Imprimatur,

ROG. MANDER

Vic. Can. *OXON.*

Novemb. 1. 1700.

9. 8

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBRI PRIORES SEX, ITEM UNDECIMUS & DUODECIMUS.

Ex Verſione Latina

FEDERICI COMMANDINI.

In uſum Juventutis Academicæ.

OXONIÆ,

E THEATRO SHELDONIANO.

Impenſis *Henr. Clements* Bibliopolæ *Oxonienſis.* MDCCI.

PRÆFATIO.

POST tot nova Geometriæ Elementa, non ita pridem in lucem emissa, est fortasse quod miretur Tyro Mathematicus, annosa hæc, & (ut quibusdam videntur) obsoleta Euclidis στοιχεῖα è prelo denuo prodire: præsertim cum non pauca in illis vitia detexisse sibi visi sint, qui Geometriam Elementarem novâ quadam methodo excolendam proponunt. Hi enim Lyncei Philosophi Euclidis Definitiones parum perspicuas, demonstrationes vix evidentes, res omnes malo ordine dispositas, aliasque mendas innumeras, per omnem antiquitatem ad sua usque tempora latentes, se invenisse jactant.

At tantorum virorum pace audacter assero, Euclidem ab iis immerito reprehensum esse, ejusque Definitiones distinctas & claras, è primis principiis & conceptibus nostris petitas esse; demonstrationes Elegantes perspicuas & concinnas; ratiocinandi vim adeo evidentem & nervosam, ut facile inducar credere obscuritatem istam à sciolis illis toties insimulatam, confusis potius & perplexis eorum ideis, quam demonstrationibus ipsis imputandam esse. Et utcunque nonnulli querantur de malâ rerum dispositione, & iniquo ordine, quem tenet Euclides, aliam tamen methodum magis idoneam, & discentibus faciliorem inter omnia hoc genus scripta invenio nullam.

a 2 Non

Non meum est hîc loci hypercriticis Horum captianculis sigillatim respondere: sed in his Elementis vel mediocriter versato, statim patebit, Calumniatores hos suam potius oscitantiam monstrare, quam veros in nostro authore lapsus arguere; imo ne hoc quidem dicere vereor, quod vix, & ne vix quidem unum, aut alterum è tot novis systematibus inveniri potest, in quibus plures non sunt labes, imo fœdiores paralogismi, quam in Euclidem vel fingere potuerunt.

Post tot infelices in Geometriâ reformandâ conatus, quidam non infimi Geometræ Elementa de novo construere non ausi, ipsum Euclidem omnibus aliis Elementorum Scriptoribus merito prætulerunt, eique edendo suas curas impenderunt; hi tamen ipsi nescio quibus opinionibus ducti, alias propositiones prorsus omittunt, aliarumque demonstrationes in pejus mutant. Inter hos eminent Tacquetus & Deschalles, quorum utrique malo quodam fato contigit, ut elegantes quasdam & in Elementis optimo jure ponendas propositiones quasi ineptas & inutiles rejecerint, quales sunt propositiones 27, 28, 29. libri sexti, cum aliis nonnullis quarum usus fortasse illos latebat. Insuper quandocunque ipsas Euclidis demonstrationes deserunt, multum in argumentando peccant, & à concinnitate Veterum recedunt.

In libro quinto demonstrationes Euclidis in totum repudiarunt, & Proportionis definitionem aliis terminis conceptam attulerunt; at quæ unam tantum è duabus proportionalium speciebus comprehendit, & quantitatibus commensurabilibus solammodo competit: nihilominus suas, quæ sunt de proportione, demonstrationes omni quantitati tam incommensurabili quam commensurabili in sequentibus libris applicant.

plicant. Hunc tam turpem lapsum nec Logici nec Geometræ facile condonassent, nisi hi authores in aliis suis scriptis de Scientiis Mathematicis benè meruissent. Hoc quidem commune est iis vitium cum omnibus hodiernis Elementorum Scriptoribus, qui in eundem impingunt scopulum, & ut suam in hac materia ostentent peritiam, authorem nostrum in re minime culpandâ imo laudandâ reprehendunt. Quantitatum proportionalium definitionem intelligo, in quâ intellectu facilem proportionalium proprietatem exponit, quæ quantitatibus omnibus tam incommensurabilibus quam commensurabilibus æque convenit, & à quâ cæteræ omnes proportionalium proprietates facile consequuntur.

Hujus proprietatis demonstrationem in Euclide desiderant Egregii hi Geometræ, atque defectum demonstratione suâ supplendum suscipiunt. Hic iterum contemplari licet insignem eorum in Logicâ peritiam, qui definitionis nominis demonstrationem expectant: talis enim est hæc Euclidis definitio, quæ illas quantitates proportionales vocat, quæ conditiones in definitione suâ allatas obtinent. Quidni primo Elementorum authori licebat quælibet nomina quantitatibus hæc requisita habentibus, arbitrio suo affigere? Licebat proculdubio, suo igitur utitur jure, & eas proportionales vocat.

Sed operæ pretium erit, methodum, quâ hanc proprietatem demonstrare conantur, perpendere. Affectionem quandam uni tantum proportionalium generi, viz. commensurabilium, congruentem assumunt; & exinde multis ambagibus longâque conclusionum serie universalem, quam Euclides posuit, proportionalium proprietatem deducunt; quod certe tam methodo

quam

quam argumentationis regulis satis alienum esse videtur. At longe rectius fecissent, si proprietatem universalem ab Euclide assignatam primo posuissent, & exinde particularem illam & uni tantum proportionalium speciei congruentem deduxissent. Quoniam vero hanc respuerunt methodum, talem demonstrationem ad finem hujus præfationis attexere libuit. Qui Euclidem ulterius defensum videre cupiunt, consulant eruditas & summo judicio conscriptas Lectiones Mathematicas Cl. Barovii an. 1666.

Cum vero tanti Geometræ incidit mentio, præterire non possum Elementa ab eo edita, in quibus plerumque ipsas Euclidis constructiones & demonstrationes retinet, ne unâ quidem omissâ propositione. Hinc oritur major in demonstrando vis, pulchrior construendi methodus, & ubique Veterum Geometrarum genius clarius elucescat, quam in libris istius generis fieri solet. Plura præterea Corollaria & Scholia adjecit, non modo breviori sequentium demonstrationi inservientia, verum etiam aliis in rebus perutilia.

Nihilominus demonstrationes ejus eâ brevitate laborant, tot symbolis notisque implicantur, ut in Geometriâ parum versato difficiles & obscuræ fiant. Multæ propositiones quæ ipsum Euclidem legenti perspicuæ viderentur, Algebraicâ hac demonstrandi methodo tyronibus nodosæ & vix intelligibiles redduntur, qualis est V. G. 13. *primi Elementi. Demonstrationum, quas in Elemento secundo attulit, difficilis admodum tyronibus est intelligentia; rectius multo Euclides ipse earum evidentiam (ut in re Geometricâ fieri debet) a figurarum contemplatione petit. Scientiarum omnium Elementa simplicissima* *methodo tradenda sunt, nec symbolis nec notis nec obscuris principiis aliunde petitis involvenda.*

Ut Elementa Barovii nimiâ brevitate, sic ea, quæ à Clavio traduntur, molestâ prolixitate peccant. Scholiis enim Commentariisque abundat nimis & luxuriat. Vix equidem arbitror Euclidem tam obscurum esse, ut tantâ farragine notarum indigeat; nec dubito quin tyrones omnes Euclidem ipsum omnibus suis Commentatoribus faciliorem inventuri sint. In demonstrationibus Geometricis ut nimia brevitas tenebras parit, sic nimia verbositas plus tædii & confusionis quam lucis affert.

Hisce præcipue inductus rationibus, prima sex Euclidis Elementa cum undecimo & duodecimo, ex versione Federici Commandini *in usum Juventutis Celeberrimæ hujus Academiæ per se edenda curavi, à cæteris abstinui, tum quia hæc, quæ jam damus, ad alias plerasque Matheseos partes, quæ nunc vulgo traduntur, intelligendas, sufficiant, tum etiam quia omnia Euclidis opera, quæ jam sub prelo sudant, brevi tempore nitidissimis Characteribus Græcis & Latinis adornata, summâque curâ & fide emendata è* Theatro Sheldoniano *prodibunt.*

THEO-

THEOREMA.

Si quatuor magnitudines sint proportionales, hoc est, conditiones habeant ab Euclide in definitione quintâ quinti libri positas, sitque prima secundæ commensurabilis, dico, quot partes prima continet secundæ, tot etiam similes partes quartæ tertiam continere.

Sint A B C D quatuor quantitates proportionales, sitque prima A æqualis quibuslibet partibus secundæ sc. sit æqualis quinque partibus quartis ipsius B, dico C etiam æqualem fore quinque partibus quartis ipsius D. Quoniam enim est ut A ad B ita C ad D erit alternando ut A ad C ita B ad D, ut autem B ad D ita 5B ad 5D & ut 5B ad 5D ita $\frac{5}{4}$B ad $\frac{5}{4}$D per 15 quinti, quare etiam ut A ad C ita $\frac{5}{4}$B ad $\frac{5}{4}$D, sed est prima A æqualis tertiæ $\frac{5}{4}$B. quare per 14. quinti, erit secunda C æqualis quartæ $\frac{5}{4}$D q.e.d. Universaliter sic; sint A B C D proportionales, sitque A æqualis $\frac{n}{m}$B, erit & C æqualis $\frac{n}{m}$D. Quoniam enim est A ad B ut C ad D, erit ut A ad C ita B ad D, ut autem B ad D ita per 15. quinti, nB ad nD, & per eandem est ut nB ad nD ita $\frac{n}{m}$B ad $\frac{n}{m}$D: quare erit ut A ad C ita $\frac{n}{m}$B ad $\frac{n}{m}$D; sed est prima A æqualis tertiæ $\frac{n}{m}$B, quare per 14. quinti erit secunda C æqualis $\frac{n}{m}$D. Q.E.D.

ALITER.

Sint A B C D proportionales, sitque A æqualis $\frac{n}{m}$B; dico fore C æqualem $\frac{n}{m}$D. Quoniam enim est A æqualis $\frac{n}{m}$B, erit mA æqualis ipsi nB. Sumantur jam ipsarum A & C primæ scil. & tertiæ æque multiplices mA & mC, item nB & nD æque multiplices ipsarum B & D. Cum igitur

igitur quatuor quantitates A B C D ſunt proportionales ſumptæque ſunt primæ A & tertiæ C æque multiplices mA mC, item ſecundæ B & quartæ D aliæ etiam æque multiplices, per definitionem quintam Elementi quinti ſi mA ſit major æqualis vel minor ipſâ nB, erit eodém modo mC æqualis major vel minor ipſâ nD, ſed eſt mA æqualis nB, quare erit & mC æqualis nD, ac proinde C æqualis $\frac{n}{m}D$. Quod erat demonſtrandum.

A	B	C	D
mA	nB	mC	nD

EUCLIDIS ELEMENTORUM.

LIBER PRIMUS.

DIFFINITIONES.

I.

Punctum est, cujus nulla est pars, vel quod magnitudinem nullam habet.

II.

Linea vero est longitudo latitudinis expers.

III.

Lineæ termini sunt puncta.

IV.

Recta linea est, quæ ex æquo suis interjicitur punctis.

V.

Superficies est id, quod longitudinem, & latitudinem tantum habet.

VI.

Superficiei termini sunt lineæ.

VII.

Plana superficies est quæ ex æquo suis interjicitur lineis.

VIII.

Planus angulus est duarum linearum in plano sese contingentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.

IX.

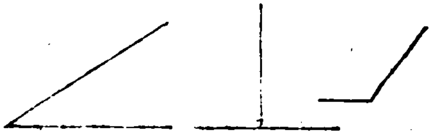
Quando autem quæ angulum continent rectæ lineæ fuerint, rectilineus angulus appellatur.

X.

Cum vero recta linea super rectâ lineâ insistens eos, qui deinceps sunt angulos æquales inter se fecerit, rectus est uterque æqualium angulorum : & quæ insistit recta linea perpendicularis vocatur ad eam, cui insistit.

XI.

Obtusus angulus est, qui major est recto.



XII.

Acutus autem, qui recto est minor.

XIII.

Terminus est, quod alicujus extremum est.

XIV.

Figura est, quæ aliquo, vel aliquibus terminis continetur.

XV.

Circulus est figura plana una linea contenta, quæ circumferentia appellatur : ad quam ab uno puncto intra figuram existente omnes rectæ lineæ pertingentes sunt æquales.

XVI.

Hoc autem punctum centrum circuli nuncupatur.

XVII.

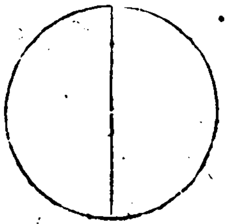
Diameter circuli est recta quædam linea per centrum ducta, & ex utraque parte à circumferentia circuli terminata, quæ quidem, & bifariam circulum secat.

XVIII.

Semicirculus est figura, quæ continetur diametro, & ea quæ ex ipsa circuli circumferentia intercipitur.

XIX.

Segmentum circuli est figura, quæ recta linea, & circuli circumferentia continetur.



XX.

Rectilineæ figuræ sunt, quæ rectis continentur lineis.

XXI.

Trilateræ quidem, quæ tribus.

XXII.

Quadrilateræ, quæ quatuor.

XXIII.

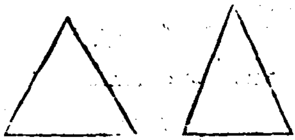
Multilateræ vero, quæ pluribus, quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.

XXIV.

Trilaterarum figurarum æquilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

XXV.

Isosceles, sive æquicrure, quod duo tantum æqualia latera habet.

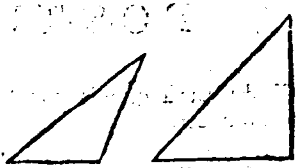


XXVI.

Scalenum vero est, quod tria inæqualia habet latera.

XXVII.

Ad hæc, trilaterarum figurarum, rectangulum quidem est triangulum, quod rectum angulum habet.



XXVIII.

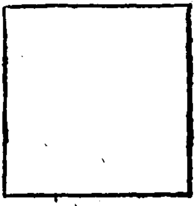
Obtusangulum est, quod obtusum habet angulum.

XXIX.

Acutangulum vero, quod tres acutos angulos habet.

XXX.

Quadrilaterarum figurarum quadratum est quod, & æquilaterum est, & rectangulum.



XXXI.

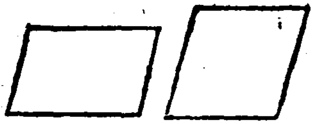
Altera parte longior figura est, quæ rectangula quidem æquilatera vero non est.

XXXII.

Rhombus, quæ æquilatera quidem, sed rectangula non est.

XXXIII.

Rhomboides, quæ, & opposita latera, & oppositos angulos inter se æquales habet, neque æquilatera est, neque rectangula.



XXXIV.

Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ trapezia vocentur.

XXXV.

Parallelæ, seu æquidistantes rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sint plano, & ex utraque parte in infinitum producantur, in neutram partem inter se conveniunt.

POSTULATA.

I.

Postuletur à quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.

II.

Rectam lineam terminatam in continuum, & directum producere.

III.

Quovis centro, & intervallo circulum describere.

AXIOMATA.

I.

Quæ eidem æqualia, & inter se sunt æqualia.

II.

Et si æqualibus æqualia adjiciantur tota sunt æqualia.

III.

Et si ab æqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt æqualia.

IV.

Et si inæqualibus æqualia adjiciantur, tota sunt inæqualia.

V.

Et si ab inæqualibns æqualia auferantur, reliqua sunt inæqualia.

VI.

Et quæ ejusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia.

VII.

Et quæ ejusdem dimidia sunt, inter se sunt æqualia.

VIII.

Et quæ sibi mutuo congruunt, inter se sunt æqualia.

IX.

Totum est sua parte majus.

X.

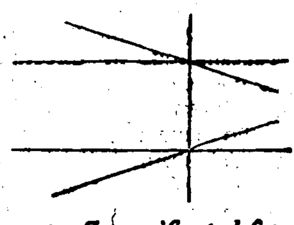
Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

XI.

Omnes anguli recti inter se æquales sunt.

XII.

Et si in duas rectas lineas recta linea incidens interiores, & ex eadem parte angulos duobus rectis minores fecerit, rectæ lineæ illæ in infinitum productæ, inter se conveniunt ex ea parte, in qua sunt anguli duobus rectis minores.



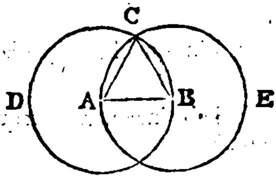
Not. *Cum plures anguli ad unum punctum existunt designatur quilibet tribus literis quarum illa quæ est ad verticem anguli in medio ponitur,* V.G. *in figura Prop.* 13. *libri primi angulus à rectis* AB, BC *comprehensus dicitur angulus* ABC *&* *angulus à rectis* AB, BE *contentus dicitur angulus* ABE.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Super data rectâ lineâ terminatâ, triangulum æquilaterum constituere.

Sit data recta linea terminata A B oportet super ipsa A B triangulum æquilaterum constituere. Centro quidem A intervallo autem A B circulus describatur B C D [a]. Et rursus centro B, intervalloque B A describatur circulus A C E [a], & à puncto C, in quo circuli se invicem secant ad A B ducantur rectæ lineæ C A C B [b]. Quoniam igitur A centrum est circuli D B C, erit A C ipsi A B æqualis, [c] rursus quoniam B circuli C A E est centrum, erit B C æqualis B A ostensa est autem, & C A æqualis A B. utraque igitur ipsarum C A C B ipsi A B est æqualis. Quæ autem eidem sunt æqualia, & inter se æqualia sunt. Ergo C A ipsi C B est æqualis. tres igitur C A A B B C inter se sunt æquales; ac propterea triangulum æquilaterum est A B C, & constitutum est super data recta linea terminata A B, quod fecisse oportebat.

a 3. Post.
b 1 Post.
c 15. def.

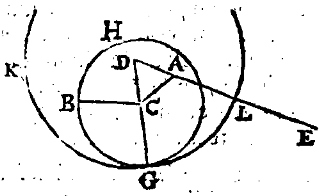


PROP. II. PROBL.

Ad datum punctum datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea B C oportet ad A punctum ipsi B C rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere. Ducatur à puncto A ad C recta linea A C [a]: & super ipsâ constituatur triangulum æquilaterum D A C [b]. producanturque in directum ipsis D A D C rectæ lineæ A E C G [c]. & centro quidem C, intervallo autem B C circulus B G H describatur [d]. Rursusque centro D, & intervallo D G describatur circulus G K L. Quoniam igitur punctum C centrum est B G H circuli, erit B C ipsi C G æqualis [e]. Et rursus quoniam D centrum est circuli G K L, erit D L æqualis D G: quarum D A est æqualis D C. reliqua igitur A L reliquæ G C est æqualis [f]. Ostensa autem

a Postul. 1.
b Prima hujus.
c Postul. 2.
d 3. Post.
e Diffin. 15.
f Axiom. 3.

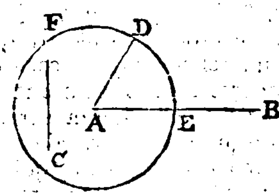


autem est BC æqualis CG. Quare utraque ipsarum AL BC est æqualis ipsi CG. Quæ autem eidem æqualia sunt, & inter se sunt æqualia. Ergo, & AL est æqualis BC. Ad datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ BC æqualis posita est AL. Quod facere oportebat.

PROP. III. PROBL.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus à majori minori æqualem abscindere.

Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB & C; quarum major sit AB. oportet à majori AB minori C æqualem rectam lineam abscindere. Ponatur ad A punctum ipsi C æqualis recta linea AD [a], & centro quidem A, intervallo autem AD circulus describatur DEF [b]. Et quoniam A centrum est DEF circuli, erit AE ipsi AD æqualis. Sed & C æqualis AD. Utraque igitur ipsarum AE C ipsi AD æqualis erit. Quare & AE ipsi C est æqualis [c]. Duabus igitur datis rectis lineis inæqualibus AB C à majori AB minori C æqualis Abscissa est AE. Quod fecisse oportebat.

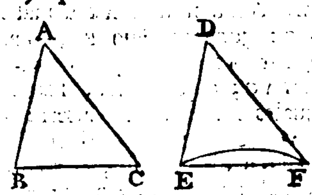


a Per antecedentem.
b post. 3.
c Axiom. 1.

PROP. IV. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem, & angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi æqualem habebunt; & triangulum triangulo æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri; quibus æqualia latera subtenduntur.

Sint duo triangula ABC DEF, quæ duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem AB lateri DE æquale, latus vero AC ipsi DF; & angulum BAC angulo EDF æqualem. Dico, & basim BC basi EF æqualem esse, & triangulum ABC æquale triangulo DEF, & reliquos angulos reliquis angulis æquales,



æquales, alterum alteri; quibus æqualia latera subtenduntur, nempe angulum ABC angulo DEF: & angulum ACB angulo DFE. Triangulo enim ABC applicato ipsi DEF, & puncto quidem A posito in D recta vero linea AB in ipsa DE: & punctum B puncto E congruet; quod AB ipsi DE sit æqualis. Congruente autem AB ipsi DE; congruet, & AC recta linea rectæ lineæ DF cum angulus BAC sit æqualis angulo EDF. Quare, & C congruet ipsi F: est enim recta linea AC æqualis rectæ DF. Sed, & punctum B congruebat puncto E. Ergo, & basis BC basi EF congruet. Nam si puncto quidem B congruente ipsi E, C vero ipsi F; basis BC basi EF non congruit; duæ rectæ lineæ spatium comprehendent: quod [a] fieri non potest. Congruet igitur BC basis, basi EF, & ipsi æqualis erit. Quare, & totum ABC triangulum congruet toti triangulo DEF, & ipsi erit æquale; & reliqui anguli reliquis angulis congruent, & ipsis æquales [b] erunt. Videlicet angulus ABC angulo DEF, & angulus ACB angulo DFE. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant. alterum alteri, habeant autem & angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi æqualem habebunt; & triangulum triangulo æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur: quod ostendere oportebat.

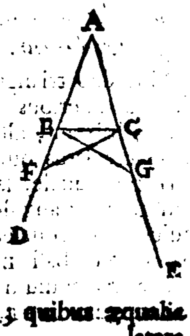
a Ax. 10.

b Axiom. 8.

PROP. V. THEOR.

Isoscelium triangulorum qui ad basim sunt anguli inter se sunt æquales, & productis æqualibus rectis lineis anguli qui sunt sub basi inter se æquales erunt.

Sit isosceles triangulum ABC; habens AB latus lateri AC æquale, & producantur in directum ipsis AB AC rectæ lineæ BD CE. Dico angulum quidem ABC angulo ACB, angulum vero CBD angulo BCE æqualem esse. Sumatur enim in linea BD, quodvis punctum F: atque à majori AE minori AF æqualis [a] auferatur AG: junganturque FC, GB. Quoniam igitur AF est æqualis AG; AB vero ipsi AC; duæ FA AC, duabus GA AB æquales sunt, altera alteri; & angulum FAG communem continent, basis igitur FC basi GB est [b] æqualis, & triangulum AFC æquale triangulo AGB; & reliqui anguli, reliquis angulis æquales erunt, alter alteri; quibus æqualia latera



a 3. hujus.

b 4. hujus.

latera subtenduntur: Videlicet angulus quidem ACF æqualis angulo ABG; angulus vero AFC; angulo AGB. Et quoniam tota AF, toti AG est æqualis; quarum AB est æqualis AC; erit [c] & reliqua BF reliquæ CG æqualis. Ostensa est autem FC æqualis GB. duæ igitur BF, FC duabus CG GB æquales sunt, altera alteri; & angulus BFC æqualis angulo CGB; estque basis ipsorum BC communis. Ergo & triangulum BFC triangulo CGB æquale erit; & reliquli anguli reliquis angulis æquales, alter alteri; quibus æqualia latera subtenduntur. Angulus igitur FBC est æqualis angulo GCB; & angulus BCF angulo CBG. Itaque quoniam totus ABG angulus toti angulo ACF æqualis ostensus est, quorum angulus CBG est æqualis ipsi BCF: erit reliquus [d] ABC reliquo ACB æqualis: & sunt ad basim ABC trianguli: ostensus autem est & FBC angulus æqualis angulo GCB; qui sunt sub basi. Isoscelium igitur triangulorum, qui ad basim anguli inter se sunt æquales, & productis æqualibus rectis lineis anguli, qui sunt sub basi inter se æquales erunt. Quod ostendisse oportebat.

c Axiom. 3.

