus angulus [per 21. 11.] ſub minoribus quam quatuor rectis continetur. eadem ratione neque ex pluribus quam ſex hujuſmodi angulis planis conſtituitur ſolidus angulus. porro angulus cubi ſub tribus quadratis continetur: ut autem ſub quatuor contineatur fieri non poteſt, eſſent

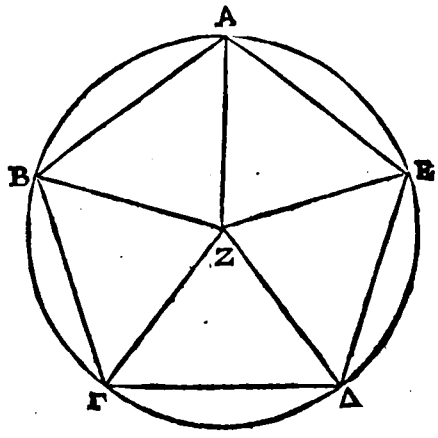
enim rurſus quatuor recti. ſub pentagonis æquilateris & æquiangulis tribus quidem continetur angulus dodecadri: ſed ut ſub quatuor contineatur fieri non poteſt, nam cum pentagoni æquilateri angulus conſtet [ut mox oſtendetur] ex recto & quinta parte recti, erunt quatuor hujuſmodi anguli quatuor rectis majores, quod fieri non poteſt. neq; vero aliis polygonis figuris conſtituetur angulus ſolidus, propter dicta abſurda quæ conſequuntur: non igitur præter jam dictas, figura ſolida conſtituitur ſub figuris æquilateris & æquiangulis contenta. quod erat demon.

γὰρ πάλιν τέσσαρες ὀρθαί. τὸ δὲ πενταγώνου ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου, τὸ μὲν τριῶν ἐστὶ τῶν δωδεκαέδρου· τὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον, ἔστι γὰρ τῆς τοῦ ἰσοπλεύρου πενταγώνου γωνίας ὀρθῆς καὶ πέμπτου, ἔσονται αἱ τέσσαρες γωνίαι τεσσάρων ὀρθῶν μείζους, ὅπερ ἀδύνατον. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ πολυγώνων ἑτέρων σχημάτων περιληφθήσεται στερεὰ γωνία, διὰ τὸ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὑπὸ τὰ εἰρημένα ε. σχήματα ἕτερον στερεὸν συσταθήσεται τὸ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

LEMMA.

Verum enim vero pentagoni æquilateri & æquianguli angulum conſtare ex recto & quinta parte recti hoc modo oſtendemus.

Sit enim pentagonum æquilaterum & æquiangulum ΑΒΓΔΕ, & circa ipſum circulus ΑΒΓΔΕ deſcribatur, ſumaturque ipſius centrum quod ſit Ζ, & jungantur ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ, quæ [per 14.4.] pentagoni ΑΒΓΔΕ angulos bifariam ſecabunt. & quoniam quinque anguli ad Ζ ſunt quatuor rectis æquales, & etiam inter ſe æquales; erit unus ipſorum, ut ΑΖΒ, unus rectus dempta quinta recti parte: ergo [per 32.1.] reliqui ΖΑΒ, ΑΒΖ conficiunt unum rectum & quintam partem recti. æqualis autem eſt angulus ΖΑΒ angulo ΖΒΓ: & igitur ΑΒΓ totus pentagoni angulus conſtat ex recto & quinta recti parte. quod erat demonſtr.



ΛΗΜΜΑ.

Οτι δὲ ἡ τοῦ ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου γωνία ὀρθή ἐστι καὶ πέμπτον, ὕτω δεικτέον.

Ἐστω γὰρ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ περιγεγράφθω περὶ αὐτὸ κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ· δίχα ἄρα τετμήσειν τὰς πρὸς τοῖς ΑΒΓΔ, Ε πενταγώνου γωνίας. καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τῷ Ζ πέντε γωνίαι τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ, καὶ εἰσὶν ἴσαι· μία ἄρα αὐτῶν, ὡς ἡ ὑπὸ ΑΖΒ, μιᾶς ὀρθῆς ἐστι τοῦδε πέμπτον· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΖΑΒ, ΑΒΖ μιᾶς εἰσὶν ὀρθῆς καὶ πέμπτης. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΖΑΒ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τοῦ πενταγώνου γωνία μιᾶς ὀρθῆς ἐστι καὶ πέμπτης. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΣΣΑΡΕΣΚΑΙΔΕΚΑΤΟΝ,
ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΩΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ,
ΩΣ ΟΙΟΝΤΑΙ ΤΙΝΕΣ,
Ὡς ἄλλοι δὲ, ΥΨΙΚΛΕΟΥΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ περὶ τῶν ε'. σωμάτων θεωρητικόν.

EUCLIDIS,
UT QUIDAM ARBITRANTUR,
ELEMENTORUM
LIBER DECIMUSQUARTUS,
QUI ET SOLIDORUM QUARTUS,
Aut, *verius* juxta alios, HYPSICLIS ALEXANDRINI de Quinque Corporibus Liber prior.

ΒΑΣΙΛΙΔΗΣ ὁ Τύριος, ὦ Πρώταρχε, ἐπιδημήσας εἰς Ἀλεξάνδρειαν, καὶ συγγενὴς τῷ πατρὶ ἡμῶν ἀφ' ἑτοίμου τοῦ κατὰ τὰ μαθήματος συγγένειαν, συνδιέτριψεν αὐτῷ τὸ πλεῖστον τῆς ἐπιδημίας χρόνον. καί ποτε διελθόντες τὸ περὶ Ἀπολλωνίου γεγραφὲν περὶ τῆς συγκρίσεως τοῦ δωδεκαέδρου καὶ τοῦ εἰκοσαέδρου τοῦ εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμένων, τίνα λόγον ἔχει ταῦτα πρὸς ἄλληλα· ἔδοξαν ταῦτα μὴ ὀρθῶς γεγράφθαι τὸν Ἀπολλώνιον. αὐτοὶ δὲ ταῦτα ἀφαρμόσαντες ἔγραψαν ὡς ἐνῆν αὐτοῖς τοῦ πατρός. ἐγὼ δὲ ὕστερον περιέπεσον ἑτέρῳ βιβλίῳ ὑπὸ Ἀπολλωνίου ἐκδεδομένῳ, ἐν ᾧ περιέχονται ἀπόδειξιν ὑγιῶς περὶ τοῦ ὑποκειμένου· καὶ μεγάλως ἐψυχαγωγήθην ὅτι τῇ προβλήματος ζητήσει. τὸ μὲν ὑπὸ Ἀπολλωνίου ἐκδοθὲν ἔοικε κοινῇ σκοπεῖν, ἐν γὰρ περιφερεῖ τὸν ὑφ' ἡμῶν δοκοῦν ὕστερον γεγραφέναι φιλοπόνως ὅσον δοκεῖν ὑπομνηματισάμην, ἔκρινα προσῆκόν σοι, ἀφ' ἑτοίμου ἐν ἅπασι μαθήμασι, μάλιστα δ' ἐν γεωμετρίᾳ προσκοπῶ,

BASILIDES Tyrius, Protarche, cum Alexandriam veniſſet, patrique noſtro ob mathematicarum diſciplinarum ſocietatem commendatus fuiſſet, ipſo peregrinationis tempore cum eo diu multumque verſatus eſt. Ipſi ergo cum id aliquando expenderent, quod ab Apollonio de dodecaedri & icoſaedri in eadem ſphæra deſcriptorum comparatione ſcriptum eſt, quam ſcilicet hæc inter ſe rationem habeant; arbitrati ſunt ea non recte tradidiſſe Apollonium. Ideoque ea, à ſe emendata, ut pater meus dicebat, memoriæ ac literis prodiderunt. Ego vero poſtea incidi in alium librum ab Apollonio editum, qui propoſitæ rei demonſtrationem accuratam complectebatur; ex ejuſque problematis indagatione magnam profecto cepi voluptatem. Illud quidem, quod ab Apollonio editum eſt, quilibet facile perſpicere poteſt, cum in omnium manibus verſetur: quod autem nos poſtea ſummo, quantum conjici licet, ſtudio lucubraſſe videmur, id literis mandatum tibi dedicandum cenſuimus, ut qui ob excellentem in omnibus diſciplinis mathematicis, & præſertim in geometria, cognitio-

nem, prudenter judicabis ea quæ dicturi ſumus; ob eam vero, quæ tibi cum patre meo fuit, vitæ conſuetudinem, & ob benevolentiam, qua nos complecteris, tractationem ipſam libenter audies. Sed jam tempus eſt ut procemio finem imponentes opus ipſum aggrediamur.

ἐμπείρως κρίνοντι τὰ ῥηθησόμενα. ἀφ' ὧν δὲ τιμᾷ τὸν πατέρα σωήθειαν, καὶ τιμᾷ τὸν πρὸς ἡμᾶς εὔνοιαν, εὐμενῶς ἀκροάσῃ τῆς πραγματείας. καιρὸς δ' ἂν εἴη προοιμίου μὲ παύσασθαι, τῆς δὲ συντάξεως ἄρχεσθαι.

Prop. I. Theor.

Quæ à centro circuli alicujus ad latus pentagoni æquilateri in eodem circulo deſcripti perpendicularis ducitur, dimidia eſt utriuſque, & ejus quæ ex centro & lateris decagoni in eodem circulo deſcripti.

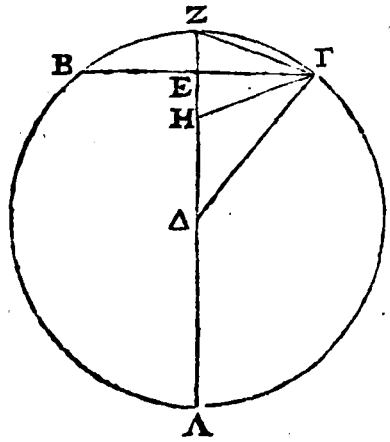
ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Η ἀπὸ τοῦ κέντρου κύκλου πρὸς ὀρθὰς τὴν τοῦ πενταγώνου πλευρὰν, καὶ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου, καθετος ἀγομένη, ἡμίσεια ἐστὶ συναμφοτέρου, τῆς τε τοῦ κέντρου καὶ τῆς τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

SIT circulus ABΓ, & in eo deſcribatur pentagoni æquilateri latus BΓ, ſumaturque circuli centrum Δ; & ad BΓ ducta ΔE perpendiculari, producatur in directum ipſi ΔE recta linea AEZ: dico ΔE dimidiam eſſe utriuſque, & hexagoni lateris & decagoni in eodem circulo deſcriptorum.

Ἔστω κύκλος ὁ ABΓ, καὶ ἐν τῷ ABΓ κύκλῳ πενταγώνου ἰσοπλεύρου πλευρὰ ἡ BΓ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ BE καθετος ἤχθω ἡ ΔE, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἡ ΔE εὐθεῖα ἡ AEZ· λέγω ὅτι ἡ ΔE ἡμίσειά ἐστι τοῦ τε ἐξαγώνου καὶ τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

Jungantur enim Δ Γ, Γ Z; ponaturque HE ipſi EZ æqualis, & à puncto H ad Γ ducatur HΓ. quoniam igitur circumferentia totius circuli quintupla eſt circumferentiæ BZΓ, atque eſt totius quidem circuli circumferentiæ dimidia AΓZ, ipſius vero BZΓ dimidia ZΓ, erit & circumferentia AΓZ quintupla circumferentiæ ZΓ: ideoque circumferentia AΓ ipſius ΓZ eſt quadrupla. ut autem AΓ ad ZΓ ita eſt [per 33. 6.] AΔΓ angulus ad angulum ZΔΓ: angulus igitur AΔΓ quadruplus eſt anguli ZΔΓ. duplus autem eſt [per 20.3.] angulus AΔΓ anguli EZΓ: ergo & angulus EZΓ anguli HΔΓ eſt duplus. eſt autem [per 4.1.] & EZΓ angulus æqualis angulo EHΓ: duplus igitur eſt angulus EHΓ anguli HΔΓ; quare & [per 6. & 32.1.] ΔH ipſi HΓ eſt æqualis. ſed [per 4.1.] HΓ æqualis eſt ZΓ: ergo & ΔH ipſi ZΓ eſt æqualis. eſt autem & HE æqualis EZ: æqualis igitur eſt ΔE utrique EZ, ZΓ. communis apponatur ΔE; utraque igitur ΔZ, ZΓ ipſius ΔE eſt dupla. ſed eſt ΔZ quidem [per 14. 4.] hexagoni lateri æqualis, ZΓ vero æqualis lateri decagoni: ergo ΔE eſt dimidia & lateris hexagoni & decagoni in eodem circulo deſcriptorum. quod erat demonſtrandum.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΔΓ, ΓZ, καὶ κείσθω τῇ EZ ἴση ἡ HE, καὶ ἀπὸ τοῦ H ἐπὶ τὸ Γ ἐπεζεύχθω ἡ HΓ. ἐπεὶ πενταπλασία ἐστὶν ὅλη τοῦ κύκλου ἡ περιφέρεια τῆς BZΓ περιφερείας, καί ἐστι τοῦ μὲν ὅλου τοῦ κύκλου περιφερείας ἡμίσεια ἡ AΓZ, τῆς δὲ BZΓ ἡμίσεια ἡ ZΓ· καὶ AΓZ ἄρα περιφέρεια πενταπλασία ἐστὶ τῆς ZΓ περιφερείας· πεντάπλη ἄρα ἐστὶν ἡ AΓ τῆς ZΓ. ὡς δὲ ἡ AΓ πρὸς τὴν ZΓ οὕτως ἡ ὑπὸ AΔΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ZΔΓ γωνίαν· πεντάπλη ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ AΔΓ τῆς ὑπὸ ZΔΓ. διπλῆ δὲ ἡ ὑπὸ AΔΓ τῆς ὑπὸ EZΓ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ EZΓ τῆς HΔΓ. ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ EZΓ ἴση τῇ ὑπὸ EHΓ· διπλῆ ἄρα ἡ ὑπὸ EHΓ τῆς ὑπὸ HΔΓ· ἴση ἄρα ἡ ΔH τῇ HΓ. ἀλλὰ ἡ HΓ τῇ ZΓ ἐστιν ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΔH τῇ ZΓ. ἔστι δὲ καὶ HE τῇ EZ ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΔE συναμφοτέρῳ τῇ EZ, ZΓ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ΔE· συναμφότερος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔZ, ZΓ διπλῆ τῆς ΔE. καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΔZ ἴση τῇ τοῦ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ZΓ ἴση τῇ τοῦ δεκαγώνου· ἡ ΔE ἄρα ἡμίσειά ἐστι τῆς τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Corollarium.

Manifeſtum vero eſt ex theorematibus decimitertii libri, [ſc. 12. 13.] eam quæ à centro circuli ad latus trianguli æquilateri perpendicularis ducitur dimidiam eſſe ejus quæ ex centro circuli.

Πόρισμα.

Φανερὸν δὴ ἐκ τῶν ἐν τῷ τρισκαιδεκάτῳ βιβλίῳ θεωρημάτων, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ τριγώνου τοῦ ἰσοπλεύρου κάθετος ἀγομένη ἡμίσειά ἐστι τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

PRO-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ο αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τοῖς εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένοις.

Τοῦτο δὲ γράφεται μὲν * Ἀριστάιος ἐν τῷ περὶ πέντε σχημάτων συγκρίσεως. γράφει δὲ Ἀπολλώνιος ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐκδόσει τῆς συγκρίσεως τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ εἰκοσαέδρον· ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτω καὶ αὐτὸ τὸ δωδεκαέδρον πρὸς τὸ εἰκοσαέδρον· λέγει δὲ τὴν αὐτὴν εἶναι καθετὸν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον. γραπτέον δὲ καὶ ἡμῖν αὐτῆς, ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τοῖς εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένοις, προγραφέντος τοῦδε,

PROP. II. THEOR.

Idem circulus comprehendit dodecaedri pentagonum & icosaedri triangulum in eadem sphæra descriptorum.

HOC autem conscribitur ab *Aristæo in libro de quinque figurarum comparatione, & ab Apollonio in secunda editione comparationis dodecaedri cum icosaedro: videlicet ut dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, ita esse & ipsum dodecaedrum ad icosaedrum, quia perpendicularis ducta à centro sphæræ ad dodecaedri pentagonum eadem est cum illa quæ ad icosaedri triangulum ducitur. porro nobis quoque describendum monstrandumque est eundem circulum comprehendere & dodecaedri pentagonum & icosaedri triangulum in eadem sphæra descriptorum, hoc quidem præmisso,

(ΛΗΜΜΑ.)

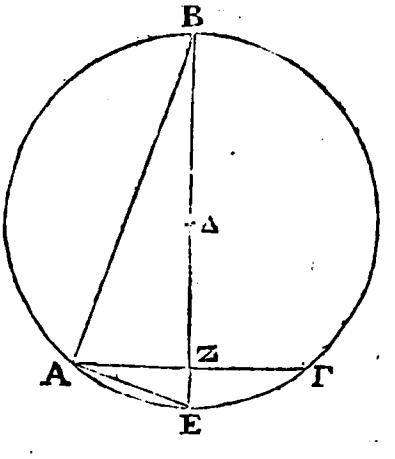
Ἐὰν εἰς κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, τὸ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ὑπὸ δύο πλευρῶν τοῦ πενταγώνου ὑποτεινούσης εὐθείας, πενταπλάσιον ἔσται τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

(LEMMA.)

Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur, quadratum quod fit ex latere pentagoni, una cum quadrato quod fit ex recta quæ duobus pentagoni lateribus subtenditur, quintuplum erit quadrati ejus quæ est ex circuli centro.

Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐν τῷ ΑΒΓ κύκλῳ πενταγώνου πλευρὰ ἔστω ἡ ΑΓ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἡ ΔΖ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Β, Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετράγωνα πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ ΔΕ τετραγώνου.

Sit ΑΒΓ circulus, & in eo pentagoni latus ΑΓ, sumaturque circuli centrum Δ, & ad ΑΓ perpendicularis ducta ΔΖ in puncta Β, Ε producatur, & jungatur ΑΒ: dico quadrata ex ΒΑ, ΑΓ quadrati ex ΔΕ quintupla esse.



Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ· δωδεκαγώνου ἄρα ἡ ΑΕ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΒΕ τῆς ΕΔ, τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΔ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΕ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ· πενταπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ ΒΑ, ΑΕ τοῦ ἀπὸ ΕΔ· πενταπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ ΑΒ, ΑΕ καὶ ΕΔ τοῦ ἀπὸ ΕΔ. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΑ ἴσα τῷ ἀπὸ ΑΓ· πενταπλάσια ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ ΒΑ, ΑΓ τοῦ ἀπὸ ΕΔ.

Jungatur enim ΑΕ: decagoni ergo latus est. & quoniam ΒΕ dupla est ipsius ΕΔ; erit [per corol. 20. 6.] quadratum ex ΒΕ quadrati ex ΕΔ quadruplum. quadrato autem ex ΒΕ æqualia sunt quadrata ex ΒΑ, ΑΕ: ergo quadrata ex ΒΑ, ΑΕ quadrupla sunt quadrati ex ΕΔ: quare etiam quadrata ex ΑΒ, ΑΕ & ΕΔ sunt quintupla quadrati ex ΕΔ. sed [per 10. 13.] quadrata ex ΔΕ, ΕΑ æqualia sunt quadrato ex ΑΓ: quadrata igitur ex ΒΑ, ΑΓ quadrati ex ΕΔ sunt quintupla.

Τούτου δεδειγμένου, λοιπόν ἐστιν ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τοῖς εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένοις.

Hoc ita ostenso, demonstrandum quidem est eundem circulum comprehendere & dodecaedri pentagonum & icosaedri triangulum in eadem sphæra descriptorum.

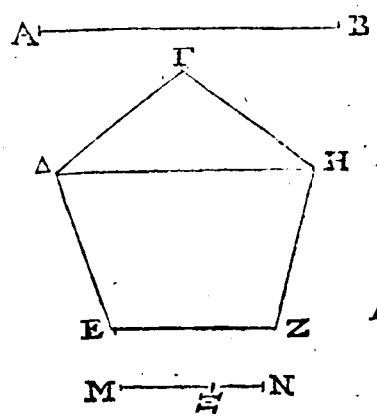
Ἐκκείσθω ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν δωδεκαέδρου τε καὶ εἰ-

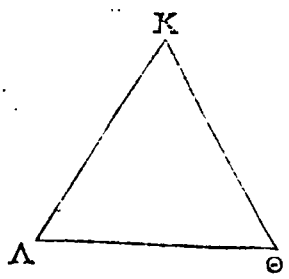
Exponatur sphæræ diameter ΑΒ, & in eadem sphæra describatur dodecaedrum & icosaedrum,

* *Aristæi* libros quinque περὶ πέντε σχημάτων describit *Pappus* in præfatione ad lib. VII. *Collect. Math.* nulla hujus *de quinque figurarum comparatione* facta mentione.

ſitque unum quidem dodecaedri pentagonum ΓΔΕΖΗ, icoſaedri vero triangulum ΚΛΘ: dico eundem circulum comprehendere pentagonum ΓΔΕΖΗ & ΚΛΘ triangulum.

Jungatur ΔΗ: ergo [per 8. & 17. 13.] ΔΗ eſt cubi latus. exponatur recta linea quædam ΜΝ, ita ut quadratum ex ΑΒ quadrati ex ΜΝ ſit quintuplum. eſt autem [per cor. 16. 13.] & ſphæræ diameter potentia quintupla ejus quæ eſt ex centro circuli, à quo icoſaedrum deſcribitur. ſecetur [per 30. 6.] ΜΝ extrema ac media ratione in Ξ: & ſit ΜΞ portio major; ergo [per 5. & 9 13.] ΜΞ eſt decagoni latus. & quoniam quadratum ex ΒΑ quintuplum eſt quadrati ex ΜΝ, & triplum quadrati ex ΔΗ; erunt tria quadrata ex ΔΗ quadratis quinque ex ΜΝ æqualia. ut autem tria quadrata ex ΔΗ ad quadrata quinque ex ΜΝ ita [per 8. 13. & 7. 14.] tria quadrata ex ΓΗ ad quinque quadrata ex ΜΞ: tria igitur quadrata ex ΓΗ quinque quadratis ex ΜΞ ſunt æqualia. quinque autem quadrata ex ΚΛ æqualia ſunt [per 5. 9 & 10. 13.] quinque quadratis ex ΜΝ & quinque quadratis ex ΜΞ: ergo quinque quadrata ex ΚΛ tribus quadratis ex ΔΗ & tribus quadratis ex ΓΗ ſunt æqualia. ſed tria quadrata ex ΔΗ & tria quadrata ex ΓΗ æqualia ſunt quindecim quadratis ejus quæ ex centro circuli deſcripti circa pentagonum ΓΔΕΖΗ, antea enim [per lem. præm] demonſtratum eſt quadrata ex ΔΗ, ΓΗ quintupla eſſe quadrati ejus quæ eſt ex centro circuli circa pentagonum ΓΔΕΖΗ deſcripti. quinque autem quadrata ex ΚΛ ſunt æqualia quindecim quadratis ejus quæ eſt ex centro circuli deſcripti circa triangulum ΚΛΘ; etenim demonſtratum eſt [ad 12.13.] quadratum ex ΚΛ triplum eſſe quadrati ejus quæ eſt ex centro circuli circa triangulum ΚΛΘ deſcripti: quindecim igitur quadrata ejus quæ eſt ex centro circuli quindecim quadratis ejus quæ eſt ex centro circuli ſunt æqualia: quare & diameter diametro eſt æqualis.





Idem igitur circulus comprehendit & dodecaedri pentagonum & icoſaedri triangulum in eadem ſphæra deſcriptorum.

Prop. III. Theor.

Si fuerit pentagonum æquilaterum & æquiangulum, & circa ipſum circulus; à centro autem ad unum latus perpendicularis ducta fuerit: quod tricies ſub uno latere & perpendiculari continetur ſuperficiei dodecaedri eſt æquale,

κοσαέδρου, καὶ ἔστω ἐν μὲν τῷ δωδεκαέδρῳ πεντάγωνον τὸ ΓΔΕΖΗ, εἰκοσαέδρου δὲ τρίγωνον τὸ ΚΛΘ· λέγω ὅτι ὁ αὐτὸς κύκλος περιλαμβάνει τό, τε ΓΔΕΖΗ πεντάγωνον καὶ τὸ ΚΛΘ τρίγωνον.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΔΗ· κύβου ἄρα πλευρὰ ἡ ΔΗ. ἐκκείσθω δή τις εὐθεῖα ἡ ΜΝ, ὥστε πενταπλάσιον εἶναι τὸ ἀπὸ ΑΒ τοῦ ἀπὸ ΜΝ. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασία τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσαέδρον ἀναγέγραπται. τετμήσθω ἡ ΜΝ ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Ξ, καὶ ἔστω τὸ μεῖζον τμῆμα ἡ ΜΞ δεκαγώνου ἄρα ἡ ΜΞ. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιον τὸ ἀπὸ ΒΑ τοῦ ἀπὸ ΜΝ, τριπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ ΒΑ τοῦ ἀπὸ ΔΗ· τρία ἄρα τὰ ἀπὸ ΔΗ ἴσα πέντε τοῖς ἀπὸ ΜΝ. ὡς δὲ τρία τὰ ἀπὸ ΔΗ πρὸς πέντε τὰ ἀπὸ ΜΝ οὕτως τρία τὰ ἀπὸ ΓΗ πρὸς πέντε τὰ ἀπὸ ΜΞ· τρία ἄρα τὰ ἀπὸ ΓΗ τοῖς πέντε τοῖς ἀπὸ ΜΞ ἐστιν ἴσα. πέντε δὲ τὰ ἀπὸ ΚΛ τοῖς πέντε τοῖς ἀπὸ ΜΝ καὶ πέντε τοῖς ἀπὸ ΜΞ ἐστιν ἴσα· πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ ΚΛ ἴσα ἐστὶ τρισὶ τοῖς ἀπὸ ΔΗ καὶ τρισὶ τοῖς ἀπὸ ΓΗ. τρία δὲ τὰ ἀπὸ ΔΗ καὶ τρία τὰ ἀπὸ ΓΗ ἴσα ἐστὶ δεκα καὶ πέντε τοῖς ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου κύκλου περὶ τὸ ΓΔΕΖΗ, ἐδείχθη γὰρ τὰ ἀπὸ ΔΗ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΗ πενταπλάσια τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸ πεντάγωνον τὸ ΓΔΕΖΗ κύκλου. ἀλλὰ πέντε μὲν τὰ ἀπὸ ΚΛ ἴσα ἐστὶ δέκα καὶ πέντε τοῖς ἀπὸ τῶν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸ ΚΛΘ τρίγωνον κύκλου, ἐδείχθη δὲ τὸ ἀπὸ ΚΛ τριπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸ ΚΛΘ τριγώνου κύκλου· δεκαπέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ἴσα ἐστὶ τοῖς δεκαπέντε τοῖς ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου· ἡ ἄρα διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ.

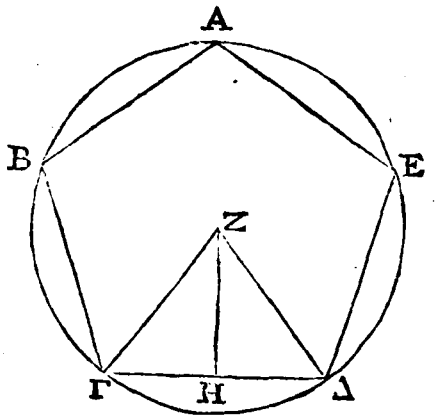
Ὁ αὐτὸς ἄρα κύκλος περιλαμβάνει τό, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον τὰ εἰς τὰ αὐτὰ σφαίρας ἐγγραφομένων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν ᾖ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, περὶ τοῦτο κύκλος, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου καθετος ἐπὶ μίαν πλευρὰν ἀχθῇ· τὸ τεσσαρακοντάκις ὑπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν καὶ τῆς καθετου ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφανείᾳ.

Ἐστω

Ἔστω πενταγωνον ἰσόπλευρόν τὸ καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ περὶ τὸ πενταγωνον κύκλος, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΗ· λέγω ὅτι τριακοντάκις ἡ ΓΔ, ΖΗ ἴσον δώδεκα πενταγώνοις τοῖς ΑΒΓΔΕ.



SIT pentagonum æquilaterum & æquiangulum ΑΒΓΔΕ, & circa ipſum circulus; ſumatur autem ejus centrum Z, & à Z ad ΓΔ perpendicularis ducatur ΖΗ: dico quod tricies ſub ΓΔ, ΖΗ continetur duodecim pentagonis ΑΒΓΔΕ æquale eſſe.

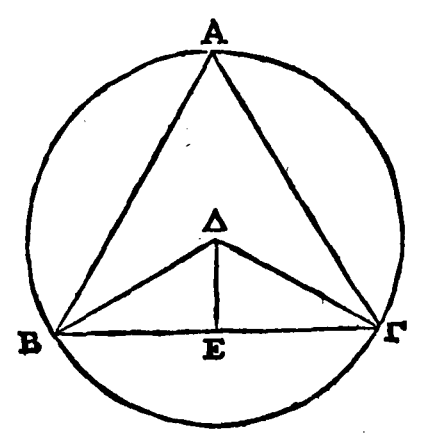
Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΖ, ΖΔ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΓΔΖ τριγώνου, τὸ ἄρα πεντάκις ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ δέκα τριγωνά ἐστιν ἴσα. τὰ δὲ δέκα τρίγωνα δύο ἐστὶ πενταγωνα καὶ πάντα ἑξάκις· τὸ ἄρα τριακοντάκις ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ δώδεκα πενταγώνοις. δώδεκα δὲ πενταγωνα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια· τὸ ἄρα τριακοντάκις ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφανείᾳ.

Jungantur ΓΖ, ΖΔ. & quoniam [per 41. 1.] quod ſub ΓΔ, ΖΗ continetur duplum eſt trianguli ΓΔΖ, erit quod quinquies continetur ſub ΓΔ, ΖΗ decem triangulis æquale. decem autem triangula ſunt duo pentagona; pariterque eorum ſextupla: ergo quod tricies ſub ΓΔ, ΖΗ continetur eſt æquale duodecim pentagonis. ſed duodecim pentagona ſunt dodecaedri ſuperficies: ergo quod tricies continetur ſub ΓΔ, ΖΗ ſuperficiei dodecaedri æquale erit.

ΟΜΟΙΩΣ δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἐὰν ᾖ τρίγωνον ἰσόπλευρον ὡς τὸ ΑΒΓ, καὶ περὶ αὐτὸ κύκλος, καὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ κάθετος ἡ ΔΕ, τὸ τριακοντάκις ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφανείᾳ.

SIMILITER demonſtrabimus, ſi fuerit triangulum æquilaterum, ut ΑΒΓ, & circa ipſum circulus cujus centrum Δ, & ab eo perpendicularis ΔΕ, quod tricies ſub ΒΓ, ΔΕ continetur ſuperficiei icoſaedri æquale eſſe.

Ἐπεὶ γὰρ πάλιν τὸ ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΔΒΓ, δύο ἄρα τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ, καὶ πάντα τρίς· ἓξ ἄρα τρίγωνα τὰ ΔΒΓ ἴσα ἐστὶ τρισὶ τοῖς ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ. ἓξ δὲ τρίγωνα ὡς τὰ ΔΒΓ ἴσα ἐστὶ δυσὶ τοῖς ΑΒΓ, καὶ πάντα δεκάκις· τὸ ἄρα τριακοντάκις ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ ἴσον ἐστὶν εἴκοσι τοῖς ΑΒΓ τριγώνοις, τουτέστι τῇ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφανείᾳ· ὥστε ἔσται ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΔ, ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓ, ΔΕ.



Quoniam enim rurſus [per 41. 1.] quod ſub ΒΓ, ΔΕ continetur duplum eſt trianguli ΔΒΓ, erunt duo triangula æqualia ei quod continetur ſub ΒΓ, ΔΕ, pariterque eorum tripla: ſex igitur triangula ΔΒΓ æqualia ſunt tribus quæ ſub ΒΓ, ΔΕ continentur. at ſex triangula ΔΒΓ ſunt æqualia duobus ΑΒΓ triangulis; pariterque eorum decupla: ergo quod tricies ſub ΒΓ, ΔΕ continetur eſt æquale viginti triangulis ΑΒΓ, hoc eſt icoſaedri ſuperficiei. erit igitur ut dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri ita quod continetur ſub ΓΔ, ΖΗ [fig. præc.] ad id quod ſub ΒΓ, ΔΕ continetur [fig. annex.]

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς τοῦ πενταγώνου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ πεντάγωνον κύκλου ἐπ' αὐτὴν καθέτου ἀγομένης, πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου ἐπ' αὐτὴν καθέτου ἀγομένης, τὰ εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων εἰκοσαέδρου καὶ δωδεκαέδρου.

Corollarium.

Ex hoc vero perſpicuum eſt, ut dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita eſſe quod continetur ſub latere pentagoni & recta linea, quæ à centro circuli circa pentagonum deſcripti in ipſum latus perpendicularis ducitur, ad id quod continetur ſub latere icoſaedri & perpendiculari, quæ à centro circuli circa triangulum deſcripti ad ipſum latus ducta fuerit; nimirum dodecaedro & icoſaedro in eadem ſphæra deſcriptis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

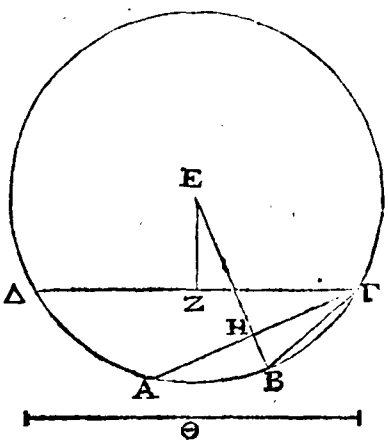
Τούτου δὴ λοιποῦ ὄντος, δεικτέον, ὅτι ἔστιν ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκο-

PROP. IV. THEOR.

Hoc probato, demonſtrandum erit, ut dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſae-

icoſaedri ita eſſe latus cubi ad icoſaedri latus.

EXponatur circulus ΔΒΓ comprehendens [per 2. 14.] & dodecaedri pentagonum & icoſaedri triangulum in eadem ſphæra deſcriptorum, & in ipſo deſcribatur trianguli quidem æquilateri latus ΓΔ, pentagoni vero latus ΑΓ; ſumatur circuli centrum Ε, & ab eo ad ΔΓ, ΓΑ perpendiculares ducantur ΕΖ, ΕΗ, & producatur in directum ipſi ΕΗ recta linea ΗΒ; jungaturque ΒΓ, & exponatur cubi latus Θ: dico ut dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri ita eſſe Θ ad ipſam ΓΔ.



Quoniam enim [per 9.13.] utriuſque ſimul ΕΒΓ extrema ac media ratione ſectæ major portio eſt ΒΕ, & eſt [per 1. 14.] utriuſque quidem ΕΒΓ dimidia ΕΗ, ipſius vero ΒΕ [per cor. 1. 14.] dimidia ΕΖ: erit & ipſius ΕΗ extrema ac media ratione ſectæ major portio ΕΖ. eſt autem & ipſius Θ extrema ac media ratione ſectæ major portio ΓΑ, ut in dodecaedro [ad cor. 17. 13.] oſtenſum fuit: ut igitur Θ ad ΓΑ ita eſt [per 7. 14.] ΕΗ ad ΕΖ; ideoque [per 16. 6.] contentum ſub Θ, ΖΕ eſt æquale ei quod ſub ΓΑ, ΕΗ continetur. & quoniam eſt [per 1. 6.] ut Θ ad ΓΔ ita quod continetur ſub Θ, ΕΖ ad contentum ſub ΓΑ, ΕΖ; ei vero, quod ſub Θ, ΕΖ continetur eſt æquale contentum ſub ΓΑ, ΕΗ: erit [per 16. 6.] ut Θ ad ΓΔ ita contentum ſub ΓΑ, ΕΗ ad id quod ſub ΓΔ, ΕΖ continetur, hoc eſt [per cor. 3. 14.] ut dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri ita Θ ad ΓΔ.

ALITER

Demonſtrare, ut dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri, ita eſſe latus cubi ad icoſaedri latus, hoc quidem præmiſſo.

LEMMA.

Sit circulus ΑΒΓ, & in eo deſcribantur æquilateri pentagoni latera ΑΒ, ΑΓ, & jungatur ΒΓ; ſumatur autem circuli centrum Δ, & jungatur ΑΔ, ipſique ΑΔ producatur in directum ΔΕ, ponatur ipſius ΑΔ dimidia ΔΖ, ſitque ΗΓ ipſius ΓΘ tripla: dico quod ſub ΑΖ, ΒΘ continetur pentagono æquale eſſe.

Jungatur enim ΒΔ. & quoniam ΑΔ dupla eſt ipſius ΔΖ, erit ΑΖ ipſius ΑΔ ſeſquialtera.

Ἐκκείσθω κύκλος περιλαμβάνων τό, τε τῦ δωδεκαέδρυ πενταγωνον & τὸ τῦ εἰκοσαέδρυ τρίγωνον, τ εἰς τὸν αὐτὸν σφαῖραν ἐγγραφομένων, ὁ ΔΒΓ, & ἐγγεγράφθω εἰς τ ΔΒΓ κύκλον τριγώνυ μὲν ἰσοπλεύρυ πλευρὰ ἡ ΓΔ, πενταγώνυ δὲ ἡ ΑΓ, & εἰλήφθω τὸ κέντρον τῦ κύκλυ τὸ Ε, & ἀπὸ τῦ Ε ἐπὶ τὰς ΔΓ, ΓΑ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ, & ἐκβεβλήθω ἐπ' εὐθείας τ ΕΗ εὐθεῖα ἡ ΗΒ, & ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, & ἐκκείσθω κύβυ πλευρὰ ἡ Θ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τ δωδεκαέδρυ ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τῦ εἰκοσαέδρυ ἴσην ἡ Θ πρὸς τὴν ΓΔ.

Ἐπεὶ γὰρ συναμφοτέρου τ ΕΒΓ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΒΕ, & ἔστι συναμφοτέρου μὲν τ ΕΒΓ ἡμίσεια ἡ ΕΗ, τ δὲ ΒΕ ἡμίσεια ἡ ΕΖ· καὶ τ ΕΗ ἄρα ἄκρον & μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΕΖ. ἔστι δὲ καὶ τῆς Θ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμα ἡ ΓΑ, ὡς ἐν τῷ δωδεκαέδρῳ ἐδείχθη· ὡς ἄρα ἡ Θ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΕΖ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ Θ, ΖΕ τῷ ὑπὸ ΓΑ, ΕΗ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Θ πρὸς τὴν ΓΔ ἅτως τὸ ὑπὸ Θ, ΕΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΔ, ΕΖ, τῷ δὲ ὑπὸ Θ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΓΑ, ΕΗ· ὡς ἄρα ἡ Θ πρὸς τὴν ΓΔ ἅτως τὸ ὑπὸ ΓΑ, ΕΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΔ, ΕΖ, τυτέστι ὡς ἡ τ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν οὕτως ἡ Θ πρὸς τὴν ΓΔ.

ΑΛΛΩΣ

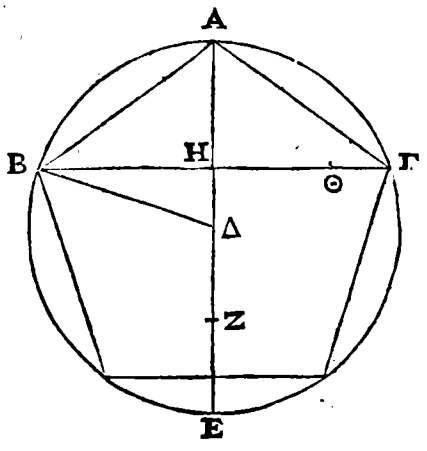
Δεῖξαι, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ τῦ δωδεκαέδρυ ὀπιφάνεια πρὸς τ τῦ εἰκοσαέδρυ ὀπιφάνειαν, ἅτως ἡ τ κύβυ πλευρὰ πρὸς τ τ εἰκοσαέδρυ πλευρὰν προγεγραφέντος τοῦδε.

ΛΗΜΜΑ.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, & ἐγγεγράφθω εἰς τ ΑΒΓ κύκλον πενταγώνου ἰσοπλεύρου πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΓ, & ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, & εἰλήφθω τὸ κέντρον τῦ κύκλυ τὸ Δ, & ἀπὸ τῦ Α ὁπὶ τὸ Δ ἐπεζεύχθω εὐθεῖα ἡ ΑΔ, & ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τ ΑΔ εὐθεῖα ἡ ΔΕ, & κείσθω τ μ' ΑΔ εὐθείας ἡμίσεια ἡ ΔΖ, ἡ δὲ ΗΓ τ ΓΘ τριπλῆ ἔστω· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΒΘ ἴσον ἐστὶ τῷ πενταγώνῳ.

Ἀπὸ γὰρ τῦ Β ὁπὶ τὸ Δ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ. & ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΔ τ ΔΖ, ἡμιολία ἄρα ἐστὶ τ ΑΔ ἡ ΑΖ.

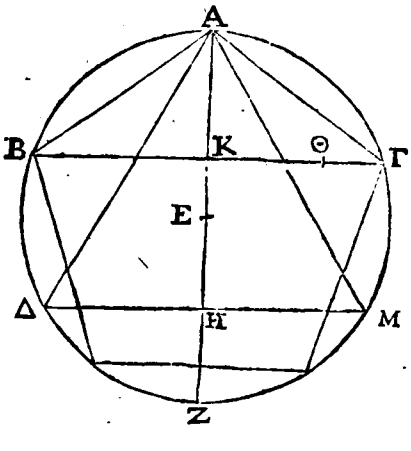
ΑΖ. πάλιν, ἐπεὶ τριπλῆ ἐστιν ἡ ΗΓ τῆς ΓΘ, διπλῆ δὲ ἡ ΗΘ τῆς ΘΓ, ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΓ τῆς ΘΗ· ὡς ἄρα ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΑΔ ὅτως ἡ ΓΗ πρὸς τὴν ΗΘ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΘΗ τῷ ὑπὸ ΑΔ, ΓΗ. ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΒΗ ἴση ἐστί· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΔ, ΒΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΖ, ΘΗ. τὸ δὲ ὑπὸ ΑΔ, ΒΗ δύο ἐστὶ τρίγωνα ὡς τὸ ΑΒΔ· καὶ τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΗΘ ἄρα δύο ἐστὶ ΑΒΔ· πέντε ἄρα τὰ ὑπὸ ΑΖ, ΗΘ δέκα τρίγωνά ἐστι. δέκα δὲ τρίγωνα δύο ἐστὶ πεντάγωνα· πέντε ἄρα τὰ ὑπὸ ΑΖ, ΗΘ δύο πενταγώνοις ἴσα ἐστί. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΗΘ τῆς ΘΓ, τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΗΘ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΖ, ΘΓ· δύο ἄρα τὰ ὑπὸ ΑΖ, ΘΓ ἴσα ἐστὶν ἑνὶ τῷ ὑπὸ ΑΖ, ΗΘ, καὶ δέκα τὰ ὑπὸ ΑΖ, ΘΓ ἴσα ἐστὶν πέντε τοῖς ὑπὸ ΑΖ, ΗΘ, τουτέστι δύο πενταγώνοις· ὥστε πέντε τὰ ὑπὸ ΑΖ, ΘΓ ἴσα ἐστὶν ἑνὶ πενταγώνῳ. πεντάκις δὲ τὰ ὑπὸ ΑΖ, ΘΓ ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΖ, ΘΒ, ἐπεὶ δὴ πενταπλῆ ἐστιν ἡ ΘΒ τῆς ΘΓ, ἡ κοινὸν ὕψος ἐστὶ ἡ ΑΖ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΖ, ΒΘ ἴσον ἐστὶν ἑνὶ πενταγώνῳ.



ΤΟΥΤΟΥ δήλου ὄντος, νοῦν ἐκκείσθω κύκλος ὁ περιλαμβάνων τὸ, τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον, τῇ εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων, καὶ ἐγγεγράφθωσαν εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ ΒΑ, ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ διὰ τοῦ Α διὰ τοῦ Ε ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΕ διὰ τοῦ Ζ, καὶ ἔστω ἡ ΑΕ τῆς ΕΘ διπλῆ, τριπλῆ δὲ ἡ ΚΓ τῆς ΓΘ, καὶ διὰ τοῦ Η τῇ ΑΖ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΜ· τριγώνου ἄρα ἐστὶν ἰσοπλεύρου ἡ ΔΜ· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΜ τρίγωνον. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ὑπὸ ΑΗ, ΘΒ ἴσον ἐστὶ τῷ πενταγώνῳ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΗ, ΗΔ τῷ ΑΔΜ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΘΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΗΔ οὕτω τὸ πεντάγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΗΔ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΔΗ· καὶ ὡς ἄρα δώδεκα αἱ ΘΒ πρὸς εἴκοσι ΔΗ οὕτω δώδεκα πεντάγωνα πρὸς εἴκοσι τρίγωνα, τουτέστι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου. καὶ ἔστι δώδεκα μὲν αἱ ΒΘ δέκα αἱ ΒΓ, ἡ μὲν γὰρ ΒΘ τῆς ΘΓ ἐστὶ πενταπλῆ, ἡ δὲ ΒΓ τῆς ΘΓ ἑξαπλῆ·

tera. rursus, quoniam ΗΓ tripla est ipsius ΓΘ, erit ΗΘ ipsius ΘΓ dupla: sesquialtera igitur est ΗΓ ipsius ΘΗ: quare ut ΖΑ ad ΑΔ ita ΓΗ ad ΗΘ: ideoque [per 16. 6.] contentum sub ΑΖ, ΘΗ est æquale ei quod sub ΔΑ, ΓΗ continetur. sed ΓΗ est æqualis ΒΗ: ergo contentum sub ΑΔ, ΒΗ est æquale ei quod sub ΑΖ, ΘΗ continetur. contentum autem sub ΑΔ, ΒΗ [per 41. 1.] est æquale duobus triangulis ut ΑΒΔ: quod igitur sub ΑΖ, ΗΘ continetur æquale est duobus triangulis ΑΒΔ: ergo quinque rectangula contenta sub ΑΖ, ΗΘ decem sunt triangula. decem autem triangula duo pentagona sunt: quinque igitur rectangula contenta sub ΑΖ, ΗΘ duobus pentagonis sunt æqualia. & quoniam ΗΘ est dupla ΘΓ, erit contentum sub ΑΖ, ΗΘ duplum ejus quod sub ΑΖ, ΘΓ continetur; ergo duo rectangula contenta sub ΑΖ, ΘΓ sunt æqualia uni quod continetur sub ΑΖ, ΗΘ decem igitur rectangula contenta sub ΑΖ, ΘΓ sunt æqualia quinque quæ sub ΑΖ, ΗΘ continentur, hoc est duobus pentagonis: ergo quinque contenta sub ΑΖ, ΘΓ uni pentagono sunt æqualia. quinque autem rectangula contenta sub ΑΖ, ΘΓ sunt æqualia ei quod continetur sub ΑΖ, ΘΒ; quoniam ΘΒ quidem quintupla est ipsius ΘΓ, & ΑΖ est communis altitudo: quod igitur sub ΑΖ, ΒΘ continetur uni pentagono est æquale.

Hoc demonstrato, nunc exponatur circulus comprehendens & dodecaedri pentagonum & icosaedri triangulum in eadem sphæra descriptorum, atque in circulo ΑΒΓ describantur æquilateri pentagoni latera ΒΑ, ΑΓ, & jungatur ΒΓ; sumatur præterea circuli centrum Ε, & ab Α ad Ε ducatur ΑΕ, & producatur ΑΕ ad Ζ; sitque ΑΕ dupla ipsius ΕΗ, ipsa vero ΚΓ ipsius ΓΘ tripla; & per Η ipsi ΑΖ ad rectos angulos ducatur ΔΜ: ergo [per cor. 1. 14.] ΔΜ est latus trianguli æquilateri, & æquilaterum est ΑΔΜ triangulum. & quoniam [per lem. præm.] rectangulum quidem contentum sub ΑΗ, ΘΒ est æquale pentagono; contentum vero sub ΑΗ, ΗΔ [per 41. 1.] æquale triangulo ΑΔΜ: erit ut rectangulum contentum sub ΑΗ, ΘΒ ad rectangulum sub ΑΗ, ΗΔ ita pentagonum ad triangulum. ut autem rectangulum contentum sub ΑΗ, ΒΘ ad rectangulum sub ΑΗ, ΗΔ ita [per 1. 6.] ΒΘ ad ΔΗ: & igitur ut duodecim ΘΒ ad viginti ΔΗ ita duodecim pentagona ad viginti triangula; hoc est, dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri. & duodecim quidem ΒΘ sunt decem ΒΓ; etenim ΒΘ quintupla est [per constr.] ipsius ΘΓ, & ΒΓ ipsius ΘΓ sextupla:



ideoque duodecim B Θ ſunt æquales decem B Γ. viginti autem Δ H ſunt decem Δ M; dupla enim eſt Δ M ipſius Δ H: ut igitur decem B Γ ad decem Δ M, hoc eſt ut B Γ ad Δ M, ita dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri. atque [per 8. & 17. 13.] eſt B Γ quidem cubi latus, Δ M vero latus icoſaedri: & igitur ut dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri ita B Γ ad Δ M, hoc eſt cubi latus ad latus icoſaedri.

δώδεκα ἄρα αἱ Β Θ ἴσαι εἰσὶ δέκα τῇ Β Γ. ἔστιν δὲ ἡ Δ Η δέκα εἶσιν αἱ Δ Μ, διπλῆ γὰρ ἡ Δ Μ τῆς Δ Η· ὡς ἄρα δέκα αἱ Β Γ πρὸς δέκα τὰς Δ Μ, τουτέστιν ὡς ἡ Β Γ πρὸς τὴν Δ Μ, ἔστως ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν. καὶ ἔστιν ἡ μὲν Β Γ ἡ τοῦ κύβου πλευρά, ἡ δὲ Δ Μ ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρά· καὶ ὡς ἄρα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν ἔστως ἡ Β Γ πρὸς τὴν Δ Μ, τουτέστιν ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν.

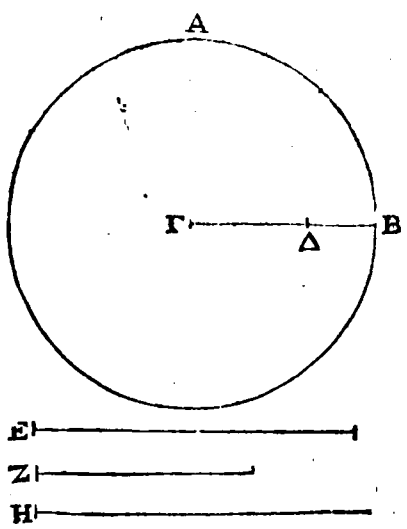
Prop. V. Theor.

Oſtendendum vero eſt etiam, qualibet recta linea extrema ac media ratione ſecta, quam rationem habet ea quæ poteſt quadratum totius & quadratum majoris portionis ad eam quæ poteſt quadratum totius & quadratum minoris portionis, eandem habere cubi latus ad latus icoſaedri.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Δεικτέον δή, ὅτι καὶ εὐθείας ἠσθηποτοῦν τμηθείσης ἄκρον καὶ μέσον λόγον, ὃν λόγον ἔχει ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν.

SIT circulus A B comprehendens & dodecaedri pentagonum & [per 2. 14.] icoſaedri triangulum in eadem ſphæra deſcriptorum, ſumaturque circuli centrum Γ, & à Γ ducatur recta linea utcunque Γ B, & ſecetur extrema ac media ratione in Δ ita ut Γ Δ ſit major portio: quare [per 5. & 9. 13.] Γ Δ eſt latus decagoni in eodem circulo deſcripti. exponatur [per 18. 13.] icoſaedri latus E, dodecaedri Z, & cubi H: ergo E eſt trianguli æquilateri latus, Z pentagoni in eodem circulo deſcripti, atque [per cor. 17. 13.] eſt Z ipſius H major portio. & quoniam E eſt æqualis lateri trianguli æquilateri; trianguli autem æquilateri latus [per 12. 13.] eſt potentia triplum ipſius B Γ: ergo quadratum ex E quadrati ex B Γ eſt triplum. ſuntque [per 4. 13.] quadrata ex B Γ, B Δ quadrati ex Γ Δ tripla; & permutando igitur ut quadratum ex E ad quadrata ex Γ B, B Δ ita quadratum ex Γ B ad quadratum ex Γ Δ. ſed [per 7. 14.] ut quadratum ex B Γ ad quadratum ex Γ Δ ita eſt quadratum ex H ad quadratum ex Z, eſt enim [per 17. 13.] Z major portio ipſius H: & igitur ut quadratum ex E ad quadrata ex Γ B, B Δ ita quadratum ex H ad quadratum ex Z; & permutando invertendoque: ergo ut quadratum ex H ad quadratum ex E ita quadratum ex Z ad quadrata ex Γ B, B Δ. quadrato autem ex Z æqualia ſunt quæ ex B Γ, Δ Γ fiunt quadrata; etenim [per 10. 13.] latus pentagoni poteſt & hexagoni & decagoni latus: ut igitur quadratum ex H ad quadratum ex



ΕΣτω κύκλος ὁ Α Β περιλαμβάνων τό,τε τοῦ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον, τὴν εἰς τὸν αὐτὸν σφαῖραν ἐγγραφομένων, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθω τις ἀπὸ τοῦ Γ ὡς ἔτυχεν εὐθεῖα ἡ Γ Β, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Δ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα ἔστω ἡ Γ Δ· δεκαγώνου ἄρα ἐστὶ πλευρὰ ἡ Γ Δ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου. εἰλήφθω δὴ εἰκοσαέδρου μὲν πλευρὰ ἡ Ε, δωδεκαέδρου δὲ ἡ Ζ, κύβου δὲ ἡ Η· ἡ μὲν ἄρα Ε τριγώνου ἰσοπλεύρου ἐστὶ πλευρά, ἡ δὲ Ζ πενταγώνου τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένου, ἡ δὲ Ζ τῆς Η μεῖζον ἐστὶ τμῆμα. καὶ ἐπεὶ ἡ Ε ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἰσοπλεύρου πλευρᾷ, ἡ δὲ τοῦ τριγώνου τὸ ἰσόπλευρον πλευρὰ δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς Β Γ· τριπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε τοῦ ἀπὸ τῆς Β Γ. ἔστι δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν Β Γ, Β Δ τριπλάσια τοῦ ἀπὸ τῆς Γ Δ· καὶ συναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ Ε πρὸς τὰ ἀπὸ Γ Β, Β Δ ἔστω τὸ ἀπὸ Γ Β πρὸς τὸ ἀπὸ Γ Δ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ Β Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ Δ ἔστως ἐστὶ τὸ ἀπὸ Η πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ· μεῖζον γάρ ἐστι τμῆμα ἡ Ζ τῆς Η· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Ε πρὸς τὸ ἀπὸ Γ Β, Β Δ ἔστω τὸ ἀπὸ Η πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ, καὶ συναλλὰξ καὶ ἀναπαλιν· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Η πρὸς τὸ ἀπὸ Ε ἔστω τὸ ἀπὸ Ζ πρὸς τὰ ἀπὸ Γ Β, Β Δ. τῷ δὲ ἀπὸ Ζ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ Β Γ, Δ Γ, ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου πλευράν, καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Η πρὸς τὸ ἀπὸ

Ε ἔστω

Ε ἔτω τὰ ἀπὸ ΒΓ, ΓΔ πρὸς τὰ ἀπὸ ΓΒ, ΒΔ. ὡς δὲ τὰ ἀπὸ ΒΓ, ΓΔ πρὸς τὰ ἀπὸ ΓΒ, ΒΔ, ἔτως, εὐθείας ἠσθημοτῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Η πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε, ἔτως, εὐθείας ἠσθημοτῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος. καὶ ἔστι ἡ μὲν Η κύβου πλευρὰ, ἡ δὲ Ε εἰκοσαέδρου.

Ε ita quadrata ex ΒΓ, ΓΔ ad quadrata ex ΓΒ, ΒΔ. ſed [per 7. 14.] ut quadrata ex ΒΓ, ΓΔ ad quadrata ex ΓΒ, ΒΔ, ita, qualibet recta linea extrema ac media ratione ſecta, quadratum totius & majoris portionis ad quadratum totius & minoris portionis: & igitur ut quadratum ex Η ad quadratum ex Ε, ita, qualibet recta linea extrema ac media ratione ſecta, quadratum totius & majoris portionis ad quadratum totius & minoris portionis. ſed eſt Η quidem cubi latus, Ε vero icoſaedri.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἔσται ὡς ἡ δυναμένη τὸ ὅλον καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ὅλον καὶ τὸ ἔλασσον τμῆμα, ἔτως ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου τὴν εἰς τὸν αὐτὸν σφαῖραν ἐγγραφομένων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Si igitur recta linea extrema ac media ratione ſecetur, erit ut ea quæ poteſt totam & majorem portionem ad eam quæ poteſt totam & minorem portionem, ita cubi latus ad latus icoſaedri in eadem ſphæra deſcriptorum. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Δεικτέον δὴ νῦν, ὅτι ὡς ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἔτω τὸ περιὸν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ περιὸν τοῦ εἰκοσαέδρου.

Prop. VI. Theor.

Oſtendendum vero nunc eſt, ut latus cubi ad icoſaedri latus ita eſſe dodecaedri ſolidum ad ſolidum icoſaedri.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσοι κύκλοι περιλαμβάνουσι τό,τε τοῦ δωδεκαέδρου πενταγωνον καὶ τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον, τῆ εἰς τὸν αὐτὸν σφαῖραν ἐγγραφομένων· αἱ δὲ τῆ σφαίρας αἱ ἴσοι κύκλοι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, αἱ γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆ σφαίρας ἐπὶ τὰ τῶν κύκλων ἐπίπεδα κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι τε εἰσὶ καὶ ἐπὶ τὰ κέντρα τῶν κύκλων πίπτουσιν· ὥστε αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆ σφαίρας ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ περιλαμβάνοντος τό,τε τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον καὶ τοῦ δωδεκαέδρου πενταγωνον ἴσαι εἰσὶ, τετίσι, αἱ κάθετοι· ἰσοϋψεῖς ἄρα εἰσὶν αἱ πυραμίδες, αἱ βάσεις ἔχουσαι τὰ τοῦ δωδεκαέδρου πενταγωνα καὶ αἱ βάσεις ἔχουσαι τὰ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνα. αἱ δὲ ἰσοϋψεῖς πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ὡς ἄρα τὸ πενταγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον ἔτως ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν ἐστι τὸ τοῦ δωδεκαέδρου πενταγωνον κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον τῆ σφαίρας, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν ἐστι τὸ τοῦ εἰκοσαέδρου τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον τῆ σφαίρας· καὶ ὡς ἄρα δώδεκα πενταγωνα πρὸς εἴκοσι τρίγωνα ἔτω δώδεκα πυραμίδες πενταγώνους βάσεις ἔχουσαι πρὸς εἴκοσι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας. καὶ δώδεκα πενταγωνα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνειά ἐστιν, εἴκοσι δὲ τρίγωνα ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειά ἐστιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν ἔτω δώδεκα πυραμίδες πενταγώνους βάσεις ἔχουσαι πρὸς εἴκοσι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας. καὶ εἰσὶ δώδεκα μὲν πυραμίδες πενταγώνους βάσεις ἔχουσαι τὸ περιὸν τοῦ δωδεκαέδρου, εἴκοσι δὲ πυραμίδες τριγώνους βάσεις ἔχουσαι τὸ περιὸν τοῦ εἰκοσαέδρου· καὶ ὡς ἄρα ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἔτω τὸ περιὸν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ περιὸν τοῦ εἰκοσαέδρου. ὡς δὲ ἐπιφάνεια τοῦ δωδεκαέδρου

Quoniam enim [per 2.14.] æquales circuli comprehendunt & dodecaedri pentagonum & icoſaedri triangulum in eadem ſphæra deſcriptorum: in ſphæris autem æquales circuli æqualiter à centro diſtant; nam quæ à centro ſphæræ ad plana circulorum perpendiculares ducuntur & æquales ſunt & in centra circulorum cadunt; ergo quæ à centro ſphæræ ducuntur ad centra circulorum, quæ comprehendunt dodecaedri pentagonum & icoſaedri triangulum, æquales ſunt, videlicet perpendiculares ipſæ; itaque & pyramides, quæ baſes habent dodecaedri pentagona & icoſaedri triangula, æqualtæ ſunt. pyramides autem æqualtæ [per 5. & 6.12.] inter ſe ſunt ut baſes: ut igitur pentagonum ad triangulum ita pyramis, cujus baſis eſt dodecaedri pentagonum & vertex centrum ſphæræ, ad pyramidem, cujus baſis eſt icoſaedri triangulum vertex autem ſphæræ centrum, ergo & ut duodecim pentagona ad viginti triangula ita duodecim pyramides, pentagonales baſes habentes, ad viginti pyramides quæ triangulares habent baſes. ſed duodecim pentagona ſunt dodecaedri ſuperficies, & viginti triangula ſuperficies icoſaedri: eſt igitur ut dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri ita duodecim pyramides, pentagonales baſes habentes, ad viginti pyramides, quæ triangulares baſes habent. & duodecim pyramides, pentagonales baſes habentes, ſunt dodecaedri ſolidum; viginti autem pyramides, quæ triangulares habent baſes, ſunt ſolidum icoſaedri: quare & ut dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri ita ſolidum dodecaedri ad icoſaedri ſolidum. ut autem dodecaedri ſuperfi-

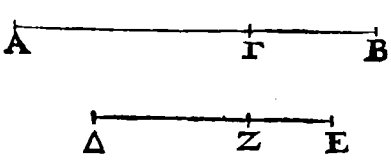
cies ad ſuperficiem icoſaedri ita oſtenſum eſt [ad 4. 14.] eſſe latus cubi ad icoſaedri latus: & igitur ut latus cubi ad icoſaedri latus ita dodecaedri ſolidum ad ſolidum icoſaedri.

πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ εἰκοσαέδρου ἄτως ἐδείχθη ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰν ἄτω τὸ στερεὸν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ στερεὸν τοῦ εἰκοσαέδρου.

PROP. VII. THEOR.

Deinde vero, ſi duæ rectæ lineæ extrema ac media ratione ſectæ fuerint, in ſubjecta eas eſſe analogia, ita demonſtrabimus.

SEcetur enim AB extrema ac media ratione in Γ, & ejus major portio ſit AΓ; & ſimiliter ΔE extrema ac media ratione ſecetur in Z, ut ΔZ ſit ejus portio major: dico ut tota AB ad majorem portionem AΓ ita eſſe totam ΔE ΔZ majorem portionem.



Quoniam enim [per 17. 6.] rectangulum quidem ſub AB, BΓ eſt æquale quadrato ex AΓ; rectangulum vero ſub ΔE, EZ æquale quadrato ex ΔZ: erit ut rectangulum ſub AB, BΓ ad quadratum ex AΓ ita rectangulum ſub ΔE, EZ ad quadratum ex ΔZ: quare etiam [per 15. 5.] ut rectangulum quod quater continetur ſub AB, BΓ ad quadratum ex AΓ ita quod quater continetur ſub ΔE, EZ ad quadratum ex ΔZ. componendoque ut rectangulum quod quater continetur ſub AB, BΓ una cum quadrato ex AΓ ad quadratum ex AΓ ita quod quater continetur ſub ΔE, EZ una cum quadrato ex ΔZ ad quadratum ex ΔZ. ergo etiam [per 8.2.] ut quadratum ex utraque ſimul AB, BΓ ad quadratum ex AΓ ita quadratum ex utraque ſimul ΔE, EZ ad quadratum ex ΔZ: quare [per 22. 6.] & longitudine; ſc. ut utraque ſimul AB, BΓ ad AΓ ita utraque ſimul ΔE, EZ ad ΔZ: unde componendo ut utraque ſimul AB, BΓ una cum AΓ ad AΓ, hoc eſt duæ AB ad AΓ, ita utraque ſimul ΔE, EZ una cum ΔZ ad ΔZ, hoc eſt duæ ΔE ad ΔZ: pariterque antecedentium dimidia; videlicet ut AB ad AΓ ita ΔE ad ΔZ. quod erat demonſt.

Corollarium.

Iaque hoc [ad 5. 14.] demonſtrato; videlicet, qualibet recta linea extrema ac media ratione ſecta, quam rationem habet ea quæ poteſt quadratum totius & majoris portionis ad eam quæ poteſt quadratum totius & minoris portionis, eandem habere cubi latus ad latus icoſaedri. atque hoc etiam demonſtrato [ad 5. 14.] ut latus cubi ad icoſaedri latus, ita eſſe dodecaedri ſuperficiem ad ſuperficiem icoſaedri in eadem ſphæra deſcriptorum: & inſuper hoc [ad 6. 14.] cognito, ut dodecaedri ſuperficies ad ſuperficiem icoſaedri ita eſſe dodecaedrum ad ipſum icoſaedrum; propterea quod idem cir-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Καὶ ἐξῆς, ὅτι ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῶσιν, αἱ ἀναλογίαι εἰσὶ τῇ ὑποκειμένῃ, δείξομεν ἄτως.

ΤΕτμήθω γὰρ ἡ μὲν ΑΒ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, μεῖζον δὲ τμῆμα αὐτῆς ἔστω ἡ ΑΓ· ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΔΕ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Ζ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα αὐτῆς ἔστω ἡ ΔΖ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὅλη ἡ ΑΒ πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα τὴν ΑΓ ἄτως ὅλη ἡ ΔΕ πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα τὴν ΔΖ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΓ, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΔΖ· ἔστι δὲ ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ ἄτως τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ· καὶ ὡς τὸ τετράκις ἄρα ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τὴν ΑΓ ἐστιν ἄτω τὸ τετράκις ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ. καὶ συνθέντι ἐστὶν ὡς τὸ τετράκις ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ ἄτω τὸ τετράκις ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΔΖ· ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ ἄτω τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ· καὶ μήκει, ὡς συναμφότερος ἡ ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὴν ΑΓ ἄτω συναμφότερος ἡ ΔΕ, ΕΖ πρὸς ΔΕ· συνθέντι ἄρα ὡς συναμφότεροι αἱ ΑΒ, ΒΓ μετὰ τὴν ΑΓ πρὸς τὴν ΑΓ ἄτω συναμφότεροι αἱ ΔΕ, ΕΖ μετὰ τῆς ΔΖ πρὸς τὴν ΔΖ, τουτέστι δύο αἱ ΔΕ πρὸς ΔΖ· καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἥμισυ, τουτέστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΔΖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Δεδειγμένου τοῦδε, ὅτι, εὐθείας ἡσδηποτοῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθείσης, ὃν λόγον ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, τοῦτον ἔχει ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν. δεδειγμένου δὴ τοῦδε, ὅτι ὡς ἡ τοῦ κύβου πλευρὰ πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου πλευράν, ἄτως ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν τὴν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφομένων· συνεστηνεγμένου δὲ καὶ τοῦδε, ὅτι ὡς ἡ τοῦ δωδεκαέδρου ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιφάνειαν ἄτως καὶ αὐτὸ τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον, διὰ τὸ ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ κύ-

κλου

κλὰ ϖεϊλαμβάνεσθαι τό, τε τὲ δωδεκαέδρου πεντάγωνον καὶ τὸ τὲ εἰκοσαέδρε τρίγωνον· δῆλον ὅτι ἐὰν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφῇ δωδεκάεδρόν τε καὶ εἰκοσάεδρον, λόγον ἔξουσιν εὐθείας οἱασδηποτῦν ἄκρον ϗ μέσον λόγιν τμηθείσης ἡ δυναμένη τὸ ἀπὸ τῆ ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τῆ μείζονος τμήματος πρὸς τὴν δυναμένην τὸ ἀπὸ τῆ ὅλης καὶ τὸ ἀπὸ τῆ ἐλάσσονος τμήματος.

[Τύτων δὴ πάντων γνωρίμων ἡμῖν γενομένων, δῆλον ὅτι ἐὰν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφῇ δωδεκάεδρον καὶ εἰκοσάεδρον, τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον λόγον ἔξει ὃν εὐθεῖα οἱασδηποτῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης ἡ δυναμένη τὴν ὅλην ϗ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὴν ὅλην ϗ ἔλαττον τμῆμα.

Επεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον ὕτως ἡ τῆ δωδεκαέδρε ἐπιφάνεια πρὸς τὴν τῆ εἰκοσαέδρε, τυτέστιν ὡς ἡ τῆ κύβε πλευρὰ πρὸς τὴν τῆ εἰκοσαέδρε πλευράν· ὡς δὲ ἡ τῆ κύβε πλευρὰ πρὸς τὴν τῆ εἰκοσαέδρε, ὕτως ἐστὶν εὐθείας ἡς δηποτῦν ἄκρον ϗ μέσον λόγον τετμημένης, ἡ δυναμένη τὴν ὅλην ϗ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὴν δυναμένην τὴν ὅλην καὶ τὸ ἔλαττον τμῆμα· ὡς ἄρα τὸ δωδεκάεδρον πρὸς τὸ εἰκοσάεδρον τὲ εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγραφόμενον, ὕτως, εὐθείας ἡς δηποτῦν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, ἡ δυναμένη τὴν ὅλην καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὴν δυναμένην τὴν ὅλην καὶ τὸ ἔλαττον τμῆμα.]

culus comprehendit & dodecaedri pentagonum & icosaedri triangulum: constat, si in ipsa sphæra describatur & dodecaedrum & icosaedrum, eandeminter se rationem habere, quam, si recta linea extrema ac media ratione secetur, habet ea quæ potest quadratum totius & majoris portionis ad eam quæ potest quadratum totius ac minoris portionis.

[Istis ergo omnibus jam notis, patet, si eidem sphæræ inscribantur dodecaedrum & icosaedrum, eam rationem habere dodecaedrum ad icosaedrum, quam, si recta quævis extrema ac media ratione secetur, ea quæ potest totam & portionem majorem ad illam quæ totam & minorem portionem potest.

Quoniam enim est [per 5. 14.] ut dodecaedrum ad icosaedrum ita dodecaedri superficies ad superficiem icosaedri, hoc est ita latus cubi ad icosaedri latus; ut autem latus cubi ad icosaedri latus, ita, qualibet recta linea extrema ac media ratione secta, potens quadratum totius & majoris portionis ad eam quæ potest quadratum totius & minoris portionis: ergo ut dodecaedrum ad icosaedrum, quæ in eadem sphæra describuntur, ita, qualibet recta linea extrema ac media ratione secta, potens quadratum totius & majoris portionis ad eam quæ potest quadratum totius & minoris portionis.]

Cuncta autem ista uncis conclusa rectius omitti possunt: etsi in omnibus quidem *Codicibus Græcis* reperiantur.

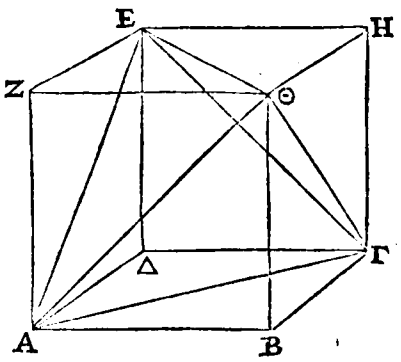
ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΣΣΑΡΕΣΚΑΙΔΕΚΑΤΟΝ,
ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΩΝ ΠΕΜΠΤΟΝ,
ΩΣ ΟΙΟΝΤΑΙ ΤΙΝΕΣ,
Ὡς ἄλλοι δέ, ΥΨΙΚΛΕΟΥΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ περὶ τῶν ε'. σωμάτων δεύτερον.

EUCLIDIS,
UT QUIDAM ARBITRANTUR,
ELEMENTORUM
LIBER DECIMUSQUINTUS,
QUI ET SOLIDORUM QUARTUS,
Aut, *verius* juxta alios, HYPSICLIS ALEXANDRINI de Quinque Corporibus Liber ſecundus.

PROP. I. PROBL.

In dato cubo *pyramidem deſcribere.

SIT datus cubus ΑΒΓΔ ΕΖΗΘ, in quo oporteat pyramidem deſcribere. jungantur ΑΓ, ΑΕ, ΓΕ, ΑΘ, ΕΘ, ΘΓ. itaque perſpicuum eſt triangula ΑΕΓ, ΑΘΕ, ΑΘΓ, ΓΘΕ æquilatera eſſe; quadratorum enim diametri ſunt eorum latera: pyramis igitur eſt ΑΕΓΘ [per 26. def. 11.] & deſcripta eſt in dato cubo. quod erat faciendum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Εἰς τὴν δοθέντα κύβον πυραμίδα ἐγγράψαι.

ΕΣΤΩ ὁ δοθεὶς κύβος ὁ ΑΒΓΔΕΖΗΘ, εἰς ὃν δεῖ πυραμίδα ἐγγράψαι. ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΑΕ, ΓΕ, ΑΘ, ΕΘ, ΘΓ. φανερὸν δὴ ὅτι τὰ ΑΕΓ, ΑΘΕ, ΑΘΓ, ΓΘΕ τρίγωνα ἰσόπλευρά ἐστι, τετραγώνων χωρίων διάμετροι αἱ πλευραί· πυραμὶς ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕΓΘ, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν δοθέντα κύβον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

PROP. II. PROBL.

In data pyramide octaedrum deſcribere.

SIT data pyramis ΑΒΓΔ, cujus latera ſecentur bifariam in punctis Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ, atque jungantur ΘΚ, ΘΛ, ΕΖ, ΖΗ & reliquæ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

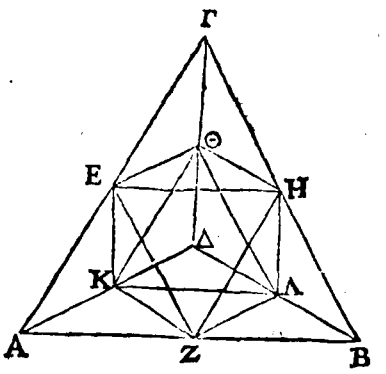
Εἰς τὴν δοθεῖσαν πυραμίδα ὀκτάεδρον ἐγγράψαι.

ΕΣΤΩ ἡ δοθεῖσα πυραμὶς ἡ ΑΒΓΔ, καὶ τετμήσθω δίχα ταῖς Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ σημείοις, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΚ, ΘΛ, ΕΖ, ΖΗ καὶ αἱ λοιπαί.

* Sive potius *tetraedron*, quod & in ſequentibus intelligendum eſt.

* καὶ

* καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ διπλῆ ἐστιν ἑκατέρας τῶν ΘΚ, ΗΖ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ τῇ ΗΖ καὶ παράλληλος. ὁμοίως καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΖΚ ἴση τέ ἐστι καὶ παράλληλος· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΚΖΗ. λέγω ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐὰν γὰρ ἀπὸ τῶν ΚΛ καθῶσιν ἐπὶ τὰ διπλάσια τὰ ΕΖΒΗ, ΖΓΕΗ, ΕΖΘΗ, ΘΚΖΗ, ὁμοίως δείξομεν τὸ ὑπὸ ΘΚΖΗ τετραγώνου ἰσόπλευρα. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

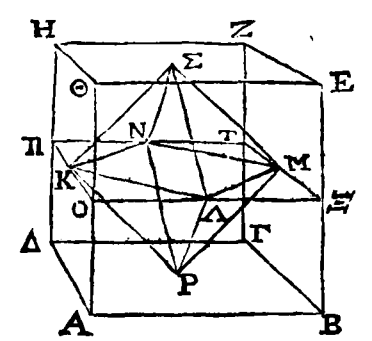


* quoniam igitur ΑΓ dupla eſt utriuſque ΘΚ, ΗΖ, erit ΘΚ ipſi ΗΖ æqualis & parallela. ſimiliter & ΘΗ æqualis & parallela ipſi ΖΚ: æquilaterum igitur eſt ΘΚΖΗ. dico & rectangulum eſſe. ſi enim ab ipſis ΚΛ perpendiculares ducantur ad plana ΕΖΒΗ, ΖΓΕΗ, ΕΖΘΗ, ΘΚΖΗ, ſimiliter demonſtrabimus quæ in quadrato ΘΚΖΗ æquilatera eſſe. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Εἰς τὴν δοθεῖσαν κύβον ὀκτάεδρον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύβος ὁ ΑΒΓΔΕΖΗΘ, καὶ εἰλήφθω τὰ κέντρα ἐφεξῆς τῶν τετραγώνων τὰ Κ, Λ, Μ, Ν· λέγω ὅτι τὸ ΚΛΜΝ τετράγωνόν ἐστιν. ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Κ, Λ, Μ, Ν σημείων τῶν ΔΑ, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ παράλληλοι αἱ ΠΟ, ΟΞ, ΞΤ, ΤΠ. ἐπεὶ οὖν διπλῆ ἐστιν ἡ ΠΟ τῆς ΟΚ, ἡ δὲ ΞΟ τῆς ΟΛ, ἴση ἡ ΠΟ τῇ ΞΟ, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ δὴ καὶ ἡ ΟΚ τῇ ΟΛ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΚΛ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΟΛ. ἀπὸ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ἀπὸ ΜΛ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΛΞ· ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΚΛ τῷ ἀπὸ ΜΛ, καὶ ἡ ΚΛ τῇ ΜΛ· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΛΜΝ. καὶ φανερὸν ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. εἰλήφθω τὰ ΒΔ, ΕΗ δύο τετράγωνα, καὶ τὰ κέντρα τὰ Ρ, Σ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΡΚ, ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ, ΣΚ, ΣΛ, ΣΜ, ΣΝ. καὶ φανερὸν ὅτι ἰσόπλευρά ἐστι τὰ ποιοῦντα τὸ ὀκτάεδρον τρίγωνα· τῷ γὰρ αὐτῷ λόγῳ ἀποδείξομεν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.



PROP. III. PROBL.

In dato cubo octaedrum deſcribere.

SIT datus cubus ΑΒΓΔΕΖΗΘ, & ſumantur centra inſiſtentium quadratorum Κ, Λ, Μ, Ν: dico ΚΛΜΝ quadratum eſſe. ducantur enim per Κ, Λ, Μ, Ν ipſis ΔΑ, ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ parallelæ ΠΟ, ΟΞ, ΞΤ, ΤΠ. quoniam igitur ΠΟ quidem dupla eſt ipſius ΟΚ, & ΞΟ dupla ipſius ΟΛ, ſuntque æquales ΠΟ, ΟΞ; erunt & ΟΚ, ΟΛ inter ſe æquales: quadratum igitur ex ΚΛ [per 47. 1.] duplum eſt quadrati ex ΟΛ. eadem ratione & quadratum ex ΜΛ duplum eſt quadrati ex ΛΞ: ergo quadratum ex ΚΛ quadrato ex ΜΛ eſt æquale, & ipſa ΚΛ ipſi ΜΛ æqualis: æquilaterum igitur eſt ΚΛΜΝ. & conſtat etiam illud rectangulum eſſe. ſumantur duo quadrata ΒΔ, ΕΗ, ipſorumque centra Ρ, Σ; atque jungantur ΡΚ, ΡΛ, ΡΜ, ΡΝ, ΣΚ, ΣΛ, ΖΜ, ΣΝ. perſpicuum eſt æqualia triangula, quæ octaedrum efficiunt, æquilatera eſſe; hoc enim eadem ratione demonſtrabimus. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Εἰς τὸ δοθὲν ὀκτάεδρον κύβον ἐγγράψαι.

Εἰλήφθω τὰ σημεῖα τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΒΕ, ΑΔΕ τρίγωνα κύκλων τὰ κέντρα τὰ Θ, Λ, Η, Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΘ, ΗΚ, ΛΚ, ΛΘ· λέγω ὅτι ΗΘΚΛ τετράγωνόν ἐστιν. ἤχθωσαν διὰ τῶν Η, Θ, Κ, Λ, τῇς ΕΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ παράλληλοι αἱ

PROP. IV. PROBL.

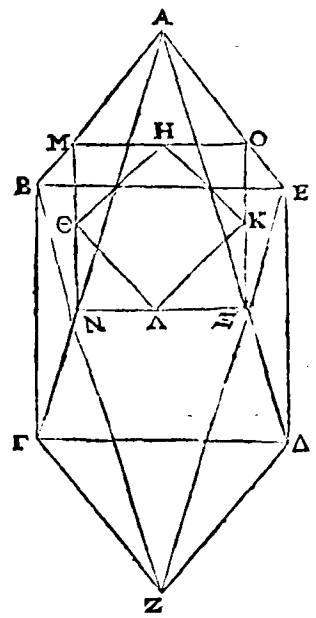
In dato octaedro cubum deſcribere.

SUmantur [per 5. 4.] centra circulorum qui ſunt circa triangula ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΒΕ, ΑΔΕ, quæ ſint Θ, Λ, Η, Κ; atque ΗΘ, ΗΚ, ΛΚ, ΛΘ jungantur: dico ΗΘΚΛ quadratum eſſe. ducantur per Η, Θ, Κ, Λ ipſis ΕΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ paral-

* Univerſus hic liber decimus quintus corruptiſſimus eſt. Verum licet demonſtrationis modus abhorreat ab illo Veterum caſtigatiſſimo, in aliis propoſitionibus res aliquo ſaltem modo conficitur; in hac vero propoſitione quæ ſequuntur propoſitum nullo modo attingunt. liceat igitur breviter oſtendere per conſtructionem prædictam octaedrum in tetraedro eſſe deſcriptum. Quoniam ΔΑ & ΔΓ biſecantur in Κ & Θ, patet [ex 4. 6.] ΚΘ eſſe æqualem dimidiæ ipſius ΑΓ; eadem ratione ΘΛ æqualis eſt dimidiæ ipſius ΓΒ, item ΚΕ & ΛΗ dimidiæ ipſius ΔΓ æquales: ſimiliter ΘΕ æqualis eſt dimidiæ ipſius ΑΔ, item ΘΗ dimidiæ ipſius ΔΒ, & ΕΗ dimidiæ ipſius ΑΒ: pariterque ΚΛ, ΑΖ & ΖΚ ſunt æquales dimidiis ipſarum ΑΒ, ΑΔ & ΔΒ. Sed [per 26. def. 11.] ſex tetraedri latera ΑΒ, ΒΔ, ΔΑ, ΑΓ, ΓΒ, ΓΔ ſunt inter ſe æqualia; igitur & rectæ ΘΚ, ΘΛ, ΘΕ, ΘΗ, ΘΓ, ΖΕ, ΖΚ, ΖΗ, ΖΛ, ΗΛ, ΕΚ, ΕΗ ſunt inter ſe æquales. unumquodque igitur triangulorum ΘΚΛ, ΘΚΕ, ΘΕΗ, ΘΗΛ, ΖΕΗ, ΖΕΚ, ΖΚΛ, ΖΛΗ eſt æquilaterum: ſolidum igitur ΘΚΕΖΗΛ eſt octaedrum, cujus ſex anguli ſolidi Θ, Κ, Ε, Ζ, Η, Λ ſunt in mediis punctis ſex laterum dati tetraedri. quod erat demonſtrandum.

lelæ

lelæ MO, MN, NΞ, ΞO. quoniam igitur æquilaterum eſt ABΓ triangulum, recta linea quæ à puncto A ducitur ad Θ centrum circuli circa triangulum ABΓ deſcripti bifariam ſecat angulum ad A trianguli ABΓ: æqualis igitur eſt [per 4. 1.] NΘ ipſi MΘ. eadem ratione & MH eſt æqualis HO. quoniam autem MN eſt æqualis MO & MO ipſi OΞ; erit igitur & NΘ æqualis MH, & ΘM ipſi HO & MH ipſi OK. ſuntq; anguli ΘMH, HOK recti: ergo [per 4.1.] HΘ ipſi HK eſt æqualis. eadem ratione & reliquæ æquales erunt. cum igitur parallelogrammum ſit HΘKΛ [per 7. 11.] in uno erit plano. & cum uterque angulorum MHΘ, OHK ſit dimidius recti, reliquus ΘHK [per 13. 1.] rectus erit; ſimiliter & reliqui: quadratum igitur eſt HΘΛK. poſſumus autem à principio ſumentes centra H, Θ, K, Λ, ducenteſque parallelas MN, NΞ, ΞO, OM jungere HΘ, ΘΛ, ΛK, KH, & dicere HΘKΛ quadratum eſſe. quod ſi ſumentes reliquorum triangulorum centra, ipſa jungamus; oſtendentur & reliqua quadrata eſſe, habebimuſque in dato octaedro deſcriptum cubum. quod erat faciendum.

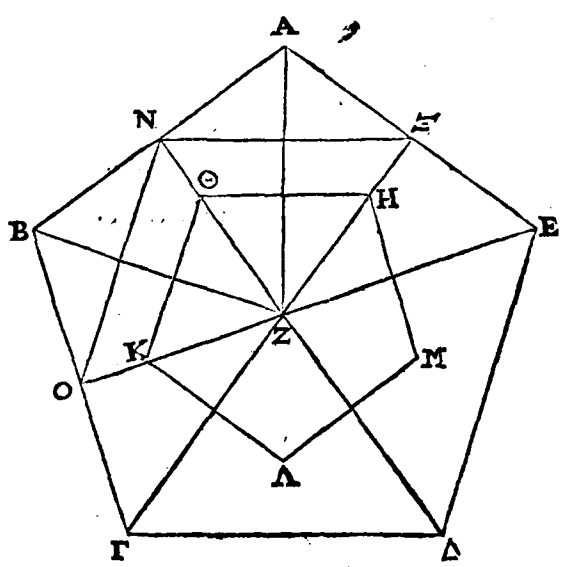


MO, MN, NΞ, ΞO. ἐπεὶ οὖν ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ ABΓ τρίγωνον, ἡ ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὸ Θ κέντρον τοῦ περὶ τὸ ABΓ τρίγωνον κύκλου δίχα τέμνει τὴν ὑπὸ τὰς τῷ A τῷ οὖ ABΓ τριγώνου· ἴση ἄρα ἡ NΘ τῇ MΘ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴση ἐστὶ καὶ ἡ MH τῇ HO. ἐπειδὴ δὲ ἡ MN τῇ MO, καὶ ἡ MO τῇ OΞ ἐστιν ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ NΘ τῇ MH, καὶ ἡ ΘM τῇ HO καὶ ἡ MH τῇ OK. αἱ δὲ ὑπὸ ΘMH, καὶ HOK ὀρθαί· ἐξ οὗ φανερὸν ὅτι ἡ HΘ ἴση ἐστὶ τῇ HK. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ λοιπαί. ἐπεὶ οὖν παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ HΘKΛ, ἐν ἑνί ἐστι τῶν ὑπὸ πέδῳ. καὶ ἐπεὶ ἡμισύ ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ MHΘ, OHK ὀρθῆς, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΘHK ὀρθή ἐστιν. ὁμοίως καὶ αἱ λοιπαί· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ HΘKΛ. δυνατὸν δὲ τὰ ἐξ ἀρχῆς λαμβάνοντα τὰ H, Θ, K, Λ κέντρα. καὶ παραλλήλους ἀγαγόντα τὰς MN, NΞ, ΞO, OM ἁπτεύξαι τὰς HΘ, ΘΛ, ΛK, KH, καὶ εἰπεῖν τὸ HΘKΛ τετράγωνον. ἐὰν δὴ λάβωμεν καὶ τῶν λοιπῶν τριγώνων τὰ κέντρα καὶ ἁπτεύξωμεν καὶ τὰ αὐτὰ, δείξομεν τὰ λοιπὰ τετράγωνα, καὶ ἕξομεν εἰς τὸ δοθέντα ὀκτάεδρον κύβον ἐγγεγραμμένον. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. V. Probl.

In dato icoſaedro dodecaedrum deſcribere.

EXponatur pentagonum icoſaedri ABΓΔE, & [per 5. 4.] ſumantur centra circulorum qui ſunt circa triangula AZE, AZB, BZΓ, ΓZΔ, ΔZE, videlicet H, Θ, K, Λ, M, junganturque HΘ, ΘK, KΛ, ΛM, MH: & rurſus junctæ ZH, ZΘ, ZK producantur ad puncta Ξ, N, O, & ita rectas lineas EA, AB, BΓ in Ξ, N, O punctis bifariam ſecabunt, atque erit [per 4.6] ut NΞ ad NO ita HΘ ad ΘK; æqualis igitur eſt & HΘ ipſi ΘK. ſimiliter autem & reliqua pentagoni HΘKΛM latera æqualia oſtendentur. dico & æquiangulum eſſe. quonam enim duæ NΞ, NO parallelæ duabus HΘ, ΘK æquales angulos continent; & reliqua manifeſta ſunt. intelligatur à puncto Z



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Εἰς τὸ δοθὲν εἰκοσάεδρον δωδεκάεδρον ἐγγράψαι.

ΕΚκείσθω πενταγώνου τοῦ εἰκοσαέδρου τὸ ABΓΔE, καὶ τὰ κέντρα τῶν κύκλων τῶν περὶ τὰ AZE, AZB, BZΓ, ΓZΔ, ΔZE τρίγωνα, τὰ H, Θ, K, Λ, M, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ HΘ, ΘK, KΛ, ΛM, MH· καὶ πάλιν ἐπεζεύχθωσαν αἱ ZH, ZΘ, ZK ἐκβεβλήθωσαν ἐπὶ τὰ Ξ, N, O, δίχα δὴ τμηθήτωσαν αἱ EA, AB, BΓ, τοῖς Ξ, N, O σημείοις, καὶ ὡς ἡ NΞ πρὸς NO οὕτως ἡ HΘ πρὸς ΘK· ἴση ἄρα καὶ ἡ HΘ τῇ ΘK. ὁμοίως δὲ καὶ αἱ λοιπαὶ τοῦ HΘKΛM πενταγώνου πλευραὶ ἴσαι δειχθήσονται. λέγω ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ δύο αἱ NΞ, NO δυσὶ ταῖς HΘ, ΘK ἴσας γωνίας περιέχουσι, καὶ τὰ λοιπὰ φανερά. νενοήσθω ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ τοῦ

ABΓ

ΑΒΓΔΕ πενταγώνῳ ἐπίπεδον κάθετος ἠγμένη, ἥτις πεσεῖται ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ περὶ τὸ πεντάγωνον κύκλου. ἐὰν δὴ ἀπὸ τοῦ Ν ἐπὶ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλῃ ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετος, ἐπιζεύξωμεν, καὶ διὰ τοῦ Θ τῇ ΖΝ παράλληλον αὐτῇ ἀγάγωμεν, φανερὸν ὅτι συμβάλλῃ τῇ ἀπὸ τοῦ Ζ καθέτῳ, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Θ τῇ ΖΝ παράλληλος ὀρθὴν γωνίαν περιέξει μετὰ τῆς ἀπὸ τοῦ Ζ καθέτου. πάλιν, ἐὰν ἐπιζεύξωμεν ἀπὸ τοῦ Ξ,Ο ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλου, καὶ ἐπὶ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλει ἡ ἀπὸ τοῦ *Θ τῇ ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς τὸ Η, Κ, φανερὸν ὅτι ἡ διὰ ΖΟ γραμμὴ ὀρθὰς περιέξει μετὰ τῆς αὐτῆς. ἐξ ὧν φανερὸν ὅτι ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ ἐστὶ τὸ ΗΘΚΛΜ πεντάγωνον.

ad planum pentagoni ΑΒΓΔΕ ducta perpendicularis, quæ cadet in centrum circuli circa pentagonum descripti. si igitur à puncto Ν ad punctum, in quod dicta perpendicularis cadit, rectam lineam ducamus, & per Θ ducamus ipsi parallelam; perspicuum est hanc perpendiculari à Ζ occurrere, & parallelam per Θ rectum angulum continere cum perpendiculari. rursus, si à punctis Ξ,Ο ad centrum circuli circa pentagonum ΑΒΓΔΕ descripti rectas lineas jungamus; & à puncto, in quo linea per Θ ducta occurrit perpendiculari ex Ζ, ad Η, Κ puncta rectas lineas ducamus: manifestum est ipsas cum dicta perpendiculari rectos angulos continere. ex quo perspicue constat pentagonum ΗΘΚΛΜ esse in uno plano.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϕ'.

Τῶν πέντε σωμάτων τὰς πλευρὰς καὶ γωνίας ἐξευρεῖν.

ΔΕΙ εἰδέναι ἡμᾶς, ὅτι ἐάν τις ἐρεῖ ἡμῖν πόσας πλευρὰς ἔχει τὸ εἰκοσάεδρον, φήσομεν ἔτως. φανερὸν ὅτι ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων περιέχεται τὸ εἰκοσάεδρον, καὶ ὅτι ἕκαστον τριγώνου ὑπὸ τριῶν εὐθειῶν περιέχεται· δεῖ οὖν ἡμᾶς πολλαπλασιάσαι τὰ εἴκοσι τρίγωνα ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, γίνεται δὲ ἑξήκοντα, ὧν ἥμισυ γίνεται τριάκοντα. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ δωδεκαέδρου. ἐπεὶ δὲ δώδεκα πεντάγωνα περιέχει τὸ δωδεκαέδρον, πάλιν δὲ ἕκαστον πενταγώνου ἔχει πέντε εὐθείας, ποιοῦμεν δωδεκάκις πέντε, καὶ γίνονται ἑξήκοντα· πάλιν τοῦ ἡμίσου γίνεται τριάκοντα. λέγω τοῦδε ἡμίσου ποιοῦμεν, ἐπειδὴ ἑκάστη πλευρὰ, καθ' ἣν τριγώνου ἢ πενταγώνου ἢ τετραγώνου, ὡς ἐπὶ κύβου, οὐ δευτέρα λαμβάνεται. ὁμοίως δὲ τῇ αὐτῇ μεθόδῳ καὶ ἐπὶ κύβου καὶ ἐπὶ πυραμίδος καὶ τοῦ ὀκταέδρου τὰ αὐτὰ ποιήσας εὑρήσεις τὰς πλευράς.

Εἰ δὲ βουληθείης πάλιν ἑκάστου τῶν πέντε σχημάτων εὑρεῖν τὰς γωνίας, πάλιν τὰ αὐτὰ ποιήσας, μερίζε πρὸς τὰ ἐπίπεδα τὰ περιέχοντα μίαν γωνίαν τοῦ στερεοῦ· οἷον, ἐπειδὴ τῷ μὲν εἰκοσαέδρου γωνίαν περιέχουσι ε τρίγωνα, μέρισε πρὸς τὰς ε, γίνονται δώδεκα γωνίαι τοῦ εἰκοσαέδρου. ἐπεὶ δὲ τοῦ δωδεκαέδρου τρία πεντάγωνα περιέχουσι τὴν γωνίαν, μέρισε πρὸς τὰ τρία, καὶ ἕξεις κ γωνίας ἴσας τοῦ δωδεκαέδρου. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν εὑρήσεις τὰς γωνίας.

PROP. VI. PROBL.

Quinque figurarum latera & angulos invenire.

OPortet autem scire, si quis interroget nos quot latera icosaedrum habeat, ita respondendum esse. patet icosaedrum contineri sub viginti triangulis, & unumquodque triangulum sub tribus rectis lineis comprehendi: multiplicanda sunt igitur viginti triangula per numerum laterum trianguli; & fient sexaginta, cujus dimidium triginta. similiter autem & in dodecaedro: quoniam enim duodecim pentagona dodecaedrum continent, & unumquodque pentagonum habet quinque rectas lineas; conficientur decies quinque, & fient sexaginta, cujus rursus dimidium triginta: dimidium autem idcirco accipimus, quod singula latera (sive sit triangulum, sive pentagonum, sive quadratum, ut in cubo) bis sumantur. eadem methodo & ratione utentes, & in cubo, & in pyramide, & in octaedro latera inveniemus.

Si vero singularum quinque figurarum anguli inveniendi sint, rursus eadem facientes, partiemur per numerum planorum, quæ unum solidi angulum continent: ut quoniam icosaedri angulum continent quinque triangula; partiemur per quinque: erunt duodecim anguli in icosaedro. quoniam autem tria pentagona dodecaedri continent angulum; partiemur per tria, & habebimus angulos viginti in dodecaedro. similiter in reliquis figuris anguli invenientur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Τῶν ὑπιπέδων τῶν πέντε στερεῶν ἑκάστου περιεχόντων κλίσιν εὑρεῖν.

ΖΗΤΗΘΗ πῶς ἐφ' ἑκάστου τῶν ε στερεῶν σχημάτων, ἑνὸς ὑπιπέδου τῶν περιεχόντων ὁποιουδηποτοῦν δοθέντος, εὑρίσκεται καὶ ἡ κλίσις, ἐν ᾗ κέκλιται πρὸς ἄλληλα τὰ περιέχοντα ὑπίπεδα ἑκάστου τῶν σχημάτων. ἡ δὲ εὕρεσις, ὡς Ἰσίδωρος ὁ ἡμέτερος ὑφηγήσατο μέγας διδάσκαλος, ἔχει τὸν τρόπον τοῦτον. ὅτι μὲν ὑπὸ κύβου

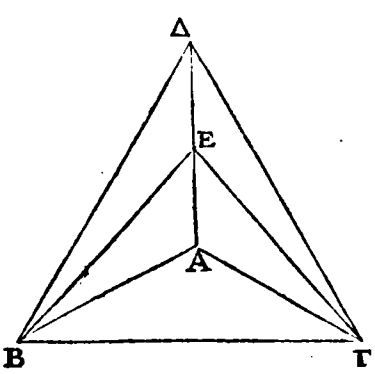
QUæsitum est quomodo, in unaquaque quinque solidarum figurarum, dato uno planorum continentium, inveniatur inclinatio planorum quæ ipsam continent. inventio autem, ut narravit Isidorus magnus præceptor noster, hoc modo se habet. in cubo quidem

* Ita restituimus ex conjectura. Prius erat τῇ διὰ ΖΖ ἐπιζευγνυούσῃ ὀρθὴ, ὃ περιέξει &c. nullo plane sensu.

plana, quæ ipſum continent, ad rectos inter ſe angulos inclinari manifeſtum eſt. in pyramide vero, expoſito uno triangulo, centris quidem terminis unius lateris, intervallo autem recta linea, quæ à vertice trianguli ad baſim perpendicularis ducitur, circumferentiæ deſcriptæ ſe mutuo ſecent; à ſectione ad centra junctæ rectæ lineæ continebunt inclinationem planorum quæ pyramidem comprehendunt. at in octaedro, à latere trianguli deſcripto quadrato, & centris quidem terminis diametri quadrati, intervallo autem ſimiliter perpendiculari, quæ à vertice trianguli ad baſim ducitur, deſcribantur circumferentiæ; atque rurſus rectæ lineæ à communi ſectione ad centra junctæ continebunt angulum, qui ex duobus rectis relinquitur, inclinationis ejus quam inquirimus. in icoſaedro autem, à latere trianguli deſcripto pentagono, jungatur recta linea quæ duobus lateribus ſubtenditur, & centris quidem terminis ejus, intervalloque perpendiculari ipſius trianguli deſcriptis circumferentiis; rectæ lineæ à communi ſectione ad centra junctæ continebunt ſimiliter angulum, qui ex duobus rectis relinquitur, inclinationis planorum ipſius icoſaedri. denique in dodecaedro, expoſito uno pentagono, & juncta ſimiliter recta linea quæ duobus lateribus ſubtenditur, centris quidem terminis ipſius, intervallo autem perpendiculari, quæ à bipartita ſectione ad latus pentagoni parallelum ducitur, deſcribantur circumferentiæ; & à puncto, in quo conveniunt, ad centra ſimiliter junctæ rectæ lineæ continebunt angulum, reliquum ex duobus rectis, inclinationis planorum dodecaedri.

Hunc quidem vir ille clariſſimus de prædictis ſermonem habuit, cum demonſtratio eorum ſibi manifeſta videretur: ſed ut contemplatio demonſtrativa perſpicue appareat, ſermonem in unoquoque explicabo; & primum in pyramide.

* Intelligatur pyramis ABΓΔ quatuor triangulis æquilateris contenta, cujus baſis ABΓ & vertex Δ punctum: ſecto autem latere AΔ bifariam in E, jungantur BE, EΓ. & quoniam æquilatera ſunt AΔB, AΔΓ triangula, & bifariam ſecta eſt AΔ; erunt [per 8. 1.] BE, EΓ ad ipſam AΔ perpendiculares. dico angulum BEΓ acutum eſſe. quoniam enim AΓ dupla eſt ipſius AE, erit quadratum ex AΓ quadrati ex AE quadruplum. ſed [per 47. 1.] quadratum ex AΓ æquale eſt quadratis ex AE, EΓ, ex quibus quadratum ex AΓ ad quadratum ex ΓE rationem habet quam 4 ad 3, atque eſt ΓB ipſi EB æqualis: quadratum igitur ex BΓ minus eſt quadratis ex BE, EΓ; ideoq; [per converſ. 13. 2.] angulus BEΓ eſt acutus. quoniam igitur duorum pla-



κατ' ὀρθὰν τέμνουσι γωνίαν τὰ περέχοντα αὐτὸν ἐπίπεδα ἀλλήλοις, φανερόν. ἐπὶ δὲ τῆς πυραμίδος, ἐκκειμένου ἑνὸς τετραγώνου, κέντροις τοῖς πέρασι τῆς μιᾶς πλευρᾶς, διαστήματι δὲ τῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν καθέτῳ ἀγομένῃ, περιφέρειαι γραφεῖσαι τεμοῦσιν ἀλλήλας· ἡ αἱ ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσι τὴν κλίσιν τῶν περιεχόντων τὴν πυραμίδα ἐπιπέδων. ἐπὶ δὲ τοῦ ὀκταέδρου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου ἀναγραφέντος τετραγώνου, κέντροις τοῖς πέρασι τῆς διαγωνίου, διαστήματι δὲ ὁμοίως τῇ τοῦ τετραγώνου καθέτῳ, γεγράφθωσαν περιφέρειαι, καὶ πάλιν αἱ ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσι τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς ἐπιζευγνυμένης κλίσεως. ἐπὶ δὲ τοῦ εἰκοσαέδρου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου ἀναγραφέντος πενταγώνου, ἐπεζεύχθω ἡ ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτείνουσα εὐθεῖα, καὶ κέντροις τοῖς πέρασιν αὐτῆς, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τετραγώνου καθέτῳ γραφεισῶν περιφερειῶν, αἱ ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι περιέξουσι τὴν λείπουσαν, ὁμοίως εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιπέδων. ἐπὶ δὲ τοῦ δωδεκαέδρου, ἐκκειμένου ἑνὸς πενταγώνου, ἐπιζευχθείσης ὁμοίως τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης εὐθείας, κέντροις τοῖς πέρασιν αὐτῆς, διαστήματι δὲ τῇ ἀγομένῃ καθέτῳ ἀπὸ τῆς διχοτομίας αὐτῆς ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ πλευρὰν τοῦ πενταγώνου γεγράφθωσαν περιφέρειαι, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ σημείου καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύμεναι ὁμοίως περιέξουσι τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῆς κλίσεως τῶν ἐπιπέδων τοῦ δωδεκαέδρου.

Οὕτω μὲν ὁ εἰρημένος εὐκλείστατος ἀνὴρ τὰ περὶ τῶν εἰρημένων ἀποδέδωκε λόγον, σαφῶς ἐφ' ἑκάστου φαινομένης αὐτῷ τῆς ἀποδείξεως· ἐπὶ δὲ τὸ σαφὲς μᾶλλον γενέσθαι τοῖς ἐν αὐτοῖς ἀποδεικτικὴν θεωρίαν, τὸν λόγον ἐφ' ἑκάστου σαφηνίσω· ἐπὶ πρότερον ἐπὶ τῆς πυραμίδος.

* ΝΕΝΟΗΣΘΩ πυραμὶς ὑπὸ τεσσάρων ἰσοπλεύρων τριγώνων περιεχομένη ἡ ΑΒΓΔ, οὗ ΑΒΓ βάσιος κορυφῆς ἔστω τὸ Δ· καὶ τμηθείσης τῆς ΑΔ πλευρᾶς δίχα κατὰ τὸ Ε, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ. καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρά ἐστι τὰ ΑΔΒ, ΑΔΓ τρίγωνα, καὶ δίχα τέτμηται ἡ ΑΔ· αἱ ΒΕ, ΕΓ ἄρα καθετοί εἰσιν ἐπὶ τὴν ΑΔ. λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΕΓ γωνία ὀξεῖά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΑΕ, τετραπλάσιον ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ, τῶν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ λόγον ἔχει ὃν δ' πρὸς γ', καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΓΕ τῇ ΕΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΒΓ ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ ΒΕ, ΕΓ· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΕΓ. ἐπεὶ οὖν δύο ἐπιπέδων

* Sequitur ipſius *Hypſiclis* demonſtratio eorum quæ tradidit *Iſidorus*.

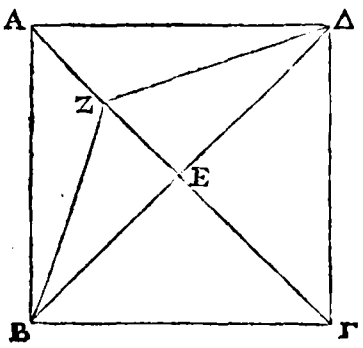
τῆ ΑΒΔ, ΑΔΓ κοινὴ τομή ἐστιν ἡ ΑΔ, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ πρὸς ὀρθὰς εἰσιν εὐθεῖαι ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων ἠγμέναι αἱ ΒΕ, ΕΓ, καὶ ὁρῶσιν γωνίαν περιέχουσιν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΕΓ ἄρα γωνία ἡ κλίσις ἐστὶ τῶν ἐπιπέδων. καὶ ἔστι δεδομένη, δέδοται γὰρ ἡ ΒΓ πλευρὰ ἅμα τοῦ τριγώνου, καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΒ, ΕΓ κάθετος ἅμα τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου· κέντροις τοίνυν τοῖς Β, Γ, τοπίσι τοῖς πέρασι τῆς μιᾶς πλευρᾶς, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ, γεγράφθωσαν περιφέρειαι τέμνουσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ αἱ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ Β, Γ ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσι τὴν κλίσιν τῶν ἐπιπέδων. τοῦτο δὲ ἦν τὸ εἰρημένον. καὶ ὅτι μὴ κέντροις τοῖς Β, Γ, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ, γεγράφθωσαν κύκλοι τέμνουσιν ἀλλήλους, φανερόν· ἑκατέρα γὰρ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζων ἐστὶ τῆς ἡμισείας τῆς ΒΓ· οἱ δὲ κέντροις τοῖς Β, Γ, διαστήματι δὲ τῇ ἡμισείᾳ τῆς ΒΓ, γεγράφθωσαν κύκλοι ἐφάψονται ἀλλήλων. εἰ δὲ ἐλάττων ἦ, οὐδὲ ἐφάψονται οὐδὲ τέμνουσιν· εἰ δὲ μείζων, πάντως τέμνουσι, καὶ ὅτως ὁ ὠρθὶ τῆς πυραμίδος σαφής τε καὶ ἀκόλουθος τοῖς ἀποδείξεσι φαίνεται λόγος.

ΣΥΝΝΟΕΙΣΘΩ πάλιν ἐπὶ τετραγώνου τοῦ ΑΒΓΔ πυραμὶς κορυφὴν ἔχουσα τὸ Ε, καὶ τὰ περιεχόμενα αὐτὴν δίχα τῆς βάσεως τρίγωνα ἰσόπλευρα· ἔστω δὲ ἡ ΑΒΓΔΕ πυραμὶς ἥμισυ ὀκταέδρου. τετμήσθω μία πλευρὰ ἑνὸς τριγώνου ἡ ΑΕ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΖ, ΔΖ· ἴσαι ἄρα εἰσὶν αἱ ΒΖ, ΔΖ καὶ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΕ. λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΖΔ γωνία ἀμβλεῖά ἐστιν. ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΒΔ. καὶ ἐπεὶ τετράγωνόν ἐστι τὸ ΑΓ, διάμετρος δὲ ἡ ΒΔ, τὸ ἀπὸ ΒΔ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ λόγον ἔχει ὃν ἐν τῷ πρὸ τούτου εἴρηται, ἐν δ' πρὸς γ'· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ λόγον ἔχει ὃν ὀκτὼ πρὸς τρία. ἴση δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΖΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΔ τῶν ἀπὸ τῶν ΒΖ, ΖΔ μείζόν ἐστιν· ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΖΔ. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπιπέδων τῶν ΑΒΕ, ΑΔΕ τεμνόντων ἀλλήλα, κοινὴ τομή ἐστιν ἡ ΑΕ, αἱ δὴ πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων ἠγμέναι εἰσὶν αἱ ΒΖ, ΖΔ περιέχουσαι ἀμβλεῖαν· ἡ ὑπὸ ΒΖΔ ἄρα γωνία λείπουσι εἰσὶν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τὴν κλίσεως τῶν ΑΒΕ, ΑΔΕ ἐπιπέδων· ἐὰν ἄρα δοθῇ ἡ ὑπὸ ΒΖΔ, δέδοται καὶ ἡ εἰρημένη κλίσις. ἐπεὶ δὲ δέδοται τὸ τρίγωνον τοῦ ὀκταέδρου καὶ μία πλευρά ἐστι τοῦ ὀκταέδρου ἡ ΑΔ, καὶ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον ἀναγεγραπται τὸ ΑΓ, δέδοται καὶ ἡ ΒΔ διάμετρος ἅμα τοῦ τετραγώνου. ἀλλὰ μὴν καὶ αἱ ΒΖ, ΖΔ κάθετοι τοῦ τριγώνου· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΒΖΔ γωνία δέδοται· ἀναγραφέντος ἄρα τοῦ τετραγώνου ἀπὸ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου ὡς τὸ ΑΓ, καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς διαμέτρου ὡς τὴν ΒΔ, ἐὰν κέντροις τοῖς Β, Δ, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ κύκλους ἐγράψωμεν, τέμνουσιν ἀλλήλους κατὰ τὸ Ζ, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευγνύ-

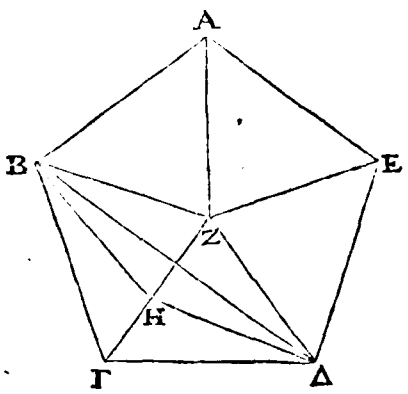
norum ΑΒΔ, ΑΔΓ communis ſectio eſt ΑΔ, & communi ſectioni ad rectos angulos occurrunt in utroque planorum rectæ lineæ ΒΕ, ΕΓ, quæ acutum angulum continent: erit [per 6. def. 11.] angulus ΒΕΓ planorum inclinatio; atque eſt data; datur enim ΒΓ nempe latus trianguli, atque etiam utraque ipſarum ΕΒ, ΕΓ, ſc. perpendicularis trianguli æquilateri: centris igitur Β, Γ, hoc eſt terminis unius lateris, & intervallo trianguli perpendiculari, deſcriptæ circumferentiæ ſe invicem ſecent in puncto Ε, & ab eo ad Β, Γ junctæ rectæ lineæ planorum inclinationem continebunt. hoc autem eſt quod dicebatur. verum illud, quod centris quidem Β, Γ, intervallo autem trianguli perpendiculari deſcripti circuli ſe mutuo ſecent, manifeſtum eſt: utraque enim ΒΕ, ΕΓ major eſt quam dimidia ipſius ΒΓ: & centris Β, Γ, & intervallo ipſius ΒΓ dimidio æquali, deſcripti circuli ſeſe tangunt. ſi autem minor ſit, neque ſe tangunt neque ſecant: quod ſi major, omnino ſecant; itaque de pyramide ſermo & manifeſtus & demonſtrationibus congruens apparet.

INTELLIGATUR rurſus ſuper quadratum ΑΒΓΔ pyramis, verticem habens punctum Ε, & continentia ipſam præter baſim triangula æquilatera: erit autem ΑΒΓΔΕ pyramis dimidia octaedri. ſecetur ΑΕ latus unius trianguli bifariam in Ζ; & ΒΖ, ΔΖ jungantur: ſunt igitur ΒΖ, ΔΖ & æquales inter ſe & ad ipſam ΑΕ perpendiculares. dico angulum ΒΖΔ obtuſum eſſe. jungatur enim ΒΔ. & quoniam ΑΓ eſt quadratum cujus diameter ΒΔ, erit quadratum ex ΒΔ quadrati ex ΔΑ duplum; quadratum autem ex ΔΑ ad quadratum ex ΔΖ rationem habet, ut ſuperius dictum eſt, quam 4 ad 3: ergo & quadratum ex ΒΔ ad quadratum ex ΔΖ rationem habebit quam 8 ad 3. eſt autem ΔΖ æqualis ΖΒ: quadratum igitur ex ΒΔ majus eſt quadratis ex ΒΖ, ΖΔ; quare & [per converſ. 12. 2.] angulus ΒΖΔ eſt obtuſus. & quoniam duorum planorum ΑΒΕ, ΑΔΕ ſe invicem ſecantium communis ſectio eſt ΑΕ, & ipſi ad rectos angulos in utroque plano ductæ ſunt ΒΖ, ΖΔ angulum obtuſum continentes: erit [per 6. def. 11.] angulus ΒΖΔ reliquus ex duobus rectis inclinationis planorum ΑΒΕ, ΑΔΕ: ſi igitur angulus ΒΖΔ datus ſit, & dicta inclinatio dabitur. itaque quoniam triangulum octaedri datum eſt, & unum ejus latus eſt ΑΔ, à quo quadratum ΑΓ deſcribitur; datur & ΒΔ nempe diameter quadrati. ſed & ΒΖ, ΖΔ triangulí perpendiculares datæ ſunt: ergo & angulus ΒΖΔ dabitur: deſcripto igitur quadrato à latere trianguli ut ΑΓ, & juncta diametro ΒΔ, ſi centris quidem Β, Δ, intervallo autem perpendiculari trianguli circulos deſcribamus, ſe mutuo ſecabunt in Ζ, & rectæ lineæ à puncto Ζ ad cen-

tra ductæ continebunt angulum BZΔ, qui quidem eſt reliquus ex duobus rectis, ut dictum eſt, inclinationis planorum. hoc quoque loco patet utramque ipſarum BZ, ZΔ majorem eſſe quam ipſius BΔ dimidiam: ideoque in conſtructione organica neceſſe eſſe circulos ſe mutuo ſecare. conſtat enim ex demonſtratione ipſam BΔ ad ΔZ potentia rationem habere quam habet 8 ad 3. & BΔ [per 20. 6.] dimidiæ ſui potentia eſt quadrupla: ergo utraque ipſarum BZ, ZΔ major eſt quam dimidia ipſius BΔ. & hæc quidem de octaedro dicta ſint.



IN icoſaedro autem intelligatur pentagonum æquilaterum ABΓΔE, ſuper hoc vero pyramis verticem habens punctum Z, ita ut continentia ipſam ſint triangula æquilatera: erit ABΓΔE pyramis figuræ icoſaedri pars. ſecetur ZΓ latus unius trianguli bifariam in H, & BH, HΔ jungantur, æquales quidem & ad ipſam ZΓ perpendiculares: dico angulum BHΔ obtuſum eſſe, quod per ſe manifeſto conſtat. juncta enim BΔ obtuſum angulum BΓΔ pentagoni ſubtendit. hoc autem major eſt [per 21. 1.] angulus BHΔ: nam BH, HΔ ipſis BΓ, ΓΔ ſunt minores. ſimiliter iis, quæ proxime dicta ſunt, patet angulum BHΔ eſſe eum qui relinquitur ex duobus rectis inclinationis triangulorum BZΓ, ΓZΔ. hoc autem dato, dabitur & planorum icoſaedri inclinatio: à latere enim trianguli icoſaedri deſcripto pentagono & recta linea BΔ data, quæ duobus pentagoni lateribus ſubtenditur, ut in figura, ſimiliterque datis BH, HΔ perpendicularibus triangulorum, dabitur & BHΔ angulus. nam ſi centris quidem terminis ipſius BΔ, quæ duobus pentagoni lateribus ſubtenditur, intervallo autem perpendiculari trianguli, circuli deſcribantur, ſe invicem ſecabunt, ut in H; & rectæ lineæ à puncto H ad centra B, Δ ductæ continebunt angulum, qui ex duobus rectis relinquitur, inclinationis planorum. item hoc loco ex figura manifeſtum eſt utramque BH, HΔ majorem eſſe quam dimidiam ipſius BΔ, quod etiam ex conſtructione organica demonſtrari poteſt.



Intelligatur enim ſeorſim triangulum æquilaterum ΘKΛ, & ab ipſa KΛ pentagonum deſcribatur KMNΞΛ, junctaque MΛ ducatur ΘO perpendicularis trianguli ΘKΛ; dico ΘO majorem eſſe dimidia ipſius MΛ, quæ inclinationem planorum ſubtendit. ducta à puncto K ad MΛ perpendiculari KΠ, quoniam angulus KΛΠ major eſt tertia parte recti, hoc eſt major angulo KΘO; conſti-

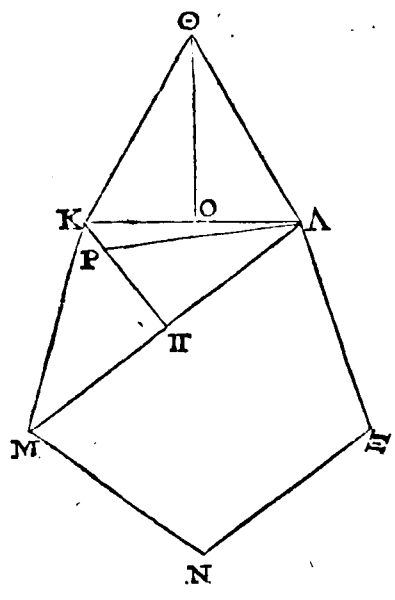
μθμαι εὐθεῖαι περιέχουσι τὴν κλίσιν τὴν ὑπὸ BZΔ, ἥτις ἐστὶν ἡ λείπουσα, ὡς εἴρηται), εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῶν ἐπιπέδων κλίσεως. καὶ ἐνταῦθα δὲ σαφὲς μᾶλλον ὡς ἑκατέρα τῶν BZ, ZΔ ἐστι τῶν ἡμισείας τῆς BΔ μείζων· ὃ διὰ τοῦτο ἐπὶ τῶν ὀργανικῆς κατασκευῆς ἀνάγκη τέμνειν τοὺς κύκλους ἀλλήλους. ὃ ὅτι τῶν ἀποδείξεως δὲ δῆλον γέγονεν ὡς ἡ BΔ πρὸς μὲν τὴν ΔZ δυνάμει λόγον ἔχει ὃν ὀκτὼ πρὸς τρία, τῶν δὲ ἡμισείας τῶν BΔ δυνάμει ἐστὶ τριπλασία· ὥστε διὰ τοῦτο μείζονα γίνεσθαι ἑκατέραν τῶν BZ, ZΔ τῶν ἡμισείας τῶν BΔ. καὶ ταῦτα μὲν ἐπὶ τοῦ ὀκταέδρου.

ΕΠΙ δὲ τοῦ εἰκοσαέδρου νενοήσθω πεντάγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔBΓΔE, ἐπὶ δὲ τούτου πυραμὶς κορυφὴν ἔχουσα τὸ Z, ὥστε περιέχοντα αὐτὴν τρίγωνα ἰσόπλευρα εἶναι· ἔστω δὴ ἡ ABΓΔE πυραμὶς μέρος εἰκοσαέδρου σχήματος. τετμήσθω μία πλευρὰ ἑνὸς τριγώνου ἡ ZΓ δίχα κατὰ τὸ H, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ BH, HΔ ἴσαι τε οὖσαι καὶ κάθετοι γινόμεναι ἐπὶ τὴν ZΓ· λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ BHΔ γωνία ἀμβλεῖά ἐστι· καὶ ἔστιν αὐτόθι φανερόν. ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ BΔ ἀμβλεῖαν μὲν ὑποτείνει τὴν ὑπὸ BΓΔ τοῦ πενταγώνου γωνίαν. ταύτης δὲ μείζων ἡ ὑπὸ BHΔ· ἐλάττονες γὰρ αἱ BH, HΔ τῶν BΓ, ΓΔ. ὁμοίως δὴ τοῖς πρὸ τούτου ὅτι ἡ ὑπὸ BHΔ γωνία ἡ λείπουσά ἐστιν εἰς τὰς δύο τῶν κλίσεως τῶν BZΓ, ΓZΔ τριγώνων. ταύτης δοθείσης, δεδομένη ἔσται καὶ ἡ κλίσις τοῦ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐπιπέδων· ὅπερ δὴ τῆς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου τοῦ εἰκοσαέδρου ἀναγραφέντος πενταγώνου, ἐπιζευχθείσης τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης τὸ πενταγώνου, ὡς ἐπὶ τῆς καταγραφῆς, τῆς BΔ δεδομένης, ὁμοίως δὲ καὶ τῶν BH, HΔ καθέτων τῶν τριγώνων, δέδοται καὶ ἡ ὑπὸ BHΔ. εἰ γὰρ κέντροις τοῖς πέρασι τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς ὑποτεινούσης τὸ πενταγώνου ὡς τὴν BΔ, διαστήματι δὲ τῇ τοῦ τριγώνου καθέτῳ κύκλοι γραφῶσι, τεμοῦσιν ἀλλήλους ὡς κατὰ τὸ H, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ H ἐπὶ τὰ B, Δ ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι περιέξουσι τὴν λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῶν ἐπιπέδων κλίσεως. καὶ ἐνταῦθα δὲ ἐκ μὲν τῆς καταγραφῆς δῆλόν ἐστιν ὅτι ἑκατέρα τῶν BH, HΔ μείζων ἐστὶ τῶν ἡμισείας τῆς BΔ, εἶναι δὲ καὶ ἐπὶ τῆς ὀργανικῆς κατασκευῆς ἀποδειχθεῖσαι.

Νενοήσθω χωρὶς ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνον τὸ ΘKΛ, ἀπὸ δὲ τῆς KΛ πενταγώνου ἀναγεγράφθω τὸ KMNΞΛ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ MΛ, καὶ ἤχθω κάθετος τοῦ ΘKΛ τριγώνου ἡ ΘO· λέγω ὅτι ἡ ΘO μείζων ἐστὶ τῶν ἡμισείας τῆς MΛ τῆς ὑποτεινούσης τὴν κλίσιν τῶν ἐπιπέδων. ἀχθείσης ἀπὸ τοῦ K ἐπὶ τὴν MΛ καθέτου τὴν KΠ, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ KΛΠ μείζων ἐστὶ τρίτου ὀρθῆς, τυγχάνει δὲ ἡ ὑπὸ KΘO, συνεχέτω

τῇ

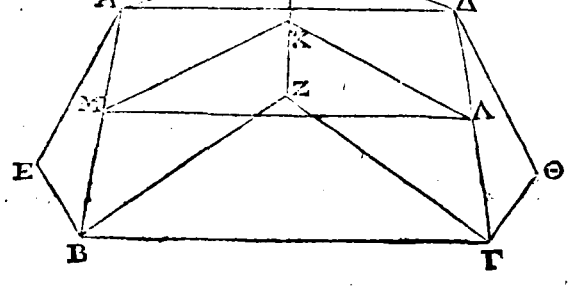
τῇ ὑπὸ ΚΘΟ ἴση ἡ ὑπὸ ΠΑΡ· ἡ ἄρα ΠΑ κάθετός ἐστιν ἰσοπλεύρου τριγώνου, οὗ πλευρὰ ἡ ΡΑ· ὥστε τὸ ἀπὸ ΡΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΠ λόγον ἔχει ὃν ὁ δ' πρὸς τὸν γ'. μείζων δὲ ἡ ΚΑ τῆς ΑΡ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΚΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΠ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὁ δ' πρὸς τὸν γ'. ἔχει δὲ καὶ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΟ ὃν ὁ δ' πρὸς τ γ'· ἡ ἄρα ΚΑ πρὸς τὴν ΑΠ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τ ΘΟ· μείζων ἄρα ἡ ΘΟ τῆς ΑΠ.



tuatur angulo ΚΘΟ æqualis angulus ΠΑΡ: ergo ΠΑ eſt perpendicularis æquilateri trianguli, cujus latus eſt ΡΑ: quare quadratum ex ΡΑ ad quadratum ex ΑΠ rationem habet quam 4 ad 3. ſed [per 21. 1.] major eſt ΚΑ quam ΑΡ: ergo quadratum ex ΚΑ ad quadratum ex ΑΠ majorem habet rationem quam 4 ad 3. habet autem & ad quadratum ex ΘΟ rationem quam 4 ad 3: ergo ΚΑ ad ΑΠ majorem rationem habet quam ad ΘΟ: major igitur [per 10. 5.] eſt ΘΟ quam ΑΠ.

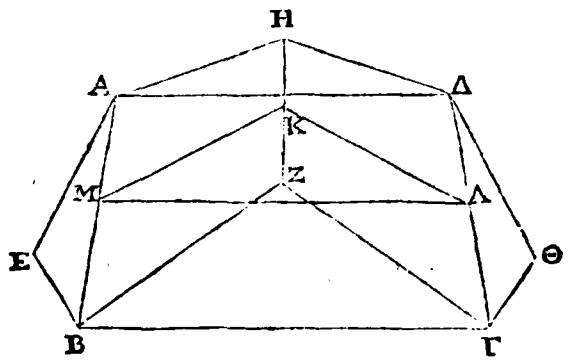
ΕΠΙ δὲ τοῦ δωδεκαέδρου ἔτως. γενοήσθω ἐν τετράγωνον τοῦ κύβου, ἀφ' οὗ τὸ δωδεκάεδρον ἀναγράφεται τὸ ΑΒΓΔ, καὶ δύο ἐπίπεδα τοῦ δωδεκαέδρου τὰ ΑΕΒΖΗ, ΗΔΘΓΖ· λέγω δὴ ἐνταῦθα δεδομένην εἶναι τὴν κλίσιν τ δύο πενταγώνων. τετμήσθω ἡ ΖΗ δίχα κατὰ τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ τῇ ΖΗ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν ἐν ἑκατέρῳ τ ἐπιπέδων αἱ ΚΛ, ΚΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΜΛ. λέγω δὴ πρῶτον ὅτι ἡ ὑπὸ ΜΚΛ γωνία ἀμβλεῖά ἐστι. δέδεικται γὰρ ἐν τῷ ιγ'. βιβλίῳ τ στοιχείων ἤτοι τῆς σύστεως τοῦ δωδεκαέδρου, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Κ κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον ἡμίσειά ἐστι τ πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου· ὥστε ἐλάττων ἐστὶ τ ἡμισείας τ ΜΛ· καὶ διὰ τοῦτο ἡ ὑπὸ ΜΚΛ γωνία ἀμβλεῖά ἐστι. συναποδέδεικται δὲ ἐν τῷ αὐτῷ θεωρήματι, ὅτι καὶ τὸ μὲν ἀπὸ ΚΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τ ἡμισείας τ πλευρᾶς τοῦ κύβου, καὶ τῷ ἀπὸ τ ἡμισείας τ πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου, ὥστε τοῖς αὐτοῖς τοῖς ΚΛ καὶ τοῖς ΚΜ, ἴσας ὔσας, μείζονας εἶναι τ ἡμισείας τ ΜΛ· τ ἄρα ὑπὸ ΜΚΛ γωνίας δοθείσης, ἡ λειπουσα εἰς τὰς δυσὶν ὀρθὰς ἡ κλίσις ἔσται τ ἐπιπέδων δηλονότι δεδομένη. ἐπεὶ οὖν ἡ πλευρὰ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου ἡ ὑποτείνουσά ἐστι τὰς δύο πλευρὰς τοῦ πενταγώνου, δέδοται δὲ τὸ πεντάγωνον· δέδοται ἄρα ἡ ΜΛ. δέδονται δὲ καὶ ἑκατέρα τ ΜΚ, ΚΛ, κάθετοι γάρ εἰσιν ἀπὸ τ διχοτομίας τῆς ΑΒ ὑποτεινούσης ἐπὶ τ παράλληλον αὐτῇ πλευρὰν τοῦ πενταγώνου, ὡς τὴν ΖΗ· δέδοται ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΚΜ ἡ λειπουσα, ὡς εἴρηται,

IN dodecaedro autem hoc modo. intelligatur ΑΒΓΔ unum cubi quadratum, à quo [per 17. 13.] dodecaedrum deſcribitur, & duo plana dodecaedri ΑΕΒΖΗ, ΗΔΘΓΖ: dico & ſic datam eſſe duorum pentagonorum inclinationem. ſecetur ΖΗ bifariam in Κ, & à puncto Κ ipſi ΖΗ ad rectos angulos ducantur in utroque planorum ΚΛ, ΚΜ; atque ΜΛ jungatur. itaque primum dico angulum ΜΚΛ obtuſum eſſe. oſtenſum enim eſt libro decimo tertio elementorum [ad 17. 13.] ſcilicet in conſtitutione dodecaedri, rectam lineam, quæ à puncto Κ ad quadratum ΑΒΓΔ perpendicularis ducitur, *dimidiam eſſe lateris pentagoni: quare minor eſt quam dimidia ipſius ΜΛ †; ideoque angulus ΜΚΛ eſt obtuſus. ſimul autem demonſtratum eſt in eodem theoremate, quadratum quidem ex ΚΛ æquale eſſe & quadrato dimidii lateris cubi & quadrato dimidii lateris pentagoni ‡, ita ut ΚΛ & ΚΜ, inter ſe æquales, majores ſint quam dimidia ipſius ΜΛ: angulo igitur ΜΚΛ dato, reliquus ex duobus rectis, hoc eſt inclinatio planorum data erit. itaque quoniam latus quadrati ΑΒΓΔ duobus lateribus pentagoni ſubtenditur, & datum eſt pentagonum; erit & ΜΛ data. data autem eſt & utraque ipſarum ΜΚ, ΚΛ, perpendiculares enim ſunt à bipartita ſectione rectæ lineæ ΑΒ, quæ duobus lateribus ſubtenditur ad latus pentagoni ipſi parallelum, ut ad ΖΗ; ergo angulus ΛΚΜ datus eſt,



* Iſta enim perpendicularis eſt eadem cum recta Ψ Ο in fig. prop. 17. lib. 13. &, ex conſtructione, iſta Ψ Ο æqualis eſt Ρ Ο ſive majori portioni ipſius Ν Θ ſc. ſemiſſis lateris cubi extrema & media ratione ſectæ, ſive ſemiſſi majoris portionis ipſius Β Γ lateris cubi extrema ac media ratione ſecti. ſed per corol. 17. 13. lateris cubi extrema ac media ratione ſecti major portio eſt dodecaedri latus; dicta igitur perpendicularis à puncto Κ ad quadratum ΑΒΓΔ eſt dimidia lateris dodecaedri ſive pentagoni. † Nam ΜΛ ſive ΑΔ major eſt quam ΗΔ. ‡ Nam in fig. prop. 17. lib. 13. quadratum ipſius Θ Ψ æquale quadratis ipſius Θ Ο & quadrato ipſius Ο Ψ, quia angulus Θ Ο Ψ eſt rectus.

nempe reliquus ex duobus rectis, ut dictum est, inclinationis ejus quam inquirimus. pulchre igitur in constructione organica dixit, oportere in dato pentagono jungere rectam lineam duobus lateribus subtensam, quæ lateri cubi est æqualis; & centris quidem terminis ipsius, intervallo autem perpendiculari, quæ à bipartita sectione ad latus pentagoni parallelum agitur, (ut in figura sunt K Λ, K M) describere circumferentias; atque à puncto, in quo conveniunt, ad centra rectas lineas ducere, quæ continent angulum reliquum, ex duobus rectis, inclinationis planorum. quod vero perpendicularis K M major est dimidia ipsius M Λ jam dictum est, ut in elementis quoque demonstratum est.



εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τ ἐπιζητουμένης κλίσεως. καλῶς ἄρα ἐπὶ τ ὀργανικῆς κατασκευῆς εἶπεν, ὡς δεῖ δοθέντος τοῦ πενταγώνου ἐπιζεῦξαι τινὰ εὐθεῖαν συνεύουσαν μετὰ δύο πλευρὰς ἥτις ἴση γίνεται τῇ πλευρᾷ τοῦ κύβου· καὶ κέντροις τοῖς πέρασιν αὐτῆς, διαστήμασι δὲ τῇ ἀπὸ τ διχοτομίας ἀγομένῃ καθέτῳ, ἐπὶ τ ἑτέραν τοῦ πενταγώνου πλευρὰν ὡς ἐπὶ τ καταγραφῆς αἱ Κ Λ, Κ Μ γραφεῖσαι περιφέρειαι, καὶ ἀπὸ τοῦ τῆς συμβολῆς τῶν περιφερειῶν σημείου ἐπὶ τὰ κέντρα ἐπιζευχθεῖσα εὐθεῖα περιεχέσας τινὰ λείπουσαν εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τ κλίσεως τ ἐπιπέδων. ὅτι γὰρ ἡ Κ Λ καθέτος μείζων ἐστὶ τ ἡμισείας τ Μ Λ, εἴρηται, ὡς ἐν τοῖς στοιχείοις συναποδέδεικται.

ΤΕΛΟΣ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

FINIS ELEMENTORUM EUCLIDIS.

EI-

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΤΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ,
ΚΑΙ
ΜΑΡΙΝΟΥ ΤΟΥ ΦΙΛΟΣΟΦΟΥ
Η
ΕΙΣ ΑΥΤΑ ΠΡΟΘΕΩΡΙΑ.

EUCLIDIS
DATA,
Cum PRÆFATIONE
MARINI.

ΜΑΡΙΝΟΥ ΤΟΥ ΦΙΛΟΣΟΦΟΥ

Η

ΕΙΣ ΤΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΠΡΟΘΕΩΡΙΑ.

MARINI PHILOSOPHI

IN

DATA EUCLIDIS

PRÆFATIO.

ΠΡΩΤΟΝ δεῖ θεῖναι τί τὸ δεδομένον· ἔπειτα τί τὸ χρήσιμον ἢ ὠφελεῖται τάξει πραγματείας εἶναι· καὶ τρίτον ἀπό τινα διαιρήσεως ἀνάγεται.

Ὁρίζονται δὲ τὸ δεδομένον πολλαχῶς· καὶ ἄλλως μὲν οἱ παλαιότεροι, ἄλλως δὲ οἱ νεώτεροι. διὸ καὶ σαφῆ χαλεπὸν εἶναι τὸν ἀληθῆ περὶ αὐτοῦ ἀπόδοσιν. ἔνιοι μὲν γὰρ οὐδ' ὁρισμόν τινα αὐτοῦ ἀπεδεδώκασιν, ἴδιον δέ τι τοῦ δεδομένου εὐθέσκειαν ἐπειράθησαν. ἕτεροι δὲ συμπλέξαντες ἤδη τὰ παρ' ἐκείνων λεγόμενα, ὁρίζεσθαι αὐτὸ ἐπεχείρησαν· ὃ δὲ ἐστι * συμφώνως ἑαυτοῖς. εἰκάσαι δὲ πάντες, ὅτι μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ἐννοίας καὶ ὑπολήψεως ὁρμηθέντες, λέγειν τι περὶ αὐτοῦ. καταλῆψιν γάρ τι τὸ δεδομένον εἶναι ὑπέλαβον. διὸ τῶν ἁπλουστέρως καὶ μιᾷ τινι διαφορᾷ περιγράφειν τὸ δεδομένον προθεμένων, οἱ μὲν τεταγμένον ὡς Ἀπολλώνιος ἐν τῇ περὶ νεύσεων, καὶ ἐν τῇ καθόλου πραγματείᾳ· οἱ δὲ γνώριμον, ὡς Διόδωρος· ὅτῳ δὲ † τὰς εὐθείας γραμμὰς καὶ τὰς γωνίας δεδόσθαι λέγει, καὶ πᾶν τὸ εἰς γνῶσιν τινα ἐλθόν, καὶ εἰ μὴ ῥητὸν εἴη. ἔνιοι δὲ ῥητὸν αὐτὸ εἶναι ἀπεφήναντο, ὥσπερ δοκεῖ ὁ Πτολεμαῖος, δεδομένα σκέψεσι προσαγορεύων, ὧν τὸ μέγεθος ἐστὶ γνώριμον, ἢ πρὸς ἀκρίβειαν, ἢ κατὰ τὸ σύνεγγυς. καὶ τὸν ἐν ὑποθέσει δὲ τοῦτο τὸ προβάλλοντος δεδόσθαι τινες ὑπειλήφασιν. λέγουσι δὲ καὶ ἄλλον τρόπον ἐν ταῖς πρώταις στοιχειώσεσι τὸ δοθὲν καὶ τὸν δοθέντα, τάττοντες ἥλιόν ἂν τις ἀφορίσῃ ἢ δῶ εὐθεῖαν. πάντα δὲ πάντα καταλῆψιν τινα βούλεται σημαίνειν· ὅθεν ἢ μάλιστα τῶν ὁρισμῶν ἐκεῖνοι εὐδοκιμοῦσιν, ὅσοι μάλιστα τὸ καταληπτὸν φαίνεσθαι, ὡς πρόσεστιν ἡμῖν ἔναργῶς καταφανές.

IMPRIMIS quid ſit *datum* ſtatuere neceſſe eſt; tum demum inſtitutæ de *dato* tractationis utilitates recenſere: tertio dicere ad quam ſcientiam ea tractatio revocetur.

Datum porro multipliciter definitur: atque aliter quidem à veteribus, aliter autem à recentioribus. qua quidem ratione factum eſt, ut aliquid de illo proferre, quod verum ſit, difficile videatur. Quidam enim *dati* nullam definitionem attulerunt, ſed potius proprietatem ejus quam ſtudioſe rimati ſunt. Aliqui autem, conjungentes & commiſcentes ea quæ ab aliis prius dicta fuerant, definire *datum* voluerunt: ſed neque ſibi ipſis admodum conſentiunt; quanquam & omnes ab una eademque ratione exorſi de illo differuerunt. *Datum* enim cuncti *comprehenſibile* eſſe ſupponunt. Quamobrem eorum, qui ſimplicius & per aliquam differentiam *datum* deſcribere ſtuduerunt, alii quidem id quod *ordinatum* eſt *datum* eſſe exiſtimaverunt, ut Apollonius in tractatu de inclinationibus, & in univerſali tractatu; alii autem quod *cognitum*, ut Diodorus: etenim ea ratione rectas lineas & angulos dari dicit, atque omne quod in cognitionem aliquam venit, etiamſi *effabile* non ſit. Alii autem *effabile* illud ipſum eſſe affirmarunt, uti voluiſſe videtur Ptolemæus, qui illa vocat *data*, quorum menſura nota eſt, vel accurate vel proxime. Quidam etiam id quod in *hypotheſi à proponente conceſſum eſt*, *datum* eſſe putaverunt. Ajunt autem aliter accipi in prioribus elementis datum punctum & datam rectam, hoc eſt quantam quis daret ac determinaret. Hæc tamen omnia *comprehenſionem* quandam ſignificare videntur: quamobrem ex his definitionibus, illæ maxime placent, quotquot *comprehenſionem* evidentius manifeſtant; ſicut à nobis in ſequentibus oſtendetur.

* Συμφωνῶν in Græco exemplari ad finem *Procli* excuſo. † Al. τὰς ἀπείρους καὶ

Jam vero eorum, qui pauci non ſunt, quique tenui & unico quopiam *dati* naturam circumſcribentes talem qualem illius definitionem proferunt, diverſas ſententias afferamus. etenim recapitulantes facillime horum omnium differentias enumerare poſſumus. Alii enim *datum* id quod *ordinatum* & *porinum* eſt definiverunt: alii autem id quod *ordinatum* eſt ſimul & *cognitum*: alii autem quod *porinum* eſt ſimul & *cognitum*. Quamobrem videntur illi omnes, ad *comprehenſionem* aut *ſumptionem* & *inventionem dati* reſpicientes, ita definiviſſe. Atque ut hanc illorum ſententiam percipiamus plenius, & inſuper ex multorum dictis veram propoſiti definitionem eruamus; conſiderabimus primum ſingulorum ſimplicium & incomplexorum, nec non oppoſitorum terminorum ſignificationem, *inordinati* inquam & *incogniti* & *apori* & *irrationalis*; ſiquidem ea pertinent ad hanc materiam geometricam, & ad res naturales, nec non ad alias mathematicas diſciplinas.

Itaque *ordinatum* deſcribitur, id quod ſemper obſervat id per quod dicitur ordinari, ſive quoad magnitudinem, ſive quoad ſpeciem, ſive quoad aliud quidpiam ejuſmodi. alio modo item definitur, quod aliter fieri non poteſt, ſed ſolummodo definitum aliquem locum ſortitur: quemadmodum, (ut exempli gratia dicam) per data duo puncta linea recta dicitur ordinari, quia aliter multipliciterque non poteſt duci. *Inordinata* autem eſt circumferentia per duo puncta, multipliciter enim variabiliterque conſtituitur, majori minorive circulo in infinitum per duo puncta deſcripto. E converſo per tria puncta circumferentia dicitur *ordinata*: atque iſtiuſmodi etiam *ordinata* eſſe dicuntur; ut ſuper data recta triangulum æquilaterum conſtituere; non enim aliter dicitur, ſed ad utramvis lineæ partem unice & invariabiliter: & datam rectam data ratione ſecare; unico enim modo tantum fieri poteſt ad alteram partem biſectionis. *Inordinata* ſunt ea quæ iis oppoſito modo ſe habent: ut ſcalenum triangulum conſtruere; & rectam lineam indefinite ſecare. Illud autem, per quod ordinatur problema, in determinatione proponitur; quandoquidem poteſt aliquid unum, quod *ordinatum* ſit, aliquatenus quidem *ordinatum*, aliquatenus autem *inordinatum* eſſe: quemadmodum æquilaterum triangulum, quatenus æquilaterum eſt, *ordinatum* eſt; magnitudine autem omnino non definitur.

Cognitum autem dicitur id quod notum eſt, ut clarum & comprehenſum à nobis; *incognitum* vero eſt quod minime notum eſt, neque comprehenſum à nobis: ut longitudo itineris cognita vocatur, quando quot ſit ſtadiorum cognoſcitur; item quod trianguli tres anguli duobus rectis æquales ſint; item quod binomium irrationale ſit. Talia quoque *cognita* ſunt: unicam *ſc.* eſſe tangentem helicis à dato extra puncto ad alterutram partem; ſi enim alia eſſet, duæ rectæ ſpatium comprehenderent, quod eſt impoſſibile. Quæ porro *incognita* ſunt, non ea quidem irrationalia ſunt; ſed ea tan-

* Νωὶ δὲ ϗ τ̃ μὴ μόνων, ψιλῶ ϗ εἰ χαρακτηριζόντων τὼ τὸ δεδομένω φύσιν, οἷον δ' ὁρισμὸν αὐτὸ ποιόντων, τὰς διαφορὰς αὐτῶν ἐκδώμεθα. συγκεφαλαιωμένοις δὲ καὶ τούτων οἱ τρόποι εὐαρίθμητοι γίγνονται. εἰ μὲν γὰρ τεταγμένων ☾ πέρισμον τὸ δεδομένον εἶναι ἀφορίσαντο· ἕτεροι δὲ τὸ τεταγμένον ἅμα ϗ γνώριμον· τινὲς δὲ τὸ † πέρισμα ἅμα ϗ γνώριμον. φαίνον᾽ δὲ ϗ ὅτι πάντες πρὸς τὼ καταλῆψιν, ἤτοι λῆψιν ☾ εὕρεσιν ἢ δεδομένω ἀφεωραμένης τ̃ εἰρημένου τρόπον ὁρίζεσθαι. ἵνα δὲ ταύτω τι αὐτῶν τ̃ ἔννοιαν ‡ καταδηλώμεθα, ἔπειμι μὲν ϗ τ̃ ἀληθῆ τὸ προκειμένω ὅρον ἐκ πολλῶν τ̃ ὡρισμένων ἕλωμεν, σκεπτέον πρότερον ἑκάστ τ̃ ἁπλῶν τὸ σημαινόμενον, ϗ τ̃ τούτοις ἀντικειμένων· τὸ μὲν ἀόριστ λέγω καὶ ἀγνώστ καὶ ἄπορ καὶ ἀλόγ· καὶ ὅτι τὼ ἐνεστῶσαν γεωμετρικὼ ὕλω ἐπεκτείνετ᾽ γὰρ τὰ τοιαῦτα, καὶ ὅτι τὰ φυσικὰ πράγματα, καὶ ἄλλας δὲ μαθηματικὰς σκέψεις.

Ὑπογράφειν τοίνυν τὸ τεταγμένον, τὸ ἀεὶ τὸν τὸ σωζόμενον καθ᾽ ὃ τετάχθαι λέγετ᾽, ἤτοι κατὰ μέγεθος, ἢ εἶδ☉, ἢ ἄλλό τι τῶν τοιούτων. ἢ καὶ ἑτέρως, ὅπερ μὴ ἐνδέχετ᾽ ἄλλως γίγνεσθαι, ἀλλὰ μοναχῶς ἐν ἀφορισμένω τινὶ τόπω, οἷον, ὡς τύπω εἰπεῖν, ἡ διὰ δύο σημείων γραφομένη εὐθεῖα τετάχθαι λέγετ᾽, διὰ τὸ μὴ ἄλλως καὶ ἀσάτως ἄγεσθαι. ἄτακτος δέ ἐστιν ἡ διὰ δυοῖν περιφέρεια, πολλαχῶς γὰρ καὶ ἀσάτως γράφεται, καὶ μείζονος καὶ ἐλάττον☉ κύκλ ἐπ᾽ ἄπειρον γραφομένου διὰ τῶν δύο σημείων. πάλιν δὲ τεταγμένη ἐστὶν ἡ διὰ τριῶν σημείων περιφέρεια· ἔστι δὲ καὶ τὰ τοιαῦτα τῶν τεταγμένων, ὡς τὸ ὅτι τῆς δοθείσης εὐθείας ἰσόπλευρον τρίγωνον συνίστασθαι· ὃ γὰρ καὶ διχῶς λέγεται, ἀλλὰ καθ᾽ ἑκάτερον μέρος τ̃ εὐθείας μοναχῶς καὶ ἀμεταπτώτως. καὶ τὼ δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς τ̃ δοθέντα λόγον τεμεῖν, μοναχῶς γὰρ ἂν καὶ τοῦτο γένοιτο ἐπὶ θ᾽ ἄτερα τῆς διχοτομίας. ἄτακτα δέ ἐστι τὰ τούτοις ἀντικειμένως ἔχοντα, ὡς τὸ σκαληνὸν συνίστασθαι, καὶ τὼ εὐθεῖαν ἀορίστως τεμεῖν. πρόκειται δὲ τῶ ὅρω τὸ καθ᾽ ὃ τάττεται· ἐπεὶ δυνατόν τι ἓν καὶ πῇ μὲν τεταγμένον, ἄλλως δ᾽ ἄτακτον εἶναι, οἷον τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ᾗ μὲν ἰσόπλευρόν ἐστι τέτακται, μεγέθει δ᾽ ἐχ ὥρισται πάντως.

Γνώριμον δέ ἐστιν τὸ γινωσκόμενον, ὡς τὸ δῆλον ἡμῖν καὶ καταλαμβανόμενον, ἄγνωστον δὲ τὸ μὴ γινωσκόμενον, μηδὲ καταλαμβανόμενον ὑφ᾽ ἡμῶν, οἷον τὸ μῆκος τ̃ ὁδὸ γνώριμον εἶναι λέγεται, ὅταν ὁπόσων ἐστὶ σταδίων γινώσκεται, καὶ τρίγωνα ὅτι τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, ϗ ὅτι ἡ ὑπ᾽ ἐκ δυοῖν ὀνομάτων ἄλογόν ἐστιν. ἔτι μὲν τὰ τοιάδε γνώριμα λέγεται, ὡς τὸ μίαν εἶναι τὼ ἐφαπτομένω τ̃ ἑλικὸς ἀπὸ δ᾽ ἐκτὸς δοθέντος σημείου ἐπὶ θ᾽ ἄτερα μέρη· ἐ γὰρ ἄλλη εἴη, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ἀδυνατον. ἄγνωστα δὲ τὰ ἄλογά ἐστιν, ἀλλὰ τὰ

* Mendoſe in altera editione Γνωὶ δὲ ϗ μὴ μόνων ψιλῶς &c. † Al. τεταγμένον. ‡ Prius καταδηλωμεθα.

τὰ μὴ γιγνοσκόμενα μηδὲ καταλαμβανόμενα ὑφ' ἡμῶν.

Πόριμον δέ ἐστιν ὃ δυνατόν ἐσμεν ἤδη ποιῆσαι ἢ κατασκευάσαι, τοῦτ' ἐστὶν εἰς διάνοιαν ἀγαγεῖν. ἄλλως δὲ πάλιν ὁρίζονται τὸ πόριμον, ἤτοι τὸ δι' ἀποδείξεως περιζόμενον, ἢ ὅταν τι φαινόμενον ᾖ καὶ χωρὶς ἀποδείξεως· οἷον τὸ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράψαι, καὶ τὸ τρίγωνον συστήσασθαι, ὃ μόνον ἰσόπλευρον, ἀλλὰ καὶ σκαληνὸν, καὶ τῷ ἐκ δύο ὀνομάτων εὑρεῖν, καὶ εὐθείας ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους εὑρεῖν, καὶ τὰ ἀπειραχῶς γεγινημένα πόριμά ἐστιν, ὥσπερ τὸ διὰ δύο σημείων κύκλον γράψαι. ἄπορον δὲ ἐστὶ τῷ πορίμῳ ἀντικείμενόν ἔχον, ὡς ὁ τὸν κύκλον τετραγωνισμός· ὅπω γάρ ἐστιν ἐν πόρῳ, εἰ καὶ οἴονται αὐτὸ πορισθῆναι, καί ἐστιν ἀπιστον· ἀπιστήμη γὰρ αὐτοῦ ὅπω κατείληπται. νῦν δὲ ὡς ἤδη ὄντος ἐν πόρῳ λόγος ἀποδέδοται, ὅπερ καὶ * κύριον πόριμον ἐπονομάζουσιν. τὸ γὰρ μήπω ὂν ἐν πόρῳ, ἐνδεχόμενον δὲ περισθῆναι, περισὸν ἰδίως θεσαυρεύουσιν. ἄπορον δέ ἐστιν ὡς εἴρηται, τῷ πορίμῳ ἀντικειμένως ἔχον, τοῦτ' ἔστιν ἡ ζήτησις ἀδιάκριτος ἐστιν.

Ῥητὸν δέ ἐστιν ὅπερ ἔχομεν εἰπεῖν μεγέθει, ἢ εἴδει, ἢ θέσει. ἀλλ' ἔτος μὲν ὁ ὅρος κοινότερός ἐστιν, ἰδίως δὲ καθ' αὐτὸ ῥητόν ἐστιν, τὸ κατά τινα γιγνωσκόμενον, καὶ πρὸς τὸ τῇ θέσει μέτρον, παλαιστὴν εἰ τύχοι, ἢ δάκτυλον.

‡ Οὕτω δὴ διωρισμένων, ῥᾴδιον τὸ λοιπὸν διασκοπεῖν, τίνα τε κοινωνίαν τ' εἰρημένων καὶ τὴν διαφορὰν, καὶ πρῶτον ὅπως ἔχει τὸ τεταγμένον πρὸς τὸ γνώριμον, καὶ τὰ τούτοις ἀντικείμενα πρὸς ἄλληλα. ὧν ἔστι δὴ τῶν ἀναστρεφόντων τὰ τοιαῦτα, ἃ δὲ μὴ ἐκείνων ἐν οἷς τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου διπλέον ἐστίν. εἰ γὰρ καὶ κοινὰ αὐτοῖς πολλὰ ὑπάρχει, ὡς τὸ διὰ δύο σημείων εὐθεῖαν γράψαι, καὶ διὰ τριῶν κύκλον **[καὶ τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι]. ἀλλὰ τὸ τετραγωνίζειν τ' κύκλον τεταγμένον μέν, ἄγνωστον δέ. καὶ ὅτι μία εὐθεῖα τ' ἐλίκος ἀφ' ἑνὸς σημείου ἐφάπτεται, τ' τεταγμένων καὶ μὴ ἐνδεχομένων ἄλλως ἔχειν ἐστίν· ἃ μὲν καὶ ἐγνωσται αὐτῶν ἡ ἀποδειξις, ἤτοι κατασκευή. πάλιν δ' ἡ ἐπ' ἄπειρον τομὴ, καὶ ἡ τοῦ σκαληνοῦ σύστασις ἔγνωσται μέν, οὐκέτι δὲ τέτακται· ὥστε φανερὸν ὅτι ἔστι τοῦ τεταγμένου τὸ μὲν γνώριμον, τὸ δὲ ἄγνωστον. καὶ ἀνάπαλιν τοῦ γνωρίμου τὸ μὲν τεταγμένον, τὸ δὲ ἄτακτον. καὶ ὅτως ἔχει πάντα πρὸς ἄλληλα, ὡς τὸ λογικὸν καὶ τὸ πεζόν· ὅτε γὰρ ἐξισάζειν τὰ τοιαῦτα, ὅτε τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου διπλέον ἐστίν.

Ὁμοίως δὲ ἔχει καὶ τὸ τεταγμένον καὶ τὸ ἄτακτον πρὸς τὸ πόριμον καὶ τὸ ἄπορον, κοινωνίαν τε γὰρ αὐτοῖς ἔνεστι πλείστην, καὶ διαφέρει ἀλλήλων τὸν εἰρημένον τρόπον. ἡ γὰρ ἑλὶξ τέτακται, ἀλλ' οὐκ ἴσμεν τοῖς πρὸ τοῦ Ἀρχιμήδους πόριμον· καὶ τὰ ἀπειραχῶς γιγνόμενα καὶ ἄτακτα, πόριμα μέν ἐστιν, ἐὰν κατασκευάσῃ τινὴ τις αὐτῶν καὶ τὴν σύστασιν, οὐκέτι δὲ καὶ

tum quæ neque cognita ſunt neque comprehenſa à nobis.

Porimum (ſeu quod factionem habet) appellatur id quod poſſumus facere & conſtruere, hoc eſt in cognitionem deducere. Rurſus autem alia ratione definitur illud, *ſc.* quod per demonſtrationem exhiberi poteſt, aut quod apparens eſt ſine demonſtratione; quale eſt, centro intervalloque circulum deſcribere; nec non triangulum non modo æquilaterum, ſed & ſcalenum conſtruere; aut binomium invenire; aut duas rectas potentia ſolum commenſurabiles invenire, aliaque quæ infinitis modis fiunt, *porima* ſunt, ut per duo puncta circulum deſcribere. *Aporum* (id eſt quod factionem non habet) *porimo* maxime opponitur; ut circuli tetragoniſmus; nondum enim inventus eſt, quanquam inveniri & ſciri poſſe certum ſit, illius enim ratio nondum comprehenſa eſt. Hic autem loquimur de eo, quod notum jam eſt, quod *porimum præcipuum* appellatur; quod enim nondum in promptu, poſſibile tamen eſt, *poriſton* appellatur. *Aporum* autem, ut dictum eſt, *porimo* opponitur, *i. e.* cujus inquiſitio dijudicari determinarique non poteſt.

Effabile autem eſt id cujus exprimere poſſumus magnitudinem, vel ſpeciem, vel poſitionem. Sed hæc definitio generalior eſt; proprie vero & ſecundum ſe *effabile* eſt, quod per quædam cognitum eſt, & ad datam poſitione menſuram, palmum puta, aut etiam digitum.

His itaque explicatis, quod reliquum eſt facile conſiderare poſſumus, in quibus ſcilicet omnia, quæ ſuperius allata ſunt à nobis, conveniant & differant; & primum quidem quomodo ſe habeant *ordinatum* ad *cognitum*, & illorum oppoſita ad invicem. Non enim ea convertibiliter dicuntur, neque aliud alio latius patet, etſi conveniunt in multis; ut per duo puncta rectam deſcribere, perque tria circulum **[triangulum æquilaterum conſtituere]. Porro quadrare circulum *ordinatum* quidem eſt, *incognitum* tamen: item quod unica ſit helicis tangens ab uno puncto, ex *ordinatorum* genere quidem eſt, & quod aliter fieri non poteſt; atqui non ideo eorum demonſtratio & conſtructio cognita eſt. Rurſus autem rectæ ſectio indefinita, & ſcaleni conſtitutio, cognoſcitur quidem, nec tamen adhuc ordinatur: ita ut clarum ſit *ordinatum* tam eſſe *cognitum* quam *incognitum*, & vice verſa *cognitum* tam eſſe *ordinatum* quam *inordinatum*. Itaque ſe habent hæc ad invicem, ut rationale & pedeſtre; neque enim exæquant illa ſeſe, nec aliud alio latius patet.

Similiter autem & *ordinatum* & *inordinatum* ſe habent ad *porimum* & *aporum*; quippe inter illa ſimilitudo maxima eſt, differunt porro inter ſe dicta ratione. Etenim helix quidem *ordinata* eſt, ſed non erat ante Archimedem *porima*. Eadem autem ratione quæ infinitis modis fiunt *porima* ſunt: namque *inordinatorum* aliqua *porima* quidem ſunt, ſi conſtitutionem eorum quis noverit & conſtructionem, non utique

* Al. κυρίως. † Al. ὃ κατά τινα γινωσκόμενον ἀριθμόν. ‡ Mallem τούτων. ** Illa uncis inclusa rectius abeſſent.

tamen *ordinata* ſunt: quale eſt illud, ſcalenum triangulum conſtituere; etenim conſtructionem illius cognitam reddere ex æquilatero non eſt arduum, quin immo facile admodum; etiamſi *inordinatum* ſit, & infinitis modis fiat.

Ita autem ſe habent *ordinatum* & *inordinatum* ad *effabile* & *irratioanle*: nam inter ſe conveniunt in multis; dicta ratione tamen differunt. Enimvero illa ſe non adæquant invicem, neque aliud alterum continet; quælibet enim ex binis nominibus, & quæ irrationales ita aſſumptæ ſunt, *ordinatæ* quidem ſunt, non ideo tamen *effabiles*; ut neque diameter reſpectu lateris quadrati. *Effabilium* vero *inordinata* multa ſunt, & ea quæ multipliciter & infinitis modis cognoſcuntur: poteſt enim ſcalenum triangulum menſurari à propoſita & definita menſura, quamvis *inordinatum* ſit.

Cogniti autem cum *porimo* ſimilitudines omnes perſpectas quidem habere facile eſt, differentiam autem aſſignare difficilius eſt: finitima ſiquidem eſt eorum natura, ita ut videantur invicem ſe adæquare. attentius tamen conſideranti, differentia quædam ineſſe apparebit. Siquidem quod ab uno puncto una recta helicem tangat, clarum eſt & *cognitum*; ſed non propterea cognitum eſt quomodo conſtruatur, quod adhuc non eſt comprehenſum: ita ut quod cognitum eſt, non ideo *porimum* ſit, etſi omne quod *porimum* eſt *cognitum* ſit; latius igitur patet *cognitum porimo*.

Rurſus autem *cognitum* & *porimum* & *effabile* in aliquibus conveniunt, in aliquibus autem differunt, ea qua diximus ratione. Etenim eæ lineæ quæ irrationales appellantur *cognitæ* quidem ſunt, non tamen *effabiles*. Contra numerus omnis *effabilis* quidem eſt, non tamen omnis *cognitus*. *Effabile* porro ex natura ſua ſemper *effabile* eſt: quanquam aliqua longitudo *effabilis* modo ſit, modo non, ſi quidem ad eandem menſuram cum aliqua alia exigatur. Sed & illa eadem longitudo aliquando *cognita* eſt, aliquando minime, quamvis inter illas omnino conveniat. Non parum autem difficile eſt reperire aliquid quod *effabile* ſit, atque etiam *incognitum*: etenim latius videtur patere *cognitum* quam *effabile*. Ex his autem clarum eſt *porimum* & *aporum* differre à *rationali* & *irrationali*: poſſibile enim eſt & *irrationalium* aliqua *porima* eſſe, non autem *rationalium* aliqua eſſe *irrationalia*. In quibus itaque prædicta conveniant manifeſtiſſimum eſt, ita tamen illa ſe habent ad invicem, ut latius patere videatur *porimum effabili*.

Ex iis autem licet hoc loco eorum quæ dicta ſunt differentiam contemplari. Nam *effabile* quidem & *irrationale* dicitur ſecundum reſpectum ad menſuram, quæ tamen ad cognitionem noſtram non pervenit. Poteſt enim aliquid quod *rationale* eſt non eſſe nobis *cognitum*; ſimiliter *rationale* eſſe, neque comprehendi unquam quod *rationale* ſit. *Ordinatum* autem & *inordinatum* ſecundum ſe propriamque ejus rei natu-

τεταγμένα· οἷον σκαληνὸν τρίγωνον ἀπενεγκεῖν, ἢ εἰς τὸ κατασκευάσαι αὐτὸ ἀναγαγεῖν τὸ ἀφωρισμένον· ὅτι τὰ ἰσοπλεύρα ῥ᾽ χαλεπὸν, ἀλλὰ εὐπορίαν ἔχει καί τι ἄπορον ὂν καὶ ἄπειρον.

Οὕτω δὲ ἔχει καὶ πρὸς τὸ ῥητὸν καὶ ἄλογον τὸ τεταγμένον τι καὶ ἄτακτον· κοινωνοῦντα γὰρ ἀλλήλοις πολλαχῇ, καὶ διαιρέσεις τ᾽ εἰρημένον τρόπον. ὐδὲ γὰρ πᾶσα ἐξισάζει * ἄλογα, ὐδ᾽ ἕτερον ἑ ἑτέρᾳ ἐστὶ περιληπτὸν, ἢ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων, καὶ αἱ ἕτως κατειλημμέναι ἄλογοι πεταγμέναι μόνον εἰσὶν, ἐκεῖ δὲ καὶ ῥηταί, καὶ ὁ τ᾽ ἀφαιρέσει πρὸς τὸν πολυωνύμιον τὸ τετραγώνῳ. πολλὰ δὲ καὶ τ᾽ ῥητῶν ἄτακτά ἐστιν, ὡς τὰ πολλαχῶς καὶ ἀορίστως γεγωνότα. δυνατὸν γὰρ καὶ σκαληνὸν τρίγωνον μετρεῖσθαι ἐκτὸς ἑ τεθέντος καὶ ὡρισμένου ῥητοῦ μέτρου, καίτοι ἄτακτον ὑπάρχον.

Τὸ δὲ γνωρίμως πρὸς τὸ πόριμον τὸν μὲν ὁμοιότητα † παντί γε διιδεῖν ῥᾴδιον, τ᾽ δὲ διαφορὰν χαλεπὸν ἐλεῖν· συνεχὴς γάρ ἐστι τ᾽ φύσιν ἀλλήλων, ὥστε ἐξισάζειν δοκεῖν. ὁ μὲν ἁπλῶς καὶ κατ᾽ αὐτὸ ἀκριβῶς ἐπιβλέψαντι ὀφθήσεταί τις ἐνοῦσα διαφορά. ἡ μὲν γὰρ μία ἐστὶν ἡ τ᾽ ἑλικος ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου ἐφαπτομένη, ἐμφανὲς ἐστι καὶ γνώριμον, ἀλλ᾽ ὁ διὰ τοῦτο ἤδη καὶ πόριμον ἐστὶ τὸ πρόβλημα, μήπω κατειλημμένον· ‡ ὥστε πᾶν τὸ γνώριμον οὐκ ἔστι καὶ πόριμον, τὸ μέντοι πόριμον πᾶν καὶ γνώριμον, διπλοῦν ἄρα τὸ γνώριμον τῷ πορίμῳ.

Πάλιν δ᾽ αὖ τὸ γνώριμον καὶ τὸ πόριμον ἑ τὸ ῥητὸν πῇ μὲν κοινωνεῖ, πῇ δὲ διαφέρει ἀλλήλων, κατὰ τὸν προειρημένον τρόπον. αἱ γὰρ εἰρημέναι ἄλογοι γνώριμαι μέν εἰσιν, ἐκεῖ δὲ καὶ ῥηταί. ὁ γὰρ ἀριθμὸς πᾶς ῥητὸς μέν ἐστιν, ἐκεῖ δὲ γνώριμος πᾶς. καὶ τὸ μὲν ῥητὸν τοῖς κατὰ ταὐτὰ ἔθος ὁμοίως δὲ ῥητὸν ἐστὶ· καὶ τὸ μὲν ῥητὸν ἔχει τι μῆκος, τὸ δ᾽ ἄ, εἰ δεῖ τοὐτὸ ἀνύσαι μέτρον. γνώριμον δὲ τὸ μὲν αὐτὸ μῆκος, τὸ δ᾽ ἄ, κἂν ἐν τῇ αὐτῇ σαφηνείᾳ ὦσιν. ἴσως δὲ καὶ τοῦτο χαλεπόν τι ἐστιν εὑρεῖν ῥητὸν μόνον, ἄγνωστον δέ· δοκεῖ γὰρ καὶ τὸ ῥητὸν διπλοῦν εἶναι τὸ γνώριμον. ὅτι δὲ καὶ τὸ πόριμον καὶ τὸ ἄπορον διαφέρει τὸ τε ῥητὸν καὶ ἀλόγου φανερὸν ἐκ τούτων· πόριμα γὰρ εἶναι δυνατὸν καὶ τῶν ἀλόγων τινὰ, ὐδὲν δὲ τῶν ῥητῶν ἄλογον. ἡ δὲ συγγένεια τούτων αὐτῶν καθάπερ καὶ τῶν ἄλλων παντὶ καταφανὴς, ἔτω μόνον καὶ ταῦτα ἔχει πρὸς ἄλληλα, ὥστε τὸ πόριμον διπλοῦν εἶναι δοκεῖν τοῦ ῥητοῦ.

Ἐξεστι δὲ τ᾽ προειρημένων τὰς διαφορὰς διασκοπεῖν τῇδε. ῥητὸν μὲν καὶ ἄλογον κατὰ τὸν ἐπὶ τὸ μέτρον ἀναφορὰν λέγεται, ἃ πρὸς τὴν ἡμετέραν γνῶσιν ἀναπεμπόμενον. δυνατὸν γάρ τι ῥητὸν ὂν μὴ εἶναι ἡμῖν γνώριμον, ὅμως ῥητὸν εἶναι μηδὲ κατειλῆφθαί πω ὅτι ῥητόν ἐστι. τὸ δὲ τεταγμένον καὶ ἄτακτον καθ᾽ αὐτὸ καὶ κατ᾽ ἰδίαν

* Al. ἀλλήλοις. † Παντὶ δή γε ἰδίως ῥᾴδιον in *Editis* vulgatis. Edidit quidem *Claudius Hardy*, ὥστε τὸ πόριμον πᾶν καὶ γνώριμον, ἔστι πλοῦν ἄρα &c. ‡ Ita legimus ex Græco exemplari ad finem *Procli* excuſo.

φύσιν

Φύσιν θεωρημένα ἐστὶ, κἂν ὑφ' ἡμῶν μήπω καταλαμβάνηται. πολλὰ γὰρ τεταγμένα φύσει * ὕστερον Ἀρχιμήδης ἔθεσε Σερήνου ἐθεώρει ὅτι τέτακται. γνώριμον δὲ καὶ ἄγνωστον κατὰ τὴν πρὸς ἡμᾶς ἀναφορὰν λέγεται, ὥστε διαφέρειν ἂν τὰ εἰρημένα ἀλλήλων· εἴπερ τὸ μὲν πρὸς ἡμᾶς ἔχει τὴν ἀναφοράν, τόδε πρὸς τὴν φύσιν, τόδε πρὸς τὸ μέτρον.

Διωρισμένης δὲ τῆς κοινωνίας καὶ διαφορᾶς τῶν προτεθέντων, ἑπόμενον ἂν εἴη λοιπὸν τί ποτέ ἐστι τὸ δεδομένον ἐπισκέψασθαι. ὅσοι τοίνυν τὸ καθ' ὑπόθεσιν δεδομένον ὑπὸ τοῦ προβάλλοντος οἴονται εἶναι τὸ δεδομένον, διαμαρτάνουσι τοῦ ζητουμένου. τὰ γὰρ στοιχεῖα πάντα τῶν δεδομένων συντέτακται, ἃ περὶ τῶν καθ' ὑπόθεσιν τοιούτων, ὡς ἔξεστιν ἰδεῖν ἐπὶ πολὺ τῆς περὶ τούτων πραγματείας. διὸ δεῖ καὶ ἡμᾶς, ἀφέντας τὴν τοιαύτην ὑπόληψιν, τὸν ἄλλως αἱρεῖσθαι λόγον ἐξετάσαι. ἔστω δὲ τὸ καθ' ὑπόθεσιν δεδομένον, τὸ ἀκολούθως τῇ ἀρχῇ θεωρούμενον. ὁρίζονται δή τινες μὲν ὀνομαστικοῖς ὅροις χρώμενοι, ἑνί τινι τῶν εἰρημένων αὐτὸ χαρακτηρίζοντες, ὡς † ἐν ἀρχῇ εἴρηται· πάντες δὲ σχεδὸν ὥσπερ κοινὴν ἔννοιαν περὶ τοῦ δεδομένου δοκοῦσιν ἐφηκέναι, καταλῆπτόν γάρ τι αὐτὸ εἶναι ὑπέλαβον, ὡς αὐτὸ ἐμφαίνει τὸ δεδομένου ὄνομα· καὶ μάλιστα οἱ τὸ καθ' ὑπόθεσιν δεδομένον ὑποχαράττοντες. ἔνιοι δὲ πρὸς τὸ συγχωρούμενον ἀπέβλεψαν. χρώμενοι δὲ καὶ ἡμεῖς τῷ εἰρημένῳ, ὥσπερ κανόνι καὶ κριτηρίῳ, δυνησόμεθα εὑρίσκειν τὸν τέλειον τοῦ δεδομένου ὁρισμόν. δῆλον δὲ ὅτι καὶ ἐξισάζειν ἤτοι ἀντιστρέφειν αὐτὸ δεῖ πρὸς τὸν ὁρισμόν· καὶ γὰρ τοῦτο ὑπάρχειν δεῖ τοῖς ὀρθῶς ἀποδεδομένοις ὁρισμοῖς. ἔστι δὲ προκείμενα τοιοῦτος ἐν μὲν τοῖς ἁπλουστέροις εἰρημένοις ὁρισμοῖς, ὁ τὸ πόρισμα ὁρισάμενος, ἐν δὲ τοῖς συμπεπλεγμένοις ὁ τὸ γνώριμον ἅμα καὶ πόρισμα, ἀτελεῖς δὲ οἱ λοιποὶ πάντες. ὅτε γὰρ ὁ τεταγμένον ὁριζόμενος αὐτάρκης ἐστὶ πρὸς τὸ δεδομένα προειπεῖν, διὰ μήτε τὸ πᾶν μήτε μόνον τὸ τεταγμένον εἶναι καταλῆπτον· ἀλλὰ καὶ τῶν ἀτάκτων τινά, ὡς ἐπιδέδεικται. ὅτε σκέπτος ἱκανὸς, ὁ γνώριμον αὐτὸ ἀφορίζόμενος, οὐδὲ γὰρ τοῦτο πᾶν ἐστι καταλῆπτον, εἰ καὶ μόνον· τὸ γὰρ ἄγνωστον οὐκ ἂν εἴη καταλῆπτον. οὐδὲ μὴν ὁ ῥητὸν αὐτὸ ἀποφαίνόμενος ὅρος τέλειος ἔσται· οὐδὲ γὰρ τοῦτο μόνον καταλῆπτον, ὡς ἓν τοῦτο διώρισται πρότερον. λείπεται δὲ ἐν τοῖς ὀνομαστικῶς ἀποδεδομένοις τὸ πόρισμα, ὅπερ δοκεῖ μάλιστα τὴν καταλῆψιν ἐμφαίνειν· ἅ γὰρ τὸ πόρισμα καταλῆπτον καὶ μόνον. τῷ τοιούτῳ καὶ Εὐκλείδης ἐχρήσατο, ὁρώμενα εἴδη ἅπαντα ὑπογραφών. τὸν δὲ σωζετῶν ὁρισμῶν μόνος τέλειος ἔστι, ὁ γνώριμον ἅμα καὶ πόρισμα τὸ δεδομένον ἀφορίζόμενος, γένει μὲν ἀνάλογον ἔχον τὸ γνώριμον, διαφορᾷ δὲ τὸ πόρισμα. ὁ δὲ τεταγμένον ἅμα καὶ πόρισμα λέγων, οὐκ ἀληθής· ἃ μόνα γὰρ τὰ τοιαῦτά ἐστι δεδομένα. καὶ ὁ τὸ τεταγμένον ἓν ῥητὸν ὁμοίως ἐλλειπῶς περιέχει τὸ δεδομένον· ὁ δὲ τὸ γνώριμον ἅμα καὶ τεταγμένον, διὰ τὸ ὑπερβάλλειν τὸ ὑποκειμε-

ram, quæ in contemplationem venit, dicitur; etiamsi à nobis minime comprehendatur. nam multa Archimedes posterius *ordinata* esse natura deprehendit, quæ Serenus fuerat contemplatus. *Cognitum* autem & *incognitum* secundum respectum ad nos dicitur, ita ut prædicta differant ab invicem; siquidem hoc refertur ad nos, illud ad propriam naturam, posterius autem ad mensuram.

Explicatis autem & similitudinibus & differentiis eorum quæ proposita sunt, consequens fuerit considerare quid sit *datum*. quotquot enim *id quod in hypothesi concessum est à proponente* putant esse *datum*, aberrant à quæsito. Etenim omnia *datorum* elementa de ejusmodi *dato*, quod est secundum hypothesim, composita non sunt; ut videre licet versatis in tractatione quæ habetur de *dato*. Quamobrem, omissa hac opinione, oportet nos de aliorum definitionibus ferre judicium: quod vero secundum hypothesin datur, est aliquid quod consequenter ex principiis cognoscitur. Porro definitionibus, quæ uno verbo constant, utentes, illud definiunt & aliquo prædictorum insigniunt, ut principio dictum est: ita ut ferè omnes hoc idem de *dato* sensisse videantur, ut illud (quod & ipsum *dati* nomen innuit) *comprehensum* quiddam esse supponerent: atque inter illos ii maxime qui illud per *hypothesim* descripserunt; alii autem ad id quod *concessum* est respexerunt. Nos autem utentes dictis, ut regula & criterio, poterimus invenire perfectam *dati* definitionem. Clarum siquidem est quod exæquare aut converti ipsam oportebit cum definito: nam hoc oportet fieri in omnibus definitionibus rectè traditis. Est autem propositi talis definitio; in simplicius quidem traditis, illa quæ definit *porimum*; in complexis vero quæ *porimum* & simul *gnorimum*, imperfectæ vero sunt reliquæ omnes. Neque enim quæ *ordinatum* definit sufficit ad *dati* comprehensionem, quia neque illud omne neque illud solum quod *ordinatum* est *comprehensum* est: etenim *inordinatorum* aliqua talia sunt, ut ostensum est. Neque illa satisfacit quæ *cognitum* illud esse describit; nam non illud omne solum *comprehensum* est; & si solum esset; incognitum utiq; numquid esset comprehensum? Neque item quæ *effabile* illud esse definit perfecta est; non enim illud omne solum *comprehensum* est, ut superius declaratum est. Porro in iis definitionibus, quæ uno verbo traditæ sunt, maximè deficit illa *porimi*, quæ videtur comprehensionem manifestare: non enim illud solum quod *porimum* est *comprehensum* est. Tali autem & ipse Euclides definitione usus est, cum perspectas sibi *dati* species omnes describeret. Compositarum autem definitionum ea perfecta est, quæ *cognitum* simul & *porimum datum* esse definit, pro genere quidem analogico habens *cognitum*, pro differentia autem *porimum*. Quæ porro *ordinatum* simul & *porimum* dicit, imperfecta est; non enim quæ talia sunt sola *data* sunt. quæ vero & *ordinatum* & *effabile* similiter cum defectu comprehendit *datum*; quod vero *cognitum* simul & *ordinatum*, quia propositum excedit, sane non

* Omnino legendum ὅτιπερ Ἀρχιμήδης ὁ Σύρακόσιος ἐθεώρει. † sc. p. 454. v. 1 & 2.

non eſt; neque enim illud ſolum quod tale eſt *datum* eſt. ſoli autem illi, quod ſupereſt, ad *dati* cognitionem perveniſſe videntur, qui illud quod *cognitum* eſt, eſſe *datum* oſtenderunt: quod enim tale eſt, omne & ſolum *comprehenſum* eſt; quæ utraque ineſſe debent recte traditis definitionibus. accedunt autem ad eos proxime qui ita definiverunt: *datum eſt cui æquale poſſumus exhibere, ſecundum ea quæ propoſita ſunt à nobis in primis hypotheſibus & principiis.* Ex quorum numero eſt Euclides ipſe ubique uſus verbo πείσασθαι, quanquam prætermittat *cognitum* ut conſequens ex *porimo*. Poſſet autem illum aliquis merito reprehendere, quod non prius quidem *datum in communi* definierit, ſed immediate ſpecierum *dati* quamlibet, quamvis in geometricis elementis viſus ſit ſimplicem lineam ante ſpecies lineæ deſcripſiſſe, & alia ſimiliter.

Quæ ſit utilitas tractatus de datis.

Igitur cum univerſalius à nobis, & quantum quidem ad hoc negotium neceſſarium eſſe viſum eſt, quid ſit *datum* expoſuerimus, conſequens fuerit hujuſce tractationis utilitates aperire. Etenim ea tractatio talis eſt, ut non ſui ſolum, ſed alicujus alterius rei gratia inſtituatur: etenim ad *locum reſolutum* maxime neceſſaria eſt hæc ſcientia. Quantam porro vim *reſolutus locus* obtineat in mathematicis diſciplinis, & quæ ad illas proxime accedunt, Optica & Canonica, alio loco dictum eſt à nobis, tum quod *reſolutio* ſit demonſtrationis inventio, tum quod in ſimilibus rebus ad demonſtrationis inventionem nobis ea multum conferat, tum quod longe præſtantius ſit potentiam reſolutivam nanciſci, quam multas particulares demonſtrationes poſſidere.

Ad quam ſcientiam datorum *tractatio revocetur.*

Porro cum ad omnes ejuſmodi ſcientias utilis ſit *datorum* conſideratio, quippe quæ ad *reſolutionem* multum utilitatis afferat, merito dicetur non quidem ad unam ſcientiam, ſed ad univerſalem illam Mathematicam potius revocari, quæ verſatur circa numeros, magnitudines, tempora, velocitatem, & omnia quæ ſunt ejuſmodi, quæque de rationibus agit, neç non de proportionibus atque omnibus omnino medietatibus. quamobrem ad perfectam & demonſtrativam *datorum* cognitionem tantopere utilem, hunc *datorum librum* elaboravit Euclides ille qui, inter eos qui elementa Geometrica compoſuerunt, facile principatum obtinet. quippe cum omnium fere mathematicarum diſciplinarum (ut omnis Geometriæ in XIII. libris, Aſtronomiæ in Phænomenis, Muſicæ & Opticæ) elementa ſeu verius introductiones exaraſſet, in hoc opere tractationis de *dato*, elementa reſolutiva conſcripta reliquit. Sed cum Geometra eſſet, quæ reliquis communia erant cum *dato*, magnitudinibus particulariter accommodata

νον ἔχ ὑγιὲς ἔχει. ἀδὲ γὰρ πᾶν τὸ τοιῦτο δεδομένον ἐστί. μόνοι δὲ, λοιπὸν, δοκεῖσιν καθικνεῖσθαι τῆς ἐννοίας τ δεδομένυ, οἱ γνώρισον αὐτὸ εἶναι ἀπεφηνάμενοι· τὸ γὰρ τοιῦτο πᾶν καταληπτὸν ἀ μόνον· ταῦτα δὲ ἀμφότερα δεῖ ὑπάρχειν, τοῖς ὁπισημονικῶς ὑποδεδομένοις ὁρισμοῖς. ἐγγὺς δὲ τούτων ἐσὶν οἱ σωθέντες καὶ ἧτος· δεδομένον ἐσὶν ᾧ πρίσασθαι δυνάμεθα ἴσον, ἀφ᾽ τ κειμένων ἡμῖν ἐν τῆς πρώτης ὑποθέσεσίν τε καὶ ἀρχαῖς. τῶν δὲ πρειρημένων ἕνα ἂν Εὐκλείδης, πανταχ τῷ πρίσασθαι χρώμενος, εἰ ἀ πρειλιμπάνει τὸ γνώρισον, ὡς παρεπόμενον τῷ πορίσμ. αἰτιάσαιτο δ᾽ ἄν τις αὐτὸν εὐλόγως ὡς ὑ πρότερον κοινῶς τὸ δεδομένον ὁρισάμενον, ἀλλ᾽ ἀμέσως τ εἰδῶν αὐτό ἕκαστον, καί τοι ἐν τῇ γεωμετρικῇ στοιχειώσ, φαίνε πρὸ τ εἰδῶν τ χραμμῆς, τὴν ἁπλῶς χραμμὴν ὁρισάμενος, ἀ τὰ ἀλλὰ ὁμοίως.

Τί τὸ χρήσιμον τ πρὶ τ δεδομένων πραγματείας.

Διαχειρίσαντος τοίνυν κοινότερον, ἀ ἴσον καὶ πρὸς τὴν παροῦσαν χρεῖαν δεδομένυ, ἐφέξῆς ἂν εἴη τὸ χρήσιμον τῆς πρὶ αὐτὸ πραγματείας ὑποδεῖναι. ἔσι δὲ καὶ τοῦτο τῶν πρὸς ἄλλο ἐχόντων τὴν ἀναφοράν· πρὸς γὰρ τ ἀναλυόμενον λεγόμενον τόπον ἀναγκαιοτάτη ἐσὶν ἡ τούτυ γνῶσις. ὅσην δ᾽ ἔχει δύναμιν ἐν ταῖς μαθηματικαῖς ὁπισήμαις, καὶ ταῖς συγγενῶς ὀπτικαῖς τε καὶ κανονικαῖς, ὁ ἀναλυόμενος τόπος ἐν ἄλλοις διώρισαι, καὶ ὅτι ὑποδείξεώς ἐσιν εὕρεσις ἡ ἀνάλυσις. καὶ ὅτι πρὸς εὕρεσιν τ τ ὁμοίων ὑποδείξεως ἡμῖν συμβάλλεται, ἀ ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ δύναμιν ἀναλυτικὴν κτήσασθαι, τοῦ πολλὰς ὑποδείξεις τῶν ὁπὶ μέρους ἔχειν.

Ὑπό τινα ὁπισήμην ἀνάγε ἡ τ δεδομένων πραγματεία.

Εἰς πάσας τοίνυν τὰς τοιαύτας ὁπισήμας χρήσιμη ἴσυ ἡ πρὶ τ δεδομένων θεωρία, ἕπεσπερ εἰς ἀνάλυσιν μέγα συμβάλλε, εἰκὸς ἂν ῥηθείη ἀνάγεσθαι ἐχ ὑπὸ μίαν ὁπισήμην, ἀλλ᾽ εἰς τὴν καθόλυ λεγομένην μαθηματικήν· αὕτη δέ ἐσιν ἡ πρὶ τὰ πλήθη, ἀ μεγέθη, ἀ χρόνυς, ἀ τάχυν ἔχυσα ἀ ταῦτα πάντα, καθάπερ δὴ ἡ πρὶ λόγυς, ἀ ἀναλογίας ἀ τὰς πανταχ μεσότητας πραγματευομένη. πρὸς ταύτην τοίνυν τὴν δεδομένην ὁπισημονικὴν κατάληψιν χρησιμωτάτην ἴσαν, τὸ τ δεδομένων βιβλίον ὁ Εὐκλείδης ἐξέπονησεν, ὃν ἀ στοιχειωτὴν κύριον ἐπονόμασαν. πάσης γὰρ σχεδὸν μαθηματικῆς ὁπισήμης στοιχεῖα, ἀ ὅσον εἰσαγωγὰς πρεσετάξεν, ὡς γεωμετρίας μὲν ὅλης ἐν τοῖς ιγ. βιβλίοις, ἀ τ ἀστρονομίας ἐν τοῖς Φαινομένοις, ἀ μυσικῆς δὲ καὶ ὀπτικῆς ὁμοίως στοιχεῖα πρεδέδωκεν, ἀ τ πρὶ δεδομένην ταύτης πραγματείας ἐν τῷ πρεκειμένῳ βιβλίῳ στοιχείωσιν ἀναλυτικὴν ἐποιήσατο. γεωμετρικὸς δὲ ὢν ἀνὴρ διαφερόντως τὰς κοινὰς λόγυς τοῖς μεγέθεσιν ἰδίως

ἰδίως ἐφάρμοσεν, ὃν τρόπον ἐποίησεν καὶ ὅλῃ τῇ καθόλου λόγων, ὡς ὅλῃ μεγεθῶν ἰδίως αὐτὸς πραγματευσάμενος ἐν τῷ πέμπτῳ βιβλίῳ τῆς ὅλης.

Κοινῶς μὲν καὶ εἴρηταί τι δεδομένου, καὶ ὑπὸ ποίαν ὅλης ἡμῖν ἀναγέ, καὶ ὅτι χρησιμωτάτη ἐστὶν ἡ περὶ αὐτῶν θεωρία. προσκείσθω δὲ τοῖς εἰρημένοις καὶ ἡ περιγραφὴ τῆς περὶ αὐτῶν ὅλης ἡμῖν. ἔστι δὲ αὕτη, ὡς ἐκ τῶν εἰρημένων φανερὸν, καταληψις τῶν δεδομένων κατὰ πάντα τρόπον, καὶ τῶν περὶ αὐτὰ συμβαινόντων. ἰδίως δὲ καὶ ὡς πρὸς τὸ προκείμενον βιβλίον, λεγέσθω εἶναι μέθοδος στοιχειώσιν περιέχουσα τῆς ὅλης περὶ τὰ δεδομένα ὅλης ἡμῖν. ἕξει δὲ αὐτὴ τὸ χρήσιμον ἀκολούθως, καὶ τὰ ἄλλα, κατὰ τὴν ἀναφορὰν τὴν πρὸς τὸ δεδομένον.

Διήρηται δὲ τὸ βιβλίον πρὸς τὰ δεδομένα εἴδη, καὶ τὸ μὲν πρῶτον αὐτῶν τμῆμα περιέχει τὰ κατὰ λόγον δεδομένα, τὸ δὲ δεύτερον τὰ τῇ θέσει, ἔπειτα δὲ, τὰ τῷ εἴδει. ἁπλοῦν γὰρ ἦν τὸ περὶ τὸ μεγέθει δεδομένον, κατέταξαν δὲ καὶ ταῦτα μεμιγμένως ἐν τοῖς ἄλλοις, καὶ μάλιστα τὸ εἶδος δεδομένοις· ἤρξατο δὲ ἀπὸ τοῦ λόγῳ καὶ θέσει δεδομένων, ἐπεὶ καὶ ἐκ τούτων συνέστηκε τὰ τῷ εἴδει δεδομένα. καὶ ἄλλως δὲ ἡ διαίρεσις αὐτοῦ τοῦ βιβλίου γέγονεν, εἴς τε καθ' ὅλα μεγέθη, καὶ εἰς γραμμὰς, καὶ ἐπιπεδα, καὶ κυκλικὰ θεωρήματα· τῇ δὲ ὁμοίᾳ τάξει ἐχρήσατο καὶ ὅλῃ τῶν ὅρων, ἥτοι ὑποθέσεων τοῦ βιβλίου· τρόπῳ δὲ διδασκαλίας ἐκ κατὰ συνθεσιν ἐπαγωγὴ ἠκολούθησεν, ἀλλὰ τῷ κατὰ ἀνάλυσιν, ὡς ὁ Πάππος ἱκανῶς ἀπέδειξεν ἐν τοῖς εἰς τὸ βιβλίον ὑπομνήμασι.

davit; quam rationem ipse servavit, cum de rationibus in universum loqueretur, de iis, tanquam ad magnitudines solum spectantibus, locutus in libro quinto de planis.

Nunc generaliter quidem dictum est quid sit *datum*, & ad quam scientiam pertineat, & quod utilissima sit ejus contemplatio. Adjiciatur autem ad ea quæ dicta sunt, & illius scientiæ, quæ circa datum versatur, descriptio. Est illa quippe, ut ex dictis patet, omnimoda comprehensio *datorum*, & eorum quæ illis accidunt. Peculiariter autem & congruenter ad propositum librum dicatur esse methodus continens elementa ejus scientiæ quæ *datum* contemplatur. Habebit autem & illa utilitatem ex consequenti, atque alia, quatenus refertur ad *datum*.

Porro hic liber secundum *datorum* species dividitur; & prima quidem ejus sectio continet quæ *data* sunt *ratione*, secunda ea quæ *positione*, tum ea quæ *specie data* sunt. Etenim illud quod *magnitudine datum* est, simplex est, & in aliis particulariter continetur, & præcipue in *datis specie*. Incepit autem à *ratione* & *positione datis*, quoniam ex his resultant *specie data*. Aliam vero divisionem recipit hic liber; dividitur quippe & in *magnitudines in universum*, & in *lineas*, & in *superficies*, & in *theoremata de circulis*; quem ordinem secutus fere est in definitionibus & suppositionibus hujus libri. Genere porro docendi usus est, non qui per compositionem procedit, sed qui per resolutionem, ut à Pappo * in commentariis ad hunc librum fuse satis ostensum est.

* Præfat. ad lib. VII. Collect. Math.

EY-

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΤΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ.

EUCLIDIS DATA.

ΟΡΟΙ.

α'. ΔΕΔΟΜΕΝΑ τῷ μεγέθει λέγεται, χωρία τε, καὶ γραμμαὶ, καὶ γωνίαι, οἷς δυνάμεθα ἴσα ποιήσασθαι.

β'. Λόγος δεδόσθαι λέγεται, ᾧ δυνάμεθα τὸν αὐτὸν ποιήσασθαι.

γ'. Εὐθύγραμμα σχήματα τῷ εἴδει δεδόσθαι λέγεται, ὧν αἵ τε γωνίαι δεδομέναι εἰσὶ κατὰ μίαν, καὶ οἱ λόγοι τῶν πλευρῶν πρὸς ἀλλήλας δεδομένοι.

δ'. Τῇ θέσει δεδόσθαι λέγεται, σημεῖά τε, καὶ γραμμαὶ, καὶ χωρία, καὶ γωνίαι, ἃ τὸν ἀεὶ τόπον ἔχει.

ε'. Κύκλος τῷ μεγέθει δεδόσθαι λέγεται, ὃς δέδοται ἡ ὁπ ὃς κέντρον τῷ μεγέθει.

ϛ'. Τῇ θέσει δὲ καὶ τῷ μεγέθει κύκλος δεδόσθαι λέγεται, ὃς δέδοται τὸ μὲ κέντρον τῇ θέσει, καὶ ἡ ὁπ ὃς κέντρον τῷ μεγέθει.

ζ'. Τμήματα κύκλου τῷ μεγέθει δεδόσθαι λέγεται, ὅν οἷς αἵ τε γωνίαι δεδομέναι εἰσὶ καὶ αἱ βάσεις τῶν τμημάτων τῷ μεγέθει.

η'. Τῇ θέσει δὲ καὶ τῷ μεγέθει τμήματα δεδόσθαι λέγεται, ὅν οἷς αἵ τε γωνίαι δεδομέναι εἰσὶ τῷ μεγέθει, καὶ αἱ βάσεις τῶν τμημάτων τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.

θ'. Μέγεθος μεγέθους, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν, ὅταν, ἀφαιρεθέντος οὗ δοθέντος, τὸ λοιπὸν τῷ αὐτῷ ἴσον ᾖ.

ι'. Μέγεθος μεγέθους, δοθέντι, ἔλαττόν ἐστιν, ὅταν, προστεθέντος οὗ δοθέντος, τὸ ὅλον τῷ αὐτῷ ἴσον ᾖ.

DEFINITIONES.

1. DATA magnitudine dicuntur, ſpatia, lineæ, angulique, quibus æqualia poſſumus invenire.

2. Ratio dari dicitur, cui poſſumus eandem invenire.

3. Rectilineæ figuræ ſpecie dari dicuntur, quarum & ſinguli anguli dati ſunt, & laterum rationes ad invicem etiam datæ.

4. Poſitione dari dicuntur, puncta, lineæ, ſpatia, & anguli, quæ eundem ſitum ſemper obtinent.

5. Circulus magnitudine dari dicitur, cujus datur ea quæ ex centro magnitudine.

6. Poſitione & magnitudine dari dicitur circulus, cujus centrum quidem datur poſitione, & ea quæ ex centro magnitudine.

7. Circuli ſegmenta magnitudine dari dicuntur, in quibus & anguli & ſegmentorum baſes magnitudine data ſunt.

8. Poſitione & magnitudine dari dicuntur circuli ſegmenta, in quibus anguli magnitudine dati ſunt, atque ſegmentorum baſes poſitione ſimul ac magnitudine.

9. Magnitudo magnitudine major eſt, data; quando, ablata data, reliqua eidem æqualis eſt.

10. Magnitudo magnitudine minor eſt, data; quando, adjuncta data, tota eidem æqualis eſt.

11. Magnitudo magnitudine major eſt, data *magnitudine*, quam in ratione: quando, ablata data, reliqua ad eandem habet rationem datam.

12. Magnitudo magnitudine minor eſt, data, quam in ratione: quando, adjuncta data, tota ad eandem habet rationem datam.

13. Deducta linea recta eſt, quæ à dato puncto ad datam poſitione rectam in angulo dato ducitur.

14 Educta vero linea recta eſt, quæ à dato puncto ad datam poſitione rectam in dato angulo protrahitur.

15. Contra poſitione recta eſt, quæ per datum punctum datæ poſitione rectæ parallela ducitur.

ια'. Μέγεθος μεγέθυς, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ὅταν, ἀφαιρεθέντος ϗ δοθέντος, τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχει δεδομένον.

ιβ'. Μέγεθος μεγέθυς, δοθέντι, ἔλασσόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ὅταν, προσθέντος ϗ δοθέντος, τὸ ὅλον πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχει δεδομένον.

ιγ'. Κατηγμένη ἐστίν, ἡ ἀπὸ δεδομένου σημείου ἐπὶ θέσει εὐθεῖαν ἀγομένη εὐθεῖα ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ.

ιδ'. Ἀνῃγμένη ἐστίν, ἡ ἀπὸ δεδομένου σημείου πρὸς θέσει εὐθεῖαν ἀγομένη εὐθεῖα ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ.

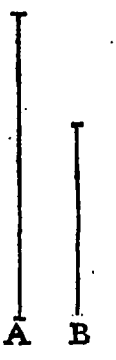
ιε'. Παρὰ θέσει ἐστίν, ἡ ἀφ' δεδομένου σημείου δεδομένῃ θέσει εὐθείᾳ παράλληλος ἀγομένη.

Prop. I.

Datarum magnitudinum ratio ad invicem datur.

SInt datæ magnitudines A, B: dico rationem ipſius A ad B datam eſſe.

