Notes du mont Royal 선
www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES
Google Livres

Imprimatur,

ROG. MANDER

Vic. Can. *OXON.*

Novemb. 1. 1700.

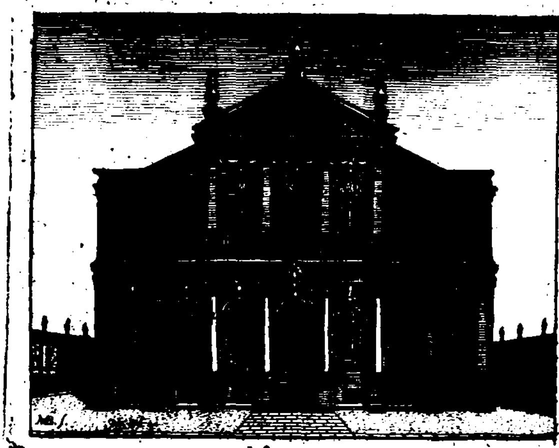
EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBRI PRIORES SEX, ITEM UNDECIMUS & DUODECIMUS.

Ex Versione Latina

FEDERICI COMMANDINI.

In usum Juventutis Academicæ.



OXONIÆ,

E THEATRO SHELDONIANO.

Impensis *Henr. Clements* Bibliopolæ *Oxoniensis*, MDCCI.

Hist. Sci.
Bowes
8-22-35
30809

PRÆFATIO.

P*OST tot nova Geometriæ Elementa, non ita pridem in lucem emissa, est fortasse quod miretur Tyro Mathematicus, annosa hæc, & (ut quibusdam videntur) obsoleta* Euclidis *ϛοιχεῖα è prelo denuo prodire: præsertim cum non pauca in illis vitia detexisse sibi visi sint, qui Geometriam Elementarem novâ quadam methodo excolendam proponunt. Hi enim Lyncei Philosophi* Euclidis *Definitiones parum perspicuas, demonstrationes vix evidentes, res omnes malo ordine dispositas, aliasque mendas innumeras, per omnem antiquitatem ad sua usque tempora latentes, se invenisse jactant.*

At tantorum virorum pace audacter assero, Euclidem ab iis immerito reprehensum esse, ejusque Definitiones distinctas & claras, è primis principiis & conceptibus nostris petitas esse; demonstrationes Elegantes perspicuas & concinnas; ratiocinandi vim adeo evidentem & nervosam, ut facile inducar credere obscuritatem istam à sciolis illis toties insimulatam, confusis potius & perplexis eorum ideis, quam demonstrationibus ipsis imputandam esse. Et utcunque nonnulli querantur de malâ rerum dispositione, & iniquo ordine, quem tenet Euclides, aliam tamen methodum magis idoneam, & discentibus faciliorem inter omnia hoc genus scripta invenio nullam.

Non meum est hîc loci hypercriticis Horum captiunculis sigillatim respondere: sed in his Elementis vel mediocriter versato, statim patebit, Calumniatores hos suam potius oscitantiam monstrare, quam veros in nostro authore lapsus arguere; imo ne hoc quidem dicere vereor, quod vix, & ne vix quidem unum, aut alterum è tot novis systematibus inveniri potest, in quibus plures non sunt labes, imo fœdiores paralogismi, quam in Euclidem vel fingere potuerunt.

Post tot infelices in Geometriâ reformandâ conatus, quidam non infimi Geometræ Elementa de novo construere non ausi, ipsum Euclidem omnibus aliis Elementorum Scriptoribus merito prætulerunt, eique edendo suas curas impenderunt; hi tamen ipsi nescio quibus opinionibus ducti, alias propositiones prorsus omittunt, aliarumque demonstrationes in pejus mutant. Inter illos eminent Tacquetus & Deschalles, quorum utrique malo quodam fato contigit, ut elegantes quasdam & in Elementis optimo jure ponendas propositiones quasi ineptas & inutiles rejecerint, quales sunt propositiones 27, 28, 29. libri sexti, cum aliis nonnullis quarum usus fortasse illos latebat. Insuper quandocunque ipsas Euclidis demonstrationes deserunt, multum in argumentando peccant, & à concinnitate Veterum recedunt.

In libro quinto demonstrationes Euclidis in totum repudiarunt, & Proportionis definitionem aliis terminis conceptam attulerunt; at quæ unam tantum è duabus proportionalium speciebus comprehendit, & quantitatibus commensurabilibus solummodo competit: nihilominus suas, quæ sunt de proportione, demonstrationes omni quantitati tam incommensurabili quam commensurabili in sequentibus libris applicant.

plicant. Hunc tam turpem lapsum nec Logici nec Geometræ facile condonassent, nisi hi authores in aliis suis scriptis de Scientiis Mathematicis bene meruissent. Hoc quidem commune est iis vitium cum omnibus hodiernis Elementorum Scriptoribus, qui in eundem impingunt scopulum, & ut suam in hac materia ostentent peritiam, authorem nostrum in re minime culpandâ imo laudandâ reprehendunt. Quantitatum proportionalium definitionem intelligo, in quâ intellectu facilem proportionalium proprietatem exponit, quæ quantitatibus omnibus tam incommensurabilibus quam commensurabilibus æque convenit, & à quâ cæteræ omnes proportionalium proprietates facile consequuntur.

Hujus proprietatis demonstrationem in Euclide desiderant Egregii hi Geometræ, atque defectum demonstratione suâ supplendum suscipiunt. Hic iterum contemplari licet insignem eorum in Logicâ peritiam, qui definitionis nominis demonstrationem expectant: talis enim est hæc Euclidis definitio, quæ illas quantitates proportionales vocat, quæ conditiones in definitione suâ allatas obtinent. Quidni primo Elementorum authori licebat qualibet nomina quantitatibus hæc requisita habentibus, arbitrio suo affigere? Licebat proculdubio, suo igitur utitur jure, & eas proportionales vocat.

Sed operæ pretium erit, methodum, quâ hanc proprietatem demonstrare conantur, perpendere. Affectionem quandam uni tantum proportionalium generi, viz. commensurabilium, congruentem assumunt; & exinde multis ambagibus longâque conclusionum serie universalem, quam Euclides posuit, proportionalium proprietatem deducunt; quod certe tam methodo

quam

quam argumentationis regulis satis alienum esse videtur. At longe rectius fecissent, si proprietatem universalem ab Euclide assignatam primo posuissent, & exinde particularem illam & uni tantum proportionalium speciei congruentem deduxissent. Quoniam vero hanc respuerunt methodum, talem demonstrationem ad finem hujus præfationis attexere libuit. Qui Euclidem ulterius defensum videre cupiunt, consulant eruditas & summo judicio conscriptas Lectiones Mathematicas Cl. Barovii an. 1666.

Cum vero tanti Geometræ incidit mentio, præterire non possum Elementa ab eo edita, in quibus plerumqne ipsas Euclidis constructiones & demonstrationes retinet, ne unâ quidem omissâ propositione. Hinc oritur major in demonstrando vis, pulchrior construendi methodus, & ubique Veterum Geometrarum genius clarius elucescit, quam in libris istius generis fieri solet. Plura præterea Corollaria & Scholia adjecit, non modo breviori sequentium demonstrationi inservientia, verum etiam aliis in rebus perutilia.

Nihilominus demonstrationes ejus eâ brevitate laborant, tot symbolis notisque implicantur, ut in Geometriâ parum versato difficiles & obscuræ fiant. Multæ propositiones quæ ipsum Euclidem legenti perspicuæ viderentur, Algebraicâ hac demonstrandi methodo tyronibus nodosæ & vix intelligibiles redduntur, qualis est V. G. 13. primi Elementi. Demonstrationum, quas in Elemento secundo attulit, difficilis admodum tyronibus est intelligentia; rectius multo Euclides ipse earum evidentiam (ut in re Geometricâ fieri debet) à figurarum contemplatione petit. Scientiarum omnium Elementa simplicissima *methodo tradenda sunt, nec symbolis nec notis nec obscuris principiis aliunde petitis involvenda.*

Ut Elementa Barovii nimiâ brevitate, sic ea, quæ à Clavio traduntur, molestâ prolixitate peccant. Scholiis enim Commentariisque abundat nimis & luxuriat. Vix equidem arbitror Euclidem tam obscurum esse, ut tantâ farragine notarum indigeat; nec dubito quin tyrones omnes Euclidem ipsum omnibus suis Commentatoribus faciliorem inventuri sint. In demonstrationibus Geometricis ut nimia brevitas tenebras parit, sic nimia verbositas plus tædii & confusionis quam lucis affert.

Hisce præcipue inductus rationibus, prima sex Euclidis Elementa cum undecimo & duodecimo, ex versione Federici Commandini *in usum Juventutis Celeberrimæ hujus Academiæ per se edenda curavi, à cæteris abstinui, tum quia hæc, quæ jam damus, ad alias plerasque Matheseos partes, quæ nunc vulgo traduntur, intelligendas, sufficiant, tum etiam quia omnia Euclidis opera, quæ jam sub prelò sudant, brevi tempore nitidissimis Characteribus Græcis & Latinis adornata, summâque curâ & fide emendata è* Theatro Sheldoniano *prodibunt.*

THEO-

THEOREMA.

Si quatuor magnitudines sint proportionales, hoc est, conditiones habeant ab Euclide in definitione quintâ quinti libri positas, sitque prima secundæ commensurabilis, dico, quot partes prima continet secundæ, tot etiam similes partes quartæ tertiam continere.

Sint A B C D quatuor quantitates proportionales, sitque prima A æqualis quibuslibet partibus secundæ sc. sit æqualis quinque partibus quartis ipsius B, dico C etiam æqualem fore quinque partibus quartis ipsius D. Quoniam enim est ut A ad B ita C ad D erit alternando ut A ad C ita B ad D, ut autem B ad D ita 5B ad 5D & ut 5B ad 5D ita $\frac{5}{4}$B ad $\frac{5}{4}$D per 15 quinti, quare etiam ut A ad C ita $\frac{5}{4}$B ad $\frac{5}{4}$D, sed est prima A æqualis tertiæ $\frac{5}{4}$B. quare per 14. quinti, erit secunda C æqualis quartæ $\frac{5}{4}$D q.e.d. Universaliter sic; sint A B C D proportionales, sitque A æqualis $\frac{n}{m}$B, erit & C æqualis $\frac{n}{m}$D. Quoniam enim est A ad B ut C ad D, erit ut A ad C ita B ad D, ut autem B ad D ita per 15. quinti, nB ad nD, & per eandem est ut nB ad nD ita $\frac{n}{m}$B ad $\frac{n}{m}$D: quare erit ut A ad C ita $\frac{n}{m}$B ad $\frac{n}{m}$D; sed est prima A æqualis tertiæ $\frac{n}{m}$B, quare per 14. quinti erit secunda C æqualis $\frac{n}{m}$D. Q.E.D.

ALITER.

Sint A B C D proportionales, sitque A æqualis $\frac{n}{m}$B; dico fore C æqualem $\frac{n}{m}$D. Quoniam enim est A æqualis $\frac{n}{m}$B, erit mA æqualis ipsi nB. Sumantur jam ipsarum A & C primæ scil. & tertiæ æque multiplices mA & mC, item nB & nD æque multiplices ipsarum B & D. Cum igitur

igitur quatuor quantitates A B C D ſunt proportionales ſumptæque ſunt primæ A & tertiæ C æque multiplices mA mC, item ſecundæ B & quartæ D aliæ etiam æque multiplices, per definitionem quintam Elementi quinti ſi mA ſit major æqualis vel minor ipsâ nB, erit eodem modo mC æqualis major vel minor ipsâ nD, ſed eſt mA æqualis nB, quare erit & mC æqualis nD, ac proinde C æqualis $\frac{n}{m}$D. Quod erat demonſtrandum.

A	B	C	D
mA	nB	mC	nD

EUCLIDIS ELEMENTORUM.

LIBER PRIMUS.

DIFFINITIONES.

I.

PUnctum est, cujus nulla est pars, vel quod magnitudinem nullam habet.

II.

Linea vero est longitudo latitudinis expers.

III.

Lineæ termini sunt puncta.

IV.

Recta linea est, quæ ex æquo suis interjicitur punctis.

V.

Superficies est id, quod longitudinem, & latitudinem tantum habet.

VI.

Superficiei termini sunt lineæ.

VII.

Plana superficies est quæ ex æquo suis interjicitur lineis.

VIII.

Planus angulus est duarum linearum in plano sese contingentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.

IX.

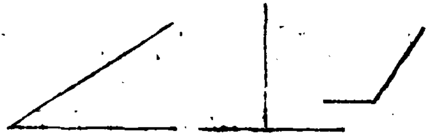
Quando autem quæ angulum continent rectæ lineæ fuerint, rectilineus angulus appellatur.

X.

Cùm vero recta linea super rectâ lineâ insistens eos, qui deinceps sunt angulos æquales inter se fecerit, rectus est uterque æqualium angulorum : & quæ insistit recta linea perpendicularis vocatur ad eam, cui insistit.

XI.

Obtusus angulus est, qui major est recto.



XII.

Acutus autem, qui recto est minor.

XIII.

Terminus est, quod alicujus extremum est.

XIV.

Figura est, quæ aliquo, vel aliquibus terminis continetur.

XV.

Circulus est figura plana una linea contenta, quæ circumferentia appellatur : ad quam ab uno puncto intra figuram existente omnes rectæ lineæ pertingentes sunt æquales.

XVI.

Hoc autem punctum centrum circuli nuncupatur.

XVII.

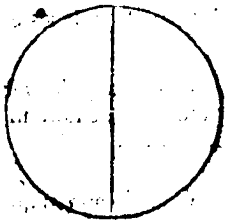
Diameter circuli est recta quædam linea per centrum ducta, & ex utraque parte à circumferentia circuli terminata, quæ quidem, & bifariam circulum secat.

XVIII.

Semicirculus est figura, quæ continetur diametro, & ea quæ ex ipsa circuli circumferentia intercipitur.

XIX.

Segmentum circuli est figura, quæ recta linea, & circuli circumferentia continetur.



XX.

XX.

Rectilineæ figuræ ſunt, quæ rectis continentur lineis.

XXI.

Trilateræ quidem, quæ tribus.

XXII.

Quadrilateræ, quæ quatuor.

XXIII.

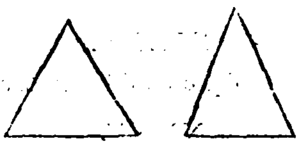
Multilateræ vero, quæ pluribus, quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.

XXIV.

Trilaterarum figurarum æquilaterum eſt triangulum, quod tria latera habet æqualia.

XXV.

Iſoſceles, ſive æquicrure, quod duo tantum æqualia latera habet.

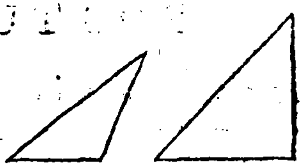


XXVI.

Scalenum vero eſt, quod tria inæqualia habet latera.

XXVII.

Ad hæc, trilaterarum figurarum, rectangulum quidem eſt triangulum, quod rectum angulum habet.



XXVIII.

Obtuſangulum eſt, quod obtuſum habet angulum.

XXIX.

Acutangulum vero, quod tres acutos angulos habet.

XXX.

Quadrilaterarum figurarum quadratum est quod, & æquilaterum est, & rectangulum.

XXXI.

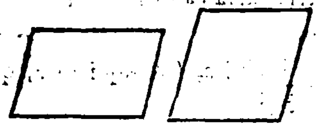
Altera parte longior figura est, quæ rectangula quidem æquilatera vero non est.

XXXII.

Rhombus, quæ æquilatera quidem, sed rectangula non est.

XXXIII.

Rhomboides, quæ, & opposita latera, & oppositos angulos inter se æquales habet, neque æquilatera est, neque rectangula.



XXXIV.

Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ trapezia vocentur.

XXXV.

Parallelæ, seu æquidistantes rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sint plano, & ex utraque parte in infinitum producantur, in neutram partem inter se conveniunt.

POSTULATA.

I.

Postuletur à quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.

II.

Rectam lineam terminatam in continuum, & directum producere.

III.

Quovis centro, & intervallo circulum describere.

AXIOMATA.

AXIOMATA.

I.

Quæ eidem æqualia, & inter se sunt æqualia.

II.

Et si æqualibus æqualia adjiciantur tota sunt æqualia.

III.

Et si ab æqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt æqualia.

IV.

Et si inæqualibus æqualia adjiciantur, tota sunt inæqualia.

V.

Et si ab inæqualibns æqualia auferantur, reliqua sunt inæqualia.

VI.

Et quæ ejusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia.

VII.

Et quæ ejusdem dimidia sunt, inter se sunt æqualia.

VIII.

Et quæ sibi mutuo congruunt, inter se sunt æqualia.

IX.

Totum est sua parte majus.

X.

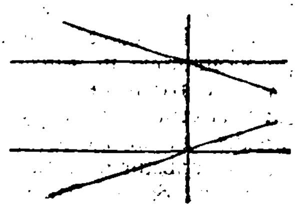
Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

XI.

Omnes anguli recti inter se æquales sunt.

XII.

Et si in duas rectas lineas recta linea incidens interiores, & ex eadem parte angulos duobus rectis minores fecerit, rectæ lineæ illæ in infinitum productæ, inter se conveniunt ex ea parte, in qua sunt anguli duobus rectis minores.



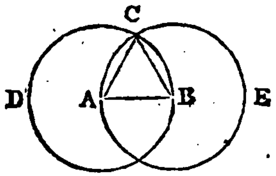
Not. *Cum plures anguli ad unum punctum existunt designatur quilibet tribus literis quarum illa quæ est ad verticem anguli in medio ponitur,* V.G. *in figura Prop.* 13. *libri primi angulus à rectis* AB, BC *comprehensus dicitur angulus* ABC *&* *angulus à rectis* AB, BE *contentus dicitur angulus* ABE.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Super data rectâ lineâ terminatâ, triangulum æquilaterum constituere.

Sit data recta linea terminata A B oportet super ipsa A B triangulum æquilaterum constituere. Centro quidem A intervallo autem A B circulus describatur B C D [a]. Et rursus centro B, intervalloque B A describatur circulus A C E [a], & à puncto C, in quo circuli se invicem secant ad A B ducantur rectæ lineæ C A C E [b]. Quoniam igitur A centrum est circuli D B C, erit A C ipsi A B æqualis, [c] rursus quoniam B circuli C A E est centrum, erit B C æqualis B A ostensa est autem, & C A æqualis A B. utraque igitur ipsarum C A C B ipsi A B est æqualis. Quæ autem eidem sunt æqualia, & inter se æqualia sunt. Ergo C A ipsi C B est æqualis. tres igitur C A A B B C inter se sunt æquales; ac propterea triangulum æquilaterum est A B C, & constitutum est super data recta linea terminata A B, quod fecisse oportebat.

a 3. Post.
b 1 Post.
c 15. def.

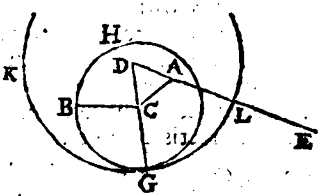


PROP. II. PROBL.

Ad datum punctum datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea B C oportet ad A punctum ipsi B C rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere. Ducatur à puncto A ad C recta linea A C [a]: & super ipsâ constituatur triangulum æquilaterum D A C [b]. producanturque in directum ipsis D A D C rectæ lineæ A E C G [c]. & centro quidem C, intervallo autem B C circulus B G H describatur [d]. Rursusque centro D, & intervallo D G describatur circulus G K L. Quoniam igitur punctum C centrum est B G H circuli, erit B C ipsi C G æqualis [e]. Et rursus quoniam D centrum est circuli G K L, erit D L æqualis D G: quarum D A est æqualis D C, reliqua igitur A L reliquæ G C est æqualis [f]. Ostensa autem

a Postul. 1.
b Prima hujus.
c Postul. 2.
d 3. Post.
e Diffin. 15.
f Axiom. 3.

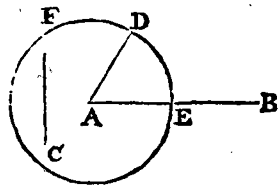


autem est BC æqualis CG. Quare utraque ipsarum AL BC est æqualis ipsi CG. Quæ autem eidem æqualia sunt, & inter se sunt æqualia. Ergo, & AL est æqualis BC. Ad datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ BC æqualis posita est AL. Quod facere oportebat.

PROP. III. PROBL.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus à majori minori æqualem abscindere.

Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB & C; quarum major sit AB. oportet à majori AB minori C æqualem rectam lineam abscindere. Ponatur ad A punctum ipsi C æqualis recta linea AD [a], & centro quidem A, intervallo autem AD circulus describatur DEF [b]. Et quoniam A centrum est DEF circuli, erit AE ipsi AD æqualis. Sed & C æqualis AD. Utraque igitur ipsarum AE C ipsi AD æqualis erit. Quare & AE ipsi C est æqualis [c]. Duabus igitur datis rectis lineis inæqualibus AB C à majori AB minori C æqualis Abscissa est AE. Quod fecisse oportebat.

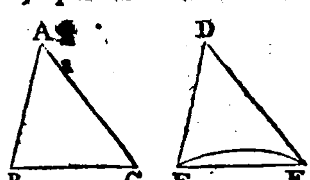


a Per antecedentem.
b post. 3.
c Axiom. 1.

PROP. IV. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem, & angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi æqualem habebunt; & triangulum triangulo æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri; quibus æqualia latera subtenduntur.

Sint duo triangula ABC DEF, quæ duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem AB lateri DE æquale, latus vero AC ipsi DF; & angulum BAC angulo EDF æqualem. Dico, & basim BC basi EF æqualem esse, & triangulum ABC æquale triangulo DEF, & reliquos angulos reliquis angulis æquales,



æquales, alterum alteri; quibus æqualia latera subtenduntur, nempe angulum ABC angulo DEF: & angulum ACB angulo DFE. Triangulo enim ABC applicato ipsi DEF, & puncto quidem A posito in D recta vero linea AB in ipsa DE: & punctum B puncto E congruet; quod AB ipsi DE sit æqualis. Congruente autem AB ipsi DE; congruet, & AC recta linea rectæ lineæ DF cum angulus BAC sit æqualis angulo EDF. Quare, & C congruet ipsi F: est enim recta linea AC æqualis rectæ DF. Sed, & punctum B congruebat puncto E. Ergo, & basis BC basi EF congruet. Nam si puncto quidem B congruente ipsi E, C vero ipsi F; basis BC basi EF non congruit; duæ rectæ lineæ spatium comprehendent: quod [a] fieri non potest. Congruet igitur BC basis, basi EF, & ipsi æqualis erit. Quare, & totum ABC triangulum congruet toti triangulo DEF, & ipsi erit æquale; & reliqui anguli reliquis angulis congruent, & ipsis æquales [b] erunt. Videlicet angulis ABC angulo DEF, & angulus ACB angulo DFE. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant. alterum alteri, habeant autem & angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi æqualem habebunt; & triangulum triangulo æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur: quod ostendere oportebat.

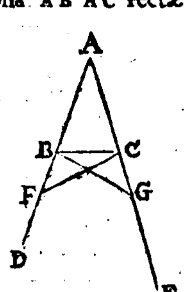
[a] Ax. 10.

[b] Axiom. 8.

PROP. V. THEOR.

Isoscelium triangulorum qui ad basim sunt anguli inter se sunt æquales, & productis æqualibus rectis lineis anguli qui sunt sub basi inter se æquales erunt.

Sit isosceles triangulum ABC; habens AB latus lateri AC æquale, & producantur in directum ipsis AB AC rectæ lineæ BD CE. Dico angulum quidem ABC angulo ACB, angulum vero CBD angulo BCE æqualem esse. Sumatur enim in linea BD, quodvis punctum F: atque à majori AE minori AF æqualis [a] auferatur AG: junganturque FC, GB. Quoniam igitur AF est æqualis AG; AB vero ipsi AC; duæ FA AC, duabus GA AB æquales sunt, altera alteri; & angulum FAG communem continent, basis igitur FC basi GB est [b] æqualis, & triangulum AFC æquale triangulo AGB; & reliqui anguli, reliquis angulis æquales erunt, alter alteri; quibus æqualia latera



[a] 3. hujus.

[b] 4. hujus.

latera ſubtenduntur: Videlicet angulus quidem ACF æqualis angulo ABG; angulus vero AFC; angulo AGB. Et quoniam tota AF, toti AG eſt æqualis; quarum AB eſt æqualis AC; erit [c] & reliqua BF reliquæ CG æqualis. Oſtenſa eſt autem FC æqualis GB. duæ igitur BF, FC duabus CG GB æquales ſunt, altera alteri; & angulus BFC æqualis angulo CGB: eſtque baſis ipſorum BC communis. Ergo & triangulum BFC triangulo CGB æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri; quibus æqualia latera ſubtenduntur. Angulus igitur FBC eſt æqualis angulo GCB; & angulus BCF angulo CBG. Itaque quoniam totus ABG angulus toti angulo ACF æqualis oſtenſus eſt, quorum angulus CBG eſt æqualis ipſi BCF: erit reliquus [d] ABC reliquo ACB æqualis: & ſunt ad baſim ABC trianguli: oſtenſus autem eſt & FBC angulus æqualis angulo GCB; qui ſunt ſub baſi. Iſoſcelium igitur triangulorum, [qui ad baſim anguli inter ſe ſunt æquales, & productis æqualibus rectis lineis anguli, qui ſunt ſub baſi inter ſe æquales erunt. Quod oſtendiſſe oportebat.

[c] Axiom. 3.

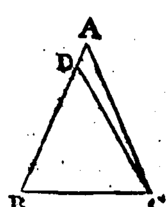
[d] Axiom. 3.

Cor. Hinc omne triangulum æquilaterum eſt quoque æquiangulum.

PROP. VI. THEOR.

Si trianguli duo anguli inter ſe ſint æquales, & æquales angulos ſubtendentia latera inter ſe æqualia erunt.

Sit triangulum ABC, habens angulum ABC angulo ACB æqualem. Dico & AB latus lateri AC æquale eſſe; ſi enim inæqualis eſt AB ipſi AC; altera ipſarum eſt major. Sit major AB; atque à majori AB minori AC æqualis [a] auferatur DB; & DC jungatur. Quoniam igitur DB eſt æqualis ipſi AC; communis autem BC: erunt duæ DB BC duabus AC CB æquales, altera alteri; & angulus DBC æqualis angulo ACB ex hyp. Baſis igitur DC baſi AB eſt [b] æqualis, & triangulum DBC æquale triangulo ACB, minus majori; quod eſt abſurdum. Non igitur inæqualis eſt AB ipſi AC. Ergo æqualis erit. Si igitur trianguli duo anguli inter ſe ſint æquales, & æquales angulos ſubtendentia latera inter ſe æqualia erunt: quod monſtraſſe oportuit.



[a] 3. hujus.

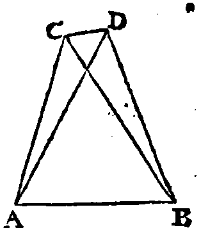
[b] 4. hujus.

Cor. Hinc omne triangulum æquiangulum eſt quoque æquilaterum.

PROP. VII. THEOR.

In eadem recta linea duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri non constituentur ad aliud, atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes.

Si enim fieri potest, in eadem recta linea A B duabus eisdem rectis, lineis A C C B aliæ duæ rectæ lineæ A D D B æquales, altera alteri constituantur ad aliud, atque aliud punctum C D; ad easdem partes ut ad C D, eosdem habentes terminos A B, quos primæ rectæ lineæ, ita ut C A quidem sit æqualis D A, eundem, quem ipsa terminum, habens A; C B vero sit æqualis D B, eundem habens B terminum; & C D jungatur. Itaque quoniam A C est æqualis A D; erit, & angulus A C D angulo A D C æqualis [a]. Major igitur est A D C angulus angulo B C D: Quare angulus B D C angulo B C D multo major erit. Rursus quoniam C B est æqualis D B & angulus B D C æqualis erit angulo B C D: ostensus autem est ipso multo major; quod fieri non potest. Non igitur in eadem recta linea duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri constituentur ad aliud, atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes; quod ostendisse oportebat.

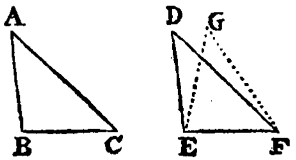


a 5. hujus.

PROP. VIII. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem, & basim basi æqualem; angulum quoque, qui æqualibus lateribus continetur angulo æqualem habebunt.

Sint duo triangula A B C, D E F, quæ duo latera A B, A C duobus lateribus D E D F æqualia habeant alterum alteri; ut sit A B quidem æquale D E; A C vero ipsi D F: habeant autem, & basim B C basi E F æqualem.



Dico

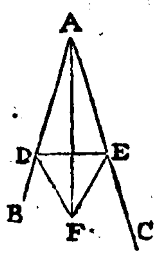
Dico angulum quoque BAC angulo EDF æqualem esse. Triangulo enim ABC applicato ipsi DEF triangulo, & puncto quidem B posito in E; recta vero linea BC in EF: congruet, & C punctum puncto F, quoniam BC ipsi EF est æqualis. Itaque congruente BC ipsi EF; congruent & BA AC ipsis ED DF. si enim basis quidem BC basi EF congruit; latera autem BA AC lateribus ED DF non congruunt, sed situm mutent; ut EG GF: constituentur in eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis, aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri; ad aliud atque aliud punctum; ad easdem partes; eosdem habentes terminos. non constituuntur autem; ut demonstratum [a] est. non igitur, si basis BC congruit basi EF, non congruent & BA AC latera lateribus ED DF. congruent igitur. Quare & angulus BAC angulo EDF congruet, & ipsi erit æqualis. Si igitur duo triangula, duo latera, duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem & basim basi æqualem: angulum quoque æqualibus lateribus contentum angulo æqualem habebunt: quod demonstrare oportebat.

[a] per 7. hujus.

PROP. IX. PROBL.

Datum angulum rectilineum bifariam secare.

Sit datus angulus rectilineus BAC. itaque oportet ipsum bifariam secare. Sumatur in linea AB quodvis punctum D; & à linea AC ipsi AD æqualis [a] auferatur AE; junctaque DE constituatur super ea [b] triangulum æquilaterum DEF; & AF jungatur. Dico angulum BAC à recta linea AF bifariam secari. Quoniam enim AD est æqualis AE; communis autem AF: duæ DA AF duabus EA AF æquales sunt, altera alteri; & basis DF. æqualis basi EF angulus [c] igitur DAF angulo EAF est æqualis. quare datus angulus rectilineus BAC à recta linea AF bifariam sectus est: quod facere oportebat.



[a] 3. hujus.
[b] 1. hujus.
[c] 8. hujus.

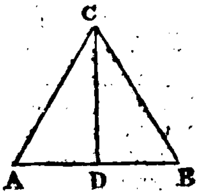
PROP. X. PROBL.

Datam rectam lineam terminatam bifariam secare.

Sit data recta linea terminata AB oportet ipsam AB bifariam secare. constituatur super [a] ea triangulum æquilaterum ABC; &

[a] 1. hujus.

b 9. hujus. & secetur ACB angulus b bifariam recta linea c CD. Dico AB rectam lineam in puncto D bifariam secari. Quoniam enim AC est æqualis CB; communis autem CD; duæ AC CD duabus BC CD æquales sunt; altera alteri; & angulus ACD æqualis angulo BCD. basis igitur



c 4. hujus. AD basi BD est c æqualis. Et ob id recta linea terminata AB bifariam secta est in puncto D: quod facere oportebat.

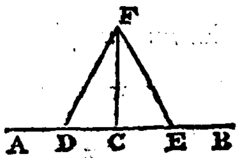
PROP. XI. PROBL.

Datæ rectæ lineæ à puncto in ipsa dato ad rectos angulos rectam lineam ducere.

Sit data recta linea AB, & datum in ipsa punctum C. oportet à puncto C ipsi AB ad rectos angulos rectam lineam ducere. Sumatur in AC quodvis punctum D: ipsique CD æ-

a 3. hujus. qualis a ponatur CE, & super DE

b 1. hujus. constituatur b triangulum æquilaterum FDE, & FC jungatur. Dico datæ rectæ lineæ AB à puncto C in ipsa dato, ad rectos angulos ductam esse FC. Quoniam enim DC est æqualis CE, & FC communis; erunt duæ



DC CF duabus EC CF æquales, altera alteri; & basis DF est æqualis basi FE. angulus igitur DCF angulo ECF est æqualis, & sunt deinceps. Quando autem recta linea super rectam lineam insistens, eos qui deinceps sunt, angulos æ-

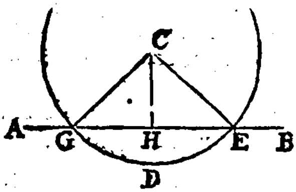
c Diff. 10. quales inter se fecerit: rectus c est uterque æqualium angulorum. ergo uterque ipsorum DCF FCE est rectus. Datæ igitur rectæ lineæ AB à puncto in ipsa dato C ad rectos angulos ducta est FC recta linea. Quod fecisse oportuit.

PROP. XII. PROBL.

Super data recta linea infinita, à dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit data quidem recta linea infinita AB, datum vero punctum C, quod in ea non est. Oportet super data recta linea

linea infinita A B, à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere. Sumatur enim ad alteras partes ipsius A B rectæ lineæ quodvis punctum D: & centro quidem C, intervallo autem C D circulus [a] describatur E D G: & E G in H bifariam [b] secetur: junganturque C G C H C E. Dico super data recta linea infinita A B, à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularem C H ductam esse. Quoniam enim æqualis est G H ipsi H E, communis autem H C, duæ G H H C, duabus E H H C æquales sunt, alter alteri; & basis C G est æqualis basi C E. Angulus igitur C H G angulo E H C est [c] æqualis, & sunt deinceps, cum autem recta linea super rectam lineam insistens eos, qui deinceps sunt angulos, æquales inter se fecerit; rectus [d] est uterque æqualium angulorum & quæ insistit recta linea perpendicularis appellatur ad eam, cui insistit. ergo super data recta linea infinita A B à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularis ducta est C H. Quod facere oportebat.

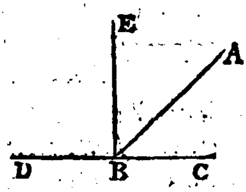


[a] Postul. 3.
[b] 10. hujus.
[c] 8. hujus.
[d] Diffin. 10.

PROP. XIII. THEOR.

Cum recta linea super rectam consistens lineam angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet.

Recta enim linea quædam A B super rectam C D consistens angulos faciat C B A A B D. Dico C B A A B D angulos; vel duos rectos esse, vel duobus rectis æquales, si enim C B A est æqualis ipsi A B D: duo recti [a] sunt; sin minus, ducatur à puncto B ipsi C D ad rectos [b] angulos B E, anguli igitur C B E E B D sunt duo recti. Et quoniam C B E, duobus C B A A B E est æqualis, communis apponatur E B D: ergo anguli C B E E B D tribus angulis C B A A B E E B D sunt [c] æquales. Rursus quoniam D B A angulus est æqualis duobus D B E E B A, communis apponatur A B C. anguli igitur D B A A B C tribus D B E E B A A B C æquales sunt. At ostensum est angulos quoque C B E E B D eisdem tribus æquales esse: quæ vero eidem sunt æqualia, [d] & inter se æqualia sunt: ergo & anguli C B E E B D ipsis D B A A B C sunt æquales, suntque C B E E B D duo recti anguli



[a] Diffin. 10.
[b] 11. hujus.
[c] Axiom. 2.
[d] Axiom. 1.

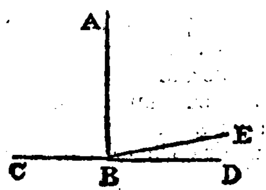
anguli igitur DBA ABC duobus rectis æquales erunt, ergo cum recta linea super rectam lineam consistens angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XIV. THEOR.

Si ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duæ rectæ lineæ non ad easdem partes positæ, angulos qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt.

Ad aliquam enim rectam lineam AB, atque ad punctum in ea B, duæ rectæ lineæ BC BD non ad easdem partes positæ angulos, qui deinceps sunt, ABC ABD duobus rectis æquales faciant. Dico BD ipsi CB in directum esse. si enim BD non est in directum ipsi CB, sit ipsi CB in directum BE. Quoniam igitur recta linea AB super rectam CBE consistit; anguli ABC ABE [a] duobus rectis sunt æquales. Sed & anguli ABC ABD sunt æquales duobus rectis. Anguli igitur CBA ABE ipsis CBA ABD æquales erunt. Communis auferatur ABC. Ergo reliquus ABE reliquo ABD est æqualis, minor majori quod fieri non potest. Non igitur BE est in directum ipsi BC. Similiter ostendemus neque aliam quampiam esse, præter BD. Ergo CB ipsi BD in directum erit. Si igitur ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duæ rectæ lineæ non ad easdem partes positæ angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint, ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt. Quod demonstrare oportebat.

a 13. hujus.

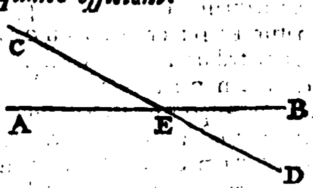


PROP. XV. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ se invicem secuerint, angulos qui ad verticem sunt, inter se æquales efficient.

Duæ enim rectæ lineæ AB CD se invicem secent in puncto E. Dico angulum quidem AEC angulo DEB; angulum vero CEB angulo AED æqualem esse. Quoniam enim recta linea AE super rectam CD consistens angulos facit CEA AED; erunt hi [a] duobus rectis æquales.

a 13. hujus.



æquales. Rursus quoniam recta linea DE super rectam AB consistens facit angulos AED DEB; erunt AED DEB anguli æquales [a] duobus rectis. Ostensum autem est angulos quoque CEA AED duobus rectis esse æquales. Anguli igitur CEA AED angulis AED DEB æquales sunt. Communis auferatur AED. Ergo reliquus [b] CEA reliquo BED est æqualis. Similiter ratione, & anguli CEB DEA æquales ostenduntur. Si igitur duæ rectæ lineæ se invicem secuerint, angulos, qui ad verticem sunt, æquales efficient. Quod ostendere oportebat. *b Axiom. 3.*

Cor. 1. Ex hoc manifeste constat duas rectas lineas se invicem secantes, facere angulos ad sectionem quatuor rectis æquales.

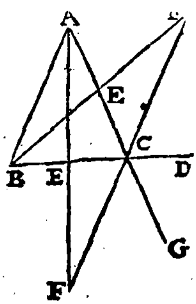
Cor. 2. Omnes anguli circa unum punctum constituti conficiunt angulos quatuor rectis æquales.

PROP. XVI. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto exterior angulus utrovis interiore, & opposito est major.

Sit triangulum ABC, & unum ipsius latus BC ad D producatur. Dico exteriorem angulum ACD utrovis interiore, & opposito, videlicet CBA, & BAC majorem esse. Secetur enim AC bifariam [a] in E, & juncta BE producatur ad F; ponaturque ipsi BE æqualis EF. Jungatur præterea FC, & ducta AC ad G producatur. Quoniam igitur AE quidem est æqualis EC, BE vero ipsi EF, duæ AE EB duabus CE EF æquales sunt, altera alteri: & angulus AEB angulo FEC est æqualis [b], ad verticem enim sunt. Basis igitur AB æqualis [c] est basi FC; & ABE triangulum triangulo FEC & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. Ergo angulus BAE est æqualis angulo ECF. Sed ECD angulus major est ipso ECF. Major igitur est angulus ACD angulo BAE. Similiter recta linea BC bifariam secta, ostendetur etiam BCG angulus, hoc est ACD angulus angulo ABC major. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus utrovis interiore, & opposito major est. Quod oportebat demonstrare.

a 10. hujus.
b 15. hujus.
c 4. hujus.



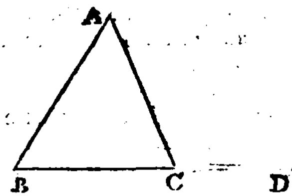
PROPO-

PROP. XVII. THEOR.

Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocunque sumpti.

Sit triangulum ABC. Dico ipsius ABC trianguli duos angulos quomodocunque sumptos duobus rectis minores esse. Producatur enim BC ad D. Et quoniam trianguli ABC exterior angulus ACD major [a] est interiore, & opposito ABC: communis apponatur ACB. Anguli igitur ACD, ACB angulis ABC ACB majores sunt. Sed ACD ACB sunt [b] æquales duobus rectis. Ergo ABC BCA duobus rectis sunt minores. Similiter demonstrabimus angulos quoque BAC ACB itemque CAB ABC duobus rectis minores esse. Omnis igitur trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt; quomodocunque sumpti. Quod demonstrare oportebat.

[a] 16. hujus.
[b] 13. hujus.

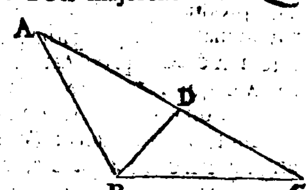


PROP. XVIII. THEOR.

Omnis trianguli majus latus majorem angulum subtendit.

Sit triangulum ABC habens latus AC latere AB majus. Dico, & ABC angulum angulo BCA majorem esse. Quoniam enim AC major est, quam AB, ponatur ipsi AB æqualis AD; & BD jungatur. Et quoniam trianguli BDC exterior angulus est ADB, erit is major [a] interiore, & opposito DCB. Sed ADB æqualis [b] est ipsi ABD, quòd & latus AB lateri AD sit æquale, major igitur est & ABD angulus angulo ACB, quare ABC ipso ACB multo major erit. Omnis igitur trianguli majus latus majorem angulum subtendit: quod oportebat demonstrare.

[a] 16. hujus.
[b] 5. hujus.

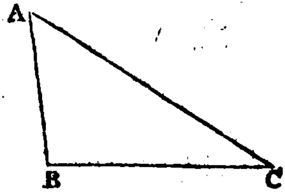


PROP. XIX. THEOR.

Omnis trianguli major angulus majus latus subtendit.

Sit triangulum ABC majorem habens ABC angulum angulo BCA. Dico & latus AC latere AB majus esse. Si enim non

non est majus, vel AC est æquale ipsi AB, vel ipso minus, æquale igitur non est, nam & angulus ABC angulo ACB æqualis [a] esset; non est autem. Non igitur AC ipsi AB est æquale. Sed neque minus. esset enim & angulus ABC angulo ACB minor [b]. atque non est, non igitur AC minus est ipso AB. Ostensum autem est neque æquale esse. ergo AC ipso AB est majus. Omnis igitur trianguli major angulus majus latus subtendit. Quod oportebat demonstrare.



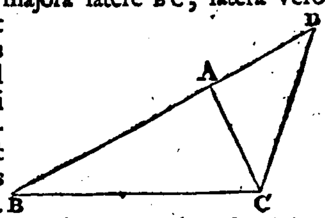
[a] 5. hujus.

[b] 18. hujus.

PROP. XX. THEOR.

Omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta.

Sit enim triangulum ABC. Dico ipsius ABC trianguli duo latera reliquo majora esse, quomodocunque sumpta: videlicet latera quidem BA AC majora latere BC; latera vero AB BC majora latere AC: & latera BC CA majora ipso AB producatur enim BA ad punctum D; ponaturque ipsi CA æqualis AD [a]; & DC jungatur. quoniam igitur DA est æqualis AC erit & angulus ADC angulo ACD æqualis [b]. Sed BCD angulus major est angulo ACD. Angulus igitur BCD angulo ADC est major; Et quoniam triangulum est DCB habens BCD angulum majorem angulo BDC: majorem autem angulum majus latus subtendit [c]: erit latus DB latere BC majus. sed DB est æquale ipsis BA AC. quare latera BA AC ipso BC majora sunt. similiter ostendemus, & latera quidem AB BC majora esse latere CA: latera vero BC CA ipso AB majora. Omnis igitur trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta. Quod ostendere oportebat.



[a] 3. hujus.

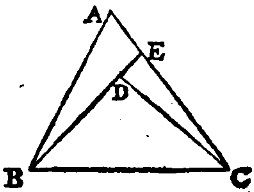
[b] 5. hujus.

[c] 19. hujus.

PROP. XXI. THEOR.

Si à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra constituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt.

Trianguli enim ABC in uno latere BC à terminis BC duæ rectæ lineæ intra constituantur BD DC. Dico BD DC reliquis duobus trianguli lateribus BA AC minores quidem esse, vero continere angulum BDC majorem angulo BAC. producatur enim BD ad E. & quoniam omnis triangnli duo



a 20. hujus. latera reliquo sunt majora a erunt trianguli ABE duo latera BA AE majora latere BE. communis apponatur EC. ergo

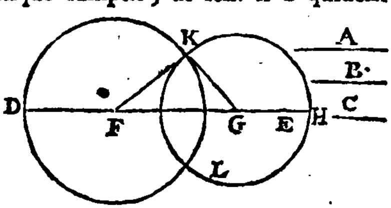
b Axiom. 4 BA AC ipsis BE EC majora b sunt. rursus quoniam CED trianguli duo latera CE ED sunt majora latere CD, communis apponatur DB. quare CE EB ipsis CD DB sunt majora b. Sed ostensum est BA AC majora esse BE EC. multo igitur BA AC ipsis BD DC majora sunt. rursus quoniam omnis

c 16. hujus. trianguli exterior angulus interiore & opposito est major c: erit trianguli CDE exterior angulus BDC major ipso CED. Eadem ratione & trianguli ABE exterior angulus CEB ipso BAC est major c sed angulus BDC ostensus est major angulo CEB. multo igitur BDC angulus angulo BAC major erit. Quare si à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra constituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXII. PROBL.

Ex tribus rectis lineis, quæ tribus rectis lineis datis æquales sint, triangulum constituere. Oportet autem duas reliqua majores esse, quomodocunque sumptas; quoniam omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta.

Sint tres datæ rectæ lineæ A B C, quarum duæ reliqua majores sint, quomodocunque sumptæ, ut scil. A B quidem sint majores quam C, A C vero majores quàm B, & præterea B C majores quàm A. Itaque oportet ex rectis lineis æqualibus ipsis A B C triangulum constituere exponatur aliqua recta



linea DE, terminata quidem ad D, infinita vero ad E, & ponatur

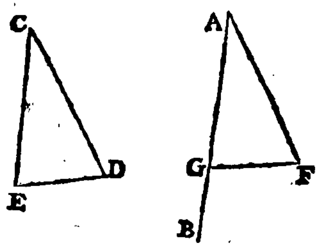
ponatur ipsi quidem A æqualis [a] DF, ipsi vero B æqualis FG, & ipsi C æqualis GH: & centro F, intervallo autem FD circulus [b] describatur DKL. rursusque centro G, & intervallo GH alius circulus KLH describatur, & jungantur KF KG. Dico ex tribus rectis lineis æqualibus ipsis A B C triangulum KFG constitutum esse. Quoniam enim punctum F centrum est DKL circuli; erit FD æqualis [c] FK. sed FD est æqualis A. Ergo & FK ipsi A est æqualis. rursus quoniam punctum G centrum est circuli LKH, erit GH æqualis [c] GK. sed GH est æqualis C. ergo & GK ipsi C æqualis erit. est autem & FG æqualis B: tres igitur rectæ lineæ KF FG GK tribus ABC æquales sunt. Quare ex tribus rectis lineis KF FG GK, quæ sunt æquales tribus datis rectis lineis ABC, triangulum constitutum est KFG. Quod facere oportebat.

a 3. hujus.
b 3. Postul.
c diffin. 15.

PROP. XXIII. PROBL.

Ad datam rectam lineam, & ad datum in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

Sit data quidem recta linea AB, datum vero in ipsa punctum A; & datus angulus rectilineus DCE. Oportet igitur ad datam rectam lineam AB, & ad datum in ea punctum A dato angulo rectilineo DCE, æqualem angulum rectilineum constituere. sumatur in utraque ipsarum CD CE quævis puncta D E, ducaturque DE, & ex tribus rectis lineis, quæ æquales sint tribus CD DE EC triangulum [a] constituatur AFG, ita ut CD sit æqualis AF, & CE ipsi AG, & DE ipsi FG. Itaque quoniam duæ DC CE duabus FA AG æquales sunt, altera alteri, & basis DE est æqualis basi FG: erit, & angulus DCE angulo FAG æqualis [b]. Ad datam igitur rectam lineam AB, & ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo DCE æqualis angulus rectilineus constitutus est FAG. Quod facere oportebat.



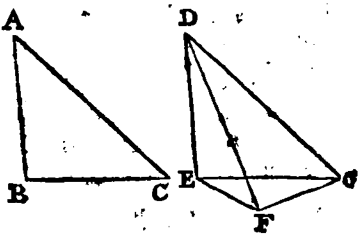
a 22. hujus.
b 8. hujus.

PROP. XXIV. PROBL.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo majorem,

rem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi majorem habebunt.

Sint duo triangula ABC DEF, quæ duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem AB æquale lateri DE; latus vero AC æquale DF: At angulus BAC angulo EDF sit major. Dico, & basim BC basi EF majorem esse. quoniam enim angulus BAC major est angulo



a 23. hujus. EDF, constituatur a ad rectam lineam DE; & ad punctum in ea D, angulo BAC æqualis angulus EDG, ponaturque alterutri ipsarum AC DF æqualis b

b 3. hujus. DG, & GE FG jungantur. itaque quoniam AB quidem est æqualis DE, AC vero ipsi DG; duæ BA AC duabus ED DG æquales sunt, altera alteri; & angulus BAC est æqualis angulo EDG. ergo basis BC basi EG est c æqualis. rursus quoniam

c 4. hujus.

d 5. hujus. æqualis est DG ipsi DF; & angulus DFG angulo DGF d æqualis: erit DFG angulus angulo EGF major. multo igitur major est EFG angulus ipso EGF. & quoniam triangulum est EFG, angulum EFG majorem habens angulo EGF; majori

e 19. hujus. autem angulo latus majus subtenditur e; erit, & latus EG latere EF majus. sed EG latus est æquale lateri BC. Ergo, & BC ipso EF majus erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo majorem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi majorem habebunt. Quod oportebat demonstrare.

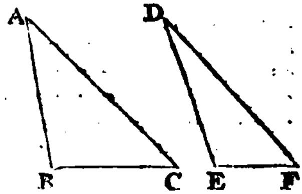
PROP. XXV. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi majorem; & angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, majorem habebunt.

Sint duo triangula ABC DEF, quæ duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus AB æquale lateri DE, & latus AC lateri DF: basis autem BC basi EF sit major. Dico, & angulum

BAC

BAC angulo EDF majorem esse. Si enim non est major, vel æqualis est, vel minor. Æqualis autem non est angulus BAC angulo EDF: esset enim, & basis BC basi EF æqualis [a]. Non est autem. Non igitur æqualis est BAC angulus angulo EDF. Sed neque minor. minor enim esset [b], & basis BC basi EF. Atqui non est. Non igitur angulus BAC angulo EDF est minor. ostensum autem est neque esse æqualem. Ergo angulus BAC angulo EDF necessario major erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi majorem; & angulum angulo qui æqualibus lateribus continetur, majorem habebunt. Quod demonstrare oportebat.



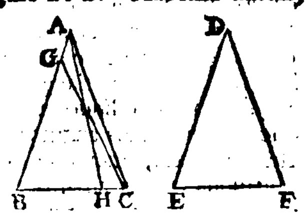
a 4. hujus.

b 24. hujus.

PROP. XXVI. THEOR.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum subtenditur; & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

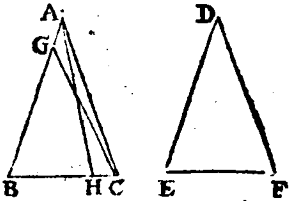
Sint duo triangula ABC DEF, quæ duos angulos ABC BCA duobus angulis DEF EFD æquales habeant, alterum alteri. videlicet angulum quidem ABC æqualem angulo DEF; angulum vero BCA angulo EFD. Habeant autem, & unum latus uni lateri æquale, & primo quod æqualibus adjacet angulis; nempe latus BC lateri EF. Dico, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habere, alterum alteri, latus. s. AB lateri DE; & latus AC ipsi DF, & reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF æqualem. Si enim inæqualis est AB ipsi DE, una ipsarum major est. Sit major AB, ponaturque GB æqualis DE; & GC jungatur. Quoniam igitur BG quidem est æqualis DE, BC vero ipsi EF, duæ GB BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri: & angulus GBC æqualis angulo DEF. basis igitur GC basi DF est [a] æqualis: & GBC triangulum triangulo DEF, & reliqui



a 4. hujus.

 liqui

liqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo GCB angulus est æqualis angulo DFE. sed angulus DFE angulo BCA æqualis ponitur. quare, & BCG angulus angulo BCA est æqualis, minor majori, quod fieri non potest. non igitur inæqualis est AB ipsi DE. ergo æqualis erit. est autem, & BC æqualis EF. Itaque duæ AB BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri, & angulus ABC æqualis angulo DEF. Basis
a 4. hujus. igitur AC basi [a] DF, & reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF est æqualis. Sed rursus sint latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur æqualia, ut AB ipsi DE. Dico rursus, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia esse; AC quidem ipsi DF, BC vero ipsi EF: & ad huc reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF æqualem. Si enim inæqualis est BC ipsi EF, una ipsarum major est. Sit major BC, si fieri



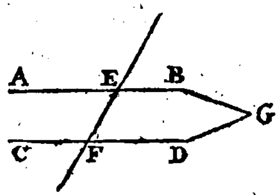
potest, ponaturque BH æqualis EF, & AH jungatur. Quoniam igitur BH quidem est æqualis EF, AB vero ipsi DE; duæ AB BH duabus DE EF æquales sunt, altera alteri, & angulos æquales continent. ergo [a] basis AH basi DF est æqualis: & ABH triangulum triangulo DEF & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. Æqualis igitur est angulus BHA an-
b ex hyp. gulo EFD. sed EFD est æqualis [b] angulo BCA. Ergo, & BHA angulus angulo BCA est æqualis. triangulo igitur AHC exterior angulus BHA æqualis est interiori & op-
c 16. hujus. posito BAC, quod fieri non potest [c]. quare non inæqualis est BC ipsi EF. æqualis igitur. est autem, & AB æqualis DE. duæ igitur AB BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri: angulosque æquales continent. quare basis AC æqualis est basi DF, & ABC triangulum triangulo DEF, & reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF est æqualis. Si igitur duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum subtenditur; & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt, Quod oportebat demonstrare.

PROP.

PROP. XXVII. THEOR.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ erunt rectæ lineæ.

In duas enim rectas lineas AB CD, recta linea EF incidens alternos angulos AEF EFD æquales inter se faciat, dico rectam lineam AB ipsi CD parallelam esse. Si enim non est parallela, productæ AB CD, vel ad partes BD convenient, vel ad partes AC producantur, conveniantque ad partes BD in puncto G. itaque GEF trianguli exterior angulus AEF major [a] est interiore & opposito EFG. sed & æqualis [b], quod fieri non potest. non igitur AB CD productæ ad partes BD convenient. similiter demonstrabitur neque convenire ad partes AC. quæ vero in neutra partes conveniunt, parallelæ [c] inter se sunt. parallela igitur est AB ipsi CD. Quare si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ inter se erunt rectæ lineæ, quod ostendere oportebat.

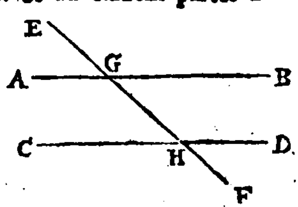


a 16. hujus.
b ex hyp.
c Diffin. 35.

PROP. XXVIII. THEOR.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem fecerit, vel interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter se rectæ lineæ.

In duas enim rectas lineas AB CD recta linea EF incidens exteriorem angulum EGB interiori, & opposito GHD æqualem faciat; vel interiores. & ad easdem partes BGH GHD, duobus rectis æquales. dico rectam lineam AB rectæ CD parallelam esse. Quoniam enim EGB angulus æqualis est [a] angulo GHD, angulus autem EGB angulo AGH [b], erit & angulus AGH angulo GHD æqualis; & sunt alterni. parallela igitur est AB ipsi CD [c]. rursus quoniam anguli BGH GHD duobus rectis sunt æquale [a], & sunt AGH BGH æquales



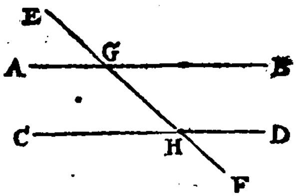
a Ex hyp.
b 15. hujus.
c Ex antecedente.

d 13. hujus quales duobus rectis [d]: erunt anguli AGH BGH angulis BGH GHD æquales. communis auferatur BGH. reliquus igitur AGH est æqualis reliquo GHD; & sunt alterni. ergo AB ipsi CD parallela erit. Si igitur in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem fecerit, vel interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter se rectæ lineæ. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIX. THEOR.

In parallelas rectas lineas recta linea incidens, & alternos angulos inter se æquales, & exteriorem interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem, & interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales efficiet.

In parallelas enim rectas lineas AB CD recta linea incidat EF. dico alternos angulos AGH GHD inter se æquales efficere, & exteriorem EGB interiori, & ad easdem partes GHD æqualem: & interiores, & ad easdem partes BGH GHD duobus rectis æquales. si enim inæqualis est AGH ipsi GHD, unus ipsorum major est. sit major AGH. & quoniam AGH angulus major est angulo GHD; communis apponatur BGH. anguli igitur AGH BGH angulis BGH GHD majores sunt.



a 13. hujus. sed anguli AGH BGH sunt æquales duobus rectis [a]. ergo BGH GHD anguli sunt duobus rectis minores. quæ vero à minoribus, quam sint duo recti in infinitum producuntur

b Axiom. 12 rectæ lineæ inter se conveniunt [b]. ergo rectæ lineæ AB CD in infinitum productæ convenient inter se. atqui non conveniunt cum parallelæ ponantur. non igitur inæqualis est AGH angulus angulo GHD. quare necessario est æqualis.

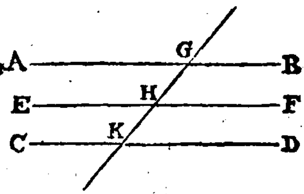
c 15. hujus. angulus autem AGH æqualis est angulo EGB [c]. ergo, & EGB ipsi GHD æqualis erit. communis apponatur BGH. anguli igitur EGB BGH sunt æquales angulis BGH GHD. sed EGB BGH æquales sunt duobus rectis. Ergo, & BGH GHD duobus rectis æquales erunt. In parallelas igitur rectas lineas recta linea incidens, & alternos angulos inter se æquales, & exteriorem interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem; & interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales efficiet. Quod oportebat demonstrare.

PROP.

PROP. XXX. THEOR.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, & inter se parallelæ erunt.

Sit utraque ipsarum AB CD ipsi EF parallela. dico & AB ipsi CD parallelam esse. Incidat enim in ipsas recta linea GK. & quoniam in parallelas rectas lineas AB EF, recta linea GK incidit, angulus AGH angulo GHF est æqualis[a]. rursus quoniam in parallelas rectas lineas EF CD, recta linea incidit GK, æqualis est GHF angulus angulo GKD[a]. ostensus autem est, & angulus AGK angulo GHF æqualis. ergo, & AGK ipsi GKD æqualis erit. & sunt alterni. parallela igitur est AB ipsi CD[b]. ergo quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, & inter se parallelæ erunt. Quod oportebat demonstrare.



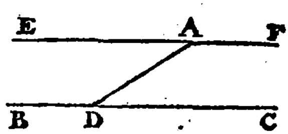
[a] 29. hujus.

[b] 27. hujus.

PROP. XXXI. PROBL.

Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea BC oportet per A punctum ipsi BC rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere. Sumatur in BC quodvis punctum D, & jungatur AD: constituaturque[a] ad rectam lineam DA, & ad punctum in ipsa A, angulo ADC æqualis angulus DAE: & in directum ipsi EA recta linea AF producatur. quoniam igitur in duas rectas lineas BC EF recta linea AD incidens alternos angulos EAD ADC inter se æquales efficit, EF ipsi BC parallela erit[b]. per datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ BC parallela ducta est recta linea EAF. quod facere oportebat.



[a] 23. hujus.

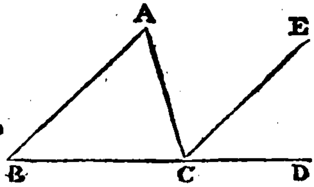
[b] 27. hujus.

PROP. XXXII. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus, & oppositis est æqualis, & trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt.

Sit

Sit triangulum ABC: & unum ipsius latus BC in D producatur. dico angulum exteriorem ACD duobus interioribus, & oppositis CAB ABC æqualem esse; & trianguli tres interiores angulos ABC BCA CAB duobus rectis esse æquales. ducatur [a] enim per punctum C ipsi AB rectæ lineæ parallela CE. & quoniam AB ipsi CE parallela est, & in ipsas incidit AC, alterni anguli BAC ACE inter se æquales sunt [b]. rursus quoniam AB parallela est CE & in ipsas incidit recta linea BD, exterior angulus ECD interiori, & opposito ABC est æqualis [b]. ostensus autem est angulus ACE æqualis angulo BAC. quare totus ACD exterior angulus æqualis est duobus interioribus, & oppositis BAC ABC. communis apponatur ACB. anguli igitur ACD ACB tribus ABC BAC ACB æquales sunt. sed anguli ACD ACB sunt æquales [c] duobus rectis. ergo & ACB CBA CAB duobus rectis æquales erunt. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus, & oppositis est æqualis; & trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt. Quod demonstrare oportebat.



a 31. hujus.
b 29. hujus.
c 13. hujus.

COROLLARIA.

1. Omnes tres anguli cujusque trianguli simul sumpti æquales sunt tribus angulis cujusque alterius trianguli simul sumptis.

2. Si in uno triangulo duo anguli aut singuli aut simul æquales sunt duobus angulis alterius trianguli erit reliquus angulus reliquo æqualis.

3. In triangulo si unus angulus rectus sit, reliqui simul unnm rectum conficiunt.

4. In triangulo Isoscele si angulus æquis cruribus contentus rectus sit reliqui ad basim sunt semirecti.

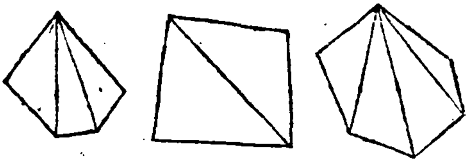
5. In triangulo æquilatero angulus quilibet æqualis est $\frac{1}{3}$ duorum rectorum vel $\frac{2}{3}$ unius recti.

THEOREMA I.

Omnes simul interiores anguli cujuscunque figuræ rectilineæ conficiunt bis tot rectos demptis quatuor quot sunt latera figuræ.

Nam figura una quæque rectilinea resolvi potest in triangula binario pauciora quam sunt ipsius figuræ latera, V. G. *si quatuor latera habet resolvitur in duo triangula si quinque in tria*

tria triangula si sex in quatuor & sic deinceps; quare per præcedentem omnes horum triangulorum anguli æquantur bis tot rectis quot sunt triangula, sed omnes horum triangulorum



anguli æquales sunt angulis figuræ interioribus; quare omnes anguli interiores figuræ æquales sunt bis tot rectis quot sunt triangula, hoc est bis tot rectis demptis quatuor quot sunt latera figuræ. Q. E. D.

THEOR. II.

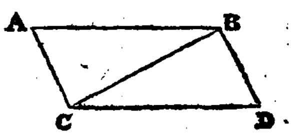
Omnes simul exteriores anguli cujusque figuræ rectilineæ conficiunt quatuor rectos.

Nam exteriores simul cum interioribus conficiunt, bis tot rectos quot sunt latera figuræ; vero ex præcedente Theor. omnes interiores soli conficiunt, bis tot rectos demptis quatuor quot sunt latera figuræ quare exteriores conficiunt quatuor rectos. Q. E. D.

PROP. XXXIII. THEOR.

Quæ æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, & ipsæ æquales, & parallelæ sunt.

Sint æquales, & parallelæ A B C D: & ipsas conjungant ad easdem partes rectæ lineæ A C B D. dico A C B D æquales, & parallelas esse. ducatur enim B C. & quoniam A B parallela est C D: in ipsasque incidit B C. alterni anguli A B C B C D æquales sunt a. rursus quoniam A B est æqualis C D, communis autem B C, duæ A B B C duabus B C C D sunt æquales; & angulus A B C æqualis angulo B C D. basis igitur A C



a 29. hujus.

basi B D est æqualis b; triangulumque A B C triangulo B C D: b 4. hujus.
& reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo angulus A C B angulo C B D est æqualis. & quoniam in duas rectas lineas A C B D recta linea B C incidens, alternos angulos A C B C B D æqua-

les

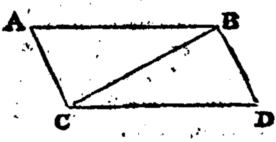
c 27. hujus. les inter se efficiet, parallela est AC ipsi BD c. Ostensa autem est & ipsi æqualis. Quæ igitur æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, & ipsæ æquales, & parallelæ sunt. Quod oportebat demonstrare.