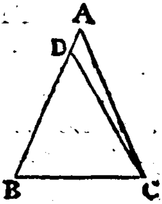
d Axiom. 3.

Cor. Hinc omne triangulum æquilaterum est quoque æquiangulum.

PROP. VI. THEOR.

Si trianguli duo anguli inter se sint æquales, & æquales angulos subtendentia latera inter se æqualia erunt.

Sit triangulum ABC, habens angulum ABC angulo ACB æqualem. Dico & AB latus lateri AC æquale esse; si enim inæqualis est AB ipsi AC; altera ipsarum est major. Sit major AB; atque à majori AB minori AC æqualis [a] auferatur DB; & DC jungatur. Quoniam igitur DB est æqualis ipsi AC; communis autem BC: erunt duæ DB BC duabus AC CB æquales, altera alteri; & angulus DBC æqualis angulo ACB ex hyp. Basis igitur DC basi AB est [b] æqualis, & triangulum DBC æquale triangulo ACB, minus majori; quod est absurdum. Non igitur inæqualis est AB ipsi AC. Ergo æqualis erit. Si igitur trianguli duo anguli inter se sint æquales, & æquales angulos subtendentia latera inter se æqualia erunt: quod monstrasse oportuit.



a 3. hujus.

b 4. hujus.

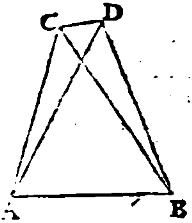
Cor. Hinc omne triangulum æquiangulum est quoque æquilaterum.

PRO-

PROP. VII. THEOR.

In eadem recta linea duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri non constituentur ad aliud, atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes.

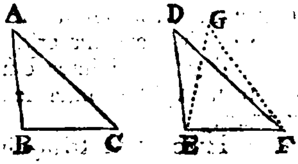
Si enim fieri potest, in eadem recta linea A B duabus eisdem rectis, lineis A C C B aliæ duæ rectæ lineæ A D D B æquales, altera alteri constituantur ad aliud, atque aliud punctum C D; ad easdem partes ut ad C D, eosdem habentes terminos A B, quos primæ rectæ lineæ, ita ut C A quidem sit æqualis D A, eundem, quem ipsa terminum, habens A; C B vero sit æqualis D B, eundem habens B terminum; & C D jungatur. Itaque quoniam A C est æqualis A D; erit, a 5. hujus & angulus A C D angulo A D C æqualis a. Major igitur est A D C angulus angulo B C D. Quare angulus B D C angulo B C D multo major erit. Rursus quoniam C B est æqualis D B & angulus B D C æqualis erit angulo B C D: ostensus autem est ipso multo major; quod fieri non potest. Non igitur in eadem recta linea duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri constituentur ad aliud, atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes; quod ostendisse oportebat.



PROP. VIII. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem, & basim basi æqualem; angulum quoque, qui æqualibus lateribus continetur angulo æqualem habebunt.

Sint duo triangula A B C, D E F, quæ duo latera A B, A C duobus lateribus D E D F æqualia habeant alterum alteri; ut sit A B quidem æquale D E; A C vero ipsi D F; habeant autem, & basim B C basi E F æqualem.



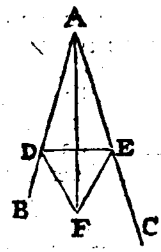
Dico

Dico angulum quoque B A C angulo E D F æqualem esse. Triangulo enim A B C applicato ipsi D E F triangulo, & puncto quidem B posito in E; recta vero linea B C in E F: congruet, & C punctum puncto F, quoniam B C ipsi E F est æqualis. Itaque congruente B C ipsi E F; congruent & B A A C ipsis E D D F. si enim basis quidem B C basi E F congruit; latera autem B A A C lateribus E D D F non congruunt, sed situm mutent; ut E G G F: constituentur in eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis, aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri; ad aliud atque aliud punctum; ad easdem partes; eosdem habentes terminos. non constituuntur autem; ut demonstratum [a] est. non igitur, si basis B C congruit basi E F, non congruent & B A A C latera lateribus E D D F. congruent igitur. Quare & angulus B A C angulo E D F congruet, & ipsi erit æqualis. Si igitur duo triangula, duo latera, duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem & basim basi æqualem: angulum quoque æqualibus lateribus contentum angulo æqualem habebunt: quod demonstrare oportebat.

[a] per 7. hujus.

PROP. IX. PROBL.

Datum angulum rectilineum bifariam secare.



Sit datus angulus rectilineus B A C. itaque oportet ipsum bifariam secare. Sumatur in linea A B quodvis punctum D; & à linea A C ipsi A D æqualis [a] auferatur A E; junctaque D E constituatur super ea [b] triangulum æquilaterum D E F; & A F jungatur. Dico angulum B A C à recta linea A F bifariam secari. Quoniam enim A D est æqualis A E; communis autem A F: duæ D A A F duabus E A A F æquales sunt, altera alteri; & basis D F æqualis basi E F angulus [c] igitur D A F angulo E A F est æqualis. quare datus angulus rectilineus B A C à recta linea A F bifariam sectus est: quod facere oportebat.

[a] 3. hujus.
[b] 1. hujus.
[c] 8. hujus.

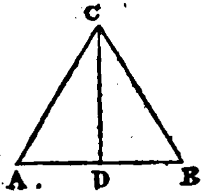
PROP. X. PROBL.

Datam rectam lineam terminatam bifariam secare.

Sit data recta linea terminata A B oportet ipsam A B bifariam secare. constituatur super [a] ea triangulum æquilaterum A B C; &

[a] 1. hujus.

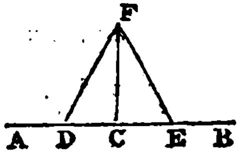
b 9. hujus. & secetur ACB angulus [b] bifariam recta linea CD. Dico AB rectam lineam in puncto D bifariam secari. Quoniam enim AC est æqualis CB; communis autem CD; duæ AC CD duabus BC CD æquales sunt; altera alteri; & angulus ACD æqualis angulo BCD. basis igitur c 4. hujus. AD basi BD est [c] æqualis. Et ob id recta linea terminata AB bifariam secta est in puncto D: quod facere oportebat.



PROP. XI. PROBL.

Datæ rectæ lineæ à puncto in ipsa dato ad rectos angulos rectam lineam ducere.

Sit data recta linea AB, & datum in ipsa punctum C. oportet à puncto C ipsi AB ad rectos angulos rectam lineam ducere. Sumatur in AC quodvis punctum D: ipsique CD æ- a 3. hujus. qualis [a] ponatur CE, & super DE b 1. hujus. constituatur [b] triangulum æquilaterum FDE, & FC jungatur. Dico datæ rectæ lineæ AB à puncto C in ipsa dato, ad rectos angulos ductam esse FC. Quoniam enim DC est æqualis CE, & FC communis; erunt duæ DC CF duabus EC CF æquales, altera alteri; & basis DF est æqualis basi FE. angulus igitur DCF angulo ECF est æqualis, & sunt deinceps. Quando autem recta linea super rectam lineam insistens, eos qui deinceps sunt, angulos æ- c Diff. 10. quales inter se fecerit: rectus [c] est uterque æqualium angulorum. ergo uterque ipsorum DCF FCE est rectus. Datæ igitur rectæ lineæ AB à puncto in ipsa dato C ad rectos angulos ducta est FC recta linea. Quod fecisse oportuit.

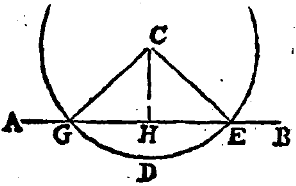


PROP. XII. PROBL.

Super data recta linea infinita, à dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit data quidem recta linea infinita AB, datum vero punctum C, quod in ea non est. Oportet super data recta linea

linea infinita A B, à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere. Sumatur enim ad alteras partes ipsius A B rectæ lineæ quodvis punctum D: & centro quidem C, intervallo autem C D circulus [a] describatur E D G: & E G in H bifariam [b] secetur: junganturque C G C H C E. Dico super data recta linea infinita A B, à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularem C H ductam esse. Quoniam enim æqualis est G H ipsi H E, communis autem H C, duæ G H H C, duabus E H H C æquales sunt, alter alteri; & basis C G est æqualis basi C E. Angulus igitur C H G angulo E H C est [c] æqualis, & sunt deinceps, cum autem recta linea super rectam lineam insistens eos, qui deinceps sunt angulos, æquales inter se fecerit; rectus [d] est uterque æqualium angulorum & quæ insistit recta linea perpendicularis appellatur ad eam, cui insistit. ergo super data recta linea infinita A B à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularis ducta est C H. Quod facere oportebat.

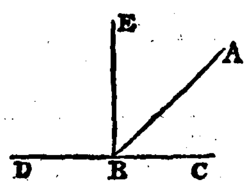


a Postul. 3.
b 10. hujus.
c 8. hujus.
d Diffin. 10.

PROP. XIII. THEOR.

Cum recta linea super rectam consistens lineam angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet.

Recta enim linea quædam A B super rectam C D consistens angulos faciat C B A A B D. Dico C B A A B D angulos; vel duos rectos esse, vel duobus rectis æquales, si enim C B A est æqualis ipsi A B D: duo recti [a] sunt; sin minus, ducatur à puncto B ipsi C D ad rectos [b] angulos B E. anguli igitur C B E E B D sunt duo recti. Et quoniam C B E, duobus C B A A B E est æqualis, communis apponatur E B D: ergo anguli C B E E B D tribus angulis C B A A B E E B D sunt [c] æquales. Rursus quoniam D B A angulus est æqualis duobus D B E E B A, communis apponatur A B C. anguli igitur D B A A B C tribus D B E E B A A B C æquales sunt. At ostensum est angulos quoque C B E E B D eisdem tribus æquales esse: quæ vero eidem sunt æqualia, [d] & inter se æqualia sunt: ergo & anguli C B E E B D ipsis D B A A B C sunt æquales, suntque C B E E B D duo recti anguli



a Diffin. 10.
b 11. hujus.
c Axiom. 2.
d Axiom. 1.

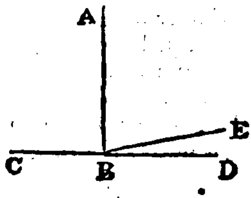
anguli igitur DBA ABC duobus rectis æquales erunt, ergo cum recta linea super rectam lineam consistens angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XIV. THEOR.

Si ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duæ rectæ lineæ non ad easdem partes positæ, angulos qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt.

Ad aliquam enim rectam lineam AB, atque ad punctum in ea B, duæ rectæ lineæ BC BD non ad easdem partes positæ angulos, qui deinceps sunt, ABC ABD duobus rectis æquales faciant. Dico BD ipsi CB in directum esse. si enim BD non est in directum ipsi CB, sit ipsi CB in directum BE. Quoniam igitur recta linea AB super rectam CBE consistit; anguli ABC ABE[a] duobus rectis sunt æquales. Sed & anguli ABC ABD sunt æquales duobus rectis. Anguli igitur CBA ABE ipsis CBA ABD æquales erunt. Communis auferatur ABC. Ergo reliquus ABE reliquo ABD est æqualis, minor majori quod fieri non potest. Non igitur BE est in directum ipsi BC. Similiter ostendemus neque aliam quampiam esse, præter BD. Ergo CB ipsi BD in directum erit. Si igitur ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duæ rectæ lineæ non ad easdem partes positæ angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint, ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt. Quod demonstrare oportebat.

[a] 13. hujus.

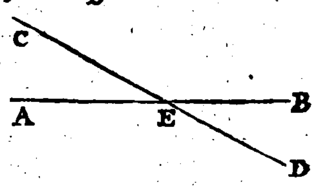


PROP. XV. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ se invicem secuerint, angulos qui ad verticem sunt, inter se æquales efficient.

Duæ enim rectæ lineæ AB CD se invicem secent in puncto E. Dico angulum quidem AEC angulo DEB; angulum vero CEB angulo AED æqualem esse. Quoniam enim recta linea AE super rectam CD consistens angulos facit CEA AED; erunt hi[a] duobus rectis æquales.

[a] 13. hujus.



æquales. Rurſus quoniam recta linea DE ſuper rectam AB conſiſtens facit angulos AED DEB; erunt AED DEB anguli æquales [a] duobus rectis. Oſtenſum autem eſt angulos quoque CEA AED duobus rectis eſſe æquales. Anguli igitur CEA AED angulis AED DEB æquales ſunt. Communis auferatur AED. Ergo reliquus [b] CEA reliquo BED eſt æqualis. *b Axiom. 3.* Simili ratione, & anguli CEB DEA æquales oſtenduntur. Si igitur duæ rectæ lineæ ſe invicem ſecuerint, angulos, qui ad verticem ſunt, æquales efficient. Quod oſtendere oportebat.

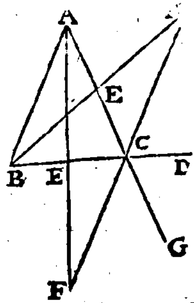
Cor. 1. Ex hoc manifeſte conſtat duas rectas lineas ſe invicem ſecantes, facere angulos ad ſectionem quatuor rectis æquales.

Cor. 2. Omnes anguli circa unum punctum conſtituti conficiunt angulos quatuor rectis æquales.

PROP. XVI. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto exterior angulus utrovis interiore, & oppoſito eſt major.

Sit triangulum ABC, & unum ipſius latus BC ad D producatur. Dico exteriorem angulum ACD utrovis interiore, & oppoſito, videlicet CBA, & BAC majorem eſſe. Secetur enim AC bifariam [a] in E, & juncta *a 10. hujus.* BE producatur ad F; ponaturque ipſi BE æqualis EF. Jungatur præterea FC, & ducta AC ad G producatur. Quoniam igitur AE quidem eſt æqualis EC, BE vero ipſi EF, duæ AE EB duabus CE EF æquales ſunt, altera alteri: & angulus AEB angulo FEC eſt æqualis [b], ad verticem enim ſunt. *b 15. hujus.* Baſis igitur AB æqualis [c] eſt *c 4. hujus.* baſi FC; & ABE triangulum triangulo FEC & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur.



Ergo angulus BAE eſt æqualis angulo ECF. Sed ECD angulus major eſt ipſo ECF. Major igitur eſt angulus ACD angulo BAE. Similiter recta linea BC bifariam ſecta, oſtendetur etiam BCG angulus, hoc eſt ACD angulus angulo ABC major. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus utrovis interiore, & oppoſito major eſt. Quod oportebat demonſtrare.

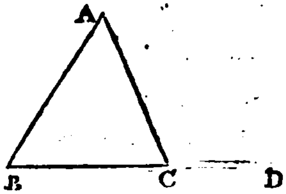
PROPO-

PROP. XVII. THEOR.

Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocunque sumpti.

Sit triangulum ABC. Dico ipsius ABC trianguli duos angulos quomodocunque sumptos duobus rectis minores esse. Producatur enim BC ad D. Et quoniam trianguli ABC exterior angulus ACD major [a] est interiore, & opposito ABC: communis apponatur ACB. Anguli igitur ACD, ACB angulis ABC ACB majores sunt. Sed ACD ACB sunt [b] æquales duobus rectis. Ergo ABC BCA duobus rectis sunt minores. Similiter demonstrabimus angulos quoque BAC ACB itemque CAB ABC duobus rectis minores esse. Omnis igitur trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt; quomodocunque sumpti. Quod demonstrare oportebat.

[a] 16. hujus.
[b] 13. hujus.

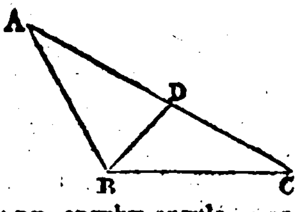


PROP. XVIII. THEOR.

Omnis trianguli majus latus majorem angulum subtendit.

Sit triangulum ABC habens latus AC latere AB majus. Dico, & ABC angulum angulo BCA majorem esse. Quoniam enim AC major est, quam AB, ponatur ipsi AB æqualis AD; & BD jungatur. Et quoniam trianguli BDC exterior angulus est ADB, erit is major [a] interiore, & opposito DCB. Sed ADB æqualis [b] est ipsi ABD, quòd & latus AB lateri AD sit æquale, major igitur est & ABD angulus angulo ACB, quare ABC ipso ACB multo major erit. Omnis igitur trianguli majus latus majorem angulum subtendit: quod oportebat demonstrare.

[a] 16. hujus.
[b] 5. hujus.



PROP. XIX. THEOR.

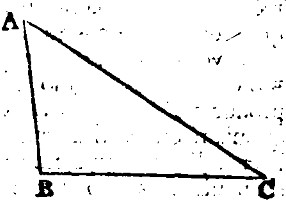
Omnis trianguli major angulus majus latus subtendit.

Sit triangulum ABC majorem habens ABC angulum angulo BCA. Dico & latus AC latere AB majus esse. Si enim

non

non est majus; vel AC est æquale ipsi AB, vel ipso minus, æquale igitur non est, nam & angulus ABC angulo ACB æqualis [a] esset; non est autem. Non igitur AC ipsi AB est æquale. Sed neque minus. esset enim & angulus ABC angulo ACB minor [b]. atque non est, non igitur AC minus est ipso AB. Ostensum autem est neque æquale esse: ergo AC ipso AB est majus. Omnis igitur trianguli major angulus majus latus subtendit. Quod oportebat demonstrare.

a 5. hujus.
b 18. hujus.

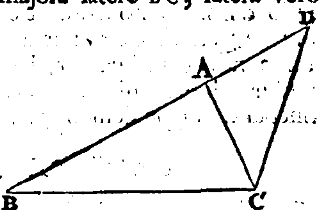


PROP. XX. THEOR.

Omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta.

Sit enim triangulum ABC. Dico ipsius ABC trianguli duo latera reliquo majora esse, quomodocunque sumpta: videlicet latera quidem BA AC majora latere BC; latera vero AB BC majora latere AC: & latera BC CA majora ipso AB producatur enim BA ad punctum D; ponaturque ipsi CA æqualis AD [a]; & DC jungatur. quoniam igitur DA est æqualis AC erit & angulus ADC angulo ACD æqualis [b]. Sed BCD angulus major est angulo ACD. Angulus igitur BCD angulo ADC est major; Et quoniam triangulum est DCB habens BCD angulum majorem angulo BDC: majorem autem angulum majus latus subtendit [c]: erit latus DB latere BC majus. sed DB est æquale ipsis BA AC. quare latera BA AC ipso BC majora sunt. similiter ostendemus, & latera quidem AB BC majora esse latere CA: latera vero BC CA ipso AB majora. Omnis igitur trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta. Quod ostendere oportebat.

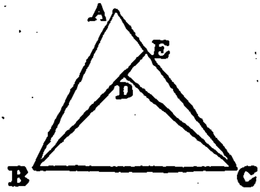
a 3. hujus.
b 5. hujus.
c 19. hujus.



PROP. XXI. THEOR.

Si à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra constituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt.

Trianguli enim ABC in uno latere BC à terminis BC duæ rectæ lineæ intra constituantur BD DC. Dico BD DC reliquis duobus trianguli lateribus BA AC minores quidem esse, vero continere angulum BDC majorem angulo BAC. producatur enim BD ad E. & quoniam omnis triangnli duo latera reliquo sunt majora [a] erunt trianguli ABE duo latera BA AE majora latere BE. communis apponatur EC. ergo BA AC ipsis BE EC majora [b] sunt. rursus quoniam CED trianguli duo latera CE ED sunt majora latere CD, communis apponatur DB. quare CE EB ipsis CD DB sunt majora [b]. Sed ostensum est BA AC majora esse BE EC. multo igitur BA AC ipsis BD DC majora sunt. rursus quoniam omnis trianguli exterior angulus interiore & opposito est major [c]: erit trianguli CDE exterior angulus BDC major ipso CED. Eadem ratione & trianguli ABE exterior angulus CEB ipso BAC est major [c] sed angulus BDC ostensus est major angulo CEB. multo igitur BDC angulus angulo BAC major erit. Quare si à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra constituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt. Quod demonstrare oportebat.

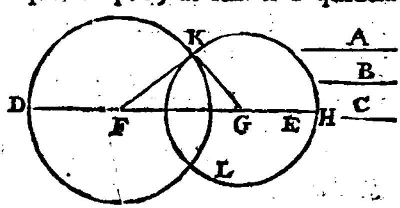


[a] 20. hujus.
[b] Axiom. 4
[c] 16. hujus.

PROP. XXII. PROBL.

Ex tribus rectis lineis, quæ tribus rectis lineis datis æquales sint, triangulum constituere. Oportet autem duas reliqua majores esse, quomodocunque sumptas; quoniam omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta.

Sint tres datæ rectæ lineæ A B C, quarum duæ reliqua majores sint, quomodocunque sumptæ, ut scil. A B quidem sint majores quam C, A C vero majores quàm B, & præterea B C majores quàm A. Iraque oportet ex rectis lineis æqualibus ipsis A B C triangulum constituere exponatur aliqua recta linea DE, terminata quidem ad D, infinita vero ad E, & ponatur



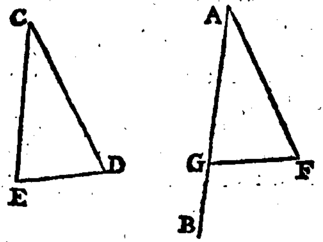
ponatur ipsi quidem A æqualis [a] DF, ipsi vero B æqualis FG, & ipsi C æqualis GH: & centro F, intervallo autem FD circulus [b] describatur DKL. rursusque centro G, & intervallo GH alius circulus KLH describatur, & jungantur KF KG. Dico ex tribus rectis lineis æqualibus ipsis A B C triangulum KFG constitutum esse. quoniam enim punctum F centrum est DKL circuli; erit FD æqualis [c] FK. sed FD est æqualis A. Ergo & FK ipsi A est æqualis. rursus quoniam punctum G centrum est circuli LKH, erit GH æqualis [c] GK. sed GH est æqualis C. ergo & GK ipsi C æqualis erit. est autem & FG æqualis B: tres igitur rectæ lineæ KF FG GK tribus A B C æquales sunt. Quare ex tribus rectis lineis KF FG GK, quæ sunt æquales tribus datis rectis lineis A B C, triangulum constitutum est KFG. Quod facere oportebat.

[a] 3. hujus. [b] 3. Postul. [c] diffin. 15.

PROP. XXIII. PROBL.

Ad datam rectam lineam, & ad datum in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

Sit data quidem recta linea AB, datum vero in ipsa punctum A; & datus angulus rectilineus DCE. Oportet igitur ad datam rectam lineam AB, & ad datum in ea punctum A dato angulo rectilineo DCE, æqualem angulum rectilineum constituere. sumatur in utraque ipsarum CD CE quævis puncta D E, ducaturque DE, & ex tribus rectis lineis, quæ æquales sint tribus CD DE EC triangulum [a] constituatur AFG, ita ut CD sit æqualis AF, & CE ipsi AG, & DE ipsi FG. Itaque quoniam duæ DC CE duabus FA AG æquales sunt, altera alteri, & basis DE est æqualis basi FG: erit, & angulus DCE angulo FAG æqualis [b]. Ad datam igitur rectam lineam AB, & ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo DCE æqualis angulus rectilineus constitutus est FAG. Quod facere oportebat.