Quoniam enim datur magnitudo A, poſſumus [per 1. def. dat.] illi invenire æqualem. inveniatur, & eſto Γ. rurſus cum data ſit magnitudo B, illi poſſumus invenire æqualem. inveniatur, & eſto Δ. quoniam igitur A æqualis eſt ipſi Γ, & B ipſi Δ; erit ut A ad Γ ita B ad Δ: permutando igitur erit [per 16.5.] ut A ad B ita Γ ad Δ. ratio igitur ipſius A ad B [per 2.def.dat.] data eſt; huic enim eadem inventa eſt, ſc. ratio ipſius Γ ad Δ. quod erat demonſtrandum.

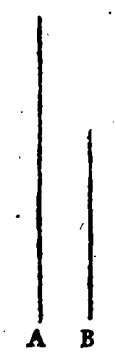


Prop. II.

Si data magnitudo ad aliam aliquam magnitudinem rationem datam habeat; datur quoque alia illa magnitudine.

DAta enim magnitudo A ad aliam magnitudinem B habeat rationem datam: dico & ipſam B magnitudine datam eſſe.

Quoniam enim data eſt A, poſſumus [per 1. def. dat.] illi æqualem invenire. inveniatur, & eſto Γ. & quoniam data eſt ratio ipſius A ad B; (ita enim ſupponitur,) poſſumus huic æqualem invenire. inveniatur, & eſto ratio ipſius Γ ad Δ. & quoniam eſt ut A ad B ita Γ ad Δ; erit quoque permutando ut A



ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Τῶν δεδομένων μεγεθῶν ὁ λόγος ὁ πρὸς ἄλληλα δέδοται.

ΕΣτω δεδομένα μεγέθη τὰ Α, Β· λέγω ὅτι τοῦ Α πρὸς τὸ Β λόγος ἐστὶ δοθείς.

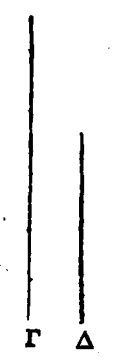
Ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὸ Α, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ ἴσον προσεῦρεῖν. προσεύρηται, καὶ ἔστω τὸ Γ. πάλιν ἐπεὶ δεδομένον ἐστὶ τὸ Β, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ ἴσον προσεῦρεῖν. προσεύρηται, ϗ ἔστω τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν Α τῷ Γ, τὸ δὲ Β τῷ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτω τὸ Β πρὸς τὸ Δ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτω τὸ Γ πρὸς τὸ Δ. τοῦ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγος ἐστὶ δοθείς· ὁ αὐτὸς γὰρ αὐτῷ προσεῦρεῖν ὁ τοῦ Γ πρὸς τὸ Δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἐὰν δεδομένον μέγεθος πρὸς ἄλλό τι μέγεθος λόγον ἔχῃ δεδομένον, δέδοται καὶ ἐκεῖνο τῷ μεγέθει.

ΔΕδομένον γὰρ μέγεθος τὸ Α πρὸς ἄλλό τι μέγεθος τὸ Β λόγον ἐχέτω δεδομένον· λέγω ὅτι δέδοται ϗ τὸ Β τῷ μεγέθει.

Ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὸ Α, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ ἴσον προσεῦρεῖν. προσεύρηται γὰρ ἔστω Γ. καὶ ἐπεὶ δέδοται ὁ τοῦ Α πρὸς τὸ Β λόγος, ἔστω δὲ ϗ ὁ τοῦ Γ πρὸς τὸ Δ, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ τὸ ἴσον προσεῦρεῖν. προσεύρηται καὶ ἔστω ὁ Γ πρὸς τὸ Δ λόγος. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτω τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς



ς τὸ Γ ἕτω τὸ Β πρὸς τὸ Δ. ἴσον δὲ τὸ Α τῷ Γ· ἴσον ἄρα τὸ Β τῷ Δ· δέδοται ἄρα τὸ Β μέγεθος, ἴσον γὰρ αὐτῷ πεπέρασται τὸ Δ.

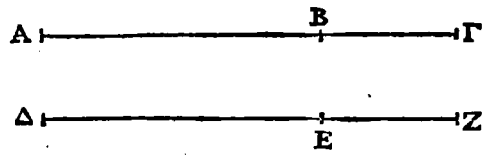
ad Γ ita Β ad Δ. æqualis autem est Α ipsi Γ; æqualis igitur est & Β ipsi Δ. itaque [per 1 def. dat.] magnitudo Β data est; illi enim æqualis inventa est Δ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν δεδομένα μεγέθη ὁποσαῦν συντεθῇ, καὶ τὸ ἐξ αὐτῶν συγκείμενον δεδομένον ἔσται.

Συγκείσθω γὰρ ὁποσαῦν δεδομένα μεγέθη, τὰ ΑΒ, ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ τὸ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ συγκείμενον τὸ ΑΓ δεδομένον ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὸ ΑΒ, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ ἴσον παρεισθαι. παρεσθω καὶ ἔστω τὸ ΔΕ. πάλιν ἐπεὶ δέδοται τὸ ΒΓ, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ ἴσον παρεισθαι. παρεσθω καὶ ἔστω τὸ ΕΖ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΔΕ, τὸ δὲ ΒΓ τῷ ΕΖ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΓ ὅλῳ τῷ ΔΖ ἐστιν ἴσον· δέδοται ἄρα τὸ ΑΓ, ἴσον γὰρ αὐτῷ πεπέρασται τὸ ΔΖ.



PROP. III.

Si quotlibet datæ magnitudines componantur; quæ ex iis componitur magnitudo data erit.

COmponantur enim quotlibet magnitudines datæ ΑΒ, ΒΓ: dico dari etiam magnitudinem ΑΓ, quæ ex ipsis ΑΒ, ΒΓ componitur.

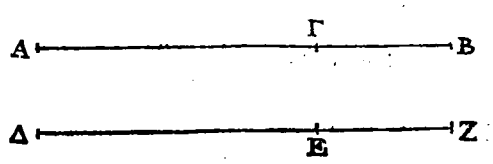
Quoniam enim datur ΑΒ, possumus [per 1. def. dat.] illi invenire æqualem. inveniatur & esto ΔΕ. rursus quia datur ΒΓ, possumus illi invenire æqualem. inveniatur & esto ΕΖ. quoniam igitur æqualis est ΑΒ ipsi ΔΕ, atque ΒΓ ipsi ΕΖ: erit & tota ΑΓ toti ΔΖ æqualis: itaque [per 1. def. dat.] data est ΑΓ; illi enim æqualis inventa est magnitudo ΔΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Ἐὰν ἀπὸ δεδομένου μεγέθους δεδομένον μέγεθος ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν δεδομένον ἔσται.

Ἀπὸ γὰρ δεδομένου μεγέθους τοῦ ΑΒ δεδομένον μέγεθος ἀφῃρήσθω τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι καὶ τὸ λοιπὸν τὸ ΓΒ δεδομένον ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὸ ΑΒ, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ ἴσον παρεισθαι. παρεσθω καὶ ἔστω τὸ ΔΖ. πάλιν, ἐπεὶ δέδοται τὸ ΑΓ, δυνατόν ἐστιν αὐτῷ ἴσον παρεισθαι. παρεσθω καὶ ἔστω τὸ ΔΕ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΔΖ, τὸ δὲ ΑΓ τῷ ΔΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΒ λοιπῷ τῷ ΕΖ ἴσον ἐστί· δέδοται ἄρα τὸ ΓΒ, ἴσον γὰρ αὐτῷ πεπέρασται τὸ ΕΖ.



PROP. IV.

Si à data magnitudine data magnitudo auferatur; etiam reliqua magnitudo data erit.

A Data enim magnitudine ΑΒ auferatur data magnitudo ΑΓ: dico & reliquam magnitudinem ΓΒ datam esse.

Quoniam enim data est ΑΒ, possumus [per 1. def. dat.] illi invenire æqualem. inveniatur & esto ΔΖ. rursus, quia data est ΑΓ, possumus illi invenire æqualem. inveniatur & esto ΔΕ. quoniam igitur magnitudo ΑΒ quidem ipsi ΔΖ, magnitudo autem ΑΓ ipsi ΔΕ æqualis est: erit & reliqua ΓΒ reliquæ ΕΖ æqualis: itaque [per 1. def. dat.] data est ΓΒ; æqualis enim ipsi inventa est ΕΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐὰν μέγεθος πρὸς ἑαυτοῦ τι μέρος λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ πρὸς τὸ λοιπὸν ἕξει δεδομένον.

Μεγέθος γὰρ τὸ ΑΒ πρὸς ἑαυτοῦ τι μέρος τὸ ΑΓ λόγον ἐχέτω δεδομένον· λέγω ὅτι καὶ πρὸς τὸ λοιπὸν τὸ ΒΓ λόγον ἕξει δεδομένον.

Κείσθω γὰρ δεδομένου μέγεθος τὸ ΔΖ. καὶ ἐπεὶ

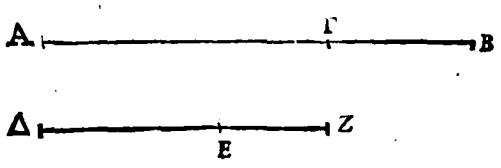
PROP. V.

Si magnitudo ad suiipsius aliquam partem habeat rationem datam; etiam ad reliquam habebit rationem datam.

MAgnitudo enim ΑΒ ad suiipsius partem aliquam ΑΓ habeat rationem datam: dico illam etiam ad reliquam ΒΓ habere rationem datam.

Exponatur enim data magnitudo ΔΖ. quo-

niam autem ratio magnitudinis AB ad magnitudinem AΓ data est; fiat huic eadem ratio ipsius ΔZ ad ΔE: ergo [per 1.def. dat.] data est ratio ipsius ΔZ ad ΔE. est autem ΔZ data: ergo [per 2.dat.] data est ΔE: quare [per 4. dat.] & reliqua EZ data est. data autem est ΔZ; igitur [per 1. dat.] ratio ipsius ΔZ ad ZE data est. quoniam vero est [per constr.] ut ΔZ ad ΔE ita AB ad AΓ: ergo per conversionem rationis est [per cor. 19. 5.] ut ΔZ ad ZE ita AB ad BΓ. est autem ratio ipsius ΔZ ad ZE data, ut ostensum est: quare & magnitudinis AB ad BΓ ratio est data.



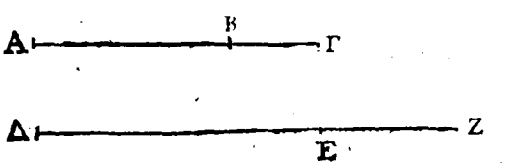
λόγος ἐστὶ δοθεὶς ὁ τοῦ AB πρὸς τὸ AΓ, ὁ αὐτὸς αὐτῷ πεποιήσθω ὁ τοῦ ΔZ πρὸς ΔE· λόγος ἄρα ἐστὶν ὁ τοῦ ΔZ πρὸς ΔE δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΔZ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΔE· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ EZ δοθέν ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΔZ δοθέν· λόγος ἄρα τοῦ ΔZ πρὸς τὸ ZE δοθείς ἐστι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΔZ πρὸς ΔE ὕτως καὶ τὸ AB πρὸς AΓ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΔZ πρὸς τὸ ZE ὕτως τὸ AB πρὸς τὸ BΓ. λόγος δὲ τοῦ ΔZ πρὸς ZE δοθείς ἐστιν, ὡς δέδεικται· λόγος ἄρα καὶ τοῦ AB πρὸς BΓ δοθείς ἐστιν.

PROP. VI.

Si componantur duæ magnitudines habentes ad invicem rationem datam; & ea, quæ ex iis componitur, magnitudo ad utramque rationem datam habebit.

COmponantur enim duæ magnitudines AB, BΓ, habentes ad invicem rationem datam: dico quod tota AΓ ad utramque AB, BΓ rationem habet datam.

Exponatur enim data magnitudo ΔE. quoniam vero ratio ipsius AB ad BΓ data est; fiat huic eadem ratio ipsius ΔE ad EZ. ratio igitur ipsius ΔB ad EZ est data: igitur [per 2. dat.] utraque magnitudinum ΔE, EZ data est: quare [per 1. & 3.dat.] ipsius ΔZ ad utramque ΔE, EZ ratio est data. quoniam autem est ut AB ad BΓ ita ΔE ad EZ; componendo igitur erit [per 18.5.] ut AΓ ad BΓ ita ΔZ ad ZE; & [per cor. 19.5.] convertendo ut AΓ ad AB ita ΔZ ad ΔE. & quoniam est ut ΔZ ad utramque ΔE, EZ ita AΓ ad utramque AB, BΓ: ipsius igitur AΓ ad utramque AB, BΓ ratio est data.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν δύο μεγέθη συντεθῇ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα δεδομένον, καὶ τὸ ὅλον πρὸς αὐτῶν ἑκάτερον λόγον ἕξει δεδομένον.

Συγκείσθω γὰρ δύο μεγέθη AB, BΓ, πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα δεδομένον· λέγω ὅτι καὶ ὅλον τὸ AΓ πρὸς ἑκάτερον τῶν AB, BΓ λόγον ἔχει δεδομένον.

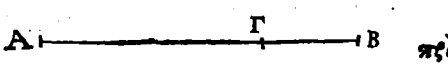
Ἐκκείσθω γὰρ δεδομένον μέγεθος τὸ ΔE. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶν ὃν AB πρὸς τὸ BΓ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ πεποιήσθω ὁ τοῦ ΔE πρὸς EZ. ὁ ἄρα τοῦ ΔE πρὸς EZ λόγος ἐστὶ δοθείς· ἔστιν ἄρα ἑκάτερον τῶν ΔE, EZ δοθέν· λόγον ἄρα τοῦ ΔZ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔE, EZ δοθείς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ AB πρὸς τὸ BΓ ὕτω τὸ ΔE πρὸς τὸ EZ· συνθέντι ἄρα ὡς τὸ AΓ πρὸς τὸ BΓ ὕτω τὸ ΔZ πρὸς τὸ ZE· καὶ ἀναστρέψαντι ὡς τὸ AΓ πρὸς τὸ AB ὕτως τὸ ΔZ πρὸς τὸ ΔE. καὶ ἐπεί ὡς τὸ ΔZ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔE, EZ ὕτω τὸ AΓ πρὸς ἑκάτερον τῶν AB, BΓ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ AΓ πρὸς ἑκάτερον τῶν AB, BΓ δοθείς.

PROP. VII.

Si data magnitudo in data ratione secetur; utrumque segmentorum datum est.

MAgnitudo enim data AB secetur in ratione data, nempe ipsius AΓ ad ΓB: dico utramque ipsarum AΓ, ΓB datam esse.

Quoniam enim data est ratio ipsius AΓ ad ΓB; igitur [per 6.dat.] ratio quoque ipsius AB ad utramque AΓ, ΓB data erit. datur autem AB; igitur [per 2.dat.] utraque ipsarum AΓ, ΓB data est.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Ἐὰν δεδομένον μέγεθος εἰς δεδομένον λόγον διαιρεθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων δεδομένον ἐστίν.

Δεδομένον γὰρ μέγεθος τὸ AB εἰς δεδομένον λόγον διῃρήσθω τὸ ὃν AΓ πρὸς ΓB· λέγω ὅτι ἑκάτερον τῶν AΓ, ΓB δοθέν ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ λόγος ἐστὶ τοῦ AΓ πρὸς ΓB δοθείς· λόγος ἄρα τοῦ AB πρὸς ἑκάτερον τῶν AΓ, ΓB δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ AB· δοθὲν ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν AΓ, ΓB.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Τὰ πρὸς αὐτὸ λόγον ἔχοντα δεδομένον, καὶ πρὸς ἄλληλα λόγον ἕξει δεδομένον.

Ἐχέτω γὰρ ἑκάτερον τῶν Α, Γ πρὸς τὸ Β λόγον δεδομένον· λέγω ὅτι καὶ τὸ Α πρὸς τὸ Γ λόγον ἕξει δεδομένον.

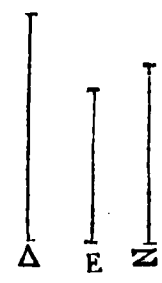
Ἐστω γὰρ δεδομένον μέγεθος τὸ Δ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ ὃν Α πρὸς τὸ Β δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ πεποιήσθω ὁ τοῦ Δ πρὸς Ε. δοθὲν δὲ τὸ Δ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ε. πάλιν ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ Β πρὸς τὸ Γ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ πεποιήσθω ὁ τοῦ Ε πρὸς τὸ Ζ. δοθὲν δὲ τὸ Ε· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ζ. ἔστι δὲ καὶ τὸ Δ δοθέν· λόγος ἄρα τοῦ Δ πρὸς τὸ Ζ ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ ἐστὶν ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτω τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ οὕτω τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ οὕτω τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ. λόγος δὲ τοῦ Δ πρὸς τὸ Ζ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ ὁ τοῦ Α πρὸς τὸ Γ δοθείς.

PROP. VIII.

Quæ ad idem datam rationem habent; etiam ad invicem datam rationem habebunt.

UTraque enim magnitudinum A, Γ ad magnitudinem B habeat rationem datam: dico magnitudinem A ad magnitudinem Γ datam quoque rationem habere.

Sit enim data magnitudo Δ. quoniam vero ratio ipsius A ad B data est; fiat huic eadem ratio ipsius Δ ad E. est autem Δ data; igitur [per 2. dat.] & E data erit. rursus quoniam ipsius B ad Γ data est ratio; fiat huic eadem ratio ipsius E ad Z. est autem E data; quare & Z data est. at vero data est Δ; ergo [per 1. dat.] ipsius Δ ad Z ratio est data. cumque sit ut A ad B ita Δ ad E; atque ut B ad Γ ita E ad Z: ex æquo igitur erit [per 22.5.] ut A ad Γ ita Δ ad Z. est autem ratio ipsius Δ ad Z data: quare & ratio ipsius A ad Γ data est.

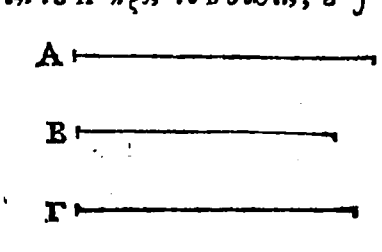


ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Ἐὰν δύο ἢ πλείονα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ δεδομένον, ἔχῃ δὲ καὶ τὰ αὐτὰ μεγέθη πρὸς ἄλλά τινα μεγέθη λόγους δεδομένους, οὐ μὴ τοὺς αὐτούς· καὶκεῖνα τὰ μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγους ἕξει δεδομένους.

Δύο γὰρ ἢ πλείονα μεγέθη τὰ Α, Β, Γ πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω δεδομένον, ἐχέτω δὲ καὶ τὰ αὐτὰ μεγέθη τὰ Α, Β, Γ πρὸς ἄλλά τινα μεγέθη τὰ Δ, Ε, Ζ λόγους δεδομένους, μὴ τοὺς αὐτοὺς δέ· λέγω ὅτι καὶ τὰ Δ, Ε, Ζ μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἕξει δεδομένον.

Ἐπεὶ γὰρ λόγος ἐστὶ τοῦ Α πρὸς τὸ Β δοθείς, ὃν ἔχει τὸ Α πρὸς τὸ Δ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ ὃν Δ ἄρα πρὸς τὸ Β λόγος ἐστὶ δοθείς. ἀλλὰ τοῦ Β πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ ὃν ἄρα Δ πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς. πάλιν, ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ Β πρὸς τὸ Γ δοθείς, τοῦ δὲ Β πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ Ε ἄρα πρὸς τὸ Γ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ Γ πρὸς τὸ Ζ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ ὃν Ε ἄρα πρὸς τὸ Ζ λόγος ἐστὶ δοθείς· τὰ Δ, Ε, Ζ ἄρα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει δεδομένον,

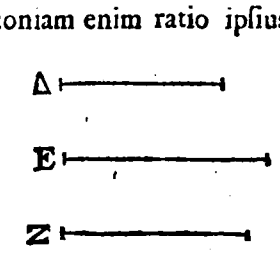


PROP. IX.

Si duæ pluresve magnitudines ad invicem habeant rationem datam; habeant autem illæ magnitudines ad alias quasdam magnitudines rationes datas, etsi non easdem: illæ aliæ magnitudines etiam ad invicem rationes datas habebunt.

DUÆ enim pluresve magnitudines A, B, Γ habeant ad invicem rationem datam; habeant autem & illæ eædem magnitudines A, B, Γ ad alias quasdam magnitudines Δ, E, Z rationes datas, non easdem tamen: dico ipsas magnitudines Δ, E, Z ad invicem rationem habere datam.

Quoniam enim ratio ipsius A ad B data est, & ratio ipsius A ad Δ etiam data; ratio ipsius Δ ad B [per 8. dat.] data erit. sed ipsius B ad E ratio est data: ergo [per 8. dat.] data etiam est ratio ipsius Δ ad E. rursus, quoniam ratio ipsius B ad Γ est data, ipsiusque B ad E ratio etiam data; ratio quoque ipsius E ad Γ [per 8.dat.] data erit. ipsius autem Γ ad Z ratio est data: quare & ratio ipsius E ad Z data est: ergo Δ, E, Z habent ad invicem rationem datam.

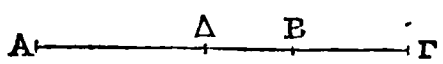


PROP. X.

Si magnitudo magnitudine major fuerit, data, quam in ratione; etiam utraque simul illa eadem major erit, data, quam in ratione. item si utraque simul magnitudo eadem magnitudine major fuerit, data, quam in ratione; aut reliqua illa eadem major erit, data, quam in ratione; aut reliqua una cum consequente, ad quam altera magnitudo datam habet rationem, data erit.

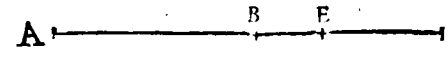
MAgnitudo enim AB magnitudine BΓ major sit, data, quam in ratione: dico quod simul utraque AΓ eadem BΓ major est, data, quam in ratione.

Quoniam enim AB ipsa BΓ major est, data, quam in ratione; auferatur data magnitudo AΔ: ergo [per 11. def dat.] reliquæ ΔB ad BΓ ratio est data: & componendo igitur, ipsius ΔΓ ad BΓ ratio [per 6 dat.] est data. sed & data est magnitudo AΔ: quare AΓ ipsa ΓB major est, data, quam in ratione.



RURSUS magnitudo AΓ magnitudine BΓ major sit, data, quam in ratione: dico reliquam AB eadem BΓ aut majorem esse, data, quam in ratione; aut ipsam quidem AB una cum consequente, ad quam BΓ rationem datam habet, datam esse.

Quoniam enim magnitudo AΓ magnitudine BΓ major est, data, quam in ratione; auferatur data magnitudo. data autem magnitudo aut minor est magnitudine AB, aut major. Sit primum minor, & sit AΔ. ergo reliquæ ΔΓ ad ΓB ratio est data: dividendo igitur, ipsius ΔB ad BΓ ratio est data. data autem est magnitudo AΔ: quare magnitudo AB magnitudine BΓ major est, data, quam in ratione. Sed sit data magnitudo major magnitudine AB, & ponatur ipsi æqualis AE; reliquæ igitur EΓ ad ΓB ratio est data: ideoque permutando, ipsius BΓ ad EΓ ratio est data: quare convertendo, ipsius BΓ ad BE ratio [per 5 dat.] est data. data autem est EB una cum BA, quia tota AB data est: ergo ipsa AB una cum consequente, ad quam BΓ rationem datam habet, data est.



PROP. XI.

Si magnitudo magnitudine major sit, data, quam in ratione; eadem major erit utraque simul, data, quam in ratione. item si eadem major sit utraque simul, data, quam in ratione; eadem quoque reliqua magnitudine major erit, data, quam in ratione.

MAgnitudo enim AB magnitudine BΓ major sit, data, quam in ratione: dico

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Ἐὰν μέγεθος μεγέθους, δοθέντι, μεῖζον ᾖ ἢ ὁ λόγῳ, καὶ τὸ συναμφότερον αὐτῶν, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ὁ λόγῳ. καὶ ἐὰν τὸ συναμφότερον αὐτῶν, δοθέντι, μεῖζον ᾖ ἢ ὁ λόγῳ, καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ αὐτῶν, ἤτοι δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ὁ λόγῳ, ἢ τὸ λοιπὸν μετὰ τῆς ἐξῆς, ὡσὰν τὸ ἕτερον λόγον ἔχει δεδομένον, δοθέν ἐστι.

ΜΕΓΕΘΟΣ γὰρ τὸ ΑΒ μεγέθους τοῦ ΒΓ, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ὁ λόγῳ· λέγω ὅτι καὶ τὸ συναμφότερον τὸ ΑΓ τοῦ αὐτοῦ τοῦ ΒΓ δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ὁ λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΒ τοῦ ΒΓ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ὁ λόγῳ, ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΑΔ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΔΒ πρὸς τὸ ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ συναμφοτέρου τοῦ ΔΓ πρὸς τὸ ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ΑΔ· τὸ ΑΓ ἄρα τοῦ ΓΒ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ὁ λόγῳ.

ΠΑΛΙΝ δὴ τὸ ΑΓ τοῦ ΒΓ, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ὁ λόγῳ· λέγω ὅτι τὸ λοιπὸν τὸ ΑΒ τοῦ αὐτοῦ τοῦ ΒΓ, ἤτοι δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ, ἢ τὸ ΑΒ μετὰ τῆς ἐξῆς, πρὸς ὃ τὸ ΒΓ λόγον ἔχει δοθέντα, δοθὲν ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΓ τοῦ ΒΓ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος· τὸ δὴ δοθὲν ἤτοι ἔλασσόν ἐστιν τοῦ ΑΒ, ἢ μεῖζον. ἔστω πρότερον ἔλασσον, καὶ ἔστω τὸ ΑΔ. λοιπὸν ἄρα τὸ ΔΓ πρὸς ΓΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· διελόντι ἄρα τὸ ΔΒ πρὸς ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ΑΔ· τὸ ΑΒ ἄρα τοῦ ΒΓ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ. ἀλλὰ δὴ τὸ δοθὲν μεῖζον ἔστω τοῦ ΑΒ, καὶ κείσθω αὐτῷ ἴσον τὸ ΑΕ· λόγος ἄρα τοῦ λοιποῦ τοῦ ΕΓ πρὸς τὸ ΓΒ ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ ἀνάπαλιν τοῦ ΒΓ πρὸς τὸ ΕΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ ἀναστρέψαντι ὁ ΒΓ πρὸς ΒΕ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι τὸ ΕΒ μετὰ τοῦ ΒΑ δοθὲν, ὅλον γὰρ τὸ ΑΕ δοθέν ἐστι· τὸ ΑΒ ἄρα μετὰ τῆς ἐξῆς, πρὸς ὃ τὸ ΒΓ λόγον ἔχει δοθέντα, δοθὲν ἐστι.

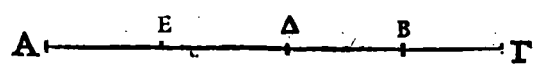
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Ἐὰν μέγεθος μεγέθους, δοθέντι, μεῖζον ᾖ ἢ ὁ λόγῳ, τὸ αὐτὸ καὶ συναμφοτέρου, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ὁ λόγῳ. καὶ ἐὰν τὸ αὐτὸ συναμφοτέρου, δοθέντι, μεῖζον ᾖ ἢ ὁ λόγῳ, τὸ αὐτὸ καὶ τοῦ λοιποῦ, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ὁ λόγῳ.

ΜΕΓΕΘΟΣ γὰρ τὸ ΑΒ τοῦ ΒΓ, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ὁ λόγῳ· λέγω ὅτι καὶ τῶν ΑΓ

τοῦ ΑΓ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΒ τοῦ ΒΓ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος, καὶ ἔστω τὸ ΑΔ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΔΒ πρὸς τὸ ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἀνάπαλιν δὴ καὶ συνθέντι λόγος ἐστὶ τοῦ ΔΓ πρὸς τὸ ΔΒ δοθείς. ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τοῦ ΑΔ πρὸς τὸ ΔΕ· λόγος ἄρα τοῦ ΑΔ πρὸς τὸ ΔΕ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΑΔ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΔΕ· ὥστε καὶ λοιπὸν τὸ ΑΕ δοθὲν ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ὅλου τοῦ ΑΓ πρὸς ὅλον τὸ ΕΒ λόγος δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ΕΒ πρὸς τὸ ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ΑΕ· τὸ ΑΒ ἄρα τοῦ ΑΓ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.



& eam AB ipſa AΓ majorem eſſe, data, quam in ratione.

Quoniam enim magnitudo AB magnitudine BΓ major eſt, data, quam in ratione; auferatur data magnitudo AΔ: igitur [per 11.def.dat.] reliquæ ΔB ad BΓ ratio data eſt. invertendo ergo & componendo [per 6.dat.] ipſius ΔΓ ad ΔB data eſt ratio. fiat huic eadem ratio ipſius AΔ ad ΔE: itaque ipſius AΔ ad ΔE ratio data eſt. eſt autem AΔ data; ergo [per 2.dat.] ΔE data eſt: quare [per 4.dat.] reliqua AE data eſt. totius autem AΓ ad totam EB [per 12.5.] ratio data eſt: ergo ipſius EB ad AΓ ratio data eſt. data autem eſt AE: quare [per 11.def.dat.] AB ipſa AΓ major eſt, data, quam in ratione.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΒ συναμφοτέρῳ τοῦ ΑΓ, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι τὸ αὐτὸ τὸ ΑΒ καὶ λοιπὸν τοῦ ΒΓ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΑΕ· λοιπὸν ἄρα τοῦ ΕΒ πρὸς τὸ ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ΑΓ πρὸς τὸ ΕΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τοῦ ΑΔ πρὸς τὸ ΔΕ· καὶ τοῦ ΑΔ ἄρα πρὸς τὸ ΔΕ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ ἀναστρέψαντι τοῦ ΑΔ πρὸς τὸ ΑΕ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ ἀνάπαλιν τοῦ ΑΕ πρὸς τὸ ΑΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ΑΕ· δοθὲν ἄρα καὶ ὅλον τὸ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ ὅλου τοῦ ΑΓ πρὸς ὅλον τὸ ΕΒ λόγος ἐστὶ δοθείς, ὡς καὶ τοῦ ΑΔ πρὸς ΕΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· ἔσται δὴ καὶ λοιποῦ τοῦ ΓΔ πρὸς λοιπὸν τὸ ΒΔ λόγος δοθείς· καὶ διελόντι τοῦ ΓΒ πρὸς τὸ ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ΔΒ πρὸς τὸ ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ΑΔ· τὸ ΑΒ ἄρα τοῦ ΒΓ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

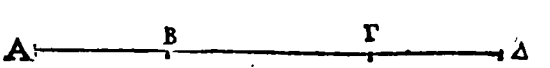
DEINDE vero AB utraque AΓ major ſit, data, quam in ratione: dico ipſam AB reliqua BΓ majorem eſſe, data, quam in ratione.

Auferatur data magnitudo AE; reliquæ ergo EB ad AΓ data eſt ratio: quare & ipſius AΓ ad EB data eſt ratio. fiat huic eadem ratio ipſius AΔ ad ΔE: itaque ipſius AΔ ad ΔE ratio data eſt: convertendo ergo [per 5.dat.] ipſius AΔ ad AE ratio data eſt; & invertendo ratio ipſius AE ad AΔ data eſt. data autem [ex hyp.] eſt AE: quare [per 2.dat.] tota AΔ data eſt. quoniam vero totius AΓ ad totam EB ratio data eſt; atque etiam ipſius AΔ ad EΔ ratio data: erit & reliquæ ΓΔ ad reliquam BΔ ratio data *: ideoq; dividendo [per converſ.6.dat.] ipſius ΓB ad BΔ ratio data eſt: quare & ipſius ΔB ad BΓ ratio data eſt. data autem eſt AΔ: quare AB ipſa BΓ major eſt, data, quam in ratione.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ τὸ μὲν πρῶτον μετὰ τοῦ δευτέρου ᾖ δοθέν, ἢ δὲ καὶ τὸ δεύτερον μετὰ τοῦ τρίτου δοθέν· τὸ πρῶτον πρὸς τρίτον ἤτοι ἴσον ἐστὶν, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζόν ἐστι.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, καὶ τὸ μὲν ΑΒ μετὰ τοῦ ΒΓ δοθὲν ἔστω τὸ ΑΓ, τὸ δὲ ΒΓ μετὰ τοῦ ΓΔ δοθὲν ἔστω τὸ ΒΔ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ ἤτοι ἴσον ἐστὶν, ἢ τὸ ἕτερον ἑτέρῳ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν.



Ἐπεὶ γὰρ δοθὲν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΑΓ, ΒΔ· τὰ δὲ δοθέντα ἤτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἄνισα. ἔστω πρότερον ἴσα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ τῷ ΒΔ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΒΓ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ λοιπῷ τῷ ΓΔ ἴσον ἐστί. Μὴ ἔστω δὴ ἴσα, ἀλλ' ἔστω μεῖζον τὸ ΑΓ τοῦ ΒΔ, καὶ κείσθω τῷ ΒΔ

PROP. XII.

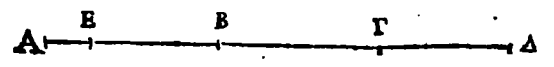
Si fuerint tres magnitudines, quarum prima cum ſecunda data ſit, atque etiam ſecunda cum tertia; aut prima tertiæ æqualis eſt, aut altera altera major eſt, data.

SInt tres magnitudines AB, BΓ, ΓΔ, & AB quidem cum BΓ data eſto, ſc. AΓ; atque etiam BΓ cum ΓΔ ſit data, nempe BΔ: dico magnitudinem AB aut magnitudini ΓΔ æqualem eſſe, aut alteram altera majorem eſſe, data.

Quoniam enim utraque magnitudinum AΓ, BΔ data eſt: datæ magnitudines æquales ſunt inter ſe, aut inæquales. Sint primum æquales; itaque æqualis eſt AΓ ipſi BΔ. communis auferatur BΓ; reliqua igitur AB reliquæ ΓΔ æqualis eſt. Sed non ſint inter ſe æquales; ſitque AΓ major ipſa BΔ, & ponatur ipſi

* Per 19. 5, quoniam prædictæ duæ rationes ſunt eædem & datæ.

B Δ æqualis Γ E. data autem eſt B Δ: ergo data eſt & Γ E. eſt autem [ex hyp.] tota A Γ data: quare [per 4. dat.] & reliqua A B data eſt. quoniam vero æqualis eſt E Γ ipſi B Δ, communis auferatur B Γ: reliqua ergo B E reliquæ Γ Δ æqualis eſt. data autem eſt magnitudo A E: quare [per 9. def. dat.] A B ipſa Γ Δ major eſt, data.



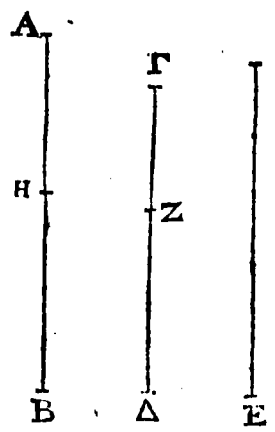
ἴσον τὸ Γ E. δοθὲν δὲ τὸ B Δ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Γ E. ἔστι δὲ καὶ ὅλον τὸ A Γ δοθέν, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ A E δοθέν ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ E Γ τῷ B Δ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ B Γ· λοιπὸν ἄρα τὸ B E λοιπῷ τῷ Γ Δ ἴσον ἐστί. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ A E· τὸ A B ἄρα τῷ Γ Δ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν.

PROP. XIII.

Si fuerint tres magnitudines, & earum prima ad ſecundam habeat rationem datam, ſecunda autem tertia major ſit, data, quam in ratione; prima quoque tertia major erit, data, quam in ratione.

SInt tres magnitudines A B, Γ Δ, E, & A B quidem ad Γ Δ habeat rationem datam; magnitudo autem Γ Δ magnitudine E major eſto, data, quam in ratione: dico quod magnitudo A B magnitudine E major eſt, data, quam in ratione.

Quoniam enim Γ Δ ipſa E major eſt, data, quam in ratione, auferatur data magnitudo Γ Z: igitur [per 11. def. dat.] reliquæ Δ Z ad E ratio eſt data. cumque [ex hyp.] ratio ipſius A B ad Γ Δ data ſit; fiat huic eadem ratio ipſius A H ad Γ Z: itaque ratio ipſius Γ Z ad A H data eſt. eſt autem Γ Z data: ergo [per 2. dat.] A H data eſt: quare [per 19. 5.] & reliquæ H B ad reliquam Δ Z ratio data eſt. ipſius autem Δ Z ad E ratio [ex hyp.] data eſt: quare [per 8. dat.] & ipſius H B ad E ratio data eſt. data autem eſt A H: ergo A B ipſa E major eſt, data, quam in ratione.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ τὸ μὴν πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον λόγον ἔχῃ δεδομένον, τὸ δὲ δεύτερον πρὸς τὸ τρίτον, δοθέντι, μεῖζον ᾖ ἢ ἐν λόγῳ καὶ τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ A B, Γ Δ, E, καὶ τὸ μὲν A B πρὸς τὸ Γ Δ λόγον ἐχέτω δεδομένον, τὸ δὲ Γ Δ τοῦ E, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι καὶ τὸ A B τοῦ E, δοθέντι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

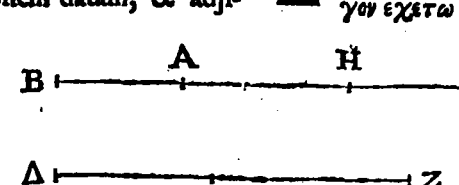
Ἐπεὶ γὰρ τὸ Γ Δ τοῦ E, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ Γ Z· λοιπὸν ἄρα τὸ Δ Z πρὸς τὸ E λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ A B πρὸς τὸ Γ Δ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τοῦ A H πρὸς τὸ Γ Z· λόγος ἄρα καὶ τοῦ Γ Z πρὸς τὸ A H δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ Γ Z· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ A H· καὶ λοιπὸν ἄρα τοῦ H B πρὸς λοιπὸν τὸ Δ Z λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ Δ Z πρὸς τὸ E λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ H B ἄρα πρὸς τὸ E λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ A H· τὸ A B ἄρα τοῦ E, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

PROP. XIV.

Si duæ magnitudines ad invicem habeant rationem datam; utrique autem illarum adjiciatur data magnitudo: totæ ad invicem aut habebunt rationem datam, aut altera altera major erit, data, quam in ratione.

DUÆ enim magnitudines A B, Γ Δ ad invicem habeant rationem datam, & adjiciatur utrique earum data magnitudo, tam A E quam Γ Z: dico quod totæ E B, Z Δ aut habent ad invicem rationem datam, aut altera altera major eſt, data, quam in ratione.

Quoniam enim data eſt utraque E A, Z Γ, ipſius quoque E A ad Z Γ [per 1. dat.] data eſt ratio. &



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ προστεθῇ ἑκατέρῳ αὐτῶν δεδομένον μέγεθος· τὰ ὅλα πρὸς ἄλληλα ἤτοι λόγον ἕξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ A B, Γ Δ πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω δεδομένον, καὶ προσκείσθω ἑκατέρῳ αὐτῶν δεδομένον μέγεθος, τὸ μὲν A E καὶ τὸ Γ Z· λέγω ὅτι ὅλα τὰ E B, Z Δ πρὸς ἄλληλα ἤτοι λόγον ἔχει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ δοθέν ἐστιν ἑκάτερον τῶν E A, Z Γ, λόγος ἄρα τοῦ E A πρὸς τὸ Z Γ δοθείς. καὶ εἰ μὲν ὁ αὐ-

ὁ αὐτὸς τῷ τῦ ΑΒ πρὸς ΓΔ, ἕξει καὶ ὅλη τῦ ΕΒ πρὸς ὅλην τὸ ΖΔ λόγος δοθείς. Μὴ ἔστω δὲ ὁ αὐτὸς, καὶ πεποιήσθω ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ ἕτως τὸ ΗΑ πρὸς τὸ ΓΖ· λόγος ἄρα καὶ τῦ ΗΑ πρὸς τὸ ΓΖ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΓΖ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΗΑ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΕΑ δοθέν· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΗ δοθὲν ἐστι. καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ ἕτως τὸ ΗΑ πρὸς τὸ ΓΖ, λόγος καὶ τῦ ΗΒ πρὸς τὸ ΖΔ δοθείς. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ΕΗ· τὸ ΕΒ ἄρα τῦ ΖΔ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

igitur si hæc ratio eadem fit quæ ipsius AB ad ΓΔ; totius quidem EB ad totam ZΔ ratio [per 12. 5.] data erit. At vero non sit eadem; & fiat ut AB ad ΓΔ ita HA ad ΓZ: itaque ratio ipsius HA ad ΓZ data est. est autem magnitudo ΓZ data: quare [per 2. dat.] HA data est. sed & ipsa EA data est: ergo [per 4. dat.] etiam reliqua EH data est. quoniam vero ut AB ad ΓΔ ita HA ad ΓZ, ratio quoque ipsius HB ad ZΔ [per 12. 5.] data est. data autem est magnitudo EH: quare [per 11. def. dat.] magnitudo EB magnitudine ZΔ major est, data, quam in ratione.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

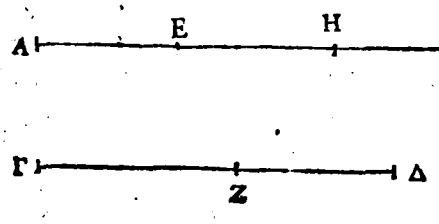
Ἐὰν δύο μεγέθη τοῦς ἄλληλα λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν δεδομένον μέγεθος· τὰ λοιπὰ τοῦς ἄλληλα ἤτοι λόγον ἕξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

Prop. XV.

Si duæ magnitudines habeant ad invicem rationem datam, & ab utraque earum auferatur data magnitudo: reliquæ magnitudines aut ad invicem habebunt rationem datam; aut altera altera major erit, data, quam in ratione.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω δεδομένον, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ ἑκατέρου αὐτῶν δεδομένον μέγεθος, ἀπὸ μὲν τῦ ΑΒ τὸ ΑΕ, ἀπὸ δὲ τῦ ΓΔ τὸ ΓΖ· λέγω ὅτι τὰ λοιπὰ τὰ ΕΒ, ΖΔ πρὸς ἄλληλα ἤτοι λόγον ἕξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

Duæ enim magnitudines AB, ΓΔ habeant ad invicem rationem datam, & auferatur ab utraque earum data magnitudo; à magnitudine quidem AB magnitudo AE, à magnitudine autem ΓΔ magnitudo ΓZ: dico quod reliquæ EB, ZΔ aut habent ad invicem rationem datam, aut altera altera major est, data, quam in ratione.



Ἐπεὶ γὰρ ἑκάτερον τῶν ΑΕ, ΓΖ δοθέν ἐστι, λόγος τῦ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ ἐστὶ δοθείς. Καὶ εἰ μὲν ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ ἔσται καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ λόγος δοθείς. Μὴ ἔστω δὴ ὁ αὐτὸς, καὶ πεποιήσθω ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ ἕτως τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΖ. λόγος ἢ τῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῦ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΖ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΓΖ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΑΗ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΕ δοθέν· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΗ δοθέν. καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ ἕτως τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΖ· λοιπὸν ἄρα τῦ ΗΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ΕΗ· τὸ ΕΒ ἄρα τῦ ΖΔ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Quoniam enim utraque AE, ΓZ data est, ratio etiam ipsius AE ad ΓZ data est. Si igitur ratio hæc eadem sit quæ ipsius AB ad ΓΔ; erit [per 19.5.] & reliquæ EB ad reliquam ZΔ ratio data. At vero non sit eadem; & fiat ut AB ad ΓΔ ita AH ad ΓZ. est autem ipsius AB ad ΓΔ ratio data: ergo ratio magnitudinis AH ad ΓZ data est. verum [ex hyp.] ΓZ data est: quare [per 2.dat.] data est AH. est autem & AE data; reliqua igitur EH [per 4.dat.] data est. quoniam vero ut AB ad ΓΔ ita est AH ad ΓZ; itaque [per 19.5.] reliquæ HB ad reliquam ZΔ ratio est data. & data est EH; quare EB ipsa ZΔ major est, data, quam in ratione.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις'.

Ἐν δύο μεγέθη τοῦς ἄλληλα λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ ἀπὸ μὲν ἑνὸς αὐτῶν δεδομένον μέγεθος ἀφαιρεθῇ, τῷ δὲ ἑτέρῳ αὐτῶν δεδομένον μέγεθος προστεθῇ· τὸ ὅλον τῦ λοιπῦ, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

Prop. XVI.

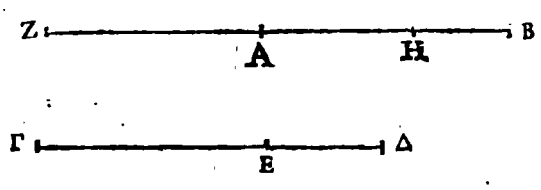
Si duæ magnitudines ad invicem habeant rationem datam; & ab una quidem illarum auferatur data magnitudo, alteri autem earum adjiciatur data magnitudo: tota quidem reliqua major erit, data, quam in ratione.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ λόγον ἐχέτω δεδομένον, καὶ ἀπὸ τῦ μὲν ΓΔ δεδομένον μέγεθος ἀφῃρήσθω τὸ ΓΕ, τῷ δὲ ΑΒ δεδομένον μέγεθος προσ-

Duæ enim magnitudines AB, ΓΔ habeant ad invicem rationem datam, & à ΓΔ quidem auferatur data magnitudo ΓE; magnitudini autem AB adjiciatur data magnitudo

Z A: dico totam Z B reliqua E Δ majorem esse, datâ, quam in ratione.

Quoniam enim ratio ipsius AB ad Γ Δ data est; fiat huic eadem ratio ipsius A H ad Γ E: ergo [per 2. def. dat.] ratio ipsius A H ad Γ E data est. data autem est Γ E: itaque [per 2. dat.] A H data est. est autem & A Z data: quare [per 3. dat.] tota Z H data est. & quoniam est ut A B ad Γ Δ ita A H ad Γ E; ratio etiam reliquæ H B ad reliquam E Δ [per 19. 5.] data erit. sed & data est H Z: ergo [per 11. def. dat.] magnitudo Z B magnitudine E Δ major est, data, quam in ratione.



κείσθω τὸ Z A· λέγω ὅτι ὅλον τὸ Z B λοιπῷ τῷ E Δ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

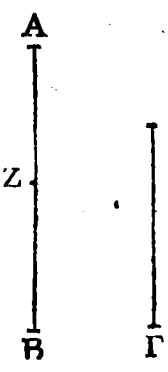
Ἐπεὶ γὰρ λόγος ἐστὶ τοῦ A B πρὸς τὸ Γ Δ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω τοῦ A H πρὸς τὸ Γ E· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ A H πρὸς τὸ Γ E δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ Γ E· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ A H. ἔστι δὲ καὶ τὸ A Z δοθέν· ὅλον ἄρα τὸ Z H δοθέν ἐστι. καὶ ἐπεὶ ὡς τὸ A B πρὸς τὸ Γ Δ οὕτω τὸ A H πρὸς τὸ Γ E· λοιπὸν ἄρα τοῦ H B πρὸς λοιπὸν τὸ E Δ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ H Z· τὸ Z B ἄρα τοῦ E Δ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Prop. XVII.

Si fuerint tres magnitudines, & prima quidem secunda major sit, data, quam in ratione; tertia autem eadem secunda major sit, data, quam in ratione: prima ad tertiam aut rationem habebit datam; aut altera altera major erit, data, quam in ratione.

Sint tres magnitudines A B, Γ, Δ E, & utraque magnitudinum A B, Δ E magnitudine Γ major sit, data, quam in ratione: dico magnitudines A B, Δ E aut ad invicem habere rationem datam; aut alteram altera majorem esse, data, quam in ratione.

Quoniam enim magnitudo A B magnitudine Γ major est, data, quam in ratione; auferatur data magnitudo A Z: ergo [per 11. def. dat.] reliquæ Z B ad Γ ratio est data. rursus quia Δ E ipsa Γ major est, data, quam in ratione; auferatur data magnitudo Δ H: ergo reliquæ H E ad Γ ratio est data. ipsius vero Z B ad Γ ratio est data: igitur [per 8. dat.] ratio ipsius Z B ad H E data est. adjiciuntur vero ipsis datæ magnitudines A Z, Δ H: igitur [per 14. dat.] totæ A B, Δ E aut habent ad invicem rationem datam; aut altera altera major est, data, quam in ratione.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ τὸ πρῶτον τοῦ δευτέρου, δοθέντι, μεῖζον ᾖ ἢ ἐν λόγῳ, ᾖ δὲ καὶ τὸ τρίτον τοῦ αὐτοῦ, δοθέντι, μεῖζον ᾖ οὐκ ἐν λόγῳ· τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον ἤτοι λόγον ἕξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ οὐκ ἐν λόγῳ.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ A B, Γ, Δ E, καὶ ἑκάτερον τῶν A B, Δ E τοῦ Γ, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ οὐκ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι τὰ A B, Δ E ἤτοι πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ A B τοῦ Γ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ A Z· λοιπὸν ἄρα τοῦ Z B πρὸς τὸ Γ λόγος ἐστὶ δοθείς. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Δ E τοῦ Γ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ Δ H· λοιπὸν ἄρα τοῦ H E πρὸς τὸ Γ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ Z B πρὸς τὸ Γ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ λόγος ἄρα τοῦ Z B πρὸς τὸ H E ἐστὶ δοθείς. ᾧ πρόσκειται αὐτοῖς δεδομένα μεγέθη τὰ A Z, Δ H· τὰ ὅλα ἄρα τὰ A B, Δ E ἤτοι πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Prop. XVIII.

Si fuerint tres magnitudines, atque ex his una utraque reliquarum major sit, data, quam in ratione: reliquæ duæ aut datam rationem habebunt ad invicem, aut altera altera major erit, data, quam in ratione.

Sint tres magnitudines A B, Γ Δ, E Z; atque ex his una, nempe Γ Δ, utraque reliquarum A B, E Z major sit, data, quam in ratione: dico

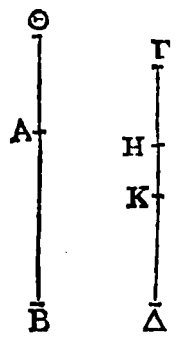
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, ἓν δὲ αὐτῶν ἑκάτερον τῶν λοιπῶν, δοθέντι, μεῖζον ᾖ ἢ ἐν λόγῳ· τὰ λοιπὰ δύο πρὸς ἄλληλα ἤτοι λόγον ἕξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ A B, Γ Δ, E Z, ἓν δὲ αὐτῶν τὸ Γ Δ τοῦ ἑκατέρου τῶν λοιπῶν τῶν A B, E Z, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι τὰ

τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΖ ἤτοι λόγον ἔχει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τῶν ἑτέρων, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΓΔ τοῦ ΑΒ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΓΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΔ πρὸς τὸ ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τοῦ ΓΗ πρὸς τὸ ΑΘ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΓΗ πρὸς τὸ ΑΘ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΓΗ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΑΘ· καὶ ὅλον τοῦ ΓΔ πρὸς ὅλον τὸ ΘΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. πάλιν ἐπεὶ τὸ ΓΔ τοῦ ΕΖ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΓΚ· λοιπὸν ἄρα τοῦ ΚΔ πρὸς τὸ ΕΖ λόγος ἐστὶ δοθείς. ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω, ὁ τοῦ ΓΚ πρὸς τὸ ΛΕ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΓΚ πρὸς τὸ ΛΕ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΓΚ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΛΕ· καὶ ὅλον τοῦ ΓΔ πρὸς ὅλον τὸ ΛΖ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ΓΔ πρὸς τὸ ΘΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΘΒ ἄρα πρὸς τὸ ΛΖ λόγος ἐστὶ δοθείς. ☾ ἀφῃρῆ) ἀπ' αὐτῶν δεδομένα μεγέθη τὰ ΘΑ, ΛΕ· τὰ ΑΒ, ΕΖ ἄρα ἤτοι πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.



aut magnitudinem AB ad EZ rationem habere datam; aut alteram altera majorem esse, data, quam in ratione.

Quoniam enim magnitudo ΓΔ magnitudine AB major est, data, quam in ratione; auferatur data magnitudo ΓH: ergo reliquæ HΔ ad AB ratio est data. fiat huic eadem ratio ipsius ΓH ad AΘ: itaque ratio ipsius ΓH ad AΘ data est. est autem ΓH data; quare AΘ data est: itaque [per 12. 5.] & totius ΓΔ ad totam ΘB ratio est data. rursus cum ΓΔ ipsa EZ major sit, data, quam in ratione; auferatur data magnitudo ΓK: itaque [per 11. def. dat.] reliquæ KΔ ad EZ ratio est data. fiat huic eadem ratio ipsius ΓK ad ΛE: ergo ipsius ΓK ad ΛE data est ratio. data autem est ΓK: quare ΛE data est: ergo [per 12. 5.] & totius ΓΔ ad totam ΛZ ratio est data. ipsius autem ΓΔ ad ΘB ratio est data: quare [per 8. dat.] & ipsius ΘB ad ΛZ ratio est data. ablatæ autem sunt ab ipsis datæ magnitudines ΘA, ΛE: quare [per 15. dat.] AB, EZ aut ad invicem habent rationem datam, aut altera altera major est, data, quam in ratione.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

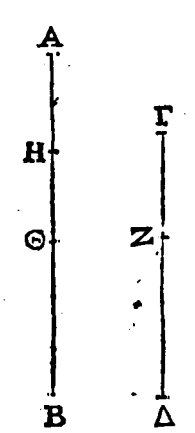
Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ τὸ μὲν πρῶτον τοῦ δευτέρου, δοθέντι, μεῖζον ᾖ ἢ ἐν λόγῳ, ᾖ δὲ καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τρίτου, δοθέντι, μεῖζον ἢ ἐν λόγῳ· καὶ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

PROP. XIX. THEOR.

Si fuerint tres magnitudines, & prima quidem magnitudo secunda magnitudine major sit, data, quam in ratione; sit autem secunda tertia major, data, quam in ratione: prima quidem tertia major erit, data, quam in ratione.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ, Ε, καὶ τὸ μὲν ΑΒ τοῦ ΓΔ, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ, τὸ δὲ ΓΔ τοῦ Ε, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι καὶ τὸ ΑΒ τοῦ Ε, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΓΔ τοῦ Ε, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΓΖ· λοιπὸν ἄρα τοῦ ΖΔ πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς. πάλιν ἐπεὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ· ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ ΑΗ· λοιπὸν ἄρα τοῦ ΗΒ πρὸς τὸ ΓΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω τοῦ ΗΘ πρὸς τὸ ΓΖ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΗΘ πρὸς τὸ ΓΖ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΓΖ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΗΘ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΗΑ δοθέν· ☾ ὅλον ἄρα τὸ ΘΑ δοθέν ἐστι. ☾ ἐπεὶ ἐστιν ὡς τὸ ΗΒ πρὸς τὸ ΓΔ οὕτω καὶ τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΓΖ, καὶ λοιπὸν τοῦ ΘΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. ᾖ δὲ ΖΔ πρὸς τὸ Ε λόγος ἐστὶ δοθείς·



SInt tres magnitudines AB, ΓΔ, E, & magnitudo quidem AB magnitudine ΓΔ major sit, data, quam in ratione; magnitudo autem ΓΔ magnitudine E major sit, data, quam in ratione: dico quod AB ipsa E major est, data, quam in ratione.

Quoniam enim ΓΔ ipsa E major est, data quam in ratione; auferatur data magnitudo ΓZ: ergo [per 11. def. dat.] reliquæ ZΔ ad E data est ratio. rursus quia AB ipsa ΓΔ major est, data, quam in ratione; auferatur data magnitudo AH: ergo reliquæ HB ad ΓΔ ratio est data. Fiat huic eadem ratio ipsius HΘ ad ΓZ; itaque ipsius HΘ ad ΓZ ratio est data. est autem ΓZ data: quare HΘ data est. sed & HA data est: quare [per 3. dat.] tota magnitudo ΘA data est. quoniam vero [ex hyp.] est ut HB ad ΓΔ ita HΘ ad ΓZ; reliquæ quoque ΘB ad reliquam ZΔ ratio est * data. ipsius autem ZΔ ad E ratio est data: quare

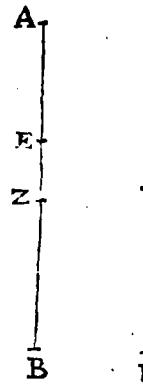
* Quia, per 19. 5, est eadem cum prædictis rationibus datis.

[per 8. dat.] ipsius ΘB ad E ratio est data. verum data est magnitudo ΘA: itaque [per 11. def. dat.] BA ipsa E major est, data, quam in ratione.

καὶ ἔστι ΘB ἄρα πρὸς τὸ E λόγος ἐκτὸς δοθείς. καὶ δοθὲν τὸ ΘA· τὸ BA ἄρα τῷ E, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

ALITER

Sint tres magnitudines AB, Γ, Δ, & AB quidem ipsa Γ major esto, data, quam in ratione; sit autem & Γ ipsa Δ major, data, quam in ratione: dico quod AB ipsa Δ major est, data, quam in ratione.



Quoniam enim AB ipsa Γ major est, data, quam in ratione, auferatur data magnitudo AE: ergo [per 11. def. dat.] reliquæ EB ad Γ ratio data est. est autem [ex hyp.] magnitudo Γ magnitudine Δ major, data, quam in ratione: quare [per 13. dat.] EB ipsa Δ major est, data, quam in ratione. auferatur data magnitudo EZ: reliquæ igitur ZB ad Δ ratio data est. data autem [per 3. dat.] est AZ: itaque AB ipsa Δ major est, data, quam in ratione.

ΑΛΛΩΣ

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ AB, Γ, Δ, καὶ δύο μὲν AB καὶ Γ, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ, τὸ δὲ Γ τῷ Δ, δοθέντι, μεῖζόν ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι τὸ AB τῷ Δ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ AB τοῦ Γ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ, ἀφῃρήσθω δοθὲν μέγεθος τὸ AE· λοιπὸ ἄρα τὸ EB πρὸς τὸ Γ λόγος ἐστὶ δοθείς. τὸ δὲ Γ τῷ Δ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ· καὶ τὸ EB ἄρα τῷ Δ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ. ἀφῃρήσθω ἴσον τὸ δοθὲν μέγεθος τὸ EZ· λοιπὸ ἄρα τὸ ZB πρὸς τὸ Δ λόγον ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ AZ· τὸ AB ἄρα τῷ Δ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

PROP. XX.

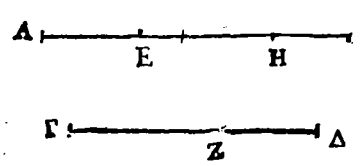
Si datæ fuerint duæ magnitudines, & auferantur ab ipsis magnitudines habentes ad invicem rationem datam; reliquæ magnitudines aut habebunt ad invicem rationem datam, aut altera altera major erit, data, quam in ratione.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐὰν ᾖ δύο μεγέθη δεδομένα, καὶ ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτῶν μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα δεδομένον· τὰ λοιπὰ πρὸς ἄλληλα ἤτοι λόγον ἕξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τῷ ἑτέρῳ, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

SInt duæ datæ magnitudines AB, ΓΔ, & ab AB, ΓΔ auferantur magnitudines AE, ΓZ habentes ad invicem rationem datam: dico quod magnitudines EB, ZΔ aut habebunt ad invicem rationem datam; aut altera altera major erit, data, quam in ratione.

Quoniam enim data est utraque AB, ΓΔ; [per 1. dat.] ipsius quoque AB ad ΓΔ ratio data est. Itaque si eadem sit quæ ipsius AE ad ΓZ; erit [per 19. 5.] & reliquæ EB ad reliquam ZΔ ratio data. At vero non sit eadem; & fiat ut AE ad ΓZ ita AH ad ΓΔ. est autem [ex hyp.] ratio ipsius AE ad ΓZ data: itaque ratio ipsius AH ad ΓΔ data est. data autem est ΓΔ: itaque [per 2. dat.] data est AH. sed & data est AB: reliqua igitur HB [per 4. dat.] data est. & quoniam est ut AE ad ΓZ ita AH ad ΓΔ; etiam [per 19. 5.] reliquæ EH ad reliquam ZΔ ratio data est. sed & data est HB: quare [per 11. def. dat.] magnitudo EB magnitudine ZΔ major est, data, quam in ratione.



Ἔστω δύο μεγέθη δεδομένα τὰ AB, ΓΔ, καὶ ἀπὸ τῶν AB, ΓΔ ἀφῃρήσθω μεγέθη τὰ AE, ΓZ λόγον ἔχοντα πρὸς ἄλληλα δεδομένον· λέγω ὅτι τὰ EB, ZΔ πρὸς ἄλληλα ἤτοι λόγον ἕξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τῷ ἑτέρῳ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ δοθέν ἐστιν ἑκάτερον τῶν AB, ΓΔ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ AB πρὸς τὸ ΓΔ δοθείς. καὶ εἰ μὲν ὁ αὐτός ἐστι τῷ AE πρὸς τὸ ΓZ· ἔστιν καὶ λοιπῷ τῷ EB πρὸς λοιπὸν τὸ ZΔ λόγος δοθείς. μὴ ἔστω δὴ ὁ αὐτός, καὶ πεποιήσθω ὡς τὸ AE πρὸς τὸ ΓZ οὕτως τὸ AH πρὸς τὸ ΓΔ. λόγος δὲ τοῦ AE πρὸς τὸ ΓZ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τοῦ AH πρὸς τὸ ΓΔ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΓΔ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ AH. ἔστι δὲ καὶ τὸ AB δοθέν· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ HB δοθέν ἐστι. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ AE πρὸς τὸ ΓZ οὕτω τὸ AH πρὸς τὸ ΓΔ, καὶ λοιπὸν τοῦ EH πρὸς λοιπὸν τὸ ZΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ HB· τὸ EB ἄρα τῷ ZΔ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

PROP. XXI.

Si fuerint duæ magnitudines datæ, & adjiciantur ipsis alteræ magnitudines habentes ad invicem rationem datam;

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Ἐὰν ᾖ δύο μεγέθη δεδομένα, καὶ προστεθῇ αὐτοῖς μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα δεδομέ-

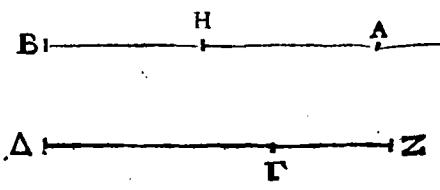
νον·

νον· τὰ ὅλα τοῖς ἀλλήλοις ἤτοι λόγον ἕξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζον ἔσται ἢ ἐν λόγῳ.

totæ aut habebunt ad invicem rationem datam, aut altera altera major erit, data, quam in ratione.

Ἔστω δύο μεγέθη δεδομένα τὰ ΑΒ, ΓΔ, καὶ προσκείσθω αὐτοῖς μεγέθη τὰ ΑΕ, ΓΖ λόγον ἔχοντα πρὸς ἄλληλα δεδομένον· λέγω ὅτι τὰ ὅλα τὰ ΕΒ, ΖΔ πρὸς ἄλληλα ἤτοι λόγον ἕξει δεδομένον, ἢ τὸ ἕτερον τοῦ ἑτέρου, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.

Ἐπεὶ γὰρ δοθὲν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΓΔ· λόγος ἄρα τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ δοθείς. καὶ ἐὰν μὲν ὁ αὐτὸς ἐστι τῷ τοῦ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ, ἔσται καὶ ὅλου τοῦ ΕΒ πρὸς ὅλον τὸ ΖΔ λόγος δοθείς. εἰ δὲ οὔ· πεποιήσθω ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ οὕτως τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΔ· λόγος ἄρα τοῦ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΔ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΓΔ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΑΗ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΒ δοθέν· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΒ δοθέν ἐστι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΕΑ πρὸς τὸ ΓΖ οὕτως τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΔ· καὶ ὅλου τοῦ ΕΗ πρὸς ὅλον τὸ ΖΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ δοθὲν τὸ ΗΒ· τὸ ΕΒ ἄρα τοῦ ΖΔ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἢ ἐν λόγῳ.



SInt duæ magnitudines datæ ΑΒ, ΓΔ, & adjiciantur ipsis magnitudines ΑΕ, ΓΖ, habentes ad invicem rationem datam: dico quod totæ ΕΒ, ΖΔ aut habebunt ad invicem rationem datam; aut altera altera major erit, data, quam in ratione.

Quoniam enim data est utraque ΑΒ, ΓΔ; ipsius quidem ΑΒ ad ΓΔ ratio data est. Si igitur eadem sit quæ ipsius ΑΕ ad ΓΖ, erit [per 12. 5.] & totius ΕΒ ad totam ΖΔ ratio data. Sin autem non sit eadem; fiat ut ΑΕ ad ΓΖ ita ΑΗ ad ΓΔ: itaque ratio ipsius ΑΗ ad ΓΔ data est. est autem ΓΔ data: ergo [per 2. dat.] ΑΗ data est. sed & ΑΒ data est: quare [per 4. dat.] reliqua ΗΒ data est. & quoniam est ut ΕΑ ad ΓΖ ita ΑΗ ad ΓΔ: totius igitur ΕΗ ad totam ΖΔ ratio [per 12. 5.] data est. data vero est ΗΒ: quare [per 11. def. 5.] magnitudo ΕΒ magnitudine ΖΔ major est, data, quam in ratione.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϐ'.

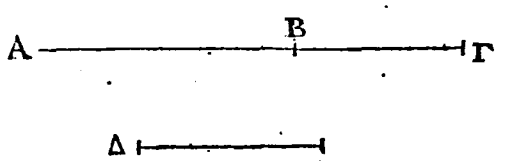
Ἐὰν δύο μεγέθη πρός τι μέγεθός τινα λόγον ἔχῃ δεδομένον· καὶ τὸ συναμφότερον πρὸς αὐτὸ λόγον ἕξει δεδομένον.

PROP. XXII.

Si duæ magnitudines ad aliam aliquam magnitudinem habeant rationem datam; & simul utraque ad eandem illam habebit rationem datam.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ ΑΒ, ΒΓ πρός τι μέγεθος τὸ Δ λόγον ἐχέτω δεδομένον· λέγω ὅτι καὶ τὸ συναμφότερον τὸ ΑΓ πρὸς τὸ αὐτὸ Δ λόγον ἔχει δεδομένον.

Ἐπεὶ γὰρ ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει δεδομένον· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΓ δοθείς· καὶ συνθέντι τοῦ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ΒΓ πρὸς τὸ Δ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγος ἐστὶ δοθείς.



DUÆ enim magnitudines ΑΒ, ΒΓ ad aliquam aliam magnitudinem Δ habeant rationem datam: dico quod simul utraque ΑΓ ad illam eandem Δ rationem habet datam.

Quoniam enim utraque ΑΒ, ΒΓ ad Δ rationem habet datam: ratio ipsius ΑΒ ad ΒΓ [per 8. dat.] data est: quare componendo [per 6. dat.] ipsius ΑΓ ad ΓΒ ratio est data. ipsius autem ΒΓ ad Δ [ex hyp.] data est ratio: ideoque [per 8. dat.] ipsius ΑΓ ad Δ ratio est data.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Ἐὰν ὅλον πρὸς ὅλον λόγον ἔχῃ δεδομένον, ἔχῃ δὲ καὶ τὰ μέρη πρὸς τὰ μέρη λόγους δεδομένους, μὴ τοὺς αὐτούς δὲ· καὶ πάντα πρὸς πάντα λόγους ἕξει δεδομένους.

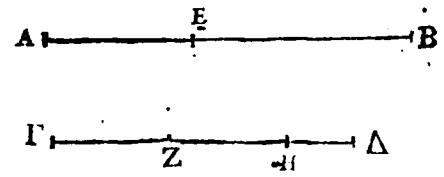
PROP. XXIII.

Si totum ad totum habeat rationem datam; habeant autem & partes ad partes rationes datas, etsi non easdem: habebunt omnia ad omnia rationes datas.

Ἐχέτω γὰρ ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ λόγον δεδομένον, ἐχέτω δὲ καὶ τὰ ΑΕ, ΕΒ μέρη πρὸς τὰ ΓΖ, ΖΔ μέρη λόγους δεδομένους, μὴ τοὺς αὐτοὺς δέ· λέγω ὅτι καὶ πάντα πρὸς πάντα λόγους ἕξει δεδομένους.

HAbeat enim totum ΑΒ ad totum ΓΔ rationem datam; habeant autem & partes ΑΕ, ΕΒ, ad partes ΓΖ, ΖΔ rationes datas, etsi non easdem: dico etiam omnia ad omnia rationes datas habere.

Quoniam enim ipſius AE, ad ΓZ ratio data eſt; fiat huic eadem ratio ipſius AB ad ΓH: igitur ratio ipſius AB ad ΓH data eſt: quare [per 19. 5. & 2. def. dat.] reliquæ EB ad reliquam ZH ratio eſt data. data autem [ex hyp.] eſt ratio ipſius EB ad ZΔ: ergo [per 8. dat.] ipſius ZΔ ad ZH ratio data eſt: quare convertendo [per 5. dat.] ipſius ZΔ ad ΔH data eſt ratio. & quoniam ipſius BA ad utramque ΔΓ, ΓH, data eſt ratio: etiam [per 8. dat.] ipſius ΔΓ ad ΓH ratio data eſt: unde convertendo [per 5. dat.] ipſius ΓΔ ad ΔH ratio data eſt. ſed [ex hactenus oſtenſis] ipſius HΔ ad ZΔ data eſt ratio: quare [per 8. dat.] & ipſius ΓΔ ad ΔZ data eſt ratio: adeoque [per 5. dat.] & ipſius ΓZ ad ΔZ ratio data eſt. ſed [ex hyp.] ipſius ΓZ quidem ad AE data eſt ratio, atque ipſius ZΔ ad BE ratio data eſt: quamobrem & omnium ad omnia rationes datæ ſunt.



Επει γαρ λόγος ἐστὶ τῆ̃ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ δοθεὶς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τῆ̃ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΗ· λόγος ἄρα καὶ τῆ̃ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΗ ἐστὶ δοθείς. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΗ λόγος δοθείς. καὶ δὲ ΕΒ πρὸς τὸ ΖΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆ̃ ΖΔ ἄρα πρὸς τὸ ΖΗ λόγος ἐστὶ δοθείς· ἀναστρέψαντι ἄρα καὶ τῆ̃ ΖΔ πρὸς τὸ ΔΗ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆ̃ ΒΑ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΓ, ΓΗ δοθείς· καὶ τῆ̃ ΔΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΗ λόγος ἐστὶ δοθείς· ἀναστρέψαντι ἄρα καὶ τῆ̃ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΗ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἀλλὰ τῆ̃ ΗΔ πρὸς τὸ ΖΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆ̃ ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ΔΖ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τῆ̃ ΓΖ πρὸς τὸ ΔΖ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἀλλὰ τῆ̃ μὲν ΓΖ πρὸς τὸ ΑΕ λόγος ἐστὶ δοθείς, τῆ̃ δὲ ΖΔ πρὸς τὸ ΒΕ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε πάντων πρὸς πάντα λόγος ἐστὶ δοθείς.

PROP. XXIV.

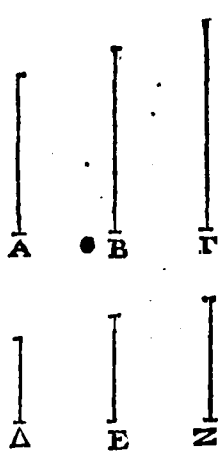
Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint; prima autem ad tertiam habeat rationem datam: ea etiam ad ſecundam datam rationem habebit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἡ δὲ πρώτη πρὸς τρίτην λόγον ἔχῃ δεδομένον· καὶ πρὸς τὴν δευτέραν λόγον ἕξει δεδομένον.

SInt tres rectæ lineæ proportionales A, B, Γ, ſitque ut A ad B ita B ad Γ; habeat autem A ad Γ rationem datam: dico ipſam quoque ad B rationem datam habere.

Exponatur enim recta data Δ. & quoniam ratio ipſius A ad Γ data eſt; fiat huic eadem ratio ipſius Δ ad Z: igitur ratio Δ ad Z data eſt. eſt autem Δ data: ergo [per 2. dat.] etiam Z data eſt. ſumatur autem [per 13. 6.] inter duas rectas Δ, Z media proportionalis E: igitur [per 17. 6.] quod continetur ſub Δ, Z æquale eſt quadrato rectæ E: id autem quod continetur ſub Δ, Z datum eſt; quia data eſt utraque rectarum Δ, Z: quare [per 1. def. dat.] quadratum rectæ E datum eſt: ergo data eſt recta E. eſt autem Δ data: quare [per 1. dat.] ipſius Δ ad E ratio data eſt. quoniam vero [ex hyp.] eſt ut A ad Γ ita Δ ad Z: ſed ut A quidem ad Γ ita [per 1. 6.] quadratum rectæ A ad id quod continetur ſub rectis A, Γ; ut vero Δ ad Z ita quadratum rectæ Δ ad id quod continetur ſub rectis Δ, Z: erit ergo ut quadratum rectæ A ad id quod continetur ſub rectis A, Γ ita quadratum rectæ Δ ad id quod continetur ſub rectis Δ, Z. ſed [per 17. 6.] id quod continetur quidem ſub rectis A, Γ æquale eſt quadrato rectæ B; quia [ex hyp.] proportionales ſunt A, B, Γ; ei autem quod continetur ſub Δ, Z æquale eſt quadratum rectæ E: quare ut quadratum rectæ A ad quadratum rectæ B ita eſt quadratum rectæ Δ ad quadratum



Ἐστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, καὶ ἔστω ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἡ δὲ Α πρὸς τὴν Γ λόγον ἐχέτω δεδομένον· λέγω ὅτι καὶ πρὸς τὴν Β λόγον ἕξει δεδομένον.

Ἐκκείσθω γὰρ δοθεῖσα ἡ Δ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆ̃ Α πρὸς τὴν Γ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τῆ̃ Δ πρὸς τὴν Ζ· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ τῆ̃ Δ πρὸς τὴν Ζ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ Δ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ Ζ. εἰλήφθω τῶν Δ, Ζ μέση ἀνάλογον ἡ Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Δ, Ζ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆ̃ Ε. δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ, δοθεῖσα γὰρ ἑκατέρα αὐτῶν· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆ̃ Ε δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ Ε. ἔστι δὲ καὶ ἡ Δ δοθεῖσα· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆ̃ Δ πρὸς τὴν Ε δοθείς. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆ̃ Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ, ὡς δὲ ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆ̃ Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆ̃ Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆ̃ Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆ̃ Β, αἱ γὰρ Α, Β, Γ ἀνάλογόν εἰσι· τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆ̃ Ε· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆ̃ Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆ̃ Β οὕτω τὸ ἀπὸ τῆ̃ Δ πρὸς

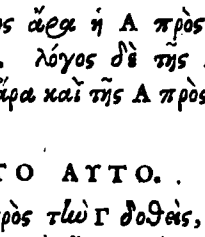
τὸ

τὸ ἀπὸ τῆς Ε· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτω ἡ Δ πρὸς τὴν Ε. λόγος δὲ τῆς Δ πρὸς τὴν Ε δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς Α πρὸς τὴν Β δοθείς.

rectæ Ε; ergo [per 22. 6.] ut Α ad Β ita eſt Δ ad Ε. eſt autem [per prius oſtenſa] ratio ipſius Δ ad Ε data: quare & ratio ipſius Α ad Β data eſt.

ΑΛΛΩΣ ΤΟ ΑΥΤΟ.

Ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ Α πρὸς τὴν Γ δοθείς, ὡς δὲ ἡ Α πρὸς τὴν Γ οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ δοθείς. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον τὸ ἀπὸ τοῦ Β· λόγος ἄρα τοῦ ἀπὸ τοῦ Α πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ Β δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ Α πρὸς τὴν Β λόγος ἐστὶ δοθείς· ἑκάτερον γὰρ τῶν Α, Β ἴσην ἐποησάμεθα ἐν τῷ οἰκείῳ ἑκάστῳ πτερυγώνῳ.



ALITER IDEM.

Quoniam ratio ipſius Α ad Γ data eſt; atque eſt [per 1. 6.] ut Α ad Γ ita quadratum rectæ Α ad id quod continetur ſub rectis Α, Γ: igitur ratio quadrati rectæ Α ad id quod continetur ſub rectis Α, Γ data eſt. ei autem quod continetur ſub rectis Α, Γ æquale eſt [per 17. 6.] quadratum rectæ Β: ergo quadrati rectæ Α ad quadratum rectæ Β data eſt ratio: quamobrem [per 2. def. dat.] ipſius Α ad Β data ratio eſt; utrique enim rectarum Α, Β æqualis inventa eſt, in proprio uniuſcujuſq; quadrato.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

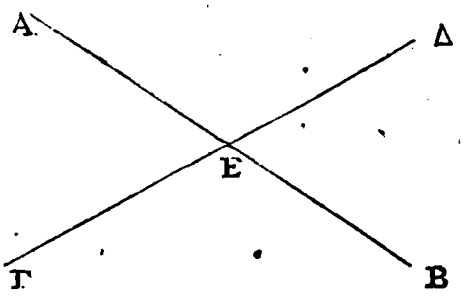
Ἐὰν δύο γραμμαὶ τῇ θέσει δεδομέναι τέμνωσιν ἀλλήλας· δέδοται τὸ σημεῖον, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλας.

PROP. XXV.

Si duæ quævis lineæ poſitione datæ ſe mutuo invicem ſecuerint; punctum, in quo ſe invicem ſecant, etiam datum eſt.

Δύο γὰρ γραμμαὶ τῇ θέσει δεδομέναι αἱ Α Β, Γ Δ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω ὅτι δοθέν ἐστι τὸ Ε σημεῖον.

Εἰ γὰρ μή, μεταπεσεῖται τὸ Ε σημεῖον· μεταπεσεῖται ἄρα ἐπὶ μιᾶς τῶν Α Β, Γ Δ θέσις. ἐ μεταπίπτει δέ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Ε σημεῖον.



DUÆ enim lineæ poſitione datæ Α Β, Γ Δ ſecent ſe invicem in puncto Ε: dico datum eſſe punctum Ε.

Si non, excidet punctum Ε: igitur alterius è rectis Α Β, Γ Δ poſitio excidet. atqui [ex hyp.] non excidit: ergo punctum Β datum eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

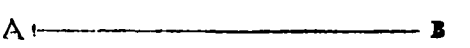
Ἐὰν εὐθείας γραμμῆς τὰ πέρατα ᾖ δεδομένα τῇ θέσει· δέδοται ἡ εὐθεῖα τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.

PROP. XXVI.

Si rectæ lineæ extrema poſitione data ſint; recta poſitione & magnitudine data eſt.

Εὐθείας γὰρ γραμμῆς τὰ Α Β τὰ πέρατα τὰ Α, Β δεδομένα ἔστω τῇ θέσει· λέγω ὅτι δέδοται ἡ Α Β τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.

Εἰ γὰρ, μένοντος τοῦ Α σημείου, μεταπεσεῖται τοῦ Α Β εὐθείας ἤτοι ἡ θέσις ἢ τὸ μέγεθος· μεταπεσεῖται ἄρα ἐπὶ τὸ Β σημεῖον. ἐ μεταπίπτει δέ· δέδοται ἄρα ἡ Α Β εὐθεῖα τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.



RECTÆ enim lineæ Α Β extrema Α, Β data ſint poſitione: dico rectam Α Β poſitione & magnitudine datam eſſe.

Si enim, manente puncto Α, excidat poſitio aut magnitudo rectæ Α Β; excidet & punctum Β. atqui [ex hyp.] non excidit: ergo recta Α Β poſitione & magnitudine data eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

Ἐὰν εὐθείας γραμμῆς, τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένης, τὸ ἓν πέρας δοθὲν ᾖ· καὶ τὸ ἕτερον δοθήσεται.

PROP. XXVII.

Si rectæ lineæ, poſitione & magnitudine datæ, datum fuerit unum extremum; alterum quoque datum erit.

Εὐθείας γὰρ γραμμῆς, τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένης, τῆς Α Β, τὸ ἓν πέρας δοθὲν ἔστω τὸ Α· λέγω ὅτι καὶ τὸ Β δοθέν ἐστιν.

RECTÆ enim lineæ Α Β, poſitione & magnitudine datæ, datum ſit unum extremum Α: dico & extremum Β datum eſſe.

Si

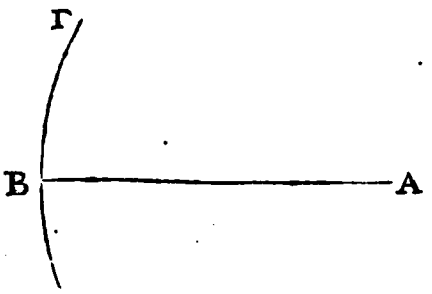
Si enim, manente puncto A, punctum B excidat; excidit quoque rectæ AB aut positio aut magnitudo. atqui [ex hyp.] neutra excidit: quare punctum B datum est.

Εἰ γὰρ, μένοντος τοῦ Α σημείου, μεταπίπτει τὸ Β σημεῖον· μεταπίπτει ἄρα ἡ ΑΒ εὐθείας ἤτοι ἡ θέσις ἢ τὸ μέγεθος. δίδοται δὲ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Β σημεῖον.

A ——— B

ALITER.

Centro A, intervallo AB, describatur circumferentia ΓB: circumferentia igitur ΓB [per 6. def. dat.] positione data est. recta autem AB [ex hyp.] positione data est: ergo [per 25. dat.] punctum B datum est.



ΑΛΛΩΣ.

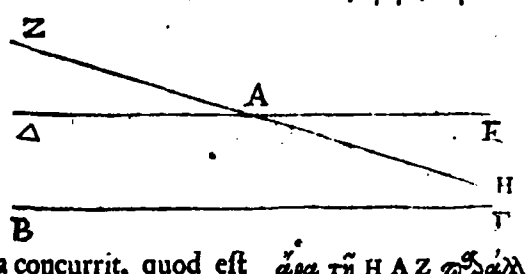
Κέντρῳ γὰρ τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ, περιφέρεια γεγράφθω ἡ ΓΒ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ περιφέρεια ΓΒ. θέσει δὲ καὶ ἡ ΑΒ εὐθεῖα· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Β σημεῖον.

PROP. XXVIII.

Si per datum punctum contra datam positione rectam agatur recta linea; acta recta positione data est.

PER datum enim punctum A, contra datam positione rectam BΓ, agatur recta linea ΔAE: dico positione datam esse lineam ΔAE.

Si enim non; manente puncto A excidet rectæ ΔAE positio. excidat ergo, manente BΓ ad illam parallela, & sit ZAH; itaque parallela est BΓ ipsi ZAH. at vero BΓ [ex hyp.] ipsi ΔAE parallela est: quare [per 30. I.] ΔAE ipsi HAZ parallela est. sed & cum ea concurrit, quod est absurdum; ergo positio rectæ ΔAE non excidit: recta igitur ΔAE positione data est.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Ἐὰν διὰ δεδομένου σημείου τῇ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ· δεδομένη ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει.

ΔΙΑ γὰρ δεδομένου σημείου τοῦ Α, τῇ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΒΓ, εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ΔΑΕ· λέγω ὅτι δέδοται ἡ ΔΑΕ τῇ θέσει.

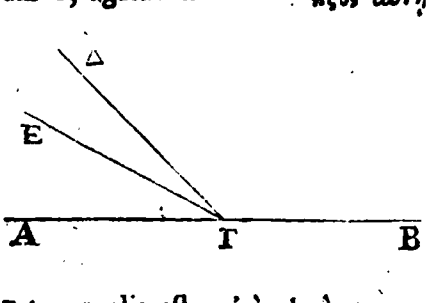
Εἰ γὰρ μή· μένοντος τοῦ Α σημείου μεταπίπτει τοῦ ΔΑΕ ἡ θέσις. διὰ μενούσης τῆς ΒΓ παραλλήλως μεταπιπτέτω, καὶ ἔστω ἡ ΖΑΗ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΖΑΗ. ἀλλὰ ἡ ΒΓ τῇ ΔΑΕ ἐστὶ παράλληλος· καὶ ἡ ΔΑΕ ἄρα τῇ ΗΑΖ παράλληλός ἐστιν. ἀλλὰ καὶ συμπίπτει, ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον· οὐκ ἄρα μεταπίπτει τοῦ ΔΑΕ θέσις· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΑΕ.

PROP. XXIX.

Si ad positione datam rectam lineam, datumque in ea punctum, agatur recta linea, quæ faciat angulum datum; acta recta etiam positione data est.

AD datam enim positione rectam lineam AB, & datum in ea punctum Γ, agatur linea ΓΔ, quæ faciat angulum datum AΓΔ: dico rectam ΓΔ positione datam esse.

Si enim non; manente puncto Γ, excidet positio rectæ ΓΔ, servata anguli AΓΔ magnitudine. excidat ergo, & sit ΓE. itaque angulus ΔΓA angulo EΓA æqualis est; major minori, quod est absurdum. quare positio rectæ ΔΓ non excidet: data est igitur recta ΓΔ positione.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Ἐὰν πρὸς θέσει δεδομένην εὐθεῖαν καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δεδομένῳ, εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν· δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει.

ΠΡΟΣ θέσει γὰρ δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΑΒ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δεδομένῳ τῷ Γ, εὐθεῖα ἤχθω ἡ ΓΔ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΑΓΔ· λέγω ὅτι θέσει ἐστὶν ἡ ΓΔ.

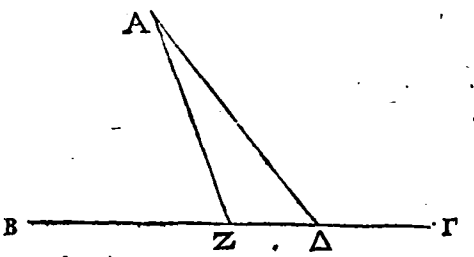
Εἰ γὰρ μή, μένοντος τοῦ Γ σημείου, μεταπιπτέτω τοῦ ΓΔ ἡ θέσις, διαστηρούσης τῆς ὑπὸ ΑΓΔ γωνίας μεγέθος· μεταπιπτέτω καὶ ἔστω ἡ ΓΕ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΓΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΑ, ἡ μείζων τῇ ἐλάσσονι, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα μεταπίπτει τοῦ ΔΓ ἡ θέσις· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Ἐὰν ἀπὸ δεδομένου σημείου ὅτι θέσει δεδομένην εὐθεῖαν εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν· δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει.

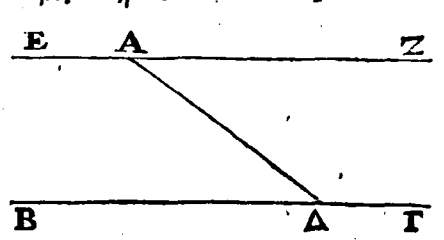
Ἀπὸ γὰρ δεδομένου σημείου τοῦ Α ὅτι θέσει δεδομένῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ΑΔ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΑΔΒ· λέγω ὅτι θέσει ἐστὶν ἡ ΑΔ.



Εἰ γὰρ μή, μενόντος τοῦ Α σημείου μεταπεσεῖται ἡ ΑΔ ἡ θέσις, διατηροῦσα τὴν ὑπὸ ΑΔΒ γωνίας τὸ μέγεθος. μεταπιπτέτω ἐφ' ἕως ἡ ΑΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΔΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΖΔ γωνίᾳ, ἡ μείζων τῇ ἐλάσσονι, ὅπερ ἀδύνατον ἐστιν· οὐκ ἄρα μεταπεσεῖται ἡ ΑΔ ἡ θέσις· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ.

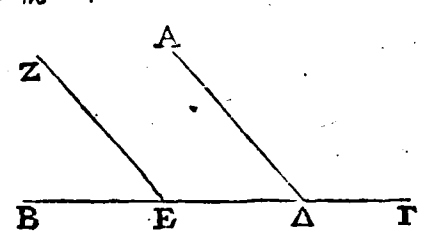
ΑΛΛΩΣ.

Ἤχθω διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΔΓ παράλληλος εὐθεῖα ἡ ΕΑΖ. ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου σημείου τοῦ Α παρὰ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΒΔΓ εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΕΑΖ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΑΖ. ἐπεὶ εἰσὶ παράλληλοι αἱ ΒΔΓ, ΕΑΖ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΑΔ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΑΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΓ. δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΓ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΔ. ἐπεὶ οὖν παρὰ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΕΑΖ, καὶ τῷ παρ' αὐτὴν σημείῳ δεδομένῳ τῷ Α, εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΑΔ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΑΔ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ.



ΑΛΛΩΣ.

Εἰλήφθω ὅτι τοῦ ΒΔ δοθὲν σημεῖον τὸ Ε, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΖΕ τῇ ΑΔ, εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΕΔ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΓ γωνίᾳ. δοθεῖσα δὲ ἡ ΑΔΓ γωνία· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΕΓ. ἐπεὶ οὖν παρὰ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΒΓ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δεδομένῳ τῷ Ε, εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΕΖ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΖΕΓ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ. ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου σημείου τοῦ Α, παρὰ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΖΕ, εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΑΔ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ.



ΑΛΛΩΣ.

Εἰλήφθω ὅτι τῆς ΒΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΑ. καὶ ἐπεὶ δοθὲν ἐστιν ἑκάτερον τῶν

PROP. XXX.

Si à dato puncto in datam positione rectam agatur recta linea, quæ faciat angulum datum; acta recta positione data est.

A Dato enim puncto A in positione datam rectam ΒΓ agatur recta linea ΑΔ, quæ faciat angulum datum ΑΔΒ: dico positione datam esse rectam ΑΔ.

Si enim non, manente puncto A excidet positio rectæ lineæ ΑΔ, servata anguli ΑΔΒ magnitudine. excidat ergo; & sit recta ΑΖ. itaque angulus ΑΔΒ angulo ΑΖΔ æqualis est; major minori [per 16.1.]; quod fieri non potest: ergo non excidet positio rectæ ΑΔ: recta igitur ΑΔ positione data est.

ALITER.

Agatur [per 31.1.] per punctum A rectæ ΒΔΓ parallela ΕΑΖ. quoniam igitur per datum punctum A contra datam positione rectam ΒΔΓ acta est recta linea ΕΑΖ: positione datur [per 28.dat.] recta ΕΑΖ. quoniam vero rectæ ΒΔΓ, ΕΑΖ sunt parallelæ; atque in illas incidit recta ΔΑ: angulus igitur ΕΑΔ angulo ΑΔΓ [per 29.1.] æqualis est: datus autem est [ex hyp.] ΑΔΓ: quare & angulus ΕΑΔ datus est. quoniam itaque ad positione datam rectam lineam ΕΑΖ, & datum in ea punctum A, acta est recta linea, quæ facit angulum ΕΑΔ datum: recta igitur ΑΔ [per 29. dat.] positione data est.

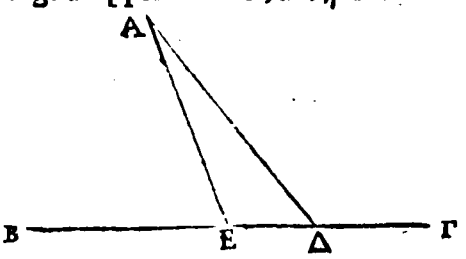
ALITER.

Sumatur in linea ΒΔ datum punctum Ε; & per punctum Ε agatur [per 31.1.] ipsi ΑΔ parallela ΕΖ. itaque cum parallela sit ΖΕ ipsi ΑΔ, & in illas incidat ΒΕΔ: erit [per 29.1.] angulus ΖΕΔ angulo ΑΔΓ æqualis. est autem [ex hyp.] angulus ΑΔΓ datus: igitur angulus ΖΕΓ datus est. quoniam itaque ad positione datam rectam ΒΓ, & datum in ea punctum Ε, acta est recta ΕΖ, quæ facit angulum datum ΖΕΓ; recta ΕΖ [per 29.dat.] positione data est. quoniam ergo per datum punctum A, contra datam positione rectam ΖΕ, acta est recta linea ΑΔ: recta linea ΑΔ [per 28. dat.] positione data est.

ALITER.

Sumatur in recta ΒΓ quodlibet punctum Ε, & connectatur ΕΑ. quoniam itaq; datum est utrum-

que punctorum A, E: positione igitur [per 26. dat.] data est A B. est autem & B Γ positione data: ergo * angulus A E Δ datus est. est autem [ex hyp.] angulus A Δ E datus: quare & [per 32. 1. & 4. dat.] reliquus E A Δ datus est. quoniam itaque ad positione datam rectam A E, & datum in ea punctum A, recta linea A Δ acta est, quæ facit angulum E A Δ datum: igitur [per 29. dat.] recta A Δ positione data est.



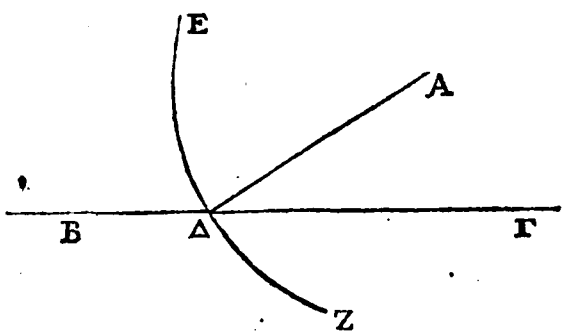
A, E σημείων· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ A E. θέσει δὲ καὶ ἡ B Γ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ A E Δ γωνία. δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ A Δ E· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ τῶν E A Δ δοθεῖσά ἐστιν. ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν A E, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A, εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ A Δ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ E A Δ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ A Δ.

Prop. XXXI.

Si à dato puncto, in datam positione rectam, data magnitudine recta producatur; ea etiam positione data est.

A Dato enim puncto A agatur in positione datam rectam B Γ data magnitudine recta A Δ: dico eam etiam positione datam esse.

Centro enim A, intervallo autem A Δ, circulus E Δ Z describatur. itaque [per 6. def. dat.] positione datus est circulus E Δ Z: nam ejus centrum positione datum est, & quæ ex centro, ipsa A Δ, magnitudine. sed & recta B Γ est etiam positione data. at vero si duæ lineæ positione datæ se invicem secent; punctum intersectionis [per 25. dat.] datum est: ergo datum est punctum Δ. est autem punctum A datum: quare [per 26. dat.] A Δ positione data est.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

Ἐὰν ἀπὸ δεδομένου σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν εὐθεῖα γραμμὴ προσβληθῇ δεδομένην τῷ μεγέθει, δέδοται καὶ τῇ θέσει.

Ἀπὸ γὰρ δεδομένου σημείου τοῦ A ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν B Γ εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ A Δ, δεδομένη τῷ μεγέθει· λέγω ὅτι καὶ τῇ θέσει δέδοται.

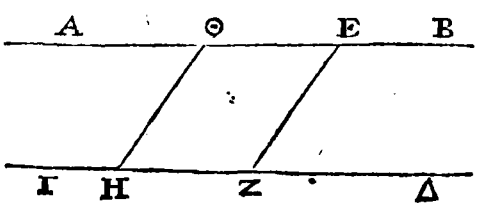
Κέντρῳ γὰρ τῷ A, διαστήματι δὲ τῷ A Δ, κύκλος γεγράφθω ὁ E Δ Z. θέσει ἄρα ἐστὶν ὁ E Δ Z κύκλος, δέδοται γὰρ αὐτοῦ τὸ A κέντρον τῇ θέσει, καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ A Δ τῷ μεγέθει. θέσει δὲ καὶ ἡ B Γ εὐθεῖα. ἐὰν δὲ δύο γραμμαὶ τῇ θέσει δεδομένην τέμνωσιν ἀλλήλας, δέδοται τὸ σημεῖον, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλας· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Δ. ἔστι δὲ καὶ τὸ A δοθέν· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ A Δ.

Prop. XXXII.

Si in positione datas parallelas rectas agatur recta linea, quæ faciat angulos datos; acta recta magnitudine data est.

IN datas enim positione parallelas rectas A B, Γ Δ agatur recta linea E Z, faciens angulos B E Z, E Z Δ datos: dico magnitudine datam esse rectam E Z.

Sumatur enim in Γ Δ datum punctum H, & [per 31. 1.] per H agatur ipsi E Z parallela H Θ. & quoniam parallela est H Θ ipsi E Z, & in illas incidit Γ Δ; erit [per 29. 1.] angulus E Z Δ angulo Θ H Δ æqualis. angulus autem E Z Δ [ex hyp.] datus est: quare & angulus Θ H Δ datus est. quoniam itaque ad positione da-



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

Ἐὰν εἰς παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, δεδομένας ποιοῦσα γωνίας, δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῷ μεγέθει.

Εἰς γὰρ παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας τὰς A B, Γ Δ, εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ E Z, δεδομένας ποιοῦσα γωνίας τὰς ὑπὸ B E Z, E Z Δ· λέγω ὅτι δέδοται ἡ E Z τῷ μεγέθει.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς Γ Δ δοθὲν σημεῖον τὸ H, καὶ διὰ τοῦ H τῇ E Z παράλληλος ἦκται ἡ H Θ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ H Θ τῇ E Z, καὶ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ Γ Δ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ E Z Δ τῇ ὑπὸ Θ H Δ. δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ E Z Δ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ Θ H Δ. ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει δεδο-

* Nam rectarum positione datarum datur inclinatio ad invicem; hoc est, angulus ab illis comprehensus.

μένην

μένη εὐθεῖα τῇ ΓΔ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δεδομένῳ τῷ Η, εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΗΘ, δεδομένην ποιοῦσι γωνίαν τὴν ὑπὸ ΘΗΖ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ. θέσει δὲ καὶ ἡ ΑΒ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Θ σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ τὸ Η δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ τῷ μεγέθει. καὶ ἔστιν ἴση τῇ ΕΖ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΖ τῷ μεγέθει.

tam rectam ΓΔ, & datum in ea punctum Η, acta est recta ΗΘ, quæ facit angulum ΘΗΖ datum: positione data erit [per 29. dat.] recta ΗΘ. est autem [ex hyp.] ΑΒ positione data: itaque [per 25. dat.] punctum Θ datum est. est autem [per constr.] punctum Η datum; quare [per 26. dat.] ΗΘ magnitudine data est. atque [per 34. 1.] est æqualis ipsi ΕΖ: ergo etiam [per 1. def. dat.] ΕΖ magnitudine data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

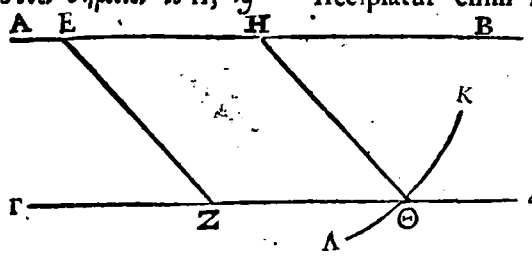
Ἐὰν εἰς παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, δεδομένην τῷ μεγέθει· δεδομένας ποιήσει γωνίας.

PROP. XXXIII.

Si in datas positione rectas parallelas agatur recta magnitudine data; faciet ea angulos datos.

Εἰς γὰρ παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ΕΖ, δεδομένην τῷ μεγέθει· λέγω ὅτι δεδομένας ποιήσει γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΕΖ, ΕΖΓ.

IN datas enim positione parallelas rectas ΑΒ, ΓΔ agatur recta ΕΖ magnitudine data: dico quod ipsa faciet angulos ΑΕΖ, ΕΖΓ datos.



Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΑΒ δοθὲν σημεῖον τὸ Η, καὶ διὰ τοῦ Η τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΕ τῇ ΗΘ. δοθεῖσα δὲ ΕΖ τῷ μεγέθει· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΗΘ τῷ μεγέθει. καὶ ἔστι τὸ Η δοθέν· ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΘ, κύκλος γραφόμενος ἔσται τῇ θέσει. γεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ ΚΘΛ· θέσει ἄρα ἐστὶν ὁ ΚΘΛ. θέσει δὲ καὶ ἡ ΓΔ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Θ σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ τὸ Η δοθέν· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ. θέσει δὲ ΓΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΘΓ γωνία. καὶ ἔστι τῇ ὑπὸ ΕΖΓ ἴση· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΓ· ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΖ δοθεῖσά ἐστι.

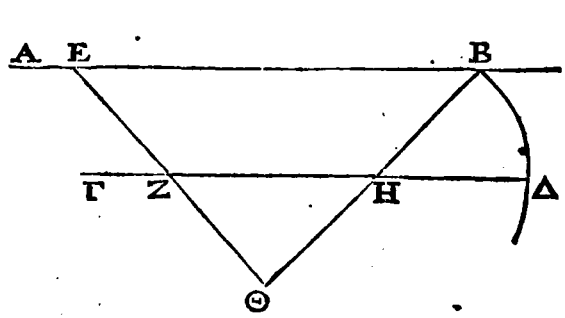
Accipiatur enim in recta ΑΒ datum punctum Η, & per punctum Η agatur [per 31. 1.] ipsi ΕΖ parallela ΗΘ: æqualis igitur [per 34. 1.] est ΖΕ ipsi ΗΘ. est autem [ex hyp.] ΕΖ magnitudine data: ergo ΗΘ magnitudine data est. & datum est punctum Η: quare [per 6. def. dat.] centro Η, intervallo ΗΘ, descriptus circulus positione datus erit. describatur, & sit ΚΘΛ: positione igitur datus est circulus ΚΘΛ. est autem [ex hyp.] ΓΔ positione data: ergo [per 25. dat.] datum est punctum Θ. sed & [per constr.] punctum Η datum est: quare [per 26. dat.] recta ΗΘ positione data est. positione autem data est [ex hyp.] recta ΓΔ: itaque angulus ΗΘΓ datus est. & est ΗΘΓ [per 29. 1.] ipsi ΕΖΓ æqualis: igitur angulus ΕΖΓ datus est: igitur [per 32. 1. & 4. dat.] & reliquus ΑΕΖ datus est.

ΑΛΛΩΣ.

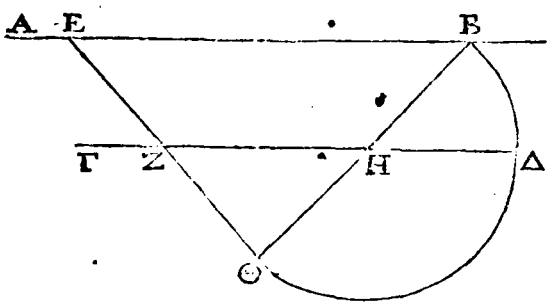
Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΓΔ δοθὲν σημεῖον τὸ Η, καὶ κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΗΔ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΒ· θέσει ἄρα ὁ ΔΒ κύκλος, δέδοται γὰρ αὐτοῦ τὸ κέντρον τῇ θέσει, καὶ ἡ ἐκ κέντρου τῷ μεγέθει. θέσει δὲ καὶ ἡ ΑΒ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Β σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ τὸ Η δοθέν· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΒ. θέσει δὲ καὶ ἡ ΓΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΗΔ γωνία. καὶ εἰ μὲν παράλληλός ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΗΒ, ἔσται καὶ ἡ ὑπὸ ΕΖΗ γωνία δοθεῖσα· ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ ΖΕΒ γωνία δοθεῖσα ἐστίν· εἰ δὲ μὴ παράλληλός ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΗΒ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Η τῇ ΕΖ παράλληλος ἡ ΗΘ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ. καὶ ἔστι τὸ Η δοθέν· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Θ σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ τὸ Β δοθέν· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΒ. καὶ ἔστι θέσει καὶ ἡ ΓΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΗΔ γωνία. καὶ ἔστιν ἴση τῇ ὑπὸ ΕΖΗ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΖΗ γωνία· ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ὑπὸ ΖΕΒ γωνία δοθεῖσά ἐστιν.

ALITER.

Sumatur in recta ΓΔ datum punctum Η, & ponatur ipsi ΕΖ æqualis ΗΔ, dein centro quidem Η, intervallo autem ΗΔ, circulus ΔΒ describatur: positione igitur datus est [per 6. def. dat.] circulus ΔΒ; ipsius enim centrum positione datum est, & ea quæ ex centro magnitudine. est autem [ex hyp.] recta ΑΒ positione data: quare [per 25. dat.] punctum Β datum est. verum [per constr.] & punctum Η datum est: itaque positione data est recta ΗΒ. sed [ex hyp.] positione data est etiam recta ΓΔ: ergo angulus ΒΗΔ datus est. unde, si parallela sit ΕΖ ipsi ΗΒ, angulus ΕΖΗ [per 29. 1. & 1. def. dat.] datus erit: necnon & reliquus angulus ΖΕΒ [per



32. 1. & 4. dat.] datus erit. si vero parallelæ non sint; rectæ EZ, BH concurrant in puncto Θ. quoniam itaque [per constr.] æqualis est EZ ipsi ΔH, hoc est ipsi HB; atque [ex hyp.] parallela est EB ipsi ZH: erit [per 2. 6.] ZΘ ipsi ΘH æqualis: quare [per 6. 1.] & angulus ΘHZ angulo ΘZH æqualis est. datus autem [per 15. 1.] est angulus ΘHZ: ergo angulus HZΘ datus est: quare [per 32. 1. & 4. dat.] & qui deinceps est angulus HZE datus est: angulus igitur ZEB datus est.



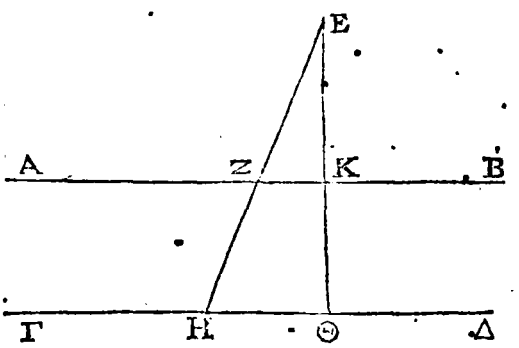
θεῖσά ἐστι. εἰ δὲ ὄ, συμπιπτέτωσαν αἱ EZ, BH κατὰ τὸ Θ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ EZ τῇ ΔH, τοῦτ' ἔστιν τῇ HB, καὶ ἔστι παράλληλος ἡ EB τῇ ZH· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ZΘ τῇ ΘH· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΘHZ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘZH ἐστὶν ἴση. δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ ΘHZ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ HZΘ· ὥστε καὶ ἡ ἐφεξῆς ἡ ὑπὸ HZE δοθεῖσά ἐστι· καὶ ἡ ὑπὸ ZEB ἄρα δοθεῖσά ἐστι.

PROP. XXXIV.

Si in datas positione parallelas rectas à dato puncto recta linea agatur; secabitur illa in data ratione.

IN parallelas enim positione datas rectas AB, Γ Δ, à dato puncto E, agatur linea EZH: dico ipsius EZ ad ZH rationem datam esse.

Agatur enim [per 12. 1.] à puncto E in rectam Γ Δ perpendicularis EKΘ. & quoniam à dato puncto E ad positione datam rectam Γ Δ recta EΘ acta est, quæ facit angulum EΘH datum: [per 30. dat.] positione data erit EΘ. est autem [ex hyp.] utraque rectarum AB, Γ Δ positione data: itaque [per 25. dat.] utrumque punctorum K, Θ datum est. sed & punctum E datum est: quare [per 26. dat.] utraque rectarum EK, KΘ data est: igitur [per 1. dat.] ratio ipsius EK ad KΘ data est. sed [per 2. 6.] est EK ad KΘ ut EZ ad ZH: ergo [per 2. def. dat.] ratio ipsius EZ ad ZH data est.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Εὰν εἰς παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας ἀπὸ δεδομένου σημείου εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, εἰς δεδομένον λόγον τμηθήσεται.

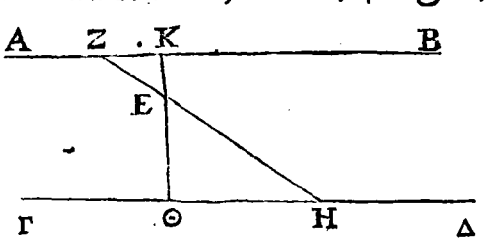
ΕΙΣ γὰρ παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας τὰς AB, Γ Δ, ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ E, εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ EZH· λέγω ὅτι λόγος ἐστὶ τῆς EZ πρὸς τὴν ZH δοθείς.

Ηχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ E σημείου ἐπὶ τὴν Γ Δ κάθετος ἡ EKΘ. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ E ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν Γ Δ εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ EΘ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ EΘH· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ EΘ. θέσει δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν AB, Γ Δ· δοθὲν ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν K, Θ σημείων. ἔστι δὲ καὶ τὸ E δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν EK, KΘ· λόγος ἄρα τῆς EK πρὸς τὴν KΘ δοθείς. καὶ ἔστιν ὡς ἡ EK πρὸς τὴν KΘ οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν ZH· λόγος ἄρα καὶ τῆς EZ πρὸς τὴν ZH δοθείς.

* ALITER.

In parallelas enim positione datas rectas AB, Γ Δ, per datum punctum E, agatur recta linea ZEH: dico ipsius HE ad EZ rationem datam esse.

Agatur enim [per 12. 1.] à puncto E in rectam Γ Δ perpendicularis EΘ, & producatur ad punctum K. quoniam igitur à puncto dato E ad positione datam rectam Γ Δ acta est EΘ, quæ facit angulum



* ΑΛΛΩΣ.

Εἰς γὰρ παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας τὰς AB, Γ Δ, ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ E, εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ZEH· λέγω ὅτι λόγος ἐστὶ τῆς HE πρὸς τὴν EZ δοθείς.

Ηχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ E σημείου ἐπὶ τὴν Γ Δ κάθετος ἡ EΘ, ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ K. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ E ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν Γ Δ ἦκται ἡ EΘ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν

* Est verius casus alter quam alia demonstratio.

τὴν

τὸ ὑπὸ ΕΘΗ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ. θέσει δὲ καὶ ἑκατέρα τ ΑΒ, ΓΔ· ἑκάτερον ἄρα τ Κ, Θ σημείων δοθέν ἐστιν. ἔστι καὶ τὸ Ε δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἑκατέρα τ ΘΕ, ΕΚ· λόγος ἄρα τ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΚ δοθείς. ὡς δὲ ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΚ ὅλη ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ· λόγος ἄρα καὶ τ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ δοθείς.

ΕΘΗ datum; data erit positione [per 30. dat.] ipsa ΕΘ. est autem [ex hyp.] utraque rectarum ΑΒ, ΓΔ positione data: quare [per 25. dat.] utrumque punctorum Κ, Θ datum est. datum autem est [ex hyp.] punctum Ε: ergo [per 26. dat.] utraque rectarum ΘΕ, ΕΚ data est: ideoque [per 1. dat.] ipsius ΘΕ ad ΕΚ ratio est data. verum ut ΘΕ ad ΕΚ ita [per 4. 6.] ΗΕ ad ΕΖ: itaque [per 2. def. dat.] ratio ipsius ΗΕ ad ΕΖ data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

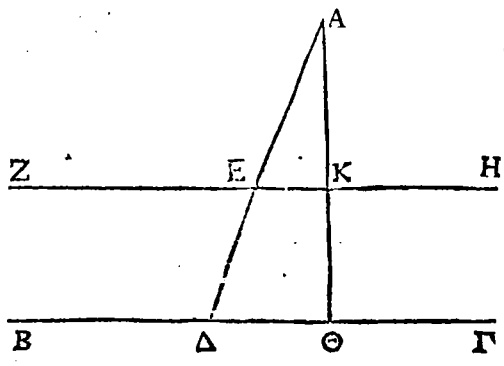
Ἐὰν ἀπὸ δεδομένου σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, καὶ τμηθῇ εἰς δεδομένον λόγον, διὰ δὲ τομῆς παρὰ τὴν θέσει δεδομένην εὐθεῖαν εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ· δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει.

PROP. XXXV.

Si à dato puncto in datam positione rectam ducatur recta linea, secetur-que in data ratione, per punctum vero sectionis contra datam positione rectam agatur recta linea; acta recta positione data est.

Ἀπὸ γὰρ δεδομένου σημείου τοῦ Α ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΒΓ εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ΑΔ, καὶ τετμήσθω εἰς δεδομένον λόγον, τὸν τῆς ΔΕ πρὸς ΕΑ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ε τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΖΕΗ· λέγω ὅτι θέσει ἐστὶν ἡ ΖΕΗ.

Ἠχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΘ. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ Α ἐπὶ τὴν θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΒΓ εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΑΘ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΑΘΔ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ. θέσει δὲ καὶ ἡ ΒΓ· δοθὲν ἄρα τὸ Θ σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ τὸ Α δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει· καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΘ, καὶ ἔστι λόγος τῆς ΑΕ πρὸς τὴν ΕΔ δοθείς· λόγος ἄρα τῆς ΑΚ πρὸς τὴν ΚΘ δοθείς· συνθέντι ἄρα λόγος τῆς ΑΘ πρὸς τὴν ΑΚ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ ΑΘ τῷ μεγέθει· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΑΚ τῷ μεγέθει. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, ἧς δοθὲν τὸ Α· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Κ. ἐπεὶ οὖν διὰ δεδομένου σημείου τοῦ Κ, παρὰ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΒΓ εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΖΗ· θέσει ἄρα ἐστὶν ὁ ΖΗ·



Dato enim puncto Α in positione datam rectam ΒΓ agatur recta linea ΑΔ, & secetur in data ratione, scilicet ipsius ΔΕ ad ΕΑ, & agatur per punctum Ε ipsi ΒΓ parallela ΖΕΗ: dico positione datam esse ΖΕΗ.

Ducatur enim à puncto Α ad rectam ΒΓ perpendicularis ΑΘ. quoniam ergo à dato puncto Α in datam positione rectam ΒΓ acta est recta linea ΑΘ, quæ facit angulum ΑΘΔ datum: [per 30. dat.] positione data erit ipsa ΑΘ. est autem [ex hyp.] ΒΓ positione data: itaque [per 25. dat.] datum est punctum Θ. at vero [ex hyp.] punctum Α datum est: ergo [per 26. dat.] recta ΑΘ positione & magnitudine data est. quoniam vero est [per 2. 6.] ut ΑΕ ad ΕΔ ita ΑΚ ad ΚΘ; atq; data est [ex hyp.] ratio ipsius ΑΕ ad ΕΔ: igitur [per 2. def. dat.] ratio ipsius ΑΚ ad ΚΘ data est: ideoq; componendo [per 6. dat.] ipsius ΑΘ ad ΑΚ data est ratio. data autem est Α magnitudine: quare [per 2. dat.] ΑΚ magnitudine data est. sed positione quoque data est ΑΚ; atque datum est [ex hyp.] punctum Α: itaque [per 27. dat.] datum est punctum Κ. quoniam igitur per datum punctum Κ, contra datam positione rectam ΒΓ, recta linea ΖΗ acta est: igitur [per 28. dat.] recta ΖΗ positione data erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ'.

Ἐὰν ἀπὸ δεδομένου σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, καὶ προσκεῖταί τις αὐτῇ εὐθεῖα, λόγον ἔχουσα πρὸς αὐτὴν δεδομένον, διὰ δὲ τοῦ πέρατος ἡ προσκειμένη παρὰ τὴν θέσει δεδομένην εὐθεῖαν εὐ-

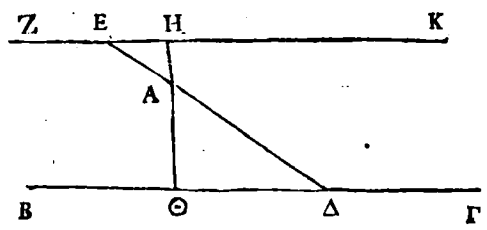
PROP. XXXVI.

Si à dato puncto in datam positione rectam lineam ducatur recta linea, atque adjiciatur ipsi aliqua recta, quæ ad illam habeat rationem datam; per extremum vero adjectæ lineæ contra datam positione rectam linea re-

cta agatur: acta recta positione data est.

ADato enim puncto A ad positione datam rectam BΓ ducatur recta AΔ: atque adjiciatur ipsi AΔ recta AE, quæ ad AΔ rationem datam habeat; per punctum vero E ipsi BΓ agatur parallela ZK: dico ZK esse positione datam.

Agatur enim à puncto A ad BΓ perpendicularis AΘ, & producatur ad punctum H. quoniam igitur à dato puncto A ad datam positione rectam BΓ acta est recta linea AΘ, quæ facit angulum AΘΓ datum; ΘAH [per 30.dat.] positione data est. est autem [ex hyp.] BΓ positione data: quare [per 25. dat.] datum est punctum Θ. sed & [ex hyp.] punctum A datum est: itaque [per 26. dat.] data est recta AΘ. & quoniam [ex hyp.] ratio ipsius AB ad AΔ data est, & est per 4. 6.] ut AH ad AΘ ita EA ad ΔA. ratio ipsius AH ad AΘ [per 2.def. dat.] data erit. data autem est ΘA: quare [per 2.dat.] & AH magnitudine data est. sed & etiam positione data est AH; atque datum est punctum A: ergo [per 27. dat.] punctum H datum est. quoniam itaque per datum punctum H, contra datum positione rectam BΓ acta est recta linea ZHK: ipsa ZHK [per 28. dat.] positione data est.



θεῖα γραμμὴ ἀχθῇ· δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει.

ΑΠΟ γὰρ δεδομένου σημείου τοῦ Α ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΒΓ εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ΑΔ, καὶ προσκείσθω τῇ ΑΔ ἡ ΑΕ λόγον ἔχουσα πρὸς τὴν ΑΔ δεδομένον, διὰ δὲ τοῦ Ε τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΚ· λέγω ὅτι θέσει ἐστὶν ἡ ΖΚ.

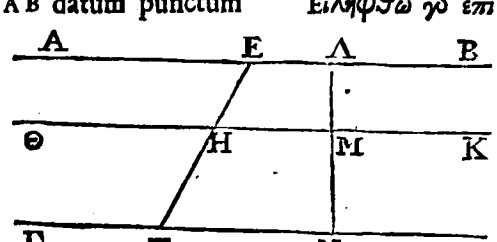
Ηχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΘ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Η. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ Α ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΒΓ εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΑΘ δεδομένην, ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΑΘΓ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΑΗ. θέσει δὲ καὶ ἡ ΒΓ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Θ σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ τὸ Α δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς ΑΕ πρὸς τὴν ΑΔ δοθείς, ὡς δὲ ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΑΘ ἕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΔΑ· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΑΗ πρὸς τὴν ΑΘ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ ΘΑ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΑΗ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Α· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Η. ἐπὶ δὲ δεδομένου σημείου τοῦ Η παρὰ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΒΓ εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΖΗΚ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗΚ.

PROP. XXXVII.

Si in parallelas rectas positione datas ducatur recta linea, secteturque in ratione data; per sectionis autem punctum contra datas positione rectas agatur linea recta acta recta positione data est.

IN parallelas enim positione datas rectas AB, ΓΔ agatur recta linea EZ, & secetur in data ratione ipsius ZH ad HE; & ducatur per punctum H utrilibet rectarum AB, ΓΔ parallela ΘK: dico positione datam esse ΘK.

Sumatur enim in recta AB datum punctum Λ, & deducatur à puncto Λ in rectam ΓΔ perpendicularis ΛN. quoniam itaque à dato puncto Λ, ad datam positione rectam ΓΔ, acta est recta linea ΛN, quæ facit angulum datum ΛNΔ: ipsa ΛN [per 30. dat.] positione data est. est autem [ex hyp.] ΓΔ positione data: ergo [per 25. dat.] datum est punctum N. sed & datum est punctum Λ: quare [per 26.dat.] data est recta ΛN. quoniam vero [ex hyp.] ratio ipsius ZH ad HE data est, atque est [per 2.6.] ut ZH ad HE ita NM ad



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ'.

Ἐὰν εἰς παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, καὶ τμηθῇ εἰς δεδομένον λόγον, διὰ δὲ τοῦ τομῆς παρά τινα τῶν τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας εὐθεῖα ἀχθῇ· δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει.

ΕΙΣ γὰρ παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ΕΖ, καὶ τετμήσθω εἰς δεδομένον λόγον τὸν ΖΗ πρὸς τὴν ΗΕ, καὶ διήχθω διὰ τοῦ Η ὁποτέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλος ἡ ΘΚ· λέγω ὅτι θέσει ἐστὶν ἡ ΘΚ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΑΒ δοθὲν σημεῖον τὸ Λ, καὶ κατήχθω ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἡ ΛΝ. ἐπεὶ οὖν ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ Λ ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΓΔ, εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΛΝ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΛΝΔ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΝ. θέσει δὲ καὶ ἡ ΓΔ· δοθὲν ἄρα τὸ Ν σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ τὸ Λ δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΝ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς ΖΗ πρὸς τὴν ΗΕ δοθείς, ὡς δὲ ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΕ ἕτως ἡ ΝΜ πρὸς τὴν

ΜΛ·

ΜΛ· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΝΜ πρὸς τὸ ΜΛ δοθείς. ὥστε καὶ τῆς ΝΛ πρὸς τὸ ΛΜ λόγος ἐστὶ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ ΝΛ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΛΜ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ ἔστι δεδομένον τὸ Λ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Μ. ἐπεὶ οὖν ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ Μ παρὰ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΓΔ εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΘΚ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη'.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας δεδομένας εὐθείας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, καὶ προσκείσθω τις αὐτῇ εὐθεῖα λόγον ἔχουσα πρὸς αὐτὴν δεδομένον, ἀπὸ δὲ τοῦ πέρατος ἡ προσκειμένη παρὰ τὰς θέσει δεδομένας παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ· δοθεῖσα ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει.

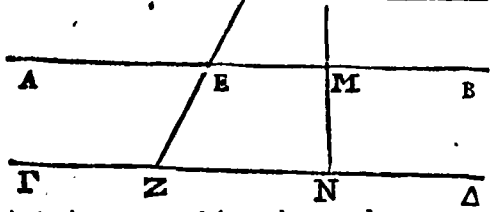
ΕΙΣ γὰρ δύο παραλλήλους τῇ θέσει δεδομένας εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ΕΖ, καὶ προσκείσθω τις αὐτῇ εὐθεῖα ἡ ΕΗ λόγον ἔχουσα πρὸς τὴν ΕΖ δεδομένον, ἀπὸ δὲ τοῦ Η ὁποτερασοῦν τῶν ΑΒ, ΓΔ εὐθειῶν εὐθεῖα γραμμὴ παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΚ· λέγω ὅτι θέσει ἐστὶν ἡ ΘΚ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΑΒ δοθὲν σημεῖον τὸ Μ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Μ ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΜΝ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν ἀπὸ δεδομένου τοῦ Μ, ἐπὶ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΓΔ, εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΜΝ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΜΝΔ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΝ. θέσει δὲ καὶ ἡ ΓΔ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Ν σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ τὸ Μ δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΝ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ δοθείς, ὡς δὲ ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΜΛ· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΝΜ πρὸς τὴν ΜΛ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ ΜΝ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΜΛ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ ἔστι τὸ Μ δοθέν· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν ἀπὸ δεδομένου σημείου τοῦ Λ παρὰ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΑΒ εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΘΚ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ.

PROP. XXXVIII.

Si in datas positione parallelas rectas ducatur recta linea, adjiciaturque ei quædam recta habens ad ipsam rationem datam; per extremum vero adjectæ contra datas positione parallelas recta linea agatur: acta recta positione data est.

IN parallelas enim positione datas rectas AB, ΓΔ agatur recta linea EZ, & adjiciatur ipsi quæpiam recta EH, quæ ad EZ habeat rationem datam; per punctum autem H utrilibet rectarum AB, ΓΔ agatur parallela recta linea ΘK: dico quod ΘK positione data est.



Sumatur enim in recta AB datum punctum M, & [per 12. 1.] ducatur à puncto M in lineam ΓΔ perpendicularis recta MN, & producatur ad punctum Λ. quoniam igitur à dato puncto M, in positione datam rectam ΓΔ, acta est recta linea MN, quæ facit angulum MNΔ datum: recta MN [per 28. dat.] positione data est. sed & ΓΔ [ex hyp.] positione data est: ergo [per 25. dat.] datum est punctum N. est autem & punctum M datum: quare [per 26. dat.] data est MN. quoniam vero ratio ZE ad EH [ex hyp.] data est; atque est [per 2. 6.] ut ZE ad EH ita NM ad MΛ: ratio quoque NM ad MΛ [per 2. def. dat.] data est. data autem est MN: quare [per 2. dat.] MΛ data est. sed & positione data est MΛ, atque etiam datum est punctum M: ergo [per 26. dat.] & punctum Λ datum est. quoniam igitur [ex hyp.] per datum punctum Λ contra datam positione rectam AB acta est recta linea ΘK: ipsa ΘK [per 28. dat.] positione data erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ'.

Ἐὰν τριγώνου ἑκάστη τῶν πλευρῶν δεδομένη ᾖ τῷ μεγέθει, δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἴδει.

ΤΡΙΓΩΝΟΥ γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἑκάστη τῶν πλευρῶν δεδομένη ἔστω τῷ μεγέθει· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον δέδοται τῷ εἴδει.

Ἐκκείσθω γάρ τις εὐθεῖα τῇ θέσει δεδομένη ἡ ΔΗ, πεπερατωμένη μὲν κατὰ τὸ Δ, ἀπειρος δὲ κατὰ

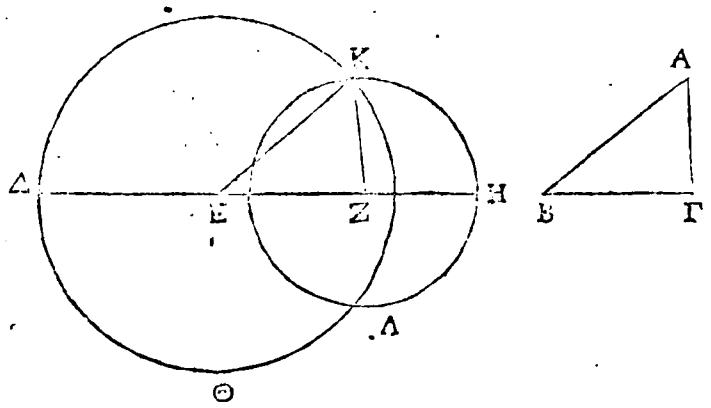
PROP. XXXIX.

Si trianguli singula latera magnitudine data sint; triangulum specie datum est.

TRianguli enim ABΓ singula latera magnitudine data sint: dico triangulum ABΓ specie datum esse.

Exponatur enim recta positione data ΔH, finita quidem ad punctum Δ, infinita vero versus alte-

alteram partem; in ea autem ponatur [per 3.1.] ipſi AB æqualis Δ E. eſt autem AB data; ergo data eſt Δ E. ſed & Δ E [ex hyp.] poſitione data eſt; atque datum eſt punctum Δ: igitur [per 27. dat.] punctum E datum eſt. ponatur vero ipſi BΓ æqualis EZ. eſt autem BΓ data; ergo data eſt EZ. ſed & EZ poſitione data eſt; atque datum eſt punctum E: quare punctum Z datum eſt. rurſus, ponatur ipſi AΓ æqualis ZH. eſt autem AΓ data: ergo & ZH data eſt. ſed & poſitione eſt ZH; atque datum eſt punctum Z: quare & punctum H datum eſt. dein centro quidem E, intervallo autem EΔ, circulus deſcribatur ΔΚΘ: itaque [per 6. def. dat.] poſitione datus eſt circulus ΔΚΘ. rurſus, centro quidem Z, intervallo autem ZH, circulus deſcribatur HΚΛ: itaque poſitione datus eſt circulus HΚΛ: quare [per 25.dat.] punctum Κ datum eſt. eſt autem utrumque punctorum E, Z datum: ergo [per 26. dat.] unaquæque linearum ΚE, EZ, ZΚ poſitione & magnitudine data eſt: igitur [per 3. def. dat.] triangulum ΚEZ ſpecie datum eſt. atque [per 8. 1.] æquale eſt ac ſimile triangulo ABΓ: ergo triangulum ABΓ ſpecie datum eſt.



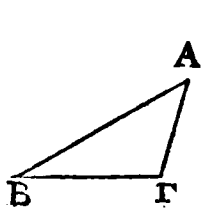
τὸ λοιπόν· καὶ κείσθω τῇ μὲν ΑΒ ἴση ἡ ΔΕ. δοθεῖσα δὲ ἡ ΑΒ· δοθεῖσα ἄρα ἡ ΔΕ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Δ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ε. τῇ δὲ ΒΓ κείσθω ἴση ἡ ΕΖ. δοθεῖσα δὲ ἡ ΒΓ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΕΖ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Ε· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ζ. πάλιν, κείσθω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΖΗ. δοθεῖσα δὲ ἡ ΑΓ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΖΗ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ δοθὲν ἐστι τὸ Ζ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Η. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ε, διαστήματι δὲ τῷ ΕΔ, γεγράφθω κύκλος ὁ ΔΚΘ· θέσει ἄρα ἐστὶ ὁ ΔΚΘ κύκλος. πάλιν, τῷ μὲν κέντρῳ Ζ, διαστήματι δὲ τῷ ΖΗ, γεγράφθω ΗΚΛ κύκλος· θέσει ἄρα ἐστὶν ὁ ΗΚΛ κύκλος· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Κ σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ ἑκάτερον τῶν Ε, Ζ δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκάστη τῶν ΚΕ, ΕΖ, ΖΚ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει· δίδοται ἄρα τὸ ΚΕΖ τρίγωνον τῷ εἴδει. καὶ ἔστω ἴσον τε καὶ ὅμοιον τῷ ΑΒΓ· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

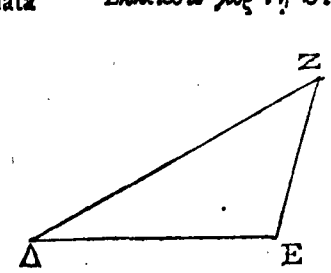
PROP. XL.

Si trianguli ſinguli anguli magnitudine dati ſint; triangulum ipſum ſpecie datum eſt.

TRianguli enim ABΓ unuſquiſque angulorum magnitudine datus ſit: dico triangulum ABΓ ſpecie datum eſſe.

Exponatur enim poſitione & magnitudine data recta Δ E, & [per 23. 1.] ad rectam Δ E, & ad puncta Δ, E in ipſa, angulo quidem ABΓ æqualis conſtituatur angulus rectilineus ZΔE; angulo autem AΓB æqualis ZEΔ: itaque [per 32. 1.] reliquus angulus BAΓ reliquo ΔZE æqualis eſt. unuſquiſque autem eorum, qui ad A, B, Γ puncta ſunt, angulorum datus eſt: quare & unuſquiſque angulorum ad Z, Δ, E datus erit. quoniam itaque ad poſitione datam rectam lineam Δ B, & ad datum in ea punctum Δ acta eſt recta linea ΔZ, faciens angulum datum ad punctum Δ, ipſa ΔZ [per 29.dat.] poſitione data erit. ſimili-





ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

Ἐὰν τριγώνου ἑκάστη τῶν γωνιῶν δεδομένη ᾖ τῷ μεγέθει, δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἴδει.

ΤΡιγώνου γὰρ ΑΒΓ ἑκάστη τῶν γωνιῶν δεδομένη ἔστω τῷ μεγέθει· λέγω ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ δέδοται τῷ εἴδει.

Ἐκκείσθω γὰρ τῇ θέσει καὶ τὸ μεγέθει δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΔΕ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΕ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Δ, Ε, τῇ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ ἴση γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΖΔΕ, τῇ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΕΔ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἴση ἐστί. δοθεῖσαι δὲ ἑκάστη τῶν πρὸς τοῖς Α, Β, Γ, σημείοις γωνιῶν· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν πρὸς τοῖς Ζ, Δ, Ε. ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει δεδομένῃ εὐθείᾳ τῇ ΔΕ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δεδομένῳ τῷ Δ, εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΔΖ, δεδομένην περιέχουσα γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Δ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΖ. διὰ τὰ

τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΕΖ θέσει ἐστίν· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Ζ σημεῖον. ἔστι δὲ ἑκάτερον τῶν Δ, Ε δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκάστη τῶν ΔΕ, ΔΖ, ΕΖ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει· δέδοται ἄρα τὸ ΔΖΕ τρίγωνον τῷ εἴδει, καὶ ἔστιν ὅμοιον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ· δέδοται ἄρα καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

ter quoque positione data est & ΕΖ: quare [per 25. dat.] punctum Ζ positione datum est. datum autem est utrumque punctorum Δ, Ε: unaquæque igitur linearum ΔΕ, ΔΖ, ΕΖ [per 26. dat.] positione & magnitudine data est: itaque [per 39. dat.] triangulum ΔΖΕ specie datum est; atque [per 4. 6.] simile est triangulo ΑΒΓ: triangulum igitur ΑΒΓ specie datum est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μα'.

Ἐὰν τρίγωνον μίαν ἔχῃ γωνιῶν δεδομένην, περὶ δὲ τὴν δεδομένην γωνίαν δύο πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσιν δεδομένον· δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἴδει.

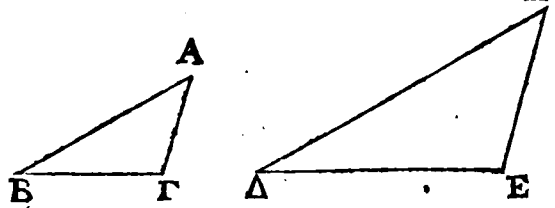
PROP. XLI.

Si triangulum unum angulum datum habeat, circa datum autem angulum duo latera ad invicem habeant rationem datam; triangulum ipsum specie datum est.

Ἐχέτω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μίαν γωνιῶν δεδομένην τὴν ὑπὸ ΒΑΓ, περὶ δὲ τὴν ὑπὸ ΒΑΓ αἱ πλευραὶ αἱ ΒΑ, ΑΓ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον· λέγω ὅτι ΑΒΓ τρίγωνον δέδοται τῷ εἴδει.

Habeat enim triangulum ΑΒΓ unum angulum datum, nempe ΒΑΓ; circa datum autem angulum ΒΑΓ latera ΒΑ, ΑΓ ad invicem rationem datam habeant: dico triangulum ΑΒΓ specie datum esse.

Ἐκκείσθω γὰρ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΔΖ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΖ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ζ, τῇ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΔΖΕ. δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΔΖΕ. ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει δεδομένην εὐθείᾳ τῇ ΔΖ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ δεδομένῳ σημείῳ τῷ Ζ, εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΖΕ, δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΔΖΕ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΕ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τῆς ΔΖ πρὸς τὴν ΖΕ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΔΖ πρὸς τὴν ΖΕ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ ΔΖ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΖΕ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ ἔστι τὸ Ζ δοθέν· δοθὲν ἄρα τὸ Ε. ἔστι δὲ καὶ ἑκάτερον τῶν Δ, Ζ δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκάστη τῶν ΔΖ, ΖΕ, ΔΕ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει· δέδοται ἄρα τὸ ΔΖΕ τρίγωνον τῷ εἴδει. καὶ ἐπεὶ δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχει, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ, περὶ δὲ τὰς ὑπὸ τῶν ΒΑΓ, ΔΖΕ γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. δέδοται δὲ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ εἴδει· δέδοται ἄρα καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.



Exponatur enim positione & magnitudine data recta ΔΖ, & constituatur [per 23. 1.] ad rectam ΔΖ, & datum in ea punctum Ζ, angulo ΒΑΓ æqualis angulus ΔΖΕ. est autem angulus ΒΑΓ datus: quare & angulus ΔΖΕ datus est. quoniam igitur ad positione datam rectam ΔΖ, & datum in ea punctum Ζ, acta est recta linea ΖΕ, faciens angulum ΔΖΕ datum: positione data erit [per 29. dat.] recta ΖΕ. quoniam ergo [ex hyp.] ratio ipsius ΒΑ ad ΑΓ data est; fiat huic eadem ratio ipsius ΔΖ ad ΖΕ, & connectatur ΔΕ: itaque [per 2. def. dat.] ratio ΔΖ ad ΖΕ data est. data autem est ΔΖ: igitur [per 2. dat.] data est ΖΕ. sed & ipsa etiam positione data est; & datum est punctum Ζ: itaque [per 27. dat.] datum est punctum Ε. est autem utrumque punctorum Δ, Ζ datum: quare [per 26. dat.] data est unaquæque linearum ΔΖ, ΖΕ, ΔΕ positione & magnitudine: itaque [per 39. dat.] triangulum ΔΖΕ specie datum est. quoniam vero duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ unum angulum uni angulo æqualem habent, scilicet angulum ΒΑΓ angulo ΔΖΕ, circa æquales autem angulos ΒΑΓ, ΔΖΕ latera proportionalia; triangulum ΑΒΓ [per 6. 6.] triangulo ΔΕΖ simile erit. triangulum autem ΔΕΖ specie datum est: triangulum igitur ΑΒΓ specie etiam datum est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ'.

Ἐὰν τριγώνου αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον, δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἴδει.

PROP. XLII.

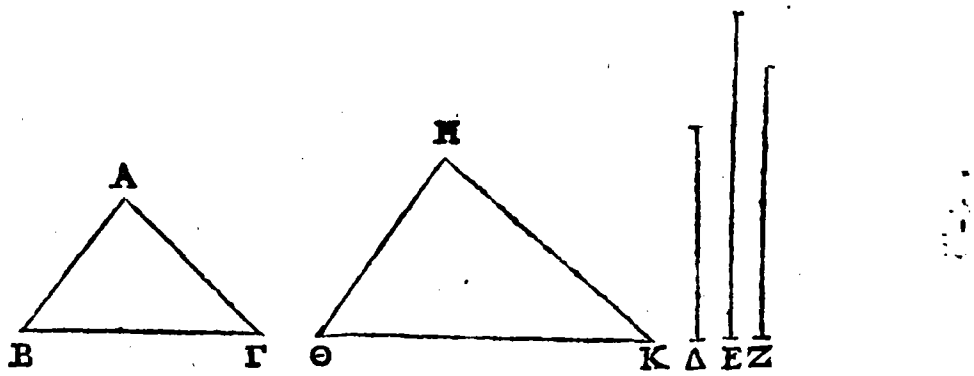
Si trianguli latera ad invicem habeant rationem datam, triangulum specie datum est.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον δέδοται τῷ εἴδει.

Trianguli enim ΑΒΓ latera ad invicem habeant rationem datam: dico triangulum ΑΒΓ specie datum esse.

Exponatur enim data magnitudine recta Δ. quoniam vero ratio ipſius AB ad BΓ data eſt, fiat huic eadem ratio ipſius Δ ad E. data autem eſt Δ: quare [per 2. dat.] & data eſt E. rurſus quoniam ratio ipſius BΓ ad AΓ data eſt; fiat huic eadem ratio ipſius E ad Z. eſt autem E data: itaque Z data eſt. deinde [per 22. 1.] ex tribus rectis, quæ tribus datis rectis Δ, E, Z æquales ſunt, quarum duæ reliqua majores ſint utcunque ſumptæ, conſtituatur triangulum HΘK; ita ut æqualis ſit recta Δ ipſi HΘ, recta autem E ipſi ΘK, & Z ipſi HK. eſt autem unaquæque linearum Δ, E, Z data; quare data eſt unaquæque linearum HΘ, ΘK, KH magnitudine: triangulum igitur HΘK [per 39. dat.] ſpecie datum eſt. quoniam autem eſt ut AB ad BΓ ita Δ ad E, atque eſt Δ æqualis rectæ HΘ, ipſa vero E rectæ ΘK; erit quoque [per 11. 5.] ut AB ad BΓ ita HΘ ad ΘK. rurſus quoniam eſt ut BΓ ad ΓA ita E ad Z, atque eſt E æqualis ipſi ΘK & Z ipſi KH; erit etiam ut BΓ ad ΓA ita ΘK ad KH. oſtenſum autem eſt ut AB ad BΓ ita eſſe HΘ ad ΘK: eſt igitur ex æquo [per 22. 5.] ut AB ad AΓ ita HΘ ad HK. eſt autem ut AΓ ad BΓ ita HK ad KΘ: itaque [per 5. 6.] triangulum ABΓ triangulo HΘK ſimile eſt. verum triangulum HΘK ſpecie datum eſt: quare & triangulum ABΓ ſpecie datum eſt.

Ἐκκείσθω γὰρ δεδομένη τῷ μεγέθει εὐθεῖα ἡ Δ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς AB πρὸς τὴν BΓ δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τῆς Δ πρὸς τινὰ E. δοθεῖσα δὲ ἡ Δ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ E. πάλιν ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς BΓ πρὸς τινὰ AΓ δοθείς, αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τῆς E πρὸς τινὰ Z. δοθεῖσα δὲ ἡ E· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ Z. καὶ ὅτι τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσιν ἴσαι τρισὶ τὰς δοθείσαις ταῖς Δ, E, Z, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, τρίγωνον συνίστασθαι τὸ HΘK, ὥστε ἴσην εἶναι τινὰ μὲν Δ τῇ HΘ, τὴν δὲ E τῇ ΘK, τινὰ δὲ Z τῇ HK. δοθεῖσα δὲ ἑκάστη τῶν Δ, E, Z· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἑκάστη τῶν HΘ, ΘK, KH τῷ μεγέθει· δίδοται ἄρα τὸ HΘK τρίγωνον τῷ εἴδει. καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ AB πρὸς τινὰ BΓ οὕτως ἡ Δ πρὸς τινὰ E, ἴση δὲ ἡ μὲν Δ τῇ HΘ, ἡ δὲ E τῇ ΘK· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τινὰ BΓ οὕτως ἡ HΘ πρὸς τινὰ ΘK. πάλιν ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ BΓ πρὸς τινὰ ΓA οὕτως ἡ E πρὸς τὴν Z, ἴση δὲ ἡ E τῇ ΘK, ἡ δὲ Z τῇ HK· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ BΓ πρὸς τὴν ΓA οὕτως ἡ ΘK πρὸς τινὰ KH. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ AB πρὸς τινὰ BΓ οὕτως ἡ HΘ πρὸς τὴν ΘK· δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν AΓ οὕτως ἡ HΘ πρὸς τὴν HK. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ AΓ πρὸς τὴν BΓ οὕτως ἡ HK πρὸς τὴν KΘ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ HΘK τριγώνῳ. δίδοται δὲ τὸ HΘK τρίγωνον τῷ εἴδει· δίδοται ἄρα καὶ τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.



Prop. XLIII.

Si trianguli rectanguli latera, circa unum acutorum angulorum, ad invicem habeant rationem datam; triangulum ipſum ſpecie datum eſt.

TRianguli enim rectanguli ABΓ rectum habentis angulum BAΓ, latera ΓB, BA, circa unum acutorum angulorum ΓBA, habeant rationem datam: dico triangulum ABΓ ſpecie datum eſſe.

Exponatur enim poſitione & magnitudine data recta ΔE; ſuper ΔE vero deſcribatur ſemicirculus ΔHE: itaque [per 6. def. dat.] poſitione datus eſt ſemicirculus ΔHE. & quoniam ratio ipſius ΓB ad BA data eſt; fiat huic eadem ratio ipſius ΔE ad Z: quare ratio ipſius ΔE ad Z data eſt. data autem eſt ΔE: ergo

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ'.

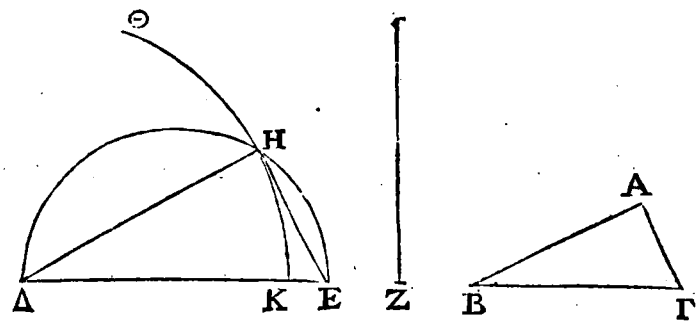
Ἐὰν τριγώνου ὀρθογωνίου περὶ μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον, δίδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἴδει.

ΤΡιγώνου γὰρ ὀρθογωνίου τοῦ ABΓ ὀρθὴν ἔχοντος τὴν ὑπὸ BAΓ γωνίαν, περὶ μίαν τῶν ὀξειῶν αὐτοῦ γωνιῶν τὴν ὑπὸ ΓBA, αἱ πλευραὶ αἱ ΓB, BA πρὸς ἀλλήλας λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον· λέγω ὅτι δέδοται τὸ ABΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

Ἐκκείσθω γὰρ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΔE, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΔE ἡμικύκλιον τὸ ΔHE· θέσει ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔHE ἡμικύκλιον. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς ΓB πρὸς τὴν BA δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τῆς ΔE πρὸς τὴν Z· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΔE πρὸς τὴν Z δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ ΔE·

δοθεῖσα

δοθεῖσα ἄρα ἑκ ἡ Z. καὶ ἔστι μεῖζων ἡ ΓΒ τῆς ΒΑ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΔ τῆς Z. ἐνηρμόσθω τῷ Z ἴση ἡ ΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΕ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΔΗ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΘΗΚ· θέσει ἄρα ἐστὶν ὁ ΘΗΚ κύκλος, δέδοται γὰρ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῇ θέσει, ἑκ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῷ μεγέθει. θέσει δὲ καὶ τὸ ΔΗΕ ἡμικύκλιον· δόθεν ἄρα ἐστὶ τὸ Η σημεῖον. ἔστι δὲ καὶ ἑκάτερον τῶν Δ, Ε δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκάστη τῶν ΗΔ, ΕΗ, ΕΔ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει· δέδοται ἄρα τὸ ΗΔΕ τρίγωνον τῷ εἴδει. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ, ΔΕΗ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΔΗΕ, περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς ὑπὸ ΓΒΑ, ΕΔΗ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν τῶν ὑπὸ ΒΓΑ, ΔΕΗ ἑκατέραν ἅμα ἐλάσσονα ἢ ὀρθήν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τῷ ΔΕΗ. δέδοται δὲ τὸ ΔΕΗ τῷ εἴδει· δέδοται ἄρα καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.



[per 2. dat.] Z data eſt. & [per 19. 1.] major eſt ΓΒ ipſa ΒΑ: quare & major eſt ΕΔ ipſa Z. accommodetur [per 1. 4.] ipſi Z æqualis ΔΗ, & connectatur ΗΕ, dein centro quidem Δ, intervallo autem ΔΗ, circulus deſcribatur ΘΗΚ: itaque [per 6. def. dat.] poſitione datus eſt ſemicirculus ΘΗΚ; ipſius namque centrum datum eſt, & ea quæ ex centro eſt magnitudine. ſed & ſemicirculus ΔΗΕ poſitione datus eſt: ergo [per 25. dat.] punctum Η datum eſt. datum eſt autem utrumq; punctorum Δ, Ε: igitur [per 26. dat.] unaquæque linearum ΗΔ, ΕΗ, ΕΔ poſitione & magnitudine data eſt: quare [per 3. def. dat.] triangulum ΗΔΕ ſpecie datum eſt. quoniam itaque triangula ΑΒΓ, ΔΕΗ unum angulum uni angulo æqualem habent, angulum ſcilicet ΒΑΓ angulo ΔΗΕ, circa alios autem angulos ΓΒΑ, ΕΔΗ latera proportionalia, reliquorum autem ΒΓΑ, ΔΕΗ ſimul utrumque [ex hyp.] recto minorem; ΑΒΓ quidem [per 7. 6.] ipſi ΔΕΗ ſimile erit. triangulum autem ΔΕΗ [ex oſtenſis] ſpecie datum eſt: quare triangulum quoque ΑΒΓ ſpecie datum eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ'.

Ἐὰν τρίγωνον μίαν ἔχῃ γωνίαν δεδομένην, περὶ δὲ ἄλλην γωνίαν αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον· δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἴδει.

PROP. XLIV.

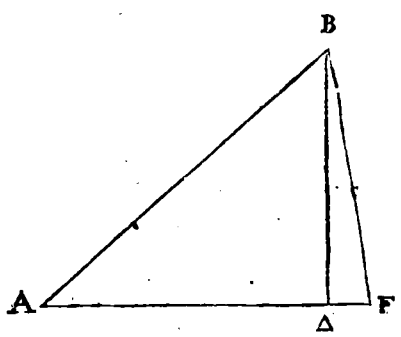
Si triangulum angulum unum habeat datum; latera autem circa alium angulum habeant ad invicem rationem datam: triangulum ſpecie datum eſt.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μίαν ἔχον γωνίαν δεδομένην τὴν ὑπὸ ΒΑΓ, περὶ δὲ ἄλλην γωνίαν τὴν ὑπὸ ΑΒΓ αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ λόγον ἐχέτωσαν πρὸς ἀλλήλας δεδομένον· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον δέδοται τῷ εἴδει.

SIT triangulum ΑΒΓ, quod unum angulum habeat datum qui ſit ΒΑΓ; circa alium autem angulum ΑΒΓ latera ΑΒ, ΒΓ habeant rationem datam: dico triangulum ΑΒΓ ſpecie datum eſſe.

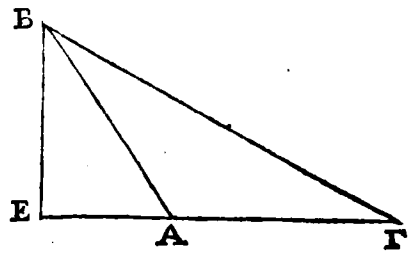
Μὴ ἔστω δὴ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ὀρθή, ἀλλὰ ἔστω πρότερον ὀξεῖα· καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἡ ΒΔ. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΔΑ γωνία, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ δοθεῖσα· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΔ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΒΑΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΒΑ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς. ἀλλὰ τοῦ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἔστι δοθείς· καὶ τοῦ ΒΔ ἄρα πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΔΓ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΓΔ γωνία. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ δοθεῖσα· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ ἐστὶ δο-

Non ſit autem angulus ΒΑΓ rectus; ſed primum acutus: & agatur à puncto Β in lineam ΑΓ perpendicularis ΒΔ. quoniam vero datus eſt angulus ΒΑΔ, eſtque [ex hyp.] angulus ΒΑΔ datus; ergo & [per 32. 1. & 4. dat.] reliquus ΑΒΔ datus eſt: itaque [per 40. dat.] triangulum ΒΑΔ ſpecie datum eſt: quare [per 3. def. dat.] ratio ipſius ΒΑ ad ΒΔ data eſt. ſed [ex hyp.] rectæ ΑΒ ad ΒΓ data eſt ratio: ergo [per 8 dat.] & ratio ipſius ΒΔ ad ΒΓ data eſt. rectus autem eſt [per conſtr.] angulus ΒΔΓ: quare [per 43. dat.] triangulum ΒΔΓ ſpecie datum eſt: datus igitur eſt angulus ΒΓΔ. eſt autem [ex hyp.] angulus ΒΑΓ datus: quare & [per 32. 1. & 4. dat.] reliquus angulus ΑΒΓ da-



tus est: triangulum igitur ABΓ [per 40. dat.] specie datum est.

Sed sit angulus BAΓ obtusus, & producatur ΓA ad punctum E, atque agatur à puncto B ad rectam AE perpendicularis BE. & quoniam angulus BAΓ datus est; etiam [per 13. 1. & 4. dat.] & qui deinceps est angulus BAE datus erit. est autem & angulus BEA datus: reliquus igitur EBA [per 32. 1. & 4. dat.] datus est: quare [per 40. dat.] triangulum EBA specie datum est: ergo [per 3. def. dat.] ratio ipsius EB ad BA data est. est autem [ex hyp.] ratio ipsius AB ad BΓ data: quare [per 8. dat.] & ratio ipsius EB ad BΓ data est. sed rectus est [per constr.] angulus BEΓ: ergo [per 43. dat.] triangulum EBΓ specie datum est: quare [per 3. def. dat.] datus est angulus BΓE. est autem [ex hyp.] angulus BAΓ datus: itaque reliquus angulus ABΓ datus est: triangulum igitur ABΓ [per 40. dat.] specie datum est.

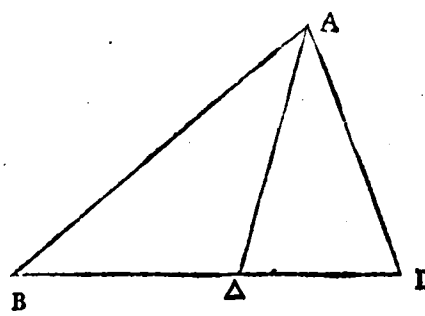


PROP. XLV.

Si triangulum angulum unum habeat datum; circa datum autem angulum latera simul utraque, tanquam unum, ad reliquum latus habeant rationem datam: triangulum ipsum specie datum est.

SIT triangulum ABΓ quod unum angulum BAΓ habeat datum; circa angulum autem BAΓ latera, hoc est simul utraque BAΓ, tanquam unum, ad BΓ rationem habeant datam: dico triangulum ABΓ specie datum esse.

Secetur enim [per 9. 1.] angulus BAΓ bifariam recta AΔ: itaque [per 2. dat.] datus est angulus BAΔ. quoniam vero [per 3. 6.] ut BA ad AΓ ita BΔ ad ΔΓ; erit quoque permutando ut AB ad BΔ ita AΓ ad ΓΔ: adeoque [per 12. 5.] ut simul utraque BAΓ ad BΓ ita erit AB ad BΔ. data autem est [ex hyp.] ratio utriusque simul BAΓ ad BΓ: quare & ratio ipsius AB ad BΔ data est. & datus etiam est angulus BAΔ: quare [per 44. dat.] triangulum ABΔ specie datum est: angulus igitur ABΔ datus est. datus autem est [ex hyp.] angulus BAΓ. itaque [per 32. 1. & 4. dat.] reliquus angulus AΓB datus est: ergo [per 40. dat.] triangulum ABΓ specie datum est.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ μέ.

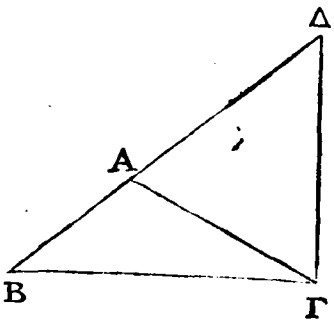
Ἐὰν τρίγωνον μίαν ἔχῃ γωνίαν δεδομένην, αἱ δὲ περὶ τὴν δεδομένην γωνίαν πλευραὶ συναμφότεραι, ὡς μία, πρὸς τὴν λοιπὴν λόγον ἔχωσι δεδομένον· δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἴδει.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μίαν γωνίαν δεδομένην ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ, περὶ δὲ τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν αἱ πλευραὶ, τουτέστι συναμφότερος ἡ ΒΑΓ, ὡς μία, πρὸς τὴν ΒΓ λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον δέδοται τῷ εἴδει.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τῇ ΑΔ εὐθείᾳ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΔ· καὶ ὡς συναμφότερος ἄρα ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ. λόγος δὲ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ εἴδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

* ΑΛΛΩΣ.

Ἐκβεβλήθω ἡ ΒΑ ἐπ' εὐθείας, καὶ τῇ ΑΓ κείσθω ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ. Καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς, ἴση δὲ ἡ ΓΑ τῇ ΑΔ· λόγος ἄρα τῆς ΒΑΔ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ, ἡμίσεια γάρ ἐστι τῆς ὑπὸ ΒΑΓ· δέδοται ἄρα τὸ ΒΔΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.



* ALITER.

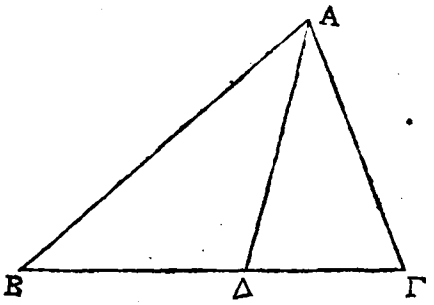
Producatur BA in directum, & [per 2.1.] ipsi AΓ ponatur æqualis AΔ, & connectatur ΔΓ. Quoniam vero ratio simul utriusque BAΓ ad BΓ data est, atque æqualis est ΓA ipsi ΔA: igitur ratio totius BAΔ ad BΓ data est. verum datus est angulus AΔΓ; dimidius namque est [per 5. & 32. 1.] ipsius BAΓ: igitur [per 44. dat.] triangulum BΔΓ specie datum est: ergo [per 3.def.dat.] angulus ABΓ datus est. angulus autem BAΓ etiam [ex hyp.] datus est: quare [per 32. 1. & 4. dat.] reliquus AΓB datus est. triangulum igitur ABΓ [per 40. dat.] specie datum est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μς'.

Ἐὰν τρίγωνον μίαν ἔχῃ γωνίαν δεδομένην, πρὸς δὲ ἄλλῃ γωνίᾳ αἱ πλευραὶ συναμφότεραι, ὡς μία, πρὸς τὴν λοιπὴν λόγον ἔχωσι δεδομένον· δέδοται τὸ τρίγωνον τῷ εἴδει.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μίαν ἔχον γωνίαν δεδομένην τὴν ὑπὸ ΑΒΓ, πρὸς δὲ ἄλλῃ γωνίᾳ τὴν ὑπὸ ΒΑΓ αἱ πλευραὶ συναμφότεραι, ὡς μία, τυτέστιν ἡ ΒΑΓ, πρὸς τὴν ΒΓ λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον δέδοται τῷ εἴδει.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τῇ ΑΔ εὐθείᾳ· ἔστιν ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ. λόγος δὲ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ εἴδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία. καὶ ἔστιν αὐτῆς διπλασίων ἡ ὑπὸ ΒΑΓ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.



PROP. XLVI.

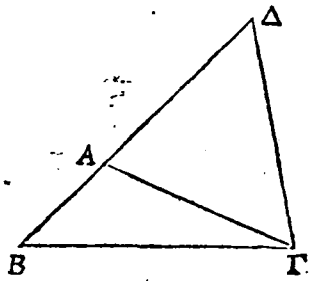
Si triangulum unum angulum habeat datum; circa alium autem angulum simul utraque latera, tanquam unum, habeant ad reliquum rationem datam: triangulum ipsum specie datum est.

SIT triangulum ABΓ, quod unum angulum ABΓ datum habeat, circa alium autem angulum BAΓ simul utraque latera, tanquam unum (hoc est BAΓ) ad BΓ datam rationem habeant: dico triangulum ABΓ specie datum esse.

Secetur enim [per 9. 1.] angulus BAΓ bifariam recta AΔ: itaque [per ostensa in præc.] erit ut simul utraque BAΓ ad BΓ ita AB ad BΔ. est autem ratio simul utriusque BAΓ ad BΓ [ex hyp.] data; ergo & ratio ipsius AB ad BΔ data est. datus autem [ex hyp.] est angulus ABΔ: ergo [per 41.dat.] triangulum ABΔ specie datum est: quare [per 3.def.dat.] angulus BAΔ datus est. ipsius autem duplus est [per constr.] angulus BAΓ: igitur [per 2. dat.] angulus BAΓ datus est. est autem [ex hyp.] & angulus ABΓ datus: quare & [per 32. 1. & 4.dat.] angulus AΓB datus est: triangulum igitur ABΓ [per 40.dat.] specie datum est.

ALITER.

Producatur BA in directum, & ponatur ipsi ΓA æqualis ΔA, & connectatur recta ΔΓ. quoniam vero [ex hyp.] data est ratio simul utriusque BAΓ ad BΓ; estque [ex constr.] ΓA æqualis ipsi AΔ: igitur ratio ipsius ΔB ad BΓ data est. datus autem est [ex hyp.] angulus ABΓ: quare [per 41. dat.] triangulum ΔBΓ specie datum est; ergo datus est [per 3. def. dat.] angulus BΔΓ. estque hujus duplus [per 5. & 32. 1.] angulus BAΓ:



* Hæc demonstratio non reperitur in Cod. MS. Saviliano.

BAΓ: angulus igitur BAΓ datus eſt: quare & reliquus AΓB datus eſt: & igitur [per 40.dat.] triangulum ABΓ ſpecie datum eſt.

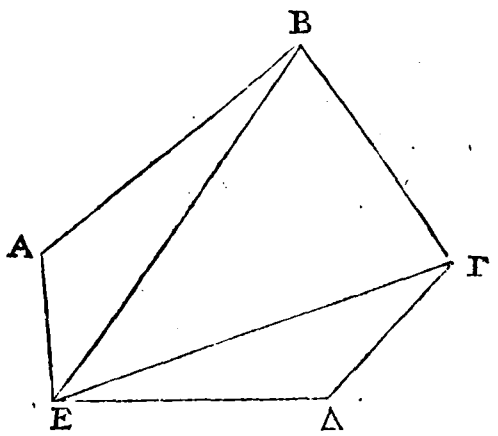
ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δοθεῖσά ἐστι· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

PROP. XLVII.

Rectilinea ſpecie data in data ſpecie triangula dividuntur.

SIT datum ſpecie rectilineum ABΓΔE: dico rectilineum ABΓΔE in data ſpecie triangula dividi.

Connectantur enim rectæ BE, EΓ. quoniam vero rectilineum ABΓΔE ſpecie datum eſt; igitur [per 3. def.dat.] angulus BAE datus eſt, & etiam ratio lateris BA ad EA data. quoniam itaque angulus BAE datus eſt, atque ratio ipſius BA ad AE data: triangulum BAE [per 41. dat.] ſpecie datum eſt: quare [per 3. def. dat.] angulus ABE datus eſt. totus autem angulus ABΓ [per 3.def.dat.] datus eſt: ergo [per 4. dat.] & reliquus EBΓ datus eſt. ipſius autem AB ad BE, necnon ipſius AB ad BΓ data eſt ratio: ergo [per 8. dat.] ratio quoque lateris BΓ ad BE data eſt. ſed & datus eſt angulus ΓBE: triangulum igitur BΓE [per 41. dat.] ſpecie datum eſt. ſimili vero ratione & triangulum ΓΔE ſpecie datum eſt. rectilinea igitur ſpecie data in data ſpecie triangula dividuntur.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ'.

Τὰ δεδομένα εὐθύγραμμα τῷ εἴδει εἰς δεδομένα τρίγωνα τῷ εἴδει διαιρεῖται.

ΕΣτω δεδομένῳ εὐθυγράμμῳ τῷ εἴδει τὸ ΑΒΓΔΕ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕ εὐθύγραμμον εἰς δεδομένα τῷ εἴδει τρίγωνα διαιρεῖται.

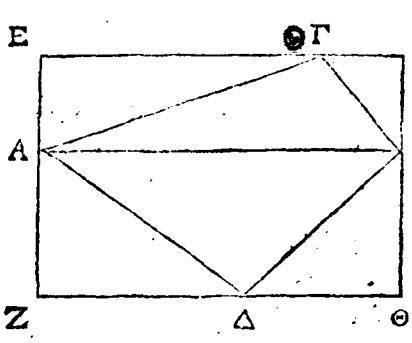
Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΕΓ. καὶ ἐπεὶ δέδοται τὸ ΑΒΓΔΕ εὐθύγραμμον τῷ εἴδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία, καὶ ἔστι λόγος τῆς ΒΑ πρὸς τὴν ΕΑ δοθείς. ἐπεὶ οὖν δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία, καὶ ἔστι λόγος τῆς ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ δοθείς· δέδοται ἄρα τὸ ΒΑΕ τρίγωνον τῷ εἴδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΒΓ δοθεῖσά ἐστιν. καὶ ἔστι λόγος τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ δοθείς, τῆς δὲ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΒΕ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΓΒΕ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΒΓΕ τρίγωνον τῷ εἴδει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΓΔΕ τρίγωνον τῷ εἴδει δέδοται· τὰ ἄρα δεδομένα εὐθύγραμμα τῷ εἴδει εἰς δεδομένα τῷ εἴδει τρίγωνα διαιρεῖται.

PROP. XLVIII.

Si ab eadem recta triangula ſpecie data deſcribantur; habebunt ad invicem rationem datam.

AB eadem enim recta AB duo triangula ſpecie data deſcribantur ABΓ, ABΔ: dico rationem trianguli ABΓ ad triangulum ABΔ datam eſſe.

Agantur enim [per 11. 1.] à punctis A, B ipſi AB ad rectos angulos rectæ AE, BH, & producantur ad puncta Z, Θ; per puncta autem Γ, Δ [per 31. 1.] ipſi AB parallelæ ducantur EΓH, ZΔΘ. quoniam autem triangulum ABΓ [ex hyp.] ſpecie datum eſt; ipſius ΓA ad BA [per 3. def. dat.] ratio data erit. quoniam itaque angulus ΓAB datus eſt, datuſque eſt angulus EAB; etiam [per 4.dat.] reliquus ΓAE datus eſt.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ μη'.

Ἐὰν ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἀναγραφῇ τρίγωνα δεδομένα τῷ εἴδει· λόγον ἕξει πρὸς ἄλληλα δεδομένον.

ΑΠὸ γὰρ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο τρίγωνα δεδομένα τῷ εἴδει ἀναγεγράφθω τὰ ΑΒΓ, ΑΒΔ· λέγω ὅτι λόγος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ πρὸς τὸ ΑΒΔ δοθείς.

Ηχθω γὰρ ἀπὸ τῶν Α, Β σημείων τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς αἱ ΑΕ, ΒΗ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Ζ, Θ, καὶ διὰ τῶν Γ, Δ σημείων τῇ ΑΒ εὐθείᾳ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΓΗ, ΖΔΘ. καὶ ἐπεὶ δέδοται τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει, λόγος ἐστὶ τῆς ΓΑ πρὸς τὴν ΒΑ δοθείς. ἐπεὶ οὖν δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΓΑΒ γωνία, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΒ δοθεῖσα· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΑΕ δοθεῖσά ἐστιν·

ἐστιν. ἔστι δὲ ἑκάτερον τῶν ΑΕΓ δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΓΑ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΕΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα τοῦ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΓ δοθείς. τοῦ δὲ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΕΑ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῦ ΖΑ πρὸς τὴν ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τῆς ΕΑ πρὸς τὴν ΑΖ λόγος ἐστὶ δοθείς. καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΑΖ οὕτως τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΘΑ· ὥστε καὶ τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΘΑ λόγος ἐστὶ δοθείς. καί ἐστι τὸ μὲν ΑΗ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓ, τὸ δὲ ΑΘ ἥμισυ τοῦ ΑΔΒ· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα πρὸς τὸ ΑΔΒ λόγος ἐστὶ δοθείς.

tus erit. angulus autem ΑΕΓ datus est: ideoque reliquus angulus ΕΓΑ datus est: quare [per 40.dat.] triangulum ΑΒΓ specie datum est: igitur [per 3. def. dat.] ipsius ΒΑ ad ΑΓ ratio est data. sed [ex hyp.] & ratio ΓΑ ad ΑΒ data est: quare [per 8.dat.] ipsius quoque ΒΑ ad ΑΒ ratio data erit. similiter vero ipsius ΖΑ ad ΑΒ ratio est data: quare [per 8.dat.] & ipsius ΕΑ ad ΑΖ data est ratio. est autem [per 1. 6.] ut ΑΕ ad ΑΖ ita parallelogrammum ΑΗ ad parallelogrammum ΘΑ: ideoque ratio parallelogrammi ΑΗ ad parallelogrammum ΘΑ data est. sed [per 41. 1.] parallelogrammi quidem ΑΗ dimidium est triangulum ΑΒΓ; parallelogrammi vero ΑΘ dimidium est ΑΔΒ: trianguli igitur ΑΒΓ ad triangulum ΑΔΒ data est ratio.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μθ'.

Ἐὰν ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο εὐθύγραμμα ἃ ἔτυχεν ἀναγραφῇ δεδομένα τῷ εἴδει, λόγον ἔξει τὸν δοθέντα τὰ ἀναγραφέντα.

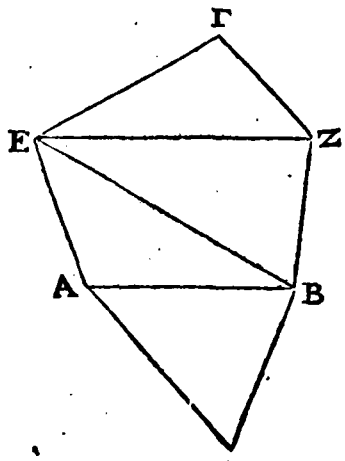
Ἀπὸ γὰρ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο εὐθύγραμμα ἃ ἔτυχεν δεδομένα τῷ εἴδει ἀναγεγράφθω τὰ ΑΕΓΖΒ, ΑΔΒ· λέγω ὅτι λόγος ἐστὶ τοῦ ΑΕΓΖΒ πρὸς ΑΔΒ δοθείς.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΖΕ· δέδοται ἄρα ἕκαστον τῶν ΕΖΓ, ΕΖΒ, ΕΑΒ τριγώνων τῷ εἴδει. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΕΖ δύο τρίγωνα δεδομένα τῷ εἴδει ἀναγέγραπται τὰ ΕΖΓ, ΕΖΒ· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΓΕΖ πρὸς τὸ ΖΕΒ δοθείς· καὶ συνθέντι ἄρα λόγος ἐστὶ τοῦ ΓΕΒΖ πρὸς τὸ ΕΒΖ δοθείς. ἔστι δὲ ΖΕΒ πρὸς τὸ ΕΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς, ἐπειδήπερ ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΒΕ ἀναγέγραπται δεδομένα τῷ εἴδει τρίγωνα τὰ ΖΕΒ, ΕΑΒ· τοῦ ἄρα ΓΕΒΖ πρὸς τὸ ΕΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ συνθέντι συναμφοτέρων τοῦ ΓΕΑΒΖ πρὸς τὸ ΕΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ΕΑΒ πρὸς τὸ ΑΔΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΓΕΑΒΖ ἄρα πρὸς τὸ ΑΔΒ λόγος ἐστὶ δοθείς.

PROP. XLIX.

Si ab eadem recta linea duo quælibet rectilinea specie data describantur; habebunt ad invicem rationem datam.

AB eadem enim recta ΑΒ duo rectilinea quæcunque specie data describantur, ut ΑΕΓΖΒ, ΑΔΒ: dico rationem ipsius ΑΕΓΖΒ ad ΑΔΒ datam esse.



Connectantur enim ΒΕ, ΖΕ: itaque [per 47. dat.] unumquodque triangulorum ΕΖΓ, ΕΖΒ, ΕΑΒ, specie datum est. quoniam vero ab eadem recta ΒΖ triangula specie data ΕΖΓ, ΕΖΒ describta sunt; ratio ΓΕΖ ad ΖΕΒ [per 48. dat.] data est: quare [per 6. dat.] componendo, ratio ipsius ΓΕΒΖ ad ΕΒΖ data est. ipsius etiam ΖΕΒ ad ΕΑΒ [per 48. dat.] data ratio est; quandoquidem ab eadem recta ΒΕ triangula specie data describta sunt, ΖΕΒ, ΕΑΒ: quare [per 8.dat.] ipsius ΓΕΒΖ ad ΕΑΒ data est ratio: componendo igitur [per 6. dat.] ratio utriusque ΓΕΑΒΖ ad ΕΑΒ data est. ratio autem ipsius ΕΑΒ ad ΑΔΒ [per 48.dat.] data est: igitur [per 8. dat.] ratio ipsius ΓΕΑΒΖ ad ΑΔΒ data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ν'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα πρὸς ἄλληλα λόγον ἕξει δεδομένον.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ Ε, Ζ· λέγω ὅτι καὶ ὁ αὐτῶν πρὸς ἄλληλα λόγος ἐστὶ δοθείς.

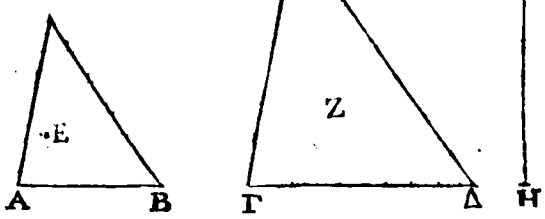
PROP. L.

Si duæ rectæ lineæ ad invicem habeant rationem datam, ab illis quoque similia similiterque descripta rectilinea ad invicem rationem datam habebunt.

DUÆ enim rectæ ΑΒ, ΓΔ habeant ad invicem rationem datam, & describantur ab illis similia & similiter posita rectilinea Ε, Ζ: dico rationem illorum ad invicem datam esse.

Acci-

Accipiatur enim [per 11. 6.] ipſius AB, ΓΔ tertia proportionalis H: eſt igitur ut AB ad ΓΔ ita ΓΔ ad H. data autem eſt [ex hyp.] ratio rectæ AB ad rectam ΓΔ: quare etiam ratio ΓΔ ad H data eſt: ideoque [per 8. dat.] & ipſius AB ad H ratio data eſt. verum ut AB ad H ita [per 19 aut 20.6.] rectilineum E ad rectilineum Z: ratio igitur ipſius E ad Z data eſt.



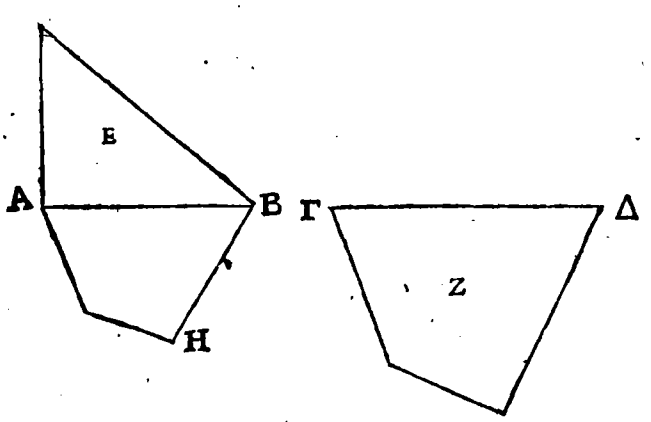
Εἰλήφθω γὰρ τῶν AB, ΓΔ τρίτη ἀνάλογον ἡ H ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν H. λόγος δὲ τῆς AB πρὸς τὴν ΓΔ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΓΔ πρὸς τὴν H δοθείς· ὥστε καὶ τῆς AB πρὸς τὴν H λόγος ἐστὶ δοθείς. ὡς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν H οὕτω τὸ E πρὸς τὸ Z· λόγος ἄρα τοῦ E πρὸς τὸ Z δοθείς.

PROP. LI.

Si duæ rectæ lineæ habeant ad invicem rationem datam, atque ab illis rectilinea quæcunque ſpecie data deſcribantur; habebunt hæc ad invicem rationem datam.

DUÆ enim rectæ AB, ΓΔ habeant ad invicem rationem datam; & deſcribantur ab ipſis AB, ΓΔ rectilinea quæcunque ſpecie data E, Z: dico ipſius E ad Z rationem datam eſſe.

Deſcribatur enim à recta AB, ipſi Z ſimile & ſimiliter poſitum rectilineum AH quoniam autem rectilineum E ſpecie datum eſt, atque deſcriptum eſt ab eadem recta aliud rectilineum AH ſpecie datum: ratio igitur ipſius E ad AH [per 49. dat.] data eſt. & quoniam ratio ipſius AB ad ΓΔ data eſt, deſcriptaque ſunt à rectis AB, ΓΔ ſimilia & ſimiliter poſita rectilinea AH, Z: ratio ipſius AH ad Z [per 50. dat.] data eſt. data autem eſt ratio ipſius AH ad E: ergo [per 8.dat.] & ratio ipſius E ad Z data eſt.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ να'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον, καὶ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὡς ἔτυχεν ἀναγραφῇ δεδομένα τῷ εἴδει· λόγον ἕξει πρὸς ἄλληλα δεδομένον.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι AB, ΓΔ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῶν AB, ΓΔ εὐθύγραμμα ὡς ἔτυχεν δεδομένα τῷ εἴδει τὰ E, Z· λέγω ὅτι τοῦ E πρὸς τὸ Z λόγος ἐστὶ δοθείς.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τῷ Z ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ AH. ἐπεὶ οὖν τὸ E δεδοται τῷ εἴδει, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τὸ εὐθύγραμμον AH δεδομένον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα τοῦ E πρὸς τὸ AH δοθείς. καὶ ἐπεί ἐστι τῆς AB πρὸς τὴν ΓΔ λόγος δοθείς, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ τῶν AB, ΓΔ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ AH, Z· λόγος ἄρα τοῦ AH πρὸς τὸ Z δοθείς. ἦν δὲ AH πρὸς τὸ E λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ E ἄρα πρὸς τὸ Z λόγος ἐστὶ δοθείς.

PROP. LII.

Si à data magnitudine recta figura ſpecie data deſcribatur; deſcripta figura magnitudine data eſt.

A Data enim magnitudine recta AB deſcribatur data ſpecie figura AΓΔEB: dico figuram AΓΔEB magnitudine datam eſſe.

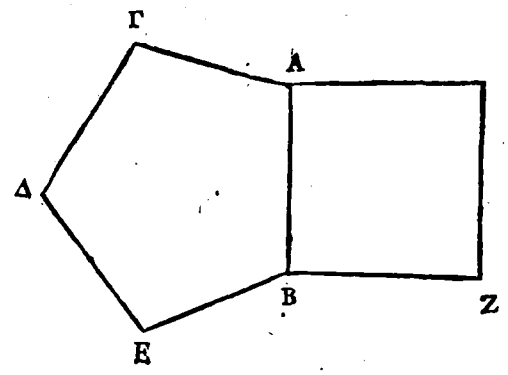
ΠΡΟΤΑΣΙΣ νβ'.

Ἐὰν ἀπὸ δεδομένης εὐθείας τῷ μεγέθει δεδομένον τῷ εἴδει εἶδος ἀναγραφῇ, δέδοται τὸ ἀναγραφὲν τῷ μεγέθει.

Ἀπὸ γὰρ δεδομένης εὐθείας τῆς AB τὸ εἶδος εἴδος ἀναγεγράφθω τὸ AΓΔEB· λέγω ὅτι τὸ AΓΔEB δέδοται τῷ μεγέθει.

Ara-

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΖ· δέδοται ἄρα καὶ τὸ ΑΖ τῷ εἴδει καὶ τῷ μεγέθει. Ἐπεὶ οὖν ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο εὐθύγραμμα ἀναγέγραπται δεδομένα τῷ εἴδει ΑΓΔΕΒ, ΑΖ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΑΓΔΕΒ πρὸς τὸ ΑΖ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΑΖ τῷ μεγέθει· δέδοται ἄρα καὶ τὸ ΑΓΔΕΒ τῷ μεγέθει.



Describatur enim [per 46. 1.] à recta AB quadratum AZ: datum itaque [per 3. def. dat.] est ipsum specie & magnitudine. & quia à recta AB duo rectilinea AΓΔEB, AZ specie data, descripta sunt: igitur [per 49. dat.] ratio ipsius AΓΔEB ad AZ data est. quadratum autem AZ magnitudine datum est: ergo [per 2. dat.] etiam figura AΓΔEB magnitudine data est.

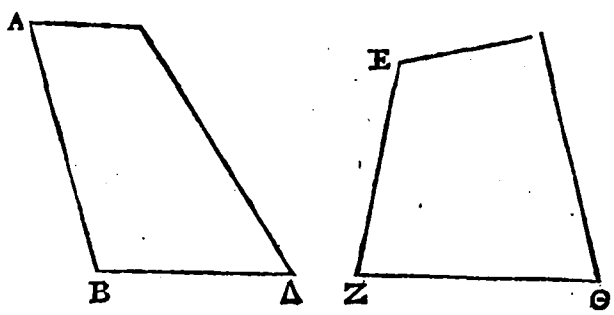
ΠΡΟΤΑΣΙΣ νγ'.

Ἐὰν δύο εἴδη τῷ εἴδει δεδομένα ᾖ, καὶ μία πλευρὰ ἑνὸς πρὸς μίαν πλευρὰν ἑτέρου λόγον ἔχῃ δεδομένον· καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς λόγον ἕξουσι δεδομένον.

Prop. LIII.

Si duæ figuræ specie datæ fuerint, & unum latus unius ad unum latus alterius habuerit rationem datam; & etiam reliqua latera ad reliqua latera rationem datam habebunt.

Ἔστω δύο εἴδη δεδομένα τὰ ΑΔ, ΕΘ, καὶ λόγος ἔστω τοῦ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ δοθείς· λέγω ὅτι καὶ τῶν λοιπῶν πλευρῶν πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς λόγος ἐστὶ δοθείς.



Sint duæ figuræ specie datæ AΔ, EΘ, sitque ratio ipsius BΔ ad ZΘ data: dico reliquorum etiam laterum ad reliqua rationem datam esse.

Ἐπεὶ γὰρ λόγος ἐστὶ τοῦ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ δοθείς, τῆς δὲ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΑΒ ἄρα πρὸς τὴν ΖΘ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ΖΘ πρὸς τὴν ΕΖ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΑΒ ἄρα πρὸς τὴν ΕΖ λόγος ἐστὶ δοθείς. ὁμοίως δὴ καὶ τῶν λοιπῶν πλευρῶν πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς λόγος ἐστὶ δοθείς.

Quoniam enim [ex hyp.] ratio rectæ BΔ ad ZΘ data est; ipsiusque ΔB ad BA [per 3. def. dat.] ratio est data: erit quoque [per 8. dat.] ratio AB ad ZΘ data. rectæ autem ZΘ ad EZ [per 3. def. dat.] ratio est data: quare [per 8. dat.] ipsius AB ad EZ ratio erit data. similiter & reliquorum laterum ad reliqua latera ratio data erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νδ'.

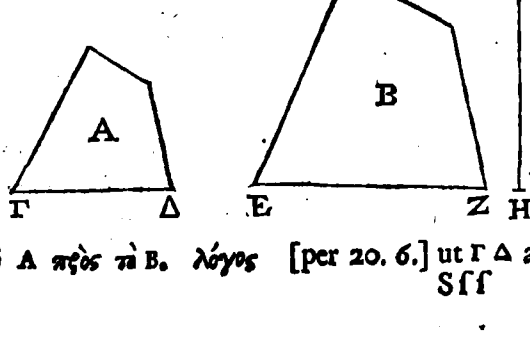
Ἐὰν δύο εἴδη δεδομένα τῷ εἴδει πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῶν πρὸς ἀλλήλας λόγον ἕξουσι δεδομένον.

Prop. LIV.

Si duæ figuræ specie datæ ad invicem habuerint rationem datam; etiam eorum latera inter se habebunt rationem datam.

Δύο γὰρ εἴδη δεδομένα τῷ εἴδει τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω δεδομένον· λέγω ὅτι καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῶν πρὸς ἀλλήλας λόγον ἕξουσι δεδομένον.

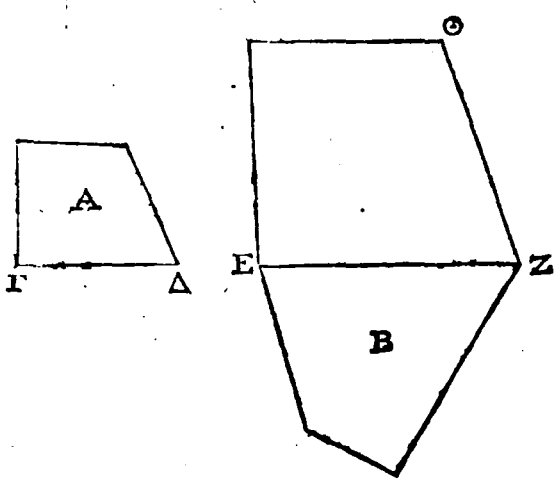
Τὸ γὰρ Α τῷ Β ἤτοι ὅμοιόν ἐστιν ἢ οὔ. ἔστω πρότερον ὅμοιον, καὶ εἰλήφθω τῶν ΓΔ, ΕΖ τρίτη ἀνάλογον ἡ Η· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν Η οὕτως τὸ Α πρὸς τὸ Β. λόγος



DUÆ enim figuræ specie datæ A, B habeant ad invicem rationem datam: dico eorum etiam latera ad invicem rationem datam habere.

Figura enim A ipsi B aut similis est, aut non. esto primum similis, & sumatur [per 11. 6.] rectis ΓΔ, EZ tertia proportionalis H. ideoque [per 20. 6.] ut ΓΔ ad H ita est A ad B. est autem

tem [ex hyp.] ratio ipſius A ad B data: ergo & ratio ipſius Γ Δ ad H data eſt. ſunt autem [per conſtr.] Γ Δ, E Z, H continue proportionales, ipſius igitur Γ Δ ad E Z [per 24.dat.] data eſt ratio. ſimilis vero eſt [ex hyp.] figura A ipſi B: quare [per 53.dat.] reliqua latera ad reliqua latera habebunt rationem datam.



Verum figura A non ſit ſimilis figuræ B, & [per 18. 6.] deſcribatur ab E Z ipſi A ſimilis & ſimiliter poſita E Θ: itaque figura E Θ ſpecie data eſt. eſt autem [ex hyp.] figura B ſpecie data: ergo [per 49. dat.] ratio ipſius B ad E Θ data eſt: ideoque [per 8. dat.] ratio ipſius A ad E Θ data eſt. at vero [per conſtr.] ſimilis eſt figura A ipſi E Θ: ratio igitur rectæ Γ Δ ad E Z [per 20. 6. & 24.dat.] data eſt. ſimiliter & ratio reliquorum laterum ad reliqua latera data eſt.

δὲ τῷ Α πρὸς τὸ Β δοθείς· λόγος ἄρα καὶ ὁ Γ Δ πρὸς τὴν Η δοθείς. καί εἰσιν αἱ Γ Δ, Ε Ζ, Η ἀνάλογον· καὶ ὁ Γ Δ ἄρα πρὸς τὴν Ε Ζ λόγος ἐστὶ δοθείς. Ἔστω ὅμοιον τὸ Α τῷ Β· καὶ αἱ λοιπαὶ ἄρα πλευραὶ πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς λόγον ἔξουσι δεδομένον.

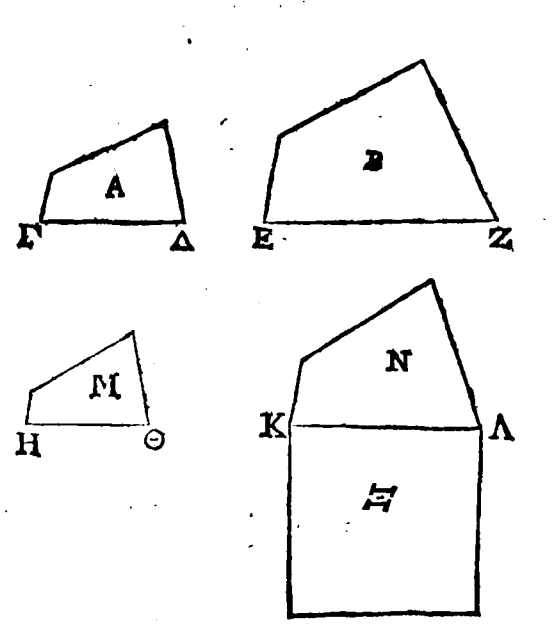
Μὴ ἔστω δὴ ὅμοιον τὸ Α τῷ Β, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς Ε Ζ τῷ Α ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ Ε Θ· δέδοται ἄρα καὶ τὸ Ε Θ τῷ εἴδει. δέδοται δὲ καὶ τὸ Β· λόγος ἄρα ὃν τὸ Β πρὸς τὸ Ε Θ δοθείς· καὶ τῷ Α ἄρα πρὸς τὸ Ε Θ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ Α τῷ Ε Θ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ Γ Δ πρὸς τὴν Ε Ζ δοθείς. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τῶν λοιπῶν πλευρῶν πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς λόγος ἐστὶ δοθείς.

ALITER.

Exponatur data recta H Θ. aut ergo figura A figuræ B ſimilis eſt, aut non. ſit primum ſimilis. & [per 12. 6.] fiat ut Γ Δ ad E Z ita H Θ ad K Λ, dein [per 18.6.] deſcribantur ab H Θ, K Λ ipſis A, B ſimiles ſimiliterque poſitæ figuræ M, N: utraque igitur figura M, N ſpecie data eſt. & quoniam eſt ut Γ Δ ad E Z ita H Θ ad K Λ, & deſcripta ſunt à lineis Γ Δ, E Z, H Θ, K Λ ſimilia ſimiliterque poſita rectilinea A, B, M, N: erit igitur [per 22.6.] ut A ad B ita M ad N. eſt autem ratio ipſius A ad B [ex hyp.] data: igitur & ratio ipſius M ad N data eſt. M autem [per 52.dat.] data eſt; ſiquidem à data magnitudine recta data ſpecie figura deſcripta eſt: ergo & [per 2. dat.] figura N data eſt. deſcribatur autem [per 46. 1.] à recta K Λ quadratum Ξ: figura igitur Ξ ſpecie data eſt: ergo ratio ipſius N ad Ξ data eſt. data autem eſt N: quare & Ξ data eſt; ergo data eſt K Λ. eſt autem H Θ data: ergo [per 1. dat.] ratio ipſius H Θ ad K Λ data eſt. ſed [per conſtr.] ut H Θ ad K Λ ita eſt Γ Δ ad E Z: ratio igitur ipſius Γ Δ ad E Z data eſt. ſimilis vero [ex hyp.] eſt figura A figuræ B; itaque [per 53.

ΑΛΛΩΣ.

Ἐκκείσθω δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ Η Θ. τὸ δὲ Α τῷ Β ἤτοι ὅμοιόν ἐστιν, ἢ οὔ. ἔστω πρότερον ὅμοιον. καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ Γ Δ πρὸς τὴν Ε Ζ οὕτως ἡ Η Θ πρὸς τὴν Κ Λ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῶν Η Θ, Κ Λ τοῖς Α, Β ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ Μ, Ν· δέδοται ἄρα τὸ ἑκάτερον τῶν Μ, Ν τῷ εἴδει. καὶ ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ Γ Δ πρὸς τὴν Ε Ζ οὕτως ἡ Η Θ πρὸς τὴν Κ Λ, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ τῶν Γ Δ, Ε Ζ, Η Θ, Κ Λ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ Α, Β, Μ, Ν· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν. λόγος δὲ τοῦ Α πρὸς τὸ Β δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τοῦ Μ πρὸς τὸ Ν δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ Μ, ἀπὸ γὰρ δεδομένης εὐθείας τῷ μεγέθει ἀναγέγραπται δεδομένον εἶδος· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ν. ἀναγεγράφθω δὲ ἀπὸ τῆς Κ Λ τετράγωνον τὸ Ξ· δέδοται ἄρα καὶ τὸ Ξ τῷ εἴδει· λόγος ἄρα τοῦ Ν πρὸς τὸ Ξ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ Ν· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ξ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ Κ Λ. ἔστι δὲ καὶ ἡ Η Θ δοθεῖσα· λόγος ἄρα καὶ τῆς Η Θ πρὸς τὴν Κ Λ δοθείς. καὶ ἔστιν ὡς ἡ Η Θ πρὸς τὴν Κ Λ οὕτως ἡ Γ Δ πρὸς τὴν Ε Ζ· λόγος ἄρα καὶ τῆς Γ Δ πρὸς τὴν Ε Ζ δοθείς. καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ Α τῷ Β· καὶ αἱ λοιπαὶ



λοιπαὶ πλευραὶ ἄρα πρὸς τὰς λοιπὰς πλευρὰς λόγον ἔξουσι δεδομένον. μὴ ἔστω δὴ ὅμοιον· ἀκολούθως δὴ τῇ πρώτῃ ἀποδείξει τὸ λοιπὸν δειχθήσεται).

dat.] reliqua latera ad reliqua latera habebunt datam rationem. deinde vero non ſit ſimilis; eodem ergo modo, quo in ſuperiori demonſtratione, reliqua pars propoſitionis oſtendetur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νε'.

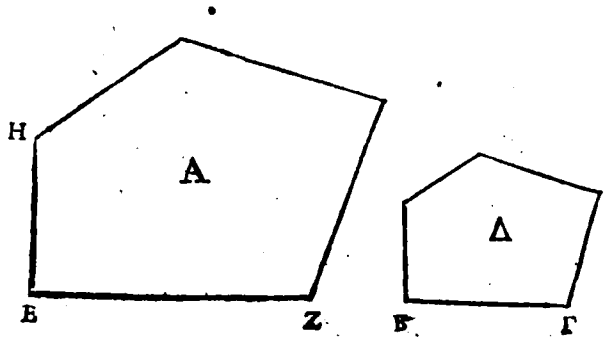
Ἐὰν χωρίον τῷ εἴδει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένον ᾖ, καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ τῷ μεγέθει δεδομέναι ἔσονται).

PROP. LV.

Si ſpatium magnitudine & ſpecie datum fuerit, etiam latera ejus magnitudine data erunt.

Ἔστω χωρίον τῷ εἴδει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένον τὸ Α· λέγω ὅτι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ δεδομέναι εἰσί.

Ἐκκείσθω γὰρ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΒΓ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΒΓ τῷ Α ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ Δ· δέδοται ἄρα τὸ Δ τῷ εἴδει. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ δεδομένης τῷ μεγέθει εὐθείας τῆς ΒΓ δεδομένον τῷ εἴδει εἶδος ἀναγέγραπται τὸ Δ· δέδοται ἄρα καὶ τὸ Δ τῷ μεγέθει. δέδοται δὲ καὶ τὸ Α· λόγος ἄρα τοῦ Α πρὸς τὸ Δ δοθείς. καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ Α τῷ Δ· λόγος ἄρα τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ ΒΓ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΕΖ. καὶ ἔστι λόγος τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ΕΗ δοθείς· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΕΗ. ᾿Ομοίως δὴ καὶ ἑκάστη τῶν λοιπῶν πλευρῶν δέδοται τῷ μεγέθει.



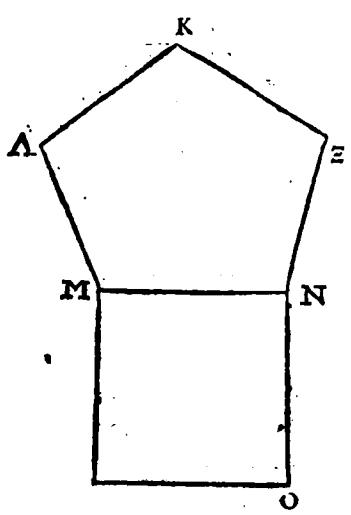
SIT ſpatium A ſpecie & magnitudine datum: dico latera illius magnitudine data eſſe.

Exponatur enim poſitione & magnitudine data recta BΓ, & deſcribatur à recta BΓ ipſi A ſimile & ſimiliter poſitum ſpatium Δ: itaque ſpatium Δ ſpecie datum eſt. quoniam vero à data recta BΓ data ſpecie figura Δ deſcripta eſt: igitur [per 52. dat.] magnitudine data eſt Δ. eſt autem [ex hyp.] & figura A data: itaque [per 1. dat.] ratio ipſius A ad Δ data eſt. ſimilis autem [per conſtr.] figura A figuræ Δ: eſt ergo [per 54. dat.] rectæ EZ ad BΓ ratio data eſt. data autem eſt BΓ: quare etiam EZ data eſt. verum [per 3. def. dat.] ipſius EZ ad EH ratio data eſt: ergo recta EH data eſt. ſimiliter vero unumquodque reliquorum laterum magnitudine datum eſt.

ΑΛΛΩΣ.