Diffin. *Parallelogrammum est figura quadrilatera cujus bina opposita latera sunt parallela.*

PROP. XXXIV. THEOR.

Parallelogrammorum spatiorum latera, quæ ex opposito, & anguli, inter se æqualia sunt; & diameter ea bifariam secat.

Sit parallelogrammum ABDC, cujus diameter BC. dico ACDB parallelogrammi latera, quæ ex opposito, & angulos inter se æqualia esse; & diametrum BC ipsum bifariam secare. Quoniam enim parallela est AB ipsi CD, & in ipsas incidit recta linea BC; anguli alterni ABC BCD inter se æquales sunt a. rursus quoniam AC ipsi BD parallela est, & in ipsas incidit BC; alterni anguli ACB CBD æquales sunt



a 29. hujus. inter se a. duo igitur triangula sunt ABC CBD, quæ duos angulos ABC BCA duobus angulis BCD CBD æquales habent, alterum alteri: & unum latus uni lateri æquale, scil. quod

b 26. hujus. est ad æquales angulos, utrique commune BC. ergo, b & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem. æquale igitur est latus quidem AB lateri CD: latus vero AC ipsi BD, & angulus BAC angulo BDC æqualis. & quoniam angulus ABC est æqualis angulo BCD; & angulus CBD angulo ACB; erit totus angulus ABD æqualis toti ACD. ostensus autem est, & angulus BAC angulo BDC æqualis. parallelogrammorum igitur spatiorum latera, quæ ex opposito, & anguli, inter se æqualia sunt. dico etiam diametrum ea bifariam secare. quoniam enim æqualis est AB ipsi CD communis autem BC. duæ AB BC duabus DC CB æquales sunt, altera alteri & angulus ABC æqualis est angulo BCD.

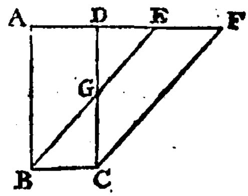
c 4. hujus. basis igitur c AC basi DB æqualis. quare, & triangulum ABC triangulo BCD æquale erit. ergo diameter BC parallelogrammum ACDB bifariam secat. Quod oportebat demonstrare.

PROP.

PROP. XXXV. THEOR.

Parallelogramma super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se æqualia sunt.

Sint parallelogramma ABCD EBCF super eadem basi BC, & in eisdem parallelis AF BC constituta. dico ABCD parallelogrammo EBCF æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est ABCD, æqualis [a] est AD ipsi BC. eadem quoque ratione, & EF est æqualis BC. quare &, AD ipsi EF æqualis erit [b]: & communis DE. tota igitur AE [c] toti DF est æqualis. est autem, & AB æqualis DC. ergo duæ EA AB duabus FD DC æquales sunt, altera alteri, & angulus FDC æqualis angulo EAB, exterior interiori [d], basis igitur EB basi FC est [e] æqualis, & EAB triangulum æquale triangulo FDC. commune auferatur DGE. reliquum igitur trapezium ABGD reliquo trapezio EGCF est æquale [f]. commune apponatur GBC triangulum. ergo totum parallelogrammum ABCD toti parallelogrammo EBCF æquale erit. Parallelogramma igitur super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare.

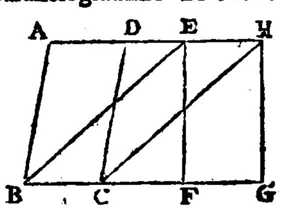


a 34. hujus.
b Axiom. 1.
c Axiom. 2.
d 29. hujus.
e 4. hujus.
f Axiom. 3.

PROP. XXXVI. THEOR.

Parallelogramma super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt.

Sint parallelogramma ABCD EFGH super æqualibus basibus BC FG, & in eisdem parallelis AH BG constituta. dico parallelogrammum ABCD parallelogrammo EFGH æquale esse. Conjungantur enim BE CH. & quoniam æqualis [a] est BC ipsi FG & FG æqualis ipsi EH; erit & BC ipsi EH æqualis. suntque parallelæ, & ipsas conjungunt BE CH. quæ autem æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt, æquales, & parallelæ sunt [b]. ergo EB, CH & æquales sunt, & parallelæ: quare EB CH parallelogrammum est, & æquale parallelogrammo ABCD [c]; basim enim eandem habet BC,



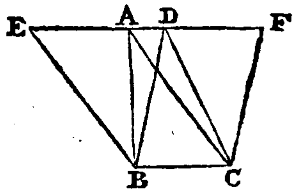
a Hyp.
b 33. hujus.
c 35. hujus.

& in eisdem parallelis B C, A D constituitur. simili ratione, & E F G H parallelogrammum eidem parallelogrammo E B C H est æquale. ergo parallelogrammum A B C D parallelogrammo E F G H æquale erit. Parallelogramma igitur super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta inter se sunt æqualia. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXXVII. THEOR.

Triangula super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt.

Sint triangula A B C D B C super eadem basi B C, & in eisdem parallelis A D B C constituta. dico A B C triangulum triangulo D B C æquale esse. Producatur A D ex utraque parte in E F puncta: & per B quidem ipsi C A parallela ducatur B E,



a 31. hujus. [a] per C vero ipsi B D parallela C F parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum E B C A D B C F, & parallelogrammum

b 35. hujus. E B C A est æquale [b] parallelogrammo D B C F, etenim super eadem sunt basi B C, & in eisdem parallelis B C E F, estque pa-

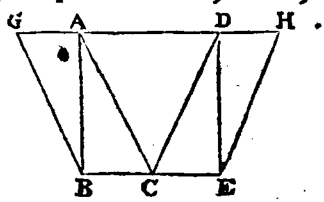
b 34. hujus. rallelogrammi quidem E B C A dimidium [b] A B C triangulum, cum diameter A B ipsum bifariam secet: parallelogrammi vero D B C F dimidium [b] triangulum D B C; diameter enim

c Axiom. 7. D C ipsum bifariam secat. quæ autem [c] æqualium dimidia inter se æqualia sunt. ergo triangulum A B C triangulo D B C est æquale. Triangula igitur super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXXVIII. THEOR.

Triangula super basibus, æqualibus, & in eisdem parallelis constituta inter se sunt æqualia.

Sint triangula A B C D C E super æqualibus basibus, B C C E, & in eisdem parallelis B E A D constituta. dico A B C triangulum D C E æquale esse. Producatur enim A D ex utraque parte in G H puncta: & per B quidem ipsi C A parallela du-



a 31. hujus. catur B G [a]: per E vero ducatur E H parallela ipsi D C [a]. parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum G B C A D C E H.

atque

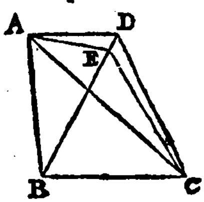
atque est parallelogrammum GBCA æquale [b] parallelogrammo DCEH: in æqualibus enim sunt basibus BC CE, & in eisdem BE GH parallelis. parallelogrammi vero GBCA dimidium [c] est ABC triangulum, nam diameter AB ipsum bifariam secat. & parallelogrammi DCEH dimidium [c] est triangulum DCE, diameter enim DE ipsum secat bifariam. quæ autem æqualium dimidia [d], inter se æqualia sunt. ergo ABC triangulum triangulo DCE est æquale. Triangula igitur super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.

b 36. hujus.
c 34. hujus.
d Axiom. 7.

PROP. XXXIX. THEOR.

Triangula æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis.

Sint æqualia triangula ABC DBC super eadem basi BC constituta, & ad easdem partes. dico, & in eisdem parallelis esse. ducatur enim AD. dico AD parallelam esse ipsi BC. Si enim non est parallela, ducatur [a] per A punctum ipsi BC parallela recta linea AE, & EC ducatur. æquale igitur est ABC triangulum triangulo EBC [b], super eadem enim est basi BC, & in eisdem BC, AE parallelis. sed ABC triangulum triangulo DBC [c] est æquale. ergo & triangulum DBC æquale est ipsi EBC triangulo, majus minori, quod fieri non potest. non igitur AE ipsi BC parallela est. similiter ostendemus neque aliam quampiam parallelam esse, præter ipsam AD. ergo AD ipsi est parallela. Triangula igitur æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta in eisdem quoque sunt parallelis. Quod oportebat demonstrare.



a 31. hujus.
b 37. hujus.
c Ex hyp.

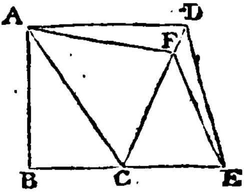
PROP. XL. THEOR.

Triangula æqualia super basibus æqualibus, & ad easdem partes constituta in eisdem quoque sunt parallelis.

Sint æqualia triangula ABC CDE super æqualibus basibus BC CE constituta. dico etiam in eisdem esse parallelis. ducatur enim AD. dico AD ipsi BE parallelam esse. Nam si non est, ducatur per A ipsi BE parallela AF, [a] & FE ducatur.

a 31. hujus.

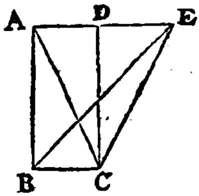
b 38. hujus. catur. triangulum igitur ABC triangulo FCE est æquale [b], cum super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis BE AF constituantur. sed triangulum ABC æquale est triangulo DCE. ergo & triangulum DCE triangulo FCE æquale erit, majus minori, quod fieri non potest. non igitur AF ipsi BE est parallela. similiter demonstrabimus neque aliam quampiam parallelam esse, præter AD. ergo AD ipsi BE parallela erit. Æqualia igitur triangula super basibus æqualibus, & ad easdem partes constituta, etiam in eisdem sunt parallelis. Quod demonstrare oportebat.



PROP. XLI. THEOR.

Si parallelogrammum, & triangulum eandem basim habeant in eisdemque sint parallelis; parallelogrammum ipsius trianguli duplum erit.

Parallelogrammum enim ABCD, & triangulum EBC, basim habeant eandem BC, & in eisdem sint parallelis BC AE. dico parallelogrammum ABCD trianguli EBC duplum esse. Jungatur enim AC. triangulum igitur ABC triangulo
a 37. hujus. EBC est æquale [a]; namque super eadem basi BC, & in eisdem BC AE parallelis constituuntur. sed ABCD parallelogrammum duplum est triangu-
b 34. hujus. li ABC [b], cum diameter AC ipsum bifariam secet. quare & ipsius EBC trianguli duplum erit. Si igitur parallelogrammum, & triangulum eandem basim habeant, & in eisdem sint parallelis; duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli. Quod demonstare oportebat.



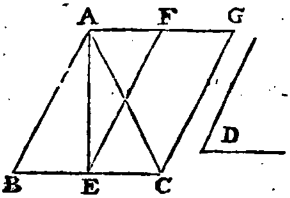
PROP. XLII. PROBL.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum triangulum ABC, datus autem rectilineus angulus D. Itaque oportet, dato triangulo ABC æquale parallelogrammum constituere in angulo rectilineo ipsi D æquali.

secetur

secetur BC bifariam [a] in E, & juncta AE, ad rectam lineam EC, atque ad punctum in ea E, constituatur angulus [b] CEF æqualis ipsi D: & per A quidem ipsi EC parallela ducatur [c] AG; per C vero ipsi FE ducatur parallela [c] CG. parallelogrammum igitur est FECG. & quoniam BE est æqualis EC, erit & ABE triangulum [d] triangulo AEC æquale, super æqualibus enim sunt basibus BE EC, & in eisdem BC AG parallelis. ergo triangulum ABC trianguli AEC est duplum. est autem, & parallelogrammum FECG duplum [e] trianguli AEC; basim enim eandem habet, & in eisdem est parallelis. æquale igitur est FECG parallelogrammum triangulo ABC habetque CEF angulum æqualem angulo D dato. Dato igitur triangulo ABC æquale parallelogrammum FECG constitutum est, in angulo CEF, qui angulo D est æqualis. Quod quidem facere oportebat.

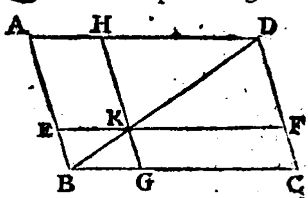


[a] 10. hujus.
[b] 23. hujus.
[c] 31. hujus.
[d] 38. hujus.
[e] 35. hujus.

PROP. XLIII. THEOR.

Omnis parallelogrammi spatii eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum complementa inter se sunt æqualia.

Sit parallelogrammum ABCD, cujus diameter BD, & circa ipsam BD parallelogramma quidem sint FH EG, quæ vero complementa dicuntur AK KC. dico AK complementum complemento KC æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est ABCD, & ejus diameter BD, æquale [a] est ABD triangulum triangulo BDC. rursus quoniam HKFD parallelogrammum est cujus diameter DK, triangulum HDK triangulo DFK æquale [a] erit. eadem ratione, & triangulum KGB triangulo KEB est æquale. cum igitur triangulum quidem BEK æquale sit triangulo BGK triangulum vero HDK ipsi DFK; erit triangulum BEK una cum triangulo HDK æquale triangulo BGK una cum DFK triangulo. est autem, & totum triangulum ABD æquale toti BDC. reliquum igitur AK complementum reliquo complemento KC est æquale. Ergo omnis parallelogrammi spatii eorum, quæ



[a] 34. hujus.

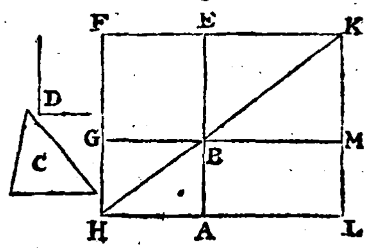
circa

circa diametrum sunt parallelogrammorum complementa inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XLIV. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

Sit data quidem recta linea A B; datum vero triangulum C, & datus angulus rectilineus D. oportet igitur ad datam rectam lineam A B, dato triangulo C æquale parallelogrammum applicare in angulo ipsi D æquali. Constituatur triangulo C æquale [a] parallelogrammum B E F G, in angulo E B G, qui est æqualis D. & ponatur B E in directum ipsi A B, producaturque F G ad H: & per A alterutri ipsarum B G E F parallela [b] ducatur A H, & H B jungatur. quoniam igitur in parallelas A H E F recta linea H F incidit, anguli A H F H F E duobus rectis æquales [c] sunt. quare B H F H F E duobus rectis sunt minores. quæ vero à minoribus, quàm sunt duo recti, in infinitum producantur, conveniunt [d] inter se. ergo H B F E productæ convenient. producantur, & conveniant in K: perque K alterutri ipsarum E A F H parallela [b] ducatur K L, & A H G B ad L M puncta producantur. parallelogrammum igitur est H L K F, cujus diameter H K, & circa H K parallelogramma quidem sunt A G M E; ea vero quæ complementa dicuntur L B B F: ergo L B ipsi B F est [e] æquale. sed, & B F æquale est triangulo C. quare, & L B triangulo C æquale erit. & quoniam G B E angulus æqualis [f] est angulo A B M, sed & æqualis angulo D, erit & angulus A B M angulo D æqualis. Ad datam igitur rectam lineam A B, dato triangulo C æquale parallelogrammum constitutum est L B, in angulo A B M, qui est æqualis angulo D. Quod facere oportebat.



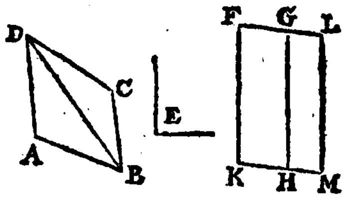
[a] 42. hujus.
[b] 31. hujus.
[c] 29. hujus.
[d] Axio. 12
[e] 43. hujus.
[f] 15. hujus.

PROP. XLV. PROBL.

Rectilineo dato æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum rectilineum A B C D, datus vero angulus rectilineus E. itaque oportet rectilineo A B C D æquale parallelogrammum

grammum constituere in angulo ipsi E æquali. Conjungantur enim D B, & constituatur triangulo A D B æquale [a] parallelogrammum F H: in angulo H K F, qui est æqualis angulo E. [a] 42. hujus. deinde ad rectam lineam G H applicetur triangulo D B C æquale [b] parallelogrammum G M, in angulo G H M qui angulo E est æqualis. [b] 44. hujus. & quoniam angulus E æqualis est utrique ipsorum H K F G H M, erit & H K F angulo G H M æqualis. communis apponatur K H G. anguli igitur F K H K H G, angulis K H G G H M æquales sunt. sed F K H K H G sunt æquales [c] duobus rectis. ergo, [c] 29. hujus. & K H G G H M duobus rectis æquales erunt. itaque ad aliquam rectam lineam G H, & ad datum in ea punctum H duæ rectæ lineæ K H H M non ad easdem partes positæ angulos deinceps duobus rectis æquales efficiunt.



in directum igitur [d] est K H ipsi H M. & quoniam in parallelas K M F G recta linea H G incidit, alterni anguli M H G H G F æquales [c] sunt. [d] 14. hujus. communis apponatur H G L. anguli igitur M H G H G L, angulis H G F H G L sunt æquales. at anguli M H G H G L æquales [c] sunt duobus rectis. quare & anguli H G F H G L duobus rectis æquales erunt. in directum [d] igitur est F G ipsi G L. & quoniam K F ipsi H G & æqualis est, & parallela; sed & H G ipsi M L; erit K F [e] ipsi M L & æqualis, & parallela. [e] 30. hujus. ipsasque conjungunt rectæ lineæ K M F L. ergo & K M F L æquales [f] & parallelæ sunt. [f] 33. hujus. parallelogrammum igitur est K F L M. at cum triangulum quidem A B D æquale sit parallelogrammo H F: triangulum vero D B C parallelogrammo G M; erit totum A B C D rectilineum toti parallelogrammo K F L M æquale. Dato igitur rectilineo A B C D æquale parallelogrammum constitutum est K F L M in angulo F K M, qui est æqualis angulo E dato. Quod facere oportebat.

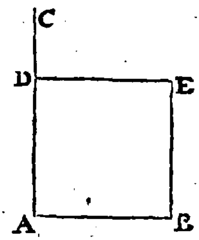
Cor. Ex jam dictis manifestum est, quomodo ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicari possit in dato angulo rectilineo.

PROP. XLVI. PROBL.

Super data recta linea quadratum describere.

Sit data recta linea A B. oportet super ipsa A B quadratum descri-

a 11. hujus. describere. Ducatur a rectæ lineæ AB à puncto in ea dato
b 3. hujus. A ad rectos angulos AC; & ipsi AB æqualis b ponatur AD; perque punctum D ducatur c DE ipsi AB parallela, & per B
c 31. hujus. ipsi AD parallela c ducatur BE. parallelogrammum igitur est ADEB. & AB quidem est d æqualis DE,
d 34. hujus. AD vero ipsi d BE. sed & BA ipsi AD est æqualis. quatuor igitur BA AD DE EB inter se æquales sunt, ideoque æquilaterum est ADEB parallelogrammum. dico etiam rectangulum esse. quoniam enim in parallelas AB DE recta linea incidit AD,
e 29. hujus. anguli BAD ADE duobus rectis sunt e æquales. rectus autem est BAD, ergo, & ADE rectus erit. parallelogrammorum vero spatiorum, quæ ex opposito sunt la-
f 34. hujus. tera, & anguli f inter se æqualia sunt. rectus igitur est uterque oppositorum ABE BED angulorum: & ob id rectangulum est ADBE. Ostensum autem est æquilaterum esse. Quadratum igitur sit necesse est, atque est super recta linea AB descriptum. Quod ipsum facere oportebat.

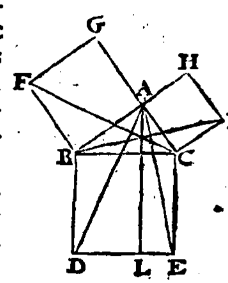


Cor. Hinc omne parallelogrammum habens unum angulum rectum est rectangulum.

PROP. XLVII. THEOR.

In rectangulis triangulis, quod à latere rectum angulum subtendente describitur quadratum æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens BAC angulum. dico quadratum descriptum à recta BC æquale esse quadratis, quæ ab ipsis BA AC describuntur. describatur a enim à BC quidem quadratum BD EC, ab ipsis
a 46. hujus. BA AC quadrata a GB HC, perque A alterutri ipsarum BD CE parallela ducatur AL; & AD FC jungantur. Quoniam igitur uterque angulorum BAC
b Diffin. 30. BAG rectus b est, ad aliquam rectam lineam BA, & ad datum in ea punctum A duæ rectæ lineæ AC AG non ad easdem partes positæ, angulos qui deinceps sunt duobus rectis æquales
c 14. hujus. efficiunt. in directum igitur c est CA ipsi AG. eadem ratione, & AB ipsi AH est in directum. & quoniam angulus



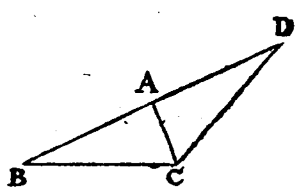
DBC est æqualis angulo FBA, rectus enim uterque est, communis apponatur ABC totus igitur DBA angulus toti FBC est [d] æqualis. quod cum duæ AB BD duabus FB BC æquales [d] sint, altera alteri, & angulus DBA æqualis angulo FBC; erit & basis AD basi FC æqualis [e], & ABD triangulum triangulo FBC æquale. estque [f] trianguli quidem ABD duplum BL parallelogrammum, basim enim eandem habent BD & in eisdem BD AL sunt parallelis: trianguli [f] vero FBC duplum est GB quadratum; rursus enim basim habent eandem FB, & in eisdem sunt parallelis FB GC. quæ autem æqualium duplicia inter se æqualia [g] sunt. ergo æquale est parallelogrammum BL ipsi GB quadrato. similiter junctis AE BK, ostendetur etiam CL parallelogrammum æquale quadrato HC. totum igitur DBEC quadratum duobus quadratis GB HC est æquale. & describitur quidem DBEC quadratum à recta linea BC, quadrata vero GB HC ab ipsis BA AC. quadratum igitur BE, à latere BC descriptum æquale est quadratis, quæ describuntur à lateribus BA AC. Ergo in rectangulis triangulis, quadratum, quod describitur à latere rectum angulum subtendente æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur. Quod oportebat demonstrare.

[d] Axiom. 2.
[e] 4. hujus.
[f] 41. hujus.
[g] Axiom. 6.

PROP. XLVIII. THEOR.

Si quadratum, quod describitur ab uno laterum trianguli æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur; angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit.

Si trianguli ABC, quod ab uno latere BC describitur quadratum æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus BA AC describuntur, dico angulum BAC rectum esse. ducatur enim à puncto A ipsi AC ad rectos angulos AD; ponaturque AD ipsi BA æqualis, & DC jungatur. Quoniam igitur DA est æqualis AB, erit & quadratum quod describitur ex DA æquale quadrato ex AB. commune apponatur quadratum, quod ex AC. ergo quadrata, quæ ex DA AC æqualia sunt quadratis quæ ex BA AC describuntur. sed quadratis quidem, quæ ex DA AC æquale [a] est, quod ex DC quadratum; rectus enim angulus est DAC: quadratis



[a] 47. hujus.

dratis vero, quæ ex B A A C æquale ponitur quadratum, quod ex B C. quadratum igitur, quod ex D C æquale est ei, quod ex B C quadrato. ergo & latus D C lateri C B est æquale. & quoniam D A est æqualis A B communis autem A C, duæ D A A C æquales sunt duabus B A A C; & basis D C est æqualis basi C B. angulus [b] igitur D A C angulo B A C est æqualis. rectus autem est D A C. ergo & B A C rectus erit. Si igitur quadratum quod describitur ab uno laterum trianguli, æquale sit quadratis quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit. Quod oportebat demonstrare.

b 8. hujus.

EUCLIDIS

EUCLIDIS ELEMENTORUM.

LIBER SECUNDUS.

DIFFINITIONES.

I.

OMne parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub duabus rectis lineis, quæ rectum angulum comprehendunt:

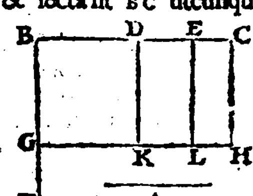
II.

Omnis parallelogrammi spatii, unum quodvis eorum quæ circa diametrum ipsius sunt parallelogrammorum, cum duobus complementis gnomon vocetur.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Si sint duæ rectæ lineæ, altera autem ipsarum secta fuerit in quotcunque partes; rectangulum sub duabus rectis lineis contentum æquale est eis rectangulis quæ sub recta linea insecta, & singulis partibus continentur.

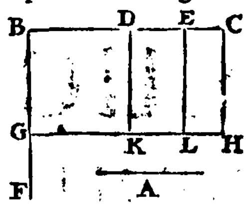
Sint duæ rectæ lineæ A BC; & secta sit BC utcunque in punctis D E. dico rectangulum rectis lineis A BC contentum æquale esse rectangulo quod continetur sub A & BD, & rectangulo quod sub A & DE, & ei quod sub A & EC continetur. Ducatur enim à puncto B ipsi BC ad rectos [a] angulos BF: atque ipsi A ponatur [b] æqualis BG: & per G



a 11. primi.
b 3. primi.

 quidem

c 31. primi. quidem ipsi BC parallela c ducatur GH: per E D C vero ducantur DK EL CH parallelæ c ipsi BG. rectangulum igitur BH est æquale rectangulis BK DL EH: atque est BH quidem, quod sub A & BC continetur; etenim continetur sub GB BC; & BG ipsi A est æqualis; rectangulum autem BK est quod continetur sub ipsis A & BD; continetur enim sub GB BD, quarum GB est æqualis A: & rectangulum DL est quod continetur sub A & DE, quoniam DK, hoc est BG ipsi A est æqualis; & similiter rectangulum EH est quod sub A & EC continetur. ergo rectangulum contentum sub A & BC est æquale rectangulo contento, sub A & BD, & contento sub A & DE, & adhuc contento sub A & EC. Si igitur sint duæ rectæ lineæ altera autem ipsarum secta fuerit in quotcunque partes; rectangulum sub duabus rectis lineis contentum est æquale eis quæ sub recta linea insecta, & singulis partibus continentur. Quod oportebat demonstrare.



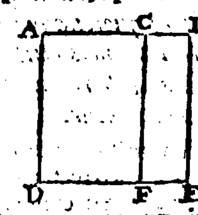
PROP. II. THEOR.

Si recta linea secta fuerit utcunque; rectangula quæ sub tota, & singulis partibus continentur æqualia sunt ei quod à tota fit quadrato.

Recta enim linea AB secta sit utcunque in puncto C, dico rectangulum quod sub AB BC continetur, unà cum contento sub BA AC æquale esse quadrato, quod fit ex AB.

a 46. primi. describatur a enim ex AB quadratum ADEB, & per C ducatur b alterutri ipsarum AD BE parallela CF. æquale igitur est AE rectangulis AF CE. atque est AE quidem quadratum, quod ex AB; AF vero rectangulum contentum sub BA AC; etenim sub DA AC continetur, quarum AD ipsi AB est æqualis, & rectangulum CE continetur sub AB BC, cum BE sit æqualis AB. ergo rectangulum sub BA & AC unà cum rectangulo sub AB & BC æquale est quadrato ex AB. Si igitur recta linea utcunque secta fuerit, rectangula, quæ sub tota, & singulis partibus continentur, æqualia sunt ei, quod à tota fit quadrato. Quod demonstrare oportebat.

b 31. primi.

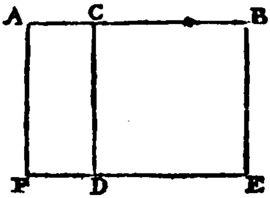


PROP.

PROP. III. THEOR.

Si recta linea utcunque secta fuerit; rectangulum sub tota, & una ejus parte contentum æquale est, & rectangulo, quod sub partibus continetur, & ei quod à prædicta parte fit quadrato.

Recta enim linea A B secta sit utcunque in puncto C. dico sub A B & B C rectangulum æquale esse rectangulo sub A C B C unà cum quadrato, quod fit ex B C. describatur [a] enim ex B C quadratum C D E B; producaturque E D in F: & per A alterutri ipsarum C D B E parallela [b] ducatur A F. æquale utique erit rectangulum A E ipsis A D C E: & est A E quidem rectangulum contentum sub A B B C; etenim sub A B B E continetur, quarum B E est æqualis B C: rectangulum vero A D est quod continetur sub A C C B, cum D C ipsi C B sit æqualis: & D B est quadratum, quod fit ex B C. ergo rectangulum sub A B B C est æquale rectangulo sub A C C B unà cum quadrato quod ex B C. Si igitur recta linea utcunque secta fuerit; rectangulum sub tota, & una ejus parte contentum æquale est rectangulo quod sub partibus continetur, & ei quod à prædicta parte fit quadrato.

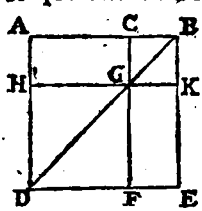


[a] 46. primi.
[b] 31. primi.

PROP. IV. THEOR.

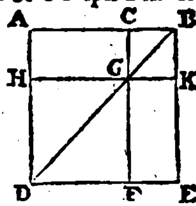
Si recta linea secta fuerit utcunque, quadratum quod fit à tota æquale erit, & quadratis quæ à partibus fiunt, & ei quod bis sub partibus continetur rectangulo.

Recta enim linea A B secta sit utcunque in C. dico quadratum quod fit ex A B æquale esse, & quadratis ex A C C B & ei rectangulo quod bis sub A C C B continetur. Describatur [a] enim ex A B quadratum A D E B, jungaturque B D, & per C quidem alterutri ipsarum A D B E parallela [b] ducatur C G F; per G vero alterutri ipsarum A B D E ducatur [b] parallela H K. & quoniam C F est parallela ipsi A D, & in ipsas incidit B D: erit exterior angulus B G C interiori & opposito A D B æqualis [c]: angulus



[a] 46. primi.
[b] 31. primi.
[c] 29. primi.

d 5. primi. angulus autem ADB est æqualis d angulo ABD, quod & latus BA æquale est lateri AD. quare CGB angulus angulo
e 6. primi. GBC est æqualis: ac propterea latus BC lateri CG æquale e.
f 34. primi. sed & latus CB æquale f est lateri GK & CG ipsi BK. ergo & GK est æquale KB, & CGKB æquilaterum est. dico insuper etiam rectangulum esse. quoniam enim CG est parallela ipsi BK & in ipsas incidit CB; anguli KBC GCB duobus rectis sunt æquales c. rectus autem est KBC angulus. ergo & re-



ctus GCB, & anguli oppositi CGK GKB recti erunt. rectangulum igitur est CGKB. sed ostensum fuit & æquilaterum esse. quadratum igitur est CGKB, quod quidem fit ex BC. eadem ratione & HF est quadratum quod fit ex HG, hoc est ex AC. ergo HF CK ex ipsis AC CB quadrata sunt. &
g 43. primi. quoniam rectangulum AG est æquale g rectangulo GE; atque est AG quod sub AC CB continetur, est enim GC ipsi CB æqualis: erit & GE æquale ei quod continetur sub AC CB, quare rectangula AG GE æqualia sunt ei quod bis sub AC CB continetur. sunt autem & HF CK quadrata ex AC CB. quatuor igitur HF CK AG GE, & quadratis ex AC CB, & ei quod bis sub AC CB continetur rectangulo sunt æqualia; sed HF CK AG GE componunt totum ADEB quadratum quod fit ex AB. quadratum igitur ex AB æquale est, & quadratis ex AC CB, & ei quod bis sub AC CB continetur rectangulo. Quare si recta linea utcunque secta fuerit; quadratum quod fit à tota æquale erit & quadratis quæ à partibus fiunt, & ei rectangulo quod bis sub partibus continetur. atque illud est quod demonstrare oportebat.

Cor. Ex hoc perspicue constat in quadratis spatiis parallelogramma quæ sunt circa diametrum, quadrata esse.

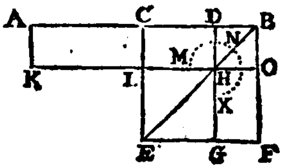
PROP. V. THEOR.

Si recta linea secta fuerit in partes æquales, & in partes inæquales; rectangulum sub inæqualibus totius partibus contentum una cum quadrato lineæ quæ inter sectiones interjicitur, æquale est ei quod à dimidia fit quadrato.

Recta enim linea quævis AB secta sit in partes æquales ad punctum C, & in partes inæquales ad D. dico rectangulum contentum sub AD BD, una cum quadrato quod fit ex

C D æquale esse ei quod ex C B fit quadrato. Describatur a enim ex B C quadratum C E F B: ducaturque B E; & per D quidem alterutri ipsarum C E B F parallela b ducatur D H G; per H vero ducatur K L O parallela b alterutri ipsarum C B E F: & rursus per A ducatur alterutri C L B O parallela b A K. & quoniam C H complementum æquale c est complemento H F, commune apponatur D O, totum igitur C O toti D F est æquale. sed C O est æquale d A L, quoniam & A C ipsi C B. ergo & A L æquale est D F. commune apponatur C H. totum igitur A H ipsis F D D L æquale erit. sed A H quidem est quod sub A D D B continetur, etenim D H ipsi D B est æqualis e; F D D L vero est gnomon M N X. igitur M N X æqualis est ei quod sub A D D B continetur, commune apponatur L G, æquale e scilicet quadrato quod ex C D. ergo M N X gnomon, & L G æqualia sunt rectangulo, quod continetur sub A D D B, & ei, quod fit ex C D quadrato. sed M N X gnomon, & L G sunt totum quadratum C E F B, quod quidem fit ex C B. ergo rectangulum sub A D D B, una cum quadrato quod ex C D, æquale est ei quod ex C B quadrato. Si igitur recta linea secta fuerit in partes æquales, & in partes inæquales, rectangulum sub inæqualibus totius partibus contentum unà cum quadrato lineæ quæ inter sectiones interjicitur, æquale est ei quod à dimidia fit quadrato. Quod demonstrare oportebat.

a 46.primi.
b 31.primi.
c 43.primi.
d 36.primi.
e Cor. 4. hujus.



PROP. VI. THEOR.

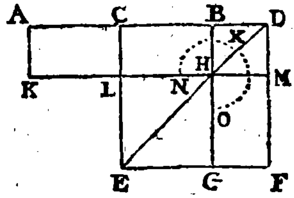
Si recta linea bifariam secetur, atque ipsi in directum adjiciatur quædam recta linea; rectangulum sub tota cum adjecta, & adjecta contentum, una cum quadrato dimidiæ, æquale est quadrato quod ab ea quæ ex dimidia & adjecta constat, tanquam ab una linea describitur.

Recta enim linea quævis A B secetur bifariam in puncto C, & adjiciatur ipsi in directum B D. dico rectangulum sub A D D B unà cum quadrato ex B C æquale esse ei quod fit ex C D quadrato. Describatur a enim ex C D quadratum C E F D, & jungatur D E; per B alterutri ipsarum C E D F parallela b ducatur B H G: & per H ducatur K L M parallela b alterutri

a 46.primi.
b 31 primi.

alterutri ipsarum A D E F; & adhuc per A alterutri C L D M parallela [b] A K. Itaque quoniam A C est æqualis C B, erit, & rectangulum A L rectangulo C H æquale [c]. sed C H æquale [d] est H F. ergo & A L ipsi H F æquale erit. commune apponatur C M. totum igitur A M gnomoni N X O est æquale. atque est A M, quod sub A D D B continetur, etenim D M est [e] æqualis D B. ergo & gnomon N X O æqualis est rectangulo sub A D D B. rursus commune apponatur L G, æquale [e] scilicet quadrato, quod ex C B. rectangulum igitur sub A D D B unà cum quadrato quod ex B C æquale est gnomoni N X O & ipsi L G. sed gnomon N X O, & L G componunt C E F D quadratum quod quidem fit ex C D. ergo rectangulum sub A D D B unà cum quadrato ex B C æquale est ei, quod fit ex C D quadrato. Si igitur recta linea secetur bifariam, adjiciaturque ipsi in directum quædam recta linea; rectangulum sub tota cum adjecta, & adjecta contentum unà cum quadrato dimidiæ æquale est quadrato quod ab ea quæ ex dimidia, & adjecta constat, tanquam ab una linea, describitur. Quod oportebat demonstrare.

[c] 36. primi.
[d] 43. primi.
[e] Cor. 4. hujus.

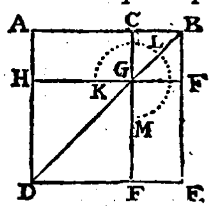


PROP. VII. THEOR.

Si recta linea utcunque secta fuerit, quæ à tota, & una parte fiunt utraque quadrata æqualia sunt, & rectangulo, quod bis sub tota, ac dicta parte continetur, & ei quod à reliqua parte fit quadrato.

Recta enim linea quædam A B secta sit utcunque in puncto C. dico quadrata ex A B B C æqualia esse, & rectangulo quod bis sub A B B C continetur, & ei quod fit ex A C quadrato. Describatur [a] enim ex A B quadratum A D E B, & figura construatur *. Itaque quoniam A G rectangulum æquale [b] est rectangulo

[a] 46 primi.
[b] 43. primi.



* *Figura dicitur construi cum in parallelogrammo ductæ lineæ lateribus parallelæ secantes diametrum in uno puncto, efficiunt duo parallelogramma circa diametrum, & duo complementa. Similiter dupla figura dicitur construi cum ductæ rectæ lateribus parallelæ, efficiunt quatuor parallelogramma circa diametrum, & quatuor complementa.*

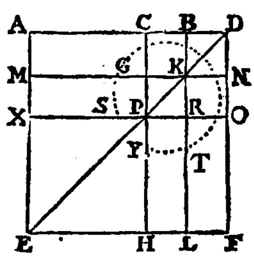
GE, commune apponatur CF: quare totum AF toti CE est æquale. rectangula igitur AF CE dupla sunt rectanguli AF. sed AF CE sunt LKM gnomon, & quadratum CF, ergo KLM gnomon, & quadratum CF dupla erunt rectanguli AF. est autem id quod bis sub AB BC continetur duplum ipsius AF; etenim BF est *c* æqualis BC. gnomon igitur KLM, & quadratum CF æqualia sunt, ei quod bis sub AB BC continetur. commune apponatur HF, quod est ex AC quadratum. ergo gnomon KLM, & quadrata CF HF æqualia sunt ei quod bis sub AB BC continetur, & quadrato ex AC. sed gnomon KLM, & quadrata CF HF componunt ADEB, & CF, quæ sunt ex AB BC quadrata. quadrata igitur ex AB BC æqualia sunt rectangulo, quod bis sub AB BC continetur unà cum eo quod fit ex AC quadrato. Ergo si recta linea utcunque secta fuerit; quæ à tota, & una parte fiunt utraque quadrata æqualia sunt rectangulo quod bis sub tota, ac dicta parte continetur, & ei quod à reliqua parte fit quadrato; quod ostendere oportebat.

c Cor. 4. hujus.

PROP. VIII. THEOR.

Si recta linea utcunque secta fuerit; quod quater sub tota, & una parte continetur rectangulum una cum quadrato reliquæ partis æquale est quadrato quod ex tota, & dicta parte tanquam ex una linea describitur.

Recta enim linea AB secta sit utcunque in C. dico rectangulum quater sub AB BC contentum una cum quadrato quod ex AC æquale esse quadrato, quod ex AB BC tanquam ex una linea describitur. Producatur enim recta linea AB in D; & ipsi CB ponatur æqualis BD; describaturque ex AD quadratum AEFD; & dupla figura construatur. quoniam igitur CB est *a* æqualis BD, atque est CB ipsi GK æqualis *b*; BD vero ipsi KN: erit & GK æqualis KN. eadem ratione, & PR ipsi RO est æqualis. & quoniam CB est æqualis BD, & GK ipsi KN; erit rectangulum *c* quidem CK rectangulo BN; rectangulum vero GR ipsi RN æquale *c*. sed CK est *d* æquale RN, complementa enim sunt parallelogrammi CO, ergo & BN æquale est GR, & quatuor

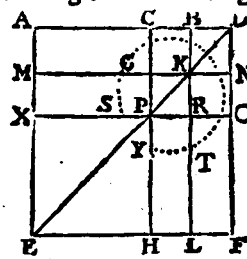


a hyp.
b 34. primi.

c 36. primi.
d 43. primi.

rectangula

rectangula DK KC GR RN inter se æqualia; ideoque quadrupla sunt rectanguli CK. rursus quoniam CB est æqualis BD, & BD quidem ipsi BK, hoc est ipsi CG æqualis; CB vero ipsi GK, hoc est GP: erit & CG æqualis GP. est autem & PR ipsi RO æqualis, rectangulum igitur AG rectangulo MP, & rectangulum PL ipsi



d 43 primi. RF æquale erit. sed MP est æquale PL; complementa enim sunt ML parallelogrammi. quare & AG ipsi RF est æquale. quatuor igitur AG MP PL RF inter se æqualia sunt, ac propterea ipsius AG quadrupla. ostensum autem est, & quatuor CK BN GR RN quadrupla esse CK. quare octo continentia gnomonem STY ipsius AK quadrupla sunt. & quoniam AK est quod sub AB BC continetur; etenim BK est æqualis BC; erit contentum quater sub AB BC ipsius AK quadruplum. at demonstratus est gnomon STY quadruplus ipsius AK. quod igitur quater sub AB BC continetur æquale est gnomoni STY. commune

e Cor. 4. hujus. apponatur XH, quod quidem quadrato ex AC est e æquale. ergo quod quater sub AB BC continetur una cum quadrato ex AC æquale est ipsi STY gnomoni, & quadrato XH. sed STY gnomon, & XH totum sunt AEFD quadratum, quod describitur ex AD. rectangulum igitur quater sub AB BC contentum unà cum quadrato ex AC æquale est ei, quod ex AD, hoc est ex AB BC tanquam ex una linea describitur, quadrato. Ergo si recta linea utcunque secta fuerit; quod quater sub tota, & una parte continetur rectangulum, unà cum quadrato reliquæ partis, æquale est quadrato quod ex tota & dicta parte, tanquam ex una linea describitur. Quod ostendendum fuerat.

PROP. IX. THEOR.

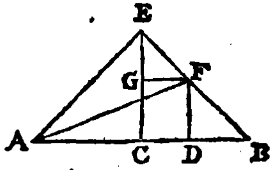
Si recta linea in partes æquales, & in partes inæquales secta fuerit, quadrata quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur, dupla sunt & quadrati dimidiæ, & quadrati lineæ ejus quæ inter sectiones interjicitur.

Recta enim linea quævis AB secta sit in partes æquales ad C, & in partes inæquales ad D. dico quadrata ex AD DB,

a 11. primi. quadratorum ex AC CD dupla esse. Ducatur a enim à puncto C ipsi AB ad rectos angulos CE, & utrivis ipsarum

AC

AC CB æqualis ponatur, junganturque EA EB. ac per D quidem ipsi CE parallela *b* ducatur DF; per F vero ipsi AB parallela *b* FG, & AF ducatur. Itaque quoniam AC est æqualis CE; erit *c* & angulus EAC angulo AEC æqualis. & cum rectus sit angulus ad C, reliqui AEC EAC uni recto æquales *d* erunt. & sunt æquales inter sese. utervis igitur ipsorum AEC EAC recti est dimidium. eadem ratione, & recti dimidium est utervis ipsorum CEB EBC. ergo totus angulus AEB rectus est. & quoniam angulus GEF dimidium est recti, rectus autem EGF; æqualis enim *e* est interiori & opposito ECB, erit, & reliquus EFG recti dimidium: æqualis igitur est GEF angulus ipsi EFG. quare & latus EG lateri GF est *f* æquale. rursus quoniam angulus ad B dimidium est recti, rectus autem FDB, quòd sit æqualis interiori & opposito ECB: reliquus BFD recti erit dimidium. angulus igitur ad B æqualis est angulo DFB; ideoque latus DF lateri DB æquale. & quoniam AC est æqualis CE, erit, & ex AC quadratum æquale quadrato ex CE. quadrata igitur ex AC CE dupla sunt quadrati ex AC; quadratis autem ex AC CE æquale *g* est quadratum ex EA, siquidem rectus est angulus ACE. ergo quadratum ex EA quadrati ex AC est duplum. rursus quoniam EG æqualis est GF, & quadratum ex EG quadrato ex GF est æquale. quadrata igitur ex EG & GF dupla sunt quadrati ex GF. at quadratis ex EG GF æquale *g* est quod ex EF quadratum. ergo quadratum ex EF quadrati ex GF duplum erit. æqualis *h* autem est GF ipsi CD. quadratum igitur ex EF duplum est quadrati CD. sed & quadratum ex AE quadrati ex AC est duplum. ergo quadrata ex AE EF dupla sunt quadratorum ex AC CD. quadratis vero ex AE EF æquale *g* est ex AF quadratum; quoniam angulus AEF rectus est. quadratum igitur ex AF quadratorum ex AC CD est duplum. sed quadrato ex AF æqualia sunt ex AD DF quadrata. rectus enim est angulus qui ad D. ergo ex AD DF quadrata dupla sunt quadratorum ex AC CD. est autem DF ipsi DB æqualis. quadrata igitur ex AD DB quadratorum ex AC CD dupla erunt. Quare si recta linea in partes æquales, & in partes inæquales secta fuerit, quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur quadrata dupla sunt, & quadrati dimidiæ, & quadrati lineæ ejus quæ inter sectiones interjicitur. Quod ostendere oportebat.



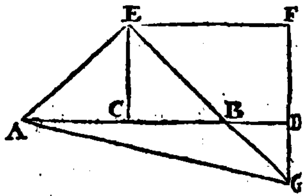
b 31. primi.
c 5 primi.
d 3. Cor. 32. primi.
e 29. primi.
f 6. primi.
g 47. primi.
h 34. primi.

PROP.

PROP. X. THEOR.

Si recta linea secetur bifariam, & ipsi in directum quævis recta linea adjiciatur; quæ à tota cum adjecta, & adjecta fiunt utraque quadrata dupla sunt, & quadrati dimidiæ, & quadrati quod ab ea quæ ex dimidia, & adjecta constat, tanquam ab una linea describitur.

Recta enim linea A B secetur bifariam in C, & ipsi in directum adjiciatur quævis recta linea B D. dico quadrata ex A D D B quadratorum ex A C C D dupla esse. Ducatur enim à
a 11. primi. puncto C ipsi A B ad rectos a angulos C E, & utrique ipsarum A C C B æqualis ponatur; ducaturque A E E B, & per E quidem
b 31. primi. ipsi A D parallela b ducatur E F; per D vero ducatur D F parallela b ipsi C E. & quoniam in parallelas E C F D recta
c 29. primi quædam linea E F incidit, anguli C E F E F D æquales c sunt duobus rectis. anguli igitur F E B E F D duobus rectis sunt minores. quæ autem à minoribus, quam sunt duo recti in infinitum producuntur, con-
d Axio. 12. venient inter se d. ergo E B F D productæ ad partes B D convenient. producantur, & conveniant in puncto G, & A G ducatur. itaque quoniam A C est æqualis C E, & angulus A E C angulo E A C æqualis
e 5. primi. e erit: atque est rectus qui ad C. uterque igitur ipsorum C A E A E C est recti dimidium. eadem ratione, & recti dimidium est uterque C E B E B C. ergo A E B est rectus. &
f 15. primi. quoniam E B C est dimidium recti, erit & recti f dimidium D B G; cum sit ad verticem. sed & B D G rectus est; etenim est c æqualis ipsi D C E alterno. reliquus igitur D G B dimidium est recti, & ob id ipsi D B G æqualis. ergo & latus B D
g 6. primi. æquale g lateri D G. rursus quoniam E G F est dimidium recti, rectus autem qui ad F, est enim angulo opposito qui ad C æqualis; erit, & reliquus F E G recti dimidium, & æqualis ipsi E G F. quare & latus G F lateri E F est æquale g. & cum E C sit æqualis C A; & quadratum ex E C æquale est ei quod ex C A fit quadrato. ergo quadrata ex E C C A dupla
h 47. primi. sunt quadrati ex C A. quadratis autem ex E C C A æquale h est quadratum ex E A. quadratum igitur ex E A quadrati ex A C est duplum. rursus quoniam G F est æqualis F E, æquale est, & ex G F quadratum quadrato ex F E. quadrata igitur ex G F F E quadrati ex E F sunt dupla. at quadratis ex G F F E æquale est,



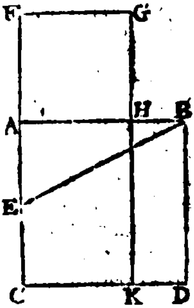
est [b] quod ex EG quadratum. ergo quadratum ex EG duplum est quadrati ex EF. æqualis autem est EF ipsi CD. quadratum igitur ex EG quadrati ex CD duplum erit. sed ostensum est quadratum ex EA duplum quadrati ex AC. ergo ex AE EG quadrata, quadratorum ex AC CD sunt dupla. quadratis vero ex AE EG æquale est [b] quod ex AG quadratum. quadratum igitur ex AG duplum est quadratorum ex AC CD. at quadrato ex AG æqualia [b] sunt ex AD DG quadrata. ergo quadrata ex AD DG sunt dupla quadratorum ex AC CD. sed DG est æqualis DB. quadrata igitur ex AD DB quadratorum ex AC CD sunt dupla. Ergo si recta linea bifariam secetur, & ipsi in rectum quædam recta linea adjiciatur; quæ à tota cum adjecta, & adjecta fiunt utraque quadrata dupla sunt & quadrati dimidiæ, & quadrati quod ab ea quæ ex dimidia, & adjecta constat tanquam ab una linea describitur. Quod ostendere oportebat. [b] 47 primi.

PROP. XI. PROBL.

Datam rectam lineam secare, ita ut quod sub tota, & altera parte continetur rectangulum æquale sit ei quod à reliqua parte fit quadrato.

Sit data recta linea AB. oportet ipsam AB ita secare, ut quod sub tota, & altera parte continetur rectangulum æquale sit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato. Describatur [a] enim ex AB quadratum ABCD: seceturque AC bifariam in E, & BE ducatur: deinde producta CA in F, ponatur ipsi BE æqualis EF: describaturque ex AF quadratum FGHA: & GH ad K producatur. dico AB sectam esse in H, ita ut sub AB BH rectangulum æquale sit quadrato ex AH. Quoniam enim recta linea AC bifariam secatur in E, adjiciturque ipsi in directum AF, rectangulum sub CF FA, una cum quadrato ex AE, æquale [b] erit quadrato ex EF. sed EF est æqualis EB. rectangulum igitur sub CF FA, una cum quadrato ex AE æquale est ei, quod fit ex EB, quadrato. quadrato autem ex EB æqualia sunt [c] quadrata ex BA AE: etenim angulus ad A rectus est. ergo rectangulum sub CF FA, una cum quadrato ex AE æquale est quadratis ex BA AE. commune auferatur quod ex AE fit quadratum. reliquum igitur rectangulum sub CF FA æquale est quadrato ex AB. est autem sub CF FA rectangulum

[a] 46. primi.



[b] 6. hujus.

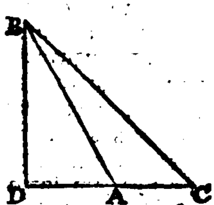
[c] 47. primi.

gulum FK; siquidem AF est æqualis FG: quadratum autem ex AB est ipsum AD. rectangulum igitur FK æquale est quadrato AD. commune auferatur AK. ergo reliquum FH reliquo HD est æquale. atque est HD rectangulum sub AB BH, cum AB sit æqualis BD, & FH est quadratum ex AH. rectangulum igitur sub AB BH quadrato ex AH æquale erit. Quare data recta linea AB secta est in H, ita ut sub AB BH rectangulum quadrato ex AH sit æquale. Quod facere oportebat.

PROP. XII. THEOR.

In obtusangulis triangulis, quod à latere obtusum angulum subtendente fit quadratum majus est quam quadrata quæ fiunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum quæ sunt circa obtusum angulum, in quod scilicet protractum perpendicularis cadit, & linea assumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtusum.

Sit obtusangulum triangulum ABC. obtusum angulum
a 12. primi. habens BAC: & ducatur a à puncto B ad CA protractam perpendicularis BD. dico quadratum ex BC majus esse, quam quadrata ex BA AC, rectangulo quod bis sub CA AD continetur. Quoniam enim recta linea CD secta est utcunque in puncto A, erit quadratum ex
b 4. hujus. CD æquale b, & quadratis ex CA AD, & ei quod bis sub CA AD continetur rectangulo. commune apponatur ex DB quadratum. quadrata igitur ex CD DB æqualia sunt & quadratis ex CA AD DB, & rectangulo quod bis sub CA AD continetur. sed quadratis ex CD DB æquale est c quadratum ex CB: rectus enim est angulus ad D, cum sit BD perpendicularis. Quadratis vero ex AD DB æquale
c 47. primi. est c quadratum ex AB. quadratum igitur ex CB æquale est, & quadratis ex CA AB, & rectangulo bis sub CA AD contento. ergo quadratum ex CB majus est quam quadrata ex CA AB, rectangulo quod bis sub CA AD continetur. In obtusangulis igitur triangulis, quadratum quod à latere obtusum angulum subtendente fit, majus est quam quadrata quæ fiunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum quæ sunt circa obtusum



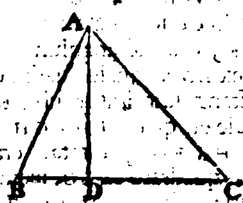
sum

sum angulum, in quod protractum perpendicularis cadit, & linea assumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtusum. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XIII. THEOR.

In acutangulis triangulis, quod à latere acutum angulum subtendente fit quadratum minus est quam quadrata quæ fiunt lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & linea à perpendiculari intus assumpta ad angulum acutum.

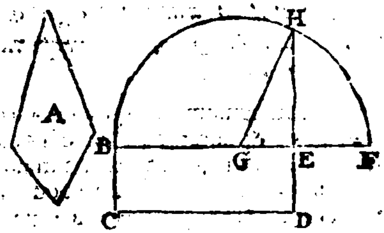
Sit acutangulum triangulum A B C acutum habens angulum ad B: & ducatur à puncto A [a] ad B C perpendicularis A D. [a 12. primi.] dico quadratum quod fit ex A C minus esse quam quadrata quæ ex C B B A fiunt, rectangulo quod bis sub C B B D continetur. Quoniam enim recta linea C B secta est utcunque in D, erunt quadrata ex C B B D æqualia [b], [b 7. hujus.] & rectangulo quod bis sub C B B D continetur, & quadrato ex D C. commune apponatur ex A D quadratum. quadrata igitur ex C B B D D A æqualia sunt, & rectangulo bis sub C B B D contento, & quadratis ex A D D C. sed quadratis ex B D D A æquale est [c] ex A B quadratum; rectus enim angulus est qui ad D. quadratis vero ex A D D C æquale [c] est quadratum ex A C. quadrata [c 47 primi.] igitur ex C B B A sunt æqualia quadrato ex A C, & ei quod bis sub C B B D continetur rectangulo. quare solum quadratum ex A C minus est quam quadrata ex C B B A, rectangulo quod bis sub C B B D continetur. In acutangulis igitur triangulis quadratum quod à latere acutum angulum subtendente fit, minus est quam quadrata quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & linea à perpendiculari intus assumpta ad angulum acutum. Quod demonstrare oportebat.



PROP. XIV. PROBL.

Dato rectilineo æquale quadratum constituere.

Sit datum rectilineum A. oportet ipsi A rectilineo æquale
a 45. primi. quadratum constituere. Constituatur [a] rectilineo A æquale parallelogrammum rectangulum BCDE. si igitur BE est æqualis ED, factum jam erit quod proponebatur, etenim rectilineo A æquale quadratum constitutum est BD: sin minus, una ipsarum BE ED major est. sit BE major; & producatur ad F, ponaturque ipsi ED æqualis EF, deinde secta FB bi-
b 10. primi. fariam [b] in G: centro quidem G, intervallo autem unius ipsarum GB GF semicirculus describatur BHF; producaturque DE in H, & GH ducatur. Quoniam igitur recta linea BF secta est in partes æquales ad G, & inæquales ad E; erit rectangulum sub BE EF, una cum quadrato quod
c hujus. fit ex EG [c], æquale quadrato ex GF. est autem GF æqualis GH. rectangulum igitur sub BE EF una cum quadrato ex GE, æ-
d 47. primi. quale est quadrato ex GH. sed quadrato ex GH æqualia [d] sunt ex HE EG quadrata. ergo rectangulum sub BE EF una cum quadrato ex EG, æquale est quadratis ex HE EG. commune auferatur ex EG quadratum. reliquum igitur rectangulum sub BE EF est æquale quadrato ex EH. sed rectangulum sub BE EF est ipsum BD parallelogrammum, quoniam EF est æqualis ED. ergo BD parallelogrammum quadrato ex EH est æquale. parallelogrammum autem BD est æquale rectilineo A. rectilineum igitur A quadrato ex EH descripto æquale erit. Quare dato rectilineo A æquale quadratum constitutum est, quod videlicet ex ipsa EH describitur. Quod facere oportebat.



EUCLIDIS

EUCLIDIS ELEMENTORUM.

LIBER TERTIUS.

DIFFINITIONES.

I.

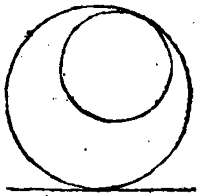
ÆQuales circuli ſunt quorum diametri ſunt æquales : vel quorum quæ ex centris ſunt æquales.

II.

Recta linea circulum contingere dicitur, quæ contingens circulum, & producta ipſum non ſecat.

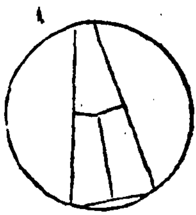
III.

Circuli contingere ſe dicuntur, qui contingentes, ſe ipſos non ſecant.



IV.

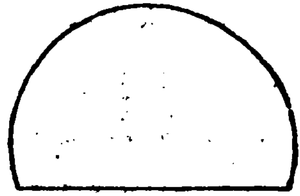
In circulo æqualiter diſtare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipſas perpendiculares ductæ ſunt æquales.



V.

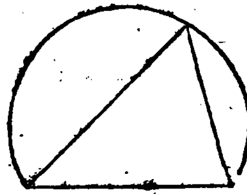
Magis autem diſtare à centro dicitur ea in quam major perpendicularis cadit.

VI.



Segmentum circuli est figura quæ recta linea, & circuli circumferentia continetur.

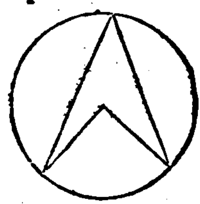
VII.



Segmenti autem angulus est, qui recta linea, & circuli circumferentia comprehenditur.

VIII.

In segmento angulus est, quando in circumferentia segmenti sumatur aliquod punctum, atque ab ipso ad terminos lineæ ejus quæ basis est segmenti rectæ lineæ ducantur, angulus ductis lineis contentus.



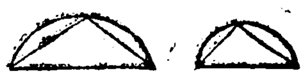
IX.

Quando autem continentes angulum rectæ lineæ assumunt circumferentiam, in illa consistere angulus dicitur.

X.

Sector circuli est, quando angulus ad centrum constiterit, figura contenta rectis lineis angulum comprehendentibus, & circumferentia ab ipsis assumpta.

XI.



Similia circulorum segmenta sunt, quæ angulos suscipiunt æquales, vel in quibus anguli æquales consistunt.

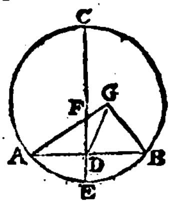
PROP.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Dati circuli centrum invenire.

Sit datus circulus A B C. oportet circuli A B C centrum invenire. Ducatur in ipso quædam recta linea A B utcunque, & in puncto D bifariam [a] secetur. à puncto autem D ipsi A B ad rectos angulos [b] ducta D C in E producatur; & secetur C E bifariam [a] in F. dico punctum F circuli A B C centrũ esse. Non enim, sed si fieri potest, sit G centrum, & G A G D G B ducantur. itaque quoniam D A est æqualis D B, communis autem D G, erunt duæ A D D G duabus G D D B æquales, altera alteri: & basis G A æqualis [c] est basi G B; sunt enim ex centro G. angulus igitur A D G angulo G D B est [d] æqualis. cum autem recta linea super rectam lineam insistens, angulos qui deinceps sunt, æquales inter se fecerit, erectus est uterque æqualium angulorum. ergo angulus G D B est rectus. sed & rectus F D B. æqualis igitur est angulus F D B angulo G D B, major minori, quod fieri non potest. quare G non est circuli A B C centrum. similiter ostendemus neque aliud esse, præter ipsum F. ergo F centrum est circuli A B C. Quod invenire oportebat.

a 10 primi.
b 11. primi.
c Diffin. 15. primi.
d 8. primi.
e Diffin. 10. primi.

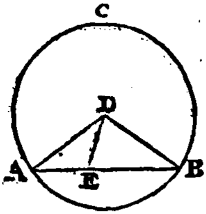


Cor. Si in circulo quævis recta linea, lineam quandam bifariam & ad angulos rectos secet, in secante erit centrum circuli.

PROP. II. THEOR.

Si in circumferentia circuli duo quævis puncta sumantur, quæ ipsa conjungit recta linea intra circulum cadet.

Sit circulus A B C; in circumferentia ipsius sumantur duo quævis puncta A B. dico rectam lineam quæ à puncto A ad B ducitur, intra circulum cadere. sumatur in recta A B punctum quodvis E, jungantur D A D E D B. Quoniam D A est æqualis D B, erit [a] angulus D A B æqualis angulo D B A, & quoniam trianguli D A E latus A producitur erit [b] angulus D E B angulo D A E major, angulus autem D A E æqualis est angulo D B E, ergo D E B angulus angulo D B E



a 5. primi.
b 16. primi.

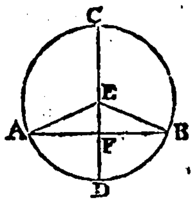
est major. sed majori angulo majus latus subtenditur. major igitur est D B ipsa D E. sed D B ad circumferentiam tantum pertingit. ergo D E non eo usque protenditur. adeoque punctum F cadet intra circulum. Si igitur in circumferentia &c. Quod oportebat demonstrare.

Cor. Hinc si recta circulum tangit, in unico puncto eum tangit.

PROP. III. THEOR.

Si in circulo recta linea per centrum ducta, rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam secet, & ad angulos rectos ipsam secabit. quod si ad angulos rectos ipsam secet, & bifariam secabit.

Sit circulus A B C, & in ipso recta linea per centrum ducta C D rectam lineam quandam A B non ductam per centrum bifariam secet in puncto F. dico ad angulos rectos ipsam secare. sumatur enim circuli



a 1. hujus. A B C centrum a, quod sit E, & E A E B jungantur. Quoniam igitur A F est æqualis F B, communis autem F E, duæ duabus æquales sunt, & basis E A basi E B est æqualis. ergo & angulus A F E angulo B F E æqualis

b 8. primi. b erit. cum autem recta linea super rectam insistens angu-

c Diffin 10. primi. los, qui deinceps sunt, æquales inter se fecerit, rectus est c uterque æqualium angulorum. uterque igitur A F E B F E est rectus. quare recta linea C D per centrum ducta rectam lineam A B non ductam per centrum bifariam secans, & ad angulos rectos ipsam secabit. Si vero C D secet A B ad rectos angulos, dico & bifariam ipsam secare, hoc est A F ipsi F B æqualem esse. iisdem enim constructis, quoniam E A, quæ

d 5. primi. ex centro est æqualis E B, & angulus E A F angulo d E B F æqualis erit, est autem & A F E rectus æqualis recto B F E. duo igitur triangula E A F E B F duos angulos duobus angulis æquales habent, unumque latus uni lateri æquale E F, commune scilicet utrisque, quod uni angulorum æqualium subtenditur. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia

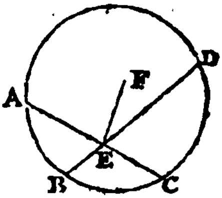
e 26. primi. e habebunt. atque erit A F ipsi F B æqualis. Si igitur in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam secet, & ad angulos rectos ipsam secabit. quod si ipsam secet ad rectos angulos, & bifariam secabit. Quod oportebat demonstrare.

PROP.

PROP. IV. THEOR.

Si in circulo duæ rectæ lineæ ſe invicem ſecent non ductæ per centrum, ſeſe bifariam non ſecabunt.