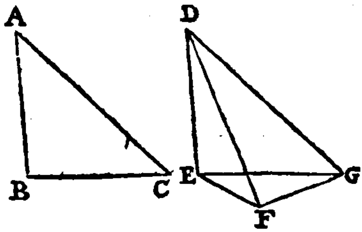
[a] 22. hujus. [b] 8. hujus.

PROP. XXIV. PROBL.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo majorem,

rem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi majorem habebunt.

Sint duo triangula ABC DEF, quæ duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant, alterum alteri; videlicet latus quidem AB æquale lateri DE; latus vero AC æquale DF: At angulus BAC angulo EDF sit major. Dico, & basim BC basi EF majorem esse. quoniam enim angulus BAC major est angulo



a 23. hujus. EDF, constituatur [a] ad rectam lineam DE; & ad punctum in ea D, angulo BAC æqualis an-
b 3. hujus. gulus EDG, ponaturque alterutri ipsarum AC DF æqualis [b] DG, & GE FG jungantur. itaque quoniam AB quidem est æqualis DE, AC vero ipsi DG; duæ BA AC duabus ED DG æquales sunt, altera alteri; & angulus BAC est æqualis an-
c 4. hujus. gulo EDG. ergo basis BC basi EG est [c] æqualis. rursus quoniam
d 5. hujus. æqualis est DG ipsi DF; & angulus DFG angulo DGF [d] æqualis: erit DFG angulus angulo EGF major. multo igitur major est EFG angulus ipso EGF. & quoniam triangulum est EFG, angulum EFG majorem habens angulo EGF; majori
e 19. hujus. autem angulo latus majus subtenditur [e]; erit, & latus EG latere EF majus. sed EG latus est æquale lateri BC. Ergo, & BC ipso EF majus erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo majorem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi majorem habebunt. Quod oportebat demonstrare.

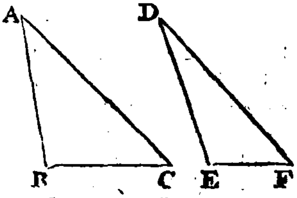
PROP. XXV. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi majorem; & angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, majorem habebunt.

Sint duo triangula ABC DEF, quæ duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus AB æquale lateri DE, & latus AC lateri DF: basis autem BC basi EF sit major. Dico, & angulum

BAC

BAC angulo EDF majorem esse. Si enim non est major, vel æqualis est, vel minor. Æqualis autem non est angulus BAC angulo EDF: esset enim, & basis BC basi EF æqualis [a]. Non est autem. Non igitur æqualis est BAC angulus angulo EDF. Sed neque minor. minor enim esset [b], & basis BC basi EF. Atqui non est. Non igitur angulus BAC angulo EDF est minor. ostensum autem est neque esse æqualem. Ergo angulus BAC angulo EDF necessario major erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi majorem; & angulum angulo qui æqualibus lateribus continetur, majorem habebunt. Quod demonstrare oportebat.



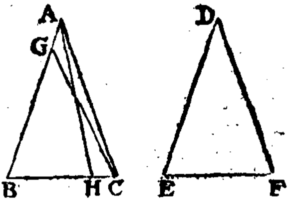
[a] 4. hujus.

[b] 24. hujus.

PROP. XXVI. THEOR.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum subtenditur; & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

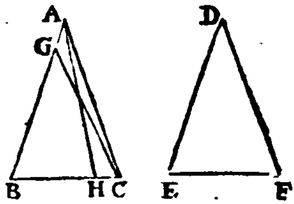
Sint duo triangula ABC DEF, quæ duos angulos ABC BCA duobus angulis DEF EFD æquales habeant, alterum alteri, videlicet angulum quidem ABC æqualem angulo DEF; angulum vero BCA angulo EFD. Habeant autem, & unum latus uni lateri æquale, & primo quod æqualibus adjacet angulis; nempe latus BC lateri EF. Dico, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habere, alterum alteri, latus. s. AB lateri DE; & latus AC ipsi DF, & reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF æqualem. Si enim inæqualis est AB ipsi DE, una ipsarum major est. Sit major AB, ponaturque GB æqualis DE; & GC jungatur. Quoniam igitur BG quidem est æqualis DE, BC vero ipsi EF, duæ GB, BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri: & angulus GBC æqualis angulo DEF. basis igitur GC basi DF est [a] æqualis: & GBC triangulum triangulo DEF, & reliqui



[a] 4. hujus.

liqui

liqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo GCB angulus est æqualis angulo DFE. sed angulus DFE angulo BCA æqualis ponitur. quare, & BCG angulus angulo BCA est æqualis, minor majori, quod fieri non potest. non igitur inæqualis est AB ipsi DE. ergo æqualis erit. est autem, & BC æqualis EF. Itaque duæ AB BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri, & angulus ABC æqualis angulo DEF. Basis
a 4. hujus. igitur AC basi [a] DF, & reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF est æqualis. Sed rursus sint latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur æqualia, ut AB ipsi DE. Dico rursus, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia esse; AC quidem ipsi DF, BC vero ipsi EF: & ad huc reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF æqualem. Si enim inæqualis est BC ipsi EF, una ipsarum major est. Sit major BC, si fieri



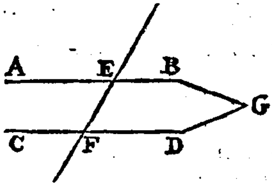
potest, ponaturque BH æqualis EF, & AH jungatur. Quoniam igitur BH quidem est æqualis EF, AB vero ipsi DE; duæ AB BH duabus DE EF æquales sunt, altera alteri, & angulos æquales continent. ergo [a] basis AH basi DF est æqualis: & ABH triangulum triangulo DEF & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. Æqualis igitur est angulus BHA an-
b ex hyp. gulo EFD. sed EFD est æqualis [b] angulo BCA. Ergo, & BHA angulus angulo BCA est æqualis. triangulo igitur AHC exterior angulus BHA æqualis est interiori & op-
c 16. hujus. posito BAC, quod fieri non potest [c]. quare non inæqualis est BC ipsi EF. æqualis igitur. est autem, & AB æqualis DE. duæ igitur AB BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri: angulosque æquales continent. quare basis AC æqualis est basi DF, & ABC triangulum triangulo DEF, & reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF est æqualis. Si igitur duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum subtenditur; & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt, Quod oportebat demonstrare.

PROP.

PROP. XXVII. THEOR.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ erunt rectæ lineæ.

In duas enim rectas lineas A B C D, recta linea E F incidens alternos angulos A E F E F D æquales inter se faciat, dico rectam lineam A B ipsi C D parallelam esse. Si enim non est parallela, productæ A B C D, vel ad partes B D convenient, vel ad partes A C producantur, conveniantque ad partes B D in puncto G. itaque G E F trianguli exterior angulus A E F major [a] est interiore & opposito E F G. sed & æqualis [b], quod fieri non potest. non igitur A B C D productæ ad partes B D convenient. similiter demonstrabitur neque convenire ad partes A C. quæ vero in neutra partes conveniunt, parallelæ [c] inter se sunt. parallela igitur est A B ipsi C D. Quare si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ inter se erunt rectæ lineæ, quod ostendere oportebat.

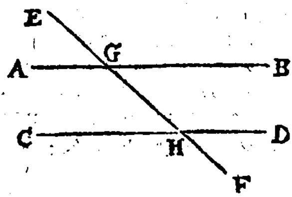


a 16. hujus.
b ex hyp.
c Diffin. 35.

PROP. XXVIII. THEOR.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem fecerit, vel interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter se rectæ lineæ.

In duas enim rectas lineas A B C D recta linea E F incidens exteriorem angulum E G B interiori, & opposito G H D æqualem faciat; vel interiores. & ad easdem partes B G H G H D, duobus rectis æquales. dico rectam lineam A B rectæ C D parallelam esse. Quoniam enim E G B angulus æqualis est [a] angulo G H D, angulus autem E G B angulo A G H [b], erit & angulus A G H angulo G H D æqualis; & sunt alterni. parallela igitur est A B ipsi C D [c]. rursus quoniam anguli B G H G H D duobus rectis sunt æquale [a], & sunt A G H B G H æquales



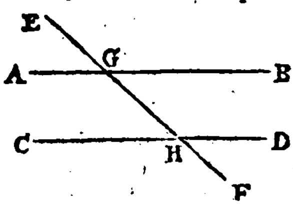
a Ex hyp.
b 15. hujus.
c Ex antecedente.

d 13. hujus quales duobus rectis [d]: erunt anguli AGH BGH angulis BGH GHD æquales. communis auferatur BGH. reliquus igitur AGH est æqualis reliquo GHD: & sunt alterni. ergo AB ipsi CD parallela erit. Si igitur in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem fecerit, vel interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter se rectæ lineæ. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIX. THEOR.

In parallelas rectas lineas recta linea incidens, & alternos angulos inter se æquales, & exteriorem interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem, & interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales efficiet.

In parallelas enim rectas lineas AB CD recta linea incidat EF. dico alternos angulos AGH GHD inter se æquales efficere, & exteriorem EGB interiori, & ad easdem partes GHD æqualem: & interiores, & ad easdem partes BGH GHD duobus rectis æquales. si enim inæqualis est AGH ipsi GHD, unus ipsorum major est. sit major AGH. & quoniam AGH angulus major est angulo GHD; communis apponatur BGH. anguli igitur AGH BGH angulis BGH GHD majores sunt.



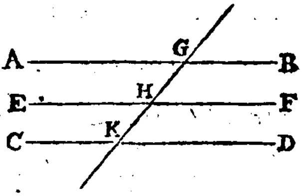
a 13. hujus. sed anguli AGH BGH sunt æquales duobus rectis [a]. ergo BGH GHD anguli sunt duobus rectis minores. quæ vero à minoribus, quam sint duo recti in infinitum producuntur
b Axiom. 12 rectæ lineæ inter se conveniunt [b]. ergo rectæ lineæ AB CD in infinitum productæ convenient inter se. atqui non conveniunt cum parallelæ ponantur. non igitur inæqualis est AGH angulus angulo GHD. quare necessario est æqualis.
c 15. hujus. angulus autem AGH æqualis est angulo EGB [c]. ergo, & EGB ipsi GHD æqualis erit. communis apponatur BGH. anguli igitur EGB BGH sunt æquales angulis BGH GHD. sed EGB BGH æquales sunt duobus rectis. Ergo, & BGH GHD duobus rectis æquales erunt. In parallelas igitur rectas lineas recta linea incidens, & alternos angulos inter se æquales, & exteriorem interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem; & interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales efficiet. Quod oportebat demonstrare.

PROP.

PROP. XXX. THEOR.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, & inter se parallelæ erunt.

Sit utraque ipsarum AB CD ipsi EF parallela. dico & AB ipsi CD parallelam esse. Incidat enim in ipsas recta linea GK. & quoniam in parallelas rectas lineas AB EF, recta linea GK incidit, angulus AGH angulo GHF est æqualis [a]. rursus quoniam in parallelas rectas lineas EF CD, recta linea incidit GK, æqualis est GHF angulus angulo GKD [a]. ostensus autem est, & angulus AGK angulo GHF æqualis. ergo, & AGK ipsi GKD æqualis erit. & sunt alterni. parallela igitur est AB ipsi CD [b]. ergo quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, & inter se parallelæ erunt. Quod oportebat demonstrare.



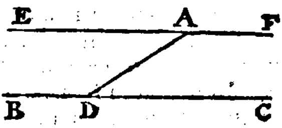
a 29. hujus.

b 27. hujus.

PROP. XXXI. PROBL.

Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea BC oportet per A punctum ipsi BC rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere. Sumatur in BC quodvis punctum D, & jungatur AD: constituaturque [a] ad rectam lineam DA, & ad punctum in ipsa A, angulo ADC æqualis angulus DAE: & in directum ipsi EA recta linea AF producatur. quoniam igitur in duas rectas lineas BC EF recta linea AD incidens alternos angulos EAD ADC inter se æquales efficit, EF ipsi BC parallela erit [b]. per datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ BC parallela ducta est recta linea EAF. quod facere oportebat.



a 23. hujus.

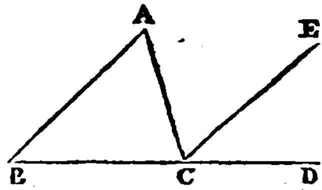
b 27. hujus.

PROP. XXXII. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus, & oppositis est æqualis, & trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt.

Sit

Sit triangulum ABC: & unum ipsius latus BC in D producatur. dico angulum exteriorem ACD duobus interioribus, & oppositis CAB ABC æqualem esse; & trianguli tres interiores angulos ABC BCA CAB duobus rectis esse æquales. ducatur [a] enim per punctum C ipsi AB rectæ lineæ parallela CE. & quoniam AB ipsi CE parallela est, & in ipsas incidit AC, alterni anguli BAC ACE inter se æquales sunt [b]. rursus quoniam AB parallela est CE & in ipsas



incidit recta linea BD, exterior angulus ECD interiori, & opposito ABC est æqualis [b]. ostensus autem est angulus ACE æqualis angulo BAC. quare totus ACD exterior angulus æqualis est duobus interioribus, & oppositis BAC ABC. communis apponatur ACB. anguli igitur ACD ACB tribus ABC BAC ACB æquales sunt. sed anguli ACD ACB sunt æquales [c] duobus rectis. ergo & ACB CBA CAB duobus rectis æquales erunt. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus, & oppositis est æqualis; & trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt. Quod demonstrare oportebat.

a 31 hujus.
b 29. hujus.
c 13. hujus.

COROLLARIA.

1. Omnes tres anguli cujusque trianguli simul sumpti æquales sunt tribus angulis cujusque alterius trianguli simul sumptis.

2. Si in uno triangulo duo anguli aut singuli aut simul æquales sunt duobus angulis alterius trianguli erit reliquus angulus reliquo æqualis.

3. In triangulo si unus angulus rectus sit, reliqui simul unnm rectum conficiunt.

4. In triangulo Isoscele si angulus æquis cruribus contentus rectus sit reliqui ad basim sunt semirecti.

5. In triangulo æquilatero angulus quilibet æqualis est $\frac{1}{3}$ duorum rectorum vel $\frac{2}{3}$ unius recti.

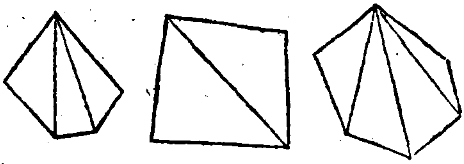
THEOREMA I.

Omnes simul interiores anguli cujuscunque figuræ rectilineæ conficiunt bis tot rectos demptis quatuor quot sunt latera figuræ.

Nam figura una quæque rectilinea resolvi potest in triangula binario pauciora quam sunt ipsius figuræ latera, V. G. *si quatuor latera habet resolvitur in duo triangula si quinque in*

tria

tria triangula si sex in quatuor & sic deinceps; quare per præcedentem omnes horum triangulorum anguli æquantur bis tot rectis quot sunt triangula, sed omnes horum triangulorum



anguli æquales sunt angulis figuræ interioribus; quare omnes anguli interiores figuræ æquales sunt bis tot rectis quot sunt triangula, hoc est bis tot rectis demptis quatuor quot sunt latera figuræ. Q. E. D.

THEOR. II.

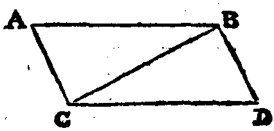
Omnes simul exteriores anguli cujusque figuræ rectilineæ conficiunt quatuor rectos.

Nam exteriores simul cum interioribus conficiunt, bis tot rectos quot sunt latera figuræ; vero ex præcedente Theor. omnes interiores soli conficiunt, bis tot rectos demptis quatuor quot sunt latera figuræ quare exteriores conficiunt quatuor rectos. Q. E. D.

PROP. XXXIII. THEOR.

Quæ æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, & ipsæ æquales, & parallelæ sunt.

Sint æquales, & parallelæ AB CD: & ipsas conjungant ad easdem partes rectæ lineæ AC BD. dico AC BD æquales, & parallelas esse. ducatur enim BC. & quoniam AB parallela est CD: in ipsasque incidit BC. alterni anguli ABC BCD æquales sunt a. rursus quoniam AB est æqualis CD, communis autem BC, duæ AB BC duabus BC CD sunt æquales; & angulus ABC æqualis angulo BCD. basis igitur AC basi BD est æqualis b: triangulumque ABC triangulo BCD; & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo angulus ACB angulo CBD est æqualis. & quoniam in duas rectas lineas AC BD recta linea BC incidens, alternos angulos ACB CBD æquales



a 29. hujus.
b 4. hujus.

les

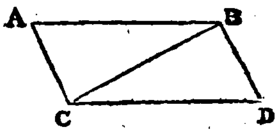
c 27. hujus. les inter se efficiet, parallela est AC ipsi BD c. Ostensa autem est & ipsi æqualis. Quæ igitur æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, & ipsæ æquales, & parallelæ sunt. Quod oportebat demonstrare.

Diffin. *Parallelogrammum est figura quadrilatera cujus bina opposita latera sunt parallela.*

PROP. XXXIV. THEOR.

Parallelogrammorum spatiorum latera, quæ ex opposito, & anguli, inter se æqualia sunt; & diameter ea bifariam secat.

Sit parallelogrammum ABDC, cujus diameter BC. dico ACDB parallelogrammi latera, quæ ex opposito, & angulos inter se æqualia esse; & diametrum BC ipsum bifariam secare. Quoniam enim parallela est AB ipsi CD, & in ipsas incidit recta linea BC; anguli alterni ABC BCD inter se æquales sunt a. rursus quoniam AC ipsi BD parallela est, & in ipsas incidit BC; alterni anguli ACB CBD æquales sunt
a 29. hujus. inter se a. duo igitur triangula sunt ABC CBD, quæ duos angulos ABC BCA duobus angulis BCD CBD æquales habent, alterum alteri: & unum latus uni lateri æquale, scil. quod
b 26. hujus. est ad æquales angulos, utrique commune BC. ergo, b & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem. æquale igitur est latus quidem AB lateri CD: latus vero AC ipsi BD, & angulus BAC angulo BDC æqualis. & quoniam angulus ABC est æqualis angulo BCD; & angulus CBD angulo ACB; erit totus angulus ABD æqualis toti ACD. ostensus autem est, & angulus BAC angulo BDC æqualis. parallelogrammorum igitur spatiorum latera, quæ ex opposito, & anguli, inter se æqualia sunt. dico etiam diametrum ea bifariam secare. quoniam enim æqualis est AB ipsi CD communis autem BC. duæ AB BC duabus DC CB æquales sunt, altera alteri & angulus ABC æqualis est angulo BCD.
c 4. hujus. basis igitur c AC basi DB æqualis. quare, & triangulum ABC triangulo BCD æquale erit. ergo diameter BC parallelogrammum ACDB bifariam secat. Quod oportebat demonstrare.

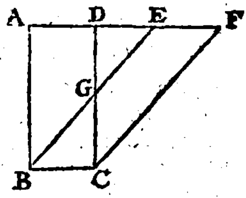


PROP.

PROP. XXXV. THEOR.

Parallelogramma super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se æqualia sunt.

Sint parallelogramma ABCD EBCF super eadem basi BC, & in eisdem parallelis AF BC constituta. dico ABCD parallelogrammo EBCF æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est ABCD, æqualis [a] est AD ipsi BC. eadem quoque ratione, & EF est æqualis BC. quare &, AD ipsi EF æqualis erit [b]: & communis DE. tota igitur AE [c] toti DF est æqualis. est autem, & AB æqualis DC. ergo duæ EA AB duabus FD DC æquales sunt, altera alteri, & angulus FDC æqualis angulo EAB, exterior interiori [d], basis igitur EB basi FC est [e] æqualis, & EAB triangulum æquale triangulo FDC. commune auferatur DGE. reliquum igitur trapezium ABGD reliquo trapezio EGCF est æquale [f]. commune apponatur GBC triangulum. ergo totum parallelogrammum ABCD toti parallelogrammo EBCF æquale erit. Parallelogramma igitur super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare.

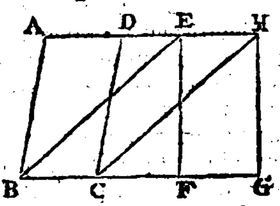


a 34. hujus.
b Axiom. 1.
c Axiom. 2.
d 29. hujus.
e 4. hujus.
f Axiom. 3.

PROP. XXXVI. THEOR.

Parallelogramma super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt.

Sint parallelogramma ABCD EFGH super æqualibus basibus BC FG, & in eisdem parallelis AH BG constituta. dico parallelogrammum ABCD parallelogrammo EFGH æquale esse. Conjungantur enim BE CH. & quoniam æqualis [a] est BC ipsi FG & FG æqualis ipsi EH; erit & BC ipsi EH æqualis. suntque parallelæ, & ipsas conjungunt BE CH. quæ autem æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt, æquales, & parallelæ sunt [b]. ergo EB, CH & æquales sunt, & parallelæ: quare EB CH parallelogrammum est, & æquale parallelogrammo ABCD [c]; basim enim eandem habet BC, &



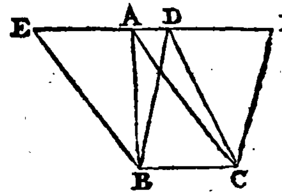
a Hyp.
b 33. hujus.
c 35. hujus.

& in eisdem parallelis BC, AD constituitur. simili ratione, & EFGH parallelogrammum eidem parallelogrammo EBCH est æquale. ergo parallelogrammum ABCD parallelogrammo EFGH æquale erit. Parallelogramma igitur super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta inter se sunt æqualia. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXXVII. THEOR.

Triangula super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt.

Sint triangula ABC DBC super eadem basi BC, & in eisdem parallelis AD BC constituta. dico ABC triangulum triangulo DBC æquale esse. Producatur AD ex utraque parte in E F puncta: & per B quidem ipsi CA parallela ducatur BE, a per C vero ipsi BD parallela CF parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum EBCA DBCF, & parallelogrammum EBCA est æquale c parallelogrammo DBCF, etenim super eadem sunt basi EC, & in eisdem parallelis BC EF, estque parallelogrammi quidem EBCA dimidium b ABC triangulum, cum diameter AB ipsum bifariam secet: parallelogrammi vero DBCF dimidium b triangulum DBC; diameter enim DC ipsum bifariam secat. quæ autem c æqualium dimidia inter se æqualia sunt. ergo triangulum ABC triangulo DBC est æquale. Triangula igitur super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare.

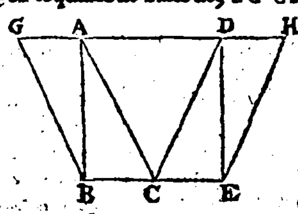


a 31. hujus.
c 35. hujus.
b 34. hujus.
c Axiom. 7.

PROP. XXXVIII. THEOR.

Triangula super basibus, æqualibus, & in eisdem parallelis constituta inter se sunt æqualia.

Sint triangula ABC DCE super æqualibus basibus, BC CE, & in eisdem parallelis BE AD constituta. dico ABC triangulum DCE æquale esse. Producatur enim AD ex utraque parte in G H puncta: & per B quidem ipsi CA parallela ducatur BG a: per E vero ducatur EH parallela ipsi DC a. parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum GBCA DCEH. atque



a 31. hujus.

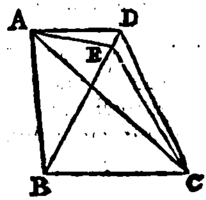
atque est parallelogrammum G B C A æquale [b] parallelogrammo D C E H: in æqualibus enim sunt basibus B C C E, & in eisdem B E G H parallelis. parallelogrammi vero G B C A dimidium [c] est A B C triangulum, nam diameter A B ipsum bifariam secat. & parallelogrammi D C E H dimidium [c] est triangulum D C E, diameter enim D E ipsum secat bifariam. quæ autem æqualium dimidia [d], inter se æqualia sunt. ergo A B C triangulum triangulo D C E est æquale. Triangula igitur super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.

b 36. hujus.
c 34. hujus.
d Axiom. 7.

PROP. XXXIX. THEOR.