Ἔστω χωρίον τὸ ΚΛΜΝΞ δεδομένον τῷ εἴδει καὶ τῷ μεγέθει· λέγω ὅτι καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ δεδομέναι εἰσὶ τῷ μεγέθει.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΜΝ τετράγωνον τὸ ΜΟ· δέδοται ἄρα τῷ εἴδει. ἀλλὰ καὶ τὸ ΛΝ· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΛΝ πρὸς τὸ ΜΟ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ΛΝ τῷ μεγέθει· δοθὲν ἄρα τὸ ΜΟ τῷ μεγέθει. καὶ ἔστι τετράγωνον τὸ ΜΟ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΝ τῷ μεγέθει. ᾿Ομοίως δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ΜΛ, ΛΚ, ΚΞ, ΞΝ δοθεῖσά ἐστι τῷ μεγέθει.



ALITER.

Sit ſpatium ΚΛΜΝΞ ſpecie & magnitudine datum: dico latera ejus magnitudine quoque data eſſe.

Deſcribatur enim [per 46. 1.] à recta MN quadratum MO: itaque illud ſpecie datum eſt. ſed [ex hyp.] & ſpatium ΛN ſpecie datum eſt: ergo [per 49. dat.] ratio ſpatii ΛN ad MO data eſt. datum autem eſt [ex hyp.] ΛN magnitudine: igitur [per 2. dat.] datum eſt MO magnitudine. eſt autem MO quadratum à recta MN: itaque quadratum à recta MN datum eſt: quare data eſt recta MN magnitudine. ſimiliter quoque unaquæque linearum MΛ, ΛK, KΞ, ΞN magnitudine data eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νϛ'.

Ἐὰν δύο ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ δεδομένον· ἔστιν ὡς ἡ

PROP. LVI.

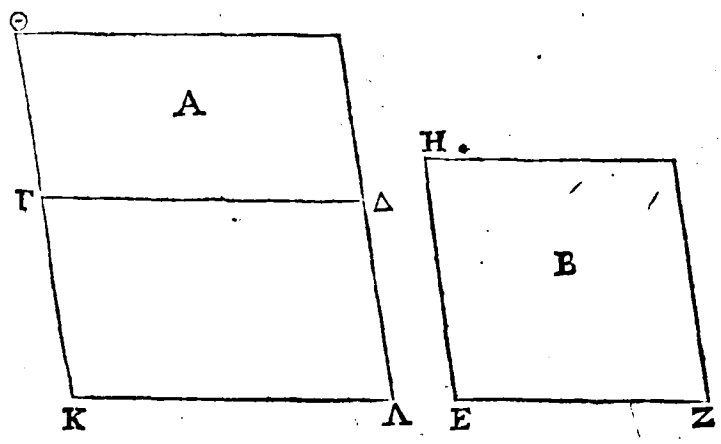
Si duo æquiangula parallelogramma habuerint ad invicem rationem datam; eſt

ut primi latus ad latus ſecundi ita reliquum ſecundi latus ad rectam lineam ad quam alterum primi latus habet rationem datam, quam nempe habet parallelogrammum ad parallelogrammum.

πρώτου πλευρὰ πρὸς τὸ δευτέρου πλευρὰν ὥστε ἡ λοιπὴ τοῦ δευτέρου πλευρὰ πρὸς ἣν ἡ ἑτέρα τοῦ πρώτου πλευρὰ λόγον ἔχει δεδομένον, ὃν τὸ παραλληλόγραμμον ἔχει πρὸς παραλληλόγραμμον.

DUO enim æquiangula parallelogramma A, B habeant ad invicem rationem datam: dico ut Γ Δ ad E Z ita eſſe E H ad eam ad quam Γ Θ habet rationem datam, quam nempe parallelogrammum A habet ad parallelogrammum B.

Producatur enim Γ K in directum ipſi Γ Θ, & fiat [per 12. 6.] ut Γ Δ ad E Z ita E H ad Γ K, compleaturque parallelogrammum Γ Λ. quoniam ergo eſt ut Γ Δ ad E Z ita eſt E H ad Γ K, eſtque [per 34. 1.] recta Γ Δ æqualis ipſi K Λ: igitur ut K Λ ad E Z ita E H ad Γ K. adeoque circa æquales angulos Γ K Λ, H E Z latera reciproce proportionalia ſunt: quare [per 14. 6.] æquale eſt K Δ ipſi H Z. quoniam vero ratio A ad B data eſt; æquale autem eſt B ipſi Γ Λ: ipſius igitur Θ Δ ad Γ Λ ratio data eſt. ut autem Θ Δ ad Γ Λ ita [per 1. 6.] Θ Γ ad Γ K: ergo & ratio Θ Γ ad Γ K data eſt. quoniam vero [per conſtr.] ut Γ Δ ad E Z ita eſt E H ad Γ K; habetque recta Θ Γ ad Γ K rationem datam, eam nempe quam habet ſpatium A ad B: eſt igitur ut Γ Δ ad E Z ita E H ad eam ad quam Θ Γ habet rationem datam, eam nempe quam ſpatium habet A ad ſpatium B, hoc eſt rationem ipſius Θ Γ ad Γ K.



Δυο δὴ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ A, B πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω δεδομένον· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ Γ Δ πρὸς τὴν E Z οὕτως ἡ E H πρὸς ἣν ἡ Γ Θ λόγον ἔχει δεδομένον, ὃν τὸ A παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ B παραλληλόγραμμον.

Ἐκβεβλήθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῇ Γ Θ ἡ Γ K, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ Γ Δ πρὸς τὴν E Z οὕτως ἡ E H πρὸς τὴν Γ K, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ παραλληλόγραμμον Γ Λ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ Γ Δ πρὸς τὴν E Z οὕτως ἡ E H πρὸς τὴν Γ K, ἴση δέ ἐστιν ἡ Γ Δ τῇ K Λ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ K Λ πρὸς τὴν E Z οὕτως ἡ E H πρὸς τὴν Γ K. καὶ ὧν ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ Γ K Λ, H E Z αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ K Δ τῷ H Z. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ A πρὸς τὸ B δοθείς, ἴσον δὲ τὸ B τῷ Γ Λ· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ τοῦ Θ Δ πρὸς τὸ Γ Δ δοθείς. ὡς δὲ τὸ Θ Δ πρὸς τὸ Γ Δ οὕτως ἡ Θ Γ πρὸς τὴν Γ K· καὶ τοῦ Θ Γ ἄρα πρὸς τὴν Γ K λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Γ Δ πρὸς τὴν E Z οὕτως ἡ E H πρὸς τὴν Γ K, ἡ δὲ Θ Γ πρὸς τὴν Γ K λόγον ἔχει δοθέντα, ὃν τὸ A χωρίον πρὸς τὸ B· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Γ Δ πρὸς τὴν E Z οὕτως ἡ E H πρὸς ἣν ἡ Θ Γ λόγον ἕξει, ὃν τὸ A χωρίον πρὸς τὸ B, τουτέστι τὸ Θ Γ πρὸς τὴν Γ K.

PROP. LVII.

Si datum ſpatium ad datam rectam applicatum fuerit in angulo dato; datur quoque latitudo applicationis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νζ'.

Ἐὰν δοθὲν χωρίον παρὰ δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβληθῇ ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ, δέδοται τὸ πλάτος τῆς παραβολῆς.

DAtum enim ſpatium A H ad datam rectam A B applicetur in angulo Γ A B dato: dico datam eſſe rectam Γ A.

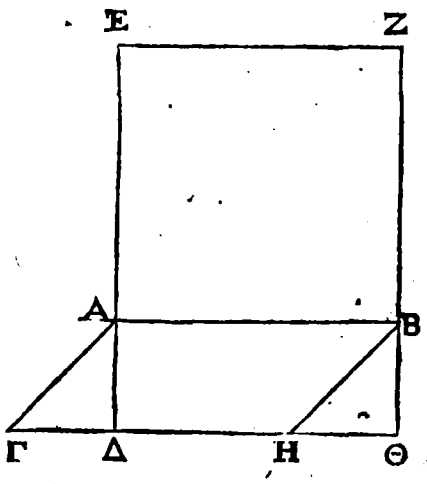
Deſcribatur ab A B quadratum E B: itaque quadratum E B datum eſt. dein producantur lineæ E A, Z B, Γ H ad puncta Δ, Θ. & quoniam datum eſt utrumque ſpatiorum E B, A H: ratio igitur ipſius E B ad A H data eſt. æquale autem eſt [per 35. 1.] A Θ ipſi A H: igitur ratio ipſius E B ad A Θ data eſt: unde & [per 1. 6.] ratio E A ad A Δ data eſt. æqualis autem

Δοθὲν γὰρ τὸ A H παρὰ δοθεῖσαν τὴν A B παραβεβλήσθω ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ Γ A B· λέγω ὅτι δοθεῖσά ἐστιν ἡ Γ A.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς A B τετράγωνον τὸ E B· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ E B. καὶ διήχθωσαν αἱ E A, Z B, Γ H ἐπὶ τὰ Δ, Θ. καὶ ἐπεὶ δοθὲν ἐστιν ἑκάτερον τῶν E B, A H· λόγος ἄρα τοῦ E B πρὸς τὸ A H δοθείς. τῷ δὲ A H ἴσον ἐστὶ τὸ A Θ· καὶ τοῦ E B ἄρα πρὸς τὸ A Θ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τῆς E A πρὸς τὴν A Δ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἴση δὲ ἡ

E A

ΕΑ τῇ ΑΒ· λόγος ἐστὶ ἄρα καὶ τῆς ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ δοθείς. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΓΑΒ γωνία, ἧς καὶ ἡ ὑπὸ ΔΑΒ δοθεῖσά ἐστι· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΑΔ δοθεῖσά ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΑ δοθεῖσα, ὀρθὴ γάρ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΔΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ δοθείς. τῆς δὲ ΑΔ πρὸς τὴν ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΓΑ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ΑΒ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΑΓ.



est ΕΑ ipsi ΑΒ: igitur ratio ipsius ΒΑ ad ΑΔ data est. & quoniam datus est angulus ΓΑΒ, & datus etiam est angulus ΔΑΒ: reliquus igitur ΓΑΔ [per 4. dat.] datus est. angulus autem ΓΔΑ datus est; quia rectus: quare [per 32.1. & 4. dat.] reliquus ΑΓΔ datus est: ergo [per 40. dat.] triangulum ΑΔΓ specie datum est; igitur [per 3. def. dat.] ipsius ΑΓ ad ΑΔ data est ratio. data autem est ratio ipsius ΑΔ ad ΑΒ: igitur [per 8. dat.] ratio ipsius ΓΑ ad ΑΒ data est. & [ex hyp.] data est ΑΒ; igitur [per 2. dat.] data est ΑΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νη'.

Ἐὰν δοθὲν χωρίον παρὰ δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβληθῇ, ἔλλειπον εἴδει δεδομένῳ τῷ εἴδει· δέδοται καὶ τὰ πλάτη τοῦ ἐλλείμματος.

Δοθὲν γὰρ τὸ ΓΑ ᾧ παρὰ δοθεῖσαν τὴν ΑΔ παραβεβλήθω, ἔλλειπον εἴδει δεδομένῳ τῷ ΔΓ· λέγω ὅτι δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΒΓ, ΒΔ.

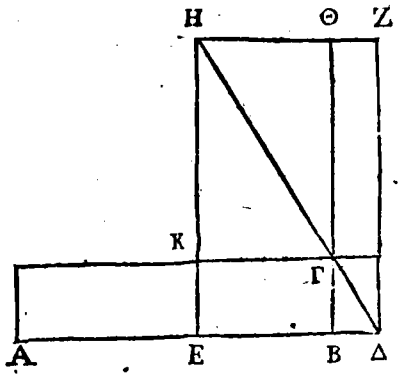
Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΔ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΔ τῷ μεγέθει. καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΕΔ τῷ ΓΔ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ ΕΖ, καὶ παραγεγράφθω τὸ σχῆμα· δέδοται ἄρα τὸ ΕΖ τῷ εἴδει. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ δεδομένης εὐθείας τῆς ΕΔ δεδομένον τῷ εἴδει εἶδος ἀναγέγραπται τὸ ΕΖ· δέδοται ἄρα τὸ ΕΖ τῷ μεγέθει. καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς ΑΓ, ΚΘ· δέδοται ἄρα καὶ τὸ ΑΓ, ΚΘ τῷ μεγέθει. καὶ ἔστι τὸ ΑΓ δοθὲν τῷ μεγέθει, ὑπόκειται γάρ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΘ δοθὲν ἐστὶ τῷ μεγέθει. ἔστι δὲ καὶ τῷ εἴδει δοθέν, ὅμοιον γάρ ἐστι τῷ ΓΔ· τὰ ΘΚ ἄρα δεδομένας εἰσὶ καὶ πλευράς· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΓ. καὶ ἔστιν ἴση τῇ ΕΒ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΕΔ δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΒ δοθεῖσα. καὶ λόγος τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ.

PROP. LVIII.

Si spatium datum ad datam rectam applicetur, deficiens data specie figura; latitudines defectus etiam datæ sunt.

DAtum enim spatium ΓΑ ad datam rectam ΑΔ applicetur, deficiens data specie figura ΔΓ: dico datam esse utramque rectarum ΒΓ, ΒΔ.

Secetur enim [per 10.1.] ΑΔ bifariam in puncto Ε: igitur [per 2. dat.] data est ΕΔ magnitudine. dein describatur [per 18. 6.] ab ipsa ΕΔ ipsi ΓΔ simile similiterque positum rectilineum ΕΖ, & constituatur figura: igitur specie datum est ΕΖ. & quoniam, à data recta ΕΔ, figura specie data descripta est ΕΖ; figura ΕΖ [per 52. dat.] data est magnitudine. est autem [per 36. & 43. 1.] æqualis ipsis ΑΓ, ΚΘ: quare figuræ ΑΓ, ΚΘ datæ sunt magnitudine. data vero est figura ΑΓ magnitudine; supponitur enim: ergo [per 4. dat.] reliqua figura ΚΘ data est magnitudine. sed & eadem specie data est; similis enim est [per constr.] figuræ ΓΔ: quare [per 55. dat.] ipsius ΘΚ latera data sunt: adeoque ΚΓ data est. est autem [per 34.1.] æqualis ipsi ΕΒ: ergo ΕΒ data est. data vero est & ΕΔ: quare [per 4. dat.] & reliqua ΔΒ data est. sed ratio ipsius ΒΔ ad ΒΓ [per 3. def. dat.] data est: ergo [per 2. dat.] ΒΓ data est.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ νθ'.

Ἐὰν δοθὲν χωρίον παρὰ δοθεῖσαν εὐθεῖαν παραβληθῇ, ὑπερβάλλον εἴδει δεδομένῳ εἴδει· δέδοται καὶ τὰ πλάτη τῆς ὑπερβολῆς.

Δοθὲν γὰρ τὸ ΑΒ ᾧ παρὰ δοθεῖσαν τὴν ΑΓ ᾧ παραβεβλήθω, ὑπερβάλλον εἴδει δεδομένῳ εἴδει

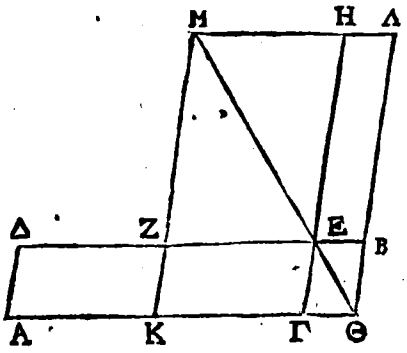
PROP. LIX.

Si spatium datum ad datam rectam applicetur, excedens data specie figura; latitudines excessus etiam datæ sunt.

DAtum enim spatium ΑΒ ad datam rectam ΑΓ applicetur, excedens data specie figura

ΓΒ: dico datam esse utramque rectarum ΘΓ, ΓΕ.

Secetur enim ΔΕ bifariam in puncto Ζ, & [per 18.6.] describatur ab ΕΖ ipsi ΓΒ simile & similiter positum rectilineum ΖΗ, atque construatur figura. quoniam itaque ΓΒ simile est ipsi ΖΗ; circa eandem igitur diametrum est ΖΗ [per 26. 6.] cum ipso ΓΒ. est autem ΓΒ specie datum: ergo ΖΗ etiam specie datum est. sed & à data recta ΖΕ descriptum est: quare [per 52. dat.] ΖΗ magnitudine datum est. datum autem [ex hyp.] est ΑΒ: ideoque ΑΒ, ΖΗ magnitudine data sunt. ipsis autem ΑΒ, ΖΗ [per 36. & 43. 1.] æquale est ΚΛ: ergo [per 3. dat.] ΚΛ magnitudine datum est. sed & specie datum est; simile enim est [per constr.] ipsi ΓΒ: itaque [per 55. dat.] ipsius ΚΛ latera data sunt: ideoque latus ΚΘ datum est. latus autem ΚΓ datum est; æquale enim est [per 34. 1.] ipsi ΖΕ: reliqua igitur recta ΓΘ data est; atque etiam [per 3. def. dat.] rationem datam habet ad ΘΒ: igitur [per 2. dat.] data est ΘΒ.



τῷ ΓΒ· λέγω ὅτι δοθεῖσαί εἰσιν ἑκατέρα τῶν ΘΓ, ΓΕ.

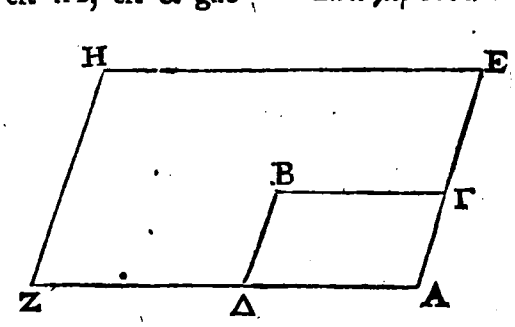
Τετμήσθω γὰρ δίχα ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Ζ σημεῖον, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ΓΒ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ ΖΗ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΓΒ τῷ ΖΗ, ἀλλὰ τοῦ αὐτοῦ διάμετρος ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗ τῷ ΓΒ. δέδοται δὲ τὸ ΓΒ τῷ εἴδει· δέδοται ἄρα καὶ τὸ ΖΗ τῷ εἴδει. καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ δεδομένης εὐθείας τῆς ΖΕ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗ τῷ μεγέθει. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΒ δοθέν· δοθέντα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΖΗ τῷ μεγέθει. τοῖς δὲ ΑΒ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τὸ ΚΛ· δέδοται ἄρα τὸ ΚΛ τῷ μεγέθει. ἔστι δὲ καὶ τῷ εἴδει, ὅμοιον γάρ ἐστι τῷ ΓΒ· τοῦ ΚΛ ἄρα αἱ πλευραὶ δεδομέναι εἰσὶ τῷ μεγέθει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ. καὶ ἡ ΚΓ δοθεῖσά ἐστιν, ἴση γάρ ἐστι τῇ ΖΕ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΘ δοθεῖσά ἐστι, καὶ λόγον ἔχει πρὸς τὸ ΘΒ δοθέντα· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΘΒ.

PROP. LX.

Si datum specie & magnitudine parallelogrammum dato gnomone augeatur, aut minuatur; latitudines gnomonis datæ sunt.

PArallelogrammum enim ΑΒ specie & magnitudine datum augeatur primum dato gnomone ΕΓΒΔΖΗ: dico utramque rectarum ΓΒ, ΔΖ datam esse.

Quoniam enim datum est ΑΒ, est & gnomon ΕΓΒΔΖΗ datus; igitur spatium totum ΑΗ datum est. sed & specie datum est ΑΗ; est enim [per 26. 6.] simile ipsi ΑΒ: igitur [per 55. dat.] ipsius ΑΗ latera data sunt: quare utraque rectarum ΑΕ, ΑΖ data est. utraque autem rectarum ΓΑ, ΑΔ data est: reliqua igitur, nempe utraque rectarum ΕΓ, ΔΖ, [per 4. dat.] data est.



RURSUS vero parallelogrammum ΑΗ, specie & magnitudine datum, minuatur dato gnomone ΕΓΒΔΖΗ: dico datam esse utramque rectarum ΓΕ, ΔΖ.

Quoniam enim datum est ΑΗ, cujus gnomon ΕΓΒΔΖΗ datus est: igitur [per 4. dat.] reliquum ΑΒ magnitudine datum est. sed & specie datum est; etenim [per 26. 6.] simile est ipsi ΗΑ; latera igitur ipsius ΑΒ [per 55. dat.] data sunt: adeoque utraque rectarum ΓΑ, ΑΔ data est. utraque autem rectarum ΕΑ, ΑΖ [ex

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξ'.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον δεδομένον τῷ εἴδει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένῳ γνώμονι αὐξηθῇ ἢ μειωθῇ, δέδονται καὶ τὰ πλάτη τοῦ γνώμονος.

ΠΑραλληλόγραμμον γὰρ τὸ ΑΒ δεδομένον τῷ εἴδει καὶ τῷ μεγέθει αὐξήσθω πρότερον δεδομένῳ γνώμονι τῷ ΕΓΒΔΖΗ· λέγω ὅτι δοθεῖσαί εἰσιν ἑκατέρα τῶν ΓΕ, ΔΖ.

Ἐπεὶ γὰρ δοθὲν ΑΒ, ἔστι δὲ καὶ ὁ ΕΓΒΔΖΗ γνώμων δοθείς· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΗ δοθέν ἐστι. ἀλλὰ καὶ τῷ εἴδει, ὅμοιον γάρ ἐστι τῷ ΑΒ· τοῦ ΑΗ ἄρα δεδομέναι εἰσὶν αἱ πλευραί· δοθεῖσαι ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΑΖ. ἔστι δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν ΓΑ, ΑΔ δοθεῖσαι· λοιπὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ΕΓ, ΖΔ δοθεῖσά ἐστιν.

ΠΑΛΙΝ δὴ ἐλαττονέσθω τὸ ΑΗ δεδομένον τῷ εἴδει καὶ τῷ μεγέθει μεμειώσθω δεδομένῳ γνώμονι τῷ ΕΓΒΔΖΗ· λέγω ὅτι δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΓΕ, ΔΖ.

Ἐπεὶ γὰρ δοθέν ἐστι τὸ ΑΗ, οὗ ὁ ΕΓΒΔΖΗ γνώμων δοθείς ἐστι· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ δοθέν ἐστιν. ἀλλὰ καὶ τῷ εἴδει, ὅμοιον γάρ ἐστι τῷ ΗΑ· τοῦ ΑΒ ἄρα δεδομέναι εἰσὶν αἱ πλευραί· δοθεῖσαι ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΓΑ, ΑΔ. ἔστι δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΑ,

ΑΖ

Α Ζ δοθεῖσαι· καὶ λοιπὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ΕΓ, ΔΖ δοθεῖσά ἐστιν.

hyp.] data est: reliqua igitur, nempe utraque rectarum ΕΓ, ΔΖ, [per 4. dat.] data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξά'.

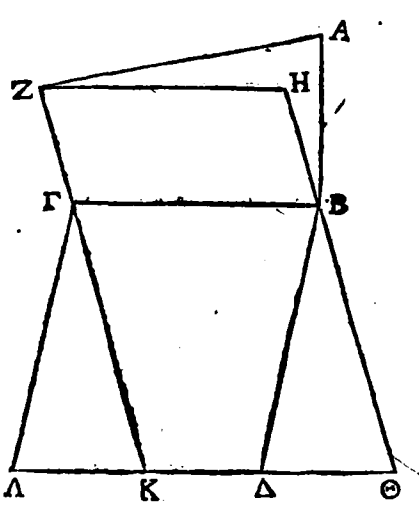
Ἐὰν δεδομένῳ τῷ εἴδει εἴδους παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν παραλληλόγραμμον χωρίον παραβληθῇ ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ, ἔχῃ δὲ τὸ εἶδος πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον λόγον δεδομένον· δέδοται τὸ παραλληλόγραμμον τῷ εἴδει.

PROP. LXI.

Si ad datæ ſpecie figuræ unum latus applicetur ſpatium parallelogrammum in angulo dato, habeat autem data figura ad parallelogrammum rationem datam; parallelogrammum ipſum ſpecie datum eſt.

Δεδομένῳ γὰρ τῷ εἴδει εἴδους τοῦ ΑΖΓΒ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΓΒ παραλληλόγραμμον χωρίον παραβεβλήσθω τὸ ΓΔ ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΛΓΒ, λόγος δὲ ἔστω τοῦ ΑΓ εἴδους πρὸς τὸ ΓΔ δοθείς· λέγω ὅτι δέδοται τὸ ΓΔ τῷ εἴδει.

Ἠχθω γὰρ ἀφ' μὲν τοῦ Β τῇ ΖΓ παράλληλος ἡ ΒΗ, ἀφ' δὲ τοῦ Ζ τῇ ΓΒ παράλληλος ΖΗ, καὶ διήχθωσαν αἱ ΖΓ, ΗΒ ἐπὶ τὰ Κ, Θ σημεῖα. ἐπεὶ οὖν δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΖΓΒ γωνία καὶ λόγος ἐστὶ τοῦ ΖΓ πρὸς τὴν ΓΒ δοθείς· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΒ παραλληλόγραμμον τῷ εἴδει. δέδοται δὲ τῷ εἴδει τὸ ΑΖΓΒ εἶδος, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τοῦ ΓΒ παραλληλόγραμμον δεδομένον τῷ εἴδει τὸ ΖΒ· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΑΓΖΒ εἴδους πρὸς τὸ ΖΒ παραλληλόγραμμον δοθείς. τοῦ δὲ ΑΓΖΒ πρὸς τὸ ΓΔ λόγος ἐστὶ δοθείς, ἐπειδὴ ὑπόκειται, ἴσον δὲ τὸ ΓΔ τῷ ΚΒ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΚΒ πρὸς τὸ ΓΗ δοθείς, ὥστε καὶ τοῦ ΖΓ πρὸς τὴν ΓΚ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ΖΓ πρὸς τὴν ΓΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΓΚ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ δοθεῖσαί εἰσιν ἡ ὑπὸ ΖΓΒ γωνία· καὶ ἡ ἐφεξῆς ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΚ δοθεῖσά ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΛ γωνία δοθεῖσα· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΓΚ ἐστὶ δοθεῖσα. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΛΚΓ γωνία δοθεῖσα, ἴση γὰρ ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΚΓΒ· λοιπὴ ἄρα ΓΛΚ ἐστὶ δοθεῖσα· δέδοται ἄρα τὸ ΛΚΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΛΓ πρὸς τὴν ΓΚ δοθείς. τῆς δὲ ΓΚ πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΛΓ ἄρα πρὸς τὴν ΓΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΛΓΒ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ εἴδει.



AD unum enim latus ΓΒ datæ ſpecie figuræ ΑΖΓΒ applicetur parallelogrammum ſpatium ΓΔ in angulo dato ΛΓΒ, ſitque ratio figuræ ΑΓ ad parallelogrammum ΓΔ data: dico ipſum ΓΔ ſpecie datum eſſe.

Agatur enim [per 31. 1.] per punctum Β ipſi ΖΓ parallela ΒΗ, per punctum autem Ζ ipſi ΓΒ parallela ΖΗ, & producantur ΖΓ, ΗΒ ad puncta Κ, Θ. quoniam itaque [per 3. def. dat.] datus eſt angulus ΖΓΒ, & ratio ipſius ΖΓ ad ΓΒ data eſt; parallelogrammum ΖΒ ſpecie datum eſt. eſt autem figura ΑΖΓΒ ſpecie data, atque deſcriptum eſt ab eadem recta ΓΒ datum ſpecie parallelogrammum ΖΒ: quare [per 49. dat.] ratio figuræ ΑΓΖΒ ad parallelogrammum ΖΒ data eſt. data autem eſt ratio ipſius ΑΓΖΒ ad ΓΔ, quoniam ita ſupponitur; eſt etiam [per 35. 1.] ΓΔ æquale ipſi ΚΒ: quare [per 8. dat.] & ratio ipſius ΚΒ ad ΓΗ data eſt; adeoque [per 1. 6.] & ratio rectæ ΖΓ ad ΓΚ data eſt. ipſius autem ΖΓ ad ΓΒ [per 3. def. dat.] data eſt ratio; ergo [per 8. dat.] & ratio ipſius ΒΓ ad ΓΚ data eſt. quoniam vero datus eſt angulus ΖΓΒ, etiam [per 13. 1. & 4. dat.] & qui deinceps eſt angulus ΒΓΚ datus eſt. angulus autem ΒΓΛ [ex hyp.] datus eſt: reliquus igitur ΛΓΚ [per 4. dat.] datus eſt. angulus item ΛΚΓ datus eſt; æqualis enim eſt [per 29. 1.] angulo ΚΓΒ: ergo reliquus angulus ΓΛΚ [per 32. 1. & 4. dat.] datus eſt: triangulum igitur ΛΚΓ [per 40. dat.] ſpecie datum eſt: quare [per 3. def. dat.] ratio ipſius ΛΓ ad ΓΚ data eſt. ipſius autem ΓΚ ad ΒΓ data eſt ratio: igitur [per 1. dat.] & ratio ipſius ΛΓ ad ΓΒ data eſt. & datus eſt [ex hyp.] angulus ΛΓΒ: itaque [per 3. def. dat.] parallelogrammum ΓΔ ſpecie datum eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξϐ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τοὺς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον, καὶ ἀναγραφῇ ἀπὸ μιᾶς δεδομένον τῷ εἴδει εἶδος, ἀπὸ δὲ τῆς ἑτέρας χωρίον παραλληλόγραμμον ὁμοίως δεδομένῃ γωνίᾳ, ἔχῃ δὲ

PROP. LXII.

Si duæ rectæ ad invicem habeant rationem datam, & ab una quidem data ſpecie figura deſcripta ſit, ab altera autem ſpatium parallelogrammum in angulo dato, habeat etiam figura

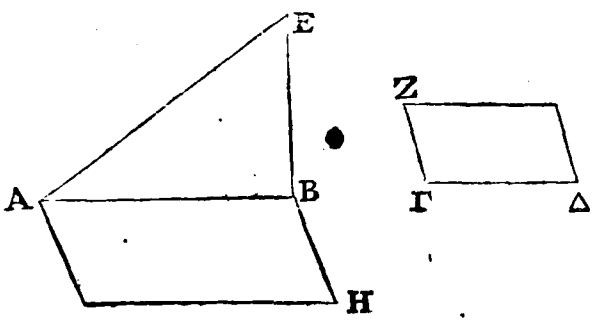
gura ad parallelogrammum rationem datam; parallelogrammum ipſum ſpecie datum eſt.

τὸ εἶδος πρὸς τὸ παραλληλόγραμμον λόγον δεδομένον· δίδοται τὸ παραλληλόγραμμον τῷ εἴδει.

DUÆ enim rectæ AB, ΓΔ habeant ad invicem rationem datam, & deſcribatur à recta quidem AB data ſpecie figura AEB, à recta autem ΓΔ parallelogrammum ΔZ in angulo ZΓΔ dato, ſit etiam ratio ipſius AEB ad parallelogrammum ZΔ data: dico parallelogrammum ΔZ ſpecie datum eſſe.

ΔΥΟ γὰρ εὐθεῖαι αἱ AB, ΓΔ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ μὲν τῆς AB δεδομένον τῷ εἴδει εἶδος τὸ AEB, ἀπὸ δὲ τῆς ΓΔ παραλληλόγραμμον τὸ ΔZ ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ZΓΔ, λόγος δὲ ἔστω ὃν τὸ AEB εἶδος πρὸς τὸ ZΔ παραλληλόγραμμον δοθείς· λέγω ὅτι δέδοται τὸ ΔZ παραλληλόγραμμον τῷ εἴδει.

Deſcribatur enim [per 18.6.] à recta AB ipſi ZΔ ſimile ſimiliterque poſitum parallelogrammum AH. quoniam igitur ratio ipſius AB ad ΓΔ data eſt, atque deſcripta ſunt à rectis AB, ΓΔ ſimilia ſimiliterque poſita rectilinea AH, ZΔ; ratio ipſius AH ad ZΔ [per 50. dat.] data eſt. ratio autem ipſius ZΔ ad AEB [ex hyp.] data eſt: quare [per 8 dat.] & ratio ipſius AEB ad AH data eſt. ſed & datus eſt angulus ABH; ſiquidem æqualis eſt [per conſtr.] angulo ZΓΔ: quoniam igitur figura AEB ſpecie data eſt, & ad unum ejus latus AB applicatum eſt parallelogrammum AH in angulo dato ABH; & ratio figuræ AEB ad parallelogrammum AH [per 49.dat.] data eſt; ipſum igitur AH [per 61.dat.] ſpecie datum eſt. ſimile autem eſt [per conſtr.] ipſi ZΔ: quare & parallelogrammum ZΔ [per 3. def. dat.] ſpecie datum eſt.



Αναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τῷ ZΔ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ AH. καὶ ἐπεὶ λόγος τῆς AB πρὸς τὴν ΓΔ δοθείς ἐστι, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ τῶν AB, ΓΔ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ AH, ZΔ· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ AH πρὸς τὸ ZΔ δοθείς. ἀλλὰ τὸ ZΔ πρὸς τὸ AEB λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ AEB ἄρα πρὸς τὸ AH λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ABH γωνία, ἴση γὰρ ἐστὶ τῇ ὑπὸ ZΓΔ· ἐπεὶ οὖν δεδομένῳ τῷ εἴδει εἶδος τὸ AEB παραβέβληται μίαν τῶν πλευρῶν τὴν AB παραβεβλημένον τὸ AH ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ABH, καὶ λόγος ἐστὶ τοῦ AEB εἴδους πρὸς τὸ AH παραλληλόγραμμον δοθείς· δέδοται ἄρα τὸ AH τῷ εἴδει. καὶ ἔστιν ὅμοιον τῷ ZΔ· δέδοται ἄρα καὶ τὸ ZΔ τῷ εἴδει.

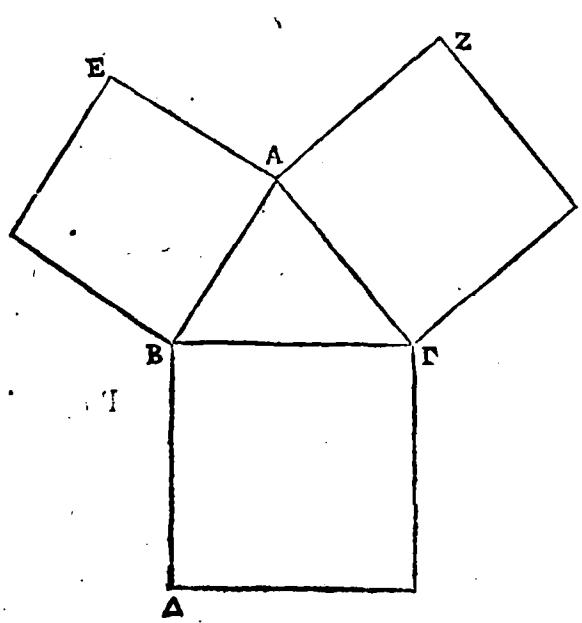
PROP. LXIII.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξγ'.

Si triangulum ſit ſpecie datum; quod ab unoquoque laterum deſcribitur quadratum ad triangulum habebit rationem datam.

Ἐὰν τρίγωνον τῷ εἴδει δεδομένον ᾖ, τὸ ἀπὸ ἑκάστης τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τετράγωνον πρὸς τὸ τρίγωνον λόγον ἔξει δεδομένον.

SIT triangulum ABΓ ſpecie datum, & deſcribantur ab unoquoque laterum ipſius quadrata EB, ΓΔ, ΓZ: dico unumquodque quadratorum EB, ΓΔ, ΓZ ad triangulum ABΓ rationem datam habere.



Ἔστω τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει τὸ ABΓ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ ἑκάστης τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τετράγωνα τὰ EB, ΓΔ, ΓZ· λέγω ὅτι ἑκάστου τῶν EB, ΓΔ, ΓZ πρὸς τὸ ABΓ τρίγωνον λόγον ἔξει δεδομένον.

Quoniam enim ab eadem recta BΓ rectilinea quædam ſpecie data deſcripta ſunt ABΓ, ΓΔ; igitur [per 49.dat.] ratio ipſius ABΓ

Ἐπεὶ γὰρ ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς BΓ εὐθύγραμμα δεδομένα τῷ εἴδει ἀναγέγραπται τά τε ABΓ, ΓΔ· λόγος ἄρα τοῦ ABΓ

πρὸς

πρὸς τὸ ΓΔ δοθείς. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΒ, ΖΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔξει δοθείς.

ad ΓΔ data est. similiter quoque utriusque quadratorum ΕΒ, ΖΓ ad triangulum ΑΒΓ ratio data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξδ'.

Ἐὰν τρίγωνον ἀμβλεῖαν ἔχῃ γωνίαν δεδομένην· ᾧ μεῖζον δυνάται ἡ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτείνουσα πλευρὰ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ τρίγωνον λόγον ἔξει δεδομένον.

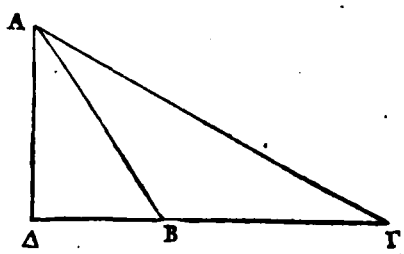
Prop. LXIV.

Si triangulum angulum obtusum datum habeat; illud spatium, quo latus angulum obtusum subtendens magis potest quam latera obtusum angulum ambientia, ad triangulum habebit rationem datam.

Ἔστω τρίγωνον ἀμβλυγώνιον τὸ ΑΒΓ, ἀμβλεῖαν ἔχον γωνίαν τὴν ὑπὸ ΑΒΓ δεδομένην, καὶ διήχθω ἐπ' εὐθείας τῇ ΒΓ εὐθεῖα ἡ ΒΔ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΔΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, τουτέστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

Sit triangulum obtusangulum ΑΒΓ, quod angulum obtusum ΑΒΓ datum habeat; & producatur in directum ipsi ΒΓ recta ΒΔ, & à puncto Α ad rectam ΔΓ perpendicularis agatur ΑΔ: dico quod spatium, quo quadratum rectæ ΑΓ excedit quadrata rectarum ΑΒ, ΒΓ, hoc est rectangulum quod bis continetur sub ΔΒ, ΒΓ, ad triangulum ΑΒΓ habebit rationem datam.

Ἐπεὶ γὰρ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ δοθεῖσά ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ δοθεῖσα· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΒ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγον ἄρα τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ δοθείς. ἔστιν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ· λόγον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ δοθείς· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΒΓ δοθείς. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΒΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΓ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἐκεῖνο ἄρα τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.



Quoniam enim angulus ΑΒΓ datus est, etiam & ΑΒΔ [per 13.1. & 4.dat.] datus erit. verum & est angulus ΑΔΒ datus; igitur [per 32. 1. & 4. dat.] & reliquus ΔΑΒ datus erit: quare [per 40. dat.] & triangulum ΑΒΔ specie datum est: ratio igitur ipsius ΑΔ ad ΔΒ [per 3. def.dat.] data est. estque [per 1. 6.] ut ΑΔ ad ΔΒ ita quod continetur sub ΑΔ, ΒΓ ad id quod sub ΔΒ, ΒΓ continetur: ergo ratio ejus quod continetur sub ΑΔ, ΒΓ ad id quod sub ΔΒ, ΒΓ continetur data est: quare ratio ejus quod bis continetur sub ΔΒ, ΒΓ ad id quod continetur sub ΑΔ, ΒΓ data est. sed [per 41. 1.] id quod continetur sub ΑΔ, ΒΓ ad triangulum ΑΒΓ habet rationem datam: itaque [per 8. dat.] ratio ejus quod bis continetur sub ΔΒ, ΒΓ ad triangulum ΑΒΓ data est. quod vero bis continetur sub ΔΒ, ΒΓ [per 12. 2.] est spatium quo quadratum rectæ ΑΓ excedit quadrata rectarum ΑΒ, ΒΓ: igitur spatium istud ad triangulum ΑΒΓ rationem habet datam.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξε'.

Ἐὰν τρίγωνον ὀξεῖαν ἔχῃ γωνίαν δεδομένην· ᾧ ἔλασσον δύναται ἡ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτείνουσα πλευρὰ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν, ἐκεῖνο χωρίον πρὸς τὸ τρίγωνον λόγον ἔξει δεδομένον.

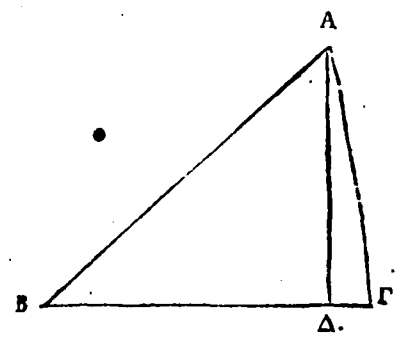
Prop. LXV.

Si triangulum angulum acutum datum habeat; illud spatium, quo latus angulum acutum subtendens minus potest quam latera angulum acutum ambientia, habebit ad triangulum rationem datam.

Ἔστω τρίγωνον ὀξυγώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀξεῖαν ἔχον γωνίαν δεδομένην τὴν ὑπὸ ΑΒΓ, ᾗ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ΑΔ· λέγω ὅτι ᾧ ἔλασσόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, τουτέστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ, πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

Sit triangulum acutangulum ΑΒΓ, quod datum angulum acutum habeat ΑΒΓ; & agatur à puncto Α ad ΒΓ perpendicularis ΑΔ: dico quod spatium, quo minus est quadratum rectæ ΑΓ quam quadrata linearum ΑΒ, ΒΓ, hoc est id quod bis continetur sub ΓΒ, ΒΔ, habet ad triangulum ΑΒΓ rationem datam.

Quoniam enim angulus A B Δ [ex hyp.] datus eſt, eſtque etiam angulus A Δ B datus; reliquus igitur B A Δ [per 32. 1. & 4. dat.] datus eſt: itaq; [per 40. dat.] triangulum A B Δ ſpecie datum eſt: quare [per 3. def. dat.] ratio ipſius B Δ ad Δ A data eſt: ideoque [per 1. 6.] & ejus quod continetur ſub Γ B, B Δ ad id quod continetur ſub Γ B, A Δ data eſt ratio: ergo & ejus quod bis continetur ſub Γ B, B Δ ad id quod ſub Γ B, A Δ data eſt ratio. ſed [per 41. 1.] ejus quod continetur ſub B Γ, A Δ ad triangulum A B Γ data ratio eſt: quare [per 8. dat.] & ejus quod bis continetur ſub Γ B, B Δ ad triangulum A B Γ ratio eſt data. verum [per 13. 2.] quod bis continetur ſub Γ B, B Δ eſt id quo quadratum rectæ A Γ minus eſt quam quadrata rectarum A B, B Γ: igitur illud ſpatium, quo minus eſt quadratum rectæ A Γ quam quadrata rectarum A B, B Γ, ad triangulum A B Γ habebit rationem datam.



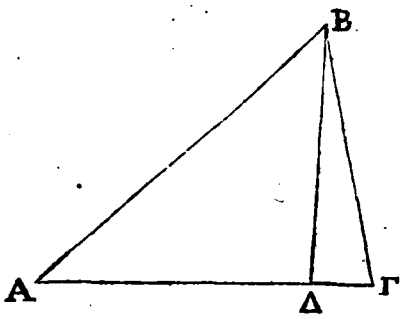
Επὶ γὰρ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ Α Β Δ γωνία, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ Α Δ Β δοθεῖσα· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ Β Α Δ ἐστὶ δοθεῖσα· δέδοται ἄρα τὸ Α Β Δ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγον ἄρα τῆς Β Δ πρὸς τὴν Δ Α δοθείς· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ Β, Β Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ Β, Α Δ λόγον ἐστὶ δοθείς· ᾧ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν Γ Β, Β Δ ἄρα πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ Β, Α Δ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Β Γ, Α Δ πρὸς τὸ Α Β Γ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν Γ Β, Β Δ ἄρα πρὸς τὸ Α Β Γ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν Γ Β, Β Δ ᾧ ἔλασσόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς Α Γ τῶν ἀπὸ τῶν Α Β, Β Γ· ᾧ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς Α Γ τῶν ἀπὸ τῶν Α Β, Β Γ, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ Α Β Γ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

PROP. LXVI.

Si triangulum habuerit angulum datum; quod ſub rectis datum angulum comprehendentibus continetur rectangulum habebit ad triangulum rationem datam.

SIT triangulum A B Γ, quod datum angulum habeat ad A: dico rectangulum ſub B A, A Γ comprehenſum habere ad triangulum A B Γ rationem datam.

Agatur enim [per 12. 1.] à puncto B ad rectam A Γ perpendicularis B Δ. quoniam itaque angulus B A Γ datus eſt, atque etiam angulus B Δ A datus eſt; reliquus quoque A B Δ [per 32. 1. & 4. dat.] datus eſt: ergo [per 40. dat.] triangulum A B Δ ſpecie datur; quare ipſius A B ad B Δ data eſt ratio. ut autem A B ad B Δ ita [per 1. 6.] rectangulum ſub B A, A Γ ad rectangulum ſub B Δ, A Γ: igitur rectanguli ſub B A, A Γ ad rectangulum ſub B Δ, A Γ ratio eſt data. atqui rectanguli ſub B Δ, A Γ ad triangulum A B Γ data eſt ratio: igitur [per 8. dat.] ratio rectanguli ſub B A, A Γ ad triangulum A B Γ data eſt.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξς'.

Εὰν τρίγωνον δεδομένην ἔχῃ γωνίαν· τὸ ὑπὸ τῶν τὴν δεδομένην γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν ὀρθογώνιον πρὸς τὸ τρίγωνον λόγον ἔξει δεδομένον.

Ἔστω τρίγωνον τὸ Α Β Γ δεδομένην ἔχον γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Α· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Β Α, Α Γ πρὸς τὸ Α Β Γ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

Ηχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὴν Α Γ κάθετος ἡ Β Δ. ἐπεὶ οὖν δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ Β Α Γ γωνία, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ Β Δ Α δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ Α Β Δ γωνία δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ Α Β Δ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ Α Β πρὸς τὴν Β Δ δοθείς. ὡς δὲ ἡ Α Β πρὸς τὴν Β Δ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν Β Α, Α Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Β Δ, Α Γ· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Β Α, Α Γ ἄρα πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Β Δ, Α Γ λόγος ἐστὶ δοθείς· τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Β Δ, Α Γ πρὸς τὸ Α Β Γ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Β Α, Α Γ ἄρα πρὸς τὸ Α Β Γ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς.

PROP. LXVII.

Si triangulum habuerit angulum datum; illud ſpatium, quo duo datum angulum comprehendentia latera, tanquam una recta, plus poſſunt quam quadratum à reliquo latere, ad triangulum habebit rationem datam.

SIT triangulum A B Γ, quod angulum B A Γ datum habeat: dico quod illud ſpatium, quo

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξζ'.

Εὰν τρίγωνον δεδομένην ἔχῃ γωνίαν· ᾧ μεῖζον δύναται αἱ τὴν δεδομένην γωνίαν περιέχουσαι πλευραί, ὡς μία, ἀφ' ἧς ἀπὸ τῆς λοιπῆς, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ τρίγωνον λόγον ἔξει δεδομένον.

Ἔστω τρίγωνον τὸ Α Β Γ δεδομένην ἔχον γωνίαν τὴν ὑπὸ Β Α Γ· λέγω ὅτι ᾧ μεῖζόν ἐστι

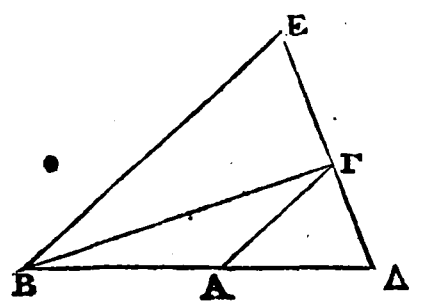
τὸ

τὸ ἀπὸ συναμφοτέρᾳ τῆς ΒΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔξει δεδομένον.

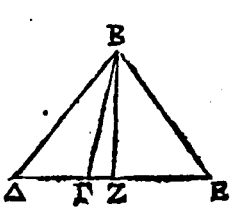
majus est quadratum abs simul utraque ΒΑΓ quam quadratum à recta ΒΓ, ad triangulum ΑΒΓ habebit rationem datam.

Διήχθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῆς ΒΑ εὐθεῖα ἡ ΑΔ, καὶ κείσθω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΓ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Β τῇ ΑΓ παράλληλος ἡ ΒΕ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΓ· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΕ. καὶ διῆκται ἡ ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΕ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ. ἴση δὲ ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῆς ΒΓ· ὥστε τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ, τουτέστιν τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ, τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ μεῖζον εἶναι τῷ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΕ. λέγω δὴ ὅτι τοῦ ὑπὸ τῆς ΔΓ, ΓΕ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ γὰρ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία, ἡ ἐφεξῆς ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶ δοθεῖσα. ἐστὶ δὲ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΔΓ, ΔΓΑ δοθεῖσα, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἡμίσειά ἐστι τῆς ὑπὸ ΒΑΓ δεδομένης ὅλης· δέδοται ἄρα τὸ ΔΑΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΑΔ πρὸς τὸν ΔΓ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΔ ἕτως ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΔ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ ἕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ, ὡς δὲ ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΔ ἕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ ΑΔ ἕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ ΓΔ· καὶ συναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ ἕτως τὸ ἀπὸ τοῦ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ ΓΔ. λόγος δὲ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ δοθείς. ἴση δὲ ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ δοθείς. τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ΒΑΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς, διὰ τὸ δοθεῖσαν εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΓ, ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς. καί ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΕ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ

Producatur enim in directum ipsi ΒΑ recta ΑΔ, & [per 3. 1.] fiat ipsi ΑΓ æqualis ΑΔ, & connexa recta ΔΓ producatur ad punctum Ε; & [per 31. 1.] agatur per punctum Β ipsi ΑΓ parallela ΒΕ. & quoniam æqualis est ΑΔ ipsi ΑΓ: æqualis quoque [per 4.6. & 14.5.] est ΔΒ ipsi ΒΕ. educta autem est quædam recta ΒΓ: igitur * quod continetur sub ΔΓ, ΓΕ una cum quadrato rectæ ΒΓ æquale est quadrato rectæ ΒΔ. est autem ΔΑ ipsi ΑΓ æqualis: ergo quod ab utraque simul ΒΑΓ quadratum æquale est est ei quod continetur sub ΔΓ, ΓΕ. una cum quadrato rectæ ΒΓ; ideoque & quod ab utraque simul ΒΑΓ, hoc est quadratum à recta ΒΔ, majus est quam quadratum rectæ ΒΓ eo quod continetur sub ΔΓ, ΓΕ. dico jam quod ratio rectanguli sub ΔΓ, ΓΕ ad triangulum ΑΒΓ data est. quoniam enim datus est angulus ΒΑΓ; & qui deinceps est ΔΑΓ [per 13. 1. & 4. dat.] datus est. uterque autem angulorum ΑΔΓ, ΔΓΑ datus est; etenim [per 5. & 32. 1.] uterque dimidius est anguli ΒΑΓ, qui [ex hyp.] datus est: quare [per 40. dat.] triangulum ΔΑΓ specie datum est: ergo [per 3. def. dat.] ratio ipsius ΑΔ ad ΔΓ data est: ideoque [per 50. dat.] & ejus quod à recta ΑΔ ad id quod à ΔΓ describitur quadratum ratio est data. quoniam vero [per 2. 6.] ut ΒΑ ad ΑΔ ita est ΕΓ ad ΓΔ; atque [per 1. 6.] ut ΒΑ quidem ad ΑΔ ita rectangulum sub ΒΑ, ΑΔ ad quadratum rectæ ΑΔ; atq; etiam ut ΕΓ ad ΓΔ ita rectangulum sub ΕΓ, ΓΔ ad quadratum rectæ ΓΔ: erit igitur ut rectangulum sub ΒΑ, ΑΔ ad quadratum ex ΑΔ ita rectangulum sub ΕΓ, ΓΔ ad quadratum ex ΓΔ; ideoque permutando [per 16.5.] ut id quod continetur sub ΒΑ, ΑΔ ad id quod continetur sub ΕΓ, ΓΔ ita erit quod à recta ΑΔ ad id quod à recta ΓΔ describitur quadratum. ratio autem quadrati rectæ ΑΔ ad quadratum rectæ ΔΓ data est: igitur & ratio ejus quod continetur sub ΒΑ, ΑΔ ad id quod sub ΕΓ, ΓΔ continetur data est. æqualis autem est [per constr.] ΔΑ ipsi ΑΓ: igitur & ratio ejus quod continetur sub ΒΑ, ΑΓ ad id quod sub ΕΓ, ΓΔ continetur data est. ratio autem rectanguli sub ΒΑ, ΑΓ ad triangulum ΒΑΓ [per 66.dat.] data est, quia datus est angulus ΒΑΓ: quare [per 8.dat.] & ratio rectanguli sub ΕΓ, ΓΔ ad triangulum ΑΒΓ data est. & est [per supra ostensa] rectangulum sub ΔΓ, ΓΕ id quo quadratum ab utraque simul ΒΑΓ majus est quam quadra-



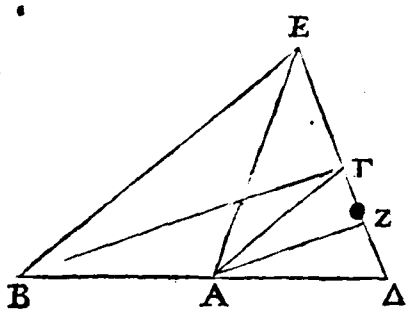
* Quod rectangulum sub ΔΓ, ΓΕ una cum quadrato rectæ ΒΓ æqualis sit quadrato rectæ ΒΔ sic ostenditur. Dividatur ΔΕ bifariam in Ζ, & jungatur ΒΖ; quæ [per 8. 1.] normalis erit in ΔΕ. Rectangulum sub ΔΓ, ΓΕ una cum quadrato rectæ ΓΖ [per 5. 2.] æquale est quadrato rectæ ΔΖ. Addatur commune quadratum rectæ ΒΖ: erit igitur rectangulum sub ΔΓ, ΓΕ una cum quadratis rectarum ΓΖ, ΒΖ æquale quadratis rectarum ΔΖ, ΒΖ. Sed [per 47.1.] quadrata rectarum ΓΖ, ΒΖ æqualia sunt quadrato rectæ ΒΓ; & quadrata rectarum ΔΖ, ΒΖ quadrato ipsius ΒΔ: Rectangulum igitur sub ΔΓ, ΓΕ una cum quadrato rectæ ΒΓ æquale est quadrato rectæ ΒΔ.



tum rectæ BΓ: igitur quo majus eſt quadratum ab utraque ſimul BAΓ quam quadratum rectæ BΓ, illud ſpatium ad triangulum ABΓ rationem datam habebit.

ALITER.

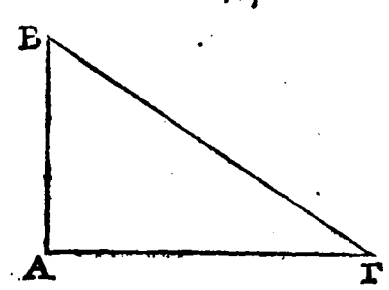
Conſtruantur eadem quæ prius, & [per 12.1.] agatur à puncto A ad ΓΔ perpendicularis AZ, atque connectatur AE. & quoniam datus eſt angulus BAΓ, cujus [per 5. & 32.1.] dimidius eſt angulus AΓZ; atque etiam datus eſt angulus AZΓ: triangulum igitur AZΓ [per 40. dat.] ſpecie datum eſt: itaque [per 3. def. dat.] ipſius AZ ad ZΓ ratio eſt data. ipſius autem ZΓ ad ΓΔ ratio eſt data, quia hæc illius eſt dupla: ergo [per 8.dat.] ipſius ΔΓ ad AZ data eſt ratio: ideoque [per 1.6.] ejus quod continetur ſub EΓ, ΓΔ ad id quod continetur ſub AZ, ΓE data eſt ratio. verum ejus quod continetur ſub AZ, ΓE ad triangulum AΓE ratio eſt data; etenim [per 41. 1.] trianguli duplum eſt: itaque [per 8. dat.] ejus quod continetur ſub EΓ, ΓΔ ad triangulum AΓE data eſt ratio. eſt autem [per 37. 1.] triangulum AΓE triangulo ABΓ æquale; in eadem enim baſi AΓ conſiſtit utrumque & in iiſdem parallelis AΓ, BE: quare [per 8. dat.] & ejus quod continetur ſub EΓ, ΓΔ ad triangulum ABΓ data eſt ratio. eſt autem [per not. ad præc. demonſtrationem] id quod continetur ſub EΓ, ΓΔ illud ſpatium, quo quadratum utriuſq; ſimul BAΓ excedit quadratum rectæ BΓ: ergo quo quadratum utriuſque ſimul BAΓ excedit quadratum rectæ BΓ, illud ſpatium ad triangulum ABΓ rationem habet datam.



ALITER.

Aut enim angulus ad A rectus eſt, aut acutus, aut obtuſus.

Eſto primum rectus: ergo quadratum utriuſque ſimul BAΓ [per 47.1. & 4.2.] excedit quadratum rectæ BΓ eo quod bis continetur ſub BA AΓ. eſt autem [per 66. dat.] ratio rectanguli ſub BA, AΓ ad triangulum ABΓ data, propter datum angulum BAΓ: quare etiam ratio ejus quod bis continetur ſub BA, AΓ ad triangulum ABΓ data eſt.



Dein ſit angulus BAΓ acutus, & à puncto Γ in rectam AB agatur perpendicularis ΓΔ. quoniam vero triangulum ABΓ acutangulum eſt, & perpendicularis acta eſt ΓΔ; rectarum igitur AB, AΓ quadrata æqualia ſunt [per 13.2.] & quadrato rectæ BΓ & rectangulo quod bis continetur ſub BA, AΔ. addatur commune, ſc. duplum rectangulum ſub BA, AΓ: ergo quadrata rectarum BA, AΓ cum eo quod bis continetur ſub rectis BA, BΓ. ἡ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρας τῆς BAΓ τοῦ ἀπὸ τῆς BΓ, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ABΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

ΑΛΛΩΣ.

Καταγεγράφθω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ A σημείου τὴν ΓΔ κάθετος ἡ AZ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AE. ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ BAΓ γωνία, καὶ ἔστιν αὐτῆς ἡμίσεια ἡ ὑπὸ AΓZ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ AZΓ δοθεῖσα· δέδοται ἄρα τὸ AZΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς AZ πρὸς τὴν ZΓ δοθείς. τῆς δὲ ZΓ πρὸς τὴν ΓΔ λόγος ἐστὶ δοθείς, διπλασίων γάρ ἐστιν αὐτῆς· καὶ τῆς ΔΓ ἄρα πρὸς τὴν AZ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν EΓ, ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ΓE λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν AZ, ΓE πρὸς τὸ AΓE τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς, διπλάσιον γάρ ἐστιν αὐτοῦ· καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν EΓ, ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ AΓE τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς. ἴσον δὲ τὸ AΓE τρίγωνον τῷ ABΓ τριγώνῳ, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς AΓ εἰσὶ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς AΓ, BE· καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν EΓ, ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ABΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν EΓ, ΓΔ, ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρας τῆς BAΓ τοῦ ἀπὸ τῆς BΓ· ᾧ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρας τῆς BAΓ τοῦ ἀπὸ τῆς BΓ, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ABΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

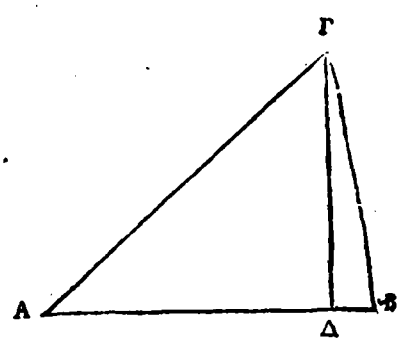
ΑΛΛΩΣ.

Ἤτοι γὰρ ἡ πρὸς τῷ A γωνία ὀρθή ἐστιν, ἢ ὀξεῖα, ἢ ἀμβλεῖα.

Ἔστω πρότερον ὀρθή· τὸ ἄρα ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς BAΓ τοῦ ἀπὸ τῆς BΓ ὑπερέχει τῷ δὶς ὑπὸ τῶν BA, AΓ. ἔστι δὲ τοῦ ὑπὸ τῶν BA, AΓ πρὸς τὸ ABΓ τρίγωνον λόγος δοθείς, διὰ τὸ δοθεῖσαν εἶναι τὴν BAΓ γωνίαν· τοῦ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν BA, AΓ πρὸς τὸ ABΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς.

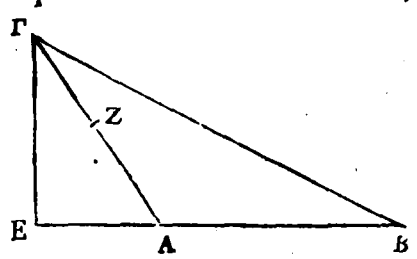
Ἔστω δὴ ὀξεῖα ἡ ὑπὸ BAΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν AB κάθετος ἡ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ ὀξυγώνιόν ἐστι τὸ ABΓ τρίγωνον, καὶ κάθετος ἦκται ἡ ΓΔ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB, AΓ ἴσα ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς BΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν BA, AΔ. κοινὸν προσκείσθω τὸ δὶς ὑπὸ τῶν BA, AΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν BA, AΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν BA, AΓ,

ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ, ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ΒΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ, καὶ ἔτι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, τουτέστι τῷ δὶς ὑπὸ τῆς ΓΑΔ καὶ τῆς ΒΑ· ὥστε τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΓΑΔ καὶ τῆς ΒΑ. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία, ἐστὶ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΓ δοθεῖσα· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς ΑΓΔ δοθεῖσά ἐστιν· δέδοται ἄρα τὸ ΑΔΓ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΑΓ δοθείς· ὥστε καὶ συναμφοτέρου τῆς ΔΑΓ πρὸς τὴν ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου ἄρα τῆς ΔΑΓ καὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ δὶς ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΑΓ καὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς, διὰ δοθεῖσαν εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· καὶ τοῦ δὶς ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΑΓ καὶ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς.



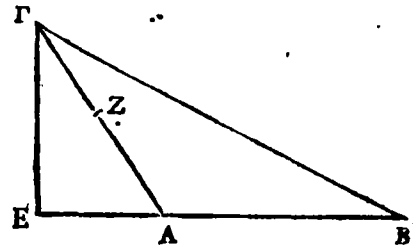
ΑΓ, hoc eſt [per 4. 2.] quadratum utriuſque ſimul ΒΑΓ, æqualia ſunt quadrato rectæ ΒΓ & ei quod bis continetur ſub ΒΑ, ΑΔ, & inſuper ei quod bis continetur ſub ΒΑ, ΑΓ; hoc eſt [per 2. 2.] ei quod bis continetur ſub utraque ſimul ΓΑΔ & recta ΒΑ: ideoque quadratum utriuſque ſimul ΒΑΓ excedit quadratum rectæ ΒΓ eo quod bis ſub utraque ſimul ΓΑΔ & recta ΒΑ continetur. quoniam vero [ex hyp.] datus eſt angulus ΒΑΓ, atque etiam angulus ΑΔΓ datus eſt: reliquus igitur angulus ΑΓΔ [per 32. 1. & 4. dat.] eſt datus: quare [per 40. dat.] triangulum ΑΔΓ ſpecie datum eſt: ergo ratio ipſius ΑΔ ad ΑΓ data eſt: adeoque [per 6. dat.] ratio utriuſque ſimul ΔΑΓ ad ΑΓ data eſt: igitur [per 1. 6] rectanguli ſub utraque ſimul ΔΑΓ & ΑΒ ad rectangulum ſub ΒΑ, ΑΓ data eſt ratio: & ideo ratio ejus quod bis continetur ſub ΔΑΓ & ΑΒ ad id quod continetur ſub ΒΑ, ΑΓ etiam datur. ratio autem ejus quod continetur ſub ΒΑ, ΑΓ ad triangulum ΑΒΓ [per 66. dat.] data eſt, propter datum angulum ΒΑΓ: igitur [per 8. dat.] ratio ejus quod bis continetur ſub utraque ſimul ΔΑΓ & recta ΑΒ ad triangulum ΑΒΓ data eſt.

Αλλὰ δὴ ἔστω ἀμβλεῖα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, καὶ ἐκβεβλήθω ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Ε, ἤχθω ἐπ' αὐτὴν ἀπὸ τοῦ Γ κάθετος ἡ ΓΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΕ ἴση ἡ ΑΖ. ἐπεὶ οὖν ἀμβλεῖά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία, καὶ κάθετος ἦκται ἡ ΓΕ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ, τουτέστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΖ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ. κοινὸν προσκείσθω τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ, τουτέστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΖ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΖ· τὸ ἄρα συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΓΖ· ὥστε τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ ὑπερέχειν τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΓΖ. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία, καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΓ ἄρα δοθεῖσά ἐστιν. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΕΑ δοθεῖσά ἐστι· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΕ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΓΕ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα τῆς ΓΑ πρὸς τὴν ΑΕ, δοθείς, τουτέστι καὶ πρὸς τὴν ΑΖ· ὥστε καὶ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΖ λόγος ἐστὶ δοθείς. τῆς δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΕΓ ἄρα πρὸς τὴν ΓΖ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε τοῦ ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν



Sit denique angulus ΒΑΓ obtuſus; atque producta recta ΒΑ ad punctum Ε, in illam ex Γ agatur perpendicularis ΓΕ, ponaturque ipſi ΑΕ æqualis ΑΖ. quoniam igitur angulus ΒΑΓ eſt obtuſus, & perpendicularis acta eſt ΓΕ: quadrata igitur rectarum ΒΑ, ΑΓ cum eo quod bis continetur ſub ΒΑ, ΑΕ, hoc eſt quod bis continetur ſub ΒΑ, ΑΖ, æqualia ſunt [per 13. 2.] quadrato rectæ ΒΓ. addatur commune rectangulum, quod ſc. bis continetur ſub ΒΑ, ΑΓ: ergo quadrata rectarum ΒΑ, ΑΓ cum eo quod bis continetur ſub ΒΑ, ΑΓ, hoc eſt [per 4. 2.] quadratum utriuſque ſimul ΒΑΓ cum eo quod bis continetur ſub ΒΑ, ΑΖ, æqualia ſunt quadrato rectæ ΒΓ & ei quod bis continetur ſub ΒΑ, ΑΓ. auferatur commune rectangulum quod bis continetur ſub ΒΑ, ΑΖ: ergo quod ab utraque ſimul ΒΑΓ quadratum æquale eſt quadrato rectæ ΒΓ & [per 3. 2.] ei quod bis continetur ſub ΒΑ, ΓΖ: ideoque quadratum utriuſque ſimul ΒΑΓ excedit quadratum rectæ ΒΓ eo quod bis continetur ſub ΒΑ, ΓΖ. quoniam vero angulus ΒΑΓ datus eſt, angulus etiam ΒΑΓ [per 13. 1. & 4. dat.] datus eſt. ſed & angulus ΓΕΑ datus eſt; ergo [per 32. 1. & 4. dat.] reliquus quoque angulus ΑΓΕ datus eſt: triangulum igitur ΑΓΕ [per 40. dat.] ſpecie datum eſt: quare [per 3. def. dat.] & ipſius ΓΑ ad ΑΕ, id eſt ad ΑΖ, data eſt ratio: ideoque [per 5. dat.] ipſius ΑΓ ad ΓΖ data eſt ratio. ipſius autem ΑΓ ad ΓΕ data eſt ratio: igitur [per 8. dat.] ratio ipſius ΕΓ ad ΓΖ data eſt: quare [per 1. 6.] ratio ejus quod continetur ſub ΕΓ, ΑΒ ad id quod continetur

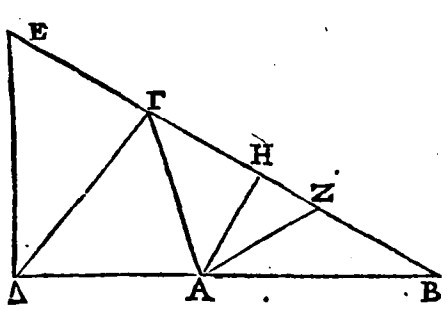
ſub ΓZ, AB data eſt. ejus autem quod continetur ſub AΓ, AB ad id quod continetur ſub EΓ, AB [per 1.6.] ratio eſt data: ideoque [per 8.dat.] ejus quod ſub AΓ, AB ad id quod ſub ΓZ, AB data eſt ratio. at vero ratio ejus quod continetur ſub AΓ, AB ad triangulum ABΓ [per 66. dat.] data eſt: illius igitur quod bis continetur ſub ΓZ, AB ad triangulum ABΓ ratio [per 8.dat.] data eſt. verum [ex ſupra oſtenſis] rectangulum quod bis continetur ſub ΓZ, AB illud eſt quo quadratum utriuſque ſimul BAΓ excedit quadratum rectæ BΓ: quo igitur quadratum utriuſque ſimul BAΓ excedit quadratum rectæ BΓ, illud ſpatium ad triangulum ABΓ rationem habet datam.



ΓZ, AB λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν AΓ, AB πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν EΓ, AB λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AΓ, AB πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ, AB λόγος ἐστὶ δοθείς. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AΓ, AB πρὸς τὸ ABΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΓZ, AB πρὸς τὸ ABΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΓZ, AB ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς BAΓ τοῦ ἀπὸ τῆς BΓ· ᾧ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς BAΓ τοῦ ἀπὸ τῆς BΓ, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ABΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

ALITER.

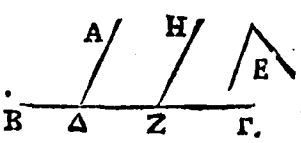
Producatur recta BA ad punctum Δ, & ponatur ipſi ΓA æqualis AΔ, connectaturque ΓΔ. quoniam itaque [ex hyp.] datus eſt angulus BAΓ, & ejus dimidius eſt [per 5. & 32.1.] uterque angulorum AΔΓ, AΓΔ; uterque angulorum AΔΓ, AΓΔ datus eſt: ergo [per 32. 1. & 4. dat.] & reliquus ΔAΓ datus eſt: quare [per 40. dat.] triangulum AΓΔ ſpecie datum eſt: ideoque [per 3. def. dat.] ipſius AΓ ad ΓΔ data eſt ratio. quoniam vero angulus AΔΓ datus eſt, deducatur * ipſi AΔΓ æqualis uterque angulorum ΔEΓ, AZΓ. quoniam vero angulus BΔΓ angulo ΔEΓ æqualis eſt; angulus autem ΔBE & triangulo ΔBE & triangulo ΔBΓ communis eſt: reliquus igitur BΔE reliquo BΓΔ [per 32. 1.] æqualis eſt: ideoque triangulum BΔE triangulo ΔBΓ æquiangulum eſt: quare [per 4. 6.] ut EB ad BΔ ita eſt BΔ ad ΓB: igitur [per 17.6.] quod continetur ſub EB, ΓB, hoc eſt [per 3.2.] rectangulum ſub EΓ, ΓB una cum quadrato rectæ BΓ, æquale eſt quadrato rectæ ΔB; hoc eſt quadrato utriuſque ſimul BAΓ, etenim [per conſtr.] æqualis eſt ΔA ipſi ΓA: igitur rectangulum ſub EΓ, ΓB una cum quadrato rectæ BΓ, hoc eſt quadratum utriuſque ſimul BAΓ, excedit quadratum rectæ BΓ rectangulo quod continetur ſub BΓ, ΓE. dico igitur quod data eſt ratio rectanguli ſub BΓ, ΓE ad triangulum ABΓ. quoniam enim angulus BΔE angulo BΓΔ æqualis eſt, ut & angulus AΔΓ angulo AΓΔ æqualis: igitur reliquus ΓΔE reliquo AΓB æqualis eſt. eſt autem [per conſtr.] & angulus ΔEΓ angulo AZΓ æqualis: reliquus igitur ΓAZ reliquo ΔΓE [per 32.1.] æqualis eſt: adeoque triangulum AΓZ tri-



ΑΛΛΩΣ.

Διήχθω ἡ BA πρὸς τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΓA ἴση ἡ AΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ. ἐπεὶ οὖν δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ BAΓ γωνία, καὶ ἔστιν αὐτῆς ἡμίσεια ἑκατέρα τῶν ὑπὸ AΔΓ, AΓΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ AΔΓ, AΓΔ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ τῶν ΔAΓ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ AΓΔ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα τῆς AΓ πρὸς τὴν ΓΔ δοθείς. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ AΔΓ, κατήχθω τῇ AΔΓ ἴση ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΔEΓ, AZΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ BΔΓ τῇ ὑπὸ ΔEΓ, κοινὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔBE τῷ ΔBE τριγώνῳ ἴσαι καὶ τὸ ΔBΓ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ BΔE λοιπῇ τῇ ὑπὸ BΓΔ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ BΔE τρίγωνον τῷ ΔBΓ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ EB πρὸς τὴν BΔ ἕτως ἡ BΔ πρὸς τὴν ΓB· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν EB, ΓB, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν EΓ, ΓB μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς BΓ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔB, τουτέστι τῷ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς BAΓ, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΔA τῇ ΓA· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν EΓ, ΓB μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς BΓ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς συναμφοτέρου τῆς BAΓ, τοῦ ἀπὸ τῆς BΓ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ τῶν BΓ, ΓE. λέγω δὴ ὅτι λόγος ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν BΓ, ΓE πρὸς τὸ ABΓ τρίγωνον δοθείς. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ BΔE γωνία τῇ ὑπὸ BΓΔ, ὡς ἡ ὑπὸ AΔΓ τῇ ὑπὸ AΓΔ ἐστιν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΔE λοιπῇ τῇ ὑπὸ AΓB ἐστιν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΔEΓ τῇ ὑπὸ AZΓ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓAZ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΓE ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ AΓZ

* Per datum punctum A ad datam rectam BΓ deducatur recta AΔ quæ faciat angulum AΔΓ æqualem dato angulo E, hoc modo. In BΓ ſumatur punctum utcunque Z, & ad datam rectam BΓ, datumque in ea punctum Z, ducatur [per 23.1.] recta ZH quæ faciat angulum ΓZH æqualem ipſi E; & per A ipſi ZH [per 31.1.] ducatur parallela AΔ: erit hæc ea quæ quæritur. Nam angulus AΔΓ [per 29. 1.] æqualis eſt ipſi HZΓ, qui [per conſtr.] æqualis eſt ipſi E.



τρίγωνον

τρίγωνον τῷ ΔΕΓ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΖ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΓΕ. λόγος δὲ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΔ δοθείς· λόγος ἄρα τῆς ΑΖ πρὸς τὴν ΓΕ δοθείς. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΗ. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΖΓ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΖ δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΑΖ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΗΖ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΖ πρὸς τὴν ΑΗ δοθείς. τῆς δὲ ΖΑ πρὸς τὴν ΓΕ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΑΗ ἄρα πρὸς τὴν ΓΕ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΕ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΒΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΕ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΕ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ· ᾧ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον.

angulo ΔΕΓ æquiangulum eſt: quare [per 4. 6.] eſt ut ΓΑ ad ΑΖ ita ΔΓ ad ΓΕ: ideoque permutando ut ΓΑ ad ΓΔ ita ΑΖ ad ΓΕ. eſt autem [ex ſupra oſtenſis] ratio ipſius ΑΓ ad ΓΔ data: quare & ipſius ΑΖ ad ΓΕ ratio eſt data. agatur à puncto Α ad rectam ΒΓ perpendicularis ΑΗ. & quoniam angulus ΑΖΓ datus eſt, atque angulus ΑΗΖ datus: reliquus igitur ΗΑΖ datus eſt: itaque [per 40.dat.] triangulum ΑΗΖ ſpecie datum eſt: quare ratio ΑΖ ad ΑΗ data eſt. ipſius autem ΖΑ ad ΓΕ data eſt ratio: ergo [per 8.dat.] etiam ratio ipſius ΑΗ ad ΓΕ data eſt: ideoque [per 1. 6.] ratio ejus quod continetur ſub ΑΗ, ΒΓ ad id quod continetur ſub ΒΓ, ΓΕ data eſt. verum [per 41.1.] ejus quod continetur ſub ΑΗ, ΒΓ ad triangulum ΑΒΓ data eſt: quare & ratio ejus quod continetur ſub ΒΓ, ΓΕ ad triangulum ΑΒΓ data eſt. at vero [per ſupra oſtenſa] quod continetur ſub ΒΓ, ΓΕ eſt illud ſpatium quo quadratum utriuſque ſimul ΒΑΓ excedit quadratum rectæ ΒΓ: igitur illud ſpatium, quo quadratum utriuſque ſimul ΒΑΓ excedit quadratum rectæ ΒΓ, ad triangulum ΑΒΓ habet rationem datam.

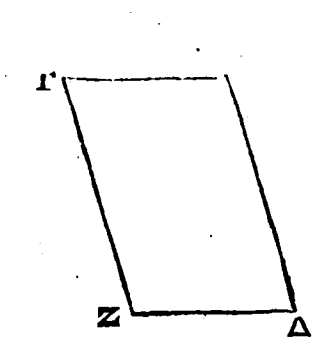
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξή.

Ἐὰν δύο ἰσογώνια παραλληλόγραμμα λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ μία πλευρὰ πρὸς μίαν πλευρὰν λόγον ἔχῃ δεδομένον· καὶ λοιπὴ πλευρὰ πρὸς τὴν λοιπὴν πλευρὰν λόγον ἕξει δεδομένον.

PROP. LXVIII.

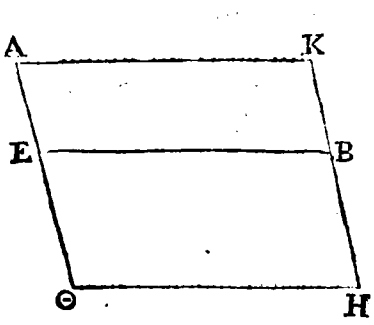
Si duo parallelogramma æquiangula habeant ad invicem rationem datam, atque unum latus ad unum latus habeat rationem datam; etiam reliquum latus ad reliquum latus rationem habebit datam.

Δύο γὰρ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒ, ΓΔ πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω δεδομένον, ἐχέτω δὲ καὶ μία πλευρὰ πρὸς μίαν πλευρὰν λόγον δεδομένον, καὶ ἔστω τῆς ΒΕ πρὸς τὴν ΖΔ λόγος δοθείς· λέγω ὅτι καὶ τῆς ΑΕ πρὸς τὴν ΖΓ λόγος ἐστὶ δοθείς.



Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΕΒ τῷ ΓΔ ἴσον τὸ ΕΗ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΑΕ τῇ ΕΘ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΒ τῇ ΒΗ. ἐπεὶ οὖν λόγος ἐστὶ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ δοθείς, ἴσον δὲ τὸ ΓΔ τῷ ΕΗ· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΗ δοθείς· ὥστε καὶ τῆς ΑΕ πρὸς τὴν ΕΘ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΗ τῷ ΓΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΕΘ. λόγος δὲ τῆς ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ δοθείς· καὶ τῆς ΓΖ ἄρα πρὸς τὴν ΕΘ λόγος ἐστὶ δοθείς. τῆς δὲ ΕΘ πρὸς τὴν ΑΕ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΑΕ ἄρα πρὸς τὴν ΓΖ λόγος ἐστὶ δοθείς.

DUO enim æquiangula parallelogramma ΑΒ, ΓΔ habeant ad invicem rationem datam, habeat autem & unum latus ad unum latus rationem datam, ſitq; ratio ΒΕ ad ΖΔ data: dico ipſius quoque ΑΕ ad ΖΓ rationem eſſe datam.

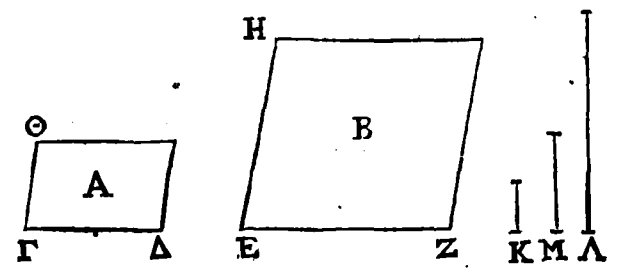


Applicetur enim ad rectam ΕΒ ipſi ΓΔ æquale parallelogrammum ΕΗ, atque ita conſtituatur, ut in directum jaceat ΑΕ ipſi ΕΘ: adeoque recta ΚΒ in directum erit ipſi ΒΗ. quoniam itaque [ex hyp.] data eſt ratio ipſius ΑΒ ad ΓΔ; ΓΔ vero [per conſtr.] æquale eſt ipſi ΕΗ: igitur ratio ipſius ΑΒ ad ΕΗ data eſt: adeoq; [per 1.6.] & ratio ipſius ΑΕ ad ΕΘ etiam eſt data. & quoniam parallelogrammum ΕΗ ipſi ΓΔ æquale eſt, erit [per 14.6.] ut ΕΒ ad ΖΔ ita ΓΖ ad ΕΘ. ſed [ex hyp.] ratio ipſius ΕΒ ad ΖΔ data eſt: igitur & ratio ipſius ΓΖ ad ΕΘ data eſt. ipſius autem ΕΘ ad ΑΕ ratio eſt data: ergo [per 8. dat.] & ratio ipſius ΑΕ ad ΓΖ data eſt.

ALI-

ALITER.

Exponatur data recta K. & quoniam ratio ipſius A ad B data eſt, fiat huic eadem ratio ipſius K ad Λ. eſt autem ratio ipſius A ad B data; igitur ratio ipſius K ad Λ data eſt. data autem eſt K; ergo & [per 2. dat.] Λ data eſt. rurſus, quoniam ratio ipſius Γ Δ ad E Z data eſt, fiat huic eadem ratio ipſius K ad M: ergo ratio ipſius K ad M data eſt. data autem eſt K; ergo data quoque eſt M. eſt autem & Λ data: quare [per 1. dat.] ratio ipſius Λ ad M data eſt. & quoniam [ex hyp.] æquiangulum eſt A ipſi B; igitur [per 23.6.] A ad B habet rationem compoſitam ex laterum rationibus, hoc eſt, & ex ratione quam habet Γ Δ ad E Z & ex ea quam habet Θ Γ ad H E. ſed ipſa K ad Λ habet rationem compoſitam ex ratione quam habet K ad M & ratione quam habet M ad Λ: igitur ratio compoſita ex ratione quam habet Γ Δ ad E Z & ratione quam habet Θ Γ ad H E eadem eſt cum ratione compoſita ex ratione ipſius K ad M & ratione ipſius M ad Λ. ex quibus ratio ipſius Γ Δ ad E Z eadem eſt [per conſtr.] cum ratione ipſius K ad M: igitur reliqua ratio, nempe ipſius Θ Γ ad H E, eadem eſt cum ratione ipſius M ad Λ. ratio autem ipſius M ad Λ [ex ſupra oſtenſis] data eſt: igitur & ratio ipſius Θ Γ ad H E data eſt.



ΑΛΛΩΣ.

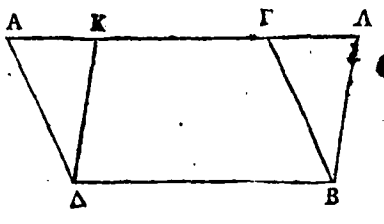
Ἐκκείσθω δεδομένη εὐθεῖα ἡ Κ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ Α πρὸς τὸ Β δοθείς, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τοῦ Κ πρὸς τὸ Λ. λόγος δὲ τοῦ Α πρὸς τὸ Β δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τοῦ Κ πρὸς τὸ Λ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ Κ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ Λ. πάλιν ἐπεὶ λόγος ἐστὶ δοθεὶς τοῦ Γ Δ πρὸς τὸ Ε Ζ, ὁ αὐτὸς αὐτῷ γεγονέτω ὁ τοῦ Κ πρὸς τὸ Μ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ Κ πρὸς τὴν Μ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ Κ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ Μ. ἔστι δὲ καὶ ἡ Λ δοθεῖσα· λόγος ἄρα τοῦ Λ πρὸς τὸ Μ δοθείς. καὶ ἐπεὶ ἰσογώνιόν ἐστι τὸ Α τῷ Β· τὸ ἄρα Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, τουτέστιν ἐκ τοῦ τὸν λόγον ὃν ἔχει ἡ Γ Δ πρὸς τὸ Ε Ζ καὶ ἡ Θ Γ πρὸς τὸ Η Ε. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ Κ πρὸς τὸ Λ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ τὸν λόγον ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς τὸ Μ καὶ ὃν ἔχει ἡ Μ πρὸς τὸ Λ· ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ τὸν λόγον ὃν ἔχει ἡ Γ Δ πρὸς τὸ Ε Ζ καὶ ἡ Θ Γ πρὸς τὸ Η Ε ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ τὸν ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς τὸ Μ καὶ ἡ Μ πρὸς τὸ Λ. ὡς ὁ τοῦ Γ Δ πρὸς τὴν Ε Ζ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ Κ πρὸς τὴν Μ λόγῳ· λοιπὸς ἄρα ὁ τοῦ Θ Γ πρὸς τὸ Η Ε λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τοῦ Μ πρὸς τὸ Λ. τῆς δὲ Μ πρὸς τὸ Λ λόγος ἐστὶ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τοῦ Θ Γ πρὸς τὸ Η Ε δοθείς.

PROP. LXIX.

Si duo parallelogramma datos angulos habeant, & ad invicem rationem datam; habeat autem & unum latus ad unum latus rationem datam: & reliquum latus ad reliquum latus habebit rationem datam.

DUO enim parallelogramma A B, E H, habentia datos angulos ad puncta Δ, Z, ad invicem rationem datam habeant; ſitque etiam ratio ipſius Δ B ad Z H data: dico ipſius quoque Λ Δ ad E Z rationem datam eſſe.

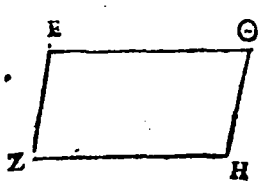
Si A B ipſi E H æquiangulum quidem ſit, res [per 68 dat.] manifeſta eſt. ſi vero non ſit illi æquiangulum; conſtituatur [per 23. 1.] ad rectam Δ B, & ad punctum in illa Δ, angulo E Z H æqualis angulus B Δ K, & [per 31.1.] compleatur parallelogrammum Δ Λ.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξθ'.

Ἐὰν δύο παραλληλόγραμμα δεδομένας ἔχῃ γωνίας καὶ λόγον πρὸς ἄλληλα δεδομένον, καὶ μία πλευρὰ πρὸς μίαν πλευρὰν λόγον ἔχῃ δεδομένον· καὶ ἡ λοιπὴ πλευρὰ πρὸς τὴν λοιπὴν πλευρὰν λόγον ἕξει δεδομένον.

Ἔστω δύο παραλληλόγραμμα τὰ Α Β, Ε Η δεδομένας ἔχοντα γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Δ, Ζ, πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω δεδομένον, λόγος δὲ ἔστω τοῦ Δ Β πρὸς τὴν Ζ Η δοθείς· λέγω ὅτι καὶ τῆς Λ Δ πρὸς τὴν Ε Ζ λόγος ἐστὶ δοθείς.



Εἰ μὲν οὖν ἰσογώνιόν ἐστι τὸ Α Β τῷ Ε Η, φανερόν. εἰ δὲ οὔ· συνεστάτω πρὸς τῇ Δ Β, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ, τῇ ὑπὸ Ε Ζ Η γωνίᾳ ἴση ὑπὸ Β Δ Κ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ Δ Λ παραλληλόγραμμον.

C

καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΔΑΚ, ΑΚΔ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΚ ἐστὶ δοθεῖσα· δέδοται ἄρα τὸ ΑΔΚ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΔΚ δοθείς. ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ ΔΓ πρὸς τὸ ΖΘ δοθείς, ὑπόκειται γάρ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ΔΓ τῷ ΔΛ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΔΛ πρὸς τὸ ΖΘ δοθείς. ἐπεὶδήπερ ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΔΛ τῷ ΖΘ, καὶ λόγος ἐστὶ τοῦ ΔΛ πρὸς τὸ ΖΘ δοθείς, καὶ ἔστι τῆς ΔΒ πρὸς τὴν ΖΗ λόγος δοθείς, ὑπόκειται γάρ· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ τῆς ΔΚ πρὸς τὴν ΕΖ δοθείς. τῆς δὲ ΔΚ πρὸς τὴν ΑΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΑΔ ἄρα πρὸς τὴν ΕΖ λόγος ἐστὶ δοθείς.

& quoniam [ex hyp.] uterque angulorum ΔΑΚ, ΑΚΔ datus est; reliquus igitur ΑΔΚ [per 32. 1. & 4. dat.] datus est: quare [per 40. dat.] triangulum ΑΔΚ specie datum est: ideoque ratio ipsius ΑΔ ad ΔΚ data est. quoniam vero ratio ipsius ΔΓ ad ΖΘ data est, ita enim supponitur; atque [per 35. 1.] æquale est ΔΓ ipsi ΔΛ: ratio igitur ipsius ΔΛ ad ΖΘ data est. cumque [per constr.] æquiangulum sit ΔΛ ipsi ΖΘ, & ratio ipsius ΔΛ ad ΖΘ data sit; necnon ratio ipsius ΔΒ ad ΖΗ data, ita enim supponitur: ratio igitur ipsius ΔΚ ad ΕΖ [per 68. dat.] data est. est autem [ex mox ostensis] ratio ipsius ΔΚ ad ΑΔ data: ergo [per 8. dat.] & ratio ipsius ΑΔ ad ΕΖ data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ο'.

Ἐὰν δυοῖν παραλληλογράμμων περὶ ἴσας γωνίας, ἢ περὶ ἀνίσους μὲν δεδομένας δέ, αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον, καὶ αὐτὰ τὰ παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἕξει δεδομένον.

PROP. LXX.

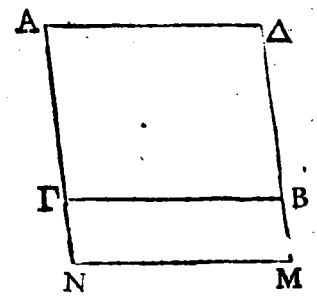
Si duorum parallelogrammorum, circa æquales angulos, aut circa inæquales quidem datos tamen, latera ad invicem habeant rationem datam; & ipsa quoque parallelogramma ad invicem rationem datam habebunt.

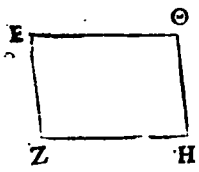
Δύο γὰρ παραλληλογράμμων τῶν ΑΒ, ΕΗ, περὶ ἴσας γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Γ, Ζ, ἢ περὶ ἀνίσους μὲν δεδομένας δέ, αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον, τουτέστι λόγος ἔστω τοῦ μὲν ΑΓ πρὸς τὴν ΕΖ δοθείς, τοῦ δὲ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ λόγος ἔστω δοθείς· λέγω ὅτι καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΘ λόγος ἐστὶ δοθείς.

DUorum enim parallelogrammorum ΑΒ, ΕΗ, circa æquales angulos ad puncta Γ, Ζ, aut circa inæquales quidem datos tamen, latera habeant ad invicem rationem datam; nempe data sit ratio ipsius ΑΓ ad ΕΖ; sit quoque ratio ipsius ΓΒ ad ΖΗ data: dico quod ratio ipsius ΓΔ ad ΖΘ data est.

Ἔστω γὰρ ἰσογώνιον τῷ ΖΘ τὸ ΓΔ. καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΓΒ εὐθεῖαν παραλληλόγραμμον τὸ ΓΜ, ᾧ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τῇ ΑΓ τὴν ΓΝ· καὶ ἡ ΔΒ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ ΒΜ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΝ τῷ ΖΘ, ἐστὶ δὲ καὶ ἰσογώνιον τῶν ΒΝ, ΖΘ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΓΝ. λόγος δὲ τῆς ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ δοθείς· λόγος ἄρα τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ΓΝ δοθείς. τῆς δὲ ΕΖ πρὸς τὴν ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΑΓ ἄρα πρὸς τὴν ΓΝ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΓΜ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἴσον δὲ τὸ ΓΜ τῷ ΖΘ ἴσον· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΘ δοθείς.

Sit enim primo ΓΔ ipsi ΖΘ æquiangulum. & [per 45. 1.] applicetur ad rectam ΓΒ parallelogrammo ΖΘ æquale parallelogrammum ΓΜ, atque ita constituatur ut ΑΓ in directum sit ipsi ΓΝ: erit igitur & ΔΒ ipsi ΒΜ in directum. quoniam itaque ΒΝ ipsi ΖΘ æquiangulum est & æquale: ipsorum igitur ΒΝ, ΖΘ latera circum æquales angulos sunt [per 14. 6.] reciproce proportionalia; adeoque ut ΓΒ ad ΖΗ ita est ΖΕ ad ΓΝ. est autem [ex hyp.] ratio ipsius ΓΒ ad ΖΗ data: ipsius igitur ΕΖ ad ΓΝ data est ratio. verum ipsius ΕΖ ad ΑΓ ratio [ex hyp.] est data: quare [per 8. dat.] ratio ipsius ΑΓ ad ΓΝ data est: adeoque [per 1. 6.] & ratio ipsius ΓΔ ad ΓΜ data est. æquale autem est [per constr.] ΓΜ ipsi ΖΘ: ergo ratio ipsius ΓΔ ad ΖΘ data est.

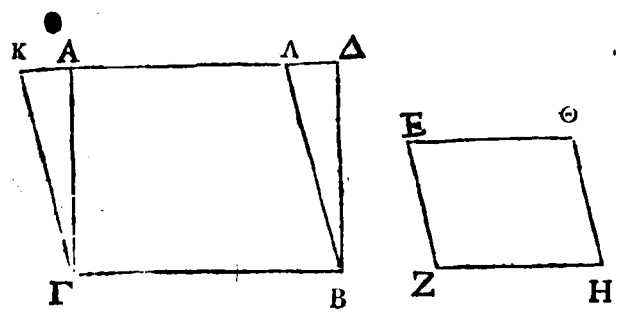




Μὴ ἔστω δὴ ἰσογώνιον τὸ ΑΒ τῷ ΕΗ. καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΓ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Γ, τῇ ὑπὸ ΕΖΗ ἴση γωνία ἡ ὑπὸ ΒΓΚ, καὶ συμπεπληρώσθω ΓΛ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γω-

NON sit autem ΑΒ æquiangulum ipsi ΕΗ. & [per 23. 1.] constituatur ad rectam ΒΓ, & datum in ea punctum Γ, angulo ΕΖΗ æqualis angulus ΒΓΚ, compleaturque parallelogrammum ΓΛ. quoniam vero angulus ΑΓΒ [ex hyp.] da-

tus est; atque angulus ΚΓΒ [per constr.] datus: igitur [per 4.dat.] reliquus ΑΓΚ datus est. est autem & ΓΑΚ datus: unde [per 32. 1. & 4.dat.] reliquus ΑΚΓ datus est: triangulum igtur ΑΓΚ [per 40.dat.] specie datum est: adeoque ratio ipsius ΑΓ ad ΓΚ data est. ipsius autem ΑΓ ad ΕΖ [ex hyp.] data est ratio: quare [per 8. dat.] & ratio ipsius ΓΚ ad ΕΖ data est. ipsius autem ΓΒ ad ΖΗ ratio [ex hyp.] data est; atque [per constr.] æqualis est angulus ΚΓΒ angulo ΕΖΗ: igitur [per part. prior. hujus] ratio ipsius ΓΔ ad ΖΘ est data.



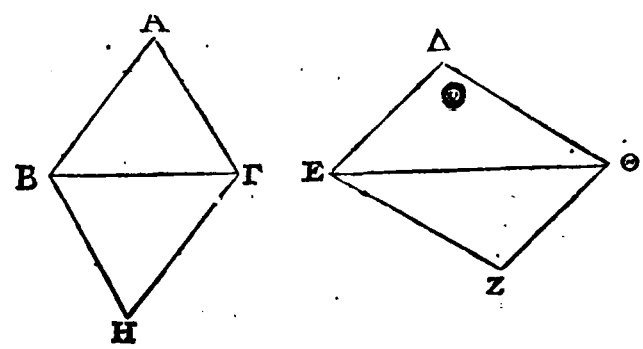
νία, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΚΓΒ δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΚ δοθεῖσά ἐστι. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΑΚ δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΚΓ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΓΚ τρίγωνον τῷ εἴδει λόγῳ· ἄρα ἐστὶ τῆς ΑΓ πρὸς τὴν ΓΚ δοθείς. ἡ δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΕΖ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΓΚ ἄρα πρὸς τὴν ΕΖ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἔστι δὲ καὶ τῆς ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ λόγος δοθείς, καὶ ἔστιν ἴση ἡ ὑπὸ ΚΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΗ· λόγῳ· ἄρα ἐστὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὴν ΖΘ δοθείς.

Prop. LXXI.

Si duorum triangulorum, circa æquales angulos, aut circa inæquales quidem datos tamen, latera ad invicem habeant rationem datam; ipsa quoque triangula ad invicem rationem datam habebunt.

DUorum enim triangulorum ΑΒΓ, ΔΕΘ, circa æquales angulos ad puncta Α, Δ, aut circa inæquales quidem datos tamen, latera ad invicem habeant rationem datam, sitque ratio ipsius quidem ΒΑ ad ΕΔ, necnon ipsius ΑΓ ad ΔΘ data: dico rationem trianguli ΑΒΓ ad triangulum ΔΕΘ datam esse.

Compleantur enim parallelogramma ΑΗ, ΔΖ. quoniam itaque duorum parallelogrammorum ΑΗ, ΔΖ, circa æquales angulos ad puncta Α, Δ, aut inæquales quidem sed tamen datos, latera ad invicem habent rationem datam: ratio ipsius ΑΗ ad ΔΖ [per 70.dat.] data est. sed [per 34.1.] ipsius quidem ΑΗ dimidium est triangulum ΑΒΓ; ipsius vero ΔΖ dimidium triangulum ΔΕΘ: ergo trianguli ΑΒΓ ad triangulum ΔΕΘ ratio est data.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ οα'.

Ἐὰν δυοῖν τριγώνων, περὶ ἴσας γωνίας, ἢ περὶ ἀνίσους μὲν δεδομένας δὲ, αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχωσι δεδομένον· καὶ αὐτὰ τὰ τρίγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἕξει δεδομένον.

Δυοῖν γὰρ τριγώνων τῶν ΑΒΓ, ΔΕΘ, περὶ ἴσας γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Α, Δ, ἢ περὶ ἀνίσους μὲν δεδομένας δὲ, αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἐχέτωσαν δεδομένον, καὶ ἔστω λόγος τοῦ μὲν ΒΑ πρὸς τὴν ΕΔ δοθείς, τοῦ δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΔΘ· λέγω ὅτι καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΘ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς.

Συμπεπληρώσθω γὰρ ΑΗ, ΔΖ παραλληλόγραμμα. ἐπεὶ οὖν δύο παραλληλογράμμων τῶν ΑΗ, ΔΖ περὶ ἴσας γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Α, Δ σημείοις, ἢ περὶ ἀνίσους μὲν δεδομένας δὲ, αἱ πλευραὶ πρὸς ἀλλήλας λόγον ἔχουσι δεδομένον· λόγος ἄρα τοῦ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΖ δοθείς. καὶ ἔστι τοῦ μὲν ΑΗ ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τοῦ δὲ ΔΖ τὸ ΔΕΘ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὸ ΔΕΘ τρίγωνον δοθείς.

Prop. LXXII.

Si duorum triangulorum bases fuerint in ratione data, atque etiam rectæ actæ ab angulis ad bases, quæ faciant angulos æquales, aut inæquales quidem sed tamen datos, habeant ad invicem

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οβ'.

Ἐὰν δυοῖν τριγώνων αἱ τε βάσεις ἐν δεδομένῳ λόγῳ ὦσι, καὶ αἱ ἐπ' αὐτὰς ἠγμέναι ἀπὸ τῶν γωνιῶν, ἤτοι ἴσας γωνίας ποιῶσαι, ἢ ἀνίσους μὲν δεδομένας δὲ, τὰς πρὸς ταῖς βάσεσιν λό-

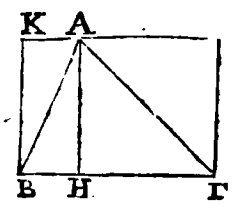
γον ἔχωσι τοῖς ἄλλήλας δεδομένον· καὶ αὐτὰ τὰ τείγωνα τοῖς ἄλληλα λόγον ἕξει δεδομένον.

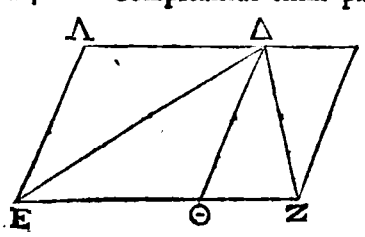
rationem datam: ipſa quoque triangula ad invicem rationem datam habebunt.

Ἐστωσαν δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἤχθωσαν αἱ ΑΗ, ΔΘ ὁποιαιοῦν γωνίας ποιοῦσαι τὰς ὑπὸ ΑΗΓ, ΔΘΖ, ἢ ἀνίσους μὲν δεδομένας δὲ, καὶ ἔτω λόγος τῆς μὲν ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ δοθείς, τῆς δὲ ΑΗ πρὸς τὴν ΔΘ λόγος ἔτω δοθείς· λέγω ὅτι καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς.

SInt duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, & agantur rectæ ΑΗ, ΔΘ, quæ angulos ΑΗΓ, ΔΘΖ ad baſes faciant, aut æquales, aut inæquales quidem ſed tamen datos; ſitque ratio ipſius ΒΓ ad ΕΖ data, atque etiam ipſius ΑΗ ad ΔΘ: dico etiam rationem trianguli ΑΒΓ ad triangulum ΔΕΖ datam eſſe.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΚΓ, ΛΖ παραλληλόγραμμα. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΑΗΓ, ΔΘΖ γωνίαι ἤτοι ἴσαι εἰσὶν, ἢ ἄνισοι μὲν, δεδομέναι δὲ, ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΑΗΓ τῇ ὑπὸ ΚΒΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΘΖ τῇ ὑπὸ ΛΕΖ· καὶ αἱ πρὸς τοῖς Β, Ε ἄρα γωνίαι ἤτοι ἴσαι εἰσὶν, ἢ ἄνισοι μὲν, δεδομέναι δέ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆς ΑΗ πρὸς τὴν ΔΘ δοθείς, ἴση δὲ ἡ μὲν ΑΗ τῇ ΚΒ, ἡ δὲ ΔΘ τῇ ΛΕ· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΚΒ πρὸς τὴν ΛΕ δοθείς. ἔστι δὲ καὶ τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ λόγος δοθείς. καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τοῖς Β, Ε σημείοις γωνίαι ἤτοι εἰσὶν ἴσαι, ἢ ἄνισοι μὲν δεδομέναι δέ· καὶ τοῦ ΚΓ ἄρα παραλληλογράμμου πρὸς τὸ ΛΖ παραλληλόγραμμον λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον λόγος ἐστὶ δοθείς.





Compleantur enim parallelogramma ΚΓ, ΛΖ. & quoniam [ex hyp.] anguli ΑΗΓ, ΔΘΖ aut æquales ſunt, aut inæquales quidem ſed tamen dati, angulus autem ΑΗΓ [per 29. 1.] angulo ΚΒΓ eſt æqualis, necnon angulus ΔΘΖ angulo ΛΕΖ: anguli igitur ad puncta Β, Ε aut æquales ſunt, aut inæquales quidem ſed tamen dati. quoniam vero [ex hyp.] ratio ipſius ΑΗ ad ΔΘ data eſt, & eſt [per 34. 1.] ΑΗ quidem ipſi ΚΒ, atque ΔΘ ipſi ΛΕ æqualis: ratio igitur ipſius ΚΒ ad ΛΕ data eſt. eſt autem & ratio ipſius ΒΓ ad ΕΖ [ex hyp.] data. & quoniam anguli ad puncta Β, Ε aut æquales ſunt, aut inæquales quidem ſed tamen dati: igitur [per 70. dat.] ratio parallelogrammi ΚΓ ad parallelogrammum ΛΖ eſt data: adeoque [per 41. 1.] ratio trianguli ΑΒΓ ad triangulum ΔΕΖ data eſt.

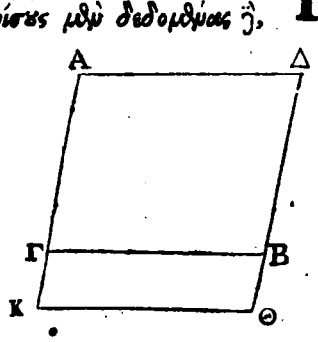
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ογ'.

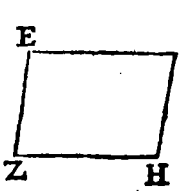
Ἐὰν δυοῖν παραλληλογράμμων περὶ ἴσας γωνίας, ἢ περὶ ἀνίσους μὲν δεδομένας δὲ, αἱ πλευραὶ ὅτως ἔχωσιν, ὥστε εἶναι ὡς τὴν μιᾶν τοῦτων πλευρὰν πρὸς τὴν μιᾶν δευτέραν πλευρὰν ὅτως τὴν λοιπὴν μιᾶν δευτέραν πλευρὰν πρὸς ἄλλην τινα, ἔχῃ δὲ καὶ ἡ λοιπὴ μιᾶν πρώτην πλευρὰ πρὸς αὐτὴν λόγον δεδομένον· καὶ αὐτὰ τὰ παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἕξει δεδομένον.

Prop. LXXIII.

Si duorum parallelogrammorum, circa æquales angulos, aut circa inæquales quidem ſed tamen datos, latera ita ſe habeant, ut ſit quemadmodum primi latus ad ſecundi latus ita reliquum ſecundi latus ad aliam quandam rectam; habeat autem & reliquum primi latus ad eandem iſtam rectam rationem datam: ipſa quoque parallelogramma ad invicem rationem datam habebunt.

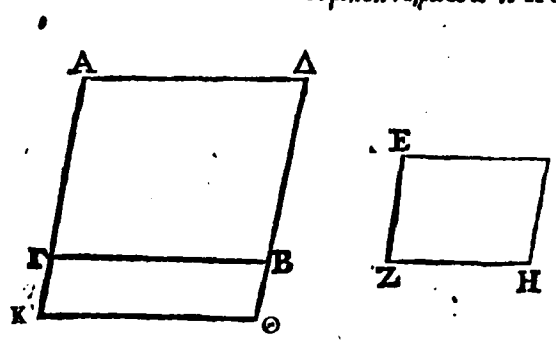
Δυοῖν γὰρ παραλληλογράμμων τῶν ΑΒ, ΕΗ, περὶ ἴσας γωνίας, ἢ περὶ ἀνίσους μὲν δεδομένας δὲ, τὰς πρὸς τοῖς Γ, Ζ σημείοις, αἱ πλευραὶ ὅτως ἐκκείσθωσαν πρὸς ἀλλήλας, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ ὅτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΓΚ, τὴν δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΚ λόγος ἔστω δοθείς· λέγω ὅτι καὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΗ παραλληλόγραμμον λόγος ἐστὶ δοθείς.



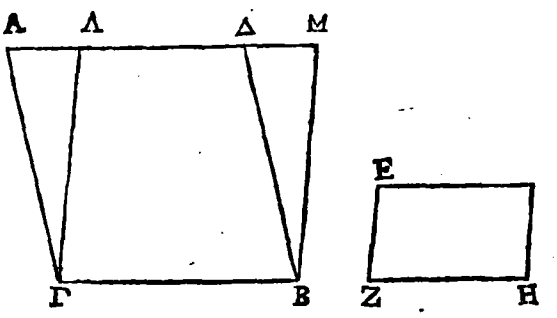


DUorum enim parallelogrammorum ΑΒ, ΕΗ, circa æquales angulos, aut inæquales quidem ſed tamen datos ad puncta Γ, Ζ, latera ad invicem ita ſe habeant, ut ſit quemadmodum ΓΒ ad ΖΗ ita recta ΕΖ ad rectam ΓΚ; ſitque ratio ipſius ΑΓ ad ΓΚ data: dico parallelogrammi ΑΒ ad parallelogrammum ΕΗ rationem datam eſſe.

Sit enim primo parallelogrammum AB æquiangulum ipſi EH; atque ita conſtituatur ΓK ut ſit in directum ipſi AΓ, compleaturque parallelogrammum AΘ. quoniam vero eſt ut ΓB ad ZH ita EZ ad ΓK; *erit etiam permutando [per 16. 5.] ut ΓB ad EZ ita ZH ad ΓK: igitur [per 16.6.] quod continetur ſub BΓ, ΓK æquale eſt ei quod continetur ſub EZ, ZH: ergo ΓΘ ipſi EH æquale eſt. ſed & [per 14.6.] eidem eſt æquiangulum: ergo [per 14.6.] latera circa æquales angulos ſunt reciproce proportionalia: eſt igitur ut ΓB ad ZH ita EZ ad ΓK.* ut autem ΓB ad ZH ita [ex hyp.] EZ ad eam ad quam AΓ habet rationem datam: ergo ratio ipſius AΓ ad ΓK data eſt: adeoque [per 1.6.] ratio ipſius AB ad ΓΘ, hoc eſt ad EH, data eſt.



Non ſit autem parallelogrammum AB æquiangulum parallelogrammo EH. & [per 23. 1.] conſtituatur ad rectam BΓ, & ad datum in ea punctum Γ, angulo EZH æqualis angulus BΓΛ; compleaturque parallelogrammum ΓM. & quoniam datus eſt uterque angulorum AΓΛ, ΛΓB; reliquus igitur AΓΛ datus eſt. angulus autem ΓΛΔ [ex hyp.] datus eſt: quare [per 40. dat.] triangulum AΓΛ ſpecie datum eſt: adeoque ratio ipſius AΓ ad ΓΛ data eſt. & quoniam [ex hyp.] eſt ut BΓ ad ZH ita EZ ad eam ad quam AΓ habet rationem datam; ipſiuſque AΓ ad ΓΛ data eſt ratio: eſt igitur ut BΓ ad ZH ita ZE ad eam ad quam AΓ habet rationem datam. æqualis autem eſt [per conſtr.] angulus BΓΛ angulo EZH: igitur [per part. prior. hujus] ratio ipſius ΓM ad EH data eſt. ſed [per 35.1.] ipſi ΓM æqualis eſt ΓΔ: ratio igitur ipſius ΓΔ ad EH data eſt.



Prop. LXXIV.

Si duo parallelogramma datam rationem habeant, aut in æqualibus angulis, aut inæqualibus quidem ſed tamen datis; erit ut primi latus ad ſecundi latus ita alterum ſecundi latus ad eam ad quam reliquum primi latus rationem habet datam.

Duo enim parallelogramma AB, EH, aut in æqualibus angulis ad puncta Z, Γ, aut inæqualibus quidem, ſed tamen datis, habeant ad invicem rationem datam: dico ut ΓB ad ZH ita eſſe EZ ad eam ad quam ipſa AΓ habet rationem datam.

Εςω γὰρ πρότερον τὸ AB τῷ EH ἰσογώνιον, καὶ κείσθω ὥςτε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν AΓ τῇ ΓK, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ AΘ παραλληλόγραμμον. καὶ ἐπεί ἐςιν ὡς ἡ ΓB πρὸς τὴν ZH ὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν ΓK· *ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΓB πρὸς τὴν EZ ὕτως ἡ ZH πρὸς τὴν ΓK· τὸ ἄρα ὑπὸ τὰς BΓ, ΓK ἴσον ἐςὶ τῷ ὑπὸ τὰς EZ, ZH· τὸ ΓΘ ἄρα ἴσον ἐςὶ τῷ EH. ἔςι δὲ καὶ ἰσογώνιον· τὰ ΓΘ, EH ἄρα ἀντιπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔςιν ἄρα ὡς ἡ ΓB πρὸς τὴν ZH ὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν ΓK.* ὡς δὲ ἡ ΓB πρὸς τὴν ZH ὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν ΑΓ λόγον ἔχει δεδομένον· λόγος ἄρα καὶ ΑΓ πρὸς τὴν ΓK δοθείς· ὥςτε τὸ AB πρὸς τὸ ΓΘ, τυτέςι πρὸς τὸ EH, λόγος ἐςὶ δοθείς.

Μὴ ἔςω δὴ ἰσογώνιον τὸ AB τῷ EH. καὶ συνεςάτω πρὸς τῇ BΓ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Γ τῇ ὑπὸ EZH γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ BΓΛ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΓM. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσαί ἐςιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΛ, ΛΓB· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΛ ἐςὶ δοθεῖσα. δέδοται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΑΔ· δέδοται ἄρα τὸ ΑΓΛ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα καὶ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΛ δοθείς. καὶ ἐπεί ἐςιν ὡς ἡ BΓ πρὸς τὴν ZH ὕτως ἡ EZ πρὸς ἣν ἡ ΑΓ λόγον ἔχει δεδομένον, τὸ δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΛ λόγος ἐςὶ δοθείς· ἔςιν ἄρα ὡς ἡ BΓ πρὸς τὴν ZH ὕτως ἡ ZE πρὸς ἣν ἡ ΑΓ λόγον ἔχει δεδομένον. καὶ ἔςιν ἴση ἡ ὑπὸ BΓΛ γωνία τῇ ὑπὸ EZH· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΓM πρὸς τὸ EH δοθείς. ἴσον δέ ἐςι τὸ ΓM τῷ ΓΔ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ EH δοθείς.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οδ'.

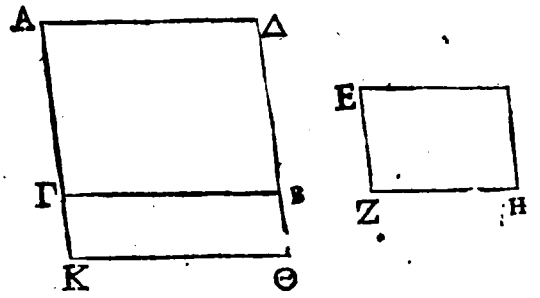
Ἐὰν δύο παραλληλόγραμμα λόγον ἔχῃ δεδομένον, ἤτοι ἐν ἴσαις γωνίαις, ἢ ἐν ἀνίσοις μὲν δεδομέναις δὲ· ἔσαι ὡς ἡ μία τῶν πλευρῶν πρὸς τὴν μίαν τῶν δευτέρων πλευρὰν ὕτως ἡ ἑτέρα μία τῶν δευτέρων πλευρὰ πρὸς ἣν ἡ λοιπὴ μία τῶν πρώτων πλευρὰ λόγον ἔχει δεδομένον.

Δύο γὰρ παραλληλόγραμμα τὰ AB, EH πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω δεδομένον, ἤτοι ἐν ἴσαις γωνίαις, ἢ ἐν ἀνίσοις μὲν δεδομέναις δὲ, ταῖς πρὸς ταῖς Z, Γ· λέγω ὅτι ἐςὶν ὡς ἡ ΓB πρὸς τὴν ZH ὕτως ἡ EZ πρὸς ἣν ἡ ΑΓ λόγον ἔχει δεδομένον.

Quæ inter ſtellulas inclusa redundant, & tollenda videntur.

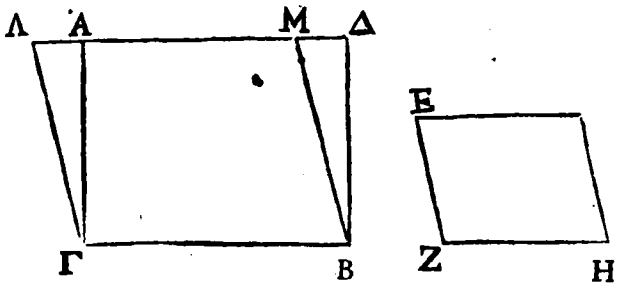
Τὸ·

Τὸ γὰρ ΑΒ τῷ ΕΗ ἤτοι ἰσογώνιον ἐστὶν ἢ οὔ. ἔστω πρότερον ἰσογώνιον. καὶ προσβεβλήσθω πρὸς τὴν ΓΒ εὐθεῖαν τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΘ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΓΚ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΘ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΗ δοθείς, ἴσον δὲ τὸ ΕΗ τῷ ΓΘ· τοῦ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ ΓΘ λόγος ἐστὶ δοθείς· ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΚ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τὸ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΚ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἐστὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ ΕΗ, ἐστὶ δὲ καὶ ἰσογώνιον· τῶν ΓΘ, ΕΗ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΚ. τοῦ δὲ ΓΚ πρὸς τὴν ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ὁ ΕΖ πρὸς ἣν ἡ ΑΓ λόγον ἔχει δεδομένον.



Etenim AB ipſi EH aut æquiangulum eſt aut non. ſit primo æquiangulum. & [per 45.1.] applicetur ad rectam ΓB ipſi EH æquale parallelogrammum ΓΘ, atque ita conſtituatur ut in directum ſit AΓ ipſi ΓK: ergo in directum eſt recta ΔB rectæ BΘ. & quoniam [ex hyp.] ratio ipſius AB ad EH data eſt; atque [per conſtr.] EH æquale eſt ipſi ΓΘ: igitur ratio ipſius AB ad ΓΘ data eſt: adeoque [per 1.6.] & ratio ipſius AΓ ad ΓK data eſt. & quoniam ΓΘ ipſi EH æquale eſt; eſtque etiam æquiangulum: igitur [per 14.6.] ipſorum ΓΘ, EH latera circa æquales angulos ſunt reciproce proportionalia; eſt igitur ut ΓB ad ZH ita EZ ad ΓK. ratio autem ipſius ΓK ad AΓ data eſt: ergo ut ΓB ad ZH ita eſt EZ ad eam ad quam AΓ rationem habet datam.

Μὴ ἔστω δὴ ἰσογώνιον τὸ ΑΒ τῷ ΕΗ. καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΓΒ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Γ, τῇ ὑπὸ ΕΖΗ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΛΓΒ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ παραλληλόγραμμον ΓΜ. ἐπεὶ οὖν λόγος ἐστὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΕΗ δοθείς, ἴσον δὲ τὸ ΓΔ τῷ ΓΜ· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΓΜ πρὸς τὸ ΕΗ δοθείς. καὶ ἐστὶν ἴση ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΕΖΗ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΜ τῷ ΕΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ἣν ὁ ΑΓ λόγον ἔχει δεδομένον. τῆς δὲ ΓΑ πρὸς τὴν ΓΛ λόγος ἐστὶ δοθείς· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΖΗ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ἣν ἡ ΑΓ λόγον ἔχει δεδομένον.



Non ſit autem AB ipſi EH æquiangulum. & [per 23.1.] conſtituatur ad rectam ΓB, & datum in ea punctum Γ, angulo EZH æqualis angulus ΛΓB; compleaturq; parallelogrammum ΓM. quoniam itaque [ex hyp.] ratio ipſius ΓΔ ad EH data eſt; eſt autem [per 35.1.] ΓΔ æquale ipſi ΓM: ipſius igitur ΓM ad EH data eſt ratio. æqualis autem [per conſtr.] eſt angulus ΛΓB angulo EZH; ideoque [per 29. & 34.1.] æquiangulum eſt ΓM ipſi EH: ergo [per part. prior. hujus] ut ΓB ad ZH ita eſt EZ ad eam ad quam recta AΓ habet rationem datam. ratio autem ipſius ΓΛ ad ΓΛ eſt data: ergo ut ΓB ad ZH ita eſt EZ ad eam ad quam recta AΓ habet rationem datam.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οε'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ δεδομένον, ἤτοι ὑπὸ ἴσαις γωνίαις, ἢ ἐν ἀνίσοις μὲν δεδομέναις δέ· ἔσται ὡς ἡ ὑπὸ πρώτης πλευρὰ πρὸς τὴν ὑπὸ δευτέρης πλευρὰν οὕτως ἡ ἑτέρα ὑπὸ δευτέρης πλευρὰ πρὸς ἣν ἡ λοιπὴ ὑπὸ πρώτης πλευρὰ λόγον ἔχει δεδομένον.

PROP. LXXV.

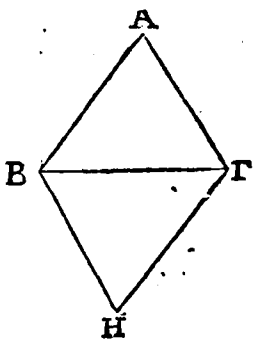
Si duo triangula ad invicem habeant rationem datam, aut in angulis æqualibus, aut inæqualibus quidem ſed tamen datis; erit ut primi latus ad ſecundi latus ita alterum ſecundi latus ad eam rectam ad quam reliquum primi latus rationem datam habet.

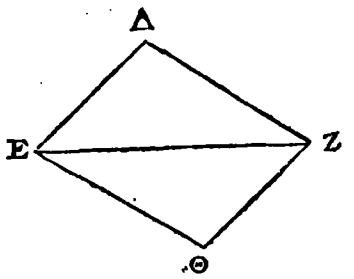
Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα δεδομένον, καὶ ἔστωσαν αἱ πρὸς τοῖς Α, Δ γωνίαι, ἤτοι ἴσαι, ἢ ἄνισοι μὲν δεδομέναι δέ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν

SInt duo triangula ABΓ, ΔEZ, quæ ad invicem habeant rationem datam; ſintque anguli ad puncta A, Δ æquales, aut inæquales quidem ſed tamen dati: dico ut AB ad ΔE

ita esse Δ Z ad eam ad quam recta A Γ habet rationem datam.

Compleantur enim parallelogramma A H, Δ Θ. & quoniam ratio trianguli A B Γ ad triangulum Δ E Z data est: igitur [per 41. 1.] parallelogrammi A H ad parallelogrammum Δ Θ ratio est data. quoniam igitur duo sunt parallelogramma habentia ad invicem rationem datam, aut in angulis æqualibus, aut inæqualibus quidem sed tamen datis: est igitur [per 74. dat.] ut A B ad Δ E ita Δ Z ad eam ad quam recta A Γ habet rationem datam.





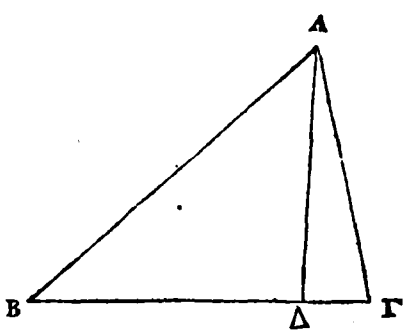
Συμπεπληρώσθω γὰρ τὸ A H, Δ Θ παραλληλόγραμμα. ἔστι δὲ καὶ λόγος ἐστὶ τοῦ A B Γ τριγώνου πρὸς τὸ Δ E Z δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τοῦ A H παραλληλογράμμου πρὸς τὸ Δ Θ παραλληλόγραμμον δοθείς. ἐπεὶ οὖν δύο παραλληλόγραμμά εἰσι πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα δεδομένον, ἤτοι ἐν ἴσαις γωνίαις, ἢ ἐν ἀνίσοις μὲν δεδομέναις δέ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ A B πρὸς τὴν Δ E οὕτως ἡ Δ Z πρὸς ἣν ἡ A Γ λόγον ἔχει δεδομένον.

PROP. LXXVI.

Si à trianguli ſpecie dati vertice recta perpendicularis agatur ad baſim; acta recta habebit ad baſim rationem datam.

SIT triangulum A B Γ ſpecie datum, & agatur à puncto A in baſim B Γ perpendicularis A Δ: dico rationem ipſius A Δ ad B Γ datam eſſe.

Quoniam enim datur triangulum A B Γ ſpecie: angulus igitur A B Δ [per 3. def. dat.] datus eſt. angulus autem B Δ A datus eſt: quare & [per 32. 1. & 4. dat.] reliquus B A Δ datus eſt: ergo [per 40. dat.] triangulum A B Δ ſpecie datum eſt: quare [per 3. def. dat.] ratio ipſius B A ad A Δ data eſt. eſt autem [ex hyp.] & ratio ipſius A B ad B Γ data: igitur [per 8. dat.] ratio ipſius A Δ ad B Γ data eſt.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ οϛ'.

Ἐὰν τριγώνου δεδομένου τῷ εἴδει ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὴν βάσιν λόγον ἕξει δεδομένον.

Ἔστω τρίγωνον δεδομένον τῷ εἴδει τὸ A B Γ, οὗ ἤχθω ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὴν B Γ κάθετος ἡ A Δ· λέγω ὅτι λόγος ἐστὶ τῆς A Δ πρὸς τὴν B Γ δοθείς.

Ἐπεὶ γὰρ δέδοται τὸ A B Γ τρίγωνον τῷ εἴδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ A B Δ γωνία. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ B Δ A δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ B A Δ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ A B Δ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς B A πρὸς τὴν A Δ δοθείς. ἔστι δὲ καὶ τῆς A B πρὸς τὴν B Γ λόγος δοθείς· καὶ τῆς A Δ ἄρα πρὸς τὴν B Γ λόγος ἐστὶ δοθείς.

PROP. LXXVII.

Si duæ figuræ ſpecie datæ ad invicem habeant rationem datam; quodlibet etiam latus unius harum figurarum ad quodlibet latus alterius rationem datam habebit.

DUÆ enim figuræ A B Γ, Δ E Z ſpecie datæ ad invicem habeant rationem datam: dico latus quodcunque ipſius A B Γ ad latus quodcunque ipſius Δ E Z rationem datam habere.

Deſcribantur enim [per 46. 1.] à rectis B Γ, E Z quadrata B H, E Θ. quoniam vero ab ea-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οζ'.

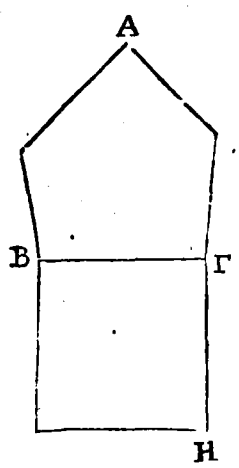
Ἐὰν δύο εἴδη δεδομένα τῷ εἴδει πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ δεδομένον, ἡ μία πλευρὰ ὁποιασοῦν εἴδους τῶν εἰδῶν πρὸς ὁποιανοῦν τοῦ ἑτέρου λόγον ἕξει δεδομένον.

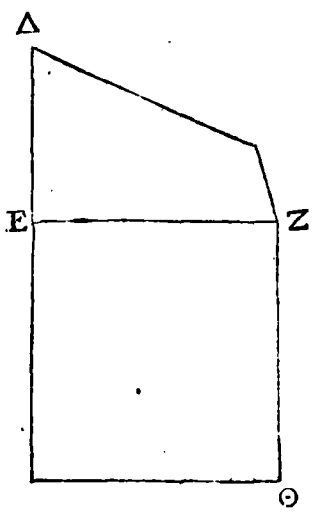
Δύο γὰρ εἴδη τὰ A B Γ, Δ E Z δεδομένα τῷ εἴδει πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω δεδομένον· λέγω ὅτι ἡ μία τοιαδὴ ὁποιασοῦν τοῦ A B Γ πρὸς μίαν τοιαδὴ ὁποιανοῦν τῶν Δ E Z λόγον ἕξει δεδομένον.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῶν B Γ, E Z τετράγωνα τὰ B H, E Θ. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐ-

θείας

θείας τὸ ΒΓ δύο εἴδη ἀναγέγραπται ἃ ἔτυχεν δεδομένα τῷ εἴδει τὰ ΑΒΓ, ΒΗ· λόγος ἄρα τοῦ ΑΒΓ πρὸς τὸ ΒΗ δοθείς. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῦ ΔΕΖ πρὸς τὸ ΕΘ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ οὖν τοῦ ΑΒΓ πρὸς τὸ ΔΕΖ λόγος ἐστὶ δοθείς, ἀλλὰ τοῦ μὲν ΑΒΓ πρὸς τὸ ΒΗ λόγος ἐστὶ δοθείς, τοῦ δὲ ΔΕΖ πρὸς τὸ ΕΘ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΒΗ ἄρα πρὸς τὸ ΕΘ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τὸ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ λόγος ἐστὶ δοθείς.





dem rectæ ΒΓ duæ quædam figuræ ſpecie datæ deſcriptæ ſunt, nempe ΑΒΓ, ΒΗ; ratio igitur ipſius ΑΒΓ ad ΒΗ [per 49. dat.] data eſt. ſimiliter quoque ipſius ΔΕΖ ad ΕΘ data eſt ratio. quoniam itaque [ex hyp.] ratio ipſius ΑΒΓ ad ΔΕΖ data eſt; atque etiam data eſt ratio ipſius ΑΒΓ quidem ad ΒΗ, ipſiuſque ΔΕΖ ad ΕΘ: ipſius quoque ΒΗ ad ΕΘ [per 8. dat.] ratio eſt data. quare [per 54. dat.] & ratio ipſius ΒΓ ad ΕΖ data eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ οη'.

Ἐὰν δοθὲν εἶδος πρός τι ὀρθογώνιον λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ μία πλευρὰ πρὸς μίαν πλευρὰν λόγον ἔχῃ δοθέντα· δίδοται τὸ ὀρθογώνιον τῷ εἴδει.

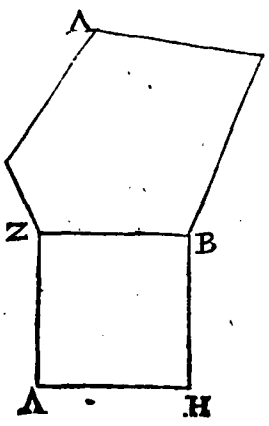
PROP. LXXVIII.

Si data figura habeat ad aliquod rectangulum rationem datam, atque habeat etiam unum latus ad unum latus rationem datam; rectangulum ipſum ſpecie datum eſt.

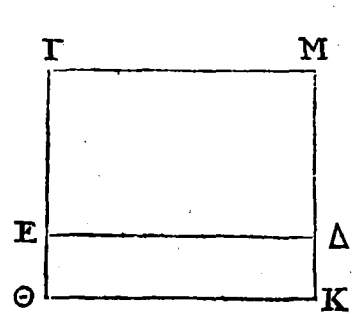
Δοθὲν γὰρ εἶδος τὸ ΑΖΒ πρός τι ὀρθογώνιον τὸ ΓΔ λόγον ἐχέτω δεδομένον, καὶ ἔστω λόγος τοῦ ΖΒ πρὸς τὴν ΕΔ δοθείς· λέγω ὅτι δέδοται τὸ ΓΔ τῷ εἴδει.

ETenim data figura ΑΖΒ ad aliquod rectangulum ΓΔ habeat rationem datam, & ſit ratio ipſius ΖΒ ad ΕΔ data: dico rectangulum ΓΔ ſpecie datum eſſe.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΖΒ τετράγωνον τὸ ΖΗ, καὶ παραβεβλήθω παρὰ τὴν ΕΔ τῷ ΖΗ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΕΚ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΓΕ τῇ ΕΘ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΔ τῇ ΔΚ. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας τοῦ ΖΒ δύο εὐθύγραμμα ἃ ἔτυχεν δεδομένα τῷ εἴδει ἀναγέγραπται τὰ ΑΖΒ, ΖΗ· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ΑΖΒ πρὸς τὸ ΖΗ δοθείς. τοῦ δὲ ΑΖΒ πρὸς τὸ ΓΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ΓΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἀλλὰ τὸ ΖΗ τῷ ΕΚ ἐστιν ἴσον· καὶ τοῦ ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ΕΚ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ καὶ ἰσογώνιον τὸ ΖΗ τῷ ΕΚ, ἐστὶ γὰρ καὶ ὀρθογώνιον· ἀντιπεπόνθασιν ἄρα αὐτῶν αἱ πλευραί, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΖΛ. λόγος δὲ τοῦ ΖΒ πρὸς

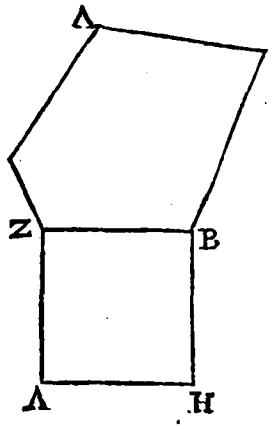


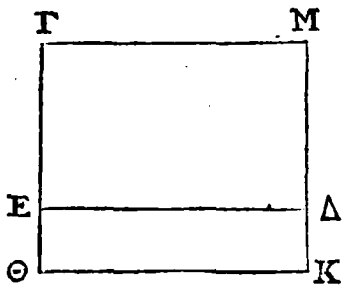
Deſcribatur enim [per 46. 1.] à recta ΖΒ quadratum ΖΗ; dein [per 45. 1.] applicetur ad rectam ΕΔ ipſi ΖΗ æquale parallelogrammum ΕΚ, & conſtituatur. ita ut in directum ſit ΓΕ ipſi ΕΘ: eſt igitur in directum ΜΔ ipſi ΔΚ. quoniam vero ab eadem recta ΖΒ duo quædam rectilinea ΑΖΒ, ΖΗ ſpecie data deſcripta ſunt: igitur [per 49. dat.] ratio ipſius ΑΖΒ ad ΖΗ data eſt. ratio autem ipſius ΑΖΒ ad ΓΔ [ex hyp.] data eſt: quare [per 8. dat.] & ratio ipſius ΖΗ ad ΓΔ data eſt. ſed [per conſtr.] ΖΗ ipſi ΕΚ æquale eſt: ipſius igitur ΓΔ ad ΕΚ data eſt ratio. cumque ΖΗ ipſi ΕΚ æquale ſit & æquiangulum; quippe rectangulum etiam eſt: eorum igitur latera [per 14.6.] reciproce proportionalia ſunt, eſtque ut ΖΒ ad ΕΔ ita ΕΘ ad ΖΛ. ratio autem ipſius ΖΒ ad ΕΔ



data

data ſupponitur: quare & ratio ipſius ΕΘ ad ΖΛ data eſt. eſt autem [per 1. 6.] & ratio ipſius ΕΘ ad ΓΕ data: igitur [per 8. dat.] & ipſius ΓΕ ad ΖΛ ratio eſt data. æqualis autem eſt ΛΖ ipſi ΖΒ; eſt enim quadratum: igitur ipſius ΛΖ ad ΕΔ data eſt ratio: igitur [per 8. dat.] & ratio ipſius ΓΕ ad ΕΔ data eſt. & [ex hyp.] eſt angulus ad Ε rectus: igitur [per 3. def.dat.] ΓΔ ſpecie datum eſt.





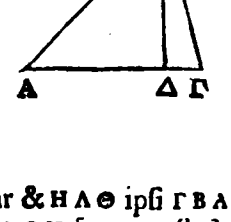
τῷ ΕΔ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ΕΘ πρὸς τὸ ΖΛ δοθείς. τοῦ δὲ ΕΘ πρὸς τὴν ΓΕ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΓΕ ἄρα πρὸς τὴν ΖΛ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἴση δὲ ἡ ΛΖ τῇ ΖΒ, τετράγωνον γάρ ἐστι· τοῦ ΛΖ ἄρα πρὸς τὸ ΕΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· τοῦ ΓΕ ἄρα πρὸς τὴν ΕΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ Ε γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΓΔ τῷ εἴδει.

PROP. LXXIX.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, ab æqualibus autem angulis ad baſes perpendiculares rectæ agantur, ſitque ut primi trianguli baſis ad perpendicularem ita & alterius trianguli baſis ad perpendicularem; triangula ipſa æquiangula ſunt.

SInt duo triangula ΑΒΓ, ΘΖΗ æquales habentia angulos ad puncta Β, Ζ, & agantur à punctis Β, Ζ perpendiculares ΒΔ, ΚΖ; ſit autem ut ΑΓ ad ΒΔ ita ΘΗ ad ΚΖ: dico triangulum ΑΒΓ triangulo ΘΖΗ æquiangulum eſſe.

Circumſcribatur enim [per 5. 4.] circulus circa triangulum ΘΖΗ, cujus ſegmentum ſit ΘΖΗ; dein conſtituatur ad rectam ΘΗ, & ad punctum in ea Θ, angulo ΓΑΒ æqualis angulus ΗΘΛ, & connectantur ΖΛ, ΛΗ, denique agatur perpendicularis ΛΜ. & quoniam æqualis eſt [per 21. 3.] angulus ΗΖΘ angulo ΘΛΗ, in eodem enim ſegmento circuli conſiſtunt; atq; eſt [ex hyp.] ΗΖΘ æqualis ΓΒΑ: igitur & ΗΛΘ ipſi ΓΒΑ eſt æqualis. angulus autem ΛΘΗ [per conſtr.] angulo ΒΑΓ æqualis eſt; reliquus igitur angulus ΑΗΘ reliquo angulo ΒΓΑ æqualis eſt: ergo [per 4. 6.] triangulum ΑΒΓ triangulo ΘΛΗ ſimile eſt. & ductæ ſunt perpendiculares ΒΔ, ΛΜ: quare [per 4. & 20. 6.] ut ΑΓ ad ΒΔ ita ΘΗ ad ΛΜ. erat vero ut ΑΓ ad ΒΔ ita ΘΗ ad ΖΚ; ita enim ſupponitur: ergo ut ΘΗ ad ΜΛ ita Θ, Η ad ΖΚ: ergo [per 9. 5.] æqualis eſt ΖΚ ipſi ΛΜ. eſt autem [per 28. 1.] & ΖΚ parallela ipſi ΛΜ: quare [per 33. 1.] parallela eſt ΖΛ

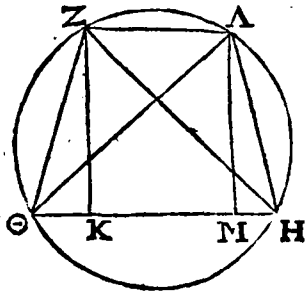


ΠΡΟΤΑΣΙΣ οθ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὰς δὲ ἀπὸ τῶν ἴσων γωνιῶν ἐπὶ τὰς βάσεις καθετοι εὐθεῖαι γραμμαὶ ἀχθῶσιν, ἡ δὲ ὡς ἡ ὑπὸ πρώτην περιέχουσα βάσις πρὸς τὴν καθετον οὕτως ἡ τῆς ἑτέρας περιέχουσα βάσις πρὸς τὴν καθετον· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΘΖΗ ἴσας ἔχοντα γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Β, Ζ, καὶ ἤχθωσαν δύο τῶν Β, Ζ καθετοι αἱ ΒΔ, ΖΚ, ἔστω δὲ ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΖΚ· λέγω ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τρίγωνον ΑΒΓ τῷ ΘΖΗ τριγώνῳ.

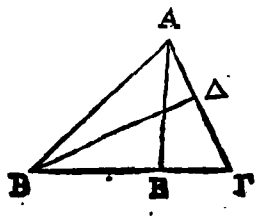
Περιγεγράφθω γὰρ περὶ τὸ ΘΖΗ τρίγωνον κύκλος ὅ τμῆμα ἔστω ΘΖΗ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΘΗ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ, τῇ ὑπὸ ΓΑΒ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΘΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΛ, ΛΗ, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΛΜ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΖΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΛΗ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ εἰσὶ τμήματι τοῦ κύκλου, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΗΖΘ τῇ ὑπὸ ΓΒΑ ἴση· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΗΛΘ τῇ ὑπὸ ΓΒΑ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΛΘΗ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΗΘ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἐστὶν ἴση· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΘΛΗ τριγώνῳ. καὶ κάθετοι ἠγμέναι εἰσὶν αἱ ΒΔ, ΛΜ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΛΜ. ἦν δὲ ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΖΚ, ὑποκειται γάρ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΜΛ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΖΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΚ τῇ ΛΜ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΚ τῇ ΛΜ ὠδαλλήλος· καὶ ἡ ΖΛ ἄρα τῇ

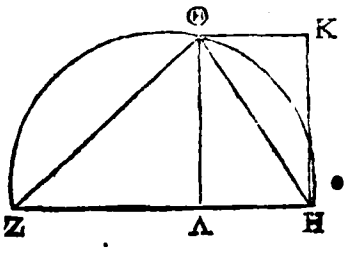


ΘΗ

ΘΗ ἑκατέρῳ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐφαπτομένη ἐστὶν ὁ ΖΗΘ κύκλος. ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Η, καὶ ἀπὸ τοῦ Η τῇ ΖΘ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΚ· θέσει ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΗΚ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΗ· θέσει ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΗ θέσει ἐστὶ καὶ τὸ Η δίδοται, δέδοται καὶ τὸ Ζ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΗ θέσει ἐστὶ καὶ ἡ ΗΚ θέσει ἐστίν, δέδοται ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΖΗ, ΗΚ τῷ εἴδει· ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΗ, ΗΚ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ· δέδοται ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ δοθείς· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΕ, ἑκάτερον γὰρ αὐτῶν διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΕ δοθείς. τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· τοῦ ἄρα ΒΓ πρὸς τὴν ΑΕ λόγος ἐστὶ δοθείς. συνεστάθω δὴ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΖΗ, καὶ γεγράφθω δὴ τῆς ΖΗ τμῆμα κύκλου τὸ ΖΘΗ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ ΒΑΓ. δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ἐν τῷ ΖΘΗ τμήματι γωνία· θέσει ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΘΗ τμῆμα. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Η τῇ ΖΗ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΗΚ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΚ. καὶ πεπλήσθω ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΑΕ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΚ. λόγος δὲ τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΑΕ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΖΗ πρὸς τὴν ΗΚ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ ΖΗ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΗΚ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καὶ δοθὲν ἐστὶ τὸ Η· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Κ. ἤχθω διὰ τοῦ Κ τῇ ΖΗ παράλληλος ἡ ΚΘ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ. θέσει δὲ καὶ ἡ ΖΗ· δέδοται ἄρα τὸ Θ. θέσει δὲ καὶ τὸ Ζ· δέδοται ἄρα καὶ ἡ ΖΘ θέσει. καὶ ἐπεὶ δέδοται τὸ Η, καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΖΗΚ, δέδοται καὶ ἡ ΖΗ μέγεθος· καὶ θέσει δέδοται· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΘ μεγέθει. ἔστι δὲ καὶ θέσει· δέδοται ἄρα τὸ Θ. ἀλλὰ καὶ τὸ Ζ· δέδοται ἄρα καὶ ἡ ΖΘ θέσει καὶ μεγέθει. καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΘ θέσει ἐστὶ καὶ ἑκάτερον τῶν Ζ, Θ δέδοται, δέδοται ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΖΑ, ΘΑ θέσει καὶ μεγέθει. καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΑ θέσει ἐστὶ καὶ τὸ Ζ δέδοται, δέδοται καὶ ἡ ΖΑ θέσει καὶ μεγέθει. καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΑ θέσει ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ θέσει ἐστίν, δέδοται ἄρα καὶ τὸ Α θέσει καὶ μεγέθει. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ θέσει ἐστὶ καὶ τὸ Α δέδοται, δέδοται καὶ ἡ ΑΒ θέσει καὶ μεγέθει. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ θέσει ἐστὶ καὶ τὸ Β δέδοται, δέδοται καὶ τὸ Β θέσει καὶ μεγέθει. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΑ θέσει ἐστὶ καὶ ἡ ΑΓ θέσει ἐστίν, δέδοται ἄρα καὶ τὸ Γ θέσει καὶ μεγέθει. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΓ θέσει ἐστὶ καὶ τὸ Β δέδοται, δέδοται καὶ ἡ ΒΓ θέσει καὶ μεγέθει. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΓ θέσει ἐστὶ καὶ τὸ Γ δέδοται, δέδοται καὶ ἡ ΓΑ θέσει καὶ μεγέθει. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΑ θέσει ἐστὶ καὶ τὸ Α δέδοται, δέδοται καὶ ἡ ΑΔ θέσει καὶ μεγέθει. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΔ θέσει ἐστὶ καὶ τὸ Δ δέδοται, δέδοται καὶ τὸ Δ θέσει καὶ μεγέθει. καὶ ἐπεὶ ἡ ΔΑ θέσει ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ θέσει ἐστίν, δέδοται ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία θέσει καὶ μεγέθει. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΔ θέσει ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ θέσει ἐστίν, δέδοται ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ γωνία θέσει καὶ μεγέθει. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΑ θέσει ἐστὶ καὶ ἡ ΑΔ

autem datum eſt ſegmentum ZΘH: ergo [per 25. dat.] punctum Θ datum eſt. connectantur autem ΘZ, ΘH, & agatur perpendicularis ΘΛ: ergo [per 30.dat.] ΘΛ poſitione data eſt. datum autem eſt punctum Θ, & unumquodque punctorum Z, H: igitur [per 26.dat.] unaquæque rectarum ΘZ, ZH, ΘH poſitione & magnitudine data eſt: quare triangulum ΘZH ſpecie datum eſt. & quoniam [per conſtr.] eſt ut ΒΓ ad ΑΕ ita ZH ad HK, eſtque [per 34.1.] HK æqualis ipſi ΛΘ: erit igitur ut ΒΓ ad ΑΕ ita ZH ad ΛΘ. eſt autem [per conſtr.] angulus ΒΑΓ æqualis angulo ZΘH: triangulum igitur ΑΒΓ [per 79. dat.] triangulo ΘZH æquiangulum eſt. triangulum autem ZΘH ſpecie datum eſt: quare & triangulum ΑΒΓ datum eſt.



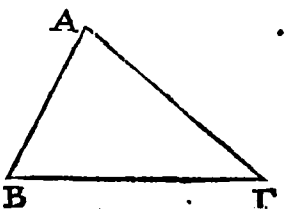


δὲ καὶ τὸ ΖΘΗ τρίγωνον· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Θ σημεῖον. ἐπεζεύχθωσαν δὲ αἱ ΘΖ, ΘΗ, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΘΛ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΛ. ἔστι δὲ τὸ Θ σημεῖον δοθέν, ἑκάτερον τῶν Ζ, Η· δέδοται ἄρα ἑκάστη τῶν ΘΖ, ΖΗ, ΘΗ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει· δέδοται ἄρα τὸ ΘΖΗ τρίγωνον τῷ εἴδει. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΑΕ ἕτως ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΚ, ἴση δὲ ἡ ΗΚ τῇ ΛΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΑΕ ἕτως ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΛΘ. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΘΗ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΘΖΗ τριγώνῳ. δέδοται δὲ τὸ ΖΘΗ τρίγωνον τῷ εἴδει· δέδοται ἄρα καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.

ALITER.

Sit triangulum ΑΒΓ quod datum angulum habeat ad Α; ratio autem ejus quod continetur ſub ΒΑ, ΑΓ ad quadratum rectæ ΒΓ ſit data: dico triangulum ΑΒΓ ſpecie datum eſſe.

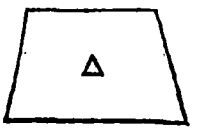
Quoniam enim datus eſt angulus ΒΑΓ, ſpatium illud, quo quadratum utriuſque ſimul ΒΑΓ excedit quadratum rectæ ΒΓ, ad triangulum ΑΒΓ [per 67. dat.] rationem datam habet. ſit autem Δ ſpatium, quo quadratum utriuſque ſimul ΒΑΓ excedit quadratum rectæ ΒΓ: ergo ratio ipſius Δ ad triangulum ΑΒΓ data eſt. trianguli autem ΑΒΓ ad id quod continetur ſub ΒΑ, ΑΓ [per 66.dat.] ratio eſt data; quia datus eſt angulus ΒΑΓ: ergo [per 8. dat.] ratio ſpatii Δ ad id quod continetur ſub ΒΑ, ΑΓ data eſt. ejus autem quod continetur ſub ΒΑ, ΑΓ ad quadratum rectæ ΒΓ [ex hyp.] data eſt ratio: quare [per 8. dat.] & ratio ſpatii Δ ad quadratum rectæ ΒΓ data eſt: igitur componendo [per 6. dat.] ſpatii Δ cum quadrato rectæ ΒΓ ad quadratum rectæ ΒΓ ratio eſt data. ſed [per conſtr.] ſpatium Δ una cum quadrato rectæ ΒΓ eſt ipſum quadratum utriuſque ſimul ΒΑΓ: quare ratio quadrati utriuſque ſimul ΒΑΓ ad quadratum rectæ ΒΓ data eſt: adeoque [per 54.dat.] & ratio utriuſque ſimul ΒΑΓ ad ΒΓ data eſt. datus etiam eſt [ex hyp.] angulus ΒΑΓ: triangulum igitur ΑΒΓ [per 45.dat.] ſpecie datum eſt.



ΑΛΛΩΣ.

Εσω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, δεδομένην ἔχον γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Α, λόγος δὲ ἔσω τοῦ ὑπὸ ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ δοθείς· λέγω ὅτι δέδοται τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τὸ εἴδει.

Επεὶ γὰρ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία· ᾧ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ἐκεῖνο τὸ χωρίον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον λόγον ἔχει δεδομένον. ᾧ δή ἐστι μεῖζον τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ἔστω τὸ Δ χωρίον· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ Δ χωρίου πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον δοθείς. τοῦ δὲ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. διότι τὸ δοθῆναι εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· καὶ τοῦ Δ ἄρα χωρίου πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. τοῦ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τοῦ Δ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε συνθέντι λόγος ἄρα τοῦ Δ χωρίου μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἐστὶ δοθείς. ἀλλὰ τὸ Δ χωρίον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ ἐστί· λόγος ἄρα τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ δοθείς· ὥστε καὶ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ εἴδει.



PROP. LXXXI.

Si tres rectæ, quæ tribus rectis invicem proportionalibus proportionales fuerint, extremas habuerint in ratione data; medias quoque habebunt in ra-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πα'.

Εὰν τρεῖς εὐθεῖαι, ἀνάλογον οὖσαι τρισὶν εὐθείαις ἀνάλογον οὔσαις, τὰς ἄκρας ἐν δεδομένῳ λόγῳ ἔχουσιν· καὶ τὰς μέσας ἐν δεδομένῳ λόγῳ

ἔξουσιν.

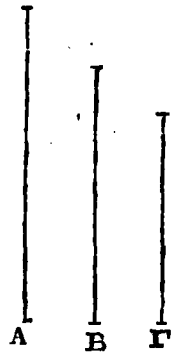
*

ἔξῃσιν. ϗ ἐὰν ἡ ἄκρα πρὸς τὴν ἄκραν λόγον ἔχῃ δεδομένον, ϗ ἡ μέση πρὸς τὴν μέσην· ϗ ἡ λοιπὴ ἄκρα πρὸς λοιπὴν ἄκραν λόγον ἕξει δεδομένον.

tione data. & ſi extrema ad extremam, & media ad mediam, habeat rationem datam; & reliqua extrema ad reliquam extremam rationem datam habebit.

Τρεῖς γὰρ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσται αἱ Α, Β, Γ τρισὶν εὐθείαις ἀνάλογον ἔσαις ταῖς Δ, Ε, Ζ, τὰς ἄκρας ἐν δεδομένῳ λόγῳ ἐχέτωσαν, ϗ τὴν μὲν Α πρὸς τὴν Δ λόγος ἔστω δοθείς, τὴν δὲ Γ πρὸς τὴν Ζ· λέγω ὅτι ϗ τὴν Β πρὸς τὴν Ε λόγος ἐστὶ δοθείς.

Επεὶ γὰρ τὴν μὲν Α πρὸς τὴν Δ, τὴν δὲ Γ πρὸς τὴν Ζ λόγος ἐστὶ δοθείς· λόγος ἄρα τοῦ ὑπὸ τῶν Α, Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ δοθείς. ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Β, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε· λόγος ἄρα ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε δοθείς· ὥστε ϗ τὴν Β πρὸς τὴν Ε λόγος ἐστὶ δοθείς.



Εστω δὲ πάλιν τὴν μὲν Α πρὸς τὴν Δ λόγος δοθείς, τὴν δὲ Β πρὸς τὴν Ε λόγος ἔστω δοθείς· λέγω ὅτι ϗ τὴν Γ πρὸς τὴν Ζ λόγος ἐστὶ δοθείς.

Επεὶ γὰρ τὴν μὲν Α πρὸς τὴν Δ, τὴν δὲ Β πρὸς τὴν Ε λόγος ἐστὶ δοθείς· λόγος ἄρα ἐστὶ ϗ τοῦ ὑπὸ τῶν Α, Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ζ δοθείς. ϗ μιᾶς πλευρᾶς τῆς Α πρὸς μίαν πλευρὰν τὴν Δ λόγος ἐστὶ δοθείς· ϗ λοιπῆς ἄρα τῆς Γ πρὸς λοιπὴν τὴν Ζ λόγος ἐστὶ δοθείς.

TRes enim rectæ A, B, Γ, proportionales tribus rectis proportionalibus Δ, E, Z, extremas habeant in ratione data; ſit nempe ratio ipſius A quidem ad Δ data, ipſius autem Γ ad Z ratio data: dico ipſius quoque B ad E rationem eſſe datam.

Quoniam enim ipſius A ad Δ, ipſiuſque Γ ad Z ratio eſt data: igitur [per 70.dat.] ratio ejus quod continetur ſub A, Γ ad id quod continetur ſub Δ, Z data eſt. ſed [per 17.6.] ei quod continetur ſub A, Γ æquale eſt quadratum rectæ B; atque ei quod ſub Δ, Z æquale eſt quadratum rectæ E: ergo ratio quadrati rectæ B ad quadratum rectæ E data eſt: ideoque [per 54.dat.] ratio rectæ B ad rectam E data eſt.

SIT vero rurſus ratio ipſius A ad Δ, ipſiuſque B ad E data: dico ipſius quoque Γ ad Z rationem datam eſſe.

Quoniam enim ratio ipſius A ad Δ, & ipſius B ad E data eſt: ratio igitur quadrati rectæ B ad quadratum rectæ E [per 50. dat.] data eſt. ſed [per 17.6.] quadrato rectæ B æquale eſt id quod continetur ſub A, Γ; & quadrato rectæ E æquale eſt id quod continetur ſub Δ, Z: igitur ratio ejus quod continetur ſub A, Γ ad id quod continetur ſub Δ, Z data eſt. ratio autem unius lateris A ad unum latus Δ [ex hyp.] data eſt: quare [per 68.dat.] & ratio reliqui lateris Γ ad reliquum latus Z data eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πϚ'.

Εὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν· ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν λόγον ἔχει δεδομένον, οὕτως ἡ τρίτη πρὸς τὴν τετάρτην λόγον ἔχει δεδομένον.

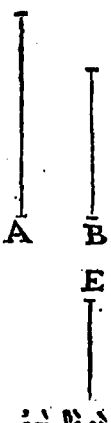
PROP. LXXXII.

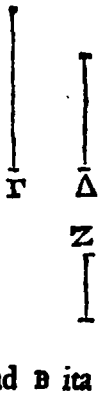
Si quatuor rectæ proportionales fuerint; erit ut prima ad eam ad quam ſecunda rationem habet datam, ita tertia ad eam ad quam quarta rationem habet datam.

Εστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, Δ, ϗ ἔστω ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· λέγω ὅτι ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β λόγον ἔχει δεδομένον οὕτως ἡ Γ πρὸς ἣν ἡ Δ λόγον ἔχει δεδομένον.

Εστω γὰρ πρὸς ἣν ἡ Β λόγον ἔχει δεδομένον ἡ Ε, ϗ πεποιήσθω ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Ε οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ. λόγος δὲ τῆς Β πρὸς τὴν Ε δοθείς· λόγος ἄρα ϗ τῆς Δ πρὸς τὴν Ζ δοθείς. ϗ ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἐστὶ δὲ ϗ

SInt quatuor rectæ proportionales A, B, Γ, Δ, ſitque ut A ad B ita Γ ad Δ: dico ut A ad eam ad quam B rationem habet datam ita eſſe Γ ad eam ad quam Δ rationem datam habet.





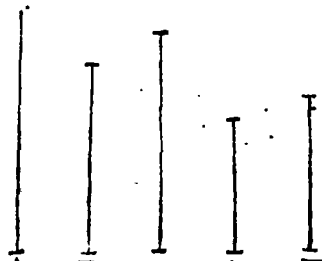
Sit enim E ea ad quam B rationem habet datam; fiatque [per 12.6.] ut B ad E ita Δ ad Z. eſt autem [ex hyp.] ratio ipſius B ad E data: ergo & ratio ipſius Δ ad Z data eſt. & quoniam eſt ut A ad B ita Γ ad Δ, & eſt etiam [per conſtr.]

ut B ad E ita Δ ad Z: erit igitur ex æquo [per 22.5.] ut A ad E ita Γ ad Z. & [ex hyp.] est E quidem ea ad quam B rationem habet datam; atque Z ea ad quam Δ rationem habet datam: quare ut A ad eam ad quam B rationem habet datam ita est Γ ad eam ad quam Δ rationem habet datam.

PROP. LXXXIII.

Si quatuor rectæ ita ad invicem se habeant, ut tribus ex iis quibuscunque sumptis, & quarta ipsis utcunque accepta ad quam reliqua è quatuor rectis rationem habet datam, proportionales sint quatuor rectæ; erit ut quarta ad tertiam ita secunda ad eam ad quam prima habet rationem datam.

SInt quatuor rectæ A, B, Γ, Δ ita se habentes ad invicem, ut tribus ex iis quibuscunque sumptis A, B, Γ, & quarta ipsis utcunque accepta, quæ sit E, ad quam Δ rationem habet datam, proportionales sint rectæ A, B, Γ, E: dico ut Δ ad Γ ita esse B ad eam ad quam A habet rationem datam.

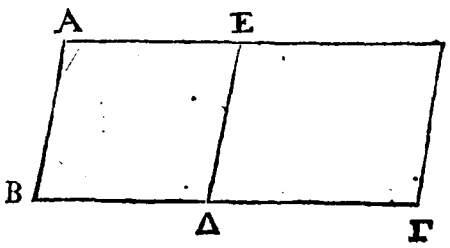


Quoniam enim est [ex hyp.] ut A ad B ita Γ ad E; igitur [per 16.6.] quod continetur sub A, E æquale est ei quod continetur sub B, Γ. quoniam vero [ex hyp.] ratio ipsius E ad Δ data est: igitur [per 1.6.] ratio ejus quod continetur sub A, Δ ad id quod continetur sub A, E data est. quod autem continetur sub A, E æquale est contento sub B, Γ: quare & ratio ejus quod continetur sub A, Δ ad id quod continetur sub B, Γ data est: ergo [per 56.dat.] ut Δ ad Γ ita est B ad eam ad quam A habet rationem datam.

PROP. LXXXIV.

Si duæ rectæ spatium datum comprehendant in angulo dato, sitque altera altera major data; etiam unaquæque ipsarum data erit.

DUÆ enim rectæ AB, BΓ datum spatium AΓ comprehendant in angulo dato ABΓ; sitque ΓB ipsa BA major, data: dico unamquamque rectarum AB, BΓ datam esse.



Quoniam enim ΓB major est quam ipsa BA, data; sit linea data ipsa ΔΓ: igitur [per 2. def.dat.] reliqua ΔB ipsi BA æqualis est. compleatur parallelogrammum AΔ. & quoniam AB æqualis est ipsi BΔ: ratio ipsius AB ad BΔ data est. angulus

ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Ε ὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ· δὶ ἴσε ἄρα ἔσαι ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ε ὕτως ἡ Γ πρὸς τ Ζ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν Ε πρὸς ἣν ἡ Β λόγον ἔχει δεδομένον, ἡ δὲ Ζ πρὸς ἣν ἡ Δ λόγον ἔχει δεδομένον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς ἣν ἡ Β λόγον ἔχει δεδομένον ὕτως ἡ Γ πρὸς ἣν ἡ Δ λόγον ἔχει δεδομένον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πγ'.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ὕτως ἔχωσι πρὸς ἀλλήλας, ὥστε τριῶν ληφθεισῶν ἐξ αὐτῶν ὁποιωνοῦν, καὶ τετάρτης αὐταῖς προσληφθείσης ὡς ἔτυχε πρὸς ἣν ἡ λοιπὴ ἐξ ἀρχῆς τεσσάρων εὐθειῶν λόγον ἔχῃ δεδομένον, ἀνάλογον γίγνεσθαι τὰς τέσσαρας εὐθείας· ἔσαι ὡς ἡ τετάρτη πρὸς τ πρώτην ὕτως ἡ δευτέρα πρὸς ἣν ἡ πρώτη λόγον ἔχει δεδομένον.

Ἐστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ, Δ ὕτως ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας ὥστε τριῶν ὁποιωνοῦν ληφθεισῶν ἐξ αὐτῶν Α, Β, Γ, καὶ τετάρτης αὐταῖς προσληφθείσης ὡς ἔτυχε τ Ε, πρὸς ἣν ἡ Δ λόγον ἔχει δεδομένον, ἀνάλογον εἶναι τὰς Α, Β, Γ, Ε εὐθείας· λέγω ὅτι ὡς ἡ Δ πρὸς τὴν Γ ὕτως ἡ Β πρὸς ἣν ἡ Α λόγον ἔχει δεδομένον.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β ὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τ Α, Ε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Γ. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τ Ε πρὸς τὴν Δ δοθείς· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ τ ὑπὸ τ Α, Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Ε δοθείς. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν Α, Ε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Γ· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ τ ὑπὸ τῶν Α, Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Β, Γ δοθείς· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Δ πρὸς τὴν Γ ὕτως ἡ Β πρὸς ἣν ἡ Α λόγον ἔχει δεδομένον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πδ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δοθὲν χωρίον περιέχωσιν ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ, ἡ δὲ ἑτέρα τ ἑτέρας δοθείσῃ μείζων ᾖ· καὶ ἑκατέρα αὐτῶν ἔσαι δοθεῖσα.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ δοθὲν χωρίον περιεχέτωσαν τὸ ΑΓ ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ ΓΒ τ ΒΑ δοθείσῃ μείζων ἔστω· λέγω ὅτι δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τ ΑΒ, ΒΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΓΒ τ ΒΑ δοθείσῃ μείζων ἐστὶ, δοθεῖσα ἔστω ἡ ΔΓ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΒ τῇ ΒΑ ἴση ἐστί. συμπεπληρώσθω τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· λόγος ἄρα ἐστὶ τ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς. δοθεῖσα

δὲ

δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΑΔ τῷ εἴδει. ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΓ δοθὲν παρὰ δοθεῖσαν τὴν ΔΓ παραβέβληται ὑπερβάλλον εἴδει δεδομένῳ τῷ εἴδει τῷ ΑΔ· δέδοται τὸ πλάτος τῆς ὑπερβολῆς· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΔΓ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΒΓ δοθεῖσά ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ δοθεῖσα· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΒ, ΒΓ δοθεῖσά ἐστι.

vero ΑΒΔ [ex hyp.] datus est: quare ΑΔ specie datum est. quoniam itaque datum spatium ΑΓ ad datam rectam ΔΓ applicatum est, excedens data specie figura ΑΔ: latitudo igitur excessus [per 59. dat.] data est; quare ΒΔ data est. sed & ΔΓ [ex hyp.] data est: ergo [per 3.dat.] & tota ΒΓ data est. data autem est ΑΒ: quare utraque rectarum ΑΒ, ΒΓ data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πε'.

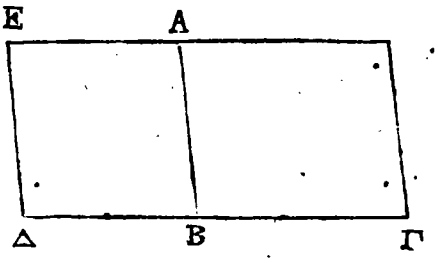
Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δοθὲν χωρίον περιέχωσιν ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ, ἡ δὲ συναμφότερος δοθεῖσα· καὶ ἑκατέρα αὐτῶν ἔσται δοθεῖσα.

Prop. LXXXV.

Si duæ rectæ datum spatium comprehendant in angulo dato, sitque simul utraque data; & earum etiam unaquæque data erit.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ δοθὲν χωρίον τὸ ΑΓ περιεχέτωσαν ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἔστω συναμφότερος ἡ ΑΒΓ δοθεῖσα· λέγω ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΒΓ δοθεῖσά ἐστι.

Διήχθω γὰρ ἡ ΓΒ ἐπὶ τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ διὰ τοῦ Δ τῇ ΒΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΒ τῇ ΒΑ, καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία, ἐπεὶ καὶ ἡ ἐφεξῆς αὐτῇ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΕΒ τῷ εἴδει. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστι συναμφότερος ἡ ΑΒΓ, ἴση δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· δοθεῖσα ἄρα ἡ ΔΓ. ἐπεὶ οὖν δοθὲν τὸ ΑΓ παρὰ δοθεῖσαν τὴν ΔΓ παραβέβληται ἔλλειπον εἴδει δεδομένῳ τῷ εἴδει ΕΒ· δέδοται τὰ πλάτη τῆς ἐλλείμματος· δοθεῖσαι ἄρα εἰσὶν αἱ ΑΒ, ΒΔ. ἀλλὰ καὶ συναμφότερος ἡ ΑΒΓ δοθεῖσά ἐστι· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΒΓ.



Producatur enim ΓΒ ad punctum Δ, & ponatur ipsi ΑΒ æqualis ΒΔ, atque per punctum Δ ipsi ΒΑ parallela agatur ΔΕ, compleaturque ΑΔ. quoniam igitur æqualis est ΔΒ ipsi ΒΑ, atque datus est angulus ΑΒΔ; nam qui est ipsi deinceps [ex hyp.] datus est: parallelogrammum igitur ΕΒ specie datum est. & quoniam data est [ex hyp.] simul utraque ΑΒΓ; estque [per constr.] ΑΒ æqualis ipsi ΒΔ: recta igitur ΔΓ [per 3.dat.] data est. quoniam itaque ad datam rectam ΔΓ datum spatium ΑΓ applicatum est, deficiens data specie figura ΕΒ: igitur [per 58. dat.] latitudines defectus datæ sunt: quare rectæ ΑΒ, ΒΔ datæ sunt. at vero [ex hyp.] utraque simul ΑΒΓ data est: unaquæque igitur rectarum ΑΒ, ΒΓ [per 4.dat.] data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πς'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δοθὲν χωρίον περιέχωσιν ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μιᾶς τῶν ἀπὸ τῆς ἑτέρας, δοθέντι, μεῖζον ἢ ἐν λόγῳ· καὶ ἑκατέρα αὐτῶν ἔσται δοθεῖσα.

Prop. LXXXVI.

Si duæ rectæ datum spatium comprehendant in angulo dato, quadratum autem unius quadrato alterius majus sit, dato, quam in ratione; & utraque ipsarum data erit.

Ἢ ὡς ἐν ἄλλῳ ἀντιτύπῳ ἀναγεγράφεται.

Vel ut legitur in alio exemplari.

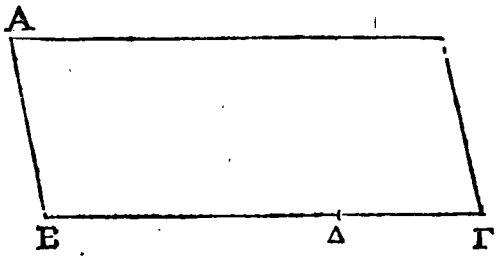
Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δοθὲν χωρίον περιέχωσιν ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ, δυνήσεται δὲ ἡ ἑτέρα τῶν ἑτέρας, δοθέντι, μεῖζον ἢ ἐν λόγῳ· καὶ ἑκατέρα αὐτῶν δοθεῖσα ἔσται.

Si duæ rectæ datum spatium comprehendant in angulo dato, possit autem altera altera majus, dato, quam in ratione; & utraque ipsarum data erit.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ δοθὲν χωρίον περιεχέτωσαν τὸ ΑΓ ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ, δοθέντι, μεῖζον ἔστω ἢ ἐν λόγῳ· λέγω ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΒΓ δοθεῖσά ἐστι.

DUÆ enim rectæ ΑΒ, ΒΓ datum spatium ΑΓ comprehendant in angulo dato ΑΒΓ, & utraque simul rectarum ΑΒΓ data sit: dico unamquamque rectarum ΑΒ, ΒΓ datam esse.

Quoniam enim quadratum rectæ ΓΒ quadrato rectæ ΒΑ majus eſt, dato, quam in ratione; auferatur datum, ſitque id quod continetur ſub ΓΒ, ΒΔ: ergo [per 11.def.dat.] ratio reliqui, quod nempe continetur ſub ΒΓ, ΓΔ, ad quadratum rectæ ΑΒ data eſt. quoniam vero datum eſt id quod continetur ſub ΑΒ, ΒΓ, atque etiam illud quod continetur ſub ΓΒ, ΒΔ datum: ratio igitur ejus quod continetur ſub ΑΒ, ΒΓ ad id quod continetur ſub ΓΒ, ΒΔ [per 1.dat.] data eſt. ut autem id quod continetur ſub ΑΒ, ΒΓ ad id quod continetur ſub ΓΒ, ΒΔ ita [per 1.6.] eſt ΑΒ ad ΒΔ: quare ratio rectæ ΑΒ ad rectam ΒΔ data eſt: ideoque [per 50. dat.] ratio quadrati rectæ ΑΒ ad quadratum rectæ ΒΔ data eſt. datur autem ratio ejus quod continetur ſub ΒΓ, ΓΔ ad quadratum rectæ ΑΒ: ergo [per 8.dat.] & ratio ejus quod continetur ſub ΒΓ, ΓΔ ad quadratum rectæ ΒΔ data eſt: quare ratio ejus quod quater continetur ſub ΒΓ, ΓΔ ad quadratum rectæ ΒΔ data eſt; ideoque [per 6.dat.] & ratio ejus quod quater continetur ſub ΒΓ, ΓΔ una cum quadrato rectæ ΒΔ ad quadratum rectæ ΒΔ data eſt. ſed [per 8.2.] id quod quater continetur ſub ΒΓ, ΓΔ una cum quadrato rectæ ΒΔ eſt quadratum utriuſque ſimul ΒΓ, ΓΔ: ratio igitur quadrati utriuſque ſimul ΒΓ, ΓΔ ad quadratum rectæ ΒΔ data eſt: quare [per 54.dat.] & ratio utriuſque ſimul ΒΓ, ΓΔ ad ΒΔ data eſt: ergo [per 6.dat.] & componendo ratio rectarum ΒΓ, ΓΔ, necnon ipſius ΒΔ, id eſt duarum ΓΒ, ad ΒΔ data eſt: quare & ratio unius ΓΒ ad ΒΔ data eſt. ut autem ΓΒ ad ΒΔ ita [per 1.6.] quod continetur ſub ΓΒ, ΒΔ ad quadratum rectæ ΒΔ: ergo & ratio ejus quod continetur ſub ΓΒ, ΒΔ ad quadratum rectæ ΒΔ data eſt. datum autem eſt [per conſtr.] id quod continetur ſub ΓΒ, ΒΔ: quare [per 2. dat.] & quadratum rectæ ΒΔ datum eſt: ideoque data eſt recta ΒΔ: igitur [per 2.dat.] & ipſa ΒΓ data eſt; nam & ratio ipſius ΒΔ ad ΒΓ data eſt, & ipſa ΒΔ data. at vero [ex hyp.] datum eſt ſpatium ΑΓ, anguluſque ΑΒΓ datus: quare [per 57. dat.] data eſt ΑΒ: utraque igitur rectarum ΑΒ, ΒΓ data eſt.



Επὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΑ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν ἡ ἐν λόγῳ, ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς. ἐπεὶ δοθὲν ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ δοθέν· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ· ὥστε καὶ τὸ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ λόγον ἐστὶ δοθείς. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τὸ τετράκις ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ λόγον ἐστὶ δοθείς. ἀλλὰ τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου ἐστὶ τῆς ΒΓ, ΓΔ· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΓ, ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ δοθείς· ὥστε καὶ συναμφοτέρου τῆς ΒΓ, ΓΔ πρὸς τὴν ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ συνθέντι ἄρα τῶν ΒΓ, ΓΔ καὶ τῆς ΒΔ, τουτέστι δύο τῶν ΓΒ, πρὸς τὴν ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ μιᾶς τῆς ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ λόγον ἐστὶ δοθείς. ὡς δὲ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ ἕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ· ὥστε καὶ ἡ ΒΓ δοθεῖσά ἐστι, τῆς γὰρ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΔ λόγον ἐστὶ δοθείς, καὶ δέδοται ἡ ΒΔ. καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ΑΓ, καὶ δοθεῖσα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΒ, ΒΓ δοθεῖσά ἐστι.

PROP. LXXXVII.

Si duæ rectæ datum ſpatium comprehendant in angulo dato, poſſit autem altera altera majus, dato; & earum utraque data erit.

DUÆ enim rectæ ΑΒ, ΒΓ datum ſpatium ΑΓ comprehendant in angulo dato ΑΒΓ; quadratum autem rectæ ΑΒ quadrato rectæ ΒΓ majus ſit, dato: dico utramque ipſarum ΑΒ, ΒΓ datam eſſe.

Quoniam enim quadratum rectæ ΑΒ quadrato rectæ ΒΓ majus eſt, dato; auferatur datum, ſit-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πζ'.

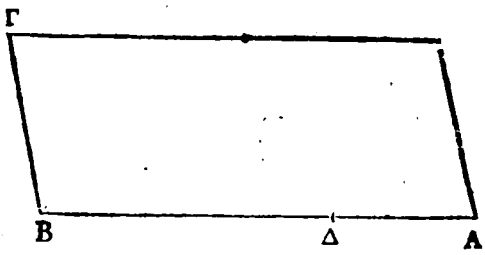
Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δοθὲν χωρίον περιέχωσιν ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μείζονος τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος, δοθέντι, μεῖζον ᾖ· καὶ ἑκατέρα αὐτῶν δοθεῖσα ἔσται.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ δοθὲν χωρίον περιεχέτωσαν τὸ ΑΓ ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΒ, δοθέντι, μεῖζον ἔστω τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ· λέγω ὅτι δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΒΓ.

Ἐπὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, δοθέντι, μεῖζόν ἐστιν, ἀφῃρήσθω τὸ δοθὲν, καὶ ἔστω

τὸ

τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆ ΒΓ. καὶ ἐπεὶ δοθέν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ δοθέν· λόγος ἄρα τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ δοθείς. ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῆ ΑΒ, ΒΓ ἕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς· τοῦ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ δοθείς· καὶ τοῦ τετράκις ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ δοθείς· λόγος ἄρα τοῦ τετράκις ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ δοθείς. ἀλλὰ τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ ἐστὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑ, ΑΔ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ δοθείς· λόγος ἄρα συναμφοτέρου τῆ ΒΑ, ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ δοθείς. καὶ συνθέντι συναμφοτέρου τῆς ΒΑ, ΑΔ μετὰ τῆς ΒΔ, τουτέστι δύο τῶν ΑΒ, πρὸς τὴν ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ μιᾶς ἄρα τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. τῆς δὲ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΑΒ ἄρα πρὸς τὴν ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἐπεὶ λόγος ἐστὶ τῆ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς, ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ ἕτως τὸ ἀπὸ τῆ ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ δοθείς. δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ; ἕτω γὰρ δοθὲν ἀφήρηται· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· δοθεῖσα ἄρα ἡ ΑΒ. καὶ ἐστὶ λόγος τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ δοθείς· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΒΓ.



que id quod continetur ſub AB, BΔ; ergo reliquum, quod ſc. [per 2.2.] continetur ſub BA, AΔ, æquale eſt quadrato rectæ BΓ. quoniam vero id quod continetur ſub AB, BΓ, necnon id quod continetur ſub AB, BΔ, datum eſt: ratio igitur ejus quod continetur ſub AB, BΔ ad id quod continetur ſub AB, BΓ [per 1. dat.] data eſt. atque ut rectangulum ſub AB, BΔ ad rectangulum ſub AB, BΓ ita eſt ΔB ad BΓ: ergo datur ratio rectæ ΔB ad rectam BΓ; adeoque [per 50. dat.] ratio quadrati rectæ ΔB ad quadratum rectæ BΓ data eſt. quadrato autem rectæ BΓ æquale eſt [per conſtr. & 2. 2.] rectangulum ſub BA, AΔ: igitur ratio rectanguli ſub BA, AΔ ad quadratum rectæ ΔB data eſt: ideoque & ratio ejus quod quater continetur ſub BA, AΔ ad quadratum rectæ ΔB data eſt: quare & ratio ejus quod quater continetur ſub BA, AΔ una cum quadrato rectæ ΔB ad quadratum rectæ ΔB data eſt. ſed id quod quater continetur ſub BA, AΔ una cum quadrato rectæ ΔB eſt [per 8. 2.] quadratum utriuſque ſimul BA, AΔ: igitur ratio quadrati utriuſque ſimul BA, AΔ ad quadratum rectæ ΔB data eſt: quare [per 54. dat.] & ratio utriuſque ſimul BA, AΔ ad ΔB data eſt. atque componendo [per 6. dat.] ratio utriuſque ſimul BA, AΔ & ipſius BΔ, hoc eſt duarum AB, ad BΔ data eſt: ergo & ratio unius AB ad BΔ data eſt. at vero ratio ΔB ad BΓ data eſt: ergo [per 8. dat.] & ratio ipſius AB ad BΓ data eſt. & quoniam ratio ipſius AB ad BΔ data eſt; atque [per 1.6.] eſt ut AB ad BΔ ita quadratum rectæ AB ad id quod continetur ſub AB, BΔ: ratio igitur quadrati rectæ AB ad id quod continetur ſub AB, BΔ data eſt. datum autem eſt id quod continetur ſub AB, BΔ; ſic enim ablatum fuit ſpatium datum: ergo [per 2.dat.] & quadratum rectæ AB datum eſt: quare data eſt recta AB. eſt autem ratio ipſius AB ad BΓ data: recta igitur BΓ data eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πη'.

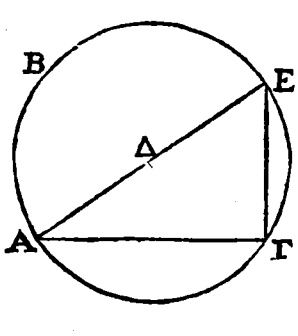
Ἐὰν εἰς κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἀποτεμνέτω τμῆμα δεχόμενον γωνίαν δοθεῖσαν· δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῷ μεγέθει.

PROP. LXXXVIII.

Si in circulum magnitudine datum acta ſit recta linea, ſegmentum auferens quod angulum datum comprehendat; acta recta magnitudine data eſt.

Εἰς γὰρ κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει τὸν ΑΒΓ ἤχθω ἡ ΑΓ, ἀποτεμνέτω τμῆμα τὸ ΑΕΓ δεχόμενον γωνίαν ΑΕΓ δοθεῖσαν· λέγω ὅτι ἡ ΑΓ δέδοται τῷ μεγέθει.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἡ ΑΔ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΕ. δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΕ, ὀρθὴ γὰρ ἐστιν. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΓ



IN circulum enim magnitudine datum ABΓ agatur recta linea AΓ, auferens ſegmentum AEΓ quod comprehendat angulum datum AEΓ: dico rectam AΓ magnitudine datam eſſe.

Sumatur enim [per 1.3.] circuli centrum Δ, & connexa recta AΔ producatur ad punctum E, atque connectatur ΓE. datus igitur eſt angulus AΓE; etenim [per 31.3.] rectus eſt. angulus quoque AEΓ [ex hyp.] datus

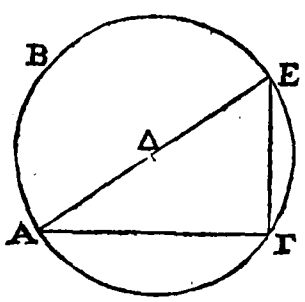
datus eſt: quare & reliquus angulus ΓΑΕ [per 32. 1. & 4. dat.] datus eſt: triangulum igitur ΑΓΕ [per 40. dat.] ſpecie datum eſt; adeoque ratio ipſius ΕΑ ad ΑΓ [per 3. def. dat.] data eſt. eſt autem [per 5. def. dat.] ΕΑ magnitudine data; quia datur circulus magnitudine: ergo [per 2. dat.] & ipſa ΑΓ magnitudine data eſt.

δοθεῖσα· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΑΕ δοθεῖσά ἐστι· δέδοται ἄρα τὸ ΑΓΕ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγον ἄρα ἐστὶ τῆς ΕΑ πρὸς τὴν ΑΓ δοθείς. δοθεῖσα δὲ ἡ ΕΑ τῷ μεγέθει, ἐπεὶ καὶ ὁ κύκλος δέδοται τῷ μεγέθει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῷ μεγέθει.

PROP. LXXXIX.

Si in datum magnitudine circulum data magnitudine recta acta fuerit; auferet ſegmentum quod angulum datum comprehendet.

IN circulum enim magnitudine datum ΑΒΓ agatur recta magnitudine data ΑΓ: dico quod auferet ſegmentum quod angulum datum comprehendet.



Accipiatur enim [per 1. 3.] circuli centrum Δ, & connexa recta ΑΔ producatur ad punctum Ε, connectaturque ΓΕ. & quoniam data eſt utraque rectarum ΕΑ, ΑΓ: igitur [per 1. dat.] ratio ipſius ΕΑ ad ΑΓ data eſt. rectus autem eſt [per 31. 3.] angulus ΑΓΕ: quare [per 44. dat.] triangulum ΑΓΕ ſpecie datum eſt: angulus igitur ΑΕΓ [per 3. def. dat.] datus eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ πθ'.

Ἐὰν εἰς κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ δεδομένη τῷ μεγέθει· ἀπολήψεται τμῆμα δεχόμενον γωνίαν δοθεῖσαν.

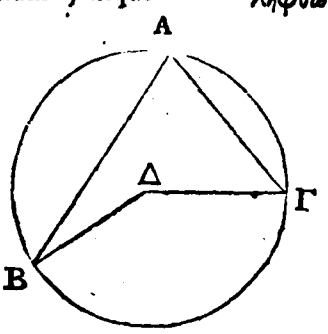
ΕΙΣ γὰρ κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει τὸν ΑΒΓ εὐθεῖα γραμμὴ ἤχθω ἡ ΑΓ δεδομένη τῷ μεγέθει· λέγω ὅτι ἀπολήψεται τμῆμα δεχόμενον γωνίαν δοθεῖσαν.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ δήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΕ. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΕΑ, ΑΓ· λόγον ἄρα ἐστὶ τῆς ΕΑ πρὸς τὴν ΑΓ δοθείς. ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ γωνία· δέδοται ἄρα τὸ ΑΓΕ τρίγωνον τῷ εἴδει· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΓ γωνία.

PROP. XC.

Si in circuli poſitione dati circumferentia acceptum fuerit datum punctum, ab eo autem puncto ad circumferentiam circuli inflexa fuerit recta linea quæ datum angulum efficiat; inflexæ rectæ altera extremitas data eſt.

IN circuli enim poſitione dati ΑΒΓ circumferentia accipiatur punctum datum Β, atque à puncto Β inflectatur recta ΒΑΓ quæ faciat angulum ΒΑΓ datum: dico punctum Γ datum eſſe.



Accipiatur enim [per 1. 3.] circuli centrum Δ, & connectantur ΒΔ, ΔΓ. & quoniam datum eſt utrumque punctorum Β, Δ: igitur [per 26. dat.] poſitione data eſt ΒΔ. & quoniam datus eſt angulus ΒΑΓ: angulus igitur ΒΔΓ [per 20. 3. & 2. dat.] datus quoque eſt. quoniam itaque ad datam poſitione rectam ΒΔ, & datum in ea punctum Δ, recta ΔΓ acta eſt quæ facit angulum ΒΔΓ datum: recta igitur ΔΓ [per 29. dat.] poſitione data eſt. circulus autem ΑΒΓ poſitione & magnitudine datus eſt: quare [per 25. & 26. dat.] poſitione & magnitudine data eſt ΔΓ. datum autem eſt punctum Δ: ergo [per 27. dat.] punctum Γ datum eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν κύκλου δεδομένου τῇ θέσει ᾖ τις περιφερείας δοθὲν σημεῖον λαβεῖν, ἀπὸ δὲ τούτου πρὸς τὸν τοῦ κύκλου περιφέρειαν κλασθῇ τις εὐθεῖα δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν· δέδοται τὸ ἕτερον πέρας τῆς κλασθείσης.

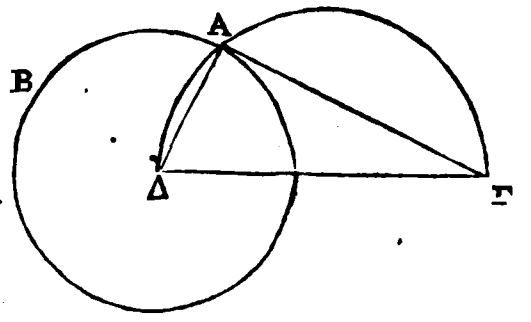
ΚΥΚΛΟΥ γὰρ τοῦ ΑΒΓ τῇ θέσει δεδομένου ἐλήφθω ὁπὸ τῆς περιφερείας δοθὲν σημεῖον τὸ Β, ἀπὸ δὲ τοῦ Β σημείου κεκλάσθω εὐθεῖα ἡ ΒΑΓ δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν πρὸς ΒΑΓ· λέγω ὅτι δέδοται τὸ Γ σημεῖον.

Εἰλήφθω γὰρ τοῦ κύκλου τὸ κέντρον τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΔ, ΔΓ. καὶ ἐπεὶ δοθέν ἐστιν ἑκάτερον τῶν Β, Δ, θέσει ἐστὶν ἡ ΒΔ. καὶ ἐπεὶ δοθεῖσά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΓ. ἐπεὶ οὖν πρὸς θέσει δεδομένην εὐθεῖαν τὴν ΒΔ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ, εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΔΓ δεδομένην ποιοῦσα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΔΓ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ θέσει. θέσει δὲ καὶ τῷ μεγέθει δοθεὶς ἡ ΑΒΓ κύκλος· θέσει ἄρα καὶ τῷ μεγέθει δοθεῖσά ἐστιν ἡ ΔΓ. καὶ δοθὲν τὸ Δ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Γ σημεῖον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζα'.

Ἐὰν ἀπὸ δεδομένου σημείου, ᾧ θέσει δεδομένου κύκλου ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἀχθῇ· δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.

Ἀπὸ γὰρ δεδομένου σημείου τοῦ Γ, θέσει δεδομένου κύκλου οὗ ΑΒ ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἤχθω ἡ ΓΑ· λέγω ὅτι ἡ ΓΑ εὐθεῖα δέδοται τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.



Εἰλήφθω γὰρ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΓ. καὶ ἐπεὶ δοθέν ἐστιν ἑκάτερον τῶν Δ, Γ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΓ. καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει διὰ τοῦ Α. ἤχθω δὴ ἔστω ὁ ΔΑΓ· θέσει ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΑΓ. θέσει δὲ καὶ ὁ ΑΒ κύκλος δοθείς· ἔστιν ἄρα τὸ Α δοθέν. ἀλλὰ καὶ τὸ Γ δοθέν ἐστι· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.

PROP. XCI.

Si à dato puncto recta linea acta fuerit, quæ datum positione circulum contingat; acta recta positione & & magnitudine data est.

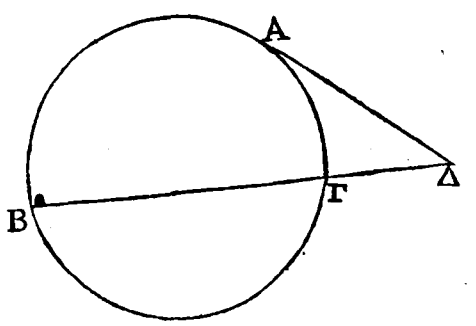
A Dato enim puncto Γ datum positione circulum ΑΒ contingens recta ΓΑ ducatur: dico positione & magnitudine datam esse rectam ΓΑ.

Sumatur enim [per 1.3.] circuli centrum Δ, & connectantur rectæ ΔΑ, ΔΓ. & quoniam utrumque punctorum Δ, Γ datum est: recta igitur ΔΓ [per 26. dat.] positione & magnitudine data est. & [per 18.3.] rectus est angulus ΔΑΓ: ergo [per 31. 3.] super ΔΓ descriptus semicirculus transibit per punctum Α. transeat, sitque ΔΑΓ: ergo [per 6.def.dat.] positione datus est circulus ΔΑΓ. est autem [ex hyp.] circulus ΑΒ positione datus: quare [per 25. dat.] punctum Α datum est. sed & punctum Γ [ex hyp.] datum est: recta igitur ΑΓ [per 26. dat.] positione & magnitudine data est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ 46'.

Ἐὰν κύκλου δεδομένου τῇ θέσει ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς δοθέν, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου εἰς τὸν κύκλον διαχθῇ εὐθεῖα· τὸ ὑπὸ τὴν ἀχθεῖσαν καὶ τὴν μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας περιεχόμενον ὀρθογώνιον δοθέν ἐστι.

Κύκλου γὰρ δεδομένου τῇ θέσει τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ σημείου διήχθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΒ τέμνουσα τὸν κύκλον· λέγω ὅτι δοθέν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ.



Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτομένη εὐθεῖα ἡ ΔΑ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει. ἐπεὶ οὖν δοθεῖσά ἐστιν ἡ ΑΔ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ.

PROP. XCII.

Si extra circulum positione datum accipiatur aliquod punctum, à dato autem puncto in circulum ducatur recta quædam; rectangulum sub ducta linea & ea quæ inter punctum & convexam peripheriam interjicitur datum erit.

E Xtra enim datum positione circulum ΑΒΓ accipiatur aliquod punctum Δ; à puncto autem Δ agatur quædam recta ΔΒ secans circulum: dico rectangulum sub ΒΔ, ΔΓ datum esse.

Agatur enim [per 17. 3.] à puncto Δ circulum ΑΒΓ contingens recta ΔΑ: recta igitur ΔΑ [per 91.dat.] positione & magnitudine data est. quoniam itaque data est ΑΔ: etiam quadratum rectæ ΑΔ [per 52. dat.] datum est. & [per 36.3.] æquale quidem est ei quod continetur sub ΒΔ, ΔΓ: quare & id quod continetur sub ΒΔ, ΔΓ datum est.

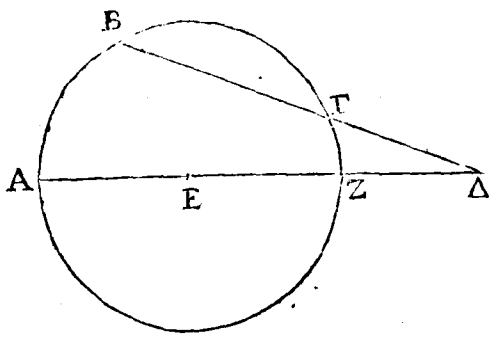
ΑΛΛΩΣ.

Εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Α. καὶ ἐπεὶ

ALITER.

Accipiatur [per 1.3.] circuli centrum Ε, & jungatur ΔΕ & producatur ad punctum Α. & quoniam

tum eſt [ex hyp.] utrumque punctorum E, Δ: recta igitur EΔ [per 26. dat.] poſitione & magnitudine data eſt. circulus autem ABZ [ex hyp.] datus eſt magnitudine & poſitione: utrumque igitur punctorum A,Z [per 25.dat.] datum eſt. datum autem [ex hyp.] eſt punctum Δ: utraque igitur rectarum AΔ, ZΔ [per 26.dat.] data eſt: quare quod continetur ſub AΔ, ΔZ datum eſt. & [per 36.3.] id quod continetur ſub AΔ, ΔZ æquale eſt ei quod continetur ſub BΔ, ΔΓ: ergo & id quod continetur ſub BΔ, ΔΓ datum eſt.



δοθὲν ἐστιν ἑκάτερον τῶν E, Δ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ EΔ τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει. δέδοται δὲ καὶ ὁ ABZ κύκλος· δοθὲν ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν A, Z. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ Δ δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν AΔ, ZΔ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AΔ, ΔZ. καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν AΔ, ΔZ τῷ ὑπὸ τῶν BΔ, ΔΓ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν BΔ, ΔΓ.

PROP. XCIII.

Si intra datum poſitione circulum ſumatur aliquod datum punctum, per punctum autem agatur in circulum recta aliqua linea; quod ſub ſegmentis actæ rectæ lineæ comprehenditur rectangulum datum erit.

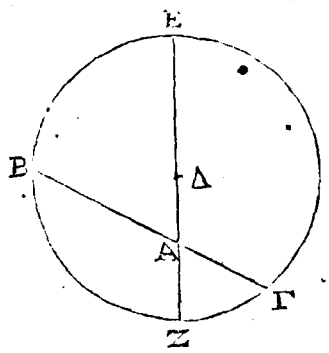
ETenim intra circulum poſitione datum BΓ ſumatur aliquod punctum datum A; per punctum autem A agatur quævis recta ΓB: dico rectangulum ſub BA, AΓ datum eſſe.

Accipiatur enim [per 1.3.] circuli centrum Δ, & connexa recta AΔ producatur ad puncta Z, E. itaque quoniam datum eſt [ex hyp.] utrumque punctorum Δ, A: igitur [per 26. dat.] poſitione data eſt recta ΔA. eſt autem & circulus ΓBZ [ex hyp.] poſitione datus: utrumque igitur punctorum Z, E [per 25.dat.] datum eſt. punctum autem A [ex hyp.] datum eſt: ergo [per 26. dat.] utraque rectarum ZA, AE data eſt: ideoque rectangulum ſub ZA, AE datum eſt. & [per 35.3.] eſt æquale rectangulo ſub BA, AΓ: igitur rectangulum ſub BA, AΓ datum eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛγ'.

Ἐὰν κύκλῳ δεδομένῳ τῇ θέσει ληφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς δοθέν, διὰ δὲ τοῦ σημείου διαχθῇ τις εὐθεῖα εἰς τὸν κύκλον· τὸ ὑπὸ τῶν τοῦ ἀχθείσης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον δοθέν ἐστι.

Κύκλῳ γὰρ δεδομένῳ τῇ θέσει τοῦ BΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐντὸς τὸ A δοθέν, διὰ δὲ τοῦ A διήχθω τις εὐθεῖα ἡ ΓB· λέγω ὅτι δεδομένον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν BA, AΓ.



Εἰλήφθω γὰρ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπεζευχθεῖσα ἡ AΔ διήχθω ἐπὶ τὰ Z, E. ἐπεὶ οὖν δοθέν ἐστιν ἑκάτερον τῶν Δ, A· θέσει ἄρα καὶ ἡ ΔA. θέσει δὲ καὶ ὁ ΓBZ κύκλος· δοθὲν ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν Z, E. ἔστι δὲ καὶ τὸ A δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ZA, AE· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ZA, AE. καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν BA, AΓ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν BA, AΓ.

PROP. XCIV.

Si in circulum magnitudine datum agatur recta linea, ſegmentum auferens quod angulum datum comprehendat, angulus autem qui in ſegmento conſiſtit bifariam ſecetur: utraque ſimul rectarum, quæ angulum datum comprehendunt, ad lineam, quæ angulum bifariam ſecat, habebit rationem datam; & rectangulum ſub utriſque ſimul, quæ datum angulum comprehendunt, rectis & inferne abſciſſa ab ea, quæ angulum in circumferentia datum bifariam ſecat, datum erit.

IN circulum enim magnitudine datum ABΓ agatur recta BΓ, ſegmentum auferens quod da-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛδ'.