Sit circulus ABCD; & in ipſo duæ rectæ lineæ AC BD ſe invicem ſecent in puncto E, non ductæ per centrum. dico eas ſeſe bifariam non ſecare. ſi enim fieri poteſt ſecent ſeſe bifariam, ita ut AE ſit æqualis EC, & BE ipſi ED: ſumaturque [a] centrum ABCD circuli, quod ſit E, & EF jungatur. quoniam igitur recta linea FE per centrum ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum bifariam ſecat, & ad rectos angulos ipſam ſecabit [b]. quare rectus eſt FEA angulus. rurſus quoniam recta linea FE rectam lineam quandam BD non ductam per centrum bifariam ſecat, & ad angulos rectos ipſam [b] ſecabit. rectus igitur angulus eſt FEB. oſtenſus autem eſt rectus & FEA. ergo FEA angulus ipſi FEB æqualis erit, minor majori, quod fieri non poteſt. non igitur AC BD ſeſe bifariam ſecant. Quare ſi in circulo duæ rectæ lineæ ſe invicem ſecent non ductæ per centrum, ſeſe bifariam non ſecabunt. Quod oſtendere oportebat.



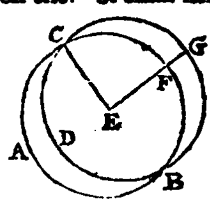
a 1. hujus.

b 3. hujus.

PROP. V. THEOR.

Si duo circuli ſe invicem ſecent, non erit ipſorum idem centrum.

Duo enim circuli ſe invicem ſecent ABC CDG in punctis B C. dico ipſorum idem centrum non eſſe. Si enim fieri poteſt, ſit centrum E; jungaturque EC, & EFG utcunque ducatur. Quoniam E centrum eſt circuli ABC erit CE ipſi EF æqualis. rurſus quoniam E centrum eſt CDG circuli, æqualis eſt CE ipſi EG. ſed oſtenſa eſt CE æqualis EF. ergo EF ipſi EG æqualis erit, minor majori, quod fieri non poteſt. non igitur punctum E centrum eſt circulorum ABC CDG. Quare ſi duo circuli ſe invicem ſecent, non erit ipſorum idem centrum. Quod oſtendendum fuit.

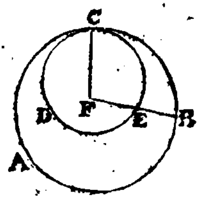


PROP. VI.

PROP. VI. THEOR.

Si duo circuli ſeſe intra contingant, ipſorum idem centrum non erit.

Duo enim circuli A B C C D E contingant ſeſe intra in puncto C. dico ipſorum non eſſe idem centrum. ſi enim fieri poteſt ſit F; jungaturque F C, & F E B utcunque ducatur. Quoniam igitur F centrum eſt circuli A B C, æqualis eſt C F ipſi F B. rurſus quoniam F centrum eſt circuli C D E, erit C F æqualis F E. oſtenſa autem eſt C F æqualis F B. ergo & F E ipſi F B eſt æqualis, minor majori, quod fieri non poteſt. non igitur F punctum centrum eſt circulorum A B C C D E. Quare ſi duo circuli ſeſe intra contingant, ipſorum idem centrum non erit. Quod demonſtrare oportebat.

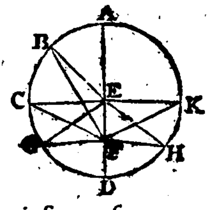


PROP. VII. THEOR.

Si in circuli diametro aliquod punctum ſumatur, quod non ſit centrum circuli, & ab eo in circulum cadant quævis rectæ lineæ; maxima quidem erit in qua centrum: minima vero reliqua: aliarum autem propinquior ei quæ per centrum tranſit, ſemper remotiore major eſt. at duæ tantum æquales ab eodem puncto in circulum cadent ad utraſque partes minimæ.

Sit circulus A B C D, cujus diameter A D: & in ipſa A D ſumatur aliquod punctum F, quod non ſit centrum circuli. Sit autem circuli centrum E: & à puncto F in circulum A B C D cadant quædam rectæ lineæ F B F C F G. dico F A maximam eſſe, & F D minimam: aliarum vero, F B quidem majorem quam F C, & F C majorem quam F G. jungantur enim B E C E G E. Et quoniam omnis trianguli duo latera ᵃ reliquo ſunt majora; erunt B E E F majores quàm B F. eſt autem A E æqualis E B. ergo B E E F ipſi A F ſunt æquales. major igitur eſt A F quàm F B. rurſus quoniam B E eſt æqualis E C, communis autem F E, duæ B E E F duabus C E E F æquales

ᵃ 20. primi.



quales sunt. sed BEF angulus major est angulo CEF: basis igitur BF basi FC est [b] major. eadem ratione & CF major est quam FG. rursus quoniam GF FE majores [a] sunt quam EG, æqualis autem GE ipsi ED; erunt GF FE majores quam ED. communis auferatur EF. ergo reliqua GF major est quam reliqua FD. maxima igitur est FA, & FD minima: major vero BF quam FC, & FC quam FG major. dico & à puncto F duas tantum rectas lineas æquales cadere in circulum ABCD ad utrasque partes minimæ FD. constituatur [c] enim ad lineam EF, atque ad datum in ea punctum E, angulo GEF æqualis angulus FEH: & FH jungatur. quoniam igitur GE est æqualis EH, communis autem EF, duæ GE EF duabus HE EF æquales sunt: & angulus GEF est æqualis angulo HEF. basis igitur FG basi FH æqualis [d] erit. dico à puncto F in circulum non cadere aliam ipsi FG æqualem. si enim fieri potest, cadat FK. & quoniam FK est æqualis FG, estque ipsi FG æqualis FH; erit & FK ipsi FH æqualis, videlicet propinquior ei, quæ per centrum transit, æqualis remotiori, quod fieri non potest. Si igitur in circuli diametro aliquod punctum sumatur quod non sit centrum circuli, &c. Quod demonstrare oportebat.

[b] 24. primi.
[a] 20. primi.
[c] 23. primi.
[d] 4. primi.

PROP. VIII. THEOR.

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, atque ab eo ad circulum ducantur quædam rectæ lineæ, quarum una per centrum transeat, aliæ vero utcunque: earum quidem quæ in concavam circumferentiam cadunt, maxima est quæ per centrum transit; aliarum autem propinquior ei quæ per centrum, semper remotiore major est. at earum quæ in convexam circumferentiam cadunt minima est quæ inter punctum, & diametrum interjicitur; aliarum vero quæ propinquior minimæ semper remotiore est minor. duæ autem tantum æquales à puncto in circulum cadunt ad utrasque partes minimæ.

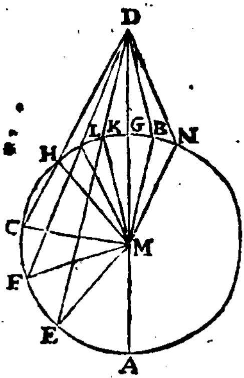
Sit circulus ABC, & extra circulum sumatur aliquod punctum D: ab eo autem in circulum ducantur rectæ lineæ quædam DA DE DF DC: sitque DA per centrum. dico earum quidem quæ in concavam AEFC circumferentiam cadunt, maximam esse DA quæ per centrum transit; & minimam quæ inter punctum D, & diametrum AG interjicitur, videlicet DG: majorem autem DE quam DF; & DF majorem

majorem quam DC: earum vero quæ in convexam circumferentiam HLKG cadunt, quæ propinquior est minimæ DG semper remotiore esse minorem; hoc est DK minorem

a 1. hujus quam DL & DL minorem quam DH. sumatur a enim centrum circuli ABC, quod sit M, & jungantur ME MF MC MH ML. & quoniam AM est æqualis ME, communis apponatur MD. ergo AD est

b 20 primi. æqualis ipsis EM MD. sed EM MD sunt majores b quam ED. ergo & AD quam ED est major. rursus quoniam æqualis est ME ipsi MF, communis apponatur MD. erunt EM MD ipsi MF MD æquales; at angulus EMD

c 24 primi. major est angulo FMD. basis igitur ED basi FD major c erit. similiter demonstrabimus, & FD majorem esse quam CD. ergo maxima est DA; major autem DE quam DF, & DF quam DC major. præterea quoniam



d Axiom. 4. MK KD sunt majores b quam MD, & MG est æqualis MK; erit reliqua KD quam reliqua d GD major. quare GD minor quam KD, & idcirco GD minima est. & quoniam trian-

e 21. primi. guli MLD in uno latere MD, duæ rectæ lineæ MK KD intra constituuntur, erunt e MK KD minores ipsis ML LD, quarum MK est æqualis ML. reliqua igitur DK minor est quàm reliqua DL. similiter ostendemus, & DL quam DH minorem esse. ergo DG minima est. minor vero DK quam DL, & DL minor quàm DH. dico etiam duas tantum æquales à puncto D in circulum cadere ad utrasque minimæ par-

f 23. primi. tes. constituatur ad rectam lineam MD, ad datumque in ea punctum M, angulo KMD æqualis f angulus DMB, & DB jungatur. itaque quoniam MK est æqualis MB, communis autem MD, duæ KM MD duabus BM MD æquales sunt, al-

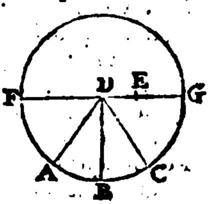
g 4 primi. tera alteri, & angulus KMD æqualis angulo BMD, basis igitur DK basi DB est æqualis g. dico à puncto D aliam ipsi DK æqualem in circulum non cadere. si enim fieri potest, cadat DN. & quoniam DK est æqualis DN, & DK ipsi DB est æqualis; erit & DB æqualis DN, propinquior scilicet minimæ æqualis remotiori, quod fieri non posse ostensum est. Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, &c. quod ostendere oportebat.

PROP.

PROP. IX. THEOR.

Si intra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures quàm duæ rectæ lineæ æquales; punctum quod sumitur circuli centrum erit.

Sumatur enim intra circulum ABC punctum aliquod D: atque à puncto D in circulum ABC cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales DA DB DC: dico punctum D, quod sumitur, circuli ABC esse centrum. Non enim sed; si, fieri potest, sit E centrum, & juncta DE in FG producatur, ergo FG diameter est ABC circuli. itaq; quoniam in FG diametro circuli ABC sumptum est aliquod punctum D quod non



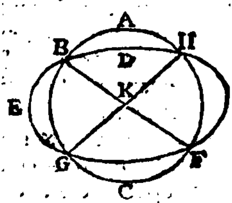
est centrum circuli, maxima quidem erit DG, major [a] autem DC quam DB, & DB quam DA. sed & æquales [b], quod fieri non potest. non igitur E centrum est circuli ABC. similiter ostendemus neque aliud punctum centrum esse præter ipsum D. ergo D circuli BC centrum erit. Quod oportebat demonstrare.

[a] 7. hujus.
[b] ex hyp.

PROP. X. THEOR.

Circulus circulum in pluribus, quam duobus punctis non secat.

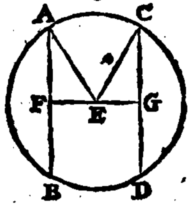
Si enim fieri potest circulus ABC circulum DEF secet in pluribus punctis, quam duobus; nempe in B G F, & circuli ABC centrum sumatur, quod sit K, & KB KG KF jungantur. Quoniam igitur intra circulum DEF sumptum est aliquod punctum K, à quo in circulum DEF incidant plures, quam duæ rectæ lineæ KB KG KF æquales, erit punctum K circuli DEF centrum [a]. est autem, & circuli ABC centrum



[b] K. duorum igitur circulorum, qui se se secant, idem erit centrum, quod fieri non potest. Quare circulus circulum in pluribus,

[a] 9. hujus.
[b] Ex hyp.

ABDC centrum quod sit E, & ab ipso ad AB CD perpendiculares ducantur EF EG, & AE EC jungantur. Quoniam igitur recta linea quædam per centrum ducta EF rectam lineam quandam AB non ductam per centrum ad rectos angulos secat, & bifariam ipsam secabit[a]. quare AF est æqualis FB, ideoque AB ipsius AF dupla. eadem ratione, & CD dupla est CG. atque est AB ipsi CD æqualis. æqualis igitur & AF ipsi CG. & quoniam AE est æqualis EC, erit, & quadratum ex AE quadrato ex EC æquale. sed quadrato quidem ex AE æqualia sunt ex AF FE quadrata[b]; rectus enim angulus est ad F: quadrato autem ex EC æqualia sunt quadrata ex EG GC, cum angulus ad G sit rectus. quadrata igitur ex AF FE æqualia sunt quadratis ex CG GE, quorum quadratum ex AF quadrato ex EG æquale, etenim æqualis est AF ipsi CG. reliquum igitur quod fit ex FE quadratum æquale est reliquo quod ex EG; ac propterea FE ipsi EG est æqualis. in circulo autem æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipsas perpendiculares ductæ æquales[c] sunt. ergo AB CD à centro æqualiter distant. Sed si AB CD æqualiter distent à centro, hoc est, æqualis sit FE ipsi EG; dico AB ipsi CD æqualem esse. iisdem enim constructis, similiter ostendemus AB duplam esse ipsius AF, & CD duplam ipsius CG. & quoniam æqualis est AE ipsi EC, erit & ex AE quadratum quadrato ex EC æquale. sed quadrato quidem ex AE æqualia[b] sunt quadrata ex EF FA: quadrato autem ex EC æqualia[b] quadrata ex EG GC. quadrata igitur ex EF FA quadratis ex EG GC æqualia sunt. quorum quadratum ex EG æquale est quadrato ex EF, est enim EG ipsi EF æqualis: reliquum igitur ex AF quadratum æquale est reliquo ex CG. ergo AF ipsi CG est æqualis. atque est AB ipsius AF dupla, & CD dupla ipsius CG. In circulo igitur æquales rectæ lineæ æqualiter à centro distant, & quæ æqualiter à centro distant, inter se sunt æquales. Quod oportebat demonstrare.



a 3. hujus.

b 47. primi.

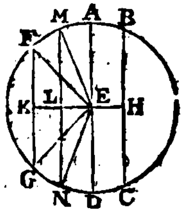
c 4 diff. hujus.

PROP.

PROP. XV. THEOR.

In circulo maxima quidem est diameter: aliarum vero semper propinquior ei quæ per centrum transit, remotiore major est.

Sit circulus ABCD, cujus diameter AD, centrum E; & propinquior quidem diametro AD sit BC; remotior vero FG. dico AD maximam esse, & BC majorem quàm FG. Ducantur enim à centro E ad BC FG perpendiculares EH EK. & quoniam BC propinquior est ei quæ per centrum transit, remotior autem FG; erit EK quam EH major. ponatur ipsi EH æqualis EL, & per L ipsi EK ad rectos angulos ducta LM in N producatur, & jungantur EM EN EF EG. quoniam igitur EH est æqualis EL, erit & BC ipsi MN æqualis [a]. rursus quoniam



æqualis est AE ipsi EM, & DE ipsi EN, erit & AD ipsis ME EN æqualis. sed ME EN [b] majores sunt quam MN; ergo & AD major est quam MN: & MN est æqualis BC, erit igitur AD quam BC major. quod cum duæ EM EN duabus FE EG æquales sint, angulusque MEN major angulo FEG, & basis MN basi FG major [c] erit. ostensa autem est MN æqualis BC ergo & BC quam FG est major. maxima igitur est AD diameter, & BC major quam FG. Quare in circulo maxima est diameter, aliarum vero semper propinquior ei quæ per centrum transit remotiore est major. Quod demonstrare oportebat.

a 14. hujus.
b 20. primi.
c 24. primi.

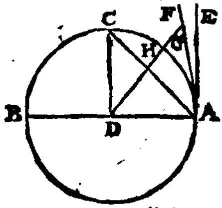
*PROP. XVI. THEOR.

Quæ diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur, cadit extra circulum: & in locum qui inter rectam lineam, & circumferentiam interjicitur altera recta linea non cadit: & semicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo major est; reliquus autem minor.

Sit circulus ABC circa centrum D, & diametrum AB. dico rectam lineam, quæ à puncto A ipsi AB ad rectos angulos ducitur extra circulum cadere. non enim; sed, si fieri

 potest,

potest, cadat intus, ut AC, & DC jungatur. itaque quoniam æqualis est DA ipsi DC, erit & angulus DAC angulo ACD æqualis [a]. rectus autem est DAC; ergo & ACD est rectus; ac propterea anguli DAC ACD duobus rectis æquales sunt. quod fieri non potest [b]. non igitur à puncto A ipsi BA ad rectos angulos ducta cadet intra circulum. similiter ostendemus neque in circumferentiam cadere. extra igitur cadat necesse est. cadat ut AE. dico in locum qui inter rectam lineam AE & circumferentiam CHA interjicitur, alteram rectam lineam non cadere. si enim fieri potest, cadat ut FA, & à puncto D ad FA perpendicularis [c] ducatur DG. & quoniam rectus est angulus AGD, minor autem recto DAG, erit DA quàm DG major [d]. æqualis autem est DA ipsi DH. major igitur est DH ipsa DG, minor majore, quod fieri non potest. non igitur in locum qui inter rectam lineam & circumferentiam interjicitur, altera recta linea cadet. dico præterea angulum semicirculi, qui recta linea BA, & circumferentia CHA continetur, omni angulo acuto rectilineo majorem esse; reliquum vero contentum circumferentia CHA, & recta linea AE omni angulo rectilineo esse minorem. si enim est aliquis angulus rectilineus acutus major quidem contento recta linea BA, & CHA circumferentia, aut aliquis minor contento CHA circumferentia, & recta linea AE, in locum qui inter circumferentiam CHA, & rectam lineam AE interjicitur, cadet aliqua recta linea quæ faciet angulum majorem quidem contento recta linea BA & CHA circumferentia, qui scilicet rectis lineis continetur, minorem vero contento circumferentia CHA, & AE recta linea, non cadit autem [e]: non igitur erit angulus acutus qui rectis lineis continetur, major angulo contento recta linea BA, & CHA circumferentia, neque minor contento circumferentia CHA, & AE recta linea.



[a] 5. primi.
[b] 17. primi.
[c] 12 primi.
[d] 19. primi.
[e] ex prius demonstratis.

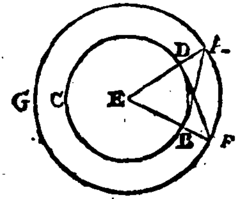
Cor. Ex hoc manifestum est rectam lineam quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, circulum contingere, & rectam lineam contingere circulum in uno tantum puncto quoniam quæ occurrit in duobus punctis intra ipsum cadit, ut ostensum est.

PROP.

PROP. XVII. PROBL.

A dato puncto rectam lineam ducere quæ datum circulum contingat.

Sit datum quidem punctum A, datus autem circulus BCD. oportet à puncto A rectam lineam ducere, quæ circulum BCD contingat. sumatur enim centrum circuli E; & juncta AE, centro quidem E, intervallo autem EA circulus AFG describatur: & à puncto D ipsi EA ad rectos angulos [a] ducatur DF: junganturque EBF AB. dico à puncto A ductam esse AB quæ circulum BCD contingit. quoniam enim E centrum est circulorum BCD, AFG, erit EA æqualis EF, & ED ipsi EB. duæ igitur AE EB duabus FE ED æquales sunt, & angulum communem continent qui est ad E. ergo basis DF basi AB est [b] æqualis, triangulumque DEF æquale triangulo EBA, & reliqui anguli reliquis angulis. æqualis igitur est angulus EBA angulo EDF. & EDF rectus est. quare & rectus EBA: atque est EB ex centro. quæ autem diametro circuli ab extremitate ad rectos angulos ducitur circulum contingit [c]. ergo AB contingit circulum. A dato igitur puncto A ducta est recta linea AB quæ circulum BCD contingit. Quod facere oportebat.



a 11. primi.

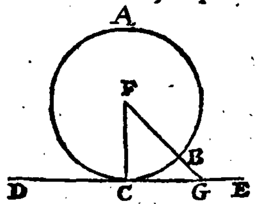
b 4. primi.

c 16. hujus.

PROP. XVIII. THEOR.

Si circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit.

Circulum enim ABC contingat quædam recta linea DE in puncto C: & circuli ABC centrum sumatur F, à quo ad C ducatur FC. dico FC ad ipsam DE perpendicularem esse. si enim non ita sit, ducatur à puncto F ad DE perpendicularis [a] FG. quoniam igitur angulus FGC rectus est, erit GCF acutus [b], ac propterea FGC angulus major angulo FCG. majorem autem angulum majus latus [c] subtendit. major igitur est FC quàm FG. æqualis autem FC ipsi FB. ergo



a 12. primi.

b 32. primi.

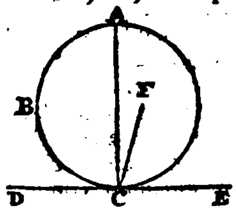
c 19. primi.

ergo FB ipsa FG est major, minor majore, quod fieri non potest. non igitur FG est perpendicularis ad DE. similiter ostendemus neque aliam quampiam esse præter ipsam FC. ergo FC ad DE est perpendicularis. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XIX. THEOR.

Si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur: in ea circuli centrum erit.

Circulum enim ABC contingat quædam recta linea DE in C, & à puncto C ipsi DE ad rectos angulos ducatur CA. dico in ipsa AC circuli centrum esse. non enim; sed, si fieri potest, sit F centrum, & jungatur CF. quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta linea DE, & à centro ad contactum ducta est FC; erit FC ad ipsam DE perpendicularis [a]. rectus igitur angulus est FCE. est autem & ACE rectus [b]. ergo FCE angulus est æqualis angulo ACE, minor majori, quod fieri non potest. non igitur F centrum est ABC circuli. similiter ostendemus neque aliud aliquod esse præterquam in ipsa AC. Quare si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in ea circuli erit centrum. Quod demonstrare oportebat.



a 18. hujus.

b Ex hyp.

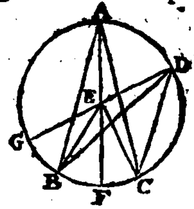
PROP. XX. THEOR.

In circulo angulus qui ad centrum duplex est ejus qui ad circumferentiam est, quando circumferentiam eandem pro basi habeant.

Sit circulus ABC, ad cujus centrum quidem angulus sit BEC, ad circumferentiam vero BAC, & eandem circumferentiam BC pro basi habeant. dico BEC angulum anguli BAC duplum esse. jungatur enim AE, & ad F producatur. itaque quoniam EA est æqualis EB, erit & angulus EAB angulo EBA [a] æqualis. anguli igitur EAB, EBA duplices sunt ipsius

a 5. primi.

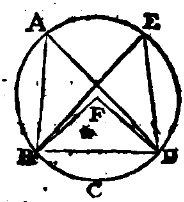
ipsius anguli E A B; sed angulus B E F est æqualis *b* angulis E A B E B A; ergo B E F angulus anguli E A B est duplex. eadem ratione & angulus F E C duplex est ipsius E A C. totus igitur B E C totius B A C duplex erit. rursus inflectatur, & sit alter angulus B D C, junctaque D E ad G producatur. similiter ostendemus angulum G E C anguli E D C duplum esse; quorum G E B duplus est ipsius E D B. ergo reliquus B E C reliqui B D C est duplus. In circulo igitur angulus qui ad centrum duplex est ejus qui ad circumferentiam, quando circumferentiam eandem pro basi habeant. Quod oportebat demonstrare. *b* 32. primi.



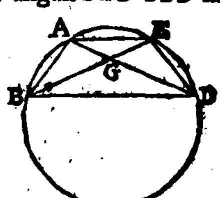
PROP. XXI. THEOR.

In circulo qui in eodem segmento sunt anguli inter se æquales sunt.

Sit circulus A B C D E, & in eodem segmento B A E D anguli sint B A D B E D. dico eos inter se æquales esse. sumatur enim circuli A B C D E centrum quod sit F: junganturque B F F D. Quoniam angulus quidem B F D est ad centrum, angulus vero B A D ad circumferentiam, & circumferentiam eandem B C D pro basi habent; erit B F D angulus *a* anguli B A D duplus. eadem ratione angulus B F D duplus est etiam anguli B E D. ergo angulus B A D angulo B E D æqualis erit. si anguli B A D B E D sunt in segmento minore semicirculo, ducatur A E, eruntque omnes anguli trianguli A B G æquales *b* omnibus angulis trianguli D E G; & anguli A B E A D E sunt æquales per hactenus demonstrata, & anguli A G B D G E sunt etiam æquales *c*, ad verticem enim sunt: quare & reliquus B A G reliquo G E D æqualis erit. In circulo igitur qui in eodem segmento sunt anguli inter se æquales sunt. Quod oportebat demonstrare.



a 20. hujus.



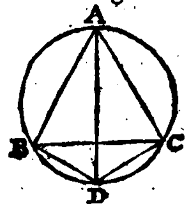
b 32. primi.

c 15 primi.

PROP. XXII. THEOR.

Quadrilaterorum quæ in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis æquales sunt.

Sit circulus A B D C, & in ipso quadrilaterum A B C D. dico angulos ipsius oppositos duobus rectis æquales esse. Jungantur A D B C: quoniam igitur omnis trianguli tres anguli duo-
a 32. primi. bus rectis sunt æquales [a], erunt trianguli A B C tres anguli C A B A B C B C A æquales duobus rectis. sed angulus A B C est
b 21. hujus. æqualis [b] angulo A D C, in eodem enim sunt segmento A B D C. & angulus A C B æqualis [b] ipsi A D B, quod sint in eodem A C D B segmento: totus igitur angulus B D C angulis A B C A C B æqualis est. communis apponatur B A C angulus; erunt

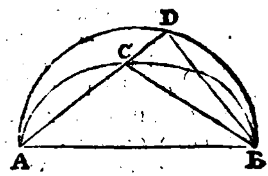


anguli B A C A B C A C B, angulis B A C B D C æquales. sed B A C A B C A C B sunt æquales [a] duobus rectis. ergo & anguli B A C B D C duobus rectis æquales erunt. similiter ostendemus angulos quoque A B D A C D duobus rectis esse æquales. Quadrilaterorum igitur quæ in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis æquales sunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXIII. THEOR.

Super eadem recta linea duo circulorum segmenta similia, & inæqualia ex eadem parte non constituentur.

Si enim fieri potest, super eadem recta linea A B duo circulorum segmenta similia, & inæqualia constituantur ex eadem parte A C B A D B; ducaturque A C D, & C B B D jungantur. itaque quoniam segmentum A C B simile est segmento A D B, similia autem circulorum segmenta sunt quæ
a Diffin. 11. hujus. angulos suscipiunt [a] æquales; erit A C B angulus æqualis an-
b 16. primi. gulo A D B, exterior interiori, quod fieri non potest [b]. Non igitur super eadem recta linea, duo circulorum segmenta similia, & inæqualia ex eadem parte constituentur. Quod demonstrare oportebat.

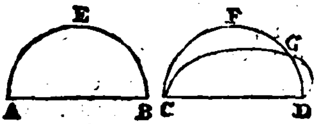


PROP.

PROP. XXIV. THEOR.

Super æqualibus rectis lineis similia circulorum segmenta inter se æqualia sunt.

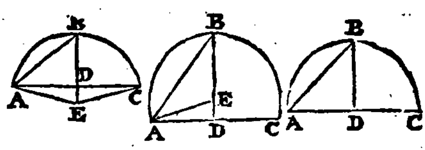
Sint enim super æqualibus rectis lineis A B C D similia circulorum segmenta A E B C F D. dico segmentum A E B segmento C F D æquale esse. applicato enim A E B segmento segmento C F D, & posito puncto quidem A in C, recta vero linea A B in C D; congruet & B punctum puncto D, propterea quod A B ipsi C D sit æqualis. congruente autem recta linea A B rectæ C D; congruet & A E B segmentum segmento C F D. si enim A B congruet ipsi C D, segmentum autem A E B segmento C F D non congruet, sed permutabitur ut C G D, circulus circulum in pluribus quàm duobus punctis secabit. etenim circulus C G D circulum C F D secat in pluribus punctis quàm duobus, videlicet in punctis C G D, quod fieri non ª potest. non igitur congruente recta linea A B rectæ C D, non congruet & A E B segmentum segmento C F D. quare congruet, & ipsi æquale erit. Super æqualibus igitur rectis lineis similia circulorum segmenta inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare.



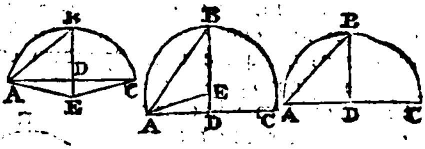
PROP. XXV. PROBL.

Circuli segmento dato describere circulum cujus est segmentum.

Sit datum circuli segmentum A B C. oportet describere circulum cujus A B C est segmentum. Secetur A C bifariam ª in D: & à puncto D ipsi A C ad rectos ª 10. primi.
angulos ducatur ᵇ D B, & A B jungatur. ᵇ 11. primi.
vel igitur angulus A B D major est angulo B A D, vel minor, vel ipsi æqualis. sit primum major, & ad rectam lineam B A, atque ad datum in ea punctum A constituatur angulus B A E æqualis ᶜ angulo A B D; & D B ad E producatur, ᶜ 23. primi.
jungaturque E C. quoniam igitur angulus A B E est æqualis angulo



a 6. primi. angulo BAE, a erit & BE recta linea ipsi EA æqualis. & quoniam AD est æqualis DC, communis autem DE, duæ AD DE duabus CD DE æquales sunt, altera alteri; & angulus ADE æqualis angulo CDE, rectus enim uterque est. ergo & basis AE basi EC est æqualis. sed ostensa est AE æqualis EB. quare & BE ipsi EC est æqualis, ac propterea tres rectæ lineæ AE EB EC inter se æquales sunt.

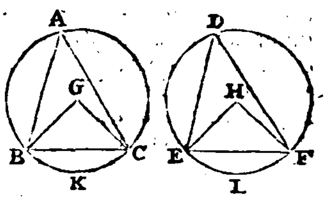


centro igitur E intervallo autem una ipsarum AE EB EC circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, & circulus descriptus erit. quare circuli segmento dato descriptus est circulus cujus segmentum est. sed & illud constat, segmentum ABC semicirculo minus esse; propterea quod centrum ipsius extra cadit. similiter, & si angulus ABD sit æqualis angulo BAD, facta AD æquali utrique ipsarum BD DC, erunt tres rectæ lineæ AD DB DC inter se æquales, atque erit D circuli descripti centrum, & segmentum ABC semicirculus. si vero angulus ABD minor sit angulo BAD; constituatur ad rectam lineam BA, & ad punctum in ea datum A, angulo ABD æqualis angulus ABE intra segmentum ABC. erit E centrum in ipsa DB, atque erit ABC segmentum semicirculo majus. Circuli igitur segmento dato descriptus est circulus cujus segmentum est. Quod facere oportebat.

PROP. XXVI. THEOR.

In æqualibus circulis æquales anguli æqualibus insistunt circumferentiis, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant.

Sint æquales circuli ABC DEF, & in ipsis æquales anguli ad centra quidem BGC EHF, ad circumferentias vero BAC EDF. dico BKC circumferentiam circumferentiæ ELF æqualem esse. jungantur enim BC EF. Quoniam æquales sunt ABC DEF circuli, erunt & quæ ex centris æquales. duæ igitur BG GC duabus EH HF æquales sunt: & angulus ad G æqualis angulo ad H. ergo & basis



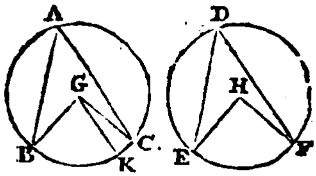
basis BC basi EF est [a] æqualis. rursus quoniam æqualis est angulus ad A angulo ad D, segmentum BAC simile [b] erit segmento EDF: & sunt super æqualibus rectis lineis BC EF. quæ autem super æqualibus rectis lineis similia sunt circulorum segmenta, inter se æqualia [c] sunt. segmentum igitur BAC segmento EDF est æquale. sed & totus ABC circulus æqualis est toti DEF. ergo & reliqua circumferentia BKC reliquæ ELF æqualis erit. In æqualibus igitur circulis æquales anguli æqualibus insistunt circumferentiis, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. Quod oportebat demonstrare.

[a] 4 primi.
[b] diffin. 11.
[c] 24. hujus.

PROP. XXVII. THEOR.

In æqualibus circulis anguli qui æqualibus insistunt circumferentiis inter se æquales sunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant.

In æqualibus enim circulis ABC DEF, æqualibus circumferentiis BC EF insistant anguli ad centra quidem BGC EHF, ad circumferentias vero BAC EDF. dico angulum BGC angulo EHF, & angulum BAC angulo EDF æqualem esse. si quidem igitur angulus BGC æqualis sit angulo EHF, manifestum est angulum quoque BAC angulo EDF esse æqualem. sin minus, unus ipsorum est major. sit



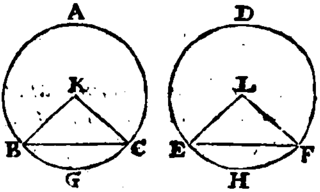
major BGC, & constituatur ad rectam lineam BG, & ad punctum in ipsa G, angulo EHF æqualis [a] angulus BGK. æquales autem anguli æqualibus insistunt [b] circumferentiis, quando ad centra fuerint. ergo circumferentia BK æqualis est circumferentiæ EF. sed circumferentia EF æqualis est ipsi BC. ergo & BK ipsi BC est æqualis, minor majori, quod fieri non potest. non igitur inæqualis est angulus BGC angulo EHF: ergo est æqualis. atque est anguli quidem BGC dimidium angulus qui ad A; anguli vero EHF dimidium qui ad D. angulus igitur qui ad A angulo qui ad D est æqualis. In æqualibus igitur circulis, anguli qui æqualibus insistunt circumferentiis inter se æquales sunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. Quod oportebat demonstrare.

[a] 23. primi.
[b] 26. hujus.

PROP. XXVIII. THEOR.

In æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori.

Sint æquales circuli ABC DEF; & in ipsis æquales rectæ lineæ BC EF, quæ circumferentias quidem BAC EDF majores auferant, circumferentias vero BGC EHF minores. dico circumferentiam BAC majorem majori circumferentiæ EDF, & minorem circumferentiam BGC minori EHF æqualem esse. sumantur enim centra [a] circulorum K L, junganturque BK KC EL LF. Quoniam circuli æquales sunt, erunt & quæ ex centris æquales [b].



a 1. hujus.
b Diffin 1.

duæ igitur BK KC sunt æquales duabus EL LF: & basis BC æqualis est basi EF, ergo angulus BKC angulo ELF est [c] æqualis: æquales autem anguli æqualibus insistunt circumferentiis, quando ad centra fuerint [d]. quare circumferentia BGC æqualis est circumferentiæ EHF. sed & totus ABC circulus toti DEF est æqualis. reliqua igitur circumferentia BAC reliquæ EDF æqualis erit. Ergo in æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori. Quod demonstrare oportebat.

c 8. primi
d 26. hujus.

PROP. XXIX. THEOR.

In æqualibus circulis, æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt.

Vide figur. Prop. præcedentis.
a 1. hujus.
b 27. hujus.
c Diffin. 1.
d 4. primi.

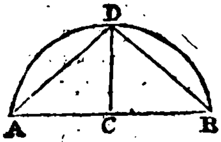
Sint æquales circuli ABC DEF: & in ipsis æquales assumantur circumferentiæ BGC EHF, & BC EF jungantur. dico rectam lineam BC rectæ EF æqualem esse. sumantur enim centra [a] circulorum K L, & jungantur BK KC EL LF. quoniam igitur circumferentia BGC est æqualis circumferentiæ EHF, erit & angulus BKC angulo ELF æqualis [b]. & quoniam circuli ABC DEF sunt æquales, & quæ ex centris æquales erunt [c]. duæ igitur BK KC sunt æquales duabus EL LF; & æquales angulos continent. quare basis BC basi EF est [d] æqualis. In æqualibus igitur circulis æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP.

PROP. XXX. PROBL.

Datam circumferentiam bifariam secare.

Sit data circumferentia ADB. oportet ADB circumferentiam bifariam secare. Jungatur AB, & in C bifariam [a] secetur: à puncto autem C ipsi AB ad rectos angulos ducatur CD. & jungantur AD DB. quoniam igitur AC est æqualis CB, communis autem CD, duæ AC CD duabus BC CD æquales sunt: & angulus ACD æqualis angulo BCD, rectus enim uterque est: ergo basis AD basi DB est [b] æqualis. æquales autem rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, quare circumferentia AD circumferentiæ BD æqualis erit. Data igitur circumferentia bifariam secta est. Quod facere oportebat.



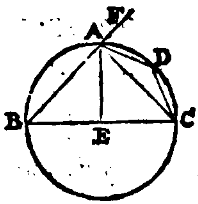
a 10. primi.

b 4. primi. 28. hujus.

PROP. XXXI. THEOR.

In circulo angulus qui in semicirculo rectus est, qui vero in majori segmento minor est recto, & qui in minori major recto; & insuper majoris quidem segmenti angulus recto major est, minoris vero segmenti angulus recto minor.

Sit circulus ABCD cujus diameter BC, centrum autem E; & jungantur BA AC AD DC. dico angulum quidem, qui est in semicirculo BAC rectum esse, qui vero in segmento ABC majore semicirculo, videlicet angulum ABC, minorem esse recto, & qui est in segmento ADC minore semicirculo, hoc est angulum ADC, recto majorem. jungatur AE, & BA ad F producatur. itaque quoniam BE est æqualis EA, erit & angulus EAB, angulo EBA æqualis [a]. rursus quoniam AE est æqualis EC, & angulus ACE angulo CAE æqualis [a] erit. totus igitur angulus BAC est æqualis duobus ABC ACB angulis. est autem, & angulus FAC extra triangulum ABC, duobus ABC ACB æqualis [b]. angulus igitur BAC est æqualis angulo FAC; ac propterea uterque ipsorum rectus [c]. quare in semicirculo BAC angulus BAC rectus est.



a 5 primi.

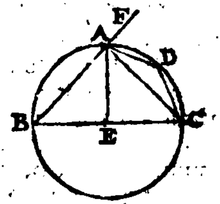
b 32. primi.

c Diffin. 10. primi.

est. & quoniam trianguli ABC duo anguli ABC BAC duobus rectis sunt [d] minores, rectus autem BAC, erit ABC angulus recto minor, atque est in segmento ABC majore semicirculo. quod cum in circulo quadrilaterum sit ABCD, quadrilaterorum vero qui in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis sint [e] æquales: erunt ABC ADC anguli æquales duobus rectis, & angulus ABC minor est recto, reliquus igitur ADC recto major erit, atque est in segmento ADC minore semicirculo. dico præterea majoris segmenti angulum qui continetur ABC circumferentia, & recta linea AC recto majorem esse; angulum vero minoris segmenti, contentum circumferentia ADC, & recta linea AC recto minorem. quod quidem perspicue apparet. quoniam angulus qui rectis lineis BA AC continetur rectus est, erit & contentus ABC circumferentia, & recta linea AC recto major. rursus quoniam angulus contentus rectis lineis CA AF rectus est, erit qui continetur recta linea CA, & ADC circumferentia minor recto. In circulo igitur angulus qui in semicirculo rectus est, qui vero in majore segmento minor est recto, & qui in minori major recto: & insuper majoris quidem segmenti angulus recto major est, minoris vero recto minor. Quod demonstrare oportebat.

[d] 17. primi.

[e] 22. hujus.



Cor. Ex hoc manifestum est, si trianguli unus angulus sit æqualis duobus, eum rectum esse; propterea quòd & qui deinceps est, iisdem est æqualis. quando autem anguli deinceps sunt æquales, necessario recti sunt.

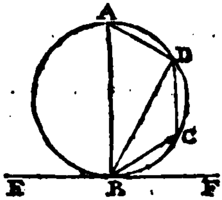
PROP: XXXII. THEOR.

Si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem in circulum ducatur recta linea ipsum secans; anguli quos ad contingentem facit, æquales erunt iis qui in alternis circuli segmentis consistunt.

Circulum enim ABCD contingat quædam recta linea EF in B, & à puncto B ad circulum ABCD ducatur recta linea BD ipsum utcunque secans. dico angulos quos BD cum EF contingente facit, æquales esse iis qui in alternis circuli segmentis consistunt. hoc est angulum FBD esse æqualem angulo qui constituitur in DAB segmento videlicet ipsi

DAB;

DAB; angulum vero DBE æqualem angulo DCB qui in segmento DCB constituitur. ducatur enim à puncto B ipsi EF ad rectos [a] angulos BA: & in circumferentia BD sumatur quod vis punctum C; junganturque AD DC CB. Quoniam igitur circulum ABCD contingit quædam recta linea EF in puncto B: & à contactu B ad rectos angulos contingenti ducta est BA, erit in ipsa BA centrum [b] ABCD circuli; quare BA ejusdem circuli diameter est, & angulus ADB in semicirculo est [c] rectus. reliqui igitur anguli BAD ABD uni recto æquales sunt. sed & ABF est rectus. ergo angulus ABF æqualis [d] est angulis BAD ABD. communis auferatur ABD, reliquus igitur DBF ei qui in alterno circuli segmento consistit, videlicet angulo BAD, est æqualis. & quoniam in circulo quadrilaterum est ABCD, & anguli ejus oppositi æquales [e] sunt duobus rectis; erunt DBF DBE anguli angulis BAD BCD æquales. quorum BAD ostensus est æqualis ipsi DBF; ergo reliquus DBE ei qui in alterno circuli segmento DCB constituitur, videlicet ipsi DCB, æqualis erit. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à contactu vero in circulum ducatur recta linea ipsum secans; anguli quos facit ad contingentem, æquales erunt iis qui in alternis circuli segmentis consistunt. Quod oportebat demonstrare.

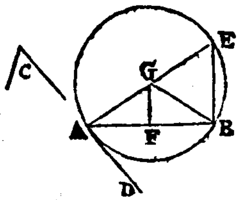


[a] 11. primi.
[b] 19. hujus.
[c] 31. hujus.
[d] 32. primi.
[e] 22. hujus.

PROP. XXXIII. PROBL.

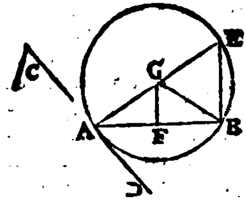
Super data recta linea describere segmentum circuli, quod suscipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

Sit data recta linea AB datus autem angulus rectilineus, qui ad C. itaque oportet super data recta linea AB describere segmentum circuli, quod suscipiat angulum æqualem angulo qui est ad C. Ad rectam lineam AB, & ad punctum in ea datum A, constituatur angulus BAD angulo qui est ad C æqualis [a]. & à puncto A ipsi AD ad rectos angulos [b] ducatur AE; secetur autem AB bifariam [c] in F, atque à puncto F ducatur FG ad rectos angulos ipsi AB; & GB jungatur. quoniam igitur AF est æqualis FB, communis



[a] 23. primi.
[b] 11. primi.
[c] 10. primi.

munis autem F G, duæ A F F G duabus B F F G æquales sunt: & angulus A F G æqualis angulo G F B. ergo basis A G basi
d 4. primi. G B est [d] æqualis. itaque centro G, intervallo autem A G circulus descriptus transibit etiam per B. describatur, & sit A B E, jungaturque E B. quoniam igitur ab extremitate diametri A E, & à puncto A, ipsi A E ad rectos angulos ducta est A D; ipsa A D circulum [e] continget. & quo-

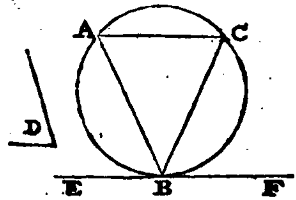


e Cor. 16. hujus. niam circulum A B E contingit quædam recta linea A D, & à contactu qui est ad A, in circulum A B E ducta est recta
f 32. hujus. linea A B: erit angulus D A B æqualis [f] angulo qui in alterno circuli segmento constituitur, videlicet ipsi A E B. sed angulus D A B, angulo ad C est æqualis. ergo & angulus ad C angulo A E B æqualis erit. super data igitur recta linea A B, segmentum circuli descriptum est A E B suscipiens angulum A E B dato angulo qui est ad C æqualem. Quod facere oportebat.

PROP. XXXIV. PROBL.

A dato circulo segmentum abscindere quod suscipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

Sit datus circulus A B C, datus autem angulus rectilineus qui ad D. oportet à circulo A B C segmentum abscindere,
a 17. hujus. quod suscipiat angulum angulo ad D æqualem. Ducatur [a] recta linea E F circulum A B C in puncto B contingens: & ad rectam lineam B F, & ad punctum in ea B, constituatur angulus F B C angulo qui est
b 23. primi. ad D æqualis [b]. quoniam igitur circulum A B C contingit quædam recta linea E F in B



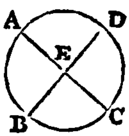
puncto, & à contactu B ducta est B C, erit angulus F B C æ-
c 32. hujus. qualis [c] ei qui in alterno circuli segmento constituitur. sed F B C angulus angulo qui ad D est æqualis. ergo & angulus in segmento B A C angulo ad D æqualis erit. A dato igitur circulo A B C, abscissum est segmentum quoddam B A C suscipiens angulum dato angulo rectilineo qui est ad D, æqualem. Quod facere oportebat.

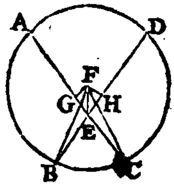
PROP.

PROP. XXXV. THEOR.

Si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secent, rectangulum sub segmentis unius contentum æquale est ei quod sub alterius segmentis continetur.

In circulo enim ABCD, duæ rectæ lineæ AC BD sese mutuo in puncto E secent. dico rectangulum contentum sub AE EC æquale esse ei quod sub DE EB continetur. si AC BD per centrum transeant, ita ut E sit centrum ABCD circuli; manifestum est æqualibus existentibus AE EC DE EB, & rectangulum contentum sub AE EC æquale esse ei quod sub DE EB continetur. si AC DB non transeant per centrum, sumatur centrum circuli ABCD quod sit F: & ab F ad rectas lineas AC DB perpendiculares ducantur FG FH: junganturque FB FC FE. quoniam igitur recta quædam linea GF per centrum ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum ad rectos angulos secat, & bifariam ipsam secabit [a]. quare AG ipsi GC est æqualis. & quoniam recta linea AC secta est in partes æquales in puncto G, & in partes inæquales in E, erit rectangulum sub AE EC contentum, una cum ipsius EG quadrato [b], æquale quadrato ex GC. commune addatur ex GF quadratum. ergo rectangulum sub AE EC, una cum iis quæ ex EG GF quadratis, æquale est quadratis ex CG GF. sed quadratis quæ ex EG GF æquale [c] est quadratum ex FE: quadratis vero ex CG GF æquale [c] quod ex FC fit quadratum. rectangulum igitur sub AE EC, unà cum quadrato ex FE, æquale est quadrato ex FC. est autem CF æqualis FB. ergo rectangulum sub AE EC, unà cum quadrato ex EF, æquale est ei quod ex FB fit quadrato. eadem ratione & rectangulum sub DE EB unà cum quadrato ex FE, æquale est quadrato ex FB. ostensum autem est & rectangulum sub AE EC, unà cum quadrato ex FE, æquale ei quod & ex FB quadrato. ergo rectangulum sub AE EC, unà cum quadrato ex FE, æquale est rectangulo sub DE EB, unà cum quadrato ex FE. commune auferatur ex FE quadratum. reliquum igitur rectangulum sub AE EC, reliquo sub DE EB rectangulo æquale erit. Quare si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secent, rectangulum sub segmentis unius contentum æquale est ei quod sub alterius segmentis continetur. Quod demonstrare oportebat.





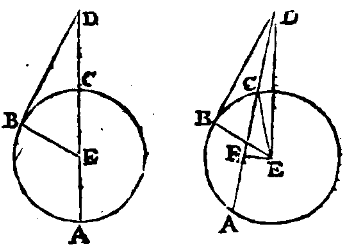
[a] 3. hujus.
[b] 5. secundi
[c] 47. primi.

PROP.

PROP. XXXVI. THEOR.

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, & ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero contingat; rectangulum quod sub tota secante, & exterius assumpta inter punctum & curvam circumferentiam continetur, æquale erit ei quod à contingente fit quadrato.

Extra circulum enim A B C sumatur aliquod punctum D, & ab eo ad dictum circulum cadant duæ rectæ lineæ D C A D B: & D C A quidem circulum A B C secet; D B vero contingat. dico rectangulum sub A D D C, quadrato quod fit ex D B æquale esse. vel igitur D C A per centrum transit, vel non transit. primum transeat per centrum circuli A B C, quod sit E, & E B jungatur. erit
a 18. hujus. angulus E B D rectus [a]. itaque quoniam recta linea A C bifariam secta est in E, & ipsi adjicitur C D, rectangulum sub A D D C, una cum quadrato ex E C, æ-
b 6 secundi. quale [b] erit ei quod fit ex E D quadrato. æqualis autem est C E ipsi E B, ergo rectangulum sub A D D C, unà cum quadrato quod ex E B, æquale est quadrato ex E D.



c 47. primi sed quadratum ex E D est æquale quadratis [c] ipsarum E B B D, rectus enim angulus est E B D. rectangulum igitur sub A D D C, unà cum quadrato ex E B, æquale est ipsarum E B B D quadratis. commune auferatur quadratum quod ex E B. ergo reliquum sub A D D C rectangulum, quadrato quod fit à contingente D B æquale erit. secundo D C A non transeat
d 1. hujus. per centrum A B C circuli: sumaturque [d] centrum E, & ad A C perpendicularis agatur E F, & jungantur E B E C E D, rectus igitur est E F D angulus. & quoniam recta linea quædam E F per centrum ducta, rectam lineam quandam A C non ductam per centrum ad rectos angulos secat, & bifa-
e 3. hujus. riam ipsam secabit [e]. quare A F ipsi F C est æqualis. rursus quoniam recta linea A C bifariam secta est in F, atque ipsi adjicitur C D, erit rectangulum sub A D D C, unà cum quadrato ex F C, æquale [b] quadrato quod ex F D. commune apponatur quod ex F E quadratum. rectangulum igitur sub

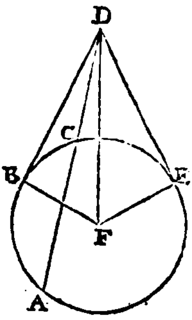
A D D C

AD DG unà cum quadratis ex CF FE est æquale quadratis ex DF FE, sed quadratis quidem ex DF FE æquale est c ex DE quadratum; etenim rectus est angulus EFD: quadratis vero ex CF FE æquale est c quadratum ex CE. c 47 primi. ergo rectangulum sub AD DC, una cum quadrato quod ex CE, est æquale quadrato ex ED; æqualis autem est CE ipsi EB; rectangulum igitur sub AD DC, una cum quadrato ex EB, æquale est ex ED quadrato. sed quadrato ex ED æqualia sunt quadrata c ex EB BD, si quidem rectus est angulus EBD. ergo rectangulum sub AD DC, una cum quadrato ex EB, æquale est eis quæ ex EB BD fiunt quadratis. commune auferatur quadratum ex EB. reliquum igitur sub AD DC rectangulum quadrato quod fit ex DB æquale erit. Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, &c. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXXVII. THEOR.

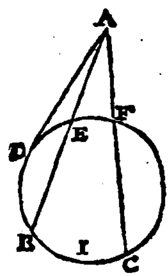
Si extra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero incidat: sit autem quod sub tota secante, & exterius assumpta inter punctum, & curvam circumferentiam continetur rectangulum æquale ei quod ab incidente fit quadrato; incidens linea circulum continget.

Extra circulum enim ABC sumatur aliquod punctum D, atque ab ipso in circulum cadant duæ rectæ lineæ DCA DB; DCA quidem circulum secet, DB vero incidat: sitque rectangulum sub AD DC æquale quadrato quod fit ex DB. dico ipsam DB circulum ABC contingere. Ducatur enim recta linea DE contingens circulum ABC, & sumatur circuli ABC centrum quod sit F, junganturque FE FB FD. ergo angulus FED rectus est a. & quoniam DE circulum ABC contingit, secat autem DCA, rectangulum sub AD DC æquale erit quadrato ex DE. sed rectangulum sub AD DC ponitur æquale quadrato ex DB. quadratum igitur quod ex DE quadrato ex DB æquale erit. ac propterea linea DE ipsi DB æqualis. est autem & FE æqualis FB. duæ igitur DE EF duabus DB BF æquales sunt;



a 18. hujus.

sunt; & basis communis F D; angulus igitur D E F est æqualis angulo D B F, rectus autem est D E F, ergo & D B F est rectus. atque est F B producta diameter: quæ vero ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, circulum contingit. ergo D B circulum A B C contingat necesse est. similiter demonstrabitur & si centrum sit in ipsa A C. Si igitur extra circulum sumatur aliquod punctum, &c. Quod demonstrare oportebat.



Cor. Hinc si à puncto quovis extra circulum assumpto, plures lineæ rectæ A B A C circulum secantes ducantur; rectangula comprehensa sub totis lineis A B A C, & partibus externis A E A F, inter se sunt æqualia. nam si ducatur tangens A D, erit rectangulum sub B A A E æquale quadrato ex A B; & rectangulum sub C A A F eidem quadrato ex A D erit æquale, unde rectangula hæc æqualia erunt.

EUCLIDIS

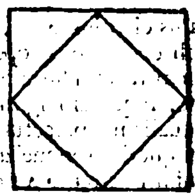
EUCLIDIS ELEMENTORUM.

LIBER QUARTUS.

DIFFINITIONES.

I.

Figura rectilinea in figura rectilinea describi dicitur, quando unusquisque figuræ descriptæ angulus, unumquodque latus ejus in qua describitur, contingit.

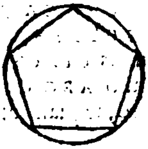


II.

Figura similiter circa figuram describi dicitur, quando unumquodque latus descriptæ, unumquemque angulum ejus circa quam describitur, contingit.

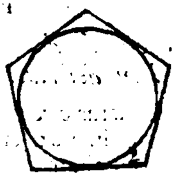
III.

Figura rectilinea in circulo describi dicitur, quando unusquisque descriptæ figuræ angulus circuli circumferentiam contingit.



IV.

Figura rectilinea circa circulum describi dicitur, quando unumquodque latus descriptæ, circuli circumferentiam contingit.



V.

Circulus similiter in figura rectilinea describi dicitur, quando circuli circumferentia unumquodque latus ejus in qua describitur, contingit.

VI.

Circulus circa figuram rectilineam describi dicitur, quando circuli circumferentia unumquemque angulum ejus circa quam describitur, contingit.

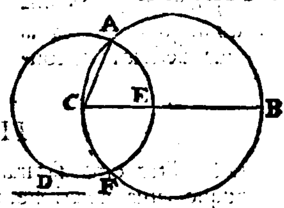
VII.

Recta linea in circulo aptari dicitur, quando ejus extrema in circuli circumferentia fuerint.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

In dato circulo, datæ rectæ lineæ quæ diametro ejus major non sit, æqualem rectam lineam aptare.

Sit datus circulus A B C, data autem recta linea non major circuli diametro D. oportet in circulo A B C rectæ lineæ D æqualem rectam lineam aptare. Ducatur circuli A B C diameter B C, si quidem igitur B C sit æqualis ipsi D, factum jam erit quod proponebatur. etenim in circulo A B C aptata est B C rectæ lineæ D æqualis. sin minus, major est B C quam D, ponaturque a ipsi D æqualis C E; & centro quidem C intervallo autem C E circulus describatur A E F; & C A jungatur. itaque quoniam punctum C centrum est A E F circuli; erit C A ipsi C E æqualis. sed D est æqualis C E. ergo & D ipsi A C æqualis erit. in dato igitur circulo A B C datæ rectæ lineæ D, non majori circuli diametro, æqualis aptata est A C. Quod facere oportebat.



a 3. primi.

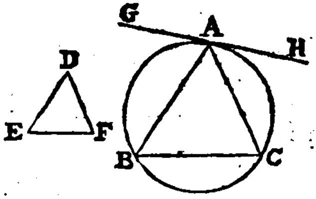
PROP. II. PROBL.

In circulo dato, dato triangulo æquiangulum triangulum describere.

Sit datus circulus A B C, datum autem triangulum D E F. oportet in A B C circulo describere triangulum triangulo D E F æquiangulum. ducatur recta linea G A H contingens a circulum

a 17. tertii.

lum ABC in puncto A: & ad rectam lineam AH, & ad punctum in ea A, angulo DEF æqualis [b] angulus constituatur HAC. rursus ad rectam lineam AG; & ad punctum in ipsa A, angulo DFE æqualis [b] constituatur angulus GAB; & BC jungantur. quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta HAG; à contactu autem in circulum ducta est AC: erit HAC angulus æqualis [c] ei qui in alterno circuli segmento consistit, videlicet ipsi ABC. sed HAC angulus æqualis est angulo DEF, ergo & angulus ABC angulo DEF est æqualis. eadem ratione & angulus ACB est æqualis angulo DFE. reliquus igitur BAC angulus reliquo EDF æqualis [d] erit. ergo triangulum ABC triangulo DEF est æquiangulum, & descriptum est in circulo ABC. In dato igitur circulo dato triangulo æquiangulum triangulum descriptum est. Quod facere oportebat.



[b] 23. primi.

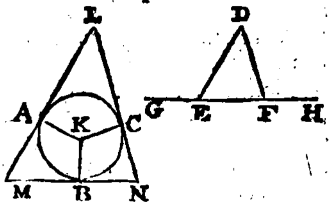
[c] 32. tertii.

[d] 2. Cor. 32. primi.

PROP. III. PROBL.

Circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triangulum describere.

Sit datus circulus ABC, datum autem triangulum DEF. oportet circa circulum ABC describere triangulum triangulo DEF æquiangulum. Protrahatur ex utraque parte EF ad puncta H G, & sumatur circuli ABC centrum K: & recta linea KB utcunque ducatur: constituaturque ad rectam lineam KB, & ad punctum in ea K, angulo quidem DEG æqualis [a] angulus BKA, angulo autem DFH æqualis [a] angulus BKC, & per A B C puncta ducantur rectæ lineæ LAM MBN NCL circulum ABC contingentes.



[a] 23. primi.

Quoniam igitur circulum ABC contingunt LM MN NL in punctis A B C, à centro autem K ad A B C puncta ducuntur KA KB KC; erunt anguli ad puncta A B C recti [b]. & quoniam quadrilateri AMBK anguli quatuor quatuor rectis æquales sunt; etenim in duo triangula dividitur; quorum anguli KAM KBM sunt recti; erunt reliqui AKB AMB duobus rectis æquales. sunt autem & DEG DEF æquales duobus rectis. anguli igitur AKB AMB angulis DEG DEF

[b] 18. tertii.

æquales

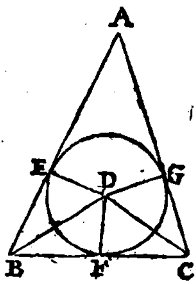
æquales sunt, quorum AKB ipsi DEG est æqualis. ergo reliquus AMB reliquo DEF æqualis erit. similiter demonstrabitur angulus LNB ipsi DFE æqualis. ergo & reliquus MLN est æqualis [e] reliquo EDF. æquiangulum igitur est LMN triangulum triangulo DEF; & descriptum est circa circulum ABC. Quare circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triangulum descriptum est. Quod facere oportebat.

e 2. Cor. 32. primi.

PROP. IV. PROBL.

In dato triangulo circulum describere.

Sit datum triangulum ABC, oportet in triangulo ABC circulum describere. Secentur [a] anguli ABC BCA bifariam rectis lineis BD CD quæ conveniant inter se in D puncto: & à puncto D ad rectas lineas AB BC CA perpendiculares [b] ducantur DE DF DG. Quoniam angulus EBD est æqualis angulo FBD, est autem & rectus BED recto BFD æqualis: erunt duo triangula EBD DBF, duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, & utrique commune BD, quod scilicet uni æqualium angulorum subtenditur. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia [c] habebunt, atque erit DE æqualis DF. & eadem ratione DG æqualis DF. ergo & DE ipsi DG est æqualis. tres igitur rectæ lineæ DE DF DG inter se æquales sunt; quare centro D intervallo autem unius ipsarum DE DF DG circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta; & rectas lineas AB BC CA continget; propterea quòd recti sunt ad EFG anguli. si enim ipsas secet, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur intra circulum cadet, quod est absurdum [d]. non igitur centro D, intervallo autem unius ipsarum DE DF DG circulus desctiptus secabit rectas lineas AB BC CA, quare ipsas continget; atque erit circulus descriptus in triangulo ABC. In dato igitur triangulo ABC circulus EFG descriptus est. Quod facere oportebat.



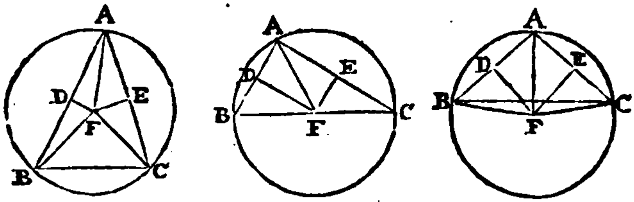
a 9. primi.
b 12. primi.
c 26. primi.
d 16. tertii.

PROP. V. THEOR.

Circa datum triangulum circulum describere.

Sit datum triangulum ABC. oportet circa datum triangulum ABC circulum describere. Secentur AB AC bifariam [a] in DE punctis: & à punctis DE ipsis AB AC ad rectos angulos [b] ducantur DF EF quæ quidem vel intra triangulum ABC convenient, vel in recta linea BC, vel extra ipsam. conveniant primo intra triangulum in puncto F: &

[a] 30. primi.
[b] 11. primi.



BF FC FA jungantur. quoniam igitur AD est æqualis DB, communis autem & ad rectos angulos DF; erit basis AF basi FB æqualis [c]. similiter ostendetur & CF æqualis FA. ergo & BF est æqualis FC. tres igitur FA FB FC inter se æquales sunt. quare centro F, intervallo autem unius ipsarum FA FB FC circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit: atque erit circulus descriptus circa triangulum ABC. & describatur ut ABC. secundo DF EF conveniant in recta linea BC, in puncto F, ut in secunda figura, & AF jungatur. similiter demonstrabimus punctum F centrum esse circuli circa triangulum ABC descripti. postremo DF EF conveniant extra triangulum ABC rursus in F puncto, ut in tertia figura: & jungantur AF FB FC. & quoniam rursus AD est æqualis DB, communis autem & ad rectos angulos DF, basis AF basi FB æqualis erit. similiter demonstrabimus & CF ipsi FA æqualem esse. quare & BF est æqualis FC. rursus igitur centro F, intervallo autem unius ipsarum FA FB FC circulus descriptus & per reliqua transibit puncta; atque erit circa triangulum ABC descriptus. Circa datum igitur triangulum circulus descriptus est. Quod facere oportebat.

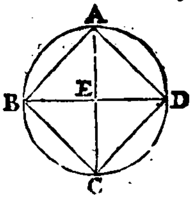
[c] 4. primi.

Cor. Si triangulum sit rectangulum centrum circuli cadet in latus angulo recto oppositum. si acutangulum cadet centrum intra triangulum, si obtusangulum cadet extra.

PROP. VI. PROBL.

In dato circulo quadratum describere.

Sit datus circulus A B C D. oportet in A B C D circulo quadratum describere. Ducantur circuli A B C D diametri ad rectos angulos inter se A C B D: & A B B C C D D A jungantur. Quoniam igitur B E est æqualis E D, etenim centrum est E, communis autem, & ad rectos angulos E A; erit basis B A æqualis [a] basi A D. & eadem ratione utraque ipsarum B C C D utrique B A A D æqualis; æquilaterum igitur est A B C D quadrilaterum. dico & rectangulum esse. quoniam enim recta linea B D diameter est A B C D circuli, erit B A D semicirculus. quare angulus B A D rectus [b] est. & eadem ratione unusquisque ipsorum A B C B C D C D A est rectus. rectangulum igitur est A B C quadrilaterum. ostensum autem est, & æquilaterum esse. ergo quadratum necessario erit, & descriptum est in circulo A B C D. in dato igitur A B C D circulo quadratum A B C D descriptum est. Quod facere oportebat.

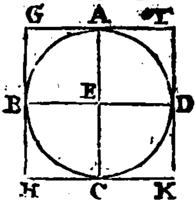


a 4. primi.
b 31. tertii.

PROP. VII. PROBL.

Circa datum circulum quadratum describere.