Triangula æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis.

Sint æqualia triangula A B C D B C super eadem basi B C constituta, & ad easdem partes. dico, & in eisdem parallelis esse. ducatur enim A D. dico A D parallelam esse ipsi B C. Si enim non est parallela, ducatur [a] per A punctum ipsi B C parallela recta linea A E, & E C ducatur. æquale igitur est A B C triangulum triangulo E B C [b], super eadem enim est basi B C, & in eisdem B C, A E parallelis. sed A B C triangulum triangulo D B C [c] est æquale. ergo & triangulum D B C æquale est ipsi E B C triangulo, majus minori, quod fieri non potest. non igitur A E ipsi B C parallela est. similiter ostendemus neque aliam quampiam parallelam esse, præter ipsam A D. ergo A D ipsi est parallela. Triangula igitur æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta in eisdem quoque sunt parallelis. Quod oportebat demonstrare.



a 31. hujus.
b 37. hujus.
c Ex hyp.

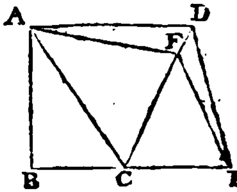
PROP. XL. THEOR.

Triangula æqualia super basibus æqualibus, & ad easdem partes constituta in eisdem quoque sunt parallelis.

Sint æqualia triangula A B C C D E super æqualibus basibus B C C E constituta. dico etiam in eisdem esse parallelis. ducatur enim A D. dico A D ipsi B E parallelam esse. Nam si non est, ducatur per A ipsi B E parallela A F, [a] & F E ducatur.

a 31. hujus.

b 38. hujus. catur. triangulum igitur ABC triangulo FCE est æquale b, cum super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis BE AF constituantur. sed triangulum ABC æquale est triangulo DCE. ergo & triangulum DCE triangulo FCE æquale erit, majus minori, quod fieri non potest. non igitur AF ipsi BE est parallela. similiter demonstrabimus neque aliam quampiam parallelam esse, præter AD. ergo AD ipsi BE parallela erit. Æqualia igitur triangula super basibus æqualibus, & ad easdem partes constituta, etiam in eisdem sunt parallelis. Quod demonstrare oportebat.



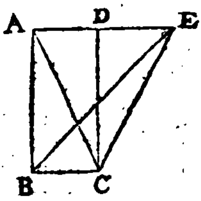
PROP. XLI. THEOR.

Si parallelogrammum, & triangulum eandem basim habeant in eisdemque sint parallelis; parallelogrammum ipsius trianguli duplum erit.

Parallelogrammum enim ABCD, & triangulum EBC, basim habeant eandem BC, & in eisdem sint parallelis BC AE. dico parallelogrammum ABCD trianguli EBC duplum esse. Jungatur enim AC. triangulum igitur ABC triangulo EBC est æquale a; namque super eadem basi BC, & in eisdem BC AE parallelis constituuntur. sed ABCD parallelogrammum duplum est trianguli ABC b, cum diameter AC ipsum bifariam secet. quare & ipsius EBC trianguli duplum erit. Si igitur parallelogrammum, & triangulum eandem basim habeant, & in eisdem sint parallelis; duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli. Quod demonstare oportebat.

a 37. hujus.

b 34. hujus.



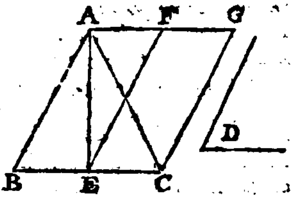
PROP. XLII. PROBL.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum triangulum ABC, datus autem rectilineus angulus D. Itaque oportet, dato triangulo ABC æquale parallelogrammum constituere in angulo rectilineo ipsi D æquali.

secetur

secetur BC bifariam [a] in E, & juncta AE, ad rectam lineam EC, atque ad punctum in ea E, constituatur angulus [b] CEF æqualis ipsi D: & per A quidem ipsi EC parallela ducatur [c] AG; per C vero ipsi FE ducatur parallela [c] CG. parallelogrammum igitur est FECG. & quoniam BE est æqualis EC, erit & ABE triangulum [d] triangulo AEC æquale, super æqualibus enim sunt basibus BE EC, & in eisdem BC AG parallelis. ergo triangulum ABC trianguli AEC est duplum. est autem, & parallelogrammum FECG duplum [e] trianguli AEC; basim enim eandem habet, & in eisdem est parallelis. æquale igitur est FECG parallelogrammum triangulo ABC habetque CEF angulum æqualem angulo D dato. Dato igitur triangulo ABC æquale parallelogrammum FECG constitutum est, in angulo CEF, qui angulo D est æqualis. Quod quidem facere oportebat.

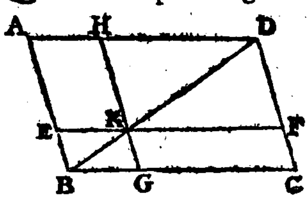


a 10. hujus.
b 23 hujus.
c 31. hujus.
d 38. hujus.
e 35. hujus.

PROP. XLIII. THEOR.

Omnis parallelogrammi spatii eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum complementa inter se sunt æqualia.

Sit parallelogrammum ABCD, cujus diameter BD, & circa ipsam BD parallelogramma quidem sint FH EG, quæ vero complementa dicuntur AK KC. dico AK complementum complemento KC æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est ABCD, & ejus diameter BD, æquale [a] est ABD triangulum triangulo BDC. rursus quoniam HKFD parallelogrammum est cujus diameter DK, triangulum HDK triangulo DFK æquale [a] erit. eadem ratione, & triangulum KGB triangulo KEB est æquale. cum igitur triangulum quidem BEK æquale sit triangulo BGK triangulum vero HDK ipsi DFK; erit triangulum BEK una cum triangulo HDK æquale triangulo BGK una cum DFK triangulo. est autem, & totum triangulum ABD æquale toti BDC. reliquum igitur AK complementum reliquo complemento KC est æquale. Ergo omnis parallelogrammi spatii eorum, quæ



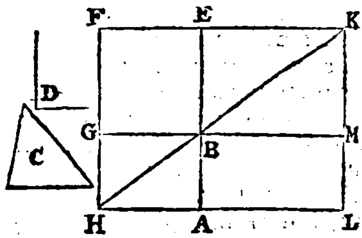
a 34 hujus.

circa diametrum sunt parallelogrammorum complementa inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XLIV. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

Sit data quidem recta linea AB; datum vero triangulum C, & datus angulus rectilineus D. oportet igitur ad datam rectam lineam AB, dato triangulo C æquale parallelogrammum applicare in angulo ipsi D æquali. Constituatur triangulo C æquale [a] parallelogrammum BEFG, in angulo EBG, qui est æqualis D. & ponatur BE in directum ipsi AB, producaturque FG ad H: & per A alterutri ipsarum BG EF parallela [b] ducatur AH, & HB jungatur. quoniam igitur in parallelas AH EF recta linea HF incidit, anguli AHF HFE duobus rectis æquales [c] sunt. quare BHF HFE duobus rectis sunt minores. quæ vero à minoribus, quàm sunt duo recti, in infinitum producuntur, conveniunt [d] inter se. ergo HB FE productæ convenient. producantur, & conveniant in K: perque K alterutri ipsarum EA FH parallela [b] ducatur KL, & AH GB ad L M puncta producantur. parallelogrammum igitur est HLKF, cujus diameter HK, & circa HK parallelogramma quidem sunt AG ME; ea vero quæ complementa dicuntur LB BF: ergo LB ipsi BF est [e] æquale. sed, & BF æquale est triangulo C. quare, & LB triangulo C æquale erit. & quoniam GBE angulus æqualis [f] est angulo ABM, sed & æqualis angulo D, erit & angulus ABM angulo D æqualis. Ad datam igitur rectam lineam AB, dato triangulo C æquale parallelogrammum constitutum est LB, in angulo ABM, qui est æqualis angulo D. Quod facere oportebat.



a 42. hujus.
b 31. hujus.
c 29. hujus.
d Axio 12
e 43. hujus.
f 15. hujus.

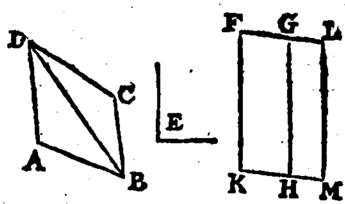
PROP. XLV. PROBL.

Rectilineo dato æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum rectilineum ABCD, datus vero angulus rectilineus E. itaque oportet rectilineo ABCD æquale parallelogrammum

grammum constituere in angulo ipsi E æquali. Conjungantur enim DB, & constituatur triangulo ADB æquale [a] parallelogrammum FH: in angulo HKF, qui est æqualis angulo E. deinde ad rectam lineam GH applicetur triangulo DBC æquale [b] parallelogrammum GM, in angulo GHM qui angulo E est æqualis. & quoniam angulus E æqualis est utrique ipsorum HKF GHM, erit & HKF angulo GHM æqualis. communis apponatur KHG. anguli igitur FKH KHG angulis KHG GHM æquales sunt. sed FKH KHG sunt æquales [c] duobus rectis. ergo, & KHG GHM duobus rectis æquales erunt. itaque ad aliquam rectam lineam GH, & ad datum in ea punctum H duæ rectæ lineæ KH HM non ad easdem partes positæ angulos deinceps duobus rectis æquales efficiunt. in directum igitur [d] est KH ipsi HM. & quoniam in parallelas KM FG recta linea HG incidit, alterni anguli MHG HGF æquales [e] sunt. communis apponatur HGL. anguli igitur MHG HGL, angulis HGF HGL sunt æquales. at anguli MHG HGL æquales [c] sunt duobus rectis. quare & anguli HGF HGL duobus rectis æquales erunt. in directum [d] igitur est FG ipsi GL. & quoniam KF ipsi HG & æqualis est, & parallela; sed & HG ipsi ML; erit KF [e] ipsi ML, & æqualis, & parallela. ipsasque conjungunt rectæ lineæ KM FL. ergo & KM FL æquales [f] & parallelæ sunt. parallelogrammum igitur est KFLM. at cum triangulum quidem ABD æquale fit parallelogrammo HF: triangulum vero DBC parallelogrammo GM; erit totum ABCD rectilineum toti parallelogrammo KFLM æquale. Dato igitur rectilineo ABCD æquale parallelogrammum constitutum est KFLM in angulo FKM, qui est æqualis angulo E dato. Quod facere oportebat.

a 42. hujus.
b 44. hujus.
c 29. hujus.
d 14. hujus.
e 30. hujus.
f 33. hujus.



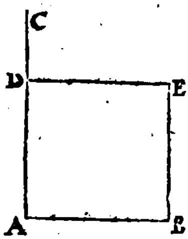
Cor. Ex jam dictis manifestum est, quomodo ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicari possit in dato angulo rectilineo.

PROP. XLVI. PROBL.

Super data recta linea quadratum describere.

Sit data recta linea AB. oportet super ipsa AB quadratum descri-

a 11. hujus. describere. Ducatur a rectæ lineæ AB à puncto in ea dato A ad rectos angulos AC; & ipsi AB æqualis b ponatur AD;
b 3. hujus. perque punctum D ducatur c DE ipsi AB parallela, & per B
c 31. hujus. ipsi AD parallela c ducatur BE. parallelogrammum igitur est ADEB. & AB quidem est d æqualis DE,
d 34. hujus. AD vero ipsi d BE. sed & BA ipsi AD est æqualis. quatuor igitur BA AD DE EB inter se æquales sunt, ideoque æquilaterum est ADEB parallelogrammum. dico etiam rectangulum esse. quoniam enim in parallelas AB DE recta linea incidit AD,
e 29. hujus. anguli BAD ADE duobus rectis sunt e æquales. rectus autem est BAD, ergo, & ADE rectus erit. parallelogrammorum vero spatiorum, quæ ex opposito sunt latera,
f 34. hujus. & anguli f inter se æqualia sunt. rectus igitur est uterque oppositorum ABE BED angulorum: & ob id rectangulum est ADBE. Ostensum autem est æquilaterum esse. Quadratum igitur sit necesse est, atque est super recta linea AB descriptum. Quod ipsum facere oportebat.

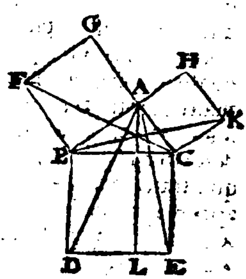


Cor. Hinc omne parallelogrammum habens unum angulum rectum est rectangulum.

PROP. XLVII. THEOR.

In rectangulis triangulis, quod à latere rectum angulum subtendente describitur quadratum æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens BAC angulum. dico quadratum descriptum à recta BC æquale esse quadratis, quæ ab ipsis BA AC describuntur. describatur a enim à BC quidem quadratum BD EC, ab ipsis
a 46. hujus. BA AC quadrata a GB HC, perque A alterutri ipsarum BD CE parallela ducatur AL; & AD FC jungantur. Quoniam igitur uterque angulorum BAC
b Diffin. 30. BAG rectus b est, ad aliquam rectam lineam BA, & ad datum in ea punctum A duæ rectæ lineæ AC AG non ad easdem partes positæ, angulos qui deinceps sunt duobus rectis æquales
c 14. hujus. efficiunt. in directum igitur c est CA ipsi AG. eadem ratione, & AB ipsi AH est in directum. & quoniam angulus



DBC

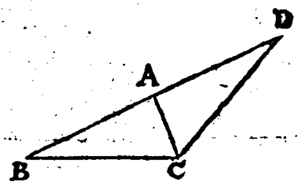
DBC est æqualis angulo FBA, rectus enim uterque est, communis apponatur ABC totus igitur DBA angulus toti FBC est [d] æqualis. quod cum duæ AB BD duabus FB BC æquales [d] sint, altera alteri, & angulus DBA æqualis angulo FBC; erit & basis AD basi FC æqualis [e], & ABD triangulum triangulo FBC æquale. estque [f] trianguli quidem ABD duplum BL parallelogrammum, basim enim eandem habent BD & in eisdem BD AL sunt parallelis: trianguli [f] vero FBC duplum est GB quadratum; rursus enim basim habent eandem FB, & in eisdem sunt parallelis FB GC. quæ autem æqualium duplicia inter se æqualia [g] sunt. ergo æquale est parallelogrammum BL ipsi GB quadrato. similiter junctis AE BK, ostendetur etiam CL parallelogrammum æquale quadrato HC. totum igitur DBEC quadratum duobus quadratis GB HC est æquale. & describitur quidem DBEC quadratum à recta linea BC, quadrata vero GB HC ab ipsis BA AC. quadratum igitur BE, à latere BC descriptum æquale est quadratis, quæ describuntur à lateribus BA AC. Ergo in rectangulis triangulis, quadratum, quod describitur à latere rectum angulum subtendente æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur. Quod oportebat demonstrare.

[d] Axiom. 2.
[e] 4. hujus.
[f] 41. hujus.
[g] Axiom. 6.

PROP. XLVIII. THEOR.

Si quadratum, quod describitur ab uno laterum trianguli æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur; angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit.

Si trianguli ABC, quod ab uno latere BC describitur quadratum æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus BA AC describuntur, dico angulum BAC rectum esse. ducatur enim à puncto A ipsi AC ad rectos angulos AD; ponaturque AD ipsi BA æqualis, & DC jungatur. Quoniam igitur DA est æqualis AB, erit & quadratum quod describitur ex DA æquale quadrato ex AB. commune apponatur quadratum, quod ex AC. ergo quadrata, quæ ex DA AC æqualia sunt quadratis quæ ex BA AC describuntur. sed quadratis quidem, quæ ex DA AC æquale [a] est, quod ex DC quadratum; rectus enim angulus est DAC: quadratis



[a] 47. hujus.

dratis vero, quæ ex BA AC æquale ponitur quadratum, quod ex BC. quadratum igitur, quod ex DC æquale est ei, quod ex BC quadrato. ergo & latus DC lateri CB est æquale. & quoniam DA est æqualis AB communis autem AC, duæ DA AC æquales sunt duabus BA AC; & basis DC est æqualis basi CB. angulus [b] igitur DAC angulo BAC est æqualis. rectus autem est DAC. ergo & BAC rectus erit. Si igitur quadratum quod describitur ab uno laterum trianguli, æquale sit quadratis quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit. Quod oportebat demonstrare.

b 8. hujus.

EUCLIDIS

EUCLIDIS ELEMENTORUM.

LIBER SECUNDUS.

DIFFINITIONES.

I.

OMnæ parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub duabus rectis lineis, quæ rectum angulum comprehendunt.

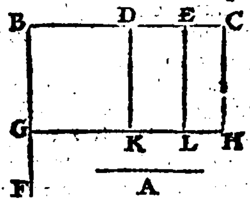
II.

Omnis parallelogrammi spatii, unum quodvis eorum quæ circa diametrum ipsius sunt parallelogrammorum, cum duobus complementis gnomon vocetur.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Si sint duæ rectæ lineæ, altera autem ipsarum secta fuerit in quotcunque partes; rectangulum sub duabus rectis lineis contentum æquale est eis rectangulis quæ sub recta linea insecta, & singulis partibus continentur.

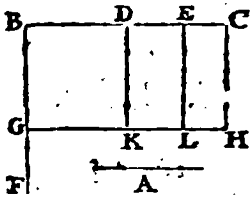
Sint duæ rectæ lineæ A BC; & secta sit BC utcunque in punctis D E. dico rectangulum rectis lineis A BC contentum æquale esse rectangulo quod continetur sub A & BD, & rectangulo quod sub A & DE, & ei quod sub A & EC continetur. Ducatur enim à puncto B ipsi BC ad rectos [a] angulos BF: atque ipsi A ponatur [b] æqualis BG: & per G quidem



a 11. primi.
b 3. primi.

 quidem

c 31. primi. quidem ipsi BC parallela c ducatur GH: per EDC vero ducantur DK EL CH parallelæ c ipsi BG. rectangulum igitur BH est æquale rectangulis BK DL EH: atque est BH quidem, quod sub A & BC continetur; etenim continetur sub GB BC; & BG ipsi A est æqualis; rectangulum autem BK est quod continetur sub ipsis A & BD; continetur enim sub GB BD, quarum GB est æqualis A: & rectangulum DL est quod continetur sub A & DE, quoniam DK, hoc est BG ipsi A est æqualis; & similiter rectangulum EH est quod sub A & EC continetur. ergo rectangulum contentum sub A & BC est æquale rectangulo contento sub A & BD, & contento sub A & DE, & adhuc contento sub A & EC. Si igitur sint duæ rectæ lineæ altera autem ipsarum secta fuerit in quotcunque partes; rectangulum sub duabus rectis lineis contentum est æquale eis quæ sub recta linea insecta, & singulis partibus continentur. Quod oportebat demonstrare.

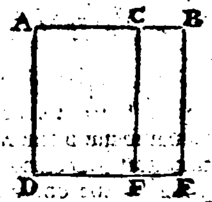


PROP. II. THEOR.

Si recta linea secta fuerit utcunque; rectangula quæ sub tota, & singulis partibus continentur æqualia sunt ei quod à tota fit quadrato.

Recta enim linea AB secta sit utcunque in puncto C, dico rectangulum quod sub AB BC continetur, unà cum contento sub BA AC æquale esse quadrato, quod fit ex AB.

a 46. primi. describatur a enim ex AB quadratum ADEB, & per C du-
b 31. primi. catur b alterutri ipsarum AD BE parallela CF. æquale igitur est AE rectangulis AF CE. atque est AE quidem quadratum, quod ex AB; AF vero rectangulum contentum sub BA AC; etenim sub DA AC continetur, quarum AD ipsi AB est æqualis, & rectangulum CE continetur sub AB BC, cum BE sit æqualis AB. ergo rectangulum sub BA & AC unà cum rectangulo sub AB & BC æquale est quadrato ex AB. Si igitur recta linea utcunque secta fuerit, rectangula, quæ sub tota, & singulis partibus continentur, æqualia sunt ei, quod à tota fit quadrato. Quod demonstrare oportebat.

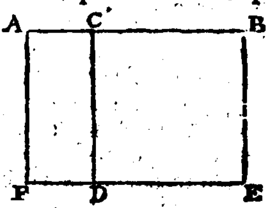


PROP.

PROP. III. THEOR.

Si recta linea utcunque secta fuerit; rectangulum sub tota, & una ejus parte contentum æquale est, & rectangulo, quod sub partibus continetur, & ei quod à prædicta parte fit quadrato.

Recta enim linea A B secta sit utcunque in puncto C. dico sub A B & B C rectangulum æquale esse rectangulo sub A C B C unà cum quadrato, quod fit ex B C. describatur [a] enim ex B C quadratum C D E B; producaturque E D in F: & per A alterutri ipsarum C D B E parallela [b] ducatur A F. æquale utique erit rectangulum A E ipsis A D C E: & est A E quidem rectangulum contentum sub A B B C; etenim sub A B B E continetur, quarum B E est æqualis B C: rectangulum vero A D est quod continetur sub A C C B, cum D C ipsi C B sit æqualis: & D B est quadratum, quod fit ex B C. ergo rectangulum sub A B B C est æquale rectangulo sub A C C B unà cum quadrato quod ex B C. Si igitur recta linea utcunque secta fuerit; rectangulum sub tota, & una ejus parte contentum æquale est rectangulo quod sub partibus continetur, & ei quod à prædicta parte fit quadrato.

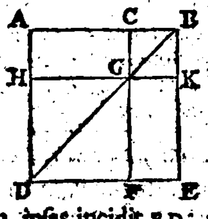


a 46. primi.
b 31. primi.

PROP. IV. THEOR.

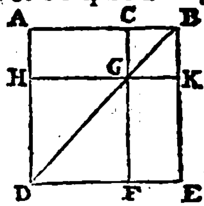
Si recta linea secta fuerit utcunque, quadratum quod fit à tota æquale erit, & quadratis quæ à partibus fiunt, & ei quod bis sub partibus continetur rectangulo.

Recta enim linea A B secta sit utcunque in C. dico quadratum quod fit ex A B æquale esse, & quadratis ex A C C B & ei rectangulo quod bis sub A C C B continetur. Describatur [a] enim ex A B quadratum A D E B, jungaturque B D, & per C quidem alterutri ipsarum A D B E parallela [b] ducatur C G F; per G vero alterutri ipsarum A B D E ducatur [b] parallela H K. & quoniam C F est parallela ipsi A D, & in ipsas incidit B D: erit exterior angulus B G C interiori & opposito A D B æqualis [c]: angulus



a 46. primi.
b 31. primi.
c 29. primi.

d 5. primi. angulus autem ADB est æqualis *d* angulo ABD, quod & latus BA æquale est lateri AD. quare CGB angulus angulo
e 6. primi. GBC est æqualis: ac propterea latus BC lateri CG æquale *e*.
f 34. primi. sed & latus CK æquale *f* est lateri GK & CG ipsi BK. ergo & GK est æquale KB, & CGKB æquilaterum est. dico insuper etiam rectangulum esse. quoniam enim CG est parallela ipsi BK & in ipsas incidit CB; anguli KBC GCB duobus rectis sunt æquales *c*. rectus autem est KBC angulus. ergo & rectus GCB, & anguli oppositi CGK GKB recti erunt. rectangulum igitur est CGKB. sed ostensum fuit & æquilaterum esse. quadratum igitur est CGKB, quod quidem fit ex BC. eadem ratione & HF est quadratum quod fit ex HG, hoc est ex AC. ergo HF CK ex ipsis AC CB quadrata sunt. &



g 43. primi. quoniam rectangulum AG est æquale *g* rectangulo GE; atque est AG quod sub AC CB continetur, est enim GC ipsi CB æqualis: erit & GE æquale ei quod continetur sub AC CB, quare rectangula AG GE æqualia sunt ei quod bis sub AC CB continetur. sunt autem & HF GK quadrata ex AC CB. quatuor igitur HF CK AG GE, & quadratis ex AC CB, & ei quod bis sub AC CB continetur rectangulo sunt æqualia; sed HF CK AG GE componunt totum ADEB quadratum quod fit ex AB. quadratum igitur ex AB æquale est, & quadratis ex AC CB, & ei quod bis sub AC CB continetur rectangulo. Quare si recta linea utcunque secta fuerit; quadratum quod fit à tota æquale erit & quadratis quæ à partibus fiunt, & ei rectangulo quod bis sub partibus continetur. atque illud est quod demonstrare oportebat.