Ἐὰν εἰς κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἀπολαμβάνουσα τμῆμα δεχόμενον γωνίαν δοθεῖσαν, καὶ ἡ εἰς τὸ τμῆμα γωνία δίχα τμηθῇ· συναμφότεροι αἱ τὴν δεδομένην γωνίαν περιέχουσαι πλευραὶ πρὸς τὴν δίχα τέμνουσαν τὴν γωνίαν λόγον ἔξουσι δεδομένον, καὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς τὴν δεδομένην γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν καὶ τῆς κάτω ἀπολαμβανομένης ἀπὸ τῆς δίχα τεμνούσης τὴν γωνίαν πρὸς τῇ περιφερείᾳ δοθὲν ἔσται.

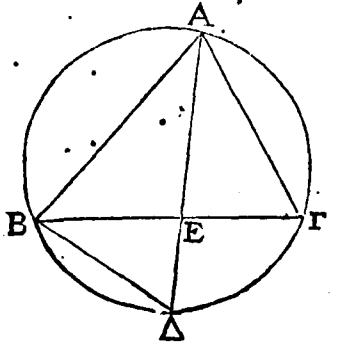
ΕΙΣ γὰρ κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει τὸν ABΓ εὐθεῖα ἤχθω ἡ BΓ, ἀπολαμβάνουσα τμῆμα δεχόμενον

χόμβον γωνίαν δοθεῖσαν τῇ ὑπὸ ΒΑΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τῇ ΑΔ εὐθείᾳ· λέγω ὅτι λόγος ἐστὶ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ δοθεῖσαν, καὶ ὅτι δοθὲν ἐστι τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ καὶ τῆς ΕΔ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ. καὶ ἐπεὶ εἰς κύκλον δεδομένον τῷ μεγέθει τὸν ΑΒΓ δέδεκται εὐθεῖα ἡ ΒΓ, ἀποτεμνόυσα τμῆμα τὸ ΒΑΓ δεχόμενον γωνίαν δοθεῖσαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῷ μεγέθει. ἀλλὰ καὶ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΔ δοθεῖσά ἐστι τῷ μεγέθει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται τῇ ΑΔ εὐθείᾳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΓ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ· καὶ ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ. καὶ ἐπεί ἐστιν ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΑΓ, ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΔΕ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΕΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως συναμφότερος ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ· ἔστιν ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΒ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΔ. λόγος δὲ τῆς ΒΓ πρὸς τὴν ΒΔ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ δοθείς.

ΛΕΓΩ ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ καὶ τῆς ΔΕ δοθέν ἐστι.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΕΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΒ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ· ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ οὕτως ἐστὶ συναμφότερος ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ· ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ ΒΑΓ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ καὶ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ. δοθὲν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ, ΒΔ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΒΑΓ καὶ τῆς ΕΔ.



Connectatur Β Δ. & quoniam in circulum Α Β Γ magnitudine datum acta eſt recta Β Γ, auferens ſegmentum Β Α Γ quod angulum datum Β Α Γ comprehendat: magnitudine igi- [per 88. dat.] data eſt recta Β Γ. ſimiliter data eſt recta Β Δ: igitur ratio ipſius Β Γ ad Β Δ [per 1.dat.] data eſt. quoniam vero [ex hyp.] angulus Β Α Γ recta Α Δ bifariam ſectus eſt: eſt igitur [per 3. 6.] ut Β Α ad Α Γ ita Β Ε ad Ε Γ: ideoque [per 16. 5.] permutando, ut Α Β ad Β Ε ita eſt Α Γ ad Γ Ε: quare [per 12. 5.] ut utraque Β Α Γ ad Β Γ ita Α Γ ad Γ Ε. & quoniam angulus Β Α Ε angulo Ε Α Γ æqualis eſt; eſtque [per 21.3.] angulus Α Γ Ε angulo Β Δ Ε æqualis: reliquus igitur angulus Α Ε Γ reliquo angulo Α Β Δ [per 32. 1.] æqualis eſt: adeoque æquiangulum eſt triangulum Α Ε Γ triangulo Α Β Δ: quare [per 4.6.] ut Α Γ ad Γ Ε ita eſt Α Δ ad Δ Β. ſed [ex mox oſtenſis] ut Α Γ ad Γ Ε ita eſt utraque Β Α Γ ad Β Γ: igitur ut utraque ſimul Β Α Γ ad Β Γ ita Α Δ ad Δ Β: ideoque permutando ut utraque Β Α Γ ad Α Δ ita eſt Β Γ ad Β Δ. eſt autem ratio ipſius Β Γ ad Β Δ data: ergo & ratio utriuſque ſimul Β Α Γ ad Α Δ data eſt.

Dico inſuper rectangulum ſub utraque ſimul Β Α Γ & Δ Ε datum eſſe.

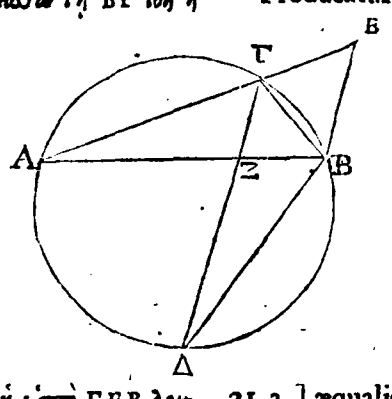
Quoniam enim [per 15. 1. & 21. 3.] triangulum Α Ε Γ triangulo Δ Ε Β æquiangulum eſt: eſt igitur [per 4.6.] ut Β Δ ad Δ Ε ita Α Γ ad Γ Ε. ut autem Α Γ ad Γ Ε ita eſt [ex ſupra oſtenſis] utraque Β Α Γ ad Β Γ: quare [per 11.5.] ut utraque Β Α Γ ad Β Γ ita eſt Β Δ ad Δ Ε: ideoque [per 16.6.] quod continetur ſub utraque Β Α Γ & Δ Ε æquale eſt ei quod continetur ſub Γ Β, Β Δ. quod autem continetur ſub Γ Β, Β Δ [ex mox oſtenſis] datum eſt: ergo & id quod continetur ſub utraque Β Α Γ & Ε Δ datum eſt.

ΑΛΛΩΣ.

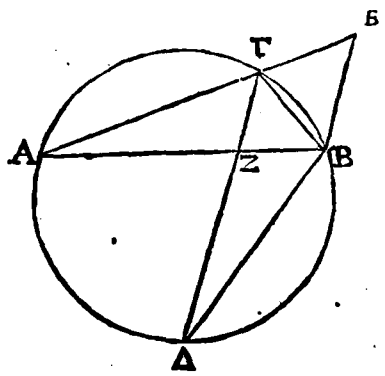
Διήχθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ Ε, καὶ κείσθω τῇ ΒΓ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΒ, ΒΔ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ ἑκατέρας τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΒΕ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΔ, τουτέστι τῇ ὑπὸ ΑΒΔ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΓ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΒΕ ἐστιν ἴση. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΑΒ τῇ ὑπὸ ΓΔΒ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΕΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΓΒ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ

ALITER.

Producatur Α Γ ad punctum Ε, & ponatur ipſi Β Γ æqualis Γ Ε, connectanturque Ε Β, Β Δ. & quoniam [per conſtr. & 5.& 32.1.] angulus Α Γ Β utriuſvis angulorum Α Γ Δ, Γ Β Ε duplus eſt: angulus igitur Γ Β Ε æqualis eſt angulo Α Γ Δ; hoc eſt [per 21. 3.] ipſi Α Β Δ. communis adjiciatur angulus Α Β Γ: totus igitur angulus Δ Β Γ toti angulo Ζ Β Ε æqualis eſt. angulus autem Γ Α Β angulo Γ Δ Β [per 21. 3.] æqualis eſt: reliquus igitur Γ Ε Β [per 32.1.] reliquo Δ Γ Β æqualis eſt: ideoque trian-



gulum EAB triangulo ΓΔB æquiangulum eſt: quare [per 4.6.] ut EA ad AB ita ΓΔ ad ΔB. eſt autem [per conſtr.] recta EA utraq; ſimul AΓB: ergo ut utraque ſimul AΓB ad AB ita eſt ΓΔ ad BΔ: permutando igitur ut utraque ſimul AΓB ad ΓΔ ita eſt AB ad BΔ. eſt autem [per 1. dat.] ratio ipſius AB ad BΔ data; utraque enim earum [per 88.dat.] data eſt: quare ratio utriuſque AΓB ad ΓΔ data eſt.



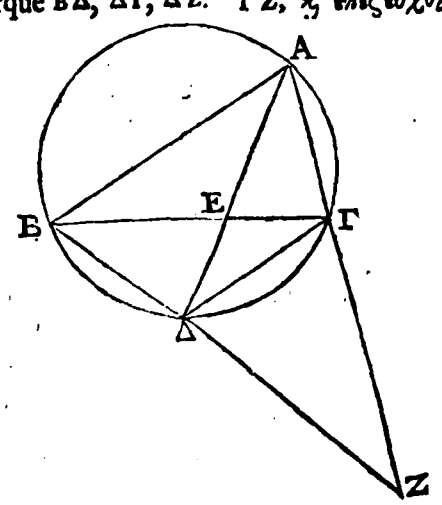
ET quoniam [ex ſupra oſtenſis] triangulum EAB eſt triangulo ZBΔ æquiangulum: erit [per 4.6.] ut EA ad AB ita BΔ ad ΔZ. eſt autem [per conſtr.] EA utraque AΓB: quare ut utraque ſimul AΓB ad AB ita eſt BΔ ad ΔZ: ideoq; [per 16.6.] quod continetur ſub utraque AΓB & ZΔ æquale eſt ei quod continetur ſub AB, BΔ. eſt autem id quod continetur ſub AB, BΔ datum; etenim [per 88.dat.] utraque rectarum AB, BΔ data eſt: ergo quod continetur ſub utraque ſimul AΓB & ZΔ datum eſt.

τὸ EAB τρίγωνον τῷ ΓΔB τριγώνῳ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ EA πρὸς τὴν AB ὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔB. ἡ δὲ EA συναμφότερός ἐστιν ἡ AΓB· καὶ ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ AΓB πρὸς τὴν AB ὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν BΔ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ AΓB πρὸς τὴν ΓΔ ὕτως ἡ AB πρὸς τὴν BΔ. λόγος δὲ ἐστὶ τῆς AB πρὸς τὴν BΔ, δοθεὶς, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν δοθεῖσα ἐστί· λόγος ἄρα ἐστὶ καὶ συναμφοτέρας τῆς AΓB πρὸς τὴν ΓΔ δοθείς.

ΚΑΙ ἐπεὶ ἰσογώνιόν ἐστι τὸ EAB τρίγωνον τῷ ZBΔ τριγώνῳ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ EA πρὸς τὴν AB ὕτως ἡ BΔ πρὸς τὴν ΔZ. ἡ δὲ EA συναμφότερός ἐστιν ἡ AΓB· ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ AΓB πρὸς τὴν AB ὕτως ἡ BΔ πρὸς τὴν ΔZ· τὸ ἄρα ὑπὸ συναμφοτέρας τῆς AΓB καὶ τῆς ZΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AB, BΔ. δοθὲν δὲ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΔ· δοθεῖσαι γὰρ ἑκατέρα αὐτῶν· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρας τῆς AΓB καὶ τῆς ZΔ.

ALITER.

Producatur AΓ ad punctum Z, & fiat ΓZ æqualis ipſi BA, connectanturque BΔ, ΔΓ, ΔZ. & quoniam æqualis eſt BA ipſi ΓZ, atque ΔB [per 26.& 29. 3.] ipſi ΔΓ; adeoque duæ AB, BΔ duabus ZΓ, ΓΔ æquales ſunt utraque utrique. atque etiam [per 13.1.& 22. 3.] angulus ABΔ angulo ΔΓZ æqualis eſt, quia quadrilaterum ABΔΓ eſt in circulo: baſis igitur AΔ [per 4.1.] baſi ΔZ æqualis eſt, & triangulum ABΔ triangulo ΓΔZ æquale, & reliqui anguli reliquis angulis æquales ſub quibus æqualia latera ſubtenduntur; adeoque angulus BAΔ angulo ΔZΓ æqualis eſt. angulus autem BAΔ [ex hyp.] datus eſt: quare angulus ΔZΓ datus eſt. ſed & angulus ΔAZ datus eſt: triangulum igitur AΔZ [per 40. dat.] ſpecie datum eſt: adeoque [per 3.def.dat.] data eſt ratio ipſius ZA ad AΔ. eſt autem AZ utraque ſimul BAΓ; quia [per conſtr.] æqualis eſt ΓZ ipſi BA: ratio igitur utriuſque ſimul BAΓ ad AΔ data eſt.



ET eadem ratione, qua ſuperius, rectangulum ſub utraque ſimul BAΓ & BΔ datum eſſe oſtendemus.

ΑΛΛΩΣ

Διήχθω ἡ AΓ ἐπὶ τὸ Z, καὶ κείσθω τῇ BA ἴση ἡ ΓZ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ BΔ, ΔΓ, ΔZ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν BA τῇ ΓZ, ἡ δὲ ΔB τῇ ΔΓ· δύο δὴ αἱ AB, BΔ δυσὶ ταῖς ZΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ABΔ τῇ ὑπὸ ΔΓZ ἴση ἴση, ἐπειδήπερ ἐν κύκλῳ ἐστὶ τὸ ABΔΓ τετράπλευρον· βάσις ἄρα ἡ AΔ βάσει τῇ ΔZ ἐστιν ἴση, καὶ τὸ ABΔ τρίγωνον τῷ ΓΔZ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς ἴσαι ἔσονται ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ BAΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΔZΓ. δοθεῖσα δὲ ἐστὶν ἡ ὑπὸ BAΔ γωνία· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔZΓ γωνία. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΔAZ γωνία δοθεῖσα· δέδοται ἄρα τὸ AΔZ τρίγωνον τῷ εἴδει· λόγος ἄρα ἐστὶ τῆς ZA πρὸς τὴν AΔ δοθείς. ἡ δὲ AZ συναμφότερός ἐστιν ἡ BAΓ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΓZ τῇ BA· λόγος ἄρα ἐστὶ συναμφοτέρας τῆς BAΓ πρὸς τὴν AΔ δοθείς.

ΚΑΙ ὁμοίως τῷ πρότερον δείξομεν ὅτι τὸ ὑπὸ συναμφοτέρας τῆς BAΓ καὶ τῆς EΔ δοθέν ἐστι.

PROP. XCV.

Si in circuli poſitione dati diametro ſumatur datum punctum, à puncto autem in circulum producatur quædam re-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛε'.

Ἐὰν κύκλῳ δεδομένῳ τῇ θέσει ὑπὸ τὴν διάμετρον δοθὲν σημεῖον ληφθῇ, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσβληθῇ τις εὐθεῖα,

ϗ ἀπὸ τ̃ τομῆς τις πρὸς ὀρθὰς ἀχθῇ τῇ διαχθείσῃ, ἀφ' ἧς δὲ τ̃ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλει ἡ πρὸς ὀρθὰς τῇ περιφερείᾳ τ̃ κύκλου, παράλληλος ἀχθῇ τῇ διαχθείσῃ· δοθὲν ἔσται τὸ σημεῖον, καθ' ὃ συμβάλλει ἡ παράλληλος τῇ ἀφαμένῃ, ϗ τὸ ὑπὸ τῶν παραλλήλων περιεχόμενον ὀρθογώνιον δοθὲν ἔσται.

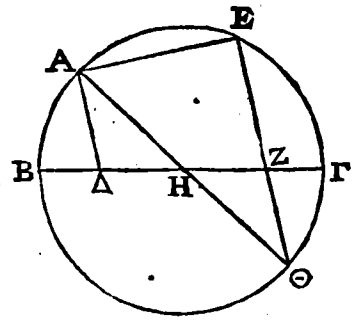
cta, agaturque recta à ſectione ad rectos angulos in productam rectam; per punctum autem in quo linea, quæ ad rectos angulos inſiſtit, occurrit circumferentiæ circuli, agatur parallela productæ rectæ: datum eſt illud punctum in quo parallela occurrit ipſi diametro; & quod ſub parallelis lineis comprehenditur rectangulum datum eſt.

Κύκλου γὰρ τῇ θέσει δεδομένου τοῦ ΑΒΓ ἔστω τ̃ μὲν ἀφαμένης τ̃ ΒΓ εἰλήφθω δοθὲν σημεῖον τὸ Δ, ἀφ' οὗ δὲ τοῦ Δ πρὸς τὸν κύκλον προσπεσέσθω τις τυχοῦσα ἡ ΔΑ, ἀπὸ δὲ τοῦ Α τῇ ΔΑ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΑΕ, ἀφ' οὗ δὲ τοῦ Ε τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ· λέγω ὅτι δοθὲν ἐστι τὸ Ζ, ϗ ὅτι τὸ ὑπὸ τ̃ ΑΔ, ΕΖ χωρίον δοθέν ἐστι.

IN circuli enim poſitione dati ΑΒΓ diametro ΒΓ accipiatur datum punctum Δ, per punctum autem Δ producatur in circulum recta quædam linea ΔΑ, à puncto autem Α ipſi ΔΑ ad angulos rectos agatur recta ΑΕ, atque per punctum Ε ipſi ΑΔ parallela agatur ΕΖ: dico punctum Ζ datum eſſe; atque etiam datum eſſe rectangulum ſub ΑΔ, ΕΖ comprehenſum.

Διήχθω ἡ ΕΖ ἐπὶ τὸ Θ, ϗ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ. ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΘΕΑ γωνία, ἡ ΘΑ ἄφαμένης ἐστὶ τ̃ ΑΒΓ κύκλου. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ τ̃ ΑΒΓ κύκλου ἄφαμένης· τὸ Η ἄρα κέντρον ἐστὶ τ̃ ΑΒΓ κύκλου· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Η. ἔστι δὲ ϗ τὸ Δ δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ τῷ μεγέθει. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΕΘ, καί ἐστιν ἴση ἡ ΘΗ τῇ ΗΑ· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΔΗ τῇ ΗΖ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΖΘ. δοθεῖσα δὲ ἡ ΔΗ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΗΖ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΗΖ, ΗΔ δοθεῖσά ἐστι. ϗ ἔστι δοθὲν τὸ Η· δοθὲν ἄρα ἐστὶ ϗ τὸ Ζ.

Producatur enim recta ΕΖ ad punctum Θ, & connectatur recta ΑΘ. quoniam angulus ΘΕΑ rectus eſt; recta ΘΑ [per 31.3.] eſt circuli ΑΒΓ diameter. eſt autem [ex hyp.] & ΒΓ diameter circuli ΑΒΓ: ergo punctum Η circuli ΑΒΓ centrum eſt: quare datum eſt punctum Η. eſt autem [ex hyp.] punctum Δ datum: ergo [per 26. dat.] data eſt recta ΔΗ magnitudine. & quoniam recta ΑΔ [ex hyp.] parallela eſt ipſi ΕΘ, atque eſt ΘΗ ipſi ΗΑ æqualis: igitur [per 29. 1. & 4.6.] æqualis eſt ΔΗ quidem ipſi ΗΖ, & ΑΔ ipſi ΖΘ. eſt autem recta ΔΗ data: ergo etiam data eſt ΗΖ. ſed & etiam poſitione datæ ſunt: ergo utraque rectarum ΗΖ, ΗΔ data eſt. atque datum eſt punctum Η: quare [per 27.dat.] & punctum Ζ datum eſt.



ΚΑΙ ἐπεὶ ἐντὸς κύκλου δεδομένου τῇ θέσει τ̃ ΑΒΓ εἴληπταί σημεῖον τὸ Ζ δοθέν, ϗ δῆκται ἡ ΕΖΘ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΖΘ. ἴση δὲ ἡ ΘΖ τῇ ΔΑ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΕΖ.

ET quoniam intra circulum poſitione datum ΑΒΓ acceptum eſt datum punctum Ζ, & acta eſt recta ΕΖΘ: rectangulum igitur ſub ΕΖ, ΖΘ [per 93.dat.] datum eſt. æqualis autem eſt ΘΖ ipſi ΔΑ: ergo rectangulum ſub ΑΔ, ΕΖ datum eſt.

ΤΕΛΟΣ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ.

FINIS DATORUM EUCLIDIS.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΑΡΜΟΝΙΚΗ.

EUCLIDIS

INTRODUCTIO

HARMONICA.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΕΙΣΑΓΩΓΗ
ΑΡΜΟΝΙΚΗ.

EUCLIDIS
INTRODUCTIO
HARMONICA.

ΑΡΜΟΝΙΚΗ ἐστιν ἐπιστήμη θεωρητικὴ καὶ πρακτικὴ τῶν τῆ ἡρμοσμένῃ φύσεως. Ἡρμοσμένον δέ ἐστι τὸ ἐκ φθόγγων καὶ διαστημάτων, ποιὰν τάξιν ἐχόντων, συγκείμενον. μέρη δ' αὐτῆς ἐστιν ἑπτά. περὶ φθόγγων. περὶ διαστημάτων. περὶ γενῶν. περὶ συστημάτων. περὶ τόνων. περὶ μεταβολῆς. περὶ μελοποιΐας.

Φθόγγος μὲν οὖν ἐστι φωνῆς πλῶσις ἐμμελὴς ἐπὶ μίαν τάσιν.

Διάστημα δὲ, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο φθόγγων ἀνομοίων ὀξύτητι καὶ βαρύτητι.

Γένος δέ ἐστι ποιὰ τετράρων φθόγγων διαίρεσις.

Σύστημα δέ ἐστι, τὸ ἐκ πλειόνων ἢ ἑνὸς διαστημάτων συγκείμενον.

Τόνος δέ ἐστι τόπος τις τῆς φωνῆς, δεκτικὸς συστήματος, ἀπλατής.

Μεταβολὴ δέ ἐστιν ὁμοίου τινὸς εἰς ἀνόμοιον τόπον μετάθεσις.

Μελοποιΐα δέ ἐστι χρῆσις τῶν ὑποκειμένων τῇ ἁρμονικῇ πραγματείᾳ, πρὸς τὸ οἰκεῖον ἑκάστης ὑποθέσεως.

Ταῦτα δὲ θεωρεῖται ἐν φωνῆς ποιότητι, ἧς κινήσεις εἰσὶ δύο. ἡ μὲν συνεχής τε καὶ λογικὴ καλουμένη· ἡ δὲ διαστηματικήτε καὶ μελωδική. Ἡ μὲν οὖν συνεχὴς κίνησις τῆς φωνῆς τάς τε ἐπιτάσεις, καὶ τὰς ἀνέσεις ἀφανῶς ποιεῖται, μηδαμοῦ ἱσταμένη, ἢ μέχρι σιωπῆς· ἡ δὲ διαστηματικὴ κίνησις τῆς φωνῆς ἐναντίως κινεῖται τῇ συνεχεῖ· μονάς τε γὰρ ποιεῖ, καὶ τὰς μεταξὺ τούτων διαστάσεις. ἐναλλὰξ αὐτῶν ἑκάτερον τιθεῖσα. τὰς μὲν οὖν μονὰς, τάσεις καλοῦμεν· τὰς δὲ διαστάσεις, μεταβάσεις, τὰς δὲ ἀπὸ τάσεων ἐπὶ τάσεις. τὰ δὲ ποιοῦντα τὴν τῶν τάσεων διαφοράν, ἐπιτάσεις ἐστι καὶ ἄνεσις. ἀποτέλεσμα δὲ τούτων ὀξύτης καὶ βαρύτης. τὸ μὲν γὰρ διὰ ἐπιτάσεως γινόμενον, εἰς ὀξύτητα ἄγει· τὸ δὲ

HARMONICE eſt ſcientia, quæ modulatæ ſeriei naturam contemplatur, eamque effectui deſtinat. Modulata vero ſeries eſt, quæ ex ſonis & intervallis, ſecundum qualitatem ordinatis, componitur. Illius partes ſunt ſeptem. De ſonis. de intervallis. de generibus. de ſyſtematis. de tonis. de commutatione. de melopœia.

Sonus eſt vocis caſus, cantui aptus, in unam tenſionem.

Intervallum vero eſt, quod continetur duobus ſonis, acumine & gravitate differentibus.

Genus eſt quatuor ſonorum ſecundum qualitatem diſtributio.

Syſtema eſt, quod ex pluribus uno intervallis conſtat.

Tonus eſt locus quidam vocis, ſyſtematis capax, latitudine carens.

Commutatio eſt ſimilis alicujus in diſſimilem locum tranſpoſitio.

Melopœia eſt uſus eorum, quæ harmonicæ tractationi ſunt ſubjecta; ita ut cuilibet argumento character ſuus tribuatur.

Hæc vero conſiderantur in vocis qualitate, cujus duo ſunt motus. unus continuus vocatur, quo ſermocinantes utimur: alter intervallis diſcretus, quem in modulationibus adhibemus. Porro continuus vocis motus tam tenſiones quam remiſſiones efficit non apparentes, nullo in loco conſiſtens antequam deſinat. intervallis vero diſcretus vocis motus contra quam continuus obſervat motum: moras enim facit, quibus intervalla intercipiuntur: alternis vero utrumque illorum ponitur. moras itaque tenſiones vocamus: tranſitus vero à tenſionibus ad tenſiones, intervalla. cæterum quæ differentes illas tenſiones faciunt, intenſio ſunt ac remiſſio. quarum effectus ſunt acumen atque gravitas. nam quod fit intenſione, in acumen tendit: quod

vero remiſſione, ad gravitatem. acumen igitur eſt effectus intenſionis; ut contra gravitas, remiſſionis. utriſque enim accidit tenſiones eſſe conſecutum. tenſiones vero & ſoni pro eodem accipiuntur. tenſiones quidem ab inſtrumentis quæ tanguntur, à *tendendo* appellatæ: ſoni vero, quod à *voce* procreentur. atque illi quidem ob diverſas tenſiones ſunt innumeri: nominatim vero in quoque genere octodecim.

Genera ſunt tria; diatonum, chroma, harmonia. Ex his diatonum modulamur, ab acuto verſus grave, per tonum, & tonum, & hemitonium: contra, à gravi acutum verſus, per hemitonium, & tonum, & tonum. Chroma, in gravem ſonum, per triemitonium & hemitonium & hemitonium: in acumen, contrario modo, per hemitonium, & hemitonium, & triemitonium. Harmonia, in gravem ſonum, per ditonum, & dieſin, & dieſin: in acumen vero contra, per dieſin, & dieſin & ditonum.

Porro in diatono genere hi ſunt ſoni:

Proſlambanomenos.	Προσλαμβανόμενος.
Hypate hypaton.	Ὑπάτη ὑπάτων.
Parypate hypaton.	Παρυπάτη ὑπάτων.
Lichanos hypaton diatonos.	Λιχανὸς ὑπάτων διάτονος.
Hypate meſon.	Ὑπάτη μέσων.
Parypate meſon.	Παρυπάτη μέσων.
Lichanos meſon diatonos.	Λιχανὸς μέσων διάτονος.
Meſe.	Μέση.
Trite ſynemmenon.	Τρίτη συνημμένων.
Paranete ſynemmenon diatonos.	Παρανήτη συνημμένων διάτονος.
Nete ſynemmenon.	Νήτη συνημμένων.
Parameſe.	Παραμέση.
Trite diezeugmenon.	Τρίτη διεζευγμένων.
Paranete diezeugmenon diatonos.	Παρανήτη διεζευγμένων διάτονος.
Nete diezeugmenon.	Νήτη διεζευγμένων.
Trite hyperbolæon.	Τρίτη ὑπερβολαίων.
Paranete hyperbolæon diatonos.	Παρανήτη ὑπερβολαίων διάτονος.
Nete hyperbolæon.	Νήτη ὑπερβολαίων.
In chromate vero hi:	Ἐν δὲ χρώματι οἵδε·
Proſlambanomenos.	Προσλαμβανόμενος.
Hypate hypaton.	Ὑπάτη ὑπάτων.
Parypate hypaton.	Παρυπάτη ὑπάτων.
Lichanos hypaton chromatice.	Λιχανὸς ὑπάτων χρωματική.
Hypate meſon.	Ὑπάτη μέσων.
Parypate meſon.	Παρυπάτη μέσων.
Lichanos meſon chromatice.	Λιχανὸς μέσων χρωματική.
Meſe.	Μέση.
Trite ſynemmenon.	Τρίτη συνημμένων.
Paranete ſynemmenon chromatice.	Παρανήτη συνημμένων χρωματική.
Nete ſynemmenon.	Νήτη συνημμένων.
Parameſe.	Παραμέση.
Trite diezeugmenon.	Τρίτη διεζευγμένων.
Paranete diezeugmenon chromatice.	Παρανήτη διεζευγμένων χρωματική.
Nete diezeugmenon.	Νήτη διεζευγμένων.
Trite hyperbolæon.	Τρίτη ὑπερβολαίων.
Paranete hyperbolæon chromatice.	Παρανήτη ὑπερβολαίων χρωματική.
Nete hyperbolæon.	Νήτη ὑπερβολαίων.

δι' ἀνέσεως, εἰς βαρύτητα. καὶ ὀξύτης μὲν ἔν ἐστι, τὸ δι' ἐπιτάσεως γινόμενον ἀποτέλεσμα, βαρύτης δὲ, τὸ δι' ἀνέσεως. ἀμφοῖν γὰρ συμβέβηκε τὸ τετάσθαι. καλοῦνται δὲ τάσεις καὶ φθόγγοι. τάσεις μὲν ἀπὸ τῶν ἁπτομένων ὀργάνων, ἀφ' ὧν τὸ τετάσθαι· φθόγγοι δὲ, ἐπεὶ κατὰ φωνῆς ἐνεργοῦνται. φθόγγοι δὲ εἰσιν τῇ μὲν τάσει ἄπειροι· τῇ δὲ δυνάμει καθ' ἕκαστον γένος δεκαοκτώ.

Γένη δέ ἐστι τρία, διάτονον, χρῶμα, ἁρμονία. καὶ μελῳδεῖται τὸ μὲν διάτονον, ἀπὸ μὲν τοῦ βαρυτάτου, κατὰ τόνον, καὶ τόνον, καὶ ἡμιτόνιον· ἐπὶ δὲ τὸ ὀξὺ ἀνάπαλιν, καθ' ἡμιτόνιον, καὶ τόνον, καὶ τόνον. τὸ δὲ χρῶμα, ἐπὶ μὲν τὸ βαρὺ, κατὰ τριημιτόνιον, καὶ ἡμιτόνιον, καὶ ἡμιτόνιον· ἐπὶ δὲ τὸ ὀξὺ ἀνάπαλιν, καθ' ἡμιτόνιον, καὶ ἡμιτόνιον, καὶ τριημιτόνιον. ἡ δὲ ἁρμονία, ἐπὶ μὲν τὸ βαρὺ, κατὰ δίτονον, καὶ δίεσιν, καὶ δίεσιν· ἐπὶ δὲ τὸ ὀξὺ ἀνάπαλιν, κατὰ δίεσιν, καὶ δίεσιν, καὶ δίτονον.

Εἰσὶ δὲ οἱ μὲν ἐν τῷ διατόνῳ φθόγγοι οἵδε·

Ἐν δὲ ἁρμονίᾳ οἵδε·
Προσλαμβανόμενος.
Ὑπάτη ὑπατῶν.
Παρυπάτη ὑπατῶν.
Λιχανὸς ὑπατῶν ἐναρμόνιος.
Ὑπάτη μέσων.
Παρυπάτη μέσων.
Λιχανὸς μέσων ἐναρμόνιος.
Μέση.
Τρίτη συνημμένων.
Παρανήτη συνημμένων ἐναρμόνιος.
Νήτη συνημμένων.
Παραμέση.
Τρίτη διεζευγμένων.
Παρανήτη διεζευγμένων ἐναρμόνιος.
Νήτη διεζευγμένων.
Τρίτη ὑπερβολαίων.
Παρανήτη ὑπερβολαίων ἐναρμόνιος.
Νήτη ὑπερβολαίων.

In harmonia denique hi:
Proſlambanomenos.
Hypate hypaton.
Parypate hypaton.
Lichanos hypaton enarmonios.
Hypate meſon.
Parypate meſon.
Lichanos meſon enarmonios.
Meſe.
Trite ſynemmenon.
Paranete ſynemmenon enarmonios.
Nete ſynemmenon.
Parameſe.
Trite diezeugmenon.
Paranete diezeugmenon enarmonios.
Nete diezeugmenon.
Trite hyperbolæon.
Paranete hyperbolæon enarmonios.
Nete hyperbolæon.

Κατὰ δὲ μίξιν τῶν γενῶν οἵδε·
Προσλαμβανόμενος.
Ὑπάτη ὑπατῶν.
Παρυπάτη ὑπατῶν.
Λιχανὸς ὑπατῶν ἐναρμόνιος.
Λιχανὸς ὑπατῶν χρωματική.
Λιχανὸς ὑπατῶν διάτονος.
Ὑπάτη μέσων.
Παρυπάτη μέσων.
Λιχανὸς μέσων ἐναρμόνιος.
Λιχανὸς μέσων χρωματική.
Λιχανὸς μέσων διάτονος.
Μέση.
Τρίτη συνημμένων.
Παρανήτη συνημμένων ἐναρμόνιος.
Παρανήτη συνημμένων χρωματική.
Παρανήτη συνημμένων διάτονος.
Νήτη συνημμένων.
Παραμέση.
Τρίτη διεζευγμένων.
Παρανήτη διεζευγμένων ἐναρμόνιος.
Παρανήτη διεζευγμένων χρωματική.
Παρανήτη διεζευγμένων διάτονος.
Νήτη διεζευγμένων.
Τρίτη ὑπερβολαίων.
Παρανήτη ὑπερβολαίων ἐναρμόνιος.
Παρανήτη ὑπερβολαίων χρωματική.
Παρανήτη ὑπερβολαίων διάτονος.
Νήτη ὑπερβολαίων.

Porro ſi miſceantur genera, hi:
Proſlambanomenos.
Hypate hypaton.
Parypate hypaton.
Lichanos hypaton enarmonios.
Lichanos hypaton chromatice.
Lichanos hypaton diatonos.
Hypate meſon.
Parypate meſon.
Lichanos meſon enarmonios.
Lichanos meſon chromatice.
Lichanos meſon diatonos.
Meſe.
Trite ſynemmenon.
Paranete ſynemmenon enarmonios.
Paranete ſynemmenon chromatice.
Paranete ſynemmenon diatonos.
Nete ſynemmenon.
Parameſe.
Trite diezeugmenon.
Paranete diezeugmenon enarmonios.
Paranete diezeugmenon chromatice.
Paranete diezeugmenon diatonos.
Nete diezeugmenon.
Trite hyperbolæon.
Paranete hyperbolæon enarmonios.
Paranete hyperbolæon chromatice.
Paranete hyperbolæon diatonos.
Nete hyperbolæon.

Τῶν δὲ ἐξηριθμημένων φθόγγων οἱ μέν εἰσιν ἑστῶτες· οἱ δὲ κινούμενοι. ἑστῶτες μὲν οὖν εἰσιν, ὅσοι ἐν ταῖς τῶν γενῶν διαφοραῖς οὐ μεταπίπτουσιν, ἀλλὰ μένουσιν ἐπὶ μιᾶς τάσεως. κινούμενοι δὲ, ὅσοι τἐναντίον πεπόνθασιν. ἐν γὰρ ταῖς τῶν γενῶν διαφοραῖς μεταβάλλουσιν, οὐδὲ μένουσιν ἐπὶ μιᾶς τάσεως.

Horum vero, quos recenſuimus, ſonorum alii ſunt ſtantes: alii mobiles. ſtantes ſunt, qui in diverſis generibus loca non mutant, ſed in una tenſione conſiſtunt. mobiles vero, quibus contrarium accidit. in diverſis enim generibus diverſa habent loca, nec in una tenſione conſiſtunt.

Εἰσὶν οὖν οἱ μὲν ἑστῶτες ὀκτὼ οἵδε·
Προσλαμβανόμενος.

Stantes itaque hi octo numerantur:
Proſlambanomenos.

Hypate hypaton.
Hypate meſon.
Meſe.
Nete ſynemmenon.
Parameſe.
Nete diezeugmenon.
Nete hyperbolæon.

Υπάτη ὑπατῶν.
Υπάτη μέσων.
Μέση.
Νήτη συνημμένων.
Παραμέση.
Νήτη διεζευγμένων.
Νήτη ὑπερβολαίων.

Mobiles autem, qui media inter hoſce loca occupant. Rurſus ſtantium alii ſunt barypycni: alii apycni, qui perfecta ſyſtemata continent. Barypycni ſunt hi quinque:

Κινούμενοι δὲ, οἱ ἀνὰ μέσον τούτων πάντες. Τῶν δὲ ἑστώτων οἱ μὲν εἰσι βαρύπυκνοι· οἱ δὲ ἄπυκνοι, τὰ τέλεια συστήματα περιέχοντες. Βαρύπυκνοι μὲν οὖν εἰσι πέντε οἵδε·

Hypate hypaton.
Hypate meſon.
Meſe.
Parameſe.
Nete diezeugmenon.

Υπάτη ὑπατῶν.
Υπάτη μέσων.
Μέση.
Παραμέση.
Νήτη διεζευγμένων.

Apycni, qui perfecta ſyſtemata continent, hi tres ſequentes:

Ἄπυκνοι δὲ, καὶ περιέχοντες τὰ τέλεια συστήματα, οἱ λοιποὶ τρεῖς οἵδε·

Proſlambanomenos.
Nete ſynemmenon.
Nete hyperbolæon.

Προσλαμβανόμενος.
Νήτη συνημμένων.
Νήτη ὑπερβολαίων.

Mobilium alii ſunt meſopycni; alii oxypycni; alii diatoni.

Τῶν δὲ κινουμένων οἱ μὲν εἰσι μεσόπυκνοι, οἱ δὲ ὀξύπυκνοι, οἱ δὲ διάτονοι.

Mmeſopycni ſunt hi quinque:

Μεσόπυκνοι μὲν οὖν εἰσι πέντε οἵδε·

Parypate hypaton.
Parypate meſon.
Trite ſynemmenon.
Trite diezeugmenon.
Trite hyperbolæon.

Παρυπάτη ὑπατῶν.
Παρυπάτη μέσων.
Τρίτη συνημμένων.
Τρίτη διεζευγμένων.
Τρίτη ὑπερβολαίων.

Oxypycni ſimiliter in ſingulis generibus numerantur quinque. nimirum in harmonia enarmonii: in chromate, chromatici. ſed diatonum de ſpiſſi natura non participat.

Οξύπυκνοι δὲ ὁμοίως κατὰ γένος πέντε. ἐν μὲν ἁρμονίᾳ οἱ ἐναρμόνιοι· ἐν δὲ χρώματι οἱ χρωματικοί. τὸ γὰρ διάτονον ἀμετέχει πυκνότητος.

In harmonia itaque ſunt hi:

Εἰσὶν οὖν οἱ μὲν ἐν τῇ ἁρμονίᾳ οἵδε·

Lichanos hypaton enarmonios.
Lichanos meſon enarmonios.
Paranete ſynemmenon enarmonios.
Paranete diezeugmenon enarmonios.
Paranete hyperbolæon enarmonios.

Λιχανὸς ὑπατῶν ἐναρμόνιος.
Λιχανὸς μέσων ἐναρμόνιος.
Παρανήτη συνημμένων ἐναρμόνιος.
Παρανήτη διεζευγμένων ἐναρμόνιος.
Παρανήτη ὑπερβολαίων ἐναρμόνιος.

Deinde in chromate hi:

Ἐν δὲ τῷ χρώματι, οἵδε·

Lichanos hypaton chromatice.
Lichanos meſon chromatice.
Paranete ſynemmenon chromatice.
Paranete diezeugmenon chromatice.
Paranete hyperbolæon chromatice.

Λιχανὸς ὑπατῶν χρωματική.
Λιχανὸς μέσων χρωματική.
Παρανήτη συνημμένων χρωματική.
Παρανήτη διεζευγμένων χρωματική.
Παρανήτη ὑπερβολαίων χρωματική.

Intervallorum differentiæ ſunt quinque. nam & magnitudine inter ſe differunt, & genere; & ut conſona à diſſonis: deinde ut compoſita ab incompoſitis; & *tandem* ut rationalia ab irrationalibus. eſt autem *per magnitudinem differentia*, qua intervallorum quædam ſunt majora, quædam minora: ut ditonum, triemitonium, tonus, hemitonium, dieſis, diateſſaron, diapente, diapaſon, & ſimilia. *differentia per genus eſt*, qua intervallorum alia ſunt diatona; alia chromatica, alia enarmonia. differentia *per conſona & diſſona* eſt, qua intervallorum alia ſunt conſona, alia diſſona. conſona ſunt, diateſſaron, diapente, diapaſon, & ſimilia. diſſona

Τῶν δὲ διαστημάτων διαφοραί εἰσι πέντε. ἤτε μεγέθει ἀλλήλων διαφέρει, ἤτε κατὰ γένος· καὶ ἢ τὰ σύμφωνα τῶν διαφώνων, καὶ τὰ συνθετὰ τῶν ἀσυνθέτων, καὶ τὰ ῥητὰ τῶν ἀλόγων. ἡ μὲν οὖν κατὰ τὸ μεγέθος ἐστὶ, καθ' ἣν ἃ μὲν ἐστι μείζονα τῶν διαστημάτων, ἃ δὲ ἐλάττονα, οἷον δίτονον, τριημιτόνιον, τόνος, ἡμιτόνιον, δίεσις, διὰ τεσσάρων, διὰ πέντε, διὰ πασῶν, καὶ τὰ ὅμοια. ἡ δὲ κατὰ γένος, καθ' ἣν ἃ μέν ἐστι τῶν διαστημάτων διατονικὰ, ἃ δὲ χρωματικὰ, ἃ δὲ ἐναρμόνια. ἡ δὲ τῷ συμφώνῳ, καθ' ἣν ἃ μέν ἐστι τῶν διαστημάτων σύμφωνα, ἃ δὲ διάφωνα. σύμφωνα μὲν οὖν ἐστι, διὰ τεσσάρων, διὰ πέντε, διὰ πασῶν, καὶ τὰ ὅμοια. διάφωνα δὲ

δὲ τὰ ἐλάττονα τῶ διὰ τεσσάρων, ἢ τὰ μεταξὺ τῶν συμφώνων πάντα. ἐλάττονα μὲν οὖν ἐστὶ τὸ διὰ τεσσάρων, διέσεως, ἡμιτονίου, τόνου, τριημιτονίου, διτόνου. μεταξὺ δὲ τῶν συμφώνων, τρίτονον, τετράτονον, πεντάτονον, καὶ τὰ ὅμοια. ἔστι δὲ συμφωνία μὲν, κρᾶσις δύο φθόγγων, ὀξυτέρου, καὶ βαρυτέρου. διαφωνία δὲ τοὐναντίον, δύο φθόγγων ἀμιξία, μὴ οἷόν τε κραθῆναι, ἀλλὰ τραχυνθῆναι τὴν ἀκοήν. ἡ δὲ συνθέτου ἐστὶ διαφορὰ, καθ' ἣν τὰ μέν ἐστι τῶν διαστημάτων ἀσύνθετα· τὰ δὲ σύνθετα. ἀσύνθετα μὲν οὖν διαστήματά ἐστι, τὰ ὑπὸ τῶν ἑξῆς φθόγγων περιεχόμενα, οἷον ὑπάτης καὶ παρυπάτης· καὶ λιχανὸς καὶ ὑπάτης μέσων. ὁ αὐτὸς λόγος καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν διαστημάτων. σύνθετα δὲ τὰ ὑπὸ τῶν μὴ ἑξῆς, οἷον μέσης καὶ παρυπάτης, μέσης καὶ νήτης, συναμμένης δὲ ὑπάτης. ἔστι δέ τινα κοινὰ συνθέτου καὶ ἀσυνθέτου διαστήματα, τὰ ὑπὸ ἡμιτονίου μέχρι διτόνου. τὸ μὲν γὰρ ἡμιτόνιόν ἐστιν ἐν ἁρμονίᾳ σύνθετον· ἐν δὲ χρώματι καὶ διατόνῳ ἀσύνθετον. ὁ τόνος ἐν μὲν χρωματι σύνθετος, ἐν δὲ διατόνῳ ἀσύνθετος. τὸ τριημιτόνιον ἐν μὲν χρώματι ἀσύνθετον, ἐν δὲ διατόνῳ σύνθετον. τὸ δίτονον ἐν μὲν ἁρμονίᾳ ἀσύνθετον, ἐν δὲ χρώματι καὶ διατόνῳ σύνθετον. τὰ δὲ ἐλάττω τοῦ ἡμιτονίου πάντα ἐστὶν ἀσύνθετα. ὁμοίως δὲ καὶ τὰ μείζω τοῦ διτόνου πάντα σύνθετα. ἡ δὲ τοῦ ῥητοῦ καὶ ἀλόγου διαφορά ἐστι, καθ' ἣν τῶν διαστημάτων τὰ μέν ἐστι ῥητὰ, τὰ δὲ ἄλογα. ῥητὰ μὲν οὖν ἐστιν, ὧν οἷόν τ' ἐστὶ τὰ μεγέθη δοθῆναι, οἷον τόνου, ἡμιτονίου, διτόνου, τριτόνου, καὶ τὰ ὅμοια· ἄλογα δὲ τὰ τοῖς εἰρημένοις ταῦτα τὰ μεγέθη ὅτι τὸ μεῖζον ἢ ὅτι τὸ ἔλαττον, ἀλόγῳ τινὶ μεγέθει.

Γένη δέ ἐστι τρία τὰ προειρημένα. πᾶν γὰρ ἔσται μέλος ἤτοι διατονικὸν, ἢ χρωματικὸν, ἢ ἐναρμόνιον, ἢ κοινὸν, ἢ μικτὸν ἐκ τούτων. διατονικὸν μὲν οὖν ἐστι τὸ τῇ διατονικῇ διαιρέσει χρώμενον. χρωματικὸν δὲ, τὸ τῇ χρωματικῇ. ἐναρμόνιον δὲ, τὸ τῇ ἐναρμονίῳ. κοινὸν δὲ τὸ ἐκ τῶν ἑστώτων συγκείμενον. μικτὸν δὲ, τὸ ἐν ᾧ δύο ἢ τρεῖς χαρακτῆρες γλυκεῖς ἐμφαίνονται, οἷον διατόνου καὶ χρώματος, ἢ διατόνου καὶ ἁρμονίας, ἢ χρώματος καὶ ἁρμονίας, ἢ καὶ διατόνου, καὶ χρώματος καὶ ἁρμονίας. γίνονται δὲ αἱ τῶν γενῶν διαφοραὶ κατὰ τὰς κινουμένας τῶν φθόγγων. κινεῖται δὲ ἡ μὲν λιχανὸς ἐν τονιαίῳ τόπῳ. ἡ δὲ παρυπάτη ἐν διεσιαίῳ· λιχανὸς μὲν οὖν ἐστιν ὀξυτάτη, ἡ τόνον ἀπὸ τοῦ ὀξυτέρου ἀπέχουσα τοῦ τὸ τετράχορδον περιεχόντων· βαρυτάτη δὲ, ἡ δίτονον. ὁμοίως δὲ καὶ παρυπάτη ἐστὶ βαρυτάτη μὲν, ἡ δίεσιν ἀπὸ τοῦ βαρυτέρου τῶν τετράχορδον περιεχόντων ἀπέχουσα· ὀξυτάτη δὲ, ἡ ἡμιτόνιον ἀπέχουσα. χρόα δέ ἐστι γένους εἰδικὴ διαίρεσις. χρόαι δέ εἰσιν αἱ ῥηταὶ καὶ γνώριμοι ἓξ· ἁρμονίας μία, χρώματος τρεῖς, διατόνου δύο. ἡ μὲν οὖν τῆς ἁρμονίας τῇ αὐτῇ ἐστὶ γένους διαιρέσει καὶ αὐτὸ κέχρηται· μελῳδεῖται γὰρ κατὰ δίεσιν τὸ τεταρτημόριον τόνου, καὶ δίεσιν τὴν ἴσην, καὶ δίτονον ἀσύνθετον. τῶν δὲ χρωματικῶν διαιρέσεων τὸ μὲν καλεῖται μαλακὸν χρῶμα, τὸ δὲ

vero, quæ diatessaron consonantia sunt minora, quæque inter consona interponuntur, omnia. & quidem minora quam diatessaron sunt; diesis, hemitonium, tonus, triemitonium, ditonum. inter consona vero, tritonum, tetratonum, pentatonum, & similia. porro consonantia est mistio duorum sonorum, acuti scilicet & gravis. dissonantia contra est in duobus sonis mistionis fuga, qui cum misceri recusent asperitate quadam aures lædunt. compositi differentia est, qua intervallorum alia sunt incomposita, alia composita. incomposita itaque intervalla sunt, quæ à sonis deinceps positis continentur, ut est intervallum ab hypate & parypate comprehensum: item à lichano & hypate meson. eadem ratio obtinet in reliquis intervallis. composita vero sunt, quæ à sonis non deinceps positis comprehenduntur; ut à mese & parypate, mese & nete, parамese & hypate. sunt deinde quædam intervalla communia, quæ compositi atque incompositi naturam obtinent, sc. ab hemitonio ad ditonum omnia. quippe hemitonium in harmonia est compositum: in chromate & diatono incompositum. tonus in chromate est compositus; in diatono incompositus. triemitonium in chromate est incompositum; in diatono compositum. ditonum in harmonia est incompositum; in chromate & diatono compositum. quæ vero sunt hemitonio minora intervalla, omnia sunt incomposita. ut contra omnia ditono majora sunt composita. rationabilis & irrationabilis differentia est, qua intervallorum alia sunt rationabilia, alia irrationabilia. rationabilia sunt, quorum magnitudines exhibere possumus: ut tonus, hemitonium, ditonum, tritonum, & similia: irrationabilia, quæ hasce magnitudines variant vel in majus, vel in minus, magnitudine aliqua irrationabili.

Genera sunt tria illa prædicta. omnis itaque cantus aut diatonicus erit, aut chromaticus, aut enarmonius, aut communis, aut etiam ex hisce mistus. diatonicus est, qui divisione utitur diatonica. chromaticus, qui chromatica. enarmonius, qui enarmonia. communis qui ex sonis stantibus est compositus. mistus, in quo duorum aut trium generum characteres cernuntur: ex. gr. diatoni & chromatis; aut diatoni & harmoniæ; aut chromatis, & harmoniæ; aut etiam diatoni, chromatis & harmoniæ. Fiunt autem generum differentiæ à sonis mobilibus. & quidem lichanus movetur in loco, qui saltem capiat tonum. parypate, in loco qui capiat diesin. est itaque acutissima lichanus, quæ tono distat ab acutiore eorum, qui tetrachordum comprehendunt: gravissima vero, quæ ditono. eodem modo gravissima est parypate, quæ distat diesi à graviore eorum, quæ tetrachordum includunt: acutissima vero, quæ distat hemitonio. Color est generis divisio specialis. sunt vero rationabiles & noti colores sex: harmoniæ unus, tres chromatis, diatoni duo. harmoniæ color eadem, qua genus ipsum, divisione utitur. canitur enim per diesin, quæ est toni pars quarta, & diesin, priori æqualem, & ditonum incompositum. porro ex chromaticis divisionibus aliud vocatur chroma molle; aliud

ſeſcuplum, aliud toniæum. & quidem chroma molle canitur per dieſin, quæ eſt toni pars tertia, & dieſin illi æqualem, & intervallum incompoſitum, quod æquale eſt tono, ejuſque dimidio & trienti. ſeſquialterum, per dieſin, quæ ſit ſeſquialtera enarmoniæ dieſeos, & dieſin priori æqualem, & intervallum incompoſitum, conſtans ex ſeptem dieſibus, quarum quælibet ſit toni pars quarta. toniæum chroma eodem, quo genus, utitur colore. quippe canitur per hemitonium, & hemitonium, & triemitonium. atque hæc ſic explicata chromata appellationes habent ab iis, quæ ipſis inſunt, ſpiſſis. toniæum enim appellatur ab eo, qui in ipſo eſt per compoſitionem, tono. & ſeſquialterum, à dieſibus, quæ in ipſo ſunt, ſeſcuplis dieſium enarmoniarum. eodem modo chroma ſpiſſi minimi molle dicitur, quoniam, quod in ipſo eſt, ſpiſſum remittitur, & tantum non plane enervatur. diatonicarum diviſionum alia nuncupatur diatonum molle; alia, ſyntonum. diatoni mollis color canitur per hemitonium, & per trium dieſium incompoſitum intervallum, & per quinque dieſium ſimiliter incompoſitum intervallum. diatoni ſyntoni color communem habet cum ſuo genere diviſionem. canitur enim per hemitonium, & tonum, & tonum. ſed & in numeris monſtrantur illi colores, hoc modo: ſupponitur tonus in minimas duodecim partes diviſus, quarum quælibet duodecima pars toni appellatur. atque eadem ratione, qua tonus, reliqua dividuntur intervalla. nempe hemitonium in ſex partes duodecimas: dieſis quadrantalis in tres: dieſis trientalis in quatuor: totum diateſſaron in triginta. harmonia itaque canetur per magnitudinem trium partium duodecimarum, & trium, & viginti quatuor. chroma molle per magnitudinem quatuor partium duodecimarum, & quatuor & viginti duarum, ſeſquialterum chroma per magnitudinem partium duodecimarum quatuor ſemis, & quatuor ſemis, & viginti unius. toniæum chroma per ſex, & ſex, & octodecim. diatonum molle per ſex, & novem, & quindecim. ſyntonum per ſex, & duodecim, & duodecim.

Syſtematum differentiæ ſunt ſeptem, quarum quatuor eædem ſunt, quæ in intervallis conſiderantur. nimirum, *differentia per magnitudinem*; *per genus*; *item differentia conſoni & & diſſoni*; *tum rationabilis & irrationabilis*. tres vero ſunt peculiares ſyſtematum differentiæ; nempe, *ordine procedentis & præpoſteri*; *conjuncti & disjuncti*; *immutabilis & mutabilis*. *magnitudine* igitur *differunt* majora ſyſtemata à minoribus, ut diapaſon à tritono, aut diapente, aut diateſſaron, aut ſimilibus. *genere differunt* diatonica ab enarmoniis aut chromaticis: aut chromatica aut enarmonia à cæteris. *conſoni differentia*, ut quæ à conſonis ſonis continentur, differunt ab iis, quæ à diſſonis. conſona vero ſyſtemata in immutabili ſyſtemate ſunt ſex; quorum minimum eſt diateſſaron, tonorum duorum ſemis, cujuſmodi eſt ab hypate hypaton ad hypaten meſon. alterum eſt diapente, tono-

ἡμιόλιον, τὸ δὲ τονιαῖον. τὸ μὲν ἓν μαλακὸν χρῶμα μελῳδεῖται κατὰ δίεσιν τὴν τριτημόριον τόνου, καὶ δίεσιν τὴν ἴσην, ⸗ ἴσον τόνῳ καὶ τῷ ἡμίσει, καὶ τρίτῳ, ἀσυνθέτου διάστημα. τὸ δὲ ἡμιόλιον, κατὰ δίεσιν, ἡμιόλιον τ᾽ ἐναρμονίου διέσεως, καὶ δίεσιν τὴν ἴσην, καὶ ἑπτὰ διέσεων τεταρτημορίων ἀσυνθέτου διάστημα, τὸ δὲ τονιαῖον χρῶμα τῇ αὐτῇ τὸ γένος κέχρηται) χρόᾳ. μελῳδεῖται γὰρ κατὰ ἡμιτόνιον, καὶ ἡμιτόνιον, καὶ τριημιτόνιον. κέκληται) δὲ τὰ εἰρημένα χρώματα ἀπὸ τῶν ἐνυπαρχόντων αὐτοῖς πυκνῶν. τό, τε γὰρ τονιαῖον ἀπὸ τοῦ ἐνυπάρχοντος αὐτῷ κατὰ συνθέσεως τόνου. καὶ ἡμιόλιον, ἀπὸ τῶν ἐνυπαρχόντων αὐτῷ διέσεων, ἡμιολίων τ᾽ ἐναρμονίων διέσεων. μαλακὸν δὲ ὃ ἐλαχίστας πυκνὸς, ὡσαύτως καὶ χρῶμα, ἐπειδὴ τὸ ἐν αὐτῷ πυκνὸν χρῶμα ἀνίεταί τε καὶ ἐκλύεται. τῶν δὲ διατονικῶν διαιρέσεων τὸ μὲν διάτονον μαλακὸν καλεῖται· τὸ δὲ, συντονον. ἡ μὲν οὖν ὃ μαλακὸς διάτονος χρόα μελῳδεῖται κατὰ ἡμιτόνιον, καὶ τριῶν διέσεων ἀσυνθέτων διάστημα, καὶ κατὰ πέντε διέσεων ὁμοίως ἀσυνθέτων διάστημα. ἡ δὲ τοῦ συντόνου διατόνου τῇ αὐτῇ τοῦ γένους ἀπεικονίζει διαιρέσει. μελῳδεῖται γὰρ καθ᾽ ἡμιτόνιον, καὶ τόνον, καὶ τόνον. δείκνυται δὲ καὶ ἀριθμῷ αἱ χρόαι τ᾽ τρόπον τοῦτον· ὑποτίθεται γὰρ ὁ τόνος εἰς δώδεκά τινα ἐλάχιστα μέρεα διαιρούμενος, ὧν ἕκαστον δωδεκατημόριον τοῦ καλεῖται. ἀναλόγως δὲ τῷ τόνῳ καὶ τὰ λοιπὰ διαστήματα. τὸ μὲν γὰρ ἡμιτόνιον εἰς ἓξ δωδεκατημόρια· ἡ δὲ δίεσις, ἡ μὲν τεταρτημόριος, εἰς τρία· ἡ δὲ τεταρτημόριος, εἰς τέσσαρα· ὅλον δὲ τὸ διὰ τεσσάρων εἰς τριάκοντα. ἡ μὲν οὖν ἁρμονία μελῳδηθήσεται κατὰ τριῶν δωδεκατημορίων μέγεθος, καὶ τριῶν, καὶ εἰκοσιτεσσάρων. τὸ δὲ μαλακὸν χρῶμα, κατὰ τεσσάρων, καὶ τεσσάρων, ⸗ εἰκοσιδυοῖν. τὸ δ᾽ ἡμιόλιον χρῶμα κατὰ τεσσάρων ἥμισυ, καὶ τεσσάρων ἥμισυ, καὶ εἰκοσιενός· τὸ δὲ τονιαῖον χρῶμα, κατὰ ἓξ, καὶ ἓξ, καὶ ὀκτωκαίδεκα. τὸ δὲ μαλακὸν διάτονον, κατὰ ἓξ, καὶ ἐννέα, καὶ δεκαπέντε· τὸ δὲ συντονον κατὰ ἓξ, καὶ δώδεκα, καὶ δώδεκα.

Τῶν δὲ συνημάτων διαφοραὶ εἰσὶν ἑπτά· τέσσαρες μὲν αἱ αὐταὶ τοῖς διαστήμασιν, ἥτε κατὰ μέγεθος, καὶ ἡ κατὰ γένος, καὶ ἡ τοῦ συμφώνου καὶ διαφώνου, καὶ ἡ τοῦ ῥητοῦ καὶ ἀλόγου. τρεῖς δὲ ἴδιαι τῶν συνημάτων διαφοραί εἰσιν, ἡ τοῦ ἐξῆς, καὶ τοῦ ὑπερβατοῦ, καὶ ἡ ὃ συνημμένου καὶ διεζευγμένου, καὶ ἡ τοῦ ἀμεταβόλου καὶ ἐμμεταβόλου. μεγέθη μὲν οὖν διαφέρει τὰ μείζω συνήματα τῶν ἐλαττόνων, καθάπερ τὸ διὰ πασῶν ὃ τριῶν, ἢ διὰ πέντε, ἢ διὰ τεσσάρων, ἢ τῶν ὁμοίων. γένει δὲ τὰ διατονικὰ τῶν ἐναρμονίων, ἢ χρωματικῶν· ἢ τὰ χρωματικὰ ἢ ἐναρμόνια τῶν λοιπῶν. τῇ δὲ τοῦ συμφώνου καὶ διαφώνου τὰ ὑπὸ τῶν συμφώνων φθόγγων περιεχόμενα τῶν ὑπὸ διαφώνων. σύμφωνα δέ ἐστιν ἐν τῷ ἀμεταβόλῳ συνήματι ἓξ· ἐλάχιστον μὲν τὸ διὰ τεσσάρων, τινῶν δύο ἡμίσεως, οἷόν ἐστι τὸ ἀπὸ ὑπάτης ὑπατῶν ἐπὶ ὑπάτην μέσων. δεύτερον δὲ τὸ διὰ πέντε, τὸ

γὰρ

νων τριῶν ἡμίσεως· οἷόν ἐστι τὸ ἀπὸ προσλαμβανομένης ἐπὶ ὑπάτην μέσων. τρίτον δὲ τὸ δι᾽ ὅλων, τόνων ἕξ· οἷόν ἐστι τὸ ἀπὸ προσλαμβανομένης ἐπὶ μέσην. τέταρτον δὲ τὸ δι᾽ ὅλων καὶ δι᾽ τεσσάρων, τόνων ὀκτὼ ἡμίσεως· οἷόν ἐστι τὸ ἀπὸ προσλαμβανομένης ἐπὶ νήτην συνημμένων, ἢ παρανήτην διεζευγμένων διάτονον. πέμπτον δὲ τὸ δὶς διὰ πασῶν καὶ διὰ πέντε, τόνων ἐννέα ἡμίσεως· οἷόν ἐστι τὸ ἀπὸ προσλαμβανομένης ἐπὶ νήτην διεζευγμένων. ἕκτον δὲ τὸ δὶς δι᾽ πασῶν, τόνων δώδεκα· οἷόν ἐστι τὸ ἀπὸ προσλαμβανομένης ἐπὶ νήτην ὑπερβολαίων. τὸ δὲ συνημμένων καλούμενον σύστημα προέισι μέχρι τετάρτης συμφώνου. τὸ δὲ διεζευγμένων μέχρι πέμπτης συμφώνου· καὶ τὸ τῶν ὑπερβολαίων μέχρι ἕκτης. πρῶτον γὰρ αὐτῶν τὸ διὰ τεσσάρων. δεύτερον, τὸ διὰ πέντε. τρίτον, τὸ διὰ πασῶν. τέταρτον, τὸ διὰ πασῶν καὶ διὰ τεσσάρων. πέμπτον, τὸ δὶς διὰ πασῶν ⁊ διὰ πέντε. ἕκτον, τὸ δὶς διὰ πασῶν. ὁ δὲ τῆς φωνῆς τόπος αὐξεῖ μέχρι τῆς ὀγδόης συμφώνου, ὅπερ ἐστὶ δὶς διὰ πασῶν καὶ διὰ τεσσάρων, καὶ δὶς διὰ πασῶν καὶ διὰ πέντε. διάφωνα δέ ἐστι, τέτταρα ἐλάττω ἢ διὰ τεσσάρων, καὶ μεταξὺ τῶν εἰρημένων συμφώνων πάντα. γίνεται δὲ καὶ σχήματα ἐξ αὐτῶν μεγέθους ὄντος τοῦ αὐτοῦ ἀσυνθέτων συγκείμενα καὶ ἀριθμῷ, εἰ ἡ τάξις αὐτῶν ἀλλοίωσιν λάβοι, ἐνυπάρχοντός τινος ἀνομοίου. τοῦ γὰρ ἐξ ἴσων πάντων, ἢ ὁμοίων σχημάτων, ἀλλοίωσιν οὐ ποιεῖ. τοῦ μὲν οὖν διὰ τεσσάρων τρία εἴδη. πρῶτον μὲν τὸ ὑπὸ βαρυπύκνων περιεχόμενον, οἷόν ἐστι τὸ ἀπὸ ὑπάτης ὑπατῶν ἐπὶ ὑπάτην μέσων. δεύτερον τὸ ὑπὸ μεσοπύκνων περιεχόμενον, οἷόν ἐστι τὸ ἀπὸ παρυπάτης ὑπατῶν ἐπὶ παρυπάτην μέσων. τρίτον δὲ τὸ ὑπὸ ὀξυπύκνων περιεχόμενον· οἷόν ἐστι τὸ ἀπὸ λιχανοῦ ὑπατῶν ἐπὶ λιχανὸν μέσων. ἐν μὲν οὖν ἁρμονίᾳ καὶ χρώματι διὰ τὴν τοῦ πύκνου σχέσιν τὰ σχήματα τῶν συμφώνων λαμβάνεται· ἐν δὲ διατόνῳ ἐπὶ πυκνοῦ οὐ γίνεται. διαιρεῖται δὲ τὸ γένος τοῦτο εἰς ἡμιτόνια καὶ τόνους. ὑπάρχει δὲ ἐν τῇ διατεσσάρων συμφωνίᾳ ἡμιτόνιον μὲν ἕν, τόνοι δὲ δύο. ὁμοίως δὲ καὶ τῷ διὰ πέντε, ἡμιτόνιον μὲν ἕν, τόνοι δὲ τρεῖς. ἐν δὲ τῷ διὰ πασῶν ἡμιτόνια μὲν δύο, τόνοι δὲ πέντε. πρὸς δὲ τὴν τῶν ἡμιτονίων σχέσιν τὰ σχήματα θεωρεῖται. τοῦ οὖν διὰ τεσσάρων πρῶτον μέν ἐστιν εἶδος, οὗ τὸ ἡμιτόνιον ἐπὶ τοῦ βαρυτάτων τόνων κεῖται. δεύτερον δέ, οὗ μέσον τοῦ τόνου. τρίτον, οὗ πρῶτον ἐπὶ τοῦ ὀξυτάτου τῶν τόνων. ἔχει δὲ καὶ ταῦτα ὁμοίως τοῖς λοιποῖς τοῖς γένεσιν ἀπὸ τῶν αὐτῶν φθόγγων ἐπὶ τοὺς αὐτούς. τοῦ δὲ διὰ πέντε τέσσαρα ἐστὶ σχήματα. πρῶτον μὲν τὸ ὑπὸ βαρυπύκνων περιεχόμενον, οὗ πρῶτος ὁ τόνος ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἔστι δὲ ἀπὸ ὑπάτης μέσων ἐπὶ παραμέσην. δεύτερον δέ, τὸ ὑπὸ μεσοπύκνων περιεχόμενον, οὗ δεύτερος ὁ τόνος ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἔστι δὲ ἀπὸ παρυπάτης μέσων ἐπὶ τρίτην διεζευγμένων. τρίτον δέ, τὸ ὑπὸ ὀξυπύκνων περιεχόμενον, οὗ τρίτος ὁ τόνος ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἔστι δὲ ἀπὸ λιχανοῦ μέσων ἐπὶ παρανήτην διεζευγμένων. τέταρτον δέ, τὸ ὑπὸ βαρυπύκνων περιεχόμενον, οὗ τέταρτος ὁ τόνος ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἔστι δὲ ἀπὸ μέσης ἐπὶ

rum trium ſemis: ut eſt à proſlambanomeno ad hypaten meſon. tertium eſt diapaſon, tonorum ſex: quale eſt à proſlambanomeno ad meſen. quartum, diapaſon & diateſſaron, tonorum octo ſemis: veluti eſt à proſlambanomeno ad neten ſynemmenon, aut paraneten diezeugmenon diatonon. quintum, diapaſon & diapente, tonorum novem ſemis: cujuſmodi eſt à proſlambanomeno ad neten diezeugmenon. ſextum, bis diapaſon, tonorum duodecim: cujuſmodi eſt à proſlambanomeno ad neten hyperbolæon. conjunctarum quod vocatur ſyſtema progreditur ad quartum ſyſtema conſonum. disjunctarum autem ad quintum conſonum; & hyperbolæon ad ſextum. primum enim ipſorum eſt diateſſaron. alterum, diapente. tertium, diapaſon. quartum, diapaſon & diateſſaron. quintum, diapaſon & diapente. ſextum, bis diapaſon. vocis autem locus augeri poteſt ad octavum uſque ſyſtema conſonum, quod eſt, adjectis duobus; nimirum bis diapaſon & diateſſaron, & bis diapaſon & diapente. diſſona vero ſunt, tum quæ minora ſunt quam diateſſaron, tum quæ inter dicta conſona interjiciuntur, omnia. porro unius ejuſdemque magnitudinis quoque exiſtunt figuræ, ex iiſdem incompoſitis, & numero æqualibus conſtitutæ, ſi nimirum ordo ipſorum varietur, & jam ante adſit aliquod diſſimile. neque enim, quæ ex æqualibus inter ſe omnibus, vel ſimilibus, conſtant intervallis, ullam varietatem admittunt. quare diateſſaron ſpecies ſunt tres. prima, quæ à barypycnis comprehenditur; cujuſmodi eſt ab hypate hypaton ad hypaten meſon. altera, quæ à meſopycnis continetur; ut eſt à parypate hypaton ad parypaten meſon. tertia quæ ab oxypycnis includitur; ut à lichano hypaton ad lichanon meſon. atque ita in harmonia ac chromate, ſpiſſi ratione habita, figuræ conſonorum ſumuntur: in diatono vero ſpiſſum non reperitur. hoc quippe genus in hemitonia dividitur & tonos. ita ut in diateſſaron concentu hemitonium ſit unum, toni vero duo. ſimiliter in diapente, hemitonium unum, toni tres. in diapaſon item, hemitonia duo, toni quinque. reſpectu vero ad hemitonia habito, figuras illas contemplamur. hinc prima diateſſaron ſpecies eſt, cujus hemitonium, infra tonos, loco eſt graviſſimo. altera, cujus hemitonium eſt loco medio. tertia, cujus hemitonium primum eſt in acumine. atque hæc eodem modo ſe habent in reliquis generibus, ab iiſdem ſonis ad eoſdem. diapente habet quatuor ſpecies. prima, quæ à barypycnis continetur, cujus tonus primus eſt in acumine. eſtque ab hypate meſon ad parameſen. altera, quæ à meſopycnis comprehenditur, cujus tonus ſecundo loco eſt in acumine. eſt vero à parypate meſon ad triten diezeugmenon. tertia, quæ ab oxypycnis continetur, cujus tertius ab acumine eſt tonus: ut à lichano meſon ad paraneten diezeugmenon. quarta, quæ barypycnis rurſus includitur, cujus quartus ab acumine eſt tonus. eſt vero à meſe

ἐπὶ

ad neten diezeugmenon: aut à proſlambanomeno ad hypaten meſon. at vero in diatono prima diapente ſpecies eſt, cujus hemitonium primum eſt in gravi. altera, cujus primum in acumine. tertia, cujus ſecundum in acumine. quarta, cujus tertium in acumine. Porro diapaſon ſpecies ſunt ſeptem. prima, quæ à barypycnis continetur, cujus primus tonus eſt in acumine. eſtque ab hypate hypaton ad parameſen. à veteribus vocabatur mixolydia. altera, quæ comprehenditur à meſopycnis, cujus tonus ſecundo loco eſt in acumine. ut à parypate hypaton ad triten diezeugmenon. vocabatur ab iiſdem lydia. tertia, quæ ab oxypycnis; cujus tertius ab acumine eſt tonus. eſt vero à lichano hypaton ad paraneten diezeugmenon. vocabatur phrygia. quarta, quæ rurſus à barypycnis comprehenditur, cujus quartus ab acumine eſt tonus. eſtque ab hypate meſon ad neten diezeugmenon. vocabatur doria. quinta, quæ à meſopycnis; cujus quinto ab acumine loco eſt tonus. ut à parypate meſon ad triten hyperbolæon. vocabatur hypolydia. ſexta, quæ ab oxypycnis, cujus ſextus ab acumine eſt tonus, ut à lichano meſon ad paraneten hyperbolæon. vocabatur hypophrygia. ſeptima, quæ à barypycnis continetur, cujus primus tonus loco eſt graviſſimo. eſt vero à meſe ad neten hyperbolæon; aut à proſlambanomeno ad meſen. vocabatur communis & locrenſis & hypodoria. at in diatono prima eſt diapaſon ſpecies, cujus primum hemitonium eſt in gravi, quartum vero ab acumine. altera, cujus tertium eſt in gravi, primum in acumine. tertia, cujus ſecundum in utramque partem. quarta, cujus primum in gravi, tertium in acumine. quinta, cujus quartum in gravi, primum in acumine. ſexta, cujus tertium in gravi, ſecundum in acumine. ſeptima, cujus ſecundum eſt hemitonium in gravi, tertium in acumine. ſunt vero hæ ſpecies ab iiſdem ſonis, à quibus in harmonia & chromate incipiebant, ad eoſdem; appellanturque iiſdem nominibus. *rationabilis atque irrationabilis differentia* different ſyſtemata, illa quæ ex rationabilibus conſtituuntur, ab iis quæ ex irrationabilibus. quæ enim rationabilia, ſunt ex rationabilibus. ut contra, quæ irrationabilia, ex irrationabilibus. *continui atque interrupti differentia* different ſyſtemata, illa quæ per deinceps poſitos ſonos canuntur, ab iis quæ per non proximos. *conjuncti atque disjuncti differentia* different ſyſtemata, illa quæ ex conjunctis tetrachordis compoſita ſunt, ab iis quæ ex disjunctis. eſt vero conjunctio, duorum tetrachordorum, deinceps modulatorum ac ſpecie ſimilium, ſonitus communis. hinc disjunctio eſt, duorum tetrachordorum, deinceps modulatorum ac ſpecie ſimilium, tonus intermedius. ſunt autem in univerſum conjunctiones tres: media, acutiſſima, graviſſima. graviſſima eſt ex hypaton tetrachordo & meſon. communis vero ſonus ea conjungit hypate meſon. media conjunctio eſt, ex tetrachordo meſon & ſynemmenon. quæ jungit communis ſo-

ἐπὶ νήτλω διεζευγμένων, ἢ ἀπὸ προσλαμβανομένης ἐπὶ ὑπάτην μέσων. ἐν δὲ διατόνῳ πρῶτον μέν ἐστι σχῆμα, ἧς πρῶτον τὸ ἡμιτόνιον ἐπὶ τὸ βαρύ. δεύτερον δέ, ἧς πρῶτον ἐπὶ τὸ ὀξύ. τρίτον, ἧς δεύτερον ἐπὶ τὸ ὀξύ. τέταρτον, ἧς τρίτον ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἧς δὲ διὰ πασῶν εἴδη ἐστὶν ἑπτά. πρῶτον μεν, τὸ ὑπὸ βαρυπύκνων περιεχόμενον, ἧς πρῶτος ὁ τόνος ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἔστι δὲ ἀπὸ ὑπάτης ὑπατῶν ἐπὶ παραμέσην. ἐκαλεῖτο δὲ ὑπὸ τῶ ἀρχαίων μιξολύδιον. δεύτερον δέ, τὸ ὑπὸ μεσοπύκνων περιεχόμενον, ἧς δεύτερος ὁ τόνος ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἔστι δὲ ἀπὸ παρυπάτης ὑπατῶν ἐπὶ τρίτην διεζευγμένων. ἐκαλεῖτο δὲ λύδιον. τρίτον, τὸ ὑπὸ ὀξυπύκνων περιεχόμενον, ἧς τρίτος ὁ τόνος ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἔστι δὲ ἀπὸ λιχανὸς ὑπατῶν ἐπὶ παρανήτην διεζευγμένων. ἐκαλεῖτο δὲ φρύγιον. τέταρτον, τὸ ὑπὸ βαρυπύκνων περιεχόμενον, ἧς τέταρτος ὁ τόνος ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἔστι δὲ ἀπὸ ὑπάτης μέσων ἐπὶ νήτην διεζευγμένων. ἐκαλεῖτο δὲ δώριον. πέμπτον, τὸ ὑπὸ μεσοπύκνων περιεχόμενον, ἧς πέμπτος ὁ τόνος ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἔστι δὲ ἀπὸ παρυπάτης μέσων ἐπὶ τρίτην ὑπερβολαίων. ἐκαλεῖτο δὲ ὑπολύδιον. ἕκτον, τὸ ὑπὸ ὀξυπύκνων περιεχόμενον, ἧς ἕκτος ὁ τόνος ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἔστι δὲ ἀπὸ λιχανὸς μέσων ἐπὶ παρανήτην ὑπερβολαίων. ἐκαλεῖτο δὲ ὑποφρύγιον. ἕβδομον, τὸ ὑπὸ βαρυπύκνων περιεχόμενον, ἧς πρῶτος ὁ τόνος ἐπὶ τὸ βαρύ. ἔστι δὲ ἀπὸ μέσης ἐπὶ νήτλω ὑπερβολαίων, ἢ ἀπὸ προσλαμβανομένης ἐπὶ μέσην. ἐκαλεῖτο δὲ κοινὸν ἢ λοκρικὸς, ἢ ὑποδώριον. ἐν δὲ τῷ διατόνῳ πρῶτον μέν ἐστιν εἶδος ἧς διὰ πασῶν, ἧς πρῶτον μὲν ἐπὶ τὸ βαρὺ, τέταρτον δὲ ἐπὶ τὸ ὀξύ, ἐστὶ τὸ ἡμιτόνιον. δεύτερον δὲ, ἧς τρίτον μὲν ἐπὶ τὸ βαρὺ, πρῶτον δὲ ἐπὶ τὸ ὀξύ. τρίτον δὲ, ἧς δεύτερον ἐφ' ἑκάτερα. τέταρτον δὲ, ἧς πρῶτον μὲν ἐπὶ τὸ βαρὺ, τρίτον δὲ ἐπὶ τὸ ὀξύ. πέμπτον δὲ, ἧς τέταρτον μὲν ἐπὶ τὸ βαρὺ, πρῶτον δὲ ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἕκτον δὲ, ἧς τρίτον μὲν ἐπὶ τὸ βαρὺ, δεύτερον δὲ ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἕβδομον δὲ, ἧς δεύτερον μὲν ἐπὶ τὸ βαρὺ, τρίτον ἢ ἐπὶ τὸ ὀξύ. ἔστι ἢ ταῦτα ἀπὸ τῶν αὐτῶν φθόγγων ἐπὶ τὰς αὐτὰς, καθάπερ ἐπὶ τῆς ἁρμονίας καὶ τοῦ χρώματος, καὶ ἐκαλεῖτο τοῖς αὐτοῖς ὀνόμασι. τῇ δὲ τῶ ῥητὸν καὶ ἀλόγου διαφορᾷ διοίσει συστήματα, ὅσα ἐκ ῥητῶν διαστημάτων συγκειται, τὰ ἐξ ἀλόγων. ὅσα μὲν γὰρ ῥητὰ ἐκ ῥητῶν ἐστι. ὅσα ἢ ἄλογα, ἐξ ἀλόγων. τῇ ἢ ἧς ἐξῆς καὶ ὑπερβατῆς διαφορᾷ διοίσει συστήματα, τὰ διὰ τῶν ἐξῆς φθόγγων μελῳδούμενα, τὰ δι' ὑπερβατῶν. τῇ ἢ ἧς συνημμένης καὶ διεζευγμένης διαφορᾷ διοίσει συστήματα, ὅσα διὰ τῶν συνημμένων τετραχόρδων τὴν σύνθεσιν ἔχει, τὰ διὰ τῶν διεζευγμένων. ἔστι ἢ συναφὴ μὲν, δύο τετραχόρδων, ἐξῆς μελῳδουμένων, ὁμοίων κατὰ σχῆμα, φθόγγος κοινός. διάζευξις δὲ ἐστὶ δύο τετραχόρδων, ἐξῆς μελῳδουμένων, ὁμοίων κατὰ σχῆμα, τόνος ἀνὰ μέσον. εἰσὶ δὲ αἱ πᾶσαι συναφαὶ τρεῖς· μέση, ὀξυτάτη, βαρυτάτη. καὶ ἔστι βαρυτάτη μὲν, ἡ ἐκ τῶν ὑπατῶν καὶ μέσων τετραχόρδων. κοινὸς δὲ αὐτὰ συνάπτει φθόγγος, ὑπάτη μέσων. μέση δὲ ἐστὶ συναφὴ, ἐκ τῶν μέσων καὶ συνημμένων. κοινὸς δὲ αὐτὰ συνάπτει φθόγγος

μέση.

μέση. ὀξυτάτη δέ ἐστι συναφὴ ἐκ τῶ διεζευγμένων καὶ ὑπερβολαίων. κοινὸς δὲ αὐτὰ συνάπτει φθόγγος, νήτη διεζευγμένων. διάζευξις δέ ἐστι μία ἐκ τῶ μέσων καὶ διεζευγμένων. κοινὸς δὲ αὐτὰ διαζεύγνυσι τόνος, ὁ μεταξὺ μέσης καὶ παραμέσης. τέλεια δέ ἐστι συστήματα δύο, ὧν τὸ μὲν ἔλαττον, τὸ δὲ μεῖζον. καὶ ἔστι τὸ μὲν ἔλαττον κατὰ συναφήν, ἀπὸ προσλαμβανομένης τῆς νήτης συνημμένων. ὑπάρχει δὲ ἐν αὐτῷ τετράχορδα τρία συνημμένα τάδε· ὑπατῶν, μέσων, συνημμένων. καὶ τινος ἀπὸ προσλαμβανομένης τῆς ὑπάτης ὑπατῶν. συμφώνῳ δὲ ὁρίζεται τῷ διὰ πασῶν καὶ διὰ τεσσάρων· τὸ δὲ μεῖζόν ἐστι κατὰ διάζευξιν, ἀπὸ προσλαμβανομένης τῆς νήτης ὑπερβολαίων. ὑπάρχει δὲ ἐν αὐτῷ τετράχορδα μὲν τέσσαρα, διὰ δυοῖν διεζευγμένα, ἀλλήλοις δὲ συνημμένα, τό, τε ὑπατῶν, καὶ μέσων, καὶ διεζευγμένων, καὶ ὑπερβολαίων. καὶ ἐπὶ τόνοι δύο· ὅ, τε ἀπὸ προσλαμβανομένης τῆς ὑπάτης ὑπατῶν, καὶ ὁ ἀπὸ μέσης τῆς παραμέσης. συμφώνῳ δὲ ὁρίζεται τῷ δὶς διὰ πασῶν. πέντε δὲ ὄντων τετραχόρδων ἐν τῷ ἀμεταβόλῳ συστήματι, ὅπερ ἐστὶν ἐξ ἀμφοῖν τελείοιν συνῆφθαι, τὰ μὲν δύο κοινά ἐστιν ἑκατέρῳ τῶν τελείων, τό, τε ὑπατῶν καὶ μέσων· ἴδια δέ, τὸ μὲν κατὰ συναφὴν, τὸ νητῶν συνημμένων· τὸ δὲ κατὰ διάζευξιν, τὸ νητῶν διεζευγμένων, καὶ τὸ νητῶν ὑπερβολαίων. τῇ δὲ τῶ ἀμεταβόλῳ καὶ ἐμμεταβόλῳ διοίσει, καθ' ἣν διαφέρει τὰ ἁπλᾶ συστήματα τῶν μὴ ἁπλῶν. ἁπλᾶ μὲν οὖν ἐστι τὰ πρὸς μίαν μέσην ἡρμοσμένα· διπλᾶ δὲ, τὰ πρὸς δύο· τριπλᾶ δὲ τὰ πρὸς τρεῖς· πολλαπλάσια δὲ τὰ πρὸς πλείονας. ἔστι δὲ μέση φθόγγος δυνάμει, ᾧ συμβέβηκεν κατὰ μὲν διάζευξιν, ὀξὺ μὲν τὸ ὀξύ, τόνον ἔχειν ἀσύνθετον, ἁπλοῦς ὄντος συστήματος· βαρὺ δὲ τὸ βαρὺ, δίτονον, ἢ τὸ συνθετον ἢ ἀσύνθετον· κατὰ δὲ συναφὴν, ᾧ συμβαίνει τριῶν τετραχόρδων συνημμένων, ἤτοι μέσης ὀξυτάτῳ εἶναι, ἢ τὸ ὀξυτάτης, βαρυτάτῳ. ἀπὸ δὲ τῆς μέσης καὶ τῶν λοιπῶν φθόγγων αἱ δυνάμεις γνωρίζονται. τὸ γὰρ πῶς ἔχει ἕκαστος αὐτῶν πρὸς τὴν μέσην φανερῶς γίνεται.

Τόνος δὲ λέγεται τετραχῶς. καὶ γὰρ ὡς φθόγγος, καὶ ὡς διάστημα, καὶ ὡς τόπος φωνῆς, καὶ ὡς τάσις· ὅτι μὲν οὖν τὸ φθόγγος χρῶνται τῷ ὀνόματι οἱ λέγοντες ἑπτάτονον τὴν φόρμιγγα, καθάπερ Τέρπανδρος καὶ Ιων. ὁ μὲν γάρ φησιν,

Ημεῖς τοι τετράγηρυν ἀποστέρξαντες ἀοιδὴν,
Ἑπτατόνῳ φόρμιγγι νέους κελαδήσομεν ὕμνους.

Ο δὲ ἐν δεκαχόρδῳ λύρᾳ·

—— τὴν δεκαβάμονα τάξιν ἔχουσι
Τὰς συμφωνούσας ἁρμονίας τελοῦσι.

Πρὶν μέν σ' ἑπτάτονον ψάλλον διὰ τέσσαρα πάντες
Ελληνες, σπανίαν μῶσαν ἀειράμενοι.

καὶ ἕτεροι δὲ οὐκ ὀλίγοι κεχρῆνται τῷ ὀνόματι. ὅτι δὲ διαστήματος, ὅταν λέγωμεν ἀπὸ μέσης ὅτι παραμέσης τόνον εἶναι. ὁ δὲ ὡς τόπος, ὅταν λέγωμεν, φωνῆς, δώριον, ἢ φρύγιον, ἢ λύδιον, ἢ τῶν ἄλλων τινά. εἰσὶ δὲ κατὰ Αριστόξενον τρισκαίδεκα τόνοι. ὑπερμιξολύδιος, καὶ ὑπερφρύγιος καλούμενος.

nus meſe. acutiſſima denique conjunctio eſt, ex tetrachordo diezeugmenon & hyperbolæon. quæ communis copulat ſonus, nete diezeugmenon. disjunctio una eſt, ex tetrachordo meſon & diezeugmenon. communis vero tonus ille disjungit, qui eſt inter meſen & parameſen. porro perfecta ſunt ſyſtemata duo, quorum alterum minus eſt, alterum majus. ac minus quidem eſt per conjunctionem, à proſlambanomeno ad neten ſynemmenon. ſunt vero in eo tria hæc tetrachorda conjuncta, hypaton, meſon, ſynemmenon. præterea tonus à proſlambanomeno ad hypaten hypaton. finitur denique conſonantia diapaſon & diateſſaron. majus vero eſt per disjunctionem, à proſlambanomeno ad neten hyperbolæon. in quo ſunt quatuor tetrachorda, quorum bina à binis disjuncta, inter ſe vero conjuncta; nimirum hypaton, & meſon; & diezeugmenon, & hyperbolæon. & inſuper toni duo: tum qui à proſlambanomeno eſt ad hypaten hypaton, tum qui à meſe ad parameſen. includitur autem concentu bis diapaſon. cum vero quinque ſint tetrachorda in ſyſtemate immutabili, quod ex binis perfectis conſtat, bina quidem utrique perfectorum ſunt communia, hypaton ſcilicet & meſon: propria vero, conjuncto quidem, tetrachordum neton ſynemmenon: disjunctio vero, tetrachordum neton diezeugmenon & neton hyperbolæon. *immutabilis & mutabilis differentia* diſtabunt, quæ ut ſimplicia ſyſtemata differunt à non ſimplicibus. ſimplicia ſunt, quæ modulatam ſeriem uni meſe aptatam habent: duplicia, quæ duabus: triplicia, quæ tribus: multiplicia, quæ pluribus. eſt vero *meſe* poteſtas ſoni, cui in disjunctione quidem accidit, acumen verſus, tonum habere incompoſitum, ſi ſyſtema omni affectione careat; verſus grave vero, ditonum, idque vel compoſitum, vel incompoſitum: in conjunctione vero, cui inter tria tetrachorda conjuncta contingit, aut medii eſſe acutiſſimum; aut acutiſſimi, graviſſimum. meſes deinde beneficio relinquorum poteſtates innoteſcunt. quomodo enim quiſque illorum ad meſen ſe habeat, fit manifeſtum:

Tonus quatuor modis dicitur. nam & pro *ſono* uſurpatur, & pro *intervallo*, & pro *vocis loco*, & pro *tentione*. pro *ſono* uſurpant hoc nomen, qui citharam vocant *heptatonon*, id eſt, ſeptem ſonis conſtantem, quomodo Terpander atque Ion. ille enim ita:

At nos quadriſono contempto carmine, poſthac
Rite novos citharæ heptatono cantabimus hymnos.

Hic vero in lyra decem chordis inſtructa:

——decimus tibi pſallitur ordo,
Concentuque placent harmoniæ triplices.
Omnes heptatonon diateſſara te ante canebant
Græci, queis placuit rara Camœna nimis.

atque alios non paucos hoc vocabulo ita uſos invenimus. pro *intervallo*, cum dicimus à meſe ad parameſen eſſe tonum. pro *vocis loco*, cum dicimus tonum Dorium, aut Phrygium, aut Lydium, aut reliquorum aliquem. ſunt vero, ut cenſet Ariſtoxenus, toni tredecim. hypermixolydius, qui & hyperphrygius vocatur. mi-

xolydii duo; acutior & gravior. quorum acutior, qui ordine eſt ſecundus, Hyperiaſtius vocatur: gravior vero, etiam Hyperdorius. Lydii duo; acutior, & gravior, qui & Æolius appellatur. Phrygii duo; quorum alter gravis, qui & Iaſtius; alter acutus. Dorius unus. Hypolydii duo; acutior, & gravior, qui & Hypoæolius vocatur. Hypophrygii duo, quorum gravior quoque appellatur Hypoiaſtius. Hypodorius. Ex his graviſſimus eſt Hypodorius: qui vero deinceps exiſtunt, à graviſſimo ad acutiſſimum, hemitonio ſe invicem excedunt. alterni vero duo, tono; terni, triemitonio. ſimiliter de reliquorum tonorum diſtantia concludes. Hypermyxolydius denique Hypodorium per diapaſon intervallum acumine ſuperat. Pro *tenſione* tonus accipitur, quando dicimus, acuto aliquem vocis tono uti, aut gravi, aut etiam medio.

Mutatio quatuor modis dicitur: *per genus, per ſyſtema, per tonum, & per melopœiam.* per *genus* fit mutatio, cum ex diatono in chroma, aut harmoniam: aut ex chromate, aut harmonia in reliquorum generum aliquod fit tranſitus. per *ſyſtema* vero, cum ex conjunctione in disjunctionem, aut vice verſa, fit mutatio. per *tonum*, cum ex Doriis cantilenis in Phrygias, aut ex Phrygiis in Lydias, aut Hypermixolydias, aut Hypodorias; aut in univerſum, cum ex tredecim tonorum aliquo in reliquorum aliquem, mutationem inſtituimus. atque hæ mutationes ab hemitonio intervallo ad diapaſon procedunt. quorum aliæ per conſona fiunt intervalla; aliæ per diſſona. atque adeo quædam harum minus ſunt concinnæ, aut inconcinnæ; quædam magis. inter quas itaque major eſt communio, illæ ſunt concinniores; ut contra, in quibus minor; inconcinniores. quippe omni mutationi neceſſe eſt aliquid eſſe cum alio commune; aut ſonum, aut intervallum, aut ſyſtema. atque hæc communicatio per ſonorum ſimilitudinem aſſumitur. cum enim in commutationibus mutuo cadunt ſimiles ſoni, ita ut ſpiſſi fiat participatio, concinna eſt mutatio: cum contra diſſimiles, inconcinna. denique per *melopœiam* fit mutatio, cum ex diſtendente more in contrahentem, aut quietum; aut ex quieto in reliquorum aliquem fit tranſitus. eſt vero diſtendens mos melopœiæ, quo ſignatur magnificentia ac virile animi robur, tum actiones heroicæ, atque his ſimiles affectus. hiſce itaque maxime utitur tragœdia, & quæ ex reliquis huic characteri ſunt propiora. contrahens mos eſt, quo animus contrahitur ad humilitatem, & effeminatam diſpoſitionem. atque hujuſmodi ſtatus convenit amatoriis affectibus, tum lamentis & miſerationibus, atque id genus aliis. quietus denique melopœiæ mos eſt, quem conſequitur animi tranquillitas, ſtatuſque liberalis ac pacificus. huic conveniunt hymni, pæanes, laudes, conſulta, atque his ſimilia.

Melopœia eſt uſus partium Harmonices, quæ à nobis ſunt expoſitæ, quæque propoſitorum

μιξολύδιοι δύο, ὀξύτερος καὶ βαρύτερος· ὧν ὀξύτερος καὶ δεύτερος ὑπερϊάσιος καλεῖται· ὁ δὲ βαρύτερος, καὶ ὑπερδώριος. λύδιοι δὲ δύο, ὀξύτερος καὶ βαρύτερος, ὃς καὶ ἀιόλιος καλεῖται. φρύγιοι δύο, ὁ μὲν βαρὺς, ὃς καὶ ἰάσιος· ὁ δὲ ὀξύς. δώριος εἷς. ὑπολύδιοι δύο· ὀξύτερος, καὶ βαρύτερος, ὃς καὶ ὑποαιόλιος καλεῖται. ὑποφρύγιοι δύο, ὧν ὁ βαρύτερος καὶ ὑποϊάσιος καλεῖται. ὑποδώριος. τούτων βαρύτατος μὲν ὑποδώριος· οἱ δὲ ἑξῆς, οἱ ἀπὸ τ βαρυτάτων μέχρι τ ὀξυτάτου ἡμιτονίῳ ἀλλήλων ὑπερέχοντες. συμφώνως δὲ δύο, τόνῳ· τρεῖς δὲ, τριημιτονίῳ. ἀναλόγως δὲ ἔχει καὶ ἐπὶ τ λοιπῶν τόνων διαστάσεως. ὁ δὲ ὑπερμιξολύδιος τ ὑποδωρίου τῷ διὰ πασῶν ἐστιν ὀξύτερος. ὁ δὲ, ὡς τάσις, τόνος λέγεται, καθ' ὃ φαμεν ὀξυτονεῖν τινα ἢ βαρυτονεῖν, ἢ μέσῳ τῷ τ φωνῆς τόνῳ κεχρῆσθαι.

Μεταβολὴ δὲ λέγεται τετραχῶς. καὶ γὰρ κατὰ γένος, καὶ κατὰ σύστημα, καὶ κατὰ τόνον. καὶ κατὰ μελοποιΐαν. κατὰ μὲν οὖν γένος γίνεται μεταβολὴ, ὅταν ἐκ διατόνου εἰς χρῶμα, ἢ ἁρμονίαν· ἢ ἐκ χρώματος ἢ ἁρμονίας εἴς τι τ λοιπῶν μεταβολὴ γένηται. κατὰ σύστημα δὲ, ὅταν ἐκ συναφῆς εἰς διάζευξιν, ἢ ἀνάπαλιν, μεταβολὴ γένηται. κατὰ τόνον δὲ, ὅταν ἐκ δωρίων εἰς φρύγια, ἢ ἐκ φρυγίων εἰς λύδια, ἢ ὑπερμιξολύδια, ἢ ὑποδώρια, ἢ καθόλου, ὅταν ἔκ τινος τ δεκατεσσάρων τόνων εἴς τινα τ λοιπῶν μεταβολὴ γένηται. γίνονται δὲ αἱ μεταβολαὶ ἀπὸ ἡμιτονίου ἀρξάμεναι μέχρι τ διὰ πασῶν. ὧν αἱ μὲν κατὰ σύμφωνα γίνονται διαστήματα, αἱ δὲ κατὰ διάφωνα. τούτων δ' αἱ μὲν ἐμμελεῖς ἧττον ἢ ἐκμελεῖς, αἱ δὲ μᾶλλον. ἐν ὅσαις μὲν ἂν αὐτῶν πλείων ἡ κοινωνία, ἐμμελέστεραι· ἐν ὅσαις δὲ ἐλάττων, ἐκμελέστεραι. ἐπειδὴ ἀναγκαῖον πάσῃ μεταβολῇ κοινόν τι ὑπάρχειν, ἢ φθόγγον, ἢ διάστημα, ἢ σύστημα. λαμβάνεται δὲ ἡ κοινωνία καθ' ὁμοιότητα φθόγγων. ὅταν γὰρ ἐπ' ἀλλήλας ἐν ταῖς μεταβολαῖς πέσωσιν ὅμοιοι φθόγγοι κατὰ τὸν τ πυκνῶν μετοχὴν, ἐμμελὴς γίνεται ἡ μεταβολή· ὅταν δὲ ἀνόμοιοι, ἐκμελής. κατὰ δὲ μελοποιΐαν γίνεται μεταβολὴ, ὅταν ἐκ διαστελτικοῦ ἤθους εἰς συστελτικὸν, ἢ ἡσυχαστικὸν, ἢ ἐξ ἡσυχαστικοῦ εἴς τι τ λοιπῶν ἡ μεταβολὴ γένηται. ἔστι δὲ διαστελτικὸν μὲν ἦθος μελοποιΐας, δι' ὃ σημαίνεται μεγαλοπρέπεια καὶ δίαρμα ψυχῆς ἀνδρῶδες, καὶ πράξεις ἡρωϊκαὶ, καὶ πάθη τούτοις οἰκεῖα. χρῆται δὲ τούτοις μάλιστα μὲν ἡ τραγῳδία, καὶ τῶν λοιπῶν δὲ ὅσα τούτου ἔχεται τοῦ χαρακτῆρος. συστελτικὸν δὲ, δι' ὃ σημαίνεται ἡ ψυχὴ εἰς ταπεινότητα καὶ ἀνανδρον διάθεσιν. ἁρμόσει δὲ τὸ τοιοῦτον κατάστημα τοῖς ἐρωτικοῖς παθεσι καὶ θρηνώδεσι, καὶ οἴκτοις καὶ τοῖς ὠδαπληστοῖς. ἡσυχαστικὸν δὲ ἦθός ἐστι μελοποιΐας, ᾧ παρέπεται ἠρεμότης ψυχῆς, καὶ κατάστημα ἐλεύθεριόν τε καὶ εἰρηνικόν. ἁρμόσουσι δὲ αὐτῷ ὕμνοι, παιᾶνες, ἐγκώμια, συμβουλαὶ, καὶ τὰ τούτοις ὅμοια.

Μελοποιΐα ἐστὶ χρῆσις τῶν προειρημένων μερῶν τῆς ἁρμονικῆς, καὶ ὑποκειμένων δυνάμιν ἐχόντων.

ἐχόντων. δι' ὧν δὲ μελοποιία ὁλοτελεῖται, τέσσαρά ἐστιν· ἀγωγὴ, πλοκὴ, πεττεία, τονή. ἀγωγὴ μέν ἐστιν, ἡ διὰ τῆς ἑξῆς φθόγγων ὁδὸς τὸ μέλος. πλοκὴ δὲ, ἡ ἐναλλαξ τῶν τε διαστημάτων θέσις πρὸς ἄλληλος. πεττεία δὲ, ἡ ἐφ' ἑνὸς τόνου πολλάκις γινομένη πλῆξις. τονὴ δὲ, ἡ ὑπὲρ πλείονα χρόνον μονὴ, κατὰ μίαν γινομένη προφορὰν τῆς φωνῆς. διάγραμμα δὲ, σχῆμα ἐπίπεδον, τὰς τῶν μελῳδουμένων περιέχον δυνάμεις. δυνάμις δέ ἐστι τάξις φθόγγου, δι' ἧς γνωρίζομεν τῶν φθόγγων ἕκαστον. μελοποιία δέ ἐστι χρῆσις τῶν ὑποκειμένων τῇ ἁρμονικῇ πραγματείᾳ, πρὸς τὸ οἰκεῖον ἑκάστης ὑποθέσεως. ἔστι ὁ ὅρος τῆς κατὰ τὸ ἡρμοσμένον ἐστὶ πραγματείας.

virtutem complectuntur. quatuor vero ſunt, quibus melopœia perficitur: *Ductus*, *Nexus*, *Pettia*, *Extenſio*. *Ductus* itaque eſt, cantilenæ via, per deinceps poſitos ſonos confecta. *Nexus* vero contra, via permutata, ſpatiorumque poſitio alterna. *Pettia* eſt percuſſio in uno eodemque tono frequenter facta. *Extenſio* eſt diuturnior mora, quæ una vocis prolatione conficitur. Diagramma eſt figura plana, eorum quæ modulamur continens poteſtates. poteſtas vero eſt, quæ vicem ſoni obtinet, per quam ſonorum quemlibet cognoſcimus. Melopœia denique eſt uſus eorum, quæ Harmonicæ tractationi ſunt ſubjecta, ad proprietatem cujuſque argumenti exprimendam. Atque hic eſt tractationis de modulata ſerie finis.

ΤΕΛΟΣ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ.

FINIS INTRODUCTIONIS HARMONICÆ EUCLIDIS.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΚΑΤΑΤΟΜΗ

ΚΑΝΟΝΟΣ.

EUCLIDIS

SECTIO

CANONIS.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΚΑΤΑΤΟΜΗ

ΚΑΝΟΝΟΣ.

EUCLIDIS

SECTIO

CANONIS.

Εἰ ἡσυχία εἴη ἡ ἀκινησία, σιωπὴ ἂν εἴη. σιωπῆς δὲ ὄσης μηδενὸς κινουμένου, οὐδὲν ἂν ἀκούοιτο· εἰ οὖν μέλλει τι ἀκουσθήσεσθαι, θόρυβον καὶ κίνησιν πρότερον δεῖ γενέσθαι. ὥστε, ἐπειδὴ πάντες οἱ φθόγγοι γίνονται θορύβου τινος γινομένου, θόρυβος δὲ ἀμήχανον γενέσθαι, μὴ οὐχὶ κινήσεως πρότερον γινομένης· τῶν δὲ κινήσεων αἱ μὲν πυκνότεραί εἰσιν, αἱ δὲ ἀραιότεραι· καὶ αἱ μὲν πυκνότεραι ὀξυτέρους ποιοῦσι τοὺς φθόγγους, αἱ δὲ ἀραιότεραι, βαρυτέρους· ἀναγκαῖον τοὺς μὲν ὀξυτέρους εἶναι, ἐπειδὴ ἐκ πυκνοτέρων καὶ πλειόνων σύγκεινται κινήσεων· τοὺς δὲ βαρυτάτους, ἐπειδὴ ἐξ ἀραιοτέρων καὶ ἐλασσόνων σύγκεινται κινήσεων. ὥστε τοὺς μὲν ὀξυτέρους δέοντος ἀνιεμένους ἀφαιρέσει κινήσεων τυγχάνειν τοῦ δέοντος· τοὺς δὲ βαρυτέρους ἐπιτεινομένους, προσθέσει κινήσεων, τυγχάνειν τοῦ δέοντος. διόπερ ἐκ μορίων τοὺς φθόγγους συγκεῖσθαι φατέον, ἐπειδὴ προσθέσει καὶ ἀφαιρέσει συγχάνουσι τοῦ δέοντος. πάντα δὲ τὰ ἐκ μορίων συγκείμενα, ἀριθμῷ λόγῳ λέγεται πρὸς ἄλληλα. ὥστε καὶ τοὺς φθόγγους ἀναγκαῖον ἐν ἀριθμοῦ λόγῳ λέγεσθαι πρὸς ἀλλήλους. τῶν δὲ ἀριθμῶν οἱ μὲν ἐν πολλαπλασίονι λόγῳ λέγονται· οἱ δὲ ἐν ἐπιμορίῳ· οἱ δὲ ἐν ἐπιμερεῖ. ὥστε καὶ τοὺς φθόγγους ἀναγκαῖον ἐν τοῖς τοιούτοις λόγοις λέγεσθαι πρὸς ἀλλήλους. τούτων δὲ οἱ μὲν πολλαπλάσιοι, καὶ ἐπιμόριοι εἰσὶ ὀνόματι λέγονται πρὸς ἀλλήλους. γιγνώσκομεν δὲ καὶ τοὺς φθόγγους τοὺς μὲν συμφώνους ὄντας, τοὺς δὲ διαφώνους. καὶ τοὺς μὲν συμφώνους μίαν ποιοῦσι τοῖς ἐξ ἀμφοῖν ποιοῦντας· τοὺς δὲ διαφώνους, οὔ. τούτων οὕτως ἐχόντων, εἰκὸς τοὺς συμφώνους φθόγγους, ἐπειδὴ μίαν, τοῖς ἐξ ἀμφοῖν, ποιοῦντας κρᾶσιν τῆς φωνῆς, εἶναι τοῖς ἐν ἑνὶ ὀνόματι πρὸς ἀλλήλους λεγομένοις ἀριθμοῖς, ἤτοι πολλαπλασίοις ὄντας, ἢ ἐπιμορίοις.

SI omnia quiescerent, nihilque moveretur, silentium foret. si silentium foret, nihilque moveretur, nihil quoque audiretur: quare, si quid audiri debeat, percussionem atque motum præcedere oportet. hinc adeo, cum omnes soni fiant præcedente aliqua percussione; percussio vero fieri nequeat nisi præcesserit motus: & cum motuum alii sint spissiores, alii rariores; & quidem spissiores faciant sonos acutiores; rariores vero, graviores: necesse est, illos quidem esse acutiores, quod ex spissioribus & pluribus componantur motibus; hos vero graviores, quod ex motibus constituantur & rarioribus & paucioribus. ut hac ratione, qui justo sunt acutiores, si remittantur, ablatione motuum justum sonum consequantur; ut contra, qui graviores, si intendantur, motuum additione justi fiunt. sonos itaque ex partibus componi dicendum, quod additione & ablatione fiant justi. jam vero, quæ ex partibus constant, omnia, numeri inter se ratione dicuntur. ut sonos quoque numeri ratione inter se dici sit necesse. porro numerorum alii dicuntur in ratione multiplici, alii in superparticulari, alii in superpartiente. ut & sonos necesse sit iis inter se rationibus appellari. atque horum multiplices & superparticulares uno inter se nomine dicuntur. deinde quoque est notum, sonorum alios esse consonos, alios dissonos. & consonos quidem unam ex ambobus facere mistionem: dissonos vero, non item. cum hæc ita se habeant, rationi est consentaneum, sonos consonos, quod vocis unam ex ambobus mistionem, faciant ad numeros, qui uno nomine mutuum suum dicunt respectum, vel multiplices, vel superparticulares.

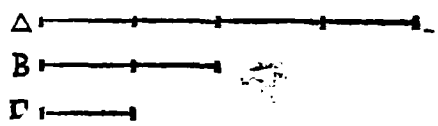
PROP.

THEOREMA I.

Si intervallum multiplex, bis compositum, fecerit aliquod intervallum; etiam illud erit multiplex.

ESto intervallum B, Γ, ita ut B sit multiplex ipsius Γ; porro factum sit, ut Γ ad B ita B ad Δ: dico Δ quoque multiplicem esse ipsius Γ.

Quoniam enim B multiplex est ipsius Γ, me-



titur ergo Γ ipsum B: sed erat quoque ut Γ ad B ita B ad Δ: quare & Γ metitur ipsum Δ: ergo Δ est multiplex ipsius Γ.

ΘΕΩΡΗΜΑ α'.

Ἐὰν διάστημα πολλαπλάσιον, δὶς συντεθέν, ποιῇ τι διάστημα· καὶ αὐτὸ πολλαπλάσιον ἔσται.

Ἔστω διάστημα τὸ Β, Γ, καὶ ἔστω πολλαπλάσιον τὸ Β τοῦ Γ, καὶ γεγονέσθω ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ· φημὶ δὴ καὶ τὸν Δ τοῦ Γ πολλαπλάσιον εἶναι.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Β τοῦ Γ πολλαπλάσιός ἐστι, μετρεῖ

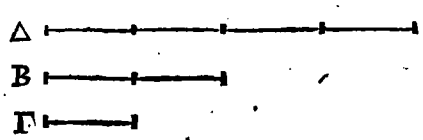
ἄρα ὁ Γ τὸν Β. ἦν δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ· ὥστε μετρεῖ καὶ ὁ Γ τὸν Δ· πολλαπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ Δ τοῦ Γ.

THEOREMA II.

Si intervallum, bis compositum, totum fecerit intervallum multiplex; ipsum quoque erit multiplex.

SIT intervallum B, Γ, factumque sit ut Γ ad B ita B ad Δ, sit quoque Δ multiplex ipsius Γ: dico etiam B ipsius Γ esse multiplicem.

Quia enim Δ est multiplex ipsius Γ, igi-



tur Γ metitur ipsum Δ. didici autem; si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, & primus metiatur ultimum, illum quoque intermedios mensurum: quare & Γ metitur ipsum Δ: ergo B est multiplex ipsius Γ.

ΘΕΩΡΗΜΑ β'.

Ἐὰν διάστημα, δὶς συντεθέν, τὸ ὅλον ποιῇ πολλαπλάσιον· καὶ αὐτὸ ἔσται πολλαπλάσιον.

Ἔστω διάστημα τὸ Β, Γ, καὶ γεγονέσθω ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Β οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔστω ὁ Δ τοῦ Γ πολλαπλάσιος· φημὶ δὴ καὶ τὸν Β τοῦ Γ εἶναι πολλαπλάσιον.

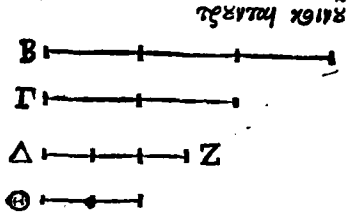
Ἐπεὶ γὰρ ὁ Δ τοῦ Γ πολλαπλάσιός ἐστι, μετρεῖ

ἄρα ὁ Γ τὸν Δ. ἐμάθομεν δὲ, ὅτι ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὁποσοιοῦν, ὁ δὲ πρῶτος τὸν ἔσχατον μετρῇ, καὶ τοὺς μεταξὺ μετρήσει· μετρεῖ ἄρα ὁ Γ τὸν Δ· πολλαπλάσιος ἄρα ὁ Β τοῦ Γ.

THEOREMA III.

Superparticulare intervallum neque unum neque plures habebit proportionaliter incidentes numeros medios.

SIT enim superparticulare intervallum B, Γ. minimi vero in eadem ratione, in qua sunt B, Γ, sint Δ Z, Θ. hos igitur sola unitas, tanquam mensura communis metitur.



Aufer H Z æqualem numerum ipsi Θ, & relinquitur unitas: est igitur Δ Z superparticularis ipsius Θ. excessus vero ipse Δ H communis mensura

ΘΕΩΡΗΜΑ γ'.

Ἐπιμορίου διαστήματος μέσοι, ὅτε εἰς ὅτε πλείους ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί.

Ἔστω γὰρ ἐπιμόριον διάστημα τὸ Β, Γ. ἐλάχιστοι δὲ ὅπι τῷ αὐτῷ λόγῳ τοῖς Β, Γ ἔστωσαν οἱ Δ Z, Θ· ὅτοι ὁ ὑπὸ μονάδος μόνης μετροῦνται κοινὸν μέτρον.

ΑΦελὲ ἴσον τῷ Θ τὸν ΗΖ, καὶ ἐπίλοιπον μονάς. ἐπιμόριός ἐστιν ἄρα ὁ Δ Ζ τοῦ Θ. καὶ ἡ ὑπεροχὴ ὁ Δ Η κοινὸν μέτρον τούτε

ΔΖ

ΔZ ἢ Θ· οὐκ ἄρα ἐμπεσεῖται εἰς τὰς ΔZ, Θ μέσος ἀδείς. ἔσται γὰρ ὁ ἐμπίπτων τῶ ΔZ ἐλάττων, τῶ δὲ Θ μείζων· ὥστε τὴν μονάδα διαιρεῖσθαι, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐμπεσεῖται εἰς τὰς ΔZ, Θ τίς. ὅσοι δὲ εἰς οὓς ἐλαχίστους μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσι, τοσοῦτοι καὶ εἰς τὰς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται. ἀδὰς δὲ εἰς τὰς ΔZ, Θ ἐμπεσεῖται· ἀδὲ ἄρα εἰς τὰς B, Γ ἐμπεσεῖται.

ipsius ΔZ & Θ: nullus igitur inter ΔZ & Θ medius cadet proportionalis. Foret enim qui incideret, ipso ΔZ minor, major vero ipso Θ; atque hac ratione unitas divideretur, quod fieri nequit: nullus ergo inter ΔZ & Θ incidet. quot autem inter minimos cadunt medii proportionales, tot etiam inter alios, eandem rationem habentes, incident proportionales. sed nullus cadit inter ΔZ & Θ; quare nec inter B, Γ quisquam incidet.

ΘΕΩΡΗΜΑ δ'.

Ἐὰν διάστημα, μὴ πολλαπλάσιον, δὶς συντεθῇ· τὸ ὅλον οὔτε πολλαπλάσιον ἔσται, οὔτε ἐπιμόριον.

ΕΣτω γὰρ διάστημα μὴ πολλαπλάσιον τὸ B, Γ, καὶ γενέσθω ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν B οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Δ· λέγω ὅτι ὁ Δ οὔτε Γ οὔτε πολλαπλάσιός ἐστιν, οὔτε ἐπιμόριος ἐστιν.

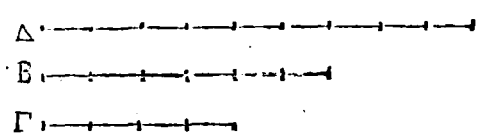
Εἰ γὰρ δυνατὸν ὁ Δ τοῦ Γ πολλαπλάσιος· ἐκ-

Theorema IV.

Si intervallum non multiplex bis componatur; totum, quod producitur, intervallum, neque multiplex erit, neque superparticulare.

SIT enim intervallum non multiplex B, Γ; & fiat ut Γ ad B ita B ad Δ: dico Δ neque multiplicem esse, neque superparticularem ipsius Γ.

Sit enim primo Δ multiplex ipsius Γ; atqui



ἴσμεν ἐμάθομεν, ὅτι ἐὰν διάστημα, δὶς συντεθέν, τὸ ὅλον ποιῇ πολλαπλάσιον, καὶ αὐτὸ πολλαπλάσιόν ἐστιν· ἔσται ἄρα ὁ B τοῦ Γ πολλαπλάσιος. οὐκ ἔστι δέ· ἀδύνατον ἄρα τὸν Δ τοῦ Γ εἶναι πολλαπλάσιον. ἀλλὰ μὴν οὐδ' ἐπιμόριον, ἐπιμορίᾳ γὰρ διάστηματος μέσος οὐδεὶς ἀνάλογον ἐμπίπτει· εἰς δὲ τὰς Δ, Γ ἐμπίπτει ὁ B· ἀδύνατον ἄρα τὸν Δ τοῦ Γ ἢ πολλαπλάσιον, ἢ ἐπιμόριον εἶναι.

didicimus, si intervallum, bis compositum, totum fecerit multiplex, ipsum quoque esse multiplex: erit igitur B multiplex ipsius Γ. sed hoc non erat: quare impossibile est ut Δ sit multiplex ipsius Γ. sed neque secundo, superparticularis; cum superparticulare intervallum nullum habeat medium *numerum* proportionaliter intervenientem. jam vero inter Δ, Γ cadit B: quare fieri nequit ut Δ ipsius Γ aut multiplex sit aut superparticularis.

ΘΕΩΡΗΜΑ ε'.

Ἐὰν διάστημα, δὶς συντεθέν, τὸ ὅλον μὴ ποιῇ πολλαπλάσιον· οὐδ' αὐτὸ ἔσται πολλαπλάσιον.

ΕΣτω διάστημα τὸ B, Γ, καὶ γεγενήσθω ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν B, οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Δ. καὶ μὴ ἔστω ὁ Δ τοῦ Γ πολλαπλάσιος· λέγω ὅτι οὐδὲ ὁ B τοῦ Γ ἔσται πολλαπλάσιος.

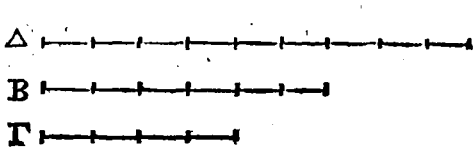
Εἰ γάρ ἐστιν ὁ B τοῦ Γ πολλαπλάσιος, ἔστω ἢ ὁ Δ

Theorema V.

Si intervallum, bis compositum, totum non fecerit multiplex; ipsum quoque non erit multiplex.

SIT enim intervallum B, Γ; sitque factum ut Γ ad B ita B ad Δ; porro Δ non sit multiplex ipsius Γ: dico nec B ipsius Γ fore multiplicem.

Si enim B fuerit multiplex ipsius Γ, erit



τοῦ Γ πολλαπλάσιος. ἐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ὁ B τοῦ Γ ἔσται πολλαπλάσιος.

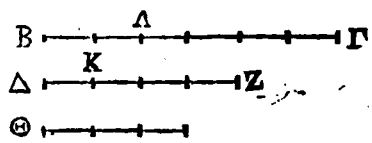
quoque Δ multiplex ipsius Γ. atqui non est: neque igitur B erit multiplex ipsius Γ.

THEOREMA VI.

Duplex intervallum conſtat ex duobus maximis ſuperparticularibus, ſeſquialtero ſcilicet & ſeſquitertio.

SIT enim B Γ ſeſquialter ipſius Δ Z, Δ Z vero ſeſquitertius ipſius Θ: dico B Γ duplum eſſe ipſius Θ.

Quoniam enim dempſi Z K æqualem ipſi Θ,



deinde ipſi Δ Z æqualem Γ Λ: hinc, quoniam B Γ eſt ſeſquialter ipſius Δ Z, exiſtit B Λ pars tertia ipſius B Γ, at dimidia ipſius Δ Z. rurſus, quoniam Δ Z eſt ſeſquitertius ipſius Θ, Δ K eſt pars quarta ipſius Δ Z, at tertia ipſius Θ: cum igitur Δ K ſit pars quarta ipſius Δ Z, at B Λ pars tertia ipſius B Γ; erit Δ K pars ſexta ipſius B Γ. atqui idem Δ K erat pars tertia ipſius Θ: ergo B Γ duplus eſt ipſius Θ.

ΘΕΩΡΗΜΑ ϛ'.

Τὸ διπλάσιον διάϛημα ἐκ δύο τῶν μεγίϛων ἐπιμορίων συνέϛηκεν, ἔκ τε τοῦ ἡμιολίου καὶ ἐκ τοῦ ἐπιτρίτου.

Ἔϛτω γὰρ ὁ μὲν ΒΓ τοῦ ΔΖ ἡμιόλιος, ὁ δὲ ΔΖ τοῦ Θ ἐπίτριτος· φημὶ τὸν ΒΓ τοῦ Θ διπλάσιον εἶναι.

Ἀφῃρήϛθω γὰρ ἴϛον τῷ Θ τὸ ΖΚ, καὶ τῷ ΔΖ τὸ ΓΛ· ϛὰς ἄρα ἐϛὶν ὁ ΒΓ τοῦ ΔΖ ἡμιόλιος, ὁ ΒΛ ἄρα τοῦ ΒΓ τρίτον μέρος ἐϛὶν, ὅ ἐϛὶ καὶ ΔΓ ἥμιϲυ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ ΔΖ τοῦ Θ ἐπίτριτός ἐϛιν, ὁ ΔΚ τοῦ μὲν ΔΖ τεταρτημόριόν ἐϛι, τοῦ δὲ Θ τριτημόριον· ϛὰς ἄρα ἐπεὶ ὁ ΔΚ τοῦ ΔΖ ἐϛὶ τεταρτημόριον, ὁ δὲ ΒΛ τοῦ ΒΓ τρίτον μέρος· ὁ ἄρα ΔΚ τοῦ ΒΓ ἕκτον μέρος ἐϛίν. ἴϖ δὲ ὁ ΔΚ τοῦ Θ τρίτον μέρος· ὁ ἄρα ΒΓ τοῦ Θ διπλάϛιός ἐϛιν.

ALITER.

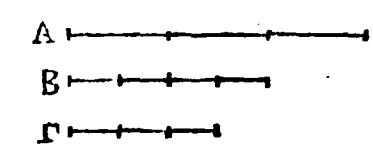
Sit enim A ſeſquialter ipſius B, ipſe autem B ſeſquitertius ipſius Γ; dico A eſſe duplum ipſius Γ.

Quoniam enim A ſeſquialter eſt ipſius B, A

ΑΛΛΩΣ.

Ἔϛω γὰρ ὁ μὲν Α τοῦ Β ἡμιόλιος. ὁ δὲ Β τοῦ Γ ἐπίτριτος· λέγω ὅτι ὁ Α τοῦ Γ ἐϛὶ διπλάϛιος.

Ἐπεὶ γὰρ ἡμιόλιός ἐϛιν ὁ Α τοῦ Β· ὁ Α ἄρα ἔχει



continet ipſum B atque ejus ſeſquitertium: quare duo A æquales ſunt tribus B. rurſus, quoniam B eſt ſeſquitertius ipſius Γ, continet ergo B ipſum Γ & tertiam ejus partem: quare tres B æquales ſunt quatuor Γ. atqui tres B æquales quoque ſunt duobus A: quare duo A æquales ſunt quatuor Γ. atque hinc A eſt æqualis duobus Γ: eſt igitur A duplus ipſius Γ.

THEOREMA VII.

Ex duplo intervallo & ſeſcuplo, triplum fit intervallum.

SIT enim A duplus ipſius B, B vero ſeſcuplus ipſius Γ: dico A eſſe triplum ipſius Γ.

Cum enim A ſit duplum ipſius B; eſt ergo A

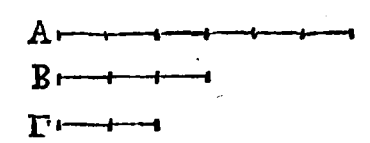
τὸν Β, καὶ τὸ ἥμιϲυ αὐτοῦ· δύο ἄρα οἱ Α ἴϖϲι εἰϲὶ τρισὶ τοῖς Β. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Β τοῦ Γ ἐϛὶν ἐπίτριτος· ὁ Β ἄρα ἔχει τὸν Γ καὶ τὸ τρίτον αὐτοῦ· τρεῖς ἄρα οἱ Β ἴϲοι εἰϲὶ τέτταρϲι τοῖς Γ. τρεῖς δὲ οἱ Β ἴϲοι εἰϲὶ δυϲὶ τοῖς Α· δύο ἄρα οἱ Α ἴϲοι εἰϲὶ τέτταρϲι τοῖς Γ· ὁ Α ἄρα ἴϲος ἐϛὶ δυϲὶ τοῖς Γ· διπλάϛιος ἄρα ἐϛὶν ὁ Α τοῦ Γ.

ΘΕΩΡΗΜΑ ζ'.

Ἐκ δὲ διπλαϲίου διαϲήματος καὶ ἡμιολίου, τριπλάϲιον διάϲημα γίνεται.

Ἔϛτω γὰρ ὁ μὲν Α τοῦ Β διπλάϲιος, ὁ δὲ Β τοῦ Γ ἡμιόλιος· λέγω ὅτι ὁ Α τοῦ Γ ἐϛὶ τριπλάϲιος.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τοῦ Β ἐϛὶ διπλάϲιος· ὁ ἄρα Α



æqualis binis B. rurſus, cum B ſit ſeſquialter ipſius Γ; continet ergo B ipſum Γ ejuſque

ἴϖϲ ἐϛὶ δυϲὶ τοῖς Β. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Β τοῦ Γ ἐϛὶν ἡμιόλιος· ὁ Β ἄρα ἔχει τὸν Γ καὶ τὸ ἥμιϲυ αὐτοῦ.

δύο

δύο ἄρα οἱ Β ἴσοι εἰσὶ τρισὶ τοῖς Γ. δύο δὲ οἱ Β ἴσοι εἰσὶ τῷ Α· καὶ ὁ Α ἄρα ἴσος ἐστὶ τρισὶ τοῖς Γ· τριπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ Α τοῦ Γ.

quare bini Β æquales sunt ternis Γ. atque bini Β æquales sunt ipsi Α: ergo Α quoque æqualis est ternis Γ: est ergo Α triplus ipsius Γ.

ΘΕΩΡΗΜΑ η'.

Ἐὰν ἀπὸ ἡμιολίου διαστήματος ἐπιτρίτου διάστημα ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν καταλείπεται ἐπόγδοον.

THEOREMA VIII.

Si à sesculplo intervallo sesquitertium intervallum auferatur; quod relinquitur, est sesquioctavum.

Ἔστω γὰρ ὁ μὲν Α τοῦ Β ἡμιόλιος, ὁ δὲ Γ τοῦ Β ἐπίτριτος· λέγω ὅτι ὁ Α τοῦ Γ ἐστιν ἐπόγδοος.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τοῦ Β ἐστιν ἡμιόλιος, ὁ Α ἄρα ἔχει τὸ Β καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ· ὀκτὼ ἄρα οἱ Α ἴσοι εἰσὶ δώδεκα τοῖς Β. πάλιν ἐπεὶ ὁ Γ τοῦ Β ἐστιν ἐπίτριτος· ὁ Γ ἄρα ἔχει τὸ Β καὶ τὸ τρίτον αὐτοῦ· ἐννέα ἄρα οἱ Γ ἴσοι εἰσὶ δώδεκα τοῖς Β. δώδεκα δὲ οἱ Β ἴσοι εἰσὶν ὀκτὼ τοῖς Α· ὀκτὼ ἄρα οἱ Α ἴσοι εἰσὶν ἐννέα τοῖς Γ· ὁ ἄρα Α ἴσος ἐστὶ τῷ Γ καὶ τῷ ὀγδόῳ αὐτοῦ· ὁ Α ἄρα τοῦ Γ ἐστιν ἐπόγδοος.

ESto enim Α sesquialter ipsius Β, at Γ sesquitertius ipsius Β: dico Α esse superoctavum ipsius Γ.

Quoniam enim Α est sesquialter ipsius Β, habet ergo Α ipsum, ejusque semissem: quare octo Α æquales sunt duodecim Β. porro, quoniam Γ est ipsius Β sesquitertius, habet ergo Γ ipsum Β ejusque trientem: quare novem Γ æquales sunt duodecim Β. atqui duodecim Β æquales sunt octonis Α: octoni ergo Α æquales sunt novemis Γ: quare Α æqualis est ipsi Γ ejusque parti octavæ: atque adeo Α sesquioctavus est ipsius Γ.

ΘΕΩΡΗΜΑ θ'.

Τὰ ἓξ ἐπόγδοα διαστήματα μείζονά ἐστι διαστήματος ἑνὸς διπλασίου.

THEOREMA IX.

Sex intervalla sesquioctava majora sunt uno intervallo duplo.

Ἔστω γὰρ ὁ ἐξῆς ἀριθμὸς ὁ Α, καὶ τοῦ μὲν Α ἐπόγδοος ἔστω ὁ Β, τοῦ δὲ Β ἐπόγδοος ὁ Γ, τοῦ δὲ Γ ἐπόγδοος ὁ Δ, τοῦ δὲ Δ ἐπόγδοος ὁ Ε, τοῦ δὲ Ε ἐπόγδοος ὁ Ζ, τοῦ δὲ Ζ ἐπόγδοος ὁ Η· λέγω ὅτι ὁ Η τοῦ Α μείζων ἐστὶν ἢ διπλάσιος.

Ἐπεὶ ἐμάθομεν εὑρεῖν ἑπτὰ ἀριθμοὺς ἐφεξῆς ἐπογδόους ἀλλήλων, εὑρήσθωσαν οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η. καὶ γίνεται ὁ μὲν Α, εἰκοσιξ μύρια, ἑκατὸν καὶ τεσσαράκοντα ☾ τεσσαρες· ὁ δὲ Β, εἰκοσιεννέα μύρια, τετρακισχίλια, ἑπτακόσια καὶ δώδεκα· ὁ δὲ Γ, τεσσαρακοντατρία μύρια, χίλια, ἑπτακόσια, καὶ ἑβδομηκοντατρίς· ὁ δὲ Δ, τεσσαρακοντατρὶς μύρια, τετρακισχίλια, διακόσια ☾ τεσσαρακοντατρικτώ· ὁ δὲ Ε, τεσσαρακοντατὲν μύρια, ἑπτακισχίλια, ἑπτακόσια ☾ τέσσαρες· ὁ δὲ Ζ, τεσσαρακοντατρὶς ἑπτὰ μύρια, ἑξακισχίλια, τριακόσια ☾ ἑπτηκοντατρὶς δύο· ὁ δὲ Η, πεντηκοντατρία μύρια, χίλια, τετρακόσια καὶ τεσσαρακοντατέν· καὶ ἔστιν ὁ Η τοῦ Α μείζων ἢ διπλάσιος.

SIT enim unus numerus Α, atque hujus Α sesquioctavus sit Β, hujus vero Β sesquioctavus sit Γ, hujus vero Γ sesquioctavus sit Δ, rursus hujus Δ sesquioctavus sit Ε, ipsius vero Ε sesquioctavus sit Ζ, denique ipsius Ζ sesquioctavus sit Η: dico Η numerum duplo & amplius majorem esse ipso Α.

Quoniam didicimus invenire septem numeros deinceps inter se sesquioctavos, inventi sint, Α, Β,

Α, 262144. Β, 294912. Γ, 331776.
Δ, 373248. Ε, 419904. Ζ, 472392. Η, 531441.

Γ, Δ, Ε, Ζ, Η. sit itaque Α vicies-sexies dena millia, duo millia, centum quadraginta quatuor; Β autem, vicies-novies dena millia, quatuor millia, nongenta & duodecim; deinde Γ, tricies-ter dena millia, mille, septingenta, septuaginta sex; & Δ, tricies-septies dena millia, tria millia, ducenta & quadraginta octo; & Ε, quadragies-semel dena millia, novem millia, nongenta & quatuor; porro Ζ, quadragies-septies dena millia, duo millia, trecenta & nonaginta duo; tandem Η, quinquagies-ter dena millia, mille, quadringenta & quadraginta unum; estque Η duplo & amplius major quam Α.

THEOREMA X.

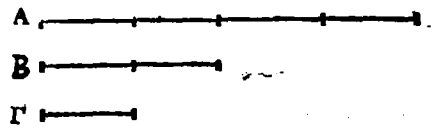
Intervallum diapaſon eſt multiplex.

SIT enim nete quidem hyperbolæon A, meſe vero B, & proſlambanomenos Γ: ergo A, Γ intervallum, cum ſit bis diapaſon, eſt conſonum. eſt igitur vel ſuperparticulare, vel multiplex. non eſt autem ſuperparticulare, quoniam in ſuperparticulari intervallo nullus cadit medius proportionalis: eſt ergo multiplex. quoniam ergo bina æqualia intervalla, A, B: B, Γ, compoſita faciunt multiplex; ideo & A, B erit multiplex.

ΘΕΩΡΗΜΑ ι'.

Τὸ διὰ πασῶν διάςημα ὅτι πολλαπλάσιον.

ΕΣτω γὰρ νήτη μὲν ὑπερβολαίων ὁ Α, μέση δὲ ὁ Β, προσλαμβανόμενος δὲ ὁ Γ· τὸ ἄρα Α, Γ διάςημα, ὃ ἐς διὰ πασῶν ὂν, ἐςὶ σύμφωνον.



ἤτοι ἔν ἐπιμορίων ἐςιν, ἢ πολλαπλάσιον. ἐπιμόριον μὲν ἔν οὐκ ἔςιν, ἐπιμερὲς γὰρ διαςήματος μέσους εὐθεῖς ἀνάλογον ἐμπίπτει· πολλαπλάσιον ἄρα ἐςίν. ἐπεὶ ἓν δύο ἴσα διαςήματα, τὰ Α, Β· Β, Γ συντεθέντα ποιεῖ πολλαπλάσιον τὸ ὅλον· ἤτοι τὸ Α, Β ἄρα ἐςὶ πολλαπλάσιον.

THEOREMA XI.

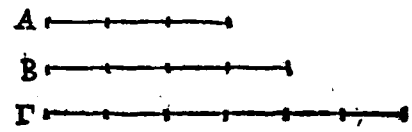
Diateſſaron intervallum & diapente, utrumque eſt ſuperparticulare.

ESto enim nete quidem ſynemmenon A, meſe vero B, & hypate meſon Γ: quare A, Γ intervallum, cum ſit bis diateſſaron, eſt diſſonum: non eſt ergo multiplex. quoniam itaque duo intervalla æqualia, A, B: B, Γ compoſita totum non faciunt multiplex, neque ergo A, B eſt multiplex. eſt tamen conſonum: ergo ſuperparticulare. eadem demonſtratio obtinet in diapente.

ΘΕΩΡΗΜΑ ια'.

Τὸ διὰ τεσσάρων διάςημα καὶ τὸ διὰ πέντε, ἑκάτερον ἐπιμόριόν ἐςιν.

ΕΣτω γὰρ νήτη μὲν συνημμένων ὁ Α, μέση δὲ ὁ Β, ὑπάτη δὲ μέσων ὁ Γ· τὸ ἄρα Α, Γ διάςημα, ὃ ἐς διὰ τεσσάρων ὂν, ἐςὶ διάφω-



νον· οὐκ ἄρα ἐςὶ πολλαπλάσιον. ἐπεὶ ἓν δύο διαςήματα ἴσα, τὰ Α Β· Β Γ συντεθέντα τὸ ὅλον μὴ ποιεῖ πολλαπλάσιον, οὐδὲ ἄρα τὸ Α, Β ἐςὶ πολλαπλάσιον. καί ἐςι σύμφωνον· ἐπιμόριον ἄρα. ἡ αὐτὴ δὲ ἀπόδειξις καὶ ἐπὶ τοῦ διὰ πέντε.

THEOREMA XII.

Intervallum diapaſon eſt duplum.

QUippe monſtravimus ipſum eſſe multiplex: quare aut duplum eſt, aut duplo majus. ſed monſtravimus intervallum duplum conſtare ex duobus maximis ſuperparticularibus: unde diapaſon intervallum, ſi duplo fuerit majus, non erit compoſitum ex duobus ſolum ſuperparticularibus, ſed ex pluribus. atqui componitur ex duobus intervallis conſonis, nimirum ex diapente & diateſſaron: quare diapaſon non erit duplo majus: ergo duplum. quoniam vero diapaſon eſt duplum, & duplum conſtat ex duobus maximis ſuperparticularibus; idcirco diapaſon ex ſeſquialtero conſtat & ſeſquitertio: hæc enim ſunt maxima; ſiquidem ex diapente & diateſſaron, quæ ſuperparticularia ſunt, componitur. porro diapente, quoniam majus eſt, erit ſeſcuplum;

ΘΕΩΡΗΜΑ ιβ'.

Τὸ διὰ πασῶν διάςημα ὅτι διπλάσιον.

ΕΔείξαμεν γὰρ αὐτὸ πολλαπλάσιον· ὂν ἤτοι διπλάσιόν ἐςι, ἢ μεῖζον ἢ διπλάσιον. ἀλλ' ἐπεὶ ἐδείξαμεν τὸ διπλάσιον διάςημα ἐκ δύο τῶν μεγίςων ἐπιμορίων συγκείμενον· ὥςε εἰ ἔςιν τὸ διὰ πασῶν μεῖζον διπλασίου, ἐ συγκείσεται ἐκ δύο μόνων ἐπιμορίων, ἀλλ' ἐκ πλειόνων. σύγκειται δὲ ἐκ δύο συμφώνων διαςημάτων, ἔκ τε τοῦ διὰ πέντε καὶ διὰ τεσσάρων· οὐκ ἄρα ἔςιν διὰ πασῶν μεῖζον διπλασίου· διπλάσιον ἄρα. ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ διὰ πασῶν ἐςι διπλάσιον, τὸ δὲ διπλάσιον ἐκ τῶν δύο μεγίςων ἐπιμορίων συνέςηκε· καὶ τὸ διὰ πασῶν ἄρα ἐξ ἡμιολίου καὶ ἐπιτρίτου συνέςηκε· τοῦτο δὲ μέγιςον συνέςηκε γὰρ ἔκ τε τοῦ διὰ πέντε καὶ ἐκ τοῦ διὰ τεσσάρων ὄντων ἐπιμορίων· τὸ μὲν ἄρα διὰ πέντε, ἐπειδὴ μεῖζόν ἐςι, ἡμιόλιον ἂν εἴη.

ἐστὶ· τὸ δὲ διὰ πασάρων δίτριτον. Φανερὸν δὴ ὅτι τὸ διὰ πέντε καὶ τὸ διὰ πασῶν τριπλάσιόν ἐστιν, ἐδείξαμεν γὰρ ὅτι ἐκ διπλασίου διαστήματος καὶ ἡμιολίου τριπλάσιον διάστημα γίνεται· ὥστε καὶ τὸ διὰ πασῶν καὶ τὸ διὰ πέντε τριπλάσιον. τὸ δὲ δὶς διὰ πασῶν τετραπλάσιόν ἐστιν· * ὑποδέδεικται ἄρα τῶν συμφώνων ἕκαστον ἐν τοῖς λόγοις ἔχει σὺν ἑαυτοῖς συνέχοντας φθόγγους πρὸς ἀλλήλους.

diatessaron vero sesquitertium. manifestum quoque, intervallum quod fit ex diapente & diapason additis, esse triplum; etenim monstravimus, ex duplo intervallo & sesquialtero, intervallum fieri triplum: ideoque diapason & diapente triplum est. bis diapason autem quadruplum: demonstratum ergo est, quibus inter se rationibus constitutos habet sonos, qui ipsum continent consonorum, *intervallorum* unumquodq;.

ΘΕΩΡΗΜΑ ιγ'.

Λοιπὸν δὲ περὶ τοῦ τονιαίου διαστήματος διελθεῖν, ὅτι ἐστὶν ἐπόγδοον.

ΕΜάθομεν γὰρ ὅτι ἐὰν μοῦ ἀπὸ ἡμιολίου διαστήματος ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν καταλειπόμενον ἐπόγδοον· ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ διὰ πέντε τὸ διὰ πασάρων ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν τονιαῖόν ἐστι διάστημα· τὸ ἄρα τονιαῖον διάστημα ἐστὶν ἐπόγδοον.

THEOREMA XIII.

Reliquum est ut de toni intervallo dispiciamus, quod est sesquioctavum.

NAM didicimus, si à sescuplo intervallo auferatur intervallum sesquitertium, id quod relinquitur, esse sesquioctavum; porro si à diapente auferatur diatessaron, reliquum esse toni intervallum: quare toni intervallum est sesquioctavum.

ΘΕΩΡΗΜΑ ιδ'.

Τὸ διὰ πασῶν ἔλαττόν ἐστι ἢ ἓξ τόνων.

ΔΕδεικται γὰρ τὸ μοῦ διὰ πασῶν διπλάσιον· ὁ δὲ τόνος ἐπόγδοος. αἱ δὲ ἓξ ἐπόγδοοι διαστήματα μείζονα διαστήματός ἐστι διπλασίου· τὸ ἄρα διὰ πασῶν ἔλαττόν ἐστιν ἓξ τόνων.

THEOREMA XIV.

Diapason est minus sex tonis.

MONstratum enim est, diapason quidem esse duplum: tonus vero est sesquioctavus. at sex sesquioctava intervalla majora sunt intervallo duplo: quare diapason minus est sex tonis.

ΘΕΩΡΗΜΑ ιε'.

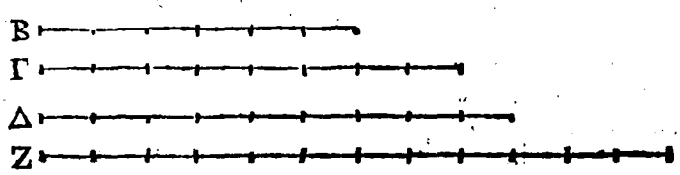
Τὸ δὲ διὰ πασάρων ἔλαττόν ἐστι δύο τόνων καὶ ἡμιτονίου. καὶ τὸ διὰ πέντε ἔλαττόν ἐστι τριῶν τόνων καὶ ἡμιτονίου.

ΕΣτω γὰρ νήτη μοῦ διεζευγμένων ὁ Β, παραμέση δὲ ὁ Γ, μέση δὲ ὁ Δ, ὑπάτη δὲ μέσων ὁ Ζ· ὅλων τὸ μοῦ Γ, Δ διάστημα τόνος ἐστί. τὸ

THEOREMA. XV.

Diatessaron minus est duobus tonis & hemitonio. item diapente minus est tribus tonis & hemitonio.

SIT enim nete quidem diezeugmenon B, parameses vero Γ, mese Δ, hypate meson Z: quare Γ, Δ intervallum est tonus. at



δὲ Β, Ζ διὰ πασῶν ὂν, ἔλαττόν ἐστιν ἓξ τόνων· τὰ λοιπὰ ἄρα, τό, τε Β, Γ καὶ τὸ Δ, Ζ, ἴσα ὄντα, ἐλάττονά ἐστι πέντε τόνων· ὥστε τὸ Β, Γ ἔλαττον, δύο τόνων καὶ ἡμιτονίου ὂν, ἐστὶ διὰ πασάρων· τὸ δὲ Β, Δ, ἔλαττον τριῶν τόνων καὶ ἡμιτονίου ὂν, ἐστὶ διὰ πέντε.

Β, Ζ cum sit diapason, minus est sex tonis: ergo reliqua, scilicet Β Γ, & Δ Ζ, cum sint æqualia, minora sunt tonis quinque: quare Β, Γ, cum duobus tonis & hemitonio existat minus, est diatessaron: deinde Β, Δ, cum tribus tonis & hemitonio sit minus, est diapente.

ΘΕΩΡΗΜΑ ις'.

Ο τόνος οὐ διαιρεθήσεται εἰς δύο ἴσους, οὔτε εἰς πλείους.

ΕΔείχθη γὰρ ὢν ἐπιμόριος. ἐπιμορίου δὲ διαστήματος οὔτε πολλοὺς οὔτε εἰς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν· οὐκ ἄρα διαιρεθήσεται ὁ τόνος εἰς ἴσα.

THEOREMA. XVI.

Tonus in duas pluresve æquales partes dividi nequit.

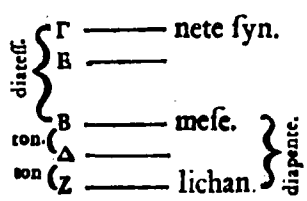
MONstratus enim est esse superparticularis. at superparticulare intervallum neq; unum neque plures capit medios proportionaliter intervenientes: quare nec tonus in æqua dividetur.

* In editis deficit perperam, ὑποδέδεικται ἄρα τῶν συμφώνων ἕκαστον ἐν τοῖς λόγοις, &c.

THEOREMA XVII.

Paranetæ & lichani ſumentur per conſonantiam hoc modo.

ESto enim meſe B, intendatur diateſſaron ad Γ, atque à Γ remittatur diapente ad Δ: eſt igitur tonus B, Δ. rurſus à Δ intenda-



tur diateſſaron ad E, & ab E remittatur diapente ad Z: quare tonus eſt Z, Δ: unde Z, B eſt ditonum: ergo Z eſt lichanos. ſimili quoque ratione ſumentur paranetæ.

ΘΕΩΡΗΜΑ ιζ'.

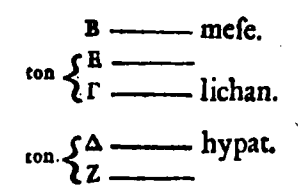
Αἱ παρανῆται καὶ αἱ λιχανοὶ ληφθήσονται διὰ συμφωνίας ὅλου.

ΕΣτω γὰρ μέση ὁ Β, ὑπατοειδὴς δὲ τεσσάρων ἐπὶ τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἀνοίσω διὰ πέντε ἐπὶ τὸ Δ· τόνος ἄρα τὸ Β, Δ. πάλιν δὴ ἀπὸ τοῦ Δ διὰ τεσσάρων ἐπιτεταμένων ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἀνοίσω ἐπὶ τὸ Ζ διὰ πέντε· τόνος ἄρα τὸ Ζ, Δ· δίτονον ἄρα τὸ Ζ, Β· λιχανὸς ἄρα τὸ Ζ. ὁμοίως δὴ καὶ αἱ παρανῆται ληφθήσονται.

THEOREMA XVIII.

Parypatæ & tritæ non dividunt ſpiſſum in partes æquales.

ESto enim meſe quidem B, lichanos vero Γ, & hypate Δ; remittatur diapente à B ad Z: quare tonus eſt Z, Δ. porro à Z intendatur



diateſſaron ad E: itaque tonus eſt tum Z, Δ intervallum, tum Γ, E. commune intervallum Δ, Γ addatur: quare Z, Γ æquale eſt ipſi Δ, E. at Z, E eſt diateſſaron: nullus ergo medius proportionaliter incidit inter Z, E: eſt enim intervallum hoc ſuperparticulare. eſtque Δ, Z æqualis ipſi Γ, E: non ergo cadet medius inter Δ, Γ intervallum, quod eſt ab hypate ad lichanon: hinc neque parypate in æqua dividet ſpiſſum. ſimili ratione neque trite.

ΘΕΩΡΗΜΑ ιη'.

Αἱ παρυπάται καὶ αἱ τρίται οὐ διαιροῦσι τὸ πυκνὸν εἰς ἴσα.

ΕΣτω γὰρ μέση μὲν ὁ Β, λιχανὸς δὲ ὁ Γ, ὑπάτη δὲ ὁ Δ, ἀνοίσω ἀπὸ τοῦ Β διὰ πέντε ἐπὶ τὸ Ζ· τόνος ἄρα τὸ Ζ, Δ. καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ διὰ τεσσάρων ἐπὶ τὸ Ε· τόνος ἐστὶν ἄρα τὸ Ζ, Δ διάστημα, καὶ τὸ Γ, Ε. κοινὸν προσκείσθω τὸ Δ, Γ· τὸ ἄρα Ζ, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ Δ, Ε. διὰ τεσσάρων δὲ τὸ Ζ, Ε· οὐκ ἄρα μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει τις τοῦ Ζ, Ε, ὑπεροχὴν γὰρ τὸ διάστημα. καὶ ἔστιν ἴσος ὁ Δ, Ζ τῷ Γ, Ε· οὐκ ἄρα τοῦ Δ, Γ μέσος ἐμπεσεῖται, ὃ ἐστιν ἀπὸ ὑπάτης ἐπὶ λιχανόν· οὐκ ἄρα ἡ παρυπάτη διαιρεῖ τὸ πυκνὸν εἰς ἴσα. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ τρίτη.

THEOREMA XIX.

Canonem deſignare ſecundum ſyſtema, quod vocatur immutabile.

SIT Canonis longitudo, quæ & chordæ, A B; ac dividatur in quatuor partes æquales, nimirum Γ, Δ, E: erit itaque B A, cum graviſſimus ſit ſonus, bombus. porro hic A B eſt ſeſquitertius ipſius Γ B: itaque Γ B ipſi A B conſonabit diateſſaron verſus acumen. eſtque A B proſlambanomenos: quare Γ B erit hypaton diatonos. rurſus, quoniam A B eſt duplus ipſius

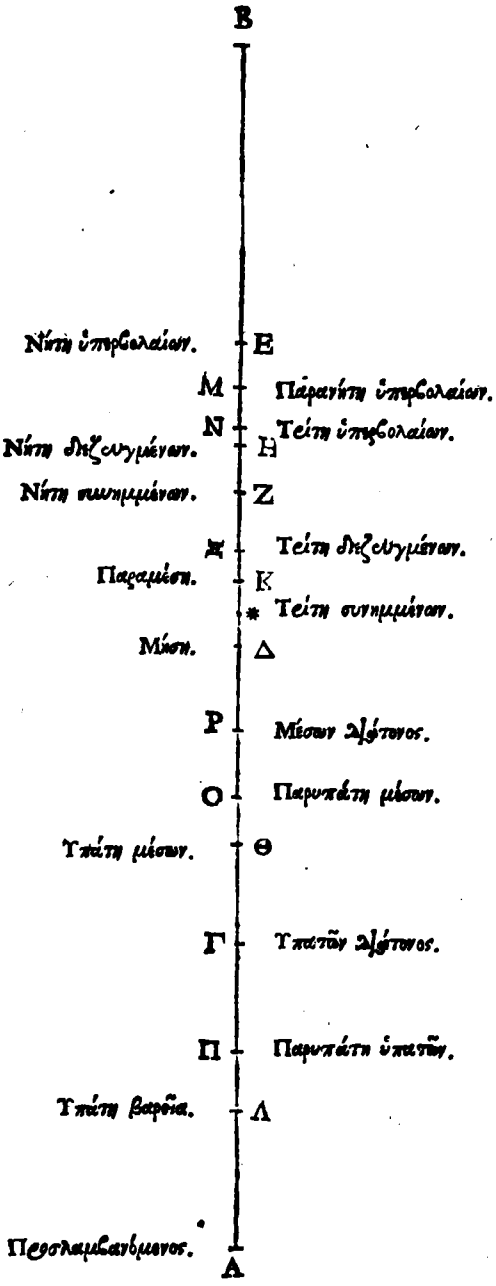
ΘΕΩΡΗΜΑ ιθ'.

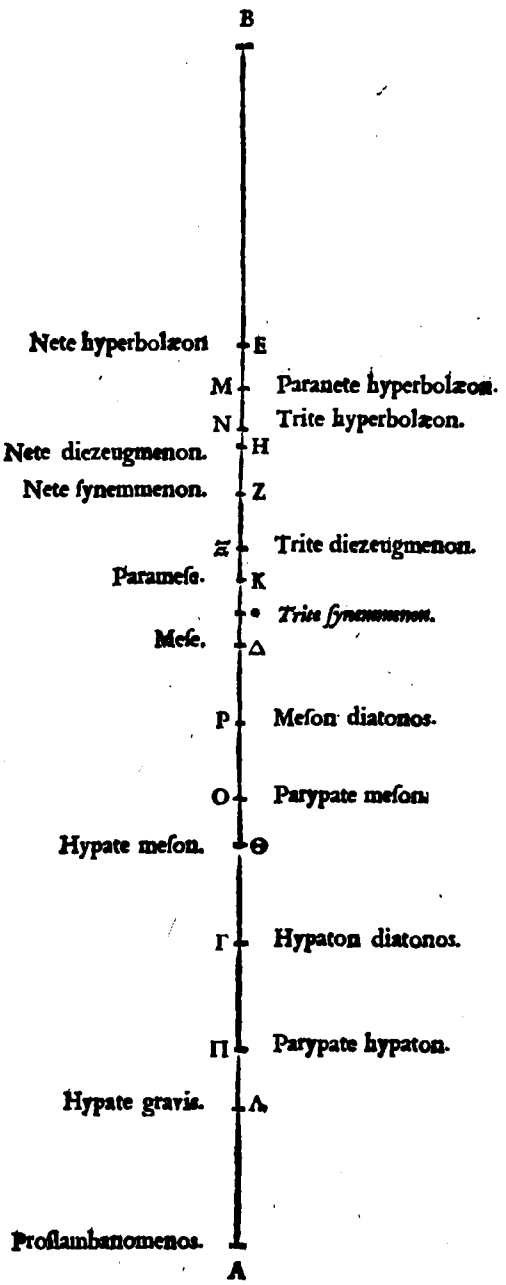
Τὸν κανόνα καταγράψαι κατὰ τὸ καλούμενον ἀμετάβολον σύστημα.

ΕΣτω τοῦ κανόνος μῆκος, ὁ καὶ τῆς χορδῆς, τὸ Α Β, καὶ διῃρήσθω εἰς τέσσαρα ἴσα, τὰ Γ, Δ, Ε· ἔστιν ἄρα ὁ Β Α βαρύτατος ὢν φθόγγος, βόμβος. ἔστι δὲ ὁ Α Β τοῦ Γ Β ἐπίτριτος ἐστὶν· ὥστε ὁ Γ Β τῷ Α Β συμφωνήσει διὰ τεσσάρων ἐπὶ τὸ ὀξύτατα. καὶ ἔστιν ὁ Α Β προσλαμβανόμενος· ὁ ἄρα Γ Β ἔσται ὑπατῶν διάτονος. πάλιν ἐπεὶ ὁ Α Β τοῦ Β Δ ἐστὶ διπλάσιος,

πλάσιος, συμφωνήσει αὐτῇ διὰ πασῶν, ἔσται ὁ ΒΔ μέση. πάλιν, ἐπεὶ τετραπλάσιός ἐστιν ὁ ΑΒ τοῦ ΕΒ, ἔσται τὸ ΕΒ νήτη ὑπερβολαίων. ἔτμηται τὸ ΓΒ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἔσται διπλάσιος ὁ ΓΒ τοῦ ΖΒ· ὥστε συμφωνεῖ τὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΖΒ διὰ πασῶν· ὥστε εἶναι τὸ ΖΒ νήτην συνημμένων. ἀπῄλαφον τοῦ ΔΒ τρίτον μέρος τὸ ΔΗ, καὶ ἔσται ἡμιόλιος ὁ ΔΒ τοῦ

ΒΔ, idcirco per diapaſon intervallum ipſi conſonabit, eritque ΒΔ meſe. iterum, quoniam ΑΒ quadruplus eſt ipſius ΕΒ, erit idcirco ΕΒ nete hyperbolæon. diviſi deinde ΓΒ bifariam in Ζ, eritque ΓΒ duplus ipſius ΖΒ; ita ut ΓΒ conſonet ad ΖΒ diapaſon intervallo: quare ΖΒ eſt nete ſynemmenon. abſcidi à ΔΒ partem tertiam, ΔΗ. eritque ΔΒ ſeſquialter ipſius





ΗΒ· ὥστε συμφωνήσει ὁ ΔΒ πρὸς τὸν ΗΒ, ἐν τῷ διὰ πέντε· ὁ ἄρα ΗΒ νήτη ἔσται διεζευγμένων. ἔθηκα τῷ ΗΒ ἴσον τὸ ΗΘ· ὥστε ὁ ΘΒ πρὸς τὸ ΗΒ συμφωνήσει διὰ πασῶν· ὡς εἶναι τὸ ΘΒ ὑπάτην μέσων. ἔλαβον τοῦ ΘΒ τρίτον μέρος τὸ ΘΚ, καὶ ἔσται ἡμιόλιος ὁ ΘΒ τοῦ ΚΒ· ὥστε εἶναι τὸ ΚΒ παραμέσην. ἀπῄλαβον τῷ ΚΒ ἴσον τὸ ΛΚ, καὶ γενήσεται ὁ ΛΒ ὑπάτη βαρεῖα· ἔσονται ἄρα ἐναρμόνιοι ἐν τῷ κανόνι πάντες οἱ φθόγγοι τοῦ ἀμετακόλλα συστήματος.

ΗΒ; ut hac ratione ΔΒ conſonet ad ΗΒ, diapente intervallo: ergo ΗΒ erit nete diezeugmenon. poſui ipſi ΗΒ æqualem, ſcilicet ΗΘ: ergo ΘΒ conſonabit diapaſon ad ΗΒ, ut ΘΒ ſit hypate meſon. ſumpſi ipſius ΘΒ partem tertiam, ΘΚ, eritque ΘΒ ſeſquialter ipſius ΚΒ; ita ut ΚΒ ſit parameſe. porro abſcidi ipſi ΚΒ æqualem ΛΚ, fietque ΛΒ hypate graviſſima: quare ſoni omnes ſyſtematis immutabilis ſumpti erunt in canone.

THEO-

THEOREMA XX.

Reſtat tandem ut mobiles deſignentur.

DIviſi EB in octo partes, quarum uni æqualem poſui EM; ut MB fiat ipſius EB ſeſquioctavus. ac rurſus diviſo MB in partes octo, illarum uni æqualem poſui NM: tono itaque gravior erit NB quam BM, MB vero quam BE: ita ut NB quidem ſit trite hyperbolæon, MB vero paranete hyperbolæon diatonos. porro in tres partes diviſi NB, illarumque uni æqualem poſui NΞ; ita ut ΞB ſit ſeſquitertius ipſius NB, ac diateſſaron conſonet verſus gravitatem, fiatque ΞB, trite diezeugmenon. rurſus ipſius ΞB ſumpta parte dimidia, æqualem ipſi poſui ΞO; ut hac ratione OB conſonet diapente ad ΞB: quare OB erit parypate meſon. deinde ipſi ΞO æqualem poſui OΠ; ut ΠB fiat parypate hypaton. ſumpſi quoque ipſius ΓB partem quartam ΓP; ut PB fiat meſon diatonos.

ΘΕΩΡΗΜΑ κ'.

Λοιπὸν δὲ τὰς φερομένας λαβεῖν.

ΕΤεμον τὴν ΕΒ εἰς ὀκτὼ, καὶ ἑνὶ αὐτῶν ἴσην ἔθηκα τὴν ΕΜ· ὥςε τὴν ΜΒ τῆ ΕΒ γενέσθαι ἐπόγδοον. καὶ πάλιν διελὼν τὴν ΜΒ εἰς ὀκτὼ, ἑνὶ αὐτῶν ἴσην ἔθηκα τὴν ΝΜ· τόνῳ ἄρα βαρύτερος ἔσται ὁ ΝΒ τοῦ ΒΜ, ὁ δὲ ΜΒ τοῦ ΒΕ· ὥςε ἔσται μὲν ὁ ΝΒ τρίτη ὑπερβολαίων, ὁ δὲ ΜΒ παρανήτη ὑπερβολαίων διάτονος. ἔλαβον τοῦ ΝΒ τρίτον μέρος, καὶ ἑνὶ αὐτῶν ἴσην ἔθηκα τὴν ΝΞ· ὥςε τὴν ΞΒ τῆ ΝΒ εἶναι ἐπίτριτον, ἡ δὲ διὰ τεσσάρων συμφωνεῖν ἐπὶ τὸ βαρύτητα, καὶ γενέσθαι τὴν ΞΒ τρίτην διεζευγμένων. πάλιν τοῦ ΞΒ λαβὼν ἥμισυ μέρος ἔθηκα ἴσον αὐτῷ τὸν ΞΟ, ὥςε διὰ πέντε συμφωνεῖν τὴν ΟΒ πρὸς τὴν ΞΒ· ὁ ἄρα ΟΒ ἔσται παρυπάτη μέσων. καὶ τῷ ΞΟ ἴσην ἔθηκα τὴν ΟΠ· ὥςε γενέσθαι τὸν ΠΒ παρυπάτην ὑπάτων. ἔλαβον δὲ τοῦ ΓΒ τέταρτον μέρος τὸ ΓΡ· ὥςε γενέσθαι τὴν ΡΒ μέσων διάτονον.

ΤΕΛΟΣ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΚΑΤΑΤΟΜΗΣ ΚΑΝΟΝΟΣ.

FINIS EUCLIDIS SECTIONIS CANONIS.

ΕΥ-

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ.

EUCLIDIS
PHÆNOMENA.

ТОЛКАЧЕВ

А. И. ЭЙНШТЕЙН

ВЫСШИЙ ПИЛОТАЖ

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ.

EUCLIDIS

PHÆNOMENA.

ΕΠΕΙΔΗ ὀρᾶται τὰ ἀπλανῆ ἄστρα ἐκτε ἀπὸ αὐτοῦ τόπου ἀνατέλλοντα καὶ εἰς τὸν αὐτὸν τόπον δυόμενα, καὶ τὰ ἅμα ἀνατέλλοντα ἀεὶ ἅμα ἀνατέλλοντα, καὶ τὰ ἅμα δυόμενα ἀεὶ ἅμα δυόμενα, καὶ ἐν τῇ ἀπ' ἀνατολῆς ἐπὶ δύσιν φορᾷ τὰ πρὸς ἄλληλα διαστήματα τὰ αὐτὰ ἔχοντα, τοῦτο δὲ γίγνεται ἐπὶ τῶν ἐγκυκλίων φορᾶν φερομένων μόνον, ἐπὰν ἡ ὄψις πάντῃ τὴν περιφερείας ἴσον ἀπέχῃ, ὡς ἐν τοῖς ὀπτικοῖς δείκνυται· δεῖται τὰ ἄστρα ἐγκυκλίως φέρεσθαι, καὶ συνδεδέσθαι ἐν ἑνὶ σώματι, καὶ τὴν ὄψιν ἴσον ἀπέχειν τῶν περιφερειῶν.

Ὀρᾶται δέ τις ἀστὴρ μεταξὺ τῆς ἄρκτου, καὶ μεταλλάττων τόπον οὐ τόπου, ἀλλ' ἐν ᾧ ἵδρυται χώρᾳ ἐν ταύτῃ στρεφόμενος, ἐπεὶ δὲ ἔστιν πρὸς τὰς περιφερείας τῶν κύκλων, καθ' ὧν οἱ λοιποὶ ἀστέρες φέρονται, ἴσον ἀπέχων πάντῃ φαίνεται· δεῖται τοὺς κύκλους πάντας παραλλήλους εἶναι, ὥστε πάντα τὰ ἀπλανῆ ἄστρα κατὰ παραλλήλων φέρεσθαι πόλον ἔχόντων τὸν περιμένον ἀστέρα.

Τούτων δὲ ἔνια οὔτε ἀνατέλλοντα οὔτε δύμενα ὀρᾶται, διὰ τὸ ἐπὶ μετεωροτέρων κύκλων φέρεσθαι, οὓς καλοῦσιν ἀεὶ φανεροὺς. ταῦτα δέ ἐστι τὰ ἐχόμενα [1] τοῦ φανεροῦ πόλου ἄστρα ἕως τοῦ ἀρκτικοῦ κύκλου. καὶ ἐλάχιστον μὲν κύκλον φέρονται οἱ ἔγγιον

QUANDOQUIDEM aſtra inerrantia ex eodem ipſo loco ſemper oriri, & in eodem ipſo loco occidere conſpiciuntur; & quæ ſimul oriuntur, ſemper ſimul oriri, quæve contra ſimul occidunt, ſimul ſemper occidere videntur; præterea in converſione, quam ab ortu faciunt ad occaſum, intervalla eadem mutuo retinere; quod quidem iis aſtris accidit, quæ motu tantummodo circulari feruntur, quandoquidem, ut in opticis eſt demonſtratum, viſus omni ex parte à circumferentia æque diſtat: ponendum ſiquidem eſt, aſtra circulari motu moveri, uni infixa eſſe corpori, & viſum ab circumferentiis æque diſtantem eſſe.

Et quoniam aſtrum quoddam, quod intra circulum arcticum ſitum eſt, locum de loco non apparet permutare, ſed in quo loco ſitum eſt ac poſitum, in illo ipſo circumvolvi videtur; præterea etiam quoniam hoc jam dictum aſtrum à circulorum circumferentiis, in quibus reliqua feruntur aſtra, æqualiter diſtare omniquaque conſpicitur: idcirco ponendum deinceps eſt, circulos omnes eſſe parallelos, & aſtra inerrantia idcirco omnia in circulis ferri parallelis, polum dictum jam aſtrum habentibus.

Atqui horum quidem aſtrorum quædam neque oriri neque occidere videntur, propterea quod in ſublimioribus ferantur circulis, qui ſemper-apparentes circuli nominantur. ſunt autem hæc aſtra illa quidem, quæ intra polum conſpicuum & arcticum circulum continentur. feruntur vero minimo quidem circulo aſtra illa, quæ

[1] Ἐπάψια τῷ φανερῷ πόλῳ Bodl.

polo ſunt propinquiora; maximo autem, quæ à circulo arctico minime diſtant: ac quæ in ipſo arctico circulo ſunt, radere horizonta conſpiciuntur.

Porro autem quæcunque aſtra ab his recedunt meridiem verſus, omnia & oriri & occidere videntur; propterea quod horum non integri circuli ſupra terram exiſtant, ſed horum circulorum pars quidem ſit ſupra terram, pars autem reliqua ſub terram occultetur. ex ſegmentis vero quæ ſupra terram ſunt uniuſcujuſque jam dictorum circulorum, illud ſegmentum majus eſt, quod propius quidem eſt maximo circulo ſemper-apparentium circulorum: ex illis vero ſegmentis, quæ ſub terram manent occultata, illud minimum eſt, quod magis ad jam dictum circulum accedit; quoniam tempus quo ſub terram in hoc dicto circulo aſtra convertuntur, minimum eſt; tempus vero quo ſupra terram circumferuntur, maximum. præterea aſtra quæ magis ab commemoratis jam aſtris recedunt, ſupra terram quidem in converſione ſua ſemper minus tempus comprehendunt; ſub terram autem majus: quæ autem meridei quamproxima ſunt, in converſione, quam ſupra terram peragunt, minimum tempus habebunt; quæ vero ſub terram, contra maximum.

Apparent deinde aſtra, quæ in circulo ſita ſunt inter omnes ſphæræ circulos medium locum obtinente, æquale tempus inſumere in motu ſupra terram atque in motu qui fit infra terram, & idcirco talem circulum æquinoctialem circulum appellamus. præterea aſtra, quæ ſunt ſita in circulis æque diſtantibus ab æquinoctiali circulo, æquali tempore motus ſuos peragunt, ſcilicet in ſegmentis permutatim aſſumptis: ita ut ſegmenta, quæ ſunt ſupra terram, quæve ad ſeptentrionem ſpectant, æqualia ſint ſegmentis ſub terram exiſtentibus, & ad meridiem vergentibus; & contra quæ ſunt ſegmenta ſupra terram ad meridiem vergentia æqualia ſint ſegmentis ſub terram ad ſeptentrionem pertinentibus. nam tempus quidem utrumque, quo dicti feruntur circuli tam ſupra terram quam continue ſub terram, cæterorum circulorum utrique tempori ſimiliter æquale apparet: & circulus præterea qui lacteus dicitur, quinetiam zodiacus, cum obliqui ſint ad parallelos circulos & ſe invicem ſecent, in ſphæræ converſione ſemicirculos ſupra terram habere conſpiciuntur.

τῦ πόλου ὄντος, μέγιστοι δὲ οἱ ἐπὶ τῦ ἀρκτικῦ· οἱ δὲ ἐπὶ τῦ ἀρκτικῦ κύκλυ ὄντες φαίνονται ξύοντες τὸ ὁρίζοντα.

Τὰ δὲ πρὸς μεσημβρίαν τύτων ἐχόμενα ἅπαντα καὶ ἀνατέλλοντα καὶ δυόμενα ὁρᾶται, διὰ τὸ τὺς κύκλους αὐτῶν μὴ ὅλυς εἶναι ὑπὲρ γῆς, ἀλλὰ μέρος μὲν αὐτῶν ὑπὲρ γῆς, τὸ δὲ λοιπὸν ὑπὸ τὴν γῆν. τῶν δὲ ὑπὲρ γῆς τμημάτων ἑκάστυ αὐτῶν μόνον φαίνεται τὸ ἔγγιον τοῦ μείζονος τῶν ἀεὶ φαινερῶν, τῶν δὲ ὑπὸ γῆν ἐλάχιστον τὸ ἔγγιον τοῦ εἰρημένου κύκλου, διὰ τὸ τὸν χρόνον τῆς ὑπὸ γῆν φορᾶς τῶν ἐπὶ τύτυ τοῦ κύκλυ ἀστέρων ὄντων ἐλάχιστον ἔχειν, τῆς δὲ ὑπὲρ γῆς φορᾶς, πλεῖστον. τὰ δὲ ἐπὶ τὸν ἀπώτερον τύτων ἀεὶ τὴν μὲν ὑπὲρ γῆς φορὰν ἐλάσσονα χρόνον ἔχειν, τὴν δὲ ὑπὸ γῆν πλείονα· ἐλάχιστον δὲ χρόνον ἔχει τῆς ὑπὲρ γῆς φορᾶς τὰ ἔγγιστα τῆς μεσημβρίας ὄντα, τῆς δὲ ὑπὸ γῆν πλεῖστον.

Φαίνονται δὲ οἱ ἐπὶ τοῦ κατὰ μέσον τύτων ὄντες ἰσοχρόνιον ποιύμενοι τὴν ὑπὲρ γῆς φορὰν τῇ ὑπὸ γῆν· διὸ λέγομεν τοῦτον τὸν κύκλον ἰσημερινόν. οἱ δὲ ἐπὶ τῶν ἴσον ἀπεχόντων τοῦ ἰσημερινῦ κύκλυ ἰσοχρόνιον ποιύμενοι τὴν φορὰν ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τμήμασιν· οἷον τὰ ὑπὲρ γῆς τῶν πρὸς ἄρκτυς ὄντων τοῖς ὑπὸ γῆν τῶν πρὸς μεσημβρίαν, τὰ δὲ ὑπὲρ γῆς τῶν πρὸς μεσημβρίαν τοῖς ὑπὸ γῆν τῶν πρὸς ἄρκτυς ὄντων· ὁ δὲ σύμπας ἑκάτερος χρόνος ἑκάστυ κύκλυ, ὅτε ὑπὲρ γῆς, καὶ ὁ συνεχὴς ὑπὸ γῆν τῷ συμφοτέρῳ ἑκάστυ ἴσος φαίνεται· ἔτι δὲ ὁ τοῦ γάλακτος κύκλος καὶ ὁ ζωδιακός, λοξοὶ ὄντες πρὸς τὺς παραλλήλυς κύκλυς καὶ τέμνοντες ἀλλήλυς ἐν τῇ περιφορᾷ, ἀεὶ ἡμικύκλυς ὑπὲρ γῆς ἔχοντες φαίνονται.

Διὰ

Διὰ δὴ τὰ θεωρημένα πάντα, ὁ κόσμος ἐστοιχείωται σφαιροειδής· εἴτε γὰρ ἐν κυλινδροειδὴς ἢ κωνοειδής, οἱ ὅτι τῶν λοξῶν κύκλων καὶ τεμνόντων τὸν ἰσημερινὸν δίχα [1]λαμβανόμενοι ἀστέρες οὐ τῇ [2]φορᾷ οὐκ ἂν ἐφαίνοντο ἀεὶ ἐπὶ ἡμικυκλίων ἴσων φερόμενοι, ἀλλ' ὅτε μὲν ἐπὶ μείζονος ἡμικυκλίου τμήματος, ὅτε δὲ ἐπὶ ἐλάττονος. ἐὰν γὰρ κῶνος ἢ κύλινδρος ὑπιπέδῳ τμηθῇ μὴ παρὰ τὰς βάσεις, ἡ τομὴ γίγνεται ὀξυγωνίου κώνου τομή, ἥτις ἐστὶν ὁμοία θυρεῷ. δῆλον δ' ἂν εἴη καὶ ποιᾶτος σχήματος ἀφαιρεθέντος διὰ τοῦ μέσου τετμημένου κατά τε τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος, ἀνόμοια τμήματα ποιεῖ· δῆλον δὲ ὅτι καὶ λοξῆς τομῆς τμηθείσης διὰ τοῦ μέσου, καὶ ὅπως ἀνόμοια τμήματα ποιεῖ· ὅπερ δὲ φαίνεται τοῦτο γιγνόμενον κατὰ τὸν κόσμον.

Cum itaque hæc omnia ſic ſe habeant, mundus omnino ſphæricus erit, & circa ſuum axem æquabiliter volvitur; cujus quidem polus alter ſupra terram apparet, alter ſub terram occultatur.

Διὰ δὴ ταῦτα πάντα ὁ κόσμος ἔσται σφαιροειδής, καὶ στρέφεται ὁμαλῶς περὶ ἄξονα· οὗ ὁ μὲν εἷς πόλος ὑπὲρ γῆς φανερός, ὁ δὲ εἷς ὑπὸ γῆν ἀφανής.

Nominetur præterea circulus horizon illud planum, quod è viſu noſtro in ipſum mundum incidit, & ſeparat hemiſphærium nobis conſpicuum ſupra terram ab occulto. tale autem planum circulus eſt: ſi quidem enim ſphæra plano aliquo ſecta fuerit, ſectio circulus eſt.

Ὁρίζων δὲ καλείσθω, τὸ δι' ἡμῶν ἐπίπεδον ἐκπίπτον εἰς τὸν κόσμον, καὶ ἀφορίζον τὸ ὑπὲρ γῆς ὁρώμενον ἡμισφαίριον. [3]ἔστι δὲ κύκλος· ἐὰν γὰρ σφαῖρα ἐπιπέδῳ τμηθῇ, ἡ [4]κοινὴ τομὴ κύκλος ἐστί.

Meridianus porro circulus dicetur is, qui per ſphæræ polos incedit & horizonti eſt ad angulos rectos.

Μεσημβρινὸς δὲ κύκλος καλείσθω, ὁ διὰ τῶν πόλων τῆς σφαίρας καὶ [5]ὀρθὸς πρὸς τὸν ὁρίζοντα.

Tropici autem ſunt hi, quos circulus zodiacus tangit, & qui polos etiam cum ſphæra habent eoſdem.

Τροπικοὶ δέ, ὧν ὁ διὰ μέσων τῶν ζῳδίων κύκλος ἐφάπτεται τοὺς αὐτοὺς πόλους ἐχόντων τῇ σφαίρᾳ.

Zodiacus autem circulus & æquinoctialis maximi circuli ſunt: bifariam enim ſeſe mutuo ſecant. arietis namque principium & libræ principium per diametrum ſunt, & cum in æquinoctiali circulo ſint, conjugate & oriuntur & occidunt; intra quæ principia ſex continentur ſigna ex duodecim zodiaci ſignis, æquinoctialis etiam duo ſemicirculi. quoniam utrumque principium, in ipſo circulo æquinoctiali ſitum, eodem tempore fertur, illud quidem in motu ſupra terram, hoc autem ſub

Ὁ δὲ διὰ μέσων τῶν ζῳδίων κύκλος καὶ ὁ ἰσημερινὸς μέγιστοί εἰσι· δίχα γὰρ τέμνουσιν ἀλλήλους. ἥτε γὰρ ἀρχὴ τοῦ κριοῦ καὶ ἡ ἀρχὴ τῶν χηλῶν κατὰ διάμετρόν τέ εἰσι, καὶ ἅμα ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ ὄντα κατὰ συζυγίαν ἀνατέλλουσί τε καὶ δύνουσιν, [6]μεταξὺ τῶν ἀρχῶν ἐχόντων τῶν μὲν δώδεκα ζῳδίων ἓξ ζῴδια, τοῦ δὲ ἰσημερινοῦ κύκλου ἡμικύκλια δύο. ἐπειδήπερ ἑκατέρα ἀρχὴ ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ κύκλου οὖσα ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ φέρεται, ἡ μὲν τὸ ὑπὲρ γῆς φέρεται, ἡ δὲ τὸ ὑπὸ

1 ὑπολαμβανόμενοι, Bodl. 2 φορᾷ Bodl. 3 ἔστιν δὲ Bodl. 4 κοινὴ deeſt Bodl. 5 ὀρθὸς Bodl. 6 μεταξὺ αὐτῶν Bodl.

terram. etenim ſphæra ſi æquabiliter volvatur circa ſuum proprium axem, omnia puncta, quæ ſunt in ſphæræ ſuperficie, æquali tempore ſimiles parallelorum circulorum circumferentias, in quibus feruntur, præteribunt: ſimiles igitur circumferentias circuli æquinoctialis percurrunt, alteram quidem circumferentiam, quæ eſt ſupra terram, alteram autem, quæ eſt ſub terram: æquales igitur ſunt circumferentiæ: erit igitur ſemicirculus utraque. tempus enim ab ortu rurſus ad ortum, & ab occaſu rurſus ad occaſum integrum circulum abſolvit: quare & zodiacus & æquinoctialis invicem ſe ſecant. nam ſi in ſphæra duo circuli ſe invicem bifariam ſecent, uterque alterum ſecans maximus circulus erit: zodiacus circulus igitur & æquinoctialis maximi circuli ſunt.

Atqui horizon quoque eſt unus è maximis circulis; nam & zodiacum, & æquinoctialem, maximos circulos exiſtentes, ſemper bifariam ſecat. ſemper enim ex ſignorum zodiaci duodecim, ſex ſupra terram apparent; & æquinoctialis circuli ſemper ſemicirculus ſupra terram conſpicitur: ideoque accidit, ut quæ in hoc ſita ſint aſtra, ſimul & oriantur, & ſimul etiam occidant; & alterum quidem horum aſtrorum eodem temporis ſpatio ab ortu accedat ad occaſum, alterum vero ab occaſu ad ortum.

Ac patet jam igitur ex explicatis & præoſtenſis, æquinoctialis circuli ſemper ſemicirculum ſupra horizonta exſtare. ſi etenim in ſphæra manens fixus circulus ſecuerit bifariam aliquem maximum circulum ſemper mobilem, tunc & ſecans maximus circulus eſt: ſequitur igitur horizontem eſſe unum de maximis circulis.

γλῶ. ἐὰν δὲ σφαῖρα φέρηται ὁμαλῶς περὶ τὸν ἑαυτῆς ἄξονα, πάντα τὰ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας σημεῖα ἐν τῷ ἴσῳ χρόνῳ τὰς ὁμοίας περιφερείας διεξέρχεται τῶν παραλλήλων κύκλων, καθ' ὧν φέρεται· ὁμοίας ἄρα περιφερείας [1] διέξεισι τὸ ἰσημερινὸς κύκλος, ἡ μὲν τινὰ ὑπὲρ γῆς, ἡ δὲ τινὰ ὑπὸ γῆν· ἴσαι ἄρα εἰσὶν αἱ περιφέρειαι· ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον. τὸ γὰρ ἀπὸ ἀνατολῆς ἐπὶ ἀνατολὴν ἢ ἀπὸ δύσεως ἐπὶ δύσιν ὅλος κύκλος ἐστίν· λίχα ἄρα τέμνουσιν ἀλλήλους ὅ, τε τῶν ζωδίων κύκλος καὶ [2] ὁ ἰσημερινός. ἐὰν δὲ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους λίχα, ἑκάτερος τῶν τεμνόντων μέγιστος ἔσται· ὁ ἄρα τῶν ζωδίων κύκλος καὶ ὁ ἰσημερινὸς μέγιστοί εἰσι.

Καὶ ὁ ὁρίζων δὲ τῶν μεγίστων ἐστὶ κύκλων· τὸν τε γὰρ τῶν ζωδίων [3] κύκλον καὶ τὸν ἰσημερινὸν, μεγίστους ὄντας αἰεὶ λίχα τέμνει. τῶν τε γὰρ δώδεκα ζωδίων τὰ μὲν ἓξ αἰεὶ ὑπὲρ γῆς ἔχει, καὶ τῷ ἰσημερινῷ δὲ κύκλῳ [4] αἰεὶ ἡμικύκλιον ὑπερέχει· καὶ γὰρ τὰ ὑπὸ τούτου ἄστρα ἅμα ἀνατέλλοντα καὶ δύνοντα ἐν τῷ αὐτῷ χρόνῳ παραγίνεται, τὸ μὲν ἀπὸ ἀνατολῆς ἐπὶ δύσιν, τὸ δὲ ἀπὸ δύσεως ἐπὶ ἀνατολήν.

Φανερὸν δὴ ἐκ τούτου δεδειγμένων, ὅτι καὶ ἰσημερινὸς [5] ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντά ἐστιν ἡμικύκλιον. ἐὰν δὲ ἐν σφαίρᾳ μένων κύκλος λίχα [6] τέμνῃ τινὰ τῶν μεγίστων κύκλων αἰεὶ φερόμενον, καὶ ὁ τέμνων μέγιστός ἐστιν· ὁ ὁρίζων ἄρα τῶν μεγίστων ἐστὶ κύκλων.

THEOREMA I.

Terra in medio mundi ſita eſt, cujus ratione centri vicem obtinet.

ΘΕΩΡΗΜΑ α'.

Ἡ γῆ ἐν μέσῳ τῷ κόσμῳ ἐστὶ, καὶ κέντρου τάξιν ἐπέχει πρὸς τὸν κόσμον.

SIT in mundo circulus horizon AB, terra autem ſit viſus noſter, qui quidem ſit in puncto Δ, partes orientales ſint verſus Γ punctum, occidentales autem ad A; & conſpiciatur per dioptram, in Δ puncto manentem, cancer oriens in puncto Γ; ſpectabitur igitur per eandem dioptram capricornus occidens. ſpectetur in A puncto. & quoniam A, Γ puncta per dioptram Δ ſpectata ſunt; recta igitur linea eſt, quæ per A, Δ, Γ puncta ſpectatur. ſitque ipſa AΔΓ.

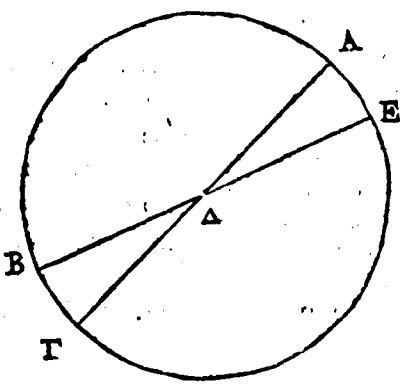
ΕΣτω ἐν κόσμῳ ὁ ὁρίζων ὁ AB, γῆ δὲ ἡ ἡμετέρα ὄψις [7] ἡ πρὸς τῷ Δ σημείῳ, καὶ ἔστω ἀνατολικὰ μὲν μέρη τὰ Γ, δυτικὰ δὲ τὰ A, καὶ τεθεωρήσθω διὰ διόπτρας κειμένης πρὸς τῷ Δ σημείῳ καρκίνος ἀνατέλλων κατὰ τὸ Γ σημεῖον· θεωρηθήσεται ἄρα διὰ τῆς αὐτῆς διόπτρας αἰγοκέρως δυόμενος. τεθεωρήσθω κατὰ τὸ A σημεῖον. καὶ ἐπεὶ τὰ A, Γ σημεῖα διὰ διόπτρας τεθεώρηται τὸ Δ, εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν A, Δ, Γ. ἔστω ἡ AΔΓ.

1 διέξησι Bodl. 2 Deeſt Bodl. 3 κύκλος Bodl. 4 ἄνω ἔχει Bodl. 5 ἀεὶ. 6 ἐπὶ Bodl. 7 τέμνει. 8 Η γῆ ἐν. deeſt. 9 ἡ deeſt.

Φανερὸν

Φανερὸν δὴ ὅτι ἡ ΑΔΓ διάμετρός ἐστι τῆς τῶν ἀπλανῶν σφαίρας καὶ τοῦ ζωδιακοῦ κύκλου, ἐπειδήπερ τοῦ ζωδιακοῦ ὑπὲρ τὸν ὁρίζοντα ἓξ ζώδια ἀποτέμνει. πάλιν δὴ μετακινηθέντος τοῦ τῶν ζωδίων κύκλου καὶ τῆς διόπτρας, τεθεωρήσθω λέων ἀνατέλλων κατὰ τὸ Β σημεῖον· θεωρηθήσεται ἄρα διὰ τῆς αὐτῆς διόπτρας ὑδροχόος δυόμενος· τεθεωρήσθω κατὰ τὸ Ε σημεῖον. καὶ ἐπεὶ τὰ Β, Ε σημεῖα τεθεώρηται διὰ διόπτρας τῆς Δ, εὐθεῖά ἐστιν ἡ διὰ τῶν Ε, Δ, Β. ἔστω ἡ ΕΔΒ· ἡ ΕΔΒ ἄρα διάμετρός ἐστι καὶ τοῦ τε τῶν ἀπλανῶν σφαίρας καὶ τοῦ ζωδιακοῦ κύκλου. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΑΔΓ· τὸ Δ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ καὶ τῶν ἀπλανῶν σφαίρας, καὶ ἔστι πρὸς τῇ γῇ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἐὰν ληφθῇ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς γῆς κέντρον ἐστὶ τοῦ κόσμου.

Η γῆ ἄρα ἐν μέσῳ τῷ κόσμῳ ἐστί, καὶ κέντρου τάξιν ἐπέχει πρὸς τὸν κόσμον.



manifeſtum itaque eſt quod recta linea ΑΔΓ diameter eſt & ſphæræ aſtrorum inerrantium & zodiaci circuli; quandoquidem zodiaci ſex ſigna ſupra horizontem abſcindit, rurſus jam zodiaco circulo circumvoluto, quinetiam dioptra, leo videbitur oriens in puncto Β: quare per eandem dioptram conſpicietur & aquarius occidens. conſpiciatur in puncto Ε. quoniam vero puncta Β, Ε viſa ſunt per dioptram Δ; recta igitur linea eſt quæ per Ε, Δ, Β ſpectatur. ſit ipſa ΕΔΒ: quare ΕΔΒ recta linea diameter eſt & ſphæræ aſtrorum inerrantium & zodiaci circuli. eſt autem demonſtratum idem de recta ΑΔΓ: quamobrem punctum Δ eſt centrum ſphæræ aſtrorum inerrantium, & eſt ſuper terram. ſimiliter jam oſtendetur, ſi quodvis aliud punctum fuerit ſumptum ſuper terram, quod mundi centrum eſt.

Terra igitur in medio mundo ſita eſt, cujus ratione centri vicem obtinet.

ΘΕΩΡΗΜΑ β'.

Ἐν μιᾷ κόσμου περιφορᾷ ὁ μὲν διὰ τῶν πόλων τῆς σφαίρας κύκλος δὶς ἔσται ὀρθὸς πρὸς τὸν ὁρίζοντα· ὁ δὲ τοῦ ζωδίων κύκλος πρὸς μὲν τὸν μεσημβρινὸν δὶς ἔσται ὀρθός, πρὸς δὲ τὸν ὁρίζοντα οὐδέποτε, ὅταν ὁ πόλος τοῦ ὁρίζοντος μεταξὺ ᾖ τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ καὶ τοῦ ἀρκτικοῦ. ἐὰν δὲ ὁπουοῦν τῶν τροπικῶν ὁ πόλος ᾖ τοῦ ὁρίζοντος, ὁ τῶν ζωδίων κύκλος ἅπαξ ὀρθὸς ἔσται πρὸς τὸν ὁρίζοντα· ὅταν δὲ ὁ πόλος τοῦ ὁρίζοντος μεταξὺ τῶν τροπικῶν κύκλων ὑπάρχῃ, δὶς ἔσται ὁ τῶν ζωδίων κύκλος ὀρθὸς πρὸς τὸν ὁρίζοντα.

THEOREMA II.

In una mundi revolutione circulus quidem per ſphæræ polos ductus bis erit horizonti ad angulos rectos: zodiacus autem circulus ad meridianum bis quoque erit rectus; ad horizontem vero minime, quando polus horizontis fuerit inter tropicum cancri & polum arcticum. quod ſi horizontis polus in aliquo fuerit tropicorum circulorum, tum zodiacus ſemel erit horizonti ad angulos rectos conſtitutus: quando denique polus horizontis fuerit inter tropicos circulos, tunc demum circulus zodiacus horizonti bis erit ad angulos rectos.

Ἔστω ὁρίζων κύκλος ὁ ΩΒΓ, καὶ μέγιστος μὲν τῶν ἀεὶ φαινομένων κύκλων ἔστω ὁ ΩΔ, μέγιστος δὲ τῶν ἀεὶ ἀφανῶν ἔστω ὁ ΕΖ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ὁ ΗΘΚ, χειμερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ ΛΜΝ, ὁ δὲ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω ὡς τὸν ΚΛ, πόλος δὲ τῶν φαινομένων τὸ Ξ, Ο σημεῖα, καὶ γεγράφθω διὰ τῶν Ξ, Ο μέγιστος κύκλος ὁ ΑΞΕΟ· λέγω ὅτι ἐν μιᾷ περιφορᾷ, ὁ μὲν διὰ τῶν πόλων τῶν σφαίρας κύκλος δὶς ἔσται ὀρθὸς πρὸς τὸν ὁρίζοντα, ὁ δὲ τῶν ζωδίων κύκλος πρὸς μὲν τὸν μεσημβρινὸν δὶς ἔσται ὀρθός, πρὸς δὲ τὸν ὁρίζοντα οὐδέποτε, ὅταν ὁ πόλος τοῦ ὁρίζοντος μεταξὺ τῶν ΗΘΚ, [2] Ξ ὑπάρχῃ.

SIT horizon circulus ΩΒΓ; maximus autem eorum qui ſemper apparent, ſit circulus ΩΔ; maximus vero eorum qui ſemper occulti ſunt, ſit circulus ΕΖ; æſtivus tropicus ſit ΗΘΚ, hybernus autem ſit ΛΜΝ; zodiacus circulus poſitionem habeat veluti ΚΛ; ſphæræ poli ſint puncta Ξ, Ο; & deſcribatur per Ξ, Ο puncta maximus circulus ΑΞΕΟ: dico quod in una ſphæræ revolutione circulus quidem per ſphæræ polos ductus bis erit horizonti ad angulos rectos; zodiacus autem ad meridianum bis quoque erit rectus, ad horizontem vero minime, quando polus horizontis fuerit inter ΗΘΚ & Ξ.

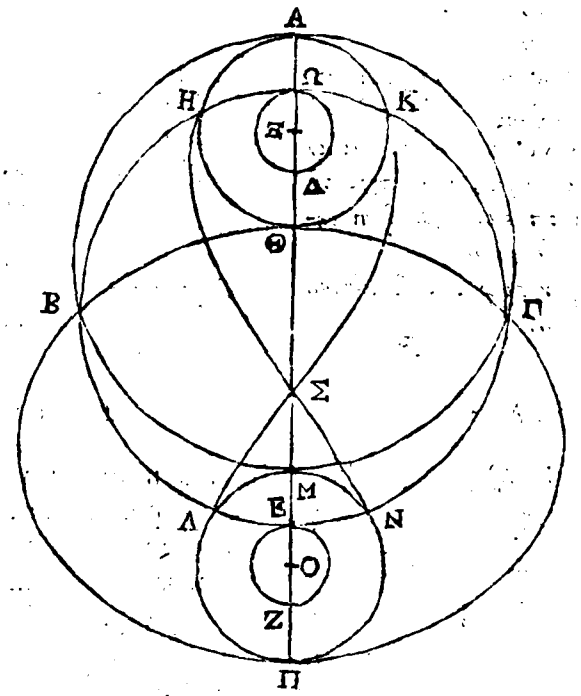
1 + Δ deeſt in *MS. Bodl.* 2 In MSS. perperam legitur ΩΔ.

Quod

Quod autem circulus per ſphæræ polos ductus bis horizonti ΒΕΓ ſit ad angulos rectos, jam * demonſtratum fuit.

Dico jam quod & zodiacus circulus ΚΛ meridiano ΑΟ bis erit ad angulos rectos conſtitutus.

Quoniam in ſphæra quidem duo circuli ſunt ΩΒΓ & ΑΗΘΚ, qui ſeſe mutuo ſecant; & per ipſorum polos maximus circulus deſcriptus eſt ΑΘΟ: æqualis igitur eſt circumferentia ΗΘ circumferentiæ ΘΚ, & circumferentia ΑΠ circumferentiæ ΠΝ. ſed tota circumferentia ΗΘΚ toti circumferentiæ ΛΠΝ eſt æqualis: quare circumferentia ΛΠ ipſi ΚΘ æqualis eſt. quo igitur tempore punctum Κ, incipiens à puncto Κ & circumferentiam ΚΘ percurrens, pervenit ad Θ punctum; hoc ipſo tempore & punctum Λ, inchoans à puncto Λ & circumferentiam ΛΠ pertranſiens, pervenit ad punctum Π, & zodiacus circulus poſitionem habebit ΘΒΠΓ. & quoniam in ſphæra duo circuli ΑΗΘΚ, ΘΒΠΓ ſeſe tangunt, maximus autem circulus ΞΘΟΠ deſcriptus eſt per polos unius circuli & amborum contactum: circulus igitur ΞΘΟΠ tranſibit etiam per polos circuli ΘΒΠΓ, atque ipſi erit ad angulos rectos: quare & ΘΒΠΓ ad ΞΘΟΠ etiam eſt ad angulos rectos. rurſus, quoniam circumferentia ΘΗ circumferentiæ ΠΝ ſimilis eſt: quo igitur tempore punctum Θ ad Η punctum pervenit, eodem ipſo tempore & Π ad punctum Ν accedit; & zodiacus circulus poſitionem habebit ΗΣΝ. rurſus, quoniam ΗΑ ſimilis eſt circumferentiæ ΝΜ: quo igitur tempore punctum Η pervenit ad punctum Α, eodem tempore & punctum Ν pervenit ad punctum Μ, & zodiacus circulus poſitionem habebit ΑΒΜΓ. & quoniam in ſphæra duo circuli ΑΒΜΓ, ΑΗΘΚ ſe mutuo tangunt, & per unius polos & contactum amborum maximus circulus deſcriptus eſt ΑΞΘΟ: circulus igitur ΑΞΘΟ ad ΑΒΜΓ eſt ad angulos rectos: quare & ipſe ΑΒΜΓ ad ΑΞΘΟ etiam eſt ad angulos rectos. rurſus, quoniam circumferentia ΑΚ ſimilis eſt circumferentiæ ΜΛ: quo igitur tempore Α punctum pervenit ad punctum Κ, hoc ipſo tempore & punctum Μ ad punctum Λ accedit; & zodiacus circulus poſitionem habebit ΚΣΛ. quo igitur tempore punctum Κ, incipiens à Κ & circumferentiam ΚΘΗΑ percurrens, ad Κ redit (quod eſt tempus unius revolutionis ſphæræ) circulus ΚΣΛ bis eſt circulo ΑΞΘΟ rectus.



Ὅτι μὴν ὁ διὰ τῶν πόλων τῆς σφαίρας πρὸς τὸν ΒΕΓ ὀρθός ἐστι, δέδεικται.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ ζωδιακὸς κύκλος ὁ ΚΛ πρὸς τὸν ΑΟ μεσημβρινὸν δὶς ἔσται ὀρθός.

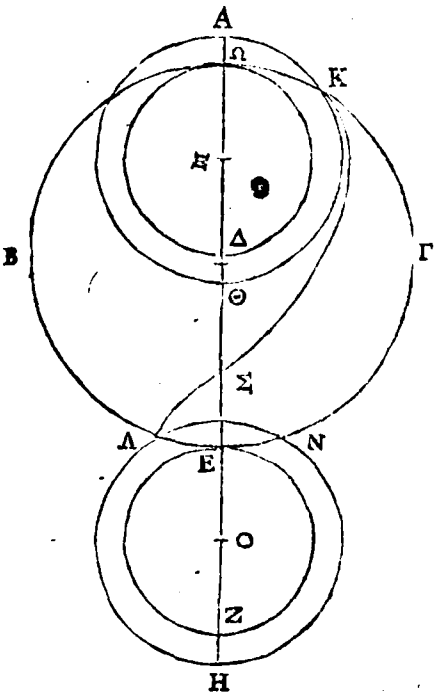
Ἐπεὶ γὰρ ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΩΒΓ, ΑΗΘΚ τέμνουσιν ἀλλήλους, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν γέγραπται μέγιστος κύκλος ὁ ΑΘΟ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΗΘ περιφέρεια τῇ ΘΚ, ἡ δὲ ΑΠ τῇ ΠΝ. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΗΘΚ περιφέρεια τῇ ΑΠΝ περιφερείᾳ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΠ περιφέρεια τῇ ΚΘ περιφερείᾳ. ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Κ σημεῖον, ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Κ καὶ τὴν ΚΘ περιφέρειαν διελθὸν, ἥξει ἐπὶ τὸ Θ ὡσαύτως, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Λ, ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΛΠ περιφέρειαν διελθὸν, ἥξει ἐπὶ τὸ Π παρέσται, καὶ ὁ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἕξει ὡς τὴν ΘΒΠΓ. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΗΘΚ, ΘΒΠΓ ἐφάπτονται ἀλλήλων, διὰ δὲ τῶν τοῦ ἑνὸς πόλων καὶ τῆς ἁφῆς γέγραπται μέγιστος κύκλος ΞΘΟΠ ὁ ΞΘΟΠ ἄρα ἥξει καὶ διὰ τῶν τοῦ ΘΒΠΓ πόλων, καὶ ἔστιν ὀρθὸς πρὸς αὐτόν· ὥστε καὶ ὁ ΘΒΠΓ πρὸς τὸν ΞΘΟΠ ὀρθός ἐστι. πάλιν, ἐπεὶ ὁμοία ἐστὶν ἡ ΘΗ περιφέρεια τῇ ΠΝ περιφερείᾳ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Θ ἐπὶ τὸ Η ἀφίκετο, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Π ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ὁ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἕξει ὡς τὴν ΗΣΝ. πάλιν, ἐπεὶ ὁμοία ἐστὶν ἡ ΗΑ περιφέρεια τῇ ΝΜ περιφερείᾳ· ἐν ᾧ τὸ ἄρα χρόνῳ Η ἐπὶ τὸ Α παραγίνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Ν ἐπὶ τὸ Μ, καὶ ὁ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἕξει ὡς τὴν ΑΒΜΓ. ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι οἱ ΑΒΜΓ, ΑΗΘΚ ἐφάπτονται ἀλλήλων, διὰ δὲ τῶν τοῦ ἑνὸς πόλων ἐστὶ τῆς ἁφῆς μέγιστος κύκλος γέγραπται ὁ ΑΞΘΟ· ὀρθὸς ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΞΘΟ πρὸς τὸν ΑΒΜΓ· ὥστε καὶ ὁ ΑΒΜΓ πρὸς τὸν ΑΞΘΟ ὀρθός ἐστι. πάλιν, ἐπεὶ ὁμοία ἐστὶν ἡ ΑΚ περιφέρεια τῇ ΜΛ περιφερείᾳ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Α ἐπὶ τὸ Κ ἀφίκετο, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Μ ἐπὶ τὸ Λ παρέσται, καὶ ὁ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἕξει ὡς τὸν ΚΣΛ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Κ, ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὸν ΚΘΗΑ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Κ ἀφίκηται (ὅς ἐστι χρόνος μιᾶς περιφορᾶς τῆς σφαίρας) δὶς ἔσται ὁ ΚΣΛ κύκλος πρὸς ὀρθὰς πρὸς τὸν ΑΞΘΟ κύκλον.