Sit datus circulus A B C D: oportet circa A B C D circulum quadratum describere. Ducantur circuli A B C D duæ diametri A C B D ad rectos inter se angulos, & per puncta A B C D ducantur circulum A B C D contingentes [a] F G G H H K K F. Quoniam igitur F G contingit circulum A B C D, à centro autem E ad contactum qui est ad A ducitur E A; erunt [b] anguli ad A recti. eadem ratione, & anguli ad puncta B C D recti sunt. & quoniam angulus A E B rectus est, est autem & rectus E B G; erit G H ipsi A C parallela [c]. eadem ratione, & A C parallela est F K. similiter demonstrabimus & utramque ipsarum G F H K ipsi B E D parallelam esse. quare & G F est parallela H K. parallelogramma igitur sunt G K G C A K F B B K, ac propterea G F quidem est [d] æqualis H K, G H vero ipsi F K. & quoniam A C æqualis est B D; sed A C quidem utrique ipsarum



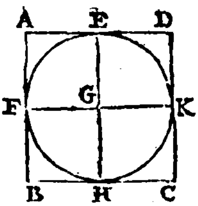
a 17. tertii.
b 18. tertii.
c 28. primi
d 34. primi.

ipsarum G H F K est [d] æqualis; B D vero æqualis utrique G F H K, & utraque G H F K utrique G F H K æqualis erit. æquilaterum igitur est F G H K quadrilaterum. dico & rectangulum esse. quoniam enim parallelogrammum est G B E A, atque est rectus A E B angulus, & ipse A G B rectus erit. similiter demonstrabimus angulos etiam ad puncta H K F rectos esse. rectangulum igitur est quadrilaterum F G H K. demonstratum autem est & æquilaterum. ergo quadratum sit necesse est, & descriptum est circa circulum A B C D. Circa datum igitur circulum quadratum descriptum est. Quod facere oportebat.

PROP. VIII. PROBL.

In dato quadrato circulum describere.

Sit datum quadratum A B C D. oportet in quadrato A B C D circulum describere. Secetur utraque ipsarum A B A D bifariam [a] in punctis F E. & per E quidem alterutri ipsarum A B C D parallela [b] ducatur E H: per F vero ducatur F K parallela [b] alterutri A D B C. parallelogrammum igitur est unumquodque ipsorum A K K B A H H D A G G C B G G D: & latera ipsorum quæ ex opposito, sunt æqualia [c]. & quoniam D A est æqualis A B; & ipsius quidem A D dimidium est A E; ipsius vero A B dimidium A F; erit A E ipsi A F æqualis. quare & opposita latera æqualia sunt. ergo F G est æqualis G E. similiter demonstrabimus, & utramque ipsarum G H G K utrique F G G E æqualem esse. quatuor igitur G E G F G H G K inter se sunt æquales. itaque centro quidem G, intervallo autem unius ipsarum G E G F G H G K circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, & rectas lineas A B B C C D D A continget; propterea quod anguli ad E F H K recti sunt. si enim circulus secabit rectas lineas A B B C C D D A, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur intra circulum cadet; quod [d] est absurdum. non igitur centro quidem G intervallo autem unius ipsarum G E G F G H G K circulus descriptus rectas lineas A B B C C D D A secabit. quare ipsas necessario continget: atque erit descriptus in quadrato A B C D. In dato igitur quadrato circulus descriptus est. Quod facere oportebat.



a 10. primi.
b 31. primi.
c 34. primi.
d 16. tertii.

PROP.

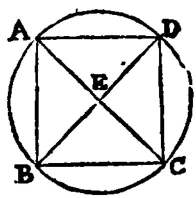
PROP. IX. PROBL.

Circa datum quadratum circulum describere.

Sit datum quadratum ABCD. oportet circa ABCD quadratum circulum describere. Jungantur enim AC BD, quæ se invicem in puncto E secent. & quoniam DA est æqualis AB, communis autem AC; duæ DA AC duabus BA AC æquales sunt; & basis DC æqualis basi BC; erit angulus DAC angulo BAC æqualis [a]. angulus igitur DAB bifariam sectus est recta linea AC. similiter demonstrabimus unumquemque angulorum ABC BCD CDA rectis lineis AC DB bifariam sectum esse. quoniam igitur angulus DAB angulo ABC est æqualis: atque est anguli quidem DAB dimidium angulus EAB, anguli vero ABC dimidium EBA; & EAB angulus angulo EBA æqualis erit. quare & latus EA lateri EB est [b] æquale. similiter demonstrabimus & utramque rectarum linearum EC ED utrique EA EB æqualem esse. ergo quatuor rectæ lineæ EA EB EC ED inter se sunt æquales. centro igitur E, intervallo autem unius ipsarum EA EB EC ED circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit; atque erit descriptus circa ABCD quadratum. describatur ut ABCD. Circa datum igitur quadratum circulus descriptus est. Quod facere oportebat.

a 8 primi.

b 6. primi



PROP. X. PROBL.

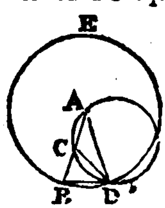
Isosceles triangulum constituere, habens utrumque angulorum qui sunt ad basim, duplum reliqui.

Exponatur recta quædam recta linea AB, & secetur in C puncto, ita ut rectangulum contentum sub AB BC æquale [a] sit ei quod ex CA describitur quadrato: & centro quidem A, intervallo autem AB circulus describatur BDE; apteturque in BDE circulo recta linea BD æqualis [b] ipsi AC quæ non est major diametro circuli BDE: & junctis DA DC, circa ADC triangulum [c] circulus ACD describatur. itaque quoniam rectangulum ABC æquale est quadrato quod fit ex AC;

a 11. secundi.

b 1. hujus.

c 5. hujus.



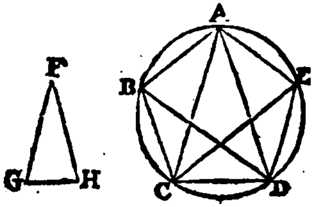
AC; æqualis autem est AC ipsi BD: erit sub AB BC rectangulum quadrato ex BD æquale. & quoniam extra circulum ACD sumptum est aliquod punctum B, & à puncto B in circulum ACD cadunt duæ rectæ lineæ BCA BD, quarum altera quidem secat, altera vero incidit; atque est rectangulum sub AB BC æquale quadrato ex BD: recta linea BD circulum ACD [c] continget. quoniam igitur BD contingit, & à contactu ad D ducta est DC; erit BDC angulus æqualis [d] ei qui in alterno circuli segmento constituitur, videlicet angulo DAC. quod cum angulus BDC æqualis sit ipsi DAC, communis apponatur CDA totus igitur BDA est æqualis duobus angulis CDA DAC. sed ipsis CDA DAC exterior angulus BCD est [e] æqualis. ergo & BDA æqualis est ipsi BCD. sed BDA angulus est [f] æqualis angulo CBD, quoniam & latus AD lateri AB est æquale. ergo & DBA ipsi BCD æqualis erit. tres igitur anguli BDA DBA BCD inter se æquales sunt. & quoniam angulus DBC æqualis est angulo BCD, & latus BD lateri DC est [g] æquale. sed BD ponitur æqualis ipsi CA. ergo & CA est æqualis CD. quare & angulus CDA æqualis est angulo DAC. anguli igitur CDA DAC simul sumpti ipsius anguli DAC duplices sunt. est autem & BCD angulus angulis CDA DAC æqualis; ergo & BCD duplex est ipsius DAC. sed BCD est æqualis alterutri ipsorum BDA DBA. quare & uterque BDA DBA ipsius DAB est duplex. Isosceles igitur triangulum constitutum est ADB habens utrumque eorum angulorum qui sunt ad basim, duplum reliqui. Quod facere oportebat.

[c] 37. tertii.
[d] 32. tertii.
[e] 32. primi.
[f] 5. primi.
[g] 6. primi.

PROP. XI. PROBL.

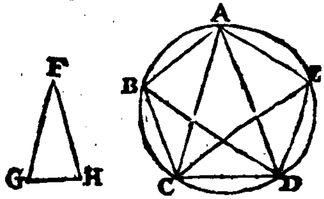
In dato circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum describere.

Sit datus circulus ABCDE. oportet in ABCDE circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum describere. Exponatur triangulum isosceles FGH habens utrumque eorum qui sunt ad basim GH angulorum, duplum [a] anguli qui est ad F: & describatur in circulo ABCDE triangulo FGH æquiangulum [b] triangulum ACD, ita ut angulo quidem qui est ad F æqualis sit angulus CAD; utrique vero ipsorum qui ad GH, sit æqualis uterque ACD CDA. & uterque



[a] 10. hujus.
[b] 2. hujus.

uterque igitur ACD CDA, anguli CAD est duplus. secetur
c 9 primi. uterque ipsorum ACD CDA bifariam c rectis lineis CE DB:
& AB BC CD DE EA jungantur. quoniam igitur uterque ipsorum ACD CDA duplus est ipsius CAD, & secti sunt bifariam rectis lineis CE DB, quinque anguli DAC ACE ECD CDB BDA inter se sunt æquales. æquales autem anguli in æqualibus circumferentiis insistunt d. quinque



d 26. tertii. igitur circumferentiæ AB BC CD DE EA æquales sunt in-
e 29. tertii. ter se. sed æquales circumferentias e æquales rectæ lineæ subtendunt. ergo & quinque rectæ lineæ AB BC CD DE EA inter se æquales sunt. æquilaterum igitur est ABCDE pentagonum. dico & æquiangulum esse. quoniam enim circumferentia AB æqualis est circumferentiæ DE, communis apponatur BCD. tota igitur ABCD circumferentia toti circumferentiæ EDCB est æqualis, & in circumferentia quidem ABCD insistit angulus AED, in circumferentia vero EDCB insistit BAE. ergo & BAE angulus est æqualis angulo AED. eadem ratione & unusquisque angulorum ABC BCD CDE unicuique ipsorum BAE AED est æqualis. æquiangulum igitur est ABCDE pentagonum: ostensum autem est & æquilaterum esse. Quare in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum descriptum est. Quod facere oportebat.

PROP. XII. PROBL.

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum & æquiangulum describere.

Sit datus circulus ABCDE. oportet circa circulum ABCDE pentagonum æquilaterum & æquiangulum describere. In-
a per 11. telligantur pentagoni in circulo descripti a angulorum pun-
hujus. cta ABCDE, ita ut circumferentiæ AB BC CD DE EA sint
b 17. tertii. æquales; & per puncta ABCDE ducantur b circulum contingentes GH HK KL LM MG, & sumpto circuli ABCDE centro F, jungantur FB FK FC FL FD. quoniam igitur recta linea KL contingit circulum ABCDE in puncto C, & à centro F ad contactum qui est ad C ducta est FC, erit
c 18. tertii. FC ad ipsam KL perpendicularis c. rectus igitur est uterque angulorum qui sunt ad C. eadem ratione & anguli qui ad puncta B, D recti sunt. & quoniam rectus angulus est FCK, quadra-

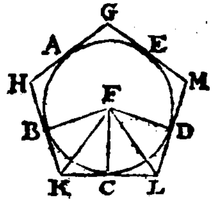
quadratum quod fit ex FK æquale d est quadratis ex FC CK. & ob eandem causam quadratis ex FB BK æquale est ex FK quadratum. quadrata igitur ex FC CK quadratis ex FB BK æqualia sunt, quorum quod ex FC ei quod ex FB est æquale. ergo reliquum quod ex CK reliquo quod ex BK æquale erit. æqualis igitur est BK ipsi CK. & quoniam FB est æqualis FC, communis autem FK, duæ BF FK duabus CF FK æquales sunt, & basis BK est æqualis basi KC; erit angulus e quidem BFK angulo KFC æqualis, angulus vero BKF angulo FKC. duplus igitur est angulus BFC anguli KFC, & angulus BKC duplus ipsius FKC. eadem ratione, & angulus CFD anguli CFL est duplus: angulus vero CLD duplus anguli CLF. & quoniam circumferentia BC circumferentiæ CD est æqualis, & angulus BFC angulo CFD æqualis f erit. atque est angulus quidem BFC anguli KFC duplus: angulus vero DFC duplus ipsius LFC æqualis. igitur est angulus KFC angulo CFL. itaque duo triangula sunt FKC FLC, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale quod ipsis commune est FC: ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt g, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem. recta igitur linea KC est æqualis rectæ CL, & angulus FKC angulo FLC. & quoniam KC est æqualis CL, erit KL ipsius KC dupla. eadem ratione, & HK ipsius BK dupla ostendetur. rursus quoniam BK ostensa est æqualis ipsi KC: atque est KL quidem dupla KC, HK vero ipsius BK dupla: erit HK ipsi KL æqualis. similiter & unaquæque ipsarum GH GM ML ostendetur æqualis utrique HK KL. æquilaterum igitur est GHKLM pentagonum. dico etiam æquiangulum esse. quoniam enim angulus FKC est æqualis angulo FLC: & ostensus est angulus HKL duplus ipsius FKC; ipsius vero FLC duplus KLM: erit & HKL angulus angulo KLM æqualis. simili ratione ostendetur & unusquisque ipsorum KHG HGM GML utrique HKL KLM æqualis. quinque igitur anguli GHK HKL KLM LMG MGH inter se æquales sunt. ergo æquiangulum est GHKLM pentagonum. ostensum autem est etiam æquilaterum esse: & descriptum est circa ABCDE circulum. Quod facere oportebat.

d 47. primi.

e 5 primi.

f 27. tertii.

g 26. primi.

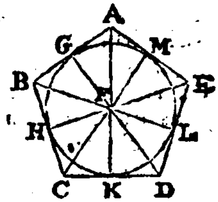


PROP.

PROP. XIII. PROBL.

In dato pentagono, quod æquilaterum & æquiangulum sit circulum describere.

Sit datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum ABCDE. oportet in ABCDE pentagono circulum describere. Secetur uterque angulorum BCD CDE bifariam [a] rectis lineis CF DF; & à puncto F in quo conveniunt inter se CF DF ducantur rectæ lineæ FB FA FE. Quoniam igitur BC est æqualis CD, communis autem CF, duæ BC CF, duabus DC CF æquales sunt, & angulus BCF est æqualis angulo DCF. basis igitur BF basi FD est [b] æqualis, & BFC triangulum æquale triangulo DCF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales quibus æqualia latera subtenduntur; angulus igitur CBF angulo CDF æqualis erit. & quoniam angulus CDE anguli CDF est duplus, & angulus quidem CDE angulo ABC æqualis, angulus vero CDF angulo CBF æqualis; erit & CBA angulus duplus anguli CBF; ac propterea angulus ABF angulo FBC æqualis. angulus igitur ABC bifariam sectus est recta linea BF. similiter demonstrabitur unumquemque angulorum BAE AED rectis lineis AF FE bifariam sectum esse. à puncto F ad rectas lineas AB BC CD DE EA ducantur [c] perpendiculares FG FH FK FL FM. & quoniam angulus HCF est æqualis angulo KCF; est autem & rectus FHC recto FKC æqualis: erunt duo triangula FHC FKC, duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, commune scilicet utrisque FC quod uni æqualium angulorum subtenditur. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia [d] habebunt, atque erit perpendicularis FH perpendiculari FK æqualis. similiter ostendetur & unaquæque ipsarum FL FM FG æqualis utrique FH FK. quinque igitur rectæ lineæ FG FH FK FL FM inter se æquales sunt. quare centro F intervallo autem unius ipsarum FG FH FK FL FM, circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, & rectas lineas AB BC CD DE EA continget; propterea quod anguli ad GHKLM recti sunt. si enim non continget, sed ipsas secet, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, intra circulum cadet, quod absurdum [e] esse ostensum est. non igitur centro F, & inter-



a 9. primi.
b 4. primi.
c 12. primi.
d 26 primi.
e 16. tertii.

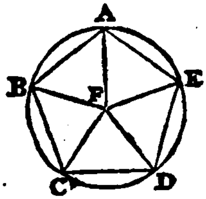
intervallo uno ipſorum punctorum G H K L M circulus deſcriptus rectas lineas A B B C C D D E E A ſecabit. quare ipſas contingat neceſſe eſt. deſcribatur ut G H K L M. In dato igitur pentagono quod eſt æquilaterum, & æquiangulum circulus deſcriptus eſt. Quod facere oportebat.

Cor. Si duo anguli proximi figuræ æquilateræ & æquiangulæ biſecentur, & à puncto in quo coeunt lineæ angulum biſecantes, ducantur rectæ lineæ ad reliquos figuræ angulos, omnes anguli figuræ erunt biſecti.

PROP. XIV. PROBL.

Circa datum pentagonum quod æquilaterum & æquiangulum ſit, circulum deſcribere.

Sit datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum A B C D E. oportet circa pentagonum A B C D E circulum deſcribere. Secetur uterque ipſorum B C D C D E angulorum, bifariam rectis lineis C F F D: & à puncto F in quo conveniunt rectæ lineæ, ad puncta B A E ducantur F B F A F E. & unuſquiſque angulorum C B A B A E A E D rectis lineis B F F A F E bifariam [a] ſectus erit. & quoniam angulus B C D angulo C D E eſt æqualis; atqui eſt anguli quidem B C D dimidium angulus F C D, anguli vero C D E dimidium C D F; erit & F C D angulus æqualis angulo F D C, quare & latus C F lateri F D eſt æquale [b]. ſimiliter demonſtrabitur & una quæque ipſarum F B F A F E æqualis unicuique F C F D. quinque igitur rectæ lineæ F A F B F C F D F E inter ſe æquales ſunt. ergo centro F, & intervallo unius ipſarum F A F B F C F D F E, circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta: atque erit deſcriptus circa pentagonum A B C D E quod æquilaterum eſt & æquiangulum. deſcribatur, & ſit A B C D E. Circa datum igitur pentagonum æquilaterum & æquiangulum circulus deſcriptus eſt. Quod facere oportebat.



[a] Cor. præcedente.

[b] 6. primi.

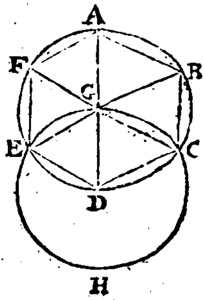
PROP. XV. PROBL.

In dato circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

Sit datus circulus A B C D E F. oportet in circulo A B C D E F hexagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.

Ducatur

Ducatur circuli A B C D E F diameter A D, sumaturque centrum circuli G; & centro quidem D, intervallo autem D G circulus describatur E G C H, junctæ E G C G ad puncta B F producantur, & jungantur A B B C C D D E E F F A. dico hexagonum A B C D E F æquilaterum & æquiangulum esse. Quoniam enim G punctum centrum est A B C D E F circuli, erit G E ipsi G D æqualis. rursus quoniam D centrum est circuli E G C H, erit D E æqualis D G: sed G E ipsi G D æqualis ostensa est. ergo G E ipsi E D est æqualis. æquilaterum igitur est E G D triangulum, ideoque tres ipsius an-



a Cor. 5. primi. guli E G D G D E D E G inter se æquales [a] sunt, & sunt trianguli tres anguli æqua-
b 32. primi. les [b] duobus rectis. angulus igitur E G D duorum rectorum tertia pars est. similiter ostendetur & D G C duorum rectorum tertia pars, & quoniam recta linea C G super rectam E B insistens, angulos qui deinceps sunt E G C
c 13. primi C G B duobus rectis æquales [c] efficit; erit & reliquus C G B tertia pars duorum rectorum. anguli igitur E G D D G C C G B inter se sunt æquales. & qui ipsis ad verticem sunt an-
d 18. primi. guli B G A A G F F G E æquales [d] sunt angulis E G D D G C C G B. quare sex anguli E G D D G C C G B B G A A G F F G E inter se æquales sunt. sed æquales anguli æqualibus cir-
e 26 tertii. cumferentiis insistunt [e]. sex igitur circumferentiæ A B B C C D D E E F F A inter se sunt æquales. æquales autem cir-
f 29. tertii. cumferentias æquales [f] rectæ lineæ subtendunt. ergo & sex rectæ lineæ inter se æquales sint necesse est, ac propterea æquilaterum est A B C D E F hexagonum. dico & æquiangulum esse. quoniam enim circumferentia A F circumferentiæ E D est æqualis, communis apponatur circumferentia A B C D: tota igitur F A B C D circumferentia æqualis est toti circumferentiæ E D C B A. & circumferentiæ quidem F A B C D angulus F E D insistit, circumferentiæ vero E D C B A insistit
g 27. tertii. angulus A F E. angulus igitur A F E angulo D E F est [g] æqualis. similiter ostendentur & reliqui anguli hexagoni A B C D E F, sigillatim æquales utrique ipsorum A F E F E D. ergo æquiangulum est A B C D E F hexagonum. ostensum autem est & æquilaterum esse: & descriptum est circulo A B C D E F. In dato igitur circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum descriptum est. Quod facere oportebat.

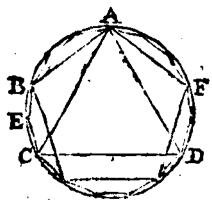
Ex hoc manifestum est hexagoni latus, ei quæ est ex centro circuli æquale esse. & si per puncta A B C D E F contingentes circulum ducamus, circa circulum describetur hexa-

hexagonum æquilaterum & æquiangulum, consequenter iis quæ in pentagono dicta sunt: & præterea similiter in dato hexagono circulum inscribemus, & circumscribemus. Quod facere oportebat.

PROP. XVI. PROBL.

In dato circulo quindecagonum æquilaterum & æquiangulum describere.

Sit datus circulus ABCD. oportet in ABCD circulo quindecagonum æquilaterum & æquiangulum describere. Sit AC latus trianguli quidem æquilateri in ipso circulo ABCD descripti, pentagoni vero æquilateri latus AB. quarum igitur partium est ABCDF circulus quindecim, earum circumferentia quidem ABC, tertia existens circuli, erit quinque; circumferentia vero AB, quæ quinta est circuli, erit trium. ergo reliqua BC est duarum. secetur BC bifariam in puncto E. quare utraque ipsarum BE EC circumferentiarum, quintadecima pars est ABCD circuli. si igitur jungentes BE EC, æquales ipsis in continuum rectas lineas in circulo ABCD aptemus, in ipso quindecagonum æquilaterum & æquiangulum descriptum erit. Quod facere oportebat.



Similiter autem iis quæ dicta sunt in pentagono, si per circuli divisiones, contingentes circulum ducamus, circa ipsum describetur quindecagonum æquilaterum & æquiangulum. & insuper dato quindecagono æquilatero & æquiangulo circulum inscribemus, & circumscribemus.

EUCLIDIS ELEMENTORUM.

LIBER QUINTUS.

DIFFINITIONES.

I.

Pars est magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando minor majorem metitur.

II.

Multiplex est major minoris, quando majorem minor metitur.

III.

Proportio seu ratio est duarum magnitudinem ejusdem generis, secundum quantitatem, mutua quædam habitudo.

IV.

Proportionem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ multiplicatæ se invicem superare possunt.

V.

In eadem proportione magnitudines esse dicuntur, prima ad secundam & tertia ad quartam, quando primæ & tertiæ æque multiplices, secundæ & quartæ æque multiplices, juxta quamvis multiplicationem, utraque utramque, vel unà superant, vel unà æquales sunt, vel unà deficiunt, inter se comparatæ.

VI.

Magnitudines quæ eandem proportionem habent, proportionales vocentur.

VII.

VII.

Quando autem æque multiplicium, multiplex quidem primæ superaverit multiplicem secundæ, multiplex vero tertiæ non superaverit multiplicem quartæ, tunc prima ad secundam majorem proportionem habere dicitur quàm tertia ad quartam.

VIII.

Analogia est proportionum similitudo.

IX.

Analogia vero in tribus terminis ad minimum consistit.

X.

Quando tres magnitudines proportionales sunt, prima ad tertiam duplicatam proportionem habere dicetur ejus quàm habet ad secundam.

XI.

Quando autem quatuor magnitudines sunt proportionales, prima ad quartam triplicatam habere proportionem dicetur ejus quam habet ad secundam, & semper deinceps, una amplius, quoad analogia processerit.

XII.

Homologæ, vel similis rationis magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

XIII.

Alterna seu permutata ratio est sumptio antecedentis ad antecedentem & consequentis ad consequentem.

XIV.

Inversa ratio est sumptio consequentis ut antecedentis, ad antecedentem, ut ad consequentem.

XV.

Compositio rationis est sumptio antecedentis unà cum consequente, tanquam unius, ad ipsam consequentem.

XVI.

Divisio rationis est sumptio excessus quo antecedens superat consequentem, ad ipsam consequentem.

XVII.

Conversio rationis est sumptio antecedentis ad excessum quo antecedens ipsam consequentem superat.

XVIII.

Ex æquo sive ex æqualitate ratio est, cum plures magnitudines extiterint, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur & in eadem proportione, fueritque ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ita in secundis magnitudinibus prima ad ultimam: vel aliter, est sumptio extremarum per subtractionem mediarum.

XIX.

Ordinata proportio est quando fuerit ut antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem; ut autem consequens ad aliam quampiam, ita consequens ad aliam quampiam.

XX.

Perturbata vero proportio est quando tribus existentibus magnitudinibus, & aliis ipsis numero æqualibus, fuerit ut in primis magnitudinibus antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem, ut autem in primis magnitudinibus consequens ad aliam quampiam, ita in secundis alia quæpiam ad antecedentem.

AXIOMATA.

I.

Ejusdem sive æqualium æque multiplices inter se æquales sunt.

II.

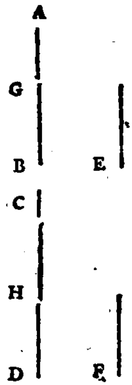
Quarum eadem æque multiplex est, vel quarum æquales sunt æque multiplices, & ipsæ inter se sunt æquales.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Si fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices, quotuplex est una magnitudo unius, totuplices erunt & omnes omnium.

Sint quotcunque magnitudines A B C D, quotcunque magnitudinum E F, æqualium numero, singulæ singularum æque mul-

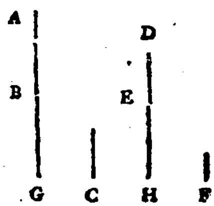
multiplices. dico quotuplex est A B ipsius E, totuplices esse & A B C D simul ipsarum E F simul. Quoniam enim A B æque multiplex est ipsius E, ac C D ipsius F; quot magnitudines sunt in A B, æquales ipsi E, tot erunt & in C D æquales ipsi F. dividatur A B quidem in partes ipsi E æquales, quæ sint A G G B; & C D dividatur in partes æquales ipsi F, videlicet C H H D. erit igitur multitudo partium C H H D æqualis multitudini ipsarum A G G B. & quoniam A G est æqualis E, & C H æqualis F; erunt & A G C H æquales ipsis E F. eadem ratione quoniam G B est æqualis E, & H D ipsi F; erunt G B H D æquales ipsis E F. quot igitur sunt in A B æquales ipsi E, tot sunt & in A B C D æquales ipsis E F. ergo quotuplex est A B ipsius E, totuplices erunt & A B C D simul ipsarum E F simul. Si igitur fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices, quotuplex est una magnitudo unius, totuplices erunt & omnes omnium. Quod demonstrare oportebat.



PROP. II. THEOR.

Si prima secundæ æque multiplex fuerit ac tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex ac sexta quartæ; erit etiam composita prima cum quinta secundæ æque multiplex ac tertia cum sexta quartæ.

Sit prima A B secundæ C æque multiplex, ac tertia D E quartæ F. sit autem & quinta B G secundæ C æque multiplex, ac sexta E H quartæ F. dico & compositam primam cum quinta scil. A G secundæ C æque multiplicem esse, ac tertiam cum sexta sc. D H quartæ F. Quoniam enim AB æque multiplex est C, ac D E ipsius F; quot magnitudines sunt in A B æquales C, tot erunt & in D E æquales F. eadem ratione & quot sunt in B G æquales C, tot & in E H erunt æquales F. quot igitur sunt in tota A G æquales C, tot erunt & in tota D H æquales F. ergo quotuplex est A G ipsius C, totuplex est &

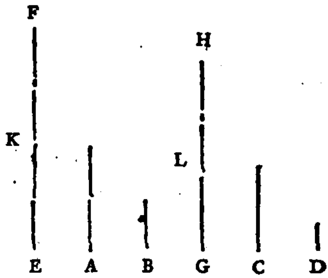


DH ipsius F. & composita igitur prima cum quinta AG secundæ C æque multiplex erit, ac tertia cum sexta DH quartæ F: quare si prima secundæ æque multiplex fuerit, ac tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex, ac sexta quartæ; erit composita quoque prima, cum quinta æque multiplex secundæ, ac tertia, cum sexta quartæ. Quod oportebat demonstrare.

PROP. III. THEOR.

Si prima secundæ æque multiplex fuerit ac tertia quartæ; sumantur autem æque multiplices primæ & tertiæ; erit &, ex æquali, sumptarum utraque utriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ.

Sit prima A secundæ B æque multiplex ac tertia C quartæ D: & sumantur ipsarum A C æque multiplices EF GH. dico EF æque multiplicem esse ipsius B, ac GH ipsius D. Quoniam enim EF æque multiplex est ipsius A, ac GH ipsius C; quot magnitudines sunt in EF æquales A, tot erunt & in GH æquales C. dividatur EF quidem in magnitudines ipsi A æquales EK KF; GH vero dividatur in magnitudines æquales C, videlicet GL LH. erit igitur ipsarum EK KF multitudo æqualis multitudini ipsarum GL LH. & quoniam æque multiplex est A ipsius B ac C ipsius D: æqualis autem EK ipsi A, & GL ipsi C; erit EK æque multiplex ipsius B, ac GL ipsius D. eadem ratione æque multiplex erit KF ipsius B, ac LH ipsius D. quoniam igitur prima EK secundæ B æque multiplex est, ac tertia GL quartæ D; est autem & quinta KF secundæ B æque multiplex ac sexta LH quartæ D: erit & composita prima cum quinta EF, secundæ B æque multiplex a, ac tertia cum sexta GH, quartæ D. Si igitur prima secundæ æque fuerit multiplex ac tertia quartæ, sumantur autem primæ & tertiæ æque multiplices: erit &, ex æquali, sumptarum utraque utriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ. Quod ostendisse oportuit.



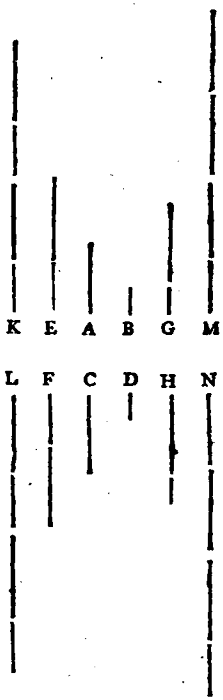
a 2. hujus.

PROP.

PROP. IV. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam: & æque multiplices primæ & tertiæ ad æque multiplices secundæ & quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem proportionem habebunt, inter se comparatæ.

Prima A ad secundam B eandem proportionem habeat quam tertia C ad quartam D: & sumantur ipsarum quidem A C utcunque æque multiplices E F; ipsarum vero B D aliæ utcunque æque multiplices G H. dico E ad G ita esse ut F ad H. Sumantur rursus ipsarum E F æque multiplices K L, & ipsarum G H æque multiplices M N. quoniam igitur E æque multiplex est ipsius A, atque F ipsius C; sumuntur autem ipsarum E F æque multiplices K L: erit K æque multiplex [a] ipsius A, atque L ipsius C. eadem ratione M æque multiplex erit ipsius B, atque N ipsius D. & quoniam est ut A ad B ita C ad D. sumptæ autem sunt ipsarum A C æque multiplices K L; & ipsarum B D aliæ utcunque æque multiplices M N: si [b] K superat M, superabit & L ipsam N; & si æqualis æqualis; & si minor minor. suntque K L quidem ipsarum E F æque multiplices; M N vero ipsarum G H aliæ utcunque æque multiplices. ut igitur E ad G ita [c] erit F ad H. quare si prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam, & æque multiplices primæ ac tertiæ ad æque multiplices secundæ ac quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem proportionem habebunt, inter se comparatæ. Quod demonstrare oportebat.



[a] 3. hujus.

[b] 5. Diffin. hujus.

[c] 5. Diffin.

Quoniam igitur demonstratum est si K superat M, & L ipsam N superare; & si æqualis, æqualem esse, & si minor, minorem:

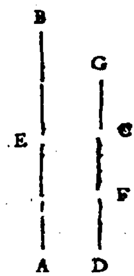
minorem: constat etiam si M superat K, & N superare ipsam L; & si æqualis, æqualem esse; & si minor, minorem; ac c 5. Diffin. propterea ut G ad E, ita esse H ad F.

Cor. Ex hoc manifestum est si quatuor magnitudines sint proportionales, & inverse proportionales esse.

PROP. V. THEOR.

Si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit atque ablata ablatæ, & reliqua reliquæ æque multiplex erit ac tota totius.

Magnitudo AB magnitudinis CD æque multiplex sit atque ablata AE ablatæ CF. dico & reliquam EB reliquæ FD æque multiplicem esse atque totam AB totius CD; Quotuplex enim est AE ipsius CF, totuplex fiat & EB ipsius CG. & quoniam AE æque multiplex est CF atque EB a 1. hujus. ipsius CG; erit a AE æque multiplex CF, ac AB ipsius GF; ponitur autem æque multiplex AE ipsius CF, ac AB ipsius CD. æque multiplex igitur est AB utriusque GF b 4. Axiom. hujus. CD; ac propterea GF ipsi CD est b æqualis. communis auferatur CF. reliqua igitur GC æqualis est reliquæ DF. itaque quoniam AB æque multiplex est CF, ac EB ipsius CG, estque CG æqualis DF; erit AE æque multiplex CF, ac EB ipsius FD. æque multiplex autem ponitur AE ipsius CF, ac AB ipsius CD. ergo EB est æque multiplex FD, ac AB ipsius CD. & reliqua igitur EB reliquæ FD æque multiplex est, atque tota AB totius CD. Quare si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit atque ablata ablatæ, & reliqua reliquæ æque erit multiplex, ac tota totius. Quod oportebat demonstrare.



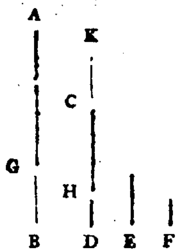
PROP. VI. THEOR.

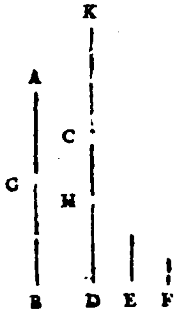
Si duæ magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices sint, & ablatæ quædam sint earundem æque multiplices, erunt & reliquæ vel eisdem æquales, vel ipsarum æque multiplices.

Duæ magnitudines AB CD duarum magnitudinum E F æque multiplices sint, & ablatæ AG CH earundem sint æque multiplices. dico & reliquas GB HD vel ipsis E F æquales esse,

esse, vel ipsarum æque multiplices. Sit enim primum G B æqualis E. dico & H D ipsi F esse æqualem. ponatur ipsi F æqualis C K. & quoniam A G æque multiplex est E ac C H ipsius F; estque G B quidem æqualis E; C K vero æqualis F: erit A B æque multiplex a E, ac K H ipsius F. æque autem multiplex ponitur A B ipsius E, ac C D ipsius F. ergo K H æque multiplex est F, ac C D ipsius F. quoniam igitur utraque ipsarum K H C D est æque multiplex F, erit K H æqualis C D. communis auferatur C H. ergo reliqua K C reliquæ H D est æqualis. sed K C est æqualis F. & H D igitur ipsi F est æqualis; ideoque G B ipsi E, & H D ipsi F æqualis erit. similiter demonstrabimus si G B multiplex fuerit ipsius E, & H D ipsius F æque multiplicem esse. Si igitur duæ magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices sint, & ablatæ quædam sint earundem æque multiplices, erunt & reliquæ, vel eisdem æquales, vel ipsarum æque multiplices. Quod demonstrare oportebat.

a 1. hujus.

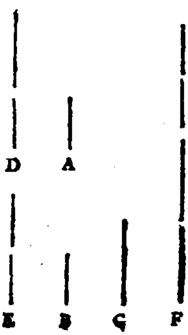




PROP. VII. THEOR.

Æquales ad eandem eandem habent proportionem, & eadem ad æquales.

Sint æquales magnitudines A B, alia autem quævis magnitudo C. dico utramque ipsarum A B ad C eandem proportionem habere: & C ad utramque A B similiter eandem habere proportionem. Sumantur ipsarum A B æque multiplices D E, & ipsius C alia utcunque multiplex F. quoniam igitur æque multiplex est D ipsius A, ac E ipsius B, estque A ipsi B æqualis; erit & D æqualis E; alia autem utcunque est F. ergo si D superat F, & E ipsam F superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. & sunt D E qui-



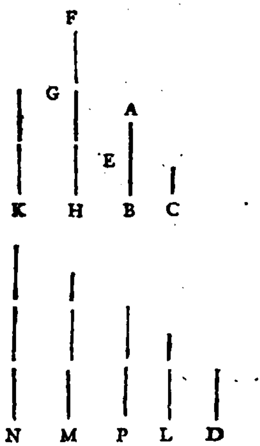
dem

dem ipsarum A B æque multiplices: F vero alia utcunque
a 5. Diffin. multiplex ipsius C. erit igitur a ut A ad C, ita B ad C. dico insuper C ad utramque ipsarum A B eandem habere proportionem. iisdem enim constructis similiter ostendemus D ipsi E æqualem esse, si igitur F superat D, ipsam quoque E superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. atque est F quidem ipsius C multiplex; D E vero aliæ utcunque æque multiplices ipsarum A B. ergo a ut C ad A, ita erit C ad B. Æquales igitur ad eandem, eandem habent proportionem, & eadem ad æquales. Quod ostendere oportebat.

PROP. VIII. THEOR.

Inæqualium magnitudinum major ad eandem, majorem habet proportionem, quam minor: & eadem ad minorem, majorem proportionem habet, quam ad majorem.

Sint inæquales magnitudines A B C, & sit A B major. sit alia vero utcunque D. dico A B ad D majorem habere proportionem quam C ad D. & D ad C majorem habere proportionem quam ad A B. Quoniam A B major est quam C, ponatur ipsi C æqualis B E, hoc est A B excedat C per A E. itaque A E aliquoties multiplicata major erit quam D. multiplicetur A E quoad fiat major quam D, sitque ipsius multiplex F G ipsa D major. quotuplex autem est F G ipsius A E, totuplex fiat G H ipsius E B, & K ipsius C. sumatur etiam ipsius D dupla quidem L tripla P, & sic deinceps una amplius, quoad ea quæ sumitur multiplex ipsius D, fiat prima quæ sit major quam K; sit illa N. sitque M multiplex ipsius D proxime minor quam N. quoniam itaque N prima multiplex est ipsius D quæ major est quam K; erit M non major quam K, hoc est K non erit minor quam M. & cum



æque multiplex sit F G ipsius A E ac G H ipsius E B, erit F G
a 1. hujus. æque multiplex A E ac F H ipsius A B a, æque autem multiplex est F G ipsius A E ac K ipsius C, ergo F H æque multiplex est A B, ac K ipsius C; hoc est F H K ipsarum A B & C sunt

sunt æque multiplices. rursus quoniam G H æque multiplex est ipsius E B ac K ipsius C, estque E B æqualis C erit & G H ipsi K æqualis [b]. sed K non minor est quam M non igitur G H minor erit quam M, sed est F G major quam D, ergo tota F H major erit quam M & D, sed M & D simul sunt æquales ipsi N quia M est multiplex ipsius D ipsi N proxime minor, quare F H major erit quam N, unde cum F H superat N, K vero ipsam N non superat, & sunt F H & K æque multiplices ipsarum A B & C, & est N ipsius D alia multiplex ergo [c] A B ad D majorem rationem habebit quam C ad D. Dico præterea & D ad C majorem habere proportionem, quam D ad A B. iisdem enim constructis similiter ostendemus N superare K, ipsam vero F H non superare, atque est N multiplex ipsius D, & F H K aliæ utcunque ipsarum A B C æque multiplices. ergo D ad C majorem proportionem habet [c], quam D ad B. Inæqualium igitur magnitudinum major ad eandem majorem habet proportionem, quam minor, & eadem ad minorem majorem proportionem habet, quam ad majorem. Quod ostendere oportebat.

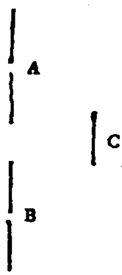
[b] 1. Axiom. hujus.

[c] 7. Diffin. hujus.

PROP. IX. THEOR.

Quæ ad eandem, eandem proportionem habent, inter se æquales sunt; & ad quas eadem, eandem habet proportionem, ipsæ inter se sunt æquales.

Habeat enim utraque ipsarum A B ad C eandem proportionem. dico A ipsi B æqualem esse. nam si non esset æqualis, non haberet [a] utraque ipsarum A B ad eandem eandem proportionem. habet autem. æqualis igitur est A ipsi B. Habeat rursus C ad utramque ipsarum A B eandem proportionem. dico A æqualem esse ipsi B. nisi enim ita sit, non [a] habebit C ad utramque A B eandem proportionem. habet autem. ergo A ipsi B necessario est æqualis. quæ igitur ad eandem, eandem proportionem habent, æquales inter se sunt: & ad quas eadem, eandem habet proportionem, ipsæ inter se sunt æquales. Quod demonstrare oportebat.



[a] 8. hujus.

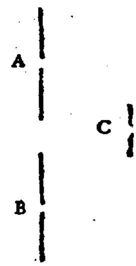
PROP.

PROP. X. THEOR.

Ad eandem proportionem habentium quæ majorem proportionem habet, illa major est; ad quam vero eadem majorem habet proportionem, illa minor est.

Habeat enim A ad C majorem proportionem, quam B ad C. dico A quam B majorem esse. si enim non est major, vel æqualis est, vel minor. æqualis autem non est A ipsi B, utraque enim ipsarum A B ad C eandem haberet [a] proportionem. atqui eandem non habet. non igitur A ipsi B est æqualis. sed neque minor est A quam B; haberet [b] enim A ad C minorem proportionem, quam B. atqui non habet minorem, non igitur A minor est, quam B. ostensum autem est neque esse æqualem. ergo A quam B major erit. habeat rursus C ad B majorem proportionem quam C ad A. dico B minorem esse quam A. si enim non est minor, vel æqualis est, vel major. æqualis utique non est B ipsi A; etenim C ad utramque ipsarum A B eandem proportionem [a] haberet. non habet autem. ergo A ipsi B non est æqualis. sed neque major est B quam A; haberet enim C ad B minorem [b] proportionem quàm ad A. atqui non habet. non igitur B quam A est major. ostensum autem est neque æqualem esse. ergo B minor erit quam A. Ad eandem igitur proportionem habentium quæ majorem proportionem habet, illa major est; & ad quam eadem majorem habet proportionem, illa minor est. Quod oportebat demonstrare.

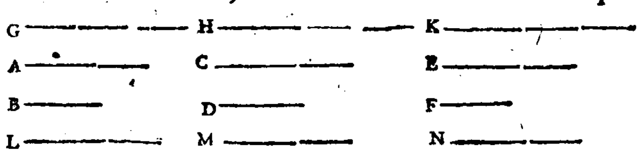
[a] 7. hujus.
[b] 8. hujus.



PROP. XI. THEOR.

Quæ eidem eædem sunt proportiones, & inter se eædem sunt.

Sint enim ut A ad B ita C ad D: ut autem C ad D ita E ad F. dico ut A ad B, ita esse E ad F. sumantur enim ipsarum quidem A C E æque multiplices G H K; ipsarum vero B D F aliæ utcunque æque multiplices L M N. Quoniam igitur

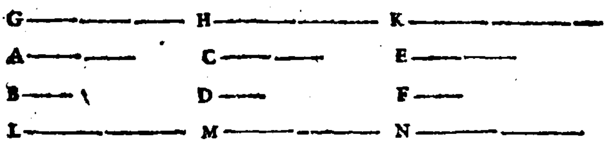


tur est ut A ad B, ita C ad D, & sumptæ sunt ipsarum A C æque multiplices G H, & ipsarum B D aliæ utcunque æque multiplices L M a; si G superat L, & H ipsam M superabit; & a 5. Diffin.
si æqualis, æqualis; & si minor, minor. rursus quoniam est hujus.
ut C ad D, ita E ad F, & sumptæ sunt ipsarum C E æque multiplices H K, ipsarum vero D F aliæ utcunque æque multiplices M N; si a H superat M, & K ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. sed si H superat M, & G superabit L; & si æqualis, æqualis; & si minor minor; quare si G superat L, & K ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. & sunt G K quidem ipsarum A E æque multiplices; L N vero ipsarum B F aliæ utcunque æque multiplices. ergo a ut A ad B, ita erit E ad F. Quæ igitur eidem eædem sunt proportiones, & inter se eædem sunt. Quod ostendisse oportuit.

PROP. XII. THEOR.

Si quotcunque magnitudines proportionales fuerint; ut una antecedentium ad unam consequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes consequentes.

Sint quotcunque magnitudines proportionales A B C D E F, & ut A ad B, ita sit C ad D, & E ad F. dico ut A ad B, ita esse A C E ad B D F. sumantur enim ipsarum A C E æ-



que multiplices G H K, & ipsarum B D F aliæ utcunque æque multiplices L M N. Quoniam igitur ut A ad B, ita est C ad D, E ad F, & sumptæ sunt ipsarum quidem A C E æque multiplices G H K, ipsarum vero B D F aliæ utcunque æque multiplices L M N; si a G superat L, & H ipsam M superabit, a 5 Diffin.
& K ipsam N; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. hujus.
quare & si G superat L, superabunt & G H K ipsas L M N; & si æqualis, æquales; & si minor, minores. suntque G, & G H K ipsarum A, & A C E æque multiplices, quoniam si fuerit quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices; quotuplex est una magnitudo unius, totuplices b erunt & b 1 hujus.
omnes omnium. eadem ratione & L & L M N ipsarum B, & B D F sunt æque multiplices. est igitur a ut A ad B, ita

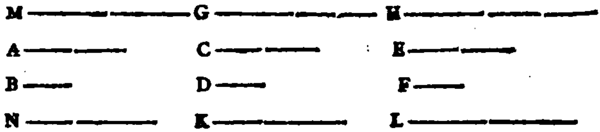
A C E

A C E ad B D F. Quare si quotcunque magnitudes proportionales fuerint, ut una antecedentium ad unam consequentium; ita erunt antecedentes omnes ad omnes consequentes. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XIII. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam, tertia autem ad quartam majorem proportionem habeat quam quinta ad sextam: & prima ad secundam majorem habebit proportionem quam quinta ad sextam.

Prima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat quam tertia C ad quartam D, tertia autem C ad quartam D majorem habeat proportionem quam quinta E ad sextam F. dico & primam A ad secundam B majorem proportionem



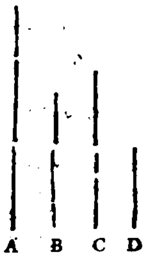
habere, quam quintam E ad sextam F. Quoniam enim C ad D majorem proportionem habet quam E ad F, sunt quædam ipsarum C E æque multiplices, & ipsarum D F aliæ utcun-
a 7. Diffin. hujus. que æque multiplices: & multiplex a quidem C superat multiplicem D; multiplex vero E non superat multiplicem F. sumantur, & sint ipsarum C E æque multiplices G H, & ipsarum D F aliæ utcunque æque multiplices K L, ita ut G quidem superet K: H vero ipsam L non superet: & quotuplex est G ipsius C, totuplex sit & M ipsius A; quotuplex autem K ipsius D, totuplex sit & N ipsius B. & quoniam est ut A ad B ita C ad D, & sumptæ sunt ipsarum A C æque multiplices M G, & ipsarum B D aliæ utcunque æque
b 5. Diffin. hujus. multiplices N K: si b M superat N, & G ipsam K superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. sed G superat K. ergo & M ipsam N superabit. H vero non superat L. suntque M H ipsarum A F æque multiplices, & N L ipsarum B F aliæ utcunque æque multiplices. ergo A ad B majorem proportionem habebit a quam E ad F. Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem quàm tertia ad quartam; tertia vero ad quartam majorem proportionem habeat quam quinta ad sextam: & prima ad secundam majorem habebit proportionem quam quinta ad sextam. Quod ostendere oportebat.

PROP.

PROP. XIV. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam; prima autem major sit quam tertia, & secunda quam quarta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

Prima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat quam tertia C ad quartam D: major autem sit A quàm C. dico & B quam D majorem esse. Quoniam enim A major est quam C, & alia est utcunque magnitudo B, habebit [a] A ad B majorem proportionem quàm C ad B; sed ut A ad B ita C ad D. ergo & C ad D majorem habebit [b] proportionem quàm C ad B. ad quam vero eadem majorem proportionem habet, illa minor [c] est. quare D est minor quàm B, ac propterea B quam D major erit. similiter demonstrabimus & si A æqualis sit ipsi C, & B ipsi D esse æqualem; & si A sit minor quam C, & B quàm D minorem esse. Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam; prima autem major sit quàm tertia, & secunda quam quarta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Quod demonstrare oportebat.

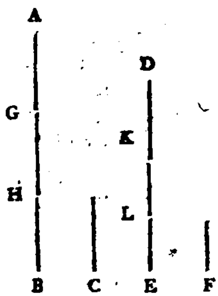


a 8. hujus.
b 13. hujus.
c 10. hujus.

PROP. XV. PROBL.

Partes inter se comparatæ eandem habent proportionem quam habent earum æque multiplices.

Sit enim A B æque multiplex C, ac D E ipsius F. dico ut C ad F, ita esse A B ad D E. Quoniam enim æque multiplex est A B ipsius C, ac D E ipsius F; quot magnitudines sunt in A B æquales ipsi C, totidem erunt & in D E æquales F. dividatur A B in magnitudines ipsi C æquales, quæ sint A G G H H B; & D E dividatur in magnitudines æquales F, videlicet in D K K L L E; erit igitur ipsarum A G G H H B multitudo æqualis multitudini D K K L L E. & quoniam æquales sunt A G G H H B, suntque D K K L

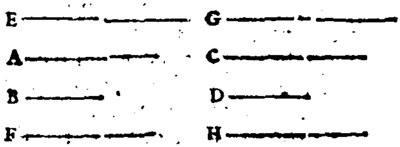


a 7. hujus. LE inter se æquales; ut AG ad DK, ita [a] erit GH ad KL, & b 12. hujus. HB ad LE. atque erit [b] ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes: est igitur ut AG ad DK, ita AB ad DE. sed AG ipsi C est æqualis, & DK ipsi F. ergo ut C ad F, ita erit AB ad DE. Partes igitur inter se comparatæ eandem habent proportionem quam habent earum æque multiplices. Quod ostendendum fuit.

PROP. XVI. THEOR.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & permutatæ proportionales erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales A B C D, sitque ut A ad B, ita C ad D. dico & permutatas proportionales esse, videlicet ut A ad C, ita esse B ad D. Sumantur enim ipsarum quidem A B æque multiplices E F, ipsarum vero C D aliæ utcunque æque multiplices G H. & quoniam



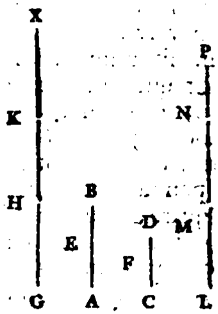
æque multiplex est E ipsius A, ac F ipsius B: partes autem a 15. hujus. inter se comparatæ eandem habent [a] proportionem quam habent earum æque multiplices; erit ut A ad B ita E ad F. ut b 11. hujus. autem A ad B ita C ad D. ergo & ut C ad D ita [b] E ad F. rursus quoniam G H sunt ipsarum C D æque multiplices, partes autem eandem proportionem habent, inter se comparatæ, quam habent earum æque multiplices; erit [a] ut C ad D ita G ad H. sed ut C ad D ita E ad F. ergo & ut E ad F ita G ad H. quod si quatuor magnitudines proportionales c 14. hujus. sint, prima autem major [c] sit quam tertia, & secunda quam quarta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. si igitur E superat G, & F ipsam H superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor; suntque E F ipsarum A B æque multiplices, & G H ipsarum C D aliæ utcunque æque mul- d 5 Diffin. tiplices, ergo [d] ut A ad C ita erit B ad D. Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, & permutatæ proportionales erunt. Quod ostendere oportebat.

PROP.

PROP. XVII. THEOR.

Si compositæ magnitudines sint proportionales, & divisæ proportionales erunt.

Sint compositæ magnitudines proportionales A B B E C D D F. hoc est ut A B ad B E, ita sit C D ad D F. dico etiam divisas proportionales esse, videlicet ut A E ad E B ita esse C F ad F D. sumantur enim ipsarum quidem A E E B C F F D æque multiplices G H H K L M M N, ipsarum vero E B F D aliæ utcunque æque multiplices K X N P. Quoniam æque multiplex est G H ipsius A E, ac H K ipsius E B; erit [a] G H ipsius A E æque multiplex, ac G K ipsius A B. æque autem multiplex est G H ipsius A E, ac L M ipsius C F. ergo G K æque multiplex est A B, ac L M ipsius C F. rursus quoniam æque multiplex est L M ipsius C F, ac M N ipsius F D; erit [a] L M æque multiplex C F, ac L N ipsius C D. sed æque multiplex erat L M ipsius C F, ac G K ipsius A B. æque igitur multiplex est G K ipsius A B, ac L N ipsius C D. quare G K L N ipsarum A B C D æque multiplices erunt. rursus quoniam æque multiplex est H K ipsius E B, ac M N ipsius F D: est autem & K X ipsius E B æque multiplex, ac N P ipsius F D; & composita H X ipsius E B æque multiplex est [b], ac M P ipsius F D. quare cum sit ut A B ad B E, ita C D ad D F & sumptæ sint ipsarum quidem A B C D æque multiplices G K L N, ipsarum vero E B F D aliæ utcunque æque multiplices H X M P: si [c] G K superat H X, & L N superabit M P; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. superet igitur G K ipsam H X, communique ablata H K, & G H ipsam K X superabit. sed si G K superat H X, & L N superat M P; itaque superat L N ipsam M P: communique M N ablata, & L M superabit N P. quare si G H superat K X, & L M ipsam N P superabit. similiter demonstrabimus & si G H sit æqualis K X, & L M ipsi N P esse æqualem; & si minor, minorem. sunt autem G H L M ipsarum A E C F æque multiplices, & ipsarum E B F D aliæ utcunque æque multiplices K X N P. ergo [c] ut A E ad E B ita erit C F ad F D. Si igitur compositæ magnitudines sint proportionales, & divisæ proportionales erunt. Quod demonstrare oportebat.



[a] 1. hujus.

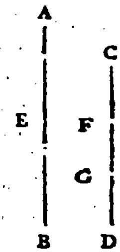
[b] 2. hujus.

[c] 5. Diffin. hujus.

PROP. XVIII. THEOR.

Si divisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt.

Sint divisæ magnitudines proportionales A E E B C F F D: hoc est ut A E ad E B, ita C F ad F D. dico etiam compositas proportionales esse, videlicet ut A B ad B E, ita esse C D ad D F. Si enim non est ut A B ad B E, ita C D ad D F; erit ut A B ad B E, ita C D vel ad minorem quàm F D, vel ad majorem. sit primo ad minorem, nempe ad D G. & quoniam est ut A B ad B E, ita C D ad D G; compositæ magnitudines sunt proportionales; ergo & divisæ proportionales



a 17. hujus. erunt a. est igitur ut A E ad E B, ita C G ad G D. ponitur autem ut A E ad E B, ita C F ad
b 11. hujus. F D. quare & b ut C G ad G D, ita C F ad F D. at C G prima major est quam tertia C F. ergo & secunda
c 14. hujus. D G quàm quarta D F major c erit. sed & minor, quod fieri non potest. non igitur est ut A B ad B E, ita C D ad D G. similiter ostendemus neque esse ad majorem quàm D F. ad ipsam igitur D F sit necesse est. Quare si divisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XIX. THEOR.

Si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam: & reliqua ad reliquam erit ut tota ad totam.

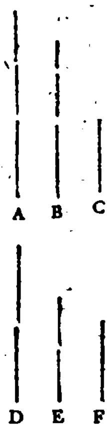
Sit enim ut tota A B ad totam C D, ita ablata A E ad ablatam C F. dico & reliquam E B ad reliquam F D ita esse ut tota A B ad totam C D. Quo-
a 16. hujus. niam enim est ut tota A B ad totam C D, ita A E ad C F. & permutando erit a ut A B ad A E, ita C D ad C F. quoniam compositæ magnitudines sunt proportionales, & divisæ
b 17. hujus. proportionales erunt b, ut igitur B E ad E A, ita D F ad F C: rursusque permutando ut a B E ad D F, ita E A ad F C. sed ut E A ad C F,
c 11. hujus. ita posita est A B ad C D. & reliqua c igitur E B erit ad reliquam F D, ut tota A B ad totam C D. Quare si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam; & reliqua ad reliquam erit ut tota ad totam. Quod demonstrare oportebat.

Cor. Si quatuor magnitudines proportionales sint, per conversionem rationis proportionales erunt. Sit enim ut AB ad BE, ita CD ad DF, erit permutando AB ad CD, ita BE ad DF. quare cum est tota AB ad totam CD, ut ablata BE ad ablatam DF, erit & reliqua AE ad reliquam CF, ut tota AB ad totam CD. quare rursus permutando & invertendo erit ut AB ad AE, ita CD ad CF. quod est per conversionem rationis.

PROP. XX. THEOR.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur, in eadem proportione: ex æquali autem prima major sit, quàm tertia; & quarta quàm sexta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

Sint tres magnitudines A B C, & aliæ ipsis numero æquales D E F; binæ sumptæ, & in eadem proportione: sitque ut A ad B, ita D ad E, & ut B ad C, ita E ad F: ex æquali autem major sit A quam C. dico & D quam F majorem esse; & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem. Quoniam enim A major est quàm C, alia vero est utcunque B, & major ad eandem majorem habet [a] proportionem quàm minor; habebit A ad B majorem proportionem quam C ad B. sed ut A ad B, ita D ad E; & invertendo ut C ad B, ita F ad E. ergo & D ad E majorem habet proportionem quàm F ad E. ad eandem vero proportionem habentium quæ majorem habet proportionem, illa major [b] est. major igitur est D quam F. similiter ostendemus & si A sit æqualis C, & D ipsi F æqualem esse; & si minor, minorem. Si igitur tres magnitudines fuerint, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur, & in eadem proportione: ex æquali autem prima major sit quàm tertia; & quarta quam sexta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Quod ostendere oportebat.



a 8. hujus.

b 10. hujus.

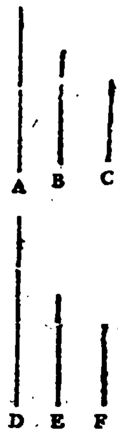
PROP. XXI. THEOR.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur & in eadem proportione; sit autem perturbata earum analogia, & ex æquali prima major sit quam tertia; & quarta quam sexta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

Sint tres magnitudines proportionales A B C, & aliæ ipsis numero æquales D E F, binæ sumptæ & in eadem proportione. sit autem perturbata earum analogia, videlicet ut A quidem ad B, ita E ad F; ut vero B ad C, ita D ad E; & ex æquali A major sit quam C. dico & D quam F majorem esse; & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem. Quoniam enim major est A quam C, alia vero est B; habebit [a] A ad B majorem proportionem quam C ad B. sed ut A ad B, ita E ad F: & invertendo ut C ad B, ita E ad D. quare & E ad F majorem habebit proportionem quam E ad D. ad quam vero eadem majorem proportionem habet illa minor est [b]. minor igitur est F quàm D; ac propterea D quam F major erit. similiter ostendemus & si A sit æqualis C, & D ipsi F esse æqualem; & si minor, minorem. Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ sumantur & in eadem proportione; sit autem perturbata earum analogia, & ex æquali autem prima major sit quam tertia; & quarta quam sexta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Quod demonstrare oportebat.

a 8. hujus.

b 10. hujus.

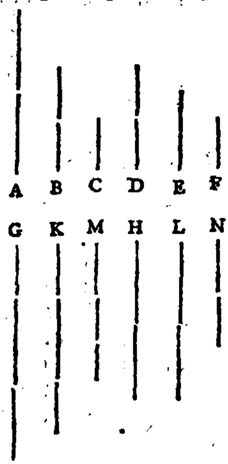


PROP. XXII. THEOR.

Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportione; & ex æquali in eadem proportione erunt.

Sint quotcunque magnitudines A B C, & aliæ ipsis numero æquales D E F, binæ sumptæ in eadem proportione, hoc est ut A quidem ad B, ita D ad E, ut autem B ad C, ita E ad F. dico & ex æquali in eadem proportione esse, ut A ad C, ita D ad F. sumantur enim ipsarum quidem A D æque multiplices G H; ipsarum vero B E aliæ utcunque æque multiplices

plices K L, & ipsarum C F aliæ utcunque æque multiplices M N. Quoniam igitur est ut A ad B, ita D ad E, & sumptæ sunt ipsarum A D æque multiplices G H, & ipsarum B E aliæ utcunque æque multiplices K L; erit ut a G ad K, ita H ad L. eadem quoque ratione erit ut K ad M, ita L ad N. & cum sint tres magnitudines G K M, & aliæ ipsis numero æquales H L N, binæ sumptæ & in eadem proportione; ex æquali b si G superat M, & H ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. suntque G H ipsarum A D æque multiplices, & M N ipsarum C F aliæ utcunque æque multiplices. ut igitur A ad C, ita erit c D ad F. Quare si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportione, & ex æquali in eadem proportione erunt. Quod demonstrare oportebat.



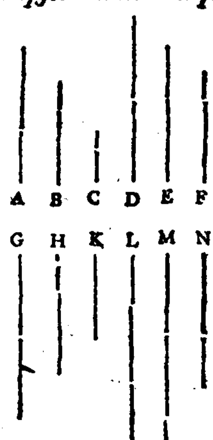
a 4. hujus.

b 10. hujus.

c Diffin. 5. hujus.

PROP. XXIII. THEOR.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportione; sit autem perturbata earum analogia: & ex æquali in eadem proportione erunt.



Sint tres magnitudines A B C, & aliæ ipsis numero æquales, binæ sumptæ in eadem proportione, D E F; sit autem perturbata earum analogia, hoc est sit ut A ad B, ita E ad F, & ut B ad C, ita D ad E. dico ut A ad C, ita esse D ad F. Sumantur ipsarum quidem A B D æque multiplices G H L: ipsarum vero C E F aliæ utcunque æque multiplices K M N. & quoniam G H æque multiplices sunt ipsarum A B, partes autem eandem habent proportionem quam habent æque

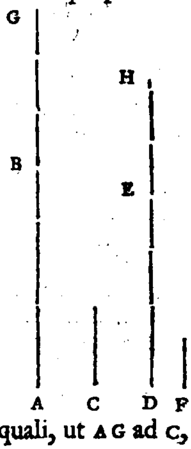
ipsa-

a 15 hujus. ipsarum multiplices: erit a ut A ad B, ita G ad H. & simili ratione ut E ad F, ita M ad N. atque est ut A ad B, ita E ad
b 11. hujus F. ut b igitur G ad H, ita M ad N. rursus quoniam est ut B ad C, ita D ad E, & sumptæ sunt ipsarum B D æque multiplices H L, ipsarum vero C E aliæ utcunque æque multiplices K M: erit ut H ad K, ita L ad M. ostensum autem est & ut G ad H, ita esse M ad N. quoniam igitur tres magnitudines proportionales sunt G H K, & aliæ ipsis numero æquales L M N, binæ sumptæ in eadem proportione, estque ipsarum perturbata
c 21. hujus. analogia; ex æquali, si c G superat K, & L ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. sunt autem G K ipsarum A C æque multiplices: & L N æque multiplices ipsarum D F. ut igitur A ad C, ita erit D ad F. Quare si fuerint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportione, sit autem perturbata earum analogia; & ex æquali in eadem proportione erunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIV. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; habeat autem & quinta ad secundam proportionem eandem, quam sexta ad quartam: & composita prima cum quinta ad secundam eandem proportionem habebit, quam tertia cum sexta ad quartam.

Prima A B ad secundam C eandem habeat proportionem, quam tertia D E ad quartam F. habeat autem & quinta B G ad secundam C proportionem eandem quam sexta E H ad quartam F. dico & compositam primam cum quinta A G ad secundam C eandem proportionem habere, quam tertiam cum sexta D H ad quartam F. Quoniam enim est ut B G ad C, ita E H ad F; erit invertendo ut C ad B G, ita F ad E H. & quoniam ut A B ad C, ita est D E ad F: ut autem C ad B G, ita
a 22. hujus. F ad E H; erit a ex æquali ut A B ad B G, ita D E ad E H. quod cum divisæ magnitudines sint proportionales, & com-
b 18. hujus. positæ proportionales b erunt. ut igitur A G ad G B, ita est D H ad H E. sed &
c hypoth. ut c G B ad C, ita H E ad F. ergo, ex a æquali, ut A G ad C, ita erit

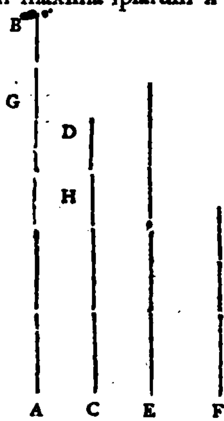


erit DH ad F. Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem quàm tertia ad quartam: habeat autem & quinta ad secundam proportionem eandem quam sexta ad quartam: & composita prima cum quinta ad secundam eandem proportionem habebit quam tertia cum sexta ad quartam. Quod ostendere oportebat.