Cor. Ex hoc perspicue constat in quadratis spatiis parallelogramma quæ sunt circa diametrum, quadrata esse.

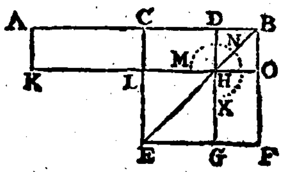
PROP. V. THEOR.

Si recta linea secta fuerit in partes æquales, & in partes inæquales; rectangulum sub inæqualibus totius partibus contentum una cum quadrato lineæ quæ inter sectiones interjicitur, æquale est ei quod à dimidia fit quadrato.

Recta enim linea quævis AB secta sit in partes æquales ad punctum C, & in partes inæquales ad D. dico rectangulum contentum sub AD DB, una cum quadrato quod fit ex

CD

CD æquale esse ei quod ex CB fit quadrato. Describatur [a] enim ex BC quadratum CEFB: ducaturque BE; & per D quidem alterutri ipsarum CE BF parallela [b] ducatur DHG; per H vero ducatur KLO parallela [b] alterutri ipsarum CB EF: & rursus per A ducatur alterutri CL BO parallela [b] AK. & quoniam CH complementum æquale [c] est complemento HF, commune apponatur DO, totum igitur CO toti DF est æquale. sed CO est æquale [d] AL, quoniam & AC ipsi CB. ergo & AL æquale est DF. commune apponatur CH. totum igitur AH ipsis FD DL æquale erit. sed AH quidem est quod sub AD DB continetur, etenim DH ipsi DB est æqualis [e]; FD DL vero est gnomon MNX. igitur MNX æqualis est ei quod sub AD DB continetur, commune apponatur LG, æquale [e] scilicet quadrato quod ex CD. ergo MNX gnomon, & LG æqualia sunt rectangulo, quod continetur sub AD DB, & ei, quod fit ex CD quadrato. sed MNX gnomon, & LG sunt totum quadratum CEFB, quod quidem fit ex CB. ergo rectangulum sub AD DB, una cum quadrato quod ex CD, æquale est ei quod ex CB quadrato. Si igitur recta linea secta fuerit in partes æquales, & in partes inæquales, rectangulum sub inæqualibus totius partibus contentum unà cum quadrato lineæ quæ inter sectiones interjicitur, æquale est ei quod à dimidia fit quadrato. Quod demonstrare oportebat.



[a] 46. primi.
[b] 31. primi.
[c] 43. primi.
[d] 36. primi.
[e] Cor. 4. hujus.

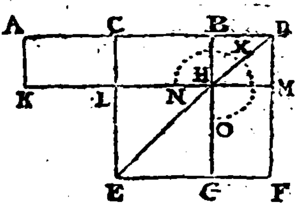
PROP. VI. THEOR.

Si recta linea bifariam secetur, atque ipsi in directum adjiciatur quædam recta linea; rectangulum sub tota cum adjecta, & adjecta contentum, una cum quadrato dimidiæ, æquale est quadrato quod ab ea quæ ex dimidia & adjecta constat, tanquam ab una linea describitur.

Recta enim linea quævis AB secetur bifariam in puncto C, & adjiciatur ipsi in directum BD. dico rectangulum sub AD DB unà cum quadrato ex BC æquale esse ei quod fit ex CD quadrato. Describatur [a] enim ex CD quadratum CEFD, & jungatur DE; per B alterutri ipsarum CE DF parallela [b] ducatur BHG: & per H ducatur KLM parallela [b] alterutri

[a] 46. primi.
[b] 31. primi.

alterutri ipsarum AD EF; & adhuc per A alterutri CL DM parallela b AK. Itaque quoniam AC est æqualis CB, erit, & rectangulum AL rectangulo

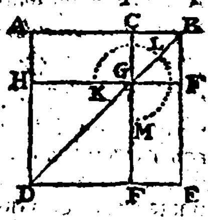


c 36.primi. CH æquale c. sed CH æquale
d 43.primi. d est HF. ergo & AL ipsi HF æquale erit. commune apponatur CM. totum igitur AM gnomoni NXO est æquale. atque est AM, quod sub AD DB
e Cor. 4. huius. continetur, etenim DM est e æqualis DB. ergo & gnomon NXO æqualis est rectangulo sub AD DB. rursus commune apponatur LC, æquale e scilicet quadrato, quod ex CB. rectangulum igitur sub AD DB unà cum quadrato quod ex BC æquale est gnomoni NXO & ipsi LG. sed gnomon NXO, & LG componunt CEFD quadratum quod quidem fit ex CD. ergo rectangulum sub AD DB unà cum quadrato ex BC æquale est ei, quod fit ex CD quadrato. Si igitur recta linea secetur bifariam, adjiciaturque ipsi in directum quædam recta linea; rectangulum sub tota cum adjecta, & adjecta contentum unà cum quadrato dimidiæ æquale est quadrato quod ab ea quæ ex dimidia, & adjecta constat, tanquam ab una linea, describitur. Quod oportebat demonstrare.

PROP. VII. THEOR.

Si recta linea utcunque secta fuerit, quæ à tota, & una parte fiunt utraque quadrata æqualia sunt, & rectangulo, quod bis sub tota, ac dicta parte continetur, & ei quod à reliqua parte fit quadrato.

Recta enim linea quædam AB secta sit utcunque in puncto C. dico quadrata ex AB BC æqualia esse, & rectangulo quod bis sub AB BC continetur, & ei quod fit ex AC quadrato. De-



a 46 primi. scribatur a enim ex AB quadratum ADEB, & figura construatur *. Itaque quoniam AG rect-
b 43.primi. angulum æquale b est rectangulo

* *Figura dicitur construi cum in parallelogrammo ductæ lineæ lateribus parallelæ secantes diametrum in uno puncto, efficiunt duo parallelogramma circa diametrum, & duo complementa. Similiter dupla figura dicitur construi cum ductæ rectæ lateribus parallelæ, efficiunt quatuor parallelogramma circa diametrum, & quatuor complementa.*

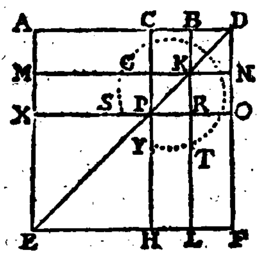
GL.

GE, commune apponatur CF: quare totum AF toti CE est æquale. rectangula igitur AF CE dupla sunt rectanguli AF. sed AF CE sunt LKM gnomon, & quadratum CF, ergo KLM gnomon, & quadratum CF dupla erunt rectanguli AF. est autem id quod bis sub AB BC continetur duplum ipsius AF; etenim BF est [e] æqualis BC. gnomon igitur KLM, & quadratum CF æqualia sunt, ei quod bis sub AB BC continetur. commune apponatur HF, quod est ex AC quadratum. ergo gnomon KLM, & quadrata CF HF æqualia sunt ei quod bis sub AB BC continetur, & quadrato ex AC. sed gnomon KLM, & quadrata CF HF componunt ADEB, & CF, quæ sunt ex AB BC quadrata. quadrata igitur ex AB BC æqualia sunt rectangulo, quod bis sub AB BC continetur una cum eo quod fit ex AC quadrato. Ergo si recta linea utcunque secta fuerit; quæ à tota, & una parte fiunt utraque quadrata æqualia sunt rectangulo quod bis sub tota, ac dicta parte continetur, & ei quod à reliqua parte fit quadrato; quod ostendere oportebat. e Cor. 4. hujus.

PROP. VIII. THEOR.

Si recta linea utcunque secta fuerit; quod quater sub tota, & una parte continetur rectangulum una cum quadrato reliquæ partis æquale est quadrato quod ex tota, & dicta parte tanquam ex una linea describitur.

Recta enim linea AB secta sit utcunque in C. dico rectangulum quater sub AB BC contentum una cum quadrato quod ex AC æquale esse quadrato, quod ex AB BC tanquam ex una linea describitur. Producatur enim recta linea AB in D; & ipsi CB ponatur æqualis BD; describaturque ex AD quadratum AEFD; & dupla figura construatur. quoniam igitur CB est [a] æqualis BD, atque est CB ipsi GK æqualis [b]; BD vero ipsi KN: erit & GK æqualis KN. eadem ratione, & PR ipsi RQ est æqualis. & quoniam

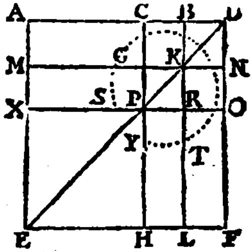


a hyp.
b 34. primi.

CB est æqualis BD, & GK ipsi KN; erit rectangulum [c] quidem CK rectangulo BN; rectangulum vero GR ipsi RN æquale [c]. sed CK est [d] æquale RN, complementa enim sunt parallelogrammi CO, ergo & BN æquale est GK, & quatuor rectangula

c 36. primi.
d 43. primi.

rectangula DK KC GR RN inter se æqualia; ideoque quadrupla sunt rectanguli CK. rursus quoniam CB est æqualis BD, & BD quidem ipsi BK, hoc est ipsi CG æqualis; CB vero ipsi GK, hoc est GP: erit & CG æqualis GP. est autem & PR ipsi RO æqualis, rectangulum igitur AG rectangulo MP, & rectangulum PL ipsi



d 43. primi. RF æquale erit. sed MP est æquale PL; complementa enim sunt ML parallelogrammi. quare & AG ipsi RF est æquale. quatuor igitur AG MP PL RF inter se æqualia sunt, ac propterea ipsius AG quadrupla. ostensum autem est, & quatuor CK BN GR RN quadrupla esse CK. quare octo continentia gnomonem STY ipsius AK quadrupla sunt. & quoniam AK est quod sub AB BC continetur; etenim BK est æqualis BC; erit contentum quater sub AB BC ipsius AK quadruplum. at demonstratus est gnomon STY quadruplus ipsius AK. quod igitur quater sub AB BC continetur æquale est gnomoni STY. commune e Cor. 4. hujus. apponatur XH, quod quidem quadrato ex AC est e æquale. ergo quod quater sub AB BC continetur una cum quadrato ex AC æquale est ipsi STY gnomoni, & quadrato XH. sed STY gnomon, & XH totum sunt AEFD quadratum, quod describitur ex AD. rectangulum igitur quater sub AB BC contentum unà cum quadrato ex AC æquale est ei, quod ex AD, hoc est ex AB BC tanquam ex una linea describitur, quadrato. Ergo si recta linea utcunque secta fuerit; quod quater sub tota, & una parte continetur rectangulum, unà cum quadrato reliquæ partis, æquale est quadrato quod ex tota & dicta parte, tanquam ex una linea describitur. Quod ostendendum fuerat.

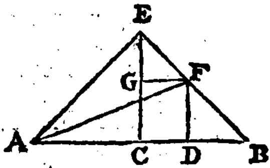
PROP. IX. THEOR.

Si recta linea in partes æquales, & in partes inæquales secta fuerit, quadrata quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur, dupla sunt & quadrati dimidiæ, & quadrati lineæ ejus quæ inter sectiones interjicitur.

Recta enim linea quævis AB secta sit in partes æquales ad C, & in partes inæquales ad D. dico quadrata ex AD DB, a 11. primi. quadratorum ex AC CD dupla esse. Ducatur a enim à puncto C ipsi AB ad rectos angulos CE, & utrivis ipsarum

AC

A C C B æqualis ponatur, junganturque E A E B. ac per D
quidem ipsi C E parallela *b* ducatur D F; per F vero ipsi A B *b* 31. primi.
parallela *b* F G, & A F ducatur. Itaque quoniam A C est æ-
qualis C E; erit *c* & angulus E A C angulo A E C æqualis. *c* 5. primi.
& cum rectus sit angulus ad C, reliqui A E C E A C uni
recto æquales *d* erunt. & sunt æquales inter sese. utervis *d* 3. Cor 32. primi.
igitur ipsorum A E C E A C recti
est dimidium. eadem ratione,
& recti dimidium est utervis
ipsorum C E B E B C. ergo totus
angulus A E B rectus est. &
quoniam angulus G E F dimidi-
um est recti, rectus autem E G F;
æqualis enim *e* est interiori & *e* 29. primi.

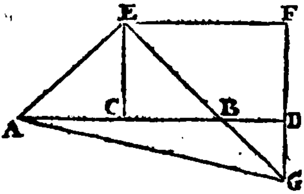


opposito E C B, erit, & reliquus E F G recti dimidium: æ-
qualis igitur est G E F angulus ipsi E F G. quare & latus E G
lateri G F est *f* æquale. rursus quoniam angulus ad B dimi- *f* 6. primi.
dium est recti, rectus autem F D B, quod sit æqualis interi-
ori & opposito E C B: reliquus B F D recti erit dimidium.
angulus igitur ad B æqualis est angulo D F B; ideoque latus
D F lateri D B æquale. & quoniam A C est æqualis C E, erit,
& ex A C quadratum æquale quadrato ex C E. quadrata igitur
ex A C C E dupla sunt quadrati ex A C; quadratis autem ex
A C C E æquale *g* est quadratum ex E A, siquidem rectus est *g* 47. primi.
angulus A C E. ergo quadratum ex E A quadrati ex A C est
duplum. rursus quoniam E G æqualis est G F, & quadratum
ex E G quadrato ex G F est æquale. quadrata igitur ex E G
& G F dupla sunt quadrati ex G F. at quadratis ex E G G F
æquale *g* est quod ex E F quadratum. ergo quadratum ex E F
quadrati ex G F duplum erit. æqualis *h* autem est G F ipsi C D. *h* 34. primi.
quadratum igitur ex E F duplum est quadrati C D. sed &
quadratum ex A E quadrati ex A C est duplum. ergo qua-
drata ex A E E F dupla sunt quadratorum ex A C C D. qua-
dratis vero ex A E E F æquale *g* est ex A F quadratum; quo-
niam angulus A E F rectus est. quadratum igitur ex A F qua-
dratorum ex A C C D est duplum. sed quadrato ex A F æqua-
lia sunt ex A D D F quadrata. rectus enim est angulus qui ad
D. ergo ex A D D F quadrata dupla sunt quadratorum ex A C
C D: est autem D F ipsi D B æqualis. quadrata igitur ex A D
D B quadratorum ex A C C D dupla erunt. Quare si recta
linea in partes æquales, & in partes inæquales secta fuerit,
quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur quadrata
dupla sunt, & quadrati dimidiæ, & quadrati lineæ ejus quæ
inter sectiones interjicitur. Quod ostendere oportebat.

PROP. X. THEOR.

Si recta linea secetur bifariam, & ipsi in directum quævis recta linea adjiciatur; quæ à tota cum adjecta, & adjecta fiunt utraque quadrata dupla sunt, & quadrati dimidiæ, & quadrati quod ab ea quæ ex dimidia, & adjecta constat, tanquam ab una linea describitur.

Recta enim linea A B secetur bifariam in C, & ipsi in directum adjiciatur quævis recta linea B D. dico quadrata ex A D D B quadratorum ex A C C D dupla esse. Ducatur enim à
a 11. primi. puncto C ipsi A B ad rectos a angulos C E, & utrique ipsarum A C C B æqualis ponatur; ducaturque A E E B, & per E qui-
b 31. primi. dem ipsi A D parallela b ducatur E F; per D vero ducatur D F parallela b ipsi C E. & quoniam in parallelas E C F D recta
c 29. primi quædam linea E F incidit, anguli C E F E F D æquales c sunt duobus rectis. anguli igitur F E B E F D duobus rectis sunt minores, quæ autem à minoribus, quam sunt duo recti in infinitum producuntur, con-
d Axio. 12. venient inter se d. ergo E B F D productæ ad partes B D convenient. producantur, & conveniant in puncto G, & A G ducatur. itaque quoniam



A C est æqualis C E, & angulus A E C angulo E A C æqualis
e 5. primi. e erit: atque est rectus qui ad C. uterque igitur ipsorum C A E A E C est recti dimidium. eadem ratione, & recti dimidium est uterque C E B E B C. ergo A E B est rectus. &
f 15. primi. quoniam E B C est dimidium recti, erit & recti f dimidium D B G; cum sit ad verticem. sed & B D G rectus est; etenim est c æqualis ipsi D C E alterno. reliquus igitur D G E dimidium est recti, & ob id ipsi D B G æqualis. ergo & latus B D
g 6. primi. æquale g lateri D G. rursus quoniam E G F est dimidium recti, rectus autem qui ad F, est enim angulo opposito qui ad C æqualis; erit, & reliquus F E G recti dimidium, & æqualis ipsi E G F. quare & latus G F lateri E F est æquale g. & cum E C sit æqualis C A; & quadratum ex E C æquale est ei quod ex C A fit quadrato. ergo quadrata ex E C C A dupla
h 47. primi. sunt quadrati ex C A. quadratis autem ex E C C A æquale h est quadratum ex E A. quadratum igitur ex E A quadrati ex A C est duplum. rursus quoniam G F est æqualis F E, æquale est, & ex G F quadratum quadrato ex F E. quadrata igitur ex G F F E quadrati ex E F sunt dupla. at quadratis ex G F F E æquale est,

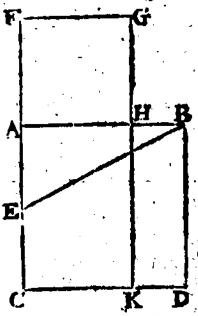
est[b] quod ex EG quadratum. ergo quadratum ex EG duplum est quadrati ex EF. æqualis autem est EF ipsi CD. quadratum igitur ex EG quadrati ex CD duplum erit. sed ostensum est quadratum ex EA duplum quadrati ex AC. ergo ex AE EG quadrata, quadratorum ex AC CD sunt dupla. quadratis vero ex AE EG æquale est[b] quod ex AG quadratum. quadratum igitur ex AG duplum est quadratorum ex AC CD. at quadrato ex AG æqualia[b] sunt ex AD DG quadrata. ergo quadrata ex AD DG sunt dupla quadratorum ex AC CD. sed DG est æqualis DB. quadrata igitur ex AD DB quadratorum ex AC CD sunt dupla. Ergo si recta linea bifariam secetur, & ipsi in rectum quædam recta linea adjiciatur; quæ à tota cum adjecta, & adjecta fiunt utraque quadrata dupla sunt & quadrati dimidiæ, & quadrati quod ab ea quæ ex dimidia, & adjecta constat tanquam ab una linea describitur. Quod ostendere oportebat. b 47. primi.

PROP. XI. PROBL.

Datam rectam lineam secare, ita ut quod sub tota, & altera parte continetur rectangulum æquale sit ei quod à reliqua parte fit quadrato.

Sit data recta linea AB. oportet ipsam AB ita secare, ut quod sub tota, & altera parte continetur rectangulum æquale sit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato. Describatur[a] enim ex AB quadratum ABCD: seceturque AC bifariam in E, & BE ducatur: deinde producta CA in F, ponatur ipsi BE æqualis EF: describaturque ex AF quadratum FGHA: & GH ad K producatur. dico AB sectam esse in H, ita ut sub AB BH rectangulum æquale sit quadrato ex AH. Quoniam enim recta linea AC bifariam secatur in E, adjiciturque ipsi in directum AF, rectangulum sub CF FA, una cum quadrato ex AE, æquale[b] erit quadrato ex EF. sed EF est æqualis EB. rectangulum igitur sub CF FA, una cum quadrato ex AE æquale est ei, quod fit ex EB, quadrato. quadrato autem ex EB æqualia sunt[c] quadrata ex BA AE: etenim angulus ad A rectus est. ergo rectangulum sub CF FA, una cum quadrato ex AE æquale est quadratis ex BA AE. commune auferatur quod ex AE fit quadratum. reliquum igitur rectangulum sub CF FA æquale est quadrato ex AB. est autem sub CF FA rectan-

a 46. primi.



b 6. hujus.

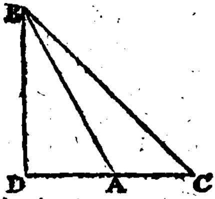
c 47. primi.

gulum FK; siquidem AF est æqualis FG: quadratum autem ex AB est ipsum AD. rectangulum igitur FK æquale est quadrato AD. commune auferatur AK. ergo reliquum FH reliquo HD est æquale. atque est HD rectangulum sub AB BH, cum AB sit æqualis BD, & FH est quadratum ex AH. rectangulum igitur sub AB BH quadrato ex AH æquale erit. Quare data recta linea AB secta est in H, ita ut sub AB BH rectangulum quadrato ex AH sit æquale. Quod facere oportebat.

PROP. XII. THEOR.

In obtusangulis triangulis, quod à latere obtusum angulum subtendente fit quadratum majus est quam quadrata quæ fiunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum quæ sunt circa obtusum angulum, in quod scilicet protractum perpendicularis cadit, & linea assumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtusum.

Sit obtusangulum triangulum ABC. obtusum angulum
a 12. primi. habens BAC: & ducatur [a] à puncto B ad CA protractam perpendicularis BD. dico quadratum ex BC majus esse, quam quadrata ex BA AC, rectangulo quod bis sub CA AD continetur. Quoniam enim recta linea CD secta est utcunque in puncto A, erit quadratum ex
b 4. hujus. CD æquale [b], & quadratis ex CA AD, & ei quod bis sub CA AD continetur rectangulo. commune apponatur ex DB quadratum. quadrata igitur ex CD DB æqualia sunt & quadratis ex CA AD DB, & rectangulo quod bis sub CA AD continetur. sed quadratis ex CD DB æquale est [c] quadratum ex CB: rectus enim est angulus ad D, cum sit BD perpendicularis. Quadratis vero ex AD DB æquale
c 47. primi. est [c] quadratum ex AB. quadratum igitur ex CB æquale est, & quadratis ex CA AB, & rectangulo bis sub CA AD contento. ergo quadratum ex CB majus est quam quadrata ex CA AB, rectangulo quod bis sub CA AD continetur. In obtusangulis igitur triangulis, quadratum quod à latere obtusum angulum subtendente fit, majus est quam quadrata quæ fiunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum quæ sunt circa obtusum



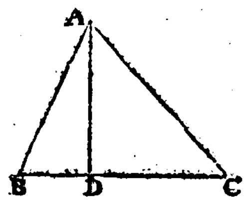
sum

sum angulum, in quod protractum perpendicularis cadit, & linea assumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtusum. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XIII. THEOR.

In acutangulis triangulis, quod à latere acutum angulum subtendente fit quadratum minus est quam quadrata quæ fiunt lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & linea à perpendiculari intus assumpta ad angulum acutum.

Sit acutangulum triangulum A B C acutum habens angulum ad B: & ducatur à puncto A [a] ad B C perpendicularis A D. [a] 12. primi. dico quadratum quod fit ex A C minus esse quam quadrata quæ ex C B B A fiunt, rectangulo quod bis sub C B B D continetur. Quoniam enim recta linea C B secta est utcunque in D, erunt quadrata ex C B B D æqualia [b], [b] 7. hujus. & rectangulo quod bis sub C B B D continetur, & quadrato ex D C. commune apponatur ex A D quadratum. quadrata igitur ex C B B D D A æqualia sunt, & rectangulo bis sub C B B D contento, & quadratis ex

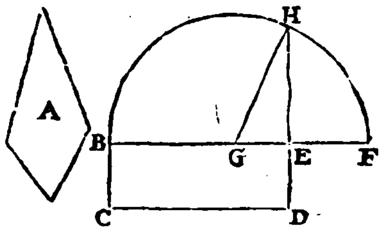


A D D C. sed quadratis ex B D D A æquale est [c] ex A B quadratum; rectus enim angulus est qui ad D. quadratis vero ex A D D C æquale [c] est quadratum ex A C. quadrata [c] 47 primi. igitur ex C B B A sunt æqualia quadrato ex A C, & ei quod bis sub C B B D continetur rectangulo. quare solum quadratum ex A C minus est quam quadrata ex C B B A, rectangulo quod bis sub C B B D continetur. In acutangulis igitur triangulis quadratum quod à latere acutum angulum subtendente fit, minus est quam quadrata quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & linea à perpendiculari intus assumpta ad angulum acutum. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XIV. PROBL.