* Nempe ab *Euclide* Anteceſſore *Autolyco Prop.* 10. *De Sphæra mota.*

Τῶν

ΤΩΝ αὐτῶν ὑποκειμένων, ἔστω ὁ πόλος τοῦ ΒΕΓΚ κύκλου μεταξὺ τῶν Θ, Ξ σημείων· λέγω ὅτι οὐδέποτε ἔσται ὁ ΚΛ ζωδιακὸς κύκλος ὀρθὸς πρὸς τὸν ΒΕΓΚ ὀρίζοντα.

Εἰ γὰρ ἔσται ὁ ΚΣΛ ὀρθὸς πρὸς τὸν ΒΕΓΚ, τεμεῖ αὐτὸν διὰ τῶν πόλων, καὶ ἐλεύσεται διὰ τοῦ πόλου ὃς ἐστι μεταξὺ τῶν Θ, Ξ σημείων τοῦ τροπικοῦ καὶ τοῦ ἀρκτικοῦ, καὶ τεμεῖ τὸν ΑΘΚ τροπικὸν, ὅπερ ἀδύνατον· οὐδέποτε ἄρα ἔσται ὀρθὸς ὁ ΚΛ ζωδιακὸς πρὸς τὸν ΒΕΓΚ ὀρίζοντα.

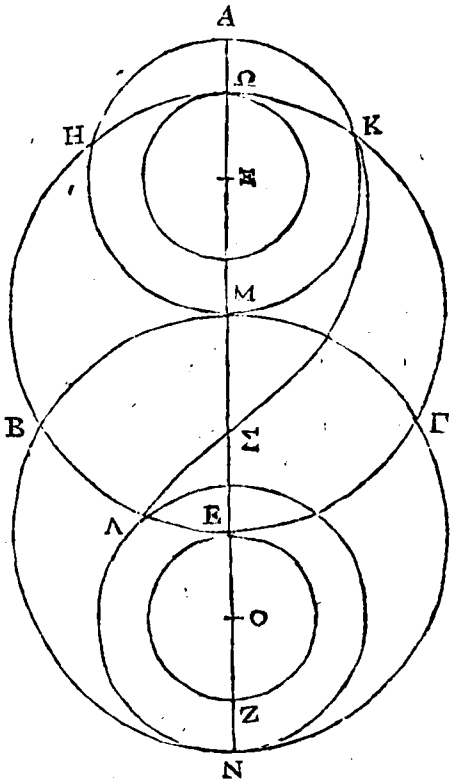


IISDEM ſuppoſitis, ſit polus circuli ΒΕΓΚ inter puncta Θ, Ξ: dico quod circulus zodiacus ΚΛ nequaquam eſt horizonti ΒΕΓΚ ad angulos rectos.

Si enim ΚΣΛ ipſi ΒΕΓΚ eſt ad angulos rectos; ſecaret ipſum per polos, & tranſiret per polum qui eſt inter puncta Θ, Ξ, ſcilicet per polum qui eſt inter circulum arcticum & tropicum; & ſecaret ipſum tropicum circulum ΑΘΚ, quod eſt abſurdum: nullo modo igitur circulus zodiacus ΚΛ eſt ad angulos rectos ipſi ΒΕΓΚ.

ΕΣΤΩ δὲ ὁ πόλος τοῦ ὀρίζοντος ἐπὶ τοῦ ΑΗΜΚ τὸ Μ σημεῖον· λέγω ὅτι ἅπαξ ἔσται ὁ ΚΣΛ κύκλος ὀρθὸς πρὸς τὸν ὀρίζοντα.

Ἐπεὶ γὰρ ὁμοία ἐστὶν ἡ ΚΜ περιφέρεια τῇ ΛΝ περιφερείᾳ, ἐν ᾧ χρόνῳ τὸ Κ τὴν ΚΜ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Μ παραγίνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Λ ἐπὶ τὸ Ν παρέσται, καὶ ὁ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἕξει ὡς τὴν ΜΒΝΓ. ἐπεὶ οὖν ὁ ΜΒΝΓ τὸν ΚΒΓ ὀρίζοντα διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· ὀρθὸς ἄρα ἐστὶν ὁ τῶν ζωδίων κύκλος πρὸς τὸν ὀρίζοντα.



SIT rurſus polus horizontis punctum M in circulo tropico, ſcilicet ΑΗΜΚ, ſitus: dico quod circulus ΚΣΛ ſemel erit ad rectos angulos horizonti.

Quoniam enim circumferentia ΚΜ circumferentiæ ΛΝ ſimilis eſt: quo igitur tempore punctum Κ circumferentiam ΚΜ percurrens pervenit ad Μ, hoc ipſo tempore & punctum Λ pervenit ad punctum Ν, & zodiacus circulus poſitionem habebit veluti ΜΒΝΓ. quoniam igitur ΜΒΝΓ horizontem ΚΒΓ per polos ſecat, & bifariam ipſum ſecabit & ad angulos rectos: quare zodiacus circulus horizonti eſt ad angulos rectos.

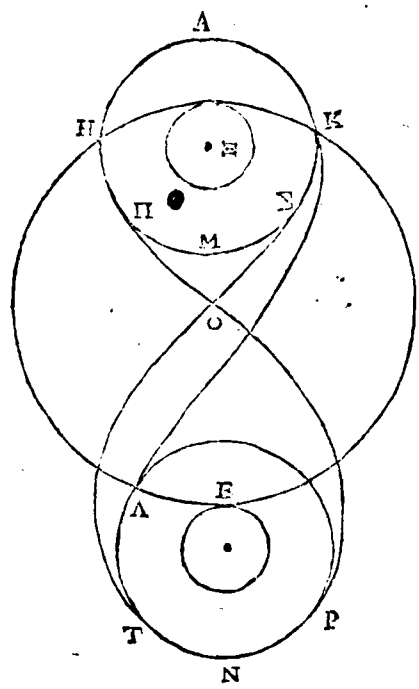
ΕΣΤΩ δὲ ὁ πόλος τοῦ ὀρίζοντος μεταξὺ τῶν τροπικῶν τὸ Ο σημεῖον· λέγω ὅτι δὶς ἔσται ὁ ΚΛ κύκλος ὀρθὸς πρὸς τὸν ὀρίζοντα.

Γεγράφθωσαν διὰ τοῦ Ο πόλου μέγιστοι κύκλοι οἱ ΣΟΤ, ΠΟΡ ἐφαπτόμενοι τοῦ ΑΗΜΚ· ἐφάψονται δὴ καὶ τοῦ ΤΝΡ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΠΟΡ τὸν ΗΕΚ διὰ τῶν πόλων τέμνει, δίχα τε αὐτὸν τεμεῖ καὶ πρὸς ὀρθάς· ὀρθὸς ἄρα ἐστὶν ὁ ΠΟΡ κύκλος πρὸς τὸν ΗΕΚ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΣΟΤ πρὸς τὸν ΗΕΚ ὀρθός

SIT denique polus horizontis punctum Ο inter tropicos circulos: dico quod circulus ΚΛ horizonti bis erit ad angulos rectos.

Deſcribantur per polum Ο maximi circuli ΣΟΤ, ΠΟΡ tangentes circulum ΑΗΜΚ: tangenti igitur & alterum circulum ΤΝΡ. & quoniam circulus ΠΟΡ circulum ΗΕΚ per polos ſecat: bifariam igitur ipſum & ad rectos ſecabit angulos: quare circulus ΠΟΡ circulo ΗΕΚ eſt ad angulos rectos. propter hæc ipſa etiam & circulus ΣΟΤ eſt ad angulos rectos cir-

culo HEK. & quoniam ſemicirculus à punctο K incipiens, qui ad partes K, Λ tendat, non concurrit cum ſemicirculo à punctο Σ inchoante, qui ad partes Σ, T profiſcatur; circumferentia igitur KΣ ſimilis eſt circumferentiæ ΛT: quo igitur tempore punctum K ad punctum Σ pervenit, hoc eodem tempore & punctum Λ ad punctum T venit, & circulus KΛ congruet cum circulo ΣT. eſt autem circulus ΣT ad rectos angulos ipſi HEK: quare & circulus KΛ erit ipſi HEK ad angulos rectos. rurſus, quoniam circumferentia ΣMΠ ſimilis eſt circumferentiæ TNP: quo igitur tempore punctum Σ ad punctum Π accedit: hoc ipſo tempore & punctum T ad punctum P pervenit, & zodiacus circulus congruet cum circulo ΠOP. eſt autem circulus ΠOP ipſi HEK ad angulos rectos: quare & circulus zodiacus horizonti HEK erit etiam ad angulos rectos. zodiacus igitur circulus horizonti bis erit ad angulos rectos.



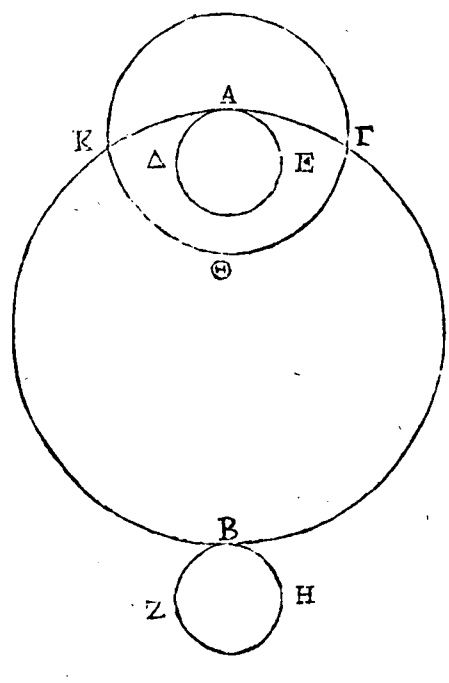
ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἀσύμπτωτόν ἐστι τὸ ἀπὸ τοῦ Κ ἡμικύκλιον ὡς ἐπὶ τὰ Κ, Λ μέρη τῷ ἀπὸ τοῦ Σ ἡμικυκλίῳ ὡς ἐπὶ τὰ Σ, Τ μέρη· ὁμοία ἐστὶν ἡ ΚΣ περιφέρεια τῇ ΛΤ περιφερείᾳ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Κ ἐπὶ τὸ Σ ἀφῖκται γινέσθω ἐν τούτῳ καὶ τὸ Λ ἐπὶ τὸ Τ παρέσται, καὶ ὁ ΚΛ κύκλος ἐφαρμόσει ἐπὶ τὸν ΣΤ κύκλον. ὁ δὲ ΣΤ κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΗΕΚ· καὶ ὁ ΚΛ ἄρα ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΗΕΚ κύκλον. πάλιν, ἐπεὶ ὁμοία ἐστὶν ἡ ΣΜΠ περιφέρεια τῇ ΤΝΡ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Σ ἐπὶ τὸ Π ἀφῖκται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Τ ἐπὶ τὸ Ρ παρέσται, καὶ ὁ τῶν ζῳδίων κύκλος ἐφαρμόσει ἐπὶ τὸν ΠΟΡ κύκλον. ὁ δὲ ΠΟΡ κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΗΕΚ· καὶ ὁ τῶν ζῳδίων ἄρα κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ΗΕΚ ὁρίζοντα. δὶς ἄρα ἔσται ὁ τῶν ζῳδίων κύκλος ὀρθὸς πρὸς τὸν ὁρίζοντα.

THEOREMA III.

Ex inerrantibus aſtris, quæ ortus & occaſus faciunt, unumquodque in iiſdem horizontis punctis & oritur & occidit.

SIT in mundo horizon ABΓ: maximus autem eorum, qui ſemper apparent, ſit circulus AΔE; maximus vero eorum, qui ſemper occulti ſunt, ſit circulus BHZ; & ſumatur punctum Θ ex his quæ & ortus & occaſus faciunt; & ſint partes orientales quidem verſus punctum Γ, occidentales autem verſus punctum K: dico quod punctum Θ in iiſdem horizontis punctis ſemper & oritur & occidit, ſphæra circumvoluta.

Sit ΓΘK circulus in quo punctum Θ feratur: circulus igitur ΓΘK horizontem ſecat; quinetiam axi ſphæræ eſt ad angulos rectos. qui vero circuli ſunt ad angulos rectos axi & horizontem ſecant, ortus occaſuſque faciunt in iiſdem punctis horizontis: quare circulus ΓΘK in punctο Γ quidem oritur, & in K punctο occidit. fertur autem punctum



ΘΕΩΡΗΜΑ γ'.

Τῶν ἀπλανῶν ἀστρῶν τὰ ἀνατολάς τε καὶ δύσεις ποιούμενα ἕκαστον κατὰ τὰ αὐτὰ σημεῖα τοῦ ὁρίζοντος ἀνατέλλει τε καὶ δύνει.

ἜΣτω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ ΑΒΓ, μέγιστος δὲ τῶν ἀεὶ φαινομένων ἔστω ὁ ΑΔΕ κύκλος, μέγιστος δὲ τῶν ἀεὶ ἀφανῶν ὁ ΒΗΖ, καὶ εἰλήφθω σημεῖον τὸ Θ τῶν ἀνατολὰς καὶ δύσεις ποιουμένων, καὶ ἔστω ἀνατολικὰ μὲν τὰ Γ μέρη, δυτικὰ δὲ τὰ Κ· λέγω ὅτι τὸ Θ σημεῖον ἀεὶ κατὰ τὰ αὐτὰ σημεῖα τοῦ ὁρίζοντος ἀνατέλλει τε καὶ δύνει, σφερομένης τῆς σφαίρας.

Ἔστω κύκλος, καθ' ὃν φέρεται τὸ Θ σημεῖον, ὁ ΓΘΚ· ὁ ΓΘΚ ἄρα κύκλος τέμνει τὸν ὁρίζοντα, καὶ ὀρθός ἐστι πρὸς τὸν ἄξονα τῆς σφαίρας. οἱ δὲ τῷ ἄξονι πρὸς ὀρθὰς ὄντες κύκλοι, καὶ τέμνοντες τὸν ὁρίζοντα, τάς τε ἀνατολὰς καὶ δύσεις κατὰ τὰ αὐτὰ σημεῖα τοῦ ὁρίζοντος ποιοῦσι· ὁ ΓΘΚ ἄρα κύκλος ἀεὶ κατὰ μὲν τὸ Γ σημεῖον ἀνατέλλει, κατὰ δὲ τὸ Κ δύνει. καὶ φερομένου τοῦ Θ σημ-

Θ σημεῖον ἅπτηται τῆς φερείας τοῦ ΓΘΚ κύκλου· καὶ τὸ Θ ἄρα σημεῖον ἀεὶ κατὰ μὲν τὸ Γ σημεῖον ἀνατέλλει, κατὰ δὲ τὸ Κ δύνει.

Θ in circumferentia circuli ΓΘΚ: quare punctum Θ ſemper in puncto Γ oritur, & in Κ puncto occidit.

ΘΕΩΡΗΜΑ Δ'.

Οσα τῶν ἄστρων ἐστὶν ἐπὶ μείζονος κύκλου περιφερείας, ὃς μήτε τέμνῃ τὸν μέγιστον τῶν ἀεὶ φαινομένων κύκλων, μήτε ἐφάπτηται αὐτοῦ· τούτων τὰ πρότερον ἀνατέλλοντα καὶ πρότερον δύνει, καὶ τὰ πρότερον δύνοντα πρότερον ἀνατέλλει.

Theorema IV.

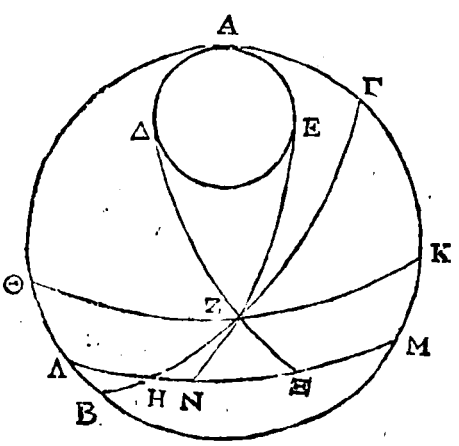
Quæcunque aſtra ſunt in circumferentia maximi circuli, qui neque ſecat maximum ſemper-apparentium circulorum, neque ipſum tangit: horum quæ prius oriuntur prius & occidunt; & quæ prius occidunt, prius etiam & oriuntur.

Ἔστω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ ΑΒΓ, καὶ μέγιστος τῶν ἀεὶ φαινομένων ὁ ΑΔΕ, ἕτερος δὲ μέγιστος κύκλος ἔστω ὁ ΓΖΒ, μήτε τέμνων τὸν ΑΔΕ κύκλον μήτε ἐφαπτόμενος αὐτοῦ, καὶ εἰλήφθω ἅπτηται τῆς περιφερείας τοῦ ΓΖΒ κύκλου δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Ζ, Η· λέγω ὅτι τῶν Ζ, Η σημείων τὸ πρότερον ἀνατέλλον πρότερον καὶ δύνει, καὶ τὸ πρότερον δῦνον πρότερον καὶ ἀνατέλλει.

SIT in mundo horizon circulus ΑΒΓ; maximus autem ſemper-apparentium ſit circulus ΑΔΕ; alter vero maximus circulus ſit ΓΖΒ, qui neque ſecet circulum ΑΔΕ neque ipſum tangat; ſumantur autem in circumferentia circuli ΓΖΒ duo puncta utcunque, quæ ſint Ζ, Η: dico quod punctorum Ζ, Η quod prius oritur illud quoque prius occidit, & quod prius occidit prius quoque oritur.

Ἐστω ἀνατολικὰ μὲν τὰ Γ μέρη, δυτικὰ δὲ τὰ Β, καὶ ἔστωσαν παράλληλοι κύκλοι, καθ' ὧν φέρεται τὰ Ζ, Η σημεῖα, οἱ ΘΚ, ΛΜ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ζ γεγράφθω μέγιστος κύκλος ὁ ΝΖΕ ἐφαπτόμενος δὲ ΑΔΕ κύκλου, ὥστε ἀσύμπτωτον εἶναι τὸ ὑπὸ τὸ Ε ἡμικύκλιον ὡς ἐπὶ τὰ Ζ, Ν μέρη τῷ ὑπὸ τοῦ Α ἡμικυκλίῳ, ὡς ἐπὶ τὰ Α, Κ μέρη. ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΖ περιφέρεια τῇ ΜΝ περιφερείᾳ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΖΘ περιφέρεια, καὶ ἡ συνεχὴς αὐτῇ ὑπὸ γῆν ἡ μέχρι τοῦ Κ σημείου, ὁμοία ἐστὶ τῇ ΝΛ περιφερείᾳ καὶ τῇ συνεχεῖ αὐτῇ τῇ ὑπὸ γῆν μέχρι τοῦ Μ σημείου. ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὰ Ζ, Ν σημεῖα τὰς ΖΘ, ΝΛ καὶ τὰς συνεχεῖς αὐτῶν μέχρι τῶν Κ, Μ σημείων διαπορεύεται· τὰ Ζ, Ν ἄρα σημεῖα ἅμα ἀνατέλλει. τὸ δὲ Η τοῦ Ν πρότερον ἀνατέλλει· καὶ τὸ Η ἄρα τοῦ Ζ πρότερον ἀνατέλλει. * λέγω ὅτι καὶ πρότερον δύνει. γεγράφθω διὰ τοῦ Ζ σημείου μέγιστος κύκλος ὁ ΞΖΔ ἐφαπτόμενος τοῦ ΑΔΕ κύκλου, ὥστε ἀσύμπτωτον εἶναι τὸ ὑπὸ τὸ Δ ἡμικύκλιον ὡς ἐπὶ τὰ Δ, Ζ, Ξ μέρη τῷ ὑπὸ τοῦ Α ἡμικυκλίῳ ὡς ἐπὶ τὰ Α, Θ μέρη· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ περιφέρεια τῇ ΞΛ περιφερείᾳ· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὸ Ζ σημεῖον τὴν ΖΘ περιφέρειαν διαπορεύεται, καὶ τὸ Ξ σημεῖον τὴν ΞΛ περιφέρειαν. τοῦ Ζ ἄρα σημείου ἐπὶ τὸ Θ σημεῖον φερομένου, καὶ τὸ Ξ ἐπὶ τὸ Λ παρέσται· τὰ Ζ, Ξ ἄρα σημεῖα ἅμα δύνει. τὸ δὲ Η τοῦ Ξ πρότερον δύνει· καὶ τὸ Η ἄρα τοῦ Ζ πρότερον δύνει.

Sint vero partes orientales Γ, occidentales Β; ſintque circuli paralleli ΘΚ, ΛΜ in quibus puncta Ζ, Η ferantur; & per punctum Ζ deſcribatur maximus circulus ΝΖΕ, qui circulum ΑΔΕ tangat; ita ut ſemicirculus qui à puncto Ε incipit, qui ad partes Ζ, Ν tendat, non concurrat cum ſemicirculo à puncto Α inchoante, qui ad partes Α, Κ proficiſcatur. circumferentia igitur ΚΖ circumferentiæ ΜΝ ſimilis eſt: quare & reliqua ΖΘ, & quæ huic continua eſt ſub terram circumferentia uſque ad punctum Κ contenta, ſimilis eſt etiam circumferentiæ ΝΛ, & ei quæ huic continua eſt ſub terram uſque ad punctum Μ comprehenſæ. æquali igitur tempore [per 2. Autol.] puncta Ζ, Ν circumferentias ΖΘ, ΝΛ percurrunt, & eas etiam quæ his continuæ ſunt uſque ad puncta Κ, Μ interceptæ: quare puncta Ζ, Ν ſimul oriuntur. verum punctum Η prius oritur quam punctum Ν: quare punctum Η prius oritur quam punctum Ζ. dico quod & prius occidit. deſcribatur per punctum Ζ maximus circulus ΞΖΔ qui circulum ΑΔΕ tangat; ita ut ſemicirculus, qui à puncto Δ incipit, qui ad partes Δ, Ζ, Ξ tendat, non concurrat cum ſemicirculo à puncto Α inchoante, qui ad partes Α, Θ proficiſcatur. circumferentia igitur ΖΘ circumferentiæ ΞΛ ſimilis eſt: æquali igitur tempore punctum Ζ circumferentiam ΖΘ percurrit, ac punctum Ξ circumferentiam ΞΛ pertranſit. cum igitur punctum Ζ ad punctum Θ pervenit, tunc & punctum Ξ ad Λ punctum accedet: puncta igitur Ζ, Ξ ſimul occidunt. ſed Η prius occidit quam punctum Ξ: quare punctum Η prius quoque occidit quam Ζ.



* In Cod. Bodl. ἢ καὶ ὕστερον. λέγω ὅτι τὸ Η ὕστερον δύνει τοῦ Ζ. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΚΘ μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία τῇ ΜΛ, ὧν ἡ ΚΖ ὁμοία ἐστὶ τῇ ΜΝ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΘΖ μείζων ἐστὶν ἢ ὁμοία τῇ ΝΛ· ὕστερον ἄρα δύνεται τὸ ΝΖ. ἀλλὰ καὶ τὸ Η τοῦ Ν· πολλῷ ἄρα τὸ Η ὕστερον δύνεται τοῦ Ζ.

Similiter etiam demonſtrabitur, quod & ſi prius occidit & prius quoque orietur.

Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ πρότερον δύνον πρότερον ἀνατέλλει.

THEOREMA V.

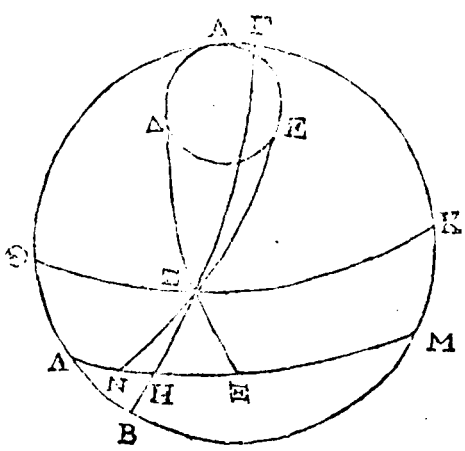
Quæcunque aſtra ſunt in circumferentia maximi circuli, qui maximum eorum qui ſemper apparent ſecat; horum quæ magis ſpectant ad ſeptentriones prius quidem oriuntur, poſterius autem occidunt.

ΘΕΩΡΗΜΑ ε'.

Οσα τῶν ἄστρων ἐστὶν ὅτι μεγίστου κύκλου περιφερείας, ὃς τέμνει τὸν μέγιστον τῶν ἀεὶ φανερῶν· τούτων τὰ πρὸς τοῖς ἄρκτοις ὄντα πρότερον μὲν ἀνατέλλει, ὕστερον δὲ δύνει.

SIT in mundo circulus horizon A B Γ; maximus autem eorum, qui ſemper apparent ſit circulus A Δ E; alter vero circulus maximus ſit Γ Z B, qui ſecet circulum A Δ E; & ſumantur in circumferentia circuli Γ Z B duo puncta utcunque ſumpta, quæ ſint Z, H; ſit autem punctum Z propius ad ſeptentriones: dico quod punctum Z prius oritur quam punctum H, poſterius autem occidit.

Εστω ἐν κόσμῳ ὀρίζων ὁ Α Β Γ, καὶ μέγιστος τῶν ἀεὶ φανερῶν ὁ Α Δ Ε, ἕτερος δὲ μέγιστος κύκλος ἔστω ὁ Γ Ζ Β τέμνων τὸν Α Δ Ε κύκλον, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ Γ Ζ Β κύκλου δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Ζ, Η, καὶ ἔστω τὸ Ζ σημεῖον πρὸς ταῖς ἄρκτοις· λέγω ὅτι τὸ Ζ σημεῖον τοῦ Η πρότερον μὲν ἀνατέλλει, ὕστερον δὲ δύνει.



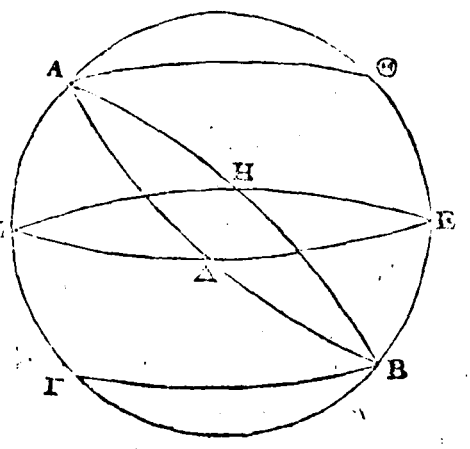
Sint partes orientales verſus Γ, occidentales vero ſint verſus B; & ſint circuli paralleli K Θ, M Λ, in quibus puncta Z, H ferantur; & deſcribatur per punctum Z maximus circulus N Z E tangens circulum A Δ E, ita ut ſemicirculus à puncto E inchoans, qui ad partes Z, N proficiſcatur, non concurrat cum ſemicirculo à puncto A inchoante, qui ad partes Γ, K: quare circumferentia Z Γ ſimilis eſt circumferentiæ M N: & reliqua, igitur Z Θ, & quæ huic ſub terram continua eſt uſque ad punctum K intercepta, ſimilis quoque eſt circumferentiæ N Λ, & ei quæ huic etiam continua eſt ſub terram uſque ad punctum M comprehenſa. quare [per 1. Autol.] tempore æquali puncta Z, N circumferentias Z Θ, N Λ, & eas quæ his continuæ ſub terram ſunt uſque ad puncta K, M interceptæ, percurrunt: puncta igitur Z, N ſimul oriuntur. ſed punctum N prius oritur quam punctum H: quare & punctum Z prius oritur etiam quam punctum H. dico quod & poſterius occidit. deſcribatur per punctum Z maximus circulus Ξ Z Δ tangens circulum A Δ E, itaut ſemicirculus à puncto Δ inchoans, qui ad partes Z, Ξ tendat, non concurrat cum ſemicirculo à puncto A proficiſcente, qui ad partes A, B tendat: quare circumferentia Z Θ ſimilis eſt circumferentiæ Ξ Λ. æquali igitur tempore punctum Z circumferentiam Z Θ percurrit atque punctum Ξ ipſam Ξ Λ pertranſit: puncto igitur Z jam pervento ad punctum Θ & ipſum Ξ perveniet ad punctum Λ: quare puncta Z, Ξ ſimul occidunt. ſed punctum H prius occidit quam punctum Ξ: quare punctum H prius quoque occidit quam punctum Z: punctum igitur Z poſterius occidit quam punctum H. ſed demonſtratum eſt quod & prius oritur: quare punctum Z prius quidem oritur quam punctum H, poſterius autem occidit.

Εστω ἀνατολικὰ μὲν τὰ Γ μέρη, δυτικὰ δὲ τὰ Β, καὶ ἔστωσαν κύκλοι παράλληλοι καθ' ὧν φέρεται τὰ Ζ, Η σημεῖα οἱ Κ Θ, Μ Λ, καὶ γεγράφθω διὰ τοῦ Ζ σημείου μέγιστος κύκλος ὁ Ν Ζ Ε ἐφαπτόμενος τοῦ Α Δ Ε κύκλου, ὥστε ἀσύμπλωτον εἶναι τὸ ἀπὸ τοῦ Ε ἡμικύκλιον ὡς ἐπὶ τὰ Ζ, Ν μέρη τῷ ἀπὸ τοῦ Α ἡμικυκλίῳ ὡς ἐπὶ τὰ Γ, Κ μέρη· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ Ζ Κ περιφέρεια τῇ Μ Ν περιφερείᾳ· λοιπὴ ἄρα ἡ Ζ Θ περιφέρεια καὶ ἡ συνεχὴς αὐτῇ ἀπὸ γ[ὴ]ς μέχρι τῶν Κ σημείων ὁμοία ἔσται τῇ Ν Λ [περιφερεί]ᾳ καὶ τῇ συνεχεῖ αὐτῇ [τῇ ἀπὸ γ]ῆς μέχρι τῶν Μ σημείων. ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὰ Ζ, Ν σημεῖα τὰς Ζ Θ, Ν Λ περιφερείας καὶ τὰς συνεχεῖς αὐτῶν μέχρι τῶν Κ, Μ σημείων διαπορεύεται· τὰ Ζ, Ν ἄρα σημεῖα ἅμα ἀνατέλλει. τὸ δὲ Ν τοῦ Η πρότερον ἀνατέλλει· καὶ τὸ Ζ ἄρα τοῦ Η πρότερον ἀνατέλλει. λέγω ὅτι καὶ ὕστερον δύνει. γεγράφθω διὰ τοῦ Ζ σημείου μέγιστος κύκλος ὁ Ξ Ζ Δ ἐφαπτόμενος τοῦ Α Δ Ε κύκλου, ὥστε ἀσύμπλωτον εἶναι τὸ ἀπὸ τοῦ Δ ἡμικύκλιον ὡς ἐπὶ τὰ Ζ, Ξ μέρη τῷ ἀπὸ τοῦ Α ἡμικυκλίῳ ὡς ἐπὶ τὰ Α, Β μέρη· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ Ζ Θ περιφέρεια τῇ Ξ Λ περιφερείᾳ. ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὸ Ζ τὴν Ζ Θ περιφέρειαν διαπορεύεται καὶ τὸ Ξ τὴν Ξ Λ· τοῦ Ζ ἄρα ἐπὶ τὸ Θ σημεῖον διαβαίνοντος καὶ τὸ Ξ ἐπὶ τὸ Λ παρέσται· τὰ Ζ, Ξ ἄρα σημεῖα ἅμα δύνει. τὸ δὲ Η τοῦ Ξ πρότερον δύνει· καὶ τὸ Η ἄρα τοῦ Ζ πρότερον δύνει· ὥστε τὸ Ζ τοῦ Η ὕστερον δύνει. ἐδείχθη δὲ καὶ πρότερον ἀνατέλλον· τὸ Ζ ἄρα τοῦ Η πρότερον ἀνατέλλει, ὕστερον δὲ δύνει.

ΘΕΩΡΗΜΑ ς'.

Τὰ ἐπὶ τῷ ζωδιακῷ κύκλῳ ἄστρα τὰ κατὰ διάμετρον ὄντα κατὰ συζυγίαν ἀνατέλλει τε καὶ δύνει· ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ.

Ἔστω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ ΑΒΓ, ὁ δὲ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω τὴν ΑΒΔ, ἰσημερινὸς δὲ ἔστω ὁ ΕΖ· καὶ ἔστω αὐτῶν τὰ μὲν ὑπὲρ τὴν γῆν τμήματα τὰ ΑΗΒ, ΖΗΕ· κατὰ διάμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν Α σημεῖον τῷ Β, τὸ δὲ Ε τῷ Ζ. λέγω ὅτι καὶ τὰ Α, Β σημεῖα καὶ τὰ Ε, Ζ κατὰ συζυγίαν ἀνατέλλει τε καὶ δύνει.



Ἔστω ἀνατολικὰ μὲν τὰ Α μέρη, δυτικὰ δὲ τὰ Β, καὶ ἔστωσαν παράλληλοι κύκλοι καθ' οὓς φέρεται τὰ Α, Β σημεῖα οἱ ΑΘ, ΒΓ, ὧν ἔστω τὸ μὲν ΑΘ τμῆμα τὸ ὑπὲρ γῆς, τὸ δὲ ΒΓ τὸ ὑπὸ γῆν. καὶ ἐπεὶ κατὰ διάμετρόν ἐστι τὸ μὲν Α σημεῖον τῷ Β, τὸ δὲ Ε τῷ Ζ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΒ περιφέρεια τῇ ΑΖ περιφερείᾳ. ἀλλ' ἡ ΕΒ τῇ ΖΓ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΑΖ ἄρα τῇ ΖΓ ἴση ἐστίν. ὧν ἔστι μέγιστος τῶν παραλλήλων ὁ ΕΔΖ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΘ κύκλος τῷ ΒΓ κύκλῳ. καὶ ἔστιν αὐτῶν τὰ ἐναλλὰξ τμήματα τὰ ΑΘ, ΒΓ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ περιφέρεια τῇ ΒΓ περιφερείᾳ· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὸ Α σημεῖον τὴν ΑΘ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Θ παρέσται, καὶ τὸ Β τὴν ΒΓ διελθὸν ἐπὶ τὸ Γ παρέσται. ἀλλὰ τὸ μὲν Α τὴν ΑΘ διελθὸν καὶ ἐπὶ τὸ Θ παραγενόμενον δύνει, τὸ δὲ Β τὴν ΒΓ διελθὸν καὶ ἐπὶ τὸ Γ παραγενόμενον ἀνατέλλει· τὸ Α ἄρα δύνοντος τὸ Β ἀνατέλλει. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ Α ἀνατέλλοντος τὸ Β δύνει.

ΠΑΛΙΝ, ἐπεὶ ἡμικύκλιόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΕΗΖ, ΖΔΕ, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΔΕ περιφέρεια τῇ ΕΗΖ περιφερείᾳ· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὸ Ζ σημεῖον τὴν ΖΗΕ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ε παρέσται, καὶ τὸ Ε τὴν ΕΔΖ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ζ παρέσται. ἀλλὰ τὸ μὲν Ζ τὴν ΖΗΕ διελθὸν καὶ ἐπὶ τὸ Ε παραγενόμενον δύνει, τὸ δὲ Ε τὴν ΕΔΖ διελθὸν καὶ ἐπὶ τὸ Η παραγενόμενον ἀνατέλλει· τοῦ Ζ ἄρα δύνοντος τὸ Ε ἀνατέλλει. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τοῦ Ζ ἀνατέλλοντος τὸ Ε δύνει. ὁμοίως δὴ καὶ πάντα τὰ ἐπὶ τοῦ ζωδιακοῦ κύκλου ἄστρα, καὶ τὰ ἐπὶ τοῦ ἰσημερινοῦ τὰ κατὰ διάμετρον ὄντα, κατὰ συζυγίαν ἀνατέλλει τε καὶ δύνει.

ΑΛΛΩΣ

Ἔστω ὁ ὁρίζων κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ἔστω ὁ ΑΔ, χειμερινὸς δὲ ὁ ΒΓ, ὁ δὲ τοῦ ζω-

THEOREMA VI.

Astra quæ in circulo zodiaco per diametrum sunt posita, conjugate & oriuntur & occidunt: similiter quæ in circulo æquinoctiali sita sint.

SIT in mundo horizon ΑΒΓ, zodiacus circulus positionem habeat ΑΒΔ, æquinoctialis vero sit ΕΖ: sintque horum circulorum segmenta quidem ΑΗΒ, ΖΗΕ supra terram; per diametrum igitur est punctum Α puncto Β, & punctum Ε puncto Ζ. dico quod puncta Α, Β & Ε, Ζ conjugate & oriuntur & occidunt.

Sint partes orientales Α, occidentales autem Β puncta; sint vero circuli paralleli ΑΘ, ΒΓ, in quibus puncta Α, Β ferantur; & sit segmentum ΑΘ supra terram, & segmentum ΒΓ sub terram. & quoniam punctum Α per diametrum est puncto Β, & punctum Ε etiam est per diametrum ipsi Ζ: æqualis igitur est circumferentia ΕΒ circumferentiæ ΑΖ. sed circumferentiæ ΖΓ æqualis est etiam ipsa ΕΒ: quare circumferentia ΑΖ æqualis quoque est ipsi ΖΓ. est autem circulus ΕΔΖ maximus parallelorum circulorum: circulus igitur ΑΘ æqualis est circulo ΒΓ. & sunt ipsorum segmenta alternatim sumpta ΑΘ, ΒΓ: quare circumferentia ΑΘ æqualis est circumferentiæ ΒΓ: æquali igitur tempore [per 2. Autol.] punctum Α circumferentiam ΑΘ percurrens pervenit ad punctum Θ, & ipsum Β circumferentiam ΒΓ pertransiens accedit ad punctum Γ. sed Α percurrens circumferentiam ΑΘ & accedens ad punctum Θ occidit; & Β pertransiens circumferentiam ΒΓ & perveniens ad punctum Γ oritur: quare puncto Α occidente & Β oritur. similiter demonstrabitur quod puncto Α oriente Β occidit.

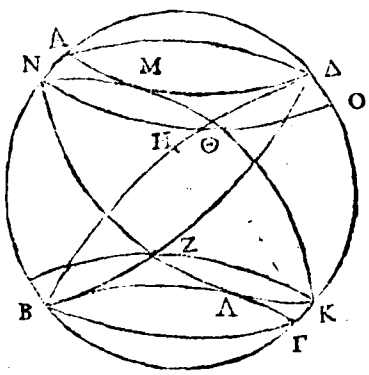
RURSUS, quoniam utraque ΕΗΖ, ΖΔΕ semicirculi circumferentia est; æqualis igitur est ΖΔΕ ipsi ΕΗΖ: quare tempore æquali punctum Ζ percurrens circumferentiam ΖΗΕ pervenit ad punctum Ε; & ipsum Ε pertransiens circumferentiam ΕΔΖ pervenit ad punctum Ζ. sed punctum Ζ circumferentiam ΖΗΕ percurrens, & perveniens ad punctum Ε occidit; & punctum Ε perambulans circumferentiam ΕΔΖ & perveniens ad punctum Η oritur: quare puncto Ζ occidente punctum Ε oritur. similiter jam demonstrabitur quod Ζ oriente Ε occidit. simili etiam modo ostendetur, quod omnia alia puncta, quæcunque sunt vel in zodiaco circulo vel in æquinoctiali per diametrum posita, conjugate & oriuntur & occidunt.

ALITER.

Sit horizon circulus ΑΒΓΔ, tropicus æstivus sit ΑΔ, hybernus autem sit ΒΓ, zodiacus

circulus poſitionem habeat ΔHBZ, ſint autem in ΔHBZ per diametrum puncta Z, H: dico quod puncto Z oriente, punctum H occidit.

Si enim fieri poteſt, non occidat, ſed occidat punctum Θ; & per puncta Z, Θ deſcribantur circuli paralleli OΘN, KZ: quare [ex hyp] puncto Z oriente in puncto K, & punctum Θ occidet in N; & circulus zodiacus poſitionem habebit veluti MNΛK. & quoniam uterque circulus ABΓΔ, MNΛK maximus eſt: punctum igitur K puncto N per diametrum eſt. ſed punctum K idem eſt ac punctum Z, & punctum N idem eſt ac ipſum Θ: quare punctum Z per diametrum eſt puncto Θ. ſed [ex hyp.] & Z per diametrum eſt ipſi H; quod fieri non poteſt: non igitur, puncto Z oriente, punctum H non occidit: occidit igitur.



THEOREMA VII.

Zodiacus circulus in omni horizontis loco, qui eſt inter tropicos circulos, & oritur & occidit; quando maximus ſemper-apparentium non fuerit circulo tropico major: converſioneſque facit contrario tranſmutatus; nam quando cum ortibus ad meridiem ſe tranſmutaverit, tunc ad ſeptentriones cum occaſibus tranſmutatus apparet; at quando contra cum ortibus ad ſeptentriones ſeſe tranſmutaverit, tunc etiam cum occaſibus ad meridiem tranſmutatus apparet: interdum autem alio modo ſupra nos ſtat.

SIT in mundo circulus horizon ABΓΔ, æſtivus tropicus ſit AΔ, hybernus autem ſit BΓ, zodiacus circulus poſitionem habeat veluti ΔEBZ; & ſit ſegmentum ΔEB ſub terram, ſegmentum vero ΔZB ſupra terram. dico quod zodiacus circulus in omni horizontis loco, qui eſt inter tropicos, & oritur & occidit; & quod contrario tranſmutatus converſiones facit: nam quando cum ortibus meridiem verſus ſeſe mutaverit, tunc cum occaſibus ſeptentriones verſus tranſmutatus apparet; quando autem cum ortibus ad ſeptentriones ſe tranſmutaverit, tunc cum occaſibus meridiem verſus etiam tranſmutatus appparet: interdum vero alio modo ſupra nos conſtitutus eſt.

Sint itaque partes orientales Δ, Γ, occidentales autem ſint A, B. quod igitur circulus zodiacus in omni horizontis loco, qui eſt inter tropicos circulos, faciat & ortus & occaſus, jam manifeſtum eſt [per 11. Autol.]; quandoquidem majores circulos tangit quam eos quos horizon tangit.

JAM dico, quod converſiones facit contrario tranſmutatus.

ΘΕΩΡΗΜΑ ζ'.

Ο τῶν ζωδίων κύκλος κατὰ πάντα ὃ ὁρίζοντος τὸν μεταξὺ τόπον τῶν τροπικῶν κύκλων ἀνατέλλει τε καὶ δύνει, ὅταν ὁ μέγιστος τῶν ἀεὶ φαινομένων μὴ μείζων ᾖ τοῦ τροπικοῦ κύκλου, καὶ τροπὰς ποιεῖται ἐναντίως μεθιστάμενος· ὅταν μὲν γὰρ ταῖς ἀνατολαῖς πρὸς μεσημβρίαν μεθίσταται, ταῖς δύσεσι πρὸς ἄρκτους μεθιστάμενος φαίνεται· ὅταν δὲ ταῖς ἀνατολαῖς πρὸς ἄρκτους μεθίσταται, ταῖς δύσεσι πρὸς μεσημβρίαν μεθιστάμενος φαίνεται· καὶ ἄλλοτε ἄλλως ὑπὲρ ἡμᾶς ἵσταται.

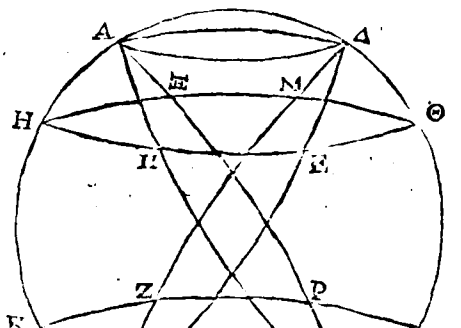
ΕΣτω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ ΑΒΓΔ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ἔστω ὁ ΑΔ, χειμερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ ΒΓ, ὁ δὲ τοῦ ζωδίου κύκλος θέσιν ἐχέτω τὴν ΔΕΒΖ, καὶ ἔστω τὸ μὲν ΔΕΒ τμῆμα ὑπὸ γῆν, τὸ δὲ ΔΖΒ ὑπὲρ γῆς. λέγω ὅτι ὁ τῶν ζωδίων κύκλος κατὰ πάντα τόπον τὸν ὁρίζοντος μεταξὺ τῶν τροπικῶν ἀνατέλλει καὶ δύνει καὶ τροπὰς ποιεῖται ἐναντίως μεθιστάμενος. ὅταν μὲν γὰρ ταῖς ἀνατολαῖς πρὸς μεσημβρίαν μεθίσῃ, ταῖς δύσεσι πρὸς ἄρκτους μεθιστάμενος φαίνεται· ὅταν δὲ ταῖς ἀνατολαῖς πρὸς ἄρκτους μεθίσῃ, ταῖς δύσεσι πρὸς μεσημβρίαν μεθιστάμενος φαίνεται· καὶ ἄλλοτε ἄλλως ὑπὲρ ἡμᾶς ἵσταται.

ΕΣτω ἀνατολικὰ μὲν τὰ Δ, Γ μέρη, δυτικὰ δὲ τὰ Α, Β. ὅτι μὲν οὖν ὁ τῶν ζωδίων κύκλος κατὰ πάντα τόπον τὸν ὁρίζοντος τὸν μεταξὺ τῶν τροπικῶν ἀνατέλλει τε καὶ δύνει φανερόν· ἐπειδήπερ μειζόνων ἐφάπτεται κύκλων ἢ ὧν ὁ ὁρίζων ἐφάπτεται.

ΛΕΓΩ δὴ ὅτι καὶ τροπὰς ποιεῖται ἐναντίως μεθιστάμενος.

Απο-

Ἀπολήφθωσαν ἴσαι τε καὶ ἀπεναντίον περιφέρειαι αἱ Δ Ε, Ζ Β, καὶ γεγράφθωσαν ὡσαύτως κύκλοι, καθ' ὧν φέρεται τὰ Ε, Ζ σημεῖα, οἱ Η Ε Θ, Κ Ζ Λ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ Δ Ε περιφέρεια τῇ Ζ Β περιφερείᾳ, κοινὴ προσκείσθω ἡ Ε Β· ὅλη ἄρα ἡ Δ Ε Β ὅλῃ τῇ Ε Β Ζ ἐστιν ἴση. ἡμικύκλιον δὲ ἐστὶ τὸ Δ Ε Β· ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Ε Β Ζ· κατὰ διάμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Ε σημεῖον τῷ Ζ σημείῳ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν Ε Δ περιφέρεια τῇ Δ Μ περιφερείᾳ, ἡ δὲ Ζ Β τῇ Β Ν, ἀλλὰ καὶ ἡ Δ Ε τῇ Ζ Β ἴση ἐστίν· καὶ ἡ Δ Μ ἄρα τῇ Β Ν ἐστιν ἴση. κοινὴ προσκείσθω ἡ Μ Β· ὅλη ἄρα ἡ Δ Μ Β ὅλῃ τῇ Μ Β Ν ἐστιν ἴση. ἡμικύκλιον δὲ ἐστὶ τὸ Δ Μ Β· ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Μ Β Ν· κατὰ διάμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Μ σημεῖον τῷ Ν σημείῳ. καὶ ἐπεὶ τὰ τῶν ζωδίων κύκλου τὰ κατὰ διάμετρον ὄντα σημεῖα κατὰ συζυγίαν ἀνατέλλει τε καὶ δύνει· τὰ Δ ἄρα σημεῖα ἀνατέλλοντος κατὰ τὸ Δ σημεῖον, τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Β δύνει κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ τὰ Ε ἀνατέλλοντα κατὰ τὸ Θ σημεῖον, τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Ζ δύνει κατὰ τὸ Κ σημεῖον, καὶ τὰ Ν σημεῖα ἀνατέλλοντα κατὰ τὸ Λ σημεῖον, τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Μ δύνει κατὰ τὸ Η σημεῖον, καὶ ἔτι τὰ Β σημεῖα ἀνατέλλοντα κατὰ τὸ Γ σημεῖον, τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Δ δύνει κατὰ τὸ Α σημεῖον· ὅταν ἄρα ὁ τῶν ζωδίων κύκλος τῆς ἀνατολαῖς πρὸς μεσημβρίαν μεθίσῃ, τῇ δύσει πρὸς ἄρκτους μεθιστάμενος φαίνεται. λέγω ὅτι καὶ ὅταν πρὸς ἀνατολαῖς πρὸς ἄρκτους μεθίσῃται, τῇ δύσει πρὸς μεσημβρίαν μεθιστάμενος φαίνεται. ἀνατειλάντος γὰρ τοῦ Δ Ε Β ἡμικυκλίου ὁ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἕξει τὴν Α Ξ Γ. καὶ ὁμοίως δείξομεν ὅτι κατὰ διάμετρόν ἐστι τὸ μὲν Ξ σημεῖον τῷ Ο σημείῳ, τὸ δὲ Ρ τῷ Π. καὶ ἐπεὶ τὰ Γ σημεῖα ἀνατέλλοντος κατὰ τὸ Γ σημεῖον, τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Α δύνει κατὰ τὸ Α σημεῖον, τὰ δὲ Ο σημεῖα ἀνατέλλοντος κατὰ τὸ Λ σημεῖον, τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Ξ δύνει κατὰ τὸ Η σημεῖον, τὰ δὲ Π σημεῖα ἀνατέλλοντος κατὰ τὸ Θ σημεῖον, τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Ρ δύνει κατὰ τὸ Κ σημεῖον, καὶ ἔτι τὰ Α σημεῖα ἀνατέλλοντος κατὰ τὸ Δ σημεῖον, τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Γ δύνει κατὰ τὸ Β σημεῖον· ὅταν ἄρα ὁ τῶν ζωδίων κύκλος τῆς ἀνατολαῖς πρὸς ἄρκτους μεθίσῃται, τῇ δύσει πρὸς μεσημβρίαν μεθιστάμενος φαίνεται. ἐδείχθη δὲ ὅτι καὶ ὅταν τῆς ἀνατολαῖς πρὸς μεσημβρίαν μεθίσῃ, τῇ δύσει πρὸς ἄρκτους μεθιστάμενος φαίνεται. φανερὸν ὅτι ἄλλοτε ἄλλως ὑπὲρ ἡμᾶς ἐστίν. ὅταν μὲν γὰρ ἡ σωματοφὴ τοῦ ζωδιακοῦ κύκλου ἡ ἅπτηται τῆς διχοτομίας τοῦ ὑπὲρ γῆς τμήματος τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ, ὀρθότατός ἐστι πρὸς ἡμᾶς· ὅταν δὲ ἅπτηται



Sumantur æquales & oppoſitæ circumferentiæ Δ E, Z B; & deſcribantur paralleli circuli H E Θ, K Z Λ, in quibus puncta E, Z ferantur. quoniam itaque [ex hyp.] circumferentia Δ E æqualis eſt circumferentiæ Z B, communis addatur E B: tota igitur Δ E B toti B B Z æqualis eſt. eſt autem Δ E B ſemicirculi circumferentia: & E B Z igitur ſemicirculi circumferentia eſt: per diametrum igitur eſt punctum E puncto Z. & quoniam circumferentia E Δ æqualis eſt ipſi Δ M, & circumferentia Z B æqualis eſt ipſi B N; ſed & circumferentia Δ E æqualis eſt ipſi Z B: quare & circumferentia Δ M æqualis eſt ipſi B N. communis addatur circumferentia M B: tota igitur Δ M B toti M B N æqualis eſt. eſt autem & circumferentia Δ M B ſemicirculus; & igitur ſemicirculus eſt etiam circumferentia M B N: quare punctum M per diametrum eſt ipſi N poſitum. & quoniam puncta quæ in circulo zodiaco ſunt per diametrum poſita [per 6.Phæn.] conjugate oriuntur & occidunt: puncto igitur Δ oriente in Δ, & punctum B ipſi per diametrum poſitum occidit in puncto B; & puncto E oriente in puncto Θ, & punctum Z quod ipſi eſt per diametrum occidit in puncto K; quinetiam N puncto oriente in puncto Λ, & ipſi per diametrum poſitum M punctum occidit in puncto H; & etiam B oriente in puncto Γ, & ipſi per diametrum Δ occidit in puncto A: quando igitur zodiacus circulus meridiem verſus cum ortibus mutaverit ſeſe, tunc & cum occaſibus ad ſeptentriones tranſmutatus apparet. dico etiam quod quando cum ortibus ad ſeptentriones ſe tranſmutaverit, tunc cum occaſibus ad meridiem tranſmutatus apparet. oriente namque Δ E B ſemicirculo, circulus zodiacus poſitionem habebit A Ξ Γ. & ſimiliter demonſtrabitur quod punctum Ξ per diametrum eſt ipſi O; & punctum P per diametrum eſt puncto Π. & quoniam puncto Γ oriente in Γ puncto, punctum A ipſi Γ per diametrum poſitum occidit in puncto A; & O oriente in puncto Λ, & punctum Ξ ipſi per diametrum poſitum occidit in puncto H; quinetiam Π oriente in Θ puncto, & P punctum ipſi per diametrum poſitum occidit in puncto K; & adhuc puncto A oriente in Δ puncto, punctum Γ per diametrum ipſi A occidit in puncto B: quando igitur zodiacus circulus ſeptentrionem verſus cum ortibus ſe mutaverit, tunc & cum occaſibus meridiem verſus mutatus apparet. eſt autem demonſtratum quod quando ſe mutat meridiem verſus cum ortibus, tunc quoque cum occaſibus ſeptentrionem verſus mutatus apparet. ac manifeſtum quoque eſt quod alio modo atque alio ſe habet ſupra nos. nam quando zodiaci circuli contactus fuerit in medio puncto ſegmenti æſtivi tropici quod eſt ſupra terram, tunc maxime rectus eſt ad nos: quando vero

fuerit

fuerit zodiaci contactus in medio puncto ſegmenti æſtivi tropici quod eſt ſub terram, tunc maxime inclinatus erit ad nos. & ſemper quo longius diſtat contactus à medio puncto, ad nos magis erit inclinatus: ſimiliter autem inclinatus erit, cum contactus ab alterutro medio puncto æquidiſtans fuerit.

τῆς διχοτομίας ὃ ὑπὸ γῆν τμήματος τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ, πανεινότατος ἔσται πρὸς ἡμᾶς. καὶ αἰεὶ μᾶλλον πρόσωπον γινόμενος τῆ διχοτομίας τὸ ὑπὲρ γῆς τμήματος τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ, μᾶλλον ἔσται κεκλιμένος· ὁμοίως δὲ ἔσται κεκλιμένος, ὅταν ἀπέχον ἑκατέρας τῶν διχοτομιῶν.

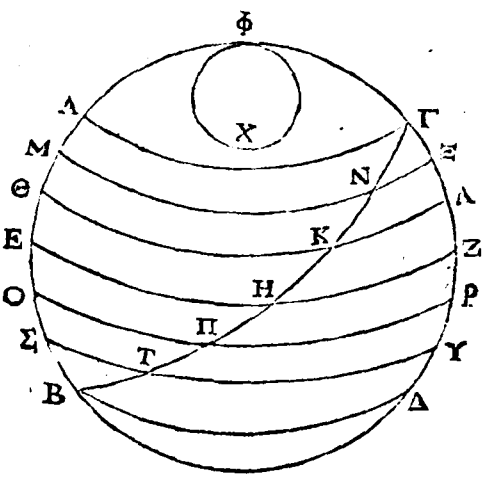
THEOREMA VIII.

Zodiaci circuli ſigna in ſegmentis horizontis inæqualibus oriuntur & occidunt: atque in maximis quidem, quæ prope æquinoctialem circulum ſunt; in minoribus, quæ deinceps ſequuntur; in minimis vero, quæ prope tropicos circulos ſunt; denique in ſegmentis æqualibus, quæ ab æquinoctiali circulo æque diſtant.

ΘΕΩΡΗΜΑ η'.

Τὰ ζώδια ἐν ἀνίσοις τμήμασι τοῦ ὁρίζοντος ἀνατέλλει τε καὶ δύνει· καὶ ἐν μείζοσι μὲν τὰ πρὸς τῷ ἰσημερινῷ· ἐν ἐλάττοσι δὲ τὰ ἑξῆς τούτων· ἐν ἐλαχίστοις δὲ τὰ πρὸς τοῖς τροπικοῖς· ἐν ἴσοις δὲ τὰ ἴσον ἀπέχοντα τοῦ ἰσημερινοῦ κύκλου.

SIT horizon circulus ΑΒΓΔ, tropici autem ſint ΑΓ, ΒΔ, maximus vero ſemper-apparentium circulorum ſit circulus ΦΧ, zodiacus circulus poſitionem habeat ΓΒ, æquinoctialis circulus ſit ΕΖ; & dividatur utraque circumferentia ΓΗ, ΗΒ in tres partes æquales in punctis Ν, Κ, Π, Τ: dico quod circumferentiæ ΓΝ, ΝΚ, ΚΗ, ΗΠ, ΠΤ, ΤΒ in ſegmentis horizontis inæqualibus & oriuntur & occidunt; & quod circumferentiæ ΚΗ, ΗΠ in maximis; & ΚΝ, ΠΤ in minoribus; in minimis autem circumferentiæ ΓΝ, ΒΤ; at in æqualibus ipſæ ΚΗ, ΗΠ; ΚΝ, ΠΤ; & denique ΝΓ, ΤΒ, & oriuntur & occidunt.



Sint quidem circuli paralleli ΜΞ, ΘΛ, ΟΡ, ΣΥ, in quibus puncta Ν, Κ, Π, Τ ferantur. quoniam igitur [per conſtr.] circumferentiæ ΗΚ, ΚΝ, ΝΓ æquales invicem ſunt; circumferentiæ ΖΛ, ΛΞ, ΞΓ majores invicem ſunt, initium ſumentes à maxima circumferentia ΖΛ. eadem ratione etiam circumferentiæ ΕΘ, ΘΜ, ΜΑ majores quoque ſunt invicem, initium ſumentes à maxima circumferentia ΕΘ: quinetiam & ipſæ ΖΡ, ΡΤ, ΤΔ majores etiam invicem ſunt, initium ſumentes à maxima circumferentia ΖΡ; & denique circumferentiæ ΕΟ, ΟΣ, ΣΒ majores invicem ſunt, initium ſumentes à maxima circumferentia ΕΟ. & quoniam circumferentiæ ΓΝ, ΝΚ, ΚΗ, ΗΠ, ΠΤ, ΤΒ oriuntur quidem in circumferentiis ΓΞ, ΞΛ, ΛΖ, ΖΡ, ΡΥ, ΥΔ; occidunt autem in circumferentiis ΑΜ, ΜΘ, ΘΕ, ΕΟ, ΟΣ, ΣΒ: quare in ſegmentis horizontis inæqualibus dictæ circumferentiæ & oriuntur & occidunt. & quoniam circuli paralleli ΘΛ, ΟΡ maximi cujuſdam circuli ΓΒ circumferentias ΠΗ, ΗΚ æquales auferunt ad ma-

Ἔστω ὁρίζων κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, τροπικοὶ δὲ οἱ ΑΓ, ΒΔ, μέγιστος δὲ τῶν ἀεὶ φαινομένων ὁ ΦΧ, ὁ δὲ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω τὴν ΓΒ, ἰσημερινὸς δὲ κύκλος ὁ ΕΖ, καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα τῶν ΓΗ, ΗΒ εἰς τρία ἴσα κατὰ τὰ Ν, Κ, Π, Τ σημεῖα· λέγω ὅτι καὶ αἱ ΓΝ, ΝΚ, ΚΗ, ΗΠ, ΠΤ, ΤΒ περιφέρειαι ἐν ἀνίσοις τμήμασι τοῦ ὁρίζοντος ἀνατέλλουσί τε καὶ δύνουσι, καὶ ἐν μείζοσι μὲν αἱ ΚΗ, ΗΠ, ἐν ἐλάττοσι δὲ αἱ ΚΝ, ΠΤ, ἐν ἐλαχίστοις δὲ αἱ ΓΝ, ΒΤ, ἐν ἴσοις δὲ ἡ μὲν ΚΗ τῇ ΗΠ, ἡ δὲ ΚΝ τῇ ΠΤ, ἡ δὲ ΝΓ τῇ ΤΒ.

Ἐπεὶ οὖν φέρεται τὰ Ν, Κ, Π, Τ σημεῖα ταῖς παραλλήλοις κύκλοις οἷς ΜΞ, ΘΛ, ΟΡ, ΣΥ. ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΗΚ, ΚΝ, ΝΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· αἱ ΖΛ, ΛΞ, ΞΓ ἄρα μείζονές εἰσιν ἀλλήλων ἀρχόμεναι ἀπὸ μείζονος τῆς ΖΛ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ μὴν ΕΘ, ΘΜ, ΜΑ μείζονές εἰσιν ἀλλήλων ἀρχόμεναι ἀπὸ μείζονος τῆς ΕΘ· καὶ ἔτι αἱ μὲν ΖΡ, ΡΥ, ΥΔ μείζονές εἰσιν ἀλλήλων ἀρχόμεναι ἀπὸ μείζονος τῆς ΖΡ, καὶ ἔτι αἱ ΕΟ, ΟΣ, ΣΒ μείζονές εἰσιν ἀλλήλων ἀρχόμεναι ἀπὸ μείζονος τῆς ΕΟ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΓΝ, ΝΚ, ΚΗ, ΗΠ, ΠΤ, ΤΒ ἀνατέλλουσι μὲν κατὰ τὰς ΓΞ, ΞΛ, ΛΖ, ΖΡ, ΡΥ, ΥΔ περιφερείας, δύνουσι δὲ κατὰ τὰς ΑΜ, ΜΘ, ΘΕ, ΕΟ, ΟΣ, ΣΒ· ὥστε ἐν ἀνίσοις τμήμασι τοῦ ὁρίζοντος ἀνατέλλουσί τε καὶ δύνουσι. καὶ ἐπεὶ παράλληλοι αἱ ΘΛ, ΟΡ μείζονός τινος κύκλου περιφερείας τῆς ΓΒ τὰς ΠΗ, ΗΚ ἴσας ἀφαιροῦσι πρὸς τὸν μείζονα

τῶν

τῶν ωδαλλήλων τὸν ΕΖ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΘΛ κύκλος τῷ ΟΡ κύκλῳ. ἐπεὶ ἓν ἐν σφαίρᾳ ἴσοι τε καὶ ωδάλληλοι κύκλοι οἱ ΘΛ, ΟΡ μείζονός τινος κύκλου περιφερείας τὰς ΑΒΓΔ τὰς ΛΖ, ΖΡ ἀφαιροῦσι πρὸς τὸν μέγιστον τῶν ωδαλλήλων τὸν ΕΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΖ τῇ ΖΡ περιφερεία. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΞΖ περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ ΖΥ περιφερείᾳ, ὧν ἡ ΛΖ τῇ ΖΡ ἐστιν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΞΛ λοιπῇ τῇ ΡΥ ἐστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΞ ἴση ἐστὶ τῇ ΥΔ.

Τὰ ἄρα ζώδια ἐν ἀνίσοις τμήμασι τοῦ ὁρίζοντος ἀνατέλλει τε καὶ δύσει· καὶ ἐν μείζοσι μὲν τὰ πρὸς τῷ ἰσημερινῷ· ἐν ἐλάττοσι δὲ τὰ ἐξῆς τούτων· ἐν ἐλαχίστοις δὲ τὰ πρὸς τοῖς τροπικοῖς· ἐν ἴσοις δὲ τὰ ἴσον ἀπέχοντα τοῦ ἰσημερινοῦ κύκλου.

ximum parallelorum EZ: circulus igitur ΘΛ circulo OP æqualis eſt. quoniam autem in ſphæra æquales & paralleli circuli ΘΛ, OP maximi cujuſdam circuli ABΓΔ circumferentias, ſcilicet ΛZ, ZP auferunt apud maximum parallelorum EZ: æqualis igitur eſt circumferentia ΛZ circumferentiæ ZP. ſimiliter itaque demonſtrabitur quod & circumferentia ΞZ eſt æqualis circumferentiæ ZΥ; ex quibus ipſa ΛZ æqualis eſt ipſi ZP; & reliqua igitur ΞΛ reliquæ PΥ eſt æqualis. eadem ratione & circumferentia ΓΞ æqualis eſt ipſi ΥΔ.

Quare zodiaci circuli ſigna in ſegmentis horizontis inæqualibus & oriuntur & occidunt: & in maximis quidem quæ prope circulum æquinoctialem ſunt; in minoribus, quæ deinceps ſequuntur; in minimis porro, quæ ſunt prope circulos tropicos; denique in ſegmentis æqualibus, quæ ab æquinoctiali circulo æque diſtant.

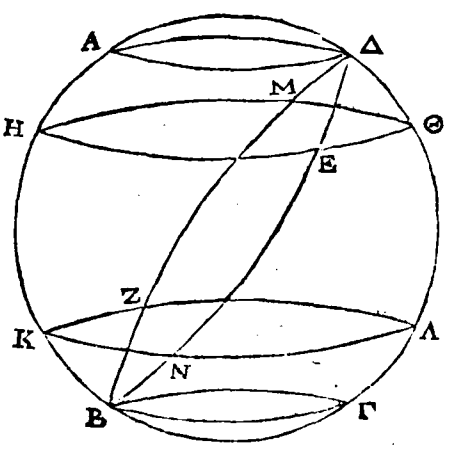
ΘΕΩΡΗΜΑ θ'.

Τοῦ τῶ ζωδίων κύκλου τὰ ἡμικύκλια, ὅσα μὴ τὰς ἀρχὰς ἔχει ὅπου τοῦ αὐτοῦ τῶ ωδαλλήλων, ἐν ἀνίσοις χρόνοις ἀνατέλλει ὅλα· καὶ ἐν πλείονι μὲν τὸ μετὰ τὸ καρκῖνον, ἐν ἐλάττονι δὲ, τὰ ἐξῆς τούτου· ἐν ἐλαχίστοις δὲ τὸ μετὰ τὸν αἰγόκερω· ὅσα δὲ τὰς ἀρχὰς ἔχει ὅπου τοῦ αὐτοῦ τῶ ωδαλλήλων, ἐν ἴσοις χρόνοις ἀνατέλλει.

THEOREMA IX.

Zodiaci ſemicirculi, quicunque non habent initium ab eodem parallelo circulo, univerſi temporibus oriuntur inæqualibus: ac majori quidem tempore oritur ſemicirculus, qui poſt cancrum eſt; minori vero, qui hunc deinceps ſequuntur: in minimis porro qui eſt poſt capricornum; qui autem initium habent ab eodem parallelo, æqualibus temporibus oriuntur.

Ἔστω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ ΑΒΓΔ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ἔστω ὁ ΑΔ, χειμερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ ΒΓ, ὁ δὲ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω τὴν ΔΕΒΖ, ἧς ἔστω ἀνατολικὰ μὲν τὰ Γ, Δ μέρη, δυτικὰ δὲ τὰ Α, Β, καὶ τὸ μὲν ΔΕΒ ἔστω τὸ μετὰ τὸν καρκῖνον ἡμικύκλιον, τὸ δὲ ΒΖΔ τὸ μετὰ τὸν αἰγόκερω· λέγω ὅτι τοῦ τῶν ζωδίων κύκλου τὰ ἡμικύκλια, ὅσα μὴ τὰς ἀρχὰς ἔχει ὅπου τοῦ αὐτοῦ τῶ ωδαλλήλων, ἐν ἀνίσοις χρόνοις ἀνατέλλει, καὶ ἐν πλείονι μὲν τὸ μετὰ τὸν καρκῖνον τὸ ΔΕΒ, ἐν ἐλάττονι δὲ τὰ ἐξῆς τούτου, ἐν ἐλαχίστῳ δὲ τὸ μετὰ τὸν αἰγόκερω τὸ ΒΖΔ, ὅσα δὲ τὰς ἀρχὰς ἔχει ὅπου τοῦ αὐτοῦ τῶ ωδαλλήλων ἐν ἴσοις χρόνοις ἀνατέλλει.

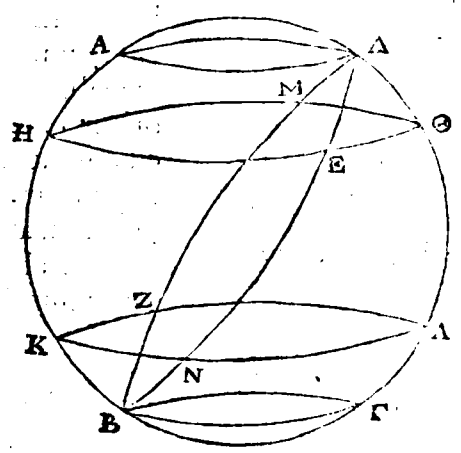


SIT in mundo circulus horizon ABΓΔ; tropicus æſtivus ſit AΔ, hybernus autem ſit BΓ; zodiacus vero circulus poſitionem habeat veluti ΔEBZ; ſint autem partes orientales Γ, Δ puncta, occidentales vero A, B; & ſit ſemicirculus ΔEB poſt cancrum, & ſemicirculus BZΔ poſt capricornum: dico quod ſemicirculi zodiaci, quicunque non habent initium ab eodem parallelo circulo, temporibus oriuntur inæqualibus; & majori tempore oritur ſemicirculus quidem ΔEB, qui eſt poſt cancrum; minori vero qui deinceps ſequitur; at minimo tempore oritur ſemicirculus BZΔ, qui eſt poſt capricornum; quicunque porro initium habent ab eodem parallelo circulo, æqualibus temporibus oriuntur.

Ἀπειλήφθωσαν ἴσαι περιφέρειαι αἱ ΔΕ, ΒΖ, καὶ γεγράφθωσαν ωδάλληλοι κύκλοι ΗΕΘΜ, ΚΖΛΝ, καθ' ὧν φέρεσθω τὰ Ε, Ζ σημεῖα, ἧς ἔστω αὐτῶν τὰ ὑπὲρ γῆς τμήματα τὰ ΗΜΘ, ΚΖΛ. ὁμοίως δὴ δείξομεν τοῖς πρότερον ὅτι κατὰ διάμετρόν ἐστι τὸ μὲν Ε σημεῖον τῷ Ζ σημείῳ, τὸ δὲ Μ τῷ

Sumantur æquales circumferentiæ ΔE, BZ; & deſcribantur circuli paralleli HEΘM, KZΛN, in quibus puncta E, Z ferantur; ſintque ſegmenta HMΘ, KZΛ ſupra terram. ſimiliter itaque demonſtrari poterit ac ſuperius [ad 7. Phæn.] quod punctum E per diametrum eſt ipſi Z, & punctum M

per diametrum eſt puncto N. & quoniam circumferentia Α Δ major eſt circumferentia Η Μ Θ quam ut ei ſimilis ſit; & Η Μ Θ major etiam eſt ipſa Κ Ζ Λ quam ut ei ſimilis ſit; quinetiam ipſa Κ Ζ Λ major eſt circumferentia Β Γ quam ut ei ſimilis ſit: majori igitur tempore punctum Δ incipiens à Δ circumferentiam Δ Α percurrit, quam punctum Ε inchoans à puncto Θ circumferentiam Θ Μ Η pertranſit; & punctum Ε incipiens à Θ majori tempore percurrit circumferentiam Θ Μ Η, quam punctum Ν inchoans à puncto Λ circumferentiam Λ Ζ Κ pertranſit; quinetiam punctum Ν inchoans à puncto Λ majori tempore percurrit circumferentiam Λ Ζ Κ, quam Β incipiens à puncto Γ circumferentiam Γ Β pertranſit. ſed quo quidem tempore punctum Δ circumferentiam Δ Α percurrit, hoc ipſo tempore punctum Β per diametrum ipſi Δ poſitum percurrit alternam circumferentiam Β Γ, & oritur quidem ſemicirculus Δ Ε Β; & quo tempore punctum Ε incipiens à puncto Θ circumferentiam Θ Μ Η percurrit, hoc ipſo tempore ipſi per diametrum poſitum Ζ incipiens à puncto Κ circumferentiam Κ Ν Α percurrit, & ſemicirculus Ε Β Ζ oritur; quinetiam quo tempore punctum Ν incipiens à puncto Λ circumferentiam Λ Ζ Κ pertranſit, hoc ipſo tempore & punctum Μ ipſi per diametrum poſitum incipiens à puncto Η circumferentiam Η Ε Θ percurrit, & ſemicirculus Ν Β Μ oritur; & etiam quo tempore punctum Β incipiens à puncto Γ circumferentiam Γ Β pertranſit, hoc ipſo tempore & punctum Δ ipſi per diametrum poſitum, inchoans à puncto Α circumferentiam alternam Α Δ percurrit, & ſemicirculus Β Ζ Δ oritur: quare ſemicirculus Δ Ε Β, qui eſt poſt cancrum, majori tempore oritur; ſed minori tempore oritur Ε Β Ζ quam Δ Ε Β; quinetiam minori tempore Ν Β Μ oritur quam ſemicirculus Ε Β Ζ; at vero minimo tempore oritur ſemicirculus Β Ζ Δ qui eſt poſt capricornum.



Dico etiam quod quicunque initium habent ab eodem circulo parallelo, æqualibus temporibus oriuntur. habeant ſiquidem ſemicirculi Μ Δ Ν, Ε Β Ζ initium ab eodem circulo parallelo: dico quod æqualibus temporibus oriuntur Μ Δ Ν, Ε Β Ζ.

Quoniam enim æquali tempore punctum Μ inchoans à puncto Θ circumferentiam Θ Μ Η percurrit, atque punctum Ε ſimiliter inchoans à puncto Θ circumferentiam Θ Μ Η pertranſit: ſed quo tempore punctum Μ incipiens a puncto Θ circumferentiam Θ Μ Η percurrit, hoc ipſo tempore & punctum Ν ipſi per diametrum poſitum incipiens à puncto Κ circumferentiam Κ Ν Λ pertranſit, & oritur Μ Δ Ν ſemicirculus; & quo tempore punctum Ε inchoans à puncto Θ circumferentiam Θ Μ Η percurrit, hoc ipſo tempore & punctum Ζ ipſi per diametrum poſitum

Ν. Ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ὁμοία ἡ Α Δ περιφέρεια τῆς Η Μ Θ περιφερείας, ἡ δὲ Η Μ Θ τῆς Κ Ζ Λ, ἡ ἄρα Κ Ζ Λ τῆς Β Γ· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ τὸ Δ σημεῖον ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Δ τὴν Δ Α περιφέρειαν διαπορεύεται, ἤπερ τὸ Ε ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Θ τὴν Θ Μ Η περιφέρειαν διαπορεύεται· καὶ τὸ Ε ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Θ ἐν πλείονι χρόνῳ τὴν Θ Μ Η περιφέρειαν διαπορεύεται, ἤπερ τὸ Ν ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Λ τὴν Λ Ζ Κ περιφέρειαν διαπορεύεται· καὶ τὸ Ν ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Λ ἐν πλείονι χρόνῳ τὴν Λ Ζ Κ περιφέρειαν διαπορεύεται, ἤπερ τὸ Β ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Γ τὴν Γ Β περιφέρειαν διαπορεύεται. ἀλλὰ ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ τὸ Δ σημεῖον τὴν Δ Α περιφέρειαν διαπορεύεται, ἐν τούτῳ τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Β σημεῖον τὴν ἐναλλὰξ τὴν Β Γ περιφέρειαν διαπορεύεται, καὶ ἀνατέλλει τὸ Δ Ε Β ἡμικύκλιον· ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ τὸ Ε ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Θ τὴν Θ Μ Η περιφέρειαν διαπορεύεται, ἐν τούτῳ τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Ζ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Κ τὴν Κ Ν Α περιφέρειαν διαπορεύεται, καὶ ἀνατέλλει τὸ Ε Β Ζ ἡμικύκλιον· ἐν ᾧ δὴ χρόνῳ τὸ Ν ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Λ τὴν Λ Ζ Κ διαπορεύει, ἐν τούτῳ τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Μ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Η τὴν Η Ε Θ διαπορεύεται, καὶ ἀνατέλλει Ν Β Μ ἡμικύκλιον· ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ τὸ Β ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Γ τὴν Γ Β διαπορεύεται, ἐν τούτῳ τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Δ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Α τὴν ἐναλλὰξ τὴν Α Δ διαπορεύεται, καὶ ἀνατέλλει τὸ Β Ζ Δ ἡμικύκλιον· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἀνατέλλει τὸ μετὰ τοῦ καρκίνου ἡμικύκλιον τὸ Δ Ε Β, ἐν ἐλάσσονι δὲ τοῦ Δ Ε Β τὸ Ε Β Ζ, καὶ ἔτι τοῦ Ε Β Ζ ἐν ἐλάσσονι τὸ Ν Β Μ, ἐν ἐλαχίστῳ δὲ τὸ μετὰ τοῦ αἰγόκερω τὸ Β Ζ Δ.

Λέγω ὅτι ὅσα τὰς ἀρχὰς ἔχει ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ τῶν ἀλλήλων, ἐν ἴσοις χρόνοις ἀνατέλλει. ἐκκείσθω γὰρ τὰ Μ Δ Ν, Ε Β Ζ ἡμικύκλια τὰς ἀρχὰς ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ τῶν ἀλλήλων· λέγω ὅτι ἐν ἴσοις χρόνοις ἀνατέλλει τὰ Μ Δ Ν, Ε Β Ζ ἡμικύκλια.

Ἐπεὶ γὰρ ἐν ἴσῳ χρόνῳ τὸ Μ σημεῖον ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Θ τὴν Θ Μ Η περιφέρειαν διαπορεύεται, καὶ τὸ Ε ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Θ τὴν Θ Μ Η περιφέρειαν διαπορεύεται· ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ τὸ Μ σημεῖον ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Θ τὴν Θ Μ Η διαπορεύεται, ἐν τούτῳ τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Ν ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Κ τὴν Κ Ν Λ περιφέρειαν διαπορεύεται, καὶ ἀνατέλλει τὸ Μ Δ Ν ἡμικύκλιον· ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ τὸ Ε σημεῖον ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Θ σημείου τὴν Θ Μ Η περιφέρειαν διαπορεύεται, ἐν τούτῳ τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Ζ ἀρξά-

ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Κ τοῦ ΚΝΛ περιφερείαν διαπερήσεται, καὶ ἀνατελεῖ τὸ ΕΒΖ ἡμικύκλιον· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ ἀνατέλλει καὶ τὰ ΜΔΝ, ΕΒΖ ἡμικύκλια.

incipiens à puncto K circumferentiam KNΛ pertranſit, & ſemicirculus EBZ oritur: quare tempore æquali ſemicirculi MΔN, EBZ oriuntur.

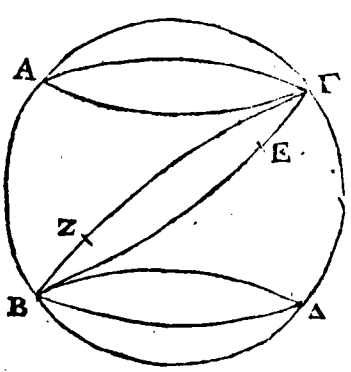
ΘΕΩΡΗΜΑ ι'.

Ἐὰν ᾖ τοῦ ζωδίου κύκλου δύο ἡμικύκλια ἀνατέλλῃ ἐν ἀνίσοις, χρόνοις, κοινόν τινα ἔχοντα περιφέρειαν· καὶ αἱ ἀπεναντίον περιφέρειαι ἐν ἀνίσοις χρόνοις ἀνατέλλουσιν, καὶ αἱ αὐταὶ διαφοραὶ ἔσονται τῶν χρόνων ἐν οἷς ταῦτα ἡμικύκλια ἀνατέλλει καὶ αἱ ἀπεναντίον περιφέρειαι. καὶ ἐὰν ᾖ τῶν ζωδίων κύκλου δύο ἡμικύκλια ἐν ἴσοις χρόνοις ἀνατέλλῃ, κοινόν τινα ἔχοντα περιφέρειαν· καὶ αἱ ἀπεναντίον περιφέρειαι ἐν ἴσοις χρόνοις ἀνατέλλουσι.

THEOREMA X.

Si duo zodiaci ſemicirculi, communem aliquam habentes circumferentiam, temporibus inæqualibus oriuntur: & oppoſitæ circumferentiæ temporibus quoque inæqualibus oriuntur; atque eædem erunt temporum differentiæ, in quibus & ſemicirculi & oppoſitæ circumferentiæ oriuntur. quod ſi duo zodiaci ſemicirculi, communem aliquam etiam habentes circumferentiam, temporibus æqualibus oriuntur; & oppoſitæ circumferentiæ temporibus quoque æqualibus oriuntur.

Ἔστω ὁρίζων ὁ ΑΒΔΓ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ὁ ΑΓ, χειμερινὸς δὲ ὁ ΒΔ, ζωδιακὸς δὲ ὁ ΓΒ, καὶ ἀπειλήφθωσαν ἴσαι περιφέρειαι αἱ ΓΕ, ΒΖ· τὰ ἄρα ΓΕΒ, ΕΒΖ ἡμικύκλια ἐν ἀνίσοις χρόνοις ἀνατέλλει. λέγω ὅτι καὶ αἱ ΓΕ, ΒΖ περιφέρειαι ἐν ἀνίσοις χρόνοις ἀνατέλλουσιν.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΓΕΒ τοῦ ΕΒΖ ἐν πλείονι χρόνῳ ἀνατέλλει, κοινὸς ἀφῃρήσθω ὁ τοῦ ΕΒ περιφερείας ἀνατολῆς χρόνος· (ἡ γὰρ ΕΒ περιφέρεια ἑαυτῇ αἰεὶ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἀνατέλλει) λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΕ τοῦ ΒΖ ἐν πλείονι χρόνῳ ἀνατέλλει. καὶ φανερὸν ὅτι αἱ αὐταὶ διαφοραί εἰσι τῶν χρόνων ἐν οἷς ταῦτα ΓΕΒ, ΕΒΖ ἡμικύκλια ἀνατέλλει, καὶ αἱ ἀπεναντίον περιφέρειαι αἱ ΓΕ, ΒΖ. φανερὸν δὲ ὅτι κἂν ἡμικύκλιά τινα ἐν ἴσοις χρόνοις ἀνατέλλῃ, καὶ αἱ ἀπεναντίον περιφέρειαι ἐν ἴσοις χρόνοις ἀνατέλλουσιν.

SIT horizon circulus ABΔΓ; tropicus æſtivus ſit AΓ, hybernus ſit BΔ; zodiacus circulus ſit ΓB; & ſumantur zodiaci circuli æquales circumferentiæ ΓE, BZ: ſemicirculi igitur ΓEB, EBZ temporibus inæqualibus oriuntur. dico quod & circumferentiæ ΓE, BZ etiam temporibus inæqualibus oriuntur.

Quoniam enim [per 6 Ph.] ΓEB ſemicirculus majori tempore oritur quam ipſe EBZ, commune auferatur tempus quo circumferentia EB oritur: (ſemper ſiquidem ipſa æquali tempore ſibi ipſi oritur) quare & reliqua ΓE majori tempore oritur quam ipſa BZ. ac manifeſtum eſt quod eædem ſunt temporum differentiæ, in quibus & ſemicirculi ΓEB, EBZ oriuntur & circumferentiæ ΓE, BZ. & patet etiam, ſi ſemicirculi quidam æqualibus temporibus oriuntur, quod & in iis circumferentiæ oppoſitæ æqualibus quoque temporibus oriuntur.

ΘΕΩΡΗΜΑ ια'.

Τοῦ τοῦ ζωδίου κύκλου τῶν ἴσων τε καὶ ἀπεναντίον περιφερειῶν ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ἑτέρα ἀνατέλλει, ἡ ἑτέρα δύνει· ἐν ᾧ δὲ ἡ ἑτέρα δύνει, ἡ ἑτέρα ἀνατέλλει.

THEOREMA XI.

Ex æqualibus & oppoſitis zodiaci circumferentiis, quo tempore una oritur, altera occidit: & quo tempore una occidit, altera oritur.

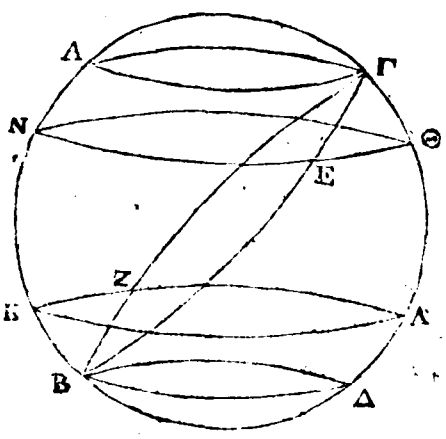
Ἔστω ὁρίζων κύκλος ὁ ΑΒΔΓ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ἔστω ὁ ΑΓ, χειμερινὸς δὲ ὁ ΒΔ, ζωδιακὸς δὲ ἔστω ὁ ΓΒ, καὶ ἀπειλήφθωσαν ἐπ' αὐτοῦ ἴσαι καὶ ἀπεναντίον περιφέρειαι αἱ ΓΕ, ΒΖ· λέγω ὅτι ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΓΕ ἀνατέλλει, ἡ ΒΖ δύνει.

Ἐκκείσθωσαν καθ' ὧν φέρεται τὰ Ε, Ζ σημεῖα παράλληλοι κύκλοι οἱ ΝΘ, ΚΛ. καὶ ἐπεὶ τὰ ὑπὸ τοῦ ζωδιακοῦ ἄστρα κατὰ διάμετρον ὄντα κατὰ

SIT horizon circulus ABΔΓ; æſtivus tropicus ſit AΓ, hybernus autem ſit BΔ, zodiacus circulus ſit ΓB; & ſumantur in zodiaco circulo æquales & oppoſitæ circumferentiæ ΓE, BZ: dico quod quo tempore ΓE circumferentia oritur, & BZ occidit.

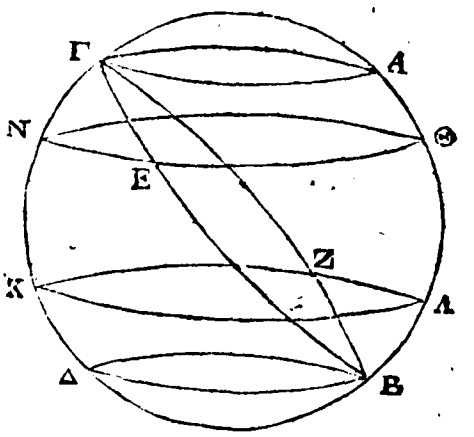
Sint autem circuli NΘ, KΛ paralleli in quibus puncta E, Z ferantur. & quoniam [per 6. Phæn.] aſtra, quæ in circulo zodiaco ſunt per

diametrum posita, conjugate & oriuntur & occidunt; quare astro E oriente, & Z occidit: quo igitur tempore astrum E incipiens à puncto E circumferentiam E Θ percurrens pervenit ad punctum Θ, hoc ipso tempore & astrum Z incipiens à puncto Z circumferentiam Z K percurrens pervenit ad punctum K. verum quando E circumferentiam E Θ percurrens pervenit ad punctum Θ, tunc ipsa Γ E oritur; quando vero astrum Z percurrens ipsam Z K pervenit ad K punctum, tunc circumferentia B Z occidit: quare quo tempore Γ E oritur, hoc ipso tempore B Z circumferentia occidit.



συζυγίαν ἀνατέλλει τι καὶ δύνει, τῷ Ε ἄρα ἀνατέλλοντος τὸ Ζ δύνει· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Ε ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Ε τὴν Ε Θ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Θ καταγίνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Ζ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Ζ τὴν Ζ Κ διελθὸν ἐπὶ τὸ Κ καταγίνεται. ἀλλ' ὅταν μὲν τὸ Ε τὴν Ε Θ διελθὸν ἐπὶ τὸ Θ καταγίνηται, ἀνατέλλει ἡ ΕΓ· ὅταν δὲ τὸ Ζ τὴν Ζ Κ διελθὸν ἐπὶ τὸ Κ καταγίνηται, δύνει ἡ ΒΖ περιφέρεια· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ ΓΕ περιφέρεια ἀνατέλλει, ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΒΖ περιφέρεια δύνει.

Dico etiam quod quo tempore circumferentia B Z oritur, & Γ E occidit. circumvolvatur namque zodiacus circulus, ut se habet in secunda figura, & habeat positionem veluti Γ E B Z: dico quod quo tempore circumferentia B Z oritur, & Γ E occidit. quoniam enim punctum Z est per diametrum ipsi E; quare Z oriente, & E occidit: quo igitur tempore Z circumferentiam Z A percurrens pervenit ad punctum A, hoc eodem tempore & E circumferentiam E N percurrens pervenit ad punctum N. sed quando Z circumferentiam Z A percurrens pervenit ad A, tunc ipsa B Z oritur; quando autem E circumferentiam E N percurrens pervenit ad N, tunc ipsa Γ E occidit: quare quo tempore B Z oritur, hoc ipso tempore & Γ E occidit.



Λ Ε Γ Ω ὅτι καὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ Β Ζ ἀνατέλλει ἡ Γ Ε δύνει. μετακεκινήθω γὰρ ἐν τῇ δευτέρᾳ πλάσει ὁ τῶν ζῳδίων κύκλος, καὶ ἔστω ἐχέτω τὴν Γ Ε Β Ζ· λέγω ὅτι ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ Β Ζ ἀνατέλλει, ἡ Γ Ε δύνει. ἐπεὶ γὰρ κατὰ διάμετρόν ἐστι τὸ Ζ σημεῖον τῷ Ε σημείῳ, τῷ ἄρα Ζ ἀνατέλλοντι τὸ Ε δύνει· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Ζ τὴν Ζ Α περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Α καταγίνεται, ἐν τούτῳ ἐστὶ τὸ Ε τὴν Ε Ν περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ν καταγίνεται. ἀλλ' ὅταν μὲν τὸ Ζ τὴν Ζ Α περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Α καταγίνῃ, ἀνατέλλει ἡ Β Ζ· ὅταν δὲ τὸ Ε τὴν Ε Ν περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ν καταγίνηται, δύνει ἡ Γ Ε· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ Β Ζ περιφέρεια ἀνατέλλει, ἐν τούτῳ ἡ Γ Ε περιφέρεια δύνει.

Theorema XII.

Semicirculi, *qui post cancrum est, circumferentiæ æquales temporibus occidunt inæqualibus; atque in maximis quidem, quæ prope contactus sunt tropicorum; in minoribus, quæ has deinceps sequuntur; in minimis autem, quæ prope æquinoctialem sunt circulum: denique temporibus æqualibus oriuntur & occidunt, quæ ab æquinoctiali circulo æqualiter distant.

Sit horizon circulus A B Γ Δ; maximus autem eorum qui semper apparent sit circulus E Z, æstivus tropicus sit A B, hybernus autem sit Δ Γ; & sit post cancrum semicirculus B Δ supra terram, æquinoctialis circulus sit H Θ, & dividatur utraque circumferentia B Ξ, Ξ Δ in tres partes æquales in punctis K, Λ, M, N: dico quod circumferentiæ B K, K Λ, Λ Ξ, Ξ M, M N, N Δ in inæqualibus

Θεώρημα ιβ'.

Τῶν * μετὰ τὸν καρκῖνον ἡμικυκλίων αἱ ἴσας περιφέρειαι ἐν ἀνίσοις χρόνοις δύνουσιν, καὶ ἐν πλείστοις μὲν αἱ πρὸς ταῖς συναφαῖς τῶν τροπικῶν, ἐν ἐλάσσοσι δὲ αἱ ἑξῆς τούτων, ἐν ἐλαχίστοις δὲ αἱ πρὸς τῷ ἰσημερινῷ· ἐν ἴσοις δὲ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ ἰσημερινοῦ κύκλου καὶ δύνουσι καὶ ἀνατέλλουσιν.

Ἔστω ὀρίζων κύκλος ὁ Α Β Γ Δ, μέγιστος δὲ τῶν ἀεὶ φαινομένων ὁ Ε Ζ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ὁ Α Β, χειμερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ Δ Γ, καὶ ἔστω τοῦ μετὰ τὸν καρκῖνον ἡμικυκλίου τὸ Β Δ ὑπὲρ γῆς, ἰσημερινὸς δὲ κύκλος ὁ Η Θ, καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα τῶν Β Ξ, Ξ Δ εἰς τρία ἴσα κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν σημεῖα· λέγω ὅτι αἱ Β Κ, Κ Λ, Λ Ξ, Ξ Μ, Μ Ν, Ν Δ ἐν ἀνίσοις χρόνοις δύνουσι

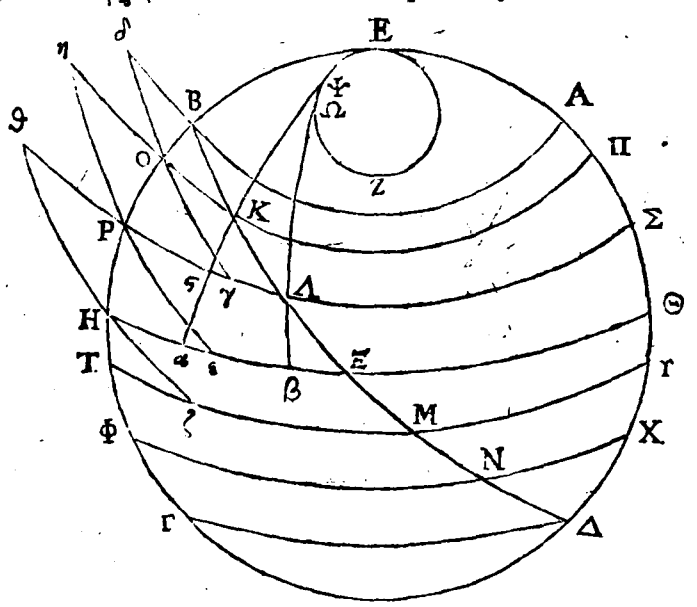
* Hoc est incipiens à cancro, & secundum seriem signorum productus.

δυσὶν, καὶ ἐν πλείοσις μὲν αἱ ΒΚ, ΝΔ, ἐν ἐλάττοσι δὲ αἱ ΚΛ, ΜΝ, ἐν ἐλαχίσοις δὲ αἱ ΛΞ, ΞΜ· ἐν ἴσοις δὲ ἡ μὲν ΛΞ τῇ ΞΜ, ἡ δὲ ΚΛ τῇ ΜΝ, ἡ δὲ ΒΚ τῇ ΝΔ.

occidunt temporibus; & quod circumferentiæ ΒΚ, ΝΔ in maximis; in minoribus autem circumferentiæ ΚΛ, ΜΝ; in minimis porro ΛΞ, ΞΜ occidunt temporibus: æqualibus vero temporibus occidunt circumferentiæ quidem ΛΞ, ΞΜ, item ΚΛ, ΜΝ, & denique ipſæ ΒΚ, ΝΔ.

Ἐστωσαν καθ' ὧν φέρεται τὰ Κ, Λ, Μ, Ν σημεῖα ὑποζώμηλοι κύκλοι οἱ ΟΠ, ΡΣ, ΤΤ, ΦΧ, καὶ γεγράφθωσαν ἀπὸ τῶν Κ, Λ σημείων μέγιστοι κύκλοι οἱ Ψα, Ωβ ἐφαπτόμενοι τοῦ ΕΖ κύκλου. καὶ ἐπεὶ αἱ ΒΚ, ΚΛ, ΛΞ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· αἱ Ηα, αβ, βΞ ἄρα μείζονες εἰσιν ἀλλήλων, ἀρχόμεναι ἀπὸ μεγίστης τῆς Ηα. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ Ηα τῆς αβ, ἀλλ' ἡ μὲν Ηα τῇ ΟΚ ἐστιν ὁμοία, ἡ δὲ αβ τῇ ϛΛ· καὶ ἡ ΟΚ ἄρα τῆς ϛΛ μείζων ἐστὶν ἡ ὁμοία, τῆς δὲ ΛΡ ἐλάσσων ἡ ὁμοία ἡ ΟΚ. ἔστω τῇ ΟΚ ὁμοία ἡ Λγ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Κ σημεῖον ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Κ τὴν ΚΟ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ο παραγίνεται, ἐν τούτῳ τῷ τὸ Λ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Λ τὴν Λγ διελθὸν ἐπὶ τὸ γ παρέσται, καὶ ὁ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἕξει ὡς τὴν γΟδ. ἐπεὶ οὖν ὁμοία ἐστὶν ἡ ΟΚ περιφέρεια τῇ γΛ, ἀλλὰ ἡ ΟΚ τῇ Ρϛ ὁμοία ἐστί· καὶ ἡ Ρϛ ἄρα τῇ γΛ ἐστιν ὁμοία. καί εἰσι τοῦ αὐτοῦ κύκλου· ἴση ἄρα ἡ Ρϛ τῇ γΛ. κοινὴ προσκείσθω ἡ γϛ· ὅλη ἄρα ἡ Ργ τῇ ϛΛ ἐστιν ἴση. ἡ δὲ ΟΚ τῆς ϛΛ μείζων ἐστὶν ἡ ὁμοία· καὶ ἡ ΟΚ ἄρα τῆς Ργ μείζων ἐστὶν ἡ ὁμοία· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ τὸ Κ τὴν ΚΟ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ο παραγίνεται, ἤπερ τὸ γ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ γ τὴν γΡ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ρ παρέσται. ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ τὸ Κ τὴν ΚΟ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ο παραγίνεται, δυσὶν ἡ ΒΚ περιφέρεια, ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ τὸ γ τὴν γΡ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ρ παραγίνεται, δυσὶ ἡ ΚΛ περιφέρεια· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ ΒΚ δυσίν, ἤπερ ἡ ΚΛ. Πάλιν, ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ αβ τῆς βΞ, ἀλλ' ἡ αβ τῇ ϛΛ ἐστιν ὁμοία· καὶ ἡ ϛΛ ἄρα τῆς βΞ μείζων ἐστὶν

Sint itaque paralleli circuli ΟΠ, ΡΣ, ΤΤ, ΦΧ, in quibus puncta Κ, Λ, Μ, Ν ferantur; & deſcribantur per puncta Κ, Λ maximi circuli Ψα, Ωβ, qui tangant circulum ΕΖ. quoniam autem [ex hyp.] circumferentiæ ΒΚ, ΚΛ, ΛΞ æquales ad invicem ſunt: circumferentiæ igitur Ηα, αβ, βΞ majores ſunt invicem, initium ſumentes à maxima circumferentia Ηα. & quoniam circumferentia Ηα major eſt ipſa αβ; ſed & ipſa Ηα ſimilis eſt circumferentiæ ΟΚ, & ipſa etiam αβ ſimilis quoque ipſi ϛΛ: circumferentia igitur ΟΚ major eſt circumferentia ϛΛ quam ut ei ſimilis ſit, circumferentia vero ΟΚ minor eſt ipſa ΛΡ quam ut ei ſimilis ſit. ſit ipſi ΟΚ ſimilis circumferentia Λγ: quo igitur tempore punctum Κ incipiens à puncto Κ & circumferentiam ΚΟ percurrens pervenit ad punctum Ο, hoc ipſo tempore. & punctum Λ inchoans à puncto Λ & circumferentiam Λγ percurrens pervenit ad punctum γ, & circulus zodiacus poſitionem habebit veluti γΟδ. & quoniam circumferentia ΟΚ ſimilis eſt poſita ipſi γΛ; ſed & circumferentia ΟΚ ſimilis eſt ipſi Ρϛ: circumferentia igitur Ρϛ ſimilis eſt etiam ipſi γΛ. & ſunt ejuſdem circuli; quare circumferentia Ρϛ æqualis eſt ipſi γΛ. communis addatur ipſa γϛ: & tota igitur Ργ ipſi ϛΛ æqualis eſt. eſt autem & ΟΚ major ipſa ϛΛ quam ut ei ſimilis ſit: quare & ΟΚ major eſt etiam ipſa Ργ quam ut ei ſimilis ſit: majori igitur tempore punctum Κ circumferentiam ΚΟ percurrens pervenit ad punctum Ο, quam punctum γ incipiens à puncto γ & circumferentiam γΡ pertranſiens pervenit ad punctum Ρ. ſed quo tempore Κ circumferentiam ΚΟ percurrens pervenit ad punctum Ο, ipſa circumferentia ΒΚ occidit; quo vero tempore punctum γ circumferentiam γΡ percurrens pervenit ad punctum Ρ, circumferentia ipſa ΚΛ quoque occidit: quare majori tempore circumferentia ΒΚ occidit quam ipſa ΚΛ. Rurſus, quoniam circumferentia αβ ipſa Βπ major eſt; ſed & ipſa αβ ſimilis eſt circumferentiæ ϛΛ: quare & ϛΛ major eſt circumferen-



Ὅτι δὲ ἡ ΡΛ τῆς ΧΞ μείζων ἐστὶν ἡ ὁμοία δῆλον. ἐπεὶ γὰρ ἐφάπτεται μείζων ἐστὶν ἡ Ηα τῆς αβ, ἡ δὲ αβ τῆς βΞ· μείζων ἄρα καὶ ἡ Ηα τῆς βΞ. κοινῆς προσκειμένης τῆς αβ, μείζων ἐστὶν ἡ Ηβ τῆς αΞ· ὥστε καὶ μείζων ἡ ὁμοία ἡ Ηβ τῇ αΞ. ὁμοία δὲ ἡ Ηβ τῇ ΡΛ· μείζων ἄρα ἡ ὁμοία ἡ ΡΛ τῆς αΞ.

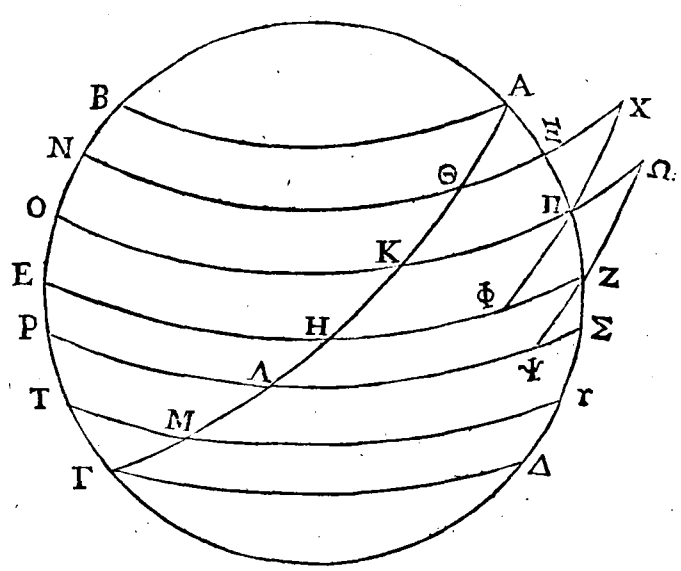
Quod autem circumferentia ΡΛ major ſit ipſa ΧΞ, quam ut ei ſimilis ſit, ita patet: quoniam circumferentia Ηα major eſt ipſa αβ, & αβ major quoque eſt ipſa βΞ: erit & circumferentia Ηα major etiam ipſa βΞ communis addatur αβ: quare Ηβ etiam major eſt ipſa αΞ: major igitur eſt Ηβ circumferentia ipſa αΞ quam ut ei ſimilis ſit. eſt autem ipſa Ηβ ſimilis circumferentiæ ΡΛ: quare & ΡΛ major quoque erit ipſa αΞ quam ut ei ſimilis ſit.

tia βΞ quam ut ei ſimilis ſit: quare ipſa ΡΛ multo major eſt circumferentia βΞ quam ut ei ſit ſimilis, ſed minor circumferentia ΗΞ quam ut ei ſimilis eſſe poſſit. ſit itaque ipſi ΡΛ ſimilis circumferentia Ξε: quo igitur tempore punctum Ξ circumferentiam Ξε percurrens pervenit ad punctum ε, hoc ipſo tempore & punctum Λ circumferentiam ΛΡ percurrens pervenit ad punctum Ρ, & zodiacus circulus poſitionem habebit veluti εΡϑ. & quoniam ſimilis eſt circumferentia ΡΛ ipſi εΞ; ſed & ipſa ΡΛ ſimilis eſt etiam ipſi ΗΒ: quare ipſa ΗΒ ipſi εΞ ſimilis quoque eſt. & ſunt ejuſdem circuli: æqualis igitur eſt circumferentia ΗΒ ipſi εΞ. communis auferatur ipſa εΒ: quare & reliqua Ηε reliquæ ΒΞ eſt æqualis. & quoniam ςΛ major eſt ipſa βΞ quam ut ei ſimilis ſit; eſt autem & ςΛ æqualis ipſi Ργ, & βΞ etiam eſt æqualis ipſi Ηε: quare & ipſa Ργ major eſt quoque circumferentia Ηε quam ut ei ſimilis eſſe poſſit: majori igitur tempore punctum γ circumferentiam γΡ percurrens pervenit ad Ρ quam ε circumferentiam εΗ pertranſiens pervenit ad punctum Η. ſed quo tempore punctum γ circumferentiam γΡ percurrens pervenit ad Ρ, ipſa ϑΟ circumferentia occidit, hoc eſt ipſa ΚΛ; quo tempore vero punctum ε circumferentiam εΗ percurrens pervenit ad punctum Η, ipſa εΡ occidit, hoc eſt circumferentia ΛΞ: quare majori tempore circumferentia ΚΛ occidit quam ipſa ΛΞ. Rurſus, quoniam circumferentia ΤΜ major eſt ipſa ΗΞ quam ut ei ſimilis ſit; ſit itaque ipſa Μζ ſimilis ipſi ΗΞ: quo igitur tempore punctum Ξ incipiens ab Ξ circumferentiam ΞΗ percurrens pervenit ad punctum Η, hoc ipſo tempore & punctum Μ circumferentiam Μζ percurrens pervenit ad punctum ζ, & circulus zodiacus poſitionem habebit veluti ζΗϑ. & quoniam in ſphæra duo circuli paralleli ΤΥ, ΡΣ maximi cujuſdam circuli ΒΔ circumferentias æquales ΛΞ, ΞΜ auferunt ad maximum parallelorum circulorum ΗΘ: æqualis igitur eſt circulus ΡΣ circulo ΤΥ. & quoniam in ſphæra æquales & paralleli circuli ΡΣ, ΤΥ maximi cujuſdam circuli ΑΒΓΔ circumferentias ΤΗ, ΗΡ auferunt ad maximum parallelorum circulorum ΗΘ: æqualis igitur eſt circumferentia ΤΗ ipſi ΗΡ. eſt autem ipſa ζΗ æqualis ipſi Ηϑ; (quoniam & ΛΞ æqualis eſt ipſi ΞΜ:) quare & recta à puncto ϑ ad punctum Ρ ducta æqualis eſt rectæ à puncto Τ ad punctum ζ ductæ. eſt vero & circulus ΡΣ æqualis circulo ΤΥ: quare [per 28.3.] & circumferentia ϑΡ æqualis eſt ipſi Τζ. ſed circumferentia ϑΡ ſimilis eſt circumferentiæ Ηε: quare & ipſa Ηε ſimilis quoque eſt circumferentiæ ΚΛ: & ipſa ΚΛ ipſi ΛΞ: & ipſa ΛΞ ipſi ΞΜ: & ipſa ΞΜ ipſi Μζ: & ipſa Μζ ipſi ΗΞ. ſed & ipſa ΗΞ ipſi εΗ: & ipſa εΗ ipſi γΡ: & ipſa γΡ ipſi ΟΡ. ſed & ipſa ΟΡ ipſi ΡΚ: & ipſa ΡΚ ipſi

ὁμοία· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ ε ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ ε τὸν εH περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ H παραγίνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ ζ τὸν ζT διελθὸν ἐπὶ τὸ T παραγίνεται. ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ τὸ ε ἐπὶ τὸ H παραγίνεται, δύναται ἡ εP περιφέρεια, τουτέστιν ἡ ΛΞ περιφέρεια· ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ τὸ ζ ἐπὶ τὸ T παραγίνεται, δύναται ἡ ζH περιφέρεια, τουτέστιν ἡ ΞM· ἡ ΛΞ ἄρα περιφέρεια τῇ ΞM περιφερείᾳ ἐν ἴσῳ χρόνῳ δυνήσεται. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ KΞ τῇ ΞN ἐν ἴσῳ χρόνῳ δυνήσεται, ὧν ἐπεὶ ἡ ΛΞ τῇ ΞM ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύναται· λοιπὴ ἄρα ἡ KΛ τῇ MN ἐν ἴσῳ χρόνῳ δυνήσεται. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ BK τῇ NΔ ἐν ἴσῳ χρόνῳ δυνήσεται. καὶ ἐπεὶ ἐν πλείονι χρόνῳ ἡ BK δυνήσεται ἤπερ ἡ KΛ, ἡ δὲ KΛ ἤπερ ἡ ΛΞ· ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ ἡ BK δυνήσεται ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΔN, ἐν ᾧ δὲ ἡ KΛ ἐν τούτῳ καὶ ἡ MN, ἐν ᾧ δὲ ἡ ΛΞ ἐν τούτῳ ἡ ΞM· καὶ ἡ μὲν ΔN ἄρα τῆς NM ἐν πλείονι χρόνῳ δυνήσεται, ἡ δὲ NM τῆς MΞ.

ΛΕΓΩ ὅτι καὶ ἡ μὲν ΛΞ τῇ ΞM ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἀνατελεῖ, ἡ δὲ KΛ τῇ MN, ἡ δὲ BK τῇ NΔ.

Καὶ θεωρείσθω τὰ λεγόμενα ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, ᾗ ἔστω τὸ μετὰ τὸν καρκῖνον ἡμικύκλιον ὑπὸ τὸν γῆν τὸ AΓ, καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα τῶν AH, HΓ εἰς τρία ἴσα κατὰ τὰ Θ, K, Λ, M σημεῖα, καὶ ἔστωσαν καθ' ὧν φέρεται τὰ Θ, K, Λ, M σημεῖα παράλληλοι κύκλοι οἱ NΞ, OΠ, PΣ, TΥ. καὶ ἐπεὶ ἡ ZH τῆς KΠ μείζων ἐστὶν ἡ ὁμοία, ἔστω τῇ KΠ ὁμοία ἡ HΦ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ K ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ K τὸν KΠ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Π παραγίνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ H ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ H τὸν HΦ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Φ παρέσται, καὶ ὁ τῶν ζῳδίων κύκλος θέσιν ἕξει ὡς τὸν ΦΠX. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ΛΣ τῆς HZ μείζων ἐστὶν ἡ ὁμοία, ἔστω τῇ HZ ὁμοία ἡ ΛΨ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ H τὸν HZ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Z παραγίνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Λ τὸν ΛΨ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ψ παρέσται, καὶ ὁ τῶν ζῳδίων κύκλος θέσιν ἕξει ὡς τὸν ΨZΩ. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ πα-

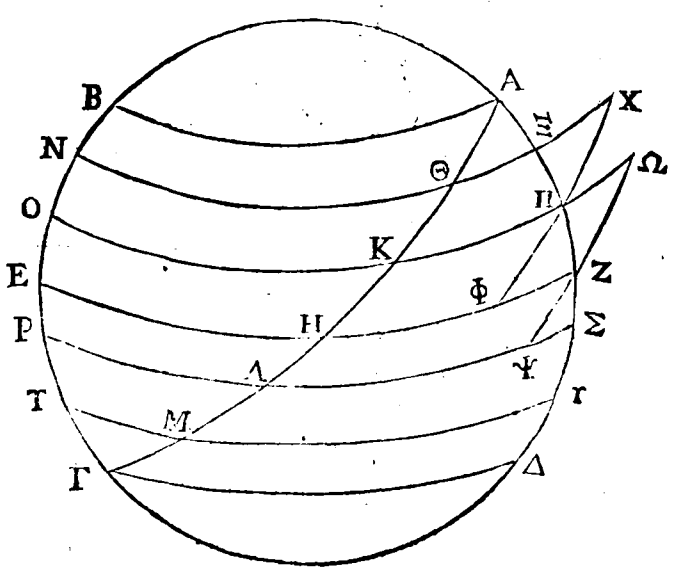


tiæ TZ: quo igitur tempore punctum ε inchoans à puncto ε & circumferentiam εH percurrens pervenit ad punctum H, hoc ipso tempore & punctum ζ pertransiens ζT pervenit ad punctum T. sed quo tempore punctum ε pervenit ad punctum H, ipsa circumferentia εP (hoc est ΛΞ) occidit: quo autem tempore punctum ζ ad punctum T pervenit, ipsa circumferentia ζH (hoc est ipsa ΞM) occidit: quare circumferentia ΛΞ æquali tempore occidit atque ipsa ΞM. similiter demonstrabitur quod & circumferentia KΞ æquali tempore occidit ac ipsa ΞN; ex quibus quoniam circumferentia ΛΞ æquali tempore occidit ac circumferentia ΞM: & reliqua igitur KΛ æquali tempore occidit atque ipsa MN. simili modo ostendetur quod & circumferentia BK æquali etiam tempore occidit ac circumferentia NΔ. & quoniam majori tempore circumferentia BK occidit quam ipsa KΛ, & KΛ majori etiam tempore occidit quam ΛΞ; sed quo tempore ipsa BK occidit, hoc ipso tempore & ΔN etiam occidit; & quo tempore occidit ipsa KΛ hoc ipso etiam & MN occidit; præterea quo tempore occidit ipsa ΛΞ hoc ipso & ΞM occidit: quare majori tempore ΔN occidit quam ipsa NM; & NM majori quoque tempore occidit quam MΞ.

Dico quod & circumferentia quidem ΛΞ æquali tempore oritur ac ipsa ΞM; & ipsa KΛ etiam æquali tempore oritur ac ipsa MN; & deniq; quod ipsa BK æquali etiam tempore oritur ac NΔ.

Intelligantur autem in secunda figura ea quæ dicta sunt & explicata prius; & sit post cancrum micirculus sub terram AΓ; & dividatur utraque circumferentia AH, HΓ in tres partes æquales in punctis Θ, K, Λ, M; & sint circuli paralleli NΞ, OΠ, PΣ, TΥ in quibus puncta Θ, K, Λ, M ferantur. & quoniam circumferentia ZH major est ipsa KΠ quam ut ei similis sit, sit ipsi KΠ similis circumferentia HΦ: quo igitur tempore punctum K incipiens à puncto K circumferentiam KΠ percurrens pervenit ad punctum Π, hoc ipso tempore & punctum H incipiens ab H & circumferentiam HΦ percurrens pervenit ad punctum Φ; & zodiacus circulus positionem habebit veluti ΦΠX. rursus, quoniam circumferentia ΛΣ major est ipsa HZ quam ut ei similis sit; sit circumferentiæ HZ similis ipsa ΛΨ: quare quo tempore punctum H circumferentiam HZ percurrens pervenit ad punctum Z, hoc ipso tempore & punctum Λ circumferentiam ΛΨ percurrens pervenit ad punctum Ψ; & circulus zodiacus positionem habebit veluti ΨZO. & quoniam in sphæra sunt circuli paralleli

ralleli ΟΠ, ΡΣ, qui maximi cujuſdam circuli ΑΓ circumferentias æquales ΛΗ, ΗΚ auferunt ad maximum parallelorum circulorum ΕΖ: æqualis eſt circulus ΟΠ circulo ΡΣ. & quoniam in ſphæra æquales & paralleli circuli ΠΟ, ΡΣ maximi cujuſdam circuli ΑΒΓΔ circumferentias ΣΖ, ΖΠ ad maximum parallelorum ΕΖ auferunt: æqualis eſt circumferentia ΣΖ ipſi ΖΠ. eſt autem & circumferentia ΨΖ æqualis ipſi ΖΩ: quare recta à puncto Π ad punctum Ω extenſa æqualis eſt rectæ à puncto Ψ uſque ad punctum Σ productæ. & circulus quidem ΟΠ circulo ΡΣ æqualis eſt: & circumferentia igitur ΠΩ [per 28.3.] æqualis eſt ipſi ΨΣ. quoniam vero ſemicirculus à puncto Χ inchoans, qui ad partes Χ, Π tendat, non concurrit cum ſemicirculo à puncto Ω incipiente, qui ad partes Ω, Ζ proficiſcatur; ſimilis igitur eſt circumferentia ΠΩ ipſi ΦΖ. ſed & ipſa ΠΩ ipſi ΨΣ ſimilis etiam eſt; quare & ipſa ΦΖ circumferentia ipſi ΨΣ ſimilis quoque eſt: quo igitur tempore punctum Φ circumferentiam ΦΖ percurrens pervenit ad punctum Ζ, hoc ipſo tempore & punctum Ψ circumferentiam ΨΣ percurrens pervenit ad punctum Σ. ſed quando quidem Φ jam pervenit ad Ζ, tunc oritur ΦΠ, hoc eſt ipſa ΚΗ; quando vero Ψ ad Σ acceſſit, tunc oritur ΨΖ, hoc eſt ipſa ΛΗ: quare tempore æquali quidem ΚΗ & ipſa ΛΗ oriuntur. ſimiliter itaque demonſtrabitur quod & ipſæ ΚΘ, ΛΜ & etiam ipſæ ΑΘ, ΜΓ æquali tempore oriuntur.



Semicirculi igitur poſt cancrum circumferentiæ æquales temporibus inæqualibus occidunt; & in maximis quidem illæ, quæ prope contactus ſunt tropicorum circulorum; in minoribus autem, quæ deinceps ſequuntur; in minimis vero quæ ſunt prope circulum æquinoctialem; æqualibus denique temporibus & occidunt & oriuntur, quæ ab æquinoctiali circulo æqualiter diſtant.

ἐφάπτηλοι κύκλοι οἱ ΟΠ, ΡΣ μείζονος τινὸς κύκλου περιφερείας τῆς ΑΓ τὰς ΛΗ, ΗΚ ἴσας ἀφαιρέσι πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων τὸν ΕΖ, ἴσος ἐστὶν ὁ ΟΠ τῷ ΡΣ. ἐπεὶ ἔν γε ἐν σφαίρᾳ ἴσοι τε καὶ παράλληλοι κύκλοι οἱ ΠΟ, ΡΣ μείζονος τινὸς κύκλου περιφερείας τῆς ΑΒΓΔ τὰς ΣΖ, ΖΠ ἀφαιροῦσι πρὸς τὸν μέγιστον τῶν παραλλήλων τὸν ΕΖ, ἴση ἐστὶν ἡ ΣΖ τῇ ΖΠ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΨΖ τῇ ΖΩ ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Π ἐπὶ τὸ Ω τῇ ἀπὸ τοῦ Ψ ἐπὶ τὸ Σ. ὁ δὲ ἐστιν ἴσος ὁ ΟΠ κύκλος τῷ ΡΣ κύκλῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΩ τῇ ΨΣ περιφερείᾳ. ἐπεὶ δὲ ἀσύμπτωτόν ἐστι τὸ ἀπὸ τοῦ Χ ἡμικυκλίου ὡς ἐπὶ τὰ Χ, Π μέρη τῷ ἀπὸ τοῦ Ω ἡμικυκλίῳ ὡς ἐπὶ τὰ Ω, Ζ μέρη, ὁμοία ἐστὶν ἡ ΠΩ περιφέρεια τῇ ΦΖ περιφερείᾳ. ἀλλ' ἡ ΠΩ τῇ ΨΣ ἐστιν ὁμοία· καὶ ἡ ΦΖ ἄρα τῇ ΨΣ ἐστιν ὁμοία· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Φ τὴν ΦΖ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ζ παραγίνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Ψ τὴν ΨΣ διελθὸν ἐπὶ τὸ Σ παρέσται. ἀλλ' ὅταν μὲν τὸ Φ ἐπὶ τὸ Ζ παραγένηται, ἀνατέλλει ἡ ΦΠ, τυτέστιν ἡ ΚΗ· ὅταν δὲ τὸ Ψ ἐπὶ τὸ Σ παραγένηται, ἀνατέλλει ἡ ΨΖ περιφέρεια, τυτέστιν ἡ ΛΗ· ἡ ΚΗ ἄρα τῇ ΛΗ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἀνατέλλει. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΚΘ τῇ ΛΜ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἀνατέλλει, ἡ δὲ ΑΘ τῇ ΜΓ.

Τὰ ἄρα μετὰ τὸν καρκῖνον ἡμικυκλίου αἱ ἴσαι περιφέρειαι ἀνίσοις χρόνοις δύνουσι, καὶ ἐν μὲν τοῖς μεγίστοις μέν, αἱ πρὸς ταῖς συναφαῖς τῶν τροπικῶν· ἐν ἐλάσσοσι δὲ αἱ ἑξῆς τούτων· ἐν ἐλαχίστοις δὲ αἱ πρὸς τῷ ἰσημερινῷ· ἐν ἴσοις δὲ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ ἰσημερινοῦ κύκλου καὶ δύνουσι καὶ ἀνατέλλουσι.

SCHOLIUM EX ABUNDANTI.

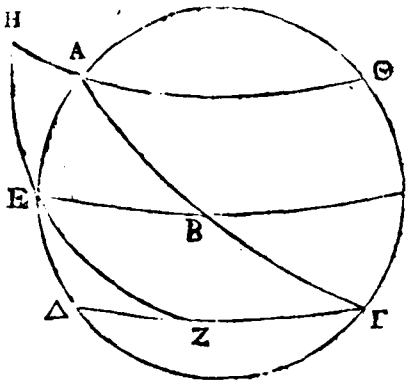
Eadem manente deſcriptione, dico quod circumferentia ΑΒ æquali tempore occidit ac circumferentia ΒΓ. quoniam enim ΓΔ major eſt ipſa ΒΕ quam ut ei ſimilis ſit; ponatur ipſi ΒΕ ſimilis circumferentia ΓΖ; & circulus zodiacus poſitionem habeat veluti ΖΕΗ. & quoniam ΑΒ ipſi ΒΓ eſt æqualis: & circulus igitur ΑΘ æqualis eſt circulo ΓΔ: quare & circumferentia ΑΕ æqualis eſt ipſi ΕΔ. eſt autem ΖΕ æqualis circumferentiæ ΕΗ; quoniam & ΓΒ ipſi ΒΑ æqua-

ΣΧΟΛΙΟΝ ΕΚ ΠΕΡΙΣΣΟΥ.

Τῆς αὐτῆς καταγραφῆς μενούσης, λέγω ὅτι ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύνει. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΓΔ τῆς ΒΕ μείζων ἐστὶν ἡ ὁμοία, κείσθω τῇ ΒΕ ὁμοία ἡ ΓΖ, καὶ ὁ τῶν ζῳδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω τὴν ΖΕΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ, ἴσος ἐστὶν ὁ ΑΘ κύκλος τῷ ΓΔ κύκλῳ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΕΗ ἴση, ἐπεὶ καὶ ἡ ΓΒ τῇ ΒΑ ἴση·

ἔστι

ἔστω ἄρα καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Α τῇ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Ζ ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΗ περιφέρεια τῇ ΔΖ περιφερείᾳ. ἀλλ' ἡ ΑΗ τῇ ΕΒ ἐστιν ὁμοία· καὶ ἡ ΕΒ ἄρα τῇ ΔΖ ἐστιν ὁμοία· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Β ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Β τέλους ΒΕ διελθὸν ἐπὶ τὸ Ε παραγένηται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Ζ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Ζ τέλους Ζ Δ διελθὸν ἐπὶ τὸ Δ παρέσται. ἀλλ' ὅταν μὲν τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε παραγένηται, δύσει ἡ ΒΑ περιφέρεια, ὅταν δὲ τὸ Ζ ἐπὶ τὸ Δ παραγένηται, δύσει ἡ ΖΕ, τουτέστιν ἡ ΓΒ· ἡ ΑΒ ἄρα τῇ ΒΓ ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύσει.

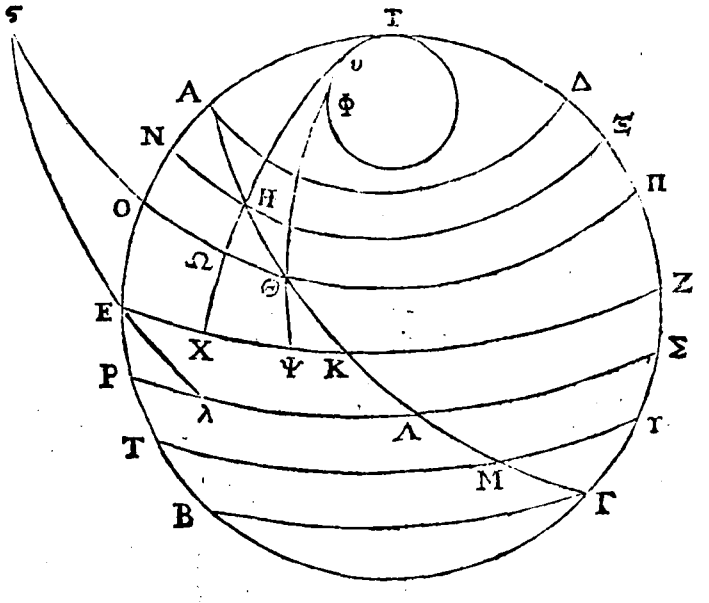


lis est: recta igitur à puncto Η ad punctum Α æqualis est rectæ à puncto Δ ad punctum Ζ ductæ: quare & circumferentia ΑΗ æqualis est circumferentiæ ΔΖ. sed circumferentia ΑΗ similis est ipsi ΕΒ: & circumferentia igitur ΕΒ similis quoque est circumferentiæ ΔΖ: quo igitur tempore punctum Β incipiens à puncto Β circumferentiam ΒΕ percurrens pervenit ad punctum Ε, hoc ipso tempore & punctum Ζ inchoans à puncto Ζ & ipsam ΖΔ percurrens pervenit ad Δ. sed quo quidem tempore Β ad Ε pervenit, ipsa ΒΑ occidit; & quando Ζ ad Δ pervenit, tunc & ipsa ΖΕ, hoc est ipsa ΓΒ, occidit: quare circumferentia ΑΒ æquali tempore occidit quo ipsa ΒΓ.

ΑΛΛΩΣ

Ἐστω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ ΑΒΓΔ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ἔστω ὁ ΑΔ, χειμερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ ΒΓ, ζωδιακὸς δὲ ἡμικύκλιον τὸ μετὰ τὸ καρκῖνον ἔστω ὑπὲρ γῆς τὸ ΑΓ, καὶ ἔστω ἀνατολικὰ μὲν μέρη τὰ Δ, Γ, δυτικὰ δὲ τὰ Α, Β, ἰσημερινὸς δὲ κύκλος ἔστω ὁ ΕΖ, καὶ διῃρήσθω τὸ ΑΓ ἡμικύκλιον εἰς τὰ ἐν αὐτῷ ζώδια κατὰ τὰ Η, Θ, Λ, Μ σημεῖα, καὶ γεγράφθωσαν ὁμαλλήλοις κύκλοι οἱ ΝΗΞ, ΟΘΠ, ΡΛΣ, ΤΜΥ καθ' ὧν φέρεται τὰ Η, Θ, Λ, Μ σημεῖα· λέγω ὅτι ἐν πλείονι μὲν χρόνῳ δύσιν αἱ ΑΗ, ΜΓ περιφέρειαι, ἐν ἐλάσσονι δὲ αἱ ΗΘ, ΛΜ, ἐν ἐλαχίστῳ δὲ αἱ ΘΚ, ΛΚ, ἐν ἴσῳ δὲ χρόνῳ αἱ ἴσαι ἀπέχουσαι τῶν ἰσημερινῶν.

Ἐστω μέγιστος τῶν ἀεὶ φανερῶν ὁ Τυφ, καὶ γεγράφθωσαν διὰ τῶν Η, Θ μέγιστοι κύκλοι οἱ υΗΩΧ, ΦΘΨ ἐφαπτόμενοι τοῦ Τυφ κύκλου, ὥστε ἀσύμπτωτα εἶναι τὰ ἀπὸ τῶν υ, Φ ἡμικύκλια ὡς ἐπὶ τὰ ΗΧ, ΘΨ μέρη τῷ ἀπὸ τοῦ Τ ἡμικυκλίῳ ὡς ἐπὶ τὰ Τ, Α μέρη· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΗΝ περιφέρεια ἑκατέρᾳ τῶν ΩΟ, ΧΕ, ἡ δὲ ΘΩ τῇ ΨΧ· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὸ Η τέλους ΗΝ περιφέρειαν διαπεύσεται καὶ τὸ Ω τέλους ΩΟ. ἀλλ' ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Η τέλους ΗΝ περιφέρειαν διαπρεύσεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ δύ-

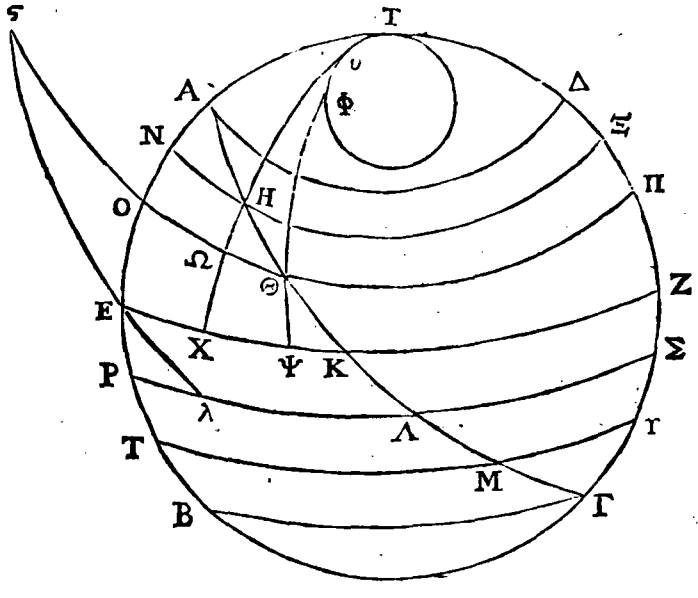


ALITER.

Sit in mundo circulus horizon ΑΒΓΔ; tropicus æstivus sit ΑΔ; hybernus autem sit ΒΓ: zodiaci semicirculus post cancrum supra terram sit ΑΓ; sint autem partes orientales Δ, Γ; occidentales vero Α, Β; æquinoctialis circulus sit ΕΖ; & dividatur semicirculus ΑΓ in signa, quæ sunt in ipso, in punctis Η, Θ, Λ, Μ; & describantur circuli paralleli ΝΗΞ, ΟΘΠ, ΡΛΣ, ΤΜΥ, in quibus puncta Η, Θ, Λ, Μ, ferantur: dico quod majori tempore circumferentiæ ΑΗ, ΜΓ occidunt; minori vero ΗΘ, ΛΜ; & denique minimo tempore ΘΚ, ΛΚ circumferentiæ occidunt; æquali vero tempore quæ ab æquinoctiali circulo æque distant.

Sit maximus semper-apparentium circulus Τυφ; & describantur per puncta Η, Θ maximi circuli υΗΩΧ, ΦΘΨ, qui circulum Τυφ tangant, ita ut semicirculi, qui à punctis υ, Φ inchoant qui ad partes ΗΧ, ΘΨ tendunt, non concurrant cum semicirculo à puncto Τ inchoante, qui ad partes Τ, Α proficiscitur: quare circumferentia quidem ΗΝ utrique ipsarum ΩΟ, ΧΕ similis est; & similiter circumferentia ΘΩ ipsi ΨΧ etiam similis est: æquali igitur tempore punctum Η circumferentiam ΗΝ percurrit, quo punctum Ω ipsam ΩΟ pertransit. sed tempus in quo punctum Η circumferentiam ΗΝ percurrit, tempus est in quo cir-

cumferentia HA occidit: & tempus igitur in quo punctum Ω circumferentiam ΩO percurrit, idem eſt cum tempore quo occidit circumferentia HA. rurſus, quoniam tempus in quo punctum Θ percurrit circumferentiam ΘO, tempus eſt quo occidit circumferentia ΘA; ex quo ſi auferatur tempus in quo punctum Ω ipſam ΩO percurrit, quod quidem idem eſt cum tempore in quo occidit circumferentia HA: reliquum igitur tempus, in quo punctum Θ ipſam ΘΩ percurrit, idem eſt cum tempore in quo occidit ipſa HΘ circumferentia. eſt autem [ex modo oſtenſis] ſimilis ipſa ΩO ipſi XE & ΩΘ etiam eſt ſimilis ipſi XΨ: igitur tempus in quo punctum X percurrit circumferentiam XE, tempus eſt quo ipſa HA occidit; & tempus in quo punctum Ψ ipſam ΨX percurrit, tempus eſt quo circumferentia ΘH occidit. eadem ratione jam tempus quidem in quo punctum K ipſam KΨ pertranſit, tempus eſt quo occidit KΘ circumferentia. & quoniam in ſphæra maximus circulus ΑΒΓΔ quendam circulum ex parallelis tangit, ſcilicet ΤυΦ, & ipſum ΑΒΓΔ ſecant maximi circuli EZ, AΓ, quorum quidem EZ [ex hyp.] maximus eſt parallelorum, & AΓ obliquus eſt ad parallelos circulos; & ſumptæ ſunt circumferentiæ AH, HΘ, ΘK in obliqui circuli circumferentia æquales deinceps ad eaſdem partes maximi parallelorum; & per puncta H, Θ deſcripti ſunt maximi circuli υHX, ΦΘΨ tangentes circulum ΤυΦ: major igitur eſt circumferentia EX ipſa XΨ: & circumferentia XΨ major quoque eſt ipſa ΨK: quare majori tempore X circumferentiam XE percurrit quam Ψ ipſam ΨX; & Ψ majori quoque tempore circumferentiam ΨX percurrit quam K ipſam KΨ. ſed tempus quidem in quo X percurrit circumferentiam XE, tempus eſt quo H ipſam HN pertranſit, id eſt in quo occidit circumferentia AH; tempus autem in quo Ψ pertranſit circumferentiam ΨX, tempus eſt in quo punctum Θ circumferentiam ΘΩ percurrit, id eſt tempus in quo occidit circumferentia ΘH; & tempus in quo punctum K ipſam KΨ pertranſit, tempus eſt in quo occidit circumferentia KΘ: majori igitur tempore circumferentia AH occidit quam ipſa HΘ, & HΘ majori quam OK.



Dico jam quod circumferentiæ quæ ab æquinoctiali circulo æque diſtant, temporibus æqualibus occidunt.

Punctum ſiquidem K, cum jam pervenerit ad

νει ἡ ΗΑ περιφέρεια· καὶ ὁ χρόνος ἄρα ἐν ᾧ τὸ Ω τὴν ΩΟ διαπρεύει ὁ αὐτός ἐστι τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ δύσει ἡ ΗΑ περιφέρεια. πάλιν, ἐπεὶ ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Θ τὴν ΘΟ διαπρεύει ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ δύσει ἡ ΘΑ περιφέρεια, ὧν ἀφαιρεῖ ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Ω τὴν ΩΟ διαπρεύει, ὁ αὐτὸς ἂν τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ δύσῃ ἡ ΗΑ περιφέρεια· λοιπὸς ἄρα ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Θ τὴν ΘΩ διαπρεύσεται, ὁ αὐτός ἐστι τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ δύσῃ ἡ ΗΘ περιφέρεια. ὁμοία δέ ἐστιν ἡ μὲν ΩΟ τῇ ΧΕ, ἡ δὲ ΩΘ τῇ ΧΨ· καὶ ὁ χρόνος ἄρα ἐν ᾧ τὸ Χ τὴν ΧΕ διαπρεύσεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ δύσῃ ἡ ΗΑ περιφέρεια· ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Ψ τὴν ΨΧ διαπρεύσεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ δύσει ἡ ΘΗ περιφέρεια. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Κ τὴν ΚΨ διαπρεύσεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ δύσει ἡ ΚΘ περιφέρεια. Ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ ὁ μέγιστος κύκλος ΑΒΓΔ ἐφάπτεταί τινος κύκλου τῶν παραλλήλων τὸ ΤυΦ, καὶ τὸν ΑΒΓΔ τέμνουσιν οἱ μέγιστοι κύκλοι οἱ ΕΖ, ΑΓ, ὧν ὁ μὲν ΕΖ μέγιστος τῶν παραλλήλων, ὁ δὲ ΑΓ λοξὸς πρὸς τοὺς παραλλήλους· καὶ ἀπειλημμέναι εἰσὶ περιφέρειαι αἱ ΑΗ, ΗΘ, ΘΚ ἀπὸ τῆς τοῦ λοξοῦ κύκλου περιφερείας ἴσαι ἑξῆς ἀπὸ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, καὶ διὰ τῶν Η, Θ σημείων γεγραμμένοι εἰσὶ μέγιστοι κύκλοι οἱ υΗΧ, ΦΘΨ ἐφαπτόμενοι τοῦ ΤυΦ κύκλου· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΕΧ περιφέρεια τῆς ΧΨ περιφερείας, ἡ δὲ ΧΨ τῆς ΨΚ· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ τὸ Χ τὴν ΧΕ διαπρεύσεται ἤπερ τὸ Ψ τὴν ΨΧ, καὶ τὸ Ψ τὴν ΨΧ ἐν πλείονι χρόνῳ διαπρεύσεται ἤπερ τὸ Κ τὴν ΚΨ. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ τὸ Χ τὴν ΧΕ διαπρεύσεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ τὸ Η τὴν ΗΝ περιφέρειαν διαπρεύσεται, τυγχάνει ἐν ᾧ δύσει ἡ ΑΗ περιφέρεια· ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Ψ τὴν ΨΧ διαπρεύσεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ τὸ Θ τὴν ΘΩ διαπρεύσεται, τυγχάνει ὁ χρόνος ἐν ᾧ δύσει ἡ ΘΗ περιφέρεια· ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Κ τὴν ΚΨ διαπρεύσεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ δύσει ἡ ΚΘ περιφέρεια· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ δύσει ἡ μὲν ΑΗ περιφέρεια τῆς ΗΘ περιφερείας, ἡ δὲ ΗΘ τῆς ΘΚ.

ΛΕΓΩ δὴ ὅτι ἐν ἴσοις χρόνοις αἱ ἴσαι ἀπέχουσι τοῦ ἰσημερινοῦ δύσεσιν.

Παραγεγράφθω γὰρ δὴ τοῦ Κ σημείου ἐπὶ τὸ Ε σημεῖον,

σημεῖον, ὁ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω τὴν ς Ε λ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ς Ε περιφέρεια τῇ Ε λ περιφερείᾳ, ᾗ ἔστι μέγιστος τῶν παραλλήλων ὁ Ε Ζ· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ς Θ Π κύκλος τῷ Ρ Λ Σ κύκλῳ· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ Ο Ε περιφέρεια τῇ Ε Ρ περιφερείᾳ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ς Ε τῇ Ε λ ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ ς ἐπὶ τὸ Ο τῇ ἀπὸ τοῦ Ρ ἐπὶ τὸ λ. ᾗ εἰσὶν ἴσοι κύκλοι οἱ ς Θ Π, Ρ Λ Σ· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ς Ο περιφέρεια τῇ Ρ λ περιφερείᾳ· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὸ λ σημεῖον τὴν λ Ρ διαπορεύεται ᾗ τὸ Ο τὴν Ο ς. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ τὸ λ τὴν λ Ρ διαπορεύεται ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ δύσει ἡ λ Ε περιφέρεια, ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Ο τὴν Ο ς διαπορεύεται ἴσος ἐστὶ τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ δύσει ἡ Ε ς περιφέρεια· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ δύσουσιν αἱ λ Ε, Ε ς περιφέρειαι. ἴση δὲ ἡ μὲν λ Ε τῇ Λ Κ, ἡ δὲ Ε ς τῇ Κ Θ· αἱ Λ Κ, Κ Θ ἄρα ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύσουσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ Μ Κ, Κ Η ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύσουσιν· ὧν αἱ Λ Κ, Κ Θ ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύσουσιν· λοιπαὶ ἄρα αἱ Μ Λ, Θ Η ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύσουσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ Μ Γ, Α Η περιφέρειαι ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύσουσιν. ᾗ ἐπεὶ ἐν πλείονι χρόνῳ δύσει ἡ Α Η περιφέρεια ἤπερ ἡ Η Θ, καὶ ἡ Η Θ ἤπερ ἡ Θ Κ· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ δύσει καὶ ἡ Γ Μ περιφέρεια ἤπερ ἡ Μ Λ, καὶ ἡ Μ Λ ἤπερ ἡ Λ Κ· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ δύσουσιν αἱ Α Η, Μ Γ περιφέρειαι, ἐν ἐλάσσονι δὲ αἱ Η Θ, Λ Μ, ἐν ἐλαχίστῳ δὲ αἱ Θ Κ, Λ Κ, ἐν ἴσῳ δὲ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ ἰσημερινοῦ ᾗ δύσουσι καὶ ἀνατελοῦσι. τῆς γὰρ αὐτῆς μενούσης καταγραφῆς, ἐὰν μεταστρέψωμεν τὸν ζωδιακὸν, καὶ ποιήσωμεν τὸ Α Γ ἡμικύκλιον τοῦ ζωδιακοῦ ὑπὸ γῆν, ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ἔσεσθαι, καὶ δειχθήσονται αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ ἰσημερινοῦ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ᾗ ἀνατέλλουσαι.

punctum Ε, circulus zodiacus positionem habebit veluti ς Ε λ. & quoniam æqualis est circumferentia ς Ε ipsi Ε λ, & [ex hyp.] circulus Ε Ζ maximus est parallelorum circulorum: æqualis igitur est circulus ς Θ Π circulo Ρ Λ Σ: quare & circumferentia Ο Ε ipsi Ε Ρ æqualis est. est autem & ς Ε æqualis ipsi Ε λ: quare & recta à puncto ς ad punctum Ο ducta æqualis est rectæ à puncto Ρ ad punctum λ ductæ. & sunt circuli ς Θ Π, Ρ Λ Σ æquales: similis igitur est circumferentia ς Ο ipsi Ρ λ: quare tempore æquali punctum λ circumferentiam λ Ρ percurrit, atque punctum Ο ipsam Ο ς pertransit. sed tempus quidem in quo λ ipsam λ Ρ percurrit, tempus est quo circumferentia λ Ε occidit; & tempus in quo punctum Ο circumferentiam Ο ς pertransit, æquale est tempori in quo occidit circumferentia Ε ς: quare tempore æquali circumferentiæ λ Ε, Ε ς occidunt. est autem quidem circumferentia λ Ε æqualis ipsi Λ Κ, & Ε ς est etiam æqualis ipsi Κ Θ: quare Λ Κ, Κ Θ tempore æquali occidunt. similiter ostendetur quod & circumferentiæ Μ Κ, Κ Η æquali etiam tempore occidunt; ex quibus ipsæ Λ Κ, Κ Θ æquali tempore occidunt: & reliquæ igitur Μ Λ, Θ Η æquali tempore occidunt. simili modo jam ostendetur quod & circumferentiæ Μ Γ, Α Η æquali tempore occidunt. & quoniam [ex mox ostensis] majori tempore circumferentia Α Η occidit quam ipsa Η Θ, & ipsa Η Θ majori etiam tempore occidit quam Θ Κ: quare majori tempore occidit circumferentia Γ Μ quam ipsa Μ Λ; & similiter ipsa Μ Λ etiam tempore majori occidit quam ipsa Λ Κ: majori igitur tempore circumferentiæ Α Η, Μ Γ occidunt; minori autem Η Θ, Λ Μ; denique minimo tempore Θ Κ, Λ Κ; & tandem quæ ab æquinoctiali circulo æque distant, tempore æquali & occidunt & oriuntur. eadem enim manente descriptione, si convertamus zodiacum, & faciamus Α Γ dimidium zodiaci sub terram, eadem procedet demonstratio; & ostendetur circumferentias, quæ æque distant ab æquinoctiali, & æquali tempore oriri.

ΘΕΩΡΗΜΑ ιγ'.

Τῶν μετὰ τὸν αἰγόκερω ἡμικυκλίων αἱ ἴσαι περιφέρειαι ἐν ἀνίσοις χρόνοις ἀνατέλλουσι, καὶ ἐν πλείστοις μὲν αἱ πρὸς ταῖς ἁπτομέναις τῶν τροπικῶν, ἐν ἐλάσσοσι δὲ αἱ ἑξῆς τούτων, ἐν ἐλαχίστοις δὲ αἱ πρὸς τῷ ἰσημερινῷ, ἐν ἴσοις δὲ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ ἰσημερινοῦ κύκλου καὶ ἀνατέλλουσιν καὶ δύσουσιν.

THEOREMA XIII.

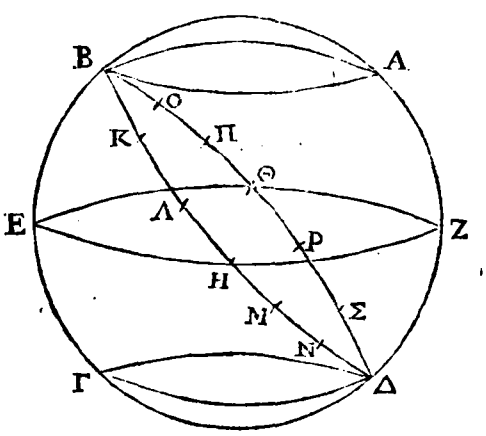
Circumferentiæ æquales semicirculi, qui post capricornum est, temporibus inæqualibus oriuntur; ac majori quidem tempore oriuntur quæ prope contactus sunt tropicorum circulorum; minori vero quæ deinceps sequuntur; minimo autem tempore quæ sunt prope circulum æquinoctialem; denique tempore æquali oriuntur & occidunt quæ ab æquinoctiali circulo æqualiter distant.

Ἔστω ὑπὲρ γῆν κύκλος ὁ Α Β Γ Δ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ὁ Β Α, χειμερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ Γ Δ, καὶ ἔστω τὸ μετὰ τὸν αἰγόκερω ἡμικύκλιον ὑπὸ γῆν τὸ Δ Η Β, ἰσημερινὸς δὲ κύκλος ὁ Ε Θ Ζ Η, καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα τῶν Β Η, Η Δ εἰς τρία ἴσα κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν σημεῖα· λέγω ὅτι

SIT circulus horizon Α Β Γ Δ, tropicus æstivus sit Β Α, hybernus sit Γ Δ; & sit post capricornum sub terram semicirculus Δ Η Β, æquinoctialis circulus sit Ε Θ Ζ Η, & dividatur utraque circumferentia Β Η, Η Δ in tres partes æquales in punctis Κ, Λ, Μ, Ν: dico quod

circumferentiæ BK, KΛ, ΛH, HM, MN, NΔ temporibus oriuntur inæqualibus; & quod majori quidem tempore BK, NΔ, minori vero KΛ, MN, minimo denique ipſæ ΛH, HM circumferentiæ oriuntur; at tempore æquali circumferentiæ quidem BK, NΔ, item KΛ, MN, & tandem ipſæ ΛH, HM oriuntur.

Sit quidem ſupra terram poſt capricornum ſemicirculus BΘΔ; & dividatur utraque circumferentia BΘ, ΘΔ in tres partes æquales in punctis O, Π, P, Σ. & quoniam [per 12. Phæn.] majori tempore circumferentia BO occidit quam ipſa OΠ; ſed [per 11. Phæn.] quo tempore circumferentia BO occidit & ipſa ΔN oritur, & quo tempore OΠ occidit & ipſa MN oritur: majori igitur tempore NΔ oritur quam ipſa NM. rurſus, quoniam circumferentia OΠ majori tempore occidit quam ΠΘ; ſed quo tempore OΠ occidit & ipſa NM oritur, & quo tempore ΠΘ occidit & circumferentia HM oritur: quare majori tempore circumferentia NM oritur quam ipſa MH. eadem ratione & BK majori tempore oritur quam KΛ, & KΛ quam ipſa ΛH. & quoniam quo tempore ΠΘ occidit, hoc eodem tempore & ΘP; ſed quo tempore ΠΘ occidit & ipſa MH oritur, & quo tempore ΘP occidit & HΛ oritur: quare MH circumferentia æquali tempore oritur atque ipſa HΛ. eadem ratione demonſtrabitur quod & KΛ æquali tempore oritur atque ipſa MN; & BK æquali tempore atque ipſa ΔN. rurſus, quoniam quo tempore circumferentia ΠΘ oritur, & eodem tempore etiam ipſa ΘP oritur; ſed quo tempore ΠΘ oritur & MH occidit; & quo tempore ΘP oritur & ipſa HΛ occidit: quare tempore æquali ΛH occidit atque ipſa HM. ſimiliter oſtendetur, quod circumferentia KΛ eodem tempore occidit quo ipſa MN; & item BK eodem quo ipſa ΔN.



αἱ BK, KΛ, ΛH, HM, MN, NΔ περιφέρειαι ἐν ἀνίσοις χρόνοις ἀνατέλλουσι, καὶ ἐν πλείοσις μὲν αἱ BK, NΔ, ἐν ἐλάσσοσι δὲ αἱ KΛ, MN, ἐν ἐλαχίσοις δὲ αἱ ΛH, HM, ἐν ἴσοις δὲ ἡ μὲν BK τῇ NΔ, ἡ δὲ KΛ τῇ MN, ἡ δὲ ΛH τῇ HM ἀνατέλλουσιν.

Ἐστω γὰρ τὸ μετὰ τὸν αἰγόκερω ἡμικύκλιον ὑπὲρ γῆς τὸ BΘΔ, καὶ διηρήσθω ἑκατέρα τῶν BΘ, ΘΔ εἰς τρία ἴσα κατὰ τὸ O, Π, P, Σ σημεῖα. καὶ ἐπεὶ ἐν πλείονι χρόνῳ ἡ BO δύσει ἤπερ ἡ OΠ, ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ ἡ BO δύσει ἡ ΔN ἀνατέλλει, ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἡ OΠ δύσει ἡ MN ἀνατέλλει· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ NΔ ἀνατέλλει ἤπερ ἡ NM· πάλιν, ἐπεὶ ἡ OΠ ἐν πλείονι χρόνῳ δύσει ἤπερ ἡ ΠΘ, ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ ἡ OΠ δύνει ἡ NM ἀνατέλλει, ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἡ ΠΘ δύσει ἡ HM ἀνατέλλει· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ NM ἀνατέλλει ἤπερ ἡ MH. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν BK τῆς KΛ ἐν πλείονι χρόνῳ ἀνατέλλει, ἡ δὲ KΛ τῆς ΛH. καὶ ἐπεὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΠΘ δύσει ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΘP, ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ ἡ ΠΘ δύνει ἡ MH ἀνατέλλει, ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἡ ΘP δύνει ἡ HΛ ἀνατέλλει· καὶ ἡ MH ἄρα τῇ HΛ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἀνατέλλει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν KΛ τῇ MN ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἀνατέλλει, ἡ δὲ BK τῇ ΔN. πάλιν, ἐπεὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΠΘ ἀνατέλλει, ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΘP, ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ ἡ ΠΘ ἀνατέλλει ἡ MH δύνει, ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἡ ΘP ἀνατέλλει ἡ HΛ δύνει· ἡ ΛH ἄρα τῇ HM ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύνει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν KΛ τῇ MN ἐν ἴσῳ χρόνῳ δύνει, ἡ δὲ BK τῇ ΔN.

DEFINITIO.

PErmutatio conſpicui hemiſphærii dicitur, quando antegrediente circumferentiæ puncto quod in ortu exiſtit, conſequens punctum oriens & percurrens totum conſpicuum hemiſphærium ad occaſum pervenit; hoc eſt quando circumferentia, quæ duobus intercipitur punctis, & antecedente & conſequente, ab hemiſphærio conſpicuo ad hemiſphærium occultum venit; & è contra, permutatio hemiſphærii occulti.

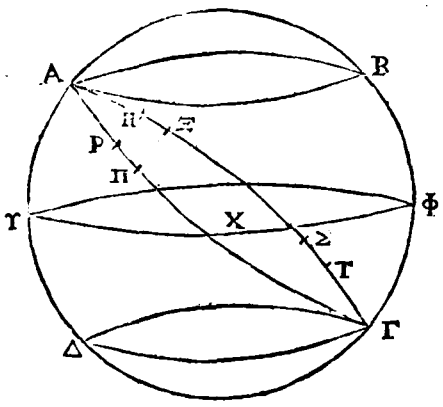
ΟΡΟΣ.

Ἐξαλλαγὴ φανερᾶ ἡμισφαιρίου ἐστίν, ὅταν τὸ προηγούμενον σημεῖον τῆς περιφερείας ἀπὸ τῆς ἀνατολῆς ὄντος τοῦ ἐπομένου ἀνατείλαν καὶ διελθὸν ὅλον τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἐπὶ τὴν δύσεως γένηται· τουτέστιν ὅταν ἀπὸ τοῦ ἀφανοῦς ἡμισφαιρίου εἰς τὸ ἀφανὲς ἐλθεῖν τὸ περιφέρειαν τὸ μεταξὺ τῶν δύο σημείων τοῦ ἡγουμένου καὶ τοῦ ἑπομένου· καὶ ἀνάπαλιν, ἐξαλλαγὴ ἀφανοῦς ἡμισφαιρίου.

ΛΗΜΜΑ.

Τῶ τῶν ζωδίων κύκλω τῶν ἴσων φερειῶν καὶ ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τ̃ τροπικ̃ σωαφ̃ς ὁποτερασοῦν, ἐν ᾧ ἡ ἑτέρα δύεται ἡ ἑτέρα ἀνατέλλει, καὶ ἀνάπαλιν.

Ἔστω ἐν κόσμῳ ὁρίζων κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, θερινὸς μὲν τροπικὸς ὁ ΑΒ, χειμερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ ΓΔ, ὁ δὲ τῶν ζωδίων κύκλος ἔστω ὁ ΑΠΓΗ, καὶ ἔστω ἴση ὁ ΠΡ τῇ ΞΗ· λέγω ὅτι ἐν ᾧ χρόνῳ ΠΡ δύνει ἡ ΞΗ ἀνατέλλει.



Εἰλήφθω γὰρ τῇ ΠΡ ἴση τε καὶ ἀπεναντίον ἡ ΣΤ, καὶ μεταξὺ τῶν ΞΗ, ΣΤ ὁ ἰσημερινὸς ἔστω ΤΧΦ. καὶ ἐπεὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΠΡ δύνει ἡ ΣΤ ἀνατέλλει, ἀλλ' ἐν ᾧ ἡ ΣΤ ἀνατέλλει ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΗΞ, ἴσον γὰρ ἀπέχουσι τοῦ ἰσημερινοῦ· καὶ ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ ΠΡ δύνει ἡ ΗΞ ἀνατέλλει.

LEMMA.

Ex æqualibus zodiaci circuli circumferentiis & æque distantibus ab alterutro tropicorum contactu, quo tempore altera occidit & altera oritur; & contra.

SIT in mundo horizon circulus ΑΒΓΔ; tropicus æstivus sit ΑΒ, hybernus autem sit ΓΔ; zodiacus circulus sit ΑΠΓΗ; & sit circumferentia ΠΡ æqualis circumferentiæ ΞΗ: dico quod quo tempore circumferentia ΠΡ occidit, & ipsa ΞΗ oritur.

Sumatur quidem circumferentiæ ΠΡ æqualis & opposita circumferentia ΣΤ; & inter circumferentias ΞΗ, ΣΤ sit circulus æquinoctialis ΤΧΦ. & quoniam [per 12. Phæn.] quo tempore ΠΡ circumferentia occidit, & ipsa ΣΤ oritur; sed [per 13. Phæn.] quo tempore circumferentia ΣΤ oritur & hoc etiam tempore circumferentia ΗΞ oritur; æqualiter enim distant ab æquinoctiali circulo: quare quo tempore ΠΡ occidit, & ipsa ΗΞ oritur.

ΘΕΩΡΗΜΑ ιδ'.

Τῶ τ̃ ζωδίων κύκλω αἱ ἴσαι φερείαι οὐκ ἐν ἴσοις χρόνοις ἐξαλλάσσουσι τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἀλλ' ἐν πλείονι ἡ ἔγγιον τ̃ς σωαφ̃ς τ̃ θερινοῦ τροπικοῦ τ̃ς ἀπώτερον, ἐν ἴσῳ δὲ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τ̃ τροπικῶ ἐν ἑκατέρῳ τ̃ ἡμικυκλίων, ὅταν ὁ πόλος τ̃ ὁρίζοντος μεταξὺ ᾖ τ̃ τε ἀρκτικοῦ καὶ τ̃ θερινοῦ τροπικοῦ.

Ἔστω ὁρίζων κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, μέγιστος δὲ τῶν ἀεὶ φαινερῶν ἔστω ὁ ΕΖ, θερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ ΒΑ, καὶ ἔστω ὁ τοῦ ΑΒΔΓ πόλος μεταξὺ τ̃ ΕΖ, ΒΑ, ὁ δὲ τ̃ ζωδίων κύκλος ποτὲ μὲν θέσιν ἐχέτω ὡς τὸν ΘΗΚ, ποτὲ δὲ ὡς τὸν ΛΜΝ, καὶ ἤχθω ἡ ΗΚ μὴ μείζων ἡμικυκλίου, καὶ γεγράφθω διὰ τοῦ Κ σημείου μέγιστος κύκλος ὁ ΚΝΖ ἐφαπτόμενος τ̃ ΕΖ. ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ κύκλου τινὸς ΕΖ ἐφάπεται, ἕτερον δὲ τούτῳ παράλληλον τέμνει τὸν ΒΑ, καὶ ἔστιν ὁ τοῦ ΑΒΓΔ πόλος μεταξὺ τ̃ ΑΒ, ΕΖ, καὶ γεγραμμένοι εἰσὶ μέγιστοι κύκλοι οἱ ΘΗΚ, ΛΜΝ ἐφαπτόμενοι τοῦ ΒΑ, μείζων ἐστὶν ἡ ΟΜΞ περιφέρεια τ̃ς ΟΔ περιφερείας. πάλιν, ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ κύκλου τινὸς τοῦ ΕΖ ἐφάπεται, ἕτερον δὲ τούτῳ παράλληλον τὸν ΒΑ τέμνει, καὶ ἔστιν ὁ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου πόλος μεταξὺ τῶν ΕΖ, ΒΑ· καὶ γεγράφθαι μέγιστος κύκλος ὁ ΖΝΚ

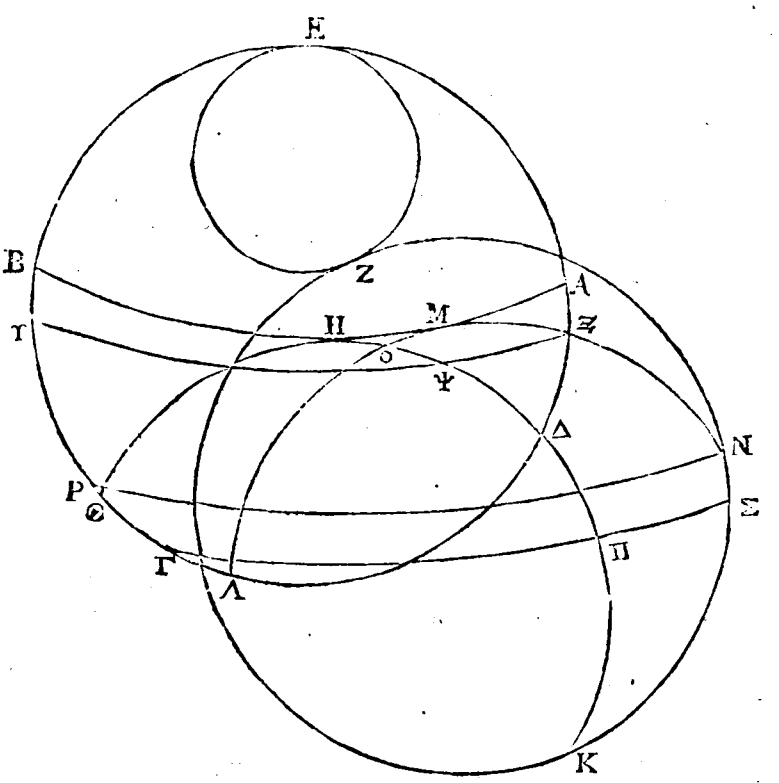
THEOREMA XIV.

Zodiaci circuli circumferentiæ æquales temporibus æqualibus non permutant hemisphærium conspicuum: sed majori tempore illa quæ contactui æstivi tropici propinquior fuerit, quam ea quæ remotior est ab eo: in tempore vero æquali quæ à tropico æstivo æque distant in utroque semicirculo; quando polus horizontis fuerit inter arcticum circulum & æstivum tropicum situs.

SIT horizon circulus ΑΒΓΔ; maximus autem eorum qui semper apparent sit circulus ΕΖ; æstivus tropicus sit ΒΑ; & sit polus circuli ΑΒΓΔ inter ΕΖ, ΒΑ; zodiacus vero circulus positionem habeat aliquando ut ΘΗΚ, interdum vero ΛΜΝ; & sumatur circumferentia ΗΚ quæ non sit major semicirculo; & per punctum Κ describatur maximus circulus ΚΝΖ tangens circulum ΕΖ. & quoniam in sphæra maximus circulus ΑΒΓΔ circulum quendam ΕΖ tangit, alterum autem ipsi parallelum ΒΑ secat; & [ex hyp.] est circuli ΑΒΓΔ polus inter ΑΒ, ΕΖ; & sunt descripti maximi circuli ΘΗΚ, ΛΜΝ tangentes circulum ΒΑ: circumferentia igitur ΟΜΞ major est circumferentia ΟΔ. rursus, quoniam in sphæra maximus circulus ΑΒΓΔ circulum quendam ΕΖ tangit, alium autem huic parallelum ΒΑ secat; & est circuli ΑΒΓΔ polus inter circulos ΕΖ, ΒΑ; & est descriptus maximus circulus

ZNK tangens circulum EZ: circuli igitur ZNK polus eſt inter circulos EZ, BA: quare ipſius alter polus eſt inter circulos æquales & parallelos ipſis EZ, BA. igitur KO major eſt quam OMN, ex quibus ipſa ΞMO major eſt ipſâ OΔ: & reliqua igitur ΔK major eſt ΞN. ponatur ipſi NΞ æqualis ΔΠ, ſintque circuli paralleli NP, ΓΠΣ, in quibus puncta N, Π ferantur. & quoniam ſemicirculus à puncto E inchoans, qui ad partes E, P proficiſcitur, non concurrit cum ſemicirculo à puncto Z inchoante, qui ad partes Z, N tendit: ſimilis igitur eſt circumferentia NP ipſi ΓΣ: quare circumferentia NP major eſt ipſa ΓΠ quam ut ei ſimilis ſit: majori igitur tempore punctum N inchoans à N circumferentiam NP percurrens pervenit

ἐφαπτόμενος τοῦ EZ· ὁ ἄρα τοῦ ZNK κύκλου πόλος μεταξὺ τῶν EZ, BA ἐστιν· ὁ ἄρα ἕτερος αὐτοῦ πόλος μεταξὺ τῶν ἴσων τε καὶ ἀλλήλων τῶν EZ, BA ἐστιν. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ KO τῆς OMN, ὧν ἡ ΞMO τῆς OΔ μείζων ἐστί· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔK τῆς ΞN μείζων ἐστί. κείσθω τῇ NΞ ἴση ἡ ΔΠ, καὶ ἔστωσαν καθ' ὧν φέρεται τὰ N, Π σημεῖα ἀλλήλοις κύκλοι οἱ NP, ΓΠΣ. ἐπεὶ ἀσύμπτωτόν ἐστι τὸ ἀπὸ τοῦ E ἡμικύκλιον ὡς ἐπὶ τὰ E, P μέρη τῷ ἀπὸ τοῦ Z ἡμικυκλίῳ ὡς ἐπὶ τὰ Z, N μέρη· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ NP περιφέρεια τῇ ΓΣ περιφερείᾳ· καὶ ἡ NP ἄρα τῆς ΓΠ μείζων ἐστὶν ἡ ὁμοία· ἐν τελείοις ἄρα χρόνῳ τὸ N ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ N τὴν NP περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ



ad P, quam Π inchoans à Π & circumferentiam ΠΓ percurrens pervenit ad Γ. ſed quo quidem tempore punctum N circumferentiam NP percurrens pervenit ad punctum P, circumferentia NΞ permutat hemiſphærium conſpicuum; quo vero tempore Π incipiens à puncto Π & circumferentiam ΠΓ percurrens pervenit ad punctum Γ, circumferentia ΠΔ permutat hemiſphærium conſpicuum: majori igitur tempore circumferentia ΞN permutat hemiſphærium conſpicuum quam ipſa ΔΠ. Dico quod & ΞN propior eſt contactui tropici æſtivi quam ΠΔ. deſcribatur per punctum Ξ circulus parallelus ΞT: æqualis igitur eſt circumferentia ΞM ipſi HΨ: quare major eſt circumferentia HΔ ipſa MΞ: circumferentia igitur ΞN propior eſt contactui tropici æſtivi quam ipſa ΠΔ circumferentia.

SIT horizon circulus ABΓΔ; maximus autem eorum qui ſemper apparent ſit circulus EZ; tropicus æſtivus ſit BHA; zodiacus vero poſitionem habeat ΓHΔ: dico quod & in

τὸ P περιγένεται, ἥπερ τὸ Π ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Π τὴν ΠΓ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Γ περιγένεται. ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ τὸ N τὴν NP περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ P περιγίνεται, ἡ NΞ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ τὸ Π ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Π τὴν ΠΓ διελθὸν ἐπὶ τὸ Γ περιγίνεται, ἡ ΠΔ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ἐν τελείοις ἄρα χρόνῳ ἡ ΞN ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἥπερ ἡ ΔΠ. λέγω ὅτι καὶ ἐγγίον ἐστὶν ἡ ΞN τοῦ σωναφοῦς τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ ἥπερ ἡ ΠΔ. γεγράφθω διὰ τοῦ Ξ παραλληλος κύκλος ὁ ΞΥ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΞM περιφέρεια τῇ HΨ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ HΔ τῆς MΞ· ἡ ΞN ἄρα ἐγγίον ἐστὶ τοῦ σωναφοῦς τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ ἥπερ ἡ ΠΔ.

ΕΣΤΩ ὁρίζων ὁ ΑΒΓΔ, μέγιστος δὲ τῶν ἀεὶ φαινερῶν ὁ EZ, θερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ BHA, ὁ ζωδιακὸς δὲ κύκλος θέσιν ἐχέτω τὴν ΓHΔ· λέγω ὅτι

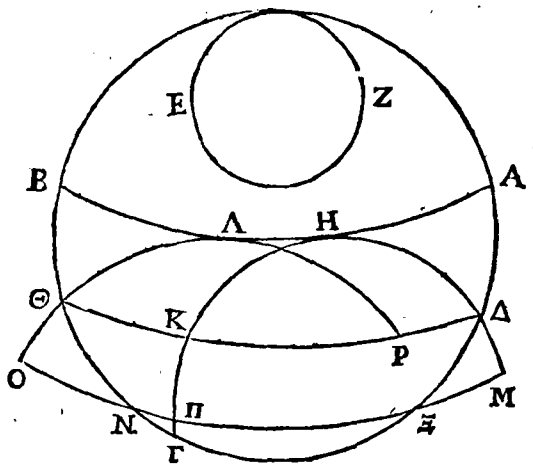
καὶ

καὶ ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμικυκλίῳ τῷ ὑπὸ τὰ Η, Γ μέρη αἱ ἴσαι περιφέρειαι οὐκ ἐν ἴσοις χρόνοις ἐξαλλάσσουσι τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἀλλ' ἐν πλείονι ἡ ἔγγιον τῆς σκιαφῆς τὸ θερινὸν τροπικὸν τῆς ἀπώτερον, ἐν ἴσῳ δὲ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τὸ θερινὸν τροπικὸν ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἡμικυκλίων.

Γεγράφθω διὰ τοῦ Δ παράλληλος κύκλος ὁ ΔΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΗ τῇ ΗΔ. καὶ μετακεκινήσθω ὁ τῶν ζωδίων κύκλος, καὶ θέσιν ἐχέτω ὡς τὸν ΘΛΡ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΚΗ, ΗΔ ἴσον ἀπέχουσι τῆς σκιαφῆς τὸ θερινὸν τροπικόν· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ ΔΗ ἀνατέλλει, ἐν τούτῳ καὶ ΚΗ δύνει, τουτέστιν ἡ ΛΘ. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ ἡ ΔΗ ἀνατέλλει ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ τὸ Η ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Α τὸν ΑΗ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Η παραγίνεται, ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ ἡ ΛΘ δύνει ὁ χρόνῳ ἐστὶν ἐν ᾧ τὸ Λ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Λ τὸν ΛΒ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Β παραγίνεται· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Η τὸν ΑΗ διελθὸν ἐπὶ τὸ Η παραγίνεται, ἐν τούτῳ καὶ τὸ Λ τὸν ΛΒ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Β παραγίνεται. πάλιν προσκείσθω ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Δ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Δ τὸν ΔΡΚΘ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Θ παραγίνεται· ὁ ἄρα χρόνος ἐν ᾧ τὸ Η ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Α τὸν ΑΗ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Η παραγίνεται, μετὰ τοῦ χρόνου ἐν ᾧ τὸ Δ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Δ τὸν ΔΘ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Θ παραγίνεται, ἴσος ἐστὶ τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ τὸ Λ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Λ τὸν ΛΒ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Β παραγίνεται, μετὰ τοῦ χρόνου ἐν ᾧ τὸ Δ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Δ τὸν ΔΚΘ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Θ παραγίνεται. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ τὸ Η ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Α τὸν ΑΗ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Η παραγίνεται, μετὰ τοῦ χρόνου ἐν ᾧ τὸ Δ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Δ τὸν ΔΘ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Θ παραγίνεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ ΗΔ περιφέρεια ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Λ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Λ τὸν ΛΒ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Β παραγίνεται, μετὰ τοῦ χρόνου ἐν ᾧ τὸ Δ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Δ τὸν ΔΡΘ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Θ παραγίνεται), ὁ χρό-

altero ſemicirculo, qui eſt ad partes Η, Γ, circumferentiæ æquales non æqualibus temporibus permutabunt conſpicuum hemiſphærium; ſed majori tempore, quæ propior eſt contactui tropici æſtivi, quam quæ remotior eſt ab eo; æquali vero tempore in unoquoque ſemicirculo, quæ æque diſtant ab æſtivo tropico.

Deſcribatur per punctum Δ parallelus circulus ΔΘ: æqualis igitur eſt circumferentia ΚΗ ipſi ΗΔ. circumvolvatur autem zodiacus, & poſitionem habeat veluti ΘΛΡ. & quoniam circumferentiæ ΚΗ, ΗΔ æque diſtant à contactu tropici æſtivi: igitur [per lem. præm.] quo tempore ΔΗ oritur & hoc tempore ipſa ΚΗ occidit, hoc eſt circumferentia ΛΘ. ſed tempus in quo circumferentia ΔΗ oritur, tempus eſt in quo punctum Η incipiens à puncto Α & circumferentiam ΑΗ percurrens pervenit ad Η punctum; & tempus in quo circumferentia ΛΘ occidit, tempus eſt in quo punctum Λ inchoans à puncto Λ & circumferentiam ΛΒ percurrens pervenit ad punctum Β: quare quo tempore punctum Η circumferentiam ΑΗ percurrens accedit ad punctum Η, eodem tempore & punctum Λ circumferentiam ΛΒ pertranſiens pervenit ad punctum Β. commune addatur tempus in quo Δ incipiens à puncto Δ & circumferentiam ΔΡΚΘ percurrens pervenit ad punctum Θ: quare tempus, in quo punctum Η incipiens à puncto Α & circumferentiam ΑΗ percurrens accedit ad punctum Η, una cum tempore in quo Δ inci-

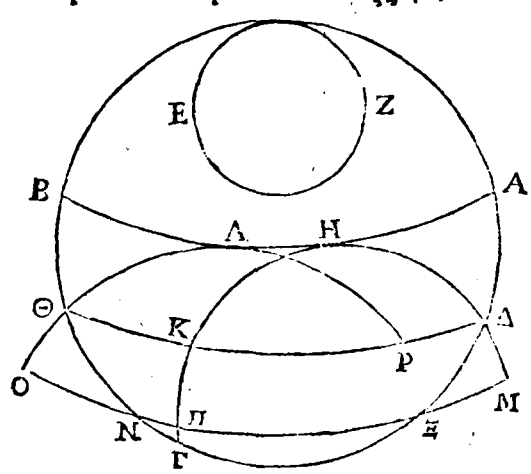


piens à puncto Δ & circumferentiam ΔΘ percurrens accedit ad punctum Θ, æquale eſt tempori in quo Λ incipiens à puncto Λ & circumferentiam ΛΒ percurrens pervenit ad punctum Β, una cum tempore, in quo Δ inchoans à puncto Δ & circumferentiam ΔΚΘ percurrens accedit ad punctum Θ. verum tempus in quo punctum Η incipiens ab Α & circumferentiam ΑΗ percurrens venit ad punctum Η, una cum tempore in quo Δ inchoans à puncto Δ & circumferentiam ΔΘ pertranſiens pervenit ad punctum Θ, tempus eſt in quo circumferentia ΗΔ permutat conſpicuum hemiſphærium; & tempus in quo Λ inchoans à puncto Λ & circumferentiam ΛΒ percurrens accedit ad punctum Β, una cum tempore in quo punctum Δ incipiens à Δ & circumferentiam ΔΡΘ percurrens pervenit ad punctum Θ,

tempus

tempus eſt in quo circumferentia Δ Θ permutat conſpicuum hemiſphærium: quare quo tempore circumferentia K H permutat conſpicuum hemiſphærium, hoc eodem tempore & etiam circumferentia H Δ. ſumatur punctum quoddam M, ut circumferentia H Δ ſit æqualis ipſi Δ M; & ſit M Ξ N O parallelus circulus in quo punctum M feratur: æqualis igitur eſt Δ M circumferentiæ K Π, & æqualiter diſtant ipſæ Δ M, K Π ab æſtivi tropici contactu: quare [per lem. præc.] quo tempore circumferentia Δ M oritur, hoc eodem tempore & Π K occidit, hoc eſt ipſa Θ O. ſed tempus in quo circumferentia Δ M oritur, tempus eſt in quo punctum M incipiens à puncto M & circumferentiam M Ξ percurrens pervenit ad punctum Ξ; & tempus in quo circumferentia Θ O occidit, tempus eſt in quo punctum O incipiens ab N & circumferentiam N O percurrens pervenit ad punctum O: quare tempus in quo punctum M inchoans ab M & circumferentiam M Ξ percurrens accedit ad punctum Ξ, idem eſt ac tempus in quo O inchoans à puncto N & circumferentiam N O pertranſiens accedit ad O punctum. commune addatur tempus in quo punctum Ξ incipiens ab Ξ & circumferentiam Ξ N percurrens accedit ad punctum N: quare tempus in quo M incipiens à puncto M & circumferentiam M N percurrens pervenit ad punctum N, æquale eſt tempori in quo punctum O incipiens ab ipſo Ξ & circumferentiam Ξ O percurrens pervenit ad punctum O. ſed tempus in quo M incipiens à puncto M & circumferentiam M N pertranſiens pervenit ad punctum N, tempus eſt in quo Δ M circumferentia permutat conſpicuum hemiſphærium; & tempus in quo punctum O incipiens à Ξ & circumferentiam Ξ O percurrens accedit ad punctum O, tempus eſt in quo circumferentia O Θ, hoc eſt ipſa K Π, permutat conſpicuum hemiſphærium: quare quo tempore Δ M permutat conſpicuum hemiſphærium, hoc ipſo tempore & etiam circumferentia K Π. & quoniam H Δ majori tempore permutat conſpicuum hemiſphærium quam circumferentia Δ M; ſed quo tempore H Δ permutat conſpicuum hemiſphærium, hoc eodem tempore & ipſa H K; quo vero tempore Δ M circumferentia permutat conſpicuum hemiſphærium, hoc tempore etiam & K Π circumferentia: quare majori tempore circumferentia H K permutat conſpicuum hemiſphærium quam K Π circumferentia.

νος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ Λ Θ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ K H περιφέρεια ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἐν τούτῳ καὶ ἡ H Δ. εἰλήφθω δή τι σημεῖον τὸ M, ὡς ἴσην εἶναι τὴν H Δ τῇ Δ M, καὶ ἔστω καθ' ὃ φέρεται τὸ M σημεῖον παράλληλος κύκλος ὁ M Ξ N O· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Δ M τῇ K Π, καὶ ἴσον ἀπέχουσιν αἱ Δ M, K Π τῆς θερινῆς τροπικῆς· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ Δ M περιφέρεια ἀνατέλλει, ἐν τούτῳ ἡ Π K δύνει, τουτέστιν ἡ Θ O. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ ἡ Δ M ἀνατέλλει, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ τὸ M ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ M τὴν M Ξ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ξ παραγίνεται· ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ ἡ Θ O δύνει, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ τὸ τὸ O ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ N τὴν N O περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ O παραγίνεται· ὁ ἄρα χρόνος ἐν ᾧ τὸ M ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ M τὴν M Ξ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ξ παραγίνεται, ὁ αὐτός ἐστι τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ τὸ O ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ N τὴν N O περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ O παραγίνεται. κοινὸς προσκείσθω ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Ξ ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Ξ τὴν Ξ N περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ N παραγίνεται· ὁ ἄρα χρόνος, ἐν ᾧ τὸ M ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ M τὴν M N περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ N παραγίνεται, ἴσος ἐστὶ τῷ χρόνῳ, ἐν ᾧ τὸ O ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Ξ τὴν Ξ O περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ O παραγίνεται. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος, ἐν ᾧ τὸ M ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ M τὴν M N περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ N παραγίνεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ Δ M περιφέρεια ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ τὸ O ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Ξ τὴν Ξ O περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ O παραγίνεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ Θ O περιφέρεια, τουτέστιν ἡ K Π ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ Δ M ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἐν τούτῳ καὶ ἡ K Π. ἐπεὶ ἐν πλείονι χρόνῳ ἡ H Δ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ Δ M, ἀλλ' ἐν μὲν χρόνῳ ἡ H Δ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἐν τούτῳ καὶ ἡ H K ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἐν ᾧ δὲ ἡ Δ M ἐν τούτῳ καὶ ἡ K Π· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ H K ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ K Π.



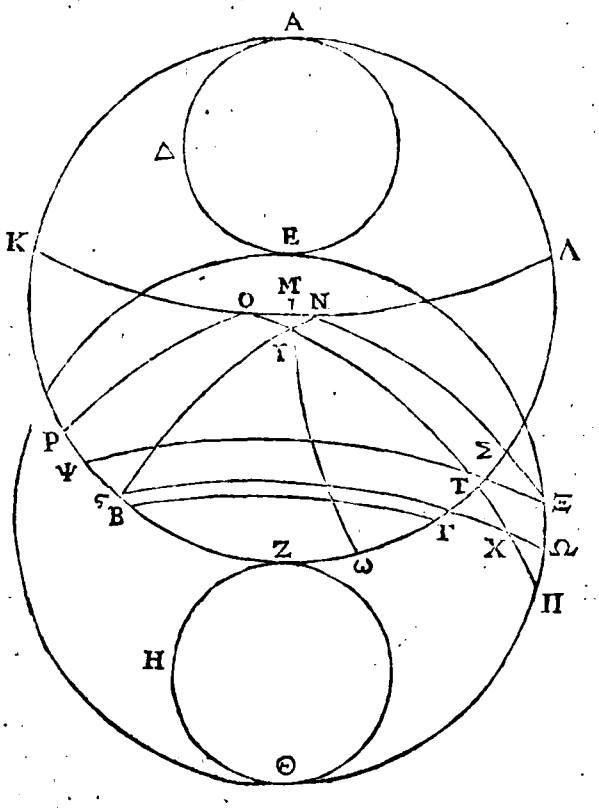
ΑΛ-

ΑΛΛΩΣ.

ΕΣΤΩ ἐν κόσμῳ ὁρίζων κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ μέγιστος μὲν τῶν ἀεὶ φαινερῶν ὁ ΑΔΕ, μέγιστος δὲ τῶν ἀεὶ ἀφανῶν ὁ ΖΗΘ, ὁ δὲ θερινὸς μὲν τροπικὸς ἔστω ὁ ΚΛ, χειμερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ ΒΓ, * ὧν δὲ ἔστω ἀνατολικὰ μὲν τὰ Λ, Γ μέρη, δυτικὰ δὲ τὰ Κ, Β, ζωδιακὰ δὲ θέσεις ἔστωσαν ἐφ' ἃ μὲν τὰ καρκίνου ἡμικυκλίου αἱ ΝΞ, ΟΠ, καὶ ἀπειλήφθω ἡ ΟΠ περιφέρεια μὴ μείζων ἡμικυκλίου ἔστω, καὶ μέγιστος κύκλος γεγράφθω ἀφ' οὗ τὸ Π ἐφαπτόμενος τοῦ ΑΔΕ· ἐφάψεται ἄρα καὶ τοῦ ΖΗΘ, ἤτοι δὴ ἀφ' οὗ τὸ Ο σημεῖον ἥξει, ἢ ὑπερπεσεῖ τὸ Ο σημεῖον. γεγράφθω, ὧν ἔστω ὁ ΕΘΠ, ὥστε ἀσύμπτωτον εἶναι τὸ ἀπὸ τοῦ Ε ἡμικυκλίου ὡς ἐπὶ τὰ Ξ, Π μέρη τῷ ἀπὸ τοῦ Α ἡμικυκλίῳ ὡς ἐπὶ τὰ Κ, Ρ μέρη, καὶ συμπεπληρώθωσαν οἱ ΞΝΒ, ΠΟΡ κύκλοι. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ἐστὶν ὁ ΑΒΓ, καὶ τέμνουσι δύο μέγιστοι κύκλοι ἀλλήλους οἱ ΒΝΣ, ΡΟΤΠ, καὶ ἔστιν ὁ τοῦ ΑΒΓ κύκλου πόλος μεταξὺ τῶν ΑΔΕ, ΚΛ περιφερειῶν· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΣΝΥ περιφέρεια τῆς ΥΤ περιφερείας· (ἀφὰ γὰρ τοῦ Υ ὁ τοῦ Μ πόλου τοῦ ΑΒΓ ἡμικυκλίου μέγιστος κύκλος γεγράφθω ὁ ΜΥω· ὁ ΜΥω ἄρα ὀρθὸς ἐστὶ πρὸς τὸν ΑΒΓ) ἡ ΥΤ ἄρα περιφέρεια τῆς ΥΝΣ περιφερείας ἐλάσσων ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ δύο μέγιστοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΕΘΠΩ τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἐφάπτονται τοῦ ΑΔΕ, καὶ τῷ ΑΔΕ ἄρα ἐφάπτονται τοῦ ΑΔΕ, καὶ τῷ ΑΔΕ ἄρα ἐφάπτονται τοῦ ΚΛ τέμνουσι, καὶ ἔστιν ὁ τοῦ ΑΒΓ πόλος μεταξὺ τῶν ΑΔΕ, ΚΛ κύκλων· ὁ δὲ τοῦ ΕΘΠ ἄρα πόλος μεταξύ ἐστι τῶν ΑΔΕ, ΚΛ κύκλων· ὁ ἄρα ἕτερος αὐτοῦ πόλος ἐστὶ μεταξὺ τῶν ΗΖΘ, ΒΓ κύκλων. ἐπεὶ δὲ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ἐστὶν ὁ ΕΘΠ, ὁ δὲ τοῦ ΕΘΠ τέμνουσι δύο μέγιστοι κύκλοι οἱ ΡΟΠ, ΒΝΞ, καὶ ἔστιν ὁ τοῦ ΕΘΠ πόλος μεταξὺ τῶν ΒΓ, ΗΘΖ· μείζων ἐστὶν ἡ ΠΥ περιφέρεια τῆς ΥΝΞ περιφερείας. ὧν ἡ ΥΤ τῆς ΥΝΣ ἐλάσσων ἐστίν· λοιπὴ ἄρα ἡ ΤΠ λοιπῆς τῆς ΣΞ μείζων ἐστί. κείσθω τῇ ΣΞ περιφερείᾳ ἴση περιφέρεια ἡ ΤΧ καὶ γεγράφθωσαν σφαιρικοὶ κύκλοι καθ' ὧν φέρεται τὰ Ξ, Χ σημεῖα οἱ ΞΨ, Ως· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΞΨ περιφέρεια τῇ Ως περιφερείᾳ· ἡ ΞΨ ἄρα τῆς Χς μείζων ἐστὶν ἡ ὁμοία· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ τὸ Ξ σημεῖον τὴν ΞΨ περιφέρειαν διαπορεύ-

ALITER.

SIT in mundo horizon circulus ΑΒΓ, maximus autem ſemper-apparentium ſit circulus ΑΔΕ, maximus vero ſemper-occultorum ſit circulus ΖΗΘ; & tropicus æſtivus ſit ΚΛ, hybernus autem ſit ΒΓ; & ſint partes orientales quidem Λ, Γ, occidentales vero Κ, Β; zodiaci poſt cancrum ſemicirculi poſitiones ſint ipſæ ΝΞ, ΟΠ; ſumaturque circumferentia ΟΠ quæ non ſit major ſemicirculo, & per punctum Π deſcribatur maximus circulus tangens circulum ΑΔΕ: tanget igitur etiam & circulum ΖΗΘ; & vel tranſibit per punctum Ο, vel per ſuperiorem partem ipſius Ο. deſcribatur, ſitque ipſe ΕΘΠ, ita ut ſemicirculus à puncto Ε inchoans, qui ad partes Ξ, Π tendat, non concurrat cum ſemicirculo à puncto Α proficiſcente, qui ad partes Κ, Ρ proficiſcatur; & compleantur circuli ΞΝΒ, ΠΟΡ. & quoniam in ſphæra maximus circulus eſt ΑΒΓ; & ſunt duo maximi circuli ΒΝΣ, ΡΟΤΠ, qui ſe mutuo ſecant bifariam; atque [ex hyp.] eſt circuli ΑΒΓ polus inter circulos ΑΔΕ, ΚΛ: major igitur eſt circumferentia ΣΝΤ ipſa ΤΤ: (etenim per Υ & polum Μ ſemicirculi ΑΒΓ traductus eſt maximus circulus ΜΥω, & igitur ΜΥω eſt ad ΑΒΓ rectus) quare & ipſa ΤΤ circumferentia minor eſt ipſa ΥΝΣ. & quoniam in ſphæra duo circuli maximi ΑΒΓ, ΕΘΠΩ eundem circulum ΑΔΕ tangunt, & huic ΑΔΕ parallelum alterum ΚΛ ſecant; atque eſt circuli ΑΒΓ polus inter circulos ΑΔΕ, ΚΛ: erit & ipſius ΕΘΠ polus etiam inter ΑΔΕ, ΚΛ circulos: quare & alter polus ipſius eſt inter circulos ΗΖΘ ΒΓ. & quoniam in ſphæra maximus circulus eſt ΕΘΠ; & ipſum ΕΘΠ circulum ſecant duo alii maximi circuli ΡΟΠ, ΒΝΞ; & eſt circuli ΕΘΠ polus inter circulos ΒΓ, ΗΘΖ: major igitur eſt circumferentia ΠΥ ipſa ΥΝΞ. ex quibus ΥΤ minor eſt ipſa ΥΝΣ: & reliqua igitur ΤΠ major eſt reliqua ΣΞ. ponatur ipſi ΣΞ æqualis circumferentia ΤΧ; & deſcribantur circuli paralleli, qui ſint ΞΨ, Ως, in quibus puncta Ξ, Χ ferantur: ſimilis igitur eſt circumferentia ΞΨ ipſi Ως: quare & ΞΨ major eſt circumferentia Χς quam ut ei ſimilis ſit: majori igitur tempore punctum Ξ circumferentiam ΞΨ percurrit quam punctum



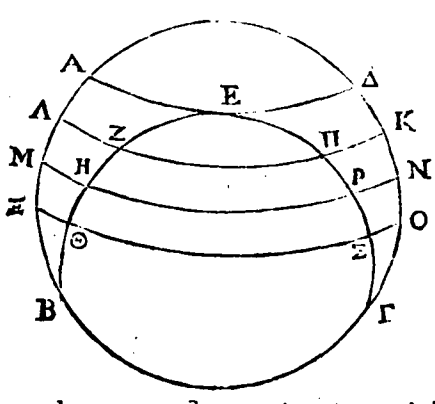
* In Cod. Bodl. καὶ ἔστω ὁ τοῦ ΑΒΓ κύκλου πόλος μεταξὺ τῶν ΑΔΕ, ΚΛ κύκλων, καὶ ἔστω ἀνατολικὰ &c.

Χ ipſam Χς pertranſeat. verum tempus quidem in quo punctum Ζ circumferentiam ΖΨ percurrit, tempus eſt in quo circumferentia ΣΞ permutat manifeſtum hemiſphærium; tempus autem in quo punctum Χ percurrit circumferentiam Χς, tempus eſt in quo ſimiliter ipſa ΤΧ permutat manifeſtum hemiſphærium: quare majori tempore circumferentia ΣΞ permutat manifeſtum hemiſphærium quam ipſa ΤΧ. atque eſt ipſa ΣΞ propinquior contactui tropici æſtivi quam ΤΧ.

Quare majori tempore circumferentia illa permutat manifeſtum hemiſphærium, quæ quidem contactui tropici æſtivi propinquior eſt, quam quæ ab eo eſt remotior.

Similiter autem circumferentiæ æquales, quæ ſunt in ſemicirculo poſt capricornum, non temporibus æqualibus permutant conſpicuum hemiſphærium; ſed majori tempore quæ propior eſt tropico æſtivo, quam quæ remotior eſt ab eo: æquali vero tempore quæ æque diſtant ab alterutro contactu.

Sit in mundo horizon ΑΒΓΔ; æſtivus tropicus ſit ΑΔ; zodiacus circulus poſitionem habeat ΒΕΓ; ſit autem circumferentia ΒΕ in ſemicirculo qui eſt poſt capricornum; & circumferentia ΕΓ in ſemicirculo qui eſt poſt cancrum; & ſint partes quidem orientales verſus punctum Δ, occidentales autem verſus punctum Β; & ſumantur æquales circumferentiæ ΖΗ, ΗΘ: dico quod circumferentia ΖΗ majori tempore permutat conſpicuum hemiſphærium quam circumferentia ΗΘ.



Deſcribantur paralleli circuli ΚΛ, ΜΝ, ΞΟ, in quibus puncta Ζ, Η, Θ ferantur: æqualis igitur eſt circumferentia ΖΗ ipſi ΠΡ; & circumferentia ΗΘ ipſi ΡΣ. ſed [ex conſtr.] circumferentia ΖΗ eſt æqualis circumferentiæ ΗΘ: quare & ΠΡ ipſi ΡΣ æqualis eſt. & quoniam [per lem præm.] quo tempore circumferentia ΠΡ occidit & circumferentia ΖΗ oritur; commune apponatur tempus in quo punctum Π circumferentiam ΚΛ percurrit, quod æquale eſt tempori quo Ζ punctum percurrit circumferentiam ΚΛ: tempus igitur in quo punctum Π percurrit circumferentiam ΚΛ & circumferentia ΠΡ occidit, æquale eſt tempori in quo circumferentia ΖΗ oritur & punctum Ζ circumferentiam ΚΛ pertranſit. verum tempus quidem in quo punctum Π ipſam ΚΛ percurrit & circumferentia ΠΡ occidit, tempus eſt in quo circumferentia ΠΡ permutat conſpicuum hemiſphærium; & tempus in quo ΖΗ oritur & punctum Ζ circumferentiam ΚΛ percurrit, tempus eſt in quo ipſa ΖΗ permutat conſpicuum hemiſphærium: quare circumferentiæ ΖΗ, ΠΡ æquali tempore permutant conſpicuum hemiſphærium. ſimiliter demonſtrabitur quod & ipſæ ΗΘ, ΡΣ æquali etiam tempore permutabunt conſpicuum hemiſphærium. ſed [per part. prior. hujus] ΠΡ majori tempore permutat con-

ἤπερ τὸ ΧΤ Χς. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ τὸ Ξ σημεῖον τὴν ΖΨ περιφέρειαν διαπορεύεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ ΣΞ περιφέρεια ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμιφαίριον· ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Χ σημεῖον τὴν Χς περιφέρειαν διαπορεύεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ ΤΧ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ἐν ἴσοις ἄρα χρόνοις ἡ ΣΞ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ ΤΧ. καὶ ἔστιν ἡ ΣΞ ἔγγιον τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ ἤπερ ἡ ΤΧ.

Ἐν ἴσοις ἄρα χρόνῳ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἡ ἔγγιον τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ τῆς ἀπώτερον.

ΩΣΑΥΤΩΣ δὲ καὶ ὅτι τοῦ μετὰ τὸν αἰγόκερω ἡμικυκλίου αἱ ἴσαι περιφέρειαι οὐκ ἐν ἴσοις χρόνοις ἐξαλλάσσουσι τὸ ἡμισφαίριον φανερόν, ἀλλ' ἐν ἴσοις ἡ ἔγγιον τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ τὸ ἀπώτερον, ἐν ἴσῳ δὲ αἱ ἴσαι ἀπέχουσαι ὁποτερασοῦν τῶν σωναφῶν.

Ἔστω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ ΑΒΓΔ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ὁ ΑΔ, ὁ δὲ τῶν ζωδίων κύκλος ἔστω ἐχέτω τὴν ΒΕΓ, καὶ ἔστω ἡ μὲν ΒΕ περιφέρεια ἐπὶ τοῦ μετὰ τὸν αἰγόκερω ἡμικυκλίου, ἡ δὲ ΕΓ ἐπὶ τοῦ μετὰ τὸ καρκῖνον, καὶ ἔστωσαν ἀνατολικὰ μὲν τὰ Δ μέρη, δυτικὰ δὲ τὰ Β, καὶ ἀπειλήφθωσαν ἴσαι περιφέρειαι αἱ ΖΗ, ΗΘ· λέγω ὅτι ἡ ΖΗ ἐν πλείονι χρόνῳ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ ΗΘ.