PROP. XXV. THEOR.

Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum & minima, duabus reliquis majores erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales AB CD E F; & sit ut AB ad CD, ita E ad F. sit autem maxima ipsarum AB & F minima. dico AB & F ipsis CD E majores esse. ponatur enim ipsi quidem E æqualis AG, ipsi vero F æqualis CH. Quoniam igitur est ut AB ad CD, ita E ad F: estque AG æqualis E, & CH æqualis F; erit ut AB ad DC, ita AG ad CH. & quoniam ut tota AB ad totam CD, ita ablata AG ad ablatam CH; & reliqua GB ad reliquam HD erit a ut tota AB ad CD totam. major autem est AB quàm CD. ergo & GB quàm HD major erit. quòd cum AG sit æqualis ipsi E, & CH ipsi F; erunt AG & F ipsi CH & E æquales. si autem inæqualibus æqualia addantur, tota inæqualia erunt. ergo GB HD inæqualibus existentibus, quippe cum GB sit major, si ipsi quidem GB addantur AG & F, ipsi vero HD addantur CH & E: fient AB & F, ipsis CD & E necessario majores. Si igitur quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum & minima, duabus reliquis majores erunt. Quod demonstrare oportebat.



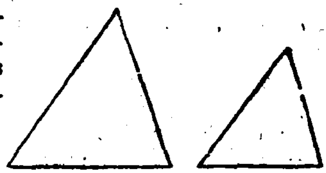
a 19. huju

EUCLIDIS
ELEMENTORUM.
LIBER SEXTUS.

DIFFINITIONES.

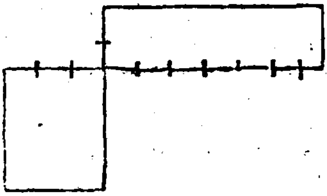
I

Similes figuræ rectilineæ sunt quæ & singulos angulos æquales habent, & circa æquales angulos latera proportionalia.



II.

Reciprocæ figuræ sunt quando in utraque figura antecedentes, & consequentes rationum fuerint termini.



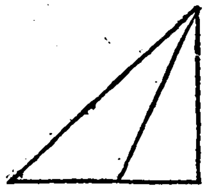
III.

Extrema ac media ratione secari recta linea dicitur, quando fit ut tota ad majus segmentum, ita majus segmentum ad minus.

IV.

IV.

Altitudo cujusque figuræ est, linea perpendicularis quæ à vertice ad basim ducitur.



V.

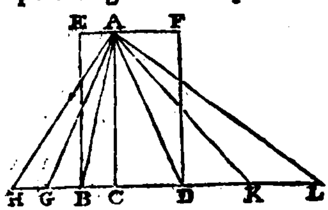
Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam efficiunt rationem.

PROPOSITIO I.

THEOREMA.

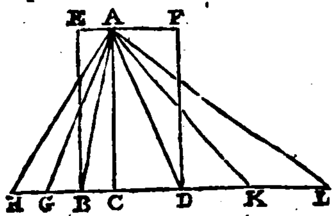
Triangula, & parallelogramma quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases.

Sint triangula quidem ABC ACD, parallelogramma vero EC CF, quæ eandem habeant altitudinem, videlicet perpendicularem à puncto A ad BD ductam. dico ut basis BC ad CD basim, ita esse triangulum ABC ad triangulum ACD, & parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. producatur BD ex utraque parte ad puncta H L, & ipsi quidem BC basi æquales quotcunque ponantur BG GH, ipsi vero basi CD ponantur quotcunque æquales DK KL, & AG AH AK AL jungantur. Quoniam igitur CB BG GH inter se æquales sunt, erunt & triangula AHG AGB ABC inter ª se æqualia. ergo quotuplex est basis HC ipsius BC basis, totuplex est AHC triangulum trianguli ABC. eadem ratione quotuplex est LC basis ipsius basis CD, totuplex est & triangulum ALC ipsius ACD trianguli: & si æqualis est HC basis basi CL, & triangulum AHC triangulo ALC est ª æquale: & si basis HC basim CL superat, & triangulum AHC superabit triangulum ALC: & si minor, minus. quatuor igitur magnitudinibus existentibus, videlicet duabus basibus BC CD, & duobus triangulis ABC ACD, sumpta sunt æque multiplicia basis quidem BC, & ABC trianguli, videlicet



ª 38. primi.

videlicet basis HC, & AHC triangulum: basis vero CD, & trianguli ACD, alia utcunque æque multiplicia, nempe CL basis, & ALC triangulum; atque ostensum est si HC basis basim CL superat, & triangulum AHC superare triangulum ALC; & si æqualis, æquale; & si minor, minus.



b Diffin. 5. quinti. est igitur b ut BC basis ad basim CD, ita triangulum ABC ad ACD triangulum. & quoniam trianguli
c 41. primi. ABC duplum est c parallelogrammum EC, & trianguli ACD parallelogrammum FC duplum c, partes autem cum pariter multiplicibus eandem inter se proportionem habent: igitur ut ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. quoniam igitur ostensum est ut basis BC ad CD basim, ita esse ABC triangulum ad triangulum ACD; ut autem ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogram-
d 11. quinti mum EF ad CF parallelogrammum; erit d ut BC basis ad basim CD, ita parallelogrammum EC ad FC parallelogrammum. Quare triangula & parallelogramma quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases. Quod demonstrare oportebat.

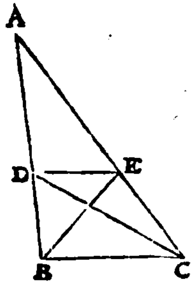
PROP. II. THEOR.

Si uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones conjungit recta linea, reliquo trianguli lateri parallela erit.

Trianguli enim ABC uni laterum BC, parallela ducatur DE. dico ut DB ad DA, ita esse CE ad EA. jungantur BE CD.
a 37. primi. triangulum igitur BDE triangulo CDE est a æquale, in eadem enim sunt basi DE, & in eisdem DF & BC parallelis; aliud autem triangulum est ADE: sed æqualia ad idem eandem
b 7. quinti. habent b proportionem; ergo ut triangulum BDE ad triangulum ADE, ita est CDE triangulum ad triangulum ADE.
c 1. hujus. ut autem triangulum BDE ad triangulum ADE, ita c est BD ad DA; nam cum eandem altitudinem habeant, videlicet perpendicularem à puncto E ad AB ductam, inter se sunt ut bases. & ob eandem causam ut CDE triangulum ad triangulum ADE, ita CE ad EA. & ut igitur BD ad DA,
d 11. quinti. ita est d CE ad EA. Et si trianguli ABC latera AB AC

pro-

proportionaliter secta sint, *i.e.* ut BD ad DA, ita sit CE ad EA; & jungatur DE. dico DE ipsi BC parallelam esse. iisdem constructis, quoniam est ut BD ad DA, ita CE ad EA; ut autem BD ad DA, ita [e] est BDE triangulum ad triangulum ADE; & ut CE ad EA, ita CDE triangulum [e] ad triangulum ADE, erit ut triangulum BDE ad triangulum ADE, ita [e] CDE triangulum ad triangulum ADE. quod cum utrumque triangulorum BDE CDE ad triangulum ADE eandem habeat proportionem; erit BDE triangulum [f] triangulo CDE æquale; & sunt in eadem basi DE. æqualia autem triangula, & in eadem basi constituta, etiam in eisdem [g] sunt parallelis. ergo DE ipsi BC parallela est. Si igitur uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones conjungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit. Quod oportebat demonstrare.

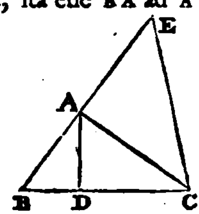


e 11. quinti.
f 9. quinti.
g 39 primi

PROP. III. THEOR.

Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea secet etiam basim; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera. & si basis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam secabit.

Sit triangulum ABC, & secetur angulus BAC bifariam [a] recta linea AD. dico ut BD ad DC, ita esse BA ad AC. ducatur per C ipsi DA parallela [b] CE, & producta BA conveniat cum ipsa in E puncto. Quoniam igitur in parallelas AD EC incidit recta linea quædam AC, erit [c] ACE angulus angulo CAD æqualis. sed CAD angulus ponitur æqualis angulo BAD. ergo & BAD ipsi ACE angulo æqualis erit. rursus quoniam in parallelas AD EC recta linea



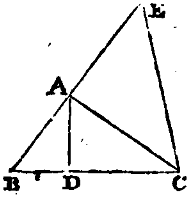
a 9. primi.
b 31. primi.
c 29. primi.

linea BAE incidit, exterior angulus BAD æqualis est [c] interiori AEC. ostensus autem est & angulus ACE angulo BAD æqualis. ergo & ACE ipsi AEC æqualis erit: ac propterea

d 6.primi. latus AE æquale [d] lateri AC. & quoniam uni laterum trianguli BCE, videlicet ipsi EC

e 2.hujus. parallela ducta est AD; erit [e] ut BD ad DC, ita BA ad AE; æqualis autem est AE ipsi AC.

f 7.quinti. est igitur [f] ut BD ad DC, ita BA ad AC. Et si sit ut BD ad DC, ita BA ad AC, & AD jungatur. dico angulum BAC



bifariam sectum esse recta linea AD. iisdem enim constructis, quoniam est ut BD ad DC, ita BA ad AC; sed & ut

g 9.quinti. BD ad DC, ita [g] BA ad AE, etenim uni laterum trianguli BCE, videlicet ipsi EC parallela ducta est AD, erit & ut BA ad AC, ita BA ad AE. ergo AC est [g] æqualis AE, ac propterea & angulus AEC angulo ECA æqualis. sed angu-

h 29.primi. lus quidem AEC est æqualis [h] angulo exteriori BAD; angulus vero ACE æqualis [h] alterno CAD. quare & BAD angulus ipsi CAD æqualis erit. angulus igitur BAC bifariam sectus est recta linea AD. Ergo si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea etiam basim secet; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera. & si basis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam secabit. Quod oportebat demonstrare.

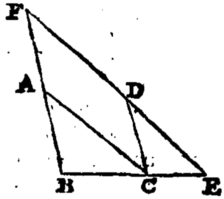
PROP. IV. THEOR.

Æquiangulorum triangulorum latera quæ circum æquales angulos proportionalia sunt; & homologa, sive ejusdem rationis, sunt latera quæ æqualibus angulis subtenduntur.

Sint æquiangula triangula ABC DCE, quæ angulum quidem ABC angulo DCE, angulum vero ACB angulo DEC æqualem habeant, & præterea angulum BAC angulo CDE. dico triangulorum ABC DCE proportionalia esse latera quæ sunt circa æquales angulos; & homologa, sive ejusdem rationis, latera esse quæ æqualibus angulis subtenduntur. ponatur BC in directum ipsi CE. Et quoniam

a 17.primi. anguli ABC ACB duobus rectis minores [a] sunt, æqualis autem est angulus ACB angulo DEC; erunt ABC DEC anguli

guli duobus rectis minores. quare BA ED productæ inter se convenient [b]; producantur, & conveniant in puncto F. [b] 12. axio. primi.
& quoniam angulus DCE est æqualis angulo ABC; erit [c] BF ipsi DC parallela. rursus quoniam æqualis est angulus ACB angulo DEC, parallela [c] erit AC ipsi FE. parallelogrammum igitur est FACD; ac propterea FA quidem ipsi CD, AC vero ipsi FD est [d] æqualis. [c] 28. primi. [d] 34. primi.

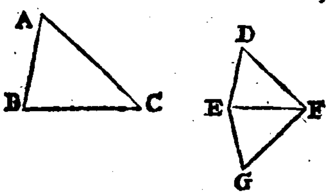


& quoniam uni laterum trianguli FBE, videlicet ipsi FE, parallela ducta est AC; erit [e] ut BA ad AF, ita BC ad CE. æqualis autem est AF ipsi CD. ut igitur BA ad CD. ita BC ad CE, & permutando ut BA ad BC ita CD ad CE. rursus quoniam CD parallela est BF, erit [e] ut BC ad CE, ita FD ad DE. sed FD est æqualis AC. ergo ut [f] BC ad CE, ita AC ad DE. permutando igitur, ut BC ad CA ita CE ad ED. itaque quoniam ostensum est, ut AB ad BC ita DC ad CE, ut autem BC ad CA ita CE ad ED: erit [g] ex æquali, ut BA ad AC ita CD ad DE. Æquiangulorum igitur triangulorum proportionalia sunt latera quæ circum æquales angulos. & homologa, sive ejusdem rationis, latera sunt quæ æqualibus angulis subtenduntur. Quod demonstrare oportebat. [e] 2. hujus. [f] 7. quinti. [g] 22 quinti.

PROP. V. THEOR.

Si duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur.

Sint duo triangula ABC DEF, quæ latera proportionalia habeant, hoc est, sit ut AB quidem ad BC, ita DE ad EF: ut autem BC ad CA, ita EF ad FD: & adhuc ut BA ad AC, ita ED ad DF. dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse, & æquales habere angulos quibus homologa latera subtenduntur, angulum quidem ABC angulo DEF, angulum vero BCA angulo EFD, & præterea angulum BAC angulo EDF.



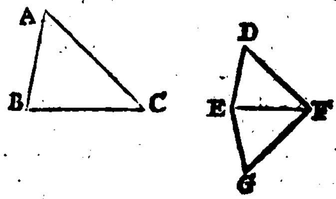
Constituatur enim [a] ad rectam lineam EF, & ad puncta in ipsa E F, angulo quidem ABC æqualis angulus FEG; angulo autem BCA angulus [a] 23. primi.

b Cor. 32. primi. gulus EFG, quare reliquus BAC angulus [b] reliquo EGF est æqualis. ideoque æquiangulum est triangulum ABC triangulo EGF. triangulorum igitur ABC EGF proportionalia sunt latera quæ circum æquales angulos, & homologa latera sunt quæ æqualibus angulis subtenduntur. ergo ut AB ad

c 4. hujus. BC [c], ita GE ad EF. sed ut AB ad BC, ita DE ad EF. ut

d 11 quinti. igitur DE ad EF, ita [d] GE ad

e 9. quinti. EF. quod cum utraque ipsarum DE EG ad EF eandem proportionem habeat, erit [e] DE ipsi EG æqualis. eadem ratione & DF æqualis FG. itaque quoniam DE est æqualis EG, communis autem EF; duæ DE EF duabus GE EF æquales sunt, & basis DF basi FG



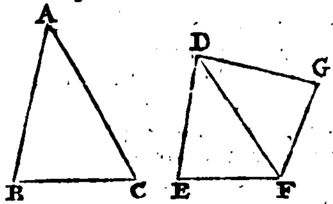
f 8. primi. æqualis. angulus igitur DEF est æqualis [f] angulo GEF, & DEF triangulum æquale triangulo GEF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo angulus quidem DEF est æqualis angulo GEF, angulus vero EDF æqualis angulo EGF; & quoniam angulus FED est æqualis angulo GEF, & angulus GEF angulo ABC, erit & angulus ABC angulo FED æqualis. eadem ratione & angulus ACB æqualis est angulo DFE, & adhuc angulus ad A angulo ad D. ergo ABC triangulum triangulo DEF æquiangulum erit. Si igitur duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula; & æquales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur. Quod oportebat demonstrare.

PROP. VI. THEOR.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos quibus æqualia latera subtenduntur.

Sint duo triangula ABC DEF, unum angulum BAC uni angulo EDF æqualem habentia, circa æquales autem angulos latera proportionalia, hoc est, sit ut BA ad AC, ita ED ad DF. dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse, & angulum quidem ABC habere æqualem angulo DEF; angulum vero ACB angulo DFE.

a 23 primi. Constituatur [a] enim ad rectam lineam DF, & ad puncta in ipsa DF, alterutri angulorum BAC EDF æqualis angulus FDG, angulo autem ACB æqualis DFG. reliquus igitur ad B reliquo ad G est [b] æqualis. ergo triangulum ABC triangulo DGF, æquiangulum est; ac propterea ut BA ad AC ita [c] est GD ad DF: ponitur autem & ut BA ad AC, ita ED ad DF. ut igitur [d] ED ad DF, ita GD ad DF. quare ED æqualis est [e] ipsi DG, & communis DF. ergo duæ ED DF duabus GD DF æquales sunt, & angulus EDF angulo GDF est æqualis; basis igitur EF est [f] æqualis basi FG, triangulumque DEF æquale triangulo GDF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo angulus quidem DFG est æqualis angulo DFE; angulus vero ad G angulo ad E. sed angulus DFG æqualis est angulo ACB: & angulus igitur ACB angulo DFE est æqualis. ponitur autem & BAC angulus æqualis angulo EDF. ergo & reliquus qui ad B æqualis est reliquo ad E. æquiangulum igitur est triangulum ABC triangulo DEF. Quare si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur. Quod ostendere oportebat.



[b] Cor. 32. primi.
[c] 4. hujus.
[d] 11 quinti.
[e] 9. quinti.
[f] 4. primi.

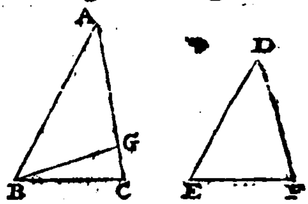
PROP. VII. THEOR.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum utrumque, simul vel minorem, vel non minorem recto, æquiangula erunt triangula; & æquales habebunt angulos circa quos latera sunt proportionalia.

Sint duo triangula ABC DEF, unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum BAC angulo EDF æqualem, circa alios autem angulos ABC DEF latera proportionalia, ut sit DE ad EF, sicut AB ad BC: & reliquorum quæ ad C F. utrumque simul minorem vel non minorem recto. dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse; angulumque ABC æqualem angulo DEF, & reliquum videlicet qui ad C reliquo qui ad F æqualem. Si inæqualis est angulus ABC angulo DEF, unus ipsorum major erit. sit major ABC: & constituatur [a] ad rectam lineam AB, & ad punctum in ipsa B, angulo DEF æqualis angulus ABG. & quo-

[a] 23. primi.

quoniam angulus quidem A est æqualis angulo D, angulus vero ABG angulo DEF: erit reliquus AGB reliquo DFE æqualis.[b] æquiangulum igitur est ABG triangulum triangulo DEF. quare ut[c] AB ad BG, sic DE ad EF: utque DE ad EF, sic ponitur AB ad BC. & ut igitur AB ad BC, sic AB ad BG. quod cum AB ad utramque BC BG eandem habeat proportionem, erit BC ipsi BG æqualis[d]: ac propterea angulus ad C est æqualis angulo BGC. quare uterque angulorum BCG BGC minor est recto, igitur qui ei deinceps est AGB major est recto. atque ostensus est angulus AGB æqualis angulo qui ad F. angulus igitur qui ad F recto major est. atqui ponitur non major: cum C non est major recto, quod est absurdum. non igitur inæqualis est angulus ABC angulo DEF. ergo ipsi est æqualis. est autem, & angulus ad A æqualis ei qui ad D. quare & reliquus qui ad C æqualis reliquo qui ad F. æquiangulum igitur est ABC triangulum triangulo DEF. Si igitur duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum utrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto: æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos circa quos proportionalia sunt latera. Quod oportebat demonstrare.

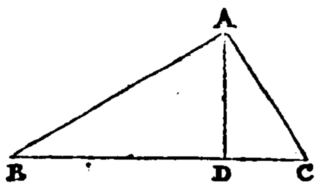


[b] Cor. 32. primi.
[c] 4. hujus.
[d] 9. quinti.
[e] 5. primi.

PROP. VIII. THEOR.

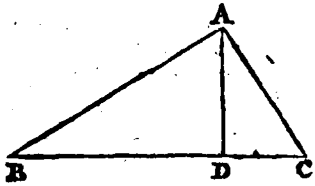
Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem sunt triangula, & toti, & inter se similia sunt.

Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC: & à puncto A ad BC perpendicularis ducatur AD. dico triangula ABC ADC toti triangulo ABC, & inter se similia esse. Quoniam enim angulus BAC est æqualis angulo ADB, rectus enim uterque est, & angulus ad B communis duobus triangulis ABC ABD; erit[a] reliquus ACB reliquo BAD æqualis. æquiangulum igitur est triangulum ABC triangulo ABD. quare[b] ut BC quæ subtendit angulum rectum trianguli ABC, ad BA subtendentem



[a] Cor. 32. primi.
[b] 4. hujus.

tem angulum rectum trianguli A B D, sic ipsa A B subtendens angulum ad C trianguli A B C, ad D B subtendentem angulum æqualem angulo ad C, videlicet B A D ipsius A B D trianguli: & adhuc A C ad A D subtendentem angulum ad B communem duobus triangulis. ergo triangulum A B C triangulo A B D æquiangulum [c] est; & circa æquales angulos latera habet proportionalia. simile igitur [c] est triangulum A B C triangulo A B D. eadem ratione demonstrabimus etiam A D C triangulum triangulo A B C simile esse. quare utrumque ipsorum A B D A D C toti A B C triangulo est simile. Dico insuper triangula A B D A D C etiam inter se similia esse. Quoniam enim angulus B D A rectus est æqualis recto A D C; sed & B A D ostensus est æqualis angulo ad C; erit reliquus ad B reliquo D A C æqualis. æquiangulum igitur est triangulum A B D triangulo A D C. ergo [b] ut B D trianguli A B D subtendens B A D angulum, ad D A trianguli A D C subtendentem angulum qui est ad C, æqualem angulo B A D, sic ipsa A D trianguli A B D subtendens angulum ad B, ad D C subtendentem angulum D A C ei qui est ad B æqualem; & adhuc B A ad A C subtendentem angulum rectum A D C. simile igitur est A B D triangulum triangulo A D C. Quare si in triangulo rectangulo ab angulo recto ab basim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem sunt triangula, & toti, & inter se similia sunt. Quod oportebat demonstrare.



[c] 1. Diffin. hujus.

Cor. Ex hoc manifestum est, in triangulo rectangulo, ab angulo recto ad basim perpendicularem ductam, mediam proportionalem esse inter segmenta basis: & præterea inter basim & basis segmentum, latus utrumlibet segmento conterminum, medium esse proportionale.

PROP. IX. PROBL.

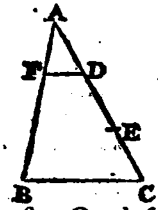
A data recta linea imperatam partem abscindere.

Sit data recta linea A B. oportet ab ipsa A B imperatam partem abscindere. Imperetur pars tertia; & ducatur à puncto A quædam recta linea A C, quæ cum ipsa A B angulum quemlibet contineat; sumaturque in A C quodvis punctum D, & ipsi A D æquales [a] ponantur D E E C, deinde

[a] 3. primi.

b 31. primi. jungatur BC; per D ipsi BC parallela b ducatur DF. Itaque quoniam uni laterum trianguli ABC, videlicet ipsi BC, parallela ducta est FD; erit c ut CD ad DA, ita BF ad FA; dupla autem est CD ipsius DA. ergo & BF ipsius FA dupla erit. tripla igitur est BA ipsius AF. quare à data recta linea AB imperata tertia pars AF abscissa est. Quod facere oportebat.

c 2. hujus.



PROP. X. PROBL.

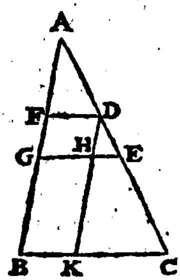
Datam rectam lineam insectam, datæ rectæ lineæ sectæ similiter secare.

Sit data quidem recta linea insecta AB, secta vero AC. oportet rectam lineam AB insectam ipsi AC sectæ similiter secare. sit secta AC in punctis D & E, & ponantur ita, ut angulum quem vis contineant, junctaque BC per puncta quidem D & E ipsi BC parallelæ a ducantur DF EG: per D vero ipsi AB ducatur parallela DHK. parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum FH HB: ac propterea DH quidem est b æqualis FG, HK vero ipsi GB. & quoniam uni laterum trianguli DKC, ipsi scilicet KC, parallela ducta est HE; erit c ut CE ad ED, ita KH ad HD. æqualis autem est KH quidem ipsi BG, HD vero ipsi GF. est igitur ut CE ad ED, ita BG ad GF. rursus quoniam uni laterum trianguli AGE, nimirum ipsi EG, parallela ducta est FD, ut ED ad DA, ita c erit GF ad FA. sed ostensum est ut CE ad ED, ita esse BG ad GF. ut igitur CE ad ED, ita est BG ad GF, & ut ED ad DA, ita GF ad FA. ergo data recta linea insecta AB, datæ rectæ lineæ sectæ AC similiter secta est. Quod facere oportebat.

a 31. primi.

b 34. primi.

c 2. hujus.

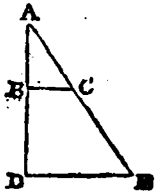


PROP. XI. PROBL.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem invenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ AB AC, & ponantur ita ut angulum quemvis contineant. oportet ipsis AB AC tertiam

tertiam proportionalem invenire. Producantur AB AC ad puncta D E: ponaturque ipsi AC æqualis BD; & juncta BC, ducatur [a] per D ipsi BC parallela DE. quoniam igitur uni laterum trianguli ADE, videlicet ipsi DE parallela ducta est BC, erit [b] ut AB ad BD, ita AC ad CE. æqualis autem est BD ipsi AC. ut igitur AB ad AC, ita est AC ad CE. quare datis rectis lineis AB AC tertia proportionalis inventa est CE. Quod facere oportebat.



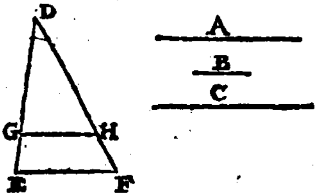
[a] 31 primi.

[b] 2. hujus.

PROP. XII. PROBL.

Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem invenire.

Sint datæ tres rectæ lineæ A B C. oportet ipsis A B C quartam proportionalem invenire. Exponantur duæ rectæ lineæ DE DF angulum quemvis EDF continentes: & ponatur ipsi quidem A æqualis DG, ipsi vero B æqualis GE, & ipsi C æqualis DH: junctaque GH; per E ipsi parallela [a] ducatur EF. itaque quoniam uni laterum trianguli DEF, nimirum ipsi EF, parallela ducta est GH, erit ut DG ad GE ita DH ad HF. est autem DG ipsi A æqualis; GE vero æqualis B, & DH æqualis C. ut igitur A ad B, ita C ad HF. quare datis tribus rectis lineis A B C quarta proportionalis inventa est HF. Quod facere oportebat.



[a] 31. primi.

PROP. XIII. PROBL.

Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem invenire.

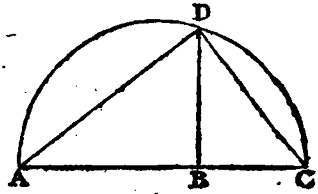
Sint datæ duæ rectæ lineæ AB BC. oportet inter ipsas AB BC mediam proportionalem invenire. Ponantur in directum, & super ipsa AC describatur semicirculus ADC, ducaturque [a] à puncto B ipsi AC ad rectos angulos BD, & AD DC jungantur. Quoniam igitur in semicirculo est angulus ADC, is rectus [b] est. & quoniam in triangulo rectan-

[a] 11. primi.

[b] 31. tertii.

gulo ADC, ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est DB, erit DB media proportionalis [c] inter segmenta basis AB BC. duabus igitur datis rectis lineis AB BC media proportionalis inventa est. Quod facere oportebat.

c Cor. 8, hujus.



PROP. XIV. THEOR.

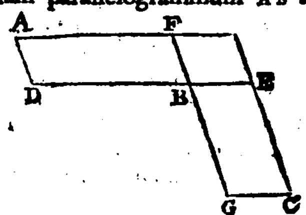
Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum latera quæ sunt circum æquales angulos, reciproca sunt: Et quorum parallelogrammorum unum uni æqualem habentium angulum, latera quæ circum æquales angulos, sunt reciproca; ea inter se sunt æqualia.

Sint æqualia parallelogramma AB BC, æquales habentia angulos ad B, & ponantur indirectum DB BE. ergo & indirectum [a] erunt FB BG. dico parallelogrammorum AB BC latera quæ sunt circum æquales angulos reciproca esse: hoc est ut DB ad BE ita esse GB ad BF. Compleatur enim parallelogrammum FE. & quoniam parallelogrammum AB æquale est parallelogrammo BC, aliud autem aliquod est FE parallelogrammum, erit ut AB ad FE [b], ita BC ad FE. sed ut AB quidem ad FE, ita [c] est DB ad BE; ut autem BC ad FE, ita [c] GB ad BF; ut igitur DB ad BE, ita GB ad BF. ergo parallelogrammorum AB BC latera quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. Et si reciproca sunt seu ex contraria parte sibi ipsis respondeant latera quæ sunt circum æquales angulos, sit nempe ut BD ad BE, ita GB ad BF, dico parallelogrammum AB parallelogrammo BC æquale esse. quoniam enim est ut DB ad BE, ita GB ad BF, ut autem DB ad BE, ita [c] AB parallelogrammum ad parallelogrammum FE, & ut GB ad BF, ita [c] BC parallelogrammum ad parallelogramum FE; erit & ut AB ad FE, ita BC ad FE. æquale igitur est AB parallelogrammum parallelogrammo BC. Ergo æqualium & unum uni

a 14. primi.

b 7. quinti.

c 1. hujus.

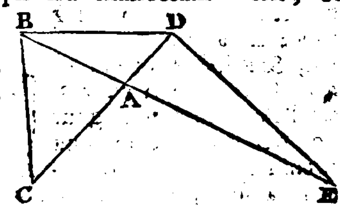


uni æqualem habentium angulum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt seu ex contraria parte sibi ipsis respondent, & quorum parallelogrammorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt; ea inter se sunt æqualia. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XV. THEOR.

Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum triangulorum latera quæ circum æquales angulos, angulos, sunt reciproca. Et quorum triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos reciproca sunt, ea inter se sunt æqualia.

Sint triangula ABC ADE unum angulum uni angulo æqualem habentia, angulum scilicet BAC angulo DAE. dico triangulorum ABC ADE latera quæ circum æquales angulos reciproca esse, hoc est ut CA ad AD, ita esse EA ad AB. ponantur enim ita ut indirectum sit CA ipsi AD. ergo & EA ipsi AB indirectum a erit; & jungatur BD. quoniam igitur triangulum ABC æquale est triangulo ADE, aliud autem est ABD; erit ut CAB triangulum ad triangulum BAD, ita b triangulum ADE ad triangulum BAD. sed ut triangulum quidem CAB ad BAD triangulum, ita c CA ad AD, ut autem triangulum EAD ad ipsum BAD, ita c EA ad AB. ut d igitur CA ad AD, ita EA ad AB. quare triangulorum ABC ADE latera quæ circum æquales angulos reciproca sunt. Et si reciproca sunt latera triangulorum ABC ADE, scil. sit ut CA ad AD, ita EA ad AB. dico triangulum ABC triangulo ADE æquale esse. juncta enim rursus BD, quoniam ut CA ad AD, ita est EA ad AB, ut autem CA ad AD, ita c ABC triangulum ad triangulum BAD; & ut EA ad AB, ita c triangulum EAD ad BAD triangulum, erit ut ABC triangulum ad triangulum BAD, ita triangulum EAD ad BAD triangulum. utrumque igitur triangulorum ABC ADE ad triangulum BAD eandem habet proportionem; ac propterea æquale est ABC triangulum



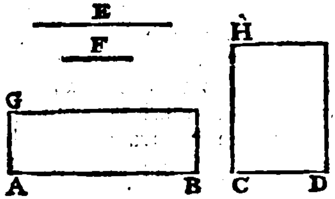
a 34. primi.
b 7. quinti.
c 1. hujus.
d 11 quinti.

gulum triangulo A D E. Æqualium igitur, & unum uni æqualem habentium angulum triangulorum latera quæ circum æquales angulos, reciproca sunt, & quorum triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos reciproca sunt, ea inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XVI. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis contentum æquale est ei rectangulo quod sub mediis continetur: Et si rectangulum sub extremis contentum æquale fuerit ei quod sub mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales A B C D E F, sitque ut A B ad C D, ita E ad F. dico rectangulum contentum sub rectis lineis A B F æquale esse ei quod sub ipsis C D E continetur. ducantur enim à punctis A C ipsis A B C D ad rectos angulos, A G C H; ponaturque ipsi quidem F æqualis A G, ipsi vero E æqualis C H, & compleantur B G D H parallelogramma. Quoniam igitur est ut A B ad C D, ita E ad F; est autem E æqualis C H, & F ipsi A G: erit ut A B ad C D, ita C H ad A G. parallelogrammorum igitur B G, D H latera quæ sunt circum æquales angulos reciproca sunt; quoniam autem æquiangulorum parallelogrammorum latera quæ sunt circum æquales angulos reciproca sunt, ea inter se sunt a æqualia. ergo parallelogrammum B G æquale est parallelogrammo D H. atque est parallelogrammum quidem B G, quod sub rectis lineis A B F continetur, etenim A G est æqualis F, parallelogrammum vero D H quod continetur sub ipsis C D E, cum C H ipsi E sit æqualis. rectangulum igitur contentum sub A B & F est æquale ei quod sub ipsis C D & E continetur. Et si rectangulum contentum sub A B F sit æquale ei quod sub C D & E continetur. dico quatuor rectas lineas proportionales esse, videlicet ut A B ad C D, ita E ad F. iisdem enim constructis quoniam rectangulum contentum sub A B & F est æquale ei quod sub C D & E continetur, atque est



a 14. hujus.

contentum

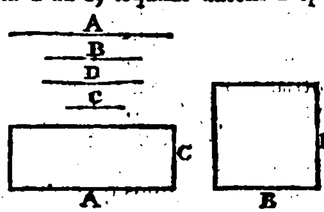
contentum quidem sub A B F rectangulum B G; etenim A G est æqualis F: contentum vero sub C D E est rectangulum D H, quod C H ipsi E sit æqualis. erit parallelogrammum B G æquale parallelogrammo D H, & sunt æquiangula. æqualium autem & æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos reciproca sunt [a]. quare ut A B ad C D, ita C H ad A G, æqualis autem est C H ipsi E, & A G ipsi F. ut igitur A B ad C D, ita E ad F. Ergo si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis contentum æquale est ei quod sub mediis continetur: & si rectangulum sub extremis contentum æquale fuerit ei quod sub mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.

[a] 14. hujus.

PROP. XVII. THEOR.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis contentum æquale est ei quod à media fit quadrato. Et si rectangulum sub extremis contentum æquale fuerit ei quod à media fit quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint tres rectæ lineæ proportionales A B C: & sit ut A ad B, ita B ad C. dico rectangulum contentum sub A C æquale esse ei quod à media B fit quadrato. ponatur ipsi B æqualis D. Et quoniam ut A ad B, ita B ad C, æqualis autem B ipsi D; erit ut A ad B [a], ita D ad C. si autem quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint rectangulum sub extremis contentum est [b] æquale ei quod sub mediis continetur. ergo rectangulum sub A C contentum est.



[a] 7. quinti. [b] 16. hujus.

æquale ei quod continetur sub B D. sed rectangulum contentum sub B D est æquale quadrato quod fit ex ipsa B; etenim B est æqualis D. rectangulum igitur contentum sub A C est æquale ei quod ex B fit quadrato. Et si rectangulum contentum sub A C æquale sit quadrato quod fit ex B. dico ut A ad B, ita esse B ad C. Iisdem enim constructis quoniam rectangulum contentum sub A C æquale est quadrato quod fit ex B; at quadratum quod fit ex B est rectangulum quod sub ipsis B D continetur, est enim B æqualis ipsi D; erit rectangulum contentum sub A C æquale ei quod sub B D continetur. si autem rectangulum sub extremis contentum æquale fuerit ei quod sub mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales *b* erunt. est igitur ut A ad B, ita C ad D; æqualis autem B ipsi D. ergo ut A ad B, ita B ad C. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis contentum est æquale ei quod à media fit quadrato. Et si rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei quod à media fit quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.

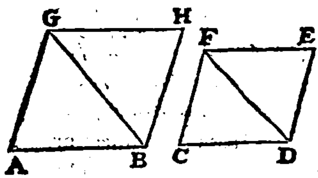
PROP. XVIII. PROBL.

A data recta linea dato rectilineo simile, & similiter positum rectilineum describere.

Sit data recta linea AB, datum autem rectilineum CE. oportet à recta linea AB rectilineo CE simile, & similiter positum rectilineum describere. Jungatur DF, & ad rectam lineam AB, & ad puncta in ipsa A B, angulo quidem C æ-

a 23. primi. qualis angulus *a* constituatur GAB, angulo autem CDF angulus ABG. reliquus igitur CFD angulus reliquo AGB

b Cor. 32. primi. est *b* æqualis. ergo æquiangulum est FCD triangulum triangulo GAB; ac propterea *c* ut FD ad GB, ita FC ad



c 4. hujus. GA, & CD ad AB. rursus constituatur ad rectam lineam BG, & ad puncta in ipsa B G, angulo quidem DFE æqualis angulus BGH, angulo quidem FDE æqualis GBH. ergo reliquus *b* ad E reliquo ad H est æqualis. æquiangulum igitur est triangulum FDE triangulo GBH. quare ut *c* FD ad GB, ita FE ad GH, & ED ad HB. ostensum autem est & ut FD

d 11. quinti ad GB, ita FC ad GA, & CD ad AB: & ut igitur *d* FC ad AG, ita CD ad AB; & FE ad GH, & adhuc ED ad HB. itaque quoniam angulus quidem CFD est æqualis angulo AGB; angulus autem DFE angulo BGH. erit totus CFE angulus toti AGH æqualis. eadem ratione & CDE est æqualis ipsi ABH, & præterea angulus quidem ad C angulo ad A æqualis, angulus vero ad E angulo ad H. æquiangulum igitur est AH ipsi CE, & latera circum æquales ipsius angulos habet proportionalia. ergo rectilineum AH rectilineo CE si-

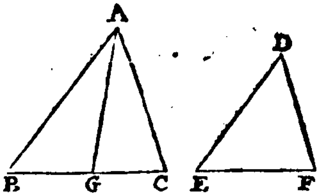
e 1. Diffin. hujus. mile *e* erit: A data igitur recta linea AB dato rectilineo CE simile, & similiter positum rectilineum AH descriptum est. Quod facere oportebat.

PROP.

PROP. XIX. THEOR.

Similia triangula inter se sunt in duplicata proportione laterum homologorum.

Sint similia triangula ABC DEF habentia angulum ad B æqualem angulo ad E, & sit ut AB ad BC, ita DE ad EF, ita ut latus BC homologum sit lateri EF. Dico ABC triangulum ad triangulum DEF duplicatam proportionem habere ejus quam habet BC ad EF. Sumatur enim ipsis [a] BC EF tertia proportionalis BG, ut sit BC ad EF, ita EF ad BG. & jungatur GA. quoniam igitur ut AB ad BC, ita est DE ad EF; erit permutando ut AB ad DE, ita BC ad EF. sed ut BC ad EF, ita EF ad BG. ut [b] igitur AB ad DE, ita EF ad BG. quare triangulorum ABG DEF latera quæ sunt circum æquales angulos reciproca sunt. quorum autem triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera quæ circum æquales angulos reciproca sunt, ea inter se æqualia [c] sunt. æquale igitur est ABG triangulum triangulo DEF. & quoniam est ut BC ad EF, ita EF ad BG; si autem tres rectæ lineæ proportionales sint, prima ad tertiam duplicatam proportionem [d] habet ejus quam habet ad secundam: habebit igitur BC ad BG duplicatam proportionem ejus quam habet BC ad EF. ut autem BC ad BG, ita ABC triangulum ad triangulum ABG. ergo & ABC triangulum ad triangulum ABG duplicatam proportionem habet ejus quam BC habet ad EF. est autem ABG triangulum triangulo DEF æquale. & triangulum igitur ABC ad triangulum DEF duplicatam proportionem habebit ejus quam habet BC ad EF. Quare similia triangula inter se in duplicata sunt proportione laterum homologorum. Quod ostendere oportebat.



[a] 11. hujus.
[b] 11 quinti.
[c] 15. hujus.
[d] Diffin. 10. quinti.

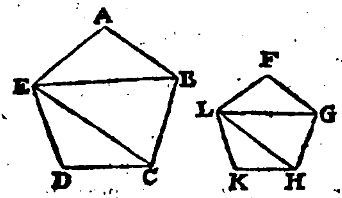
Cor. Ex hoc manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse triangulum, quod fit à prima ad triangulum quod à secunda simile, & similiter descriptum; quoniam ostensum est ut CB ad BG, ita ABC triangulum ad triangulum ABG, hoc est ad triangulum DEF. Quod ostendere oportebat.

PROP.

PROP. XX. THEOR.

Similia polygona in similia triangula dividuntur, & numero æqualia, & homologa totis; & polygonum ad polygonum duplicatam proportionem habet ejus quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint similia polygona ABCDE FGHKL, & sit AB homologum ipsi FG. dico polygona ABCDE FGHKL in similia triangula dividi, & numero æqualia, & homologa totis; & polygonum ABCDE ad polygonum FGHKL duplicatam proportionem habere ejus quam habet AB ad FG. jungantur BE EC GL LH. Et quoniam simile est ABCDE polygonum polygono FGHKL, angulus BAE angulo GFL est æqualis: atque est ut BA ad AE, ita GF ad FL. quoniam igitur duo triangula sunt ABE FGL unum angulum uni angulo æqualem habentia; circum æquales autem angulos latera proportionalia: erit [a] triangulum ABE triangulo FGL æquiangulum. ergo & simile. angulus igitur ABE æqualis est angulo FGL. est autem & totus ABC angulus æqualis [b] toti FGH, propter similitudinem polygonorum. ergo reliquus EBC reliquo LGH est æqualis. & quoniam ob similitudinem triangulorum ABE FGL, est ut EB ad BA, ita LG ad GF. sed & propter similitudinem polygonorum [b], ut AB ad BC, ita est FG ad GH; erit ex æquali ut [c] EB ad BC, ita LG ad GH. hoc est circum æquales angulos EBC LGH latera sunt proportionalia; æquiangulum igitur est EBC triangulum triangulo LGH. quare & simile. eadem ratione & ECD triangulum simile est triangulo LHK. similia igitur polygona ABCDE FGHKL in similia triangula dividuntur, & numero æqualia. dico & homologa totis, hoc est ut proportionalia sint triangula, & antecedentia quidem sunt ABE EBC ECD, consequentia autem ipsorum FGL LGH LHK. & ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL duplicatam proportionem habere ejus quam latus homologum habet ad homologum latus; hoc est AB ad FG. quoniam enim simile est ABE triangulum triangulo FGL; habebit ABE triangulum ad triangulum FGL duplicatam proportionem [d] ejus quam habet BE ad GL. eadem ratione, & triangulum BEC ad GLH triangulum duplicatam [d] proportionem habet ejus quam BE ad GL. est [e] igitur ut ABE trian-



[a] 6, hujus.
[b] 1. Diffin. hujus.
[c] 21 quinti.
[d] 19. hujus.
[e] 11 quinti.

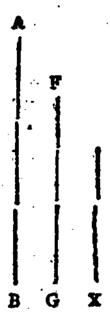
triangulum ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GLH triangulum. rursus quoniam simile est triangulum EBC triangulo LGH, habebit EBC triangulum ad triangulum LGH duplicatam proportionem ejus quam recta linea CE habet ad rectam HL. eadem ratione & ECD triangulum ad triangulum LHK duplicatam proportionem habet ejus quam CE ad HL. est igitur ut triangulum BEC ad triangulum LGH, ita CED triangulum ad triangulum LHK. ostensum autem est & ut EBC triangulum ad triangulum LGH, ita triangulum ABE ad triangulum FGL. ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GHL triangulum, & triangulum ECD ad ipsum LHK. & igitur ut unum antecedentium ad unum consequentium *f*, sic omnia antecedentia ad omnia consequentia. ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL, ita ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL: sed ABE triangulum ad triangulum FGL duplicatam proportionem habet ejus quam latus homologum AB habet ad homologum latus FG: similia enim triangula in duplicata sunt proportione laterum homologorum. ergo & ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL duplicatam proportionem habet ejus quam AB latus homologum habet ad FG homologum latus. Similia igitur polygona in similia triangula dividuntur, & numero æqualia, & homologa totis; & polygonum ad polygonum duplicatam habet proportionem ejus quam habet latus homologum ad homologum latus. Quod oportebat demonstrare.

f 12 quinti.

Eodem modo & in similibus quadrilateris ostendetur ea esse in duplicata proportione laterum homologorum. ostensum autem est & triangulis.

COROLL.

1. Ergo universe similes figuræ rectilineæ inter se sunt in duplicata proportione homologorum laterum. & si ipsis AB FG tertiam proportionalem sumamus, quæ sit X; habebit AB ad X duplicatam proportionem ejus quam habet AB ad FG. habet autem & polygonum ad polygonum, & quadrilaterum ad quadrilaterum duplicatam proportionem ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est AB ad FG. atque ostensum est hoc in triangulis.



2. Universe igitur manifestum est, si tres rectæ lineæ propor-

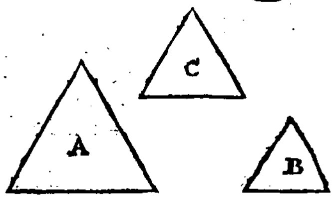
proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse figuram quæ fit à prima, ad eam quæ à secunda, similem & similiter descriptam. Quod ostendere oportebat.

PROP. XXI. THEOR.

Quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se similia sunt.

Sit enim utrumque rectilineorum A B simile rectilineo C. dico & rectilineum A rectilineo B simile esse. Quoniam enim simile est A rectilineum rectilineo C, & ipsi æquiangulum [a] erit, & circum æquales angulos latera habebit proportionalia. rursus quoniam simile est rectilineum B rectilineo C, æquiangulum ipsi erit, & circum æquales angulos latera proportionalia habebit [a]. utrumque igitur rectilineorum A B ipsi C æquiangulum est, & circum æquales angulos latera habet proportionalia. quare & rectilineum A ipsi B est æquiangulum, lateraque circum æquales angulos proportionalia habet; ac propterea A ipsi B est simile. Quod demonstrare oportebat.

a 1. Diffin. hujus.



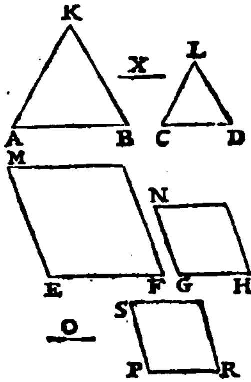
PROP. XXII. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & rectilinea quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia erunt. & si rectilinea quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta, proportionalia fuerint, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales AB CD EF GH, & ut AB ad CD, ita sit EF ad GH. describanturque [a] ab ipsis quidem AB CD similia, & similiter posita rectilinea KAB LCD: ab ipsis vero EF GH describantur rectilinea similia, & similiter posita MF NH. dico ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita esse rectilineum MF ad ipsum NH rectilineum. Sumatur ipsis [b] quidem AB CD tertia proportionalis X; ipsis vero EF GH tertia proportionalis O. & quoniam est ut AB ad CD, ita EF ad GH: ut autem CD ad X, ita GH ad O; erit ex æquali [c] ut AB ad X, ita EF ad O. sed ut AB quidem ad X, ita est [d] rectilineum KAB ad LCD rectilineum,

a 18. hujus.
b 11. hujus.
c 22. quinti.
d Cor. 20. hujus.

lineum, ut autem E F ad O, ita [d] rectilineum M F ad rectilineum N H. ut igitur K A B rectilineum ad rectilineum L C D, ita est [e] rectilineum M F ad N H rectilineum. Et si sit ut K A B rectilineum ad rectilineum L C D, ita rectilineum M F ad rectilineum N H. dico ut A B ad C D, ita esse E F ad G H. fiat enim ut A B ad C D, ita E F ad [f] P R, & describatur ab ipsa P R alterutri rectilineorum M F N H simile, & similiter positum rectilineum S R. quoniam igitur est ut A B ad C D, ita E F ad P R, & descripta sunt ab ipsis quidem A B C D similia, & similiter posita K A B L C D rectilinea, ab ipsis vero E F P R similia & similiter posita rectilinea M F S R, erit [g] ut K A B rectilineum ad rectilineum L C D, ita rectilineum M F ad R S rectilineum: ponitur autem & ut rectilineum K A B ad rectilineum L C D, ita M F rectilineum ad rectilineum N H. ergo ut rectilineum M F ad rectilineum N H, ita M F rectilineum ad rectilineum S R. quod cum rectilineum M F ad utrumque ipsorum N H S R eandem habeat proportionem, erit [h] rectilineum N H ipsi S R æquale. est autem ipsi simile, & similiter positum. ergo G H est æqualis P R. & quoniam ut A B ad C D, ita est E F ad P R: æqualis autem P R ipsi G H; erit ut A B ad C D, ita E F ad G H. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & rectilinea quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia erunt: & si rectilinea quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia fuerint, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.



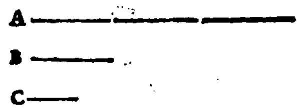
[e] 11 quinti.
[f] 12. hujus.
[g] ex prius demonstratis.
[h] 9 quinti.

LEMMA.

Positis tribus rectis quibuscunque A, B *&* C; *ratio primæ* A *ad tertiam* C, *æqualis est rationi compositæ ex ratione primæ* A *ad secundam* B, *& ratione secundæ* B *ad tertiam* C.

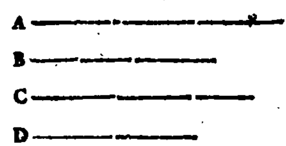
Sit V. G. *numerus ternarius exponens seu denominator rationis* A *ad* B, *hoc est sit* A *tripla ipsius* B, *& sit numerus quaternarius exponens rationis* B *ad* C, *erit numerus duodenarius ex numeri ternarii & quaternarii multiplicatione compo-*

compositus exponens rationis A *ad* C; *nam quia* A *continet* B *ter, &* B *continet* C *quater, continebit* A *ipsum* C *ter quater, seu duodecies. idem de aliis multiplicibus vel sub multiplicibus verum est. Universalis vero hujus Theorematis demonstratio talis est. Quantitas rationis* A *ad* B *est numerus* $\frac{A}{B}$, *scil. qui multiplicans consequentem producit antecedentem. Et similiter quantitas rationis* B *ad* C *est* $\frac{B}{C}$. *Atque hæ duæ quantitates inter se multiplicatæ efficiunt numerum* $\frac{A \times B}{B \times C}$ *qui est quantitas rationis quam rectangulum comprehensum sub rectis* A *&* B *habet ad rectangulum sub* B *&* C *rectis. Adeoque dicta ratio rectanguli sub* A *&* B, *ad rectangulum sub* B *&* C *ea est quæ in sensu def. 5. hujus, componitur ex rationibus* A *ad* B *&* B *ad* C. *sed per* 1. 6. *rectangulum sub* A *&* B, *est ad rectangulum sub* B *&* C, *ut* A *ad* C. *& igitur ratio* A *ad* C *æqualis est rationi compositæ ex rationibus* A *ad* B, *&* B *ad* C.



Positis vero quatuor rectis quibuscunque A, B, C, *&* D; *Ratio primæ* A *ad quartam* D *æqualis est rationi compositæ ex ratione primæ* A *ad secundam* B, *& ratione secundæ* B *ad tertiam* C, *& ratione tertiæ* C *ad quartam* D.

Nam in tribus rectis A, C, *&* D, *ratio* A *ad* D *æqualis est rationi compositæ ex rationibus* A *ad* C, *&* C *ad* D. *Et hactenus est ostensum rationem* A *ad* C *æqualem esse rationi compositæ ex rationibus* A *ad* B, *&* B *ad* C. *Et igitur ratio* A *ad* D *æqualis est rationi compositæ ex rationibus* A *ad* B, B *ad* C, *&* C *ad* D. *Similiter ostendetur, in quotcunque rectis, rationem primæ ad ultimam æqualem esse rationi compositæ ex rationibus primæ ad secundam, secundæ ad tertiam, tertiæ ad quartam, & ita deinceps usque ad ultimam.*



Si exponantur aliæ magnitudines quælibet, præter rectas, idem obtinebit. Quod constabit si concipiantur tot rectæ A, B, C, *&c. ordine positæ quot sunt magnitudines, & in eadem ratione: ita* VIZ. *ut recta* A *sit ad rectam* B *ut prima magnitudo ad secundam, & recta* B *ad rectam* C *ut secunda magnitudo ad tertiam, & ita porro. Manifestum est per* 22. 5. *esse ex æquo rectam* A *ad ultimam rectam sicut prima magnitudo ad ultimam. Sed ratio rectæ* A *ad ultimam rectam æqualis est rationi compositæ ex rationibus* A *ad* B, B *ad* C *&*

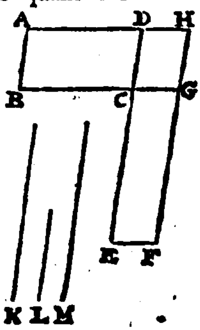
ita

ita porro usque ad ultimam rectam. Et, ex hypothesi, ratio cujuslibet rectæ ad sibi proximam eadem est cum ratione magnitudinis ejusdem ordinis ad sibi proximam. Et igitur ratio primæ magnitudinis ad ultimam æqualis est rationi compositæ ex rationibus primæ magnitudinis ad secundam, secundæ ad tertiam, & ita deinceps usque ad ultimam. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIII. THEOR.

Æquiangula parallelogramma inter se proportionem habent ex lateribus compositam.

Sint æquiangula parallelogramma A C C F æqualem habentia B C D angulum angulo E C G. dico parallelogrammum A C ad parallelogrammum C F proportionem habere compositam ex lateribus, videlicet compositam ex proportione quam habet B C ad C G, & ex proportione quam D C habet ad C E. ponatur enim ut F C sit indirectum ipsi C G. ergo & D C ipsi C E indirectum [a] erit: & compleatur D G parallelogrammum: exponaturque recta linea quædam K, & fiat ut B C ad C G, ita [b] K ad L, ut autem D C ad C E, ita L ad M. proportiones igitur ipsius K ad L, & L ad M eædem sunt quæ proportiones laterum videlicet B C ad C G, & D C ad C E. sed proportio K ad M composita est [c] ex proportione K ad L, & proportione L ad M. quare & K ad M proportionem habet ex lateribus compositam.



[a] 14. primi.

[b] 12. hujus.

[c] per Lemma superius.

& quoniam est ut B C ad C G [d], ita A C parallelogrammum ad parallelogrammum C H; sed ut B C ad C G, ita K ad L: erit [e] ut K ad L, ita parallelogrammum A C ad C H parallelogrammum. rursus quoniam est ut D C ad C E, ita C H parallelogrammum ad parallelogrammum C F: ut autem D C ad C E, ita L ad M. ergo ut L ad M, ita erit [e] parallelogrammum C H ad C F parallelogrammum. itaque cum ostensum sit ut K quidem ad L ita A C parallelogrammum ad parallelogrammum C H: ut autem L ad M, ita parallelogrammum C H ad C F parallelogrammum; erit [f] ex æquali ut K ad M, ita A C parallelogrammum ad ipsum C F. habet autem K ad M proportionem ex lateribus compositam. ergo & A C parallelogrammum ad parallelogrammum C F proportionem habebit compositam ex lateribus. Æquiangula igitur parallelogramma

[d] 1. hujus.

[e] 11 quinti.

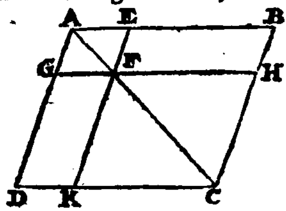
[f] 20 quinti.

lelogramma inter se proportionem habent ex lateribus compositam. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXIV. THEOR.

Omnis parallelogrammi, quæ circa diametrum sunt parallelogramma & toti, & inter se similia sunt.

Sit parallelogrammum ABCD, cujus diameter AC: circa diametrum vero AC parallelogramma sint EG HK. dico parallelogramma EG HK & toti ABCD, & inter se similia esse. Quoniam enim uni laterum trianguli ABC, videlicet ipsi BC parallela ducta est EF, erit [a] ut BE ad EA, ita CF ad FA. quoniam rursus uni laterum trianguli ACD, nempe ipsi CD ducta est parallela FG, ut CF ad FA, ita [a] erit DG ad GA. sed ut CF ad FA ita ostensa est & BE ad EA. ergo & ut BE ad EA, ita [b] DG ad GA, componendoque [c] ut BA ad AE, ita DA ad AG, & permutando ut BA ad AD, ita EA ad AG. parallelogrammorum igitur ABCD EG latera quæ circa communem angulum BAD proportionalia sunt. & quoniam parallela est GF ipsi DC, angulus quidem AGF est [d] æqualis angulo ADC, angulus vero GFA æqualis angulo DCA, & angulus DAC est communis duobus triangulis ADC AGF; erit triangulum ADC triangulo AGF æquiangulum. eadem ratione & triangulum ACB æquiangulum est triangulo AFE. totum igitur parallelogrammum ABCD parallelogrammo EG est æquiangulum. ergo ut AD ad DC, ita [e] AG ad GF, ut autem DC ad CA, ita GF ad FA, & ut AC ad CB, ita AF ad FE, & præterea ut CB ad BA, ita FE ad EA. itaque quoniam ostensum est ut DC ad CA, ita esse GF ad FA, ut autem AC ad CB, ita AF ad FE; erit ex æquali ut DC ad CB, ita GF ad FE. ergo parallelogrammorum ABCD EG proportionalia sunt latera quæ circum æquales angulos, ac propterea parallelogrammum ABCD parallelogrammo EG est simile. eadem ratione, & parallelogrammum ABCD simile est parallelogrammo KH. utrumque igitur ipsorum EG HK parallelogrammorum, parallelogrammo ABCD est simile. quæ autem eidem rectilineo sunt similia, & inter se similia [f] sunt. parallelogrammum igitur EG simile est parallelogrammo HK. Quare omnis parallelogrammi quæ circa diametrum



[a] 2. hujus.
[b] 11 quinti.
[c] 18 quinti.
[d] 29. primi.
[e] 4. hujus.
[f] 21. hujus.

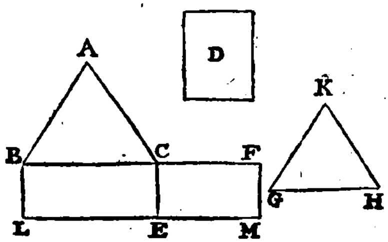
trum

trum sunt parallelogramma & toti, & inter se sunt similia. Quod ostendere oportebat.

PROP. XXV. PROBL.

Dato rectilineo simile, & alteri dato æquale idem constituere.

Sit datum quidem rectilineum cui oportet simile constituere ABC, cui autem æquale sit D. oportet ipsi ABC simile, & ipsi D æquale idem constituere. Applicetur [a] ad rectam quidem lineam BC rectilineo ABC æquale parallelogrammum BE. ad rectam vero CE applicetur [a] parallelogrammum CM æquale ipsi D, in angulo FCE, qui CBL angulo est æqualis. in directum igitur [b] est BC ipsi CF, & LE ipsi EM. sumatur [c] inter BC CF media proportionalis GH, & [d] ab ipsa GH describatur rectilineum KGH simile & similiter positum rectilineo ABC. Et quoniam est ut BC ad GH, ita GH ad CF, si autem tres rectæ lineæ proportionales sint, ut prima ad tertiam [e], ita est figura quæ fit à prima, ad eam quæ à secunda, similem & similiter descriptam: erit ut BC ad CF, ita ABC rectilineum ad rectilineum KGH. sed & ut BC ad CF, ita [f] parallelogrammum BE ad EF parallelogrammum, ut [g] igitur rectilineum ABC ad rectilineum KGH, ita BE parallelogrammum ad parallelogrammum EF. quare permutando ut ABC rectilineum ad parallelogrammum BE, ita rectilineum KGH ad EF parallelogrammum. est autem rectilineum ABC æquale parallelogrammo BE. æquale igitur est & KGH rectilineum parallelogrammo EF. sed EF parallelogrammum æquale est rectilineo D. ergo & rectilineum KGH ipsi D est æquale: est autem KGH simile rectilineo ABC. Dato igitur rectilineo ABC simile, & alteri dato D æquale idem constitutum est KGH. Quod facere oportebat.

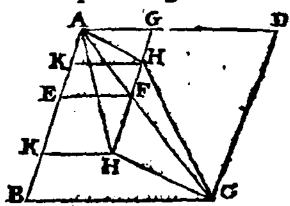


[a] 44. primi.
[b] 14. primi.
[c] 13. hujus.
[d] 18. hujus.
[e] Cor. 20. hujus.
[f] 1. hujus.
[g] 11 quinti.

PROP. XXVI. THEOR.

Si à parallelogrammo parallelogrammum auferatur simile toti, & similiter positum, communem ipsi angulum habens, circa eandem diametrum est toti.

A parallelogrammo enim ABCD parallelogrammum AF auferatur, simile ipsi ABCD, & similiter positum, communemque ipsi angulum habens DAB. dico parallelogrammum ABCD circa eandem esse diametrum parallelogrammo AF. non enim, sed si fieri potest, sit ipsorum diameter AHC, & producatur GF usque ad H; ducaturque per H alterutri ipsarum AD BC parallela HK. Quoniam igitur circa eandem diametrum est ABCD parallelogrammum



parallelogrammo KG; & erit [a] parallelogrammum ABCD parallelogrammo KG simile. ergo ut [b] DA ad AB, ita GA ad AK. est autem & propter similitudinem parallelogrammorum ABCD EG, ut DA ad AB, ita GA ad AE. & [c] igitur ut GA ad AE, ita GA ad AK. quòd cùm GA ad utramque ipsarum AK AE eandem proportionem habeat; erit [d] AE ipsi AK æqualis, minor majori, quod fieri non potest. non igitur circa eandem diametrum est ABCD parallelogrammum parallelogrammo AH. quare circa eandem diametrum erit ipsi AF. Si igitur à parallelogrammo parallelogrammum auferatur simile toti, & similiter positum, communem ipsi angulum habens, circa eandem diametrum est toti. Quod demonstrare oportebat.

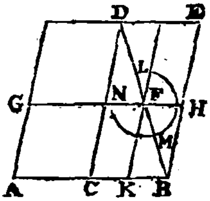
[a] 24. hujus.
[b] 1. Diffin. hujus.
[c] 11 quinti.
[d] 9 quinti.

PROP. XXVII. THEOR.

Omnium parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis similibus, & similiter positis, ei quæ à dimidia describitur, maximum est quod ad dimidiam est applicatum, simile existens defectui.

Sit recta linea AB; seceturque bifariam in C; & ad AB rectam lineam applicetur parallelogrammum AD deficiens figura parallelogramma CE, simili & similiter posita ei quæ à dimidia ipsius AB descripta est. dico omnium paralle-

parallelogrammorum ad rectam lineam AB applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis similibus, & similiter positis ipsi CE, maximum esse AD. Applicetur enim ad rectam lineam AB parallelogrammum AF, deficiens figura parallelogramma HK simili, & similiter posita ipsi CE. dico AD parallelogrammum parallelogrammo AF majus esse.



Quoniam enim simile est parallelogrammum CE parallelogrammo HK, circa eandem diametrum [a] sunt. ducatur eorum diameter DB, & describatur figura. quoniam igitur CF [b] est æquale ipsi FE, commune apponatur HK. totum igitur CH toti KE est æquale. sed CH est [c] æquale CG, quoniam & recta linea AC ipsi CB. ergo & GC ipsi EK æquale est commune apponatur CF. totum igitur AF est æquale gnomoni LMN: quare & CE, hoc est AD parallelogrammum parallelogrammo AF est majus. Omnium igitur parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis similibus, & similiter positis ei quæ a dimidia describitur, maximum est quod ad dimidiam est applicatum. Quod demonstrare oportebat.

[a] 26. hujus.
[b] 43 primi.
[c] 36 primi.

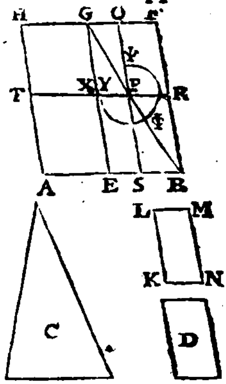
PROP. XXVIII. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma quæ similis sit alteri datæ. oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non majus esse eo quod ad dimidiam applicatur; similibus existentibus defectibus, & eo quod à dimidia, & eo, cui oportet simile deficere.