Dato rectilineo æquale quadratum constituere.

Sit datum rectilineum A. oportet ipsi A rectilineo æquale
a45. primi. quadratum constituere. Constituatur a rectilineo A æquale parallelogrammum rectangulum BCDE. si igitur BE est æqualis ED, factum jam erit quod proponebatur, etenim rectilineo A æquale quadratum constitutum est BD: sin minus, una ipsarum BE ED major est. sit BE major; & producatur ad F, ponaturque ipsi ED æqualis EF. deinde secta FB bi-
b10. primi. fariam b in G: centro quidem G, intervallo autem unius ipsarum GB GF semicirculus describatur BHF; producaturque DE in H, & GH ducatur. Quoniam igitur recta linea BF secta est in partes æquales ad G, & inæquales ad E; erit rectangulum sub BE EF, una cum quadrato quod
c hujus. fit ex EG c, æquale quadrato ex GF. est autem GF æqualis GH. rectangulum igitur sub BE EF una cum quadrato ex GE, æ-
d47. primi. quale est quadrato ex GH. sed quadrato ex GH æqualia d sunt ex HE EG quadrata. ergo rectangulum sub BE EF una cum quadrato ex EG, æquale est quadratis ex HE EG. commune auferatur ex EG quadratum. reliquum igitur rectangulum sub BE EF est æquale quadrato ex EH. sed rectangulum sub BE EF est ipsum BD parallelogrammum, quoniam EF est æqualis ED. ergo BD parallelogrammum quadrato ex EH est æquale. parallelogrammum autem BD est æquale rectilineo A. rectilineum igitur A quadrato ex EH descripto æquale erit. Quare dato rectilineo A æquale quadratum constitutum est, quod videlicet ex ipsa EH describitur. Quod facere oportebat.



EUCLIDIS

EUCLIDIS ELEMENTORUM.

LIBER TERTIUS.

DIFFINITIONES.

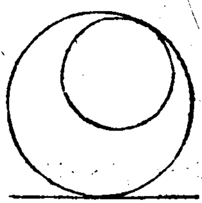
I

ÆQuales circuli sunt quorum diametri sunt æquales: vel quorum quæ ex centris sunt æquales.

II.

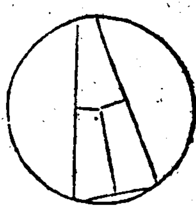
Recta linea circulum contingere dicitur, quæ contingens circulum, & producta ipsum non secat.

III.



Circuli contingere se dicuntur, qui contingentes, se ipsos non secant.

IV.



In circulo æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipsas perpendiculares ductæ sunt æquales.

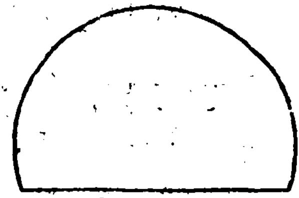
V.

Magis autem distare à centro dicitur ea in quam major perpendicularis cadit.

 VI.

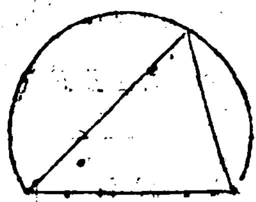
VI.

Segmentum circuli eſt figura quæ recta linea, & circuli circumferentia continetur.



VII.

Segmenti autem angulus eſt, qui recta linea, & circuli circumferentia comprehenditur.



VIII.

In ſegmento angulus eſt, quando in circumferentia ſegmenti ſumatur aliquod punctum, atque ab ipſo ad terminos lineæ ejus quæ baſis eſt ſegmenti rectæ lineæ ducantur, angulus ductis lineis contentus.

IX.

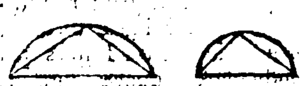
Quando autem continentes angulum rectæ lineæ aſſumunt circumferentiam, in illa conſiſtere angulus dicitur.

X.

Sector circuli eſt, quando angulus ad centrum conſtiterit, figura contenta rectis lineis angulum comprehendentibus, & circumferentia ab ipſis aſſumpta.

XI.

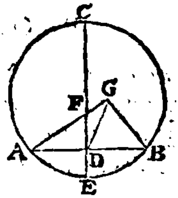
Similia circulorum ſegmenta ſunt, quæ angulos ſuſcipiunt æquales, vel in quibus anguli æquales conſiſtunt.



PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Dati circuli centrum invenire.

Sit datus circulus A B C. oportet circuli A B C centrum invenire. Ducatur in ipso quædam recta linea A B utcunque, & in puncto D bifariam [a] secetur. à puncto autem D ipsi A B ad rectos angulos [b] ducta D C in E producatur; & secetur C E bifariam [a] in F. dico punctum F circuli A B C centrũ esse. Non enim, sed si fieri potest, sit G centrum, & G A G D G B ducantur. itaque quoniam D A est æqualis D B, communis autem D G, erunt duæ A D D G duabus G D D B æquales, altera alteri: & basis G A æqualis [c] est basi G B; sunt enim ex centro G. angulus igitur A D G angulo G D B est [d] æqualis. cum autem recta linea super rectam lineam insistens, angulos qui deinceps sunt, æquales inter se fecerit, erectus est uterque æqualium angulorum. ergo angulus G D B est rectus. sed & rectus F D B. æqualis igitur est angulus F D B angulo G D B, major minori, quod fieri non potest. quare G non est circuli A B C centrum. similiter ostendemus neque aliud esse, præter ipsum F. ergo F centrum est circuli A B C. Quod invenire oportebat.



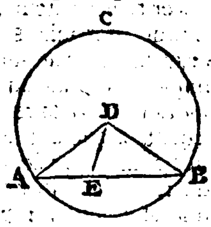
a 10 primi.
b 11. primi.
c Diffin. 15. primi.
d 8. primi.
e Diffin. 10. primi.

Cor. Si in circulo quævis recta linea, lineam quandam bifariam & ad angulos rectos secet, in secante erit centrum circuli.

PROP. II. THEOR.

Si in circumferentia circuli duo quævis puncta sumantur, quæ ipsa conjungit recta linea intra circulum cadet.

Sit circulus A B C; in circumferentia ipsius sumantur duo quævis puncta A B. dico rectam lineam quæ à puncto A ad B ducitur, intra circulum cadere. sumatur in recta A B punctum quodvis E, junganturque D A D E D B. Quoniam D A est æqualis D B, erit [a] angulus D A B æqualis angulo D B A, & quoniam trianguli D A E latus A producitur erit [b] angulus D E B angulo D A E major, angulus autem D A E æqualis est angulo D B E, ergo D E B angulus angulo D B E est



a 5. primi.
b 16. primi.

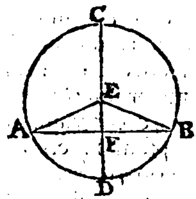
est major. sed majori angulo majus latus subtenditur. major igitur est DB ipsa DE. sed DB ad circumferentiam tantum pertingit. ergo DE non eo usque protenditur, adeoque punctum E cadet intra circulum. Si igitur in circumferentia &c. Quod oportebat demonstrare.

Cor. Hinc si recta circulum tangit, in unico puncto eum tangit.

PROP. III. THEOR.

Si in circulo recta linea per centrum ducta, rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam secet, & ad angulos rectos ipsam secabit. quod si ad angulos rectos ipsam secet, & bifariam secabit.

Sit circulus ABC, & in ipso recta linea per centrum ducta CD rectam lineam quandam AB non ductam per centrum bifariam secet in puncto F. dico ad angulos rectos ipsam secare. sumatur enim circuli



a 1. hujus. ABC centrum a, quod sit E, & EA EB jungantur. Quoniam igitur AF est æqualis FB, communis autem FE, duæ duabus æquales sunt, & basis EA basi EB est æqualis. ergo & angulus AFE angulo BFE æqualis

b 8. primi. b erit. cum autem recta linea super rectam insistens angu-

c Diffin 10. primi. los, qui deinceps sunt, æquales inter se fecerit, rectus est c uterque æqualium angulorum. uterque igitur AFE BFE est rectus. quare recta linea CD per centrum ducta rectam lineam AB non ductam per centrum bifariam secans, & ad angulos rectos ipsam secabit. Si vero CD secet AB ad rectos angulos, dico & bifariam ipsam secare, hoc est AF ipsi FB æqualem esse. iisdem enim constructis, quoniam EA, quæ

d 5. primi. ex centro est æqualis EB, & angulus EAF angulo d EBF æqualis erit, est autem & AFE rectus æqualis recto BFE. duo igitur triangula EAF EBF duos angulos duobus angulis æquales habent, unumque latus uni lateri æquale EF, commune scilicet utrisque, quod uni angulorum æqualium subtenditur. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia

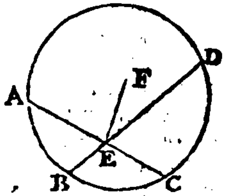
e 26. primi. e habebunt. atque erit AF ipsi FB æqualis. Si igitur in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam secet, & ad angulos rectos ipsam secabit. quod si ipsam secet ad rectos angulos, & bifariam secabit. Quod oportebat demonstrare.

PROP.

PROP. IV. THEOR.

Si in circulo duæ rectæ lineæ se invicem secent non ductæ per centrum, sese bifariam non secabunt.

Sit circulus ABCD; & in ipso duæ rectæ lineæ AC BD se invicem secent in puncto E, non ductæ per centrum. dico eas sese bifariam non secare. si enim fieri potest secent sese bifariam, ita ut AE sit æqualis EC, & BE ipsi ED: sumaturque [a] centrum ABCD circuli, quod sit F, & EF jungatur. quoniam igitur recta linea FE per centrum ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum bifariam secat, & ad rectos angulos ipsam secabit [b]. quare rectus est FEA angulus. rursus quoniam recta linea FE rectam lineam quandam BD non ductam per centrum bifariam secat, & ad angulos rectos ipsam [b] secabit. rectus igitur angulus est FEB. ostensus autem est rectus & FEA. ergo FEA angulus ipsi FEB æqualis erit, minor majori, quod fieri non potest. non igitur AC BD sese bifariam secant. Quare si in circulo duæ rectæ lineæ se invicem secent non ductæ per centrum, sese bifariam non secabunt. Quod ostendere oportebat.

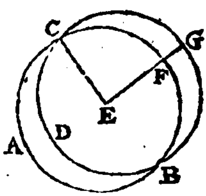


[a] 1. hujus.
[b] 3. hujus.

PROP. V. THEOR.

Si duo circuli se invicem secent, non erit ipsorum idem centrum.

Duo enim circuli se invicem secent ABC CDG in punctis B C. dico ipsorum idem centrum non esse. Si enim fieri potest, sit centrum E; jungaturque EC, & EFG utcunque ducatur. Quoniam E centrum est circuli ABC erit CE ipsi EF æqualis. rursus quoniam E centrum est CDG circuli, æqualis est CE ipsi EG. sed ostensa est CE æqualis EF. ergo EF ipsi EG æqualis erit, minor majori, quod fieri non potest. non igitur punctum E centrum est circulorum ABC CDG. Quare si duo circuli se invicem secent, non erit ipsorum idem centrum. Quod ostendendum fuit.

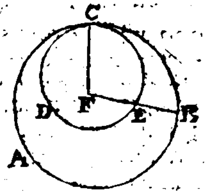


PROP. VI.

PROP. VI. THEOR.

Si duo circuli sese intra contingant, ipsorum idem centrum non erit.

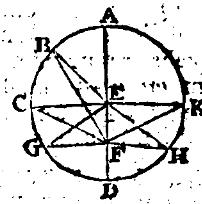
Duo enim circuli ABC CDE contingant sese intra in puncto C. dico ipsorum non esse idem centrum. si enim fieri potest sit F; jungaturque FC, & FEB utcunque ducatur. Quoniam igitur F centrum est circuli ABC, æqualis est CF ipsi FB. rursus quoniam F centrum est circuli CDE, erit CF æqualis FE. ostensa autem est CF æqualis FB. ergo & FE ipsi FB est æqualis, minor majori, quod fieri non potest. non igitur F punctum centrum est circulorum ABC CDE. Quare si duo circuli sese intra contingant, ipsorum idem centrum non erit. Quod demonstrare oportebat.



PROP. VII. THEOR.

Si in circuli diametro aliquod punctum sumatur, quod non sit centrum circuli, & ab eo in circulum cadant quævis rectæ lineæ; maxima quidem erit in qua centrum: minima vero reliqua: aliarum autem propinquior ei quæ per centrum transit, semper remotiore major est. at duæ tantum æquales ab eodem puncto in circulum cadent ad utrasque partes minimæ.

Sit circulus ABCD, cujus diameter AD: & in ipsa AD sumatur aliquod punctum F, quod non sit centrum circuli. Sit autem circuli centrum E: & a puncto F in circulum ABCD cadant quædam rectæ lineæ FB FC FG. dico FA maximam esse, & FD minimam; aliarum vero, FB quidem majorem quam FC, & FC majorem quam FG. jungantur enim BE CE GE. Et quoniam omnis trianguli duo latera [a] reliquo sunt majora; erunt BE EF majores quam BF. est autem AE æqualis EB. ergo BE EF ipsi AF sunt æquales. major igitur est AF quàm FB. rursus quoniam BE est æqualis EC, communis autem FE, duæ BE EF duabus CE EF æquales



a 20. primi.

quales sunt. sed BEF angulus major est angulo CEF: basis igitur BF basi FC est [b] major. eadem ratione & CF major est quam FG. rursus quoniam GF FE majores [a] sunt quam EG, æqualis autem GE ipsi ED; erunt GF FE majores quam ED. communis auferatur EF. ergo reliqua GF major est quam reliqua FD. maxima igitur est FA, & FD minima: major vero BF quam FC, & FC quam FG major. dico & à puncto F duas tantum rectas lineas æquales cadere in circulum ABCD ad utrasque partes minimæ FD. constituatur [c] enim ad lineam EF, atque ad datum in ea punctum E, angulo GEF æqualis angulus FEH: & FH jungatur. quoniam igitur GE est æqualis EH, communis autem EF, duæ GE EF duabus HE EF æquales sunt: & angulus GEF est æqualis angulo HEF. basis igitur FG basi FH æqualis [d] erit. dico à puncto F in circulum non cadere aliam ipsi FG æqualem. si enim fieri potest, cadat FK. & quoniam FK est æqualis FG, estque ipsi FG æqualis FH; erit & FK ipsi FH æqualis, videlicet propinquior ei, quæ per centrum transit, æqualis remotiori, quod fieri non potest. Si igitur in circuli diametro aliquod punctum sumatur quod non sit centrum circuli, &c. Quod demonstrare oportebat.

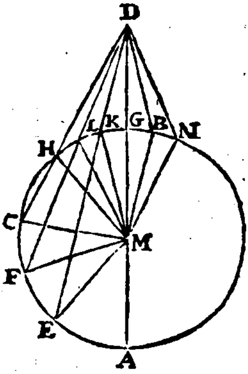
[b] 24. primi.
[a] 20. primi.
[c] 23. primi.
[d] 4. primi.

PROP. VIII. THEOR.

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, atque ab eo ad circulum ducantur quædam rectæ lineæ, quarum una per centrum transeat, aliæ vero utcunque: earum quidem quæ in concavam circumferentiam cadunt, maxima est quæ per centrum transit; aliarum autem propinquior ei quæ per centrum, semper remotiore major est. at earum quæ in convexam circumferentiam cadunt minima est quæ inter punctum, & diametrum interjicitur; aliarum vero quæ propinquior minimæ semper remotiore est minor. duæ autem tantum æquales à puncto in circulum cadunt ad utrasque partes minimæ.

Sit circulus ABC, & extra circulum sumatur aliquod punctum D: ab eo autem in circulum ducantur rectæ lineæ quædam DA DE DF DC: sitque DA per centrum. dico earum quidem quæ in concavam AEFC circumferentiam cadunt, maximam esse DA quæ per centrum transit; & minimam quæ inter punctum D, & diametrum AG interjicitur, videlicet DG: majorem autem DE quam DF; & DF majorem

majorem quam DC: earum vero quæ in convexam circumferentiam HLKG cadunt, quæ propinquior est minimæ DG semper remotiore esse minorem; hoc est DK minorem
a 1. hujus quam DL & DL minorem quam DH. sumatur a enim centrum circuli ABC, quod sit M, & jungantur ME MF MC MH ML. & quoniam AM est æqualis ME, communis apponatur MD. ergo AD est
b 20. primi. æqualis ipsis EM MD. sed EM MD sunt majores b quam ED. ergo & AD quam ED est major. rursus quoniam æqualis est ME ipsi MF, communis apponatur MD. erunt EM MD ipsi MF MD æquales; at angulus EMD
c 24. primi. major est angulo FMD. basis igitur ED basi FD major c erit. similiter demonstrabimus, & FD majorem esse quam CD. ergo maxima est DA; major autem DE quam DF, & DF quam DC major. præterea quoniam



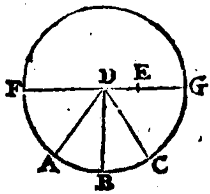
d Axiom. 4. MK KD sunt majores b quam MD, & MG est æqualis MK; erit reliqua KD quam reliqua d GD major. quare GD minor quam KD, & idcirco GD minima est. & quoniam trian-
e 21. primi. guli MLD in uno latere MD, duæ rectæ lineæ MK KD intra constituuntur, erunt e MK KD minores ipsis ML LD, quarum MK est æqualis ML. reliqua igitur DK minor est quàm reliqua DL. similiter ostendemus, & DL quam DH minorem esse. ergo DG minima est. minor vero DK quam DL, & DL minor quàm DH. dico etiam duas tantum æquales à puncto D in circulum cadere ad utrasque minimæ par-
f 23. primi. tes. constituatur ad rectam lineam MD, ad datumque in ea punctum M, angulo KMD æqualis f angulus DMB, & DB jungatur. itaque quoniam MK est æqualis MB, communis autem MD, duæ KM MD duabus BM MD æquales sunt, al-
g 4 primi. tera alteri, & angulus KMD æqualis angulo BMD, basis igitur DK basi DB est æqualis g. dico à puncto D aliam ipsi DK æqualem in circulum non cadere. si enim fieri potest, cadat DN. & quoniam DK est æqualis DN, & DK ipsi DB est æqualis; erit & DB æqualis DN, propinquior scilicet minimæ æqualis remotiori, quod fieri non posse ostensum est. Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, &c. quod ostendere oportebat.

PROP.

PROP. IX. THEOR.

Si intra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures quàm duæ rectæ lineæ æquales; punctum quod sumitur circuli centrum erit.

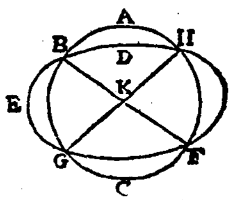
Sumatur enim intra circulum A B C punctum aliquod D: atque à puncto D in circulum A B C cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales D A D B D C. dico punctum D, quod sumitur, circuli A B C esse centrum. Non enim sed; si, fieri potest, sit E centrum, & juncta D E in F G producatur. ergo F G diameter est A B C circuli. itaq; quoniam in F G diametro circuli A B C sumptum est aliquod punctum D quod non est centrum circuli, maxima quidem erit D G, major [a] autem D C quam D B, & D B quam D A. sed & æquales [b], quod fieri non potest. non igitur E centrum est circuli A B C. similiter ostendemus neque aliud punctum centrum esse præter ipsum D. ergo D circuli B C centrum erit. Quod oportebat demonstrare. [a] 7. hujus. [b] ex hyp.



PROP. X. THEOR.

Circulus circulum in pluribus, quam duobus punctis non secat.

Si enim fieri potest circulus A B C circulum D E F secet in pluribus punctis, quam duobus; nempe in B G F, & circuli A B C centrum sumatur, quod sit K, & K B K G K F jungantur. Quoniam igitur intra circulum D E F sumptum est aliquod punctum K, à quo in circulum D E F incidant plures, quam duæ rectæ lineæ K B K G K F æquales, erit punctum K circuli D E F centrum [a]. est autem, & circuli A B C centrum [b] K. duorum igitur circulorum, qui se se secant, idem erit K centrum, quod fieri non potest. Quare circulus circulum in pluribus, [a] 9. hujus. [b] Ex hyp.



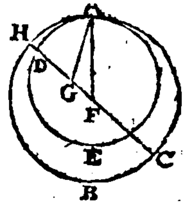
pluribus quam duobus punctis non secat. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XI. THEOR.

Si duo circuli sese intus contingant, & sumantur centra ipsorum; recta linea ipsorum centra conjungens producta in circulorum contactum cadet.

Duo enim circuli ABC ADE sese intus contingant in puncto A, & sumatur circuli quidem ABC centrum quod sit F, circuli vero ADE centrum G. dico rectam lineam à puncto G ad F ductam, si producatur in punctum A cadere. non enim; sed, si fieri potest, cadat ut FGDH. & AF AG jungantur. Itaque quoniam AG GF majores [a] sunt quam FA, hoc est quam FH, communis auferatur FG. reliqua igitur AG major est quam reliqua GH. sed AG est æqualis GD. ergo GD ipsa GH est major, minor majore, quod fieri non potest. non igitur à puncto F ad G ducta recta linea extra contactum A cadet: quare in ipsum cadat necesse est. Si igitur duo circuli sese intus contingant, recta linea ipsorum centra conjungens, si producatur in contactum circulorum cadet. Quod oportebat demonstare.

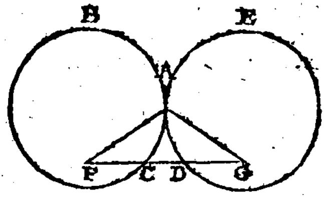
[a] 20. primi.



PROP. XII. THEOR.

Si duo circuli se se extra contingant, recta linea ipsorum centra conjungens per contactum transibit.

Duo enim circuli ABC ADE sese extra contingant in puncto A; & sumatur circuli quidem ABC centrum quod sit F: circuli vero ADE centrum G. dico rectam lineam, quæ à puncto F ad G ducitur, per contactum A transire. non enim; sed, si fieri potest, cadat ut FCDG: & FA AG jungantur. Quoniam igitur F centrum est circuli ABC, erit AF æqualis FC. rursus quoniam G centrum est ADE circuli, erit AG ipsi GD æqualis. ostensa est autem, & AF æqualis FC. sunt igitur FA AG ipsis FC DG æquales. ergo tota FG major est quam FA AG. sed & minor,

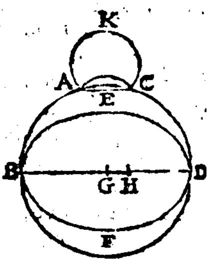


minor a, quod fieri non potest. non igitur à puncto F ad G a 20. primi
ducta recta linea per contactum A non transibit. quare per ipsum transeat necesse est. Si igitur duo circuli sese extra contingant, recta linea ipsorum centra conjungens per contactum transibit. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XIII. THEOR.

Circulus circulum non contingit in pluribus punctis quam uno, sive intus sive extra contingat.

Si enim fieri potest, circulum A B C D circulus E B F D contingat primum intus in pluribus punctis quam uno, videlicet in B D: & sumatur circuli quidem A B D C centrum G; circuli vero E B F D centrum H. ergo recta linea quæ à puncto G ad H ducitur, in puncta a B D cadet. a 11 hujus. cadat ut B G H D. & quoniam G centrum est circuli A B D C, erit B G ipsi G D æqualis. major igitur est B G, quam H D: & B H quam H D multo major. rursus quoniam H centrum est E B F D circuli, æqualis est B H ipsi H D. atqui ostensa est ipsa multo major, quod fieri non potest. non igitur circulus circulum intus contingit in pluribus punctis, quàm uno: dico etiam neque extra contingere. si enim fieri potest, circulus A C K circulum A B D C extra contingat



in pluribus punctis quàm uno, videlicet in A C, & A C jungatur. itaque quoniam in circumferentia utrorumque circulorum A B D C A C K sumpta sunt duo puncta A C; recta linea, quæ ipsa conjungit intra utrumque ipsorum cadet b. sed intra circulum quidem A B D C cadit, extra circu- b 2 hujus.
lum vero A C K, quod est absurdum. Non igitur circulus circulum extra contingit in pluribus punctis quàm uno. ostensum autem est neque intus contingere. circulus igitur circulum non contingit in pluribus punctis quàm uno, sive intus, sive extra contingat. Quod oportebat demonstrare.