Γεγράφθωσαν ὡσαύτως κύκλοι οἱ ΚΛ, ΜΝ, ΞΟ, καθ' ὧν φέρεται τὰ Ζ, Η, Θ σημεῖα· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ περιφέρεια τῇ ΠΡ περιφερείᾳ, ἡ δὲ ΗΘ περιφέρεια τῇ ΡΣ. ἀλλ' ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΠΡ ἄρα τῇ ΡΣ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΠΡ διῶκε ἡ ΖΗ ἀνατέλλει, κοινὸς προσκείσθω ὁ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Π σημεῖον τὴν ΚΛ περιφέρειαν διαπορεύεται, ἴσος ὢν τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ τὸ Ζ σημεῖον τὴν ΚΛ περιφέρειαν διαπορεύεται· ὁ ἄρα χρόνος ἐν ᾧ τὸ Π σημεῖον τὴν ΚΛ περιφέρειαν διαπορεύεται καὶ ἡ ΠΡ διῶκε, ἴσος ἐστὶ τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ ἡ ΖΗ περιφέρεια ἀνατέλλει καὶ τὸ Ζ σημεῖον τὴν ΚΛ περιφέρειαν διαπορεύεται. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ τὸ Π σημεῖον τὴν ΚΛ περιφέρειαν διαπορεύεται καὶ ἡ ΠΡ διῶκε, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ΠΡ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ ΖΗ ἀνατέλλει καὶ τὸ Ζ σημεῖον τὴν ΚΛ περιφέρειαν διαπορεύεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ ΖΗ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· αἱ ΖΗ, ΠΡ ἄρα ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΗΘ, ΡΣ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον. ἡ δὲ ΠΡ τῆς ΡΣ ἐν πλείονι χρόνῳ ἐξαλλάττει

λάβῃ τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἢ ἐπεδείχθησαν αἱ ΖΗ, ΠΡ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάξαι τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· καὶ ἡ ΖΗ ἄρα ἐν πλείονι χρόνῳ ἐξαλλάττῃ τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ ΗΘ.

Τῶν ἄρα τῶν ζωδίων κύκλοι αἱ ἴσαι περιφέρειαι οὐκ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἀλλ' ἐν πλείονι ἡ ἐγγίον τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ τῆς ἀπώτερον. ἢ συναποδείξει ὅτι αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Καὶ ἐν καθόλῳ χρὴ εἰδέναι, ὅτι, τῶν προηγουμένων σημείων ἐπὶ τοῦ ὁρίζοντος ὄντων, ἡ περιφέρεια οὔτε ἀνατέλλει οὔτε δύνει, τῶν δὲ ἑπομένων σημείων ἐπὶ τοῦ ὁρίζοντος ὄντων πᾶσα ἀνίσχει, καὶ πᾶσα δύνει· τὰ γὰρ προηγούμενα σημεῖα καὶ πρότερα ἀνατέλλει καὶ πρότερα δύνει κατὰ τὸ δ' θεώρημα. τῆς δὲ ΠΡ περιφερείας προηγούμενον ἦν σημεῖον τὸ Π, ἑπόμενον δὲ τὸ Η. λαβὼν δὴ τὸ μὲν ΠΡ δύνουσαν, τὸ δὲ ΗΖ ἀνατέλλουσαν, ἀναγκαίως τὰς ἐξαλλαγὰς αὐτῶν ζητῶν τὰς ἐπὶ τοῦ φανεροῦ ἡμισφαιρίου προσέλαβε τὸ μὲν ΠΡ τῷ δύσιν, τὸ δὲ ΗΖ τῷ ἀνατολήν· ὅτι γὰρ τὸ Π ἐπὶ τὸ Λ ἔρχεται, ἡ ΠΡ ἔτι δύνει, ἀλλ' ἔτι ὑπὲρ γῆς ἐστι· διὸ προσέλαβεν αὐτῆς τῷ δύσιν. τὸ γὰρ Π κατὰ τὸ Κ ἐπὶ τῆς ἀνατολῆς ὄντος, ἡ ΠΡ πᾶσα ὑπὸ γῆν ἐστι, καὶ κινουμένης τῆς σφαίρας ἄνω φέρεται πᾶσα· διὸ ἐν ᾧ τὸ Π ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὸ Λ ἔρχεται μετὰ τῆς δύσεως τῆς ΠΡ, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ ΠΡ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον. πάλιν, ὅτι Ζ κατὰ τὸ Κ ἐπὶ τῆς ἀνατολῆς ὄντος, ἡ ΗΖ πᾶσα προανέτειλε· διὸ προσέλαβεν αὐτῆς τῷ ἀνατολήν. γενομένου δὲ τοῦ Ζ κατὰ τὸ Λ, πᾶσα ἡ ΗΖ δύνει· διὸ ἐν ᾧ τὸ Ζ ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὸ Λ ἔρχεται μετὰ τῆς ἀνατολῆς τῆς ΗΖ, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ ΗΖ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον. ἐὰν δὲ, ὡς ἔχει ἐν ἄλλῃ ὑποθέσει, τῆς μὲν ΠΡ τῷ ἀνατολήν, τῆς δὲ ΗΖ τῷ δύσιν ζητῶν, ὁμοίως λήψει τὰ Π, Ζ σημεῖα, ἀλλὰ τὰ Ρ, Η, καὶ τὸν χρόνον ἐν ᾧ τό τε Ρ τῷ ΝΜ διάρχει καὶ τὸ Η τῷ ΝΜ.

ΣΧΟΛΙΟΝ α'. ΕΚ ΠΕΡΙΣΣΟΥ.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἀπειλήφθω ἡ ΕΖ μὴ μείζων τεταρτημορίου, καὶ ἔστω καθ' ἣν φέρεται τὸ Ζ σημεῖον ὁ ΖΚΘ κύκλος· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ. κείσθω τῇ ΕΚ ἴση ἡ ΛΚ· ὅλη ἄρα ἡ ΖΕΚ ὅλῃ τῇ ΕΚΛ ἐστιν ἴση. λέγω ὅτι αἱ μὲν τεταρτημορίου ἐστὶν ἡ ΕΖ, αἱ ΖΕΚ, ΕΚΛ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· αἱ δὲ ἐλάσσων ἐστὶ τεταρ-

spicuum hemisphærium quam ipsa ΡΣ; & est etiam demonstratum quod ΖΗ, ΠΡ æquali tempore permutant conspicuum hemisphærium: quare & circumferentia ΖΗ majori tempore permutat conspicuum hemisphærium quam ipsa ΗΘ.

Zodiaci igitur circuli circumferentiæ æquales haud æquali tempore permutant conspicuum hemisphærium, sed in majori tempore quæ propior est tropico æstivo quam quæ remotior est ab eo: æquali vero tempore quæ inde æque distant.

SCHOLIUM.

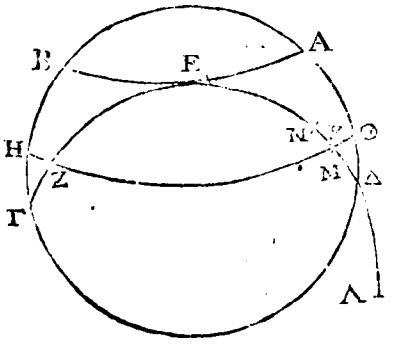
In universum scire oportet, quod præcedente circumferentiæ puncto in horizonte existente, ipsa circumferentia neque ortum habuit neque occasum, subsequente vero ejus puncto in horizonte posito, tota prius ortum habuit vel occasum; antecedentia enim puncta prius oriuntur & prius occidunt per theorema quartum. circumferentiæ itaque ΠΡ punctum præcedens erat Π; ipsius vero ΗΖ præcedens punctum Η. *auctor* igitur sumens circumferentiam quidem ΠΡ occidentem, ipsam vero ΗΖ orientem, earumque permutationes quærens in conspicuo hemisphærio, necessario sumpsit occasum quidem circumferentiæ ΠΡ, ortum vero ipsius ΗΖ. nam quando punctum Π ad Λ pervenit, circumferentia ΠΡ nondum occidit, sed adhuc supra terram est; quare sumpsit ejus occasum: puncto enim Π existente in ortu ad Κ, tota circumferentia ΠΡ est infra terram, & mota sphæra tota sursum fertur: quare tempus quo punctum Π à Κ ad Λ pervenit una cum tempore quo ipsa circumferentia ΠΡ occidit, est tempus quo circumferentia ΠΡ permutat conspicuum hemisphærium. rursus, puncto Ζ existente in ortu ad Κ, tota circumferentia ΗΖ prius ortum habuit; quare *auctor* sumpsit ejus ortum. posito autem puncto Ζ ad Λ, tota circumferentia ΗΖ occasum habuit: quare tempus quo punctum Ζ à Κ ad Λ pervenit una cum tempore quo circumferentia ΗΖ oritur, est tempus quo circumferentia ΗΖ permutat conspicuum hemisphærium. si vero *quærat* (ut fit in alia hypothesi) circumferentiæ quidem ΠΡ ortum, circumferentiæ vero ΗΖ occasum; non amplius sumet puncta Π, Ζ, sed ipsa Ρ, Η, tempusque quo punctum Ρ percurrit circumferentiam ΝΜ, & quo punctum Η percurrit ipsam ΝΜ.

SCHOLIUM I. EX ABUNDANTI.

Iisdem suppositis, assumatur circumferentia ΕΖ quæ non sit major quarta zodiaci parte; & sit ΖΚΘ parallelus circulus in quo punctum Ζ feratur: æqualis igitur est circumferentia ΕΖ circumferentiæ ΕΚ. ponatur ipsi ΕΚ æqualis circumferentia ΛΚ: tota igitur ΖΕΚ toti ΕΚΛ æqualis est. dico quod, si quidem circumferentia ΕΖ quarta zodiaci pars est, ipsæ circumferentiæ ΖΕΚ, ΕΚΛ æquali tempore permutabunt conspicuum hemisphærium; si vero circumfe-

rentia EZ eſt minor quarta zodiaci parte, quod circumferentia ZEK majori tempore permutabit conſpicuum hemiſphærium quam ipſa EKΛ.

Sit primum circumferentia EZ quarta zodiaci pars: quare & ipſa EK etiam eſt quarta pars zodiaci; igitur circulus HZΘ eſt æquinoctialis. & quoniam EK, KΛ circumferentiæ æque diſtant ab æquinoctiali circulo: quare [per 12.Phæn.] quo tempore circumferentia EK occidit, eodem tempore & KΛ etiam occidit. ſed [per lem.præm.] quo tempore EK circumferentia occidit, hoc ipſo tempore & circumferentia EZ oritur: quare quo tempore circumferentia EZ oritur, & ipſa KΛ occidit. commune adponatur tempus in quo EK permutat conſpicuum hemiſphærium: tempus igitur in quo circumferentia KΛ occidit una cum tempore in quo EK permutat conſpicuum hemiſphærium, æquale eſt tempori in quo ipſa EZ oritur, una cum tempore in quo EK circumferentia permutat conſpicuum hemiſphærium. verum tempus in quo ΛK occidit & ipſa KE permutat conſpicuum hemiſphærium, tempus eſt in quo circumferentia EΛ permutat conſpicuum hemiſphærium; & tempus in quo EZ oritur una cum tempore in quo EK permutat conſpicuum hemiſphærium, tempus eſt in quo circumferentia ZEK permutat conſpicuum hemiſphærium: quare circumferentiæ ZEK, EKΛ æquali tempore permutant conſpicuum hemiſphærium.



Sed ſit circumferentia EZ minor quarta zodiaci parte: quare & ipſa EK minor eſt etiam quarta zodiaci parte. ponatur EM quarta zodiaci pars; & ponatur ipſi MK æqualis KN: reliqua igitur EN reliquæ MΛ eſt æqualis. atque eſt circumferentia EN propior contactui tropici æſtivi quam ipſa MΛ: majori igitur tempore [per 12.Phæn.] circumferentia EN occidit, quam ipſa MΛ. eadem ratione & circumferentia NK majori quoque tempore occidit quam ipſa KM: igitur & circumferentia EK majori etiam tempore occidit quam circumferentia KΛ. ſed [per lem. præm.] quo tempore circumferentia EK occidit, & ipſa EZ oritur: quare majori tempore circumferentia EZ oritur quam ipſa KΛ occidit. commune adponatur tempus, in quo circumferentia EK permutat conſpicuum hemiſphærium: quare majori tempore ZEK permutat conſpicuum hemiſphærium quam EΛ circumferentia.

τημορίῳ ἡ EZ, ἐν ἐλάσσονι χρόνῳ ἡ ZEK ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ EKΛ.

Ἔστω πρότερον τεταρτημορίου ἡ EZ· καὶ ἡ EK ἄρα τεταρτημορίς ἐστιν· ἰσημερινὸς ἄρα ἐστὶν ὁ HZΘ. καὶ ἐπεὶ αἱ EK, KΛ ἴσον ἀπέχουσι τοῦ ἰσημερινοῦ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ EK δύσει ἐν τούτῳ καὶ ὁ KΛ. ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἡ EK δύσει ἐν τούτῳ ἡ EZ ἀνατέλλει· καὶ ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ EZ ἀνατέλλει ἡ KΛ δύσει. κοινὸς προσκείσθω ὁ χρόνος, ἐν ᾧ ἡ EK ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ὁ ἄρα χρόνος ἐν ᾧ ἡ KΛ δύσει, μετὰ τοῦ χρόνου ἐν ᾧ ἡ EK ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἴσος ἐστὶ τῷ χρόνῳ, ἐν ᾧ ἡ EZ ἀνατέλλει καὶ ἡ EK ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ ἡ ΛK δύσει καὶ KE ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ EΛ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ ἡ EZ ἀνατέλλει μετὰ τοῦ χρόνου ἐν ᾧ ἡ EK ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ ZEK ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· αἱ ZEK, EKΛ ἄρα ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον.

Ἀλλ' ἔστω ἡ EZ περιφέρεια ἐλάσσων τεταρτημορίου· καὶ ἡ EK ἄρα ἐλάσσων ἐστὶ τεταρτημορίου. κείσθω τεταρτημορίου ἡ EM, καὶ κείσθω τῇ MK ἴση ἡ KN· λοιπὴ ἄρα ἡ EN λοιπῇ τῇ MΛ ἐστιν ἴση. καὶ ἡ EN ἔγγιον ἐστὶ συναφῆς τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ ἤπερ ἡ MΛ· ἐν ἐλάσσονι ἄρα χρόνῳ ἡ EN δύσει ἤπερ ἡ MΛ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ NK ἐν ἐλάσσονι χρόνῳ δύσει ἤπερ ἡ KM· καὶ ἡ EK ἄρα τῆς KΛ ἐν ἐλάσσονι χρόνῳ δύσει. ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἡ EK δύσει ἡ EZ ἀνατέλλει· ἐν ἐλάσσονι ἄρα χρόνῳ ἡ EZ ἀνατέλλει ἤπερ ἡ KΛ δύσει. κοινὸς προσκείσθω ὁ χρόνος ἐν ᾧ ἡ EK ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ἐν ἐλάσσονι ἄρα χρόνῳ ἡ ZEK ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ EΛ.

SCHOLIUM II. EX ABUNDANTI.

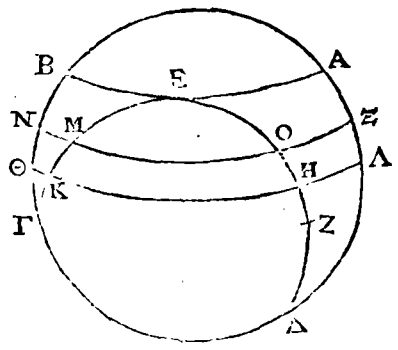
Iiſdem ſimiliter ſuppoſitis, ſumatur circumferentia EZ non major quarta zodiaci parte; & ſumatur punctum utcunque H. ſitque ΘKHΛ circulus parallelus in quo H punctum feratur; ponatur vero circumferentiæ ZH æqualis circumferentia KM. æqualis igitur eſt circumferentia KEH ipſi MEZ: dico quod majori tempore KEH circumferentia permutat conſpicuum hemiſphærium quam MEZ.

ΣΧΟΛΙΟΝ β'. ΕΚ ΠΕΡΙΣΣΟΥ.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἀπειλήφθω ἡ EZ μὴ μείζων τεταρτημορίου, ἑ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον τὸ H, καὶ ἔστω καθ' ὃ φέρεται τὸ H σημεῖον παράλληλος κύκλος ὁ ΘKHΛ, καὶ κείσθω τῇ ZH ἴση ἡ KM· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ KEH τῇ MEZ· λέγω ὅτι ἐν ἐλάσσονι χρόνῳ ἡ KEH περιφέρεια ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ MEZ.

Ἔστω

Εστω καθ' ἃ φέρεται τὸ Μ σημεῖον παράλληλος κύκλος ὁ ΝΜΞ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΜ τῇ ΟΗ. καὶ ἐπεὶ ἔγκλιόν ἐστιν ἡ ΟΗ τῆς σωαφῆς τὸ θερινὸν τροπικὸν ἤπερ ἡ ΗΖ· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ ΟΗ δύσει ἤπερ ἡ ΗΖ. ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἡ ΟΗ δύσει ἡ ΜΚ ἀνατέλλει· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ ΜΚ ἀνατέλλει ἤπερ ἡ ΗΖ δύσει. κοινὸς προσκείσθω ὁ χρόνος ἐν ᾧ ἡ ΜΕΗ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ ΚΕΗ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ ΜΕΖ.

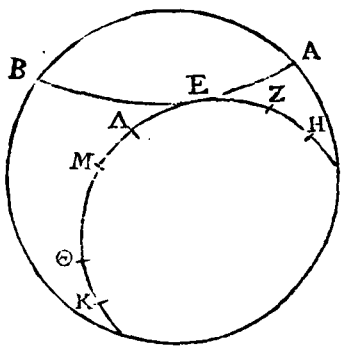


Sit N M Ξ circulus parallelus in quo punctum M feratur: æqualis igitur est circumferentia K M ipsi O H. & quoniam circumferentia O H propior est contactui tropici æstivi quam ipsa H Z, majori igitur tempore [per 12. Phæn.] O H occidit quam ipsa H Z. sed [per lem. præm.] quo tempore circumferentia O H occidit & ipsa M K oritur: quare majori tempore circumferentia M K oritur quam H Z occidit. commune adponatur tempus, in quo circumferentia M E H permutat conspicuum hemisphærium: quare majori tempore circumferentia K E H permutat conspicuum hemisphærium quam ipsa M E Z.

ΣΧΟΛΙΟΝ γ'. ΕΚ ΠΕΡΙΣΣΟΥ.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἀπειλήφθωσαν ἴσαι τε καὶ ἀπεναντίον περιφέρειαι αἱ ΖΗ, ΘΚ, καὶ ἔστω ἡ ΖΗ ἔγκλιον τῆς σωαφῆς τὸ θερινὸν τροπικὸν ἤπερ ἡ ΘΚ· λέγω ὅτι ἐν πλείονι χρόνῳ ἡ ΖΗ ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ ΘΚ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΖΗ ἔγκλιόν ἐστι τῆς σωαφῆς τὸ θερινὸν τροπικὸν ἤπερ ἡ ΘΚ, μείζων ἐστὶν ἡ ΘΕ τῆς ΕΖ. κείσθω τῇ μὲν ΖΕ ἴση ἡ ΕΛ, τῇ δὲ ΖΗ ἴση ἡ ΛΜ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΛΜ, ΖΗ ἴσον ἀπέχουσι τῆς σωαφῆς τὸ θερινὸν τροπικόν, ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΛΜ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΖΗ. ἐν πλείονι δὲ χρόνῳ ἡ ΛΜ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ ΘΚ· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ καὶ ἡ ΖΗ ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ ΘΚ.



SCHOLIUM III. EX ABUNDANTI.

Iisdem suppositis, assumantur æquales & oppositæ circumferentiæ Z H, Θ K; & sit circumferentia Z H propior contactui tropici æstivi, quam ipsa Θ K: dico quod majori tempore circumferentia Z H permutat conspicuum hemisphærium quam ipsa Θ K.

Quoniam enim [ex hyp.] circumferentia Z H propior est contactui tropici æstivi quam ipsa Θ K, major igitur est Θ E ipsa E Z. ponatur, quidem ipsi Z E æqualis circumferentia E Λ; & circumferentiæ Z H æqualis ipsa Λ M. quoniam igitur [ex hyp.] circumferentiæ Λ M, Z H æque distant à contactu tropici æstivi; quo igitur tempore circumferentia Λ M permutat conspicuum hemisphærium [per 15. Phæn.] hoc ipso tempore & Z H. sed majori tempore circumferentia Λ M permutat conspicuum hemisphærium quam ipsa Θ K: majori igitur tempore circumferentia Z H permutat conspicuum hemisphærium quam ipsa Θ K.

ΘΕΩΡΗΜΑ ιε'.

Τῶν ἐν ζῳδίων κύκλῳ ἴσων τε καὶ ἀπεναντίον περιφερειῶν, ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ἑτέρα ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἡ ἑτέρα τὸ ἀφανές· καὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ἑτέρα τὸ ἀφανές, ἡ ἑτέρα τὸ φανερόν.

THEOREMA XV.

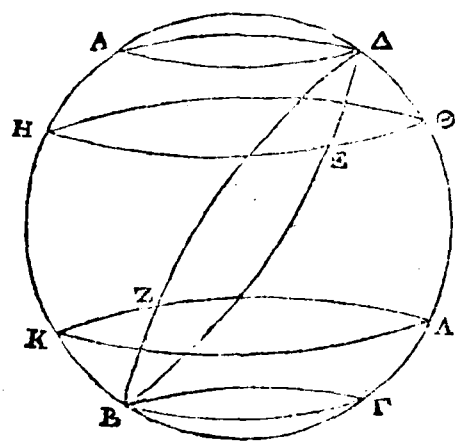
Ex æqualibus & opposito jacentibus zodiaci circuli circumferentiis, quo tempore altera permutat conspicuum hemisphærium, altera occultum permutat: & quo tempore altera permutat occultum hemisphærium, altera conspicuum permutat.

Ἔστω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ ΑΒΓΔ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ἔστω ὁ ΑΔ, χειμερινὸς δὲ τροπικὸς ὁ ΒΓ, ὁ δὲ τῶν ζῳδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω τὴν ΔΕΒΖ, καὶ ἔστω τὸ μὲν ΔΕΒ ἡμικύκλιον τὸ μὴ τὸν καρκίνον ὑπὸ γῆν, τὸ δὲ ΒΖΔ τὸ μετὰ τὸν αἰγόκερων ὑπὲρ γῆς, καὶ ἔστω ἀνατολικὰ μὲν τὰ Δ μέρη, δυτικὰ δὲ τὰ Β, καὶ ἀπειλήφθωσαν δύο ἴσαι τε καὶ ἀπεναντίον περιφέρειαι αἱ ΔΕ, ΒΖ·

SIT in mundo horizon circulus A B Γ Δ; æstivus tropicus sit A Δ, hybernus autem sit B Γ; zodiacus circulus positionem habeat veluti Δ E B Z; sit autem semicirculus post cancrum sub terram Δ E B; & semicirculus post capricornum supra terram sit B Z Δ; partes orientales sint versus punctum Δ, occidentales versus B punctum; & sumantur duæ circumferentiæ Δ E, B Z æquales & oppositæ inter se:

dico quod quo tempore circumferentia Δ E permutat conſpicuum hemiſphærium, hoc ipſo & ipſa B Z circumferentia permutat occultum: & contra quo tempore Δ E permutat occultum, hoc ipſo B Z conſpicuum permutat.

Deſcribantur paralleli circuli H E Θ, K Z Λ, in quibus puncta E, Z ferantur. & quoniam [per 6. Phæn.] aſtra quæ in zodiaco per diametrum ſunt poſita, conjugate & oriuntur & occidunt: puncto igitur E occidente in puncto H, & punctum Z ipſi E per diametrum poſitum oritur in puncto Λ. ſed ipſum E percurrens circumferentiam Θ E H occidet quidem, & Z pertranſiens circumferentiam K Z Λ oritur: quare quo tempore E percurrit circumferentiam Θ E H, & Z pertranſit circumferentiam K Z Λ. ſed tempus quidem in quo E percurrit circumferentiam Θ E H, tempus eſt in quo circumferentia Δ E permutat conſpicuum hemiſphærium; ac tempus in quo punctum Z percurrit circumferentiam K Z Λ, tempus eſt in quo circumferentia Z B permutat occultum hemiſphærium: quare tempore æquali circumferentia Δ E permutat conſpicuum hemiſphærium atque ipſa Z B occultum.



Similiter demonſtrabimus quod quo tempore circumferentia Δ E permutat occultum, ipſa Z B permutat conſpicuum hemiſphærium.

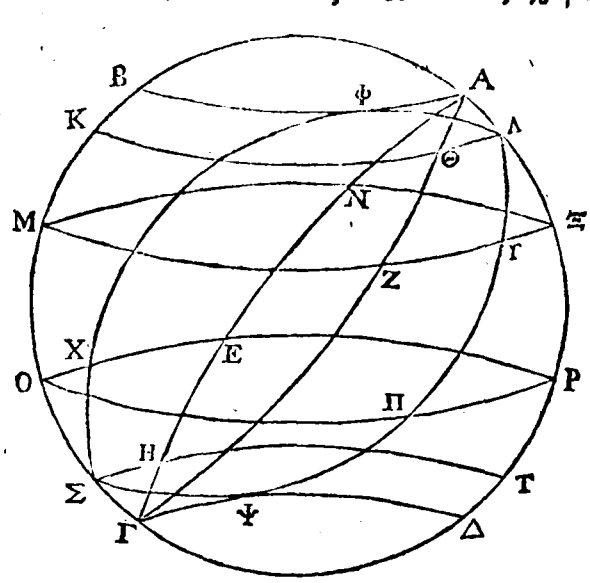
λέγω ὅτι ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ Δ Ε ἐξαλλάττει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἐν τούτῳ ἡ Β Ζ τὸ ἀφανές, καὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ Δ Ε τὸ ἀφανές, ἐν τούτῳ ἡ Β Ζ τὸ φανερόν.

Γεγράφθωσαν φοβηλλήλοι κύκλοι οἱ Η Ε Θ, Κ Ζ Λ, καθ' ὧν φέρεται τὰ Ε, Ζ σημεῖα. καὶ ἐπεὶ τῶν τῶν ζωδίων κύκλος τὰ κατὰ διάμετρον ἄστρα ὄντα κατὰ συζυγίαν ἀνατέλλει τε & δύνει· τῷ Ε ἄρα σημείῳ δύοντος κατὰ τὸ Η σημεῖον τὸ Ε τὸ κατὰ διάμετρον αὐτῷ τὸ Ζ ἀνατέλλει κατὰ τὸ Λ σημεῖον. ἀλλὰ τὸ μὲν Ε τὸν Θ Ε Η διελθὸν δύνει, τὸ δὲ Ζ τὸν Κ Ζ Λ διελθὸν ἀνατέλλει· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ τὸ Ε τὸν Θ Ε Η διαπορεύεται, καὶ τὸ Ζ τὸν Κ Ζ Λ. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ τὸ Ε τὸν Θ Ε Η διαπορεύεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ Δ Ε ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Ζ τὸν Κ Ζ Λ διαπορεύεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ Ζ Β ἐξαλλάσσει τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ ἡ Δ Ε ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον καὶ ἡ Ζ Β τὸ ἀφανές.

Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ὁ Δ Ε ἐξαλλάσσει τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον, ἡ Ζ Β τὸ φανερόν.

ALITER.

Sit horizon circulus A B Γ Δ; tropicus æſtivus ſit B A, hybernus autem ſit Γ Δ; zodiacus circulus poſitionem habeat veluti A B Γ Z; & ſumantur & æquales & oppoſitæ circumferentiæ E H, Z Θ: dico quod quo tempore Z Θ permutat conſpicuum hemiſphærium, ipſa E H permutat occultum.



Sint circuli paralleli K Θ Λ, M N Ξ Z, E O Π P, Σ H T, in quibus puncta Θ, Z, E, H ferantur; & circumvolvatur zodiacus circulus, & nunc quidem habeat poſitionem veluti T Λ Φ X Σ Ψ, interdum vero ſicuti Θ E H. & quoniam [ex hyp.] circumferentiæ Z Θ, E H ſunt æquales & oppoſitæ: circuli igitur M N Ξ, O Π P ſunt æquales. æqualium autem & parallelorum circulorum ſegmenta alternatim ſumpta æqualia invicem ſunt: ſegmentum igitur M N Ξ

ΑΛΛΩΣ.

Ἐστω ὁρίζων κύκλος ὁ Α Β Γ Δ, χειμερινὸς μὲν τροπικὸς ὁ Β Α, θερινὸς δὲ ὁ Γ Δ, ὁ ζωδιακὸς δὲ κύκλος θέσιν ἐχέτω ὡς τὸν Α Ε Γ Ζ, καὶ ἀπειλήφθωσαν ἴσαι τε καὶ ἀπεναντίον περιφέρειαι αἱ Ε Η, Ζ Θ· λέγω ὅτι ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ Ζ Θ ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἡ Ε Η τὸ ἀφανές.

Ἐστωσαν καθ' ὧν φέρεται τὰ Θ, Ζ, Ε, Η σημεῖα φοβηλλήλοι κύκλοι οἱ Κ Θ Λ, Μ Ν Ξ Ζ, Ε Ο Π Ρ, Σ Η Τ, καὶ μετακεκινήσθω ὁ τῶν ζωδίων κύκλος, καὶ ὅτε μὲν θέσιν ἐχέτω τὸν Τ Λ Φ Χ Σ Ψ, ὅτε δὲ τὸν Θ Ε Η. καὶ ἐπεὶ αἱ Ζ Θ, Ε Η περιφέρειαι ἴσαι τε & ἀπεναντίον εἰσὶν, ἴσοι εἰσὶ καὶ οἱ Μ Ν Ξ, Ο Π Ρ κύκλοι. τὰ δὲ ἴσων τε καὶ φοβηλλήλων κύκλων τὰ ἐναλλὰξ τμήματα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις· τὸ ἄρα ὑπὲρ γῆς τοῦ Μ Ν Ξ Ζ

ΜΝΞΖ κύκλε τὸ ΜΝΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ γῆν τῦ ΕΟΠΡ κύκλε τῷ ΟΠΡ. πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΖΘ, ΕΗ ἴσαι τε καὶ ἀπεναντίον εἰσὶν, ὅτε ᾧ χρόνῳ ἡ ΖΘ ἀνατέλλει, ὅτε τότῳ καὶ ἡ ΕΗ δύσει. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος ὅτε ᾧ ἡ ΖΘ ἀνατέλλει, τοῦτόν ἐστιν ἡ ΤΛ, ὁ χρόνος ἐστὶν ὅτε ᾧ τὸ Τ σημεῖον ἀρξάμενον ἀπὸ τῦ Τ τὴν ΤΞ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ξ παραγίνεται, ὁ δὲ χρόνος ὅτε ᾧ ἡ ΕΗ δύσει, τοῦτόν ἐστιν ἡ ΧΣ, ὁ χρόνος ἐστὶν ὅτε ᾧ τὸ Χ ἀρξάμενον ἀπὸ τῦ Χ τὴν ΧΟ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ο παραγίνεται. ὁ ἄρα χρόνος ὅτε ᾧ τὸ Τ ἀρξάμενον ἀπὸ τῦ Τ τὴν ΤΞ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ξ παραγίνεται, ἴσος ἐστὶ τῷ χρόνῳ ὅτε ᾧ τὸ Χ ἀρξάμενον ἀπὸ τῦ Χ τὴν ΧΟ περιφέρειαν διελθὸν ἀπὸ τὸ Ο παραγίνεται. κοινὸς προσκείσθω ὁ χρόνος ὅτε ᾧ τὸ Τ ἀρξάμενον ἀπὸ τῦ Ξ τὴν ΞΝΜ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Μ παραγίνεται, ἴσος ὢν τῷ χρόνῳ ἐν ᾧ τὸ Χ ἀρξάμενον ἀπὸ τῦ Ο τὴν ΟΠΡ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ρ παραγίνεται· ὁ ἄρα χρόνος ὅτε ᾧ τὸ Τ ἀρξάμενον ἀπὸ τῦ Τ τὴν ΤΞΝΜ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Μ παραγίνεται, ἴσος ἐστὶ τῷ χρόνῳ ὅτε ᾧ τὸ Χ ἀρξάμενον ἀπὸ τῦ Χ τὴν ΧΟΠΡ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ρ παραγίνεται. ἀλλ' ὁ μὲν χρόνος ἐν ᾧ τὸ Τ ἀρξάμενον ἀπὸ τῦ Τ τὴν ΤΞΝΜ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Μ παραγίνεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ἡ ΤΛ ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, τοῦτόν ἐστιν ἡ ΘΖ· ὁ δὲ χρόνος ἐν ᾧ τὸ Χ ἀρξάμενον ἀπὸ τῦ Χ τὴν ΧΟΠΡ περιφέρειαν διελθὸν ἐπὶ τὸ Ρ παραγίνεται, ὁ χρόνος ἐστὶν ἐν ᾧ ΧΣ ἐξαλλάσσει τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον, τοῦτόν ἐστιν ἡ ΕΗ· ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ ΘΖ ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἐν τότῳ καὶ ΕΗ τὸ ἀφανές.

Ομοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΘΖ ἐξαλλάσσει τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον, ἐν τότῳ ἡ ΕΗ τὸ φανερόν.

supra terram circuli ΜΝΞΖ æquale eſt ΟΠΡ ſegmento ſub terram circuli ΕΟΠΡ. rurſus, quoniam circumferentiæ ΖΘ, ΕΗ æquales & oppoſitæ ſunt: quo igitur tempore ΖΘ oritur [per 11. Phæn.] hoc ipſo tempore & ΕΗ occidit. ſed tempus in quo ΖΘ oritur, hoc eſt in quo oritur ipſa ΤΛ, tempus eſt in quo punctum Τ incipiens ab ipſo Τ & circumferentiam ΤΞ percurrens pervenit ad punctum Ξ; & tempus in quo ipſa ΕΗ occidit, hoc eſt in quo occidit circumferentia ΧΣ, tempus eſt in quo punctum Χ incipiens à puncto Χ circumferentiam ΧΟ percurrens pervenit ad punctum Ο. tempus igitur in quo punctum Τ incipiens ab ipſo Τ & circumferentiam ΤΞ percurrens pervenit ad punctum Ξ, æquale eſt tempori in quo punctum Χ incipiens ab ipſo Χ & circumferentiam ΧΟ percurrens pervenit ad punctum Ο. commune addatur tempus in quo punctum Τ incipiens ab Ξ & circumferentiam ΞΝΜ percurrens pervenit ad punctum Μ, quod quidem eſt æquale tempori in quo punctum Χ incipiens ab ipſo Ο & circumferentiam ΟΠΡ percurrens pervenit ad punctum Ρ: quare tempus quidem in quo punctum Τ incipiens ab ipſo Τ & circumferentiam ΤΞΝΜ percurrens pervenit ad punctum Μ, æquale eſt tempori in quo punctum Χ incipiens ab ipſo Χ & circumferentiam ΧΟΠΡ percurrens pervenit ad punctum Ρ. ſed tempus in quo punctum Τ incipiens ab ipſo Τ & circumferentiam ΤΞΝΜ percurrens pervenit ad punctum Μ, tempus eſt in quo circumferentia ΤΛ, hoc eſt ipſa ΘΖ, permutat conſpicuum hemiſphærium; & tempus in quo punctum Χ incipiens ab ipſo Χ & circumferentiam ΧΟΠΡ percurrens pervenit ad punctum Ρ, tempus eſt in quo ipſa ΧΣ, hoc eſt ipſa ΕΗ, permutat occultum hemiſphærium: quare quo tempore ΘΖ permutat conſpicuum hemiſphærium, hoc ipſo tempore & ipſa ΕΗ permutat occultum.

Similiter demonſtrabitur quod quo tempore ipſa ΘΖ permutat occultum hemiſphærium, hoc ipſo tempore & circumferentia ΕΗ permutat conſpicuum.

ΘΕΩΡΗΜΑ ις'.

Τῦ τῶν ζωδίων κύκλε αἱ ἴσαι περιφέρειαι ὐκ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσυσι τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον, ἀλλ' ἐν πλείονι χρόνῳ ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῦ χειμερινῦ τροπικῦ τῦ ἀπώτερον, ἐν ἴσῳ δὲ αἱ ἴσον ἀπέχυσαι ὁποτερασῦν τῶν συναφῶν.

THEOREMA XVI.

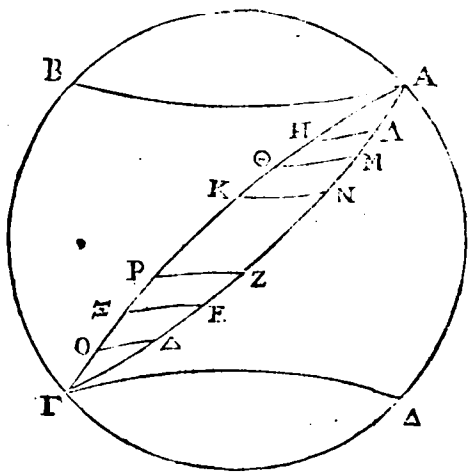
Zodiaci circuli circumferentiæ æquales tempore haud æquali permutant occultum hemiſphærium: ſed majori ſemper tempore quæ vicinior eſt tropico hyberno, quam quæ ab eo remotior eſt: æquali vero tempore quæ ab alterutro contactu æqualiter diſtant.

Ἔστω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ ΑΒΓΔ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ἔστω ὁ ΑΒ, χειμερινὸς δὲ τροπικὸς ἔστω ὁ ΓΔ, ὁ δὲ τῶν ζωδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω τὴν ΑΓΕ, καὶ ἀπειλήφθωσαν αἱ ἴσαι περιφέρειαι αἱ ΔΕ, ΕΖ· λέγω ὅτι αἱ ΔΕ, ΕΖ οὐκ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσυσι τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον, ἀλλ' ἐν πλείονι ἡ ΔΕ περιφέρεια τὴν ΕΖ περιφέρειαν.

SIT in mundo horizon circulus ΑΒΓΔ; æſtivus tropicus ſit ΑΒ, hybernus autem ſit ΓΔ; circulus zodiacus poſitionem habeat ΑΓΕ; & ſumantur æquales circumferentiæ ΔΕ, ΕΖ: dico quod circumferentiæ ΔΕ, ΕΖ tempore haud æquali permutant occultum hemiſphærium; ſed majori tempore circumferentia ΔΕ quam ipſa ΕΖ.

Suman-

Sumantur enim circumferentiis Δ E, E Z æquales & oppoſitæ circumferentiæ H Θ, Θ K: circumferentiæ igitur H Θ, Θ K tempore haud æquali permutant conſpicuum hemiſphærium, ſed [per 14. Phæn.] majori tempore circumferentia H Θ quam ipſa Θ K. ſed [per 15. Phæn.] quo tempore circumferentia H Θ permutat conſpicuum hemiſphærium, ipſa Δ E permutat occultum; & quo tempore Θ K permutat conſpicuum hemiſphærium & ipſa E Z permutat occultum: circumferentiæ igitur Δ E, E Z tempore haud æquali permutant occultum hemiſphærium; ſed majori tempore Δ E quam ipſa E Z.



Dico etiam quod tempore æquali quæ æqualiter diſtant ab alterutro contactu tropico.

Sint autem circuli paralleli Δ O, E Ξ, Z P, K N, Θ M, H Λ, in quibus puncta Δ, E, Z, K, Θ, H ferantur: æquali igitur tempore H Θ, Λ M [per 14. Phæn.] permutant conſpicuum hemiſphærium. ſed [per 15. Ph.] quo tempore circumferentia Θ H permutat conſpicuum hemiſphærium, ipſa Δ E permutat occultum; & & quo tempore Δ M permutat conſpicuum hemiſphærium, circumferentia Ξ O permutat occultum: quare E Δ, O Ξ æquali tempore permutant occultum hemiſphærium.

Απειλήφθωσαν γὰρ τῶν Δ E, E Z περιφερειῶν ἴσαι τε καὶ ἀπεναντίον περιφέρειαι αἱ H Θ, Θ K· αἱ H Θ, Θ K ἄρα περιφέρειαι οὐκ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἀλλ' ἐν πλείονι ἡ H Θ τῆς Θ K. ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ ἡ H Θ ἐξαλλάσσῃ τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἡ Δ E τὸ ἀφανὲς, ἐν ᾧ δὲ ἡ Θ K τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἐξαλλάσσῃ, ἡ E Z τὸ ἀφανές· αἱ Δ E, E Z ἄρα περιφέρειαι οὐκ ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον, ἀλλ' ἐν πλείονι ἡ Δ E τῆς E Z.

Λ E Γ Ω ὅτι καὶ ἐν ἴσῳ χρόνῳ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ὁποτερασοῦν τῶν τροπικῶν σπαφῶν.

Εστωσαν γὰρ καθ' ὧν φέρεται τὰ Δ, E, Z, K, Θ, H σημεῖα παράλληλοι κύκλοι οἱ Δ O, E Ξ, Z P, K N, Θ M, H Λ· αἱ H Θ, Λ M ἄρα περιφέρειαι ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον. ἀλλ' ἐν ᾧ μὲν χρόνῳ ἡ Θ H ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἡ Δ E τὸ ἀφανὲς ἐξαλλάσσει, ἐν ᾧ δὲ ἡ Λ M ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἡ Ξ O τὸ ἀφανὲς ἐξαλλάσσει· αἱ E Δ, O Ξ ἄρα περιφέρειαι ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον.

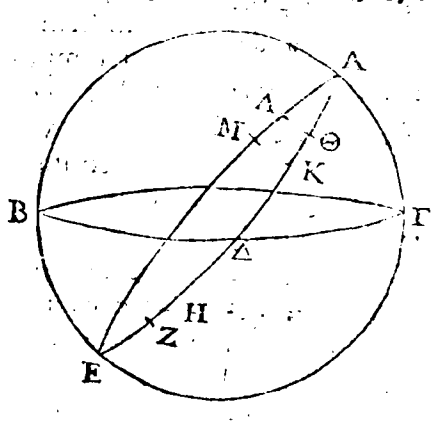
Theorema XVII.

Ex circumferentiis æqualibus & æqualiter diſtantibus ab æquinoctiali circulo, quæ quidem ſunt ad diverſas partes ipſius æquinoctialis, quo tempore altera permutat conſpicuum hemiſphærium, altera permutat occultum; & quo tempore altera occultum, altera permutat conſpicuum.

Θεωρημα ιζ'.

Τῶν ἐφ' ἑκάτερα τοῦ ἰσημερινοῦ περιφερῶν ἴσων τε καὶ ἴσον ἀπεχουσῶν τοῦ ἰσημερινοῦ, ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ἑτέρα ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἡ ἑτέρα τὸ ἀφανές· καὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ἑτέρα ἐξαλλάσσει τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον, ἡ ἑτέρα τὸ φανερόν.

SIT in mundo horizon circulus A B Γ, æquinoctialis ſit B Δ Γ, zodiacus circulus poſitionem habeat A E Θ; & ad diverſas partes æquinoctialis circuli B Δ Γ ſint æquales, & æqualiter diſtantes ab ipſo æquinoctiali, circumferentiæ Θ K, Z H: dico quod quo tempore Θ K permutat conſpicuum hemiſphærium, ipſa Z H permutat occultum.



Ponatur ipſi Z H æqualis & oppoſita circumferentia M Λ: circumferentiæ igitur M Λ, Θ K [ex 14. Ph.] æquali tempore permutant conſpicuum hemiſphærium. ſed [per 15. Phæn.] quo tempore M A permutat conſpicuum hemiſphæ-

Εστω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ A B Γ, ἰσημερινὸς δὲ κύκλος ἔστω ὁ B Δ Γ, ὁ δὲ τοῦ ζωδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω ὡς τὴν A E Θ, καὶ τοῦ B Δ Γ ἰσημερινοῦ ἐφ' ἑκάτερα ἴσαι τε καὶ ἴσον ἀπέχουσαι περιφέρειαι ἔστωσαν αἱ Θ K, Z H· λέγω ὅτι ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ Θ K ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἡ Z H τὸ ἀφανές.

Κείσθω γὰρ τῇ Z H ἴση τε καὶ ἀπεναντίον περιφέρεια ἡ M Λ· αἱ M Λ, Θ K ἄρα περιφέρειαι ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἐξαλλάσσουσι τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον. ἀλλ' ἐν ᾧ χρόνῳ M Λ ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἡ

Z H

ΖΗ τὸ ἀφανὲς ἐξαλλάσσει· καὶ ἐν ᾧ ἄρα χρόνῳ ἡ ΘΚ περιφέρεια ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἡ ΗΖ περιφέρεια τὸ ἀφανὲς ἐξαλλάσσει.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΘΚ περιφέρεια ἐξαλλάσσει τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον, ἡ ΗΖ τὸ φανερὸν ἐξαλλάσσει.

rium: & ipſa ΖΗ permutat occultum: quare quo tempore ΘΚ permutat conſpicuum hemiſphærium, & circumferentia ΗΖ permutat occultum.

Eadem ratione quo tempore ΘΚ permutat occultum hemiſphærium, & ipſa ΗΖ permutat conſpicuum.

ΘΕΩΡΗΜΑ ιη'.

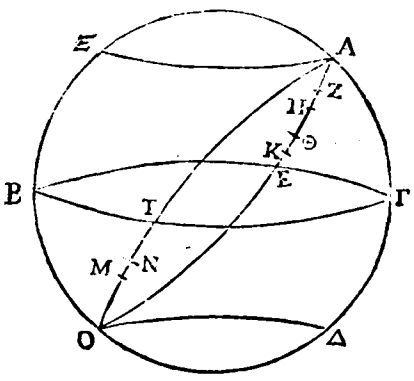
Τῶν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ τῷ ὑπολαμβανομένῳ ὑπὸ τοῦ ἰσημερινοῦ καὶ τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ ἴσων περιφερειῶν, αἱ πλείονι χρόνῳ ἡ ἑτέρα αὐτῶν ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἤπερ ἡ λοιπὴ τὸ ἀφανές· ὁμοίως ἡ τυχοῦσα τῆς τυχούσης.

THEOREMA XVIII.

Ex æqualibus circumferentiis, quæ ſunt in ſemicirculo comprehenſo inter æquinoctialem & æſtivum tropicum, altera ex ipſis majori tempore permutat conſpicuum hemiſphærium, quam reliqua occultum; & alia utcunque ſumpta, alia utcunque ſumpta.

Ἔστω ἐν κόσμῳ ὁρίζων ὁ ΑΒΓ, καὶ θερινὸς μὲν τροπικὸς ἔστω ὁ ΑΞ, χειμερινὸς δὲ ὁ ΔΟ, ἰσημερινὸς δὲ κύκλος ἔστω ὁ ΒΕΓ, ὁ δὲ τῶν ζῳδίων κύκλος θέσιν ἐχέτω τὴν ΑΕΟ, καὶ ἐν τῷ ΤΑΕ ἡμικυκλίῳ ἴσαι περιφέρειαι ἔστωσαν αἱ ΖΗ, ΘΚ, ἐγγίων δὲ ἔστω τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ ἡ ΖΗ· λέγω ὅτι ἐν πλείονι χρόνῳ ἡ ΗΖ ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον ἤπερ ἡ ΘΚ τὸ ἀφανές, καὶ ἡ τυχοῦσα τῆς τυχούσης.

SIT in mundo horizon circulus ΑΒΓ; æſtivus tropicus ſit ΑΞ, hybernus autem ΔΟ; circulus æquinoctialis ſit ΒΕΓ; zodiacus circulus poſitionem habeat ΑΕΟ; ſint autem in ſemicirculo ΤΑΕ æquales circumferentiæ ΖΗ, ΘΚ, quarum ipſa ΖΗ propinquior ſit tropico æſtivo: dico quod circumferentia ΗΖ majori tempore permutat conſpicuum hemiſphærium quam ipſa ΘΚ occultum; & alia utcunque ſumpta, alia utcunque ſumpta.



Κείσθω γὰρ τῇ ΘΚ περιφερείᾳ ἴση τις καὶ ἀπεναντίον περιφέρεια ἡ ΜΝ· ἐγγίων ἄρα ἡ ΖΗ περιφέρεια τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ, ἤπερ ἡ ΜΝ· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ ΖΗ ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἤπερ ἡ ΜΝ τὸ φανερόν. ἀλλ' ἐν ᾧ χρόνῳ ἡ ΜΝ περιφέρεια ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἡ ΘΚ τὸ ἀφανές· ἐν πλείονι ἄρα χρόνῳ ἡ ΖΗ περιφέρεια ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἤπερ ἡ ΘΚ τὸ ἀφανές. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ τυχοῦσα τῆς τυχούσης ἐν πλείονι χρόνῳ ἐξαλλάσσει τὸ φανερὸν ἡμισφαίριον, ἤπερ ἡ λοιπὴ τὸ ἀφανές.

Ponatur ipſi ΘΚ æqualis & oppoſita circumferentia ΜΝ: circumferentia igitur ΖΗ propinquior eſt tropico æſtivo quam ipſa ΜΝ: quare [per 14. Phæn.] ΖΗ majori tempore permutat conſpicuum hemiſphærium quam ipſa ΜΝ conſpicuum. verum [per 17 Ph.] quo tempore circumferentia ΜΝ permutat conſpicuum hemiſphærium, & ipſa ΘΚ permutat occultum: majori igitur tempore circumferentia ΖΗ permutat conſpicuum hemiſphærium quam ΘΚ occultum. Simili modo oſtendetur, quod & alia utcunque ſumpta majori etiam tempore permutat conſpicuum hemiſphærium quam altera occultum.

ΩΣΑΥΤΩΣ δὲ καὶ τῶν ἐν τῷ ἑτέρῳ ἡμικυκλίῳ τῷ ὑπολαμβανομένῳ ὑπὸ τοῦ ἰσημερινοῦ καὶ τοῦ χειμερινοῦ τροπικοῦ ἴσων περιφερειῶν, ἐν πλείονι χρόνῳ ἡ ἑτέρα αὐτῶν ἐξαλλάσσει τὸ ἀφανὲς ἡμισφαίριον, ἤπερ ἡ λοιπὴ τὸ φανερόν· καὶ ἡ τυχοῦσα τῆς τυχούσης.

Hoc eodem modo, in altero ſemicirculo contento inter æquinoctialem & hybernum tropicum, poteſt demonſtrari quod, ex circumferentiis æqualibus, altera majori tempore permutat occultum hemiſphærium quam reliqua conſpicuum; & alia utcunque ſumpta, alia utcunque ſumpta.

ΤΕΛΟΣ ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΩΝ.

FINIS EUCLIDIS PHÆNOMENΩN.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΟΠΤΙΚΑ.

EUCLIDIS
OPTICA.

COAL

AND

ENGINES

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΟΠΤΙΚΑ,
EUCLIDIS
OPTICA.

ΑΠΟΔΕΙΚΝΥΣ [1] τὰ κατὰ τὴν ὄψιν, θεωρημάτιά τινα ἐκθέμενός, συνεπιλογίζόμενος [2] ὅτι κατ' εὐθείας γραμμὰς πᾶν φῶς φέρεται· σημεῖον δὲ τούτου μέγιστον τάς τ' ἀπὸ τῶν σωμάτων ἀπορριπτομένας σκιὰς, καὶ τὰς ἀπὸ τῶν θυρίδων τε καὶ ὀπῶν φερομένας αὐγὰς κομίζειν· ἕκαστον δὲ τούτων οὐκ ἂν ἐγίνετο, καθάπερ νῦν θεωρεῖται γινόμενον, εἰ μὴ αἱ ἀπὸ τοῦ ἡλίου φερόμεναι ἀκτῖνες κατά τινας εὐθείας ἐφέροντο. ὅτι τε τὸ παρ' ἡμῖν πυρὸν ἀποτελλομένας ἔφασκεν αὐγὰς, αἰτίας εἶναι τοῦ τε φωτίζεσθαί τινα τῶν κειμένων σωμάτων, καὶ ἀπορρίπτειν σκιὰς, τὰς μὲν ἴσας τοῖς ὑποκειμένοις σώμασι, τὰς δὲ μείζονας, τὰς δὲ ἐλάττονας τῶν ὑποκειμένων σωμάτων. καὶ ἴσας μὲν ἀπορρίπτειν σκιὰς, ὅσα τοῖς φωτοῖς φωτίζοντά τε πυρὸς ἴσα ᾖ· τὰς τ' ἐχάτας ἀκτῖνας ὅτι τούτων συμβαίνειν θατέρας γίνεσθαι, καὶ μὴ συναπτούσας ἑαυτὰς, μεῖον τὸν σκιὰν, μήτε μεῖον ἐξαπλουμένας αὔξειν, ἀλλ' οἷόν ἐστι τὸ ὑπογεγραμμένον, τοιαύτην καὶ τὴν σκιᾶς συμμετρίαν φυλάττειν· ἐλάττονες δὲ αἱ τῶν σωμάτων σκιαί εἰσιν, ὅταν τὰ φωτίζοντα πυρὰ μείζονα ᾖ· τὰς γὰρ ἐχάτας ἀκτῖνας συμπίπτειν ἑαυτάις· διὸ δὴ καὶ μεῖον τὰς σκιάς. μείζους δὲ τῶν σωμάτων αἱ σκιαί εἰσιν, ὅταν τὰ φωτίζοντα πυρὰ ἐλάττονα ᾖ· τὰς γὰρ ἐχάτας ἀκτῖνας ὅτι τούτων ἐξαπλουμένας συμβαίνει, καὶ μείζονα τὸ σκιαζόμενον μέρος ἀποτελεῖν. οὐδέποτε δ' ἂν τοῦτο συμβαίνειν, εἰ μὴ αἱ ἀπὸ τοῦ πυρὸς φερόμεναι ἀκτῖνες ἐπ' εὐθείας ἐφέροντο. ἐκφανέστατα δὲ τούτων πάντων τοῦτο ὅτι τῶν κατασκευαζομένων γινομένων θεωρεῖσθαι συμβαί-

CUM ea quæ ad adſpectum attinent demonſtraret, jucundas aliquot rationes adferebat, quibus concluderet, omnem lucem ſecundum rectas lineas ferri: hujuſque rei maximum argumentum dabat, tum umbras à corporibus projectas, tum radios per feneſtras & rimas delatos: quorum nihil fieri videremus, ut nunc fit, niſi radii à ſole miſſi in rectam lineam tenderent. dicebat etiam, radios ab igne hoc noſtro emiſſos, cauſam eſſe cur objecta quædam corpora partim illuſtrentur, partim umbras jaciant nunc æquales objectis corporibus, nunc majores, nunc minores. atque æquales quidem umbras ab iis corporibus projici dicebat, quæ æqualia eſſent ſplendidis & lucentibus ignibus: in his enim accidere aſſerebat, ut & extremi radii fierent paralleli, & neque concurrendo umbram minuerent, neque ſeſe explicando eam augerent, ſed quale eſſet objectum corpus, talem umbræ commenſum radii illi ſervarent: minores vero ſunt umbræ corporibus, cum lumina illuſtrantia majora ſunt; extremos enim radios concurrere, ob idque umbram minorem reddere contingit. majores denique ſunt umbræ objectis corporibus, cum illuſtrantia lumina minora ſunt: accidit enim in his, ut extremi radii ſeſe dilatent & opacam partem majorem faciant. quod fieri poſſe negabat, niſi radii, quos lumen projicit, in rectam lineam tenderent. ſed id omnium clariſſime ſpectari poteſt in his quæ ad id monſtrandum præcipue comparata

1 In *MS. Savil.* τὰ περὶ τῆς Εὐκλείδου ὀπτικῆς. 2 Sc. ὁ Εὐκλείδης. 3 In *Cod. Bodl. deſ.*

ſunt. ſi enim lucernæ cuipiam, ut libet poſitæ, apponatur tabella, cui rimula per tenuem ſertulam facta ſit, ita ut rimula illa medio lucernæ reſpondeat; huic autem tabellæ, ex altera ejus parte, altera tabella prope admoveatur, in quam incidat radius per rimulam delatus; inveniemus radium illum, qui per prioris tabellæ rimulam in poſteriorem tabellam fertur, rectis omnino lineis contineri, eum quoque qui medium lucernæ & rimulam tabellæ connectit, in eadem eſſe recta linea. itaque cum omnem lucem ferri in rectam lineam evidens cuilibet & exploratum ſit, inde ſe ad aſpectus explicationem convertens, concedendum cenſuit, ut radii ab oculo manantes in rectam lineam ferrentur, ita tamen ut alii ab aliis intervallo aliquo diſtarent. ex quo fieri dicebat, ut nullum aſpectabile ſimul totum ſpectaretur, hanc rationem adferens. ſæpenumero enim acu aut alio ejuſmodi corpuſculo aliquo in terram delapſo, cum plerique illud ſtudioſius quærerent, eodem modo ſæpius fruſtra quæſiverunt, cum nihil impediret quo minus corpuſculum, quod quærebant, cernerent: & tamen paulo poſt, cum oculos in eum locum conjicerent, in quo erat illud corpuſculum, acum viderunt. ex quo conſtat, cum corpuſculum ipſum in terram delapſum non cernatur, neque locum ipſum, in quo illud collocatum erat, cerni: idcoque non omnes partes loci ſubjecti oculo ſpectantis videri. ſi enim omnes loci partes cernerentur, ipſum quoque corpuſculum, quod diſquiritur, cerneretur: atqui id non cernitur. quinetiam converſus ad eos, qui intentis oculis libros inſpiciunt, aſſeruit ne hos quidem videre poſſe omnes literas unius paginæ, eo quod ſæpe coacti literas quaſdam raro & ſparſim ſcriptas oſtendere, id non poſſent; propterea quod oculorum radii non ad ſingulas literas feruntur, nec continui & conjuncti inter ſe ſunt; ſed aliquo intervallo alii ab aliis diſtant: atque ideo pleraſque objectarum literarum non cernunt: ex quo patet, fore ut totus paginæ locus non videatur. hoc idem in aliis quæ videntur, uſu venit. quocirca quæ cernuntur, ſimul tota non cernuntur: exiſtimantur autem cerni, propter nimiam celeritatem radiorum nihil omittentium, id eſt, continue & obiter per rem ſubjectam delatorum: nec ita ſalientium, ut aliquam

νει. λύχνιν δ' ὅπως δηποτοῦν κειμένην εἰ τοιαύτη τύτῳ πλυχίον ἔχει [1] ὀπτομένῳ λεπτὴν ὀριονίν, ὥστε ἡ τ ὀπτομένῳ κατὰ μέσον τ λύχνιν πίπτειν, τῷ δὲ πλυχίῳ κατὰ τὰ ἕτερα μέρη τῆς πλυχίον ἔγγιον ᾧ τοιαύτη) ἡ αὐγὴ ἡ ἀφ' ὀπτομένης φερομένη, πάντως τὴν τοιαύτην αὐγὴν τῷ πλυχίῳ, εὐθείας γραμμὰς διεχομένην εὑρήσομεν, ἡ τ ὀπτίζευγνύσαν τό, τε μέσον τ λύχνε, ἡ τ ὀπτομένῳ τ πλυχίε κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ὖσαν. ὀναργὲς δ' ὄντος τ, ὅτι πᾶν φῶς κατ' εὐθεῖαν γραμμὴν φέρεται, ἡ πᾶσι τοιοῦτον, μεταβάλλων ὀπὶ τ ὄψιν, ἠξίν ἡ τὰς ἀπ' αὐτῆς ἐκχεομένας ἀκτῖνας ὁμολογεῖν, κατ' εὐθείας φέρεσθαι γραμμάς, ἡ ταύτας εἶ [2] διαφήμαπ. ἡ ἀφ' τύτε μηδὲ τὰ ὁρώμενα ἅμα ὅλα ὁρᾶσθαι, ὑπόμνησιν φέρων τοιαύτην. πολλάκις δὲ βελόνης, ἤ τινος τοιύτε ἑτέρε σωματίε ἐκπεσόντος εἰς τὸ ἔδαφος, φιλοπονώτερόν τινες τοιοῦτον ἐζήτησαν τῇ ζητήσει· ἡ τ αὐτὸν τρόπον πολλάκις ἐμάτευσαν, εὐθέως ὀπιτροδύντος τῷ ζητυμένῳ σωματίῳ· εἶτα μέντοι γε ὕστερον ὀπιβάλλοντες τ ὄψιν τῷ τόπῳ, ἐν ᾧπερ ἦν τὸ σωμάτιον, εἶδον τ βελόνην. δῆλον ὡς ὅτι ὐχ ἑωρᾶτο τὸ ἐξαιρίμενον, οὐδὲ ὁ τόπος, ἐν ᾧ ἦν, ἑωρᾶτο· ὥστε δ' ὐκ ἀπὸ τ ὄψιν δ' ζητύντος κειμένου τόπε, μὴ ἅπαντα τὰ μέρη θεωρεῖσθαι. εἰ δὲ ἐθεωρεῖτο, καὶ τὸ ζητύμενον ἂν ἑωρᾶτο· ὐχ ἑωρᾶτο δέ. ὅτι τε τῶν ἀντιζόντων τοῖς βιβλίοις σωτσάμενος, ἔφασκε μηδὲ τύτες ἂν δύασθαι πάντα τὰ ἐν σελίδι γράμματα ὁρᾶν· πολλὰ γὰν ἀναγκαζομένης δεῖξαι τ ἀναπίως γραφομένων γραμμάτων, μὴ δυνάσθαι δεῖξαι, διὰ τὸ μὴ πρὸς πάντα τὰ γράμματα τὰς ὄψεις φέρεσθαι, ἀλλ' ἐκ ἀφηημάτων ταύτας ὑπάρχειν, καὶ πολλὰ τῶν καταταγμένων μὴ θεωρεῖν. ὥστε ἐκ τύτε φανερὸν ὅτι, διόπερ ὅλη ὁ τόπος τῆς σελίδος ὅλος ὁρᾶσθαι. καὶ ὅτι τῶν ἄλλων θεαμάτων τὸ αὐτὸ συμβαίνει. ὥστε ὐχ ὁρᾶσθαι ἅμα ὅλα τὰ ὁρώμενα· δοκεῖ δ' ὁρᾶσθαι διὰ τὸ κινεῖσθαι τὰς ὄψεις ὑπερβολῇ τάχυς μηδὲν ὑπολειπύσας, τύτ' εἶναι κατὰ συνέχειαν φερομένας ἡ μὴ ἀλλο-

1 Al. ὑποτομῷ. 2 In Cod. Bodl. ἀφιήμενον. mox in MS. Savil. τὸ ὁρώμενα μὴ ἅμα. μένας.

μήκας. πρὸς δὲ τὸ τῇ ὄψει προσπίπτειν τι εἴδωλον ἀπὸ δ' ὁρωμένου εἰς τὸ κινεῖσθαι αὐτῷ πρὸς τὸ καταλαβεῖν τὸ ὁρώμενον, ἔφερεν αἰτίαν τοιαύτην· ἡ γὰρ ὅπου δ' ζητουμένου σώματος ἢ τοῦ τῷ βιβλίῳ ἀτενίζοντος, ἀπορίαν τινὰ ἐλεγεν· εἰ ἰὼ κατ' εἰδώλων ἔμπλωσιν τὸ ὁρατικὸν πάθος, ἢ ἀπὸ παντὸς σώματος διηνεκῶς εἴδωλα ἀπόρρει, ἃ κινεῖ ἡμῶν τὴν αἴσθησιν, τίς ἡ αἰτία γίνεται, δι' ἣν οὐχ ὁρᾷ ὅ, τε ζητῶν, τὴν βελόνην, ἢ ὁ τῷ βιβλίῳ ἀτενίζων, πάντα τὰ γράμματα, πότερόν ποτε διὰ τὸ μετεωρίζεσθαι τῇ διανοίᾳ; ἀλλὰ φύσει ἥπιον ὀλιγωροῦσι ζητοῦσι, ἢ ὁλοσχερῶς οὐχ εὑρίσκουσι· πολλάκις δὲ ὁμιλοῦντες ἀλλήλοις, ἢ περισπώμενοι τῇ διανοίᾳ, εὑρίσκουσι ῥᾷον. ἀλλ' οὐ πάντα τὰ εἴδωλα εἰσπίπτει εἰς τὴν ὄρασιν. ἢ τίς αἰτία δ' ἀποκλείεσθαι τὰ μὴ εἰσπιπτόμενα; καὶ μιᾷ τινὶ φύσιν ἔφασκε κατὰ τὰ ζῶα τὰ μὲν τῆς ἀφῆς αἰσθητήρια πρὸς ὑποδοχὴν εὔθετα κατεσκευάσθαι, τὰ δὲ μή· ἀκοὴν μὲν γὰρ καὶ γεῦσιν καὶ ὄσφρησιν, κοίλα κατεσκεύακεν ἐντός, ὡς ἔξωθεν αὐτοῖς προσπίπτειν σώματα κινήσοντα τὰς αἰσθήσεις ταύτας· ἀκοὴ μὲν γὰρ φωνὴ προσπίπτουσα, τόπον ὑπιτήδειον ὤφειλεν εὑρίσκειν πρὸς τὸ ἀναμένειν, καὶ μὴ κατὰ τὴν προσπτωσιν εὐθέως ἀποπαλῆσαι, τήν τ' αἴσθησιν ἀκίνητον διαφυλάττειν, καὶ τὴν ὑπφερομένην συγχέαι φωνήν. ὁμοίως δὲ καὶ ὄσφρησιν· ὅπῃ μὲν γὰρ γεύσεως τί δεῖ καὶ λέγειν; διὸ καὶ μάλιστά πως αὐταὶ αἱ αἰσθήσεις κοῖλαί τε καὶ εἰσροιδεῖς κατεσκευάσθησαν πρὸς τὸ ἐμμένειν τὰ προσπίπτοντα σώματα πλείονα χρόνον. ὅπῃ δ' ὁράσεως ἦν, εἴπερ ἔξωθεν αὐτῇ προσέπιπτε τὰ κινήσοντα αὐτὴν σώματα, ἢ μὴ αὐτὴ ἐξαπέστελλέ τι ἀφ' ἑαυτῆς, ἔδει τὴν κατασκευὴν αὐτῆς κοίλην τε καὶ εὔθετον πρὸς ὑποδοχὴν τῶν προσπιπτόντων σωμάτων εἶναι· νυνὶ δὲ θεωρεῖται τοῦτο μὴ οὕτως ἔχον, ἀλλὰ μᾶλλον σφαιροειδὴς οὖσα θεωρεῖται ἡ ὄρασις· πρὸς ἣν τὸ πίπτειν εὐθείας καὶ τὸ παρεῖν, τὸ ἁπτῖνας εἶναι τὰς ἐκπεμπομένας καὶ κινούσας τὸ ὁρατικὸν πάθος, ἀρκοῦντος ἐδόκει εἰρῆσθαι. πρὸς δὲ τὸ τὰς ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τοῖς ὄψεσι κειμένας περιφερείας εὐθείας φαίνεσθαι, ἔλεγε τάδε· διότι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κειμένη ὄψις ὡσαύτως θεωρητῷ τοιαύ-

partem intactam prætereant. illud verò quod plerique dicunt, imaginem à re visa ad oculum fluere, qua motus oculus rem visam comprehendat, ita refellebat: nam & de corpusculo quod disquirebatur, & de eo qui intentis oculis librum inspiceret, hanc dubitationem adferebat: si visio fiat affluxu imaginum ad oculum, ab omnique corpore imagines continenter fluant, quæ nostrum sensum moveant, quî fit ut acum quærens eam non videat, aut librum attente inspiciens omnia elementa non cernat? idne ideo fit, quod mentem majoribus rebus intentam habeant? atqui nihilo secus ratiocinantur, dum rem quærunt nec plane inveniunt: & tamen sæpe dum alios alloquuntur, & mentem aliis rebus occupatam & distractam habent, citius reperiunt. at (inquiunt) non omnes imagines in visum confluunt. unde igitur fit (inquam) ut quædam non influant, sed potius excludantur? enimvero dicebat naturam in animalibus sentiendi instrumenta ita fecisse, ut eorum quædam ad recipiendum accommodata essent, quædam non: auditum quippe gustatum & odoratum intus cava fecit, ut reciperent corpora venientia extrinsecus, quæ hos sensus moverent: vox enim ad auditum applicans, locum idoneum reperire debuit, ut in eo aliquandiu maneret, ne si statim post applicationem inde resiliret, sensum immotum redderet, vocemque delatam confunderet. eadem ratione odoratum cavum fecit natura: nam de gustatu quid dicere attinet? concavi ergo & cavernæ instar à natura facti sunt hi sensus, ut eis adhibita corpora diutius immorentur. quamobrem si in visione, corpora visum propius accedant extrinsecus, quam ut oculus aliquid ex se emittat, deberet ipse oculus cavus esse, ut ad receptionem imaginum esset commodior. id autem aliter se habere constat; globosum enim esse oculum, perspicuum est. hæc igitur in præsentia ei sufficere visa sunt, ut confirmaret radios effusos & emissos esse, qui videndi affectum moveant. porro, ut ostenderet circumferentias in eadem superficie cum visu positas, rectas lineas oculo videri, has rationes adferebat: quia visus, in eodem plano positus in quo est res spectata, talem ha-

bet

bet ſitum, ut neque ſublimior ſit quam res quæ ſpectatur, neque depreſſior: (id enim eſt eſſe in eodem plano.) ſi ergo viſus neque ſublimior neque humilior ſit quam circumferentia, quæ in eodem plano deſcribitur; radios igitur projicit non ſubliminiores quidem ad has circumferentiæ partes, depreſſiores vero ad illas; ſed radios omnes per planum delatos æqualiter ad omnes circumferentiæ partes emittit; ut eadem cauſa ſit, cur & planum, in quo eſt oculus, rectæ lineæ ſpeciem habeat, & circumferentia in eodem plano deſcripta. planum enim, quod rectæ lineæ inſtar ad oculum ponitur, id eſt, quod productum ſecat centrum oculi, ipſum quidem cerni non poteſt, propterea quod nullus radiorum ab oculo emiſſorum in illud cadit: ejus vero extremum cernitur, quod eſt linea. id vero ideo dicit, quia ea linea quæ oculo objecta manet, reliquis plani partibus officiens, prohibet planum cerni. eadem vero cauſa quæ efficit ut planum quod in rectam lineam ad oculum poſitum eſt, recta linea eſſe videatur, efficit etiam ut circumferentiarum in eodem plano jacentium in quo eſt oculus, partim majores appareant, cum plures radii ad eas applicant; partim æquales, cum æquales; partim minores, cum illi veluti radiorum anguli, qui ad oculum fiunt, minores ſunt.

τη ὄϛιν, ὥστε μήτε ὑψηλοτέρα εἶναι ϑεωρεμένης, μήτε ταπεινοτέρα· τὸ γὰρ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κεῖσθαι, τοῦτ' ἔστιν· εἰ οὖν ὅτε ταπεινοτέρα ὅτε ὑψηλοτέρα ὄϛιν ἡ ὄψις τῆς ἐν τῷ ἐπιπέδῳ γεγραμμένης περιφερείας, οὐκ ἐπὶ τοῖς δὲ μὲν ἐπὶ τοῖς μέρεσιν ὑψηλοτέρας προβάλλει ἀκτῖνας, τοῖς δὲ ταπεινοτέρας, ἀλλὰ πᾶσι τοῖς μέρεσι τὰς περιφερείας ἴσας τὰς διὰ τοῦ ἐπιπέδου φερομένας ἀκτῖνας προβάλλει, ὥστε τὴν αὐτὴν γίνεσθαι αἰτίαν, δι' ἣν τε τὸ ἐπίπεδον εὐθείας φαντασίαν ἀπολιπεῖν, καὶ τὴν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ γεγραμμένῃ περιφερείᾳ. καὶ γὰρ τὸ ἐπίπεδον τὸ ἐπ' εὐθείας κείμενον τῇ ὄψει, αὐτὸ μὲν ἀθεώρητόν ὄϛι, διὰ τὸ μὴ προσπίπτειν αὐτῷ μηδεμίαν τῶν ἀπὸ τῆς ὄψεως ἐκπεμπομένων ἀκτίνων· τὸ δὲ πέρας αὐτοῦ ϑεωρεῖται, ὅπερ ὄϛιν ἡ [1] γραμμή. λέγει δὲ, [2] διὰ τὸ τὴν πρὸς τῇ ὄψει μένειν γραμμὴν, ἥτις τοῖς λοιποῖς τοῦ ἐπιπέδου μέρεσιν ἐπιπροσθοῦσα, ἀθεώρητον ποιεῖ τὸ ἐπίπεδον. ἡ δὲ αὐτὴ αἰτία ἡ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἐπ' εὐθείας κειμένου τῷ ὄμματι ποιεῖ εὐθείας ἐπιδιδόναι φαντασίαν, καὶ τῶν περιφερειῶν τῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κειμένων τῷ ὄμματι, φαίνεσθαι δὴ τὸ μὲν μεῖζον, ὅταν πλείονες ὄψεις ἐπιβάλλωσι, τὸ δὲ ἴσον, ὅταν ἴσαι, τὸ δὲ ἔλαττον, ὅταν ἐλάττονες γίγνωνται τῶν ὄψεων, οἷον γωνίαι πυκνὸς πρὸς τῷ ὄμματι.

[POSITIONES.]

1. Ponatur ergo radios ab oculo emiſſos in rectam lineam ferri, aliquoque intervallo inter ſe diſtare.

2. Item, figuram à radiis comprehenſam eſſe conum, qui verticem habeat in oculo, baſim vero in extremis rerum viſarum.

3. Item, ea cerni, ad quæ radii perveniunt.

4. Item, ea non cerni, ad quæ radii non perveniunt.

5. Item, quæ ſub majore angulo cernuntur, majora exiſtimari.

6. Item, quæ ſub minore angulo cernuntur, minora putari.

7. Item, quæ ſub æquali angulo cernuntur, æqualia exiſtimari.

[ΘΕΣΕΙΣ.]

α'. Ὑποκείσθω οὖν, τὰς ἀπὸ τοῦ ὄμματος ὄψεις κατ' εὐθείας γραμμὰς φέρεσθαι, διάστημά τι ποιούσας ἐπ' ἀλλήλων.

β'. Καὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ὄψεων περιεχόμενον σχῆμα εἶναι κῶνον, τὴν κορυφὴν μὲν ἔχοντα πρὸς τῷ ὄμματι, τὴν δὲ βάσιν πρὸς τοῖς πέρασι τῶν ὁρωμένων.

γ'. Καὶ ὁρᾶσθαι μὲν ταῦτα, πρὸς ἃ ἂν αἱ ὄψεις προσπίπτωσι.

δ'. Μὴ ὁρᾶσθαι δὲ, πρὸς ἃ ἂν μὴ προσπίπτωσιν αἱ ὄψεις.

ε'. Καὶ τὰ μὲν ὑπὸ μείζονος γωνίας ὁρώμενα, μείζονα φαίνεσθαι.

ϛ'. Τὰ δ' ὑπὸ ἐλάττονος, ἐλάττονα.

ζ'. Ἴσα δὲ τὰ ὑπὸ ἴσων γωνιῶν ὁρώμενα.

1 In *MS. Savil.* περιφέρεια. 2 In *MS. Savil.* διὰ τὸ τὴν πρὸς τῇ ὄψει καμπύλην γραμμὴν.

η'. Καὶ

η'. Καὶ τὰ μὲν ὑπὸ μετεωροτέρων ἀκτίνων ὁρώμενα, μετεωρότερα φαίνεσθαι.

9. Item, quæ à sublimioribus radiis videntur, sublimiora apparere.

θ'. Τὰ δ' ὑπὸ ταπεινοτέρων, ταπεινότερα.

9. Quæ vero à depressioribus, depressiora.

ι'. Καὶ ὁμοίως τὰ μὲν ὑπὸ δεξιωτέρων ἀκτίνων ὁρώμενα, δεξιώτερα φαίνεσθαι.

10. Item, quæ à dexterioribus radiis spectantur, dexteriora apparere.

ια'. Τὰ δ' ὑπὸ ἀριστερωτέρων, ἀριστερώτερα.

11. Quæ vero à sinisterioribus, sinisteriora.

ιβ'. Τὰ δ' ὑπὸ πλειόνων [1] γωνιῶν ὁρώμενα, ἀκριβέστερον φαίνεσθαι.

12. Item, quæ sub pluribus angulis spectantur, accuratius videri.

Ταῦτα μὲν ἔν ὑποκείσθω ἡμῖν, ἐξ ὧν τὰ ἑξῆς θεωρήματα δειχθήσεται.

Hæc igitur à nobis posita sint, è quibus sequentia theoremata demonstrentur.

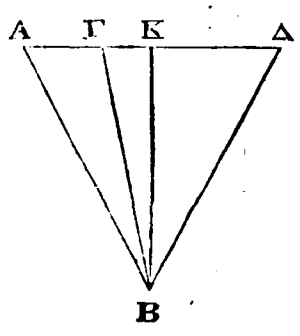
ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Οὐδὲν τῶν ὁρωμένων ἅμα ὅλον ὁρᾶται.

Propositio I. Theor.

Nullum aspectabile simul totum cernitur.

Ἔστω γὰρ ὁρώμενόν τι τὸ ΑΔ, ὄμμα δὲ ἔστω τὸ Β, ἀφ' οὗ διεσταλμέναι ὄψεις αἱ ΒΑ, ΒΓ, ΒΚ, ΒΔ. ἐπεὶ οὖν ἐν διαστήματι φέρεσθαι αἱ προσπίπτουσαι ὄψεις, οὐκ ἂν διάστημα συνεχὲς πρὸς τὸ ΑΔ· ὥστε γένοιτο ἂν καὶ κατὰ τὸ ΑΔ διαστήματα, εἰς ἃ αἱ ὄψεις οὐ προσπεσοῦνται· οὐκ ἄρα ἁφθήσεται ἅμα ὅλον τὸ ΑΔ.



SIT enim aspectabile aliquod ΑΔ; oculus vero Β, à quo radii pergant ΒΑ, ΒΓ, ΒΚ, ΒΔ. quia igitur [per 1. posit.] radii ab oculo exsilientes ita feruntur, ut aliquo intervallo alii ab aliis distent; non ergo continui incidunt in aspectabile ΑΔ: sunt igitur aliqua intervalla in ΑΔ, ad quæ radii non pervenient: quare totum ΑΔ simul non cernetur.

Δοκεῖ δὲ ὁρᾶσθαι ἅμα τῶν ὄψεων ταχὺ φερομένων.

Existimatur autem totum simul cerni, propter delatorum radiorum celeritatem.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Δεῖ γὰρ τὸ ὁρώμενον ἀπόστασίν τινα ἔχειν πρὸς τὸ ὄμμα· οὕτως γὰρ ὁρᾶσθαι. εἰ γὰρ μηδεμίαν ἀπόστασιν ἔχει, οὐκ ὁρᾶσθαι.

SCHOLIUM.

Oportet enim aspectabile aliquam ab oculo distantiam habere; sic enim videbitur. quod si nullam habeat distantiam ab oculo, non videbitur.

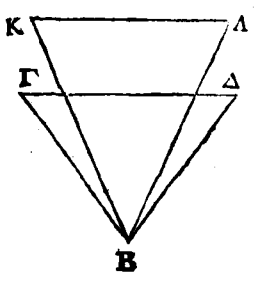
ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Τῶν ἴσων [2] μεγεθῶν οἱ διαστήματι [3] ἀνίσων τὰ ἔγγιον κείμενα ἀκριβέστερον ὁρᾶται.

Prop. II. Theor.

Æqualium magnitudinum inæqualiter distantium, quæ propius positæ sunt accuratius cernuntur.

Ἔστω ὄμμα μὲν τὸ Β, ὁρώμενον δὲ τὸ ΓΔ καὶ τὸ ΚΛ, χρὴ δὴ νοεῖν αὐτὰ ἴσα τε καὶ παράλληλα, ἔγγιον δὲ ἔστω τὸ ΓΔ, καὶ προσπιπτέτωσαν ὄψεις αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΒΚ, ΒΛ. ἐπεὶ γὰρ ἂν εἴπωμεν, ὡς αἱ ἀπὸ τοῦ Β ὄμματος πρὸς τὸν ΚΛ προσπίπτουσαι ὄψεις διὰ τῶν Γ, Δ σημείων ἐλεύσονται· ἡ γὰρ ἂν τριγώνου τοῦ ΒΛΚ ἡ ΚΛ μείζων ἂν εἴη τῆς ΓΔ [4]. ὑπόκειται δὲ καὶ ἴση· ἐκεῖνη τὸ ΓΔ ὑπὸ



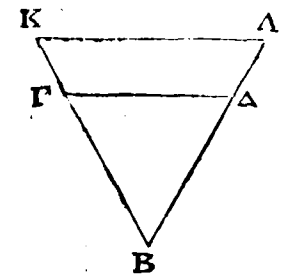
SIT oculus Β, aspectabiles vero magnitudines ΓΔ & ΚΛ, quæ æquales & parallelæ cogitandæ sunt; propior autem oculo sit ΓΔ quam ΚΛ, & emittantur ab oculo radii ΒΓ, ΒΔ, ΒΚ, ΒΛ. nunquam dicemus fieri posse, ut radii, à Β oculo ad ΚΛ tendentes, transeant per Γ,Δ puncta: alioqui [ex schol. seq.] trianguli ΒΛΚ latus ΚΛ majus esset latere ΓΔ [trianguli ΒΔΓ.] atqui ΚΛ posita est æqualis ipsi ΓΔ: quare ΓΔ

1 Forte ἀκτίνων, ut in secunda propositione πλειόνων ὄψεων: est enim hoc γωνιῶν subobscurum. in seq. tertia propositione πλειόνων ὄψεων & μείζονες γωνίας idem valet. *Sav.* 2 Καὶ παραλλήλων, ut in demonstratione: & quidem alioqui theorema non erit universaliter verum; ne sic quidem κατὰ πάσας πτώσεις, nisi æquales sint radii à β in rei visæ πέρατα. *Savil.* 3 Διαστήματι ἀνίσους *MS. Savil.* 4 Adjiciendum, τῆς ΒΔΓ τριγώνου. *Savil.*

à pluribus radiis conſpicitur quam ΚΑ: accuratius igitur cernetur ΓΔ quam ΚΛ.

SCHOLIUM.

Quod autem, ſi radii ΒΚ & ΒΛ tranſeant per puncta Γ & Δ, neceſſe ſit latus ΚΛ majus eſſe latere ΓΔ, ſic ſane oſtendetur. ſit enim ut in ſubjecto triangulo factum eſt. cum ergo in rectas parallelas ΚΛ, ΓΔ rectæ lineæ ΒΚ, ΒΛ incidant: duo igitur anguli ΒΚΛ & ΒΛΚ [per 29. 1.] duobus angulis ΒΓΔ & ΒΔΓ ſunt æquales; ideoque duo triangula æquiangula ſunt ΒΓΔ & ΒΚΛ: ergo [per 4. 6.] ut ΒΚ ad ΚΛ ſic ΒΓ ad ΓΔ; & viciſſim ut ΒΚ ad ΒΓ ſic ΚΛ ad ΓΔ. eſt autem ΒΚ major quam ΒΓ: ergo etiam ΚΛ major eſt quam ΓΔ.

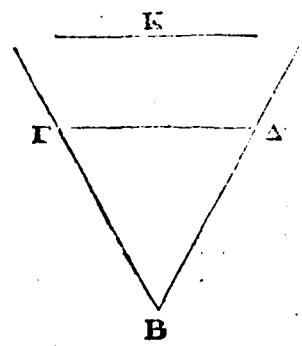


PROP. III. THEOR.

Aſpectabilium quodlibet certam habet intervalli longitudinem, qua expleta jam non cernitur.

SIT oculus Β, aſpectabile vero ΓΔ: dico ΓΔ poſſe collocari in quadam diſtantia ab oculo, ex qua jam non cernetur.

Sit enim ΓΔ in intervallo quod eſt inter radios ΒΓ & ΒΔ, & ſupra illud ſit Κ: nullus igitur radius ex Β oculo ad Κ perveniet. ad quod autem radii non perveniunt, illud [per 4 poſit.] non cernitur: quocirca unumquodque aſpectabilium certum habet intervalli modum, quo expleto jam non cernitur.



Oportet tamen inter aſpectabile & oculum aliquod eſſe intevallum, alioqui cerni non poſſet.

SCHOLIUM.

Id fortaſſis objiciat quiſpiam: cum non ſolum ΒΓ, ΒΔ radii tendant ad ΓΔ magnitudinem, ſed multo plures ſint inter puncta Γ, Δ, qui ad eandem magnitudinem ferantur: igitur magnitudine ΓΔ longius ab oculo ſemota, etiamſi ΒΓ, ΒΔ radii ad eam non perveniant, radii tamen intermedii ad eam pervenient. nos igitur hæc objicienti ſatisfaciemus hoc modo: quamvis ΓΔ magnitudo nonnihil ſemota ab oculo non attingatur à radiis ΒΓ, ΒΔ, ſed à radiis intermediis; tamen ſi eadem magnitudo longiſſime ſemoveatur ab oculo, ne ab intermediis quidem radiis attingetur.

τελείων ὄψεων ὁρᾶται ἤπερ τὸ ΚΛ· ἀκριβέστερον ἄρα φανήσεται τὸ ΓΔ τοῦ ΚΛ. [1]

[2] ΣΧΟΛΙΟΝ.

Οτι δὲ διαχωρισθεισῶν τῶν ὄψεων ΒΚ, ΒΛ διὰ τῶν Δ καὶ Γ σημείων, ἡ ΚΛ μείζων ἂν εἴη τῆς ΓΔ, ἔτω πῶς δῆλον. γεγράφθω γὰρ ὡς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ τρεγώνῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὡς ὀρθὰς ὠφαλλήλους τὰς ΚΛ, ΓΔ εὐθεῖαι ἐμπίπτουσιν αἱ ΒΚ, ΒΛ· αἱ μὴν ὑπὸ ΒΚΛ καὶ ΒΛΚ γωνίαι ταῖς ΒΓΔ καὶ ΒΔΓ γωνίαις ἴσαι εἰσὶ, καὶ διὰ τοῦτο ἰσογώνιά ἐστι τρίγωνα τὸ ΒΓΔ τῷ ΒΚΛ· ὡς ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ ἔτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΒΓ ἔτω καὶ ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΓΔ. ἔστι δὲ ἡ ΒΚ τῆς ΒΓ μείζων· καὶ ἡ ΚΛ ἄρα τῆς ΓΔ μείζων ἔσται.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἑκαστον τῶν ὁρωμένων ἔχει τι μῆκος ἀποστήματος, ὃ γινομένης οὐκ ἔτι ὁρᾶται.

ΕΣτω γὰρ ὅμμα μὲν τὸ Β, ὁρώμενον δὲ τὸ ΓΔ· λέγω ὅτι τὸ ΓΔ ἐν τινὶ ἀποστήματι γινόμενον οὐκ ἔτι ὁρᾶσθαι.

Γεγενήσθω γὰρ τὸ ΓΔ ἐν τῷ μεταξὺ διαστήματι τῶν ὄψεων [4], ἐφ' ᾧ τὸ Κ. [5] οὐκοῦν πρὸς τὸ Κ οὐδεμία τῶν ἀπὸ τοῦ Β ὄψεων προσπεσεῖται. πρὸς ὃ δέ γε αἱ ὄψεις οὐ προσπίπτουσιν, ἐκεῖνο οὐχ ὁρᾶται· ἕκαστον ἄρα τῶν ὁρωμένων ἔχει τι μῆκος ἀποστήματος, οὗ γινομένου οὐκ ἔτι ὁρᾶται.

[6] Δεῖ δὲ τὸ ὁρώμενον πρὸς τὸ ὅμμα ἔχειν ἀπόστημά τι· οὐ γὰρ ἂν ἄλλως ὀφθείη.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ισως εἴποι τις ἂν, ὡς ἐπειδὴ οὐ μόναι αἱ ΒΓ, ΒΔ, αἱ προσπίπτουσαι ἀκτῖνες πρὸς τὸ ΓΔ μέγεθος, ἀλλὰ καὶ [7] πολλαὶ μεταξὺ τῶν Γ, Δ, ὅτι ἀφιστάμενον τοῦ ΓΔ μεγέθους οὐ πίπτουσιν αἱ ΒΓ, ΒΔ ἀκτῖνες, προσπεσοῦνται αἱ μεταξὺ τοῦ μέσου προσπεσοῦσαι ἀκτῖνες. λέγομεν δὴ πρὸς τὸν ἔτως διαπορήσαντα· ὅτι εἰ καὶ πρὸς μικρὸν ἀφεστηκότος τοῦ ΓΔ μεγέθους οὐ προσβάλλουσιν αἱ ΒΓ, ΒΔ ἀκτῖνες, ἀλλ' αἱ μεταξὺ τοῦ μέσου, ὅτι πολὺ ἀφεστηκότος τοῦ τοιούτου μεγέθους, οὐδ' αἱ μεταξὺ τοῦ μέσου προσπεσοῦνται. [8] δεῖ δ' ὑποπλατυνθῆναι τὸ μεταξὺ τῶν τοιούτων ὄψεων διάστημα, [9] ἀφιστάμενον τοῦ μεγέθους, ὄντος [10] ὡρισμένου παντὸς μεγέθους.

---

1 In *MS. Savil.* ſchol. ἐπειδὴ ὅσαι ἀκτῖνες ἐπὶ τὸ ΓΔ προσπίπτουσιν ἐξώτεραι ἴσονται τῇ ΚΛ. μὴ προσπίπτουσαι αὐτῆς, ὅτι ὑπὸ πλείονα ὁρᾶται τὸ ΓΔ. Verba (inquit *Savil.*) ſunt mutilata, ſed hoc ſibi voluiſſe videtur, radios aliquot in ΓΔ incidere extra angulum ΚΒΛ, atq; ita ὑπὸ πλείονα ὄψιν ὁρᾶσθαι. 2 Deeſt hoc ſchol. in lib. MS. remanet κατὰ χαφη. 3 Al. ὡς ἡ γινόμενον. 4 Oportet quidem ſubjungere proximorum. 5 Ne hoc quidem quale ſit ſatis intelligo. nam ſi hoc ſumere voluit, potuit non minus id, quod eſt demonſtrandum, ſuo ſibi jure ἀναπόδεικτον aſſumere. 6 Illa δεῖ δὲ &c. deſunt in *MS Bodl.* 7 Addit πολλῶν in *MS. Savil.* 8 Διὰ τὸ πλατυνθῆναι. augeatur, creſcat, in longum tamen non in latum. ſi recte intelligo: fortaſſe verba ſunt adhuc mutilata, & omittit *Pena.* 9 Forſan ἀφιστάμην. *Savil.* 10 Rectius ὡρισμένου. *Idem.*

A A-

[1] ΑΛΛΩΣ.

Εστω ὄμμα μὲν τὸ Β, ὁρώμενον δὲ τὸ ΓΔ, [2] ὑπὸ τὴν ΓΒΔ ἐλαχίστης γωνίας· λέγω ὅτι ἐν μείζονι ἀποσήματι γινόμενον τὸ ΓΔ οὐχ ὁρᾶσθήσεται.

Γεγενήσθω γάρ, ὡς κάτω πρόσθεν, ὡς ἐν τῷ Κ· ὁρᾶσθήσεται δὴ ὑπὸ ὀλιγωτέρων ὄψεων. [2] εἰωθὸς δὲ ὑπὸ ὀλιγίστων, διὰ τὸ ἐλαχίστῳ γωνίᾳ τῇ ΓΒΔ γωνίαν.

ALITER.

Sit oculus B; aſpectabile vero ſit ΓΔ, quod cernatur ſub ΓΒΔ angulo minimo: dico cerni non poſſe ΓΔ magnitudinem, ſi longius removeatur ab oculo.

Fiat enim, & ſemoveatur longius ab oculo, ponaturque in K; cernetur ergo ſub pauciori-bus radiis quam antea. ſed cernebatur ſub pauciſſimis, propterea quod angulus ΓΒΔ ponitur eſſe minimus.

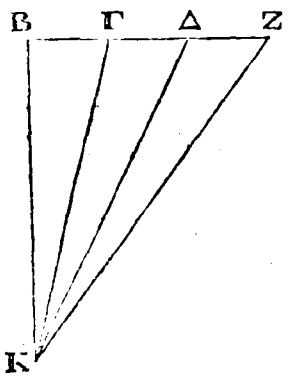
[3] ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Τῶν ἴσων διαστημάτων ὅπου ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ὄντων, τὰ ἐκ πλείονος ἀποστήματος ὁρώμενα ἐλάττω φαίνεται.

PROP. IV. THEOR.

Æqualium intervallorum in eadem recta linea collocatorum, quæ è longiore diſtantia ſpectantur, minora apparent.

Εστω γὰρ ἴσα τὰ ΒΓ, ΓΔ, ΔΖ, ὄμμα δὲ τὸ Κ, ἀφ' οὗ διεξεπιπλέτωσαν ὄψεις αἱ ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ, ΚΖ· [4] ἡ δὲ ΚΒ πρὸς ὀρθὰς ἔστω τῇ ΒΖ. ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΚΒΖ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΒΓ, ΓΔ, ΔΖ, μείζων ἐστὶν ἡ μὲν ΒΚΓ γωνία τῆς ΓΚΔ γωνίας, ἡ δὲ ΓΚΔ γωνία τῆς ΔΚΖ γωνίας· μείζον ἄρα φαίνεται τὸ μὲν ΒΓ τοῦ ΓΔ, τὸ δὲ ΓΔ τοῦ ΔΖ.

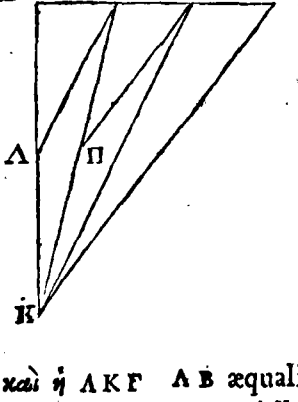


SInt enim æqualia intervalla ΒΓ, ΓΔ, ΔΖ; oculus autem ſit K, à quo procedant radii ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ, ΚΖ; ſitque ΚΒ ad rectos angulos ipſi ΒΖ. quia igitur in rectangulo triangulo ΚΒΖ æquales ſunt ΒΓ, ΓΔ, ΔΖ: major [per ſchol. ſeq.] eſt ΒΚΓ quidem angulus angulo ΓΚΔ, & angulus ΓΚΔ angulo ΔΚΖ: igitur [per 5. poſit.] majus apparet ΒΓ intervallum quam ΓΔ, & ΓΔ quam ΔΖ.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Εστω τρίγωνον ἡ ΚΒΖ, ὀρθὴν ἔχον τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν, ἴσαι δ' ἔστωσαν αἱ ΒΓ, ΓΔ, ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΚ, ΔΚ· φημὶ ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΒΚΓ γωνία τῆς ΓΚΔ γωνίας, καὶ ἡ ΓΚΔ τῆς ΔΚΖ.

Ηχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἡ ΓΛ παράλληλος τῇ ΔΚ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΛΒ. ἴση δ' ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΛ τῇ ΛΒ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ πρὸς τῷ Β γωνία· μείζων ἂν εἴη ἡ ΛΓ τῆς ΛΒ. ἴση δ' ἐστὶν ἡ ΛΒ τῇ ΛΚ· ἡ ἄρα ΛΓ μείζων ἐστὶ τῆς ΛΚ· ὥστε καὶ ἡ ΛΚΓ γωνία τῆς ΛΓΚ γωνίας μείζων ἐστί. τῇ δὲ ΛΓΚ γωνίᾳ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΚΔ, ἐναλλὰξ γάρ εἰσιν· ἡ ἄρα ΛΚΓ μείζων ἐστὶ τῆς ΓΚΔ. πάλιν, ἀπὸ τοῦ Δ ἤχθω ἡ ΔΠ παράλληλος τῇ ΖΚ· φανερὸν ὅτι ἡ



SCHOLIUM.

Sit triangulum ΚΒΖ, cujus angulus qui ad B rectus ſit; ſint autem & ΒΓ, ΓΔ, ΔΖ inter ſe æquales, & connectantur ΓΚ & ΔΚ: dico angulum ΒΚΓ majorem eſſe angulo ΓΚΔ; & angulum ΓΚΔ majorem eſſe angulo ΔΚΖ.

A puncto enim Γ ducatur recta linea ΓΛ, quæ ſit parallela ipſi ΔΚ: eſt igitur [per 2.6.] ut ΔΓ ad ΓΒ ſic ΚΛ ad ΛΒ. æqualis vero eſt ΔΓ ipſi ΓΒ: quare æqualis etiam eſt ΚΛ ipſi ΛΒ. & quia angulus ad Β rectus eſt: major igitur eſt [per 19.1.] ΛΓ recta quam ΛΒ. ipſa autem ΛΒ æqualis eſt ipſi ΛΚ: quare ΛΓ major eſt quam ΛΚ: ideoque [per 18.1.] angulus ΛΚΓ major eſt angulo ΛΓΚ. angulo autem ΛΓΚ æqualis eſt [per 29. 1.] angulus ΓΚΔ; ſunt enim alterni anguli: angulus ergo ΛΚΓ major eſt angulo ΓΚΔ. rurſus, à puncto Δ ducatur ΔΠ parallela ipſi ΖΚ: conſtat ergo li-

1 Deeſt in *MSS.* 2 Ex hoc loco apparet idem eſſe ὑπὸ τὴν ἐλαχίστης γωνίας ὁρᾶσθαι, & ὑπὸ ὀλιγίστων ὄψεων. *Savil.* 3 Magnam habet affinitatem cum ſeptima, & plane altera non ægre carere potuiſſemus. Illic eſt ἴσα μεγέθη, hic ἀποστήματα, non magno ſane ἀποστήματα. *Savil.* 4 Quod ſc. minimum omnium ἀπόστημα facit: nam per 19.1. conſtat ΚΒ minorem eſſe quam ΚΓ, & ΚΓ quam ΚΔ, & ΚΔ quam ΚΖ. ut autem demonſtrationi theorema quadraret, ipſum theorema debuit eſſe hujuſmodi: Τῶν ἴσων ἀποστημάτων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ὄντων, quæ propriora ſunt perpendiculari in illam εὐθεῖαν actæ majora ſunt; quæque ab ea remotiora, minora: niſi quod *Euclides* opticus eſt neſcio quo modo minus ἀκριβής, in perſpectiva minus perſpicax. *Savil.*

neam ΠΔ majorem esse linea ΠΚ: quocirca angulus ΠΚΔ major est angulo ΠΔΚ. ipsi autem ΠΔΚ angulo æqualis est angulus ΔΚΖ: quare angulus ΠΚΔ major est angulo ΔΚΖ.

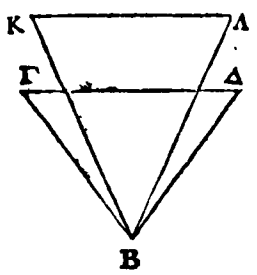
ΠΔ μείζων ἐστὶ τῆς ΠΚ· ὥστε ἡ ΠΚΔ γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ΠΔΚ. τῇ δὲ ΠΔΚ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΚΖ· διὰ τοῦτο ἄρα ἡ ΠΚΔ μείζων ἐστὶ τῆς ΔΚΖ.

Prop. V. Theor.

Æquales magnitudines inæqualiter distantes inæquales apparent; & perpetuo major, quæ propius ad oculum posita est.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Τὰ ἴσα μεγέθη ἄνισον διεχόντα ἄνισα φαίνεται, καὶ μεῖζον ἀεὶ τὸ ἔγγιον τοῦ ὄμματος κείμενον.

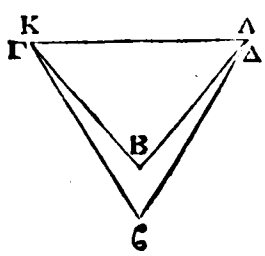


SIT ΓΔ æqualis ipsi ΚΛ, oculus autem sit Β, à quo radii procedant ΒΔ, ΒΛ, ΒΚ, ΒΓ. cum igitur ΓΔ sub majori angulo spectetur quam ΚΛ; major apparet ΓΔ [per 5. posit.] quam ΚΛ.

ΕΣτω ἴσον τὸ ΓΔ τῷ ΚΛ, ὄμμα δὲ ἔστω τὸ Β, ἀφ' οὗ διεσταλμένων ὄψεις αἱ ΒΔ, ΒΛ, ΒΚ, ΒΓ. ὅτι τὸ ΓΔ τοῦ μείζονος γωνίας ὁρᾶται ἤπερ τὸ ΚΛ· μεῖζον ἄρα φαίνεται τὸ ΓΔ τοῦ ΚΛ.

SCHOLIUM.

Magnitudo ΓΔ sub majore angulo spectatur quam magnitudo ΚΛ. si enim ΓΔ & ΚΛ, altera alteri ita applicetur, ut punctum Κ cum puncto Γ, & punctum cum puncto Δ congruat: cum duæ lineæ ϹΚ & ϹΛ duabus lineis ΒΓ & ΒΔ majores sint; igitur triangulum ΒΓΔ cadet intra ϹΚΛ triangulum: quare ejus latera continebunt majorem angulum per 21. primi elementorum.



[2] ΣΧΟΛΙΟΝ.

Τὸ ΓΔ τοῦ μείζονος γωνίας ὁρᾶται ἤπερ τὸ ΚΛ. καὶ γὰρ δὴ συμπιπτόντων τῶν ΓΔ, ΚΛ, ὥστε τὸ Κ τῷ Γ, καὶ τὸ Λ τῷ Δ ἁρμόζεσθαι· [3] ἐπειδὴ αἱ ϹΚ, ϹΛ μείζονές εἰσι τῶν ΒΓ, ΒΔ· τὸ ἄρα ΒΓΔ τρίγωνον ἐντὸς τοῦ ϹΚΛ τριγώνου πεσεῖται, καὶ αἱ αὐτοῦ πλευραὶ μείζω γωνίαν περιέξουσι, διὰ τὸ εἰκοστὸν πρῶτον τοῦ πρώτου τῶν στοιχείων.

Prop. VI. Theor.

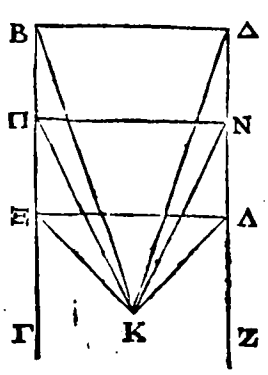
Parallela intervalla eminus spectata inæqualis latitudinis apparent.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Τὰ παράλληλα τῶν διαστημάτων ἐξ ἀποστήματος ὁρώμενα ἀνισοπλατῆ φαίνεται.

SIT enim ipsius ΒΓ ad ΔΖ intervallum parallelum, oculus autem sit Κ: dico has duas magnitudines ΒΓ & ΔΖ videri tamen inæqualiter inter se distare; majusque semper apparere propius intervallum remotiore.

Procedant enim radii ΚΞ, ΚΠ, ΚΒ, ΚΔ, ΚΝ, ΚΛ, connectanturque rectæ ΞΛ, ΠΝ & ΒΔ. cum igitur major sit angulus ΞΚΛ angulo ΠΚΝ; major ergo apparet recta ΞΛ [per 5. posit.] quam ΠΝ. eademque ratione ΠΝ recta major apparet quam recta ΒΔ: non ergo videntur parallela intervalla, sed semper coarctari & inæqualiter distare videntur. quare parallela intervalla eminus spectata inæ-



ΕΣτω γὰρ τὸ ΒΓ τῷ ΔΖ παράλληλον διάστημα, [4] ὄμμα δ' ἔστω τὸ Κ· λέγω ὅτι τὸ ΒΓ, ΔΖ ἀνισοπλατῆ φαίνεται, καὶ μεῖζον ἀεὶ τὸ ἔγγιον διάστημα τοῦ πορρωτέρω.

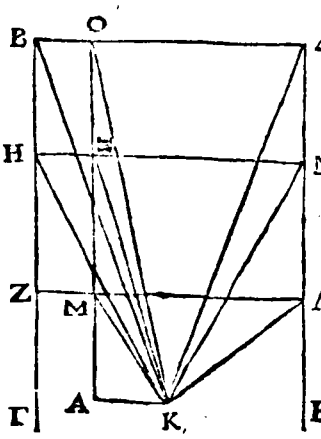
Προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΚΞ, ΚΠ, ΚΒ, ΚΔ, ΚΝ, ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΞΛ, ΠΝ, ΒΔ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΞΚΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΠΚΝ γωνίας, μείζων φαίνεται ἡ ΞΛ εὐθεῖα τῆς ΠΝ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΠΝ εὐθεῖα μείζων φαίνεται τῆς ΒΔ εὐθείας· ὅτε ἔτι οὖν ὀφθήσεται παράλληλα τὰ διαστήματα, ἀλλ' οὐκ ἐλαττον καὶ ἀνισοπλατῆ. τὰ ἄρα παράλληλα τῶν διαστημάτων ἐξ ἀποστήματος ὁρώμενα ἀνισο-

πλατῆ

1 καὶ παράλληλα. & in quæ radii à visu in rei visæ ὑπόκειται æquales incidant; id enim ni ita fiat, nihil obstat propiorem magnitudinem minorem φαίνεσθαι, cum tamen reipsa sit æqualis: nam *Euclidis* demonstratio est plane ἀνυπόστατος. *Savil.* 2 Deest hoc Scholion in MS. *Bodl.* 3 Hoc quidem verum est si utrumque triangulum sit isosceles τὰ ΚΒ. ΒΔ, καὶ τὰ ΓΒ, ΒΔ ἴσα ἀλλήλοις: quod quia non est] necesse, nullo modo concludit Scholiastes. Possunt enim minores esse, ut nec intra triangulum cadant, nec angulum majorem comprehendant. *Savil.* 4 ὑποκείσθω δὲ, posito Κ intra ΒΓ & ΔΖ producta, vel in altera earum. Quod si extra sit, nec διαστήματα majora faciunt semper minores angulos, nec etiam *inæqualia inæqualiter.* *Savil.*

ἀνισλατῆ φαίνεται. ὅτω μὴν, εἰ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ εἴη τὸ ὄμμα τῷ ὁρωμένῳ, λέγωμεν.

Εἰ δὲ μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἔσται τὸ ὄμμα, ὅτως. ἔστω γὰρ τὸ Κ, ἀφ' οὗ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον [1] καθετος ἡ ΚΑ, ἀπὸ δὲ τοῦ Α ἐπὶ τινα ΑΖ ἡ ΑΜ, καὶ ἐκβεβλήθω ἐπὶ τὸ Ο [2], καὶ διεζεύχθωσαν αἱ ΚΒ, ΚΗ, ΚΖ, ΚΔ, ΚΝ, ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΜ, ΚΞ, ΚΟ. ἐπεὶ οὖν ἀπὸ μετεωροτέρου τοῦ Κ ἐπὶ τὸ Μ ἐπέζευκται ἡ ΚΜ, κάθετος ἄρα ἐστὶν ἐπὶ τὴν ΖΛ. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ ΚΞ ἐπὶ τὴν ΗΝ, ἡ δὲ ΚΟ ἐπὶ τὴν ΒΔ· ὀρθογώνια ἄρα ἐστὶ τὰ ΚΜΛ, ΚΞΝ, ΚΟΔ τρίγωνα. [3] καὶ ἐστὶν ἡ μὲν ΞΝ τῇ ΜΛ ἴση, ἀλλήλοις δὲ παράλληλοι· καὶ τὸ ΜΝ· ἑκατέρα δὲ τῶν ΞΚ, ΚΝ μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ΜΚ, ΚΛ· μείζων ἐστὶν ἄρα καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΜΚΛ τῆς ὑπὸ ΞΚΝ [4], ὥστε καὶ ὅλη ἡ ΖΑ ὅλης τῆς ΗΝ μείζων φαίνεται. ἀλλὰ τῇ αὐτῇ δὴ καὶ ἡ ΗΝ τῇ ΒΔ· ἀνισοπλατῆ ἄρα φαίνεται τὰ μεγέθη.



qualis latitudinis apparent. hoc igitur modo fit demonſtratio, cum oculus eſt in eodem plano, in quo ſpectatum intervallum.

Quod ſi non ſit in eodem plano, demonſtratio hæc, ut ſequitur. ſit enim Κ oculus ſublimior plano illo in quo eſt intervallum; & ex Κ in ſubjectum planum ducatur perpendicularis ΚΑ; & ex Α in ΑΖ ducatur perpendicularis ΑΜ, quæ producatur verſus Ο; incidantque radii ΚΒ, ΚΗ, ΚΖ, ΚΔ, ΚΝ, ΚΛ, & conjungantur ΚΜ, ΚΞ, ΚΟ. quia igitur ex Κ, puncto in ſublimi poſito, ad Μ punctum deducta eſt recta linea ΚΜ; perpendicularis ergo eſt [per ſch. 1.] ΚΜ ad ΖΛ. eodemque modo ΚΞ ad ΗΝ, & ΚΟ ad ΒΔ: triangula ergo rectangula ſunt ΚΜΛ, ΚΞΝ, ΚΟΔ. eſtque [per 34. 1.] ΞΝ ipſi ΜΛ æqualis, parallelogrammum enim eſt ΜΝ; utraque autem ipſarum ΞΚ, ΚΝ, major eſt utraque ipſarum ΜΚ, ΚΛ: major igitur [per ſchol. 2.] eſt angulus ΜΚΛ angulo ΞΚΝ: quare tota ΖΑ major apparet quam tota ΗΝ. eademque ratione tota ΗΝ major quam ΒΔ: inæqualiter ergo diſtare videntur duæ magnitudines.

ΣΧΟΛΙΟΝ α'.

Πῶς δὲ ἡ ΚΜ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΖΛ, δείξομεν ὅτως. ἐπεὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἦκται ἡ ΚΑ· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ ὅσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἡ ΚΑ ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας. ἐπεὶ οὖν ἐπὶ τὴν ΑΖ κάθετος ἦκται ἡ ΜΑ, καὶ πρὸς τὴν ΑΜ ἡ ΚΑ ὀρθὴν ποιήσει γωνίαν. ἐπεζεύχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Λ ἡ ΑΛ· καὶ πρὸς ἄρα τὴν ΑΛ ἡ ΑΚ ὀρθὴν ποιήσει γωνίαν. ἐπεὶ οὖν τρίγωνόν ἐστιν ὀρθογώνιον τὸ ΚΑΜ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ΚΑΜ γωνίαν· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΚΜ ὑποτεινούσης τὴν ὀρθὴν γωνίαν ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΚΑ, ΑΜ. πάλιν ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστιν ὀρθογώνιον τὸ ΑΜΛ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΜΛ γωνίαν· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΜ, ΜΛ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΚΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΚΑ, ΑΜ, ΜΛ. ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν ΚΑ, ΑΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΜ, τρίγωνον γάρ ἐστιν ὀρθογώνιον τὸ ΚΑΜ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΚΑΜ γωνίαν· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΚΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΚΜ, ΜΛ. καὶ, ἀφ' οὗ τὸ ὄγδοον καὶ πεντηκοστὸν τῆς πρώτης τῶν στοιχείων, ἡ ὑπὸ ΚΜΛ γωνία ὀρθή ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SCHOLIUM 1.

Quomodo autem ΚΜ perpendicularis ſit in ΖΛ, ſic demonſtrabimus. cum ex Κ puncto in ſublimi conſtituto in ſubjectum planum ducta ſit perpendicularis ΚΑ; ad omnes igitur rectas ipſam tangentes & in ſubjecto plano jacentes [per 3. def. 11.] angulos rectos facit ΚΑ. quia ergo ΜΑ perpendicularis ducta eſt ad ΑΖ: igitur ΚΑ rectum angulum facit cum ΑΜ. ducatur linea ex Α in Λ, ſitque ΑΛ: ergo ΑΚ cum ΑΛ rectum angulum facit. cum itaque triangulum rectangulum ſit ΚΑΜ, rectum habens angulum ΚΑΜ: quadratum igitur quod fit ex ΚΜ ſubtendente rectum angulum æquale eſt [per 47. 1.] quadratis quæ fiunt ex ΚΑ, ΑΜ. rurſus quia triangulum eſt rectangulum ΑΜΛ rectum habens ΑΜΛ: quadratum igitur quod fit ex ΑΛ æquale eſt quadratis quæ fiunt ex ΑΜ, ΜΛ: quadratum igitur quod fit ex ΚΛ æquale eſt eis quæ fiunt ex ΚΑ, ΑΜ, ΜΛ. ſed quadratis quæ fiunt ex ΚΑ, ΑΜ æquale eſt quadratum quod fit ex ΚΜ, triangulum enim rectangulum eſt ΚΑΜ rectum angulum habens ΚΑΜ: quadratum ergo quod fit ex ΚΛ æquale eſt quadratis quæ fiunt ex ΚΜ, ΜΛ. quocirca, per 48. primi elementorum, rectus eſt angulus ΚΜΛ. quod erat demonſtrandum.

ΣΧΟΛΙΟΝ β'.

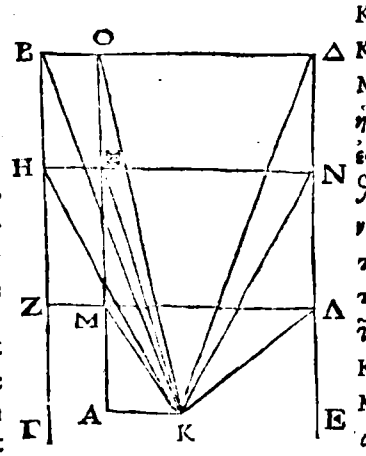
Ὅτι δὲ ἡ ὑπὸ ΜΚΛ τῆς ὑπὸ ΞΚΝ μείζων ἐστί, δείξομεν ὅτως. ἐπεὶ ὀρθογώνιόν ἐστι τρίγω-

SCHOLIUM 2.

Porro quod angulus ΜΚΛ major ſit angulo ΞΚΝ, demonſtrabimus hoc modo. quoniam triangu-

1 Προσχρῆ δ' ἐνίοτε. ſi κάθετος ΚΑ intra parallelas producitur cadet; ſi extra, non eſt neceſſe, ut in præcedente caſu. *Savil.* 2 Erit igitur ad rectos τοῖς ΒΔ, ΗΝ προσπίπτουσα. modo intelligantur ΒΔ, ΗΝ, ΖΛ ſatis ſecare parallelas: id quod eſt neceſſe, quia diſtantiæ ita capiuntur. *Idem.* 3 Parallelorum enim intervalla capiuntur per rectas lineas ad rectos angulos ipſis incidentes. *Idem.* 4 *Adde hæc,* Similiter demonſtratur ΜΚΖ angulus major angulo ΞΚΗ. Tale quippiam vitio librariorum abeſſe puto: eſt enim neceſſarium, niſi Α punctum in alteram parallelarum cadit. *Idem.*

lum ΚΑΜ eſt rectangulum, rectum habens angulum ΚΑΜ: angulus ergo ΚΜΑ [per 17.1.] acutus eſt; quare [per 13.1.] obtuſus eſt ΚΜΞ angulus: trianguli ergo obtuſanguli ΚΞΜ latus ΚΞ ſubtendit angulum obtuſum qui eſt ad Μ: majus igitur [per 19.1.] eſt ΚΞ quam ΚΜ. quia ergo triangula ſunt rectangula ΚΞΝ, ΚΑΜ, rectos habentia angulos ad Ξ, Μ; quadratum igitur quod fit ex ΚΝ æquale eſt [per 47. 1.] quadratis quæ fiunt ex ΚΞ, ΞΝ. eadem ratione quadratum quod fit ex ΚΑ æquale eſt quadratis quæ fiunt ex ΚΜ, ΜΑ. quadrata autem quæ fiunt ex ΚΞ, ΞΝ majora ſunt quadratis quæ fiunt ex ΚΜ, ΜΑ: nam [per 34.1.] ΞΝ latus æquale eſt lateri ΜΑ, cum ſit ei oppoſitum in parallelogrammo ΜΝ; eſt vero [ex mox oſtenſis] ΚΞ recta major quam recta ΚΜ: quadratum igitur quod fit ex ΚΝ majus eſt quadrato quod fit ex ΚΑ: quare ΚΝ major eſt quam ΚΑ. oſtenſa vero eſt ΚΞ major quam ΚΜ; & ΞΝ æqualis ipſi ΜΑ: ſi ergo ipſam ΜΑ aptaverimus ipſi ΞΝ, cadet ΚΜΑ triangulum intra triangulum ΚΞΝ: ergo, per prop. 21. primi elementorum, major erit ΜΚΑ angulus angulo ΞΚΝ. quod erat demonſt.

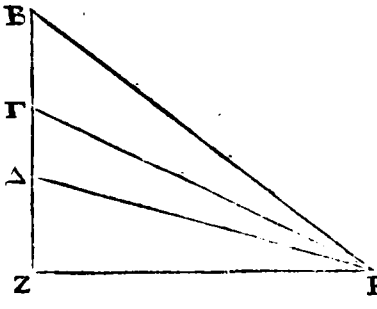


νον τὸ ΚΑΜ ὀρθῷ ἔχον τῷ ὑπὸ ΚΑΜ γωνίαν, ὀξεῖά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΚΜΑ· ὥστε ἀμβλεῖά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΚΜΞ· ἀμβλυγωνίῳ ἄρα τριγώνῳ τῷ ΚΞΜ ἡ ΚΞ ὑποτείνει τὴν πρὸς τῷ Μ ἀμβλεῖαν γωνίαν· μείζων ἄρα ἡ ΚΞ τῆς ΚΜ. ἐπεὶ οὖν τρίγωνά ἐστιν ὀρθογώνια τὰ ΚΞΝ, ΚΑΜ ὀρθὰς ἔχοντα τὰς πρὸς τοῖς Ξ, Μ γωνίας· τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ΚΝ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΚΞ ΞΝ. ὁμοίως δὴ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΚΜ, ΜΑ· καὶ ἔστι τὰ ἀπὸ τῶν ΚΞ, ΞΝ μείζονα τῶν ἀπὸ τῶν ΚΜ, ΜΑ· ἡ γὰρ ΞΝ τῇ ΜΑ ἴση ἐστίν, ὡς ὑποβαλληλογράμμων τῶν ΜΝ ὄσαι ἀπεναντίον, ἡ δὲ ΚΞ τῆς ΚΜ μείζων ἐστί· δὴ τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΚΝ τῶν ἀπὸ τῆς ΚΑ μεῖζον· ὥστε καὶ ἡ ΚΝ τῆς ΚΑ μείζων. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΚΞ τῆς ΚΜ μείζων, ἴση δὲ ἡ ΞΝ τῇ ΜΑ· ἐὰν ἄρα τὴν ΜΑ ὅπῃ τῷ ΞΝ ἐφαρμόσωμεν, ἐντὸς πεσεῖται τὸ ΚΜΑ τρίγωνον τῶν ΚΞΝ τριγώνων· καὶ, ἀλλὰ τὸ εἰκοστὸν πρῶτον τῶν πρώτων τῶν στοιχείων, μείζων ἔσται ἡ ὑπὸ ΜΚΑ τῆς ὑπὸ ΞΚΝ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. VII. Theor.

Magnitudines æquales in eadem recta linea procul à ſeſe poſitæ, inæquales apparent.

SInt enim æquales magnitudines ΒΓ, ΔΖ, oculus autem ſit Κ; & ab oculo Κ incidant radii ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ, ΚΖ. ſit autem rectus ΚΖΒ angulus: major ergo eſt [per ſch. 4. opt.] angulus ΖΚΔ angulo ΓΚΒ: quare [per 5. poſit.] major apparebit ΔΖ quam ΓΒ: ideoque inæquales apparent ΒΓ, ΔΖ magnitudines.



Προτασις ζ'.

Τὰ ὑπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἴσα ὄντα μεγέθη, πορρώτερα ἀλλήλων τεθέντα, ἄνισα φαίνεται.

Ἔστω γὰρ ἴσα μεγέθη τὰ ΒΓ, ΔΖ, ὄμμα δὲ ἔστω τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ ὄμματος πεσέτωσαν ὄψεις αἱ ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ, ΚΖ. ὀρθὴ δὲ ἔστω ἡ ὑπὸ ΚΖΒ γωνία. σκαληνὸν ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ΖΚΔ γωνία τῆς ΓΚΒ· ὥστε καὶ ἡ ΔΖ μείζων φανήσεται τῆς ΓΒ· ἄνισα ἄρα φαίνεται τὰ ΒΓ, ΔΖ μεγέθη.

Prop. VIII. Theor.

Æquales magnitudines, inæqualiter ab oculo diſtantes, non ſervant eandem rationem angulorum quam diſtantiarum.

SIT ΒΓ magnitudo æqualis & parallela magnitudini ΔΖ; ſitque oculus Κ, à quo educantur radii ΚΖΓ, ΚΘΒ, & ΚΕΔ, quorum ΚΓ ſit ad angulos rectos ipſi ΒΓ: aſſero fore ut non appareat eadem ratio inter magnitudines ΒΓ, ΔΖ quæ inter intervalla ΚΓ, ΚΖ.

Προτασις η'.

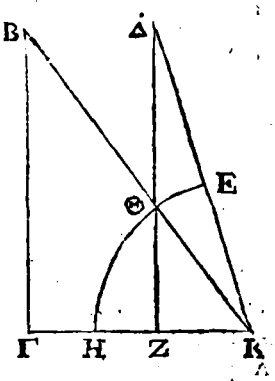
Τὰ ἴσα μεγέθη ἄνισον διεσηκότα οὐκ ἀναλόγως τοῖς ἀποσήμασιν ὁρᾶται [3].

Ἔστω γὰρ τὸ ΒΓ τῷ ΔΖ ἴσον, καὶ κείσθω αὐτῷ παράλληλον, ὄμμα δὲ ἔστω τὸ Κ [4], καὶ ἀπ' αὐτοῦ πεσέτωσαν ὄψεις αἱ ΚΖΓ, ΚΘΒ, καὶ ΚΕΔ, ὧν ἡ ΚΓ πρὸς ὀρθὰς ἔστω τῇ ΒΓ· φημὶ δὴ ὅτι οὐκ ἀναλόγως φανήσεται τὰ ΒΓ, ΔΖ μεγέθη τοῖς ΚΓ, ΚΖ ἀποσήμασιν.

1 Mihi plane & theorema & demonſtratio nihil videtur poſt 4. prop. magni adferre: omitti ſane utrumque ſine diſpendio rei opticæ potuit. *Savil.* 2 Ut huic demonſtrationi theorema congrueret, deberet eſſe hujuſmodi: Τῶν ἀπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἴσων ὄντων μεγεθῶν, πορρώτερον ἀλλήλων τεθέντων, quæ à perpendiculari in illam εὐθεῖαν acta inæqualiter abſunt ἄνισα φαίνεται. *Idem.* 3 Sed major eſt ratio majoris diſtantiæ ad minorem quam majoris τῆς ὄψεως anguli ad minorem. *Idem.* 4 ἐπ' εὐθείας ſcilicet τοῖς Γ, Ζ σημείοις.

Επεὶ

Ἐπεὶ γὰρ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΘΖΚ· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΘΚ· ὥστε καὶ ἡ ΘΚ τῆς ΚΖ μείζων ἐστίν· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΘΚ, κύκλος χωρίου μείζονος ὑπερπεσεῖται τὴν ΚΖ. μεχάφθω, καὶ ἔστω ἡ ΕΘΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΔΘΚ τρίγωνον μείζονα λόγον ἔχει πρὸς τὸν ΘΒΚ τομέα ἤπερ τὸ ΖΘΚ τρίγωνον πρὸς τὸν ΗΘΚ τομέα· ἐναλλὰξ ἄρα τὸ ΘΔΚ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΘΚ τρίγωνον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΕΘΚ τομεὺς πρὸς τὸν ΗΘΚ τομέα· [2] συνῃθέτως ἄρα ΖΔΚ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΘΚ τρίγωνον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΕΗΚ τομεὺς πρὸς τὸν ΗΘΚ τομέα. ἀλλ' ὡς τὸ ΖΔΚ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΘΚ τρίγωνον οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ, ὡς δὲ ὁ ΗΕΚ τομεὺς πρὸς τὸν ΗΘΚ τομέα οὕτως ἡ ὑπὸ ΔΚΖ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΘΚΖ· ἐν μείζονι ἄρα λόγῳ ἐστὶ καὶ ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΖΘ ἤπερ ἡ ΕΚΖ γωνία πρὸς τὴν ΘΚΖ. ὡς δὲ ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΖΘ οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΖΚ· καὶ ἡ ΚΓ ἄρα πρὸς τὴν ΖΚ ἐν μείζονι λόγῳ ἐστὶν ἤπερ ἡ ΕΚΖ γωνία πρὸς τὴν ΘΚΖ γωνίαν. οὐκ ἄρα μὴν τὴν ΒΚΖ γωνίας τὸ ΔΖ ὄψεται, οὐκ δὲ τὴν ΒΚΓ γωνίας τὸ ΒΓ· οὐκ ἀνάλογον ἄρα τοῖς διαστήμασι τὰ ἴσα μεγέθη ὄψεται.

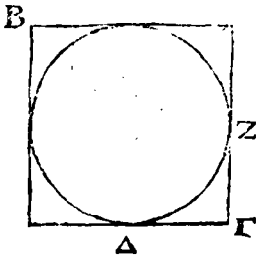


Quia enim rectus eſt angulus ΘΖΚ; ergo [per 17. 1.] angulus ΖΘΚ acutus eſt: quare [per 19. 1.] ΘΚ major eſt quam ΚΖ: ideoque ſi centro Κ, intervallo autem ΚΘ, deſcribatur circulus, cadet ultra ipſam ΚΖ, id eſt, ΚΖ erit minor ſemidiametro. deſcripta igitur ſit circuli portio, quæ ſit ΕΘΗ. & quia ΔΘΚ triangulum majorem rationem habet ad ſectorem ΘΒΚ quam ΖΘΚ triangulum ad ſectorem ΗΘΚ: viciſſim ergo ΘΔΚ triangulum ad ΖΘΚ triangulum majorem rationem habet quam ſector ΕΘΚ, ad ΗΘΚ ſectorem; ergo per compoſitionem rationis, triangulum ΖΔΚ ad triangulum ΖΘΚ majorem habet rationem quam ſector ΕΗΚ ad ΗΘΚ ſectorem: ſed [per 1. 6.] ut ΖΔΚ triangulum ad ΖΘΚ triangulum ita ΔΖ ad ΖΘ; ut autem ΗΕΚ ſector ad ΗΘΚ ſectorem ita [per cor. 33. 6.] ΔΚΖ angulus ad ΘΚΖ angulum: ergo ΔΖ ad ΖΘ majorem rationem habet quam angulus ΕΚΖ ad angulum ΘΚΖ. ut autem ΔΖ ad ΖΘ ita [per 4. 6.] ΓΚ ad ΖΚ: igitur ΚΓ ad ΖΚ majorem rationem habet quam ΕΚΖ angulus ad ΘΚΖ angulum. ſed ſub ΒΚΖ angulo cernitur magnitudo ΔΖ; ſub angulo autem ΒΚΓ cernitur magnitudo ΒΓ: non ergo in eadem ratione cernuntur æquales magnitudines, in qua ſunt intervalla.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Τὰ ὀρθογώνια μεγέθη, ἐξ ἀποστήματος[3] ὁρώμενα, ὡσαύτως φαίνεται.

Ἔστω γὰρ ὀρθογώνιον τὸ ΒΓ ἐξ ἀποστήματος ὁρώμενον. οὐκοῦν ἐπεὶ ἕκαστον τῶν ὁρωμένων ἔχει τι μῆκος ἀποστήματος, ὃ ὁρώμενον οὐκ ἔτι ὄψεται· [4] ἡ μὲν Γ ἄρα γωνία οὐχ ὄψεται, τὰ δὲ Δ, Ζ σημεῖα μόνον φαίνεται. ὁμοίως καὶ ἐφ' ἑκάστης τῶν λοιπῶν γωνιῶν τοῦτο συμβήσεται· ὥστε ὅλον ὡσαύτως φανήσεται.



PROP. IX. THEOR.

Rectangulæ magnitudines, eminus ſpectatæ, rotundæ apparent.

SIT ΒΓ rectangula magnitudo eminus conſpecta. cum ergo [per 3. opt.] quodlibet aſpectabilium habeat certam intervalli longitudinem, qua expleta jam non cernitur: angulus igitur, qui eſt ad Γ, non cernitur, ſed puncta tantum Δ & Ζ apparent. idem cuilibet reliquorum angulorum accidet: quare circularis apparebit tota magnitudo.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ἡ Γ γωνία οὐχ ὄψεται· τὸ γὰρ ὀρθογωνίων σχημάτων πλάτος ἔλαττον τυγχάνει ὂν περὶ τὰς γωνίας ἢ ἄλλοθί που· διόπερ τὰ πλησίον τῶν γωνιῶν ἧττον ἂν ἀφανίζοιτο τῶν περὶ τὰ μέσα τῶν σχημάτων.

SCHOLIUM.

Angulus Γ non cernitur: figurarum enim rectangularum latitudo minor eſt circa angulos quam alibi: quocirca partes quæ magis ad angulos accedunt citius evaneſcunt & aſpectum fugiunt, quam illæ quæ medium figuræ locum occupant.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Τῶν κάτω ἢ ὄμματος κειμένων ὁπιπέδων,[5] τὸ πόρρω μετεωρότερα φαίνεται.

Ἔστω γὰρ ὄμμα τὸ Β ἄνω τοῦ ΓΚ ὁπιπέδου κείμενον, ἀφ' οὗ ὄμματος διαπεπτέτωσαν

PROP. X. THEOR.

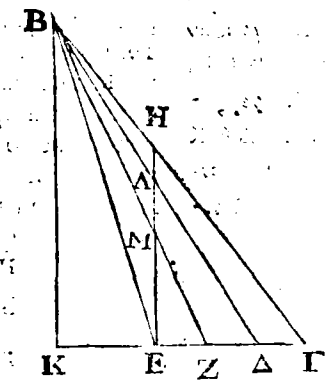
Planorum oculo ſubjectorum quæ remotiora ſunt ſublimiora apparent.

SIT oculus Β ſublimior poſitus quam ſit planum ΓΚ, & ex oculo procedant radii

1 Addit *Cod. Savil.* ἐπὶ τὰ ΚΔ ἰλάσσονα 2 Συνῃθῶς ἄρα in *Cod. Savil.* Κατοχαφὴ prop. 8. accommodari poteſt ad ea quæ videntur ſecundum radios ἰσοσκελῆς (quomodo res perfectiſſime videntur, quippe ſecundum maximum angulum, ut ex lemmate ad quartam liquet) diviſis baſibus bifariam. 3 Satis longinquo, quantum ſufficiat nimirum ad tollendum ſenſum angulorum. *Savil.* 4 Ita ne totum quidem orthogonium: ſed à Scholiaſte nonnihil ſublevamur hac in parte. *Savil.* 5 Τὰ πεμπτικῶ à puncto caſus radii perpendicularis in ſubjectum planum. *Idem.*

ΒΓ, ΒΔ, ΒΖ, ΒΕ, ΒΚ, quorum ΒΚ perpendicularis ſit ad ſubjectum planum: dico ΓΔ planum ſublimius apparere plano ΖΕ.

Quia enim radii ΒΓ, ΒΔ, ſub quibus cernitur ΓΔ planum, ſublimiores ſunt quam ΒΖ, ΒΕ, ſub quibus cernitur planum ΖΕ: ſublimius igitur apparet planum ΓΔ plano ΖΕ, & planum ΖΕ plano ΕΚ; quæ enim per radios ſublimiores ſpectantur [per 8. poſit.] ſublimiora apparent.



ἀκτῖνες αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΒΖ, ΒΕ, ΒΚ, ὧν ἡ ΒΚ κάθετος ἔστω ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· λέγω ὅτι τὸ ΓΔ τοῦ ΖΕ μειζότερον φαίνεται.

Ἐπεὶ αἱ ΒΓ, ΒΔ ὄψεις, ὑφ' ὧν ὁρᾶται τὸ ΓΔ ἐπίπεδον, μειζότεραί εἰσι τῶν ΒΖ, ΒΕ ὄψεων, ὑφ' ὧν ὁρᾶται τὸ ΖΕ· δοκεῖ τὸ μὲν ΓΔ τοῦ ΖΕ μειζότερον φαίνεσθαι, τὸ δὲ ΖΒ τοῦ ΕΚ· τὰ γὰρ ὑπὸ μειζοτέρων ἀκτίνων φαντάσματα μειζότερα φαίνεται.

SCHOLIUM.

Quod autem radii ΒΓ, ΒΔ ſublimiores ſint radiis ΒΖ, ΒΕ, hinc liquet. ducatur enim ΕΗ recta ad planum ΚΓ: punctum igitur Η ſublimius eſt puncto Λ, & punctum Λ puncto Μ. ducitur autem radius ΒΓ per punctum Η, radius vero ΒΔ per punctum Λ, radius denique ΒΖ per punctum Μ: ergo radius ΒΓ ſublimior eſt quam ΒΔ, & ΒΔ ſublimior eſt quam ΒΖ, & ΒΖ quam ΒΕ: quare ΒΓ, ΒΔ radii ſublimiores ſunt quam radii ΒΖ, ΒΕ.

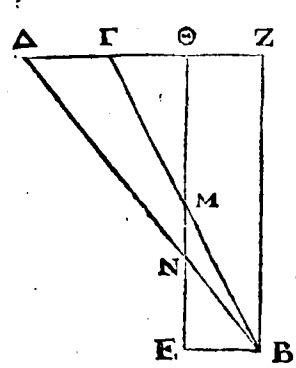
ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὅτι δὲ αἱ ΒΓ, ΒΔ ὄψεις μειζότεραί εἰσι τῶν ΒΖ, ΒΕ ὄψεων, δῆλον. ἤχθω γὰρ ἡ ΕΗ πρὸς ὀρθὰς τῷ ΚΓ ἐπιπέδῳ· ἀνὰ τὸ Η σημεῖον μειζότερόν ἐστι τοῦ Λ, καὶ τὸ Λ τοῦ Μ. διῆκται δὲ ἡ μὲν ΒΓ ὄψις διὰ τοῦ Η, ἡ δὲ ΒΔ διὰ τοῦ Λ, ἡ δὲ ΒΖ διὰ τοῦ Μ· ἡ ἄρα ΒΓ ὄψις μειζοτέρα ἐστὶ τῆς ΒΔ, καὶ ἡ ΒΔ τῆς ΒΖ, καὶ ἡ ΒΖ τῆς ΒΕ· αἱ ἄρα ΒΓ, ΒΔ ὄψεις μειζοτεραί εἰσι τῶν ΒΖ, ΒΕ ὄψεων.

PROP. XI. THEOR.

Planorum oculo ſublimiorum quæ remotiora ſunt depreſſiora apparent.

SIT oculus Β depreſſior plano ΔΖ, & ab oculo Β procedant radii ΒΔ, ΒΓ, ΒΖ: quia igitur de radiis omnibus ab oculo Β ad planum ΔΖ tendentibus humillimus eſt ΒΔ, ipſe autem ΒΓ humilior ipſo ΒΖ. ſed per radios ΒΔ, ΒΓ cernitur planum ΔΓ, per radios autem ΒΓ, ΒΖ cernitur planum ΓΖ: igitur [per 9. poſit.] ΔΓ depreſſius apparet quam ΓΖ.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Τῶν ἄνω τοῦ ὄμματος κειμένων ὁπιπέδων [1] τὰ πόρρω ταπεινότερα φαίνεται.

Ἔστω γὰρ ὄμμα τὸ Β, κάτω τοῦ ΔΖ ὁπιπέδου κείμενον, [2] ἀφ' οὗ ἐφαπτόμεναι ἀκτῖνες αἱ ΒΔ, ΒΓ, ΒΖ, [2] ταπεινοτάτη τοῦ ὑπὸ τοῦ Β ὄμματος πρὸς τὸ ΔΖ ἐπίπεδον ἐφαπτομένων ἀκτίνων ἐστὶν ἡ ΒΔ, ἡ δὲ ΒΓ τῆς ΒΖ ταπεινοτέρα. ἀλλὰ διὰ μὲν τῶν ΒΔ, ΒΓ ἀκτίνων τὸ ΔΓ φαίνεται, διὰ δὲ τῶν ΒΓ, ΒΖ τὸ ΓΖ· τὸ ΔΓ ἄρα ταπεινότερον τοῦ ΓΖ ὁρᾶται.

SCHOLIUM.

Quod autem radiorum omnium ex Β oculo ad ΔΖ planum pergentium humillimus ſit radius ΒΔ, hunc in modum demonſtrabimus. ſit enim planum ΒΕ parallelum quidem plano ΖΔ, brevius autem ipſo ΓΖ; erigaturque ΕΘ linea, quæ recta ſit ad planum ΒΕ: igitur punctum Ν depreſſius eſt puncto Μ. tranſit autem radius quidem ΒΔ per punctum Ν, radius autem ΒΓ per punctum Μ: quare radius ΒΔ humilior eſt radio ΒΓ. eadem demonſtratio in reliquis valebit.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

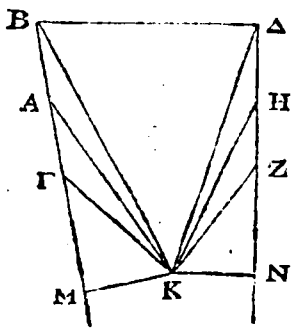
Ὅτι δὲ ἡ ΒΔ ταπεινοτάτη ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τοῦ Β ὄμματος πρὸς τὸ ΔΖ ἐπίπεδον προσπιπτουσῶν ἀκτίνων, δείξομεν ὕστερον. ἔστω γὰρ ΒΕ ἐπίπεδον τῷ μὲν ΖΔ παράλληλον τῷ ΖΔ ἐπιπέδῳ, ἔστω δὲ ἐλάσσον τοῦ ΓΖ, καὶ ἀνήχθω ἡ ΕΘ πρὸς ὀρθὰς τῷ ΒΕ ἐπιπέδῳ· τὸ μὲν Ν ἄρα σημεῖον ταπεινότερόν ἐστι τοῦ Μ. διῆκται δὲ ἡ μὲν ΒΔ ὄψις διὰ τοῦ Ν σημείου, ἡ δὲ ΒΓ διὰ τοῦ Μ· ἡ ἄρα ΒΔ ταπεινοτέρα ἐστὶ τῆς ΒΓ. τὸν αὐτὸν τρόπον καὶ περὶ τῶν ἄλλων ἔσται ἡ ἀποδειξις.

1 Τὰ πόρρωτέρω ut ſupra, à puncto incidentiæ radii perpendicularis in ſupra poſitum planum. *Savil.* 2 In MS. *Savil.* ὧν ἡ ΒΖ κάθετος ἔστω ἐπὶ τὸ ἄνω κείμενον ἐπίπεδον, ut ſupra.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Τῶν εἰς τοὔμπροσθεν [1] μῆκος ἐχόντων, τὰ μὲν ἐπὶ τοῖς δεξιοῖς εἰς τὰ ἀριστερὰ δοκεῖ [2] παρῆχθαι, τὰ δ' ἐπὶ τοῖς ἀριστεροῖς εἰς τὰ δεξιά.

Ἔστω γὰρ ὁρώμενα τὰ ΒΓ, ΔΖ, ὄμμα δὲ τὸ Κ, ἀφ' οὗ προσπιπτέτωσαν ὄψεις αἱ ΚΓ, ΚΑ, ΚΒ, ΚΖ, ΚΗ, ΚΔ· σκοπεῖν τὸ Δ παρῆχθαι δοκεῖ εἰς τ' ἀριστερὰ ὑπὲρ τὸ Η· ὁμοίως δὲ καὶ τὸ Β εἰς τὰ δεξιὰ δοκεῖ παρῆχθαι ὑπὲρ τὸ Α. ὥστε τῶν εἰς τὸμπροσθεν μήκους ἐχόντων, τὰ μὲν ἐπὶ τοῖς δεξιοῖς εἰς τὰ ἀριστερὰ δοκεῖ παρῆχθαι, τὰ δ' ἐπὶ τοῖς ἀριστεροῖς εἰς τὰ δεξιά.



ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὅτι δὲ τὸ μὲν Δ παρῆχθαι δοκεῖ εἰς τ' ἀριστερὰ ὑπὲρ τὸ Η, καὶ τὸ Η ὑπὲρ τὸ Ζ, τὸ δὲ Β εἰς τὰ δεξιὰ μᾶλλον ἢ τὸ Α, καὶ τὸ Α μᾶλλον ἢ τὸ Γ, δῆλον. ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΚΝ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΔΝ, ἐπὶ δὲ ἡ ΚΜ ὁμοίως πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΜ· πασῶν δὴ ἀπὸ τοῦ Κ ὄμματος πρὸς τὴν ΔΝ προσπιπτουσῶν εὐθειῶν [3] ἐλαχίστη ἐστὶν ἡ ΚΝ κάθετος· καὶ διὰ τοῦτο δεξιώτατον τὸ Ν σημεῖον, ἐπὶ δὲ ἡ ΚΝ δεξιωτάτη τῶν ΚΖ, ΚΗ, ΚΔ ὄψεων. ἐπεὶ δὲ ἡ ΚΖ ἐγγίων πρὸς τὴν ΚΝ ὑπὲρ ἡ ΚΗ, καὶ ἡ ΚΗ, ἐγγίων πρὸς τὴν ΚΝ ὑπὲρ ἡ ΚΔ· ἡ ἄρα ΚΔ εἰς τὰ ἀριστερὰ παρῆχθαι δοκεῖ ὑπὲρ ἡ ΚΗ, καὶ ἡ ΚΗ ὑπὲρ ἡ ΚΖ· τὸ δὴ Δ εἰς τὰ ἀριστερὰ ἀποτεύειν μᾶλλον φαίνεται ἢ τὸ Η, καὶ τὸ Η ὑπὲρ τὸ Ζ. ὁμοίως δὴ δείξομεν καὶ τὸ Β εἰς τὰ δεξιὰ παρῆχθαι ἢ τὸ Α, καὶ τὸ Α ἢ τὸ Γ.

PROP. XII. THEOR.

Eorum quæ in anteriorem partem longitudinem habent, dextra lævorsum & læva dextrorsum educi videntur.

SInt visæ magnitudines ΒΓ, ΔΖ; oculus vero sit Κ, à quo procedant radii ΚΓ, ΚΑ, ΚΒ, ΚΖ, ΚΗ, ΚΔ: igitur Δ magis ad lævam educi videtur quam Η: eodemque modo Β magis ad dextram educi videtur quam Α. quocirca eorum quæ in anteriorem partem longitudinem habent, dextra lævorsum & læva dextrorsum educi videntur.

SCHOLIUM.

Quod autem Δ magis ad sinistram procumbere videatur quam Η, & Η quam Ζ; item quod Β ad dextram magis tendere videatur quam Α, & Α magis quam Γ, hinc constabit. esto enim recta ΚΝ ad angulos rectos ipsi ΔΝ, recta etiam ΚΜ ad angulos rectos ipsi ΒΜ: radiorum igitur omnium, ex oculo Κ ad ΔΝ pergentium, minimus est perpendicularis ΚΝ: quocirca maxime dextrum est punctum Ν, & ΚΝ radius magis ad dextram vergit quam ΚΖ, ΚΗ, ΚΔ radii. quia autem ΚΖ propior est ipsi ΚΝ quam sit radius ΚΗ, & ΚΗ propior ipsi ΚΝ quam sit radius ΚΔ: igitur radius ΚΔ ad lævam magis vergere videtur quam radius ΚΗ, & radius ΚΗ magis quam radius ΚΖ: ergo Δ lævorsum magis nutare videtur quam Η, & Η magis quam Ζ. eodem modo ostendemus Β magis ad dextram vergere quam Α, & Α quam Γ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

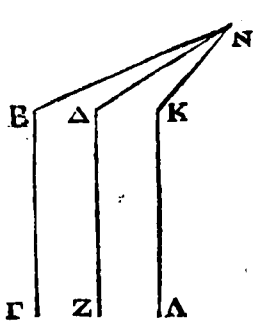
Τῶν ἴσων μεγεθῶν ὑπὸ τὸ ὄμμα [4] κειμένων [5] τὰ πόρρω κείμενα μετεωρότερα φαίνεται.

Ἔστω γὰρ ἴσα μεγέθη τὰ ΒΓ, ΔΖ, ΚΛ ὑπὸ τὸ ὄμμα τὸ Ν κείμενα, καὶ ἀπὸ τοῦ Ν ὄμματος προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΝΒ, ΝΔ, ΝΚ. σκοπεῖν [6] μετεωροτάτη ἐστὶν ἡ ΝΒ τῶν λοιπῶν ἀκτίνων· ὥστε καὶ τὸ Β σημεῖον. τὸ ἄρα ΒΓ τοῦ ΔΖ μετεωρότερον φαίνεται, τὸ δὲ ΔΖ τοῦ ΚΛ. τὰ ἄρα ἴσων μεγεθῶν ὑπὸ τὸ ὄμμα κειμένων τὰ πόρρω κείμενα μετεωρότερα φαίνεται.

PROP. XIII. THEOR.

Æqualium magnitudinum sub oculo positarum, quæ remotiores ab oculo sunt sublimiores apparent.

SInt æquales magnitudines ΒΓ, ΔΖ, ΚΛ positæ sub oculo qui sit Ν, à quo procedant radii ΝΒ, ΝΔ, ΝΚ. horum ergo omnium maxime sublimis est radius ΝΒ: quare & punctum Β sublimius apparet; igitur ΒΓ sublimior apparet quam ΔΖ, & ΔΖ quam ΚΛ. ergo æqualium magnitudinum sub oculo positarum, quæ remotiores ab oculo sunt sublimiores apparent.

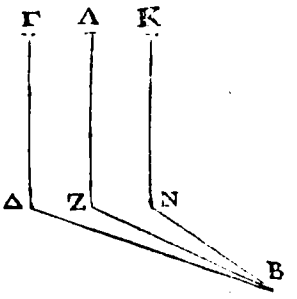


1 Antrorsum, in anteriorem partem, sc. neque ad dextram neque ad sinistram deflectendo. *Savil.* 2 Ἀποτείνειν, tendere, procumbere. 3 Κάθετος & ἐλαχίστη est & δεξιώτατον, sed non puto δεξιώτατον quia ἐλαχίστη. *Savil.* 4 Sc. æqualiter, *i. e.* ita ut κάθετοι à punctis Β, Δ, Κ, itemque κάθετοι à punctis Γ, Ζ, Λ, in rectam ab Ν ad centrum terræ ductam ἐκβεβλημένην in iisdem punctis rectam illam fecent; alioqui non συσχήσεται. *Savil.* 5 In quæ sc. perpendicularis ob oculo longior est. *Idem.* 6 Longissime sc. distans à perpendiculari ab oculo ad horizontem, quæ est omnino πεπειρατήν. *Idem.*

Prop. XIV. Theor.

Æqualium magnitudinum oculo ſublimiorum, quæ remotiores ſunt humiliores apparent.

SInt æquales magnitudines KN, ΛZ, ΓΔ poſitæ loco ſublimiori quam ſit B oculus, à quo pergant radii BN, BZ, BΔ; humillimus ergo eſt radius BΔ: quare & punctum Δ humillimum erit. ideoque ΓΔ humilior apparebit quam ΛZ, & ΛZ humilior videbitur quam KN.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

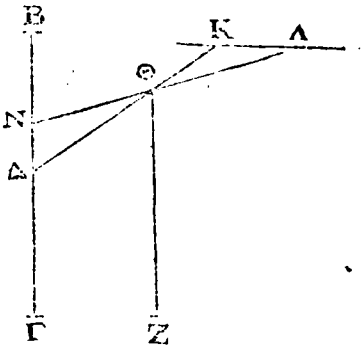
Τῶν ἴσων μεγεθῶν [1] ἄνω ὄμματος κειμένων [2] τὰ πόρρω κείμενα ταπεινότερα φαίνεται.

Ἔστω ἴσα μεγέθη τὰ KN, ΛZ, ΓΔ ἄνω τοῦ ὄμματος κείμενα τοῦ B, καὶ ἀπὸ τοῦ B ὄμματος ἐκβεβλήσθωσαν ἀκτῖνες αἱ BN, BZ, BΔ· ἐσχάτη ταπεινοτάτη ἐστὶν ἡ BΔ· ὥστε καὶ τὸ Δ. καὶ τὸ μὲν ΓΔ ταπεινότερον φαίνεται τοῦ ΛZ, τὸ δὲ ΛZ τοῦ KN.

Prop. XV. Theor.

Magnitudinum oculo ſubjectarum, quarum altera alteram excedit, oculo quidem ad eas accedente, exceſſus quo major minorem ſuperare videtur, major apparet; recedente vero, minor.

SIT BΓ major quam ΘZ, ponaturque K oculus ſublimiore loco quam ſint BΓ, ΘZ, & per punctum Θ cadat radius KΔ. igitur BΓ excedere videtur ipſam ΘZ tota BΔ magnitudine, æqualis enim videtur ΘZ ipſi ΔΓ, cum ab eodem oculo & eodem radio KΔ cernantur. rurſus, transferatur oculus ad Λ, & per Θ punctum procedat radius ΛN. itaque rurſus BΓ major apparet quam ΘZ, tanto exceſſu quanta eſt magnitudo BN: recedente itaque oculo, major magnitudo BΓ minorem ΘZ excedere videtur minore exceſſu, quam accedente.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

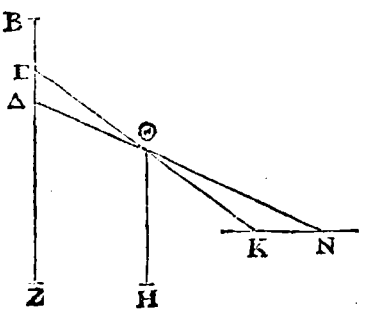
Οσα ἀλλήλων ὑπερέχει τῷ ὑπὸ τὸ ὄμμα [3] κειμένῳ, προσιόντος μὲν τοῦ ὄμματος, μείζονι τὸ ὑπερφαινόμενον φαίνεται μεῖζον· ἀπιόντος δὲ, ἐλάττονι μεῖζον.

Ἔστω γὰρ μεῖζον τὸ BΓ τοῦ ΘZ, ᾧ ὄμμα κείσθω τὸ K ἄνω τῶν BΓ, ΘZ, ᾗ προσπιπτέτω ἀκτὶς ἡ ΔΘ τοῦ Θ ἡ KΔ. ἐκβεβλήσθω τὸ BΓ τοῦ ΘZ μεῖζον φαίνεται τῷ BΔ, ἴσον γὰρ ἐφαίνετο τὸ ΘZ τῷ ΔΓ, ἐπειδὴ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὄμμα καὶ τὴν KΔ ἀκτῖνα ἑωράτο. πάλιν δὴ μετακείσθω τὸ ὄμμα ἐπὶ τὸ Λ, ᾗ προσπιπτέτω ἀκτὶς ἡ ΛN. ἐκβεβλήσθω πάλιν τὸ BΓ τοῦ ΘZ μεῖζον φαίνεται τῷ BN· ἐλάττονι ἄρα φαίνεται ὑπερέχον τὸ BΓ τοῦ ΘZ, ἀπιόντος τοῦ ὄμματος, ἤπερ προσιόντος.

Prop. XVI. Theor.

Magnitudinum oculo ſublimiorum, quarum altera alteram excedit, oculo ad eas accedente, exceſſus, quo major minorem ſuperat, minor videtur; recedente vero multo major.

SIT BZ major quam ΘH; ab oculo vero K in inferiore loco poſito procedat radius KΓ per punctum Θ: igitur BZ excedere videtur ipſam ΘH, tanta quantitate quanta eſt BΓ. transferatur oculus K ad N, procedatque radius NΔ per punctum Θ: ergo hic rurſus BZ excedit ipſam ΘH tota magnitudine BΔ.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις'.

Οσα ἀλλήλων ὑπερέχει κάτω τοῦ ὄμματος κειμένῳ, προσιόντος μὲν τοῦ ὄμματος, ἐλάττονι μεῖζον τὸ ὑπερφαινόμενον φαίνεται· ἀπιόντος δὲ, μείζονι μείζον.

Ἔστω μεῖζον τὸ BZ τοῦ ΘH, ᾧ ὑπὸ τοῦ K ὄμματος κάτω κειμένου προσπιπτέτω ἀκτὶς ἡ KΓ ἀπὸ τοῦ Θ· ἐκβεβλήσθω τὸ BZ τοῦ ΘH μεῖζον φαίνεται τῷ BΓ. μετακείσθω δὴ τὸ K ὄμμα ἐπὶ τὸ N, ᾗ προσπιπτέτω ἀκτὶς ἡ NΔ ἀπὸ τοῦ Θ· ὥστε πάλιν τὸ BZ τοῦ ΘH μεῖζον φαίνεται τῷ BΔ.

1 Et æque altorum, ut ſupra. *Sevil.* 2 Ut ſupra. *Idem.* 3 Satis eſt minorem quantitatem eſſe oculo ſubjectam. *Idem.*

προσιόν-

προσιόντος μὴν ἄρα τοῦ ὄμματος, ἐλάττονι μείζων φαίνεται ὑπερέχων τὸ ΒΖ τοῦ ΘΗ, ἀπιόντος δὲ μείζονι.

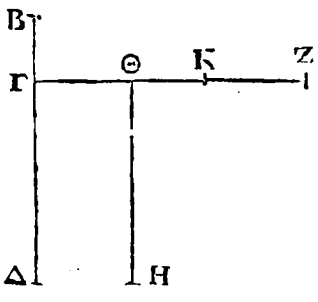
quare oculo accedente, major magnitudo ΒΖ minorem ΘΗ ſuperare videtur minori exceſſu; recedente vero oculo, majore.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Ὅσα ἀλλήλων ὑπερέχει, τῷ ὄμματος [1]ἐπ' εὐθείας τῷ ἐλάσσονι μεγέθει ὄντος, προσιόντος τε καὶ ἀφισταμένου τοῦ ὄμματος, τῷ ἴσῳ ἀεὶ δόξει τὸ ὑπερφαινόμενον τοῦ ἐλάσσονος ὑπερέχειν.

Prop. XVII. Theor.

Magnitudinum, quarum altera alteram excedit; oculi radio ad inferioris verticem perpendiculariter incidente, * major minorem ſemper excedere videtur æquali exceſſu, ſive oculus accedat, ſive recedat.



Ὑπερεχέτω γὰρ τὸ ΒΔ τοῦ ΘΗ τῷ ΒΓ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΘ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἔστω τὸ ὄμμα ἐπὶ τοῦ Ζ· ἀκτὶς ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἀκτὶς προσπεσοῦσα κατὰ τὴν ΖΓ ἐνεχθήσεται. πάλιν δὲ μετακείσθω τὸ ὄμμα ἐπὶ τὸ Κ· ἐκεῖν ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Κ ὄμματος ἀκτὶς προσπίπτουσα κατὰ τὴν ΚΓ ἐνεχθήσεται τῷ αὐτῷ ἄρα ὑπερέξει τὸ ΒΔ τοῦ ΘΗ, καὶ προσιόντος τοῦ ὄμματος καὶ ἀφισταμένου.

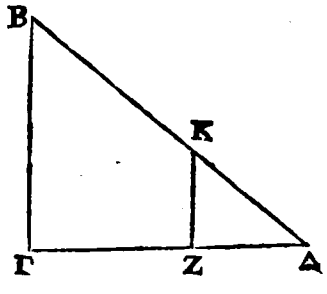
Excedat enim ΒΔ ipſam ΘΗ magnitudine ΒΓ; & connexa ΓΘ producatur uſque ad Ζ, in quo ſit oculus: igitur radius ex Ζ procedens ſecundum ΖΓ incidet. rurſus, transferatur oculus ad Κ. ergo ob eandem cauſam radius ex Κ oculo emiſſus feretur ſecundum ΚΓ lineam: quare ſive oculus accedat ſive recedat, eodem exceſſu perpetuo excedet major magnitudo ΒΔ ipſam minorem magnitudinem ΘΗ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Τὸ δοθὲν ὕψος γνῶναι πόσον ἐστίν.

Prop. XVIII. Probl.

Datam altitudinem cognoſcere quanta ſit.



Ἔστω γὰρ ὁ δεῖ ἐπιγνῶναι ὕψος πόσον ἐστὶ τὸ ΒΓ, καὶ προσπιπτέτω ἀκτὶς ἡλίου ἀπὸ τοῦ Β, ἡ ΒΔ· ἐκεῖν σκιὰ ἔσται ἡ ΓΔ. λάβε δή τι γνώμονα μέγεθος τὸ ΚΖ, καὶ ἐφάρμοσον ὑπὸ τὴν Δ γωνίαν ὑποβάλλοντα τῇ ΒΓ· ἐκεῖν ἐστιν ὡς τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΒ οὕτω τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΚ. καὶ γνώμονος ὁ λόγος ὁ τοῦ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΚ· γνώμονα ἄρα καὶ ὁ τοῦ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΒ. καὶ ἔστι γνώριμος ἡ ΔΓ σκιά· γνώμονα ἄρα καὶ τὸ ΓΒ ὕψος.

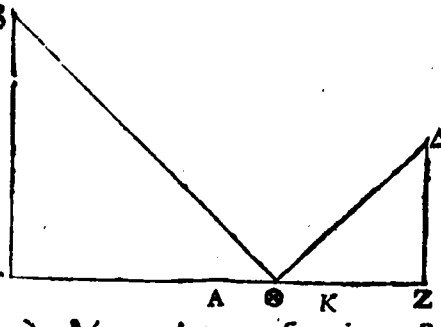
Sit altitudo ΒΓ, cujus quantitatem cognoſcere oporteat; & per punctum Β cadat ſolis radius ΒΔ: igitur umbra erit ΓΔ. ſume igitur magnitudinem aliquam cognitam, cujuſmodi ſit ΚΖ; eamque ita aptato in angulo Δ, ut ſit parallela ipſi ΒΓ: eſt itaque [per 4.6.] ut ΔΓ ad ΓΒ ita ΔΖ ad ΖΚ. eſt autem [per 1. dat.] cognita ratio ipſius ΔΖ ad ΖΚ: cognita ergo erit etiam ratio ΔΓ ad ΓΒ. ſed ΔΓ umbra cognita eſt: cognoſcetur ergo [per 2. dat.] ipſa ΓΒ altitudo.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Μὴ ὄντος ἡλίου, τὸ δοθὲν ὕψος [2]γνῶναι ἡλίου ὄντος ὅσον ἐστίν.

Prop. XIX. Probl.

Cognoſcere quanta ſit data altitudo, alio modo quam per ſolem.

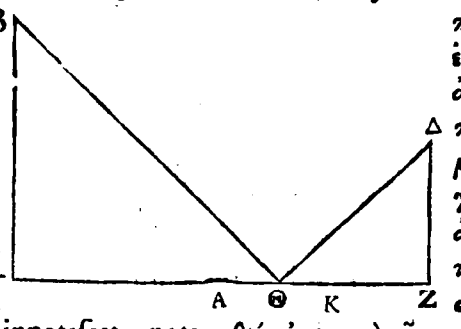


Ἔστω γὰρ ὁ δεῖ ἐπιγνῶναι ὕψος πηλίκον ἐστὶ τὸ ΒΓ, καὶ κείσθω κάτοπτρον τὸ ΑΚ, ὄμμα δὲ ἔστω τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ προσπιπτέτω ἀκτὶς ἡ ΔΘ, καὶ ἀνακεκλάσθω ὡς ἡ ΘΒ ἐπὶ τὸ Β πέρας, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ὄμματος κάθετος ἤχθω ἡ ΔΖ· ἐκεῖν ἴσαι εἰσὶν αἱ πρὸς τῷ Θ γωνίαι ἀλλήλαις, τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν

Sit ΒΓ altitudo, cujus quantitatem veſtigare oporteat; & ponatur ſpeculum ΑΚ, oculus autem ſit Δ, à quo procedat radius ΔΘ, & à puncto Θ reflectatur verſus extremum punctum Β ſecundum lineam ΘΒ; & à Δ oculo demittatur perpendicularis ΔΖ: æquales igitur ſunt inter ſe anguli ad Θ; id enim oſten-

1 Æque alto minori quantitati. *Sevil.* 2 Sc. rei ὑπὸ ἡλίου horizonti ſitæ. *Idem.* * Al. *ſuperexiſtans.*

ſum eſt in catoptricis. angulus etiam qui ad Γ æqualis eſt angulo qui ad Z, ſunt enim ambo recti: reliquus igitur qui ad B [per 32. 1.] reliquo qui ad Δ æqualis eſt: quare [per 4. 6.] triangulus BΓΘ ſimilis eſt triangulo ΔΘZ: eſt ergo ut ΘΓ ad ΓB ita ΘZ ad ZΔ. ſed [per 1. dat.] ratio ipſius ΘZ ad ZΔ data eſt: igitur ratio etiam ipſius ΘΓ ad ΓB innoteſcet. nota autem eſt quantitas ipſius ΘΓ: ergo [per 2. dat.] nota etiam erit quantitas ipſius altitudinis ΓB.

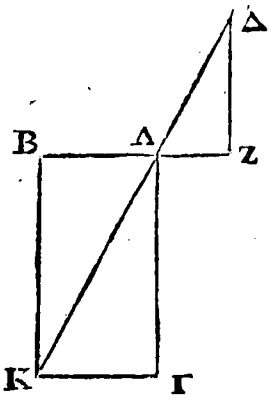


τοῖς κατοπτρικοῖς. ἀλλὰ καὶ ἡ πρὸς τῷ Γ τῇ πρὸς τῷ Z ἴση ἐστὶν, ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἑκατέρα αὐτῶν· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ E λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Δ ἴση ἐστίν· ὥστε ὅμοιον ἂν εἴη τὸ BΓΘ τρίγωνον τῷ ΔΘZ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΓ πρὸς ΓB οὕτως ἡ ΘZ πρὸς ZΔ. τῆς δὲ ΘZ πρὸς ZΔ λόγος δοθεὶς ἐστὶ· καὶ τῆς ΘΓ ἄρα πρὸς ΓB γνώσιμος ὁ λόγος ἐστί. γνώσιμος δὲ ἡ ΘΓ· γνώσιμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓB ὕψος.

PROP. XX. PROBL.

Cognoſcere quanta ſit profunditas data.

SIT BK profunditas, cujus quantitatem cognoſcere oporteat; ponaturque oculus in Δ, à quo procedat radius ΔΛK in profundum; & à puncto Δ ducatur ΔZ, quæ ſit parallela ipſi BK. cum igitur in rectas parallelas BK, ΔZ recta linea ΔK incidat; alternos angulos BKΛ & ΛΔZ [per 29. 1.] æquales inter ſe facit. ſunt vero etiam & anguli ad verticem Λ inter ſe æquales: reliquus igitur angulus [per 32. 1.] reliquo æqualis eſt. ſunt igitur duo triangula æquiangula BKΛ & ΛΔZ: quare [per 4. 6.] erit ut ΛZ ad ZΔ ſic ΛB ad BK. datur autem [per 1. dat.] ratio ipſius ΛZ ad ZΔ: dabitur ergo ratio ipſius ΛB ad BK. datur vero quantitas ipſius ΛB: ergo [per 2. dat.] etiam dabitur quantitas ipſius BK.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

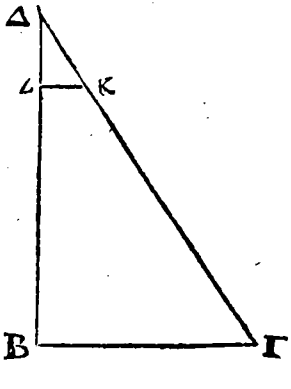
Τὸ δοθὲν βάθος ὀπτικῶς πηλίκον ἐστίν.

ΕΣτω γὰρ τὸ βάθος ὃ δὴ ὀπτικῶς πηλίκον ἐστὶ, τὸ BK· καὶ κείσθω ὄμμα τὸ Δ, καὶ προσπιπτέτω ἀκτὶς ἡ ΔΛK εἰς τὸ βάθος, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Δ τῇ τῷ BK ἡ ΔZ. ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ BK τῇ ΔZ, καὶ ἐμπέπτωκεν ἡ ΔK· τὰς ἄρα ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ BKΛ, ΛΔZ ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν αἱ πρὸς τῷ Λ ἴσαι ἀλλήλαις· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα γωνία τῇ λοιπῇ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ BKΛ τρίγωνον τῷ ΛΔZ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΛZ πρὸς ZΔ, οὕτως ἡ ΛB πρὸς BK. δοθεὶς δὲ ὁ τῆς ΛZ πρὸς ZΔ λόγος· δοθεὶς ἄρα καὶ ὁ τῆς ΛB πρὸς BK λόγος. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ΛB· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ BK.

PROP. XXI. PROBL.

Datæ longitudinis quantitatem cognoſcere.

SIT BΓ longitudo, cujus quantitas cognoſcenda ſit; ponaturque oculus in Δ, à quo procedant radii ΔB, ΔΓ; & à puncto Z ducatur ZK, quæ parallela ſit ipſi BΓ: eſt igitur [per 4. 6.] ut ZK ad KΔ ita BΓ ad ΓΔ. ſed [per 1. dat.] ratio ipſius ZK ad KΔ cognoſcitur: ergo etiam ratio ipſius BΓ ad ΓΔ cognoſcetur. ſed ipſius ΓΔ quantitas cognoſcitur: quare [per 2. dat.] ipſius etiam BΓ quantitas cognoſcetur.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Τὸ δοθὲν μῆκος ὀπτικῶς πηλίκον ἐστίν.

ΕΣτω γὰρ ὃ δεῖ μῆκος ὀπτικῶς πηλίκον ἐστὶ τὸ BΓ, κείσθω δὴ ὄμμα τὸ Δ, ἀφ' οὗ προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΔB, ΔΓ, καὶ διὰ τοῦ Z ἤχθω παρὰ τὴν BΓ ἡ ZK· σχῆμα ἐστιν ὡς ἡ ZK πρὸς KΔ οὕτως ἡ BΓ πρὸς ΓΔ. γνώσιμος δὲ ὁ τῆς ZK πρὸς KΔ λόγος· γνώσιμος ἄρα καὶ ὁ τῆς BΓ πρὸς ΓΔ λόγος. καὶ γνώσιμος ἡ ΓΔ· γνώσιμος ἄρα καὶ BΓ.

PROP. XXII. THEOR.

Si in eodem plano, in quo eſt oculus,

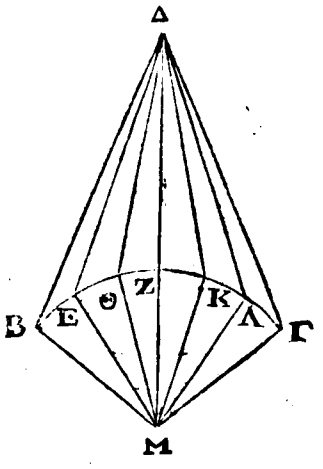
[1] Εἐὰν ὁ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ καὶ τὸ ὄμμα,

[1] Vel potius, ſi oculus in plano circuli ponatur: & ſic in demonſtratione ponitur. *Savil.*

κύκλῳ

κύκλου περιφέρεια τυχὸν· εὐθεῖα γραμμὴ ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια φανεῖται.

describatur circuli circumferentia; hæc videbitur esse recta linea.



Ἔστω γὰρ περιφέρεια ἡ ΒΓ, ὄμμα δὲ τὸ Δ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὂν τῇ ΒΖΓ περιφερείᾳ, ἀφ' οὗ προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΔΒ, ΔΓ, ΔΖ. [2] σκιὸν οὖν ἐπεὶ τῶν ὁρωμένων ἅμα οὐθὲν ὁρᾶται, [3] οὐκ ἂν φαίνοιτο ἡ ΖΒ περιφέρεια, ἀλλὰ δὲ Ζ, Β πέρατα· δόξει ἄρα ἡ ΖΒ περιφέρεια εὐθεῖα εἶναι. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΖΓ· [4] ὅλη ἄρα ἡ ΒΓ περιφέρεια εὐθεῖα δόξει εἶναι.

SIT enim circumferentia ΒΖΓ; oculus autem Δ in eodem plano in quo est ΒΖΓ circumferentia; & ex Δ oculo procedant radii ΔΒ, ΔΓ, ΔΖ. quia ergo [per 1. opt.] nullum aspectabile simul totum cernitur, circumferentia quidem ΖΒ non apparebit, sed ejus extrema puncta Ζ, Β: quare circumferentia ΖΒ videbitur esse recta linea. eodemque modo ΖΓ: tota igitur circumferentia ΒΓ lineæ rectæ instar videbitur.

ΑΛΛΩΣ ΕΚ ΤΩΝ ΤΟΥ ΠΑΠΠΟΥ.

Ἀπὸ τοῦ Δ ὄμματος κείσθω ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐν ᾧπερ ἡ ΒΖΓ περιφέρεια, προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΔΒ, ΔΕ, ΔΘ, ΔΚ, ΔΛ, ΔΓ, ἡ δὲ ΔΖ ἐκβαλλομένη διήχθω ἐπὶ τὸ Μ κέντρον, ἀφ' οὗ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΒ, ΜΕ, ΜΘ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΓ. ἐκεῖ ἡ ΜΔΓ γωνία τῆς ΜΔΛ γωνίας μείζων ἐστὶ, καὶ ἡ ΜΔΛ τῆς ΜΔΚ· ἡ ἄρα ΜΓ μείζων φαίνεται τῆς ΜΛ, καὶ ἡ ΜΛ τῆς ΜΚ, καὶ ἡ ΜΚ [5] τῆς ΜΖ· καὶ διὰ τοῦτο τὸ Ζ σημεῖον μᾶλλον πλησιάζειν φαίνεται τῷ Μ κέντρῳ ἤπερ τὸ Κ σημεῖον, καὶ τὸ Κ ἤπερ τὸ Λ, καὶ τὸ Λ ἤπερ τὸ Γ· [6] ἡ ἄρα ΖΚΛΓ περιφέρεια εὐθεῖα φαίνεται. τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον καὶ ΖΘΕΒ περιφέρεια εὐθείας φαντασίαν παρέχειν δειχθήσεται· διόπερ ὅλη ἡ περιφέρεια εὐθωνθείας δόξει.

ALITER EX PAPPI DEMONSTRATIONIBUS.

Ab oculo Δ posito in eodem plano, in quo est circumferentia ΒΖΓ, procedant radii ΔΒ, ΔΕ, ΔΘ, ΔΚ, ΔΛ, ΔΓ; radius autem ΔΖ extensus producatur usque ad centrum Μ, à quo connectantur rectæ lineæ ΜΒ, ΜΕ, ΜΘ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΓ. angulus igitur ΜΔΓ major est angulo ΜΔΛ, & angulus ΜΔΛ major angulo ΜΔΚ; quare ΜΓ major apparet quam ΜΛ, & ΜΛ major quam ΜΚ, & ΜΚ major quam ΜΖ: ideoque punctum Ζ apparet propinquius esse ipsi Μ centro quam punctum Κ; & idem punctum Κ propinquius videtur eidem centro quam punctum Λ: & Λ quam Γ: igitur circumferentia ΖΚΛΓ recta linea esse videtur. eodemque modo ostendetur ΖΘΕΒ circumferentia rectæ lineæ speciem præ se ferre: quapropter tota circumferentia adinstar rectæ lineæ apparebit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Σφαίρας ὁπισθεν ὁρωμένης μόνου τοῦ ἑνὸς ὄμματος, ἔλαττον ἀεὶ τοῦ ἡμισφαιρίου ὀφθήσεται· αὐτὸ δὲ τὸ ὁρώμενον τῆς σφαίρας μόνον κύκλου περιεχόμενον φαίνεται.

PROP. XXIII. THEOR.

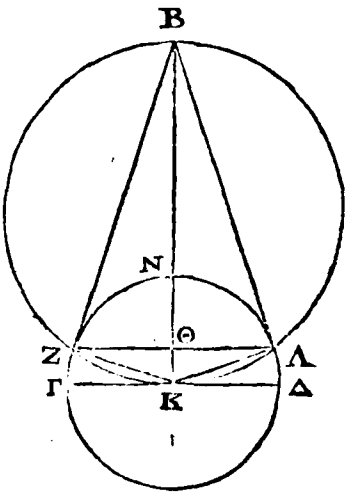
Quomodocunque sphæra unico oculo spectetur, semper minus hemisphærio de ea cernetur; ea autem sphæræ pars quæ cernitur, circulo comprehendi videtur.

Ἔστω γὰρ σφαῖρα ἧς κέντρον τὸ Κ, ὄμμα δὲ ἔξω τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΚ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἤχθω διὰ τοῦ Κ ἡ ΓΚΔ, καὶ ἐκβεβλήθω τὸ διὰ τῶν ΒΚ, ΓΚΔ ἐπίπεδον· ποιήσει δὴ ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλον. ποιείτω δὴ τὸν ΓΔΛΝΖ, περὶ δὲ τὴν ΒΚ διάμετρον κύκλος γεγράφθω, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΖ, ΖΒ, ΒΛ, ΛΚ, ΛΖ. ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστιν αἱ ὑπὸ ΚΖΒ, ΚΛΒ, διὰ

SIT enim sphæra cujus centrum Κ; oculus vero sit Β; & connectatur recta ΒΚ, cui per punctum Κ ad angulos rectos ducatur ΓΚΔ; & per lineam ΒΚ & ΓΚΔ sphæræ diametrum ducatur planum: faciet igitur in sphæra circulum. faciat (inquam) sitque ille circulus ΓΔΛΝΖ, & circa ΒΚ diametrum describatur circulus, & connectantur rectæ lineæ ΚΖ, ΖΒ, ΒΛ, ΛΚ, ΛΖ. cum ergo ΚΖΒ, ΚΛΒ anguli

1 Oportet tamen esse ὡς εἶμαι ἐκ διοπτρικοῦ, & sic est in 25. prop. *Savil.* 2 Schol. ἐδεῖ γὰρ ἅμα βλέπειν ὅλον, ἵνα συναισθάνηται ὡς σφαιρικῆς ἢ ἐπιφανείας. *Idem.* 3 Valde credulum esse oportet, qui hujusmodi demonstrationibus velit credere: neque mehercule *Pappus* melius concludit. *Idem.* 4 At ne illud quidem necesse, etiamsi ΒΖ, ΖΓ rectæ appareant, ΒΖΓ rectam videri, cum fortasse non sunt futuræ sibi ἐπ' εὐθείας. *Idem.* 5 Non video quomodo ΜΖ posset videri, cum nullus possit in eam à Δ incidere angulus: quin potius ἐπιπροσθεῖ τὸ Ζ τῷ Μ. sed quid dicam de singulis? tota demonstratio est planissimus παραλογισμός. quid enim nobis cum Μ centro, ut sit nobis semper necesse ad ipsum respicere? quod si aliud cepero, ruet egregia hæc *Pappi* demonstratio. *Idem.* 6 Ut cætera concedam, ne illud quidem necesse est, nisi Ζ σημεῖον tanto magis φαίνοιτο centro πλησιάζον ostendatur quam Κ, quanto ΔΖ minor est quam Κ Μ. ne ita quidem prorsus & ex omni parte conveniet: sed quid facias tam putidis nugis? *Idem.*

ſint in ſemicirculis: ſunt igitur [per 31. 3.] recti: quare B Z, B A rectæ lineæ ipſas K Z, K A eductas ex K centro in unico ſphæræ puncto tangent: radii ergo ex B oculo procedentes cadent ſecundum lineas B Z, B A. quia ergo omnes anguli qui ſunt circa punctum Θ recti ſunt, eo quod parallela eſt recta Γ Δ rectæ Z Λ, & æqualis eſt Z Θ ipſi Θ Λ: ſi igitur manente latere Θ B ipſum triangulum ΘBZ circumducatur, quoadusque ad illud punctum reſtituatur unde circumduci cœperat, fiet ut & B Z circumducta ſphæricam ſuperficiem tangat in unico puncto, nempe in Z, & circulus deſcribatur per puncta Z, Λ. quare circulo comprehenditur ea ſphæræ pars quæ cernitur; quæ ſane minor eſt hemiſphærio, quia portio Z N Λ minor eſt ſemicirculo: quod ergo ab oculo cernetur eſt minus hemiſphærio.



τὸ ἐν ἡμικυκλίοις εἶναι ἢ ἐκ κέντρου τὰς K Z, K Λ; καθ' ἓν σημεῖον ἐφάψονται· αἱ B Z, B Λ τῆ σφαίρας· αἱ ἄρα ἀπὸ τοῦ B ὄμματος προσπίπτουσαι ἀκτῖνες κατὰ τὰς B Z, B Λ πεσοῦνται. καὶ ἐπεὶ ἐλάσσων [1] πρὸς τῷ Θ γωνιῶν ὀρθή ἐστι, [2] διὰ τὸ ἰσοσκελὲς εἶναι τὸ Γ Δ τῇ Z Λ, καὶ ἴση ἡ Z Θ τῇ Θ Λ· ἐὰν δὴ μενούσης τῆς Θ B τὸ Θ B Z τρίγωνον περιενεχθὲν εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἡ B Z φερομένη καθ' ἓν ἐφάψεται τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας [4] κατὰ τὸ Z, καὶ κύκλος ἔσται μεγεθαμβὸς διὰ τῶν Z, Λ σημείων· ὥστε καὶ τοῦ κύκλου ἂν περιέχοιτο τὸ ὁρώμενον τῆς σφαίρας, ὃ μὲν ἐλάττον ἐστὶν ἡμισφαιρίου, τὸ γὰρ Z N Λ ἐλάττον ἐστὶν ἡμικυκλίου· ὥστε καὶ τὸ ἴσον ὄψεως ὁρώμενον ἐλάττον ἐστὶν ἡμισφαιρίου.

SCHOLIUM.

Quod autem, ſi ſphæra plano ſecetur, communis ſectio ſit circulus, ſumptum quidem eſt tanquam certum in phænomenis, demonſtratum autem in ſphæricis.

ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὅτι δὲ ἂν σφαῖρα τμηθῇ ὁποιῳδῶ, ἡ κοινὴ τομὴ κύκλος ἐστί, προείληπται μὲν ἐν τοῖς φαινομένοις, δέδεικται δὲ ἐν τοῖς σφαιρικοῖς.

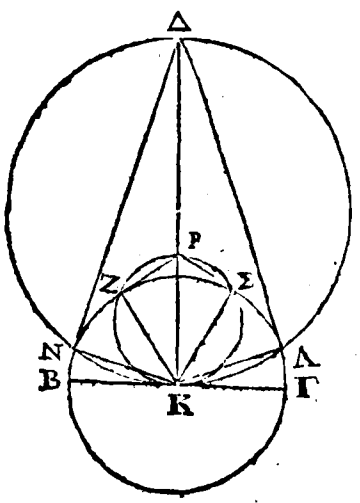
PROP. XXIV. THEOR.

Oculo propius ad ſphæram accedente, minus de ſphæra cernetur, quam oculo procul poſito; plus tamen cerni exiſtimabitur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Τῷ ὄμματι προσιόντος ἐγγὺς τῆς σφαίρας, ἔλαττον ἔσται τὸ ὁρώμενον· δόξει δὲ μεῖζον ὁρᾶσθαι.

SIT ſphæra cujus centrum K; & ab oculo Δ ad centrum connectatur linea recta Δ K; & per punctum K ducatur B Γ, quæ ſit ad angulos rectos ipſi Δ K; & circa Δ K diametrum deſcribatur circulus, & ducantur rectæ Δ N, N K, Δ Λ, Λ K: anguli ergo ad Λ, N recti ſunt [per 31. 3.] quia ſunt in ſemicirculis: quare rectæ lineæ Δ Λ, Δ N in uno puncto ſphæram tangunt; ideoque radii qui ex Δ oculo procedunt, cadent in ſphæram ſecundum lineas Δ Λ, Δ N. rurſus, transferatur oculus ex Δ puncto in P punctum, & circa lineam P K deſcribatur circulus, connectanturque lineæ P Z, Z K, P Σ, Σ K: lineæ igitur P Z, P Σ in uno puncto tangunt ſphæram: quare radii etiam ex P oculo



Ἔστω γὰρ σφαῖρα ἧς κέντρον τὸ K, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ὄμματος ἐπεζεύχθω ἐπὶ τὸ κέντρον ἡ Δ K, καὶ διὰ τοῦ K πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ B Γ, [5] περὶ δὲ τὴν Δ K κύκλος γεγράφθω, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Δ N, N K, Δ Λ, Λ K· ἐκεῖν ἄρα ἐφάψονται αἱ πρὸς τοῖς Λ, N γωνίαι, διὰ τὸ ἐν ἡμικυκλίοις εἶναι· καθ' ἓν ἄρα ἐφάπτονται αἱ Δ Λ, Δ N τῆς σφαίρας· αἱ ἄρα ἀπὸ τοῦ Δ ὄμματος προσπίπτουσαι ἀκτῖνες κατὰ τὰς Δ Λ, Δ N πεσοῦνται. πάλιν δὴ μετακείσθω τὸ Δ ὄμμα ἐπὶ τὸ P, καὶ περὶ τὴν P K κύκλος γεγράφθω, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ P Z, Z K, P Σ, Σ K· οὐκοῦν αἱ P Z, P Σ καθ' ἓν ἐφάψονται τῆς σφαίρας· καὶ αἱ μὲν ἀπὸ τοῦ P ὄμματος

1 τῷ κύκλῳ Γ Δ Λ Z, atque ideo ſphæram, per 16. 3 elem. *Savil.* 2 Schol. Manuſc. quia K Z B, K Λ B habent; æqualia latera, imo anguli Z K Θ, Λ K Θ æquales & rectæ comprehendentes; ergo anguli ad Θ æquales & recti: οἱ μὲν ἄλλοι ἄλλως (inquit ille) ἐγὼ δὲ ἄλως. 3 Unde hoc? etſi verum eſt & poteſt probari. ſed Θ ἐφ' multo facilius, quia in iſoſceli Z B Λ angulus ad B ſecatur bifariam. *Savil.* 4 In uno puncto, nempe Z: nam τοῦτο Z opinor eſſe ex ſcholio, & abeſt in ſequentibus. *Idem.* 5 Sc. Καὶ ἐκβεβλήθω τὸ διὰ τῶν B K Γ, Δ K ἐπίπεδον, &c. ut in præcedente. *Idem.*

ἀκτῖνες

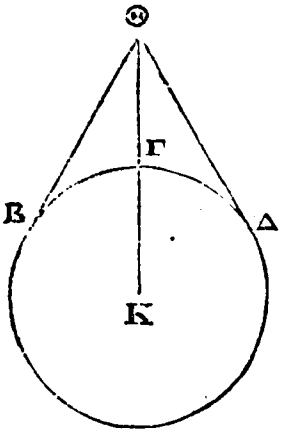
ἀκτῖνες προσπίπτουσι κατὰ τὰς P Z, P Σ περατοῦνται· ὥστε ὁρᾶται ὑπὸ μὲν τῆς P γωνίας τὸ Z Σ, ὑπὸ δὲ τῆς Δ τὸ N Z Σ Λ. μεῖζον δὲ τὸ N Z Σ Λ τοῦ Z Σ ἐστι, φαίνεται δὲ ἔλαττον· μείζων γάρ ἐστιν [1] ἡ P γωνία τῆς Δ γωνίας. τὰ δὲ ὑπὸ μείζονος γωνίας ὁρώμενα, μείζονα φαίνεται· μεῖζον ἄρα φαίνεται τὸ Z Σ τοῦ N Z Σ Λ· ἔστι δὲ ἔλαττον.

procedentes incident in ſphæram ſecundum rectas P Z, P Σ: ergo ſub angulo quidem P cernitur Z Σ, ſub angulo vero Δ cernitur N Z Σ Λ. eſt autem N Z Σ Λ major quam Z Σ; minor vero apparet: angulus enim P major eſt angulo Δ. quæ autem ſub majore angulo ſpectantur [per 5. poſit.] majora videntur: major igitur apparet Z Σ quam N Z Σ Λ; minor vero eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Σφαῖρα ἐκ διαστήματος [2] ὁρωμένη κύκλος φαίνεται.

Ἔστω γὰρ ἐν σφαίρᾳ, ἧς κέντρον τὸ K, μέγιστος κύκλος B Γ Δ, ᾧ ἀπὸ τοῦ Θ ὄμματος προσπίπτουσαν ἀκτῖνες αἱ Θ B, Θ Γ, Θ Δ· ἐκεῖνη ἡ B Γ Δ περιφέρεια εὐθεῖα εἶναι δοκεῖ. ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ἄλλαι τῶν κύκλων περιφέρειαι ἐν τῇ σφαιρικῇ ἐπιφανείᾳ γραφομένων εὐθεῖαι φανήσονται· κύκλος ἄρα φανεῖται ἡ σφαῖρα πρὸς τῷ ὄμματι τοῦ ὄμματος.



PROP. XXV. THEOR.

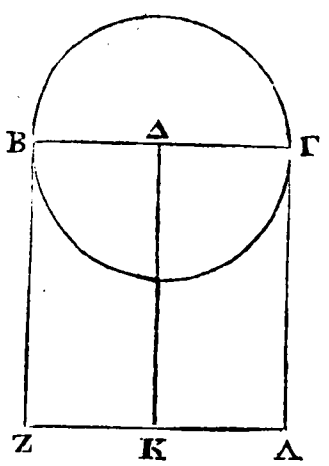
Sphæra eminus ſpectata videtur circulus.

SIT enim in ſphæra, cujus centrum K, maximus circulus B Γ Δ, ad quem ex Θ oculo procedant radii Θ B, Θ Γ, Θ Δ: ergo [per 22. opt.] B Γ Δ circumferentia videtur eſſe recta linea. ſimiliter & circumferentiæ reliquorum circulorum, in ſphæræ ſuperficie deſcriptorum, rectæ lineæ videbuntur: quare tota ſphæra, procul ab oculo diſſita, circulus exiſtimabitur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κς'.

Σφαίρας διὰ τῶν δύο ὀμμάτων ὁρωμένης, ἐὰν ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας ἴση ᾖ τῇ εὐθείᾳ [3] τῇ διεζευγμένῃ ἀπὸ τῶν ὀμμάτων· ἡμισφαίριον αὐτῆς ὀφθήσεται.

Ἔστω σφαῖρα ἧς διάμετρος ἡ B Γ, καὶ ἀπὸ τῶν B, Γ ἤχθωσαν πρὸς ὀρθὰς αἱ B Z, Γ Λ, καὶ διὰ τοῦ Z ἤχθω παράλληλος τῇ B Γ ἡ Z Λ, καὶ κείσθω ἐν ὄμμα ἐπὶ τοῦ Z, τὸ δὲ ἕτερον ἐπὶ τοῦ Λ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ κέντρου ἤχθω παράλληλος τῇ B Z ἡ Δ K. σχοίνου δὴ μενούσης τῆς Δ K τὸ B K παραλληλόγραμμον περιενεχθὲν, εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιγραφὲν ὑπὸ τῆς B Δ σχῆμα κύκλος ἔσται, ὃς γε διὰ τοῦ κέντρου ἐστὶ τῆς σφαίρας· ὥστε τὸ ἡμισφαίριον τῆς σφαίρας μόνον ὀφθήσεται ὑπὸ τῶν Z, Λ ὀμμάτων.



PROP. XXVI. THEOR.

Si ſphæræ ambobus oculis conſpectæ diameter æqualis fuerit rectæ lineæ, qua oculorum alter ab altero diſtat; dimidium ſphæræ cernetur.

SIT ſphæra cujus diameter B Γ; & à punctis B, Γ excitentur B Z, Γ Λ rectæ, quæ ſint ad angulos rectos ipſi B Γ; & per punctum Z ducatur Z Λ quæ ſit parallela ipſi B Γ; ponaturque oculorum alter quidem in Z, alter vero in Λ; & ex Δ centro ducatur Δ K parallela ipſi B Z. ſi ergo manente Δ K latere, parallelogrammum B K circumagatur, donec in idem punctum reſtituatur unde circumagi cœperat; figura, quam deſcribet latus B Δ circumactum, erit circulus, qui per centrum ſphæræ tranſit: quare dimidia tantum ſphæræ pars cernetur à Z, Λ oculis.

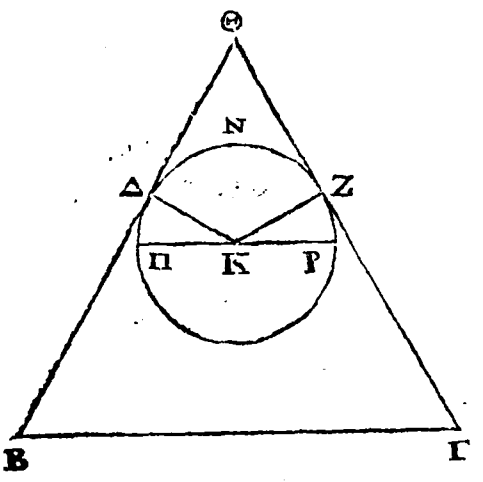
1 Quia ſc. angulus Z K Σ, quo P deficit à duobus rectis, minor eſt quam angulus N K Λ, quo Δ deficit à duobus rectis. *Savil.* 2 Hinc apparet etiam in 22. prop. addendum eſſe, aut certe ſupplendum itidem, ἢ ἀφεστήκοτος. *Idem.* 3 Hoc quid ſit plane neſcio. Forſan legendum τῇ ἀφεστώσῃ τῶν ὀμμάτων. *Idem.*

PROP.

PROP. XXVII. THEOR.

Si oculorum intervallum majus ſit ſphæræ diametro; ſphæræ pars, quæ cernitur, major hemiſphærio videbitur.

SIT enim ſphæra, cujus centrum K; oculorum vero intervallum BΓ majus ſphæræ diametro ΠKP; per K autem & rectam BΓ extendatur planum, quod faciat in ſphæra circulum ΔNZ; & ab oculis B, Γ cadant radii BΔ, ΓZ, qui ſphæram ipſam tangant in uno puncto. hi ergo radii in rectum producti alicubi concurrent, cum BΓ ſit major quam ſphæræ diameter ΠP. concurrant ergo in puncto Θ. quoniam autem à puncto Θ ad ſphæram ΔNZ cadunt lineæ ΘZ, ΘΔ, ſphæram in uno puncto tangentes: igitur ZNΔ minor eſt ſemicirculo, anguli enim ΘZK, ΘΔK recti ſunt: reliquum igitur ſphæræ, quod per radios BΔ, ΓZ cernitur, majus eſt hemiſphærio.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

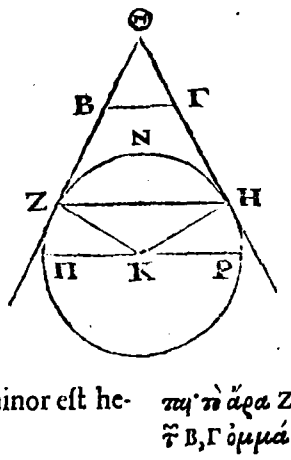
Ἐὰν τὸ τῶν ὀμμάτων διάστημα μεῖζον ᾖ τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας, ἡμισφαίριον μεῖζον τὸ ὁρώμενον τῆς σφαίρας ὀφθήσεται.

ΕΣτω γὰρ σφαῖρα ἧς κέντρον τὸ K, τὸ δὲ τῶν ὀμμάτων διάστημα τὸ BΓ μεῖζον ὂν τῆς ΠKP διαμέτρου τῆς σφαίρας, διὰ δὲ τοῦ K καὶ τοῦ BΓ ἐκβεβλήσθω ὁπόπεδον, καὶ ποιείτω ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλον τὸν ΔNZ, καὶ ἐφαπτόμεναι ἀκτῖνες καθ' ἓν σημεῖον ἀπτέσθωσαν αἱ BΔ, ΓZ. ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐπειδὴ ἡ BΓ τῆς ἐν τῇ σφαίρᾳ διαμέτρου ΠP μείζων ἐστί. συμπιπτέτωσαν δὴ κατὰ τὸ Θ σημεῖον. ἐκὼν ἐπεὶ ἀπὸ τοῦ Θ σημείου αἱ ΘZ, ΘΔ καθ' ἓν ἐφάπτονται περιφερείας πεπτώκασιν, ἔλασσον ἂν εἴη τὸ ZNΔ ἡμικυκλίου, αἱ γὰρ ΘZK, ΘΔK γωνίαι ὀρθαί εἰσι[1]· τὸ ἄρα λοιπὸν τῆς σφαίρας μεῖζον ἡμισφαιρίου ἔσται ὑπὸ τῶν BΔ, ΓZ.

PROP. XXVIII. THEOR.

Si oculorum intervallum minus ſit ſphæræ diametro; ſphæræ pars, quæ cernitur, minor eſt hemiſphærio.

SIT ſphæra cujus centrum K; oculorum vero intervallum BΓ, quod minus ſit quam ſphæræ diameter ΠKP; & per K & BΓ trajiciatur planum, quod in ſphæra faciat circulum ZNH; & ex B, Γ oculis deducantur radii BZ, ΓH, qui ſphæram tangant in uno puncto; concurrantque in puncto Θ: concurrent enim, cum inæquales ſint BΓ oculorum interſtitium, & ΠP diameter ſphæræ. ergo radii à puncto Θ in ſphæram cadentes minus comprehendent quam dimidium ſphæræ: quare ZNH minus eſt hemiſphærio; ideoque ſphæræ pars ea, quæ ab oculis B, Γ cernitur, minor eſt hemiſphærio.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Ἐὰν τὸ τῶν ὀμμάτων διάστημα ἔλασσον ᾖ τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας, τὸ ὁρώμενον τῆς σφαίρας ἔλασσον ἡμισφαιρίου ὀφθήσεται.

ΕΣτω γὰρ σφαῖρα ἧς κέντρον τὸ K, τὸ δὲ τῶν ὀμμάτων διάστημα τὸ BΓ, ἔλαττον ὂν τῆς ΠKP διαμέτρου τῆς σφαίρας, καὶ διὰ τοῦ K καὶ τοῦ BΓ ἐκβεβλήσθω ὁπόπεδον, καὶ ποιείτω ἐν τῇ σφαίρᾳ κύκλον τὸν ZNH, ἤχθωσαν δὲ ἀπὸ τῶν B, Γ ὀμμάτων καθ' ἓν ἐφαπτόμεναι αἱ BZ, ΓH, καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Θ· συμπεσοῦνται γάρ, ἐπειδήπερ ἔγγιόν εἰσιν ἡ τε ΓB καὶ ἡ ΠP τῆς σφαίρας διάμετρος. ἐκὼν αἱ ἀπὸ τοῦ Θ σημείου προσπίπτουσαι πρὸς τὴν σφαῖραν ἔλαττον ἡμισφαιρίου περιλήψονται· τὸ ἄρα ZNH ἔλασσον ἡμισφαιρίου ἔσται· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν B, Γ ὀμμάτων ὁρώμενον ἔλασσον ἂν εἴη ἡμισφαιρίου.

PROP. XXIX. THEOR.

Quomodocunque cylindrus unico oculo cernatur, minus dimidia parte cylindri cernetur.

SIT K centrum circuli, qui baſis ſit alicujus cylindri; & ab oculo N ducatur recta linea

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Κυλίνδρου ὁποσονοῦν ὁρωμένου ὑφ' ἑνὸς ὄμματος ἔλαττον ἡμικυλίνδρου ὀφθήσεται.