Sit data quidem recta linea AB: datum autem rectilineum, cui oportet æquale ad datam rectam lineam AB applicare, sit C non majus existens eo quod ad dimidiam applicatum est, similibus existentibus defectibus: cui autem oportet simile deficere sit D. oportet ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit ipsi D. Secetur AB bifariam in E, & ab ipsa EB describatur [a] simile, & similiter positum ipsi D; quod sit EBFG, & compleatur AG parallelogrammum. itaque AG vel æquale est ipsi C, vel eo majus, ob

[a] 18 hujus.

ob determinationem: & si quidem A G sit æquale C, factum jam erit quod proponebatur: etenim ad rectam lineam A B dato rectilineo C æquale parallelogrammum A G applicatum est, deficiens figura parallelogramma E F ipsi D simili. si autem non est æquale, erit H E majus quàm C; atque E F æquale est H E. ergo, & E F quàm C est majus. quo autem E F superat C, ei excessui æquale, ipsi vero D simile & similiter positum, idem [a] constituatur K L M N. sed D est simile E F. quare & K M ipsi E F simile erit. sit igitur recta linea K L homologa ipsi G E, L M vero ipsi G F. & quoniam æquale est E F ipsis C & K M, erit E F ipso K M majus. major igitur est recta linea G E ipsa K L; & G F ipsa L M. ponatur G X æqualis K L, & G O æqualis L M, & compleatur X G O P parallelogrammum. æquale igitur est & simile X O ipsi K M. sed K M simile est E F. ergo & [b] X O ipsi E F est simile. circa eandem igitur est [c] diametrum X O ipsi E F. sit ipsorum diameter G P B, & figura describatur. itaque quoniam E F est æquale ipsis C & K M simul, quorum X O est æquale K M, erit reliquus Υ Φ Ψ gnomon æqualis reliquo C. & quoniam O R est æquale X S, commune apponatur S R. totum igitur O B toti X B est æquale. sed X B est æquale T E, quoniam & latus A E lateri E B. quare & T E ipsi O B æquale. commune apponatur X S. ergo totum T S est æquale toti gnomoni Υ Φ Ψ. at Υ Φ Ψ gnomon ipsi C ostensus est æqualis: & T S igitur ipsi C æquale erit. Quare ad datam rectam lineam A B, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum T S applicatum est, deficiens figura parallelogramma S R ipsi D simili, quoniam & S R simile est ipsi G B. Quod facere oportebat.



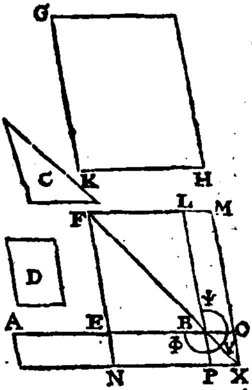
a 25. hujus.
b 21. hujus.
c 26. hujus.

PROP. XXIX. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri datæ.

Sit data recta linea A B, datum vero rectilineum, cui oportet æquale ad ipsam A B applicare, sit C; cui autem oportet simile excedere D. oportet ad A B rectam lineam dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, excedens figura

gura parallelogramma simili D. Secetur AB bifariam in E, atque ex EB ipsi D simile, & similiter [a] positum parallelogrammum describatur EL. & utrisque quidem EL & C æquale, ipsi vero D simile, & similiter positum idem [b] constituatur GH. simile igitur est GH ipsi EL. sitque KH quidem latus homologum lateri FL, KG vero ipsi FE. & quoniam parallelogrammum GH majus est ipso EL, erit recta linea KH major quàm FL, & KG major quàm FE. producantur FL FE, & ipsi quidem KH æqualis sit FLM, ipsi vero KG æqualis FEN, & compleatur MN parallelogrammum. ergo MN æquale est & simile ipsi GH. sed GH est simile EL: MN igitur ipsi EL simile [c] erit; ac propterea circa eandem diametrum [d] est EL ipsi MN. ducatur ipsorum diameter FX, & figura describatur. itaque quoniam GH ipsi EL & C est æquale, sed GH est æquale MN; erit & MN æquale ipsi EL & C. commune auferatur EL. reliquus igitur ΨΥΦ gnomon ipsi C est æqualis. & quoniam AE est æqualis EB, æquale erit & AN parallelogrammum parallelogrammo NB, hoc est ipsi LO. commune apponatur EX. totum igitur AX æquale est gnomoni ΦΥΨ. sed ΦΥΨ gnomon est æqualis C. ergo & AX ipsi C erit æquale. ad datam igitur rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicatum est AX, excedens figura parallelogramma PO, ipsi D simili, quoniam & ipsi EL simile est OP. Quod fecisse oportebat.



[a] 18. hujus.
[b] 25. hujus.
[c] 21. hujus.
[d] 26. hujus.

PROP. XXX. PROBL.

Datam rectam lineam terminatam extrema ac media ratione secare.

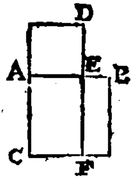
Sit data recta linea terminata AB. oportet ipsam AB extrema ac media ratione secare. Describatur [a] ex AB quadratum BC, & ad AC ipsi BC æquale parallelogrammum [b] applicetur CD, excedens [b] figura AD ipsi BC simili. quadratum autem est BC. ergo & AD quadratum erit. & quoniam BC est æquale CD; commune auferatur CE. reliquum igitur BF reliquo AD est æquale; est autem & ipsi æquiangulum. ergo ipsorum BF AD latera quæ circum æquales angulos

[a] 46. primi
[b] 29. hujus

c 14. hujus. angulos reciproce sunt c proportionalia. ut igitur F E ad E D, ita est A E ad E B. est autem F E æqualis d A C, hoc est ipsi A B; & E D ipsi A E. quare ut B A ad A E, ita A E ad E B. sed A B major est quam A E. ergo A E quam E B est e major. recta igitur linea A B extrema, ac media ratione secta est in E. & majus ipsius segmentum est A E. Quod facere oportebat.

d 34. primi.

e 14. quinti.



Aliter. Sit data recta linea A B. oportet ipsam A B extrema ac media ratione secare. Secetur enim A B in C, ita ut rectangulum f quod continetur sub A B B C æquale sit quadrato ex A C. quoniam igitur rectangulum sub A B B C æquale g est quadrato ex A C, erit ut B A ad A C ita A C ad C B, ergo A B recta linea extrema ac media ratione secta est. Quod facere oportebat.

f 11. secundi.

g 17. hujus.

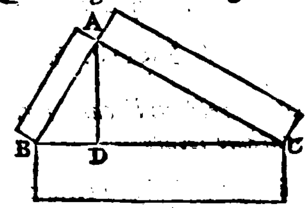
PROP. XXXI. THEOR.

In rectangulis triangulis figura quæ fit à latere rectum angulum subtendente, æqualis est eis quæ à lateribus rectum angulum continentibus fiunt, similibus, & similiter descriptis.

Sit triangulum rectangulum A B C, rectum habens angulum B A C. dico figuram, quæ fit ex B C æqualem esse eis quæ ex B A A C fiunt similibus, & similiter descriptis. ducatur perpendicularis A D. Quoniam igitur in triangulo rectangulo A C B ab angulo recto, qui est ad A, ad B C basim perpendicularis ducta est A D, erunt a triangula A B D A D C quæ sunt ad perpendicularem similia toti A B C, & inter se. & quoniam simile est A B C triangulum triangulo A B D, erit ut a C B ad B A, ita B A ad B D. quod cum tres rectæ lineæ proportionales sint, ut prima ad tertiam, ita erit b figura quæ fit ex prima ad eam quæ ex secunda, similem, & similiter descriptam. ut igitur C B ad B D, ita figura quæ fit ex C B ad eam quæ ex B A, similem & similiter descriptam. eadem ratione, & ut B C ad C D, ita figura quæ fit ex B C ad eam quæ ex C A. quare & ut B C ad ipsas,

a 8. hujus.

b Cor. 20. hujus.



ipsas BD DC, ita [c] figura quæ ex BC ad eas quæ ex BA AC, similes, & similiter descriptas. æqualis autem est BC ipsis BD DC. ergo figura quæ fit ex BC æqualis est eis quæ ex BA AC fiunt, similibus, & similiter descriptis. in rectangulis igitur triangulis, figura quæ fit à latere rectum angulum subtendente, æqualis est eis quæ à lateribus rectum angulum continentibus fiunt, similibus, & similiter descriptis. Quod ostendere oportebat. c 24 quinti.

PROP. XXXII. THEOR.

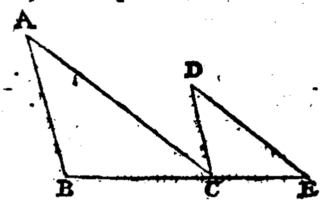
Si duo triangula componantur ad unum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita ut homologa latera ipsorum etiam sint parallela, reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt.

Sint duo triangula ABC DCE quæ duo latera BA AC duobus lateribus CD DE proportionalia habeant, scil. sit sicut BA ad AC, ita CD ad DE; parallela autem sit AB ipsi DC & AC ipsi DE. dico BC ipsi CE in directum esse. Quoniam enim AB parallela est DC, & in ipsas incidit recta linea AC; erunt [a] anguli alterni BAC ACD æquales inter se. eadem ratione, & angulus CDE æqualis est angulo ACD. quare & BAC ipsi CDE est æqualis. & quoniam duo triangula sunt ABC DCE, unum angulum ad A, uni angulo ad D æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia, quod sit ut BA ad AC, ita CD ad DE; erit [b] triangulum ABC triangulo DCE æquiangulum. ergo ABC angulus est æqualis angulo DCE. ostensus autem est & angulus ACD æqualis angulo BAC. totus igitur ACE duobus ABC BAC est æqualis. communis apponatur ACB. ergo anguli ACE ACB angulis BAC ACB CBA æquales sunt. sed BAC ACB CBA anguli duobus rectis sunt æquales. & anguli igitur ACE ACB duobus rectis æquales erunt. itaque ad quandam rectam lineam AC, & ad punctum in ipsa C, duæ rectæ lineæ BC CE non ad easdem partes positæ, angulos qui deinceps sunt ACE ACB duobus rectis æquales efficiunt. ergo BC ipsi CE in directum [c] erit. Si igitur duo triangula componantur ad unum angulum quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant

a 29. primi.

b 6. hujus.

c 14. primi.

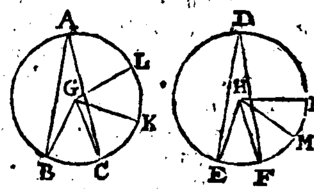


ant, ita ut homologa latera ipſorum etiam ſint parallela; reliqua triangulorum latera in directum ſibi ipſis conſtituta erunt. Quod demonſtrare oportebat.

PROP. XXXIII. THEOR.

In circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ quibus inſiſtunt, ſive ad centra, ſive ad circumferentias inſiſtant: adhuc autem & ſectores, quippe qui ad centra ſunt conſtituti.

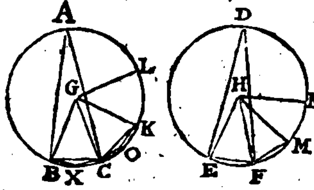
Sint æquales circuli ABC DEF; & ad centra quidem ipſorum G H ſint anguli BGC EHF, ad circumferentias vero anguli BAC EDF. dico ut circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita eſſe & BGC angulum ad angulum EHF, & angulum BAC ad angulum DEF: & adhuc ſectorem BGC ad EHF ſectorem. ponantur enim circumferentiæ quidem BC æquales quotcunque deinceps CK KL; circumferentiæ vero EF, rurſus æquales quotcunque FM MN: & jungantur GK GL HM HN. Quoniam igitur circumferentiæ BC CK KL inter ſe ſunt æquales, & anguli BGC CGK KGL inter ſe æquales [a] erunt. quotuplex igitur eſt circumferentia BL circumferentiæ BC, totuplex eſt & BGL angulus anguli BGC. eadem ratione & quotuplex eſt circumferentia NE circumferentiæ EF, totuplex & EHN angulus anguli EHF. ſi vero æqualis eſt BL circumferentia circumferentiæ EN; & angulus BGL angulo EHN erit æqualis; & ſi circumferentia BL major eſt circumferentia EN, major erit & BGL angulus angulo EHN; & ſi minor, minor. quatuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, duabus nimirum circumferentiis BC EF, & duobus angulis BGC EHF; ſumptæ ſunt circumferentiæ quidem BC, & BGC anguli æque multiplicia, videlicet circumferentia BL & BGL angulus; circumferentiæ vero EF, & EHF anguli æque multiplicia, nempe circumferentia EN, & angulus EHN. atque oſtenſum eſt ſi circumferentia BL ſuperat circumferentiam EN, & BGL angulum ſuperare angulum EHN; & ſi æqualis, æqualem; & ſi minor, minorem eſſe. ut [b] igitur circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita angulus BGC ad angulum EHF. ſed ut BGC angulus ad angulum EHF, ita angulus



[a] 27. tertii.

[b] Diffin. 5. quinti.

angulus BAC ad EDF angulum. uterque enim utriusque est d duplex. & ut igitur BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita & angulus BGC ad angulum EHF, & angulus BAC ad EDF angulum. quare in circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem quam circumferentiæ quibus insistunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. dico insuper & ut BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita esse sectorem GBC ad HFE sectorem. Jungantur enim BC CK, & sumptis in circumferentiis BC CK punctis X O, jungantur & BX XC CO OK. itaque quoniam duæ BG GC duabus CG GK æquales sunt, & angulos æquales continent; erit & basis BC basi CK æqualis. æquale igitur est GBC triangulum triangulo GCK. & quoniam circumferentia BC circumferentiæ CK est æqualis, & reliqua circumferentia quæ complet totum circulum ABC æqualis est reliquæ quæ eundem circulum complet. quare & angulus BXC angulo COK est æqualis. simile igitur est BXC segmentum segmento COK: & sunt in æqualibus rectis lineis BC CK. quæ autem in æqualibus rectis lineis similia circulorum segmenta, & inter se f æqualia sunt. ergo segmentum BXC est æquale segmento COK. est autem & BGC triangulum triangulo CGK æquale. & totus igitur sector BGC sectori CGK æqualis erit. eadem ratione & GKL sector utrique ipsorum GKC GCB est æqualis. tres igitur sectores BGC CGK KGL æquales sunt inter se. similiter & sectores HEF HFM HMN inter se sunt æquales. quotuplex igitur est LB circumferentia circumferentiæ BC, totuplex est & GBL sector sectoris GBC. eadem ratione & quotuplex est circumferentia NE circumferentiæ EF, totuplex est & HEN sector sectoris HEF. Sed si circumferentia BL circumferentiæ EN est æqualis, & sector BGL æqualis est sectori EHN; & si circumferentia BL superat circumferentiam EN, superat & BGL sector sectorem EHN; & si minor, minor. quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem BC EF circumferentiis, duobus vero sectoribus GBC EHF, sumpta sunt æque multiplicia circumferentiæ quidem BC & GBC sectoris, circumferentia BL, & GBL sector. circumferentiæ vero EF, & sectoris HEF æque multiplicia, circumferentia EN, & HEN sector, atque ostensum est si BL circumferentia superat circumferentiam EN, & sectorem BGL superare sectorem EHN; & si æqualis, æqualem esse; & si minor, minorem.



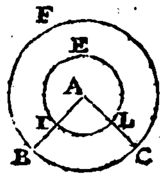
c 15 quinti.
d 20 tertii.
e 4 primi.
f 24 tertii.

minorem. est igitur ut B C circumferentia ad circumferentiam E F, ita sector G B C ad H E F sectorem. Quod ostendere oportebat.

COROLL.

1. Angulus ad centrum est ad quatuor rectos, ut arcus cui insistit ad totam circumferentiam: nam ut angulus B A C ad rectum, ita B C arcus ad circuli quadrantem; quare quadruplicando consequentes, erit angulus B A C ad quatuor rectos, ut arcus B C ad totam circumferentiam.

2. Inæqualium circulorum arcus I L B C qui æquales subtendunt angulos, sive ad centra, sive ad peripherias, sunt similes. Nam est I L ad totam peripheriam I L E, ut angulus I A L ad quatuor rectos: est vero ut I A L seu B A C ad quatuor rectos, ita arcus B C ad totam peripheriam B C F. quare ut I L ad totam peripheriam I L E, ita B C ad totam peripheriam B C F. ac proinde arcus I L B C sunt similes.



3. Duæ semidiametri A B A C à concentricis peripheriis arcus auferunt similes I L B C.

EUCLIDIS

EUCLIDIS ELEMENTORUM.

LIBER UNDECIMUS.

DIFFINITIONES.

I

Solidum est, quod longitudinem, latitudinem & crassitudinem habet.

II.

Solidi terminus est superficies.

III.

Recta linea ad planum recta est, quando ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt, & in subjecto sunt plano, rectos angulos efficit.

IV.

Planum ad Planum rectum est, cum rectæ lineæ quæ communi planorum sectioni ad rectos angulos in uno plano ducuntur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

V.

Rectæ lineæ ad planum inclinatio est, cum à sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis; atque à puncto quod perpendicularis in ipso plano effecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodem est plano, altera recta linea fuerit adjuncta; est, inquam, angulus acutus insistente linea, & adjuncta comprehensus.

VI.

VI.

Plani ad planum inclinatio est, angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in utroque planorum ad idem communis sectionis punctum ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

VII.

Planum ad planum similiter inclinari dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

VIII.

Parallela plana sunt, quæ inter se non conveniunt.

IX.

Similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur, multitudine æqualibus.

X.

Æquales & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

XI.

Solidus angulus est, plurium quàm duarum linearum quæ se mutuo contingunt, nec in eadem sunt superficie, ad omnes lineas inclinatio. Vel solidus angulus est, qui pluribus quàm duobus planis angulis in eodem non consistentibus plano, sed ad unum punctum constitutis continetur.

XII.

Pyramis est figura solida planis comprehensa, quæ ab uno plano ad unum punctum constituuntur.

XIII.

Prisma est figura solida quæ planis continetur, quorum adversa duo sunt & æqualia, & similia, & parallela; alia vero parallelogramma.

XIV.

Sphæra est, quando semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus in seipsum rursus revolvitur unde moveri cœperat, circum assumpta figura.

XV.

Axis autem sphæræ est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus convertitur.

XVI.

Centrum sphæræ est idem quod & semicirculi.

XVII.

Diameter autem sphæræ est recta quædam linea per centrum ducta, & utrinque à sphæræ superficie terminata.

XVIII.

Conus est, quando rectanguli trianguli manente uno latere eorum quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in seipsum rursus revolvitur, unde moveri cœperat, circum assumpta figura. Atque si quiescens recta linea æqualis, sit reliquæ quæ circa rectum angulum continetur, orthogonius erit conus: si vero minor, amblygonius: si vero major, oxygonius.

XIX.

Axis autem coni est quiescens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

XX.

Basis vero coni est circulus qui à circumducta recta linea describitur.

XXI.

Cylindrus est, quando rectanguli parallelogrammi manente uno latere eorum quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in seipsum rursus revolvitur, unde cœperat moveri, circum assumpta figura.

XXII.

Axis autem cylindri est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum convertitur.

XXIII.

Bases vero cylindri sunt circuli à duobus adversis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

XXIV.

Similes coni & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri proportionales sunt.

XXV.

XXV.

Cubus est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

Tetraedrum est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus & æquilateris contenta.

XXVII.

Octaedrum est figura solida sub octo triangulis æqualibus & æquilateris contenta.

XXVIII.

Dodecaedrum est figura solida sub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XXIX.

Icosaedrum est figura solida sub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

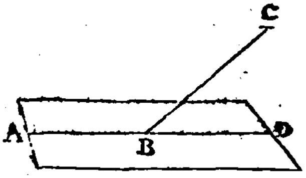
XXX.

Parallelepipedum est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum quæ ex adverso parallelæ sunt, contenta.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Rectæ lineæ pars quædam non est in subjecto plano, quædam vero in sublimi.

Si enim fieri potest, rectæ lineæ AB pars quidem AB sit in subjecto plano, pars vero BC in sublimi. erit recta linea quædam ipsi AB in directum continuata in subjecto plano. sitque DB. duabus igitur datis rectis lineis ABC ABD commune segmentum est AB, quod fieri non potest: recta enim linea cum recta linea non convenit in pluribus punctis, quam uno. Non igitur rectæ lineæ pars quædam est in subjecto plano, quædam vero in sublimi. Quod demonstrare oportebat.

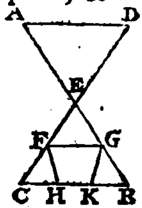


PROP.

PROP. II. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ se invicem secent, in uno sunt plano, & omne triangulum in uno plano consistit.

Duæ enim rectæ lineæ A B C D se invicem in puncto E secent. dico ipsas A B C D in uno esse plano, & omne triangulum in uno plano consistere. Sumantur enim in ipsis E B E C quævis puncta F G; junganturque C B F G, & F H G K ducantur. dico primum E B C triangulum consistere in uno plano. si enim trianguli E B C pars quædam F H C, vel G B K in subjecto plano est, reliqua vero in alio plano; erit & linearum E B E C pars in subjecto plano, & pars in alio. quòd si trianguli E C B pars F C B G sit in subjecto plano, reliqua vero in alio, utrarumque rectarum linearum E C E B quædam pars erit in subjecto plano, quædam vero in alio. quod absurdum esse a ostendimus. triangulum igitur E B C in uno est plano. in quo autem plano est B C E triangulum, in hoc est utraque ipsarum E C E B: in quo autem utraque ipsarum E C E B, in hoc & A B C D. Ergo rectæ lineæ A B C D in uno sunt plano, & omne triangulum in uno plano consistit. Quod erat demonstrandum.

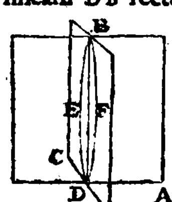


a 1. hujus

PROP. III. THEOR.

Si duo plana se invicem secent, communis ipsorum sectio recta linea erit.

Duo plana A B B C se invicem secent, communis autem ipsorum sectio sit D B linea. dico lineam D B rectam esse. si enim non ita sit, ducatur à puncto D ad B in plano quidem A B recta linea D E B; in [illegible]o autem B C recta li[illegible] F B. erunt utique duarum rectarum linearum D E B D F B iidem termini, & ipsæ spatium continebunt, quod est absurdum a. non igitur D E B D F B rectæ lineæ sunt. similiter ostendemus neque aliam quampiam, quæ à puncto D ad B ducitur rectam esse, præter ipsam D B: communem scilicet planorum A B B C sectionem. Si igitur duo plana se invicem secent, communis ipsorum sectio recta linea erit. Quod ostendere oportebat.



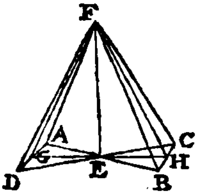
a Axio. 1.

PROP.

PROP. IV. THEOR.

Si recta linea duabus rectis lineis se invicem secantibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit.

Recta linea quædam EF duabus rectis lineis AB CD se invicem secantibus in E puncto, ab ipso E ad rectos angulos insistat. dico EF etiam plano per AB CD ducto ad rectos angulos esse. Sumantur rectæ lineæ AE EB CE DE inter se æquales: perque E ducatur recta linea GEH utcunque & jungantur AD CB; deinde à quovis puncto F ducantur FA FG FD FC FH FB. & quoniam duæ rectæ lineæ AE ED duabus rectis lineis CE EB æquales sunt, &



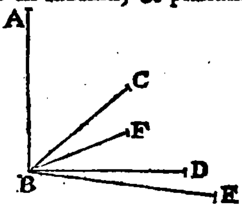
a 15 primi. angulos a æquales AED CEB continent, erit b AD basis basi
b 4 primi. CB æqualis, & triangulum AED triangulo CEB æquale. ergo & angulus DAE æqualis est angulo EBC. est autem, & angulus AEG a æqualis angulo BEH. duo igitur triangula sunt AGE BEH, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus AE uni lateri EB æquale quod est ad æquales angulos. quare & reliqua latera
c 26 primi. reliquis lateribus æqualia habebunt c. ergo GE quidem est æqualis EH; AG vero ipsi BH. quod cum AE sit æqualis EB, communis autem, & ad rectos angulos FE; erit b basis AF basi FB æqualis; eadem quoque ratione & CF æqualis erit FD. præterea quoniam AD est æqualis CB, & AF ipsi FB, erunt duæ FA AD duabus FB BC æquales, altera al-
d 8 primi. teri; & ostensa est basis DF æqualis basi FC. angulus d igitur FAD angulo FBC est æqualis. rursus ostensa est AG æqualis BH; sed & AF ipsi FB est æqualis. duæ igitur FA AG duabus FB BH æquales sunt, & angulus FAG æqualis est angulo FBH; ut demonstratum fuit, basis igitur GF basi GH est b æqualis. rursus quoniam GE ostensa est æqualis EH, communis autem EF; erunt duæ GE EF æquales duabus HE EF; & basis HF est æqualis basi FG. angulus d igitur GEF angulo HEF est æqualis, & idcirco rectus est uterque angulorum GEF HEF. ergo FE ad GH utcunque per E ductam rectos efficit angulos. similiter ostendemus FE etiam ad omnes rectas lineas, quæ ipsum contingunt, & in subjecto sunt plano, rectos angulos efficere. recta autem ad
e 3. Diffin. planum recta est e quando ad omnes rectas lineas ipsam contingentes,

tingentes, & in eodem existentes plano rectos efficit angulos. quare FE subjecto plano ad rectos angulos insistit. at subjectum planum est quod per AB CD rectas lineas ducitur. ergo FE ad rectos angulos erit ducto per AB CD plano. Si igitur recta linea duabus rectis lineis se invicem secantibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit. Quod demonstrare oportebat.

PROP. V. THEOR.

Si recta linea tribus rectis lineis sese tangentibus, in communi sectione, ad rectos angulos insistat, tres illæ rectæ lineæ in uno plano erunt.

Recta linea quædam AB tribus rectis lineis BC BD BE, in contactu B, ad rectos angulos insistat. dico BC BD BE in uno plano esse. Non enim, sed si fieri potest, sint BD BE quidem in subjecto plano, BC vero in sublimi, & planum per AB BC producatur. communem utique sectionem in subjecto plano faciet [a] rectam lineam; faciat BF. in uno igitur sunt plano per AB BC ducto, tres rectæ lineæ AB BC BF. & quoniam AB utrique ipsarum BD BE ad rectos angulos insistit, & ducto per ipsas DB BE plano ad rectos angulos erit. planum autem per DB BE est subjectum planum. ergo AB ad subjectum planum recta [b] est. quare & ad [c] omnes rectas lineas ipsam contingentes, quæ in eodem plano sunt, rectos faciet angulos; sed ipsam tangit BF in subjecto existens plano. ergo angulus ABF rectus est. ponitur autem & ABC angulus rectus. æqualis igitur est angulus ABF angulo ABC, & in eodem sunt plano; quod fieri non potest. recta igitur linea BC non est in sublimi; quare tres rectæ lineæ BC BD BE in uno sunt plano. Si igitur recta linea tribus rectis lineis sese tangentibus, in communi sectione, ad rectos angulos insistat, tres illæ rectæ lineæ in uno plano erunt. Quod demonstrare oportebat.

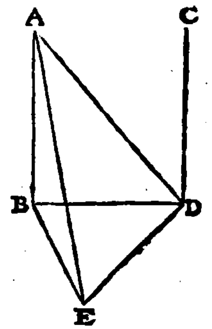


[a] 3. hujus.
[b] 4. hujus.
[c] 3. Diffin.

PROP. VI. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter sese parallelæ erunt.

Duæ enim rectæ lineæ AB CD subjecto plano sint ad rectos angulos. dico AB ipsi CD parallelam esse. occurrant enim subjecto plano in punctis B D, jungaturque BD recta lineа, cui ad rectos angulos in subjecto plano ducatur DE, & posita DE ipsi AB æquali, jungantur BE AE AD. Quoniam igitur AB recta est ad subjectum planum, & ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt, & in subjecto sunt plano, rectos angulos [a] efficiet. contingit autem AB utraque ipsarum BD BE existens in subjecto plano. ergo uterque angulorum ABD ABE rectus est. eadem ratione rectus etiam est uterque ipsorum CDB CDE. & quoniam AB æqualis est ipsi DE, communis autem BD. erunt duæ AB BD duabus ED DB æquales, & rectos angulos continent; basis igitur AD basi BE est [b] æqualis.



a 3. Diffin. hujus.

b 4. primi.

rursus quoniam AB est æqualis DE, & AD ipsi BE, duæ AB BE duabus ED DA æquales sunt, & basis ipsarum AE communis; ergo angulus ABE angulo EDA est [c] æqualis. sed ABE rectus est. rectus igitur & EDA; & idcirco ED ad DA est perpendicularis. sed & perpendicularis est ad utramque ipsarum BD DC. quare ED tribus rectis lineis BD DA DC in contactu ad rectos insistit angulos. tres igitur rectæ lineæ BD DA DC in uno sunt [d] plano. in quo autem sunt BD DA, in eo est AB, omne enim triangulum in uno [e] est plano. ergo AB BD DC in uno plano sint necesse est: atque est uterque angulorum ABD BDC rectus. parallela igitur [f] est AB ipsi CD. quare si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter se parallelæ erunt. Q. E. D.

c 8. primi.

d 5. hujus.

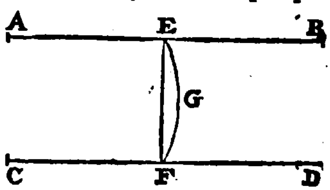
e 2. hujus.

f 28. primi.

PROP. VII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, sumantur autem in utraque ipsarum quælibet puncta; quæ dicta puncta conjungit recta in eodem erit plano, in quo & parallelæ.

Sint duæ rectæ lineæ parallelæ AB CD, & in utraque ipsarum sumantur quælibet puncta E F. dico rectam lineam quæ puncta E F conjungit, in eodem plano esse, in quo sunt parallelæ. non enim, sed si fieri potest, sit in sublimi, ut EGF, & per EGF, planum ducatur quod in subjecto plano sectionem faciet [a] rectam lineam; faciat



a 3. hujus.

ut

ut EF. ergo duæ rectæ lineæ EGF EF spatium continebunt, quod fieri non [b] potest. non igitur quæ à puncto F ad F ducitur recta linea in sublimi est plano, quare erit in eo quod per AB CD parallelas transit. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelæ sint, &c. Quod oportebat demonstrare. [b] 10. axio. primi.

PROP. VIII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, altera autem ipsarum plano alicui sit ad rectos angulos, & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

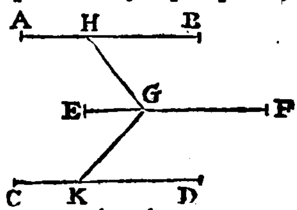
Sint duæ rectæ lineæ parallelæ AB CD, & altera ipsarum AB subjecto plano sit ad rectos angulos. dico & reliquam CD eidem plano ad rectos angulos esse. occurrant enim AB CD subjecto plano in punctis B D, & BD jungatur. ergo AB CD BD in uno sunt [b] plano. ducatur ipsi BD ad rectos angulos in subjecto plano DE: & ponatur DE ipsi AB æqualis: junganturque BE AE AD. & quoniam AB perpendicularis est ad subjectum planum, & ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt suntque in subjecto plano, perpendicularis [a] erit. rectus igitur est uterque angulorum ABD ABE. quod cum in parallelas rectas lineas AB CD recta incidit BD, erunt anguli ABD CDB duobus rectis [b] æquales. rectus autem est ABD. ergo & CDB est rectus; ac propterea CD perpendicularis est ad BD. & quoniam AB est æqualis DE, communis autem BD, duæ AB BD duabus ED DB æquales sunt; & angulus ABD est æqualis angulo EDB, rectus enim uterque est, basis igitur AD basi BE est [c] æqualis. rursus quoniam AB æqualis est DE, & BE ipsi AD; erunt duæ AB BE duabus ED DA æquales, altera alteri; & basis earum communis AE. quare angulus ABE est [d] æqualis angulo EDA. rectus autem est ABE. ergo & EDA est rectus, & ED ad DA perpendicularis. sed & perpendicularis est ad BD. ergo ED etiam ad planum per BD DA perpendicularis [e] erit, & ad omnes rectas lineas quæ in eodem existentes plano ipsam contingunt, rectos [f] faciet angulos. at in plano per BA AD est DC, quoniam in plano per BD DA sunt [g] AB BD: in quo autem sunt AB BD in eodem [i] est ipsa DC. quare ED ipsi DC est ad rectos angulos: ideoque CD ad rectos angulos est ipsi DE; sed & etiam ipsi DB. ergo CD duabus rectis lineis DE DB se mutuo secantibus in communi sectione D ad rectos angulos insistit; ac propterea plano per DE DB est [e] ad rectos angulos. planum autem per DE DB est subjectum planum. ergo CD subjecto plano ad rectos angulos erit. Quod demonstrare oportebat.

Vide figuram Prop. sexta.
[b] 2. hujus.
[a] 3. Diffin.
[b] 29. primi.
[c] 4. primi.
[d] 8. primi.
[e] 4. hujus.
[f] 3. Diffin.
[g] 2. hujus.
[i] 7. hujus.

PROP. IX. THEOR.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, non existentes in eodem in quo ipsa plano, etiam inter se parallelæ erunt.

Sit utraque ipsarum AB CD parallela ipsi EF, non existentes in eodem, in quo ipsa plano. dico AB ipsi CD parallelam esse. sumatur in EF quodvis punctum G, à quo ipsi EF, in plano quidem per EF AB transeunte, ad rectos angulos ducatur GH; in plano autem transeunte per EF CD, rursus ducatur ipsi EF ad rectos angulos GK. & quoniam EF ad utramque ipsarum GH GK est perpendicularis, erit EF etiam ad rectos [a] angulos plano per GH GK transeunte. atque est EF ipsi AB parallela. ergo & AB plano per HGK ad rectos angulos [b] est. eadem ratione & CD plano per HGK est ad rectos angulos. utraque igitur ipsarum AB CD plano per HGK ad rectos angulos erit. Si autem duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, parallelæ [c] erunt inter se. ergo AB ipsi CD est parallela. Quod demonstrare oportebat.



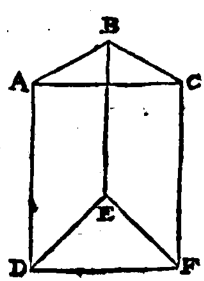
a 4. hujus.
b 8. hujus.
c 6. hujus.

PROP. X. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ sese contingentes, duabus rectis lineis sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt.

Duæ rectæ lineæ sese contingentes AB BC, duabus rectis lineis DE EF sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano. dico angulum ABC angulo DEF æqualem esse. assumantur enim BA BC ED EF inter se æquales: & jungantur AD CF BE AC DF. quoniam igitur BA ipsi ED æqualis est & parallela, erit & [a] AD æqualis & parallela ipsi BE. eadem ratione & CF ipsi BE æqualis & parallela erit. utraque igitur ipsarum AD CF ipsi BE æqualis est & parallela. quæ autem eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, non existentes in eodem plano; & inter

a 33. primi.



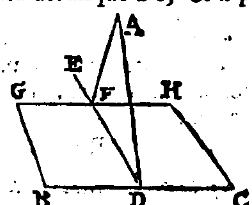
ter se parallelæ *b* erunt. ergo A D parallela est ipsi C F & æqualis. atque ipsas conjungunt A C D F; & A C igitur ipsi D F æqualis est & *c* parallela. & quoniam duæ rectæ lineæ A B B C duabus D E E F æquales sunt, & basis A C est æqualis basi D F; erit *d* angulus A B C angulo D E F æqualis. Si igitur duæ rectæ lineæ sese contingentes, duabus rectis lineis sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt. Quod oportebat demonstrare.

b 9. hujus.
c 33. primi.
d 8. primi.

PROP. XI. PROBL.

A dato puncto in sublimi, ad subjectum planum, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum in sublimi A, datum autem subjectum planum B H. oportet à puncto A ad subjectum planum perpendicularem rectam lineam ducere. In subjecto plano ducatur quædam recta linea utcunque B C, & à puncto A ad B C perpendicularis agatur *c* A D. siquidem igitur A D perpendicularis sit etiam ad subjectum planum; factum jam erit, quod proponebatur: sin minus; ducatur à puncto D ipsi B C, in subjecto plano, ad rectos *b* angulos D E: & à puncto A ad D E perpendicularis *c* ducatur A F. denique per F ducatur G H ipsi B C parallela. Quoniam B C utrique ipsarum D A D E est ad rectos angulos, erit *d* & B C ad rectos angulos plano per E D D A transeunti. quin ipsi B C parallela est G H; si autem sint duæ rectæ lineæ parallelæ, quarum una plano alicui sit ad rectos angulos; & reliqua *e* eidem plano ad rectos angulos erit. quare & G H plano per E D D A transeunti ad rectos angulos est: ac propterea ad omnes rectas lineas, quæ in eodem plano existentes ipsam contingunt, est *f* perpendicularis. contingit autem ipsam A F existens in plano per E D D A. ergo G H perpendicularis est ad A F. & ob id A F est perpendicularis ad G H: est autem A F ad D E perpendicularis. ergo A F perpendicularis est ad utramque ipsarum H G D E. si autem recta linea duabus rectis lineis sese contingentibus, in communi sectione, ad rectos angulos insistat, etiam plano per ipsas ducto ad rectos angulos *d* erit. quare A F plano per E D G H ducto est ad rectos angulos. planum autem per E D G H est subjectum planum. ergo A F ad subjectum planum est perpendicularis. A dato igitur puncto sublimi A, ad



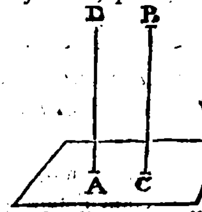
b 11. primi.
c 12. primi.
d 4. hujus.
e 8. hujus.
f 3. Diffin.

subjectum planum, perpendicularis recta linea ducta est A F. Quod facere oportebat.

PROP. XII. PROBL.

Dato plano, à puncto quod in ipso datum est, ad rectos angulos rectam lineam constituere.

Sit datum quidem planum subjectum, punctum autem quod in ipso sit A. oportet à puncto A subjecto plano ad rectos angulos rectam lineam constituere. Intelligatur aliquod punctum sublime B, à quo ad subjectum planum agatur [a] perpendicularis B C; & per A ipsi B C parallela [b] ducatur A D. quoniam igitur duæ rectæ lineæ parallelæ sunt A D C B, una autem ipsarum B C subjecto plano est ad rectos angulos; & reliqua [c] A D subjecto plano ad rectos angulos erit. Dato igitur plano à puncto, quod in ipso est datum, ad rectos angulos recta linea constituta est. Quod facere oportebat.

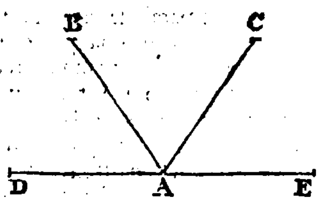


[a] 11 hujus
[b] 31 primi
[c] 8. hujus.

PROP. XIII. THEOR.

Dato plano, à puncto quod in ipso est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non constituentur ex eadem parte.

Si enim fieri potest, dato plano, à puncto quod in ipso est A, duæ rectæ lineæ A B, A C ad rectos angulos constituantur ex eadem parte: & ducatur planum per B A A C, quod faciet sectionem per A in subjecto plano [a] rectam lineam. faciat D A E. ergo rectæ lineæ A B A C D A E in uno sunt plano. & quoniam C A subjecto plano ad rectos angulos est, & ad [b] omnes rectas lineas, quæ in subjecto plano existentes ipsam contingunt, rectos faciet angulos. contingit autem ipsam D A E, quæ est in subjecto plano. angulus igitur C A E rectus est. eadem ratione & rectus est B A E. ergo angulus C A E ipsi B A E est æqualis, & in uno sunt plano, quod fieri non potest. Non igitur dato plano, à puncto, quod in ipso est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos constituentur ex eadem parte. Quod oportebat demonstrare.



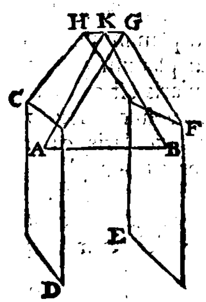
[a] 3. hujus.
[b] 3. Diffin.

PROP.

PROP. XIV. THEOR.

Ad quæ plana, eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt.

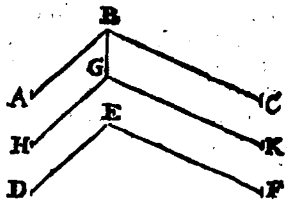
Recta quædam linea A B ad utrumque ipsorum planorum C D E F sit perpendicularis. dico ea plana parallela esse. Si enim non ita sit, producta convenient inter se: conveniant, & communem sectionem faciant rectam lineam G H; & in ipsa G H sumpto quovis puncto K, jungatur A K B K. Quoniam igitur A B perpendicularis est ad E F planum; erit & perpendicularis ad ipsam B K rectam lineam in plano E F producto existentem. quare angulus A B K rectus est. eadem ratione & B A K est rectus: ideoque trianguli A B K duo anguli A B K B A K duobus rectis sunt æquales, quod fieri non [a] potest. non igitur plana C D E F producta inter se convenient. quare C D E F parallela sint necesse est. Ad quæ igitur plana, eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt. Quod demonstrare oportebat. [a] 17. primi.



PROP. XV. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; & quæ per ipsas transeunt plana parallela erunt.

Duæ rectæ lineæ sese tangentes A B B C, duabus rectis lineis sese tangentibus D E E F parallelæ sint, & non in eodem plano. dico plana quæ per A B B C, D E E F transeunt, si producantur, inter se non convenire. Ducatur à puncto B ad planum, quod per D E E F transit perpendicularis B G, quæ plano in puncto G occurrat, & per G ducatur ipsi quidem E D parallela G H; ipsi vero E F parallela G K. itaque quoniam B G perpendicularis est ad planum per D E E F; & ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt, & in eodem sunt plano, rectos faciet [a] angulos. contingit autem ipsam utraque earum G H G K, quæ sunt in eodem [a] 3. Diffini.



eodem plano. rectus igitur est uterque angulorum BGH BGK. & quoniam BA parallela est ipsi GH, anguli GBA BGH duabus rectis sunt ᵇ æquales. rectus autem est BGH. ergo & GBA rectus erit, ideoque GB ad BA est perpendicularis. eadem ratione & GB est perpendicularis ad BC. cum igitur recta linea BG duabus rectis lineis BA BC se invicem secantibus ad rectos angulos insistat; erit BG etiam ad planum per BA BC ductum ᵈ perpendicularis. atque est ad planum per DE EF perpendicularis. ergo BG perpendicularis est ad utrumque planorum quæ per AB BC, DE EF transeunt. Ad quæ vero plana eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela ᵉ sunt. parallelum igitur est planum per AB BC plano per DE EF. Quare si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano, & quæ per ipsas transeunt plana parallela erunt, Quod demonstrare oportebat.

ᵇ 29 primi.

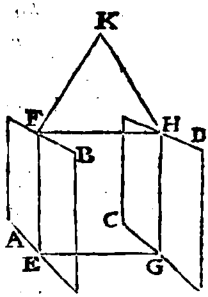
ᵈ 4. hujus.

ᵉ 14. hujus.

PROP. XVI. THEOR.

Si duo plana parallela ab aliquo plano secentur, communes ipsorum sectiones parallelæ erunt.

Duo plana parallela AB CD à plano aliquo EFHG secentur; communes autem ipsorum sectiones sint EF GH. dico EF ipsi GH parallelam esse. Si enim non est parallela, productæ EF GH inter se convenient, vel ad partes FH, vel ad partes EG. producantur prius, ut ad FH, & conveniant in K. quoniam igitur EFK est in plano AB, & omnia quæ in EFK sumuntur puncta in eodem plano erunt: unum autem punctorum quæ sunt in EFK, est ipsum K punctum. ergo K est in plano AB. eadem ratione & K est in CD plano. ergo plana AB CD producta inter se convenient. non conveniunt autem, cum parallela ponantur. non igitur EF GH rectæ lineæ productæ convenient ad partes FH. similiter demonstrabimus neque ad partes EG convenire, si producantur. quæ autem neutra ex parte conveniunt parallelæ sunt. ergo EF ipsi GH est parallela. Si igitur duo plana parallela ab aliquo plano secentur, communes ipsorum sectiones parallelæ erunt. Quod demonstrare oportebat.

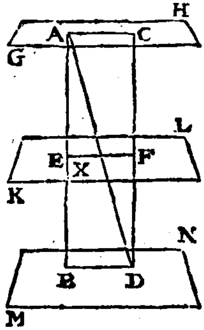


PROP.

PROP. XVII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ à parallelis secentur planis, in easdem proportiones secabuntur.

Duæ rectæ lineæ A B C D à parallelis planis G H K L M N secentur in punctis A E B C F D. dico ut A E recta linea ad ipsam E B, ita esse C F ad F D. Jungantur enim A C B D A D: & occurrat A D plano K L in puncto X: & E X X F jungantur. Quoniam igitur duo plana parallela K L M N à plano E B D X secantur, communes ipsorum sectiones E X B D parallelæ [a] sunt. eadem ratione quoniam duo plana parallela G H K L à plano A X F C secantur, communes ipsorum sectiones A C F X sunt parallelæ. & quoniam uni laterum trianguli A B D, videlicet ipsi B D parallela ducta est E X, ut A E ad E B, ita [b] erit A X ad X D. rursus quoniam uni laterum trianguli A D C, nempe ipsi A C parallela ducta est X F, erit ut A X ad X D [b], ita C F ad F D. ostensum autem est ut A X ad X D, ita esse A E ad E B. ut igitur A E ad E B, ita est [c] C F ad F D. Quare si duæ rectæ lineæ à parallelis secentur planis, in easdem proportiones secabuntur. Quod demonstrare oportebat.

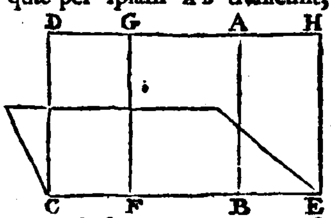


a 16. hujus.
b 2 sexti.
c 11 quinti.

PROP. XVIII. THEOR.

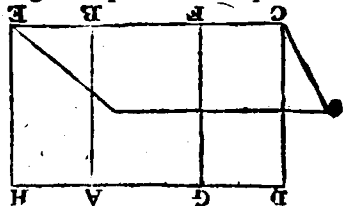
Si recta linea plano alicui sit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipsam transeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

Recta linea quædam A B subjecto plano sit ad rectos angulos. dico & omnia plana quæ per ipsam A B transeunt, subjecto plano ad rectos angulos esse. Producatur enim per A B planum D E, sitque plani D E, & subjecti plani communis sectio C E: & sumatur in C E quodvis punctum F; à quo ipsi C E ad rectos angulos, in D E plano, ducatur F G. quoniam igitur A B ad subjectum planum est perpendicularis; & ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt & in eodem sunt plano perpendicularis [a] erit. quare etiam



a 3 Diffin.

etiam ad C E est perpendicularis. angulus igitur A B F rectus est: sed & G F B est rectus. ergo A B parallela est ipsi F G. est autem A B subjecto plano ad rectos angulos. & F G igitur eidem plano ad rectos



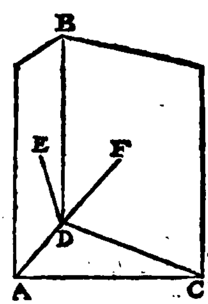
b 8. hujus. angulos b erit. at planum ad planum rectum est, quando communi planorum sectioni ad rectos angulos

c 4. Diffin. hujus. ductæ rectæ lineæ in uno planorum, reliquo plano ad rectos angulos c sint: at communi planorum sectioni C E in uno plano D E ad rectos angulos ducta F G, ostensa est subjecto plano ad rectos esse angulos. ergo planum D E rectum est ad subjectum planum. similiter demonstrabuntur & omnia quæ per A B transeunt plana subjecto plano recta esse. Si igitur recta linea plano alicui sit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipsam transeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XIX. THEOR.

Si duo plana se invicem secantia plano alicui sint ad rectos angulos, & communis ipsorum sectio eidem plano ad rectos angulos erit.

Duo plana se invicem secantia A B B C subjecto plano sint ad rectos angulos: communis autem ipsorum sectio sit B D. dico B D subjecto plano ad rectos angulos esse. Non enim, sed si fieri potest; non sit B D ad rectos angulos subjecto plano: & à puncto D ducatur in plano quidem A B, ipsi A D rectæ lineæ ad rectos angulos D E: in plano autem B C ducatur ipsi C D ad rectos angulos D F. Et quoniam planum A B ad subjectum planum rectum est, & communi ipsorum sectioni A D ad rectos angulos in plano A B ducta est



a 4. Diffin. D E, erit a D E ad subjectum planum perpendicularis. similiter ostendemus & D F perpendicularem esse ad subjectum planum. quare ab eodem puncto D subjecto plano duæ rectæ lineæ ad rectos angulos constitutæ

b 13. hujus. sunt ex eadem parte, quod fieri non b potest. non igitur subjecto plano à puncto D ad rectos angulos constituentur aliæ rectæ lineæ, præter ipsam D B, communem planorum

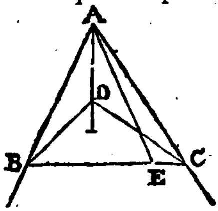
A B B C

A B B C sectionem. quare D B subjecto plano est perpendicularis. Ergo si duo plana se invicem secantia plano alicui sint ad rectos angulos, & communis ipsorum sectio eidem plano ad rectos angulos erit. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XX. THEOR.

Si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo majores sunt, quomodocunque sumpti.

Solidus angulus ad A tribus angulis planis B A C C A D D A B contineatur. dico angulorum B A C C A D D A B duos quoslibet reliquo majores esse, quomodocunque sumptos. Si enim B A C C A D D A B anguli inter se æquales sint, perspicuum est duos quoslibet reliquo majores esse, quomodocunque sumptos. sin minus, sit major B A C. & ad rectam lineam A B, & ad punctum in ipsa A, constituatur a angulo D A B, in plano per B A A C transeunte, æqualis angulus B A E; ponaturque ipsi A D æqualis A E; & per E ducta B E C secet rectas lineas A B A C in punctis B C, & D B D C jungantur. itaque quoniam D A est æqualis A E, communis autem A B, duæ D A A B æquales sunt duabus A E A B; & angulus D A B æqualis est angulo B A E. basis igitur D B basi B E est b æqualis. & quoniam duæ D B D C ipsa B C majores sunt, quarum D B æqualis ostensa est ipsi B E; erit reliqua D C quam reliqua E C major. quòd cum D A sit æqualis A E, communis autem A C & basis D C major basi E C; erit c angulus D A C angulo E A C major. sed ex constructione est D A B angulus æqualis ipsi B A E. quare D A B D A C anguli, angulo B A C majores sunt. similiter demonstrabimus, & si duo quilibet alii sumantur, eos reliquo esse majores. Si igitur solidus angulus tribus angulis planis contineatur; duo quilibet reliquo majores sunt, quomodocunque sumpti. Quod demonstrare oportebat.



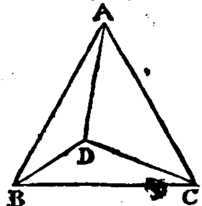
a 23. primi.
b 4. primi.
c 25 primi.

PROP. XXI. THEOR.

Omnis solidus angulus, minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur.

Sit solidus angulus ad A, planis angulis B A C C A D D A B con-

contentus. dico angulos BAC CAD DAB quatuor rectis esse minores. Sumantur enim in unaquaque ipsarum AB AC AD quævis puncta B C D, & BC CD DB jungantur. Quoniam igitur solidus angulus ad B, tribus angulis planis continetur CBA ABD CBD, duo quilibet reliquo majores [a] sunt. anguli igitur CBA ABD, angulo CBD sunt majores. eadem ratione, & anguli quidem BCA ACD, majores sunt angulo BCD; anguli vero CDA ADB majores angulo CDB. quare sex anguli CBA ABD BCA ACD ADC ADB tribus angulis CBD BCD CDB sunt majores. sed tres anguli CBD BDC DCB sunt [b] æquales duobus rectis. sex igitur anguli CBA ABD BCA ACD ADC ADB duobus rectis majores sunt. quod cum singulorum triangulorum ABC ACD ADB tres anguli sint æquales duobus rectis, erunt trium triangulorum novem anguli CBA ACB BAC ACD DAC CDA ADB DBA BAD æquales sex rectis. quorum sex anguli ABC BCA ACD CDA ADB DBA duobus rectis sunt majores. reliqui igitur BAC CAD DAB tres anguli, qui solidum continent angulum, quatuor rectis minores erunt. Quare omnis solidus angulus, minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur. Quod oportebat demonstrare.



a 20. hujus.

b 32. primi.

PROP. XXII. THEOR.

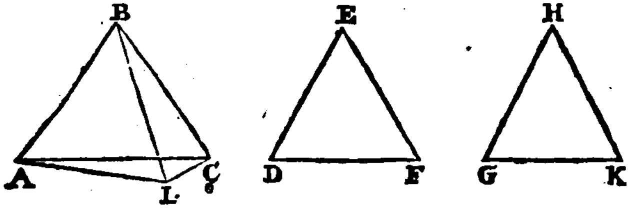
Si sint tres anguli plani, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, contineant autem ipsos rectæ lineæ æquales; fieri potest, ut ex iis quæ rectas æquales conjungunt, triangulum constituatur.

Sint dati tres anguli plani ABC DEF GHK, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti: contineant autem ipsos æquales rectæ lineæ AB BC DE EF GH HK, & AC DF GK jungantur. dico fieri posse ut ex æqualibus ipsis AC DF GK triangulum constituatur: hoc est duas reliqua majores esse quomodocunque sumptas. Si igitur anguli ad ad B E H sint æquales, & AC DF GK æquales [a] erunt, & duæ reliquâ majores. sin minus, sint inæquales anguli ad B E H, & major sit angulus ad B utrovis ipsorum qui sunt ad E H. major igitur est & [b] recta linea AC utravis ipsarum DF GK. & manifestum est ipsam AC unà cum altera ipsarum DF GK, reliqua esse majorem. dico & DF GK ipsa AC majores

a 4. primi.

b 24 primi

majores esse. constituatur [c] ad rectam lineam AB, & ad punctum in ea B, angulo GHK æqualis angulus ABL, & uni [c] 23. primi.

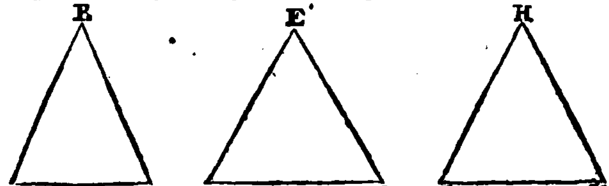


ipsarum AB BC DE EF GH HK ponatur æqualis BL, & AL CL jungantur. Quoniam igitur duæ AB BL duabus GH HK æquales sunt, altera alteri, & angulos æquales continent; erit basis AL basi GK æqualis. & quoniam anguli ad E H, angulo ABC majores sunt, quorum angulus GHK est æqualis ipsi ABL; erit reliquus qui ad E, angulo LBC major. quod cum duæ LB BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri; & angulus DEF angulo LBC major; basis DF basi LC major [b] erit. ostensa est autem GK æqualis AL. [b] 24. primi. ergo DF GK ipsis AL LC sunt majores; sed AL LC majores sunt ipsa AC. multo igitur DF GK, ipsa AC majores erunt. quare rectarum linearum AC DF GK duæ reliqua majores sunt quomodocunque sumptæ; ac propterea fieri potest ut ex æqualibus ipsis AC DF GK triangulum constituatur. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXIII. PROBL.

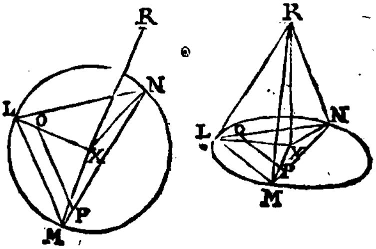
Ex tribus angulis planis, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, solidum angulum constituere. oportet autem tres angulos quatuor rectis esse minores.

Sint dati tres anguli plani ABC DEF GHK, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, sintque tres



anguli quatuor rectis minores. oportet ex æqualibus ipsis ABC DEF GHK solidum angulum constituere. abscindantur æquales AB BC DE EF GH HK; & AC DF GK jungantur. fieri

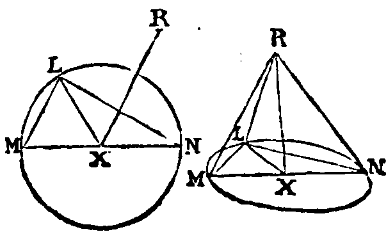
fieri igitur poteſt ut ex æqualibus ipſis A C D F G K conſtituatur [a] triangulum. Itaque [b] conſtituatur L M N, ita ut A C quidem ſit æqualis L M, D F vero ipſi M N: & præterea G K ipſi L N, & circa L M N triangulum circulus L M N [c] deſcribatur: ſumaturque ipſius centrum X, quod vel erit intra triangulum L M N, vel in uno ejus latere, vel extra. Sit primo intra: & L X M X N X jungantur. dico A B majorem eſſe ipſa L X. ſi enim non ita ſit, vel A B erit æqualis L X, vel ea minor. ſit primo æqualis. quoniam igitur A B eſt æqualis L X, atque eſt A B ipſi B C æqualis; erit L X æqualis B C, eſt autem L X æqualis X M. duæ igitur A B B C duabus L X X M æquales ſunt, altera alteri; & A C baſis baſi L M æqualis ponitur. quare [d] angulus A B C angulo L X M eſt æqualis: eadem ratione & angulus quidem D E F eſt æqualis angulo M X N, angulus vero G H K angulo N X L. tres igitur anguli A B C D E F G H K tribus L X M M X N N X L æquales ſunt. ſed tres L X M M X N N X L quatuor rectis ſunt [e] æquales. ergo & tres A B C D E F G H K æquales erunt quatuor rectis. atqui ponuntur quatuor rectis minores, quod eſt abſurdum. non igitur A B ipſi L X eſt æqualis. dico præterea neque A B minorem eſſe ipſa L X ſi enim fieri poteſt, ſit minor, & ponatur ipſi quidem A B æqualis X O, ipſi vero B C æqualis X P, & O P jungatur. quoniam igitur A B eſt æqualis B C, & X O ipſi X P æqualis erit. ergo & reliqua O L reliquæ P M eſt æqualis; ac propterea L M parallela [f] eſt ipſi O P; & L M X triangulum triangulo O P X æquiangulum. eſt [g] igitur ut X L ad L M, ita X O ad O P; & permutando ut L X ad X O, ita L M ad O P. major autem eſt L X, quam X O. ergo & L M quam O P eſt major. ſed L M poſita eſt æqualis A C. & A C igitur quam O P major erit. itaque quoniam duæ rectæ lineæ A B B C duabus O X X P æquales ſunt, & baſis A C major baſi O P; erit [h] angulus A B C angulo O X P major. ſimiliter demonſtrabimus & D E F angulum majorem eſſe angulo M X N, & angulum G H K angulo N X L. tres igitur anguli A B C D E F G H K tribus L X M M X N N X L ſunt majores. at anguli A B C D E F G H K quatuor rectis minores ponuntur. multo igitur anguli L X M M X N N X L minores erunt quatuor rectis. ſed & [i] æquales. quod eſt abſurdum. non igitur A B minor eſt, quam L X.



[a] 22. hujus.
[b] 22. primi.
[c] 5 quarti.
[d] 8. primi.
[e] Cor. 15. primi.
[f] 2 ſexti.
[g] 4 ſexti.
[h] 25. primi.
[i] Cor. 15. primi.

L X. ostensum autem est neque esse æqualem. ergo major sit
necesse est. constituatur [k] à puncto X circuli L M N plano ad k 12. hujus.
rectos angulos X R. & excessui quo quadratum ex A B su-
perat quadratum ex L X, ponatur æquale quadratum quod
fit ex R X, & R L R M R N jungantur. quoniam igitur R X
perpendicularis est ad planum L M N circuli, & ad unam-
quamque ipsarum L X M X N X erit [l] perpendicularis. & l 3. diffin.
quoniam L X est æqualis X M, communis autem & ad rectos
angulos X R, erit basis L R æqualis [m] basi R M. eadem ratione m 4 primi.
& R N utrique ipsarum R L R M est æqualis. tres igitur
rectæ lineæ R L R M R N inter se æquales sunt. & quoniam
quadratum X R ponitur æquale excessui, quo quadratum ex
A B superat quadratum ex L X; erit quadratum ex A B qua-
quadratis ex L X X R æquale. quadratis autem ex L X X R
æquale est [n] quadratum ex R L; rectus enim angulus est n 47. primi.
L X R. ergo quadratum ex A B quadrato ex R L æquale erit;
ideoque A B ipsi R L est æqualis. sed ipsi quidem A B æqua-
lis est unaquæque ipsarum B C D E E F G H H K: ipsi vero
R L æqualis utraque ipsarum R M R N. unaquæque igitur
ipsarum A B B C D E E F G H H K unicuique ipsarum R L R M
R N est æqualis. quod cum duæ L R R M duabus A B B C
æquales sint, & basis L M ponatur æqualis basi A C: erit
[o] angulus L R M æqualis angulo A B C. eadem ratione & an- o 8 primi.
gulus quidem M R N angulo D E F, angulus autem L R N an-
gulo G H K est æqualis. ex tribus igitur angulis planis L R M
M R N L R N, qui æquales sunt tribus datis A B C D E F G H K
solidus angulus constitutus est ad R.

Sed sit centrum circuli in uno laterum trianguli, vide-
licet in M N, quod sit X, & X L jungatur. dico rursus A B
majorem esse ipsa L X.

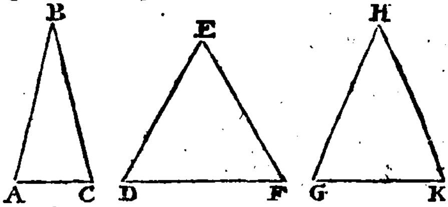


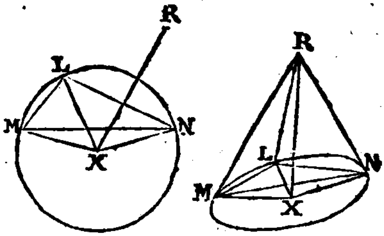
si enim non ita sit,
vel A B est æqualis L-
X vel ipsa minor. sit
primo æqualis. duæ
igitur A B B C, hoc
est D E E F duabus M X
X L, hoc est ipsi M N.
æquales sunt. sed M N
ponitur æqualis D F.
ergo D E E F ipsi D F sunt æquales. quod fieri non [p] potest p 20. primi.
non igitur A B est æqualis L X. similiter neque minor. multo
enim magis id quod fieri non potest sequeretur. ergo A B
ipsa L X major est. & similiter si excessui quo quadratum ex
A B superat quadratum ex L X æquale ponatur quadratum

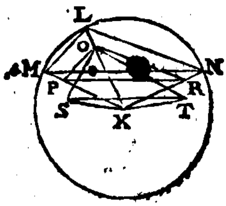
ex

ex RX, & ipſa RX circuli plano ad rectos angulos conſtituatur, fiet problema.

Sed ſit centrum circuli extra triangulum LMN, quod ſit X, & LX MX NX jungantur. dico & ſic AB ipſa LX majorem eſſe. Si enim non ita ſit, vel æqualis eſt, vel minor. ſit primo æqualis. ergo duæ AB BC duabus MX XL æquales ſunt, altera alteri; & baſis AC eſt æqualis baſi ML. angulus igitur ABC æqualis eſt angulo MXL. eadem ratione & GHK angulus ipſi LXN eſt æqualis; ac propterea totus MXN æqualis duobus ABC GHK. ſed & anguli ABC GHK angulo DEF majores ſunt. & angulus igitur MXN ipſo DEF eſt major. at quoniam duæ DE EF duabus MX XN æquales ſunt, & baſis DF æqualis baſi MN, erit MXN angulus angulo DEF æqualis. oſtenſus autem eſt major, quod eſt abſurdum. non igitur AB eſt æqualis LX: deinceps vero oſtendemus neque minorem eſſe. quare major neceſſario erit. & ſi rurſus circuli plano ad rectos angulos conſtituamus XR, & ipſam æqualem ponamus lateri quadrati ejus, quo quadratum ex AB ſuperat quadratum ex LX, problema conſtituetur. dico vero neque minorem eſſe AB ipſa LX. ſi enim fieri poteſt, ſit minor; & ipſi quidem AB æqualis ponatur XO, ipſi vero BC æqualis XP, & OP jungatur. quoniam igitur AB ipſi BC eſt æqualis, erit XO æqualis XP. ergo & reliqua OL reliquæ PM æqualis. parallela igitur q eſt LM ipſi PO, & triangulum LMX triangulo PXO æquiangulum. quare r ut XL ad LM, ita XO ad OP: & permutando ut LX ad XO, ita LM ad OP. major autem eſt LX quam XO. ergo LM quam OP eſt major. ſed LM eſt æqualis AC. & AC igitur quam OP major erit.







q 2 ſexti.