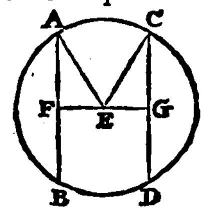
PROP. XIV. THEOR.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter à centro distant: & quæ æqualiter à centro distant, inter se sunt æquales.

Sit circulus A B D C, & in ipso æquales rectæ lineæ A B C D. dico eas à centro æqualiter distare. Sumatur enim circuli

A B D C

ABDC centrum quod sit E, & ab ipso ad AB CD perpendiculares ducantur EF EG, & AE EC jungantur. Quoniam igitur recta linea quædam per centrum ducta EF rectam lineam quandam AB non ductam per centrum ad rectos angulos secat, & bifariam ipsam secabit [a]. quare AF est æqualis FB, ideoque AB ipsius AF dupla. eadem ratione, & CD dupla est CG. atque est AB ipsi CD æqualis. æqualis igitur & AF ipsi CG. & quoniam AE est æqualis EC, erit, & quadratum ex AE quadrato ex EC æquale. sed quadrato quidem ex AE æqualia sunt ex AF FE quadrata [b]; rectus enim angulus est ad F: quadrato autem ex EC æqualia sunt quadrata ex EG GC, cum angulus ad G sit rectus. quadrata igitur ex AF FE æqualia sunt quadratis ex CG GE, quorum quadratum ex AF quadrato ex CG æquale, etenim æqualis est AF ipsi CG. reliquum igitur quod fit ex FE quadratum æquale est reliquo quod ex EG; ac propterea FE ipsi EG est æqualis. in circulo autem æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipsas perpendiculares ductæ æquales [c] sunt. ergo AB CD à centro æqualiter distant. Sed si AB CD æqualiter distent à centro, hoc est, æqualis sit FE ipsi EG; dico AB ipsi CD æqualem esse. iisdem enim constructis, similiter ostendemus AB duplam esse ipsius AF, & CD duplam ipsius CG. & quoniam æqualis est AE ipsi EC, erit & ex AE quadratum quadrato ex EC æquale. sed quadrato quidem ex AE æqualia [b] sunt quadrata ex EF FA: quadrato autem ex EC æqualia [b] quadrata ex EG GC. quadrata igitur ex EF FA quadratis ex EG GC æqualia sunt. quorum quadratum ex EG æquale est quadrato ex EF, est enim EG ipsi EF æqualis: reliquum igitur ex AF quadratum æquale est reliquo ex CG. ergo AF ipsi CG est æqualis. atque est AB ipsius AF dupla, & CD dupla ipsius CG. In circulo igitur æquales rectæ lineæ æqualiter à centro distant, & quæ æqualiter à centro distant, inter se sunt æquales. Quod oportebat demonstrare.



[a] 3. hujus.

[b] 47. primi.

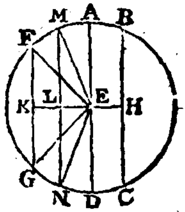
[c] 4 diff. hujus.

PROP.

PROP. XV. THEOR.

In circulo maxima quidem est diameter: aliarum vero semper propinquior ei quæ per centrum transit, remotiore major est.

Sit circulus ABCD, cujus diameter AD, centrum E; & propinquior quidem diametro AD sit BC; remotior vero FG. dico AD maximam esse, & BC majorem quàm FG. Ducantur enim à centro E ad BC FG perpendiculares EH EK. & quoniam BC propinquior est ei quæ per centrum transit, remotior autem FG; erit EK quam EH major. ponatur ipsi EH æqualis EL, & per L ipsi EK ad rectos angulos ducta LM in N producatur, & jungantur EM EN EF EG. quoniam igitur EH est æqualis EL, erit & BC ipsi MN æqualis [a]. rursus quoniam



æqualis est AE ipsi EM, & DE ipsi EN, erit & AD ipsis ME EN æqualis. sed ME EN [b] majores sunt quam MN; ergo & AD major est quam MN: & MN est æqualis BC, erit igitur AD quam BC major. quod cum duæ EM EN duabus FE EG æquales sint, angulusque MEN major angulo FEG, & basis MN basi FG major [c] erit. ostensa autem est MN æqualis BC ergo & BC quam FG est major. maxima igitur est AD, diameter, & BC major quam FG. Quare in circulo maxima est diameter, aliarum vero semper propinquior ei quæ per centrum transit remotiore est major. Quod demonstrare oportebat.

[a] 14. hujus
[b] 20. primi.
[c] 24. primi.

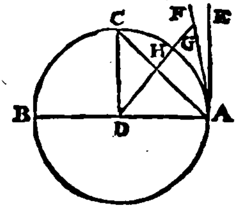
PROP. XVI. THEOR.

Quæ diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur, cadit extra circulum: & in locum qui inter rectam lineam, & circumferentiam interjicitur altera recta linea non cadet: & semicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo major est; reliquus autem minor.

Sit circulus ABC circa centrum D, & diametrum AB. dico rectam lineam, quæ à puncto A ipsi AB ad rectos angulos ducitur extra circulum cadere. non enim; sed, si fieri

 potest,

potest, cadat intus, ut AC, & DC jungatur. itaque quoniam æqualis est DA ipsi DC, erit & angulus DAC angulo ACD æqualis [a]. rectus autem est DAC; ergo & ACD est rectus; ac propterea anguli DAC ACD duobus rectis æquales sunt. quod fieri non potest [b]. non igitur à puncto A ipsi BA ad rectos angulos ducta cadet intra circulum. similiter ostendemus neque in circumferentiam cadere. extra igitur cadat necesse est. cadat ut AE. dico in locum qui inter rectam lineam AE & circumferentiam CHA interjicitur, alteram rectam lineam non cadere. si enim fieri potest, cadat ut FA, & à puncto D ad FA perpendicularis [c] ducatur DG. & quoniam rectus est angulus AGD, minor autem recto DAG, erit DA quàm DG major [d]. æqualis autem est DA ipsi DH. major igitur est DH ipsa DG, minor majore, quod fieri non potest. non igitur in locum qui inter rectam lineam & circumferentiam interjicitur, altera recta linea cadet. dico præterea angulum semicirculi, qui recta linea BA, & circumferentia CHA continetur, omni angulo acuto rectilineo majorem esse; reliquum vero contentum circumferentia CHA, & recta linea AE omni angulo rectilineo esse minorem. si enim est aliquis angulus rectilineus acutus major quidem contento recta linea BA, & CHA circumferentia, aut aliquis minor contento CHA circumferentia, & recta linea AE, in locum qui inter circumferentiam CHA, & rectam lineam AE interjicitur, cadet aliqua recta linea quæ faciet angulum majorem quidem contento recta linea BA & CHA circumferentia, qui scilicet rectis lineis continetur, minorem vero contento circumferentia CHA, & AE recta linea, non cadit autem [e]: non igitur erit angulus acutus qui rectis lineis continetur, major angulo contento recta linea BA, & CHA circumferentia, neque minor contento circumferentia CHA, & AE recta linea.



[a] 5. primi.

[b] 17. primi.

[c] 12 primi.

[d] 19. primi.

[e] ex prius demonstratis.

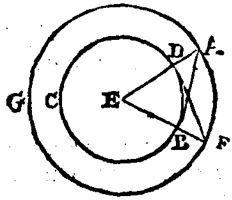
Cor. Ex hoc manifestum est rectam lineam quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, circulum contingere, & rectam lineam contingere circulum in uno tantum puncto quoniam quæ occurrit in duobus punctis intra ipsum cadit, ut ostensum est.

PROP.

PROP. XVII. PROBL.

A dato puncto rectam lineam ducere quæ datum circulum contingat.

Sit datum quidem punctum A, datus autem circulus BCD. oportet à puncto A rectam lineam ducere, quæ circulum BCD contingat. sumatur enim centrum circuli E; & juncta AE, centro quidem E, intervallo autem EA circulus AFG describatur: & à puncto D ipsi EA ad rectos angulos a ducatur DF: junganturque EBF AB. dico à puncto A ductam esse AB quæ circulum BCD contingit. quoniam enim E centrum est circulorum BCD AFG, erit EA æqualis EF, & ED ipsi EB. duæ igitur AE EB duabus FE ED æquales sunt, & angulum communem continent qui est ad E. ergo basis DF basi AB est b æqualis, triangulumque DEF æquale triangulo EBA, & reliqui anguli reliquis angulis. æqualis igitur est angulus EBA angulo EDF. & EDF rectus est. quare & rectus EBA: atque est EB ex centro. quæ autem diametro circuli ab extremitate ad rectos angulos ducitur circulum contingit c. ergo AB contingit circulum. A dato igitur puncto A ducta est recta linea AB quæ circulum BCD contingit. Quod facere oportebat.

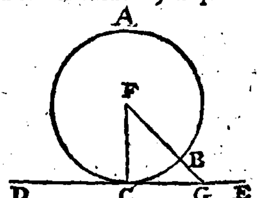


a 11. primi.
b 4. primi.
c 16. hujus.

PROP. XVIII. THEOR.

Si circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit.

Circulum enim ABC contingat quædam recta linea DE in puncto C: & circuli ABC centrum sumatur F, à quo ad C ducatur FC. dico FC ad ipsam DE perpendicularem esse. si enim non ita sit, ducatur à puncto F ad DE perpendicularis a FG. quoniam igitur angulus FGC rectus est, erit GCF acutus b, ac propterea FGC angulus major angulo FCG. majorem autem angulum majus latus c subtendit. major igitur est FC quàm FG. æqualis autem FC ipsi FB. ergo



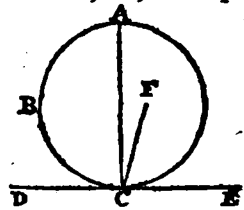
a 12. primi.
b 32. primi.
c 19. primi.

ergo FB ipsa FG est major, minor majore, quod fieri non potest. non igitur FG est perpendicularis ad DE. similiter ostendemus neque aliam quampiam esse præter ipsam FC. ergo FC ad DE est perpendicularis. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XIX. THEOR.

Si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur: in ea circuli centrum erit.

Circulum enim ABC contingat quædam recta linea DE in C, & à puncto C ipsi DE ad rectos angulos ducatur CA. dico in ipsa AC circuli centrum esse. non enim; sed, si fieri potest, sit F centrum, & jungatur CF.



quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta linea DE, & à centro ad contactum ducta est FC; erit FC ad ipsam DE perpendicularis [a]. rectus igitur angulus est FCE. est autem & ACE rectus [b]. ergo FCE angulus est æqualis angulo ACE, minor majori, quod fieri non potest. non igitur F centrum est ABC circuli. similiter ostendemus neque aliud aliquod esse præterquam in ipsa AC. Quare si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in ea circuli erit centrum. Quod demonstrare oportebat.

a 18. hujus.

b Ex hyp.

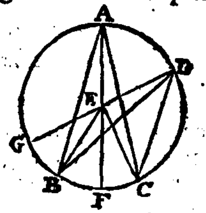
PROP. XX. THEOR.

In circulo angulus qui ad centrum duplex est ejus qui ad circumferentiam est, quando circumferentiam eandem pro basi habeant.

Sit circulus ABC, ad cujus centrum quidem angulus sit BEC, ad circumferentiam vero BAC, & eandem circumferentiam BC pro basi habeant. dico BEC angulum anguli BAC duplum esse. jungatur enim AE, & ad F producatur. itaque quoniam EA est æqualis EB, erit & angulus EAB angulo EBA [a] æqualis. anguli igitur EAB EBA duplices sunt ipsius

a 5. primi.

ipsius anguli E A B; sed angulus B E F est æqualis *b* angulis E A B E B A; ergo B E F angulus anguli E A B est duplex. eadem ratione & angulus F E C duplex est ipsius E A C. totus igitur B E C totius B A C duplex erit. rursus inflectatur, & sit alter angulus B D C, junctaque D E ad G producatur. similiter ostendemus angulum G E C anguli E D C duplum esse; quorum G E B duplus est ipsius E D B. ergo reliquus B E C reliqui B D C est duplus. In circulo igitur angulus qui ad centrum duplex est ejus qui ad circumferentiam, quando circumferentiam eandem pro basi habeant. Quod oportebat demonstrare. *b* 32. primi.

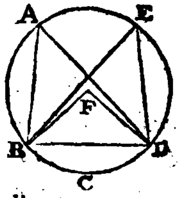


PROP. XXI. THEOR.

In circulo qui in eodem segmento sunt anguli inter se æquales sunt.

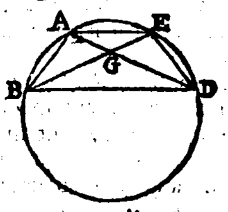
Sit circulus A B C D E, & in eodem segmento B A E D anguli sint B A D B E D. dico eos inter se æquales esse. sumatur enim circuli A B C D E centrum quod sit F: junganturque B F F D. Quoniam angulus quidem B F D est ad centrum, angulus vero B A D ad circumferentiam, & circumferentiam eandem B C D pro basi habent; erit B F D angulus *a* anguli B A D duplus. eadem ratione angulus B F D duplus est etiam anguli B E D. ergo angulus B A D angulo B E D æqualis erit. si anguli B A D B E D sunt in segmento minore semicirculo, ducatur A E, eruntque omnes anguli trianguli A B G æquales *b* omnibus angulis trianguli D E G. & anguli A B E A D E sunt æquales per hactenus demonstrata, & anguli A G B D G E sunt etiam æquales *c*, ad verticem enim sunt: quare & reliquus B A G reliquo G E D æqualis erit. In circulo igitur qui in eodem segmento sunt anguli inter se æquales sunt. Quod oportebat demonstrare.

a 20. hujus.



b 32. primi.

c 15 primi.

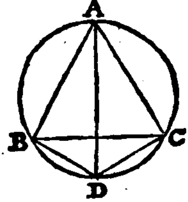


PROP. XXII. THEOR.

Quadrilaterorum quæ in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis æquales sunt.

Sit circulus A B D C, & in ipso quadrilaterum A B C D. dico angulos ipsius oppositos duobus rectis æquales esse. Jungantur A D B C: quoniam igitur omnis trianguli tres anguli duobus rectis sunt æquales [a], erunt trianguli A B C tres anguli C A B A B C B C A æquales duobus rectis. sed angulus A B C est æqualis [b] angulo A D C, in eodem enim sunt segmento A B D C. & angulus A C B æqualis [b] ipsi A D B, quod sint in eodem A C D B segmento: totus igitur angulus B D C angulis A B C A C B æqualis est. communis apponatur B A C angulus; erunt anguli B A C A B C A C B, angulis B A C B D C æquales. sed B A C A B C A C B sunt æquales [a] duobus rectis. ergo & anguli B A C B D C duobus rectis æquales erunt. similiter ostendemus angulos quoque A B D A C D duobus rectis esse æquales. Quadrilaterorum igitur quæ in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis æquales sunt. Quod oportebat demonstrare.

a 32. primi.
b 21. hujus.

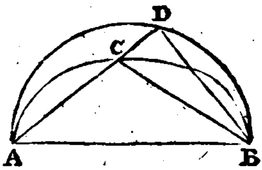


PROP. XXIII. THEOR.

Super eadem recta linea duo circulorum segmenta similia, & inæqualia ex eadem parte non constituentur.

Si enim fieri potest, super eadem recta linea A B duo circulorum segmenta similia, & inæqualia constituantur ex eadem parte A C B A D B; ducaturque A C D, & C B B D jungantur. itaque quoniam segmentum A C B simile est segmento A D B, similia autem circulorum segmenta sunt quæ angulos suscipiunt [a] æquales; erit A C B angulus æqualis angulo A D B, exterior interiori, quod fieri non potest [b]. Non igitur super eadem recta linea, duo circulorum segmenta similia, & inæqualia ex eadem parte constituentur. Quod demonstrare oportebat.

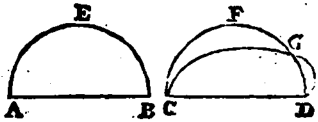
a Diffin. 11. huius.
b 16. primi.



PROP. XXIV. THEOR.

Super æqualibus rectis lineis similia circulorum segmenta inter se æqualia sunt.

Sint enim super æqualibus rectis lineis A B C D similia circulorum segmenta A E B C F D. dico segmentum A E B segmento C F D æquale esse. applicato enim A E B segmento segmento C F D, & posito puncto quidem A in C, recta vero linea A B in C D; congruet & B punctum puncto D, propterea quod A B ipsi C D sit æqualis. congruente autem recta linea A B rectæ C D; congruet & A E B segmentum segmento C F D. si enim A B congruet ipsi C D, segmentum autem A E B segmento C F D non congruet, sed permutabitur ut C G D, circulus circulum in pluribus quàm duobus punctis secabit. etenim circulus C G D circulum C F D secat in pluribus punctis quàm duobus, videlicet in punctis C G D, quod fieri non *a* potest. non igitur congruente recta linea A B rectæ C D, non congruet & A E B segmentum segmento C F D. quare congruet, & ipsi æquale erit. Super æqualibus igitur rectis lineis similia circulorum segmenta inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare.

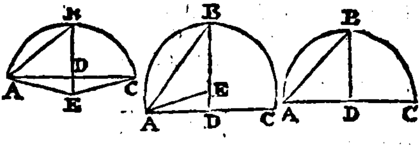


PROP. XXV. PROBL.

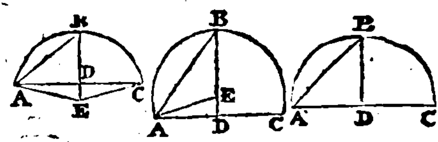
Circuli segmento dato describere circulum cujus est segmentum.

Sit datum circuli segmentum A B C. oportet describere circulum cujus A B C est segmentum. Secetur A C bifariam *a* in D: & à puncto D ipsi A C ad rectos angulos ducatur *b* D B, & A B jungatur. vel igitur angulus A B D major est angulo B A D, vel minor, vel ipsi æqualis. sit primum major, & ad rectam lineam B A, atque ad datum in ea punctum A constituatur angulus B A E æqualis *c* angulo A B D; & D B ad E producatur, jungaturque E C. quoniam igitur angulus A B E est æqualis angulo

a 10. primi.
b 11. primi.
c 23. primi.



a 6. primi. angulo B A E, a erit & B E recta linea ipsi E A æqualis. & quoniam A D est æqualis D C, communis autem D E, duæ A D D E duabus C D D E æquales sunt, altera alteri; & angulus A D E æqualis angulo C D E, rectus enim uterque est. ergo & basis A E basi E C est æqualis. sed ostensa est A E æqualis E B. quare & B E ipsi E C est æqualis, ac propterea tres rectæ lineæ A E E B E C inter se æquales sunt.

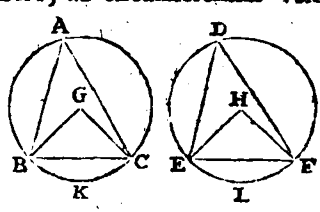


centro igitur E intervallo autem una ipsarum A E E B E C circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, & circulus descriptus erit. quare circuli segmento dato descriptus est circulus cujus segmentum est. sed & illud constat, segmentum A B C semicirculo minus esse; propterea quod centrum ipsius extra cadit. similiter, & si angulus A B D sit æqualis angulo B A D, facta A D æquali utrique ipsarum B D D C, erunt tres rectæ lineæ A D D B D C inter se æquales, atque erit D circuli descripti centrum, & segmentum A B C semicirculus. si vero angulus A B D minor sit angulo B A D; constituatur ad rectam lineam B A, & ad punctum in ea datum A, angulo A B D æqualis angulus A B E intra segmentum A B C. erit E centrum in ipsa D B, atque erit A B C segmentum semicirculo majus. Circuli igitur segmento dato descriptus est circulus cujus segmentum est. Quod facere oportebat.

PROP. XXVI. THEOR.

In æqualibus circulis æquales anguli æqualibus insistunt circumferentiis, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant.

Sint æquales circuli A B C D E F, & in ipsis æquales anguli ad centra quidem B G C E H F, ad circumferentias vero B A C E D F. dico B K C circumferentiam circumferentiæ E L F æqualem esse. jungantur enim B C E F. Quoniam æquales sunt A B C D E F circuli, erunt & quæ ex centris æquales. duæ igitur B G G C duabus E H H F æquales sunt:



& angulus ad G æqualis angulo ad H. ergo & basis

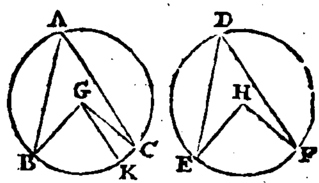
basis BC basi EF est [a] æqualis. rursus quoniam æqualis est angulus ad A angulo ad D, segmentum BAC simile [b] erit segmento EDF: & sunt super æqualibus rectis lineis BC EF. quæ autem super æqualibus rectis lineis similia sunt circulorum segmenta, inter se æqualia [c] sunt. segmentum igitur BAC segmento EDF est æquale, sed & totus ABC circulus æqualis est toti DEF. ergo & reliqua circumferentia BKC reliquæ ELF æqualis erit. In æqualibus igitur circulis æquales anguli æqualibus insistunt circumferentiis, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. Quod oportebat demonstrare.

[a] 4. primi.
[b] diffin. 11.
[c] 24. hujus.

PROP. XXVII. THEOR.

In æqualibus circulis anguli qui æqualibus insistunt circumferentiis inter se æquales sunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant.

In æqualibus enim circulis ABC DEF, æqualibus circumferentiis BC EF insistant anguli ad centra quidem BGC EHF, ad circumferentias vero BAC EDF. dico angulum BGC angulo EHF, & angulum BAC angulo EDF æqualem esse. si quidem igitur angulus BGC æqualis sit angulo EHF, manifestum est angulum quoque BAC angulo EDF esse æqualem. sin minus, unus ipsorum est major. sit



major BGC, & constituatur ad rectam lineam BG, & ad punctum in ipsa G, angulo EHF æqualis [a] angulus BGK. æquales autem anguli æqualibus insistunt [b] circumferentiis, quando ad centra fuerint. ergo circumferentia BK æqualis est circumferentiæ EF. sed circumferentia EF æqualis est ipsi BC. ergo & BK ipsi BC est æqualis, minor majori, quod fieri non potest. non igitur inæqualis est angulus BGC angulo EHF: ergo est æqualis. atque est anguli quidem BGC dimidium angulus qui ad A; anguli vero EHF dimidium qui ad D. angulus igitur qui ad A angulo qui ad D est æqualis. In æqualibus igitur circulis, anguli qui æqualibus insistunt circumferentiis inter se æquales sunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. Quod oportebat demonstrare.

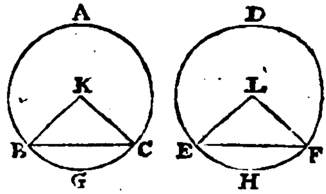
[a] 23. primi.
[b] 26. hujus.

PROP.

PROP. XXVIII. THEOR.

In æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori.