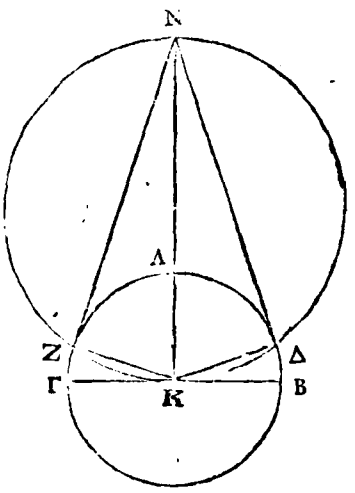
[3] ΕΣτω κυλίνδρου τοῦ περὶ τὸν βάσιν κύκλου κέντρον τὸ K, καὶ ἀπὸ τοῦ N ὄμματος ἤχθω

1 Ergo anguli ΔKZ, ΔΘZ duobus rectis æquales: & proinde ΔKZ minor ſemicirculo. *Sevil.* 2 Id eſt, in quacunque ab oculo diſtantia, non ſitu. nam oculo ſupra vel infra cylindrum poſito, de cylindrica ſuperficie nihil prorſus videtur. *Idem.* 3 Hæc demonſtratio ſupponit oculum in plano baſis cylindri; vel potius id tantum reſpicit de cylindro, quod oculis directâ ex adverſo objacet. idemque in ſequentibus de conis intellige. *Idem.*

ἐπὶ

ἐπὶ τὸ Κ ἡ ΝΚ, καὶ ἀπὸ τῆ Κ πρὸς ὀρθὰς αὐτῆ ad ipſum Κ, quæ ſit ΝΚ; & à puncto Κ excitetur ΒΓ, quæ ſit ad angulos rectos ipſi ΝΚ: & circa ΝΚ deſcribatur circulus; connectanturque rectæ ΝΖ, ΖΚ, ΝΔ, ΔΚ. recti ergo ſunt [per 31. 3.] anguli ad Ζ, Δ: ideoque ΝΖ, ΝΔ in uno puncto cylindrum tangunt. & radii ab oculo Ν delati cadent in cylindrum ſecundum lineas ΝΖ, ΝΔ: quare ΖΛΔ tantum cernetur. ſed ΖΛΔ minor eſt ſemicirculo ΓΛΒ: igitur apparebit ΖΛΔ, quæ minor eſt ſemicirculo; id eſt, minus ſemper cernetur quam dimidia cylindri pars. quod enim de cylindri baſi monſtravimus, illud idem de qualibet alia parte ſuperficiei cylindri demonſtrabimus: quare minus dimidia parte totius cylindri cernitur.

ἠχθω ἡ ΒΓ, περὶ δὲ τὸ ΝΚ κύκλος γεγράφθω, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΖ, ΖΚ, ΝΔ, ΔΚ. ἀκτὶν ὀρθὴ αἱ πρὸς τοῖς Ζ, Δ· καθ' ἓν ἄρα ἐφάπτονται αἱ ΝΖ, ΝΔ. καὶ αἱ γε ἀπὸ τοῦ Ν ὄμματος φερόμεναι ἀκτῖνες κατὰ τὰς ΝΖ, ΝΔ πεσοῦνται· ὥστε τὸ ΖΛΔ μόνον ὀφθήσεται. ἀλλὰ τὸ ΖΛΔ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ΓΛΒ ἡμικυκλίου· τὸ ἄρα ΖΛΔ ἔλασσον ἡμικυκλίου ὀφθήσεται, τοῦτ' ἔστιν ὁ κύλινδρος [1] ὁμοίως γὰρ τῇ βάσει κατὰ πᾶσαν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου [2] δείξομεν· ὥστε ὅλου τοῦ κυλίνδρου ἔλαττον φαίνεται.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

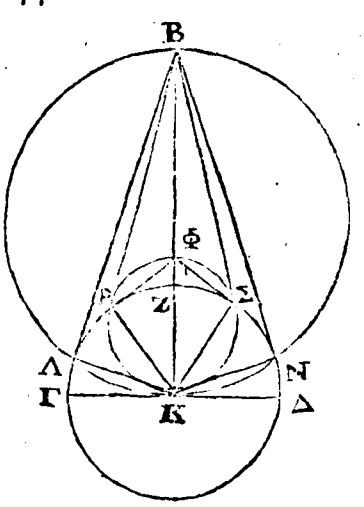
Τοῦ δὲ ὄμματος ἔγγιον τεθέντος τοῦ κυλίνδρου, ἔλασσον μὲν ἔσται τὸ ὑπολαμβανόμενον ὑπὸ τῆς ὄψεως τοῦ κυλίνδρου, δόξει δὲ μεῖζον ὁρᾶσθαι.

Prop. XXX. Theor.

Pars cylindri quæ cernitur, oculo ad cylindrum accedente, minor eſt quam ea quæ cernitur oculo recedente; major tamen exiſtimatur.

Ἔστω γὰρ κυλίνδρου τοῦ περὶ τὴν βάσιν κύκλου κέντρον τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ὄμματος ἐπὶ τὸ Κ κέντρον ἐπεζεύχθω ἡ ΒΚ, διὰ δὲ τοῦ Κ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ περὶ τὴν ΒΚ κύκλος γεγράφθω, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΝ, ΝΚ, ΒΛ, ΛΚ. διὰ δὲ τὸ πρότερον τὸ ΑΖΝ ἔλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίου, [3] καὶ ὁμοίως τῇ βάσει τοῦ κυλίνδρου ἔλαττον ἢ τὸ ἥμισυ ὀφθήσεται. καὶ πεσοῦνται δὴ τὸ ὄμμα, καὶ ἔστω Φ, καὶ περὶ τὴν ΦΚ κύκλος γεγράφθω, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΦΡ, ΡΚ, ΚΣ, ΣΦ. ἀκτῖνες αἱ ἀπὸ τοῦ Φ ἀκτῖνες πεσοῦνται κατὰ τὰς ΦΡ, ΦΣ πεσοῦνται, αἱ δ' ἀπὸ τοῦ Β κατὰ τὰς ΒΛ, ΒΝ· μεῖζον ἄρα τὸ ΝΖΛ τοῦ ΡΖΣ. δοκεῖ δὲ μεῖζον φαίνεσθαι τὸ ΡΖΣ τοῦ ΝΖΛ, μείζων γὰρ ἡ Φ γωνία τῆς Β γωνίας· ὥστε καὶ τοῦ κυλίνδρου ἔλαττον μέρος ὀφθήσεται, δοκεῖ δὲ μεῖζον ὁρᾶσθαι.

SIT Κ centrum circuli efficientis baſim alicujus cylindri, & ab oculo Β ad centrum Κ ducatur ΒΚ; per punctum vero Κ ducatur ΓΔ quæ ſit ad angulos rectos ipſi ΒΚ; deſcribatur etiam circulus circa ΒΚ, & connectantur rectæ ΒΝ, ΝΚ, ΒΛ, ΛΚ. igitur ſicut in præcedente ΛΖΝ circumferentia eſt minor ſemicirculo; & quemadmodum minus quam dimidium baſis, ita etiam minus quam dimidium cylindri ſpectabitur. jam oculus propius admoveatur, ſitque Φ, & circa ΦΚ deſcribatur circulus, & ducantur lineæ ΦΡ, ΡΚ, ΚΣ, ΣΦ. radii ergo ex Φ oculo procedentes ferentur ſecundum lineas ΦΡ, ΦΣ, radii vero ex Β deducti ferentur ſecundum lineas ΒΛ, ΒΝ: major eſt igitur ΝΖΛ circumferentia quam ΡΖΣ circumferentia. & tamen aſpectus exiſtimat majorem eſſe ΡΖΣ quam ΝΖΛ, propterea quod angulus Φ major eſt angulo Β: quare minor cylindri pars cernetur, & tamen major videbitur.

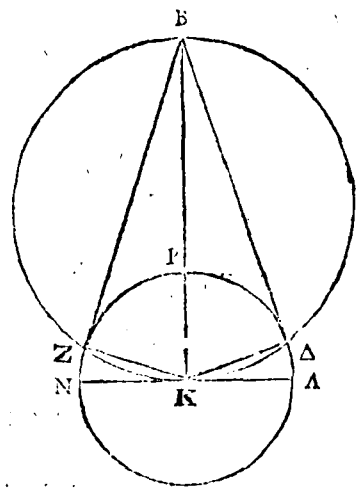


1 Debuit eſſe ἔλασσον ἡμικυλίνδρου aut hujuſmodi quippiam, niſi forte totus locus eſt ita legendus: ἔλασσον ἄρα τοῦ ἡμικυλίνδρου ὀφθήσεται. hanc enim, quam videmus hic ταυτολογίαν aures meæ non ferunt. *Savil.* 2 Δείξομεν, quid? nempe, ſemper minus ſemicirculo videri ab oculo in eodem plano poſito. quamvis non negem, κατ' ἄλλας θέσεις, minus itidem ἡμικυλίνδρου videri ſæpiſſime; nihil tamen ad hanc demonſtrationem, cum planum per radios in cylindris & conis non circulos faciat, ſed ſæpius curvas lineas ex alio genere. *Idem.* 3 Hæc verba & illa præcedentis ὁμοίως τῇ βάσει &c. nonnihil ſuſpicionis injiciunt, voluiſſe *Euclidem* id quod de baſi tantum demonſtravit, vel (ut generalius dicam) de circulo in cujus plano eſt oculus, ad reliquam ſuperficiem cylindri trahere. *Idem.*

PROP. XXXI. THEOR.

Coni circularem baſim habentis uno tantum oculo ſpectati minus dimidia parte cernetur.

SIT conus quivis habens pro baſi circulum, cujus centrum eſt K; & ex B oculo ad centrum connectatur BK; à puncto autem K excitetur NA, quæ ſit ad angulos rectos ipſi BK; & circa BK deſcribatur circulus, conjunganturque rectæ BZ, ZK, BΔ, ΔK. anguli igitur ad Z, Δ, cum ſint in ſemicirculis, recti ſunt: quare in unico puncto circulum tangent duæ lineæ BΔ, BZ. radii autem ab oculo in circuli circumferentiam pergentes cadent ſecundum lineas BΔ, BZ: quod igitur cernetur, erit ZPΔ, quod minus eſt quam NPA. atqui NPA eſt ſemicirculus: ergo ZPΔ minus eſt ſemicirculo: quare coni pars quam cernit oculus minor eſt dimidia parte coni: idem enim demonſtrabimus de reliquis circulis qui in coni ſuperficie ſunt.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

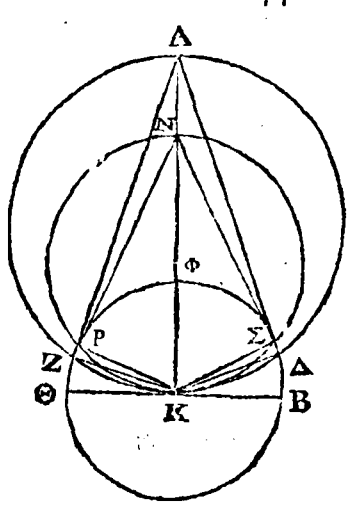
Κώνου [1] κύκλον ἔχοντος τὴν βάσιν ὑπὸ δ' [2] ἑνὸς ὄμματος ὁρωμένου ἔλασσον ἡμικωνίου ὀφθήσεται.

Ἔστω γὰρ κώνου βάσις κύκλος ὃ κέντρον τὸ Κ, τὸ δὲ ὑπὸ τοῦ Β ὄμματος ἤχθω ἐπὶ τὸ κέντρον ἡ ΒΚ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΚ ἡ ΝΑ, περὶ δὲ τὴν ΒΚ κύκλος γεγράφθω, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΖ, ΖΚ, ΒΔ, ΔΚ. ὀρθὴν ἄρα εἰσὶν αἱ πρὸς τοῖς Ζ, Δ, ὡς ἡμικύκλου γωνίαι· καθ' ἓν ἄρα ἐφάπτονται αἱ ΒΔ, ΒΖ. καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ ὄμματος ἀκτῖνες πεσοῦνται κατὰ τὰς ΒΔ, ΒΖ πεσοῦνται· ἔστιν δὴ ὡρισμένον τὸ ΖΡΔ, ἔλασσον ὂν τοῦ ΝΡΑ. ἀλλὰ τὸ ΝΡΑ ἡμικύκλιόν ἐστι· τὸ ἄρα ΖΡΔ ἔλασσόν ἐστιν ἡμικυκλίου· ὥστε καὶ τὸ ὁρώμενον τοῦ κώνου ἔλασσόν ἐστιν ἡμικωνίου· [3] ὁμοίως δὴ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν κύκλων τῶν ἐν τῇ τοῦ κώνου ὑποφαινείᾳ δείξομεν.

PROP. XXXII. THEOR.

Oculo per idem planum propius ad conum accedente, major coni pars cernetur quam oculo recedente; minor tamen aſpectui apparebit.

SIT baſis coni circulus, cujus centrum K; oculus autem ſit A, & ex A ad K ducatur recta AK; & à puncto K excitetur ΘB, quæ ſit ad angulos rectos ipſi AK; deſcribatur autem circulus circa ipſam AK, connectanturque AZ, ZK, AΔ, ΔK; tranferatur autem oculus ex A puncto in punctum N, & circa rectam NK deſcribatur circulus, connectanturque rectæ NP, PK, NΣ, ΣK. ergo radii ex A oculo pergentes, cadent ſecundum lineas AΔ, AZ: quare ex puncto A cernetur ZΦΔ. eadem ratione radii procedentes ex N oculo cadent in circuli circumferentiam ſecundum lineas NP, NΣ: igitur ex N puncto cernetur PΦΣ. majus autem autem eſt ZΦΔ quam PΦΣ: apparet tamen minus, propterea quod angulus ad N major eſt angulo ad A.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

Τοῦ δὲ ὄμματος ἔγγιον μεταβέντος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπιπέδῳ, ἔλασσον μὲν ἔσται τὸ ὑπὸ τῶν ὄψεων περιλαμβανόμενον μέρος· δόξει δὲ μεῖζον ὀφθῆναι.

Ἔστω γὰρ κώνου βάσις κύκλος ὃ κέντρου τὸ Κ, ὄμμα δὲ ἔστω τὸ Α, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Κ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΚ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Κ ἡ ΘΒ, γεγράφθω δὲ περὶ τὴν ΑΚ κύκλος, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΖΚ, ΑΔ, ΔΚ, μετακείσθω δὲ τὸ Α ὄμμα ἐπὶ τὸ Ν, καὶ περὶ τὴν ΝΚ κύκλος γεγράφθω, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΡ, ΡΚ, ΝΣ, ΣΚ. ὀφθήσεται ἄρα αἱ ἀπὸ τοῦ Α ὄμματος ἀκτῖνες πεσοῦνται κατὰ τὰς ΑΔ, ΑΖ πεσοῦνται· ὥστε φανήσεται τὸ ΖΦΔ. ἀπὸ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ τοῦ Ν ὄμματος ἀκτῖνες πεσοῦνται κατὰ τὰς ΝΡ, ΝΣ πεσοῦνται· ὀφθήσεται ἄρα τὸ ΡΦΣ. μεῖζον δὲ τὸ ΖΦΔ τοῦ ΡΦΣ· φαίνεται δὲ ἔλασσον, μεῖζον γὰρ ἡ πρὸς τῷ Ν γωνία τῆς πρὸς τὸ Α γωνίας.

1 Quaſi ſit alius qui baſim habeat μὴ κύκλον. *Savil* 2 Quid ſi ille unus oculus ſub baſi ſtatuatur? nihil plane videbitur. quid ſi ſupra in axi protracto? videbitur ſuperficies coni proculdubio. *Idem.* 3 Oculo, ſc. in eorum plano collocato: nam alioqui planum per ZB, BΔ non facit in coni ſuperficie circulum, ut ex rectitudine angulorum Z, Δ poſſis concludere τὸν ὑφῆν, aut ex quantitate anguli ad K quantitatem τοῦ ZPΔ γραμμῆς. *Idem.*

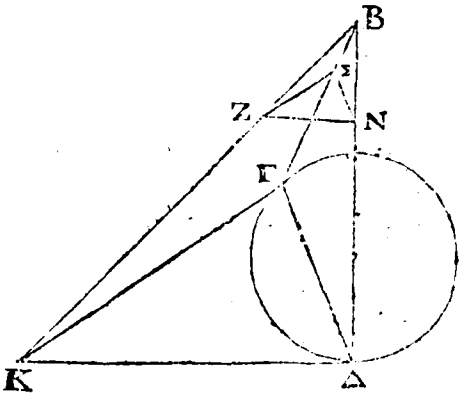
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

[1] Κώνου κύκλον ἔχοντος τὴν βάσιν, ἐὰν ἀπὸ τῶν συναφῶν τῶν ἀπὸ τοῦ ὄμματος ἐπὶ τὴν τοῦ κώνου βάσιν προσπιπτουσῶν ἀκτίνων εὐθεῖαι διαχθῶσι διὰ τῆς ἐπιφανείας τῆς τοῦ κώνου πρὸς τῇ κορυφῇ αὐτοῦ, διὰ δὲ τῶν ἀχθεισῶν ἐπίπεδον ἀπὸ τοῦ ὄμματος ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ κώνου προσπιπτουσῶν ὀπίπεδα κλασθῇ, ὅπου δὲ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων τὸ ὄμμα τεθῇ· τὸ ὁρώμενον τοῦ κώνου ἴσον διαπαντὸς ὀφθήσεται[2].

Prop. XXXIII. Theor.

Si ad coni circularem baſim ducantur ab oculo radii ipſam baſim tangentes, & à punctis in quibus radii tangunt baſim ducantur rectæ lineæ per coni ſuperficiem uſque ad ejus verticem; per eas vero lineas & radios ab oculo ad baſim coni procedentes duo plana educantur, in quorum communi ſectione oculus collocetur: coni pars ſpectata æqualis perpetuo videbitur.

Ἔστω γὰρ κῶνος οὗ βάσις μὲν ὁ ΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Β σημεῖον, ὄμμα δὲ τὸ Κ, ἀφ' οὗ προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΚΔ, ΚΓ, ἁπτόμεναι κατὰ τὰ Γ, Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἀπὸ τῶν Γ, Δ σημείων ἐπὶ τὸν κορυφὴν τοῦ κώνου αἱ ΔΒ, ΓΒ, καὶ διὰ μὲν τῶν ΓΒ, ΓΚ ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω, διὰ δὲ τῶν ΔΒ, ΔΚ ὁμοίως ἕτερον ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω· συνπεσοῦνται τὰ ἐπίπεδα, αἱ μὲν γὰρ ΓΒ, ΔΒ συνπίπτουσι, καὶ αἱ ΓΚ, ΚΔ. συνπιπτέτωσαν ἔν τὰ ἐπίπεδα, καὶ ἔστω αὐτῶν κοινὴ τομὴ ἡ ΒΚ· λέγω ὅτι ὅπου δ' ἂν ἐπὶ τῆς ΒΚ τεθῇ τὸ ὄμμα, ἴσον τοῦ κώνου τὸ ὁρώμενον φαίνεται. κείσθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΒΚ τὸ Ζ ὄμμα, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ζ, ᾧ μὲν μὲν τῷ ΚΔ ἡ ΖΝ, παρὰ δὲ ΚΓ ἡ ΖΣ. αἱ ΖΝ, ΖΣ τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας κατὰ τὰ Σ, Ν ἐφάπτονται, [3] τὰ δὲ ἐν τῇ ΒΓΔ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ τῶν ὡρισμένων κύκλων τμήματα ὁμοιά ἐστι· τὰ ἄρα ἐν τῇ ΒΔΓ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ ἀφεστήματα ὁρώμενα ἴσα φαίνεται. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΖΣ, ΖΝ γωνία τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν ΚΓ, ΚΔ· [4] ἴσον ἂν φαίνοιτο τὸ ΣΝ διάστημα τοῦ κώνου τῷ ΓΔ ἀφεστήματι· ὥστε ὅπου ἂν τὸ ὄμμα τεθῇ ἐπὶ τῆς ΚΒ εὐθείας, ἴσον ἀεὶ φανεῖται τὸ ὁρώμενον.



SIT enim conus, cujus baſis ſit ΓΔ circulus, vertex autem ſit punctum Β; oculus vero ſit Κ, à quo procedant radii ΚΔ, ΚΓ, qui tangant [ipſum ΓΔ circulum] in punctis Γ, Δ, à quibus ad verticem coni ducantur rectæ lineæ ΔΒ, ΓΒ; educantur autem duo plana, alterum quidem per lineam ΓΒ & radium ΓΚ, alterum autem eodem modo per lineam ΔΒ & radium ΔΚ: concurrent igitur hæc duo plana, propterea quod rectæ lineæ ΓΒ, ΔΒ concurrunt, & radii ΓΚ, ΚΔ etiam concurrunt. concurrant igitur, ſeque mutuo ſecent duo illa plana, ſitque eorum communis ſectio linea ΒΚ: fore aſſero ut ab oculo, in quolibet puncto lineæ ΒΚ collocato, æqualis coni portio cernatur. ſumatur enim in linea ΒΚ aliquod punctum quod ſit Ζ, in quo ſit oculus; & per punctum Ζ ducatur recta linea ΖΝ parallela ipſi ΚΔ; ipſi autem ΚΓ parallela ΖΣ. igitur rectæ lineæ ΖΝ, ΖΣ tangunt coni ſuperficiem in punctis Σ, Ν; ſectiones enim circulorum parallelorum in coni ſuperficie ΒΓΔ ſimiles ſunt: intervalla igitur quæ cernuntur in ΒΔΓ ſuperficie coni æqualia apparent. cum enim angulus, quem comprehendunt radii ΖΣ, ΖΝ, æqualis ſit ipſi angulo quem comprehendunt radii ΚΓ, ΚΔ: igitur ſuperficiei coni intervallum ΣΝ æquale apparebit intervallo ΓΔ: quocirca ubicunque ponatur oculus in recta ΚΒ, ſpectata coni portio ſemper æqualis apparebit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

[5] Ἴσον δὲ ἀεὶ τοῦ ὄμματος ἀπέχοντος, μειζόνου μὲν τοῦ ὄμματος τοῦ

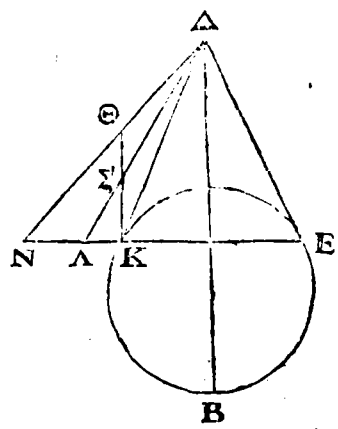
Prop. XXXIV. Theor.

Oculo moto per lineam æque diſtantem ſuperficiei coni, ſi in ſublime attolla-

1 Brevius & planius, ut puto, ſic: Rectæ lineæ à coni vertice ad baſis planum extra conum ductæ quacunque in parte oculus ſtatuatur, τὸ ὁρώμενον τοῦ κώνου ἴσον ἀφ' παντὸς ὀφθήσεται. neque mihi ulla ſatis juſta cauſa apparet, cur his ambagibus voluerit proponere. *Savil.* 2 Addit Reg. τῆς ὕψους ἐπὶ παραλλήλου ἐπιπέδου τῷ ΘΟΥΠΟΚΕΙΜΕΝΩ ἐπιπέδῳ ὑπαρχούσης. 3 Hoc verum quidem eſt, ſed non probat ΖΣ, ΖΝ contingere conum in Σ & Ν. ac eſt quidem illud ſatis per ſe manifeſtum, cum plana ΚΒΔ, ΚΒΓ conum tangant. mihi plane uſque ad ἐπεὶ (quod tunc legendum eſſet ἀλλ' ἐπεὶ) omnia παρέλκειν videntur. nam ſine iis, ut puto, conſtat demonſtratio. credo eſſe ex *Scholio. Idem.* 4 Hæc verba confirmant id, quod per prop 29. annotavi, illud hic dici ὀφθῆναι in conis & cylindris, quod oculis directa ex adverſo objacet. *Idem.* 5 Id eſt, cum eſt in recta linea parallela rectæ cuipiam à circumferentia baſis ad verticem. *Idem.*

tur oculus, coni portio quæ cernitur minor apparet; ſi vero oculus deprimatur, major.

SIT coni vertex in puncto Δ, baſis autem ejuſdem coni ſit circulus KBE, & ducatur KΘ parallela ipſi BΔ, colloceturque oculus in Θ: dico coni portionem ſpectatam minorem apparere oculo poſito in puncto Θ quam in puncto Σ.



Connectantur enim à puncto Δ ad puncta Θ, Σ rectæ lineæ ΘΔ, ΔΣ, & producantur uſque ad puncta N, Λ. igitur portiones coni, quæ cernuntur, inæquales apparent, ſi oculus conſtituatur nunc in N, nunc in Λ; & minor quidem coni portio apparet ex N, major autem ex Λ: portio autem coni quæ cernitur ex N æqualis eſt ei quæ cernitur ex Θ, & portio quæ cernitur ex Λ æqualis eſt ei quæ cernitur ex Σ, ut in præcedenti oſtenſum eſt: quare oculus poſitus in puncto Θ minorem coni portionem ſe videre exiſtimat, quam cum collocatur in puncto Σ.

Ἔστω γὰρ κώνου κορυφὴ μὲν τὸ Δ σημεῖον, βάσις δὲ ὁ κύκλος ΚΒΕ, καὶ ἤχθω ἡ ΚΘ παρὰ τὴν ΒΔ, καὶ κείσθω τὸ ὄμμα ἐπὶ τοῦ Θ· φημὶ δὴ ἔλασσον ὀφθήσεσθαι τοῦ κώνου τὸ ὁρώμενον, τιθέντος δὲ ὄμματος ἐπὶ μὲν Θ σημείου ἤπερ ἐπὶ μὲν Σ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐπὶ τὰ Θ, Σ σημεῖα αἱ ΘΔ, ΔΣ, καὶ [2] ἐκβεβλήθωσαν ἐπὶ τὰ Ν, Λ. ἐπεὶ οὖν ἐπί τε τοῦ Ν καὶ ἐπὶ τοῦ Λ σημείου τεθέντος ὄμματος, ἄνισα φαίνεται τὰ ὁρώμενα τοῦ κώνου, καὶ ἔλασσον μὲν φαίνεται τὸ πρὸς τῷ Ν, μεῖζον δὲ τὸ πρὸς τῷ Λ. ἴσον δὲ τὸ μὲν πρὸς τῷ Ν τῷ πρὸς τῷ Θ, τὸ δὲ πρὸς τῷ Λ τῷ πρὸς τῷ Σ, ὡς ἐν τῷ πρὸ αὐτοῦ ἐδείχθη· τοῦ ἄρα ὄμματος πρὸς τῷ Θ σημείῳ ὄντος, ἔλασσον φαίνεται τὸ ὁρώμενον τοῦ κώνου ἤπερ πρὸς τῷ Σ.

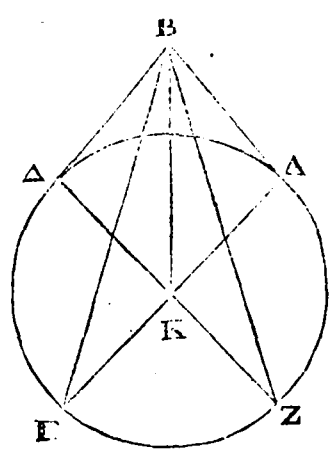
PROP. XXXV. THEOR.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

In circulo ſi à centro excitetur linea recta ad angulos rectos plano ipſius circuli, oculuſque in ea linea conſtituatur; circuli diametri æquales apparebunt.

Ἐν κύκλῳ ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς ὀρθάς τις ἀχθῇ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ, ὅτι δὲ ταύτης τεθῇ τὸ ὄμμα· ἴσαι αἱ διάμετροι τοῦ κύκλου φαίνονται.

SIT enim circulus cujus centrum K; & à puncto K erigatur recta linea KB, quæ angulos rectos faciat cum circuli plano; ponaturque oculus in puncto B, & ducantur diametri ΛΓ, ΔΖ: dico diametrum ΛΓ æqualem videri diametro ΔΖ.



Ducantur enim rectæ lineæ BA, BZ, BΓ, BΔ. duæ igitur rectæ BK, KZ duabus BK, KΓ ſunt æquales altera alteri. angulus autem BKΓ angulo BKZ eſt æqualis: quare [per 4.1.] baſis BZ æqualis eſt baſi BΓ. eademque ratione BΔ æqualis eſt ipſi BA: duæ igitur rectæ ΔB, BZ duabus rectis ΓB, BA ſunt æquales; & ΔZ æqualis eſt ipſi ΓA: angulus igitur ΔBZ [per 8. 1.] æqualis eſt angulo ΓBA. ſed [per 7. poſit.] quæ ſub æqualibus angulis ſpectantur æqualia apparent: æqualis igitur apparet ΓA diameter ipſi ΔZ diametro.

Ἔστω γὰρ κύκλος, οὗ κέντρον τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ πρὸς ὀρθὰς ἀνήχθω τῷ ὑπιπέδῳ τοῦ κύκλου ἡ ΚΒ, τὸ δὲ ὄμμα κείσθω ἐπὶ Β, καὶ διάμετροι ἤχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ· φημὶ δὴ τὴν ΑΓ τῇ ΔΖ ἴσην φαίνεσθαι.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΑ, ΒΖ, ΒΓ, ΒΔ· οὐκοῦν δύο αἱ ΒΚ, ΚΖ δυσὶ ταῖς ΒΚ, ΚΓ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΚΓ γωνία τῇ ΒΚΖ γωνίᾳ ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΒΖ βάσις τῇ ΒΓ βάσει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΔ τῇ ΒΑ ἐστιν ἴση· δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΖ δυσὶ ταῖς ΓΒ, ΒΑ ἴσαι εἰσὶν, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΓΑ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΒΑ ἴση ἐστίν. τὰ δὲ ὑπὸ ἴσων γωνιῶν ὁρώμενα ἴσα φαίνεται· ἴση ἄρα ἡ ΓΑ τῇ ΔΖ φαίνεται.

1 Sed tamen plus ἰφθάνειν. *Savil.* 2 Donec ſc. concurrant cum plano baſis. *Idem.*

ΠΡΟ-

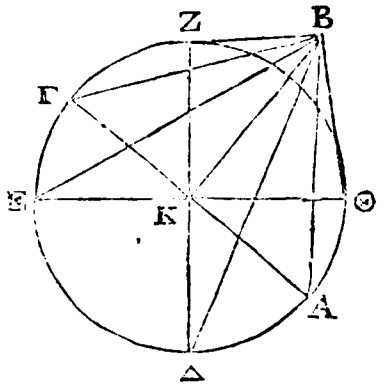
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ'.

Καὶ ἐὰν ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀναχθεῖσα μὴ πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ τοῦ κύκλου ὑπιπέδῳ, ἴσον δὲ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου· ἴσαι αἱ διάμετροι φανήσονται.

PROP. XXXVI. THEOR.

Si vero linea ex centro excitata non ſit ad angulos rectos plano circuli, æqualis tamen ſemidiametro; diametri æquales apparebunt.

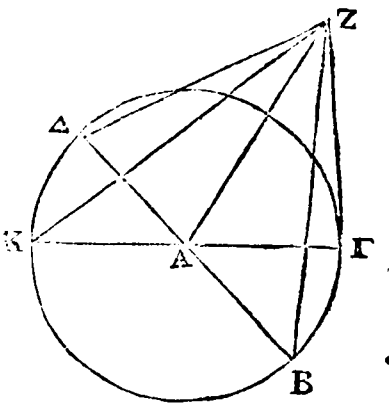
Ἔστω κύκλος οὗ κέντρον τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ μὴ πρὸς ὀρθὰς ἀνήχθω τῷ ὑπιπέδῳ ἡ ΚΒ, ἴση δὲ ἔστω τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἀπὸ τοῦ Β σημείου αἱ αὐταὶ ταῖς πρότερον. οὐκοῦν ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις αἱ ΔΚ, ΚΒ, ΚΖ, ὀρθὴ ἂν εἴη ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ΖΒΔ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὀρθὴ ἂν εἴη· ἴσαι ἄρα ἔσονται ἀλλήλαις. τὰ δὲ ὑπὸ ἴσων γωνιῶν ὑρώμενα ἴσα φαίνεται· ἴση ἄρα ἡ ΔΖ τῇ ΑΓ φανεῖται.



SIT circulus, cujus centrum K; & ex K in ſublime ducatur KB, quæ non faciat angulos rectos cum plano circuli; æqualis vero ſit ipſius ſemidiametro; & à puncto B, in quo eſt oculus, ducantur lineæ ut prius. cum igitur æquales inter ſe ſint ΔK, KB, KZ, rectus erit [per 31.3.] angulus ZBΔ. eademque ratione rectus etiam erit angulus ABΓ: ideoque & æquales inter ſe ſunt. quæ autem ſub æqualibus angulis ſpectantur æqualia apparent: æqualis ergo apparet ΔZ diameter ipſi AΓ diametro.

[1] Ἀλλὰ δὴ ἡ ΑΖ μήτε ἴση ἔστω τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, μήτε πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ὑπιπέδῳ, ἴσας δὲ γωνίας ποιείτω [2] τὰς ὑπὸ ΔΑΖ, ΖΑΓ καὶ ΚΑΖ, ΖΑΒ· λέγω ὅτι καὶ οὕτως αἱ διάμετροι ἴσαι φανήσονται. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΖ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΖΑ τῇ ὑπὸ ΑΖΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΚΖΑ τῇ ὑπὸ ΑΖΒ ἐστιν ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΒ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΚΖΓ ἐστὶν ἴση. ὥστε αἱ διάμετροι ἴσαι φανήσονται, τῆς ἀπὸ τοῦ ὄμματος πρὸς τὸ κέντρον ἴσας περιεχούσης γωνίας μετὰ τῶν διαμέτρων, ἄν τε πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ τοῦ κύκλου ὑπιπέδῳ, ἄν τε μή.

SED AZ neque æqualis ſit ſemidiametro, neque cum plano circuli angulos rectos faciat, ſed angulos ΔAZ, ZAΓ & KAZ, ZAB æquales faciat: dico hoc etiam modo fore ut diametri æquales appareant [oculo in Z conſtituto.] quia enim æqualis eſt ΔA ipſi AΓ, ipſa vero AZ communis eſt, & æquales angulos cum eis facit; ergo [per 4. 1.] baſis ΔZ æqualis eſt baſi ZΓ, & angulus ΔZA angulo AZΓ. eodem modo oſtendemus angulum KZA æqualem eſſe angulo AZB: quare totus ΔZB angulus toti KZΓ angulo eſt æqualis. ideoque diametri [ΔB, KΓ] æquales apparebunt, cum radius qui ab oculo tendit in centrum circuli æquales angulos facit cum diametris, ſive radius ille rectus ſit ad planum circuli, ſive non.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ'.

[3] Ἐὰν ἡ ἀπὸ τοῦ ὄμματος πρὸς τὸ κέντρον προσπίπτουσα τοῦ κύκλου μήτε πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ τοῦ κύκλου ὑπιπέδῳ, μήτε ἴση ᾖ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, μήτε ἴσας γωνίας περιέχουσα μετὰ

PROP. XXXVII. THEOR.

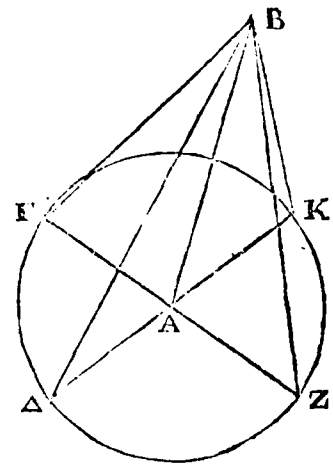
In circulo, ſi radius ab oculo in centrum tendens neque rectus ſit ad planum circuli, neque æqualis ſemidiametro, nec angulos æquales contineat

1 In hac πτώσει duæ tantum diametri æquales φανίζονται, cum recta AZ non poſſit cum pluribus angulos ad centrum efficere æqualeis, ducta autem à Z ad planum perpendiculari, punctoque incidentiæ cum centro connexo, angulus fiet omnium minimus ex ſemidiametro πρὸς τὴν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀναχθεῖσαν, & propiores remotioribus majores, æquales vero πρὸς ἀναχθεῖσαν facient, qui cum ea ſemidiametro ad utramque partem angulos æqualeis faciunt, vel ab ea abſunt æqualiter. *Savil.* 2 Neque enim cum pluribus poteſt. *Idem.* 3 Hæc 37. propoſitio vel eſt Scholiaſtæ alicujus (id quod mihi veriſimillimum videtur, ita tamen ut poſt duo proxima theoremata reponi debeat; vel 38 & 39 lemmata dicenda ſunt ad hoc theorema neceſſaria, vel certe, quum diſerte theoremata appellet non λήμματα (ὡς ἐν τοῖς θεωρήμασιν ἀποδείκνυται) duobus ſequentibus hoc theorema poſtponi debuit. neque enim theoremata ſequentia ad præcedentium demonſtrationem aſſumi poſſunt. *Idem.*

cum ſemidiametris, ſed major ſit vel minor ſemidiametro; diametri inæquales apparebunt.

τ ὀκ τῦ κέντρυ, μείζων δὲ ἢ ἐλάσσων τῆς ὀκ τῦ κέντρυ· ἄνισοι αἱ διάμετροι φανῦνται.

SIT circulus, cujus centrum A; & ab oculo B ad circuli centrum ducatur recta BA, quæ neque rectos angulos faciat cum plano circuli, neque æqualis ſit ſemidiametro circuli, nec æquales angulos contineat cum ſemidiametris: aſſero fore ut ipſius circuli diametri inæquales appareant.



Ducatur enim ΓZ diameter ad angulos rectos ipſi AB; ducatur item ΔK, quæ inæquales faciat angulos cum linea AB; & connectantur rectæ BΓ, BΔ, BK, BZ; ſitque primo BA major ſemidiametro AK: major igitur eſt angulus ΓBZ angulo KBΔ, ut in theorematis [ſubnexis] demonſtratur. quæ autem ſub majore angulo ſpectantur majora apparent: igitur diameter ΓZ major apparet diametro ΔK. quod ſi BA minor ſit quam AK, major apparebit ΔK quam ΓZ.

Ἔστω γὰρ κύκλος ὃ κέντρον τὸ A, ὀ δὲ ἀπὸ τῦ B ὄμματος ἐπὶ τὸ κέντρον τῦ κύκλυ εὐθεῖα ἤχθω ἡ BA, καὶ ἔστω μήτε πρὸς ὀρθὰς τῷ ἐπιπέδῳ, μήτε ἴση τῇ ὀκ τῦ κέντρυ τῦ κύκλυ, μήτε ἴσας γωνίας περιέχουσα μετὰ τῶν ὑπ' ὄ κέντρυ· λέγω ὅτι αἱ διάμετροι τῦ κύκλυ ἄνισοι φανήσονται.

Ηχθω γὰρ ἡ μὲν ΓZ διάμετρος πρὸς ὀρθὰς οὖσα τῇ AB, ἡ δὲ ΔK ἀνίσως[1] πρὸς ἄσας γωνίας πρὸς τῇ AB, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ BΓ, BΔ, BK, BZ, ἔστω δὲ πρότερον ἡ BA τῆς AK μείζων· ὀκοῦν μείζων ἐστὶν ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ΓBZ τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῶν KBΔ, ὡς ἐν τοῖς θεωρήμασιν ἀποδείκνυται. τὰ δ' ὑπὸ μείζονος γωνίας ὁρώμενα μείζονα φαίνεται· μείζων ἄρα ἡ ΓZ τῆς ΔK φαίνεται. ἐὰν δὲ ἡ BA τῆς AK ἐλάσσων ᾖ, μείζων φαίνεται ἡ ΔK τῆς ΓZ.

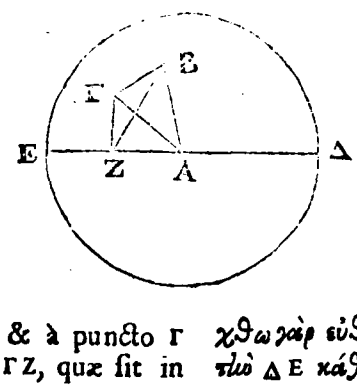
Ad horum demonſtrationem præcognita eſſe oportet quæ ſequuntur.

Προσλαμβανόμενα εἰς τὰτων ἀπόδειξιν.

Si ab oculo in ſublimi poſito cadant duæ rectæ lineæ, altera ad centrum circuli, quæ perpendicularis non ſit plano circuli, altera vero quæ perpendicularis ſit circuli plano; & à puncto, in quod cadit perpendicularis, connectatur recta linea ad centrum circuli: angulus comprehenſus ſub hac linea, & ea quæ à centro ad oculum ducta eſt, minimus eſt omnium angulorum contentorum ſub linea ab oculo ad centrum ducta, & lineis per centrum ductis.

Ἐὰν ἀπὸ μετεώρυ ὄμματος πρὸς κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, ἡ μὲν πρὸς τὸ κέντρον μὴ πρὸς ὀρθὰς τῷ τῦ κύκλυ ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ καθετος οὖσα τῷ ἐπιπέδῳ, καὶ ἀπὸ τῦ σημείυ, εἰς ὃ πίπτει ἡ καθετος, ἐπὶ τὸ κέντρον ἀχθῇ εὐθεῖά τις· ἡ περιεχομένη γωνία ὑπό τε τῆς ἀπὸ τῦ σημείυ ἐπὶ τὸ κέντρον, καὶ τῆς ἀπὸ τῦ ὄμματος πρὸς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη ἐστὶ γωνιῶν ἁπασῶν περιεχομένων ὑπό τε τῆς ἀπὸ τῦ ὄμματος πρὸς τὸ κέντρον, καὶ τῶν διὰ τῦ κέντρυ διαγομένων εὐθειῶν.

SIT circulus, cujus centrum A; oculus vero ſit B, à quo perpendicularis ducta in planum circuli cadat non in A centrum, ſed extra centrum in Γ nempe, ſitque BΓ; & à puncto Γ ad punctum A connectatur recta ΓA, item ex puncto A in punctum B ducatur AB: dico angulorum omnium, qui fieri poſſunt ex concurſu lineæ BA cum alia qualibet linea tranſeunte per punctum A, minimum eſſe angulum ΓAB. ducatur enim per punctum A recta linea ΔAE; & à puncto Γ in ΔE ducatur perpendicularis ΓZ, quæ ſit in



Ἔστω κύκλος ὃ κέντρον τὸ A, ὄμμα δὲ τὸ B, ἀφ' ὃ ἡ ἐπὶ τὸ κύκλυ κάθετος ἀγομένη μὴ πιπτέτω ἐπὶ τὸ κέντρον τὸ A, ἀλλὰ ἐκτὸς, καὶ ἔστω ἡ BΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἀπὸ τῦ Γ ἐπὶ τὸ A ἡ ΓA, ἐπὶ δὲ ἀπὸ τῦ A ἐπὶ τὸ B ἡ AB· λέγω ὅτι πασῶν ἁπλῶν τῦ A διαγομένων εὐθειῶν, καὶ πασῶν πρὸς τῇ BA γωνίας, ἐλαχίστη ἐστὶν ὑπὸ τῶν ΓAB. διήχθω γὰρ εὐθεῖα ἡ ΔAE, καὶ ἤχθω ἀπὸ τῦ Γ ἐπὶ τὴν ΔE κάθετος ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἡ ΓZ, καὶ ἐπεζεύχθω

1 Nam ſi & ipſa æquales angulos faceret, BA eſſet κάθετος ad planum circuli, per 4. 11. *Savil.*

ζεύχθω ἡ ΒΖ· καὶ ἡ ΒΖ ἄρα ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετος ἐστιν. ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΓΖΑ, ἡ ὑπὸ ΑΓΖ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ὀρθῆς· μείζων ἄρα ἡ ΑΓ πλευρὰ τῆς ΑΖ· ἡ ΒΑ ἄρα πρὸς τὴν ΑΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν ΑΓ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ γωνία καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΒΖΑ εἰσὶν ὀρθαί, καὶ εἰσὶν αἱ ΓΑ, ΑΖ ἄνισοι· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ τῶν ΖΑΒ τῆς ὑπὸ τῶν ΓΑΒ ἐστὶ μείζων. ὁμοίως δὲ δείξεται ὅτι καὶ πασῶν τῶν ἀφ' τὸ Α ἀφορωμένων εὐθειῶν, καὶ πασῶν πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ γωνίας, ἐλαχίστη ἐστὶν ἡ ὑπὸ τ ΓΑΒ.

eodem plano, in quo ΔΕ; connectaturque recta ΒΖ: igitur [per lem. 1.] ΒΖ perpendicularis eſt in lineam ΔΕ. cum ergo angulus ΓΖΑ rectus ſit, angulus igitur ΑΓΖ [per 17. 1.] minor eſt recto: majus ergo [per 19. 1.] eſt latus ΑΓ latere ΑΖ: quare [per 8. 5.] recta ΒΑ ad ΑΖ majorem rationem habet quam ad ΑΓ. ſed duo anguli ΑΓΒ, ΒΖΑ recti ſunt, & ΓΑ, ΑΖ rectæ lineæ inæquales ſunt: ergo [per lem. 2.] reliquus angulus ΖΑΒ reliquo angulo ΓΑΒ eſt major. eodem modo oſtendemus omnium angulorum, qui fiunt ex concurſu lineæ ΑΒ cum lineis trajectis per punctum Α, minimum eſſe angulum ΓΑΒ.

ΛΗΜΜΑ α'.

Οτι δὲ ἡ ΖΒ τῇ ΔΕ ἐστὶ πρὸς ὀρθὰς δείξομεν οὕτως.

Ἐπεὶ ἡ ΒΓ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς, καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ΒΓ ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. ἐν δὲ τῶν ἀφ' τῆς ΒΓ ἐκβαλλομένων ἐπιπέδων ἐστὶ τὸ ΒΓΖ τρίγωνον· καὶ τὸ ΒΓΖ ἄρα τρίγωνον τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. ἐπεὶ οὖν δύο ἐπίπεδα, τό τε τοῦ ΕΔ κύκλου καὶ τὸ τοῦ ΒΓΖ τριγώνου, τέμνουσιν ἄλληλα, καὶ τῆς κοινῆς τομῆς αὐτῶν τῆς ΓΖ πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἡ ΔΕ, ἐν τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ, κάθετος γὰρ ἦκται ἡ ΓΖ ἐπὶ τὴν ΕΔ· καὶ ἡ ΕΔ ἄρα τῷ τοῦ ΒΓΖ τριγώνου ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς· ὥστε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ ΓΖΒ τριγώνου ἐπιπέδῳ, ἐστὶ πρὸς ὀρθάς· ἡ ΔΕ ἄρα τῇ ΖΒ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς· ἀνάπαλιν ἄρα ἡ ΖΒ τῇ ΕΔ διαμέτρῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς.

LEMMA I.

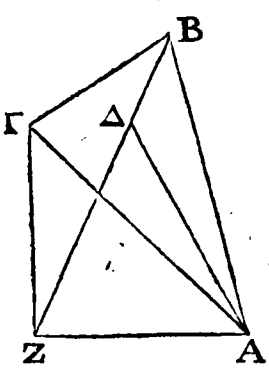
Quod autem recta ΖΒ ad angulos rectos ſit ipſi ΔΕ, oſtendemus hoc modo.

Quia enim ΒΓ eſt ad rectos angulos plano circuli: ergo [per 18. 11.] plana omnia trajecta per lineam ΒΓ angulos rectos faciunt cum plano circuli. ſed triangulum ΒΓΖ eſt unum de planis trajectis per lineam ΒΓ; ergo triangulum ΒΓΖ ad angulos rectos inſiſtit plano circuli. cum ergo duo plana, planum nempe circuli ΕΔ & planum trianguli ΒΓΖ ſe mutuo ſecent, & ad ipſorum communem ſectionem, quæ eſt ΓΖ, ipſa ΔΕ angulos rectos faciat cum plano circuli: (ducta enim eſt ΓΖ perpendicularis in ipſam ΕΔ) igitur recta ΕΔ angulos rectos facit cum plano ipſius trianguli ΒΓΖ: quare [per 3. def. 11.] ad omnes lineas à quibus tangitur, poſitas in eodem plano trianguli ΓΖΒ, angulos rectos facit: ideoque ΔΕ ad ipſam ΖΒ angulos rectos facit: converſim igitur ΖΒ eſt ad angulos rectos ipſi ΕΔ diametro circuli.

ΛΗΜΜΑ β'.

Επι δὲ δείξομεν ὅτι ἡ ΖΑΒ γωνία τῆς ΓΑΒ γωνίας μείζων ἐστίν.

Ἐστω γὰρ δύο τρίγωνα τὰ ΒΓΑ, ΒΖΑ ὀρθὰς ἔχοντα τὰς πρὸς τοῖς Γ, Ζ γωνίας· καὶ ἡ ΒΑ πρὸς ΖΑ μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ πρὸς τὴν ΓΑ· λέγω ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΑΒ γωνία τῆς ὑπὸ ΓΑΒ γωνίας.



Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΖΑ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν ΓΑ· καὶ ἀνάπαλιν ἄρα ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΑΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ· ὥστε ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΑ πρὸς ΑΒ. πεποιήσθω δὴ ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ οὕτως ἡ ΖΑ πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΑΒ τὴν ΑΔ· ἰσογώνια ἄρα ἐστὶ τὰ τρίγωνα τὰ ΒΓΑ, ΔΖΑ· ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΑΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΑΔ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΑΒ γωνία τῆς ὑπὸ ΓΑΒ.

Εκ δὴ δὴ τούτων δείξομεν ὅτι

LEMMA II.

Præterea oſtendemus angulum ΖΑΒ majorem eſſe angulo ΓΑΒ.

Sint duo triangula ΒΓΑ, ΒΖΑ, qui rectos habeant angulos poſitos ad Γ, Ζ; habeat autem ΒΑ majorem rationem ad ΖΑ, quam ad ΓΑ: dico angulum ΖΑΒ majorem eſſe angulo ΓΑΒ.

Cum enim ΒΑ ad ΖΑ majorem rationem habeat quam ad ΓΑ: converſim [1] igitur ΖΑ ad ΑΒ minorem rationem habet quam ΓΑ ad ΑΒ: quare ΓΑ ad ΑΒ majorem rationem habet quam ΖΑ ad ΑΒ. fiat ergo ut ΓΑ ad ΑΒ ita ΖΑ ad minorem quam ΑΒ, nempe ΑΔ; æquiangula ergo ſunt [per 7. 6.] triangula ΒΓΑ, ΔΖΑ: quare angulus ΓΑΒ æqualis eſt angulo ΖΑΔ: ideoque angulus ΖΑΒ major eſt angulo ΓΑΒ.

Ex his igitur oſtendemus quod

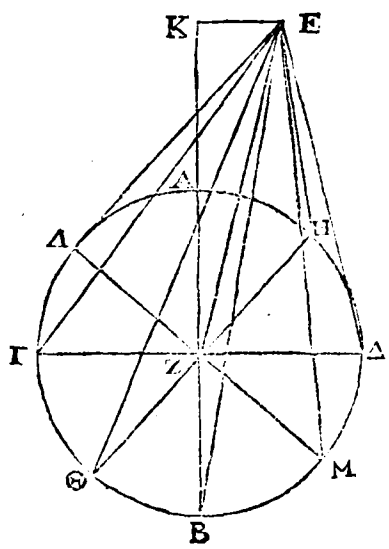
1 Hæc & hiſce ſimilia demonſtrantur à Pappo in Lib. 7. *Collect. Math.*

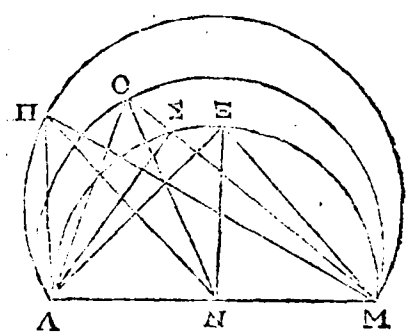
PROP.

Prop. XXXVIII. Theor.

In circulo, ſi radius ab oculo in centrum tendens, & inæquales angulos comprehendens cum diverſis diametris, non ſit rectus ad planum circuli, ſed ſit major ſemidiametro: diametri inæquales apparebunt; & ea major videbitur, ad quam radius ab oculo ad centrum tendens eſt perpendicularis.

SIT circulus ABΓΔ, ducanturque duæ diametri AB, ΓΔ ſe mutuo ſecantes ad angulos rectos; ſit vero oculus E, à quo ad centrum connexa recta linea EZ faciat rectos quidem angulos cum ΓΔ, quoſvis autem alios cum ipſa AB; ſit autem ipſa EZ major ſemidiametro circuli. quia ergo ΓΔ ad angulos rectos eſt utrique ipſarum AB, EZ: omnia igitur plana trajecta per lineam ΓΔ [per 4. & 18.11.] ad angulos rectos erunt plano trajecto per lineas EZ, AB. itaque ex E puncto ad planum ſubjectum ducatur perpendicularis: cadet ergo in communem ipſorum planorum ſectionem, quæ eſt AB. cadat ergo, ſitque EK; ducaturque diameter HΘ; ſumaturque linea AM æqualis diametro circuli, quæ bifariam ſecetur in puncto N; à quo excitetur linea ſublimis NΞ, quæ ſit ad ad angulos rectos ipſi AM; ſit vero linea NΞ æqualis ipſi EZ: deſcriptum igitur ſegmentum circuli tranſiens per puncta Λ,Ξ,M majus eſt ſemicirculo, propterea quod linea NΞ major eſt utravis duarum linearum ΛN, MN. ſit ergo illud circuli ſegmentum ΛΞM, & connectantur lineæ ΞΛ, ΞM: angulus ergo in puncto Ξ poſitus, qui ſub lineis ΛΞ & MΞ continetur, æqualis eſt angulo poſito in puncto E, qui continetur ſub lineis connexis à puncto E ad puncta Γ, Δ. rurſus, angulo contento ſub EZ, ZH, id





ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη'.

[1] Ἐὰν ἡ ἀπὸ τοῦ ὄμματος πρὸς τὸ κέντρον τοῦ σφαίρας προσπίπτουσα, καὶ ἀνίσους γωνίας περιέχουσα μετὰ διαφόρων διαμέτρων, μὴ πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ, μείζων δὲ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου· ἄνισοι αἱ διάμετροι φανήσονται, καὶ μείζων, ἐφ' ἣν ἡ ἀπὸ τοῦ ὄμματος πρὸς τὸ κέντρον ἐστὶ κάθετος.

ΕΣτω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ διήχθωσαν δύο διάμετροι αἱ ΑΒ, ΓΔ πέμνουσαι ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς, ὄμμα δὲ ἔστω τὸ Ε, ἀφ' οὗ ἡ ἐπὶ τὸ κέντρον ἐπιζευγνυμένη ἡ ΕΖ πρὸς ὀρθὰς μὲν ἔστω τῇ ΓΔ, πρὸς δὲ τὴν ΑΒ τυχοῦσαν γωνίαν περιεχέτω, καὶ ἔστω ἡ ΕΖ ἑκατέρας [2] τῶν ἐκ τοῦ κέντρου μείζων. ἐπεὶ οὖν ἡ ΓΔ ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΕΖ ἐστὶ πρὸς ὀρθὰς· καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ΓΔ ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα τῷ διὰ τῶν ΕΖ, ΑΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστιν. ἤχθω οὖν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος· ἐπὶ τὴν κοινὴν ἄρα τομὴν πίπτει ἐπίπεδον, [3] τὸ ΑΒ. πιπτέτω οὖν, καὶ ἔστω ἡ ΕΚ, καὶ διήχθω διάμετρος ἡ ΗΘ, καὶ κείσθω τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου ἴση ἡ ΛΜ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ ἀνήχθω ἀπὸ τοῦ Ν τῇ ΛΜ πρὸς ὀρθὰς μετέωρος εὐθεῖα ἡ ΝΞ, καὶ ἔστω ἡ ΝΞ τῇ ΕΖ ἴση· τὸ ἄρα διὰ τῆς ΛΜ γραφόμενον τμῆμα καὶ ἐρχόμενον διὰ τοῦ Ξ μεῖζον ἔσται τοῦ ἡμικυκλίου, ἐπειδήπερ ἡ ΝΞ μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ΛΝ, ΜΝ. ἔστω τὸ ΛΞΜ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΞΛ, ΞΜ· [4] ἡ ἄρα πρὸς τῷ Ξ γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΛΞΜ, ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Ε σημείῳ, τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΖΗ ἴση

1 Ἐὰν ἡ ἀπὸ τοῦ ὄμματος πρὸς τὸ κέντρον τοῦσφαίρας προσπίπτουσα, μὴ πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ, περιέχῃ δὲ ἀνίσους γωνίας μετὰ διαφόρων διαμέτρων, καὶ μείζων ᾖ τῆς ἐκ τοῦ &c. ſic enim multo proponitur aptius. *Savil.* 2 Malo τῆς. *Idem.* 3 Extenſam, ſi opus eſt. *Idem.* 4 Quia duo ſunt triangula NΞM, ZEΔ, itemque ΛΞN, ΓEZ. quæ duo latera duobus lateribus habeant æqualia, & angulum comprehenſum angulo æqualem. *Idem.* 5 Qui ſc. rectus non eſt; tum enim EZ eſſet erecta ad planum contra hypotheſin. *Idem.*

ἡ ὑπὸ

ἡ ὑπὸ τ ΑΝ, ΝΟ, καὶ ἀφῃρήσθω ἴση τῇ ΕΖ ἡ ΝΟ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΟ, ΜΟ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΛΟΜ τρίγωνον τμῆμα κύκλου· ἔσται δὴ καὶ ἡ πρὸς τῷ Ο σημείῳ γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τ ΛΟ, ΟΜ, ἴση τῇ ὑπὸ τ ΗΕΘ. ἔστι κείσθω τῇ ὑπὸ τῶν ΕΖΑ [1] ἴση ἡ ὑπὸ τῶν ΛΝΠ, καὶ ἀφῃρήσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΝΠ καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΠ, ΠΜ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΛΠΜ τρίγωνον τμῆμα κύκλου· ἔσται δὴ καὶ ἡ πρὸς τῷ Π σημείῳ ἴση τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τ ΑΕ, ΕΒ γωνία. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Ξ τῆς πρὸς τῷ Ο γωνίας, ἡ μὲν γὰρ πρὸς τῷ Ξ ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Σ γωνίᾳ, ἀμφότερα γὰρ ἐν τῷ αὐτῷ εἰσι τμήματι, ἡ δὲ πρὸς τῷ Σ μείζων ἐστὶ τῆς πρὸς τῷ Ο γωνίας, τριγώνου γὰρ τοῦ ΛΣΟ ἐκτός ἐστι· καὶ ἡ πρὸς τῷ Ξ ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς πρὸς τῷ Ο. καὶ ἔστιν ἡ πρὸς τῷ Ξ ἴση τῇ ὑπὸ ΓΕΔ, ἡ δὲ πρὸς τῷ Ο τῇ ὑπὸ ΗΕΘ· μείζων ἄρα φανήσεται καὶ ἡ ΓΔ τῆς ΗΘ. πάλιν ἡ μὲν πρὸς τῷ Ο γωνία τῇ ὑπὸ ΗΕΘ ἴση ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ πρὸς τῷ Π τῇ ὑπὸ ΑΕΒ, μείζων δὲ ἡ Ο [2] γωνία τῆς Π· μείζων ἄρα φανήσεται ἡ ΗΘ τῆς ΑΒ εὐθείας.

est angulo ΕΖΝ, æqualis conſtituatur ad punctum N angulo ΑΝΟ, contentus ſub lineis ΑΝ, ΝΟ, auferaturque ΝΟ æqualis ipſi ΕΖ, connectanturque rectæ ΛΟ, ΜΟ, & [per 5.4.] circa triangulum ΑΟΜ deſcribatur circuli ſegmentum: angulus igitur poſitus in puncto Ο, contentus ſub lineis ΛΟ, ΟΜ, æqualis erit angulo ΗΕΘ. rurſus, ad punctum Ν ponatur angulus ΛΝΠ æqualis angulo ΕΖΑ, abſcindaturque ΝΠ æqualis ipſi ΕΖ, & connectantur rectæ ΛΠ, ΠΜ, & circa triangulum ΛΠΜ deſcribatur circuli ſegmentum: erit ergo angulus ΛΠΜ æqualis angulo contento ſub rectis lineis ΑΕ, ΕΒ. quia ergo angulus ΛΞΜ major eſt angulo ΛΟΜ (angulus enim ΛΞΜ [per 21.3.] æqualis eſt angulo ΛΣΜ, eo quod ambo ſunt in eodem circuli ſegmento) angulus autem ΛΣΜ [per 16.1.] major eſt angulo ΛΟΜ; (eſt enim exterior angulus trianguli ΛΣΟ:) angulus igitur ΛΞΜ major eſt angulo ΛΟΜ. angulus vero ΛΞΜ æqualis eſt angulo ΓΕΔ, & angulus ΛΟΜ æqualis eſt ipſi ΗΕΘ: [major igitur eſt angulus ΓΕΔ angulo ΗΕΘ;] ideoq; [per 5. poſit.] diameter ΓΔ apparebit major diametro ΗΘ. rurſus, angulus ΛΟΜ æqualis eſt angulo ΗΕΘ, angulus autem ΛΠΜ angulo ΑΕΒ; major vero eſt angulus ΛΟΜ angulo ΛΠΜ: quare ΗΘ diameter major apparebit diametro ΑΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϑ'.

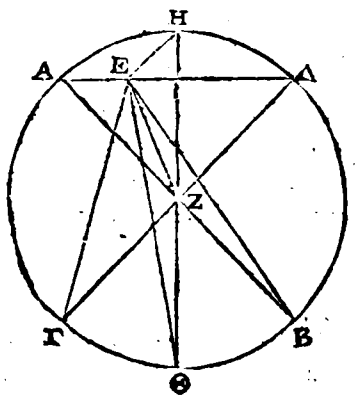
Μὴ ἔσω δὴ μείζων ἡ ὄμματος ὅπῃ τὸ κέντρον ὅπῃ ζυγυμθὴ τῆς ὑπὸ κέντρου, ἀλλ' ἐλάσσων, ἔσται δὲ πρὸς τὰς διαμέτρους τοὐναντίον· ἡ μὲν γὰρ τότε μείζων τῶν διαμέτρων, νῦν ἐλάττων φανήσεται· ἡ δὲ ἐλάττων, μείζων.

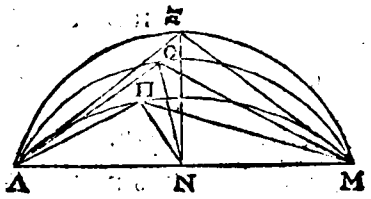
Prop. XXXIX. Theor.

Quod ſi ab oculo ad centrum connexa recta linea non fuerit major ſemidiametro, ſed minor; contrarium diametris eveniet: quæ enim antea major videbatur, nunc minor apparebit; & quæ minor, major.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ διήχθωσαν δύο διάμετροι τέμνουσαι ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς

SIT circulus ΑΒΓΔ, in quo ducantur duæ diametri ſe mutuo ſecantes ad angulos rectos,



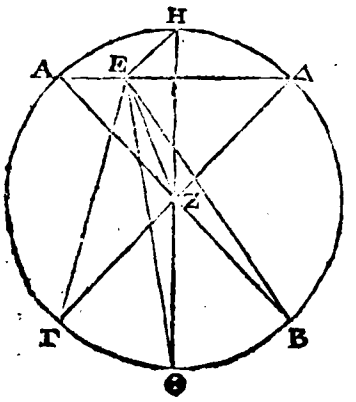


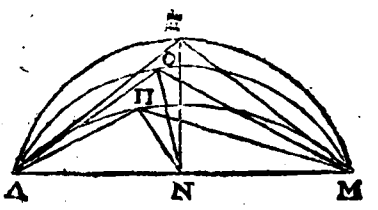
αἱ ΑΒ, ΓΔ, ἑτέρα δέ τις διήχθω ἡ ΗΘ, ὄμμα δὲ τὸ Ε, ἀφ' οὗ ἡ ἐπὶ τὸ Ζ κέντρον ζευχθεῖσα ἔστω ἡ ΕΖ, ἐλάσσων ὤσα ἑκατέρα [3] τῶν ἐκ τοῦ κέντρου,

quæ ſint ΑΒ, ΓΔ; & alia quævis præterea diameter ſit vero oculus Ε, à quo ad centrum connexa recta linea ΕΖ minor ſit ſemidiametro, faciatque

1 Qui angulus (per lemma præcedens) minimus eſt omnium ab ΕΖ cum ſemidiametris factorum, atque ideo ΝΠ modo cadit intra ΝΟ. *Savil.* 2 Punctum Ο cadere extra circulum ΛΞΜ ita conſtat; quia ΞΝ ſecat ΛΜ bifariam & ad rectos, eſt igitur ΞΝ ἐλαχίστη diameter circuli, & quia ΛΞΜ eſt major ſemicirculo in ΞΝ eſt centrum circuli, quare [per 7.3.] ΝΞ longiſſima eſt omnium rectarum ab Ν ad circuli circumferentiam: cadit ergo Ο extra ΛΞΜ. ſimiliter demonſtratur punctum Π cadere extra circulum ΛΟΜ, quia, cum angulus ΛΝΠ minor ſit angulo ΛΝΟ, recta ΝΠ remotior eſt ab ΝΞ (ſi educatur ad circumferentiam ΛΟΜ) maxima. *Idem.* 3 Malo τῆς, ut ſupra. *Idem.*

ZB rectos angulos cum ΓΔ diametro, & ponatur AM recta æqualis diametro circuli, feceturque bifariam in puncto N, & à puncto N erigatur ad angulos rectos linea N Ξ quæ fit æqualis lineæ E Z, & [per 5. 4.] circa puncta Λ, Ξ, M deſcribatur circuli ſegmentum Λ Ξ M: erit igitur hoc ſegmentum minus ſemicirculo, quandoquidem N Ξ minor eſt ſemidiametro. ſit ergo illud ſegmentum Λ Ξ M, & connectantur rectæ Ξ Λ, Ξ M; angulus igitur in puncto Ξ poſitus, qui continetur ſub lineis Λ Ξ, Ξ M, æqualis eſt angulo poſito in puncto E, qui continetur ſub rectis lineis Γ E, E Δ. rurſus, ad punctum N conſtituatur angulus Λ N O æqualis angulo E Z H, abſcindaturque N O æqualis ipſi E Z, connectanturque rectæ Λ O, M O, & circa lineam Λ M per punctum O deſcribatur circuli ſegmentum Λ O M: angulus igitur in puncto O poſitus, qui continetur ſub lineis Λ O, M O, æqualis eſt angulo ad punctum B poſito & contento ſub lineis Θ E & E H. denique, ad punctum N ponatur angulus Λ N Π æqualis A Z E, abſcindaturque N Π æqualis ipſi E Z, connectanturque rectæ Λ Π, Π M, & circa triangulum Λ Π M deſcribatur circuli ſegmentum Λ Π M: erit ergo angulus in puncto Π poſitus, ſub lineis Λ Π, Π M contentus, æqualis angulo poſito in E puncto & ſub lineis A E, E B contento. cum ergo angulus Λ Ξ M minor ſit angulo Λ O M, angulus autem Λ O M æqualis ſit angulo Θ E H, & angulus Λ Ξ M æqualis ſit angulo Γ E Δ: minor igitur [per 6. poſit.] apparebit Γ Δ diameter diametro H Θ. rurſus, quia angulus Θ E H minor eſt angulo A E B: minor ergo apparebit diameter H Θ diametro A B.





PROP. XL. THEOR.

Currum rotæ nunc circulares nunc oblongæ apparebunt.

SIT rota, cujus diametri ſunt Δ Z, B Γ. cum ergo radius, ab oculo ad centrum rotæ tendens, fuerit vel rectus ad rotæ planum vel æqualis ſemidiametro, diametri ipſius æquales apparebunt, ut in theor. præc. demonſtratum eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

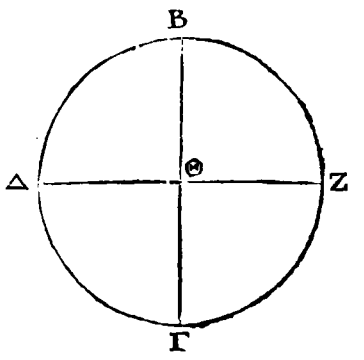
Τῶν ἁρμάτων οἱ τροχοὶ ὅτε μὲ κυκλοειδεῖς, ὅτε δὲ παρεσπασμένοι φαίνονται.

Ἔστω γὰρ τροχὸς, οὗ διάμετροι αἱ Δ Z, B Γ. ἐκεῖνον ὅταν μὲν ἡ ὄψις τοῦ ὄμματος εἰς τὸ κέντρον νεύσασα πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ ἐπιπέδῳ, ἢ ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, ἴσαι αἱ διάμετροι φανήσονται, ὡς ἐν [2] τῷ πρὸ αὐτοῦ θεωρήματι ἀπεδείχθη.

1 Punctum O non cadere intra Λ Ξ N conſtat ex eo, quod N Ξ minima ſit omnium ab N puncto ad circumferentiam Λ Ξ M ductarum. *Savil.* 2 In theor. 36 & 37. quod qua ratione vocavit τὸ πρὸ αὐτοῦ? niſi hoc è *Scholio*, ut etiam fortaſſe totum theorema. *Idem.*

ὥστε

ὥςε ὁ τροχὸς ὁ τῦ ἅρματος κυκλοειδὴς φαίνεται τάττων ὑπαρχόντων. ΩΔΦερομένου δὲ τῦ ἅρματος, καὶ τῦ ἀπὸ τῦ ὄμματος νεύσης εἰς τὸ κέντρον ἀκτῖνος, μήτε πρὸς ὀρθὰς ἔσης τῷ τῦ τροχῦ ἐπιπέδῳ, μήτε ἴσης τῇ ἐκ τῦ κέντρου αὐτῦ, ἄνισοι αἱ διάμετροι φανῦνται ὁμοίως, διὰ τὸ πρὸ αὐτῦ δεικθέν· ὥςε παρεσπασμένος φαίνοιτο ὁ τροχός.



quare eo modo ſpectata rota currus circularis apparebit. curru vero inordinate & celeriter delato, ſi oculi radius tendens ad centrum neque rectus ſit ad rotæ planum, neque æqualis ſemidiametro rotæ, inæquales apparebunt ejus diametri, per præcedens theorema: quare oblonga apparebit rota.

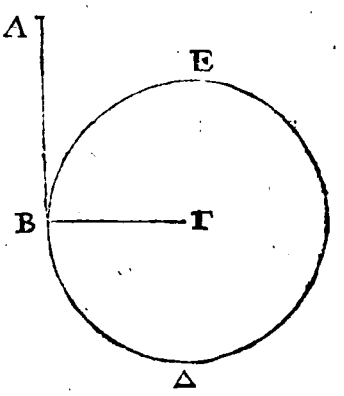
ΠΡΟΤΑΣΙΣ μα'.

Εἰν μέγεθός τι πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ μετέωρον, τεθῇ δὲ τὸ ὄμμα ὅπῃ τι σημεῖον τῦ ἐπιπέδυ, ᾧ μεθιςῆται τὸ ὁρώμενον ὅπῃ κύκλυ περιφερείας· ἴσον ἀεὶ τὸ ὁρώμενον φανήσεται.

Prop. XLI. Theor.

Si magnitudo quævis recta ſit ad ſubjectum planum, ponaturque oculus in puncto aliquo plani illius, circa quod tanquam circa circuli centrum ſeſe verſet ſpectata magnitudo; ea ſemper æqualis apparebit.

Ἔστω ὁρώμενόν τι μέγεθος τὸ ΑΒ μετεωρότερον τῦ ὑπιπέδυ, ὄμμα δὲ ἔςω τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΒ, καὶ κέντρῳ τῷ Γ διαςήματι δὲ τῷ ΓΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΔΕ· λέγω ὅτι ἐὰν ὅπῃ τὸ τῦ κύκλυ περιφερείας μεθιςῆται τὸ ΑΒ, ἀπὸ τῦ Γ ὄμματος ἴσος ἀεὶ ὀφθήσεται.



SIT ſpectata magnitudo AB ſublimior ſubjecto plano, [cui ad angulos rectos inſiſtat;] oculus autem ſit Γ, & connectatur recta ΓB; & centro Γ intervallo autem ΓB deſcribatur circulus BΔE: fore aſſero, ut, ſi magnitudo AB vectetur in circuli circumferentia, æqualis perpetuo appareat ipſi Γ oculo.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐςι, καὶ ποιεῖ πρὸς τὴν ΒΓ ὀρθὴν γωνίαν· πᾶσαι ἄρα αἱ ἀπὸ τῦ κέντρυ τῦ Γ πρὸς τὸ ΑΒ μέγεθος πεσοῦσαι ἀλλήλαις ἴσας γωνίας ποιῦσιν· ἴσον ἄρα τὸ ὁρώμενον ὀφθήσεται.

Quia enim AB magnitudo recta eſt ſad planum, facitque angulum rectum cum linea BΓ jacente in plano circuli: quare omnes lineæ, quæ à centro Γ in ipſam AB magnitudinem incident, angulos inter ſe æquales facient; ideoque [per 7. poſit.] ſpectata magnitudo ejuſdem quantitatis perpetuo apparebit.

ΟΜΟΙΩΣ δὴ κἂν ἀπὸ τῦ Γ κέντρυ μετέωρος ἀχθῇ εὐθεῖα, ᾧ ἐπ' αὐτῆς τὸ ὄμμα τεθῇ ὅπῃ ΩΔγαλήλυ ὂν τῷ ὁρωμένῳ μεγέθει, ᾧ μετακινῆται τὸ μέγεθος, ἴσον ἀεὶ τὸ ὁρώμενον φαίνεται.

Eodem modo ſi ex centro Γ ſublimis ducatur recta linea, quæ parallela ſit ſpectatæ magnitudini, & in ejus culmine ſtatuatur oculus; magnitudo, vectata in circuli circumferentia perpetuo ſibi æqualis apparebit.

[1] ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὁμοίως δὲ κἂν ἀπὸ τῦ κέντρυ πρὸς ὀρθὰς ἀναςαθῇ εὐθεῖα, ὅπῃ δὲ τοίτης ὄμμα μετατεθῇ, ᾧ μετακινεῖται τὸ ὁρώμενον μέγεθος κατὰ τὴν τῦ κύκλυ περιφέρειαν ΩΔγαλληλον ὂν τῇ εὐθείᾳ, ἐφ' ἧς τὸ ὄμμα· ἴσον ἀεὶ τὸ ὁρώμενον ὀφθήσεται.

SCHOLIUM.

Similiter ſi ex centro ad planum circuli erigatur perpendicularis recta, in qua collocetur oculus; circumferatur autem in peripheria circuli ſpectata magnitudo, parallela exiſtens rectæ in qua eſt oculus: ſpectata magnitudo ſemper æqualis apparebit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ'.

Εἰν δὲ τὸ ὁρώμενον πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μεθιςῆται δὲ τὸ ὄμμα ὅπῃ κύκλυ περιφερείας, κέντρον ἔχοντος τὸ σημεῖον

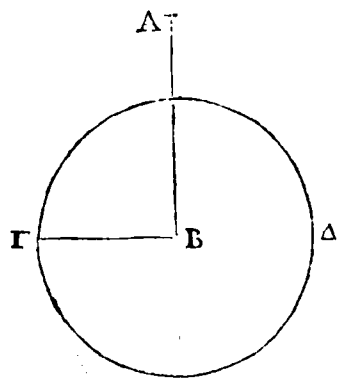
Prop. XLII. Theor.

Si ſpectata magnitudo recta ſit ad ſubjectum planum; oculus autem vectetur in circumferentia circuli, cujus centrum ſit punctum illud in quo

[1] Ex MSS. ſed eodem redit cum ſubnexis ipſi propoſitioni.

erecta magnitudo tangit planum: ſpectata magnitudo ſemper æqualis apparebit.

SIT ſpectata magnitudo AB, quæ & ſublimis ſit & angulos rectos faciat cum ſubjecto plano; oculus vero ſit Γ; & centro B intervallo autem BΓ deſcribatur circulus ΓΔ: fore aſſero, ut, ſi Γ oculus in circumferentia vectetur, ipſa AB magnitudo æqualis perpetuo appareat.



Id autem hinc perſpicuum eſt. omnes enim radii ex puncto Γ ad AB magnitudinem tendentes æquales angulos continent, quia angulus in puncto B rectus eſt; quare [per 7. poſit.] ſpectata magnitudo ſibi ipſi æqualis perpetuo apparebit.

καθ' ὃ συμβάλλει) τὸ μέγεθος τῷ ἐπιπέδῳ. ἴσον ἀεὶ τὸ ὁρώμενον φανήσεται).

ΕΣτω ὁρώμενον μὲν τὸ AB μεῖζον ὄν, καὶ πρὸς ὀρθὰς πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, ὄμμα δὲ ἔστω τὸ Γ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ B διαστήματι δὲ τῷ BΓ κύκλος γεγράφθω ὁ ΓΔ· λέγω ὅτι ἐὰν τὸ Γ μεθιστῆται ἐπὶ κύκλου περιφερείας, ἴσον ἀεὶ τὸ AB φανήσεται).

Τοῦτο δὲ φανερόν ἐστι. πᾶσαι γὰρ αἱ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου πρὸς τὸ AB συμπίπτουσαι εὐθεῖαι πρὸς ἴσας γωνίας προσπίπτουσιν, ἐπειδήπερ ἡ πρὸς τῷ B ὀρθή ἐστιν· ἴσον ἄρα τὸ ὁρώμενον φανήσεται.

PROP. XLIII. THEOR.

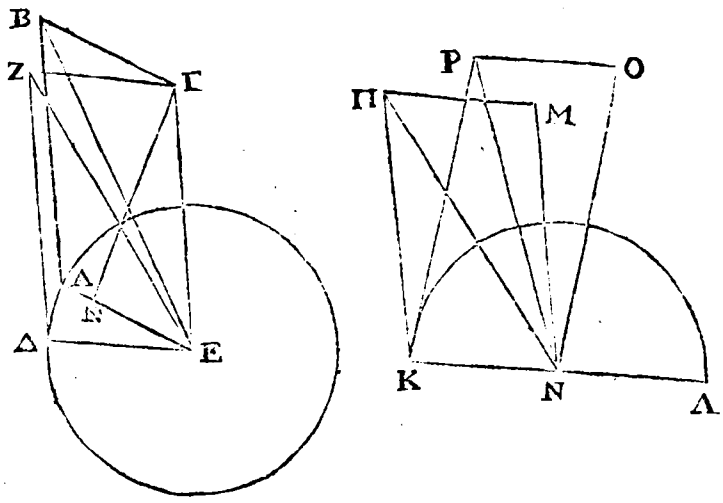
Si oculo poſito in centro circuli, magnitudo, quæ ad circuli planum recta non ſit, in circuli circumferentia vectetur; ſemper inæqualis apparebit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ'.

Ἐὰν δὲ τὸ ὁρώμενον μέγεθος μὴ πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μεθιστῆται δὲ τὸ ὁρώμενον ἐπὶ κύκλου περιφερείας ἄνισον ἀεὶ ὀφθήσεται).

SIT circulus AΔ, in cujus circumferentia ſumatur punctum Δ, à quo ſublimis erigatur recta linea ΔZ, quæ ad circuli planum ad angulos rectos non ſit; ponaturque oculus in E centro: fore dico, ut, ſi ΔZ in circuli circumferentia tranſponatur, nunc major nunc minor appareat.

ΕΣτω κύκλος ὁ AΔ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀνεστάτω μὴ πρὸς ὀρθὰς τῷ κύκλῳ εὐθεῖα ἡ ΔZ, ὄμμα δὲ ἔστω τὸ E· λέγω ὅτι ἡ ΔZ ἐὰν ἐπὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας μεθιστῆται, ποτὲ μὲν μείζων φανήσεται ποτὲ δὲ ἐλάσσων.



Ipſa ΔZ aut major eſt ſemidiametro, aut æqualis, aut minor. Sit primo major ſemidiametro; ducaturque ex E centro recta linea EΓ parallela & æqualis ipſi ΔZ; & à puncto Γ in ſubjectum planum ducatur perpendicularis ΓN, quæ plano occurrat in puncto N; connectaturque recta EN, quæ producatur & circumferentiæ occurrat in puncto A; & ex

Ἤτοι δὲ ἡ ΔZ μείζων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἢ ἴση, ἢ ἐλάσσων. Ἔστω πρότερον μείζων, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ E κέντρου τῇ ΔZ παράλληλος ἡ EΓ, καὶ ἔστω ἴση τῇ ΔZ ἡ EΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΓN, καὶ συμβαλλέτω τῷ ὑπιπέδῳ κατὰ τὸ N σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ EN καὶ ἐκβεβλήσθω καὶ συμβαλλέτω τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὸ A, καὶ

1 Sc. ſibi ſemper παραλλήλως, quod neceſſario fit cum alius nullus adeſt motus. *Savil.*

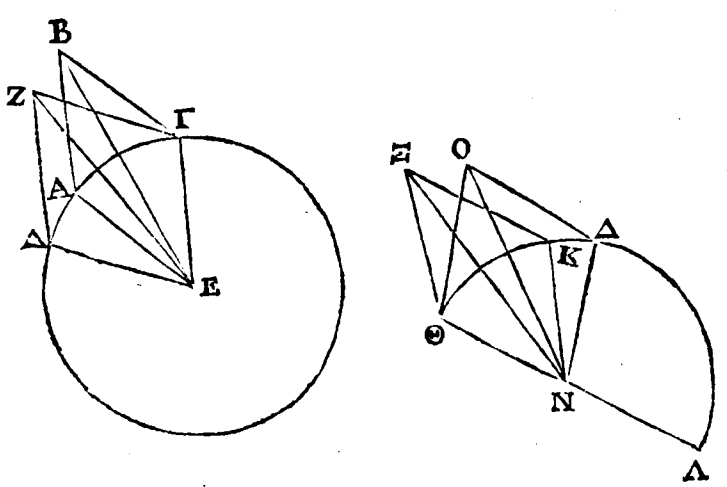
ἤχθω

ἤχθω διὰ Α τῇ ΕΓ παράλληλος ἡ ΑΒ, καὶ ἔστω ἡ ΑΒ τῇ ΔΖ ἴση· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ πασῶν τῶν ἐπὶ τὸ κύκλου περιφερείας μεταξυμπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλάσσων φαίνεται. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΓΖ, ΕΖ, ΒΓ, ΕΒ. ἔχομεν δὲ ἐν τῷ παρὰ τὸ ἑβδόμῳ καὶ τριακοστῷ θεωρήματι, ὅτι πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου ἀγομένων εὐθειῶν, καὶ ποιουσῶν πρὸς τῇ ΕΓ γωνίας, ἐλαχίστη ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΕΑ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΓΕ τῇ ΑΒ παράλληλός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ἴση· καὶ ἡ ΕΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστι· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒ. ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ δὴ καὶ τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμόν ἐστι. καὶ ἐπεὶ δεῖ δεῖξαι ὅτι ἐλάσσων φαίνεται τὸ ΑΒ τοῦ ΔΖ, δῆλον ὅτι πρότερον δεῖ δεῖξαι ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΕΑ γωνία ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΖΕΔ γωνίας. ἐπεὶ οὖν δέδεικται ὅτι πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Ε σημείου ἀγομένων εὐθειῶν καὶ ποιουσῶν πρὸς τῇ ΓΕ γωνίας, ἐλαχίστη ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΕΑ· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶ καὶ τῆς ὑπὸ ΓΕΔ ἡ ὑπὸ ΓΕΑ. ἐγγεγράφθω δὴ τῷ μὲν κύκλῳ ΑΔ ἡμικυκλίῳ ἴσον τὸ ΚΑΛ, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον τὸ Ν, καὶ κείσθω τῇ ὑπὸ ΓΕΑ ἴση γωνία ἡ ὑπὸ ΚΝΜ, τῇ δὲ ὑπὸ ΓΕΔ ἴση ἡ ὑπὸ ΚΝΟ, καὶ κείσθω τῇ ΔΖ ἑκατέρα τῶν ΜΝ, ΟΝ ἴση, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Μ τῇ ΚΝ ἴση καὶ παράλληλος ἤχθω ἡ ΜΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΠΚ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΝΠ, [1] καὶ ἔστιν ἴσον καὶ ὅμοιον τῷ ΒΕ. πάλιν ἀπὸ τοῦ Ο τῇ ΚΝ ἴση καὶ παράλληλος ἤχθω ἡ ΟΡ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΡΚ· τὸ ΡΝ ἄρα παραλληλόγραμμον ἴσον τε καὶ ὅμοιόν ἐστι τῷ ΖΕ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ διαγώνιοι αἱ ΡΝ, ΠΝ· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΚΝΠ γωνία τῆς ὑπὸ ΚΝΡ γωνίας ἐλάσσων ἐστί. [2] καὶ ἔστιν ἡ μὲν ὑπὸ ΚΝΠ ἴση τῇ ὑπὸ ΑΕΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΚΝΡ ἴση τῇ ὑπὸ ΔΕΖ· ἐλάσσων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΒ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ· ὥστε καὶ τὸ ΑΒ μέγεθος τοῦ ΔΖ μεγέθους ἔλασσον ἐφθήσεται.

[3] Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἡ ΒΑ τῆς ΖΔ ἐλάσσων [4] ἐστί, τῆς ΖΔ ἴσης τε καὶ ἐλάσσονος τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ὑπαρχούσης. Ἀλλὰ δὴ ἔστω ΔΖ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση, καὶ κατασκευάσθωσαν πάντα τὰ αὐτὰ τοῖς πρό-

A puncto ducatur AB parallela ipſi EΓ; ſit autem AB æqualis ipſi ΔZ: dico omnium rectarum linearum in circuli circumferentia circumlatarum minimam apparere ipſam AB. connectantur enim rectæ ΓZ, EZ, BΓ, EB. habemus jam oſtenſum in ſubnexis theoremati triceſimo ſeptimo, omnium linearum trajectarum per punctum E & angulos facientium cum linea EΓ, lineas ΓE, & EA minimum angulum continere, qui eſt ΓEA. cum ergo ΓE parallela ſit & æqualis ipſi AB: igitur [per 33. 1.] EA ipſi ΓB æqualis & parallela eſt; parallelogrammum ergo eſt EB; eademque ratione parallelogrammum etiam eſt ZE. quia vero demonſtrandum eſt AB minorem apparere quam ΔZ, non dubium eſt quin prius demonſtrandum ſit angulum BEA minorem eſſe angulo ZEΔ, [quod hoc modo fiet.] cum enim demonſtratum ſit [in ſubnexis ad 37. opt.] omnium linearum trajectarum per punctum E & facientium angulos cum linea ΓE, lineas ΓE, EA omnium minimum angulum continere nempe ΓEA: ergo angulus ΓEA minor eſt angulo ΓEΔ. ponatur jam KAΛ ſegmentum æquale ſemicirculo circuli AΔ, ſumaturq; ejus centrum N; & ponatur angulus KNM æqualis angulo ΓEA; angulus autem KNO angulo ΓEΔ; ſitque utraque ipſarum MN, ON æqualis ipſi ΔZ; & per punctum M ducatur recta MΠ æqualis & parallela ipſi KN, connectaturque recta ΠK: parallelogrammum ergo eſt NΠ æquale & ſimile ipſi BE parallelogrammo. rurſus, per punctum O ducatur recta OP æqualis & parallela ipſi KN, connectaturque recta PK: igitur parallelogrammum PN æquale & ſimile eſt parallelogrammo ZE. ducantur diametri PN, ΠN: ergo angulus KNΠ minor eſt angulo KNP. eſt autem angulus KNΠ æqualis angulo AEB; angulus autem KNP æqualis angulo ΔEZ: minor ergo eſt angulus AEB angulo ΔEZ: quare [per 6. poſit.] magnitudo AB apparebit minor magnitudine ΔZ.

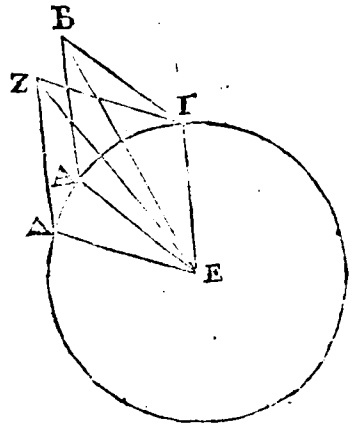
Eodem modo oſtendemus BA minorem eſſe quam ZΔ, ſi ipſa ZΔ ponatur æqualis vel minor ſemidiametro. Enimvero ſit ΔZ æqualis ſemidiametro, conſtruanturque reliqua omnia ut in

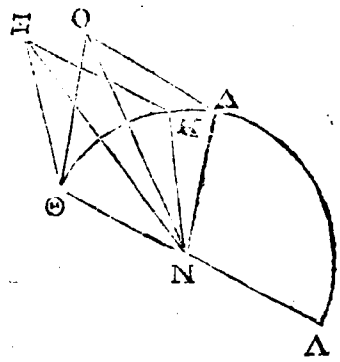


1 Habet enim δύο ἀπεναντίον KN, NM duobus AE, EΓ æqualeis, & angulum KNM æqualem angulo AEΓ. *Savil.* 2 Nam ΠK, KN æquales BA, AE, & anguli quoque comprehenſi: ergo per quartam primi. *Idem.* 3 Sed totum hoc eſt ex Scholio, aut, quod magis credo, cætera omnia ex hac demonſtratione. *Idem.* 4 Lege ἐφθήσεται. *Idem.*

præcedentibus factum eſt, ponatur item ſemicirculus Θ Δ Λ qui æqualis ſit ſemicirculo circuli Λ Δ, ſumaturque centrum ejus quod ſit N. quia ergo Δ Z æqualis poſita eſt ſemidiametro circuli; igitur Δ Z æqualis eſt ipſi Θ N. ponatur angulus Θ N K æqualis angulo Γ E A, ducaturque K Ξ parallela [& æqualis] ipſi Θ N, connectaturque recta Ξ Θ, ponatur etiam

προν, καὶ κείσθω τῷ τῆ κύκλου Λ Δ ἡμικυκλίῳ ἴσον ἡμικύκλιον τὸ Θ Δ Λ, καὶ εἰλήφθω αὐτῆ κέντρον τὸ N. καὶ ἐπεὶ ἡ Δ Z ἴση ὑπάκειται τῇ ἐκ τῆ κέντρου τῆ κύκλου, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Δ Z τῇ Θ N. καὶ κείσθω τῇ μὲν ὑπὸ τ Γ E A γωνία ἴση ἡ ὑπὸ τῶν Θ N K, καὶ ἤχθω τῇ Θ N παράλληλος ἡ K Ξ, καὶ τῇ Θ N ἀφῃρήσθω ἴση ἡ K Ξ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Ξ Θ, τῇ



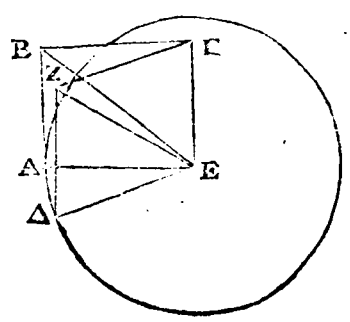


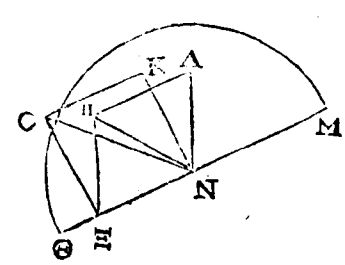
angulus Θ N Δ æqualis angulo Γ E Δ, ducatur autem Δ O [æqualis &] parallela ipſi Θ N, ducaturque recta O Θ: parallelogramma ergo ſunt Θ Δ, Θ K ſimilia æqualiaque parallelogrammis E Z, E B; quare angulus quidem Θ N Δ æqualis eſt Γ E Δ angulo; angulus autem Θ N K æqualis eſt angulo Γ E A. minor autem eſt angulus Γ E A angulo Γ E Δ: minor eſt igitur Θ N K angulus angulo Θ N Δ. connectantur parallelogrammorum diametri Ξ N, O N: minor igitur eſt Θ N Ξ angulus angulo Θ N O. æqualis autem eſt angulus quidem Θ N Ξ angulo A E B, angulus vero Θ N O angulo Δ E Z; minor igitur eſt A E B angulus angulo Δ E Z; quare magnitudo A B apparebit minor magnitudine Δ Z. quod erat demonſtrandum.

Sed enim ſit Δ Z minor ſemidiametro circuli, reliqua vero conſtruantur ut antea, ponaturque

δὲ ὑπὸ τ Γ E Δ ἴση κείσθω ἡ ὑπὸ τῶν Θ N Δ, καὶ τῇ Θ N παράλληλος ἤχθω ἡ Δ O, καὶ ἴση τῇ Θ N ἀφῃρήσθω ἡ Δ O, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ O Θ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τ Θ Δ, Θ K, καὶ ἔστιν ἴσα τε καὶ ὅμοια τοῖς E Z, E B· ὥστε καὶ ἡ μὲν ὑπὸ Θ N Δ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ Γ E Δ, ἡ δὲ ὑπὸ Θ N K γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ Γ E A. ἐλάσσων ἡ ὑπὸ Γ E A τῆ ὑπὸ Γ E Δ· ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ Θ N K τῆ Θ N Δ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ διαγώνιοι αἱ Ξ N, O N· ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ Θ N Ξ τῆς ὑπὸ Θ N O. ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ Θ N Ξ τῇ ὑπὸ A E B, ἡ δὲ ὑπὸ Θ N O τῇ ὑπὸ Δ E Z· ἐλάσσων ἄρα καὶ ὑπὸ A E B τῆ ὑπὸ Δ E Z· ἐλάσσων ἄρα φθήσεται τὸ A B μέγεθος τῆ Δ Z μεγέθους. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Αλλὰ δὴ ἔστω ἡ Δ Z ἐλάσσων τῆ ἐκ τῆ κέντρου τῆ κύκλου, καὶ κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον,





Θ M æqualis ſemicirculo circuli Λ Δ, ſumaturque circuli centrum N, & ex Θ N ſecetur N Ξ æqualis ipſi Δ Z, conſtituaturque angulus Θ N K æqualis angulo Γ E A, angulus autem Θ N Δ æqualis angulo Γ E Δ, ſitque utraque ipſarum N K, N Λ ſigillatim æqualis ipſi Δ Z, & per punctum K ducatur K O parallela & æqualis ipſi N Ξ, connectaturque O Ξ, per punctum autem Λ ducatur

καὶ κείσθω τῆ κύκλου Λ Δ ἡμικυκλίῳ ἴσον τὸ Θ M, καὶ λήφθω τὸ κέντρον τῆ κύκλου τὸ N, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆ Θ N τῇ Δ Z ἴση ἡ N Ξ, καὶ κείσθω τῇ μὲν ὑπὸ Γ E A γωνία ἴση ἡ Θ N K, τῇ δὲ ὑπὸ Γ E Δ ἴση ἡ ὑπὸ Θ N Δ, καὶ ἑκατέρα τ N K, N Λ τῇ Δ Z, καὶ ἤχθω διὰ μὲν τ K τῇ N Ξ ἴση καὶ παράλληλος ἡ K O, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ O Ξ, διὰ δὲ Λ τῇ

Ξ N

ΞΝ παραλληλος ἡ ΑΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΠΞ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τ῀ ΚΞ, ΞΑ. [1] καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΚΞ τῷ ΕΒ ἴσον τε καὶ ὅμοιον, τὸ δὲ ΞΛ τῷ ΕΖ· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΘΝΚ ἴση τῇ ὑπὸ ΓΕΑ, ἡ δὲ ὑπὸ ΘΝΛ τῇ ὑπὸ ΓΕΔ. μείζων δὲ ἡ ὑπὸ ΓΕΔ τῆς ὑπὸ ΓΕΑ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΘΝΛ τ῀ ὑπὸ ΘΝΚ. ἐπεζεύχθωσαν ΝΟ, ΝΠ· καὶ ἡ ὑπὸ ΞΝΟ ἄρα τ῀ ὑπὸ ΞΝΠ ἐλάσσων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΞΝΟ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΞΝΠ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ· ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΒ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ. καὶ βλέπεται ὑπὸ μὲν τῆς ΑΕΒ τὸ ΑΒ μέγεθος, ὑπὸ δὲ τῆς ΔΕΖ τὸ ΔΖ· ἔλασσον ἄρα ὀφθήσεται τὸ ΑΒ μέγεθος τ῀ ΔΖ μεγέθους. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

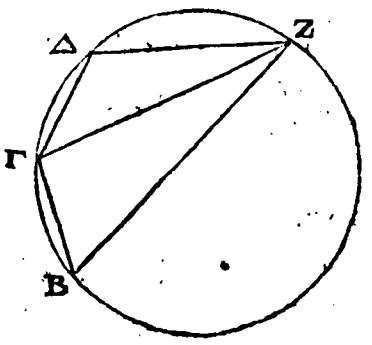
ΑΠ parallela ipſi ΞΝ, & connectatur recta ΠΞ: duo igitur parallelogramma ſunt ΚΞ, ΞΑ. quorum ΚΞ quidem æquale ac ſimile eſt ipſi ΕΒ paparallelogrammo, ipſum autem ΞΛ parallelogrammum æquale item & ſimile eſt parallelogrammo ΕΖ; quare angulus ΘΝΚ æqualis eſt angulo ΓΕΑ, angulus autem ΘΝΛ æqualis eſt angulo ΓΕΔ. major autem eſt ΓΕΔ angulo ΓΕΑ: major itaque ΘΝΛ angulus angulo ΘΝΚ. connectantur parallelogrammorum diametri ΝΟ, ΝΠ: igitur angulus ΞΝΟ minor eſt angulo ΞΝΠ. eſt autem angulus quidem ΞΝΟ æqualis angulo ΑΕΒ, angulus autem ΞΝΠ æqualis angulo ΔΕΖ: minor ergo eſt angulus ΑΕΒ angulo ΔΕΖ. cernitur autem magnitudo quidem ΑΒ ſub angulo ΑΕΒ, magnitudo vero ΔΖ ſub angulo ΔΕΖ: minor itaque apparebit magnitudo ΑΒ magnitudine ΔΖ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ'.

Ἐστί τις τόπος, ᾧ, ᾧ ὄμματος μένοντος, ᾧ δὲ ὁρωμένῳ μεθισταμένῳ, ἴσον ἀεὶ τὸ ὁρώμενον φαίνεται.

Ἔστω γὰρ ὁρώμενον μέγεθος τὸ ΒΓ, ὄμμα δὲ τὸ Ζ, ἀφ' οὗ περιπεπτώσωσαν ἀκτῖνες αἱ ΖΒ, ΖΓ, καὶ περιειλήφθω τὸ ΖΒΓ τρίγωνον κύκλῳ τῷ ΔΒΖ· λέγω ὅτι τὸ ΒΓ, μεθιστάμενον ἐπὶ τ῀ τῆς γεγραφέντος κύκλου περιφερείας, ἴσον ἀεὶ ἀφανισθήσεται.

Μετακείσθω γὰρ τὸ ΒΓ ἐπὶ τῆς ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΖ. οὐκοῦν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ περιφέρεια τῇ ΓΔ περιφερείᾳ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΓΖΒ γωνία τῇ ΓΖΔ γωνίᾳ. τὰ δὲ ὑπὸ ἴσων γωνιῶν ὁρώμενα ἴσα φαίνεται· ἴσον ἄρα φαίνεται τὸ ΒΓ τῷ ΓΔ.



PROP. XLIV. THEOR.

Eſt aliquis locus, ubi, manente oculo, res ſpectata, à loco in locum delata, æqualis ſemper apparet.

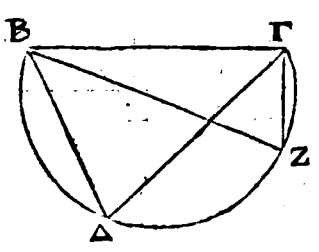
SIT ſpectata magnitudo ΒΓ, oculus autem Ζ, à quo procedant radii ΖΒ, ΖΓ, efficientes triangulum ΖΒΓ, circa quem [per 5. 4.] deſcribatur circulus ΔΒΖ: dico magnitudinem ΒΓ tranſlatam in quemlibet locum circumferentiæ circuli, ejuſdem quantitatis ſemper apparere.

Transferatur enim ΒΓ magnitudo in ΓΔ, & connectatur recta ΔΖ. æqualis igitur eſt [per 28.3.] circumferentia ΒΓ circumferentiæ ΓΔ; ideoque [per 27.3.] æqualis eſt angulus ΓΖΒ angulo ΓΖΔ. quæ autem ſub æqualibus angulis cernuntur [per 7. poſit.] æqualia apparent: æqualis ergo apparet ΒΓ ipſi ΓΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ με'.

Ἐστί τις τόπος, ᾧ, ᾧ ὄμματος μεθισταμένῳ, ᾧ δὲ ὁρωμένῳ μένοντος, ἀεὶ ἴσον τὸ ὁρώμενον φαίνεται.

Ἔστω γὰρ ὁρώμενον μὲν τὸ ΒΓ, ὄμμα δὲ τὸ Ζ, ἀφ' οὗ περιπεπτώσωσαν ἀκτῖνες αἱ ΖΒ, ΖΓ, καὶ περιειλήφθω τὸ ΒΖΓ τρίγωνον τμήματι κύκλου τῷ ΒΔΖΓ, καὶ μετακείσθω τὸ Ζ ὄμμα ἐπὶ τὸ Δ, καὶ μεταπιπτέτωσαν ἀκτῖνες αἱ ΔΒ, ΔΓ· οὐκοῦν ἴση ἡ ΒΔΓ γωνία τῇ ΒΖΓ, ἐν τῷ αὐτῷ γὰρ τμήματί εἰσι. τὰ δὲ ὑπὸ ἴσων γωνιῶν ὁρώμενα ἴσα φαίνεται· ἴσον ἄρα τὸ ΒΓ μένον πάντως φαίνεται, μεθισταμένῳ τῷ ὄμματος ἐπὶ τ῀ ΒΔΓ περιφερείας.



PROP. XLV. THEOR.

Eſt aliquis locus, ubi, aſpectabili manente, oculo vero tranſlato, aſpectabile ſemper æquale apparet.

SIT enim ſpectata magnitudo ΒΓ, oculus autem Ζ, à quo procedant radii ΖΒ, ΖΓ; & circa triangulum ΒΖΓ deſcribatur [per 5.4.] circuli ſegmentum ΒΔΖΓ, transferaturque oculus à puncto Ζ in punctum Δ, ex quo ducantur radii ΔΒ, ΔΓ: æqualis igitur eſt [per 21.3.] angulus ΒΔΓ angulo ΒΖΓ, cum ſint in eodem ſegmento circuli. quæ autem ſub æqualibus angulis conſpiciuntur [per 7. poſit.] æqualia apparent: quare magnitudo ΒΓ ejuſdem quantitatis perpetuo apparebit, oculo per ΒΔΓ circumferentiam vectato.

[1] Quomodo erunt parallelogramma ΚΞ, ΛΞ τῇς ΒΕ, ΖΕ ἴσα & ὅμοια; cum tamen ΞΝ minor ſit facta quam ΑΕ & ΝΚ æqualis τῇ ΔΖ vel ΒΑ. *Savil.*

PROP.

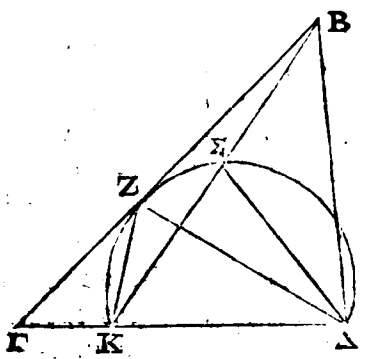
PROP. XLVI. THEOR.

Eſt aliquis locus, ad quem ſi oculus tranſferatur, rem aſpectabilem immotam, nunc majorem, nunc minorem exiſtimabit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μϛ'.

Ἐστι τὶς τόπος, ἐφ' ὃν ὄμματος μεθισταμένου, ἡ δὲ ὁρωμένη μένοντος, ἄνισον τὸ ὁρώμενον φανεῖται.

SIT ſpectata magnitudo ΚΔ, recta vero linea ΒΓ, quæ concurrat cum recta ΚΔ producta ad punctum Γ, & [per 13. 6.] ſumatur inter ipſas ΔΓ, ΓΚ media proportionalis ΓΖ, & connectantur rectæ ΖΚ, ΖΔ; deinde [per 33. 3.] circa datam rectam lineam ΚΔ deſcribatur ſegmentum circuli, quod capiat angulum ΚΖΔ: igitur [per 37. 3. & 16. 6.] recta ΒΖΓ tanget ſegmenti circumferentiam, cum ΔΓ ſe habeat ad ΓΖ ut ΓΖ ad ΓΚ. ponatur ergo oculus in puncto Β, à quo ducantur radii ΒΔ, ΒΚ, & connectatur recta ΣΔ: æqualis igitur eſt [per 21. 3.] angulus ΚΖΔ angulo ΚΣΔ; ſunt enim in eodem ſegmento. eſt autem [per 16. 1.] angulus ΚΣΔ major angulo ΚΒΔ: quare angulus etiam ΚΖΔ angulo ΚΒΔ major eſt: oculo igitur ſpectanti è puncto Ζ [per 5. poſit.] major apparebit magnitudo ΚΔ quam ex puncto Β.



Ἔστω γὰρ ὁρώμενον τὸ ΚΔ, εὐθεῖα δὲ ἡ ΒΓ συμπίπτουσα τῇ ΚΔ ἐκβαλλομένῃ. καὶ εἰλήφθω τῶν ΔΓ καὶ ΓΚ μέση ἀνάλογον ἡ ΓΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΚ καὶ ΖΔ, περὶ δὲ τὴν ΚΔ τμῆμα γεγράφθω δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ ΚΖΔ γωνίᾳ· ἐφάψεται δὴ τῆς ΒΓ εὐθείας, ἐπείπερ ἐστὶν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΖ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΓΚ. κείσθω ἐν τῷ ὄμματι ἐπὶ τοῦ Β σημείου, καὶ ἐκβεβλήθωσαν αἱ ΒΔ, ΒΚ, ἐπεζεύχθω δὲ ἡ ΣΔ· ὁμοίως δὴ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΖΔ γωνία τῇ ΚΣΔ γωνίᾳ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματί εἰσι. καὶ ἔστιν ἡ ΚΣΔ τῆς ΚΒΔ γωνίας μείζων· καὶ ἡ ΚΖΔ ἄρα γωνία τῆς ΚΒΔ μείζων ἐστί· τὸ ἄρα ὄμμα τοῦ Ζ ὄντος, μεῖζον φανεῖται τὸ ΚΔ ἢ ὅταν ἐπὶ τοῦ Β.

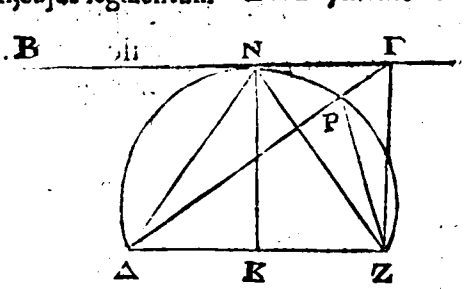
PROP. XLVII. THEOR.

Idem accidet ſi linea, per quam tranſit oculus, parallela ſit ſpectatæ magnitudini.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ'.

Τὸ δὲ αὐτὸ συμβήσεται, κἂν παράλληλος ᾖ γραμμὴ τῷ ὁρωμένῳ μεγέθει, ἐφ' ἣν τὸ ὄμμα μεθίσταται.

SIT enim ΒΓ linea parallela ſpectatæ magnitudini ΔΖ, ſecetur autem bifariam ipſa ΔΖ in puncto Κ, à quo excitetur ΚΝ, ponatur autem oculus ad Ν, & connectantur rectæ ΝΔ, ΝΖ, circa autem rectam ΔΖ [per 33. 3.] deſcribatur ſegmentum circuli, capiens angulum ΔΝΖ, quia ergo linea ΚΝ eſt diameter ejus circuli, cujus ſegmentum eſt ΔΝΖ, ab extremitate vero ipſius ΚΝ, nempe à puncto Ν, ducta eſt recta ΒΓ ad angulos rectos ipſi ΚΝ; igitur [per 16. 3.] ipſa ΒΓ tangit circumferentiam ipſius ſegmenti ΔΝΖ. transferatur vero oculus in punctum Γ, à quo procedant radii ΓΖ, ΓΔ, & connectatur recta ΡΖ. æqualis igitur eſt [per 21. 3.] angulus ΔΝΖ angulo ΔΡΖ. angulus autem ΔΡΖ [per 16. 1.] major eſt angulo ΔΓΖ: major igitur eſt angulus ΔΝΖ angulo ΔΓΖ. quæ autem ſub majore angulo ſpectantur [per 5. poſit.] majora apparent: major igitur apparebit ipſa ΔΖ magnitudo, oculo collocato in puncto Ν, quam in puncto Γ. oculo



Ἔστω γὰρ παράλληλος ἡ ΒΓ τῷ ὁρωμένῳ τῷ ΔΖ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ ΔΖ κατὰ τὸ Κ, καὶ πρὸς ὀρθὰς δὲ ἀνήχθω ἡ ΚΝ, κείσθω δὴ τὸ ὄμμα ἐπὶ τοῦ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΔ, ΝΖ, περὶ δὲ τὴν ΔΖ τμῆμα γεγράφθω, ὃ δέξεται τὴν ΔΝΖ γωνίαν. ἐπεὶ οὖν διάμετρός ἐστιν ἡ ΚΝ [1], καὶ πρὸς ὀρθὰς ἀπὸ ἄκρας τῆς ΚΝ [2] ἡ ΚΝ [3] τῇ ΒΓ· ἡ ΒΓ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΔΝΖ τμήματος. μετακείσθω δὴ τὸ ὄμμα ἐπὶ τοῦ Γ, καὶ [4] ἐκβεβλήθωσαν αἱ ΓΖ, ΓΔ, ἐπεζεύχθω δὲ ἡ ΡΖ. ὁμοίως δὴ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΝΖ γωνία τῇ ΔΡΖ γωνίᾳ. ἡ δὲ ΔΡΖ τῆς ΔΓΖ γωνίας μείζων ἐστί· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΔΝΖ τῆς ΔΓΖ. τὰ δὲ ὑπὸ μείζονος γωνίας ὁρώμενα μείζονα φαίνεται· μεῖζον ἄρα φανεῖται τὸ ΔΖ, τοῦ ὄμματος ἐπὶ τοῦ Ν κειμένου, ἢπερ ἐπὶ τοῦ Γ. τοῦ

1 Et quid ita ἐξεῖαι? arqui nec ΚΖΔ eſt neceſſario ἐξεῖα, neque anguli quantitas ad conficiendum problema quicquam conducit, & abeſt in ſequente. *Savil.* 2 Quia ſc. τὴν ΔΖ δίχα ἐστὶ πρὸς ὀρθὰς τετμ. *Idem.* 3 Malim τῇ ΚΝ ἡ ΒΓ. *Idem.* 4 Hoc verbum in hac quidem re ſuſpectum; & tamen ſic utitur in præcedente, τῷ προσεκβεβλήθωσαν, niſi forte radiorum ἐκβολὴν intelligat. *Idem.*

ἄρα

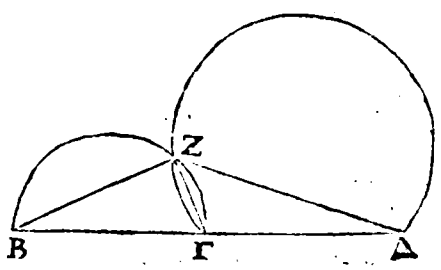
ἄρα ὄμματος ἐπὶ τῆς ΒΓ μεθισαμένου, ὡς ἀλλήλαις ἴσης τῇ ΔΖ, ἄνισον φαίνεται τὸ ὁρώμενον.

igitur, discurrenti per ΒΓ, parallelam ΔΖ, ipsa ΔΖ nunc major nunc minor apparebit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μη'.

Ἐστί τις τόπος κοινὸς, ἐν ᾧ τὰ ἴσα μεγέθη ἄνισα φαίνεται.

Ἔστω γὰρ ἴση ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ, καὶ περὶ μὲν τὴν ΒΓ ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ ΒΖΓ, περὶ δὲ τὴν ΓΔ τμῆμα μεῖζον [1] ἡμικυκλίου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ· ἐκὰν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ἐν τῷ μείζονι τμήματι. τὰ δὲ ὑπὸ μείζονος γωνίας ὁρώμενα, μείζονα φαίνεται· τῷ ἄρα ὄμματι τεθειμένῳ ἐπὶ τοῦ Ζ μείζων ἂν φαίνοιτο ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ. ἴσῳ δὲ καὶ ἴση.



Ἔστιν ἄρα τόπος κοινὸς, ἐν ᾧ τὰ ἴσα μεγέθη ἄνισα φαίνεται.

PROP. XLVIII. THEOR.

Est aliquis locus communis, unde æquales magnitudines inæquales apparent.

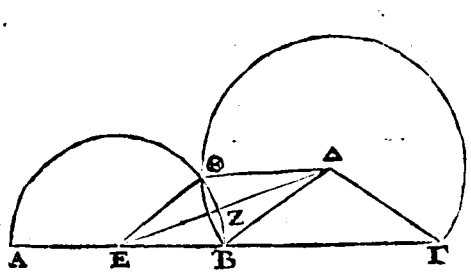
SIT enim ΒΓ magnitudo æqualis ipsi ΓΔ, & circa ipsam ΒΓ describatur semicirculus ΒΖΓ, circa autem ipsam ΓΔ describatur segmentum ΓΖΔ quod sit majus semicirculo, connectanturque rectæ ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ; ergo [per 31.3.] angulus ΓΖΒ in semicirculo positus major est angulo ΓΖΔ qui est in majori segmento. quæ autem sub majori angulo spectantur [per 5. posit.] majora apparent: quare oculo collocato in puncto Ζ, major apparet ΒΓ quam ΓΔ. atqui positæ sunt æquales.

Est ergo aliquis locus communis, unde spectatæ æquales magnitudines inæquales apparent.

[2] ΣΧΟΛΙΟΝ.

Ὅτι δὲ δύναται τμηθῆναι τὸ ἡμικύκλιον ὑπὸ τοῦ μείζονος τμήματος καὶ ποῦ, ὅτως ἔσται δῆλον.

Ἐκκείσθω ἴσαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, περιγεγράφθω ἡμικύκλιον περὶ τὰ Α, Β, ΑΘΒ. καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΓ, καὶ τῷ Β σημείῳ, γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΓΒΔ, πρὸς δὲ τῷ Γ ἴση ἡ ΒΓΔ, καὶ συνεκπιπτέτω κατὰ τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ κέντρον τοῦ ΑΘΒ, ὃ ἔστι τὸ Ε, ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ κείσθω τῇ ΒΖ πρὸς φερὴς ἴση ἡ ΖΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ΔΘ, ΘΕ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΘΕ τῇ ΕΒ ἴση, κοινὴ δὲ ἡ ΕΔ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν. ἐπεὶ δὲ ἡ ΘΖ πρὸς φερὴς τῇ ΖΒ ἐστιν ἴση· ἴση ἄρα ἡ ΘΔ τῇ ΔΒ. ἡ δὲ ΔΒ τῇ ΔΓ· ὥστε ὁ κέντρῳ Δ διαστήματι δὲ τῷ ΔΘ γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν Β καὶ Γ ἐλεύσεται.



SCHOLIUM.

Quod vero semicirculus secet segmentum semicirculo majus, & ubinam illud secet, sic patebit.

Sint rectæ ΑΒ, ΒΓ æquales sibi invicem, circumscribatur semicirculus circa Α, Β puncta, sc. ipse ΑΘΒ; & constituatur ad rectam ΒΓ, punctumque in ipsa Β, angulus acutus ΓΒΔ, & huic ad Δ æqualis angulus ΒΓΔ, & concurrant in Δ puncto, & à puncto Δ ad centrum circuli ΑΘΒ, sc. punctum Ε, jungatur ΔΕ, & arcui ΒΖ ponatur æqualis arcus ΖΘ, & jungantur ΔΘ, ΘΕ. quoniam igitur recta ΘΕ æqualis est ipsi ΕΒ, recta vero ΕΔ communis, & [per 27.3.] æquales continent angulos, quia arcus ΘΖ arcui ΖΒ est æqualis: ergo [per 4. 1.] ΘΔ æqualis est ΔΒ. sed [per 6.1.] ΔΒ æqualis ΔΓ. & ideo circulus centro Δ distantia ΔΘ descriptus intersecat semicirculum, & per puncta Β & Γ transit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μθ'.

Ἐστί τις τόπος κοινὸς, ἀφ' οὗ ἄνισα μεγέθη ἴσα φαίνεται.

Ἔστω γὰρ μείζων ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ, καὶ περὶ μὲν τὴν ΒΓ μεῖζον ἡμικυκλίου [3] τμῆμα γεγράφθω, περὶ δὲ τὴν ΓΔ ὅμοιον τῷ περὶ τὴν ΒΖΓ,

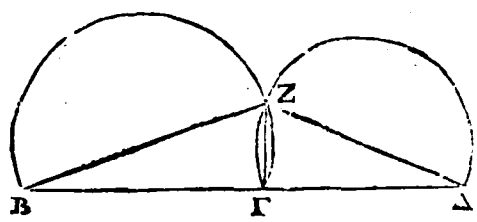
PROP. XLIX. THEOR.

Est aliquis locus communis, unde inæquales magnitudines æquales apparent.

SIT enim ΒΓ major quam ΓΔ, & circa ΒΓ describatur circuli segmentum quod sit majus semicirculo, & circa ΓΔ describatur [per 33.3.] circuli segmentum simile ipsi ΒΖΓ,

1 Nam si τμῆμα sit minus ἡμικυκλίου, nunquam se intersecabunt τὸ τμήματα, & sic in sequentibus. *Savil.* 2 Reperitur in MS. *Savilliano.* 3 Ut sc. fiat intersectio. *Savil.*

id eſt, quod angulum comprehendat, æqualem angulo BZΓ; connectantur autem rectæ ZB, ZΓ, ZΔ. cum igitur [per 11. def. 3.] anguli, qui ſunt in ſimilibus ſegmentis, ſint inter ſe æquales: æquales ergo ſunt inter ſe anguli in ſimilibus ſegmentis BZΓ, ΓZΔ deſcripti. quæ autem ſub æqualibus angulis cernuntur [per 7. poſit.] æqualia apparent: quare, oculo collocato in puncto Z, æqualis apparet magnitudo BΓ ipſi ΓΔ; eſt autem major.



Igitur locus aliquis communis, unde ſpectatæ inæquales magnitudines æquales apparent.

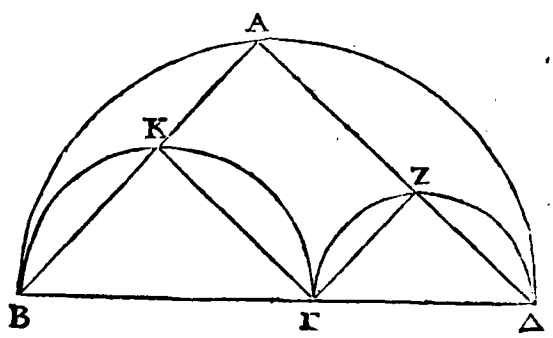
τοῦτ' ἔστι δίχρημον γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ τῶν BZΓ, ἐπεζεύχθωσαν δὲ αἱ ZB, ZΓ, ZΔ. ὀκτὼν ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ὑπὸ τῶν ὁμοίων τμήμασι γωνίαι ἀλλήλαις, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ τῶν BZΓ, ΓZΔ τμήμασι γωνίαι ἀλλήλαις. τὰ δὲ ὑπὸ τῶν ἴσων γωνιῶν ὁρώμενα ἴσα φαίνεται· τῷ ἄρα ὄμματι τεθὲν ἐπὶ τοῦ Z σημείου, ἴση ἂν φαίνοιτο ἡ BΓ τῇ ΓΔ· ἔστι δὲ μείζων.

Ἔστι τις ἄρα τόπος κοινὸς, ἀφ' οὗ τὰ ἄνισα μεγέθη ἴσα φαίνεται.

Prop. L. Theor.

Sunt quædam loca, è quibus ſpectata una magnitudo, ex duabus inæqualibus inter ſe additis compoſita, utrique inæqualium æqualis apparet.

SInt duæ magnitudines inæquales, major quidem BΓ, minor vero ΓΔ; & circa BΓ, ΓΔ deſcribantur ſemicirculi & etiam circa totam BΔ. angulus igitur qui eſt in BAΔ ſemicirculo æqualis eſt angulo qui eſt in BKΓ; uterque enim [per 31. 3.] rectus eſt: æqualis ergo apparet BΓ ipſi BΔ. ſimiliter & BΔ ipſi ΓΔ æqualis apparet, oculis poſitis in ſemicirculis BAΔ, BKΓ, ΓZΔ.



Sunt ergo loca quædam, unde ſpectata una magnitudo, è duabus inæqualibus inter ſe additis compoſita, utrique inæqualium apparet æqualis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ν'.

Εἰσί τινες τόποι, ἐφ' οἷς τὰ ἄνισα μεγέθη δύο, εἰς ταὐτὸ συντιθέντα, ἴσα ἑκατέρῳ τῶν ἀνίσων φαίνεται.

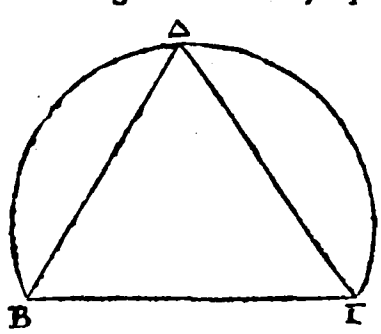
Ἔστω γὰρ μείζων ἡ BΓ τῆς ΓΔ, καὶ περὶ τὰς BΓ, ΓΔ ἡμικύκλια γεγράφθω, καὶ [1] περὶ ὅλην τὴν BΔ. ὀκτὼν ἴση ἡ ὑπὸ τῶν BAΔ ἡμικυκλίου γωνία τῇ ὑπὸ τῶν BKΓ, ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἑκατέρα αὐτῶν· ἴση ἄρα φαίνεται ἡ BΓ τῇ BΔ. ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ BΔ τῇ ΓΔ, τῶν ὀμμάτων ὄντων ἐπὶ τῶν BAΔ, BKΓ, ΓZΔ ἡμικυκλίων κειμένων.

Εἰσί τινες ἄρα τόποι, ἐν οἷς τὰ ἄνισα μεγέθη δύο, εἰς ταὐτὸ συντιθέντα, ἴσα ἑκατέρῳ τῶν ἀνίσων φαίνεται.

Prop. LI. Probl.

Invenire loca, ex quibus eadem magnitudo appareat dimidio aut quarta parte minor, & omnino in data ratione ſecundum quam ſecatur angulus.

SIT enim recta linea AZ, & circa AZ deſcribatur pro arbitrio ſegmentum circuli, in quo

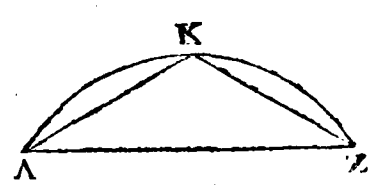


inſcribatur angulus K; ipſi autem AZ æqualis ſit BΓ, & circa BΓ [per 33. 3.] deſcribatur

ΠΡΟΤΑΣΙΣ να'.

Εὑρεῖν τόπους, ἀφ' ὧν τὸ ἴσον μέγεθος ἥμισυ φαίνεται, ἢ τέταρτον μέρος, ἢ καθόλου ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ, ἐν ᾧ ἡ γωνία τέμνεται.

Ἔστω γὰρ εὐθεῖα ἡ AZ, καὶ περὶ τὴν AZ γεγράφθω τμῆμα κύκλου τυχόν, καὶ ἐγ-



γεγράφθω εἰς αὐτὸ γωνία ἡ K, τῇ δὲ AZ ἴση ἔστω ἡ BΓ, καὶ περὶ τὴν BΓ πεγεγράφθω

τμῆμα

1 Supponit enim hujus Theor. demonſtratio τὴν ἄνισον μείζονι in directum eſſe. *Savil.*

ημμα, ὁ δέξεται τὴν τῆς Κ γωνίας ἡμισείαν. ἔσται ἡ Κ γωνία διπλασία ἄρα φανεται ἡ ΛΖ τῆς ΒΓ, τῶν ὀμμάτων ὄντι τῶν ΛΚΖ, ΒΔΓ περιφερειῶν κεντρων.

ETiam circuli segmentum capiens angulum dimidio minorem quam sit angulus Κ. angulus ergo Κ duplus est anguli Δ; quare ΛΖ magnitudo duplo major videtur magnitudine ΒΓ, cum oculi collocantur in ΛΚΖ & ΒΔΓ circumferentiis.

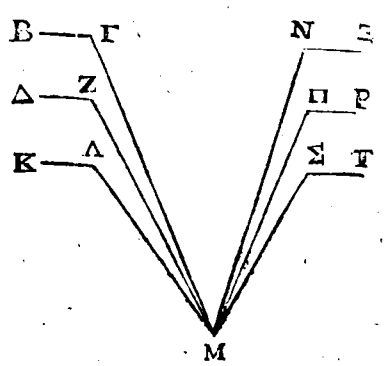
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ν'.

Τῶν ἴσῳ ταχει φερομένων καὶ ὑπὸ τῆς αὐτῆς εὐθείας ὄντων, [1] πλησιον μὲν τὸ ὄμμα τὸ [2] τελευταῖον φερηνεῖσθαι δόξει· [3] παραλλαξάντων δὲ, [4] τὸ μὲν προηγούμενον ἐπακολουθήξειν, τὸ δὲ ἐπακολουθῆν προηγήσθαι δόξει.

PROP. LII. THEOR.

Æquali celeritate delatorum & in eadem recta linea positorum prope oculum, ultimum reliqua omnia præcedere videbitur: facto autem transitu in contrarias partes, quod antea præcedebat, subsequi existimabitur; quod autem subsequebatur, præcedere videbitur.

Φερέσθω γὰρ ἰσοταχῶς τὰ ΒΓ, ΔΖ, ΚΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Μ ὄμματος φερεσθωσαν ἀκτῖνες αἱ ΜΓ, ΜΖ, ΜΛ· δοκεῖ μεταφορατη ἐστι καὶ δεξιωτερα τῶν ἀπὸ τοῦ ὄμματος ἀκτίνων φερεσθωσῶν ἡ ΜΓ· τὸ ἄρα ΒΓ δόξει φερηνεῖσθαι. ἐναλλαξάντων δὲ τῶν ΒΓ, ΔΖ, ΚΛ, καὶ ἐπὶ τῶν ΝΞ, ΠΡ, ΣΤ γενομένων, φερεσθωσαν ἀκτῖνες αἱ ΜΝ, ΜΠ, ΜΣ. δοκεῖ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ ὄμματος ἀκτίνων φερεσθωσῶν, δεξιωτερα ἐστὶν ἡ ΜΣ, ἀριστερα δὲ μᾶλλον ἡ ΜΝ· ὥστε καὶ τὸ μὲν ΣΤ φερηνεῖσθαι δόξει, ἐπακολουθεῖν δὲ τὸ ΝΞ. τὸ μὲν ἄρα ΒΓ φερηνεγμένον ἐπὶ τοῦ ΝΞ γενόμενον δόξει ἐπακολουθεῖν, τὸ δὲ ΛΚ ἐπακολουθοῦν ὑπὸ ΣΤ γενόμενον δόξει φερηνεῖσθαι.



ETenim eadem celeritate ΒΓ, ΔΖ, ΚΛ, & ex Μ oculo procedant radii ΜΓ, ΜΖ, ΜΛ: radius igitur ΜΓ est dexterrimus & sublimissimus radiorum ab oculo procedentium; quare ΒΓ videbitur præcedere. migratione vero facta in contrarias partes, si nempe ΒΓ, ΔΖ, ΚΛ mutentur ad partes ΝΞ, ΠΡ, ΣΤ, procedant radii ΜΝ, ΜΠ, ΜΣ. omnibus ergo radiis reliquis ab oculo emissis dexterior est ΜΣ, sinisterior autem est ipse ΜΝ: igitur ipsa magnitudo ΣΤ reliquas præcedere videbitur, ipsa vero ΝΞ subsequi. quare ΒΓ magnitudo, quæ antea præcedebat, postquam translata fuerit in ΝΞ, subsequi videbitur; magnitudo autem ΛΚ, quæ antea subsequi videbatur, præcedere existimabitur, cum translata fuerit in ΣΤ.

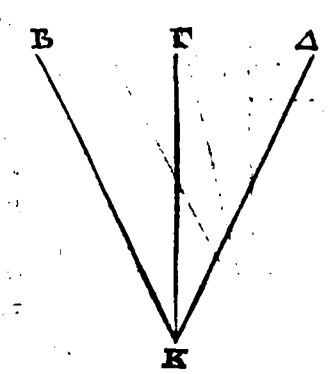
ΠΡΟΤΑΣΙΣ νγ'.

Ἐὰν, τινῶν φερομένων πλειόνων ἀνίσῳ τάχει, συμπαραφέρηται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ καὶ τὸ ὄμμα· τὰ μὲν τῷ ὄμματι ἰσοταχῶς φερόμενα ἐσάναι δόξει· τὰ δὲ βραδύτερον, εἰς τἀναντίον φέρεσθαι· τὰ δὲ θᾶττον, εἰς τὰ προηγούμενα.

PROP. LIII. THEOR.

Inæquali celeritate delatorum eo versum quo fertur oculus, ea quidem, quæ æque velociter feruntur atque oculus, quiescere videntur: quæ vero tardius, in contrariam partem moveri: quæ autem celerius, in præcedentia ferri apparent.

Φερέσθω γὰρ ἀνίσῳ τάχει τὰ Β, Γ, Δ, καὶ βραδύτερον μὲν φερέσθω τὸ Β, τὸ δὲ Γ ἰσοταχῶς τῷ Κ ὄμματι, τὸ δὲ Δ θᾶττον τοῦ Γ, ἀπὸ δὲ τοῦ Κ ὄμματος φερεσθωσαν ἀκτῖνες αἱ ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ. δοκεῖ τὸ ὄμμα συμπαραφερόμενον τοῖς Β, Γ, Δ, τὸ μὲν Γ τῷ Κ ὄμματι ἰσοταχῶς φερό-



MAgnitudines enim Β, Γ, Δ moveantur velocitate inæquali, & Β quidem tardissime feratur, Γ autem æque celeriter atque Κ oculus, ac Δ denique celerius feratur quam Γ; ab ipso autem Κ oculo procedant radii ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ. si ergo oculus ad eas dem partes feratur ad quas tendunt Β, Γ, Δ magnitudines, ipsa quidem Γ magnitudo, quæ æque celeriter fertur atque oculus Κ,

1 Quid hoc? intelligit proculdubio ea quæ in transversum ad oculos moventur, ut à dextra in sinistram aut è contra. *Savil.* 2 Ne hoc quidem quid sit intelligo, nisi τῷ φερομένῳ voluit intelligi. *Idem.* 3 Cum nempe mutaverint situm à sinistra in dextram, aut è contrario, *i.e.* præterierint perpendicularem ab oculo in rectas ductam, quas magnitudines motu suo describunt. *Idem.* 4 Magis congruunt φερηνεγμένον & ἐπακολουθοῦν, aut certe φερηνεῖσθαι δόξειν. *Idem.*

ſtare & quieſcere putabitur; B autem relinqui & retro ferri exiſtimabitur: denique Δ, cum velocius moveatur quam Γ, in præcedentia ferri videbitur; removebitur enim magis ac magis ab ipſa Γ magnitudine.

μὴν ἠρεμεῖν δόξει, τὸ δὲ Β ὑπολειπόμενον εἰς τἀναντίον δόξει φέρεσθαι, τὸ δὲ Δ, ἐπεὶ θᾶττον τοῦ Γ φέρεται, δόξει εἰς τὰ ἔμπροσθεν φέρεσθαι, πλείων γὰρ ἀεὶ τοῦ Γ διαστήσεται.

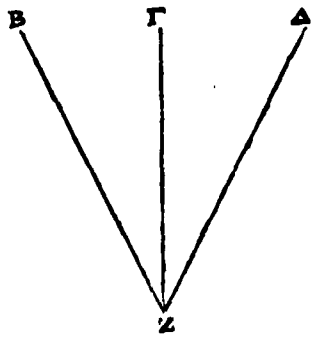
PROP. LIV. THEOR.

Si magnitudines aliquæ ad eandem partem ferantur, una vero quieſcat; ea quæ quieſcit, in contrariam partem moveri videbitur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νδ'.

Ἐὰν τινῶν φερομένων [1]διαφέρηταί τι μὴ φερόμενον, δόξει τὸ μὴ φερόμενον εἰς τἀναντίον φέρεσθαι.

FErantur enim B, Δ magnitudines, Γ vero magnitudo immota maneat, & ab oculo Z procedant radii ZB, ZΓ, ZΔ. ſi ergo B,Δ magnitudines ferantur (exempli gratia) dextrorſum, B quidem propius accedet ad Γ; at vero Δ longius inde diſtabit: quare Γ in contrarias partes ferri videbitur.



Φερέσθω γὰρ τὰ Β, Δ, μενέτω δὲ τὸ Γ, καὶ ἐστω τοῦ Ζ ὄμματος ἀφωρισμένοι ἀκτῖνες αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ. σαφὲς οὖν τὸ μὲν Β φερόμενον ἔγγιον ἔσεσθαι τοῦ Γ, τὸ δὲ Δ ἀποχωροῦν πορρώτερον· ὥστε δόξει τὸ Γ εἰς τἀναντία φέρεσθαι.

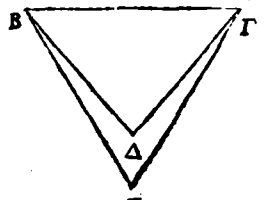
PROP. LV. THEOR.

Oculo ad rem viſam accedenti res viſa augeri videtur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νε'.

Τοῦ ὄμματος ἔγγιον τοῦ ὁρωμένου γινομένου, [2]δόξει τὸ ὁρώμενον μεῖζον φαίνεσθαι.

OCulo enim in Z poſito, cernatur magnitudo BΓ per radios ZB, ZΓ, & accedat oculus propius ad magnitudinem BΓ, colloceturque in Δ, cernatque magnitudinem BΓ per radios ΔB, ΔΓ: ergo [per 21. I.] major eſt angulus Δ angulo Z. quæ autem ſub majori angulo cernuntur [per 5 poſit.] majora apparent: oculo igitur in Δ collocato auctior apparebit magnitudo BΓ, quam ſi collocetur in Z.



Ὁράσθω γὰρ τὸ ΒΓ τοῦ ὄμματος μὲν τοῦ Ζ κειμένου ἔγγιον τῶν ΖΒ, ΖΓ ἀκτίνων, ᾗ μετακείσθω τὸ ὄμμα ἔγγιον τοῦ ΒΓ, καὶ ἔστω ἐπὶ τοῦ Δ, καὶ ὁράσθω τὸ αὐτὸ ἔγγιον τῶν ΔΒ, ΔΓ ἀκτίνων· σαφὲς οὖν μείζων ἡ Δ γωνία τῆς Ζ γωνίας. τὰ δὲ ἔγγιον μείζονα γωνίας ὁρώμενα, μείζονα φαίνεται· δόξει ἄρα ἠυξῆσθαι τὸ ΒΓ τοῦ ὄμματος ἐπὶ τοῦ Δ ὄντος, ἤπερ ἐπὶ τοῦ Ζ.

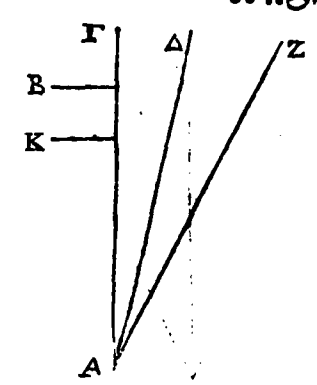
PROP. LVI. THEOR.

Æquali celeritate delatorum, quæ longius diſtant tardius ferri videntur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νϛ'.

Τῶν ἴσῳ τάχει φερομένων, τὰ πόρρω δοκεῖ βραδύτερον φέρεσθαι.

FErantur enim eadem celeritate B, K magnitudines ad partes Z, ducanturque ab A oculo radii AΓ, AΔ, AZ. igitur radii ab A oculo ad K magnitudinem tendentes, minores ſunt, quam illi qui tendunt ad B magnitudinem: quare K minus intervallum percurret, videbiturque citius ferri, quia citius perveniet ad radium AZ.



Φερέσθω γὰρ ἰσοταχῶς τὰ Β, Κ ἐπὶ τὰ Ζ μέρη, καὶ ἐστω τοῦ Α ὄμματος ἀκτῖνες ἠγμέναι αἱ ΑΓ, [3]ΑΔ, ΑΖ. σαφὲς οὖν τὸ Κ ἐλάσσονας ἔχει τὰς ἐπὶ τοῦ ὄμματος ἀκτῖνας ἠγμένας, ἤπερ τὸ Β· ἔλαττον ἄρα διάστημα διελεύσεται, καὶ ταχύτερον φανεῖται τὸ ΑΖ ὕψος, δόξει ταχύτερον φέρεσθαι.

ALITER.

Duo puncta A, B æquali celeritate ferantur

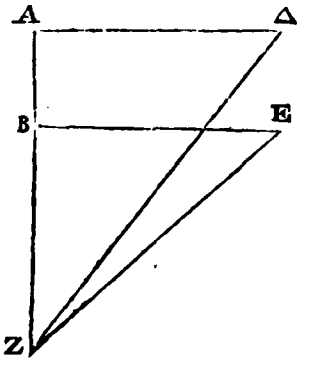
ΑΛΛΩΣ.

Φερέσθω δύο σημεῖα τὰ Α, Β ἐπὶ εὐθείας

1 Τί δὲ τοῦτο; interpres ſic: ad eandem partem ferantur, una vero quieſcat. *Savil.* 2 Nempe, ſi radii ab oculo ἰσοταχῶς accididerint. *Idem.* 3 Quorſum duceretur? *Idem.*

λαν

λων εὐθειῶν τῶν Α Δ, Β Ε ὁμαλῶς καὶ ἴσως· καὶ ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ [1] διελεύσεται. ἔστωσαν δὴ ἴσαι αἱ Α Δ, Β Ε, καὶ προσπιπτέτωσαν ἀκτῖνες ἀπὸ τοῦ Ζ ὄμματος αἱ Ζ Α, Ζ Δ, Ζ Ε. ἐπεὶ δὲ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ Β Ζ Δ γωνία τῆς ὑπὸ Β Ζ Ε· ἐλάττων ἄρα τὸ Α Δ διάστημα τοῦ Β Ε φανήσεται· ὥστε δόξει τὸ Α βραδύτερον φέρεσθαι τοῦ Β.



per rectas parallelas Α Δ, Β Ε: æquali ergo tempore pertransibunt. ſint itaque æquales Α Δ, Β Ε, & ex Ζ oculo procedant radii Ζ Α, Ζ Δ, Ζ Ε. quia vero angulus Β Ζ Δ minor eſt angulo Β Ζ Ε: minus ergo [per 6. poſit.] apparebit intervallum Α Δ intervallo Β Ε; quare Α tardius ferri videbitur quam Β.

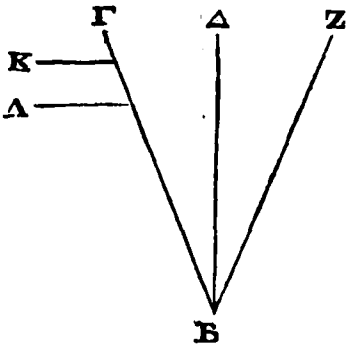
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Τῷ ὄμματος ἀφαιρουμένῳ, τὰ πόρρω τῶν ὁρωμένων καταλείπεσθαι δόξει [2].

PROP. LVII. THEOR.

Oculo prætermoto, res ſpectatæ procul poſitæ relinqui videntur.

Ἔστω γὰρ ὄμμα τὸ Β, ἀφ' οὗ ἤχθωσαν ἀκτῖνες αἱ Β Γ, Β Δ, Β Ζ, ὁράματα δὲ τὰ Κ, Λ. ὁπόταν τὸ ὄμματος ἀφαιρούμενον πρὸς τῆς Γ μέρεσι, ἧττον παρελεύσονται αἱ ὄψεις τὸ Κ ἤπερ τὸ Λ· δόξει ἄρα τὸ Κ ὑπολείπεσθαι, τὸ δὲ Λ εἰς τἀναντίον φέρεσθαι, τοῦτ' ἔστιν ὡς ἐπὶ τὰ πρὸς τῷ Ζ μέρη. [3]



SIT oculus Β, à quo ducantur radii Β Γ, Β Δ, Β Ζ, res vero ſpectatæ ſint Κ, Λ. oculo igitur prætermoto, radii ab oculo Β verſus Γ protenſi citius percurrent Κ magnitudinem quam ipſam Λ: quare Κ relinqui exiſtimabitur, Λ vero in contrarium tendere, hoc eſt verſus partes quæ ſunt ad Ζ.

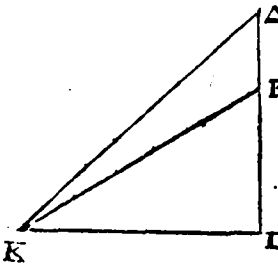
ΠΡΟΤΑΣΙΣ νη'.

Τὰ αὐξανόμενα τῶν μεγεθῶν ἔγγιον δοκεῖ τῷ ὄμματι προσάγεσθαι.

PROP. LVIII. THEOR.

Magnitudines auctæ propius ad oculum accedere exiſtimantur.

Ἔστω γὰρ ὁρώμενον τὸ Γ Β ἴσον τῶν Κ Β, Κ Γ ἀκτίνων, καὶ ηὐξήσθω τὸ Γ Β τῷ Β Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ ὄμματος προσπιπτέτω ἀκτὶς ἡ Κ Δ· σκαληνὸν μείζων ἡ ὑπὸ Δ Κ Γ γωνία τῆς ὑπὸ Β Κ Γ γωνίας. τὰ δὲ ὑπὸ μείζονος γωνίας ὁράμενα, μείζονα φαίνεται· μείζων ἄρα φαίνεται τὸ Γ Δ τοῦ Γ Β. [4] καὶ ἐὰν τὰ μείζονα ὁράμενα τῷ ὄμματι [5] ἐπαυξάνεσθαι δοκῇ· καὶ τὰ αὐξανόμενα ἄρα τῶν μεγεθῶν δόξει προσαίρεσθαι τῷ ὄμματι [6].



SIT magnitudo Γ Β, quæ conſpiciatur per radios Κ Β, Κ Γ; augeatur ipſa Γ Β tanta magnitudine quanta eſt Β Δ; ab oculo vero Κ procedat radius Κ Δ: major ergo eſt Δ Κ Γ angulus angulo Β Κ Γ. quæ autem ſub majori angulo ſpectantur majora apparent: major igitur apparet Γ Δ quam Γ Β. quod ſi quæ majora viſui apparent quam prius, aucta eſſe putantur: igitur auctæ magnitudines ad oculum acceſſiſſe videbuntur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νθ'.

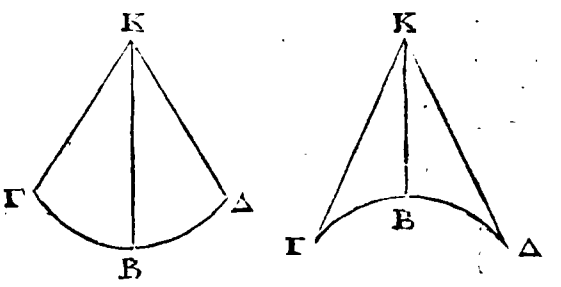
[7] Ὅσα μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἀποσήματι κεῖται μηδὲ τὰ ἄκρα μηδὲ τὰ μέσα ἐπ' εὐθείας ὄντων· τὸ ὅλον σχῆμα οὔτε κοῖλον οὔτε δὲ κυρτὸν ποιεῖ.

PROP. LIX. THEOR.

Quæ neque æqualiter ab oculo abſunt, neque extrema extremis, & media mediis parallela habent, neque in recta linea ſunt; totam figuram faciunt nunc cavam nunc convexam.

1 Sc. ἴσως εὐθείαι. *Savil.* 2 Adde, καὶ τὰ ἔγγιον εἰς τἀναντίον φέρεσθαι. ſic enim eſt concluſio. *Idem.* 3 Amplius, neque enim liquet. *Idem.* 4 In MS. ſic legitur. τὰ μείζονα ἰσωθῆ εἰμένα τῷ ὄμματος προσπίπτειν, ἐπαυξάνεσθαι δοκῇ, καὶ τὰ αὐξανόμενα &c. *Idem.* 5 Ne hic quidem quicquam ægris, niſi pro ἐπαυξάνεσθαι, legamus προσπίπτειν, προσπίπτειν, aut tale quippiam ex 55. propoſitione; ſed plane nihil eſt, nec quicquam explico. *Idem.* 6 Addend. ἔγγιον ἄρα δόξει εἶναι τὸ Γ Δ ἤπερ τὸ Β Γ. *Idem.* 7 Ne hic quidem quicquam explico. *Idem.* 8 Καθόλου τὰ μέσα, μηδὲ ἐπ' εὐθ. *Idem.*

CErnantur enim B, Γ, Δ ab oculo posito in K, à quo procedant radii KB, KΓ, KΔ. tota igitur figura ΓBΔ cava esse videtur. alio modo ponatur ipsa res spectata, [ut in 2. fig.] ita ut punctum B propius oculo sit quam Γ aut Δ. ipsa igitur ΔBΓ figura convexa esse existimabitur.



Ὁράσθω γὰρ τὰ B, Γ, Δ τῷ ὄμματος ἐπὶ τῆς K κειμένης, καὶ πεπτώσωσαν ἀκτῖνες αἱ KB, KΓ, KΔ. ἐκεῖν τὸ ἄλλον σχῆμα κοῖλον δόξειεν εἶναι. μετακείσθω δὴ πάλιν τὸ ὁρώμενον, καὶ ἔγγιον κείσθω τοῦ ὄμματος· ἐκεῖν τὸ ΔBΓ δόξει κυρτὸν εἶναι.

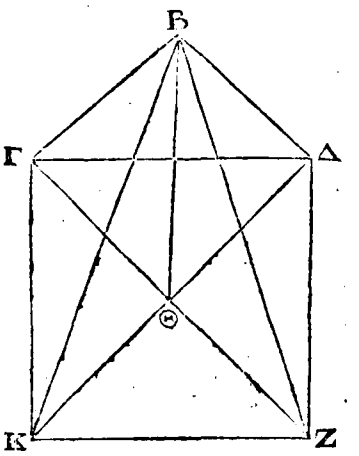
PROP. LX. THEOR.

Si ab intersectione diametrorum quadrati excitetur linea ad planum quadrati normalis, & in ea ponatur oculus; quadrati diametri & latera æqualia apparebunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξ'.

Τετραγώνου ὑπάρχοντος, ἐὰν ἀπὸ τῆς συμπτώσεως τῶν διαμέτρων πρὸς ὀρθὰς τις ἀναχθῇ τῷ τοῦ τετραγώνου ὑποπέδῳ, ὑπὸ δὲ αὐτῆς τεθῇ τὸ ὄμμα· αἵ τε πλευραὶ τοῦ τετραγώνου καὶ αἱ διάμετροι ἴσαι φανοῦνται.

SIT quadratum ΓZ, ducantur vero diametri ΓZ, KΔ quæ se intersecent in puncto Θ, à quo excitetur ΘB ad ipsius quadrati planum normalis, ponaturque oculus in B, à quo procedant radii BΘ, BΔ, BΓ, BZ: duæ igitur rectæ ΘZ, ΘB æquales sunt duabus ΘΓ, ΘB. sunt vero etiam anguli ab ipsis lineis contenti inter se æquales, anguli nimirum positi ad punctum Θ: æqualis ergo [per 4. 1.] est basis ZB basi BΓ. eademque ratione basis KB basi BΔ æqualis est. duæ ergo rectæ ZB, BΓ duabus rectis KB, BΔ æquales sunt utraque utrique, diametri quoque ipsæ æquales sunt: quare [per 8.1.] anguli etiam qui sunt ad B æquales erunt. quæ autem sub æqualibus angulis cernuntur [per 7. posit.] æqualia apparent: æquales igitur apparent diametri inter se, & latera quoque inter se æqualia.



Ἔστω γὰρ τετράγωνον τὸ ΓZ, καὶ διάμετροι ἤχθωσαν αἱ ΓZ, KΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω τῷ ὑποπέδῳ ἡ ΘB, τὸ δὲ ὄμμα κείσθω ἐπὶ τοῦ B, καὶ διαπεπτώσωσαν ἀκτῖνες αἱ BK, BΔ, BΓ, BZ· ἐκεῖν δύο αἱ ΘZ, ΘB δυσὶ ταῖς ΘΓ, ΘB ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ γωνίαι αἱ περιεχόμεναι ὑπ' αὐτῶν ἴσαι, τουτέστιν αἱ πρὸς τῷ Θ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ZB βάσις τῇ BΓ βάσει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ KB τῇ BΔ ἴση ἐστί. δύο δὴ αἱ ZB, BΓ δυσὶ ταῖς KB, BΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα, καί εἰσιν αἱ διάμετροι ἴσαι· ὥστε καὶ αἱ πρὸς τῷ B γωνίαι ἴσαι ἔσονται. τὰ δὲ ὑπὸ ἴσων γωνιῶν ὁρώμενα ἴσα φαίνεται· ἴσαι ἄρα φανοῦνται αἵ τε διάμετροι καὶ αἱ πλευραὶ τοῦ τετραγώνου.

PROP. LXI. THEOR.

Quod si radius ab oculo in diametrorum intersectionem ductus neque rectus sit ad planum quadrati, neque æqualis alterutri semidiametrorum quadrati, neque æquales angulos contineat cum ipsis semidiametris; inæquales apparebunt diametri.

IDem enim quod in circulis, hic etiam evenire demonstrabimus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξα'.

Τῆς δὲ ἀπὸ τοῦ ὄμματος ἐπί τινα συμπτῶσιν τῶν διαμέτρων, μὴ πρὸς ὀρθὰς οὖσης τῷ τοῦ τετραγώνου ὑποπέδῳ, μήτε ἴσης ἑκατέρᾳ τῶν ἀπὸ τῆς συμπτώσεως πρὸς τὰς γωνίας τοῦ τετραγώνου ἀγομένων, μήτε ἴσας γωνίας περιεχούσης μετ' αὐτῶν· αἱ διάμετροι ἄνισοι φανοῦνται.

ὍΜοίως γὰρ δείξομεν τὸ συμβαῖνον, καθάπερ καὶ ἐπὶ τοῖς κύκλοις [3].

1 Latera lateribus & diametri diametris. *Savil.* 2 Sc. τῶν διαμέτρων. *Idem.* 3 Theor. 37. 38. 39. 4 In MS. Τέλος εἴληφε τὰ περὶ τῆς ἐπιπέδου Εὐκλείδου.

ΤΕΛΟΣ ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΟΠΤΙΚΩΝ.

FINIS EUCLIDIS OPTICORUM.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΚΑΤΟΠΤΡΙΚΑ.

EUCLIDIS
CATOPTRICA.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ

ΚΑΤΟΠΤΡΙΚΑ.

EUCLIDIS

CATOPTRICA.

ΘΕΣΕΙΣ.

α'. ΟΨΙΝ εἶναι εὐθεῖαν ὑποκείσθω, ἧς τὰ μέσα πάντα τοῖς ἄκροις ἐμπροσθεῖ.

β'. Τὰ ὁρώμενα ἅπαντα κατ' εὐθείας ὁρᾶσθαι.

γ'. Ἐνόπτρου τεθέντος ἐπιπέδου, ᾧ θεωρουμένῳ πρὸς ὕψος, ὁ πρὸς ὀρθὰς ὃν τῷ ἐπιπέδῳ, γίνοιτο ἀνάλογον, ὡς ἡ μεταξὺ τοῦ ἐνόπτρου καὶ τοῦ θεωροῦντος εὐθεῖα πρὸς τὴν μεταξὺ τοῦ ἐνόπτρου καὶ τῆς πρὸς ὀρθὰς ὕψους, οὕτω τὸ τοῦ θεωροῦντος ὕψος πρὸς τὸ πρὸς ὀρθὰς τῷ ἐπιπέδῳ ὕψος.

[ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ.]

α'. Ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἐνόπτροις οὗ τόπου καταληφθέντος, ἐφ' ὃν ἡ [2]κάθετος πίπτει ἀπὸ τοῦ ὁρωμένου, οὐκέτι ὁρᾶται τὸ ὁρώμενον.

β'. Καὶ ἐν τοῖς κυρτοῖς ἐνόπτροις καταληφθέντος τοῦ τόπου, δι' οὗ ἀπὸ τοῦ ὁρωμένου εἰς τὸ κέντρον [3]ἄγεται τῆς σφαίρας, οὐκέτι ὁρᾶται τὸ ὁρώμενον.

γ'. Τὸ δ' αὐτὸ καὶ ἐν τοῖς κοίλοις συμβαίνει.

δ'. Ἐὰν εἰς ἀγγεῖόν τι ἐμβληθῇ τι, καὶ λάβῃ ἀπόστημα, ὡς μηκέτι ὁρᾶσθαι, τοῦ αὐτοῦ ἀποστήματος ὄντος, ἐὰν ὕδωρ ἐγχυθῇ, ὀφθήσεται τὸ ἐμβληθέν.

POSITIONES.

1. PONAMUS radium esse rectam lineam, cujus media omnia extremis officiant.

2. Omne aspectabile secundum rectam lineam cerni.

3. Si speculum collocetur in plano, cui ad rectos angulos altitudo aliqua erecta sit, quam rationem habet linea interjecta inter spectatorem & speculum ad lineam interjectam inter speculum & erectam altitudinem, eandem rationem habere spectatoris altitudinem ad altitudinem insistentem ad rectos angulos ei plano, in quo est speculum.

[PHÆNOMENA.]

1. In planis speculis occupato eo speculi loco, in quem cadit perpendicularis ducta à re aspectabili ad speculum, res aspectabilis non cernitur.

2. Item, in convexis speculis occupato eo loco, per quem à re aspectabili ad centrum sphæræ linea recta ducetur, res aspectabilis non cernitur.

3. Idemque in concavis speculis fit.

4. Si res aliqua in vas injiciatur, & ab oculo removeatur vas ipsum, quoad res in fundo vasis posita cerni non possit; ea videbitur ab eadem remotione, si aqua in vas infundatur.

1 Id est, σημεῖον in plano speculi, in quod perpendicularis ab oculo cadit, ut oculo posito in B, rectam ΓΚ accipere oportet, sc. inter speculum ad K & Γ casum perpendicularis interceptam. *Savil.* 2 Sc. ad planum speculi. *Idem.* 3 Sc. εὐθεῖα. *Idem.*

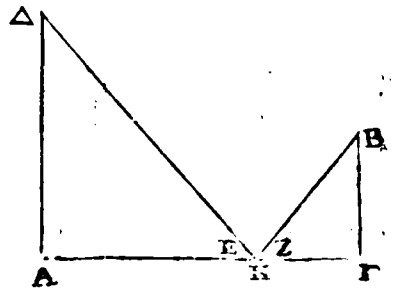
PROPOSITIO I. THEOR.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

A ſpeculis planis, convexis, & cavis, radii ad æquales angulos reflectuntur.

Ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων ἐνόπτρων, καὶ κυρτῶν, καὶ κοίλων, αἱ ὄψεις ἐν ἴσαις γωνίαις ἀνακλῶνται.

SIT oculus quidem B; planum autem ſpeculum AΓ, radius vero BK ab oculo feratur, qui reflectatur ad punctum Δ: dico angulum E æqualem eſſe angulo Z.



Ducantur enim BΓ, ΔΛ perpendiculares ad ſpeculum. eſt igitur [per 3. poſit.] ut BΓ ad ΓK ſic ΔΛ ad ΛK; id enim in definitionibus poſitum eſt: quare [per 6. 6.] triangulum BΓK ſimile eſt triangulo ΔΛK; ideoque angulus E æquale eſt angulo Z, triangula enim ſimilia [per 1. def. 6.] æquiangula etiam ſunt.

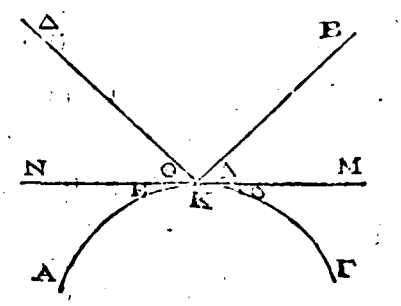
Ἔστω ὄμμα τὸ B, ἐνόπτρον ἐπίπεδον τὸ AΓ, ὄψις δὲ ἀπὸ τοῦ ὄμματος φερέσθω ἡ BK, καὶ ἀνακλάσθω ἐπὶ τὸ Δ· φημὶ δὴ τὴν E γωνίαν ἴσην εἶναι τῇ Z.

Ηχθωσαν κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐνόπτρον αἱ BΓ, ΔΛ. ἐκεῖν ἐστιν ὡς ἡ BΓ πρὸς ΓK ὕτως ἡ ΔΛ πρὸς ΛK, τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς ὅροις ὑπέκειτο· ὅμοιον ἄρα τὸ BΓK τρίγωνον τῷ ΔΛK τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἡ E γωνία τῇ Z, τὰ γὰρ ὅμοια ἰσογώνια ἐστιν.

IN CONVEXO SPECULO.

ΕΝ ΤΩ ΚΥΡΤΩ ΕΝΟΠΤΡΩ.

Sit convexum ſpeculum AKΓ, radius autem BK, qui reflectatur ad punctum Δ: dico angulum reflectionis EΘ æqualem eſſe angulo incidentiæ OΛ. ſi enim applicem planum ſpeculum NM [ita ut tangat ſpeculum convexum in puncto K;] igitur Θ æqualis erit Λ. ſed E æqualis eſt O, tangit enim MN: toigitur EΘ æqualis eſt toti ΛO.

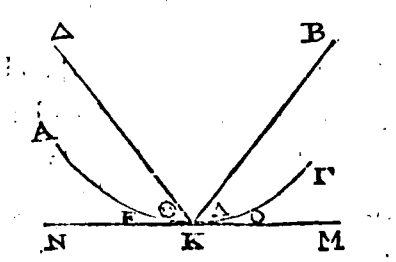


Ἐστω δὴ κυρτὸν ἔνοπτρον τὸ AKΓ, ὄψις δὲ ἡ BK, ἀνακλωμένη ἐπὶ τὸ Δ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ EΘ γωνία τῇ OΛ γωνίᾳ. παρέφηκα ἐπίπεδον ἔνοπτρον τὸ NM· [1] ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Θ γωνία τῇ Λ. [2] ἀλλὰ καὶ ἡ E τῇ O, ἐφάπτεται γὰρ ἡ MN· ὅλη ἄρα ἡ EΘ ὅλῃ τῇ ΛO ἴση ἐστίν.

IN CONCAVO SPECULO.

ΕΝ ΤΩ ΚΟΙΛΩ ΕΝΟΠΤΡΩ.

Sit rurſus ſpeculum cavum AKΓ, radius autem BK qui reflectatur ad Δ: dico angulum Θ æqualem eſſe angulo Λ. appoſito enim plano ſpeculo MN, æqualis eſt angulus ΘE angulo ΛO. ſed & angulus E æqualis eſt angulo O: quare reliquus Θ reliquo Λ æqualis erit.



Ἐστω δὴ πάλιν κοῖλον τὸ AKΓ, ὄψις δὲ ἡ BK ἀνακλωμένη ἐπὶ τὸ Δ· λέγω ὅτι ἡ Θ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ Λ. ὡσαυτέντος γὰρ ἐπιπέδου ἐνόπτρου, ἴση γίγνεται ἡ ΘE γωνία τῇ ΛO. [3] ἴση δὲ καὶ ἡ E τῇ O· λοιπὴ ἄρα ἡ Θ τῇ Λ ἴση ἔσται.

PROP. II. THEOR.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Si radius, in qualecunque ſpeculum cadens, æquales faciat angulos; ipſe in ſeipſum reflectetur.

Πρὸς ὁποῖον ἂν τὸ ἐνόπτρον προσπέσῃ ὄψις [4] ἴσας ποιοῦσα γωνίας, αὐτὴ δι' ἑαυτῆς ἀνακλασθήσεται.

SIT planum ſpeculum AKΓ; oculus autem B, à quo radius procedat BK, æquales angulos

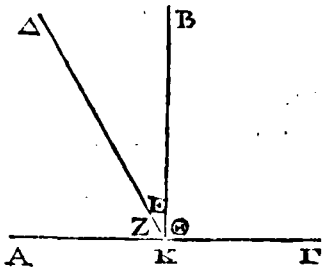
Ἔστω ἔνοπτρον ἐπίπεδον τὸ AKΓ, ὄμμα δὲ τὸ B, ὄψις δὲ ἡ BK προσπιπτώκέτω, ἴσας

1 Per primam partem hujus. *Serv.* 2 Quia ſemicirculus à K verſus Γ ſemicirculo verſus A; & KM ſuper KN, quia anguli ſunt recti: ergo per 8. axioma æquales ſunt E, O. *Idem.* 3 Ut ſupra. *Idem.* 4 In omneis angulos ad punctum προσπιπτούσας; alioquin non ſequitur concluſio. *Idem.*

ποιοῦσα

πιέσου γωνίας [1] τῷ ΕΖ τῇ Θ· λέγω ὅτι ἀνακλωμένη ἡ ΒΚ ἐφ' ἑαυτὸν ἥξει, τοῦτ' ἔστιν ἐπὶ τὸ Β.

Μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἡκέτω ἐπὶ τὸ Δ. καὶ ἐπεὶ αἱ ὄψεις ἐν ἴσαις ἀνακλῶνται γωνίαις, ἴση ἐστὶν ἡ Ζ γωνία τῇ Θ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΕΖ γωνία τῇ Θ ἴση· καὶ ἡ ΕΖ ἄρα γωνία τῇ Ζ γωνίᾳ ἔσται ἴση, ἡ μείζων τῇ ἐλάσσονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ἡ ἄρα ΒΚ ἐπ' αὐτὴν ἀνακλασθήσεται.



Η δ' αὐτὴ ἀπόδειξις ἁρμόσει ἐπὶ τῶν κυρτῶν καὶ τῶν κοίλων ἐπιπέδων.

faciens cum ſpeculo, angulum nempe ΕΖ æqualem angulo Θ: fore aſſero ut radius ΒΚ ſeſe reflectens in ſeipſum redeat, hoc eſt ad Β.

Non enim, ſed reflectatur, ſi poſſit, in punctum Δ. quia igitur [per 1. catoptr.] radii ad æquales angulos reflectuntur, æqualis eſt angulus Ζ angulo Θ. oſtenſus vero eſt angulus ΒΖ æqualis angulo Θ: igitur angulus ΒΖ angulo Ζ æqualis erit, major minori; quod fieri nequit: igitur radius ΒΚ in ſeipſum reflectetur.

Eadem demonſtratio congruet ſpeculis tum convexis tum cavis.

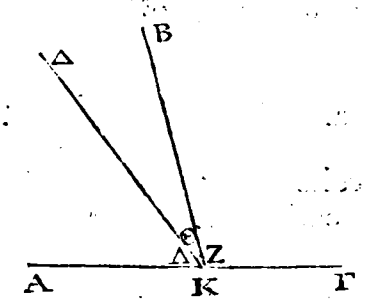
ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Πρὸς ὁποῖον ἂν τῶν ἐπιπέδων προσπίπτουσα ὄψις ἀνίσους ποιῇ γωνίας· ὅτε δ' ἐφ' ἑαυτὴν ἀνακλασθήσεται, ὅτε πρὸς τὴν ἐλάσσονα γωνίαν.

Ἔστω ἐπίπεδον ἔνοπτρον τὸ ΑΚΓ, ὄψις δὲ ἡ ΒΚ προσπιπτέτω, μείζονα ποιοῦσα γωνίαν τῇ Ζ τῆς ΘΛ· λέγω ὅτι ἡ ΒΚ ἀνακλωμένη, ὅτε μὲν ἐφ' ἑαυτὴν ἀνακλασθήσεται, ὅτε ἐπὶ τὸ ΘΛ γωνίαν.

Εἰ μὲν γὰρ ἥξει ἐπὶ τὸ ΒΚ, ἡ Ζ γωνία τῇ ΘΛ ἴση, ὅπερ ἄτοπον, ὑπόκειται γὰρ μείζων.

Εἰ δὲ μεταξὺ τοῦ Δ, ἴση ἔσται ἡ Ζ γωνία τῇ Λ, ἔστι δὲ μείζων· ἡ ἄρα ΒΚ ἀνακλασθήσεται ἐπὶ τὴν μείζονα γωνίαν τὴν Ζ. δυνατὸν γὰρ ἀπὸ τοῦ μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην ἀφαιρεθῆναι.



Ἔστι δὲ ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ἐπὶ τῶν κυρτῶν καὶ κοίλων.

PROP. III. THEOR.

Radius in qualecunque ſpeculum cadens, anguloſque inæquales faciens, neque in ſeipſum reflectetur, neque verſus minorem angulum.

SIT planum ſpeculum ΑΚΓ, radius autem ΒΚ in ſpeculum incidat, faciatque angulum Ζ majorem angulo ΘΛ: fore aſſero ut ΒΚ radius reflectens, neque in ſeipſum reflectatur, neque ad angulum ΘΛ.

Si enim redeat in ſeipſum, in ΒΚ; æqualis erit angulus Ζ angulo ΘΛ, quod eſt abſurdum; poſitus enim eſt major.

Si ΒΚ reflectatur ad Δ, æqualis erit Ζ angulus angulo Λ; eſt autem major: quare radius ΒΚ reflectetur verſus majorem angulum, qui eſt ad Ζ: poterit enim à majore angulo auferri angulus æqualis minori.

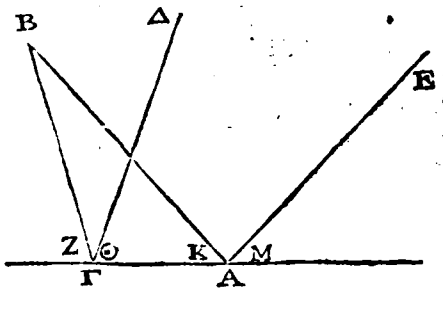
Eadem demonſtratio valebit in convexis & cavis ſpeculis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Αἱ ὄψεις ὅτι τῶν ἐπιπέδων ἐνόπτρων καὶ κυρτῶν ἀνακλώμεναι, ὅτε συμπεσοῦνται ἀλλήλαις [2], ὅτε παράλληλοι ἔσονται.

Ἔστω πάλιν ἐπίπεδον ἔνοπτρον τὸ ΑΓ, ὄμμα δὲ τὸ Β, ὄψεις δὲ ἀνακλώμεναι αἱ ΒΓΔ, ΒΑΕ· λέγω ὅτι αἱ ΓΔ, ΑΕ, ὅτε παράλληλοί εἰσιν, ὅτε συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ Δ, Ε [3].

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ Ζ γωνία τῇ Θ, ἡ δὲ Κ τῇ Μ, μείζων



PROP. IV. THEOR.

Radii à planis convexiſque ſpeculis reflexi neque mutuo concurrent, neque erunt paralleli.

SIT rurſus planum ſpeculum ΑΓ, oculus autem Β, radii vero reflexi ΒΓΔ, ΒΑΕ: dico duos hos radios reflexos ΓΔ, ΑΕ neque parallelos eſſe, neque productos ad partes Δ, Ε poſſe concurrere.

Quia enim [per 1. catop.] æqualis eſt angulus Ζ angulo Θ, & angulus Κ angulo Μ; ma-

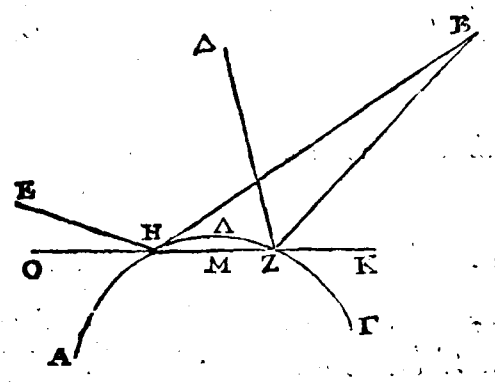
1 Non ſolum ΕΖ, Θ ſed omnes omnino angulos ad Κ oportet eſſe æqualeis; in planis ſc. ſpeculis rectos, in κοίλοις acutos æqualeis; in δὲ κυρτοῖς obtuſos. *Savil.* 2 Sc. ἐπὶ τὰ τοῦ ἀνακλάσεως μέρη. *Idem.* 3 Sc. μέρη.

jor autem eſt [per 16.1.] angulus Z angulo K, propterea quod eſt externus angulus in triangulo BAΓ: major igitur eſt angulus Θ angulo M: quare radii reflexi Γ Δ, A E neque paralleli inter ſe ſunt, neque concurrent ad partes E, Δ.

ζων δὲ ἡ Z τῆς K, ἅπερ τὸ ἐκτὸς εἶναι ἐν τῷ BAΓ τριγώνῳ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ Θ τῆς M· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ AE ἐστιν, ὥστε συμπίπτουσιν ἐπὶ τὰ E, Δ.

IN CONVEXO SPECULO,

Sit rurſus convexum ſpeculum AHZΓ, oculus autem B, radii autem reflexi BZΔ, BHE: dico radios reflexos ZΔ, HE neque parallelos eſſe, nec poſſe concurrere ad partes E, Δ.



Connectatur enim recta HZ, & producatur utrinque. quia igitur angulus BZΓ æqualis eſt angulo ΔZA, eo quod [per 1. catop.] radii ad æquales angulos reflectuntur; major igitur eſt angulus ΔZM angulo BZK. & [per 16.1.] angulus BZK major eſt angulo BHM, & angulus BHM major eſt angulo EHA; angulus enim BHA [per 1. catop.] æqualis eſt angulo EHA: major igitur eſt ΔZM angulus angulo EHA. multo igitur major eſt angulus ΔZM angulo EHO: igitur radii ZΔ, HE neque concurrent, neque paralleli erunt.

ΕΝ ΤΩ ΚΥΡΤΩ ΕΝΟΠΤΡΩ.

Ἔστω πάλιν κυρτὸν ἔνοπτρον τὸ AHZΓ, ὄμμα δὲ τὸ B, ὄψεις δὲ ἀνακλώμεναι αἱ BZΔ, BHE· λέγω ὅτι αἱ ZΔ, HE, ὅτι οὐ παράλληλοί εἰσιν, ὅτε συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ E, Δ.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ HZ εὐθεῖα, καὶ ἐκβεβλήθω ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ BZΓ τῇ ΔZA, ἅπερ τὸ ἐν ἴσαις ἀνακλᾶσθαι γωνίαις· ἐὰν ἄρα μείζων ἡ ΔZM τῆς BZK. ἡ δὲ BZK τῆς BHM ἐστὶ μείζων, ἡ δὲ BHM τῆς EHA μείζων, αὐτὴ γὰρ ἡ BHA ἴση ἐστὶ τῇ EHA· μείζων ἄρα ἡ ΔZM τῆς EHA. πολλῷ ἄρα ἡ ΔZM τῆς EHO μείζων ἐστίν· οὐκ ἄρα συμπεσοῦνται αἱ ZΔ, HE εὐθεῖαι, ὥστε οὐ παράλληλοί εἰσιν.

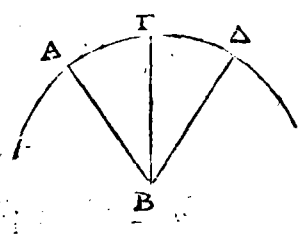
PROP. V. THEOR.

In cavis ſpeculis ſi oculum colloces aut in centro, aut in circumferentia, aut intra circumferentiam, id eſt inter centrum & circumferentiam; radii reflexi concurrent.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐν τοῖς κοίλοις ἐνόπτροις ἐὰν ὀπὶ τῆς περιφερείας, ἢ ἐντὸς τῆς περιφερείας ᾖς ὄμμα, τοῦτ' ἔστι μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τῆς περιφερείας· αἱ ὄψεις ἀνακλώμεναι συμπεσοῦνται.

SIT cavum ſpeculum AΓΔ; centrum autem ſphæræ, cujus portio eſt ipſum ſpeculum concavum, ſit B, & ponatur oculus in B; ab eoque ad circumferentiam ducantur radii BA, BΓ, BΔ: æquales igitur ſunt anguli poſiti ad puncta A, Γ, Δ; ſunt enim anguli ſemicirculorum: radii igitur BA, BΓ, BΔ ab oculo ad ſpeculum miſſi in ſeipſos reflectentur; id enim [ad prop. 2 catop.] oſtenſum eſt: quare concurrent in puncto B.



Ἔστω κοῖλον ἔνοπτρον τὸ AΓΔ, κέντρον δὲ τῆς σφαίρας τὸ B, καὶ κείσθω τὸ ὄμμα ἐπὶ τὸ B, καὶ πεσόντα τὰ ἀπὸ τοῦ B ὄψεως πρὸς τὴν περιφέρειαν αἱ BA, BΓ, BΔ· ἴσαι ἄρα εἰσὶν αἱ πρὸς τοῖς σημείοις τοῖς A, Γ, Δ γωνίαι· ἡμικυκλίων γάρ εἰσιν· αἱ ἄρα ὄψεις ἀνακλώμεναι δι' ἑαυτῶν ἀνακλασθήσονται αἱ BA, BΓ, BΔ, τοῦτο γὰρ δέδεικται· ὥστε συμπεσοῦνται κατὰ τὸ B.

OCULUS IN CIRCUMFERENTIA.

Sit cavum ſpeculum AΓΘB, oculus autem ſit B, colloceturque in ipſius ſpeculi circumferentia, & ab oculo B profiliant radii BΓ, BA, qui reflectantur ad puncta Δ, E. quia ſegmentum AΓB,

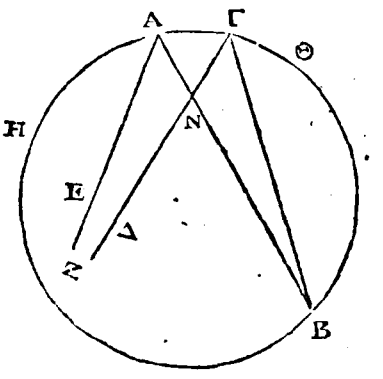
ΟΜΜΑ ΕΝ ΤΗ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑ.

Ἔστω πάλιν κοῖλον ἔνοπτρον τὸ AΓΘB, ὄμμα δὲ τὸ B, κείσθω δὲ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ, καὶ ἀπὸ τοῦ B πεσόντα τὰ ὄψεις αἱ BΓ, BA ἀνακλώμεναι ἐπὶ τὰ Δ, E σημεῖα. ἐπεὶ μεῖζον

1 Hæc verba puto eſſe delenda, ut etiam illa quæ ſunt in fine demonſtrationis. *Savil.* 2 Demonſtratio hujus theorematis, ut vere dicam, nihil habet ſolidi; & ſequentis theorematis multo minus. ſed hic quidem πεχωρεῖ aliquo more, nempe ſi BΘΓ major ſit quam AΓ, totaque BΘAΓ non major ſemicirculo. *Idem.*

τὸ

τὸ ΑΓΒ τμῆμα τῦ ΒΘΓ τμήματος, μείζων ἡ ΒΑΓ γωνία τ ΒΓΘ γωνίας, καὶ ἡ ΕΑΗ (λέγω τὸ πρῶτον) ἄρα τῆς ΔΓΑ μείζων· αἱ ἄρα ΒΑΓ, ΕΑΗ τῶν ΒΓΘ, ΔΓΑ μείζους εἰσί· [1] λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΑΕ τῆς ΔΓΒ ἐλάσσων, πολλῷ μᾶλλον ἄρα τῆς ΔΝΒ· συμπεσοῦνται ἄρα αἱ ΓΔ, ΑΕ κατὰ τὸ Ζ. [2] ὁμοίως δὴ δειχθήσεται κἂν ἐκτὸς τ περιφερείας πίπτῃ τὸ ὄμμα, ὡς ἐπὶ ἕξῆς θεωρήματος.

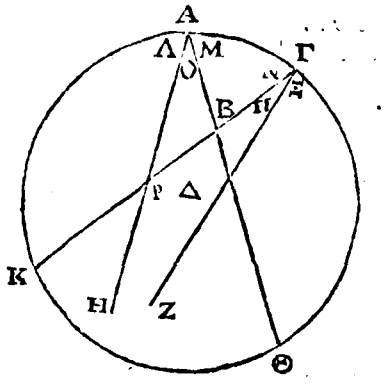


majus est segmento ΒΘΓ: major igitur est ΒΑΓ angulus angulo ΒΓΘ: quare angulus ΕΑΗ (per 1.catop.) major est angulo ΔΓΑ. duo igitur anguli ΒΑΓ, ΕΑΗ majores sunt duobus angulis ΒΓΘ, ΔΓΑ: quare reliquus angulus ΒΑΒ reliquo angulo ΔΓΒ minor est; ac multo etiam minor ipso ΔΝΒ: igitur radii reflexi ΓΔ, ΑΒ concurrent ad partes Ζ. idem ostendetur oculo posito extra circumferentiam, ut in sequenti theoremate.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐν τοῖς κοίλοις ἐνόπτροις, ἐὰν ἀνὰ μέσον τῦ κέντρου καὶ τῆς περιφερείας ᾖ τὸ ὄμμα· [3] ὅτε μὲν συμπεσοῦνται αἱ ὄψεις ἀνακλώμεναι, ὅτε δὲ οὐ συμπεσοῦνται.

[4] Ἔστω ἔνοπτρον κοῖλον τὸ ΑΓ, κέντρον δὲ αὐτῦ τὸ Δ, ὄμμα δὲ κείσθω τὸ Β μεταξὺ τῦ κέντρου καὶ τ περιφερείας, ὄψεις δὲ αἱ ΒΑ, ΒΓ ἀνακλώμεναι ἐπὶ τὰ Η, Ζ, ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ὄψεις ἕως τῦ ἐνόπτρου αἱ ΑΘ, ΓΚ. ἡ ΑΘ δὴ τ ΓΚ ἢ μείζων ἐστὶν, ἢ ἴση, ἢ ἐλάττων. Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΘ ὄψις τῇ ΓΚ ὄψει, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΑΓΘ περιφέρεια τῇ ΓΑΚ περιφερείᾳ· ὥστε καὶ ἡ Μ γωνία τῇ Ξ· αἱ γὰρ τ ἴσων περιφερειῶν γωνίαι ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις· καὶ αἱ Μ, Λ γωνίαι ἄρα τῶν Ν, Ξ εἰσιν ἴσαι, διὰ τὴν ἀνάκλασιν· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ Ο τῇ Π ἴση ἐστί· μείζων ἄρα ἡ Ρ τ Ο. ἐπεὶ γὰρ ἡ Ρ γωνία τ Π γωνίας μείζων ἐστί, διὰ τὸ ἐκτὸς εἶναι, ἡ δὲ Π τῇ Ο ἴση· καὶ ἡ Ρ ἄρα τ Ο μείζων ἐστί. [5] κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΡΣ· συμπεσοῦνται ἄρα αἱ ΓΖ, ΑΗ ὡς ἐπὶ τὰ Η, Ζ. Τὸ δ' αὐτὸ ἕξει, κἂν μείζων ἡ ΑΘ ὄψις τῆς ΓΚ. μείζονες γὰρ ἔσονται αἱ Λ, Μ γωνίαι τῶν Ν, Ξ, ἡ δὲ Π τῆς Ο μείζων ἔσται, καὶ ἡ Ρ τῆς Ο· Ἐὰν δὲ ἡ ΑΘ εὐθεῖα ἐλάσσων ᾖ τῆς ΓΚ, διὰ τὰ αὐτὰ μείζων ἔσται ἡ Ο γωνία τῆς Π. ἔστι δὲ καὶ ἡ Ρ τῆς Π μείζων· οὐδὲν ἄρα κωλύει ἴσην εἶναι τὴν Ρ τῇ Ο, ἢ ἐλάσσονα τῆς Ο, καὶ μὴ συμπίπτειν τῇ ΓΖ τὴν ΑΗ. [6] φανερὸν δὲ ὅτι



PROP. VI. THEOR.

In cavis speculis si inter centrum & circumferentiam colloces oculum; radii reflexi interdum concurrent, interdum non concurrent.

SIT cavum speculum ΑΓ, cujus centrum Δ; oculus autem ponatur in puncto Β inter centrum & circumferentiam; radii vero sint ΒΑ, ΒΓ, qui reflectantur ad puncta Η, Ζ; ipsi autem radii ad speculum usque protrahantur, qui sint ΑΘ, ΓΚ. radius ΑΘ aut major est, aut æqualis, aut minor radio ΓΚ. Si igitur radius ΑΘ æqualis sit radio ΓΚ, æqualis etiam est [per 28.3.] circumferentia ΑΓΘ ipsi ΓΑΚ: quare angulus Μ æqualis erit angulo Ξ; æqualium enim segmentorum anguli sunt inter se æquales. duo item anguli Μ, Λ æquales erunt duobus angulis Ν, Ξ propter æqualitatem angulorum reflectionis & incidentiæ: quocirca reliquus angulus Ο æqualis erit reliquo augulo Π: igitur Ρ angulus major erit angulo Ο. quia enim angulus Ρ major est angulo Π (est enim Ρ exterior angulus in triangulo ΒΓΡ) angulus autem Π æqualis est angulo Ο: igitur angulus Ρ major erit angulo Ο. addatur communis angulus ΒΡΖ: concurrent igitur radii reflexi ΓΖ, ΑΗ versus partes Η, Ζ. Idemque eveniet, si radius ΑΘ major sit radio ΓΚ. duo enim anguli Λ, Μ majores erunt duobus angulis Ν, Ξ: ideoque major erit angulus Π angulo Ο, & angulus Ρ eodem angulo Ο. Quod si radius ΑΘ minor sit radio ΓΚ, eadem ratione major erit Ο angulus angulo Π. est autem angulus Ρ major angulo Π: nihil ergo prohibet quin angulus Ρ æqualis esse possit angulo Ο, vel eo minor, quod si fiat, radii ΓΖ, ΑΗ non concurrent. sive au-

1 Nam tres anguli ad Γ & Α duobus ἡμικυκλίῳ angulis sunt æquales. *Savil.* 2 Sunt, ὡς ἴσων, ex *Scholio*. *Idem*. 3 Hoc quidem vere, sed demonstratio est pessima. *Idem*. 4 Nihil est solidi. cur enim concurrant si ΑΘ sit μείζων; non item si ΓΚ, cum utraque sit accepta ὡς ἔτυχε. *Idem*. 5 Sed tamen collecta est conclusio ac si ΖΡΘ major esset angulo Π quia externus, quo quid ineptius? nam ita demum non concurrunt ΑΗ, ΒΖ. *Idem*. 6 Jam φανερὸν nullo modo φανερὸν, nisi quod est φανερῶς falsum, etiamsi præcedentia non essent ἀποδεδειγμένα. *Idem*.

tem

tem ΑΓΘ circumferentia major ſit quam circumferentia ΓΑΚ, ſive ei æqualis; patet concurſum radiorum reflexorum fieri neque in circumferentia, neque extra; ſed intra tantum.

ἐάν τι μείζων ᾖ ἡ ΑΓΘ περιφέρεια τ῀ ΓΑΚ, ἐάν τε ἴση ἡ σύμπτωσις τ῀ ἀνακλάσεων, ἔτι ἐπὶ τ῀ περιφερείας τ῀ κύκλε, ἔτι ἐκτὸς ἐ μὴ γένηται, ἀλλ' ἐντὸς μόνον.

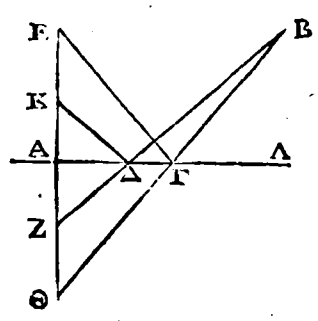
PROP. VII. THEOR.

Altitudines & profunditates in planis ſpeculis everſæ apparent.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Τὰ ὕψη καὶ τὰ βάθη ὑπὸ τ῀ ἐπιπέδων ἐνόπτρων ἀνεστραμμένα φαίνε῀ται.

SIT altitudo ΑΕ, planum autem ſpeculum ΑΔ, oculus vero Β, à quo miſſi radii ΒΓ, ΒΔ reflectantur ad Ε, Κ. ſi igitur radii ΒΔ, ΒΓ in rectum producantur; Ε quidem, quod ſurſum eſt, deorſum apparebit in Θ; item Κ, quod deorſum eſt, apparebit ſurſum in Ζ: quare everſa apparebunt.

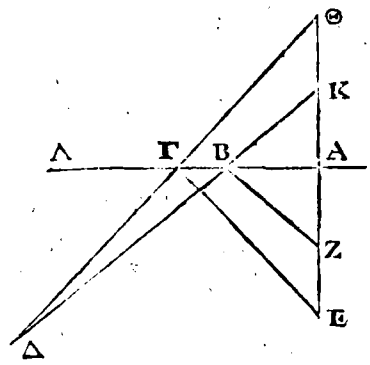


Ἔστω ὕψος μὲν τὸ ΑΕ, ἔνοπτρον δὲ ἐπίπεδον τὸ ΑΔ, ὄμμα δὲ τὸ Β, ὄψις δὲ αἱ ΒΓ, ΒΔ ἀνακλώμεναι ἐπὶ τὰ Ε, Κ. οὐκοῦν φαίνεται ἐκβληθεισῶν τ῀ ὄψεων ἐπ' εὐθείας, τὸ μὲν Ε τὸ ἄνω ἐπὶ τ῀ Θ κάτω ὄντος, τὸ δὲ Κ κάτω ὂν ἐπὶ τ῀ Ζ τ῀ ἄνω ὄντος· ὥστε ἀνεστραμμένα ἐστὶ τῇ φαντασίᾳ.

ALITER.

Quomodo profunditas apparet.

Sit rurſum profunditas ΕΑ, planumque ſpeculum ΑΓ, oculus autem Δ, radii denique ab oculo exeuntes ΔΓ, ΔΒ, qui reflectantur ad Ε, Ζ. ſimiliter atque prius, productis radiis uſque ad puncta Θ, Κ; punctum quidem Ε, quod imum eſt, ſupremum apparebit in puncto Θ; punctum autem Ζ, quod ſupremum eſt, imum apparebit in Κ.



ΑΛΛΩΣ.

Ὡς βάθος φαίνεται.

Ἐχω πάλιν βάθος μὲν τὸ ΕΑ, ἔνοπτρον δὲ ἐπίπεδον τὸ ΑΓ, ὄμμα δὲ τὸ Δ, ὄψις δὲ αἱ ΔΓ, ΔΒ ἀνακλώμεναι ἐπὶ τὰ Ε, Ζ. ὁμοίως τῶν ὄψεων ἐκβληθεισῶν ἐπὶ τὰ Θ, Κ φανήσεται τὸ μὲν Ε κάτω ὂν ἐπὶ τ῀ Θ ἄνω ὄντος, τὸ δὲ Ζ ἄνω ὂν ἐπὶ τ῀ Κ κάτω ὄντος.

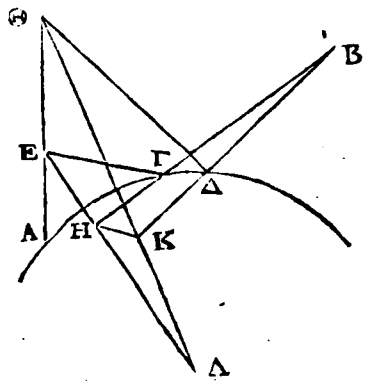
PROP. VIII. THEOR.

Altitudines & profunditates in convexis ſpeculis everſæ apparent.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Τὰ ὕψη καὶ τὰ βάθη ὑπὸ τ῀ κυρτῶν ἐνόπτρων ἀνεστραμμένα φαίνε῀ται.

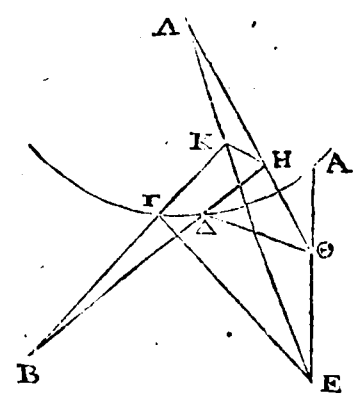
SIT altitudo ΑΘ, ſpeculumque convexum ΑΓΔ, radii autem ΒΓ, ΒΔ, qui reflectantur ad Ε & Θ. oſtenſum antea eſt [per 4. opt.] radios reflexos ΓΕ, ΔΘ non poſſe concurrere verſus partes Ε, Θ. reliqua ut in planis ſpeculis.



Ἔστω ὕψος τὸ ΑΘ, ἔνοπτρον δὲ κυρτὸν τὸ ΑΓΔ, ὄψεις δὲ αἱ ΒΓ, ΒΔ ἀνακλώμεναι ἐπὶ τὰ Ε, Θ. δέδεικ῀ται ὅτι ἐ συμπεσοῦνται. τὰ δὲ λοιπὰ ὁμοίως τοῖς ἐπιπέδοις.

PROFUNDITAS.

Sit rurſus profunditas ΑΕ, convexum autem ſpeculum ſit ΑΔΓ, ſitque oculus Β; radii autem reflexi ad puncta Ε, Θ, ſint ΒΓΕ, ΒΔΘ. reliqua ut in planis ſpeculis.



ΒΑΘΟΣ.

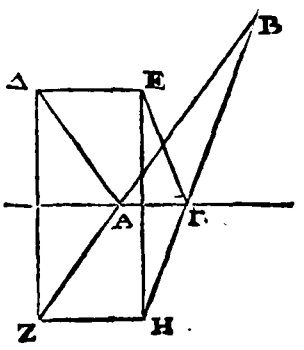
Ἐχω πάλιν βάθος τὸ ΑΕ, ἔνοπτρον δὲ κυρτὸν ΑΔΓ, ὄμμα δὲ τὸ Β· ὄψεις δὲ ἀνακλώμεναι ἐπὶ τὰ Ε, Θ, ΒΓΕ, ΒΔΘ. τὰ δὲ λοιπὰ καθάπερ ἐπὶ τοῖς ἐπιπέδοις.

1 Theorema hoc & quinque ſequentia pendent manifeſtiſſime ex 16, 17 & 18 ſequentibus; neque niſi iis, aut demonſtratis, aut ſumptis, conſtare poſſunt. *Savil.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Τὰ πλάγια μήκη ἐπὶ τῶν ὀπιπέδων ἐνόπτρων, ὡς τῇ ἀληθείᾳ ἔχει οὕτω καὶ φαίνεται.

Ἔστω ὄμμα τὸ Β, πλάγιον δὲ μῆκος τὸ ΔΕ, ἔνοπτρον δὲ τὸ ΑΓ· ἐπεὶ οὖν ἀνακλασθεισῶν τῶν ὄψεων φαίνεται τὸ μὲν Δ ἐπὶ τὸ Ζ, τὸ δὲ Ε ἐπὶ τὸ Η, καὶ ἔστιν οὕτω τῇ φαντασίᾳ, καθάπερ καὶ τῇ ἀληθείᾳ ἔχει· τὸ ἔγγιον, ἔγγιον, τὸ ἀπώτερον, ἀπώτερον.



PROP. IX. THEOR.

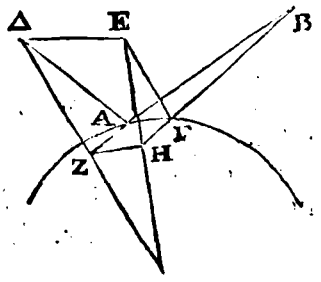
Obliquæ longitudines in planis ſpeculis, ut re ipſa ſe habent ita apparent.

SIT oculus B; longitudo vero oblique poſita ſit Δ E, planum autem ſpeculum A Γ: igitur per radios reflexos cernitur punctum quidem Δ in puncto Z, punctum vero E in puncto H, apparentque in eodem ſitu, in quo re vera ſunt; id nempe quod propius eſt, propius apparet; quod autem remotius, remotius.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

Τὰ πλάγια μήκη ἐπὶ τῶν κυρτῶν ἐνόπτρων, καθάπερ ἐστὶν ἀληθῶς οὕτω καὶ φαίνεται.

Ἔστω μῆκος τὸ ΕΔ, ὄμμα δὲ τὸ Β, ἔνοπτρον δὲ κυρτὸν τὸ ΑΓ, ὄψεις δὲ ἀνακλώμεναι ἐπὶ τὰ Ε, Δ. τὰ δὲ ἄλλα, τὰ αὐτά.



PROP. X. THEOR.

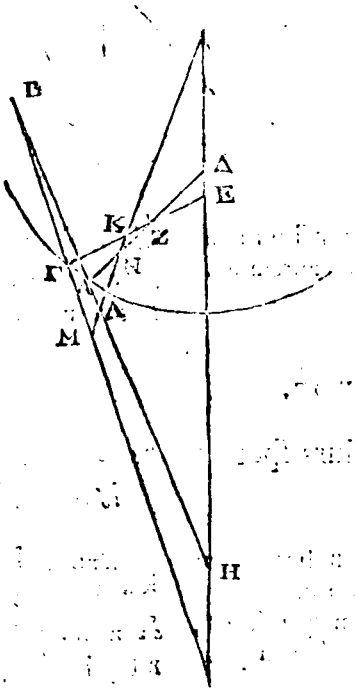
Obliquæ longitudines in convexis ſpeculis, in eodem ſitu apparent in quo revera ſunt.

SIT obliqua longitudo E Δ, oculus autem B, ſitque convexum ſpeculum A Γ, radii autem B Γ, B A reflectantur ad puncta E, Δ. reliqua ut in præcedenti.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Τὰ ὕψη καὶ τὰ βάθη ἐπὶ τῶν κοίλων ἐνόπτρων, ὅσα μέν ἐστιν ἐντὸς τῆς συμπτώσεως τῶν ὄψεων, ἀνεστραμμένα φαίνεται, καθάπερ καὶ τοῖς ἐπιπέδοις καὶ κυρτοῖς ἐνόπτροις· ὅσα δὲ ἐστὶν ἐκτὸς τῆς συμπτώσεως, καθάπερ ἐστὶν καὶ φαίνεται.

Ἔστω κοῖλον ἔνοπτρον τὸ ΑΓ, ὄμμα δὲ τὸ Β, ὄψεις δὲ ἀνακλώμεναι αἱ ΒΑ, ΒΓ, σύμπτωσις δὲ αὐτῶν ἐπὶ τὸ Ζ, ὕψη δὲ τὸ τε ΚΝ καὶ τὸ ΔΕ· καὶ τὸ μὲν ΚΝ ἐντὸς τῆς τοῦ Ζ συμπτώσεως, τὸ δὲ ΔΕ ἐκτὸς τῆς συμπτώσεως. ἐπεὶ οὖν ἐκβληθεισῶν, καθάπερ ἐν τοῖς ἐπιπέδοις καὶ κυρτοῖς ἐνόπτροις, φαίνεται τὸ μὲν Κ ἐπὶ τοῦ Μ, τὸ δὲ Ν ἐπὶ τοῦ Λ· ὥστε ἀνεστραμμένα φαίνεται. πάλιν ἐπὶ τοῦ ἐκτὸς τῆς συμπτώσεως ὕψος φαίνεται· τὸ μὲν Δ ἐπὶ τοῦ Η, τὸ δὲ Ε ἐπὶ τοῦ Θ, ὡς ἔχει οὕτως φαίνεται.



PROP. XI. THEOR.