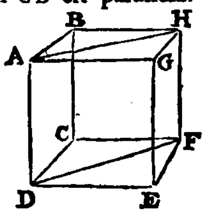
r 4 ſexti.

rit. itaque quoniam duæ AB BC duabus OX XP sunt æquales altera alteri; & basis AC major est basi OP; erit *f* angulus ABC angulo OXP major. similiter & si XR sumatur æqualis utrivis ipsarum XO XP, & jungatur OR, ostendemus angulum GHK angulo OXR majorem. constituatur ad rectam lineam LX, & punctum in ipsa X angulo quidem ABC æqualis angulus LXS, angulo autem GHK æqualis LXT, & ponatur utraque XS XT ipsi OX æqualis: jungaturque OS OT ST. & quoniam duæ AB BC duabus OX XS æquales sunt, & angulus ABC æqualis angulo OXS, erit basis AC, hoc est LM, basi OS æqualis. eadem ratione, & LN est æqualis ipsi OT. quod cum duæ ML LN duabus OS OT sint æquales, & angulus MLN major angulo SOT; erit & basis MN basi ST major. sed MN est æqualis DF. ergo & DF quam ST major erit. quoniam igitur duæ DE EF duabus SX XT æquales sunt, & basis DF major basi ST; erit angulus DEF angulo SXT major. æqualis autem est angulus SXT angulis ABC GHK. ergo DEF angulus angulis ABC GHK major est: sed & minor. Quod fieri non potest. Quod demonstrare oportebat. *f* 25. primi.

PROP. XXIV. THEOR.

Si solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana, & æqualia, & parallelogramma erunt.

Solidum enim CDGH parallelis planis AC GF BG CE FB AE contineatur. dico opposita ejus plana, & æqualia, & parallelogramma esse. Quoniam enim duo plana parallela BG CE, à plano AC secantur, communes ipsorum sectiones *a* parallelæ sunt: ergo AB ipsi CD est parallela. rursus quoniam duo plana parallela BF AE secantur à plano AC, communes ipsorum sectiones parallelæ *a* sunt: parallela igitur est AD ipsi BC. ostensa autem est & AB parallela CD. ergo AC parallelogrammum erit. similiter demonstrabimus, & unumquodque ipsorum CE FG GB BF AE parallelogrammum esse. jungantur AH DF. & quoniam parallela est AB quidem ipsi DC; BH vero ipsi CF, erunt AB BH sese tangentes, duabus DC CF sese tangentibus parallelæ, & non in eodem plano: quare æquales *b* angulos continebunt. angulus igitur ABH angulo DCF est æqualis. Et quoniam duæ AB BH duabus DC CF æquales *c* sunt, & *a* 16. hujus. *b* 10. hujus. *c* 34. primi.



 angulus

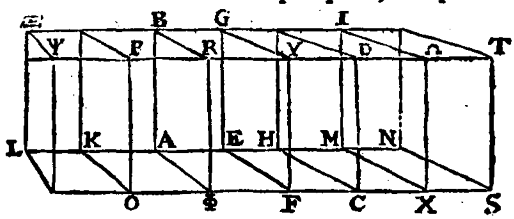
d 4. primi. angulus ABH æqualis angulo DCF, erit d basis AH basi DF æqualis: & ABH triangulum æquale triangulo DCF. quod e 41 primi. cum ipsius quidem ABH trianguli, duplum e sit BG parallelogrammum: ipsius vero DCF trianguli, duplum parallelogrammum CE: erit BG parallelogrammum æquale parallelogrammo CE. similiter demonstrabimus & AC parallelogrammum parallelogrammo GF, & parallelogrammum AE parallelogrammo BF æquale esse. Si igitur solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana, & æqualia, & parallelogramma sunt. Quod oportebat demonstrare.

Cor. Ex jam demonstratis constat, si solidum parallelis contineatur planis, opposita ipsius plana, & æqualia esse, & similia, quippe quæ & singulos angulos æquales, & circa æquales angulos latera proportionalia habeant.

PROP. XXV. THEOR.

Si solidum parallelepipedum plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut basis ad basim, ita solidum ad solidum.

Solidum enim parallelepipedum ABCD plano YE secetur, oppositis planis RA DH parallelo. dico ut EFΦA basis ad basim EHCF, ita esse ABFY solidum ad solidum EΦGCD. Producatur enim AH ex utraque parte, & ponantur ipsi



quidem EH æquales quotcunque HM MN; ipsi vero AE æquales quotcunque AK KL, & compleantur parallelogramma LO KΦ HX MS, & solida LP KR HΩ MT. quoniam igitur æquales inter se sunt LK KA AE rectæ lineæ; a 1 sexti. erunt & parallelogramma LO KΦ AF inter se a æqualia: itemque æqualia inter se parallelogramma KΞ KB AG, & adhuc b 24. hujus. parallelogramma LΨ KP AR inter se b æqualia; opposita enim sunt. eadem ratione & parallelogramma EC HX MS æqualia inter se sunt; itemque parallelogramma HG HI IN inter se æqualia: & insuper parallelogramma DH MΩ NT. tria igitur plana solidorum LP KR AY tribus planis æqualia sunt: sed tria tribus oppositis sunt æqualia. ergo tria solida

LP

LP KR AY inter se æqualia [c] erunt. eadem ratione & tria solida ED HΩ MT sunt æqualia inter se. quotuplex igitur est basis LF ipsius AF basis, totuplex est & LY solidum solidi AY. eadem ratione quotuplex est NF basis ipsius basis HF, totuplex est & solidum NY ipsius ED solidi: & si basis LF est æqualis basi NF, & solidum LY solido NY æquale erit; & si basis LF superat NF basim, & LY solidum NY superabit; & si minor, minus. quatuor igitur magnitudinibns existentibus, duabus scilicet basibus AF FH, & duobus solidis AY ED; sumpta sunt æque multiplicia, basis quidem AF, & AY solidi, videlicet basis LF, & solidum LY: basis vero HF, & ED solidi, nempe basis NF, & solidum NY. & demonstratum est si basis LF superat basim NF, & LY solidum solidum NY superare; & si æqualis æquale; & si minor minus. est igitur [d] ut AF basis ad basim FH, ita AY solidum ad solidum ED. Quare si solidum parallelepipedum plano secetur, oppositis planis parallelo; erit ut basis ad basim, ita solidum ad solidum. Quod oportebat demonstrare.

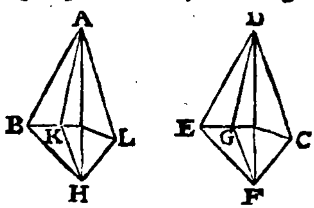
[c] 10 Diffin. hujus.

[d] 6. Diffin. quinti.

PROP. XXVI. PROBL.

Ad datam rectam lineam, & ad datum in ipsa punctum dato angulo solido æqualem solidum angulum constituere.

Sit data quidem recta linea AB, datum autem in ipsa punctum A, & datus solidus angulus ad D qui EDC EDF FDC angulis planis continetur. oportet ad datam rectam lineam AB, & ad datum in ipsa punctum A, dato angulo solido ad D æqualem solidum angulum constituere. Sumatur in linea DF quodvis punctum F, à quo ad planum per ED DC transiens ducatur [a] perpendicularis FG, & plano in puncto G occurrat; jungaturque DG, & ad rectam lineam AB, & ad datum in ipsa punctum A, angulo quidem EDC æqualis angulus [b] constituatur BAL; angulo autem EDG constituatur æqualis BAK. deinde ipsi DG ponatur æqualis AK, & à puncto K plano per BAL ad rectos angulos [c] erigatur KH; ponaturque ipsi GF æqualis KH, & HA jungatur. dico angulum solidum ad A qui angulis BAL BAH HAL continetur, æqualem esse solido angulo ad D, angulis EDC EDF FDC contento. sumantur

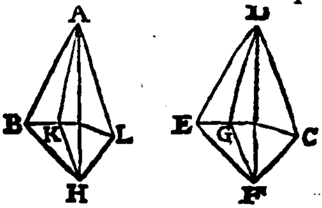


[a] 11. hujus.

[b] 23. primi.

[c] 12. hujus.

mantur enim æquales rectæ lineæ A B D E, & jungantur H B K B F E G E. quoniam igitur F G perpendicularis est ad subjectum planum, & ad omnes rectas lineas quæ ipsam con-
d 3. Diffin. tingunt, suntque in subjecto plano, rectos faciet d angulos. uterque igitur angulorum F G D F G E rectus est. eadem ratione, & uterque ipsorum H K A H K B est rectus. & quoniam duæ K A A B duabus G D D E æquales sunt altera alteri, & angulos æquales
e 4. primi. continent; erit e basis B K basi E G æqualis. est autem & K H æqualis G F, atque angulos rectos continent. æqualis e igitur & H B ipsi F E. rursus quoniam duæ A K K H duabus D G G F æquales sunt, & rectos continent angulos; erit basis A H basi D F æqualis: estque A B æqualis D E. duæ igitur H A A B duabus F D D E sunt æquales; & basis H B est æqualis basi F E.
f 8. primi. ergo angulus f B A H angulo E D F æqualis erit. eadem ratione, & angulus H A L angulo F D C est æqualis, quandoquidem si assumamus æquales A L D C, & jungamus K L H L G C F C, quoniam totus B A L est æqualis toti E D C, quorum B A K ipsi E D G ponatur æqualis; erit reliquus K A L æqualis reliquo G D C. & quoniam duæ K A A L duabus G D D C æquales sunt, & angulos æquales continent; basis K L basi G C æqualis erit. est autem & K H æqualis G F. duæ igitur L K K H, duabus C G G F sunt æquales; angulosque rectos continent: ergo basis H L æqualis est basi F C. rursus quoniam duæ H A A L, duabus F D D C æquales sunt, & basis H L æqualis basi F C; erit angulus H A L æqualis angulo F D C. atque est angulus B A L angulo E D C æqualis. Ad datam igitur rectam lineam, & ad datum in ipsa punctum, dato angulo solido æqualis angulus solidus constitutus est. Quod facere oportebat.



PROP. XXVII. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato solido parallelepipedo simile, & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

Sit recta quidem linea A B; datum vero solidum parallelepipedum C D. oportet ad datam rectam lineam A B dato solido parallelipedo C D simile, & similiter positum solidum parallelepipedum describere. Constituatur ad rectam lineam A B,

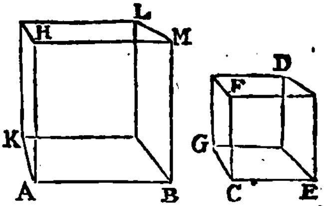
&

& ad datum in ipsa punctum A angulo solido ad C æqualis *a* angulus, qui angulis BAH HAK KAB contineatur, ita ut angulus quidem BAH æqualis sit angulo ECF, angulus vero BAK angulo ECG, & adhuc angulus HAK angulo GCF, & fiat *b* ut EC ad CG, ita BA ad AK, ut autem GC ad CF, ita KA ad AH. ergo ex æquali ut EC ad CF, ita erit BA ad AH. compleatur parallelogrammum BH, & AL solidum. quoniam igitur est ut EC ad CG, ita BA ad AK, nempe, circa æquales angulos ECG BAK latera sunt proportionalia; erit parallelogrammum KB parallelogrammo GE simile. eadem quoque ratione parallelogrammum KH simile est parallelogrammo GF, & parallelogrammum HB parallelogrammo FE. tria igitur parallelogramma solidi AL tribus parallelogrammis solidi CD similia sunt: sed tria tribus oppositis sunt *c* æqualia, & similia. ergo totum AL solidum toti solido CD simile erit. Ad datam igitur rectam lineam AB dato solido parallelepipedo CD simile, & similiter positum solidum parallelepipedum AL descriptum est. Quod facere oportebat.

a 26. hujus.

b 12. sexti.

c Cor 24. hujus.



PROP. XXVIII. THEOR.

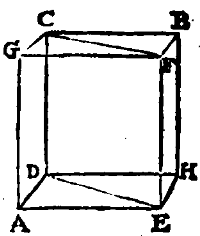
Si solidum parallelepipedum plano secetur per diagonales oppositorum planorum, ab ipso plano bifariam secabitur.

Solidum enim parallelepipedum AB plano CDEF secetur per diagonales oppositorum planorum, videlicet CF DE. dico solidum AB à plano CDEF bifariam secari.

Quoniam enim æquale *a* est CGF triangulum triangulo CBF, triangulum vero ADE triangulo DEH; est autem & CA parallelogrammum parallelogrammo BE æquale *b*, oppositum enim est; & parallelogrammum CE æquale parallelogrammo CH; erit prisma contentum duobus triangulis CGF ADE, & tribus parallelogrammis GE AC CE æquale prismati, quod continetur duobus triangulis CFB DEH, & tribus parallelogrammis CH BE CE; etenim æqualibus planis, & numero & magnitudine continentur. ergo totum AB solidum

a 34. primi.

b 24. hujus.



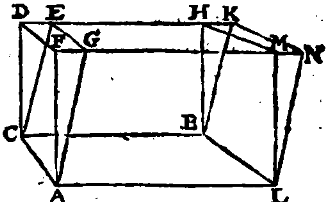
dum

dum à plano CDEF bifariam secatur. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIX. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.

Sint enim in eadem basi AB solida parallelepipeda CM CN, eadem altitudine, quorum stantes AF AG LM LN CD CE BH BK sint in eisdem rectis lineis FN DK. dico solidum CM solido CN æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est utrumque ipsorum CH CK; erit CB, utrique ipsarum DH EK [a] æqualis, ergo & DH est æqualis EK. communis auferatur EH. reliqua igitur DE æqualis est reliquæ HK. quare & [b] DEC triangulum est æquale triangulo HKB. parallelogrammum autem DG est æquale parallelogrammo HN. eadem ratione & AFG triangulum æquale est triangulo LMN. est autem parallelogrammum CF parallelogrammo [c] BM, & parallelogrammum CG parallelogrammo BN æquale: opposita enim sunt. ergo & prisma contentum duobus triangulis AFG DEC, & tribus parallelogrammis AD DG GC est æquale prismati, quod duobus triangulis LMN HBK, & tribus parallelogrammis BM NH BN continetur. commune apponatur solidum, cujus basis quidem parallelogrammum AB, oppositum autem ipsi GEHM. ergo totum CM solidum parallelepipedum toti solido parallelepipedo CN est æquale. Solida igitur parallelepipeda quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.



a 34. primi.
b 8. primi.
c 24. hujus.

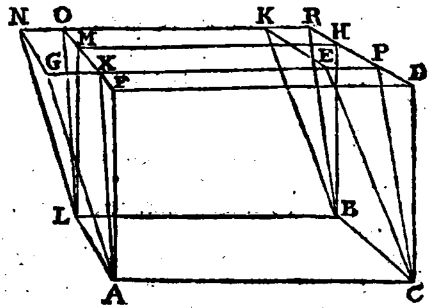
PROP. XXX. THEOR.

Solida parellelepipeda quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.

Sint in eadem basi AB solida parallelepipeda CM CN & eadem altitudine, quorum stantes AF AG LM LN CD CE

BH

BH BK non sint in eisdem rectis lineis. dico solidum CM solido CN æquale esse. producantur enim NK DH, & GE FM, conveniantque inter se punctis R X; & adhuc producantur FM GE ad O P puncta: & AX LO CP BR jungantur. solidum CM, cujus basis quidem ACBL parallelogrammũ, oppositum autem ipsi FDHM est

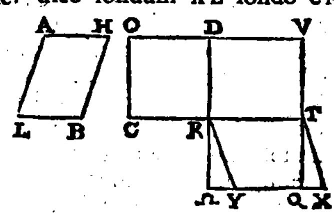


a æquale solido CO, cujus basis parallelogrammum ACBL & ei oppositum XPRO, in eadem enim sunt basi ACBL, & ipsorum stantes AF AX LM LO CD CP BH BR sunt in eisdem rectis lineis FO DR. sed solidum CO, cujus basis quidem parallelogrammum ACBL, oppositum autem ipsi XPRO est a æquale solido CN, cujus basis ACBL parallelogrammum, & ipsi oppositum GEKN. etenim in eadem sunt basi ACBL, & eorum stantes AG AX CE CP LN LO BK BR sunt in eisdem rectis lineis GP NR. quare & CM solidum solido CN æquale erit. Solida igitur parrallelepipeda quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat. a 29. hujus.

PROP. XXXI. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ in æqualibus sunt basibus, & eadem altitudine, inter se sunt æqualia.

Sint in æqualibus basibus AB CD solida parallelepipeda AE CF, & eadem altitudine. dico solidum AE solido CF æquale esse. sint primo stantes HK BE AG LM OP DF CZ RS ad rectos angulos basibus AB CD: angulus autem ALB angulo CRD sit inæqualis, & producatur ipsi CR in directum RT: constituaturque ad rectam

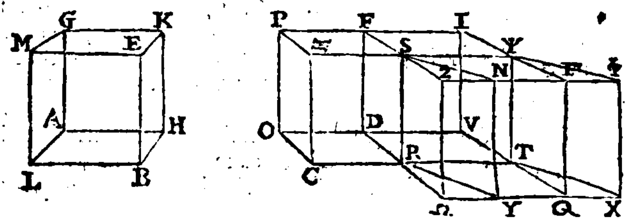


lineam RT, & ad punctum in ipsa R, angulo ALB æqualis a angulus TRY. & ponatur ipsi quidem AL æqualis a 23. primi.

RT, ipsi vero LB æqualis RY, & ad punctum Y ipsi RT parallela ducatur XY, compleaturque parallelogrammum RX, & ΦY solidum. quoniam igitur duæ TR RY duabus AL LB æquales sunt, & angulos continent æquales; erit parallelogrammum RX æquale & simile parallelogrammo HL: & quoniam rursus AL est æqualis RT, & LM ipsi RS, angulosque æquales continent, parallelogrammum RΨ parallelogrammo AM æquale & simile erit. eadem ratione LE parallelogrammum ipsi SY æquale est & simile. tria igitur parallelogramma solidi AE tribus parallelogrammis solidi ΦY æqualia & similia sunt. sed & tria tribus opposita &

b 24. hujus. b æqualia sunt & similia. totum igitur AE solidum parallelepipedum toti solido parallelepipedo ΦY est æquale. producantur DR XY, conveniantque inter se in puncto Ω, & per T ipsi DΩ parallela ducatur TQ, & producantur TQ OD, & conveniant in V, compleanturque solida ΩΨ RI. solidum igitur ΨΩ cujus basis est RΨ parallelogrammum, oppositum

c 29. hujus. autem ipsi ΩΓ est c æquale solido ΨY, cujus basis est RΨ parallelogrammum, & oppositum ipsi YΦ, in eadem enim

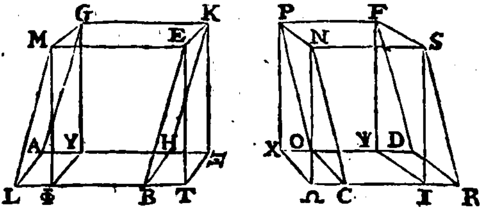


sunt basi RΨ, & eadem altitudine, & eorum stantes RΩ RY TQ TX SZ SN ΨΓ ΨΦ in eisdem sunt rectis lineis ΩX ZΦ. sed solidum ΨY æquale est solido AE. ergo & ΨΩ solido AE est æquale. præterea quoniam parallelogrammum RYXT est æquale parallelogrammo ΩT, etenim in eadem est basi RT, & in eisdem parallelis RT ΩX. & parallelogrammum RYXT parallelogrammo CD est æquale, quoniam & ipsi AB est æquale; parallelogrammum ΩT æquale est parallelogrammo CD: aliud autem est parallelogrammum DT. est igitur ut CD basis ad basim DT, ita ΩT ad ipsam DT. & quoniam solidum parallelepipedum CI secatur plano RF

d 25 hujus. planis oppositis parallelo; erit ut d CD basis ad basim DT, ita solidum CF ad RI solidum. eadem ratione quoniam solidum parallelepipedum ΩI secatur plano RΨ oppositis planis parallelo, ut ΩT basis d ad basim DT, ita erit solidum ΩΨ ad RI solidum. sed ut CD basis ad basim DT, ita basis ΩT ad ipsam TD. ut igitur solidum CF ad RI solidum ita

solidum

solidum ΩΨ ad solidum RI, quod cum utrumque solidorum CF ΩΨ ad solidum RI eandem habeat proportionem, solidum CF solido ΩΨ est æquale. solidum autem ΩΨ ostensum est æquale solido AE. ergo & [e] AE ipsi CF æquale erit. [e] 9. quinti.

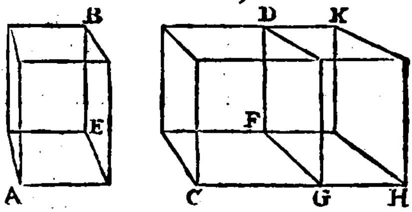


Sed non sint stantes AG HK BE LM CN OP DF RS ad rectos angulos ipsis AB CD basibus. dico rursus solidum AE æquale esse solido CF. ducantur [f] à punctis K E G M P F N S [f] 11. hujus. ad subjectum planum perpendiculares KΞ ET GY MΦ PX FΨ NΩ SI, & plano in punctis Ξ T Y Φ X Ψ Ω I occurrant, & jungantur ΞT YΦ ΞY TΦ XΨ XΩ ΩI ΨI. æquale igitur est KΦ solidum solido PI; in æqualibus enim sunt basibus KM PS, & eadem altitudine, quorum stantes ad rectos angulos sunt basibus. sed KΦ solidum solido AE est [g] æquale: solidum vero PI æquale [g] solido CF. si quidem in [g] 30. hujus. eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis. ergo & solidum AE solido CF æquale erit. Solida igitur parallelepipeda quæ in æqualibus sunt basibus & eadem altitudine, inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXXII. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ eandem habent altitudinem inter se sunt ut bases.

Sint solida parallelepipeda AB CD, quæ eandem altitudinem habeant. dico inter se esse ut bases; hoc est ut AE basis ad basim CF ita solidum AB ad CD solidum. applicetur enim ad rectam lineam FG parallelogrammo AE æquale FH, & à basi FH eadem altitudine ipsi CD solidum parallelepipedum GK compleatur. solidum igitur AB solido GK est [a] æquale; in æqualibus [a] 31. hujus. enim



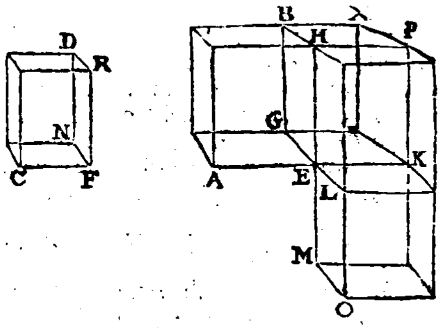
enim sunt basibus AE FH, & eadem altitudine. itaque quoniam solidum parellelepipedum CK plano DG secatur oppositis planis parellelo; erit ut [b] HF basis ad basim FC, ita solidum HD ad DC solidum; atque est basis quidem FH basi AE æqualis, solidum vero GK æquale solido AB. est igitur & ut AE basis ad basim CF, ita solidum AB ad solidum CD. Quare solida parallelepipeda quæ eandem habent altitudinem inter se sunt ut bases. Quod demonstrare oportebat.

b 25. hujus.

PROP. XXXIII. THEOR.

Similia solida parallelepipeda inter se sunt in triplicata proportione homologorum laterum.

Sint similia solida parallelepipeda AB CD. latus autem AE homologum sit lateri CF. Dico solidum AB ad CD solidum triplicatam proportionem habere ejus, quam habet AE ad CF. producantur enim EK EL EM in directum ipsis AE GE HE: & ipsi quidem CF æqualis ponatur EK, ipsi vero FN æqualis EL; & adhuc ipsi FR æqualis EM, & KL parallelogrammum, & KO solidum compleatur. quoniam igitur duæ KE EL duabus CF FN æquales sunt; sed & angulus KEL angulo CFN est æqualis; quia & angulus AEG ipsi CFN ob similitudinem solidorum AB CD: erit & KL parallelogrammum simile & æquale parallelogrammo CN eadem ratione, & parallelogrammum KM æquale est & simile parallelogrammo CR, & adhuc parallelogrammum OE ipsi DF parallelogrammo. tria igitur parallelogramma solidi KO tribus parallelogrammis CD solidi æqualia & similia sunt. sed tria tribus oppositis æqualia [a] sunt & similia. totum igitur KO solidum æquale est & simile toti solido CD. compleatur GK parallelogrammum; & à basibus quidem GK KL parallelogrammis, altitudine vero eadem ipsi AB, solida compleantur AX LP. & quoniam ob similitudinem solidorum AB CD est ut AE ad CF, ita EG ad FN; & EH ad FR; æqualis autem FC ipsi EK, & FN ipsi EL, &



a 24 hujus.

FR

FR ipsi EM. erit ut AE ad EK, ita GE ad EL, & HE ad EM. sed ut AE quidem ad EK, [b] ita AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK: ut autem GE ad EL, ita GK ad KL: & ut [b] HE ad EM, ita PE ad KM. & ut igitur AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK, ita GK ad KL, & PE ad KM. sed ut AG quidem ad GK, ita [c] AB solidum ad solidum EX: ut autem GK ad KL, ita solidum EX ad PL solidum: & ut PE ad KM, ita PL solidum ad solidum KO. & ut igitur solidum AB ad solidum EX, ita [d] EX ad PL, & PL ad KO. si autem quatuor sint magnitudines deinceps proportionales, prima ad quartam triplicatam proportionem [e] habet ejus, quam ad secundam. ergo & AB solidum ad solidum KO triplicatam habet proportionem ejus, quam AB ad EX. sed ut AB ad EX, ita AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK; & AE recta linea ad ipsam EK. quare & AB solidum ad solidum KO triplicatam proportionem habebit ejus, quam AE habet ad EK. æquale autem est solidum KO solido CD, & recta linea EK rectæ CF est æqualis. ergo & AB solidum ad solidum CD triplicatam habet proportionem ejus, quam latus ipsius homologum AE habet ad CF homologum latus. Quod demonstrare oportebat.

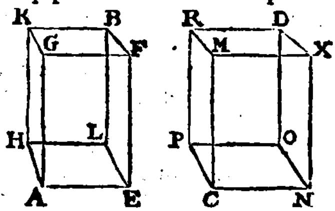
[b] 1. sexti. [c] 32. hujus. [d] 11. quinti. [e] 11. Diffin. quinti.

Cor. Ex hoc manifestum est, si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad quartam, ita esse solidum parallelepipedum quod fit à prima ad solidum quod à secunda simile, & similiter descriptum; quoniam & prima ad quartam triplicatam proportionem habet ejus, quam ad secundam.

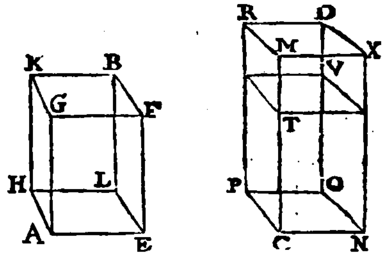
PROP. XXXIV. THEOR.

Æqualium solidorum parallelepipedorum reciprocantur bases & altitudines, & quorum solidorum parallelepipedorum reciprocantur bases & altitudines, ea inter se sunt æqualia.

Sint æqualia solida parallelepipeda AB, CD. dico ipsorum bases & altitudines reciprocari, hoc est ut EH basis ad basim NP, ita esse altitudinem solidi CD ad solidi AB altitudinem. Sint enim primo stantes AG EF LB HK CM NX OD PR ad rectos angulos basibus ipsorum. dico ut EH basis ad basim NP, ita esse CM ad AG. si igitur basis



basis EH basi NP sit æqualis, est autem & AB solidum æquale solido CD; erit & CM æqualis ipsi AG. si *a* enim basibus EH NP æqualibus existentibus non sint AG CM altitudines æquales, neque AB solidum solido CD æquale erit. ponitur autem æquale. non igitur inæqualis est altitudo CM altitudini AG. ergo æqualis sit necesse est; ac propterea ut EH basis ad basim NP, ita erit CM ad AG. At vero non sit basis EH æqualis basi NP. sed EH sit major. est autem & AB solidum solido CD æquale. ergo major est CM ipsa AG; alioqui rursus sequeretur solida AB CD æqualia non esse, quæ ponuntur æqualia.



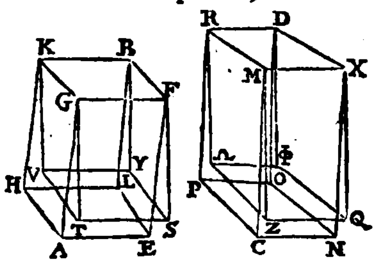
itaque ponatur CT æqualis ipsi AG: & à basi quidem NP, altitudine autem CT solidum parallelepipedum VC compleatur. quoniam igitur solidum AB solido CD est æquale, aliud autem aliquod est VC, & æqualia *a* ad idem eandem habent proportionem; erit ut AB solidum ad solidum CV, ita CD solidum ad solidum CV. sed ut AB solidum ad solidum CV, ita *b* basis EH ad NP basim; æque alta enim sunt AB CV solida. ut autem solidum CD ad ipsum CV, ita *c* MP basis ad basim PT, & MC ad CT. & igitur ut basis EH ad NP basim, ita MC ad CT. est autem CT æqualis AG. ergo & ut EH basis ad basim NP, ita MC ad AG. quare solidorum parallelepipedorum AB CD bases & altitudines reciprocantur. Rursus solidorum parallelepipedorum AB CD bases & altitudines reciprocentur: sitque ut EH basis ad basim NP, ita solidi CD altitudo ad altitudinem solidi AB. Dico solidum AB solido CD æquale esse. sint enim rursus stantes ad rectos angulos basibus. & si quidem basis EH sit æqualis basi NP, estque ut EH basis ad basim NP, ita altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem: erit solidi CD altitudo altitudini solidi AB æqualis. solida autem parallelepipeda, quæ sunt in æqualibus basibus & eadem altitudine inter se *d* æqualia sunt. ergo solidum AB solido CD est æquale. sed non sit EH basis æqualis basi NP, & sit EH major. major igitur est & solidi CD altitudo altitudine solidi AB, hoc est CM ipsa AG. ponatur ipsi AG æqualis rursus CT, & similiter solidum CV compleatur. itaque quoniam est ut EH basis ad basim NP, ita MC ad ipsam AG; æqualis autem est AG ipsi CT: erit ut basis EH ad NP basim, ita MC ad CT. sed ut basis EH ad

a 7. quinti.
b 32. hujus.
c 25. hujus.
d 30. hujus.

NP

NP basim, ita AB solidum ad solidum VC; æque alta enim sunt solida AB CV. ut autem MC ad CT, ita & MP basis ad basim PT, & solidum CD ad CV solidum. & igitur ut solidum AB ad solidum CV, ita CD solidum ad solidum CV. quòd cum utrumque solidorum AB CD ad ipsum CV eandem proportionem habeat; erit AB solidum solido CD æquale. Quod demonstrare oportebat.

Non sint autem stantes FE BL GA KH XN DO MC RP ad rectos angulos basibus ipsorum: & à punctis F G B K X M D R ad plana basium EH NP ducantur perpendiculares, quæ planis in punctis S T Y V Q Z Ω Φ occurrant & compleantur solida FV XΩ. dico & sic æqualibus existentibus solidis AB CD, bases & altitudines reciprocari, scil. ut EH basis ad basim NP, ita esse altitudinem solidi CD ad solidi AB altitudinem. quoniam enim solidum AB solido CD est æquale; solido autem AB æquale est [e] solidum BT; in eadem namque sunt basi FK, & eadem altitudine; quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis: & solidum DC est [e] æquale solido DZ, quòd in eadem sint basi XR, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis; erit & solidum BT solido DZ æquale. æqualium autem solidorum parallelepipedorum, quorum altitudines basibus ipsorum sunt ad rectos angulos, bases [f] & altitudines reciprocantur. est igitur ut FK basis ad basim XR, ita solidi DZ altitudo ad altitudinem solidi BT. atque est basis quidem FK basi EH æqualis, basis vero XR æqualis basi NP. quare ut EH basis ad basim NP, ita est altitudo solidi DZ ad solidi BT altitudinem. eædem autem sunt altitudines solidorum DZ DC, itemque solidorum BT BA. est igitur ut EH basis ad basim NP, ita solidi DC altitudo ad altitudinem solidi AB. ergo solidorum parallelepipedorum AB CD bases & altitudines reciprocantur. Rursus solidorum parallelepipedorum AB CD bases & altitudines reciprocentur, sitque ut EH basis ad basim NP, ita altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem. dico solidum AB solido CD æquale esse. iisdem namque constructis, quoniam ut EH basis ad basim NP, ita solidi CD altitudo ad altitudinem solidi AB; & basis quidem EH est æqualis basi FK; NP vero ipsi XR: erit ut FK basis ad basim XR, ita altitudo



[e] 30. hujus.

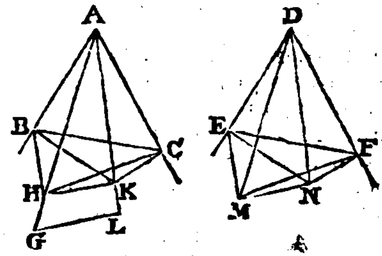
[f] Ex ante demonstratis.

altitudo solidi C D ad solidi A B altitudinem. eædem autem sunt altitudines solidorum A B B T, & ipsorum C D D Z. est igitur ut F K basis ad basim X R, ita solidi D Z altitudo ad altitudinem solidi B T. quare solidorum B T D Z parallelepipedorum bases & altitudines reciprocantur, quorum autem solidorum parallelepipedorum altitudines sunt ad rectos angulos basibus ipsorum, & bases & altitudines reciprocantur, ea inter se sunt æqualia. ergo B T solidum solido D Z est æquale: sed solidum quidem B T æquale est solido B A, etenim in eadem sunt basi F K, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis: solidum vero D Z est æquale solido D C, si quidem in eadem sunt basi X R, & eadem altitudine, & non in eisdem rectis lineis. ergo & solidum A B solido C D est æquale. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXXV. THEOR.

Si sint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum rectis lineis à principio positis angulos contineant æquales, alterum alteri; in sublimibus autem sumantur quævis puncta, atque ab ipsis ad plana in quibus sunt anguli perpendiculares ducantur; & à punctis, quæ à perpendicularibus fiunt in planis ad primos angulos jungantur rectæ lineæ: cum sublimibus æquales angulos continebunt.

Sint duo anguli rectilinei æquales B A C E D F: & à punctis A D sublimes rectæ lineæ A G D M constituantur, quæ cum rectis lineis à principio positis æquales angulos contineant, alterum alteri: angulum quidem M D E æqualem angulo G A B, angulum vero MDF angulo GAC æqualem: & sumantur in ipsis A G D M quævis puncta G M, à quibus ad plana per B A C E D F ducantur perpendiculares G L M N, occurrentes planis in punctis L N; & L A



N D jungantur. dico angulum G A L angulo M D N æqualem esse. ponatur ipsi D M æqualis A H, & per H ipsi G L parallela ducatur H K. est autem G L perpendicularis ad planum per

per B A C. ergo & H K ad [a] planum per B A C perpendicularis erit. ducantur a punctis K N ad rectas lineas A B A C D F D E perpendiculares K C N F K B N E, & H C C B M F F E jungantur. quoniam igitur quadratum ex H A æquale [b] est quadratis ex H K K A; quadrato autem ex K A æqualia [b] sunt ex K C C A quadrata; erit quadratum ex H A quadratis ex H K K C C A æquale. quadratis autem ex H K K C æquale est quadratum ex H C. quadratum igitur ex H A quadratis ex H C C A æquale erit: & idcirco angulus H C A [c] est rectus. eadem ratione & angulus D F M rectus est. ergo angulus A C H ipsi D F M est æqualis. est autem & H A C angulus æqualis angulo M D F. duo igitur triangula sunt M D F H A C duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulorum subtenditur; videlicet H A ipsi D M. ergo & reliqua latera reliquis lateribus [d] æqualia habebunt, alterum alteri. quare A C est æqualis D F. similiter demonstrabimus & A B ipsi D E æquale esse. jungantur H B M E. & quoniam quadratum ex A H est æquale quadratis ex A K K H; quadrato autem ex A K æqualia sunt quadrata ex A B B K: erunt quadrata ex A B B K K H quadrato ex A H æqualia. sed quadratis ex B K K H æquale est ex B H quadratum; rectus enim angulus est H K B, propterea quòd & H K perpendicularis est ad subjectum planum. quadratum [c] igitur ex A H æquale est quadratis ex A B B H. quare angulus A B H rectus est. eadem ratione & angulus D E M est rectus. est autem & B A H angulus æqualis angulo E D M, ita enim ponitur: atque est A H æqualis D M. ergo & A B ipsi D E [d] est æqualis. quoniam igitur A C quidem est æqualis D F, A B vero ipsi D E; erunt duæ C A A B duabus F D D E æquales. sed & angulus B A C angulo F D E est æqualis. basis [e] igitur B C basi E F, & triangulum triangulo, & reliqui anguli reliquis æquales sunt. ergo angulus A C B angulo D F E est æqualis. est autem & rectus A C K æqualis recto D F N. quare & reliquus B C K reliquo E F N æqualis. eadem ratione, & C B K angulus est æqualis angulo F E N. itaque duo triangula sunt B C K E F N, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, quod est ad æquales angulos, videlicet B C ipsi E F. ergo & [d] reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt. æqualis igitur est C K ipsi F N. est autem & A C ipsi D F æqualis. quare duæ A C C K duabus D F F N æquales sunt, & rectos continent angulos. basis igitur A K est æqualis basi D N. & cum A H sit æqualis D M, erit & quod fit ex A H quadratum quadrato ex D M æquale. sed quadrato ex A H æqualia sunt ex A K K H quadrata; etenim

[a] 8. hujus.
[b] 47. primi.
[c] 48. primi.
[d] 26. primi.
[e] 4. primi.

nim rectus est angulus AKH. quadrato autem ex DM æqualia sunt quadrata ex DN NM, quòd angulus DNM rectus sit. quadrata igitur ex AK KH quadratis ex DN NM sunt æqualia; quorum quadratum ex AK æquale est quadrato ex DN. ergo reliquum ex KH quadratum reliquo quadrato ex NM est æquale. & ideo recta linea HK ipsi MN æqualis. quod cum duæ HA AK duabus MD DN æquales sint, altera alteri, & basis HK basi NM ostensa sit æqualis; angulus HAK angulo MDN æqualis *f* erit. Quod oportebat demonstrare.

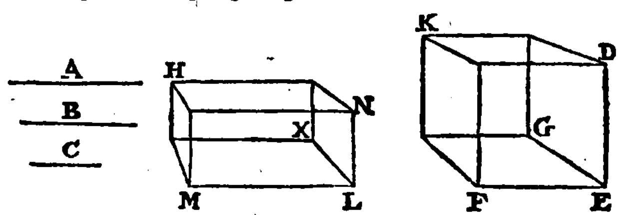
f 8. primi.

Cor. Ex hoc manifestum est, si sint duo anguli plani rectilinei æquales, ab ipsis autem constituantur sublimes rectæ lineæ æquales, quæ cum rectis lineis à principio positis æquales contineant angulos, alterum alteri, perpendiculares, quæ ab ipsis ad plana in quibus sunt primi anguli ducantur, inter se æquales esse.

PROP. XXXVI. THEOR.

Si tres rectæ lineæ proportionales sint, solidum parallelepipedum quod à tribus fit æquale est solido parallelepipedo quod fit à media, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto.

Sint tres rectæ lineæ proportionales A B C, sit scil. ut A ad B ita B ad C. dico solidum quod fit ex ipsis A B C, æquale esse solido quod fit ex B, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto. Exponatur solidus angulus ad E contentus tribus angulis planis DEG GEF FED; & ipsi quidem B ponatur æqualis unaquæque ipsarum DE GE EF, & solidum



parallelepipedum EK compleatur: ipsi vero A ponatur æqualis LM; & ad rectam lineam LM, & ad punctum in ipsa L constituatur *a* angulo solido ad E æqualis angulus contentus NLX XLM MLN, & ponatur ipsi quidem B æqualis LN, ipsi vero C æqualis LX. quoniam igitur est ut A ad B ita B ad C, æqualis autem est A ipsi LM, & B unicuique ipsarum LN EF EG ED, & C ipsi LX; erit ut LM ad EF

a 26. hujus.

ita

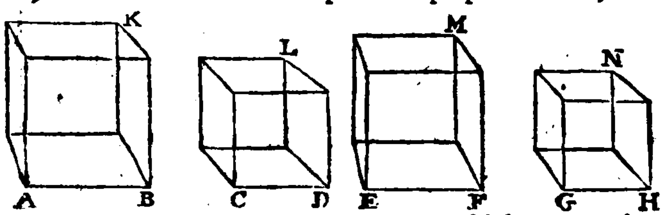
ita GE ad LX: & circum æquales angulos MLX GEF, latera sunt reciproca. ergo MX parallelogrammum parallelogrammo GF est [b] æquale. & quoniam duo anguli plani rectilinei æquales sunt GEF XLM, & in ipsis sublimes rectæ lineæ constituuntur LN ED æquales inter se, & cum rectis lineis à principio positis æquales continentes angulos, alterum alteri; erunt [c] perpendiculares quæ à punctis N D ad plana per XLM GEF ducuntur, inter se æquales. ergo solida LH EK eadem sunt altitudine. quæ verò in æqualibus basibus sunt solida parallelepipeda, & eadem altitudine, inter se [d] sunt æqualia. ergo solidum HL æquale est solido EK: atque est solidum quidem HL quod fit à tribus A B C, solidum vero EK quod fit ex B. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales sint, solidum parallelepipedum quod fit à tribus, æquale est solido parallelepipedo quod fit, &c. Quod demonstrare oportebat.

[b] 14 sexti.
[c] Cor. 35. hujus.
[d] 31. hujus.

PROP. XXXVII. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales sint, & quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia, & similiter descripta proportionalia erunt. Et si quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia, & similiter descripta proportionalia sint; & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales AB CD EF GH, sit scil. ut AB ad CD, ita EF ad GH, & describantur ab ipsis AB CD EF GH similia, & similiter posita solida parallelepipeda KA LC ME NG. dico ut KA ad LC, ita esse ME ad NG. Quoniam enim solidum parallelepipedum KA simile est ipsi LC, habebit [a] KA ad LC triplicatam proportionem ejus



quam AB habet ad CD. eadem ratione & solidum ME ad ipsum NG [a] triplicatam proportionem habebit ejus quam habet EF ad GH: atque est ut AB ad CD, ita EF ad GH. ut igitur AK ad LC, ita ME ad NG. Sed sit ut solidum AK ad solidum LC, ita ME solidum ad solidum NG. dico ut

[a] 33. hujus.

N recta

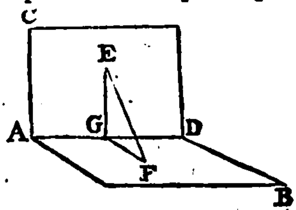
recta linea AB ad rectam CD, ita esse rectam EF ad ipsam GH. quoniam enim rursus AK ad LC triplicatam a proportionem habet ejus quam AB habet ad CD; habet autem, & ME ad NG triplicatam proportionem ejus quam EF ad GH; atque ut AK ad LC, ita ME ad NG: erit ut AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales sint, &c. Quod oportebat demonstrare.

a 33 hujus.

PROP. XXXVIII. THEOR.

Si planum ad planum rectum sit; & ab aliquo puncto eorum quæ sunt in uno plano, ad alterum planum perpendicularis ducatur, ea in communem planorum sectionem cadet.

Planum nempe CD ad planum AB rectum sit, communis autem eorum sectio sit AD, & in ipso CD plano, quodvis punctum E sumatur. dico perpendicularem quæ à puncto E ad planum AB ducitur, cadere in ipsam AD. Non enim; sed si fieri potest, cadat extra, ut EF; & plano AB in puncto F occurrat: à puncto autem F ad DA in plano AB perpendicularis ducatur FG, quæ quidem & plano CD ad a rectos angulos erit; & EG jungatur. quoniam igitur FG plano CD est ad rectos angulos; contingit autem ipsam recta linea EG quæ est in eodem CD plano: erit angulus FGE c rectus. sed & EF plano AB ad rectos angulos est; rectus igitur est angulus EFG. quare trianguli EFG duo anguli duobus rectis sunt æquales; quod est b absurdum. non igitur à puncto E ad AB planum perpendicularis ducta extra rectam lineam DA cadet. ergo in ipsam cadat necesse est. Si igitur planum ad planum rectum sit, &c. Quod oportebat demonstrare.



a 4. Diffin. hujus.
c 3. Diffin. hujus.
b 17. primi.

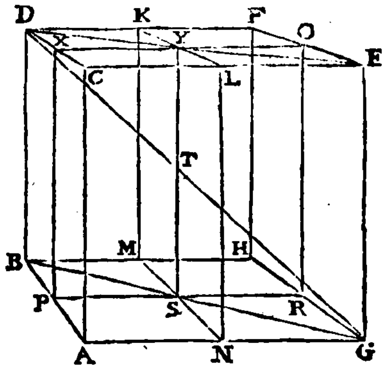
PROP. XXXIX. THEOR.

Si in solido parallelepipedo oppositorum planorum latera secentur bifariam, per sectiones vero plana ducantur, communis planorum sectio, & solidi parallelepipedi diameter, sese bifariam secabunt.

In solido enim parallelepipedo AF, oppositorum planorum CF AH latera bifariam secentur in punctis K L M N X O P R.

&

& per sectiones plana ducantur KN XR; communis autem planorum sectio sit YS, & solidi parallelepipedi diameter sit DG. dico YS DG sese bifariam secare, hoc est YT quidem ipsi TS, DT vero ipsi TG æqualem esse. Jungantur enim DY YE BS SG. quoniam igitur DX parallela est ipsi OE, alterni anguli DXY YOE inter se æquales [a] sunt. & quoniam [a] 29. primi.
DX quidem est æqualis OE, XY vero ipsi YO, & angulos æquales continent; erit [b] basis DY æqualis basi YE. & triangulum DXY triangulo YOE, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, angulus igitur XYD est æqualis angulo OYE, & ob id [c] recta linea est DYE. eadem ratione, & BSG recta est, atque est BS æqualis SG. & [b] 4 primi. [c] 14. primi.



quoniam CA ipsi DB æqualis est & parallela, & CA est æqualis, & parallela ipsi EG; erit & DB ipsi EG æqualis & parallela; & ipsas conjungunt rectæ lineæ DE GB; parallela igitur [d] est DE ipsi BG, & sumpta sunt in utraque ipsarum quævis puncta D Y G S, & junctæ sunt DG YS. ergo DG YS in uno [e] sunt plano. quod cum DE sit parallela BG, erit & EDT angulus angulo BGT æqualis [a], alterni enim sunt. est autem & DTY angulus æqualis [f] ipsi GTS. duo igitur sunt triangula DTY GTS duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulorum subtenditur, videlicet DY ipsi GS: dimidia enim sunt ipsorum DE BG, ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt. quare DT quidem est æqualis TG, YT vero ipsi TS. Si igitur in solido parallelepipedo, &c. Quod oportebat demonstrare. [d] 33. primi. [e] 7. hujus. [f] 15. primi.

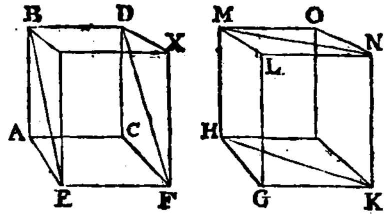
PROP. XL. THEOR.

Si sint duo prismata æque alta, quorum unum quidem basim habeat parallelogrammum, alterum vero triangulum, & parallelogrammum duplum sit trianguli; ea inter se æqualia erunt.

Sint prismata æque alta ABCDEF GHKLMN & unum quidem basim habeat parallelogrammum AF, alterum vero

GHK triangulum, & duplum sit AF parallelogrammum trianguli GHK. dico prisma ABCDEF prismati GHKLMN æquale esse. Compleantur enim AX GO solida. & quoniam parallelogrammum AF trianguli GHK est duplum; est autem & HK parallelogrammum duplum [a] trianguli GHK; erit AF parallelogrammum parallelogrammo HK æquale. quæ vero in æqualibus sunt basibus solida parallelepipeda, & eadem altitudine inter se æqualia [b] sunt. æquale igitur AX solidum solido GO. atque est solidi quidem AX dimidium [c] ABCDEF prisma, solidi vero GO dimidium [c] est prisma GHKLMN. ergo ABCDEF prisma prismati GHKLMN est æquale. Si igitur sint duo prismata æque alta, &c. Quod demonstrare oportebat.

a 41 primi.
b 31. hujus.
c 28. hujus.



EUCLIDIS

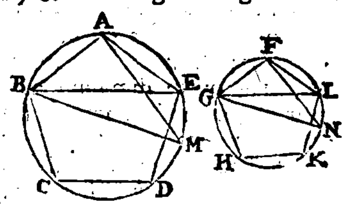
EUCLIDIS ELEMENTORUM.

LIBER DUODECIMUS.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Similia polygona circulis inscripta inter se sunt ut diametrorum quadrata.

Sint circuli ABCDE FGHKL, & in ipsis similia polygona ABCDE FGHKL; diametri autem circulorum sint BM GN. dico ut quadratum ex BM ad quadratum ex GN, ita esse ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL. jungantur enim BE AM GL FN. & quoniam polygonum ABCDE simile est polygono FGHKL; & BAE angulus angulo GFL est æqualis: atque est ut BA ad AE, ita GF ad FL. duo igitur triangula sunt BAE GFL unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum BAE angulo GFL, circa æquales autem angulos latera proportionalia, quare triangulum ABE triangulo FGL æquiangulum [a] est; ac propterea angulus AEB æqualis est angulo FLG. sed angulus quidem AEB angulo AMB est [b] æqualis; in eadem enim circumferentia consistunt. angulus autem FLG æqualis [b] est angulo FNG. ergo & AMB angulus est æqualis angulo FNG. est autem & rectus [c] angulus BAM æqualis recto GFN. quare & reliquus reliquo æqualis. æquiangulum igitur est triangulum AMB triangulo FGN. ergo [d] ut BM ad GN ita BA ad GF. sed proportionis quidem BM ad GN duplicata est proportio quadrati ex BM ad



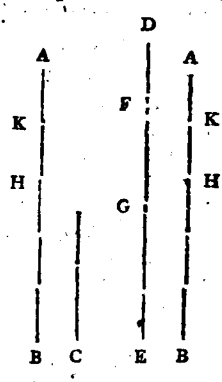
[a] 6. sexti.
[b] 21. tertii.
[c] 31. tertii.
[d] 4. sexti.

a 20 sexti quadratum ex G N; proportionis vero B A ad G F duplicata a est proportio A B C D E polygoni ad polygonum F G H K L: & ut igitur quadratum ex B M ad quadratum ex G N, ita polygonum A B C D E ad F G H K L polygonum. Quare similia polygona quæ in circulis describuntur, inter se sunt ut diametrorum quadrata. Quod demonstrare oportebat

LEMMA.

Duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si à majori auferatur majus quàm dimidium, & ab eo quod reliquum est, rursus auferatur majus quàm dimidium; & hoc semper fiat: relinquetur tandem quædam magnitudo quæ minori magnitudine exposità minor erit.

Sint duæ magnitudines inæquales A B C, quarum major A B. dico si ab ipsa A B auferatur majus quàm dimidium, & ab eo quod reliquum est, rursus auferatur majus quàm dimidium, atque hoc semper fiat, relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ magnitudine C minor erit. etenim C multiplicata, fiet aliquando major magnitudine A B. multiplicetur, & sit D E ipsius quidem C multiplex, major autem quam A B, dividaturque D E in partes ipsi C æquales D F F G G E. & ab ipsa A B auferatur majus quam dimidium B H: ab ipsa vero A H rursus majus quam dimidium auferatur H K, atque hoc semper fiat, quoad divisiones, quæ sunt in A B, multitudine æquales fiant divisionibus quæ in D E: sint igitur



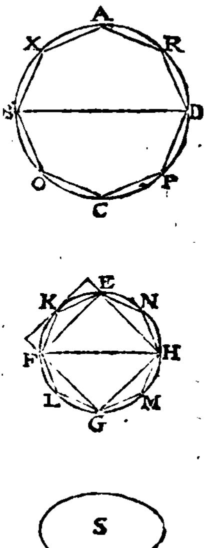
divisiones A K K H H B, divisionibus D F F G G E multitudine æquales. & quoniam major est D E quàm A B; & ablatum est ab ipsa quidem D E minus quam dimidium E G; ab ipsa vero A B majus quam dimidium B H; erit reliquum G D reliquo H A majus. rursus quoniam major est G D, quam H A, & ablatum est ab ipsa quidem G D dimidium G F; ab ipsa vero H A majus quam dimidium H K; reliquum F D reliquo A K majus erit. estque F D æqualis ipsi C. ergo C quam A K est major. minor igitur est A K quam C. ergo ex magnitudine A B relicta est magnitudo A K, exposita minori magnitudine

tudine c minor. Quod demonſtrare oportebat. Similiter autem demonſtrabitur etiam ſi dimidia ablata fuerint. *Eſt prima decimi.*

PROP. II. THEOR.

Circuli inter ſe ſunt ut diametrorum quadrata.

Sint circuli ABCD EFGH, diametri autem ipſorum ſint BD FH. dico ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita eſſe circulum ABCD ad EFGH circulum. Si enim non ita ſit; erit ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulus ABCD vel ad ſpatium aliquod minus circulo EFGH, vel ad majus. ſit primum ad minus quod ſit S: & in circulo EFGH deſcribatur quadratum EFGH. itaque deſcriptum in circulo quadratum majus eſt dimidio circuli EFGH; quoniam ſi per puncta E F G H contingentes circulum ducamus, erit deſcripti circa circulum quadrati dimidium EFGH. deſcripto autem circa circulum quadrato minor eſt circulus. ergo quadratum EFGH majus eſt dimidio circuli EFGH. ſecentur bifariam circumferentiæ EF FG GH HE in punctis K L M N: & EK KF FL LG GM MH HN NE jungantur. unumquodque igitur triangulorum EKF FLG GMH HNE majus eſt dimidio ſegmenti circuli in quo conſiſtit, quoniam ſi per puncta K L M N contingentes circulum ducamus, & parallelogramma, quæ ſunt in rectas lineas EF FG GH HE compleamus; erit a unumquodque triangulorum EKF FLG GMH HNE dimidium parallelogrammi, quod ad ipſum eſt:



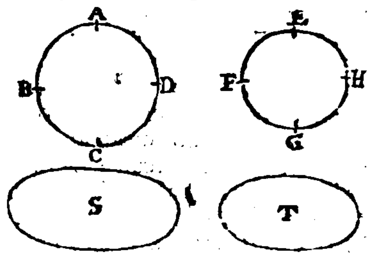
a 41. primi.

ſed ſegmentum minus eſt parallelogrammo. quare unumquodque triangulorum EKF FLG GMH HNE majus eſt dimidio ſegmenti circuli, in quo conſiſtit. reliquas igitur circumferentias bifariam ſecantes, & jungentes rectas lineas, atque hoc ſemper facientes, relinquemus tandem quædam circuli ſegmenta, quæ minora erunt exceſſu, quo circulus EFGH ipſum S ſpatium ſuperat. etenim oſtenſum eſt in præcedenti Lemmate, duabus magnitudinibus inæqualibus expoſitis, ſi à majori auferatur majus quàm dimidium, & ab eo quod relinquitur, rurſus majus quàm dimi-

 dium,

dium, & hoc ſemper fiat; relinqui tandem magnitudinem aliquam, quæ minori magnitudine expoſita ſit minor. itaque relicta ſint ſegmenta circuli EFGH in rectas lineas EK KF FL LG GM MH HN NE, quæ minora ſint exceſſu, quo circulus EFGH ipſum S ſpatium ſuperat. ergo reliquum EKFLGMHN polygonum majus erit ſpatio S. Deſcribatur etiam in circulo ABCD, polygono EKFLGMHN ſimile polygonum AXBOCPDR. eſt igitur ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, b ita polygonum AXBOCPDR ad EKFLGMHN polygonum. ſed & ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita ABCD circulus ad ſpatium S. ergo & c ut circulus ABCD ad ſpatium S, ita polygonum AXBOCPDR ad EKFLGMHN polygonum; major autem eſt circulus ABCD eo quod in ipſo eſt polygono. quare & ſpatium S majus eſt e polygono EKFLGMHN. ſed & d minus, quod fieri non poteſt. Non igitur eſt ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita ABCD circulus ad ſpatium aliquod minus circulo EFGH. Similiter oſtendemus neque eſſe ut quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita circulum EFGH ad aliquod ſpatium minus circulo ABCD. dico igitur neque eſſe ut quadratum ex BD ad quadratum FH, ita circulum ABCD ad aliquod ſpatium majus circulo EFGH. ſi enim fieri poteſt, ſit ad majus ſpatium S. erit igitur invertendo ut quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita ſpatium S ad ABCD circulum: ſed quoniam S majus eſt EFGH circulo; erit ut ſpatium S ad ABCD circulum, ita circulus EFGH ad aliquod ſpatium minus circulo ABCD. ergo & ut quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita EFGH circulus ad aliquod ſpatium minus circulo ABCD, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. non igitur ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita eſt circulus ABCD ad ſpatium aliquod majus EFGH circulo. oſtenſum autem eſt neque ad minus. quare ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita erit ABCD circulus ad circulum EFGH. Circuli igitur inter ſe ſunt ut diametrorum quadrata. Quod oſtendere oportebat.

b 1. hujus.
c 11 quinti.
d Ex hypotheſi.
e 14 quinti.

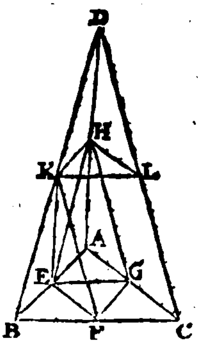


PROP.

PROP. III. THEOR.

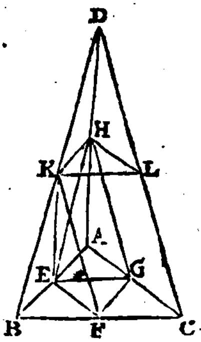
Omnis pyramis triangularem habens basim dividitur in duas pyramides, æquales & similes inter se, quæ triangulares bases habent, similesque toti, & in duo prismata æqualia, quæ quidem prismata dimidio totius pyramidis sunt majora.

Sit pyramis, cujus basis quidem ABC triangulum; vertex autem punctum D. dico pyramidem ABCD dividi in duas pyramides æquales & similes inter se, triangulares bases habentes, & similes toti, & in duo prismata æqualia; & duo prismata dimidio totius pyramidis esse majora. secentur enim AB BC CA AD DB DC bifariam in punctis E F G H K L, & EH EG GH HK KL LH EK KF FG jungantur. quoniam igitur AE quidem est æqualis EB, AH vero ipsi HD; erit [a] EH ipsi DB parallela. eadem ratione & HK est parallela ipsi AB. parallelogrammum igitur est HEBK. quare HK est [b] æqualis EB. sed EB ipsi AE est æqualis, ergo & AE ipsi HK æqualis erit; est autem & AH æqualis HD. duæ igitur AE AH duabus KH HD æquales sunt, altera alteri, & angulus EAH æqualis [c] angulo KHD; basis igitur [d] EH basi KD est æqualis; quare triangulum AEH æquale est & simile triangulo HKD. eadem ratione & triangulum AHG triangulo HLD æquale est & simile. & quoniam duæ rectæ lineæ sese tangentes EH HG duabus rectis lineis sese tangentibus KD DL parallelæ sunt, non autem in eodem plano, æquales angulos [e] continebunt. ergo angulus EHG est æqualis angulo KDL. rursus quoniam duæ rectæ lineæ EH HG duabus KD DL æquales sunt, altera alteri, & angulus EHG est æqualis angulo KDL; erit [d] basis EG basi KL æqualis; æquale igitur est & simile triangulum EHG triangulo KDL. eadem ratione & AEG triangulum est æquale & simile triangulo HKL. quare pyramis cujus basis quidem est AEG triangulum, vertex autem punctum H, æqualis & similis est pyramidi cujus basis est triangulum HKL, & vertex D punctum. & quoniam uni laterum trianguli ADB, videlicet ipsi AB, parallela ducta est HK; erit triangulum ADB triangulo DKH æquiangulum,



a 2. sexti.
b 34. primi.
c 29. primi.
d 4. primi.
e 10. undecimi.

angulum, & latera habent proportionalia. simile igitur est ADB triangulum triangulo DHK: & eadem ratione triangulum quidem DBC simile est triangulo DKL; triangulum vero ADC triangulo DHL. & cum duæ rectæ lineæ sese tangentes BA AC duabus rectis lineis sese tangentibus KH HL parallelæ sint, non existentes in eodem plano, hæ æquales angulos *e* continebunt. angulus igitur BAC angulo KHL est æqualis: atque est ut BA ad AC, ita KH ad HL. ergo ABC triangulum simile est triangulo HKL; ideoque pyramis, cujus basis quidem triangulum ABC, vertex autem punctum D, similis est pyramidi, cujus basis triangulum HKL, & vertex punctum D. sed pyramis cujus basis quidem HKL triangulum, vertex autem punctum D, ostensa est similis pyramidi, cujus basis triangulum AEG, & vertex H punctum. quare & pyramis cujus basis triangulum ABC & vertex punctum D, similis est pyramidi cujus basis AEG triangulum, & vertex punctum H. utraque igitur ipsarum AEGH HKLD pyramidum similis est toti pyramidi ABCD. & quoniam BF est æqualis FC, erit EBFG parallelogrammum duplum trianguli GFC: & quoniam duo prismata æque alta sunt, quorum unum quidem basim habet parallelogrammum, alterum vero triangulum, estque parallelogrammum duplum trianguli; erunt ea prismata inter se æqualia *g*. ergo prisma contentum duobus triangulis BKF EHG, & tribus parallelogrammis EBFG EBKH KHGF, est æquale prismati quod duobus triangulis GFC HKL, & tribus parallelogrammis KFCL LCGH HKFG continetur. & manifestum est utrumque ipsorum prismatum, & cujus basis est EBGF parallelogrammum, opposita autem ipsi HK recta linea, & cujus basis est GFC triangulum, & oppositum ipsi triangulum KLH, majus esse utraque pyramidum quarum bases quidem AEG HKL triangula, vertices autem puncta H D; quoniam si jungamus EF EH rectas lineas, prisma quidem, cujus basis est EBFG parallelogrammum, & opposita ipsi recta linea HK, majus est pyramide cujus basis EBF triangulum, vertex autem punctum K; sed pyramis, cujus basis triangulum EBF, & vertex K punctum, est *f* æqualis pyramidi cujus basis AEG triangulum, & vertex punctum H; æqualibus enim & similibus planis continentur. quare & prisma cujus basis parallelogrammum EBFG, opposita autem ipsi



e 10. undecimi.

g 40. undecimi.

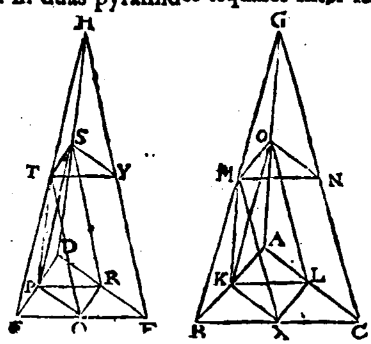
f 10. diffin. undecimi.

ipsi recta linea HK, majus est pyramide cujus basis AEG triangulum, & vertex punctum H. prisma vero cujus basis parallelogrammum EBFG, & opposita ipsi recta linea HK, est æquale prismati cujus basis GFC triangulum, & ipsi oppositum triangulum HKL: & pyramis cujus basis triangulum AEG, vertex autem H punctum, est æqualis pyramidi cujus basis HKL triangulum, & vertex punctum D. ergo duo prismata de quibus dictum est, sunt majora duabus dictis pyramidibus quorum bases triangula AEG HKL, vertices autem H D puncta. Tota igitur pyramis cujus basis ABC triangulum, vertex autem punctum D, divisa est in duas pyramides æquales, & similes inter se, & similes toti: & in duo prismata æqualia: suntque duo prismata dimidio totius pyramidis majora. Quæ ostendere oportebat.