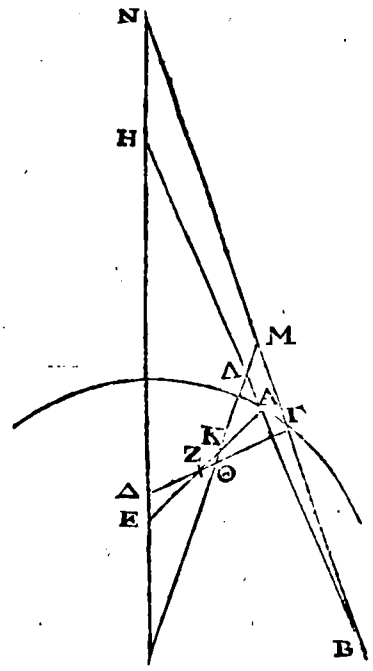
In cavis ſpeculis ſublimitates & profunditates, quæ ſunt intra concurſum radiorum, everſæ apparent, ut in planis ſpeculis; quæ autem ſunt extra concurſum, apparent ut re ipſa ſe habent.

SIT cavum ſpeculum A Γ, oculus autem B; radii vero reflexi B Δ, B Γ, qui concurrant in puncto Z, ſint autem ſublimitates duæ K N, Δ E; quarum K N quidem ſit intra concurſum Z, ſublimitas autem Δ E ſit extra concurſum. productis igitur radiis, quemadmodum in planis & convexis ſpeculis, apparet punctum quidem K in puncto M, punctum autem N in puncto Λ: everſa igitur apparent. contra vero fit in Δ E ſublimitate, quæ eſt extra concurſum; apparet enim punctum Δ in puncto H, punctum vero E in puncto Θ, eo nimirum modo quo ſe habent.

PRO-

PROFUNDITAS.

Sint rurſus profunditates duæ Δ E, K Θ, cavum autem ſpeculum A Γ, oculus vero B; radii denique reflexi B Γ Δ, B A E, qui concurrant in puncto Z. ſi igitur radii producantur, apparebunt puncta K, Θ everſa, punctum quidem K in puncto A, punctum vero Θ in puncto M, quemadmodum in planis & convexis ſpeculis. contra vero puncta Δ, E apparebunt eo modo quo ſe habent: punctum quidem inferius E, in puncto H; punctum autem ſuperius Δ, in puncto N.



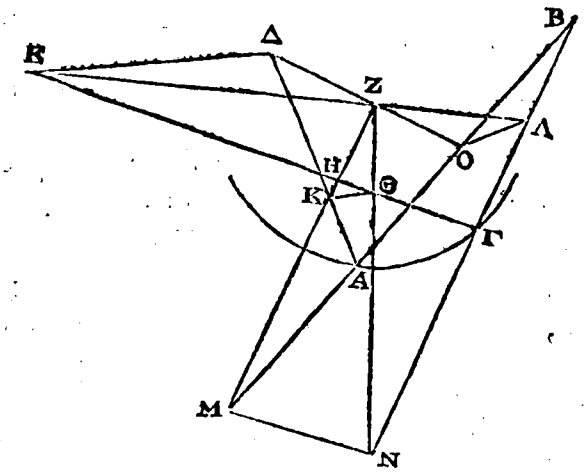
ΒΑΘΟΣ.

Πάλιν βάθος μὲν τὸ Δ E καὶ K Θ, ἔνοπτρον δὲ κοῖλον τὸ A Γ, ὄμμα δὲ τὸ B, ὄψεις δὲ ἀνακλώμεναι καὶ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Z αἱ B Γ Δ, B A E. σὺν οὖν ἐκβληθεισῶν τῶν ὄψεων, ὁμοίως τὰ μὲν K, Θ φαίνεται ἀνεστραμμένα, τὸ μὲν K κατὰ τὸ Λ, τὸ δὲ Θ κατὰ τὸ M, καθάπερ ἐν τοῖς ἐπιπέδοις καὶ κυρτοῖς ἐνόπτροις· τὰ δὲ Δ, E, καθάπερ ἐστὶ τὸ μὲν E κάτω κατὰ τὸ H, τὸ δὲ Δ ἄνω κατὰ τὸ N.

PROP. XII. THEOR.

In cavis ſpeculis obliquæ longitudines, intra concurſum radiorum poſitæ, apparent ut ſunt; quæ autem extra concurſum ſunt, everſæ apparent.

SInt obliquæ longitudines E Δ, Θ K, cavum autem ſpeculum A Γ, oculus vero B; ſintque radii reflexi B A Δ, B Γ E, qui concurrant in puncto H, & obliqua quidem longitudo Θ K ſit intra concurſum H; Δ E vero ſit extra eundem. puncta igitur Θ, K in ſuo naturali ſitu cernuntur, quemadmodum in planis & convexis ſpeculis; puncta verò E, Δ everſa apparent; punctum enim Δ apparet in puncto O, punctum autem E in puncto A.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Τὰ πλάγια μήκη ὑπὸ τῶν κοίλων ἐνόπτρων, ὅσα μὲν ἐντὸς τῆς συμπτώσεως κεῖται τῶν ὄψεων, καθάπερ ἐστὶν, οὕτω καὶ φαίνεται· ὅσα δὲ ἐκτὸς, ἀνεστραμμένα.

Ἔστω γὰρ μήκη μὲν πλάγια τὰ E Δ, Θ K, κοῖλον δὲ ἔνοπτρον τὸ A Γ, ὄμμα δὲ τὸ B, ὄψεις δὲ ἀνακλώμεναι καὶ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ H, αἱ B A Δ, B Γ E, καὶ τὸ μὲν Θ K πλάγιον μῆκος ἔστω ἐντὸς τῆς συμπτώσεως τῆς H, τὸ δὲ Δ E ἐκτός. σὺν οὖν τὰ μὲν Θ, K κατὰ φύσιν φαίνεται, καθάπερ ἐν τοῖς ἐπιπέδοις καὶ κυρτοῖς ἐνόπτροις, τὰ δὲ E, Δ ἀνεστραμμένα· τὸ μὲν γὰρ Δ ἐπὶ τοῦ O φαίνεται, τὸ δὲ E ἐπὶ τοῦ Λ.

PROP. XIII. THEOR.

Res eadem cerni poteſt per plura ſpecula plana.

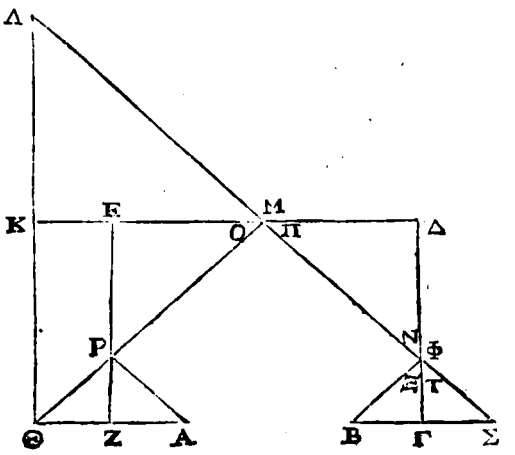
SIT aſpectabile A, oculus vero B, ſint autem tria ſpecula Γ Δ, Δ E, E Z; ducatur perpendicularis à puncto B in Γ Δ ſpeculum, quæ ſit B Γ, & ipſi B Γ ponatur æqualis Γ Σ; rurſuſque à pun-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Δυνατόν ἐστι διὰ πλειόνων ἐνόπτρων ἑνὶ πάθει ἰδεῖν τὸ αὐτό.

Ἔστω ὃ δεῖ ὀφθῆναι τὸ A, ὄμμα δὲ τὸ B, ἔνοπτρα δὲ τρία τὰ Γ Δ, Δ E, E Z, ἤχθω δὲ καθέτος ἀπὸ τοῦ B ἐπὶ τὸ Γ Δ ἔνοπτρον ἡ B Γ, ἴση δὲ ἡ B Γ τῇ Γ Σ, καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ

Α ἐπὶ τὸ ΕΖ κάθετος ἡ ΑΖ, καὶ τῇ ΑΖ ἴση ἡ ΖΘ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὸ ΔΕ ἐνόπτρου κάθετος ἤχθω ἡ ΘΚ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἡ ΚΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὸ Σ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΜΣ, ἀπὸ δὲ τοῦ Μ ἐπὶ τὸ Θ ἡ ΜΡΘ, ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ ΑΡ, ΒΦ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΣ, καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τὸ Γ γωνίαι· δύο δὴ αἱ ΒΓ, ΓΦ τοῖς ΣΓ, ΓΦ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΓΦ ὀρθὴ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΣΓΦ ὀρθῇ ἴση ἐστί, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν πρὸς τὸ Β γωνία τῇ πρὸς τὸ Σ, ἡ δὲ Ξ τῇ Τ. ἀλλ' ἡ Τ τῇ Ν ἐστιν ἴση, κατὰ κορυφὴν γάρ· ὥστε ἴση ἐστὶ καὶ ἡ Ν γωνία τῇ Ξ· ἡ ἄρα ΒΖ ὄψις ἀνακλασθήσεται ἐπὶ τὸ Μ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΘΚ τῇ ΚΛ, καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τὸ Κ· ἴση ἐστὶν ἡ Ο γωνία τῇ Π· ἀνακλᾶται ἄρα ἡ αὐτὴ ὄψις ἡ ΒΦΜ ἐπὶ τὸ Ρ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐπὶ τὸ Α, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΖΡΑ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΡΜ, ὁμοίως τοῖς λοιποῖς ἀποδείξομεν· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Β ὄμματος ὄψις τὸ Α διὰ τῶν τριῶν ἐνόπτρων ἀπιπέδων τῶν ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ.



ctο A ad ſpeculum EZ ducatur perpendicularis AZ, cui æqualis ſit ZΘ; & à puncto Θ ducatur ΘK perpendicularis ad ſpeculum ΔE; ſitque KA æqualis ipſi ΘK, & connectatur à puncto A in punctum Σ recta linea AMΣ; & à puncto M in punctum Θ recta linea MPΘ; connectantur denique rectæ AP, BΦ. quia igitur recta BΓ æqualis eſt rectæ ΓΣ, recti autem ſunt anguli ad punctum Γ poſiti; duæ igitur BΓ, ΓΦ duabus ΣΓ, ΓΦ ſunt æquales, utraque utrique; rectus item angulus BΓΦ æqualis eſt recto ΣΓΦ; & igitur [per 4. 1.] reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, quos æqualia latera ſubtendunt, angulus nempe B angulo Ξ, & angulus Ξ angulo T. ſed [per 15. 1.] angulus T æqualis eſt N, ſunt enim ad verticem: angulus igitur N æqualis eſt Ξ, quo fit [per 1. catop.] ut radius BΞ reflectatur verſus M. rurſus, quia æqualis eſt recta ΘK rectæ KA, recti vero ſunt anguli ad K; æqualis ergo eſt angulus O angulo Π: idem igitur radius BΦM reflectitur ad punctum P. eademque ratione idem radius reflectitur à puncto P ad punctum A, eo quod angulus ZPA æqualis eſt angulo EPM, quod ut in reliquis oſtendi poteſt: radius igitur emiſſus ex B oculo videt punctum A per tria plana ſpecula ΓΔ, ΔE, EZ.

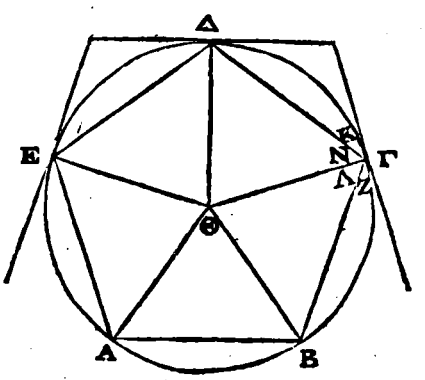
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἔστι δὲ καὶ δι' ἴσων ἂν τις ὑποτάξῃ ἐνόπτρων ἐπιπέδων, ἰδεῖν τὸ αὐτό· δεῖ δὲ κατὰ τὸ ἀριθμὸν τῶν ἐνόπτρων πολυγώνιον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον συνίστασθαι, δυσὶ πλείοσιν ἔχον πλευραῖς τῶν ἐνόπτρων.

PROP. XIV. THEOR.

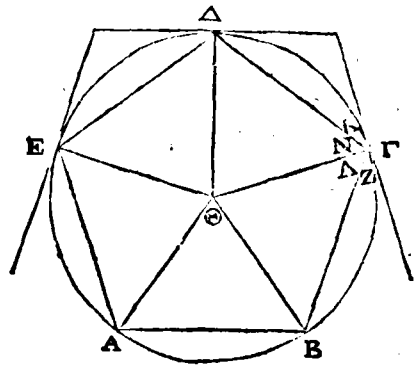
Fieri poteſt ut eadem res ſpectetur per quotlibet plana ſpecula: oportet autem deſcribere polygonum æquilaterum & æquiangulum, quod duobus lateribus excedat numerum ſpeculorum.

Ἔστω γὰρ ὁ μὲν ὀφθῆναι δεῖ τὸ Α, ὄμμα δὲ τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἀναγεγράφθω πολυγώνιον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον δύο πλευραῖς πλείους ἔχον τῶν ἐνόπτρων, καὶ ἔστω τὸ ΑΒΔ πολυγώνιον, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καθ' ὃν γεγράφθω τὸ πολύγωνον τὸ Θ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΓ, ΘΕ, ΘΔ, ΘΒ, ΘΑ ἐπὶ τὰς γωνίας, καὶ προσκείσθωσαν ἔνοπτρα ἐπίπεδα πρὸς ὀρθὰς τοῖς ἐπιζευγνυμέναις. ἐπεὶ οὖν ἴση



SIT aſpectabile A, oculus vero B; connectaturque recta AB, & ab AB deſcribatur polygonia figura æquilatera & æquiangula, cui ſint duo latera plura quam ſpecula, ſitque ea figura polygonia ABΔ; ſumaturque centrum circuli deſcripti circa ipſam, ſitque illud Θ, ex quo connectantur rectæ ΘΓ, ΘE, ΘΔ, ΘB, ΘA à centro ad ſingulos angulos; apponantur autem plana ſpecula eo modo ut angulos rectos faciant cum lineis à centro ductis. quia igi-

tur Z A angulus æqualis eſt angulo K N, uterque enim rectus eſt; ex quibus angulus N angulo A eſt æqualis: reliquus igitur Z reliquo K eſt æqualis: quare reflectio radii B Γ fiet in Δ; reflectiones enim [per 1. catop.] fiunt ad æquales angulos. eodem modo oſtendentur anguli ad Δ, E puncta inter ſe æquales: quare radius emiſſus à B, poſtquam in ſingula ſpecula inciderit, inde ſeſe reflectens perveniet ad punctum A.

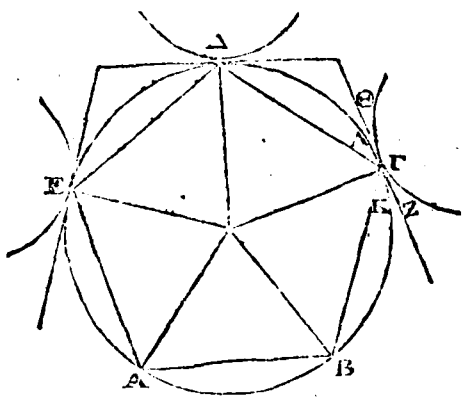


ἐστὶν ἡ Ζ Λ γωνία τῇ ΚΝ, ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἑκατέρα, ὧν ἡ Ν τῇ Λ ἴση ἐστί· λοιπὴ ἄρα ἡ Ζ τῇ Κ ἴση ἔσται· ὥστε ἡ ἀνάκλασις τῆς ΒΓ ὄψεως ἐπὶ τὸ Δ ἥξει, διὰ γὰρ ἴσων γωνιῶν αἱ ἀνακλάσεις γίνονται. ὁμοίως δὴ δειχθήσονται καὶ αἱ ὄψεις τοῖς Δ, Ε σημείοις γωνίαι ἴσαι αἱ πρὸς τοῖς ἐνόπτροις· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Β ὄψις ἀνακλωμένη, καὶ προσπεσοῦσα πρὸς πάντα τὰ ἔνοπτρα, ἥξει ἐπὶ τὸ Α.

PROP. XV. THEOR.

Fieri etiam poteſt ut eadem res ſpectetur per quotlibet ſpecula convexa vel concava.

SIT aſpectabile A, oculus autem B, deſcribaturque, velut in præcedente, polygonia figura æquilatera & æquiangula A B Γ Δ E, & in punctis Γ, Δ, E ponantur ſpecula ad incidentias radiorum. æqualis ergo eſt angulus Z angulo Θ, & angulus K angulo Λ: totus ergo angulus K Z toti angulo Θ Λ eſt æqualis: radius ergo B Γ reflectetur à convexo ſpeculo Γ ad convexum ſpeculum Δ, & à Δ ad E, & ab E ad A aſpectabile. unde liquet fieri poſſe ut res eadem cernatur per quotlibet ſpecula; ſive convexa, ſive cava, ſive milta.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

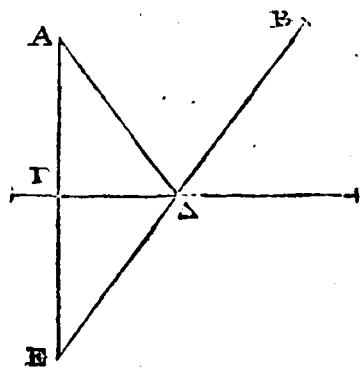
Ἔστι δὲ καὶ διὰ κυρτῶν ἐνόπτρων καὶ διὰ κοίλων ἰδεῖν τὸ αὐτό.

Ἔστω γὰρ ὁ δεῖ ἰδεῖν τὸ Α, ὄμμα δὲ τὸ Β, καὶ ὁμοίως ἀναγεγράφθω πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ πρὸς τοῖς Γ, Δ, Ε σημείοις ἔστω ἔνοπτρα κατὰ τὰς ἁφὰς τῶν ὄψεων. ὁσὴν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν Ζ τῇ Θ, ἡ δὲ Κ τῇ Λ· ὅλη ἄρα ἡ ΚΖ ἴση ἐστὶ τῇ ΘΛ· ἀνακλασθήσεται ἄρα ἡ ὄψις ἀπὸ τοῦ κυρτοῦ ἐνόπτρου τοῦ Γ ἐπὶ τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Α. φανερὸν ὅτι, ὅτι κυρτῶν ἢ κοίλων ὄντων ἁπάντων καὶ ἀναμεμιγμένων, ἐστὶν ἰδεῖν τὸ αὐτό.

PROP. XVI. THEOR.

Aſpectabile quodlibet in planis ſpeculis cernitur in perpendiculari ducta ab aſpectabili in ſpeculum.

SIT ſpeculum planum Γ Δ, oculus autem B, ſitque aſpectabile A, & ab aſpectabili in ipſum ſpeculum ducatur perpendicularis A Γ. quia igitur in phænomenis poſitum eſt, punctum A cerni non poſſe occupato loco in quo eſt Γ: igitur punctum A videbitur in aliquo puncto lineæ A Γ productæ in directum. videbitur autem in radio B Δ in directum producto: videbitur ergo in puncto E: eſt enim poſitum, rectum id eſſe cujus extremis media officiunt: quare A E, B E rectæ ſunt.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ις'.

Ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἐνόπτροις ἕκαστον τῶν ὁρωμένων κατὰ τὴν ἀπὸ τοῦ ὁρωμένου κάθετον ὁρᾶται.

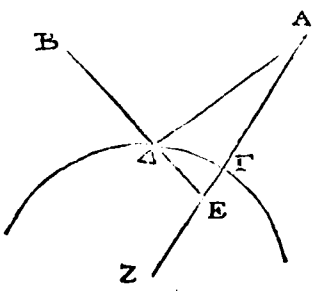
Ἔστω ἔνοπτρον ἐπίπεδον τὸ ΓΔ, ὄμμα δὲ τὸ Β, ὁρώμενον δὲ τὸ Α, καὶ ἔστω κάθετος ἡ ἀπὸ τοῦ ὁρωμένου ἐπὶ τὸ ἔνοπτρον ἡ ΑΓ. ὁσὴν ἐπεὶ ὑπέκειτο ἐν τοῖς φαινομένοις, ὅτι καταληφθέντος τοῦ τόπου τοῦ Γ, οὐχ ὁρᾶται τὸ Α· τὸ Α ἄρα ὀφθήσεται ἐπ' εὐθείας τῇ ΑΓ. ἀλλὰ δὴ καὶ ἐπ' εὐθείας τῇ ΒΔ ὄψει· κατὰ τὸ Ε ἄρα· ὑπέκειτο γὰρ εἶναί τι εὐθὺ ἐφ' οὗ τὸ μέσον τοῖς ἄκροις ἀποτελεῖται· ὥστε εὐθεῖα ἔσται ἡ ΑΕ καὶ ἡ ΒΕ.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Εν τοῖς κυρτοῖς ἐνόπτροις ἔχεται τῶν ὁρωμένων κατὰ τὴν ἀπὸ τοῦ ὁρωμένου εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἀγομένην εὐθεῖαν ὁρᾶν.

Ἔστω κυρτὸν ἔνοπτρον τὸ ΓΔ, ὄμμα δὲ τὸ Β, ὄψις ἡ ΒΔ ἀνακλωμένη ἐπὶ τὸ Α, καὶ ὁρᾶσθω τὸ Α, κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΔ ὄψις ἐπὶ τὸ Ε. ὅτι μὲν οὖν ἐπεὶ ὑπέκειτο ἐν τοῖς φαινομένοις, ὅτι, καταλιφθέντος τοῦ Γ, τὸ Α οὐχ ὁρᾶται· ὀφθήσεται ἄρα ἐπ' εὐθείας τῆς ΑΓ κατὰ τὴν συμβολὴν τῆς ΒΔ ὄψεως καὶ τῆς ΑΓ ἐπὶ τοῦ Ε, καθάπερ ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων.



PROP. XVII. THEOR.

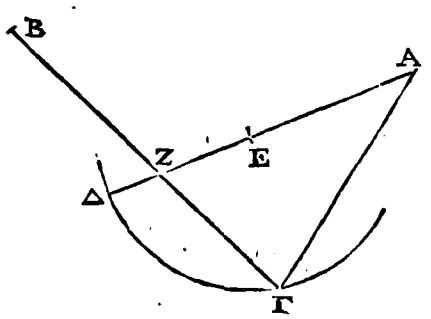
In convexis ſpeculis quodlibet aſpectabilium cernitur in linea recta ducta ab aſpectabili ad centrum ejus ſphæræ, cujus portio eſt ipſum convexum ſpeculum.

SIT convexum ſpeculum ΓΔ, oculus autem B; radius BΔ, qui reflectatur ad A; ſit vero Z centrum ſphæræ, connectaturque recta AZ, & producatur radius BΔ uſque ad E. quia igitur in phænomenis poſitum eſt A non cerni occupato loco Γ: igitur cernetur in linea AΓ producta in rectum; in eo videlicet loco in quo radius BΔ productus concurrit cum AΓ, nempe in puncto E, veluti in planis ſpeculis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Εν τοῖς κοίλοις ἐνόπτροις ἔχεται τὰ ὁρωμένων κατὰ τὴν ἀπὸ τοῦ ὁρωμένου εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἀγομένην εὐθεῖαν ὁρᾶται.

Ἔστω κοῖλον ἔνοπτρον τὸ ΓΔ, ὄψις δὲ ἀνακλωμένη ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Α ὁρώμενον, τῆς δὲ σφαίρας κέντρον ἔστω τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Ε ἐπεζεύχθω εὐθεῖα, καὶ ἐκβεβλήσθω. ὅτι μὲν οὖν ἐπεὶ ὑπέκειτο ἐν τοῖς φαινομένοις, ὅτι, καταλιφθέντος τοῦ τόπου τοῦ Δ, τὸ Α οὐχ ὁρᾶται, ὥστε φαίνεται ἐπ' εὐθείας τῆς ΑΕ· ὀφθήσεται ἄρα κατὰ τὴν συμβολὴν τῆς ΑΔ εὐθείας ⁊ τῆς ΒΓ ὄψεως κατὰ τὸ Ζ.



PROP. XVIII. THEOR.

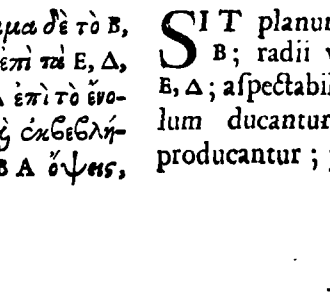
In cavis ſpeculis aſpectabilium quodlibet cernitur in recta linea ducta ab aſpectabili ad centrum ſphæræ, cujus portio eſt ipſum ſpeculum.

SIT cavum ſpeculum ΓΔ, radius vero ab oculo emiſſus BΓ, qui reflectatur ad aſpectabile A; ſit autem E centrum ſphæræ, cujus portio eſt ipſum ΓΔ ſpeculum; connectaturque recta AE, & producatur in rectum. quia igitur in phænomenis poſitum eſt ipſum A non cerni occupato loco Δ: igitur imago ipſius A aſpectabilis cernetur in ipſa AE linea recta in continuum producta: cernetur ergo in Z, in concurſu nempe ipſius AΔ rectæ cum radio BΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Εν τοῖς ἐπιπέδοις ἐνόπτροις τὰ δεξιὰ, ἀριστερὰ φαίνεται, καὶ τὰ ἀριστερὰ, δεξιά· καὶ τὸ ἀπόσημα τὸ ἀπὸ τοῦ ἐνόπτρου ἴσον ἐστίν.

Ἔστω ἐπίπεδον ἔνοπτρον τὸ ΑΓ, ὄμμα δὲ τὸ Β, ὄψεις δὲ αἱ ΒΑ, ΒΓ ἀνακλώμεναι ἐπὶ τὰ Ε, Δ, ὁρώμενον δὲ ἔστω τὸ ΕΔ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Δ ἐπὶ τὸ ἔνοπτρον κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΕΖ, ΔΘ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν· ἐκβεβλήσθωσαν δὴ καὶ αἱ ΒΓ, ΒΑ ὄψεις,

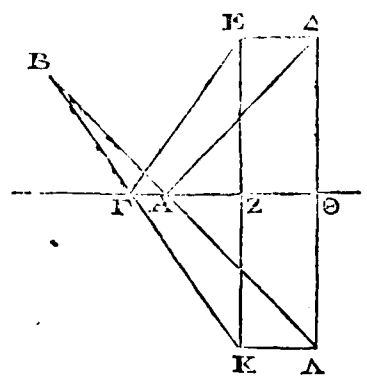


PROP. XIX. THEOR.

In planis ſpeculis dextra apparent ſiniſtra, & ſiniſtra dextra; itemque imago æqualis apparet aſpectabili; imago etiam & aſpectabile æqualiter diſtant à ſpeculo.

SIT planum ſpeculum AΓ, oculus autem B; radii vero BA, BΓ, qui reflectantur ad E, Δ; aſpectabile vero ſit EΔ, & ab E, Δ ad ſpeculum ducantur perpendiculares EZ, ΔΘ & producantur; producantur etiam radii BΓ, BA,

& concurrant cum perpendicularibus in punctis K, Λ, connectaturque recta AK. apparet igitur E quidem in K, ipsum autem Δ in Λ: id enim antea ostensum est [ad 16. catopt.] sinistra igitur dextra apparent, & dextra sinistra. Et quia angulus KΓZ æqualis est angulo ZΓE, & recti sunt anguli ad Z: æqualis igitur [per 26. 1.] est recta ZK rectæ ZE. eademque ratione æqualis ΔΘ rectæ ΘΛ: quare intervallum, quo EΔ distat à speculo, æquale est intervallo quo imago KΛ distat ab eodem. Item EΔ aspectabile æquale est ipsi KΛ imagini, eo quod EZ æqualis est ipsi ZK, & ΔΘ ipsi ΘΛ, earum vero utrique communis & ad angulos rectos ipsa ΘZΓ.



καὶ συμπιπτέτωσαν τῇς καθέτοις κατὰ τὰ K, Λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AK. φανερὸν φαίνεται τὸ μὲν E ὅπὶ τὸ K, τὸ δὲ Δ ὅπὶ τὸ Λ, τοῦτο γὰρ ωεοδέιχθη· τὰ ἄρα ἀριστερὰ, δεξία φαίνεται, & τὰ δεξιὰ, ἀριστερά. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν KΓZ γωνία τῇ ὑπὸ ZΓE, καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ ωεὸς τῷ Z· ἴση ἄρα ἂν εἴη καὶ ἡ ZK τῇ ZE. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΘ τῇ ΘΛ· ἴσον ἄρα τὸ ἀπόσημα, ᾧ ἀπέχει ἀπὸ τῆς ἐπόπτρου τὸ EΔ, τῷ ᾧ ἀπέχει τὸ εἴδωλον τὸ KΛ. Καὶ ἴσον τὸ ὁρώμενον τὸ EΔ τῷ εἰδώλῳ τῷ KΛ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν μὲν EZ τῇ ZK, τὴν δὲ ΔΘ τῇ ΘΛ, κοινὴν δὲ τὴν ωεὸς ὀρθὰς τὴν ΘZΓ.

PROP. XX. THEOR.

In convexis speculis sinistra apparent dextra, & dextra sinistra; & imago propius abest à speculo, quam aspectabile.

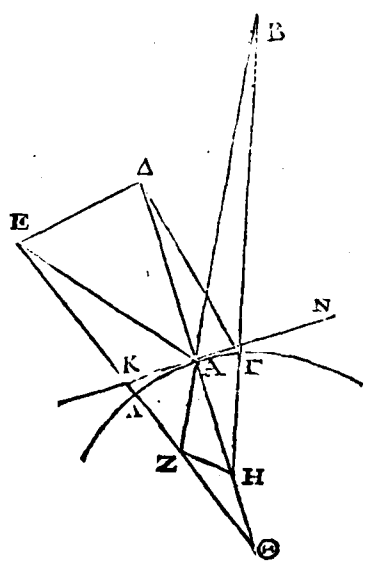
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐν τοῖς κυρτοῖς ἐσόπτροις τὰ ἀριστερὰ, δεξιὰ φαίνεται, καὶ τὰ δεξιὰ, ἀριστερά· καὶ τὸ ἀπόσημα ἀπὸ τῆς ἐπόπτρου τὸ εἴδωλον ἔλαττον ἔχει.

SIT convexum speculum AAΓ; centrum autem sphæræ, cujus portio est ipsum AAΓ speculum, sit Θ; sitque oculus B; radii autem sint BA, BΓ, qui reflectantur ad Δ, E, sitque aspectabile ΔE; ex centro autem Θ ad Δ, E ducantur rectæ ΘΔ, ΘE, producanturque BA, BΓ radii usque ad puncta Z, H; connectaturque recta ZH, quæ [per 17.catop.] erit imago. igitur Δ apparet in H, & E in Z: quare dextra apparent sinistra, & sinistra dextra.

Dico præterea majorem esse BA quam AZ.

Per punctum enim A ducatur recta linea KAN, quæ tangat circulum in puncto A. quia ergo BA, AE æquales faciunt angulos cum circuli circumferentia, propter reflectionem; recta autem KAN circulum tangit: igitur linea KAN bifariam dividit angulum EAZ. & obtusus [per 16. 1. & 18. 3.] est angulus K: major est igitur EK quam KZ: ergo multo major est EA quam AZ: minus ergo distat imago ZH à speculo quam EΔ aspectabile.



Ἔστω ἔσοπτρον κυρτὸν τὸ ΛAΓ, κέντρον δὲ τῆς σφαίρας τὸ Θ, ὄμμα δὲ τὸ B, ὄψεις δὲ αἱ BA, BΓ ἀνακλώμεναι ὅπὶ τὸ Δ, E, ὁρώμενον δὲ τὸ ΔE, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ κέντρου ἤχθωσαν ὅπὶ τὰ Δ, E αἱ ΘΔ, ΘE, καὶ ἐκβεβλήθωσαν αἱ ὄψεις ὅπὶ τὰ Z, H, καὶ ἐπεζεύχθω τὸ ZH εἴδωλον. φανερὸν τὸ μὲν Δ φαίνεται ἐπὶ τοῦ H, τὸ δὲ E ἐπὶ τὸ Z· τὰ ἄρα δεξιὰ, ἀριστερὰ φαίνεται, καὶ τὰ ἀριστερὰ, δεξιά.

ΑΕΓΩ ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ EΛ τῆς AZ.

Ηχθω γὰρ διὰ τοῦ A ἐφαπτομένη τῆς ωεριφερείας ἡ KAN. ἐπεὶ οὖν αἱ BA, AE ωεὸς τὴν ωεριφέρειαν ἴσας γωνίας ωοιοῦσι διὰ τὴν ἀνάκλασιν, ἐφάπτεται δὲ ἡ KAN· δίχα ἂν εἴη τετμημένη ἡ ὑπὸ τῶν EAZ γωνία. καὶ ἀμβλεῖά ἐστιν ἡ K γωνία· [1] μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ EK τῆς KZ· πολλῷ μᾶλλον ἡ EA τῆς AZ· ἔλαττον ἄρα ἀπέχει τὸ εἴδωλον τὸ ZH τοῦ ἐσόπτρου.

PROP. XXI. THEOR.

In convexis speculis imagines sunt minores aspectabilibus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Ἐν τοῖς κυρτοῖς ἐσόπτροις τὸ εἴδωλον ἔλαττόν ἐστι τοῦ ὁρωμένου.

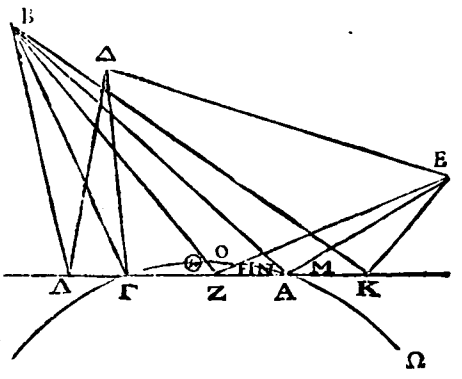
SIT convexum speculum AOΓ, oculus B; radii autem BA, BΓ, qui reflectantur ad

Ἔστω γὰρ κυρτὸν ἔσοπτρον τὸ AOΓ, ὄμμα δὲ τὸ B, ὄψεις δὲ ἀνακλώμεναι αἱ BA, BΓ ἐπὶ

[1] Quia enim AKE major est quam AKZ, & anguli ad A æquales; KEA minor erit quam AZK; quare EA major quam AZ, & per 3. 6. EK quam KZ major. *Savil.*

τὰ

τὰ Δ, Ε. οὐκοῦν ἀπὸ τοῦ κυρτοῦ τοῦ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἐνόπτρου θεωρεῖται τὸ ΕΔ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. ἐπιζευχθω δὴ ἔνοπτρον ἐπίπεδον τὸ ΑΓ, ἀπτόμενον τῶν ὄψεων κατὰ τὰ Α, Γ. οὐκοῦν ἡ ὄψις, μέλλουσα ἰδεῖν τὸ Ε ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ἐνόπτρου οὐκ ἔστιν ἡ ΒΑΕ· ἡ γὰρ ποιεῖ γωνίας ἴσας πρὸς τῷ ἐπιπέδῳ ἐνόπτρῳ, οὐδὲ μὴν κλασθήσεται μεταξὺ τῶν Α, Γ. κεκλάσθω γάρ, εἰ δυνατὸν, καὶ ἔστω ἡ ΒΖ ὄψις· ἴση ἄρα ἡ Η γωνία τῇ Θ γωνίᾳ. ἄτοπον τῷ ἀνάκλασιν. ἡ δὲ Θ μείζων τῆς Ν, ἡ δὲ Μ τῆς Η· ὥστε καὶ Μ τῆς Ν μείζων ἐστὶν, ὅπερ ἀδύνατον· αὐτὴ γὰρ ἡ Ν μείζων τῆς Μ ἐστιν, ἴση [1] γάρ ἐστιν ὅλη τῇ πρὸς τῇ περιφερείᾳ· ἐκτὸς ἄρα ἀνακλασθήσεται τοῦ Α. κεκλάσθω γάρ, καὶ ἔστω ἡ ΒΚΕ. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ ΒΔΔ πεσεῖται ἐκτός· τὸ ἄρα ΕΔ ὑπὸ μείζονος γωνίας θεωρεῖται ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ἐνόπτρου τῆς περιεχομένης ὑπὸ ΚΒΛ ἢπερ ἀπὸ τοῦ κυρτοῦ. ἴσον δὲ ἐφάνη φαινόμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐνόπτρῳ· φανερὸν ἄρα ὅτι ἀπὸ τοῦ κυρτοῦ ἐνόπτρου τὸ εἰδωλον ἔλασσον φαίνεται τοῦ ὁρωμένου.

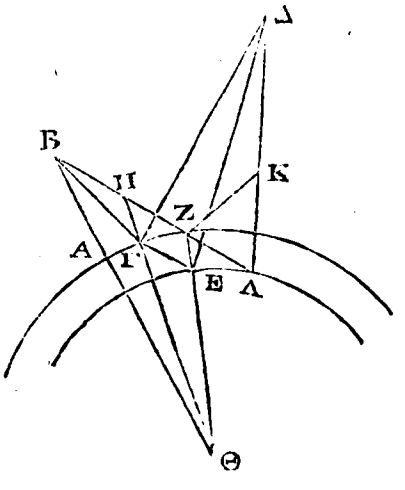


puncta Δ, Ε: igitur aſpectabile ΕΔ cernitur à ſpeculo convexo ſub angulo ΑΒΓ. apponatur huic convexo ſpeculo planum ſpeculum, quod ſit ΑΓ: tangatque ipſos ΒΑ, ΒΓ radios in punctis Α, Γ. radius igitur, qui reflexus à plano ſpeculo viſurus ſit punctum Ε, non eſt ΒΑΕ; non enim facit æquales angulos cum plano ſpeculo, neque reflectetur ad Ε ab aliquo puncto poſito inter Α, Γ. reflectatur enim, ſi fieri poſſit, ſitque radius ΒΖ: æqualis ergo eſt [per 1. catop.] Η angulus angulo Θ, propter reflectionem. angulus autem Θ [per 16. 1.] major eſt Ν, & angulus Μ angulo Η: quare Μ major erit quam Ν, quod eſt abſurdum; idem enim Ν major eſt Μ, æqualis enim eſt toti angulo ad circumferentiam. ergo radius reflexus reflectetur ab aliquo puncto extra Α. reflectatur ergo, ſitque ΒΚΕ. eodem modo ΒΛΔ, radius à ſpeculo plano reflexus ad Δ, cadet extra ΑΓ: igitur ipſius ΕΔ imago à ſpeculo plano cernitur ſub angulo ΚΒΛ, qui major eſt quam angulus ΑΒΓ, ſub quo cernitur à convexo ſpeculo. oſtenſum autem eſt [ad 19. catop.] imaginem æqualem aſpectabili apparere in ſpeculo plano: conſtat ergo in convexis ſpeculis imaginem apparere minorem aſpectabili.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϚ'.

Ἐν τοῖς κυρτοῖς ἐνόπτροις ἀπὸ τῶν ἐλαττόνων σφαιρῶν ἐλάττονα φαίνεται τὰ εἴδωλα.

Ἔστω σφαῖρα μείζων μὲν ἡ ΑΓ, ἐλάττων δὲ ἡ ΕΛ, περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Θ, ὄμμα δὲ τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΑΘ, καὶ ἀπὸ τῆς σφαίρας ἀνακεκλάσθω ὄψις ἡ ΒΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ἀνακλασθησομένη ὄψις ἀπὸ τῆς ἐλάττονος σφαίρας ἐπὶ τὸ Δ, ὅπου μὲν τοῦ Γ πεσεῖται, ὅτι ἐκτὸς τοῦ Γ. πεπτώτω γὰρ πρότερον, εἰ δυνατὸν, μεταξὺ τοῦ Γ, Ζ ἀνακεκλάσθω ἀπὸ τῆς ἐλάττονος σφαίρας ἐπὶ τὸ Δ, καὶ ἔστω ἡ ΒΕΔ· καὶ ἐπεζεύχθω ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὸ Γ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η. δίχα δὴ τεμεῖ ἡ ΘΓΗ τὴν ὑπὸ τῶν ΒΓΔ γωνίαν, ἀπὸ τὸ τὴν ὑπὸ ΒΓΔ ἴσας ποιεῖν γωνίας πρὸς τῇ Γ περιφερείᾳ, ἀπὸ τὸ ἀνάκλασιν. ἀπὸ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὸ Ε διεζευγνυμένη καὶ ἐκβληθεῖσα δίχα τεμεῖ τὴν ὑπὸ ΒΕΔ. τεμνέτω,



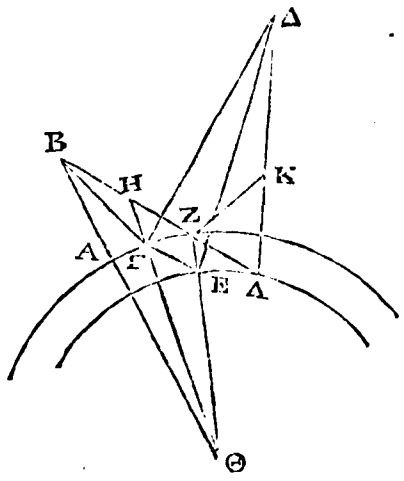
Prop. XXII. Theor.

In convexis ſpeculis minoribus minores imagines apparent.

Sint circa idem centrum Θ duo ſphærica ſpecula convexa, quorum ΑΓ ſit majus, ΕΛ vero ſit minus; ſitque oculus Β, connectaturque recta ΒΑΘ; & ex Γ puncto ſphærici ſpeculi reflectatur radius ΒΓΔ ad Δ aſpectabile: dico fieri non poſſe ut radius, qui à minore ſpeculo ſphærico reflectetur ad Δ, cadat in idem minus ſpeculum per Γ punctum majoris ſpeculi, vel per aliud punctum poſitum extra Γ, id eſt, contentum inter Γ & Ζ. ſi enim id fieri poteſt, cadat prius per Γ punctum, & reflectatur à minore ſpeculo ſphærico ad Δ, ſitque ΒΕΔ; connectaturque recta ΘΓ, & producatur uſque ad Η. igitur recta ΘΓΗ bifariam ſecabit angulum ΒΓΔ, eo quod [per 1. catop.] ΒΓΔ æquales facit angulos ad Γ punctum circumferentiæ, propter reflectionem. eademque ratione connexa recta linea ex Θ in Ε & producta bifariam ſecabit angulum ΒΕΔ. ſecet,

1 Quin potius ΒΑΟ, qui minor eſt quam Ν, major eſt quam Μ. ἴση γάρ ἐστιν ὅλη τῇ πρὸς τῇ περιφερείᾳ. ſc. γωνίᾳ ΕΑΩ per primam hujus. *Savil.*

ſitque ΘEZ. quia igitur [per 16. 1.] angulus BΓΔ major eſt BEΔ, & illius dimidium dimidio hujus majus eſt: major ergo eſt angulus BΓH angulo BEZ. eſt vero etiam [per 15. & 16. 1.] minor, quod eſt abſurdum: fieri ergo non poteſt ut radius, ad minus ſpeculum reflexus in Δ, tranſeat per punctum Γ. his poſitis, cadat extra punctum Γ radius BA in minus ſpeculum, à quo reflectatur ad Δ; ſecetque majus ſpeculum in Z; radius autem à Z reflexus ſc. BZK minime concurret cum ΓΔ, id enim [ad 4. catop.] oſtenſum eſt. concurrat igitur cum ΛΔ in K: radius igitur BZK reflexus à majore ſpeculo cernit punctum K, ipſe item radius BAK reflexus à minore ſpeculo cernit idem punctum K. id autem fieri non poſſe ſupra oſtenſum eſt: radius igitur, qui ab oculo emiſſus in minus ſpeculum reflectitur in punctum Δ, cadet per aliquod punctum poſitum inter Γ, A. eodem modo oſtendetur idem in altera etiam parte fieri: igitur angulus B, ſub quo cernitur Δ aſpectabile, minor fit à minore ſpeculo quam à majore: quare [per 6. poſit. opt.] imago rei aſpectabilis minor apparebit in minore ſpeculo.

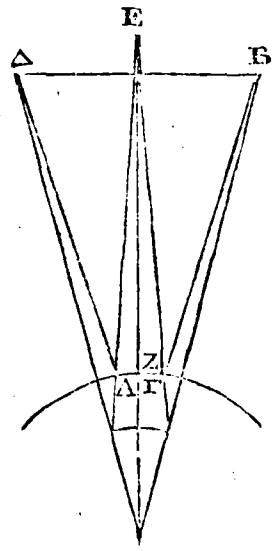


καὶ ἔσω ἡ ΘEZ. ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν BΓΔ τῆς ὑπὸ BEΔ, καὶ ἡμισεῖα τῆς ἡμισείας, μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ BΓH τῆς ὑπὸ BEZ. ἔστι δὲ καὶ ἐλάσσων, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἥξει ἀπὸ τοῦ Γ ἀνακλωμένη ὄψις ἐπὶ τὴν ἐλάσσονος σφαίρας. ὑποκείσθω δὲ πάλιν τὰ αὐτὰ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς σφαίρας ἀνακλωμένη ὄψις ἡ BAΔ ἐκτὸς πιπτέτω τοῦ Γ, καὶ τεμνέτω ἡ BA τὴν μείζονα σφαῖραν κατὰ τὸ Z, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Z ἀνακλωμένη ὄψις ἡ BZK ἀ συμπεσεῖται τῇ ΓΔ, τοῦτο γὰρ δέδεικται· τῇ ἄρα ΛΔ συμπιπτέτω κατὰ τὸ K. ἡ ἄρα BZK ὄψις ἀνακλωμένη ἀπὸ τοῦ μείζονος ἐνόπτρου ὁρᾷ τὸ K. καὶ ἡ αὐτὴ ἡ BAK ἀνακλωμένη ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος ἐνόπτρου ὁρᾷ τὸ αὐτὸ K. τοῦτο δὲ ἐπάνω ἐδείχθη ἀδύνατον· μεταξὺ ἄρα πεσεῖται τῶν Γ, A ἡ ἀνακλωμένη ὄψις ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος ἐνόπτρου ἐπὶ τὸ Δ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ ἑτέρου μέρους τὸ αὐτὸ ποιοῦσα· ὑπὸ ἐλάσσονος ἄρα θεωρεῖται γωνίας τῆς πρὸς τὸ B γιγνομένης, ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος ἐνόπτρου ἢπερ ἀπὸ τοῦ μείζονος· ἔλαττον ἄρα φαίνεται τὸ εἴδωλον ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος ἐνόπτρου.

PROP. XXIII. THEOR.

In convexis ſpeculis aſpectabilium imagines apparent convexæ.

SIT convexum ſpeculum AΓ, oculus autem E, à quo emittantur radii EA, EΓ, qui reflectantur ad Δ, B; radius autem ZE reflectatur in ſeipſum ad E. radiorum igitur longiſſimi ſunt, qui ad remotiſſimas partes tendunt; qui autem ad medium rei aſpectabilis tendunt, ſunt breviſſimi, ut radius EZ: igitur E propius videtur à ſpeculo diſtare; puncta vero B & Δ longius: itaque tota imago convexa apparet.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Ἐν τοῖς κυρτοῖς ἐνόπτροις τὰ εἴδωλα κυρτὰ φαίνεται.

ἜΣτω κυρτὸν ἔνοπτρον τὸ AΓ, ὄμμα δὲ τὸ E, ὄψεις δὲ ἀνακλώμεναι αἱ EA, EΓ ἐπὶ τὰ Δ, B, ἡ δὲ ZE ἀνακλωμένη δι' ἑαυτῆς ἐπὶ τὸ E. τῶν δὴ ὄψεων μέγισταί μέν εἰσι τῷ μήκει αἱ περιφερέσταται, ἐλάχισται δὲ αἱ κατὰ μέσον, ὥσπερ ἡ EZ· φαίνεται ἄρα τοῦ ἐνόπτρου ἔγγιον μᾶλλον τὸ E, περιφερέσταται δὲ τὸ B καὶ τὸ Δ· ὥστε ὅλον κυρτὸν φαίνεται.

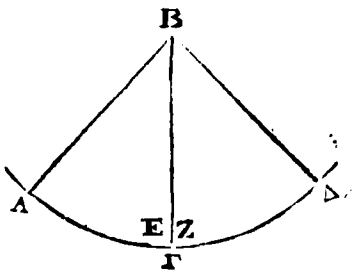
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ'.

Εν τοῖς κοίλοις ἐνόπτροις, ἐὰν ὀπὶ ᾧ κέντρῳ τὸ ὄμμα τεθῇ, ταὐτὸ μόνον φαίνεται τὸ ὄμμα.

PROP. XXIV. THEOR.

In cavis ſpeculis, ſi oculus ponatur in centro ſpeculi, ſeipſum tantum cernet.

ΕΣτω κοῖλον ἔνοπτρον τὸ ΑΓΔ, κέντρον δὲ αὐτοῦ τὸ Β, ὄψεις δὲ αἱ ΒΑ, ΒΓ, ΒΔ. ἀκὸν ἴση ἡ Ε γωνία τῇ Ζ· ἤξει ἄρα ἡ ἀνακλωμένη ΒΓ ὄψις ἐπὶ τὸ Β. ὁμοίως δὲ καὶ αἱ λοιπαί· αὐτὸ ἄρα μόνον ὄψεται τὸ Β.



SIT concavum ſpeculum ΑΓΔ, ejus vero centrum Β; radii autem ab oculo in ſpeculum miſſi ſint ΒΑ, ΒΓ, ΒΔ. igitur angulus Ε æqualis eſt angulo Ζ: quare dius ΒΓ reflectetur ad Β. idem facient reliqui radii: quare ipſe Β oculus ſeipſum tantum cernet.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

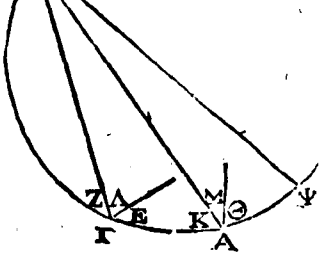
Εν τοῖς κοίλοις ἐνόπτροις, ἐὰν ὀπὶ τὴν περιφερείας ᾖς τὸ ὄμμα, ἢ ἔξω τῆς περιφερείας· οὐ φανεται τὸ ὄμμα.

PROP. XXV. THEOR.

In cavis ſpeculis, ſi oculum colloces in circumferentia aut extra circumferentiam; ipſe oculus non apparebit.

ΕΣτω κοῖλον ἔνοπτρον τὸ ΑΓΒ, καὶ τὸ ὄμμα κείσθω ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ τὸ Β, ὄψεις δὲ προσπιπτέτωσαν αἱ ΒΑ, ΒΓ, καὶ ἀνακεκλάσθωσαν. ἀκὸν μείζων ἐστὶν ἡ μὲν ΜΘ γωνία τῆς Κ [1], ἡ δὲ ΕΛ τῆς Ζ· ὥστε οὐκ ἀνακλασθήσονται αἱ ΒΑ, ΒΓ ὄψεις ἐπὶ τὸ Β ὄμμα. εἰς τὸ ὄμμα δὲ οὐ ἀνακλῶντα, ἴσαι αἱ γωνίαι πρὸς τοῖς Α, Γ ἐγίγνοντο.

Δειχθήσεται δὲ κἂν ἐκτὸς τῆς περιφερείας γένηται τὸ ὄμμα, τὰ αὐτὰ συμβαίνοντα, τοῦτ' ἔστι τὸ μὴ ὁρᾶσθαι τὸ ὄμμα, διὰ τὸ τὰς ἀνακλάσεις μὴ γενέσθαι ἐπ' αὐτό.



SIT concavum ſpeculum ΑΓΒ, & oculus Β ſtatuatur in ipſius circumferentia, ab eoque emittantur in ſpeculum radii ΒΑ, ΒΓ, & reflectantur. ergo angulus ΜΘ major eſt angulo Κ, & angulus ΕΛ major Ζ: igitur radii ΒΑ, ΒΓ non reflectentur ad Β oculum. ſi enim reflecterentur ad oculum, æquales eſſent anguli quos radii faciunt cum circumferentia ad puncta Α, Γ.

QUOD ſi oculus ponatur extra ſpeculi circumferentiam, idem ei accidere demonſtrabitur; nempe oculum non cerni, eo quod reflectiones ad ipſum non fiant.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Εν τοῖς κοίλοις ἐνόπτροις, ἐὰν ἀπὸ σφαλῶν διάμετρον τῆς σφαίρας ἀπὸ ᾧ κέντρῳ πρὸς ὀρθὰς ἀναγάγῃς, καὶ εἰς τὸ ἕτερον μέρος ᾖς τὸ ὄμμα· οὐδὲν τῶν ἐν τῷ αὐτῷ μέρει, ἐν ᾧ τὸ ὄμμα ἐστὶν, ὀφθήσεται· τοῦτ' ἔστιν, οὔτε τῶν ἐντὸς τῆς διαμέτρου, οὔτε τῶν ἐκτὸς τῆς διαμέτρου, οὔτε τῶν ἐπὶ τῆς διαμέτρου.

PROP. XXVI. THEOR.

In ſpeculis concavis, ſi à centro ad circumferentiam excites rectam lineam quæ angulos rectos faciat cum ejuſdem ſphærici ſpeculi producta diametro, & oculum ſtatuas ad alterutram partem; oculus nil cernet eorum quæ ſunt in ea parte in qua ipſe eſt: hoc eſt, nihil eorum cernet quæ ſunt vel intra diametrum, vel extra diametrum, vel in ipſa diametro.

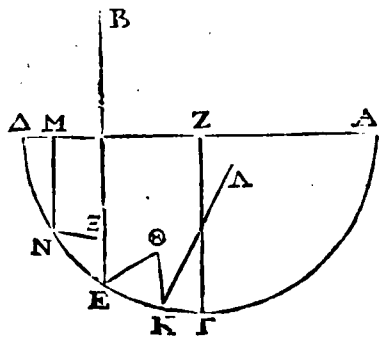
ΕΣτω κοῖλον ἔνοπτρον τὸ ΑΓΔ, διάμετρος δὲ ἔστω τῆς σφαίρας ἡ ΑΔ, καὶ τῇ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ Ζ ἡ

SIT concavum ſpeculum ΑΓΔ; diameter vero ſphæræ, cujus portio eſt ipſum ſpeculum, ſit ΑΔ, in qua ſit centrum Ζ, à quo exci-

1 Et quid ita? quaſi vero, poſita ΒΨ ſemidiametro, non ſint anguli ad Ψ futuri æquales, ut ſit neceſſarium omnino τὰς ὄψεις in ſe ἀνακλᾶσθαι. *Savil.*

tetur

tetur recta ZΓ ad angulos rectos ipſi ΑΔ; ſitque oculus B extra diametrum, & radius BE. igitur BE radius ſeſe reflectens, nec ad B nec ad Z ſe reflectet; reflectitur enim ad æquales angulos: ſe igitur reflectet ut EΘ. ſimiliter ſi oculus ſtatuatur intra diametrum ad Θ, aut in ipſa diametro ad M, radii ΘK, MN ſe reflectent ut KΛ, NΞ: nihil igitur cernitur eorum quæ ſunt ad eandem ſemidiametri partem ad quam eſt oculus, neque eorum quæ ſunt in ipſa diametro, neque eorum quæ ſunt extra diametrum, neque eorum quæ ſunt intra.

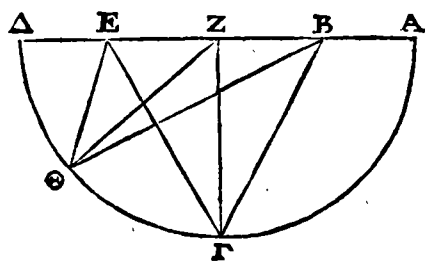


ΖΓ, ὄμμα δὲ ἔσω τὸ Β ἐκτὸς τῆ διαμέτρυ, ὄψις δὲ ἡ ΒΕ. ἀκὴν ἡ ΒΕ ἀνακλωμδύη ἐχ ἥξει ἔπι ἐπὶ τὸ Β ἔπι ἐπὶ τὸ Ζ, ἐπ γὰρ ἴσης γωνίας ἀνακλᾶται· ἥξει ἄρα ὡς ἡ ΕΘ. ὁμοίως δὲ καὶ ἐὰν ἐντὸς ἐμπεσῆ τὸ ὄμμα ὅπυ τὸ Θ, ἡ ἐπὶ τῆς διαμέτρυ ὅπυ τὸ Μ, ἀνακλώμδυαι αἱ ὄψεις αἱ ΘΚ, ΜΝ ἥξουσιν ὡς αἱ ΚΛ, ΝΞ· ἐχ ἄρα ὁρᾶται ἀδὲν τῶν ἐν τῷ αὐτῷ μέρει ὅπυ ἐςὶ τὸ ὄμμα, ἔπι τῶν ἐπὶ τῆς διαμέτρυ, ἔπι τῶν ἐντὸς τῆς διαμέτρυ, ἔπι τῶν ἐντός.

Prop. XXVII. Theor.

In concavis ſpeculis, ſi oculi ita conſtituantur in diametro ut uterque à centro æqualiter diſtet, neuter oculorum cernetur.

SIT concavum ſpeculum ΑΓΔ, ejuſque diameter ΑΔ, centrum autem Z, à quo excitetur ΖΓ ad angulos rectos ipſi ΑΔ; ſint vero oculi B, E æqualiter diſtantes à centro Z, ſitque radius BΓ: is ergo ſe reflectens veniet ad E; reflectitur enim ſecundum æquales angulos. nullus autem alius reflectetur ad E, ex. gr. BΘ. nam, ſi fieri poteſt, reflectatur ad E, connectanturque ΘE, ΘZ: igitur [per 1.catop.] angulus BΘE bifariam ſecatur à ΖΘ. ſunt ergo in eadem ratione [per 3. 6.] ut BΘ ad ΘE ſic BZ ad ZE, quod fieri nequit; BΘ enim major eſt [per 7. 3.] quam ΘE, ipſa autem BZ [ex hyp.] æqualis eſt ipſi ZE: nullus igitur radius emiſſus à B reflectetur ad E, præter BΓ: unus igitur radius ad utrumque oculorum B, E reflectetur. & non cernetur E, quia BΓ productus non concurret cum BΔ ad partes Γ, Δ; imagines autem aſpectabilium [per 18.catop.] apparent in ſolo concurſu radii ab oculo emiſſi cum recta ab aſpectabili per centrum ſpeculi: nec vero EΓ concurret cum EA, ad partes Γ, Α; in concavis enim ſpeculis aſpectabilium imagines viſuntur in recta ab aſpectabili ad centrum ipſius ſphæræ ducta.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

Ἐν τοῖς κοίλοις ἐνόπτροις, ἐὰν ὑπὸ τῆς διαμέτρυ τεθῆ τὰ ὄμματα ἴσον ἀπέχοντα τῦ κέντρυ· οὐδ' ἕτερον τῶν ὀμμάτων ὀφθήσεται.

ΕΣτω κοῖλον ἔνοπτρον τὸ ΑΓΔ, διάμετρος δὲ ἡ ΑΔ, κέντρον δὲ τὸ Ζ, πρὸς ὀρθὰς δὲ ἡ ΖΓ, ὄμματα δὲ τὰ Β, Ε ἴσον ἀπέχοντα τῦ κέντρυ, ὄψις δὲ ἡ ΒΓ· οὐκοῦν ἀνακλωμδύη ἥξει ἐπὶ τὸ Ε, ἐπ ἴσης γὰρ γωνίας ἀνακλᾶται. ἄλλη δὲ οὐδεμία ἥξει, ὡς ἡ ΒΘ. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΕ, ΘΖ· δίχα ἄρα τμηθήσεται ἡ ὑπὸ ΒΘΕ ὑπὸ τῆς ΖΘ, καὶ ἀνάλογον ἔσται ὡς ἡ ΒΘ πρὸς ΘΕ ὕτως ἡ ΒΖ πρὸς ΖΕ, ὅπερ ἀδυνατόν, ἡ μὲν γὰρ ΒΘ μείζων ἐςὶ τῆς ΘΕ, ἡ δὲ ΒΖ ἴση τῇ ΖΕ· οὐδεμία ἄρα ἥξει ἀνακλωμένη ἀπὸ τῦ Β ἐπὶ τὸ Ε· μία ἄρα ὄψις ἀνακλαθήσεται ἐφ' ἑκατέρυ τῶν Β, Ε ὀμμάτων. καὶ ἐχ ὀφθήσεται τὸ Ε, ἐ γὰρ συμπεσεῖται ἡ ΒΓ ἐκβαλλομένη τῇ ΒΔ ἐπὶ τὰ Γ, Δ μέρη, ἐφαίνετο δὲ ἕκαστον κατὰ τὸ συμβολὸ μόνον τῶν ὁρωμένων· οὐδὲ ἡ ΕΓ ἐ μὴ συμπεσῇ τῇ ΕΑ ἐπὶ τὰ Γ, Α μέρη, ἐν γὰρ τοῖς κοίλοις ἐνόπτροις ἕκαστον τῶν ὁρωμένων κατὰ τὸ ἀπὸ τῦ ὁρωμένυ εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἀγομένην εὐθεῖαν ὁρᾶται.

Prop. XXVIII. Theor.

In cavis ſpeculis, ſi ſemidiametrum bifariam ſeces, & à puncto ſectionis lineam ad angulos rectos utrinque ducas, oculos autem ita colloces ut æqualiter di-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Ἐν τοῖς κοίλοις ἐνόπτροις, ἐὰν τινὸ ἐκ τῦ κέντρυ δίχα τεμών, πρὸς ὀρθὰς ἀγαγών, θῇς τὰ ὄμματα ἴσον ἀπέχοντα τῆς

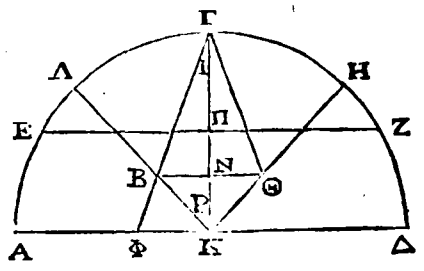
ἐκ

ἐκ τοῦ κέντρου, ἧς δὲ ἡ ἀνὰ μέσον τῆς διαμέτρου καὶ τῆς πρὸς ὀρθὰς, ἢ ἐπ' αὐτῆς τῆς πρὸς ὀρθὰς· ὁσδέτερον τῶν ὀμμάτων φαίνεται.

ſtent ab excitata ſemidiametro: neuter oculorum cernetur, ſive hi ſint inter diametrum & lineam ad angulos rectos, ſive in recta quæ angulos rectos facit cum ſemidiametro.

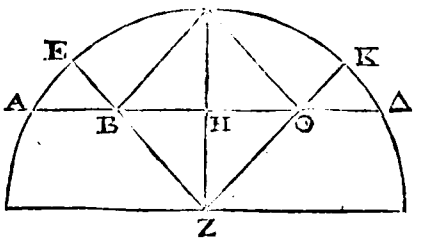
Ἔστω κοῖλον ἔσοπτρον τὸ Α Γ Δ, διάμετρος δὲ ἡ Α Δ, κέντρον δὲ τὸ Κ, καὶ ἡ πρὸς ὀρθὰς ἡ Κ Γ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Π, πρὸς ὀρθὰς αὐτῇ ἔστω ἡ Ε Π Ζ, καὶ ὄμματα τὰ Β, Θ μεταξὺ κείμενα τῆς Α Δ καὶ τῆς Ε Ζ ἐν ὑπερβολῆς τινος τῆς Ε Ζ, Β Θ ἴσον ἀπέχοντα τῆς Κ Γ, ἔστω δὲ ἔστω ἡ Β Γ ἀνακλωμένη ἐπὶ τὸ Θ· ἴσας ἄρα ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ περιφερείᾳ, διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν Ζ Ε τῇ Β Θ, καὶ ἴσην τὴν Β Ν τῇ Ν Θ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Κ Β, Κ Θ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν, ἐκβεβλήσθω δὲ καὶ ἡ Γ Β ἐπὶ τὸ Φ. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ Β Γ τῆς Β Κ, μείζων ἐστὶν ἡ Ρ γωνία τῆς Ι· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ Γ Β Θ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ Θ Β Κ, τουτέστι τῆς ὑπὸ Β Θ Κ· οὐκ ἄρα συμπεσεῖται ἡ Β Γ τῇ Κ Θ· οὐκ ἄρα ἐφθήσεται τὸ Θ, κατὰ γὰρ τὴν συμβολὴν φαίνεται τῶν Β Γ, Κ Θ.

SIT concavum ſpeculum Α Γ Δ, cujus diameter quidem Α Δ, centrum autem Κ, à quo ad angulos rectos excitetur ſemidiameter Κ Γ, quæ bifariam ſecetur in puncto Π, per quod ducatur linea Ε Π Ζ, quæ ad angulos rectos ſit ipſi Γ Κ; ſint autem oculi Β, Θ, collocati inter diametrum Α Δ & lineam Ε Ζ, cui ſit parallela linea Β Θ; ipſique Β, Θ oculi æqualiter diſtent à ſemidiametro Κ Γ; eſto denique radius Β Γ, qui reflectatur à puncto Γ ad Θ: angulos igitur æquales facit ad circumferentiam, eo quod linea Ζ Ε parallela eſt ad lineam Β Θ, & linea Β Ν æqualis ipſi Ν Θ. connectantur Κ Β, Κ Θ, & producantur ad Α, Η, producatur etiam Γ Β uſque ad Φ. quia ergo major eſt Β Γ quam Β Κ, major eſt [per 18. 1.] angulus Ρ quam Ι; quocirca angulus Γ Β Θ major eſt [per 32. 1.] angulo Θ Β Κ, id eſt, angulo Β Θ Κ: non igitur concurrent Β Γ, Κ Θ: ergo Θ non cernetur; deberet enim cerni in concurſu rectarum Β Γ, Κ Θ.



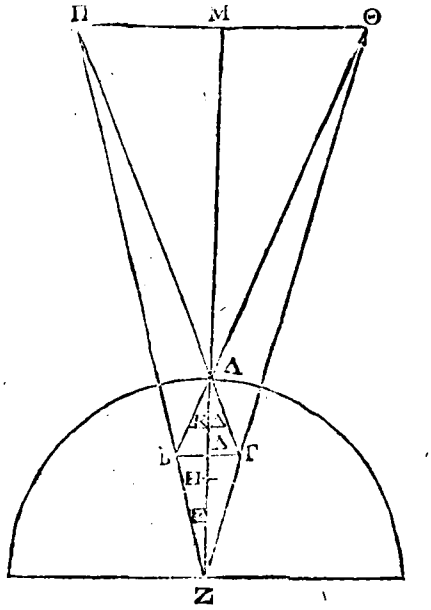
Ἔστω πάλιν τὰ αὐτὰ τῇ ἐπάνω, τὰ δὲ Β, Θ ὄμματα ἔστωσαν ἐπὶ τῆς δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τετμημένης τῶν ἐκ τοῦ κέντρου, ἐπὶ τῆς Α Δ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ μὲν Β Γ τῇ Β Ζ, ἡ δὲ Γ Θ τῇ Ζ Θ, περιφέρεια ἂν εἴη ἡ Β Γ τῇ Ζ Θ· οὐκ ἄρα συμπεσεῖται ἡ Β Γ ἔξω τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὸ ὁρώμενον, τουτέστι τῇ Ζ Θ, ἐπὶ τὰ Θ, Γ μέρη· ὥστε φαίνεται τὸ Θ ὄμμα, κατὰ γὰρ τὴν συμβολὴν ἐφαίνετο τῶν Β Γ, Ζ Θ.

Iiſdem manentibus, oculi autem Β, Θ collocentur in linea quæ ſemidiametrum ſecat bifariam & ad angulos rectos, id eſt in linea Α Δ. quia igitur Β Γ æqualis eſt ipſi Β Ζ, & Γ Θ ipſi Ζ Θ: parallela ergo [per 8. & 27. 1.] eſt Β Γ ipſi Ζ Θ: quare radius Β Γ non concurret cum linea ducta à centro ad aſpectabile, id eſt cum linea Ζ Θ, verſus partes Θ, Γ: quare Θ oculus non cernetur: ſi enim cerneretur, deberet cerni in concurſu linearum Β Γ, Ζ Θ.

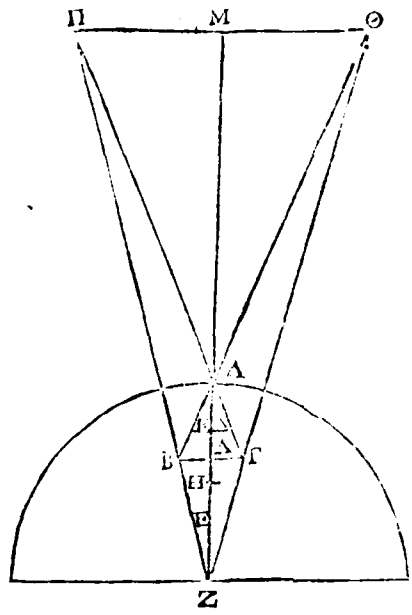


Ἔστω πάλιν τὰ αὐτὰ, ἡ δὲ ὑπερβολῆς ἀνωτέρω κείσθω τὰ ὄμματα τὰ Β, Γ ἴσον ἀπέχοντα τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς Ζ Α· φημὶ δὴ φαίνεσθαι τὰ Β, Γ, καὶ τὰ δεξιὰ, ἀριστερὰ, καὶ τὰ ἀριστερὰ, δεξιὰ, καὶ τὸ εἴδωλον μεῖζον τοῦ προσώπου, καὶ τὸ διάστημα ἀπὸ τοῦ ἐσόπτρου ἔχον μεῖζον τὸ εἴδωλον. ἔστω γὰρ ἡ Β Α ἔξω ἀνακλωμένη, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἀπὸ τοῦ Ζ κέντρου ἐπὶ τὰ Β, Γ αἱ Ζ Β, Ζ Γ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ Β Α. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολὴ

Iiſdem manentibus, oculi Β, Γ collocentur loco ſuperiore quam ſit punctum illud in quo ſemidiameter bifariam ſecta eſt; diſtentque æqualiter ab ipſa Ζ Α ſemidiametro: dico fore ut Β, Γ appareant, & dextra videantur ſiniſtra, & ſiniſtra dextra, & faciei imago appareat major facie, & longius à ſpeculo diſtet quam facies ipſa. ſit enim Β Α radius, qui reflectatur ad Γ; & à centro Ζ ad puncta Β, Γ connectantur rectæ Ζ Β, Ζ Γ, producaturque Β Α. quia igitur Ζ Α ſemidiameter bifariam ſecta eſt



in H: major ergo eſt B Z quam B A; ideoque [per 18. 1.] major eſt K angulus angulo E. æqualis autem eſt [per 1.catop.] K ipſi Δ: major igitur eſt Δ quam E: quare lineæ Z B, Γ A productæ tandem concurrent. concurrant in puncto Π. eadem ratione lineæ B A, Z Γ productæ concurrent in puncto Θ: ergo [per 18.catop.] Γ apparebit in Θ, & B in Π; & dextra apparebunt ſiniſtra, & ſiniſtra dextra. quinetiam imago quæ eſt Θ Π major apparebit quam facies quæ eſt B Γ; parallelæ enim ſunt. imago ergo major apparet quam facies, & magis diſtat à ſpeculo; major enim eſt M A quam Λ Λ.

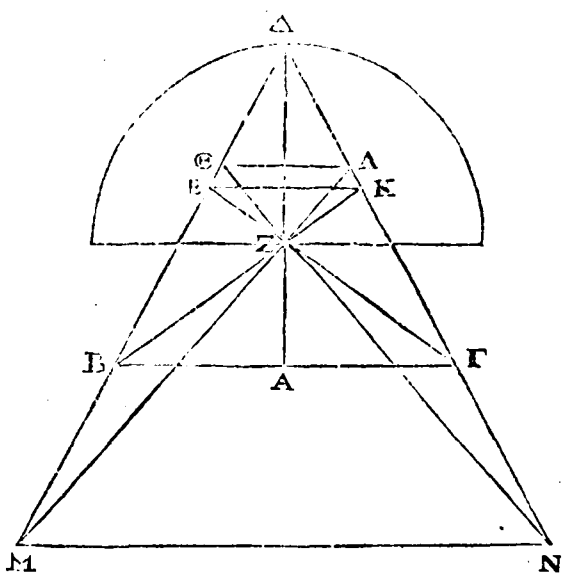


ἐστὶ τὸ H, μείζων ἐστὶν ἡ B Z τῆς B A, καὶ ἡ K γωνία τῆς E. ἴση δὲ ἡ K τῇ Δ· μείζων ἄρα καὶ ἡ Δ τῆς E· συμπεσοῦνται ἄρα αἱ Z B, Γ A ἐκβληθεῖσαι. συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Π. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ B A, Z Γ συμπεσοῦνται κατὰ τὸ Θ· ὀφήσεται ἄρα τὸ μὲν Γ ἐπὶ τοῦ Θ, τὸ δὲ B ἐπὶ τοῦ Π, καὶ φαίνεται τὰ μὲν δεξιὰ, ἀριστερὰ, τὰ δὲ ἀριστερὰ, δεξιά. ἀλλὰ μὴν καὶ μείζων ἡ Θ Π τῆς B Γ· παράλληλοι γάρ εἰσι. τὸ ἄρα εἴδωλον φαίνεται μεῖζον, ἢ μεῖζον ἀπέχον τοῦ ἐνόπτρου, μείζων γὰρ ἡ M A τῆς Λ Λ.

Prop. XXIX. Theor.

Sin autem oculi extra diametrum ponantur; dextra apparebunt dextra, & ſiniſtra ſiniſtra; & imago apparebit minor ipſa facie, & inter faciem & ſpeculum.

SInt enim oculi B, Γ, centrum autem ſpeculi ſit Z, per quod ducatur A Z Δ ad angulos rectos ipſi diametro; & per punctum A ducatur B A Γ ad angulos rectos ipſi A Z Δ, ſitque A Γ æqualis ipſi B A; radius autem B Δ reflectatur ad Γ, & per centrum ducantur B Z K, Γ Z E, & connectantur puncta E, K recta E K: igitur [per 18.catoptric.] B apparet in K; Γ vero apparet in E: quare dextra dextra, & ſiniſtra apparent ſiniſtra, & imago E K minor apparet ipſa B Γ facie; parallela namque eſt E K ipſi B Γ: apparetque ipſa imago in loco interjecto inter faciem & ſpeculum.



Si facies retrahatur à ſpeculo, imago adhuc minor videbitur.

Sit enim M N facies eadem quæ erat in B Γ, ſed remotior à ſpeculo quam eſſet B Γ, habeatque eundem ſitum ad ſpeculum: ergo recta linea ducta à puncto M ad Z centrum & producta cadet ſupra K, ut in A; linea autem ducta à N ad Z & producta cadet ſupra E, ut ad Θ: imago igitur ipſius M N eſt ipſa Θ Λ; & minor eſt Θ Λ quam E K & propior ad ſpeculum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Ἐὰν δὲ ἔξω ᾖ διαμέτρου τεθῇ ὄμματα· τὰ δεξιὰ φαίνεται δεξιὰ, καὶ τὰ ἀριστερὰ, ἀριστερὰ, καὶ τὸ εἴδωλον ἔλασσον ἔσται τοῦ προσώπου, καὶ ἐν τῷ ἀνὰ μέσον τοῦ προσώπου καὶ τοῦ ἐνόπτρου.

Ἔστω γὰρ ὄμματα τὰ B, Γ, κέντρον δὲ τὸ Z ἐνόπτρου, καὶ τῇ διαμέτρῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω ἡ A Z Δ, καὶ ταύτῃ πρὸς ὀρθὰς ἡ B Γ, καὶ ἴση τῇ B A ἔστω ἡ A Γ, καὶ ὄψις ἡ B Δ ἀνακλωμένη ἐπὶ τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ κέντρου αἱ B Z K, Γ Z E, καὶ δῆλον τῶν E, K ἡ E K ἐπεζεύχθω· φανερὸν τὸ μὲν B ἐπὶ τοῦ K φαίνεται, τὸ δὲ Γ ἐπὶ τοῦ E· τὰ ἄρα δεξιὰ, δεξιὰ, καὶ τὰ ἀριστερὰ, ἀριστερὰ φαίνεται, καὶ τὸ E K εἴδωλον ἔλασσον τοῦ B Γ προσώπου, παράλληλος γάρ ἐστιν ἡ E K τῇ B Γ· καὶ ἀνὰ μέσον τοῦ ἐνόπτρου καὶ τοῦ προσώπου φαίνεται τὸ εἴδωλον.

ΑΝΑΓΟΜΕΝΟΥ δὲ τοῦ προσώπου, ἐπ ἔλασσον φαίνεται τὸ εἴδωλον.

Ἔστω γὰρ τὸ M N πρόσωπον τὸ αὐτὸ τῷ B Γ, ἀφεστηκὸς ἀπὸ τοῦ B Γ πλείονι ὁμοίως· φανερὸν ἀπὸ τοῦ M διὰ τοῦ Z κέντρου διῆξον καὶ ἐκβληθεῖσα καὶ ἀνώτερον πεσεῖται τοῦ K ὡς τὸ Λ, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ N ἐπὶ τὸ Z ἀνώτερον τοῦ E ἕως τοῦ Θ· φαίνεται ἄρα τὸ M N ὡς τὸ Θ Λ· καὶ ἔστιν ἔλασσον τὸ Θ Λ τοῦ E K καὶ ἔγγιον τοῦ ἐνόπτρου.

ΠΡΟ-

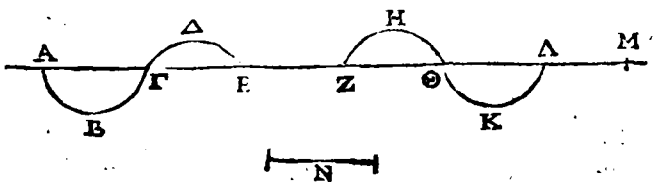
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Δυνατόν ἐστιν ἔνοπτρον κατασκευασθῆναι, ὥστε ἐν τῷ αὐτῷ φαίνεσθαι πλείω πρόσωπα· τὰ μὲν μείζονα, τὰ δὲ ἐλάττονα· καὶ τὰ μὲν ἔγγιον, τὰ δὲ πορρώτερον· καὶ τὰ μὲν δεξιά, δεξιά· τὰ δὲ ἀριστερά, ἀριστερά.

Prop. XXX. Theor.

Speculum ejuſmodi conſtrui poteſt, ut in eo plures facies appareant; quædam majores, quædam minores; quædam propiores, quædam remotiores; & earum dextræ partes à dextris, & ſiniſtræ à ſiniſtris appareant.

Ἔστω γὰρ ἐπίπεδον τὸ ΑΜ· ἐνέσται δὴ ἐν τούτῳ γένοιτο ἂν κυρτὰ μὲν ἔνοπτρα, οἷα τὰ ΑΒΓ, ΘΚΛ, κοῖλα δέ, οἷα τὰ ΓΔΕ, ΖΗΘ, ἐπίπεδα δέ, οἷα ΕΖ, ΛΜ. τιθέντος οὖν τοῦ προσώπου ὅπου τὸ Ν, φαίνεται ἀπὸ μὲν τῶν ἐπιπέδων ἴσα τὰ εἴδωλα καὶ ἴσον ἀπέχοντα· ἀπὸ δὲ τῶν κυρτῶν ἐλάττονα καὶ ἔλαττον ἀπέχοντα· ἀπὸ δὲ τῶν κοίλων παντοδαπῶς, καθάπερ δέδεικται.



SIT enim planum AM: ergo in eo eſſe poſſunt ſpecula convexa quidem, qualia ſunt ΑΒΓ, ΘΚΛ; cava autem, qualia ſunt ΓΔΕ, ΖΗΘ; plana vero, qualia ſunt ΕΖ, ΛΜ. facie igitur poſita in loco Ν, apparebunt ejus imagines æquales quidem, & æqualiter à ſpeculo diſtantes [per 19 catop.] in planis; in convexis autem [per 20. & 21. catop.] minores & minus diſtantes; at in cavis omnifariam, ut oſtenſum eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

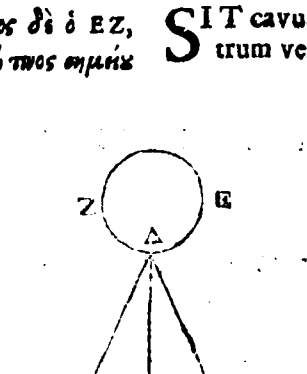
Ἐκ τῶν κοίλων ἐνόπτρων πρὸς τὸν ἥλιον τιθέντων πῦρ ἐξάπτεται.

Prop. XXXI. Theor.

A concavis ſpeculis ſoli oppoſitis ignis accenditur.

Ἔστω κοῖλον ἔνοπτρον τὸ ΑΒΓ, ἥλιος δὲ ὁ ΕΖ, κέντρον δὲ τοῦ κατόπτρου τὸ Θ, καὶ ἀπό τινος σημείου τοῦ Δ ἐπιζευχθεῖσαι μὲν ἐπὶ τὸ Θ κέντρον ἡ ΔΘ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Β, προσπιπτέτω δὲ ἡ ΔΓ ἀκτὶς, καὶ ἀνακεκλάσθω ἐπὶ τὸ Κ· ἀνακλασθήσεται δὴ ἐπὶ τὸ Θ κέντρον, ἡ γὰρ γωνία ἡ πρὸς τῇ περιφερείᾳ ἡ Π ἐλάττων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ λοιπῆς τῆς ὑπὸ ΒΓΔ. ἔστω ἡ ΑΒ περιφέρεια ἴση τῇ ΒΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἄλλη τις ἀκτὶς προσπιπτέτω ἡ ΔΑ· φανερὸν δή ὅτι ἀνακλωμένη ἡ ΔΑ ἀκτὶς πεσεῖται ἐπὶ τὸ Κ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΑΒ περιφέρειαν τῇ ΒΓ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Δ προσπίπτουσαι πρὸς τὸ ἔνοπτρον ἴσαις [1] ἀπολαμβάνουσαι εἰς τὸ αὐτὸ συμπεσοῦνται τῇ ΒΘ ἀνώτερον τοῦ Θ.

Ἔστω πάλιν κοῖλον ἔνοπτρον τὸ ΑΒΓ, ἥλιος δὲ ὁ ΔΕΖ, καὶ ἀπό τινος σημείου τοῦ Ε διὰ τοῦ Θ κέντρου ἔστω ἡ ΕΘΒ, καὶ ἀπ' ἄλλων διὰ τῶν Δ, Ζ αἱ ΔΘΓ, ΖΘΑ. ἐκὼν προδεδείχαμεν ὅτι αἱ ἀπὸ τοῦ Ε ἀκτῖνες συμπεσοῦνται εἰς ἑαυτὰς διὰ

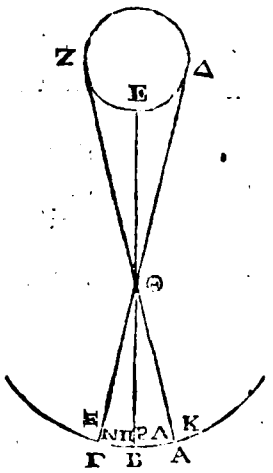


SIT cavum ſpeculum ΑΒΓ, ſol autem ΕΖ, centrum vero ſpeculi ſit Θ; & ab aliquo ſolis puncto, Δ videlicet, ad centrum Θ connexa ΔΘ producatur uſque ad Β; radius autem ΔΓ cadat & reflectatur ad Κ: reflectetur ergo ſupra centrum Θ; angulus enim Π ad circumferentiam minor eſt angulo ΒΓΔ ad circumferentiam. ſit ergo circumferentia ΑΒ æqualis ΒΓ, & à puncto Δ cadat aliquis alius radius ΔΑ. conſtat ergo fore ut radius ΔΑ ſe reflectens cadat in Κ; eo quod circumferentia ΑΒ æqualis eſt ΒΓ. eodem modo oſtendetur fore, ut omnes radii à puncto Δ in ſpeculum cadentes, & æquales circumferentias comprehendentes, concurrant cum ΒΘ in puncto ſuperiore quam Θ.

Sit rurſus ſpeculum cavum ΑΒΓ, ſol autem ΔΕΖ; & ab ejus aliquo puncto Ε ducatur recta linea ΕΘΒ per centrum Θ, & ab aliis punctis Δ, Ζ ducantur radii ΔΘΓ, ΖΘΑ. itaque demonſtravimus quod radii à puncto Ε in ſeipſos reflectantur, propter angulos Π, Ρ

1 Sc. περιφερείαις, utrinque à Β puncto. *Savil.*

inter ſe æquales; eſt enim EB diameter. & ZΘA in ſeipſum recurret, propter angulos K, Λ inter ſe æquales; & ΔΘΓ redibit in ſeipſum, propter angulos N, Z inter ſe æquales. quod vero omnes iſti in ſeipſos reflectantur, patet: quia enim per centrum tranſeunt, dividunt ſpeculum in ſemicirculos; ſemicirculorum autem anguli æquales ſunt: radii vero omnes reflectuntur ad æquales angulos; ergo in ſeipſos recurrunt: omnes igitur à ſole per centrum, miſſi à punctis quibuſlibet, in centrum concurrent. his igitur radiis incaleſcentibus, congeretur ignis circa centrum: quare ſtupa ibi poſita incendetur.



γωνίας ἴσας ἕξεις, Διάμετροι γάρ εἰσιν. αἱ δὲ ἀπὸ τῦ Z Διὰ τῶν K, Λ γωνίας, αἱ δὲ ἀπὸ τῦ Δ ἐπὶ τὸ Γ Δ Διὰ τῶν N, Z γωνίας ἴσας ἕξεις. ὅτι δὲ πᾶσαι αὐταὶ εἰς ἑαυτὰς ἀναχλῶν), δῆλον· ἐκ γὰρ τῦ κέντρυ ἴσαι ἡμικύκλια ποιῦσιν, αἱ δὲ τῶν ἡμικυκλίων γωνίαι ἴσαι εἰσίν· αἱ δὲ ἴσων ἄρα γωνιῶν αἱ ἀνακλάσεις γίνονται, εἰς ἑαυτὰς ἄρ ἀναχλῶνται· πᾶσαι ἄρα συμπεσοῦνται ἀπὸ πάντων τῶν σημείων ἐπὶ τὰς Διὰ τῦ κέντρυ καὶ ἐπὶ τῷ κέντρῳ ἀκτῖνας. τύτων δὲ τῶν ἀκτίνων ἐκθερμαινομένων, ὡς ἐπὶ τὸ κέντρον πῦρ ἀθροίζε)· ὅτε ἐντεῦθα συμπεσὸν πῦρ ἐξαφθήσεται.

ΤΕΛΟΣ ΤΩΝ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΚΑΤΟΠΤΡΙΚΩΝ.

FINIS EUCLIDIS CATOPTRICORUM.

ΕΥ-

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ,

ΩΣ ΟΙΟΝΤΑΙ ΤΙΝΕΣ,

ΠΕΡΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΝ

ΒΙΒΛΟΣ.

EUCLIDIS,

UT QUIDAM ARBITRANTUR,

DE DIVISIONIBUS

LIBER.

VEL UT ALII VOLUNT,

MACHOMETI BAGDEDINI

LIBER

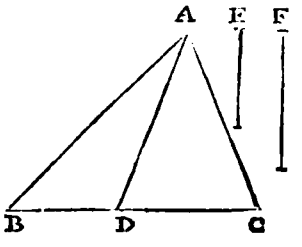
DE DIVISIONIBUS

SUPERFICIERUM.

EUCLIDIS
DE
DIVISIONIBUS
LIBER.

Propositio I. Problema.

Per lineam protractam ab angulo trianguli, illum triangulum ſecundum proportionem datam dividere.

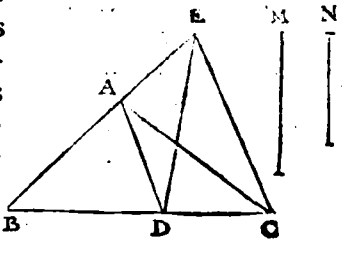


SIT triangulus A B C, & oporteat per lineam deſcendentem ab angulo A dividere triangulum A B C ſecundum proportionem E ad F. dividam enim lineam B C in puncto D ſecundum proportionem E ad F, per doctrinam decimæ ſexti; & protracta linea A D, propoſitum patet per primam ſexti.

Prop. II. Probl.

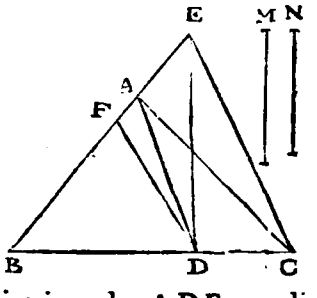
Per lineam ductam à puncto, in latere dati trianguli aſſignato, dictum triangulum ſecundum proportionem datam dividere.

SIT triangulus A B C, in cujus latere B C ſignetur punctum D, à quo ducere oporteat lineam dividentem triangulum ſecundum proportionem M ad N; & jungatur D A. ab illo igitur extremo lateris B C, verſus quod voluero habere conſequens in relatione diviſionis, quod (gratia exempli) ſit punctum C, erigam lineam æquidiſtantem lineæ D A donec concurrat in E puncto cum linea B A ulterius protracta. quod autem concurrent, patet per 29. & 17. primi. erit igitur proportio M ad N aut æqualis proportioni B A ad A E, aut major, aut minor. ſit primo æqualis. erit igitur per primam ſexti, proportio B A D trianguli ad A D E triangulum, ſicut proportio M ad N. ſed per 37. primi, triangulus A D E eſt æqualis triangulo

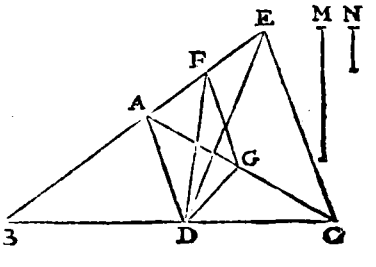


A D C: igitur per 7. quinti, proportio trianguli A B D ad triangulum A D C eſt ſicut proportio M ad N. quod fuit probandum.

Sit autem ſecundo, proportio M ad N minor proportione B A lineæ ad A E lineam. itaque dividam B E lineam ſecundum proportionem M ad N: cadet igitur diviſio inter B & A per 8. quinti. cadat in puncto F, & protrahatur linea D F, quam dico dividere triangulum ſecundum proportionem M ad N. *Probatio.* ducta enim linea D E, erit per 37. primi, triangulus A D E æqualis triangulo A D C. poſito igitur triangulo A F D communi; erit triangulus F D E æqualis figuræ quadrilateræ A F D C. cum igitur ex 1. ſexti, proportio trianguli B F D ad triangulum F E D ſit ſicut B F ad F E, & per conſequens ſicut M ad N: proportio trianguli B F D ad figuram quadrilateram A F D C eſt ſicut proportio M ad N. patet igitur propoſitum.



Sit tertio, proportio M ad N major proportione B A ad A E. dividatur igitur B E in puncto F, quod erit inter A & E, ſecundum proportionem M ad N, & ducatur F G æquidiſtanter lineæ C E donec concurrat cum linea A C ad punctum G; deinde jungatur linea G D: dico lineam G D dividere triangulum ſecundum proportionem datam. ducantur enim lineæ D F & D E. eſt igitur triangulus A D E æqualis triangulo A D C, per 37. primi; & per eandem, triangulus A D F æqualis eſt triangulo A D G: duo igitur reſidui, ſcilicet triangulus F D E & triangulus G D C, ſunt æquales. poſito etiam triangulo A B D communi duobus triangulis A F D & A G D æqualibus; erit triangulus B F D æqualis quadrilateræ figuræ B A G D: igitur triangulus F B D ad triangulum F D E eſt ſicut



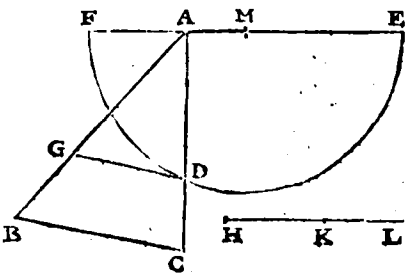
figura

figura quadrilatera B A G D ad triangulum G C D: triangulus vero F B D ad triangulum F D E eſt ſicut M ad N, per hypotheſim & primam ſexti: igitur proportio figuræ quadrilateræ B A G D ad triangulum G D C eſt ſicut proportio M ad N. quod fuit propoſitum.

Prop. III. Probl.

Per lineam æquidiſtantem aſſignato lateri noti trianguli, [1] illum triangulum ſecundum proportionem datam dividere.

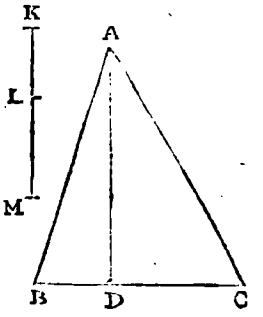
SIT proportio data H K ad K L; & triangulus A B C, quem ſecundum proportionem datam volo dividere per lineam æquidiſtantem lateri ejus B C. ab angulo enim A, verſus quem volo habere antecedens in proportione quærenda, protraham lineam A E orthogonaliter ſuper lineam A C, & ſibi æqualem; & protrahatur linea E A ſecundum rectitudinem uſque ad F, donec ſit proportio E A ad A F ſicut H L ad H K, & poſito centro in medio puncto lineæ F E, quod ſit M, deſcribatur ſemicirculus F D E, ſecundum quantitatem lineæ M E: qui quidem ſemicirculus ſecabit lineam A C ſuper punctum D; propter hoc quod linea A D minor eſt quam linea A E, & linea A E æqualis eſt lineæ A C ducta igitur linea D G æquidiſtanter lineæ B C: dico quod proportio trianguli A G D ad ſuperficiem G B C D eſt ſicut proportio H K ad K L. *Probatio.* Proportio enim trianguli A B C ad triangulum A G D eſt ſicut A C ad A D proportio duplicata, per 19. ſexti. ſed A C & A E ſunt æquales: igitur proportio A B C trianguli ad A G D triangulum eſt ſicut proportio A E ad A D duplicata. proportio autem A E ad A D duplicata eſt ſicut A E ad A F, per 31. tertii & 8. ſexti: igitur proportio trianguli A B C ad triangulum A G D eſt ſicut proportio E A ad A F. proportio vero E A ad A F eſt ſicut H L ad H K: igitur proportio A B C ad A G D eſt ſicut L H ad H K: igitur diviſim proportio ſuperficiei G B C D ad triangulum A G D eſt ſicut L K ad K H: igitur è contra A G D ad G B C D eſt ſicut proportio H K ad K L. quod fuit probandum.



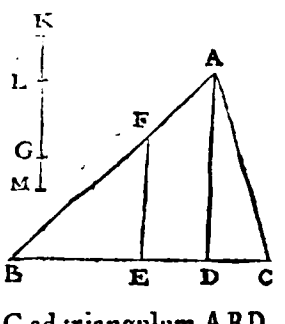
Prop. IV. Probl.

Per lineam æquidiſtantem perpendiculari [2], ab angulo trianguli ſuper baſim protractæ, illum triangulum ſecundum proportionem datam dividere.

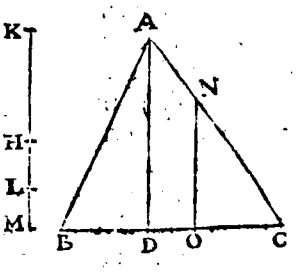
SIT proportio data K L ad L M; ſecundum illam volo dividere triangulum A B C per lineam æquidiſtantem perpendiculari A D. dividam enim lineam K M ſecundum proportionem B D lineæ ad lineam D C. & ſit primo (gratia exempli) quod illa diviſio cadat in puncto L. eſt igitur proportio K L ad L M ſicut B D ad D C, & per conſequens, ſicut trianguli A B D ad triangulum A D C, per primam ſexti: igitur linea A D dividit triangulum ſecundum proportionem datam.



Sit autem ſecundo, proportio K G ad G M ſicut proportio B D ad D C; ita quod G ſit inter L & M. deinde dividam triangulum A B D, juxta præmiſſam, per lineam æquidiſtantem lateri A D ſecundum proportionem K L ad L G; & ſit linea ſic dividens triangulum F E: dico igitur quod proportio trianguli F B E ad ſuperficiem A F E C eſt ſicut proportio K L ad L M. *Probatio.* nam proportio trianguli A D C ad triangulum A B D eſt ſicut proportio M G ad G K: igitur conjunctim, per 18. quinti, proportio trianguli A B C ad triangulum A B D eſt ſicut proportio M K ad K G. proportio autem trianguli A B D ad triangulum F B E [3] eſt ſicut proportio K G ad K L: igitur, ſecundum æquam proportionalitatem per 22. quinti, erit proportio trianguli A B C ad triangulum F B E ſicut proportio M K ad K L: igitur diviſim, proportio ſuperficiei A F E C ad triangulum F B E eſt ſicut proportio M L ad K L: igitur è contra, proportio K L ad L M eſt ſicut trianguli F B E ad ſuperficiem A F E C. quod fuit probandum.



Sit tertio, proportio K H ad H M ſicut B D ad D C, ita quod H ſit inter K & L. deinde dividam, per præmiſſam, triangulum A D C ſecundum proportionem H L ad L M per lineam N O æquidiſtantem lateri A D: dico igitur quod proportio ſuperficiei N A B O ad triangulum N O C eſt ſicut proportio K L ad L M. *Probatio.* Proportio namque trianguli A B D ad triangulum A D C eſt ſicut K H



1 Vel, ab illo triangulo portionem aſſignatam auferre: ſic enim utitur in ſequenti *Savil.* 2 Nihil eſt neque in κατασκευῇ, nec in demonſtratione, ubi hæc perpendicularitas requiratur. ſatis erat ſimpliciter dixiſſe, rectæ lineæ baſim ὡς ἐπὶ τυχὸς ſecari. deinde, in perpendicularibus quidem extra triangulum cadentibus non valde congruit demonſtratio, niſi mutatis priùs mutandis. *Idem.* 3 Nam ſupra F A D E ad E F B eſt ut G L ad K L: ergo conjunctim A B D ad F B E ut K G ad K L.

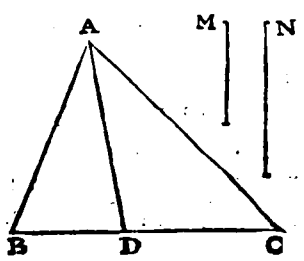
ad

ad HM, per primam ſexti & 11. quinti. igitur conjunctim, per 18. quinti, proportio trianguli ABC ad triangulum ADC eſt ſicut proportio KM ad HM: proportio autem trianguli ADC ad triangulum NOC [1] eſt ſicut proportio HM ad LM. igitur ſecundum æquam proportionalitatem, proportio trianguli ABC ad triangulum NOC eſt ſicut KM ad LM. igitur diviſim, proportio ſuperficiei NABO ad triangulum NOC eſt ſicut proportio KL ad LM. quod fuit propoſitum.

Prop. V. Probl.

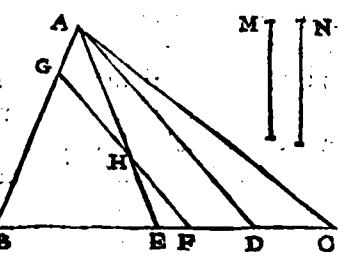
Triangulum notum, per lineam æquidiſtantem lineæ ab angulo ejus ductæ, quæ [2] nec æquidiſtet alicui laterum ejus, neque alicui perpendicularium ejus, ſecundum proportionem datam dividere.

HÆC concluſio probari poteſt ſicut præmiſſa. poteſt etiam & aliter ſic probari. ſit proportio data M ad N: & ſit triangulus ABC, quem volo dividere ſecundum proportionem M ad N,

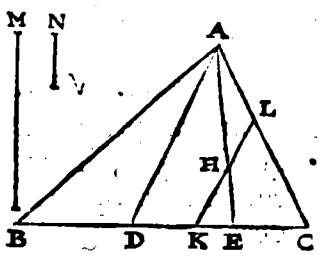


per lineam æquidiſtantem lineæ AD, quæ deſcendat ab angulo A; nec ſit perpendicularis, nec æquidiſtans alicui laterum trianguli. dividam igitur lineam BC ſecundum proportionem M ad N & cadat primo (gratia exempli) diviſio in puncto D. linea igitur AD, per primam ſexti, dividit triangulum ſecundum proportionem M ad N datam.

Cadat ſecundo diviſio inter B & D in puncto E; ita quod ſit proportio BE ad EC ſicut M ad N. tunc ponam lineam BF mediam proportionaliter inter lineas BD & BE: & protracta linea FG æquidiſtanter lineæ AD, dico quod illa dividit triangulum ſecundum quod proponitur. *Probatio.* Protraham enim lineam AE. proportio igitur trianguli ABD ad triangulum GBF eſt ſicut proportio BD ad BE. ſed ſecundum proportionem BD ad BE eſt proportio trianguli ABD ad triangulum ABE. igitur eadem eſt proportio trianguli ABD ad triangulum GBF, & ad triangulum ABE. igitur trianguli GBF & ABE ſunt æquales. poſito igitur H in ſectione linearum AE, GF, patet quod trianguli AGH & EFH ſunt æquales; quibus addita ſuperficie AHFC, erit triangulus AEC æqualis ſuperficiei AGFC. eadem igitur eſt proportio trianguli ABE ad triangulum AEC ſicut trianguli BFG ad ſuperficiem AGFC. ſed proportio trianguli ABE ad triangulum AEC eſt ſicut proportio M ad N data. igitur liquet propoſitum.



Cadat tertio diviſio inter D & C in puncto E, ita quod ſit proportio BE ad EC ſicut M ad N. ponam igitur lineam CK mediam proportionalem inter DC & EC. tunc protracta linea KL æquidiſtanter lineæ AD, dico quod illa dividit triangulum ſecundum quod proponitur. nam, ut prius, proportio trianguli ADC ad triangulum LKC eſt ſicut proportio DC ad KC duplicata; & per conſequens, eſt ſicut proportio DC ad EC. & ſecundum eandem proportionem eſt proportio trianguli ADC ad triangulum AEC: igitur trianguli LKC & AEC ſunt æquales, quare & trianguli AHL & KHE etiam ſunt æquales. ſuperficies igitur LABK æqualis eſt triangulo ABE. igitur eadem eſt proportio ſuperficiei LABK ad triangulum LKC, quæ eſt trianguli ABE ad triangulum AEC. illa vero proportio eſt ſicut M ad N. igitur patet propoſitum.

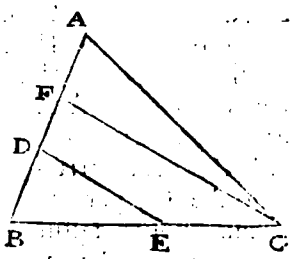


Nota, quod hoc modo probari poteſt præmiſſa concluſio: & eſt hæc probatio facilior quam præmiſſæ. [3]

Prop. VI. Probl.

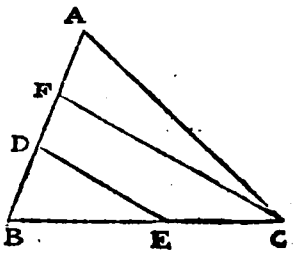
Triangulum notum, per lineam æquidiſtantem cuicunque lineæ in eo protractæ, ſive ab angulo protrahatur, ſive non, ſecundum proportionem datam dividere.

SI enim linea ſignata ſit æquidiſtans [4] alicui lateri trianguli, habebitur intentum per tertiam hujus. ſi etiam dicta linea ab aliquo angulo deſcendat, habebitur propoſitum per præmiſſam. quod ſi aſſignata linea neque deſcendat ab angulo aliquo trianguli, neque alicui ejus lateri fuerit æquidiſtans, ut in triangulo ABC aſſignetur linea DE, quæ non ſit æquidiſtans lineæ AC, ſed concurreret cum ea ex parte C ſi utraque ulterius protraheretur; tunc ab angulo, ex parte



1 Per conjunctam ut in priore parte. *Savil.* 2 Nam ſi æquidiſtans ponatur tertio lateri (nequeenim poteſt eſſe alicui alteri æquidiſtans, niſi per æquidiſtantiam etiam coincidentiam intelligamus) cadit ea κτῶσις in 3. hujus. ſed totum eſt frigidum: nam quod ſequitur *neque alicui perpendicularium ejus* melius eſſet *neque ſuper baſim perpendicularis ſit*, & etiam eſt in ſpiceo. totum problema melius hoc modo proponeretur: *Triangulum datum per lineam æquidiſtantem lineæ ab angulo ejus ad baſim ductæ quomodocunque, ſecundum proportionem datam dividere.* Idem. 3 Deeſt illa κτῶσις in qua AD non ſecat lineam BC, ſed extra cadit; quam tamen ſupplere non eſt difficile. *Idem.* 4 Vel coincidat. *Idem.*

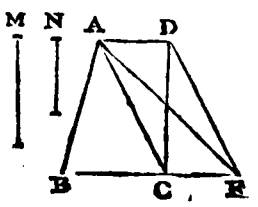
cujus eſſet concurſus, ut ab angulo C, protrahatur linea CF in triangulo æquidiſtanter lineæ aſſignatæ, ſcilicet lineæ DE: & tunc per præmiſſam dividatur triangulus per lineam æquidiſtantem lineæ CF ſecundum proportionem datam. patet per 30. primi, quod ille tunc dividitur per lineam æquidiſtantem lineæ DE; & ſic liquet propoſitum, quantumcunque extranee linea protrahatur.



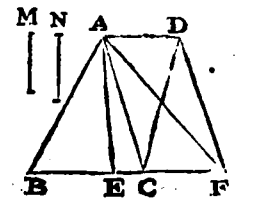
Prop. VII. Probl.

Per lineam protractam ab angulo noti quadranguli, illum quadrangulum ſecundum proportionem datam dividere.

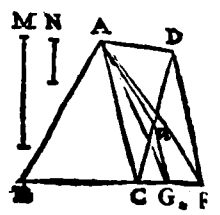
SIT proportio data M ad N: & ſit quadrangulus ABCD; à cujus angulo A volo protrahere lineam dividentem quadrangulum ſecundum proportionem M ad N. protraham enim diametrum AC; & à puncto D protraham lineam DF æquidiſtantem lineæ AC, donec concurrat cum linea BC in puncto F: deinde dividam lineam BF ſecundum proportionem M ad N; & cadat primo diviſio in puncto C: ita quod eadem ſit proportio BC ad CF quæ eſt M ad N. dico igitur quod linea AC dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. *Probatio.* Nam triangulus ADC æqualis eſt triangulo AFC, per 37. primi. ſed proportio trianguli ABC ad triangulum ACF eſt ſicut proportio M ad N, per primam ſexti. igitur proportio trianguli ABC ad triangulum ACD eſt ſicut proportio M ad N. quod fuit propoſitum.



Secundo, cadat diviſio in E puncto inter B & C; ita quod ſit proportio BE ad EF ſicut M ad N. tunc protracta linea AE, dico quod proportio trianguli ABE ad ſuperficiem AECD eſt ſicut proportio M ad N. *Probatio.* Protraham enim lineam AF. erit ergo triangulus ADC æqualis triangulo AFC, per 37. primi. poſito igitur triangulo AEC communi utrique, erit ſuperficies AECD æqualis triangulo AEF. igitur eadem eſt proportio trianguli ABE ad ſuperficiem AECD, & ad triangulum AEF. cum igitur, per primam ſexti, proportio ABE trianguli ad AEF triangulum ſit ſicut M ad N; patet quod proportio ABE trianguli ad AECD ſuperficiem eſt ſicut M ad N. quod fuit probandum.



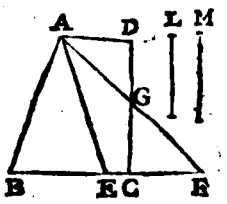
Cadat tertio diviſio inter C & F in puncto G; ita quod ſit proportio BG ad GF ſicut M ad N. tunc protraham lineam GH æquidiſtanter lineæ DF, quouſque concurrat cum linea DC in puncto H: deinde protracta linea AH, dico quod proportio ſuperficiei ABCH ad triangulum ADH eſt ſicut proportio M ad N. *Probatio.* Producam enim lineam AG. erit igitur triangulus AHC æqualis triangulo AGC. ſed & totus triangulus ADC æqualis eſt toti triangulo AFC. ergo triangulus ADH reſiduus æqualis eſt triangulo AFG reſiduo. poſito igitur triangulo ABC communi duobus triangulis ACH & ACG æqualibus; erit ſuperficies ABCH æqualis triangulo ABG. erit igitur proportio ſuperficiei ABCH ad triangulum ADH ſicut trianguli ABG ad triangulum AGF. ſed proportio trianguli ABG ad triangulum AGF eſt ſicut proportio M ad N. igitur liquet propoſitum.



Prop. VIII. Probl.

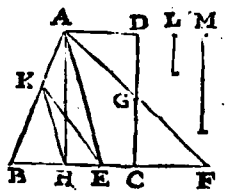
Quadrangulum notum duorum æquidiſtantium laterum, per lineam ductam à puncto in altero æquidiſtantium laterum aſſignato, ſecundum proportionem datam dividere.

SIT quadrangulus notus ABCD: & punctum aſſignatum in latere BC æquidiſtante lateri AD ſit E. tunc volo protrahere lineam ab E puncto, dividentem quadrangulum ſecundum proportionem L ad M. protrahatur enim BC ulterius ſecundum rectitudinem uſque ad F: ita quod linea CF ſit æqualis lineæ AD; & ducatur linea AF, ſecans lineam DC in puncto G. ſunt igitur trianguli ADG & GCF ſimiles, & latera AD & CF æqualia. igitur illi trianguli ſunt æquales. addito igitur ABCG communi utrique, patet quod quadrangulus ABCD æqualis eſt triangulo ABF. *Iſtud memoriæ commenda.* Deinde dividam lineam BF ſecundum proportionem L ad M. & cadat diviſio primo in puncto E, ita quod proportio BE ad EF ſit ſicut L ad M. tunc protracta linea EA, dico quod illa dividet quadrangulum ſecundum quod proponitur. nam propter æqualitatem triangulorum ADG & CGF, ſuperficies AECD æqualis eſt triangulo AEF. igitur eadem eſt proportio trianguli ABE ad ſuperficiem AECD, & ad triangulum AEF: proportio vero ABE ad AEF eſt ſicut proportio L ad M. igitur proportio ABE ad reſiduum quadranguli eſt ſicut proportio L ad M. quod eſt propoſitum.



Cadat ſecundo diviſio inter B & E in puncto H, ita quod ſit proportio BH ad HF ſicut L ad

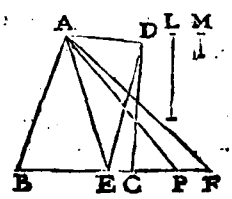
ad M. tunc protraham lineam HK æquidistanter lineæ AE; & secet lineam AB in puncto K: deinde protracta linea KE, dico quod illa divi-



dit quadrangulum, secundum quod proponitur. protraham enim lineam AH. & quia lineæ AE, KH sunt æquidistantes; erunt trianguli KAH, & KEH æquales. igitur addito KBH utrique, erit triangulus ABH æqualis triangulo KBE. sed & triangulus AKE æqualis est triangulo AHE. igitur addito AECD communi utrique; erit superficies AKECD æqualis quadrangulo AHCD. quadrangulus vero AHCD æqualis est triangulo AHF, ut supra ostensum est. igitur eadem est proportio trianguli KBE ad superficiem AKECD sicut trianguli ABH ad triangulum AHF: & per consequens sicut L ad M. quod fuit probandum.

Tertio, cadat divisio inter E & F; facta figura, resecabo de linea EF lineam EP æqualem lineæ DA, deinde secabo lineam BF secundum proportionem L ad M.

Et cadat divisio primo in puncto P; ita quod sit proportio BP ad PF sicut L ad M. tunc protraham lineam ED, quam dico dividere quadrangulum secundum formam propositam. *Probatio.* Producam enim lineam PA: & quia linea EP est æqualis lineæ AD, & æquidistans ei, erit triangulus ADE æ-

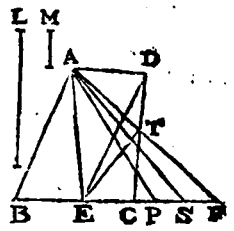


qualis triangulo APE. posito igitur triangulo ABE communi, erit quadrangulus ABED æqualis triangulo ABP: & per consequens residuus triangulus DEC erit æqualis triangulo residuo APF; propter id quod supra probatum est: scilicet quod quadrangulus ABCD æqualis est triangulo ABF. liquet igitur quod eadem est proportio quadranguli ABED ad triangulum DEC sicut trianguli ABP ad triangulum APF, per 7. quinti. sed proportio trianguli ABP ad triangulum APF est sicut L ad M. igitur proportio ABED ad DEC est sicut L ad M. quod fuit probandum.

Secundo, cadat divisio inter E & P in puncto Q: ita quod sit proportio BQ ad QF sicut L ad M: deinde secabo ex linea AD lineam AR æqualem lineæ EQ. tunc protracta linea ER, dico quod illa dividit quadrangulum, secundum quod proponitur. protraham enim lineam AQ. & quia lineæ AR & EQ sunt æquales & æquidistantes,

erunt [per 38.1.] trianguli ARE & AQE æquales; quibus addito triangulo ABE communi, erit quadrangulus ABER æqualis triangulo ABQ. sed probatum est superius, quod totus quadrangulus ABCD æqualis est toti triangulo ABF. igitur quadrangulus RECD residuus æqualis est triangulo AQF residuo. igitur eadem est proportio quadranguli ABER ad quadrangulum RECD sicut trianguli ABQ ad triangulum AQF: & per consequens sicut L ad M. quod fuit propositum.

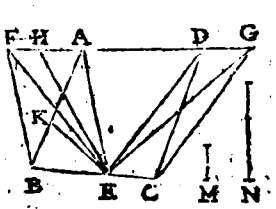
Tertio, cadat divisio inter P & F in puncto S: ita quod sit proportio BS ad SF sicut L ad M: dividam autem lineam DC secundum proportionem PS ad SF, in puncto T: & protraham lineam ET. dico quod illa dividit quadrangulum, secundum quod proponitur: producam enim lineam AS. quia igitur lineæ AD & EP sunt æquales & æquidistantes; erunt trianguli ADE & APE æquales, & per consequens addito triangulo ABE communi, quadrangulus ABED æqualis est triangulo ABP. sed & totus quadrangulus ABCD æqualis est toti triangulo ABF. igitur triangulus DEC æqualis est triangulo PAF. sed & proportio trianguli DET ad triangulum TEC est sicut proportio trianguli PAS ad triangulum SAF. [2] igitur triangulus DET æqualis est triangulo PAS: & triangulus TEC æqualis est triangulo SAF. jam vero probatum fuit quod quadrangulus ABED æqualis est triangulo ABP. igitur addito triangulo DET ad primum, & triangulo PAS sibi æquali ad secundum; erit pentagonus ABETD æqualis triangulo ABS. jam vero probatum fuit quod trianguli TEC & SAF sunt æquales. igitur eadem est proportio pentagoni ABETD ad triangulum TEC sicut trianguli ABS ad triangulum ASF; & per consequens sicut L ad M. quod fuit propositum.



PROP. IX. PROBL.

Quemlibet notum quadrangulum, per lineam ductam à puncto in uno laterum non æquidistantium assignato, secundum proportionem datam dividere.

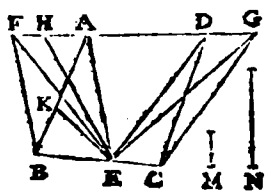
SIT quadrangulus ABCD, cujus duo latera AD, BC non æquidistent. illum igitur quadrangulum volo dividere secundum proportionem M ad N notam, per lineam ductam ab E puncto dato super lineam BC. producam enim duas lineas EA, ED: & extendam DA ex utraque parte secundum rectitudinem, donec linea BF concurreret cum ea in puncto F, æqui-



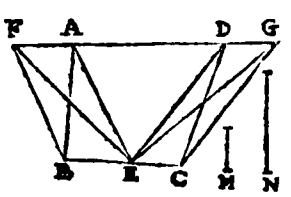
1 Quæ æqualis est τῇ EP. *Savil.* 2 Si duo tota æqualia dividantur in parteis eandem inter se rationem habenteis, erunt partes ὁμώνυμοι inter se æquales. *Idem.*

diſtanter lineæ AE: & CG concurreret cum ea in puncto G, æquidiſtanter lineæ ED. deinde dividam lineam FG ſecundum proportionem M ad N.

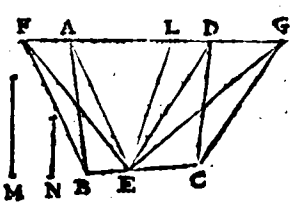
Et primo, cadat diviſio inter F & A in puncto H, ita quod ſit proportio FH ad HG ſicut M ad N; dividam etiam lineam BA ſecundum proportionem FH ad HA: & cadat diviſio in puncto K: ita quod ſit proportio BK ad KA ſicut FH ad HA. tunc ducta linea KE, dico quod illa dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. protraham enim duas lineas EF, EG. erit igitur triangulus AFE æqualis triangulo ABE, per 37. primi; & triangulus DGE æqualis triangulo DCE. addito igitur utrique triangulo AED, erit triangulus FEG æqualis quadrangulo ABCD propoſito. *Hoc memoriæ commenda.* Et quia triangulus AFE eſt æqualis triangulo ABE; & eadem proportio FH ad HA ſicut BK ad KA. igitur, per primam ſexti, triangulus EHF æqualis [1] eſt triangulo EKB. igitur & reſiduum reſiduo æquale. triangulus igitur HEG reſiduus æqualis eſt pentagono AKECD. eadem igitur eſt proportio trianguli EKB ad pentagonum AKECD ſicut trianguli EHF ad triangulum EGH; hoc eſt, ſicut lineæ FH ad lineam HG, & per conſequens ſicut M ad N. quod fuit probandum.



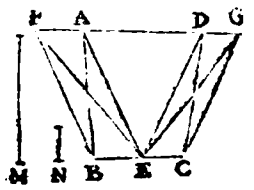
Secundo, cadat diviſio in puncto A, ita quod ſit proportio FA ad AG ſicut M ad N. tunc protracta linea EA, dico quod illa dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. nam triangulus AFE æqualis eſt triangulo ABE. igitur triangulus AEG reſiduus æqualis eſt [2] quadrangulo AECD reſiduo. eadem ergo eſt proportio trianguli ABE ad quadrangulum AECD ſicut trianguli AFE ad triangulum AEG; hoc eſt, ſicut FA ad lineam AG, & per conſequens ſicut M ad N. quod fuit probandum.



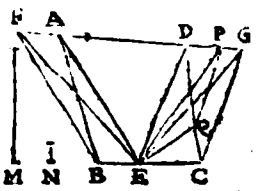
Tertio, cadat diviſio inter A & D in puncto L, ita quod ſit proportio FL ad LG ſicut proportio M ad N. tunc dico quod linea EL dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. cum enim trianguli AFE & ABE ſint æquales, addito utrique triangulo LAE, erit triangulus LFE æqualis quadrangulo ABEL. igitur triangulus LEG reſiduus æqualis eſt [3] quadrangulo LECD reſiduo. igitur eadem eſt proportio quadranguli ABEL ad quadrangulum LECD ſicut trianguli LFE ad triangulum LEG: & per conſequens ſicut proportio M ad N. quod fuit probandum.



Quarto, cadat diviſio in puncto D: quia tunc trianguli DGE & DCE ſunt æquales, erit triangulus DFE reſiduus æqualis quadrangulo DABE reſiduo. igitur eadem eſt proportio quadranguli ABED ad triangulum DEC ſicut trianguli DFE ad triangulum DEG; hoc eſt, ſicut lineæ FD ad lineam DG, & per conſequens ſicut M ad N. linea igitur DE dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur.



Quinto, cadat diviſio in puncto P inter D & G; ita quod proportio FP ad PG ſit ſicut M ad N. tunc protraham lineam PQ æquidiſtantem lineæ CG, donec concurrat cum linea CD in puncto Q. protracta igitur linea EQ, dico quod illa dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. protraham enim lineam PE. erit igitur triangulus DEP æqualis triangulo DEQ, per 37. primi. poſito igitur triangulo AED communi, erit triangulus AEP æqualis quadrangulo AEQD. duo etiam trianguli AFE & ABE ſunt æquales. igitur triangulus FEP æqualis eſt pentagono ABEQD. erit igitur triangulus PEG reſiduus æqualis triangulo QEC reſiduo: igitur eadem eſt proportio pentagoni ABEQD ad triangulum QEC ſicut trianguli FEP ad triangulum PEG; hoc eſt, ſicut lineæ FP ad lineam PG: & per conſequens ſicut M ad N. quod fuit propoſitum.



PROP. X. PROBL.

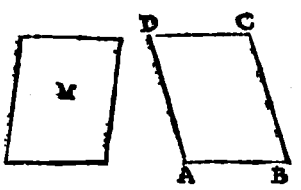
Propoſita linea nota, duabuſque lineis à terminis ejus protractis, angulos qualeſcunque cum ea ex eadem parte conſtantibus, ſuperficiem propoſitæ ſuperficiei [4] notæ æqualem, ſuper lineam notam propoſitam deſignare, ita quod dicta ſuperficies [5] inter lineam illam notam, & lineam ſibi æquidiſtantem, atque inter dictas duas ex una parte, vel ex altera notæ lineæ protractas lineas, includatur.

VErbi gratia ſit linea AB nota: & duæ lineæ AD, BC ſecundum libitum ſituatæ volo ſuper lineam AB conſtituere ſuperficiem æqualem ſuperficiei M notæ, incluſam inter li-

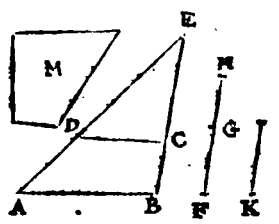
1 Nam tota AFE, ABE æqualia ſunt: & partes FHE, HEA rationem habent quam BEK, KEA, per 1. 6. ut in præcedente. *Savil.* 2 Nam triangulus FEG æqualis eſt quadrangulo ABCD, eodem argumento quo ſupra. *Idem.* 3 Nam FEG, ABCD ſunt æqualia, ut ſupra. *Idem.* 4 Rectilineæ. *Idem.* 5 Id eſt, claudatur his quatuor rectis lineis, linea propoſita, duabus protractis, & linea propoſitæ æquidiſtante. *Idem.*

neas

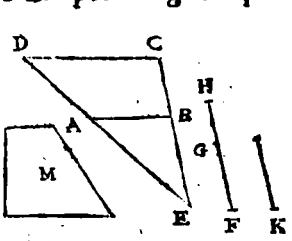
neas A D, B C, & inter A B, & lineam ſibi æquidiſtantem. duo igitur anguli D A B & C B A aut ſunt æquales duobus rectis, aut majores, aut minores. ſint primo æquales duobus rectis. erit igitur [per 28. 1.] linea A D æquidiſtans lineæ B C. faciam igitur, per 44. 1, ſuper lineam A B ſuperficiem æquidiſtantium laterum, cujus anguli ſint æquales angulis D A B, C B A, & ipſa ſuperficies ſit æqualis ſuperficiei M: & patet propoſitum.



Sint ſecundo, duo anguli DAB & CBA minores duobus rectis. concurrent igitur [per 11. ax.] duæ lineæ A D, B C ex parte C D. concurrant autem in puncto E. niſi igitur triangulus E A B fuerit major ſuperficie M; ex parte D C non poteſt talis ſuperficies conſtitui, qualem voluimus: ſed tunc ex parte alia fieri oportebit. ſit igitur triangulus E A B major ſuperficie M: & ſit [1] proportio trianguli E A B ad ſuperficiem M ſicut linea F H ad lineam F G: & ſit linea K media proportionalis inter F H & G H. deinde ſecabo ex linea E B lineam E C, quæ ſe habeat ad lineam E B ſicut linea K ad lineam F H. tunc protracta C D æquidiſtanter lineæ B A, dico quod ſuperficies A B C D eſt æqualis ſuperficiei M. *Probatio.* Nam proportio trianguli B A E ad triangulum C D E eſt, per 19. ſexti, ſicut proportio B E ad C E duplicata. igitur & ſicut proportio F H ad K duplicata: & per conſequens proportio trianguli B A E ad triangulum C D E eſt ſicut proportio F H ad G H. igitur everſim, proportio trianguli B A E ad quadrangulum B A D C eſt ſicut proportio F H ad F G. ſed quæ eſt proportio F H ad F G, eadem eſt trianguli B A E ad ſuperficiem M. igitur eadem eſt proportio trianguli B A E ad ſuperficiem M, & ad quadrangulum B A D C. quare ſuperficies M & quadrangulus B A D C ſunt æquales. & hoc eſt quod voluimus.



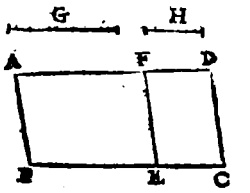
Sint tertio, duo anguli D A B & C B A majores duobus rectis. concurrent igitur ex parte A B. ſitque in puncto E. ponam igitur proportionem G H ad G F ſecundum proportionem trianguli A B E ad ſuperficiem M: ſitque linea K media proportionalis inter F H & G H: & ponam proportionem E C ad E B ſecundum proportionem F H ad K. tunc protracta C D æquidiſtanter lineæ A B, dico quod ſuperficies M æqualis eſt quadrangulo A B C D. *Probatio.* Proportio enim trianguli C D E ad triangulum B A E eſt (ut ſupra oſtenſum eſt) ſicut proportio F H ad G H. igitur everſim, proportio C D E trianguli ad quadrangulum C D A B eſt ſicut proportio F H ad F G. igitur disjunctim, proportio A B E trianguli ad quadrangulum A B C D eſt ſicut proportio G H ad G F: & per conſequens ſicut proportio ejuſdem trianguli A B E ad ſuperficiem M. igitur quadrangulus A B C D & M ſuperficies ſunt æquales. & hoc voluimus demonſtrare.



PROP. XI. PROBL.

Quadrangulum æquidiſtantium laterum, per lineam uni ſuorum laterum æquidiſtantem, ſecundum proportionem datam dividere.

SIT quadrangulus æquidiſtantium laterum A B C D: quem volo dividere ſecundum proportionem G ad H, per lineam æquidiſtantem lateri ejus A B. dividam enim lineam B C in puncto E ſecundum proportionem G ad H: & protraham lineam E F æquidiſtantem lineæ A B: & habetur propoſitum.

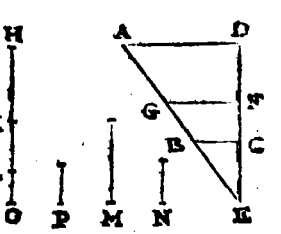


Nam per primam ſexti, eadem eſt proportio quadranguli A B E F ad quadrangulum F E C D ſicut lineæ B E ad lineam E C: & per conſequens ſicut G ad H. quod fuit propoſitum.

PROP. XII. PROBL.

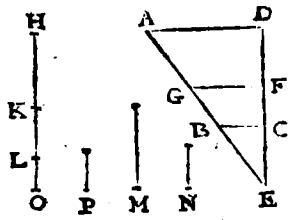
Quadrangulum duorum tantum æquidiſtantium laterum, per lineam æquidiſtantibus ejus lateribus æquidiſtantem, ſecundum proportionem datam dividere.

SIT quadrangulus A B C D, cujus tantum duo latera A D & B C æquidiſtent. illum igitur quadrangulum volo dividere ſecundum proportionem M ad N, per lineam æquidiſtantem lateribus ejus A D & B C: latera enim ejus A B & D C concurrent neceſſario. ſitque in puncto E: & ponam proportionem H O ad L O ſecundum proportionem trianguli D A E ad triangulum C B E. convertendo igitur & dividendo, erit proportio trianguli C B E ad quadrangulum D A B C ſicut L O ad L H. dividam autem lineam H L in puncto K ſecundum proportionem M ad N; ita quod ſit proportio H K ad K L ſicut M ad N. & ſit linea P media proportionalis inter lineas K O & O L: & ponam proportionem F B ad C E ſecundum proportionem K O ad P. deinde protraham li-



[1] Etiam hic opus eſt alio problemate. *Datis duabus figuris planis rectilineis, & linea recta, rectam lineam reperire quarto loco proportionalem.* rectilineas dico; nam ſi figuræ proponantur circulares aut ex mixtarum genere, næ problema iſtuc multo erit ἀλαίσηκον eo quod ab auctore proponitur. *Savil.*

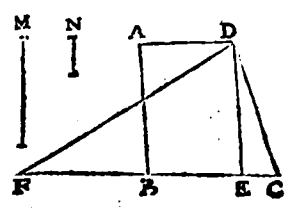
neam F G æquidiſtantem lineæ D A. dico igitur quod illa dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. *Probatio.* Nam proportio trianguli F G E ad triangulum C B E eſt ſicut F E ad C E proportio duplicata. igitur & ſicut K O ad P proportio duplicata: & per conſequens proportio trianguli F G E ad triangulum C B E eſt ſicut proportio K O ad L O. igitur diviſim proportio quadranguli F G B C ad triangulum C B E eſt ſicut proportio K L ad L O. proportio vero trianguli C B E ad quadrangulum A B C D (ut ſupra oſtenſum eſt) eſt ſicut proportio L O ad L H. igitur per æquam proportionalitatem, proportio quadranguli F G B C ad quadrangulum A B C D eſt ſicut proportio K L ad L H. igitur disjunctim, proportio quadranguli F G B C ad quadrangulum A G F D eſt ſicut proportio K L ad K H. igitur è contra, proportio A G F D ad G B C F eſt ſicut H K ad K L; & per conſequens ſicut M ad N. quod fuit propoſitum.



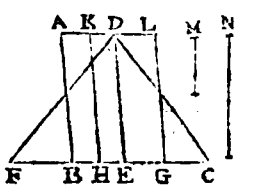
Prop. XIII. Probl.

Quadrangulum duorum tantum æquidiſtantium laterum, per lineam æquidiſtantem uni ſuorum laterum non æquidiſtantium, ſecundum proportionem datam dividere.

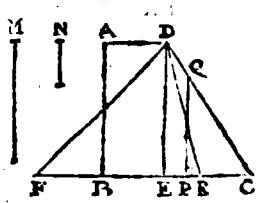
SInt quadranguli A B C D duo tantum latera A D, B C æquidiſtantia. illum igitur quadrangulum volo dividere ſecundum proportionem M ad N, per lineam æquidiſtantem lateri ejus A B. ab altero igitur angulorum C vel D, protraham lineam intra quadrangulum æquidiſtantem lineæ A B: & ſit, gratia exempli, linea D E. deinde protraham E B ſecundum rectitudinem uſque ad F, donec B F ſit æqualis B E, & dividam lineam F C ſecundum proportionem M ad N. & primo cadat diviſio in puncto E; ita quod ſit proportio F E ad E C ſicut M ad N. dico igitur quod linea D E dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. *Probatio.* Protraham lineam D F. eſt igitur proportio trianguli F D E ad triangulum E D C ſicut proportio F E ad E C; igitur & ſicut proportio M ad N. ſed per 1. ſexti, & 41. primi, quadrangulus A B E D æqualis eſt triangulo F D E. igitur proportio quadranguli A B E D ad triangulum D E C eſt ſicut M ad N. quod fuit propoſitum.



Secundo, cadat diviſio inter F & E; ita quod major ſit proportio F E ad E C quam ſit proportio M ad N. diviſa igitur E C linea per æqualia in puncto G; erit major proportio B E ad E G quam M ad N, propter hoc quod linea B E eſt medietas lineæ F E, & linea E G eſt medietas lineæ E C. diviſa igitur linea B G ſecundum proportionem M ad N, cadet diviſio inter B & E: ſitque in puncto H; ita quod eadem ſit proportio B H ad H G ſicut M ad N. tunc protracta linea H K æquidiſtanter lineæ B A, dico quod illa dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. protraham enim A D lineam ſecundum rectitudinem uſque ad L; quouſque concurrat cum linea G L æquidiſtanter lineæ D E. quia igitur linea E C eſt dupla lineæ E G, erit parallelogrammum D E G L æquale triangulo D E C. addito igitur utrique quadrangulo K H E D, erit quadrangulus K H G L æqualis quadrangulo K H C D. igitur eadem eſt proportio quadranguli A B H K ad quadrangulum K H G L, & ad quadrangulum K H C D. proportio vero quadranguli A B H K ad quadrangulum K H G L eſt ſicut proportio B H ad H G: & per conſequens ſicut M ad N. igitur proportio quadranguli A B H K ad quadrangulum K H C D eſt ſicut proportio M ad N. quod eſt propoſitum.



Tertio cadat diviſio inter E & C, in puncto R, ita quod ſit proportio F R ad R C ſicut M ad N. tunc protraham lineam D R; & per 3. hujus, dividam triangulum D E C ſecundum proportionem trianguli D E R ad triangulum D R C, per lineam P Q æquidiſtantem lateri ejus D E; ita quod ſit quadrangulus D E P Q æqualis triangulo D E R: & etiam triangulus Q P C æqualis triangulo D R C. dico igitur quod linea P Q dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. proportio enim trianguli F D R ad triangulum R D C eſt ſicut proportio M ad N. ſed quadrangulus A B E D æqualis eſt triangulo F D E: & quadrangulus D E P Q æqualis eſt triangulo D E R. igitur pentagonus A B P Q D eſt æqualis triangulo F D R. ſed & triangulus D R C æqualis eſt triangulo Q P C. igitur proportio pentagoni A B P Q D ad triangulum Q P C eſt ſicut proportio trianguli F D R ad triangulum D R C: & per conſequens ſicut proportio M ad N. quod fuit propoſitum.



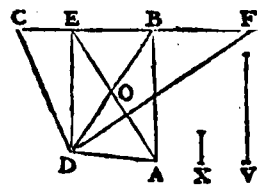
Conſimiliter operaremur per lineam æquidiſtantem lateri ejus D C, & patet totum quod propoſuimus.

Prop. XIV. Probl.

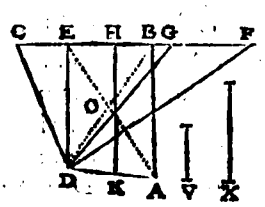
Quadrangulum nulla habentem æquidiſtantia latera, per lineam uni ſuorum laterum æquidiſtantem, ſecundum proportionem datam dividere.

VErbi gratia quadranguli A B C D nulla ſint æquidiſtantia latera: illum tamen volo dividere ſecundum proportionem V ad X, per lineam

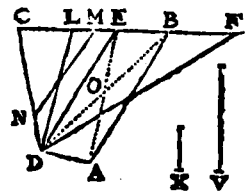
lineam æquidiſtantem lateri ejus AB. protraham enim ab altero angulorum C vel D lineam æquidiſtantem lineæ AB, tranſeuntem intra quadrangulum: & ſit (gratia exempli) linea DE, & protraham duas lineas EA, BD ſecantes ſe in puncto O: & extendam lineam CB ſecundum rectitudinem uſque ad F, donec ſit proportio FB ad BE ſicut proportio AO ad OE, & protraham lineam FD. deinde dividam lineam FC ſecundum proportionem V ad X. & primo, cadat diviſio in puncto E; ita quod ſit proportio FE ad EC ſicut proportio V ad X. dico igitur quod linea DE dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. *Probatio.* Nam proportio trianguli ADO ad triangulum ODE eſt ſicut proportio AO ad OE: & etiam proportio trianguli ABO ad triangulum OBE eſt ſicut proportio AO ad OE. igitur aggregando, proportio trianguli BAD ad triangulum BED eſt ſicut proportio AO ad OE: & per conſequens ſicut proportio FB ad BE. & ſecundum eandem proportionem eſt triangulus FDB ad triangulum BED. igitur [per 9.5.] triangulus BAD æqualis eſt triangulo FBD. addito igitur BDE triangulo communi utrique, erit triangulus FDE æqualis quadrangulo ABED. ſed proportio trianguli FDE ad triangulum EDC eſt ſicut proportio FE ad EC: & per conſequens ſicut proportio V ad X. igitur proportio quadranguli ABED ad triangulum EDC eſt ſicut proportio V ad X. quod fuit propoſitum.



Secundo, cadat diviſio inter F & E (ſive intra quadrangulum, ſive extra, non eſt cura): ſitque in puncto G: ita quod ſit proportio FG ad GC ſicut proportio V ad X; & protraham lineam GD. erit igitur proportio trianguli FGD ad triangulum GDC ſicut V ad X. adjungam igitur, per 10. hujus, ad lineam AB ſuperficiem æqualem triangulo FDG; quam contineant duo anguli ABC & BAD, ſeparando eam per lineam HK æquidiſtantem lineæ AB. dico igitur quod illa dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. tranſibit enim intra quadrangulum ABED; propter hoc quod triangulus FDE eſt æqualis quadrangulo ABED; & triangulus FDG minor eſt triangulo FDE. cum igitur triangulus FDE ſit æqualis quadrangulo ABED, & triangulus FDG ſit æqualis quadrangulo ABHK: oportet quod triangulus GDE ſit æqualis quadrangulo KHED. poſito igitur triangulo EDC communi, erit triangulus GDC æqualis quadrangulo KHCD. eadem igitur eſt proportio quadranguli ABHK ad quadrangulum KHCD ſicut trianguli FGD ad triangulum GDC: & per conſequens ſicut proportio V ad X. quod fuit propoſitum.



Tertio, cadat diviſio inter E & C in puncto L: ita quod ſit proportio FL ad LC ſicut V ad X. erit igitur proportio trianguli FDL ad triangulum LDC ſicut proportio V ad X. deinde ſecabo, per tertiam hujus, ex triangulo DEC triangulum ſimilem ei, æqualem vero triangulo LDC, per lineam MN æquidiſtantem lineæ ED. dico igitur quod illa dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. triangulus enim FDE æqualis eſt quadrangulo ABED; & triangulus EDL æqualis eſt quadrangulo DEMN: propter hoc quod trianguli MNC & LDC ſunt æquales. igitur pentagonus ABMND æqualis eſt triangulo FDL. igitur eadem eſt proportio pentagoni ABMND ad triangulum MNC ſicut trianguli FDL ad triangulum LDC: & per conſequens ſicut V ad X. quod fuit propoſitum.

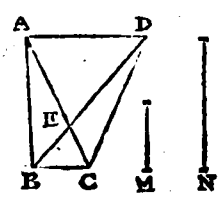


Sicut autem dividitur quadrangulus ſecundum proportionem datam per lineam æquidiſtantem lateri ejus AB, ita poteſt dividi per lineam æquidiſtantem alteri ejus lateri cuicunque; & patet propoſitum.

PROP. XV. PROBL.

Quemlibet quadrangulum, per lineam æquidiſtantem uni diametrorum ejus, ſecundum proportionem datam dividere.

VErbi gratia quadrangulum ABCD volo dividere ſecundum proportionem M ad N, per lineam æquidiſtantem diametro ejus AC. protraham enim diametrum BD ſecantem AC in puncto E: & dividam lineam BD ſecundum proportionem M ad N. primo igitur cadat diviſio in puncto E; ita quod eadem ſit proportio BE ad ED ſicut M ad N. dico igitur quod diameter AC dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. nam proportio trianguli ABE ad triangulum AED eſt ſicut proportio BE ad ED. ſimiliter proportio trianguli BEC ad triangulum EDC eſt ſicut proportio BE ad ED. igitur conjungendo, erit proportio trianguli ABC ad triangulum ADC ſicut proportio BE ad ED: & per conſequens ſicut proportio M ad N. quod fuit propoſitum.

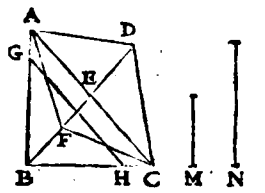


Secundo, cadat diviſio inter B & E in puncto F: ita quod eadem ſit proportio BF ad FD quæ eſt M ad N. tunc protraham duas lineas FA, FC; & erit proportio duorum triangulorum ABF, CBF conjunctim ad quadrangulum

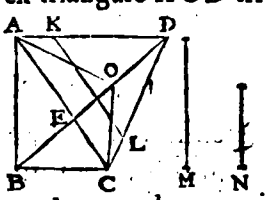
1 Eodem argumento quo in ſuperiori πρότερον: nam ut AO ad OE, id eſt FB ad BE, id eſt FDB ad BDE, ſic BAD ad BDE; quare FDB æquale BAD; & communi addito BDE, erit FDE æquale BADE. *Savil.*

AFCD

AFCD ſicut proportio BF ad FD. ex triangulo igitur ABC ſecabo, per tertiam hujus, triangulum GBH ſibi ſimilem, & æqualem duobus triangulis ABF, CBF conjunctim, per lineam GH æquidiſtantem lineæ AC: illam igitur lineam dico dividere quadrangulum, ſecundum quod proponitur. quia enim triangulus GBH eſt æqualis ſuperficiei ABCF, erit triangulus AFC æqualis quadrangulo AGHC. addito igitur ADC communi, erit quadrangulus AFCD æqualis pentagono AGHCD. proportio igitur trianguli GBH ad pentagonum AGHCD eſt ſicut proportio ſuperficiei ABCF ad quadrangulum AFCD: & per conſequens ſicut proportio M ad N. quod fuit propoſitum.



Tertio, cadat diviſio inter E & D in puncto O: ita quod ſit proportio BO ad OD ſicut M ad N. tunc protraham duas lineas OA, OC. erit igitur proportio quadranguli ABCO ad ſuperficiem AOCD ſicut proportio BO ad OD; & per conſequens ſicut M ad N. ſecabo igitur, per tertiam hujus, ex triangulo ACD triangulum KLD ſibi ſimilem, & æqualem ſuperficiei AOCD, per lineam KL æquidiſtantem lineæ AC. dico igitur quod illa dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. triangulus enim AOC æqualis eſt quadrangulo ACLK. igitur quadrangulus ABCO æqualis eſt pentagono ABCLK, & triangulus KLD æqualis ſuperficiei AOCD. igitur proportio pentagoni ABCLK ad triangulum KLD eſt ſicut proportio quadranguli ABCO ad ſuperficiem AOCD; & per conſequens ſicut proportio M ad N. quod fuit propoſitum.

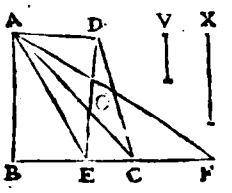


Conſimiliter faciemus, ut dividatur quadrangulus ABCD ſecundum proportionem datam, per lineam æquidiſtantem diametro ejus BD. & patet propoſitum.

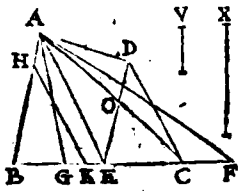
Prop. XVI. Probl.

Quemlibet quadrangulum, per lineam æquidiſtantem lineæ in quadrangulo aſſignatæ, quæ nec æquidiſtet alicui laterum ejus, neque alicui diametrorum ejus, ſecundum proportionem datam dividere.

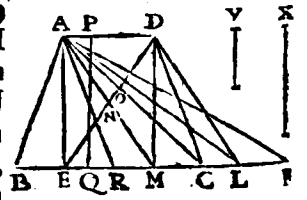
Ut verbi gratia quadrangulum ABCD volo dividere ſecundum proportionem V ad X, per lineam æquidiſtantem lineæ AE. protraham enim duas diametros AC, ED ſecantes ſe ſuper punctum O: deinde producam lineam BC ſecundum rectitudinem uſque ad F, donec ſit proportio EC ad CF ſicut proportio EO ad OD: & protraham lineam AF. tunc dividam lineam BF ſecundum proportionem V ad X: & primo, cadat diviſio in E puncto; ita quod ſit proportio BE ad EF ſicut V ad X. dico igitur quod linea AE dividit quadrangulum, ſecundum quod proponitur. nam proportio trianguli AEC ad triangulum ACD eſt ſicut proportio EO ad OD. igitur eſt ſicut proportio EC ad CF, & per conſequens ſicut proportio trianguli AEC ad triangulum ACF. igitur trianguli ACF & ACD ſunt æquales. totus igitur quadrangulus AECD eſt æqualis toti triangulo AEF. eadem igitur eſt proportio trianguli ABE ad quadrangulum AECD ſicut ad triangulum AEF. ſed proportio ABE trianguli ad triangulum AEF eſt ſicut proportio V ad X. igitur proportio trianguli ABE ad quadrangulum AECD eſt ſicut proportio V ad X. quod fuit propoſitum.



Secundo, cadat diviſio inter B & E in puncto G: ita quod eadem ſit proportio BG ad GF ſicut V ad X. tunc protraham lineam AG: & ſecabo, per tertiam hujus, de triangulo ABE triangulum HBK ſibi ſimilem & æqualem triangulo ABG, per lineam HK æquidiſtantem lineæ AE. tunc illam dico dividere quadrangulum, ſecundum quod proponitur. erit enim quadrangulus AHKE reſiduus de triangulo ABE æqualis triangulo AGE reſiduo de eodem ABE. ſed & quadrangulus AECD æqualis eſt triangulo AEF. igitur pentagonus AHKCD æqualis eſt triangulo AGF. igitur eadem eſt proportio trianguli HBK ad pentagonum AHKCD ſicut trianguli ABG ad triangulum AGF; hoc eſt, ſicut BG ad GF, & per conſequens ſicut V ad X. quod fuit propoſitum.



Tertio, cadat diviſio inter E & F. quia igitur AE non eſt æquidiſtans lineæ CD, protraham ab alterb duorum angulorum DC lineam intra quadrangulum æquidiſtantem lineæ AE: quæ (gratia exempli) ſit linea DM: & protraham lineam AM ſecantem lineam ED ſuper punctum N. deinde faciam proportionem LM ad ME ſecundum proportionem DN ad NE. hoc autem ſtatim fieri poteſt, protrahendo lineam DL æquidiſtantem lineæ AM. cadet igitur L citra F; eo quod linea DF, ſi protraheretur, eſſet[2] æquidiſtans lineæ AC, ſi illa protraheretur. tunc protraham lineam AL. erit igitur triangulus AEL æqualis quadrangulo AEMD. dividatur igitur linea BF ſecundum proportionem V ad X: & nunc cadat diviſio inter E & L



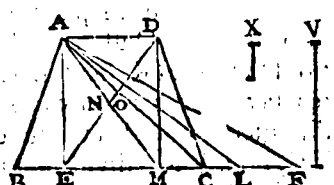
1 Eodem argumento quo in ſuperiori πρότασι. *Savil.* πρότασις. *Idem.*

2 Per 2. ſexti; quia eſt ut EO ad OD ſic EC ad CF, per

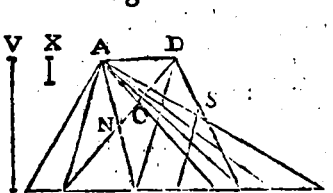
in

in puncto R, ita quod eadem sit proportio B R ad R F sicut V ad X. deinde, per decimam hujus, protraham lineam P Q æquidistantem lineæ A E, sic quod superficies A E Q P sit æqualis triangulo A E R. & quia triangulus A E L est major triangulo A E R: & triangulus A E L est æqualis quadrangulo A E M D; erit propter hoc quadrangulus A E Q P minor quadrangulo A E M D[1]. dico igitur quod linea P Q dividit quadrangulum A B C D, secundum quod proponitur. *Probatio.* Quadrangulus enim A E C D est æqualis triangulo A E F: & quadrangulus A E Q P est æqualis triangulo A E R. igitur quadrangulus P Q C D residuus est æqualis triangulo A R F residuo. similiter quia quadrangulus A E Q P est æqualis triangulo A E R: posito triangulo A B E communi; erit quadrangulus A B Q P æqualis triangulo A B R. igitur eadem est proportio quadranguli A B Q P ad quadrangulum P Q C D sicut trianguli A B R ad triangulum A R F. igitur & sicut B R ad R F: & per consequens sicut V ad X. quod fuit propositum.

Quarto, cadat divisio in puncto L, ita quod eadem sit proportio B L ad L F sicut V ad X. tunc dico quod linea D M dividit quadrangulum, secundum quod proponitur. nam triangulus A E F est æqualis quadrangulo A E C D: & triangulus A E L est æqualis quadrangulo A E M D. igitur triangulus A L F residuus est æqualis triangulo D M C residuo. similiter, quia quadrangulus A E M D est æqualis triangulo A E L; posito triangulo A B E communi, erit quadrangulus A B M D æqualis triangulo A B L. eadem igitur est proportio quadranguli A B M D ad triangulum D M C sicut trianguli A B L ad triangulum A L F: & per consequens sicut V ad X. quod fuit propositum.



Quinto, cadat divisio inter L & F in puncto Y; ita quod eadem sit proportio B Y ad Y F sicut V ad X: & protraham lineam A Y. quia igitur triangulus D M C[2] æqualis est triangulo A L F; & triangulus A L F major est triangulo A Y F: erit triangulus D M C major triangulo A Y F. igitur ex triangulo D M C separabo, per tertiam hujus, triangulum S T C sibi similem, & æqualem triangulo A Y F, per lineam S T æquidistantem lineæ D M. dico igitur quod linea S T dividit quadrangulum, secundum quod proponitur. quia enim triangulus D M C est æqualis triangulo A L F; & etiam triangulus S T C est æqualis triangulo A Y F: erit quadrangulus D M T S residuus æqualis triangulo A L Y residuo. cum igitur quadrangulus A B M D[3] sit æqualis triangulo A B L; erit pentagonus A B T S D æqualis triangulo A B Y. eadem igitur est proportio pentagoni A B T S D ad triangulum S T C sicut trianguli A B Y ad triangulum A Y F. igitur & sicut B Y ad Y F: & per consequens sicut V ad X. & hoc est quod voluimus demonstrare.

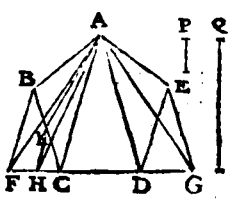


Et est notandum quod sicut dividitur quadrangulus per lineam æquidistantem lineæ ductæ ab angulo ejus, quæ nec æquidistet ejus lateribus, nec ejus diametris: ita potest dividi per lineam æquidistantem lineæ non ductæ ab angulo assignato, ut protrahendo lineam ab aliquo angulo quadranguli cadentem intra quadrangulum, & æquidistantem lineæ assignatæ: & tunc operabimur, sicut jam docuimus.

PROP. XVII. PROBL.

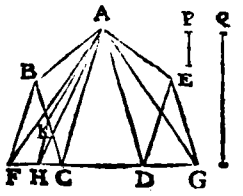
Pentagonum quemlibet notum per, lineam à quolibet angulo ejus ductam secundum proportionem datam dividere.

VErbi gratia pentagonum A B C D E volo dividere secundum proportionem P ad Q, per lineam ductam ab angulo ejus A. protraham duas lineas A C, A D: & ab angulo B protraham lineam B F æquidistantem lineæ A C, donec concurrat cum linea D C ulterius protracta in puncto F. similiter ab angulo E protraham lineam E G æquidistantem lineæ A D, donec concurrat cum linea C D ulterius protracta in puncto G. tunc protractis lineis A F, A G; erit triangulus A F G æqualis pentagono A B C D E: propter hoc quod triangulus A B C est æqualis triangulo A F C, & triangulus A E D est æqualis triangulo A G D; addito A C D communi utrisque, patet quod diximus. dividam igitur lineam F G secundum proportionem P ad Q. & cadat primo divisio inter F & C in puncto H: ita quod sit proportio F H ad H G sicut proportio P ad Q. protraham igitur H K æquidistanter lineæ B F, donec tetigerit lineam B C in puncto K. est igitur eadem proportio B K ad K C sicut F H ad H C, per secundam sexti. deinde protracta linea A K: dico illam dividere pentagonum, secundum quod proponitur. protraham enim lineam A H. quia igitur triangulus A E D est æqualis triangulo A G D; addito A C D communi, erit quadrangulus A C D E æqualis triangulo A C G. similiter, quia triangulus A K C est æqualis triangulo A H C, propter æquidistantiam linearum K H & A C: erit pentagonus A K C D E æqualis triangulo A H G. item, quia eadem est proportio B C ad B K sicut F C ad F H; erit eadem proportio trianguli A B C ad triangulum A B K sicut trianguli



1 Cadetque P Q citra D M. *Savil.* 2 Ut in præcedenti πρότα. 3 Ut in præcedenti πρότα.

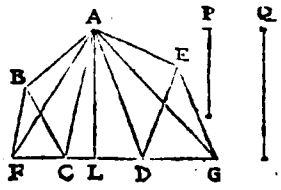
AFC ad triangulum AFH. igitur permutatim, eadem eſt proportio trianguli ABC ad triangulum AFC ſicut trianguli ABK ad triangulum AFH. cum igitur trianguli ABC & AFC ſint æquales;



erunt trianguli ABK & AFH æquales. eadem igitur eſt proportio trianguli ABK ad pentagonum AKCDE ſicut trianguli AFH ad triangulum AHG. igitur & ſicut FH ad HG: & per conſequens ſicut P ad Q. quod fuit propoſitum.

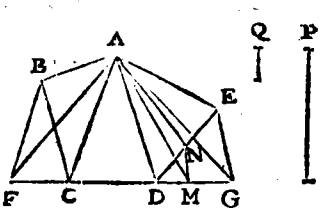
Secundo, cadat diviſio in puncto C; ita quod eadem ſit proportio FC ad CG ſicut P ad Q. tunc dico quod linea AC dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. nam ut oſtenſum eſt ſupra, quadrangulus ACDE eſt æqualis triangulo ACG, & triangulus ABC æqualis eſt triangulo AFC. igitur eadem eſt proportio trianguli ABC ad quadrangulum ACDE ſicut trianguli AFC ad triangulum ACG. igitur ſicut FC ad CG: & per conſequens ſicut P ad Q. quod fuit propoſitum.

Tertio, cadat diviſio in puncto L inter C & D: ita quod ſit proportio FL ad LG ſicut P ad Q. protraham igitur lineam AL; quam dico dividere pentagonum, ſecundum quod proponitur. quia enim triangulus ABC eſt æqualis triangulo AFC; poſito ACL communi, erit quadrangulus ABCL æqualis triangulo AFL. ſimiliter, poſito triangulo ALD cum utriſque triangulis AED, AGD; erit quadrangulus ALDE æqualis triangulo ALG. igitur eadem eſt proportio quadranguli ABCL ad quadrangulum ALDE ſicut trianguli AFL ad triangulum ALG. igitur ſicut FL ad LG; & per conſequens ſicut P ad Q. quod fuit propoſitum.



Quarto, cadat diviſio in puncto D. tunc dico quod linea AD dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur: & patet probatio, ſicut patuit quando cecidit diviſio in puncto C.

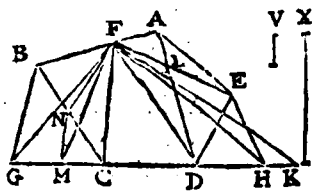
Quinto, cadat diviſio inter D & G in puncto M; ita quod eadem ſit proportio FM ad MG ſicut P ad Q. tunc erigam lineam MN æquidiſtanter lineæ GE, quouſque tetigerit lineam DE in puncto N: & protraham lineam AN; quam dico dividere pentagonum, ſecundum quod proponitur. protracta enim linea AM, arguitur, ut prius in primo caſu [1], quod triangulus AEN eſt æqualis triangulo AGM: & quod pentagonus ABCDN eſt æqualis triangulo AFM. igitur eadem eſt proportio pentagoni ABCDN ad triangulum ANE ſicut trianguli AFM ad triangulum AMG. igitur & ſicut proportio FM ad MG: & per conſequens ſicut P ad Q. quod fuit propoſitum.



PROP. XVIII. PROBL.

Per lineam ductam à puncto, in latere noti pentagoni aſſignato, dictum pentagonum ſecundum proportionem notam dividere.

VErbi gratia, pentagonum ABCDE volo dividere ſecundum proportionem V ad X, per lineam ductam à puncto F aſſignato in in latere ejus AB. protraham lineam BG æquidiſtanter lineæ FC, & lineam EH æquidiſtanter lineæ FD, donec concurrant cum linea CD, ulterius ex utraque parte protracta, in punctis G & H. & protraham lineam AD ſecantem lineam FE in puncto L: deinde extendam lineam DH uſque ad K, donec ſit proportio DH ad HK ſicut DL ad LA. hoc autem fiet, imaginando lineam AK protrahi æquidiſtanter lineæ LH. tunc protraham lineas FG, FH, FK. dividam igitur lineam GK ſecundum proportionem V ad X. & cadat diviſio primo inter G & C in puncto M: ita quod eadem ſit proportio GM ad MK ſicut V ad X. deinde dividam lineam BC in puncto N per lineam MN æquidiſtantem lineæ BG; eritque proportio BN ad NC ſicut proportio GM ad MC. tunc protracta linea FN; dico quod illa dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. *Probatio.* Nam [2] proportio trianguli FDE ad triangulum FAE eſt ſicut proportio DL ad LA. igitur & ſicut proportio DH ad HK, quæ eſt ſicut proportio trianguli DFH ad triangulum HFK. igitur proportio trianguli FDE ad triangulum FAE eſt ſicut proportio trianguli DFH ad triangulum HFK. igitur permutatim, proportio trianguli DFE ad triangulum DFH eſt ſicut proportio trianguli FAE ad triangulum FHK. ſed trianguli DEH & DFE ſunt æquales; propter æquidiſtantiam linearum FD & EH. igitur trianguli FAE & FHK ſunt æquales. quadrangulus igitur FDEA æqualis eſt triangulo FDK. addito igitur FCD communi; erit pentagonus FCDEA æqualis triangulo FCK. *Hoc memoriæ commendemus* [3]. ex alia parte



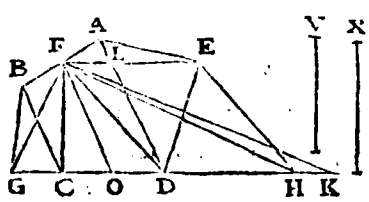
1 Ubi demonſtratum fuit ABK æquale eſſe triangulo AHF: hæc enim illis reſpondent in figura 1. πτώσεως. *Savil.* 2 Per primam ſexti, FDL eſt ad FLA ut DL ad LA; & DEL eſt ad LEA ut DL ad LA: quare aggregando FDE eſt ad FAE ut DL ad LA, ut ſupra aliquoties. τετράγωνα eſt. *Omne quadrilaterum dividitur per diametrum in duo triangula proportionem eandem habentia, quam alterius diametri ſegmenta inter ſe eodem ordine ſumpta.* Idem. 3 Pertinet enim communiter ad omnes πτώσεις.

pro-

protraham lineam F M. quia igitur triangulus F B C eſt æqualis triangulo F G C; & eadem eſt proportio B N ad N C ſicut G M ad M C: [1] erit triangulus F B N æqualis triangulo F G M; & triangulus F N C æqualis triangulo F M C. congregando igitur, patet quod hexagonus F N C D E A eſt æqualis triangulo M F K; & trianguli F B N & F G M ſunt æquales. igitur eadem eſt proportio trianguli F B N ad hexagonum F N C D E A ſicut trianguli F G M ad triangulum F M K. igitur & ſicut lineæ G M ad lineam M K: & per conſequens ſicut V ad X. quod fuit propoſitum.

Secundo, cadat diviſio in puncto C; ita quod eadem ſit proportio G C ad C K ſicut V ad X. dico igitur quod linea F C dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. jam enim oſtenſum fuit quod pentagonus F C D E A eſt æqualis triangulo F C K, & quod etiam triangulus F B C æqualis eſt triangulo F G C. igitur eadem eſt proportio trianguli F B C ad pentagonum F C D E A ſicut trianguli F G C ad triangulum F C K. igitur & ſicut lineæ G C ad C K: & per conſequens ſicut V ad X. quod fuit propoſitum.

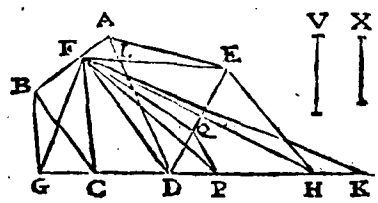
Tertio, cadat diviſio inter C & D in puncto O: ita quod eadem ſit proportio G O ad O K ſicut V ad X. dico igitur quod linea F O dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. addito communi triangulo F O D ad quadrangulum F D E A, & ad triangulum ſibi æqualem F D K; erit pentagonus F O D E A æqualis triangulo F O K. conſimiliter, addito



triangulo F C O communi ad duos æquales triangulos F B C & F G C; erit quadrangulus F B C O æqualis triangulo F G O. igitur eadem eſt proportio quadranguli F B C O ad pentagonum F O D E A ſicut trianguli F G O ad triangulum F O K: igitur & ſicut G O ad O K: & per conſequens ſicut V ad X. quod fuit propoſitum.

Quarto, cadat diviſio in puncto D; ita quod eadem ſit proportio G D ad D K ſicut V ad X. dico igitur quod linea F D dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. addito enim triangulo F C D communi ad æquales triangulos F B C & F G C, patet probatio.

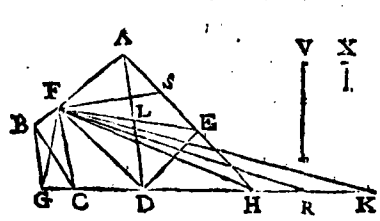
Quinto, cadat diviſio inter D & H in puncto P; ita quod eadem ſit proportio G P ad P K ſicut V ad X. tunc dividam lineam D E in puncto Q, per lineam P Q æquidiſtantem lineæ E H. erit igitur eadem proportio D Q ad Q E ſicut D P ad P H. protracta igitur linea F Q; dico quod illa dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. totus enim quadrangulus F D E A eſt æqualis toti triangulo F D K. ſed & triangulus F D Q [3] eſt æqualis triangulo F D P. igitur quadrangulus F Q E A reliduus æqualis eſt triangulo F P K reſiduo. quadrangulus etiam F B C D æqualis eſt triangulo F G D. addito igitur triangulo F D Q ad quadrangulum F B



C D; & triangulo F D P, æquali triangulo F D Q, addito ad triangulum F G D: patet quod pentagonus F B C D Q æqualis eſt triangulo F G P. eadem igitur eſt proportio pentagoni F B C D Q ad quadrangulum F Q E A ſicut trianguli F G P ad triangulum F P K: & per conſequens ſicut proportio V ad X. quod fuit propoſitum.

Sexto, cadat diviſio in puncto H, dico igitur quod linea F E dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. quia enim quadrangulus F B C D [4] eſt æqualis triangulo F G D, & ut ſupradictum eſt [5], triangulus A F E æqualis eſt triangulo F H K, atque triangulus F D E æqualis triangulo F D H. igitur pentagonus F B C D E æqualis eſt triangulo F G H. igitur eadem eſt proportio pentagoni F B C D E ad triangulum F A E ſicut trianguli F G H ad triangulum F H K. igitur & ſicut G H ad H K: & per conſequens ſicut V ad X. quod fuit propoſitum.

Septimo, cadat diviſio inter H & K in puncto R: ita quod eadem ſit proportio G R ad R K ſicut V ad X. tunc dividam lineam E A in puncto S, ita quod eadem ſit proportio E S ad S A ſicut H R ad R K. dico igitur quod linea F S dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. quia enim triangulus A F E eſt æqualis triangulo F H K; & proportio E S ad S A eſt ſicut proportio H R ad R K: erit triangulus F E S æqualis triangulo F H R, & etiam triangulus F S A æqualis triangulo F R K. ſed & pentagonus F B C D E [6] eſt æqualis triangulo F G H. igitur hexagonus F B C D E S eſt æqualis triangulo F G R. igitur eadem eſt pro-



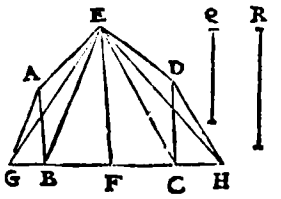
portio hexagoni F B C D E S ad triangulum F S A ſicut trianguli F G R ad triangulum F R K. igitur & ſicut lineæ G R ad lineam R K: & per conſequens ſicut V ad X. quod fuit propoſitum.

1 Nam tota æqualia dividuntur in parteis eandem inter ſe rationem habenteis: partes itaque ὁμόλογοι æquales erunt. *Savil.* 2 Ut probatum eſt in prima πτώσει. 3 Quia F D, Q P æquidiſtant. 4 Ut in quarta πτώσει. 5 In quarta πτώσει. 6 Ut in prima πτώσει.

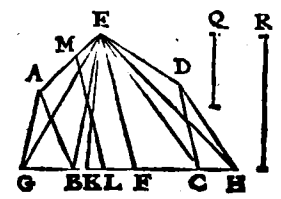
Prop. XIX. Probl.

Pentagonum duorum æquidiſtantium laterum, per lineam æquidiſtantem æquidiſtantibus ejus lateribus, ſecundum proportionem datam dividere.

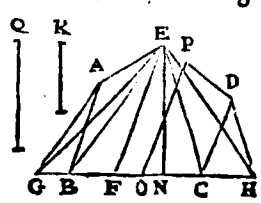
VErbi gratia, pentagonum ABCDE volo dividere ſecundum proportionem Q ad R, per lineam æquidiſtantem lateri ejus AB; quod quidem latus, aut æquidiſtat lateri CD, aut lateri DE. æquidiſtet igitur, primo, lateri CD. tunc protraham lineam EF æquidiſtantem lateri AB: & producam lineas EB & EC: deinde protraham lineam AG æquidiſtantem lineæ EB, & lineam DH æquidiſtantem lineæ EC, quouſque concurrant cum linea BC, ulterius ex utraque parte protracta, in punctis G & H: deinde dividam lineam GH ſecundum proportionem Q ad R. & primo cadat diviſio in puncto F. dico igitur quod linea EF dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. *Probatio.* Quia enim linea AG æquidiſtat lineæ EB; protracta linea EG, erit triangulus EAB æqualis triangulo EGB. addito igitur triangulo EBF communi, erit triangulus EGF æqualis quadrangulo EABF. item, quia DH linea æquidiſtat lineæ EC; protracta linea EH, erit triangulus EDC æqualis triangulo EHC. addito igitur triangulo EFC communi, erit triangulus EFH æqualis quadrangulo EFCD. & prius fuit triangulus EGF æqualis quadrangulo ABFE. igitur eadem eſt proportio quadranguli ABFE ad quadrangulum EFCD ſicut trianguli EGF ad triangulum EFH. igitur & ſicut lineæ GF ad FH: & per conſequens ſicut Q ad R. quod fuit propoſitum.



Secundo, cadat diviſio inter G & F in puncto K; ut ſit proportio GK ad KH ſicut Q ad R: tunc protraham lineam EK. quia igitur triangulus EGK eſt minor triangulo EGF; & triangulus EGF [1] æqualis eſt quadrangulo ABFE: erit triangulus EGK minor quadrangulo ABFE. adjungam igitur lineæ AB, per decimam hujus, ſuperficiem ABLM æqualem triangulo EGK per lineam LM æquidiſtantem lineæ AB. dico igitur quod linea LM dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. nam triangulus EGK eſt æqualis quadrangulo ABLM; & totus triangulus EGH [2] eſt æqualis toti pentagono ABCDE. igitur triangulus EKH reſiduus eſt æqualis pentagono MLCDE reſiduo. igitur eadem eſt proportio quadranguli ABLM ad pentagonum MLCDE ſicut trianguli EGK ad triangulum EHK: & per conſequens ſicut Q ad R. quod fuit propoſitum.



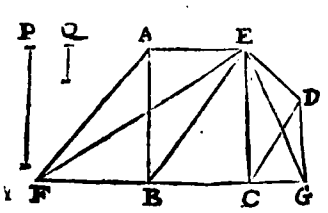
Tertio, cadat diviſio inter F & H in puncto N: & protrahatur linea EN. erit igitur triangulus EHN minor quadrangulo EFCD; eo quod eſt minor triangulo EHF ſibi æquali: ideo, per decimam hujus, adjungam lineæ DC ſuperficiem POCD æqualem triangulo EHN per lineam OP æquidiſtantem lineæ CD. dico igitur quod linea OP dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. quia enim quadrangulus POCD eſt æqualis triangulo ENH: & totus triangulus EGH æqualis eſt toti pentagono ABCDE; erit pentagonus ABOPE reliduus æqualis triangulo EGN reſiduo. igitur eadem eſt proportio pentagoni ABOPE ad quadrangulum POCD ſicut trianguli EGN ad triangulum ENH: & per conſequens ſicut Q ad R. quod fuit propoſitum. Conſimiliter autem ſicut dividitur pentagonus ABCDE habens duo latera AB, CD æquidiſtantia, facta ratiocinatione ſuper lineam BC oppoſitam angulo E inter duo latera æquidiſtantia intercepto: ita poſitis duobus ejus lateribus AB, DE æquidiſtantibus, dividetur per lineam æquidiſtantem lineæ AB, facta ratiocinatione ſuper latus ejus EA oppoſitum angulo ejus C inter duo ejus latera AB, DE æquidiſtantia intercepto: & patet propoſitum utrobique.



Prop. XX. Probl.

Pentagonum, cujus unum laterum ejus uni ejus diametro æquidiſtat, per lineam æquidiſtantem illi lateri & illi diametro, ſecundum proportionem datam dividere.

VErbi gratia, pentagonum ABCDF volo dividere ſecundum proportionem P ad Q, per lineam æquidiſtantem lateri ejus AB; quod quidem latus æquidiſtat diametro ejus CE. protraham enim lineam EB; & producam lineam AF æquidiſtantem lineæ EB, & lineam DG æquidiſtantem lineæ EC, donec concurrant cum linea BC, protracta ex utraque parte ulterius, ad puncta F & G: deinde protractis lineis EF & EG, erit triangulus EFG æqualis pentagono ABCDE propoſito: ut patet per modum arguendi in præmiſſa [3]. dividam igitur lineam FG ſecundum proportionem P ad Q. cadat igitur diviſio vel in C, vel ante C, vel poſt C. & primo cadat in puncto C: ita quod eadem ſit proportio FC ad CG ſicut P

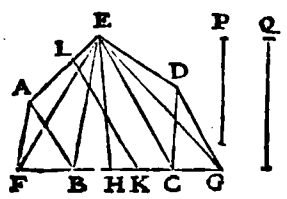


1 Ut in prima πρώτου. 2 Ut in principio prop. 17. demonſtratum eſt. 3 In principio prop. 17.

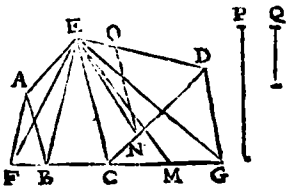
ad

ad Q. dico igitur quod linea E C dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. quadrangulus enim A B C E eſt æqualis triangulo E F C; propter hoc quod triangulus E C D reſiduus eſt æqualis triangulo E C G reſiduo; & totus pentagonus æqualis toti triangulo. igitur eadem eſt proportio quadranguli A B C E ad triangulum E C D ſicut trianguli E F C ad triangulum E C G. igitur & ſicut F C ad C G; & per conſequens ſicut P ad Q. quod fuit propoſitum.

Secundo, cadat diviſio inter F & C in puncto H: ita quod ſit proportio F H ad H G ſicut P ad Q. quia igitur quadrangulus A B C E æqualis eſt triangulo E F C, & triangulus E F H minor eſt triangulo E F C; erit triangulus E F H minor quadrangulo A B C E. adjungam igitur lineæ A B, per decimam hujus, quadrangulum A B K L æqualem triangulo E F H, per lineam K L æquidiſtantem lineæ A B. illam igitur lineam K L dico dividere pentagonum, ſecundum quod proponitur. quia enim ille totus pentagonus eſt æqualis toti triangulo E F G: & quadrangulus A B K L æqualis eſt triangulo E F H; erit pentagonus L K C D E reſiduus æqualis triangulo E H G reſiduo. eadem igitur eſt proportio quadranguli A B K L ad pentagonum L K C D E ſicut trianguli E F H ad triangulum E H G. igitur & ſicut F H ad H G: & per conſequens ſicut P ad Q. quod fuit propoſitum.



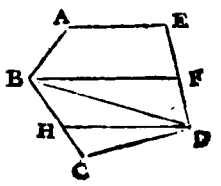
Tertio, cadat diviſio inter C & G in puncto M; ita quod eadem ſit proportio F M ad M G ſicut P ad Q. quia igitur triangulus E D C eſt æqualis triangulo E G C: & triangulus E M C minor eſt triangulo E G C; erit propter hoc triangulus E M C minor triangulo E D C. adjungam igitur lineæ E C quadrangulum E C N O æqualem triangulo E M C, per lineam N O æquidiſtantem lineæ E C, ſecundum doctrinam decimæ hujus: vel quod idem eſt, ſeparabo, per tertiam hujus, triangulum D O N à triangulo D E C ſibi ſimilem, & æqualem triangulo E G M. dico igitur quod linea N O dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. quia enim totus pentagonus A B C D E eſt æqualis toti triangulo E F G: & triangulus O N D æqualis eſt triangulo E M G; erit hexagonus A B C N O E reſiduus æqualis triangulo E F M reſiduo. eadem igitur eſt proportio hexagoni A B C N O E ad triangulum O N D ſicut trianguli E F M ad triangulum E M G. igitur & ſicut F M ad M G: & per conſequens ſicut P ad Q. quod fuit propoſitum.

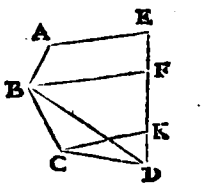


Prop. XXI. Theor.

Quocunque latere pentagoni aſſignato, quod nec alicui ejus lateri, nec alicui ejus diametro æquidiſtet; protrahi poſſunt intra pentagonum, ab aliquibus duobus trium angulorum dicto lateri nullatenus conjunctorum, duæ lineæ æquidiſtantes illi lateri prætaxato.

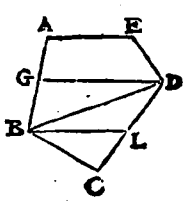
VErbi gratia, eſto quod in pentagono A B C D E latus ejus A E neque ſit æquidiſtans alicui lateri ejus, neque ejus diametro B D. tunc dico quod ab aliquibus duobus trium angulorum B, C, D protrahi poſſunt duæ lineæ intra pentagonum, quarum utraque ſit æquidiſtans lateri A E. ex quo enim A E & B D non ſunt æquidiſtantes, illæ ulterius protractæ aut concurrerent ex parte A B, aut ex parte E D. ſi ex parte A B; tunc linea B F protracta à puncto B, æquidiſtanter lineæ A E, neceſſario caderet ſuper latus E D, ſicut in utraque ſuperiorum figurarum [1]: ſi autem concurrerent ex parte E D, tunc linea D G à puncto D protracta, æquidiſtanter lineæ A E, neceſſario cadet ſuper latus A B; ſicut in utraque inferiorum figurarum [2].

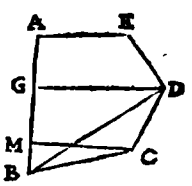




Item ſi A E & B D concurrerent ex parte A B, ſicut in utraque ſuperiorum figurarum; tunc linea B F, ex quo non eſt æquidiſtans lineæ C D, aut concurrent cum ea ex parte F D, aut ex parte B C; ſi ex parte F D, ſicut in prima ſuperiorum; tunc à puncto D protrahi poteſt D H æquidiſtanter lineæ A E, cadens in latere B C. ſi vero concurrerent B F & C D ex parte B C, ſicut in ſecunda ſuperiorum; tunc à puncto C protrahi poteſt C K æquidiſtanter lineæ A E, cadens in latere E D. habemus igitur B F & D H æquidiſtantes lineæ A E, in prima figurarum ſuperiorum. & habemus B F & C K æquidiſtantes eidem lineæ, in ſecunda figurarum ſuperiorum.

Si autem A E, B D concurrerent ex parte E D, ſicut in utraque inferiorum figurarum; tunc linea D G, ex quo non eſt æquidiſtans lineæ B C, aut concurret cum ea ex parte G B, aut ex parte D C. ſi ex parte G B, ſicut in prima inferiorum figurarum; tunc à puncto B protrahi poteſt B L æquidiſtanter lineæ A E, & cadet in latere C D: ſi vero G D & B C concurrent ex parte C D, ſicut in ſecunda inferiorum figurarum; tunc à puncto C protrahi poteſt C M æquidiſtanter lineæ A E, cadens in latere A B.





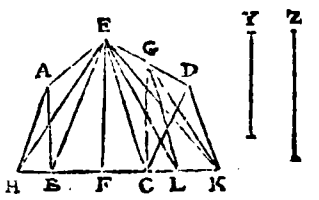
[1] Primarum duarum hujus prop. [2] Ultimarum duarum hujus prop.

habemus igitur DG & BL in prima figurarum inferiorum: & DG & CM in ſecunda figurarum inferiorum, æquidiſtanter lineæ AE, & cadentes intra pentagonum. patet igitur totum quod oſtendere volebamus.

PROP. XXII. PROBL.

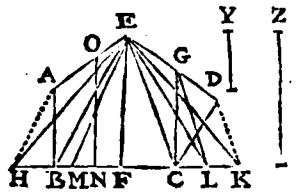
Pentagonum per lineam æquidiſtantem uni ejus lateri aſſignato, quod quidem latus nullo ejus alteri lateri, nec alicui ejus diametro ſit æquidiſtans, ſecundum proportionem datam dividere.

SIT pentagoni ABCDE latus AB, neque æquidiſtans diametro EC, neque alteri laterum ED, CD. illum igitur volo dividere ſecundum proportionem Y ad Z, per lineam æquidiſtantem lateri ejus AB. à duobus enim trium angulorum ejus C, D, E protraham [1] duas lineas intra pentagonum æquidiſtantes lateri ejus AB. aut igitur illæ duæ lineæ deſcendentes ſic ab angulis cadent ſuper idem latus, vel ſuper latera oppoſita. cadant igitur primo ſuper latera oppoſita: & ſint EF, CG; ita quod F ſit in latere BC, & punctum G ſit in latere ED. ratiocinabor autem ſuper latus, in quod cadit parallelus propinquior lineæ AB, videlicet ſuper latus BC. protraham igitur lineas EB & EC; deinde protraham lineam AH æquidiſtanter lineæ EB; & lineam DK æquidiſtanter lineæ EC, donec concurrant cum linea BC, ulterius ex utraque parte protracta, in punctis H & K: & protraham lineas EH & EK. quia igitur triangulus EAB eſt æqualis triangulo EHB: & triangulus EDC æqualis eſt triangulo EKC; addito triangulo EBC communi, erit pentagonus ABCDE æqualis triangulo EHK. *Quod eſt memoriæ commendandum* [2]. Protraham etiam lineam GL æquidiſtanter lineæ EC: & producam lineam EL: tunc dividam lineam HK ſecundum proportionem Y ad Z. aut igitur cadet diviſio in punctо F, vel in punctо L, vel inter H & F, vel inter F & L, vel inter L & K. cadat igitur primo in punctо F; ita quod eadem ſit proportio HF ad FK ſicut Y ad Z. dico igitur quod linea EF dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. quadrangulus enim EABF æqualis eſt triangulo EHF, & quadrangulus EDCF æqualis eſt triangulo EKF. igitur eſt proportio quadranguli EABF ad quadrangulum EDCF ſicut trianguli EHF ad triangulum EKF. igitur & ſicut HF ad FK: & per conſequens ſicut Y ad Z. quod fuit propoſitum.

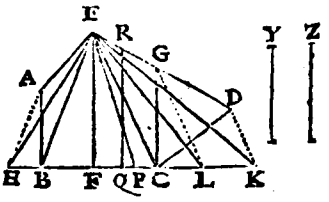


Secundo, cadat diviſio in punctо L. dico igitur quod linea CG dividit pentagonum prout proponitur. quia enim lineæ EC & CL [illegible] æquidiſtantes, erunt trianguli EGC & ELC æquales. ſed totales trianguli EDC & ELC ſunt æquales. igitur & triangulus GCD æqualis eſt triangulo ELK. quadrangulus etiam ABCE æqualis eſt triangulo EHC. igitur pentagonus ABCGE æqualis eſt triangulo EHL. eadem igitur eſt proportio pentagoni ABCGE ad triangulum GCD ſicut trianguli EHL ad triangulum ELK. igitur ſicut HL ad LK: & per conſequens ſicut Y ad Z. quod fuit propoſitum.

Tertio, cadat diviſio inter H & F in punctо M: & protrahatur linea EM. quia igitur triangulus EHF [3] eſt æqualis quadrangulo EABF: & triangulus EHM minor eſt triangulo EHF; erit propter hoc triangulus EHM minor quadrangulo EABF. adjungam igitur, per decimam hujus, lineæ AB ſuperficiem ABNO æqualem triangulo EHM, per lineam NO æquidiſtantem lineæ AB. dico igitur lineam NO dividere pentagonum, ſecundum quod proponitur. pentagonus enim ABCDE [4] æqualis eſt triangulo EHK: & quadrangulus ABNO æqualis eſt triangulo EHM. igitur pentagonus ONCDE reſiduus æqualis eſt triangulo EMK reſiduo. igitur eadem eſt proportio quadranguli ABNO ad pentagonum ONCDE ſicut trianguli EHM ad triangulum EMK. igitur & ſicut HM ad MK; & per conſequens ſicut Y ad Z. quod fuit propoſitum.



Quarto, cadat diviſio inter F & L in punctо P: & protrahatur linea EP. quia igitur triangulus EFL æqualis eſt quadrangulo EFCG: & triangulus EFP minor eſt triangulo EFL; erit triangulus EFP minor quadrangulo EFCG. adjungam igitur lineæ EF, per decimam hujus, quadrangulum EFQR æqualem triangulo EFP, per lineam QR æquidiſtantem lineæ EF. dico igitur quod linea QR dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. eſt enim triangulus EHP æqualis pentagono ABQRE: & totus pentagonus ABCDE æqualis eſt toti triangulo EHK. igitur quadrangulus RQCD reſiduus æqualis eſt triangulo EPK. igitur eadem eſt proportio pentagoni ABQRE ad quadrangulum RQCD ſicut trianguli EHP ad triangulum EPK. igitur ſicut HP ad PK: & per conſequens ſicut Y ad Z. quod fuit propoſitum.

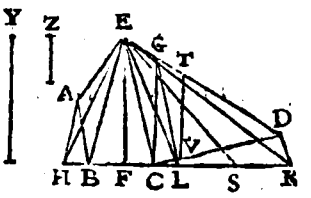


Quinto, cadat diviſio inter L & K in punctо S. quia igitur propter æquidiſtantiam linearum EC & GD, trianguli EGC & ELC ſunt

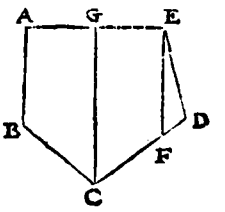
[1] Per præcedentem. [2] Nam pertinet ad omneis πτώσεις. [3] Ut in prima πτώσει. [4] patet per prop. 17. hujus.

æquales

æquales: atque totales trianguli E D C & E K G etiam æquales; erunt propter hoc trianguli G D C, E K L reſidui æquales. ſed protracta linea E S, triangulus E K S minor eſt triangulo E K L. igitur triangulus E K S minor eſt triangulo G D C. per tertiam igitur hujus, reſecabo de triangulo G D C triangulum T D V ſibi ſimilem, & æqualem triangulo E K S, per lineam T V æquidiſtantem lineæ G C. dico igitur quod linea T V dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. totus enim pentagonus A B C D E æqualis eſt toti triangulo E H K, & triangulus T D V æqualis triangulo E K S. igitur hexagonus A B C V T E reliduus æqualis eſt triangulo E H S reſiduo. igitur eadem eſt proportio hexagoni A B C V T E ad triangulum T D V ſicut trianguli E H S ad triangulum E K S. igitur & ſicut H S ad S K: & per conſequens ſicut Y ad Z. quod fuit propoſitum.

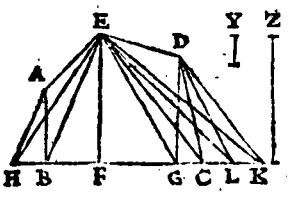


Si autem duæ lineæ E F & C G, quæ ſunt æquidiſtantes lineæ A B, eciderint ſic, quod linea E F eciderit ſuper latus C D: & linea C G ſuper latus A E; tunc erigemus angulum C: & ratiocinabimur ſuper lineam A E, ſicut fecimus ſuper lineam B C; & deveniemus ad noſtrum propoſitum, ſicut prius.

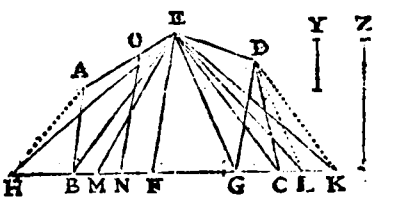


Si autem duæ lineæ, quæ protractæ ſunt æquidiſtanter lineæ A B, cadant ſuper unum & idem latus, tunc ratiocinabimur ſuper illud latus. ut verbi gratia, ſit quod in pentagono A B C D E duæ lineæ E F & D G protractæ æquidiſtanter lineæ A B cadant ſuper latus B C: tunc protraham A H æquidiſtantem lineæ E B, & lineam D K æquidiſtantem lineæ E C, protraham etiam lineam E G, & lineam ſibi æquidiſtantem D L: & producam lineas E H, E L & E K. patet igitur ex præmiſſis, quod triangulus E H K eſt æqualis pentagono A B C D E, & quod triangulus E H L eſt æqualis pentagono A B G D E; & ita relinquitur quod triangulus D G C æqualis eſt triangulo E L K. *Hæc autem ſunt memoriæ commendanda.* dividam igitur lineam H K ſecundum proportionem Y ad Z: & cadet diviſio vel in F, vel in L, vel inter illa, aut inter illa & extrema. cadat igitur primo diviſio in puncto F. itaque ſit proportio H F ad F K ſicut Y ad Z. dico igitur quod linea E F dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. nam quadrangulus A B F E eſt æqualis triangulo E H F, & quadrangulus E F C D eſt æqualis triangulo E F K. igitur eadem eſt proportio quadranguli A B F E ad quadrangulum E F C D ſicut trianguli E H F ad triangulum E F K: & per conſequens ſicut Y ad Z. quod fuit propoſitum.

Secundo, cadat diviſio in puncto L. dico igitur quod linea D G dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. quia enim triangulus E G D eſt æqualis triangulo E G L: & quadrangulus A B G E æqualis triangulo E H G; erit pentagonus A B G D E æqualis triangulo E H L. ſed & triangulus D G C [1] æqualis eſt triangulo E L K. igitur eadem eſt proportio pentagoni A B G D E ad triangulum D G C ſicut trianguli E H L ad triangulum E L K. igitur & ſicut H L ad L K: & per conſequens ſicut Y ad Z. quod fuit propoſitum.

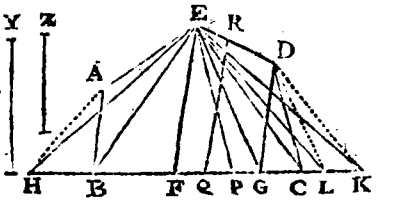


Tertio, cadat diviſio in puncto M inter H & F. protracta linea E M; fiat quadrangulus A B N O, per decimam hujus, æqualis triangulo E H M; per lineam N O æquidiſtantem lineæ A B. patet igitur, ſicut & ſupra, quod proportio quadranguli A B N O ad pentagonum O N C D E eſt ſicut proportio trianguli E H M ad



triangulum E M K: & per conſequens ſicut Y ad Z. linea igitur O N dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur.

Quarto, cadat diviſio inter F & L in puncto



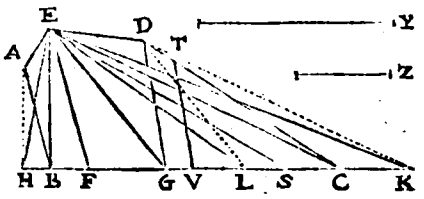
P. tunc protracta linea E P; fiat quadrangulus E F Q R, per decimam hujus, æqualis triangulo E F P. pentagonus igitur A B Q R E eſt æqualis triangulo E H P. eadem igitur eſt proportio pentagoni A B Q R E ad quadrangulum R Q C D ſicut trianguli E H P ad triangulum E P K. igitur & ſicut H P ad P K: & per conſequens ſicut Y ad Z. quod fuit propoſitum.

Quinto, cadat diviſio in puncto S inter L & K; ita quod eadem ſit proportio H S ad S K, ſicut Y ad Z. quia igitur, ut ſuperius [3] dictum

1 Ut ſupra memoriæ mandatum eſt. 2 Eſt enim A B F E quadrangulus æqualis triangulo H E F, & proinde major triangulo H B M. 3 In prima πρότα ſecundæ partis.

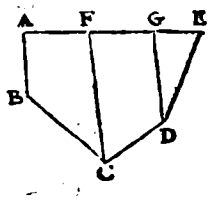
eſt,

eſt, triangulus D G C æqualis eſt triangulo E L K; erit triangulus E S K minor triangulo D G C. ſecabo igitur, per tertiam hujus, ex triangulo D G C triangulum T V C ſibi ſimilem, &



æqualem triangulo E S K, per lineam T V æquidiſtantem lineæ D G. dico igitur quod linea T V dividit pentagonum, ſecundum quod proponitur. quia enim triangulus T V C æqualis eſt triangulo E S K, & totus pentagonus A B C D E æqualis toti triangulo E H K; erit propter hoc, hexagonus A B V T D E æqualis toti triangulo E H S. eadem igitur eſt proportio hexagoni A B V T D E ad triangulum T V C ſicut trianguli E H S ad triangulum E S K: & per conſequens ſicut Y ad Z. quod fuit propoſitum.

Si autem duæ lineæ, quæ protractæ fuerint æquidiſtanter lineæ A B, cadant ſuper latus A E, ſecundum quod cadunt lineæ C F, D G: tunc erigemus angulum C; & ratiocinabimur ſuper lineam A E, ſicut fecimus ſuper lineam B C: & deveniemus ad noſtrum propoſitum, ſicut prius patet igitur quod voluimus demonſtrare.



FINIS LIBRI EUCLIDIS DE DIVISIONIBUS.

EU-

EUCLIDIS

DE

LEVI ET PONDEROSO

FRAGMENTUM.

DEFINITIONES.

1. ÆQUA magnitudine corpora ſunt, quæ loca replent æqua.

2. Diverſa magnitudine corpora ſunt, quæ loca replent non æqua.

3. Grandiora magnitudine dicuntur corpora, quæ loco ſunt ampliore.

4. Æqua potentia corpora ſunt, quorum, & tempore & aere aquave media æqualibus, & per æqualia intervalla, æquales ſunt motus.

5. Diverſa potentia corpora ſunt, quorum, tempore diverſo, motus ſunt æquales.

6. Diverſorum potentia corporum majus id potentia dicitur, quod movendo temporis inſumpſit minus: minus autem potentia, quod temporis amplius.

7. Generis ejuſdem corpora ſunt, quæ, cum æqua magnitudine ſint, etiam ſunt potentia.

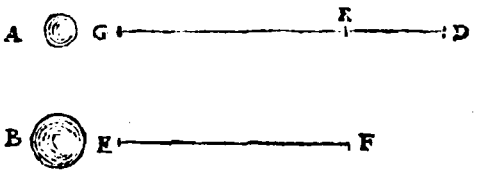
8. Diverſa genere corpora ſunt, quæ cum æqua magnitudine ſint, potentia non ſunt; per idem licet medium moveantur.

9. Diverſorum genere corporum, potentius id dicitur, quod eſt ſolidius.

THEOREMA I.

Diverſorum potentia corporum, quod ſpatium amplius movetur, habet amplius potentiæ.

SInt A & B corpora duo, ſint GD & EF ſpatia duo, GD majus per quod A, EF minus per quod B movetur. refecabo à

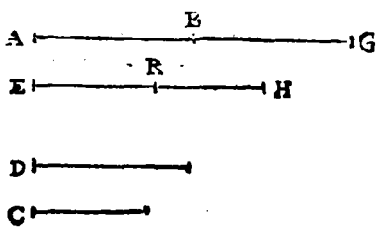


ſpatio GD, GR ſpatium, ſic ut ſit EF ſpatio ſpatium GR æquale. cætera ſponte patent.

THEOR. II.

Eorundem genere corporum, ſi ipſa inter ſe erunt multiplicia, erunt æque ipſorum potentiæ multiplices.

SIT corpus AG, eodem genere corpori D duplum; dico etiam potentia duplum eſſe. Sit enim AG quidem corporis potentia EH, D vero C: & AG juxta multiplicis exceſſum in AB & BG dividatur, ſic ut utriuſque po-

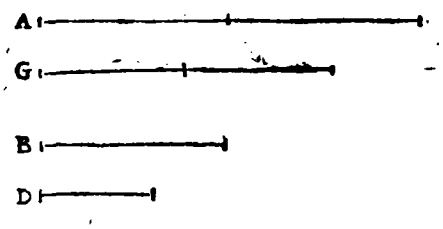


tentia, ipſius D corporis potentiæ, quæ erat C, æqualis fiat. rurſus, ut AG corpus in partes AB, BG corpori D æquas diviſimus, ſic EH potentiam in partes ER & RH, æquas C potentiæ dividamus. liquidum eſt EH potentiam duplam potentiæ C evadere.

THEOR. III.

Eorundem genere corporum, proportio & magnitudine & potentia eſt eadem.

SIT A corpus corporis eodem genere B duplum; dico ut A corpus ad B corpus est,



sic corporis A potentia G ad corporis B potentiam D esse.

Patet, si ut corpora sic potentias æque utrinque multipliciter dividamus.

THEOR. IV.

Quæ corpora æqua potentia ejusdem generis corpori sunt, ejusdem sunt inter se generis.

ABlatis enim æqualibus illi tertio, erunt ipsorum virtutes æquales, quia potentiæ tertii æquales.

THEOR. V.

Quorum corporum & magnitudo & potentia proportio una est, ipsa generis ejusdem erunt.

SIT ut A corpus ad corpus B, sic corporis A potentia ad corporis B potentiam D; dico A, B corpora generis ejusdem esse.

Statuamus enim A corpus æquale corpori cujus potentia sit R. erunt igitur ut B ad A sic R ad potentiam ipsius A, quæ est G. reliqua patent.

FINIS OPERUM EUCLIDIS.

Errata, quæ in opus longum & difficile irrepſiſſe comperimus, ſic emendentur.

PAG. 26. v. 48. pro ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως lege ἐπὶ τὴν ἴσην βάσιν. p. 49. v. 5. pro κύκλῳ lege κύκλων. p. 149. v. 4. dele ἴσην. v. 29. pro ἀφ' ἑαυτῆς lege ἀφ' ἑαυτῶν. p. 150. v. 30. pro Γ Z lege ΔΓ Z. p. 152. v. 15. dele αὐτῶν, & v. 16. pro ἴσωσιν ἀφῇται lege ἴσωσιν αὐτῶν οἱ A, B Γ ἀφῶσι. p. 159. v. 13. pro δ' ὑπὸ lege πάλιν. v. 37. pro Γ E, Z lege Γ E, Z. p. 161. v. 30. pro A, B ἐλάσσονες ἐλάσσοσι lege A, B ἐλάσσονες ἐλάσσοσι. p. 173. v. 19. pro ἕτερον lege ἑκάτερον. p. 177. v. 30. dele ἐξῆς. p. 194. v. 40. pro ἀναλογον lege ἐξῆς ἀναλογον. p. 209. v. 13. pro ὑπ' αὐτῶν lege ἀπ' αὐτῶν. p. 261. v. 36. dele μήκει. p. 262. v. 22, & 23. pro Γ lege Δ p. 337. v. 2. pro τὸ lege τῷ. p. 354. v. 41. pro ὑφεστῶσαι lege ἐφεστῶσαι. p. 370. v. 3. pro παραλλήλων lege παραλληλόγραμμα. p. 401. v. 10. pro ἀφαιρεθῶν lege ἀφαιρεθῶσι. p. 403. v. 48. pro B A, Δ Γ μετὰ lege B A, A Γ μετὰ, &c. v. 52. pro B A, A Γ ἴσον lege A B, B Γ ἴσον. p. 454. v. 17. pro ὅλῳ lege ὅλῳ. p. 455. v. 1. pro γραμμοσκόμματα lege γραμμοσκόμματα, & v. 19. pro ὃν lege ὧν. p. 457. v. 28. pro δεδομένα lege δεδομένα. p. 458. v. 22. pro ἀλλὰ lege ἄλλα, & v. 25. pro μεθηματικαῖς lege μαθηματικαῖς.