PROP. IV. THEOR.

Si sint duæ pyramides æque altæ, quæ triangulares bases habeant, dividatur autem utraque ipsarum, & in duas pyramides æquales inter se, similesque toti, & in duo prismata æqualia, & factarum pyramidum utraque eodem modo dividatur, atque hoc semper fiat; erit ut unius pyramidis basis ad basim alterius, ita & in una pyramide prismata omnia ad prismata omnia in altera pyramide multitudine æqualia.

Sint duæ pyramides æque altæ quæ triangulares bases habeant ABC DEF, vertices autem sint puncta G H, & dividatur utraque ipsarum in duas pyramides æquales inter se, similesque toti, & in duo prismata æqualia, & factarum pyramidum utraque eodem modo divisa intelligatur: atque hoc semper fiat. dico ut ABC basis ad basim DEF, ita esse prismata omnia quæ sunt in pyramide ABCG ad prismata omnia quæ in pyramide DEFH multitudine æqualia.



Quoniam enim BX quidem est æqualis XC, AL vero æqualis LC; erit a XL ipsi AB parallela, & triangulum ABC triangulo LXC simile. eadem ratione & triangulum a 2. sexti.

gulum

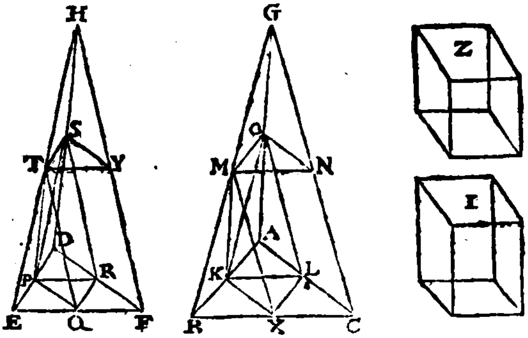
gulum DEF simile est triangulo RQF. & quoniam BC quidem est dupla CX, EF vero dupla ipsius FQ, ut BC ad CX, ita erit EF ad FQ. & descripta sunt ab ipsis BC CX similia & similiter posita rectilinea ABC LXC; ab ipsis vero EF FQ similia & similiter posita rectilinea DEF RQF. est
b 22. sexti. igitur b ut BAC triangulum ad triangulum LXC, ita triangulum DEF ad RQF triangulum; & permutando ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita LXC triangulum ad triangulum RQF. sed ut LXC triangulum ad triangulum
d 28. & 32. undecimi. KQF, ita d prisma cujus basis est triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN, ad prisma cujus basis RQF triangulum &
e 11 quinti. oppositum ipsi STY. ut igitur e ABC triangulum ad triangulum DEF, ita prisma cujus basis est triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN, ad prisma cujus basis RQF triangulum, & oppositum ipsi STY. & quoniam duo prismata quæ in pyramide ABCG inter se æqualia sunt, sed & quæ in pyramide DEFH prismata inter se sunt æqualia; erit ut prisma cujus basis parallelogrammum KLXB, opposita vero ipsi recta linea MO, ad prisma cujus basis LXC triangulum, & oppositum ipsi OMN, ita prisma cujus basis parallelogrammum EPRQ, & opposita recta linea ST, ad prisma cujus basis RQF triangulum, oppositum vero ipsi STY. quare componendo, ut prismata KBXLMO LXCMNO ad prisma LXCMNO, ita prismata PEQRST RQFSTY ad prisma RQFSTY. & permutando, ut prismata KBXLMO LXCOMN ad prismata PEQRST RQFSTY, ita prisma LXCMNO ad prisma RQFSTY. ut autem prisma LXCMNO ad prisma RQFSTY, ita ostensa est basis LXC ad RQF basim, & ABC basis ad basim DEF. ergo & ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita quæ in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide DEFH. similiter autem, & si factas pyramides dividamus eodem modo velut OMNG STYH, erit ut OMN basis ad basim STY, ita quæ in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide STYH. sed ut OMN basis ad basim STY, ita basis ABC ad DEF basim. & ut igitur ABC basis ad basim DEF, ita quæ in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide DEFH; & quæ in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide STYH, & quatuor ad quatuor. eadem autem ostendentur & in factis prismatibus ex divisione pyramidum AKLO, & DPRS & omnium simpliciter multitudine æqualium. Quod demonstrare oportebat.

PROP.

PROP. V. THEOR.

Pyramides quæ eadem sunt altitudine, & triangulares bases habent, inter se sunt ut bases.

Sint eadem altitudine pyramides quarum bases quidem triangula ABC DEF, vertices autem puncta G H. dico ut ABC basis ad basim DEF, sic esse pyramidem ABCG ad DEFH pyramidem. Si enim non ita sit, erit ut ABC basis ad basim DEF, sic ABCG pyramis, vel ad solidum minus pyramide DEFH, vel ad majus. sit primum ad solidum minus, sitque Z: & dividatur pyramis DEFH in duas pyramides æquales inter se, & similes toti, & in duo prismata æqualia: sunt duo igitur prismata dimidio totius pyramidis majora. & rursus pyramides ex divisione factæ similiter dividantur, atque hoc semper fiat, quoad sumantur quædam pyramides à pyramide DEFH, quæ sint minores excessu quo pyramis DEFH solidum Z superat. itaque sumantur, &



sint exempli causa, pyramides DPRS STYH. erunt igitur reliqua in pyramide DEFH prismata solido Z majora. dividatur etiam ABCG pyramis in totidem partes similes pyramidi DEFH. ergo [a] ut ABC basis ad basim DEF, ita quæ in pyramide ABCG prismata ad prismata quæ in pyramide DEFH; sed ut ABC basis ad basim DEF, ita pyramis ABCG ad solidum Z, & igitur ut ABCG pyramis ad solidum Z, ita quæ in pyramide ABCG prismata ad prismata quæ in pyramide DEFH: major autem est pyramis ABCG prismatibus quæ in ipsa sunt, ergo & solidum Z prismatibus, quæ sunt in pyramide DEFH est majus. sed & [b] minus, quod fieri non potest. non igitur ut ABC basis ad basim DEF, ita est pyramis ABCG ad solidum aliquod minus pyramide DEFH. similiter ostendemus neque ut DEF basis ad basim

[a] 4. hujus.

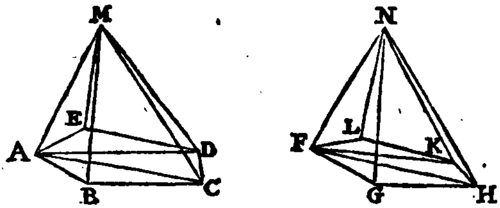
[b] ex prius demonstratis.

basim A B C, ita esse pyramidem D E F H ad solid[illegible]aliquod pyramide A B C G minus. dico igitur neque esse ut A[illegible] basis ad basim D E F, ita A B C G pyramidem ad aliquod solidum majus pyramide D E F H. si enim fieri potest, sit ad majus, videlicet ad solidum I. erit igitur invertendo ut D E F basis ad basim A B C, ita solidum I ad A B C G pyramidem. cum autem solidum I majus est pyramide E D F H, erit ut solidum I ad A B C G pyramidem, ita D E F H pyramis ad solidum aliquod minus pyramide A B C G, ut proxime ostensum fuit. & ut igitur D E F basis ad basim A B C, ita pyramis D E F H ad solidum aliquod pyramide A B C G minus, quod est absurdum. non igitur ut A B C basis ad basim D E F, ita est A B C G pyramis ad solidum aliquod majus pyramide D E F H. ostensum autem est, neque ad minus. quare ut A B C basis ad basim D E F, ita est pyramis A B C G ad D E F H pyramidem. Pyramides igitur quæ eadem sunt altitudine, & triangulares bases habent, inter se sunt ut bases. Quod demonstrare opotrebat.

PROP. VI. THEOR.

Pyramides quæ eadem sunt altitudine, & polygonas bases habent, inter se sunt ut bases.

Sint eadem altitudine pyramides quæ polygonas bases habeant A B C D E F G H K L: vertices autem M N puncta. dico ut A B C D E basis ad basim F G H K L, ita esse A B C D E M pyramidem ad pyramidem F G H K L N. dividatur enim basis quidem A B C D E in triangula A B C A C D A D E; basis vero



F G H K L dividatur in triangula F G H F H K F K L. & in unoquoque triangulo intelligantur pyramides æque altæ atque pyramides quæ à principio. quoniam igitur est ut triangulum A B C ad triangulum A C D, a ita A B C M pyramis ad pyramidem A C D M: & componendo ut A B C D trapezium ad triangulum A C D, ita A B C D M pyramis ad pyramidem A C D M. sed & ut A C D triangulum ad A D E, ita a pyramis A C D M ad A D E M pyramidem. ergo ex æquali, ut A B C D basis ad basim A D E, ita A B C D M pyramis ad pyramidem A D E M:

a 5. hujus.

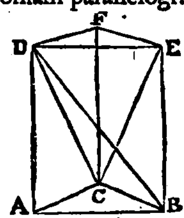
&

& rursus componendo ut ABCDE basis ad basim ADE, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem ADEM. eadem ratione & ut FGHKL basis ad basim FKL, ita & FGHKLN pyramis ad FKLN pyramidem. & quoniam duæ pyramides sunt ADEM FKLN, quæ triangulares bases habent, & eadem sunt altitudine; erit [a] ut ADE basis ad basim FKL, ita ADEM pyramis ad pyramidem FKLN. quòd cum sit ut ABCDE basis ad basim ADE, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem ADEM; ut autem ADE basis ad basim FKL, ita ADEM pyramis ad pyramidem FKLN; erit ex æquali, ut basis ABCDE ad FKL basim, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem FKLN. sed & ut FKL basis ad basim FGHKL, ita erat & FKLN pyramis ad pyramidem FGHKLN. quare rursus ex æquali, ut ABCDE basis ad basim FGHKL, ita est ABCDEM pyramis ad pyramidem FGHKLN. Pyramides igitur quæ eadem sunt altitudine, & polygonas bases habent, inter se sunt ut bases. Quod oportebat demonstrare.

PROP. VII. THEOR.

Omne prisma triangularem habens basim, dividitur in tres pyramides æquales inter se, quæ triangulares bases habent.

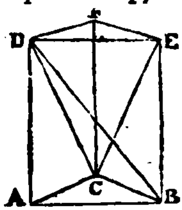
Sit prisma cujus basis quidem triangulum ABC, oppositum autem ipsi DEF. dico prisma ABCDEF dividi in tres pyramides æquales inter se, quæ triangulares habent bases. Jungantur enim BD EC CD. & quoniam parallelogrammum est ABED cujus diameter BD, erit ABD triangulum triangulo EBD [a] æquale. ergo pyramis cujus basis triangulum ABD, vertex autem punctum C, æqualis [b] est pyramidi cujus basis EDB triangulum, & vertex punctum C. sed pyramis cujus basis EDB triangulum, & vertex punctum C, eadem est cum pyramide cujus basis triangulum EBC, & vertex D punctum: iisdem enim planis continentur. ergo & pyramis cujus basis triangulum ABD, vertex autem punctum C, æqualis est pyramidi cujus basis EBC triangulum, & vertex punctum D. rursus quoniam FCBE parallelogrammum est cujus diameter CE, triangulum ECF triangulo CBE est [a] æquale. ergo & pyramis cujus basis BEC triangulum, vertex autem punctum D, æqualis est [b] pyramidi cujus basis triangulum ECF, & vertex punctum D: sed pyramis cujus basis



[a] 34. primi.

[b] 6. hujus.

basis quidem BCE triangulum, vertex autem punctum D, ostensa est æqualis pyramidi cujus basis triangulum ABD, & vertex C punctum; quare & pyramis cujus basis triangulum CEF, & vertex punctum D, æqualis est pyramidi cujus basis triangulum ABD, & vertex C punctum. prisma igitur ABCDEF dividitur in tres pyramides inter se æquales, quæ triangulares bases habent. & quoniam pyramis cujus basis ABD triangulum, vertex autem punctum C, eadem est cum pyramide, cujus basis triangulum CAB, & vertex D punctum, iisdem namque planis continentur: pyramis autem, cujus basis triangulum ABD, & vertex punctum C, tertia pars ostensa est prismatis cujus basis ABC triangulum, & oppositum ipsi DEF. & pyramis igitur, cujus basis triangulum ABC, vertex autem D punctum, tertia pars est prismatis eandem basim habentis, videlicet ABC triangulum & oppositum ipsi triangulum DEF. Quod demonstrare oportebat.



COROLLARIUM.

1. Ex hoc manifestum est omnem pyramidem tertiam partem esse prismatis basim habentis eandem, & altitudinem æqualem; quoniam si basis prismatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, & oppositam ipsi eandem, dividitur in prismata quæ triangulares bases habent, & quæ ipsis opponuntur.
2. Prismata æque alta sunt inter se ut bases.

PROP. VIII. THEOR.

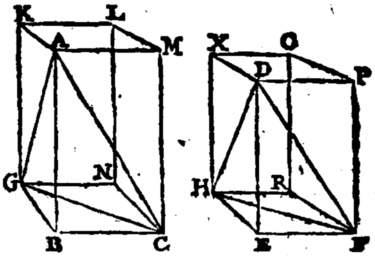
Similes pyramides quæ triangulares bases habent, in triplicata sunt proportione homologorum laterum.

Sint similes, & similiter positæ pyramides, quarum bases quidem triangula ABC DEF, vertices autem G H puncta. dico ABCG pyramidem ad pyramidem DEFH, triplicatam proportionem habere ejus quam BC habet ad EF. compleantur enim BGML EHPO solida parallelepipeda. & quoniam pyramis ABCG similis est pyramidi DEFH, erit [a] angulus ABC angulo DEF æqualis, angulusque GBC æqualis angulo HEF, & angulus ABG angulo DEH. atque [b] est ut AB ad DE, ita BC ad EF, & BG ad EH. quoniam igitur est

a 9 Diffin. undecimi.
b 1. Diffin. sexti.

ut

ut AB ad DE, ita BC ad EF, & circum æquales angulos latera sunt proportionalia, parallelogrammum BM parallelogrammo EP simile erit. eadem ratione, & parallelogrammum BN simile est parallelogrammo ER, & parallelogrammum BK ipsi EX parallelogrammo. tria igitur parallelogramma BM KB BN. tribus EP EX ER sunt similia. sed tria quidem MB BK BN tribus oppositis æqualia



& similia sunt, tria vero EP EX ER tribus oppositis æqualia & similia. quare solida BGML EHPO similibus planis & numero æqualibus continentur; ac propterea [a] simile est BGML solidum solido EHPO. similia autem solida parallelepipeda in [c] triplicata sunt proportione homologorum laterum. ergo solidum BGML ad solidum EHPO triplicatam habet proportionem ejus quam habet latus homologum BC ad EF homologum latus. sed [d] ut BGML solidum ad solidum EHPO, ita ABCG pyramis ad pyramidem DEFH; pyramis enim sexta pars est ipsius solidi, cum prisma quod est dimidium solidi parallelepipedi, sit pyramidis triplum. quare & pyramis ABCG ad pyramidem DEFH triplicatam proportionem habebit ejus quàm BC habet ad EF. Quod demonstrare oportebat.

c 33. undecimi.

d 15. quinti.

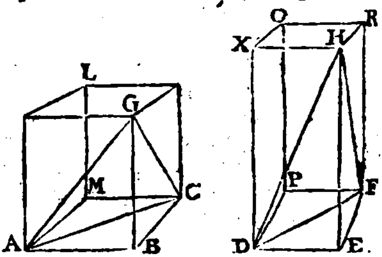
Cor. Ex hoc perspicuum est, & similes pyramides quæ multangulas bases habent, inter se esse in triplicata proportione homologorum laterum. ipsis enim divisis in pyramides triangulares bases habentes, quoniam & similia polygona, quæ sunt in basibus, in similia triangula dividuntur, & numero æqualia & homologa totis; erit ut una pyramis in una pyramide triangularem habens basim ad pyramidem in altera triangularem basim habentem, ita & omnes pyramides in uno pyramide triangulares habentes bases ad omnes in altera triangulares bases habentes; hoc est, ita pyramis ipsa multangulam habens basim ad pyramidem quæ multangulam basim habet. sed pyramis triangularem habens basim ad pyramidem quæ triangularem basim habet, est in triplicata proportione homologorum laterum: & pyramis igitur polygonam habens basim ad pyramidem similem basim habentem, triplicatam proportionem habebit ejus quam latus homologum habet ad homologum latus.

O PROP.

PROP. IX. THEOR.

Æqualium pyramidum, & triangulares bases habentium bases & altitudines reciproce sunt proportionales: & quarum pyramidum triangulares bases habentium bases & altitudines reciproce sunt proportionales, illæ sunt æquales.

Sint nempe pyramides æquales quæ triangulares bases habeant ABC DEF, vertices vero G H puncta. dico pyramidum ABCG DEFH bases & altitudines reciprocari; scil ut ABC basis ad basim DEF, ita esse pyramidis DEFH altitudinem ad altitudinem pyramidis ABCG. compleantur enim BGML EHPO solida parallelepipeda. & quoniam pyramis ABCG est æqualis pyramidi DEFH, atque est pyramidis quidem ABCG sextuplum BGML solidum, pyramidis vero DEFH sextuplum solidum EHPO; erit [a] solidum BGML solido EHPO æquale. æqualium autem solidorum parallelepipedorum bases & altitudines reciprocantur [b]. est igitur ut BM basis ad basim EP, ita EHPO solidi altitudo ad altitudinem solidi BGML. sed ut BM basis ad basim EP, ita [a] ABC triangulum ad triangulum DEF. ergo & ut ABC triangulum ad triangulum DEF, ita solidi EHPO altitudo ad altitudinem solidi BGML. sed solidi quidem EHPO altitudo eadem est cum altitudine pyramidis DEFH; solidi vero BGML altitudo eadem est cum altitudine pyramidis ABCG. est igitur ut ABC basis ad basim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. quare pyramidum ABCG DEFH bases & altitudines reciproce sunt proportionales. Et si pyramidum ABCG DEFH bases & altitudines reciproce sunt proportionales, sitque ut ABC basis ad basim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. dico ABCG pyramidem pyramidi DEFH æqualem esse. iisdem enim constructis, quoniam ut ABC basis ad basim DEF, ita est DEFH pyramidis altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG; ut autem ABC basis ad basim DEF, ita BM parallelogrammum ad parallelogrammum EP: erit & ut parallelogrammum BM ad EP parallelogrammum, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem



a 15. quinti.

b 34. undecimi.

nem

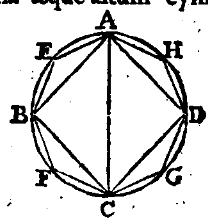
nem pyramidis ABCG. sed pyramidis quidem DEFH altitudo eadem est cum altitudine solidi parallelepipedi EHPO; pyramidis vero ABCG altitudo eadem est cum altitudine solidi parallelepepidi BGML. est igitur ut BM basis ad basim EP, ita EHPO solidi parallelepipedi altitudo ad altitudinem solidi parallelepipedi BGML. quorum autem solidorum parallelepipedorum bases & altitudines reciprocantur, ea [b] sunt æqualia. solidum igitur parallelepipedum BGML æquale est solido parallelepipedo EHPO; atque est solidi quidem BGML sexta pars pyramis ABCG: solidi vero EHPO itidem sexta pars pyramis DEFH. ergo pyramis ABCG pyramidi DEFH est æqualis. Æqualium igitur pyramidum, & triangulares bases habentium bases & altitudines reciproce sunt proportionales: & quarum pyramidum triangulares bases habentium bases & altitudines reciproce sunt proportionales, illæ sunt æquales. Quod oportebat demonstrare.

[b] 34. undecimi.

PROP. X. THEOR.

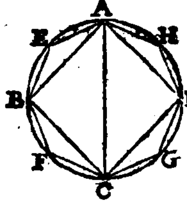
Omnis conus tertia pars est cylindri, qui eandem basim habet & altitudinem æqualem.

Habeat conus eandem basim quam cylindrus, videlicet circulum ABCD, & altitudinem æqualem. dico conum tertiam partem esse cylindri, hoc est cylindrum coni triplum esse. Si enim cylindrus non sit triplus coni, vel major erit quam triplus, vel minor. sit primo major quàm triplus; & describatur in ABCD circulo quadratum ABCD. ergo quadratum ABCD majus est quàm dimidium ABCD circuli. & à quadrato ABCD erigatur prisma æque altum cylindro, quod quidem prisma majus erit quàm cylindri dimidium; quoniam si circa circulum ABCD quadratum describatur erit inscriptum quadratum dimidium circumscripti: & sunt ab eisdem basibus erecta solida parallelepipeda æque alta, nimirum prismata ipsa. quare prismata inter se sunt [a] ut bases, & prisma igitur erectum à quadrato ABCD dimidium est prismatis erecti à quadrato quod circa circulum ABCD describitur, atque est cylindrus minor prismate erecto à quadrato quod describitur circa circulum ABCD. prisma igitur erectum à quadrato ABCD æque altum cylindro, dimidio cylindri est majus. secentur circumferentiæ AB BC CD DA bifariam in punctis EFGH, & AE EB BF FC CG GD DH



[a] 2. Cor. 7. hujus.

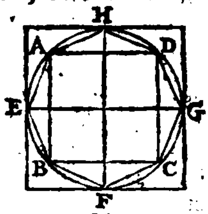
H A jungantur. unumquodque igitur triangulorum A E B B F C C G D D H A majus *b* est dimidio portionis circuli A B C D, in qua consistit. erigantur ab unoquoque triangulorum A E B B F C C G D D H A prismata æque alta cylindro. ergo & unumquodque erectorum prismatum majus est dimidio portionis cylindri quæ ad ipsum est, quoniam si per puncta E F G H parallelæ ipsis A B B C C D D A ducantur, & compleantur in ipsis A B B C C D D A parallelogramma, à quibus solida parallelepipeda æque alta cylindro erigantur: erunt uniuscujusque erectorum dimidia prismata ea *a* quæ sunt in triangulis A E B B F C C G D D H A. & sunt cylindri portiones erectis solidis parallelepipedis minores. ergo & prismata quæ in triangulis A E B B F C C G D D H A majora sunt dimidio portionum cylindri quæ ad ipsa sunt. itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, jungentesque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes prismata æque alta cylindro, & hoc semper facientes tandem relinquentur quædam portiones cylindri quæ sint minores excessu quo cylindrus coni triplum superat. relinquantur jam; & sint A E E B B F F C C G G D D H H A. reliquum igitur prisma, cujus basis quidem polygonum A E B F C G D H, altitudo autem eadem quæ cylindri, majus est quàm triplum coni. sed prisma cujus basis A E B F C G D H polygonum, & altitudo eadem quæ cylindri, triplum *c* est pyramidis, cujus basis polygonum A E B F C G D H, vertex autem idem qui coni, & pyramis igitur cujus basis polygonum A E B F C G D H, vertex autem idem qui coni, major est cono qui basim habet A B C D circulum. sed & minor (ab ipso enim comprehenditur) quod fieri non potest. non igitur cylindrus major erit quàm triplus coni. dico insuper neque cylindrum minorem esse quam triplum coni. si enim fieri potest, sit cylindrus minor quàm triplus coni. erit invertendo conus major quam tertia pars cylindri. describatur in A B C D circulo quadratum A B C D, ergo quadratum A B C D majus est quam dimidium A B C D circuli; & à quadrato A B C D erigatur pyramis, verticem habens eundem quem conus. pyramis igitur erecta major est quàm coni dimidium: quoniam, ut ante demonstravimus, si circa circulum quadratum describatur, erit quadratum A B C D dimidium ejus quod circa circulum descriptum est: & si à quadratis erigantur solida parallelepipeda æque alta cono, quæ & prismata appellantur,



b sequitur ex 1. hujus.

c 1. Cor. 7. hujus.

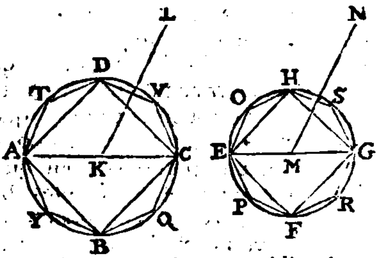
pellantur, erit *a* quod à quadrato A B C D erigitur dimidium ejus, quod erectum est à quadrato circa circulum descripto, etenim inter se sunt ut bases, quare & tertiæ partes ipsarum. pyramis igitur cujus basis quadratum A B C D, dimidia est ejus pyramidis quæ à quadrato circa circulum descripto erigitur. sed pyramis erecta à quadrato descripto circa circulum, major est cono, ipsum namque comprehendit. ergo pyramis cujus basis A B C D quadratum, vertex autem idem qui coni, major est quàm coni dimidium. secentur circumferentiæ A B B C C D D A bifariam in punctis E F G H. & jungantur A E E B B F F C C G G D D H H A. & unumquodque igitur triangulorum A E B B F C C G D D H A majus est quam dimidium portionis circuli A B C D, in qua consistit. erigantur ab unoquoque triangulorum A E B B F C C G D D H A pyramides verticem habentes eundem quem conus. ergo & unaquæque pyramidum eodem modo erectarum major est quàm dimidium portionis coni quæ est ad ipsam. itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, jungentesque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides verticem habentes eundem quem conus, & hoc semper facientes, relinquemus tandem quasdam coni portiones quæ minores erunt excessu quo conus tertiam cylindri partem superat. relinquantur; & sint quæ in ipsis A E E B B F F C C G G D D H H A; reliqua igitur pyramis cujus basis polygonum A E B F C G D H, & vertex idem qui coni, major est quam tertia cylindri pars. sed pyramis cujus basis polygonum A E B F C D H vertex autem idem qui coni, tertia pars est prismatis cujus basis polygonum A E B F C D H, altitudo autem eadem quæ cylindri. prisma igitur cujus basis A E B F C G H polygonum, & altitudo eadem quæ cylindri, majus est cylindro cujus basis est circulus A B C D. sed & minus (ab ipso enim comprehenditur) quod fieri non potest. non igitur cylindrus minor est quam triplus coni. ostensum autem est neque majorem esse quam triplum, ergo cylindrus coni triplus sit necesse est; ac propterea conus tertia pars cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eandem quam ipse basim habentis, & altitudinem æqualem Quod demonstrare oportebat.



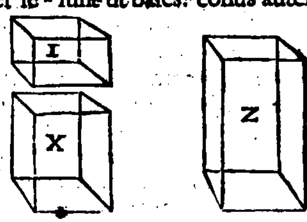
PROP. XI. THEOR.

Coni & cylindri qui eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes.

Sint in eadem altitudine coni & cylindri, quorum baſes circuli A B C D E F G H, axes autem K L M N, & diametri baſium A C E G. dico ut A B C D circulus ad circulum E F G H, ita eſſe conum A L ad E N conum. Si enim non ita ſit; erit ut A B C D circulus ad circulum E F G H, ita conus A L ad aliquod ſolidum minus cono E N, vel ad majus; ſit primo ad minus quod ſit X; & quo minus eſt ſolidum X cono E N, ei æquale ſit I ſolidum. conus igitur E N ipſis ſolidis X I eſt æqualis. deſcribatur in E F G H, circulo quadratum E F G H quod majus eſt dimidio circuli. erigatur à quadrato E F G H pyramis æque alta cono. pyramis igitur erecta major eſt coni dimidio, nam ſi circa circulum quadratum deſcribamus, & ab ipſo erigamus pyramidem



æque altam cono; erit inſcripta pyramis pyramidis circum-
a 6. hujus. ſcriptæ dimidium, etenim inter ſe [a] ſunt ut baſes: conus autem circumſcripta pyramide eſt minor. ergo pyramis cujus baſis quadratum E F G H, vertex autem idem qui coni, major eſt coni dimidio. ſecentur circumferentiæ E F F G G H H E bifariam in punctis P R S O; & O E E P



P F F R R G G S S H jungantur: unumquodque igitur triangulorum H O E E P F F R G G S H majus eſt quam dimidium ſegmenti circuli, in quo conſiſtit. erigatur ab unoquoque triangulorum H O E E P F F R G G S H pyramis æque alta cono. ergo & unaquæque erectarum pyramidum major eſt dimidio portionis coni, quæ eſt ad ipſam. itaque reliquas circumferentias ſecantes bifariam, & jungentes rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides æque altas cono, atque hoc ſemper facientes, relinquemus tandem aliquas portiones coni, quæ ſolido I minores erunt. relinquantur, & ſint quæ in ipſis H O O E E P P F F R R G G S

S H.

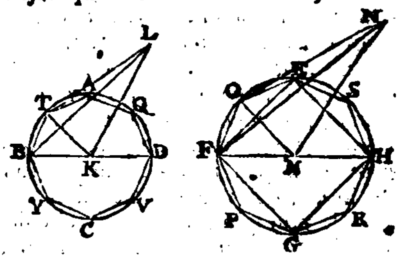
SH. reliqua igitur pyramis cujus basis polygonum HOEPFRGS, altitudo autem eadem quæ coni, major est solido X. describatur in circulo ABCD polygono HOEPFRGS simile & similiter positum polygonum DTAYBQCV, & ab ipso erigatur pyramis æque alta cono AL. quoniam igitur est ut quadratum ex AC ad quadratum ex EG, ita [a] DTAYBQCV polygonum ad polygonum HOEPFRGS; ut autem quadratum ex AC ad quadratum ex EG, ita ABCD circulus [b] ad circulum EFGH: erit ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita polygonum DTAYBQCV ad polygonum HOEPFRGS. sed ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad X solidum: & ut polygonum DTAYBQCV ad polygonum HOEPFRGS, ita pyramis cujus basis DTAYBQCV polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum HOEPFRGS, & vertex punctum N. ut igitur conus AL ad X solidum, ita pyramis, cujus basis polygonum DTAYBQCV, & vertex punctum L ad pyramidem cujus basis polygonum HOEPFRGS, & vertex N punctum. conus autem AL major est pyramide quæ est in ipso. majus igitur est solidum X pyramide quæ est in cono EN. sed & ostensum est minus, quod fieri non potest. non igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita est AL conus ad solidum aliquod minus cono EN. similiter demonstrabitur neque ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita esse conum EN ad aliquod solidum minus cono AL. dico præterea neque esse ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita AL conum ad aliquod solidum majus cono EN. si enim fieri potest, sit ad solidum majus, quod sit Z. ergo invertendo ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita erit solidum Z ad AL conum; sed cum est solidum Z majus cono AL, erit ut solidum Z ad AL conum, ita conus EN ad aliquod solidum minus cono AL: & igitur ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita conus EN ad aliquod solidum minus cono AL, quod fieri non posse ostensum est. non igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad aliquod solidum majus cono EN. ostensum autem est neque esse ad minus. ergo ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita est conus AL ad EN conum: sed ut conus ad conum, ita [c] est cylindrus ad cylindrum, est enim uterque utriusque triplus. & igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita in ipsis cylindri æque alti conis. Ergo coni & cylindri qui eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases. Quod demonstrare oportebat.

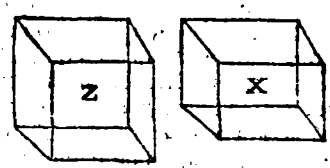
[a] 1. hujus.
[b] 2. hujus.
[c] 15. quinti.

PROP. XII. THEOR.

Similes coni & cylindri inter se sunt in triplicata proportione diametrorum quæ sunt in basibus.

Sint similes coni & cylindri quorum bases quidem circuli ABCD EFGH, diametri vero basium BD FH, & axes conorum, vel cylindrorum KL MN. dico conum cujus basis ABCD circulus, vertex autem punctum L, ad conum cujus basis circulus EFGH, vertex autem N punctum, triplicatam habere proportionem ejus quam habet BD ad FH. si enim non habet conus ABCDL ad conum EFGHN triplicatam proportionem ejus quam BD habet ad FH, habebit ABCDL conus ad aliquod solidum minus cono EFGHN triplicatam proportionem, vel ad majus. habeat primo ad minus, quod sit X; & describatur in EFGH circulo quadratum EFGH. quadratum igitur EFGH majus est dimidio EFGH circuli. & erigatur à quadrato EFGH pyramis æque alta cono. ergo erecta pyramis major est quam coni dimidium. itaque secentur EF FG GH HE circumferentiæ bifariam in punctis O P R S & jungantur EO OF FP PG GR RH HS SE. unumquodque igitur triangulorum EOF FPG GRH HSE majus est dimidio segmenti circuli EFGH, in quo consistit. & erigatur ab unoquoque triangulorum EOF FPG GRH HSE pyramis eundem verticem habens quem conus. ergo & unaquæque erectarum pyramidum major est quam dimidium portionis coni, quæ est ad ipsam. secantes igitur reliquas circumferentias bifariam, jungentesque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides eundem habentes verticem quem conus, atque hoc semper facientes, tandem relinquemus quasdam coni portiones quæ minores erunt excessu quo conus EFGHN ipsum X solidum superat. relinquantur, & sint quæ in ipsis EO OF FP PG GR RH HS SE. reliqua igitur pyramis cujus basis quidem polygonum





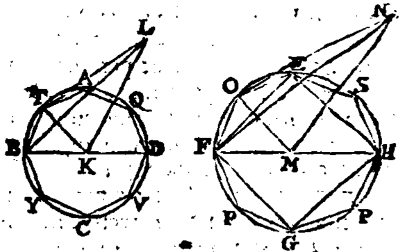
EOFP

EOFPGRHS, vertex autem N punctum, major est solido X. describatur etiam in circulo ABCD, polygono EOFPGRHS simile & similiter positum polygonum ATBYCVDQ, à quo erigatur pyramis eundem verticem habens, quem conus, & triangulorum continentium pyramidem cujus basis quidem est polygonum ATBYCVDQ, vertex autem punctum L, unum sit LBT; triangulorum vero continentium pyramidem cujus basis EOFPGRHS polygonum, & vertex punctum N, unum sit NFO, & jungantur KT MO. quoniam igitur conus ABCDL similis est cono EFGHN, erit ut BD ad FH, ita KL axis ad axem MN. ut autem BD ad FH, [a] ita BK ad FM, & KL ad MN, & permutando ut BK ad KL, ita FM ad MN. & cum perpendicularis utraque est, & circa æquales angulos BKL FMN latera sunt proportionalia. simile igitur [b] est BKL triangulum triangulo FMN. Rursus quoniam est ut BK ad KT, ita FM ad MO, & circa æquales angulos BKT FMO latera sunt proportionalia; etenim quæ pars est angulus BKT quatuor rectorum qui sunt ad K centrum, eadem est pars & angulus FMO quatuor rectorum qui sunt ad centrum M: erit [b] triangulum BKT triangulo FMO simile. & quoniam ostensum est ut BK ad KL, ita esse FM ad MN; æqualis autem est BK ipsi KT, & FM ipsi MO: erit ut TK ad KL, ita OM ad MN: & circa æquales angulos TKL OMN latera sunt proportionalia; recti enim sunt. triangulum igitur LKT simile est triangulo NMO. quod cum ob similitudinem triangulorum BKL FMN, sit ut LB ad BK, ita NF ad FM; ob similitudinem vero triangulorum BKT FMO, ut KB ad BT, ita MF ad FO: erit ex æquali ut LB ad BT, ita NF ad FO. rursus cum ob similitudinem triangulorum LTK NOM, sit ut LT ad TK, ita NO ad OM; & ob similitudinem triangulorum KBT OMF, ut KT ad TB, ita MO ad OF: ex æquali erit ut LT ad TB, ita NO ad OF. ostensum autem est & ut TB ad BL, ita OF ad FN. quare rursus ex æquali ut TL ad LB, ita ON ad NF. triangulorum igitur LTB NOF proportionalia sunt latera, ideoque æquiangula sunt LTB NOF triangula, & inter se similia. quare & pyramis cujus basis triangulum BKT, vertex autem L punctum, similis est pyramidi cujus basis FMO triangulum, & vertex punctum N; similibus enim planis continentur, & multitudine æqualibus. pyramides autem similes, & quæ triangulares bases habent, in [c] triplicata sunt proportione homologorum laterum. ergo pyramis BKTL ad pyramidem FMON triplicatam habet proportionem ejus quam BK habet ad FM. similiter à punctis quidem A Q D V C Y ad K, à punctis vero E S H R G P ad M ducentes rectas lineas

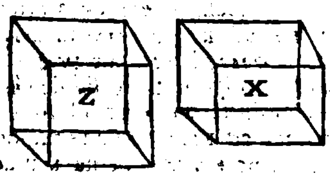
[a] 15. quinti.
[b] 6. sexti.
[c] 8. hujus.

lineas, & à triangulis erigentes pyramides vertices eosdem habentes quos coni, ostendemus & unamquamque pyramidum ejusdem ordinis ad unamquamque alterius ordinis triplicatam proportionem habere ejus quam habet BK latus ad homologum latus MF, hoc est quam BD ad FH. sed ut unum antecedentium [d] ad unum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. est igitur & ut BKTL pyramis ad pyramidem FMON, ita tota pyramis cujus basis AT BYCVDQ polygonum, vertex autem punctum L, ad totam pyramidem cujus basis polygonum EOFPGRHS, & vertex punctum N. quare & pyramis cujus basis ATBYCVDQ polygonum vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum

d 12. quinti.



EOFPGRHS, & vertex punctum N, triplicatam proportionem habet, ejus quam BD habet ad FH. ponitur autem conus cujus basis circulus ABCD vertex autem punctum L, ad solidum X triplicatam proportionem habere ejus quam BD ad FH. ut igitur conus cujus basis circulus ABCD, vertex autem punctum L, ad solidum X, ita est



pyramis cujus basis ATBYCVDQ polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum EOFPRHS, & vertex punctum N. dictus autem conus major est pyramide, quæ in ipso; etenim eam comprehendit: majus igitur est & solidum X pyramide cujus basis polygonum EOFPGRHS, vertex autem punctum N. sed & minus, quod fieri non potest. non igitur conus cujus basis ABCD circulus, & vertex punctum L, ad aliquod solidum minus cono cujus basis circulus EFGH, & vertex N punctum, triplicatam proportionem habet ejus quam BD habet ad FH. similiter demonstrabimus neque conum EFGHN ad aliquod solidum minus cono ABCDL, triplicatam proportionem habere ejus quam habet FH ad BD. itaque dico neque ABCDL conum ad solidum majus cono EFGHN triplicatam habere proportionem ejus quam BD habet ad FH. si enim fieri potest, habeat ad aliquod solidum majus, quod sit Z. invertendo

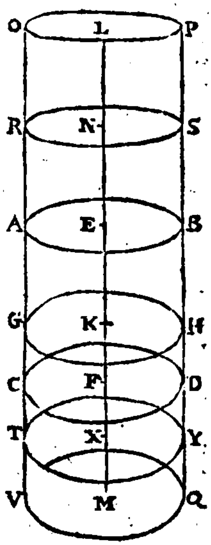
vertendo igitur, solidum Z ad conum ABCDL triplicatam proportionem habet ejus quam FH ad BD: cum autem est solidum Z majus cono EFGHN; erit ut solidum Z ad conum ABCDL, ita EFGHN conus ad aliquod solidum minus cono ABCDL. ergo & conus EFGHN ad solidum aliquod minus cono ABCDL triplicatam proportionem habebit ejus quam FH habet ad BD, quod fieri non posse demonstratum est, non igitur ABCDL conus ad solidum aliquod majus cono EFGHN, triplicatam proportionem habet ejus quam BD ad FH. ostensum autem est neque ad minus. quare conus ABCDL ad EFGHN conum triplicatam proportionem habet ejus quam BD ad FH. ut autem conus ad conum, ita [e] cylindrus ad cylindrum. cylindrus enim in eadem existens basi in qua conus, & ipsi æque altus, coni [f] triplus est. cum ostensum sit omnem conum tertiam partem esse cylindri eandem quam ipse basim habentis, & æqualem altitudinem. ergo & cylindrus ad cylindrum triplicatam proportionem habebit ejus quam BD habet ad FH. Similes igitur coni & cylindri inter se sunt in triplicata proportione diametrorum quæ sunt in basibus. Quod demonstrare oportebat.

e 15. quinti.

f 10. hujus.

PROP. XIII. THEOR.

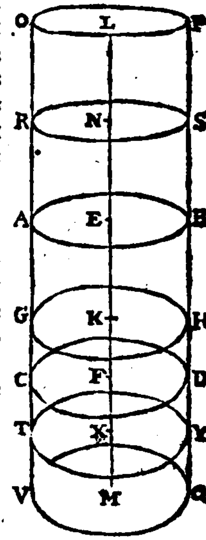
Si cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.



Cylindrus enim AD plano GH secetur oppositis planis AB CD parallelo, & occurrat axi EF in K puncto. dico ut BG cylindrus ad cylindrum GD, ita esse EK axem ad axem KF. producatur enim EF axis ex utraque parte ad puncta LM: & ipsi quidem EK axi ponantur æquales quotcunque EN NL; ipsi vero FK æquales quotcunque FX XM: & per puncta LNXM ducantur plana ipsis AB CD parallela, atque in planis per LNXM circa centra LNXM intelligantur circuli OP RS TY VQ æquales ipsis AB CD; & cylindri PR RB DT TQ intelligantur. quoniam igitur axes LN NE EK inter se sunt æquales, erunt cylindri PR RB BG inter se [a] ut bases; æquales autem sunt bases; ergo & cylindri PR RB BG sunt æquales. quod cum axes LN NE EK inter se

a 11. hujus.

se æquales sunt, itemque cylindri PR RB BG inter se æquales; sitque ipsorum LN NE EK multitudo æqualis multitudini ipsorum PR RB BG: quotuplex est axis KL ipsius EK axis, totuplex erit & PG cylindrus cylindri GB. eadem ratione & quotuplex est MK axis ipsius axis KF, totuplex est & QG cylindrus cylindri GD. & si quidem axis LK sit æqualis axi KM, erit & PG cylindrus cylindro GQ æqualis; si autem axis LK major sit axe KM, & cylindrus PG major erit cylindro GQ; & si minor minor. quatuor igitur existentibus magnitudinibus, videlicet axibus EK KF, & cylindris BG GD, sumpta sunt æque multiplicia, axis quidem EK, & BG cylindri, nempe axis KL, & cylindrus PG; axis vero KF, & cylindri GD æque multiplicia, axis scilicet KM, & GQ cylindrus, & demonstratum est si LK axis superat axem KM & PG cylindrum superare cylindrum GQ; & si æqualis æqualis; & si minor minor. est [b] igitur axis EK ad axem KF, ut BG cylindrus ad cylindrum GD. Quare si cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem Quod demonstrare oportebat.

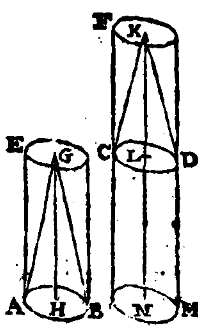


b 6. Diffin. quinti.

PROP. XIV. THEOR.

In æqualibus basibus existentes coni & cylindri, inter se sunt ut altitudines.

Sint enim in æqualibus basibus AB CD, cylindri EB FD. dico ut EB cylindrus ad cylindrum FD, ita esse GH axem ad axem KL. Producatur enim KL axis ad punctum N; ponaturque ipsi GH axi æqualis LN; & circa axem LN intelligatur cylindrus CM. quoniam igitur cylindri EB CM eandem habent altitudinem, inter se [a] sunt ut bases: bases autem sunt æquales. ergo & cylindri EB CM inter se æquales erunt. & quoniam cylindrus FM secatur plano CD, oppositis planis parallelo, erit [b] ut CM



a 11. hujus.

b 13. hujus.

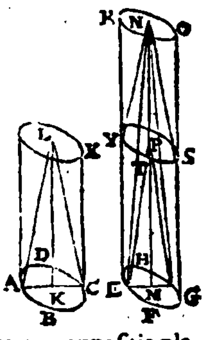
cylin-

cylindrus ad cylindrum F D, ita axis L N ad K L axem. æqualis autem est cylindrus quidem C M cylindro E B; axis vero L N axi G H. est igitur ut E B cylindrus ad cylindrum F D, ita axis G H ad K L axem: ut autem E B cylindrus ad cylindrum F D, it [c] A B G conus ad conum C D K; cylindri sunt enim conorum [d] tripli. ergo & ut G H axis ad axem K L, ita est A B G conus ad conum C D K, & cylindrus E B ad F D cylindrum. In basibus igitur æqualibus existentes coni & cylindri, inter se sunt ut altitudines. Quod demonstrare oportebat. c 15 quinti. d 10. hujus.

PROP. XV. THEOR.

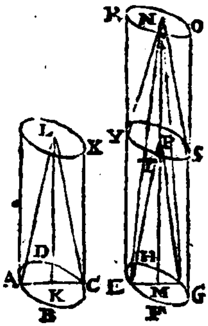
Æqualium conorum, & cylindrorum bases & altitudines reciproce sunt proportionales; & quorum conorum & cylindrorum bases & altitudines reciproce sunt proportionales, illi inter se sunt æquales.

Sint æquales coni & cylindri, quorum bases quidem A B C D E F G H circuli, & diametri ipsorum A C E G; axes autem K L M N; qui quidem & conorum vel cylindrorum sunt altitudines, & compleantur cylindri A X E O. dico cylindrorum A X E O bases & altitudines reciproce proportionales esse, hoc est ut A B C D basis ad basim E F G H, ita esse altitudinem M N ad altitudinem K L. altitudo enim K L vel æqualis est altitudini M N, vel non æqualis. Sit primo æqualis: atque est A X cylindrus æqualis cylindro E O. qui autem eandem habent altitudinem coni & cylindri inter se sunt [a] ut bases. æqualis igitur est basis A B C D basi E F G H. est igitur ut basis A B C D ad E F G H basim, ita M N altitudo ad altitudinem K L. non sit autem altitudo K L altitudini M N æqualis, sed major sit M N, & auferatur ab ipsa M N altitudini L K æqualis P M, & per P secetur E O cylindrus plano T Y S, oppositis planis circulorum E F G H R O parallelo, intelligaturque cylindrus E S cujus basis quidem E F G H circulus, altitudo autem P M. quoniam igitur A X cylindrus æqualis est cylindro E O, alius autem aliquis est cylindrus E S; erit ut A X cylindrus ad cylindrum E S, ita cyliudrus E O ad E S cylindrum. Sed ut A X cylindrus ad cylindrum E S, [a] ita basis A B C D ad E F G H basim; cylindri enim A X E S eandem habent altitudinem: ut autem cylindrus E O ad E S cylindrum a 11. hujus.



drum

a 13. hujus. drum a, ita M N altitudo ad altitudinem M P. nam cylindrus E O secatur plano T Y S, oppositis planis parallelo. est igitur ut A B C D basis ad basim E F G H, ita altitudo M N ad M P altitudinem. æqualis autem est M P altitudo altitudini K L. quare ut basis A B C D ad E F G H basim, ita M N altitudo ad altitudinem K L. æqualium igitur cylindrorum A X E O bases & altitudines reciproce sunt proportionales.



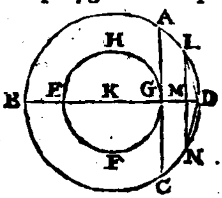
Sed si cylindrorum A X E O bases & altitudines sunt reciproce proportionales: hoc est ut A B C D basis ad basim E F G H, ita altitudo M N ad K L altitudinem. dico A X cylindrum cylindro E O æqualem esse. iisdem enim constructis; quoniam ut A B C D basis ad basim E F G H, ita altitudo M N ad K L altitudinem; altitudo autem K L æqualis est altitudini M P: erit ut A B C D basis ad basim E F G H, ita M N altitudo ad altitudinem M P.
b 11. hujus. sed ut A B C D basis ad basim E F G H, ita b A X cylindrus ad cylindrum E S; eandem enim habent altitudinem. ut autem M N altitudo ad altitudinem M P, ita a cylindrus E O ad E S cylindrum: est igitur ut A X cylindrus ad cylindrum E S, ita cylindrus E O ad E S cylindrum. cylindrus igitur A X cylindro E O est æqualis. similiter autem & in conis. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XVI. PROBL.

Duobus circulis circa idem centrum existentibus, in majori polygonum æqualium & numero parium laterum describere, quod minorem circulum non tangat.

Sint dati duo circuli A B C D E F G H circa idem centrum K. oportet in majori circulo A B C D polygonum æqualium & numero parium laterum describere, non tangens minorem circulum E F G H. ducatur per K centrum recta linea B D, atque à puncto G ipsi B D ad rectos angulos ducatur A G, & ad C producatur, & A C circulum E F G H a tangit.

a 16. tertii.



Itaque circumferentiam B A D bifariam secantes, & ejus dimidium rursus bifariam, & hoc semper facientes, tandem relinquemus

linquemus circumferentiam minorem ipsa A D. relinquatur, sitque L D: & à puncto L ad B D perpendicularis agatur L M, & ad N producatur, junganturque L D D N. ergo L D ipsi D N est [b] æqualis, & quoniam L N parallela est A C, & A C tangit circulum E F G H; ipsa L N circulum E F G H non tanget, & multo minus tangent circulum E F G H rectæ lineæ L D D N. quod si ipsi L D æquales deinceps circulo A B C D aptabimus, describetur in eo polygonum æqualium & numero parium laterum non tangens minorem circulum E F G H. Quod facere oportebat. [b] 29. tertii.

PROP. XVII. PROBL.

Duabus sphæris circa idem centrum existentibus, in majori solidum polyhedrum describere, quod minoris sphæræ superficiem non tangat.

Intelligantur duæ sphæræ circa idem centrum A. oportet in majori sphæra describere solidum polyhedrum minoris sphæræ superficiem non tangens.. secentur sphæræ plano aliquo per centrum ducto; sectiones erunt circuli, quoniam diametro manente & semicirculo circumducto sphæra facta [a] est; ergo in quacunque positione semicirculum intelligamus, quod per ipsum producitur planum in superficie sphæræ circulum efficiet, & constat circulum esse maximum, cum diameter sphæræ quæ & semicirculi diameter est, major [b] sit omnibus rectis lineis quæ in circulo vel sphæra ducuntur: sit igitur in majori quidem sphæra circulus B C D E, in minori autem circulus F G H, & ducantur ipsorum duæ diametri ad rectos inter se angulos B D Q E. occurrat B D minori circulo in G; ducatur à puncto G ipsi A G ad rectos angulos G L, & jungatur A L. itaque circumferentiam E B bifariam secantes, & dimidium ipsius bifariam atque hoc semper facientes, tandem relinquemus quandam circumferentiam minorem ea parte circumferentiæ circuli B C D, quæ subtenditur à recta æquali ipsi G L. relinquatur, sitque circumferentia B K. minor igitur est recta B K quam G L; eritque B K latus polygoni æqualium & parium numero laterum non tangentis minorem circulum. sint igitur polygoni latera in quadrante circuli B E, rectæ B K K L L M M E, & puncta K A producatur ad N: & à puncto A plano circuli B C D E ad rectos angulos [c] constituatur A X, quæ superficiei sphæræ in puncto X occurrat, & per A X & utramque ipsarum B D K N plana ducantur, quæ ex jam dictis efficient in superficie sphæræ maximos circulos. itaque efficiant, & sint in diametris B D

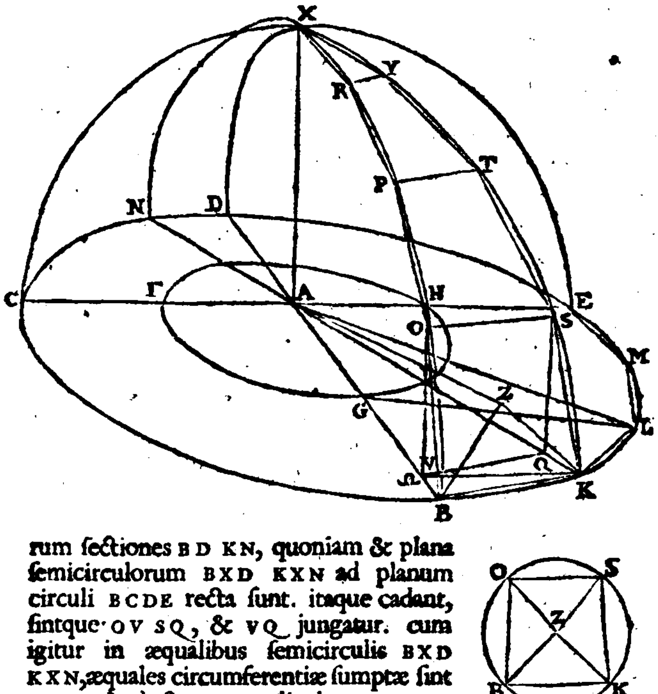
[a] Diffin. 14. undecimi.
[b] 15. tertii.
[c] 12. undecimi.

K N

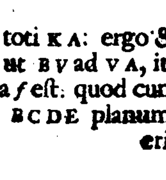
KN eorum semicirculi BXD BXN. quoniam igitur XA recta est ad planum circuli BCDE, erunt omnia plana quæ per

d 18. undecimi. ipsam XA transeunt, ad idem circuli planum d recta: quare & semicirculi BXD KXN recti sunt ad idem planum. & quoniam semicirculi BED BXD KXN æquales sunt, in æqualibus enim consistunt BD KN diametris; erunt & eorum quadrantes BE BX KX inter se æquales. quot igitur latera polygoni sunt in quadrante BE, tot erunt & in quadrantibus BX KX, æqualia ipsis BK KL LM ME. describantur, & sint BO OP PR RX KS ST TY YX: junganturque SO TP YR, & ab ipsis OS ad planum circuli BCDE

e 38. undecimi. perpendiculares ducantur. cadent hæ in e communes plano-



rum sectiones BD KN, quoniam & plana semicirculorum BXD KXN ad planum circuli BCDE recta sunt. itaque cadant, sintque OV SQ, & VQ jungatur. cum igitur in æqualibus semicirculis BXD KXN, æquales circumferentiæ sumptæ sint BO KS, & ductæ perpendiculares OV SQ, erit OV quidem ipsi SQ æqualis, BV vero



æqualis KQ. est autem & tota BA æqualis toti KA: ergo & reliqua VA reliquæ QA est æqualis. igitur ut BV ad VA, ita

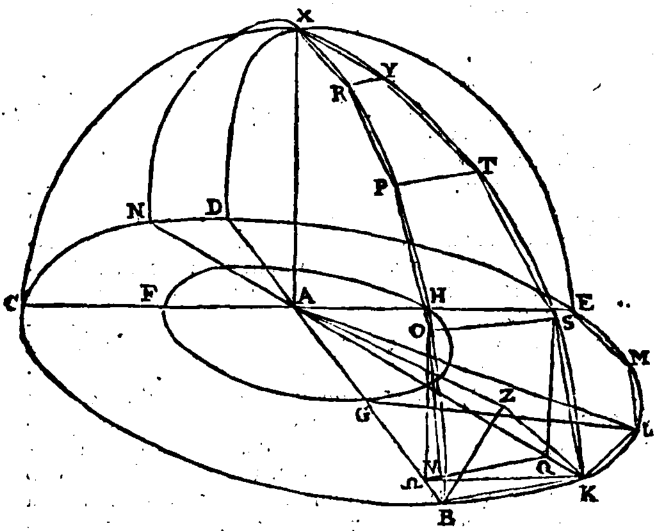
f 2. sexti. KQ ad QA: ideoque VQ ipsi BK parallela f est. quod cum utraque ipsarum OG SQ recta sit ad circuli BCDE planum, erit

erit OV ipsi SQ g parallela. ostensa autem est & ipsi æqualis. ergo QV SO æquales h sunt & parallelæ. & quoniam QV parallela est ipsi SO, sed & parallela ipsi KB; erit & i SO ipsi KB parallela: & ipsas conjungunt BO KS. ergo & KBOS quadrilaterum est in uno k plano: nam si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, & in utraque ipsarum quævis puncta sumantur, quæ dicta puncta conjungit recta linea in eodem est plano, in quo parallelæ. & eadem ratione utraque ipsorum quadrilaterorum SOPT TPRY in uno sunt plano. est autem in l uno plano & triangulum YRX. si igitur à punctis O S P T R Y ad A ductas rectas lineas intelligamus, constituetur quædam figura solida polyhedra inter circumferentias BX KX, ex pyramidibus composita, quarum bases quidem KBOS SOPT TPRY quadrilatera, & triangulum YRX; vertex autem punctum A. quòd si in unoquoque laterum KL LM ME, quemadmodum in KB eadem construamus, & in reliquis tribus quadrantibus, & in reliquo hemisphærio constituetur figura quædam polyhedra in sphæra descripta, & composita ex pyramidibus, quarum bases sunt quadrilatera jam dicta, & YRX triangulum, & quæ ejusdem ordinis sunt, vertex autem A punctum. dico dictam figuram polyhedram non tangere superficiem minoris sphæræ, in qua est circulus FGH. ducatur à m puncto A ad planum quadrilateri KBSO perpendicularis AZ, cui in puncto Z occurrat, & AZ ZK jungantur. itaque quoniam AZ recta est ad quadrilateri KBSO planum, & ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, & in eodem sunt plano n rectos angulos faciet. ergo AZ ad utramque ipsarum BZ ZK est perpendicularis. & quoniam AB est æqualis AK, erit & quadratum ex AB quadrato ex AK æquale, & sunt quadrato quidem ex AB æqualia o quadrata ex AZ ZB, angulus enim ad Z rectus est; quadrato autem ex AK æqualia ex AZ ZK quadrata. ergo quadrata ex AZ ZB quadratis ex AZ ZK æqualia sunt. commune auferatur quadratum ex AZ. reliquum igitur quod ex BZ reliquo quod ex ZK est æquale; ergo recta BZ rectæ ZK æqualis. Similiter ostendemus, & quæ à puncto Z ad puncta O S ducuntur utrique ipsarum BZ ZK æquales esse. circulus igitur centro Z & intervallo una ipsarum ZB ZK descriptus etiam per puncta O S transibit. & quoniam in circulo est BKSO quadrilaterum, & sunt æquales OB BK KS & minor OS, erit angulus BZK obtusus; ideoque BK major quam BZ, sed & GL quam BK est major, multo igitur major est GL quam BZ. & quadratum ex GL quadrato ex BZ majus. & cum æqualis sit AL ipsi AB, erit quadratum ex AL quadrato ex AB æquale;

g 6. undecimi.
h 33 primi.
i 9. undecimi.
k 7. undecimi.
l 2. undecimi.
m 11. undecimi.
n 3. diffin. undecimi.
o 47. primi.

 sed

ſed quadrato quidem ex A L æqualia ſunt quadrata ex A G G L, quadrato autem ex A B æqualia quadrata ex B Z Z A, quadrata igitur ex A G G L æqualia ſunt quadratis ex B Z Z A, quorum quadratum ex B Z minus eſt quadrato ex G L; ergo reliquum ex Z A quadratum majus eſt quadrato ex A G,



& ob id recta linea Z A major eſt recta A G, atque eſt A Z quidem ad unam polyhedri baſim, A G vero ad ſuperficiem perpendicularis, quare polyhedrum minoris ſphæræ ſuperficiem non tanget. Duabus igitur ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in majori ſolidum deſcriptum eſt minoris ſphæræ ſuperficiem non tangens. Quod facere oportebat.

Cor. Quod ſi etiam in altera ſphæra ſolido polyhedro deſcripto, in ſphæra B C D E ſimile ſolidum polyhedrum deſcribatur, habebit ſolidum polyhedrum in ſphæra B C D E ad ſolidum polyhedrum in altera ſphæra triplicatam proportionem ejus, quam diameter ſphæræ B C D E habet ad alterius ſphæræ diametrum. diviſis enim ſolidis in pyramides numero æquales, & ejuſdem ordinis: erunt pyramides ſimiles. ſimiles autem pyramides inter ſe in triplicata ſunt proportione homologorum laterum. ergo pyramis cujus baſis eſt K B O S quadrilaterum, vertex autem punctum A; ad pyramidem in altera ſphæra ejuſdem ordinis triplicatam proportionem habet ejus, quam latus homologum habet ad

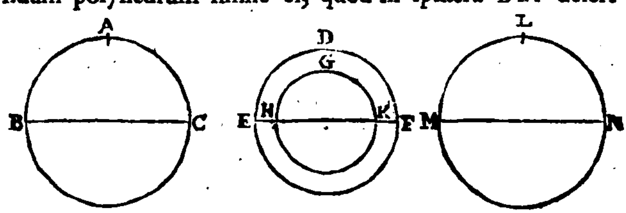
mologum

mologum latus; hoc eſt, quam habet A B ex centro ſphæræ circa centrum A exiſtentis ad eam, quæ eſt ex centro alterius ſphæræ. ſimiliter & unaquæque pyramis earum, quæ ſunt in ſphæra circa centrum A ad unamquamque pyramidum ejuſdem ordinis, quæ ſunt in altera ſphæra, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet A B ad eam, quæ eſt ex centro alterius ſphæræ. Et ut unum antecedentium ad unum conſequentium, ita antecedentia omnia ad omnia conſequentia. quare totum ſolidum polyhedrum, quod eſt in ſphæra circa centrum A, ad totum ſolidum polyhedrum, quod in altera ſphæra, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet A B ad eam, quæ eſt ex centro alterius ſphæræ, hoc eſt, quam habet B D diameter ad alterius ſphæræ diametrum.

PROP. XVIII. THEOR.

Sphæræ inter ſe in triplicata ſunt proportione ſuarum diametrorum.

Intelligantur ſphæræ A B C D E F; quarum diametri B C E F. dico A B C ſphæram ad ſphæram D E F triplicatam proportionem habere ejus, quam habet B C ad E F. Si enim non ita eſt, ſphæra A B C ad ſphæram minorem ipſa D E F, vel ad majorem, triplicatam proprotionem habebit ejus, quam habet B C ad E F. Habeat primo ad minorem, videlicet ad G H K. & intelligatur ſphæra D E F circa idem centrum, circa quod ſphæra G H K: deſcribaturque in majori ſphæra D E F ſolidum polyhedrum non tangens [a] minorem ſphæram G H K in ſuperficie; & in ſphæra A B C deſcribatur ſolidum polyhedrum ſimile ei, quod in ſphæra D E F deſcri- [a] 17. hujus.



ptum eſt. ſolidum igitur polyhedrum, quod in ſphæra A B C ad ſolidum polyhedrum, quod in ſphæra D E F triplicatam [b] proportionem habet ejus, quam B C ad E F. habet autem A B C ſphæra ad ſphæram G H K triplicatam proportionem ejus, quam B C ad E F. ergo ut A B C ſphæra ad ſphæram G H K, ita ſolidum polyhedrum in ſphæra A B C ad ſolidum polyhedrum in ſphæra D E F; & permutando, ut A B C [b] Corol antecedente.

 ſphæra

sphæra ad solidum polyhedrum, quod in ipsa est, ita GHK sphæra ad solidum polyhedrum, quod in sphæra DEF. major autem est sphæra ABC solido polyhedro, quod est in ipsa. ergo & GHK sphæra polyhedro, quod in sphæra DEF est major. sed & minor, ab ipso enim comprehenditur, quod fieri non potest. non igitur ABC sphæra ad sphæram minorem ipsa DEF triplicatam proportionem habet ejus, quam BC ad EF. similiter ostendemus neque DEF sphæram ad sphæram minorem ipsa ABC triplicatam habere proportionem ejus, quam habet EF ad BC. dico insuper sphæram ABC neque ad majorem sphæram ipsa DEF triplicatam proportionem habere ejus, quam BC ad EF. si enim fieri potest, habeat ad majorem LMN. invertendo igitur sphæra LMN ad ABC sphæram triplicatam proportionem habet ejus, quam diameter EF ad BC diametrum. ut autem sphæra LMN ad ABC sphæram, ita sphæra DEF ad sphæram quandam minorem ipsa ABC, quoniam sphæra LMN major est ipsa DEF. ergo & DEF sphæra ad sphæram minorem ipsa ABC triplicatam proportionem habet ejus, quam EF ad BC; quod fieri non posse ostensum est. non igitur ABC sphæra ad sphæram majorem ipsa DEF triplicatam proportionem habet ejus, quam BC ad EF. ostensum autem est neque ad minorem. ergo ABC sphæra ad sphæram DEF triplicatam proportionem habebit ejus, quam BC ad EF. Quod demonstrare oportebat.

FINIS.