Sint æquales circuli A B C D E F; & in ipsis æquales rectæ lineæ B C E F, quæ circumferentias quidem B A C E D F majores auferant, circumferentias vero B G C E H F minores. dico circumferentiam B A C majorem majori circumferentiæ E D F, & minorem circumferentiam B G C minori E H F æqualem esse. sumantur enim centra [a] circulorum K L, junganturque B K K C E L L F. Quoniam circuli æquales sunt, erunt & quæ ex centris æquales [b].



duæ igitur B K K C sunt æquales duabus E L L F: & basis B C æqualis est basi E F, ergo angulus B K C angulo E L F est [c] æqualis: æquales autem anguli æqualibus insistunt circumferentiis, quando ad centra fuerint [d]. quare circumferentia B G C æqualis est circumferentiæ E H F. sed & totus A B C circulus toti D E F est æqualis. reliqua igitur circumferentia B A C reliquæ E D F æqualis erit. Ergo in æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori. Quod demonstrare oportebat.

a 1. hujus.
b Diffin 1.
c 8. primi
d 26. hujus.

PROP. XXIX. THEOR.

In æqualibus circulis, æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt.

Sint æquales circuli A B C D E F: & in ipsis æquales assumantur circumferentiæ B G C E H F, & B C E F jungantur. dico rectam lineam B C rectæ E F æqualem esse. sumantur enim centra [a] circulorum K L, & jungantur B K K C E L L F. quoniam igitur circumferentia B G C est æqualis circumferentiæ E H F, erit & angulus B K C angulo E L F æqualis [b]. & quoniam circuli A B C D E F sunt æquales, & quæ ex centris æquales erunt [c]. duæ igitur B K K C sunt æquales duabus E L L F; & æquales angulos continent. quare basis B C basi E F est [d] æqualis. In æqualibus igitur circulis æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt. Quod oportebat demonstrare.

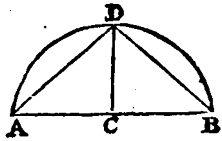
Vide figur. Prop. præcedentis.
a 1. hujus.
b 27. hujus.
c Diffin. 1.
d 4. primi.

PROP.

PROP. XXX. PROBL.

Datam circumferentiam bifariam secare.

Sit data circumferentia A D B. oportet A D B circumferentiam bifariam secare. Jungatur A B, & in C bifariam [a] secetur: à puncto autem C ipsi A B ad rectos angulos ducatur C D: & jungantur A D D B. quoniam igitur A C est æqualis C B, communis autem C D, duæ A C C D duabus B C C D æquales sunt: & angulus A C D æqualis angulo B C D, rectus enim uterque est: ergo basis A D basi D B est [b] æqualis. æquales autem rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, quare circumferentia A D circumferentiæ B D æqualis erit. Data igitur circumferentia bifariam secta est. Quod facere oportebat.

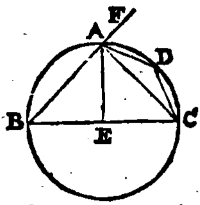


[a] 10. primi.
[b] 4. primi. 28. hujus.

PROP. XXXI. THEOR.

In circulo angulus qui in semicirculo rectus est, qui vero in majori segmento minor est recto, & qui in minori major recto; & insuper majoris quidem segmenti angulus recto major est, minoris vero segmenti angulus recto minor.

Sit circulus A B C D cujus diameter B C, centrum autem E; & jungantur B A A C A D D C. dico angulum quidem, qui est in semicirculo B A C rectum esse, qui vero in segmento A B C majore semicirculo, videlicet angulum A B C, minorem esse recto, & qui est in segmento A D C minore semicirculo, hoc est angulum A D C, recto majorem. jungatur A E, & B A ad F producatur. itaque quoniam B E est æqualis E A, erit & angulus E A B, angulo E B A æqualis [a]. rursus quoniam A E est æqualis E C, & angulus A C E angulo C A E æqualis [a] erit. totus igitur angulus B A C est æqualis duobus A B C A C B angulis. est autem, & angulus F A C extra triangulum A B C, duobus A B C A C B æqualis [b]. angulus igitur B A C est æqualis angulo F A C; ac propterea uterque ipsorum rectus [c]. quare in semicirculo B A C angulus B A C rectus est.

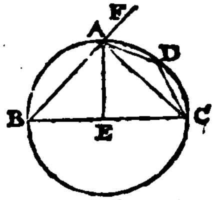


[a] 5 primi.
[b] 32. primi.
[c] Diffin. 10. primi.

eſt. & quoniam trianguli A B C duo anguli A B C B A C duobus rectis ſunt [d] minores, rectus autem B A C, erit A B C angulus recto minor, atque eſt in ſegmento A B C majore ſemicirculo. quod cum in circulo quadrilaterum ſit A B C D, quadrilaterorum vero qui in circulis deſcribuntur, anguli oppoſiti duobus rectis ſint [e] æquales: erunt A B C A D C anguli æquales duobus rectis, & angulus A B C minor eſt recto, reliquus igitur A D C recto major erit, atque eſt in ſegmento A D C minore ſemicirculo. dico præterea majoris ſegmenti angulum qui continetur A B C circumferentia, & recta linea A C recto majorem eſſe; angulum vero minoris ſegmenti, contentum circumferentia A D C, & recta linea A C recto minorem. quod quidem perſpicue apparet. quoniam angulus qui rectis lineis B A A C continetur rectus eſt, erit & contentus A B C circumferentia, & recta linea A C recto major. rurſus quoniam angulus contentus rectis lineis C A A F rectus eſt, erit qui continetur recta linea C A, & A D C circumferentia minor recto. In circulo igitur angulus qui in ſemicirculo rectus eſt, qui vero in majore ſegmento minor eſt recto, & qui in minori major recto: & inſuper majoris quidem ſegmenti angulus recto major eſt, minoris vero recto minor. Quod demonſtrare oportebat.

d 17. primi.

e 22. hujus.



Cor. Ex hoc manifeſtum eſt, ſi trianguli unus angulus ſit æqualis duobus, eum rectum eſſe; propterea quòd & qui deinceps eſt, iiſdem eſt æqualis. quando autem anguli deinceps ſunt æquales, neceſſario recti ſunt.

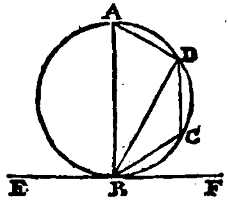
PROP. XXXII. THEOR.

Si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem in circulum ducatur recta linea ipſum ſecans: anguli quos ad contingentem facit, æquales erunt iis qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt.

Circulum enim A B C D contingat quædam recta linea E F in B, & à puncto B ad circulum A B C D ducatur recta linea B D ipſum utcunque ſecans. dico angulos quos B D cum E F contingente facit, æquales eſſe iis qui in alternis circuli ſegmentis conſiſtunt. hoc eſt angulum F B D eſſe æqualem angulo qui conſtituitur in D A B ſegmento videlicet ipſi

D A B;

DAB; angulum vero DBE æqualem angulo DCB qui in segmento DCB constituitur. ducatur enim à puncto B ipsi EF ad rectos [a] angulos BA: & in circumferentia BD sumatur quod vis punctum C; junganturque AD DC CB. Quoniam igitur circulum ABCD contingit quædam recta linea EF in puncto B: & à contactu B ad rectos angulos contingenti ducta est BA, erit in ipsa BA centrum [b] ABCD circuli; quare BA ejusdem circuli diameter est, & angulus ADB in semicirculo est [c] rectus. reliqui igitur anguli BAD ABD uni recto æquales sunt. sed & ABF est rectus. ergo angulus ABF æqualis [d] est angulis BAD ABD. communis auferatur ABD. reliquus igitur DBF ei qui in alterno circuli segmento consistit, videlicet angulo BAD, est æqualis. & quoniam in circulo quadrilaterum est ABCD, & anguli ejus oppositi æquales [e] sunt duobus rectis; erunt DBF DBE anguli angulis BAD BCD æquales. quorum BAD ostensus est æqualis ipsi DBF; ergo reliquus DBE ei qui in alterno circuli segmento DCB constituitur, videlicet ipsi DCB, æqualis erit. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à contactu vero in circulum ducatur recta linea ipsum secans; anguli quos facit ad contingentem, æquales erunt iis qui in alternis circuli segmentis consistunt. Quod oportebat demonstrare.

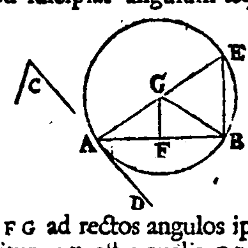


[a] 11. primi.
[b] 19. hujus.
[c] 31. hujus.
[d] 32. primi.
[e] 22. hujus.

PROP. XXXIII. PROBL.

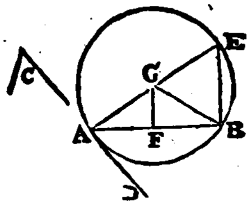
Super data recta linea describere segmentum circuli, quod suscipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

Sit data recta linea AB datus autem angulus rectilineus, qui ad C. itaque oportet super data recta linea AB describere segmentum circuli, quod suscipiat angulum æqualem angulo qui est ad C. Ad rectam lineam AB, & ad punctum in ea datum A, constituatur angulus BAD angulo qui est ad C æqualis [a]. & à puncto A ipsi AD ad rectos angulos [b] ducatur AE; secetur autem AB bifariam [c] in F, atque à puncto F ducatur FG ad rectos angulos ipsi AB; & GB jungatur. quoniam igitur AF est æqualis FB, communis



[a] 23 primi.
[b] 11. primi.
[c] 10. primi.

munis autem F G, duæ A F F G duabus B F F G æquales sunt: & angulus A F G æqualis angulo G F B. ergo basis A G basi G B est ᵈ æqualis. itaque centro G, intervallo autem A G circulus descriptus transibit etiam per B. describatur, & sit A B E, jungaturque E B. quoniam igitur ab extremitate diametri A E, & à puncto A, ipsi A E ad rectos angulos ducta est A D; ipsa A D circulum ᵉ continget. & quoniam circulum A B E contingit quædam recta linea A D, & à contactu qui est ad A, in circulum A B E ducta est recta linea A B: erit angulus D A B æqualis ᶠ angulo qui in alterno circuli segmento constituitur, videlicet ipsi A E B. sed angulus D A B, angulo ad C est æqualis. ergo & angulus ad C angulo A E B æqualis erit. super data igitur recta linea A B, segmentum circuli descriptum est A E B suscipiens angulum A E B dato angulo qui est ad C æqualem. Quod facere oportebat.

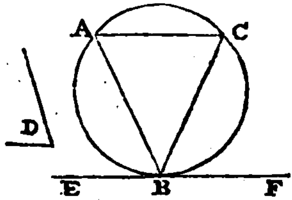


d 4. primi. e Cor. 16. hujus. f 32. hujus.

PROP. XXXIV. PROBL.

A dato circulo segmentum abscindere quod suscipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

Sit datus circulus A B C, datus autem angulus rectilineus qui ad D. oportet à circulo A B C segmentum abscindere, quod suscipiat angulum angulo ad D æqualem. Ducatur ᵃ recta linea E F circulum A B C in puncto B contingens: & ad rectam lineam E F, & ad punctum in ea B, constituatur angulus F B C angulo qui est ad D æqualis ᵇ. quoniam igitur circulum A B C contingit quædam recta linea E F in B puncto, & à contactu B ducta est B C, erit angulus F B C æqualis ᶜ ei qui in alterno circuli segmento constituitur. sed F B C angulus angulo qui ad D est æqualis. ergo & angulus in segmento B A C angulo ad D æqualis erit. A dato igitur circulo A B C, abscissum est segmentum quoddam B A C suscipiens angulum dato angulo rectilineo qui est ad D, æqualem. Quod facere oportebat.

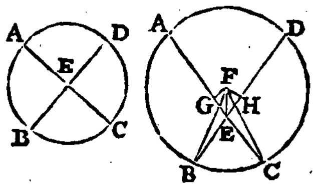


a 17. hujus. b 23. primi. c 32. hujus.

PROP. XXXV. THEOR.

Si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secent, rectangulum sub segmentis unius contentum æquale est ei quod sub alterius segmentis continetur.

In circulo enim ABCD, duæ rectæ lineæ AC BD sese mutuo in puncto E secent. dico rectangulum contentum sub AE EC æquale esse ei quod sub DE EB continetur. si AC BD per centrum transeant, ita ut E sit centrum ABCD circuli; manifestum est æqualibus existentibus AE EC DE EB, & rectangulum contentum sub AE EC æquale esse ei quod sub DE EB continetur. si AC DB non transeant per centrum, sumatur centrum circuli ABCD quod sit F: & ab F ad rectas lineas AC DB perpendiculares ducantur FG FH: junganturque FB FC FE. quoniam igitur recta quædam linea GF per centrum ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum ad rectos angulos secat, & bifariam ipsam secabit [a].quare AG ipsi GC est æqualis. & quoniam recta linea AC secta est in partes æquales in puncto G, & in partes inæquales in E, erit rectangulum sub AE EC contentum, una cum ipsius EG quadrato [b]; æquale quadrato ex GC. commune addatur ex GF quadratum. ergo rectangulum sub AE EC, una cum iis quæ ex EG GF quadratis, æquale est quadratis ex CG GF. sed quadratis quæ ex EG GF æquale [c] est quadratum ex FE: quadratis vero ex CG GF æquale [c] quod ex FC fit quadratum. rectangulum igitur sub AE EC, unà cum quadrato ex FE, æquale est quadrato ex FC. est autem CF æqualis FB. ergo rectangulum sub AE EC, unà cum quadrato ex EF, æquale est ei quod ex FB fit quadrato. eadem ratione & rectangulum sub DE EB unà cum quadrato ex FE, æquale est quadrato ex FB. ostensum autem est & rectangulum sub AE EC, unà cum quadrato ex FE, æquale ei quod & ex FB quadrato. ergo rectangulum sub AE EC, unà cum quadrato ex FE, æquale est rectangulo sub DE EB, unà cum quadrato ex FE. commune auferatur ex FE quadratum. reliquum igitur rectangulum sub AE EC, reliquo sub DE EB rectangulo æquale erit. Quare si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secent, rectangulum sub segmentis unius contentum æquale est ei quod sub alterius segmentis continetur. Quod demonstrare oportebat.



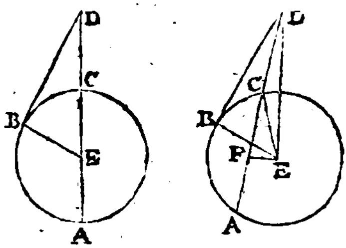
[a] 3. hujus.
[b] 5. secundi
[c] 47. primi.

PROP.

PROP. XXXVI. THEOR.

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, & ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero contingat; rectangulum quod sub tota secante, & exterius assumpta inter punctum & curvam circumferentiam continetur, æquale erit ei quod à contingente fit quadrato.

Extra circulum enim ABC sumatur aliquod punctum D, & ab eo ad dictum circulum cadant duæ rectæ lineæ DCA DB: & DCA quidem circulum ABC secet; DB vero contingat. dico rectangulum sub AD DC, quadrato quod fit ex DB æquale esse. vel igitur DCA per centrum transit, vel non transit. primum transeat per centrum circuli ABC, quod sit E, & EB jungatur. erit
a 18. hujus. angulus EBD rectus a. itaque quoniam recta linea AC bifariam secta est in E, & ipsi adjicitur CD, rectangulum sub AD DC, una cum quadrato ex EC, æ-
b 6 secundi. quale b erit ei quod fit ex ED quadrato. æqualis autem est CE ipsi EB, ergo rectangulum sub AD DC, unà cum quadrato quod ex EB, æquale est quadrato ex ED.
c 47. primi sed quadratum ex ED est æquale quadratis c ipsarum EB BD, rectus enim angulus est EBD. rectangulum igitur sub AD DC, unà cum quadrato ex EB, æquale est ipsarum EB BD quadratis. commune auferatur quadratum quod ex EB. ergo reliquum sub AD DC rectangulum, quadrato quod fit à contingente DB æquale erit. secundo DCA non transeat
d 1. hujus. per centrum ABC circuli: sumaturque d centrum E, & ad AC perpendicularis agatur EF, & jungantur EB EC ED, rectus igitur est EFD angulus. & quoniam recta linea quædam EF per centrum ducta, rectam lineam quandam AC non ductam per centrum ad rectos angulos secat, & bifa-
e 3. hujus. riam ipsam secabit e. quare AF ipsi FC est æqualis. rursus quoniam recta linea AC bifariam secta est in F, atque ipsi adjicitur CD, erit rectangulum sub AD DC, unà cum quadrato ex FC, æquale b quadrato quod ex FD. commune apponatur quod ex FE quadratum. rectangulum igitur sub



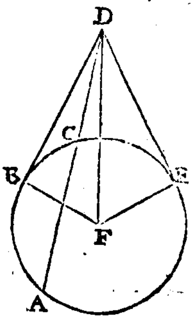
AD DC

AD DC unà cum quadratis ex CF FE est æquale quadratis ex DF FE. sed quadratis quidem ex DF FE æquale est [c] ex DE quadratum; etenim rectus est angulus EFD: quadratis vero ex CF FE æquale est [c] quadratum ex CE. [c] 47. primi.
ergo rectangulum sub AD DC, una cum quadrato quod ex CE, est æquale quadrato ex ED; æqualis autem CE ipsi EB; rectangulum igitur sub AD DC, una cum quadrato ex EB, æquale est ex ED quadrato. sed quadrato ex ED æqualia sunt quadrata [c] ex EB BD, si quidem rectus est angulus EBD. ergo rectangulum sub AD DC, una cum quadrato ex EB, æquale est eis quæ ex EB BD fiunt quadratis. commune auferatur quadratum ex EB. reliquum igitur sub AD DC rectangulum quadrato quod fit ex DB æquale erit. Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, &c. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXXVII. THEOR.

Si extra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero incidat: sit autem quod sub tota secante, & exterius assumpta inter punctum, & curvam circumferentiam continetur rectangulum æquale ei quod ab incidente fit quadrato; incidens linea circulum continget.

Extra circulum enim ABC sumatur aliquod punctum D, atque ab ipso in circulum cadant duæ rectæ lineæ DCA DB; DCA quidem circulum secet, DB vero incidat: sitque rectangulum sub AD DC æquale quadrato quod fit ex DB. dico ipsam DB circulum ABC contingere. Ducatur enim recta linea DE contingens circulum ABC, & sumatur circuli ABC centrum quod sit F, junganturque FE FB FD. ergo angulus FED rectus est [a]. & quoniam DE circulum ABC contingit, secat autem DCA, rectangulum sub AD DC æquale erit quadrato ex DE. sed rectangulum sub AD DC ponitur æquale quadrato ex DB. quadratum igitur quod ex DE quadrato ex DB æquale erit. ac propterea linea DE ipsi DB æqualis. est autem & FE æqualis FB. duæ igitur DE EF duabus DB BF æquales

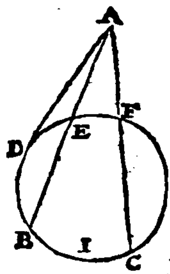


[a] 18. hujus.

 sunt;

sunt ;. & basis communis F D; angulus igitur D E F est æqualis angulo D B F, rectus autem est D E F, ergo & D B F est rectus. atque est F B producta diameter: quæ vero ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, circulum contingit. ergo D B circulum A B C contingat necesse est. similiter demonstrabitur & si centrum sit in ipsa A C. Si igitur extra circulum sumatur aliquod punctum, &c. Quod demonstrare oportebat.

Cor. Hinc si à puncto quovis extra circulum assumpto, plures lineæ rectæ A B A C circulum secantes ducantur; rectangula comprehensa sub totis lineis A B A C, & partibus externis A E A F, inter se sunt æqualia. nam si ducatur tangens A D, erit rectangulum sub B A A E æquale quadrato ex A B; & rectangulum sub C A A F eidem quadrato ex A D erit æquale, unde rectangula hæc æqualia erunt.



EUCLIDIS

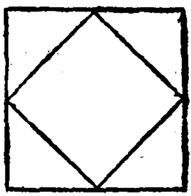
EUCLIDIS ELEMENTORUM.

LIBER QUARTUS.

DIFFINITIONES.

I

Figura rectilinea in figura rectilinea describi dicitur, quando unusquisque figuræ descriptæ angulus, unumquodque latus ejus in qua describitur, contingit.

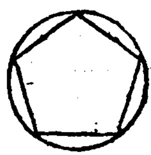


II.

Figura similiter circa figuram describi dicitur, quando unumquodque latus descriptæ, unumquemque angulum ejus circa quam describitur, contingit.

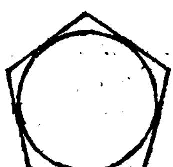
III.

Figura rectilinea in circulo describi dicitur, quando unusquisque descriptæ figuræ angulus circuli circumferentiam contingit.



IV.

Figura rectilinea circa circulum describi dicitur, quando unumquodque latus descriptæ, circuli circumferentiam contingit.



V.

Circulus similiter in figura rectilinea describi dicitur, quando circuli circumferentia unumquodque latus ejus in qua describitur, contingit.

VI.

Circulus circa figuram rectilineam describi dicitur, quando circuli circumferentia unumquemque angulum ejus circa quam describitur, contingit.

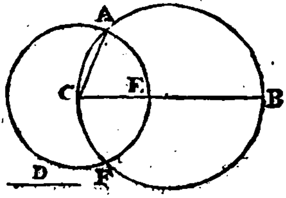
VII.

Recta linea in circulo aptari dicitur, quando ejus extrema in circuli circumferentia fuerint.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

In dato circulo, datæ rectæ lineæ quæ diametro ejus major non sit, æqualem rectam lineam aptare.

Sit datus circulus ABC, data autem recta linea non major circuli diametro D. oportet in circulo ABC rectæ lineæ D æqualem rectam lineam aptare. Ducatur circuli ABC diameter BC. si quidem igitur BC sit æqualis ipsi D, factum jam erit quod proponebatur. etenim in circulo ABC aptata est BC rectæ lineæ D æqualis. sin minus, major est BC quam D, ponaturque a 3. primi. a ipsi D æqualis CE: & centro quidem C intervallo autem CE circulus describatur AEF: & CA jungatur. itaque quoniam punctum C centrum est AEF circuli; erit CA ipsi CE æqualis. sed D est æqualis CE. ergo & D ipsi AC æqualis erit. in dato igitur circulo ABC datæ rectæ lineæ D, non majori circuli diametro, æqualis aptata est AC. Quod facere oportebat.

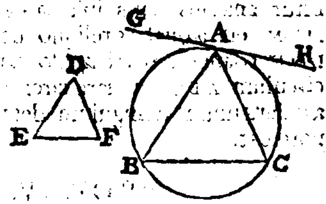


PROP. II. PROBL.

In circulo dato, dato triangulo æquiangulum triangulum describere.

Sit datus circulus ABC, datum autem triangulum DEF. oportet in ABC circulo describere triangulum triangulo DEF a 17. tertii. æquiangulum. ducatur recta linea GAH contingens a circulum

lum ABC in puncto A: & ad rectam lineam AH, & ad punctum in ea A, angulo DEF æqualis [b] angulus constituatur HAC. rursus ad rectam lineam AG; & ad punctum in ipsa A, angulo DFE æqualis [b] constituatur angulus GAB; & BC jungantur. quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta HAG; à contactu autem in circulum ducta est AC: erit HAC angulus æqualis [c] ei qui in alterno circuli segmento consistit, videlicet ipsi ABC. sed HAC angulus æqualis est angulo DEF, ergo & angulus ABC angulo DEF est æqualis. eadem ratione & angulus ACB est æqualis angulo DFE. reliquus igitur BAC angulus reliquo EDF æqualis [d] erit. ergo triangulum ABC triangulo DEF est æquiangulum, & descriptum est in circulo ABC. In dato igitur circulo dato triangulo æquiangulum triangulum descriptum est. Quod facere oportebat.



[b] 23. primi.

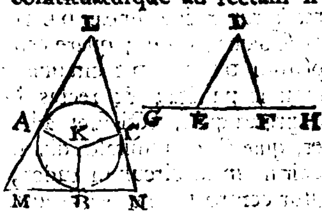
[c] 32. tertii.

[d] 2. Cor. 32. primi.

PROP. III. PROBL.

Circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triangulum describere.

Sit datus circulus ABC, datum autem triangulum DEF. oportet circa circulum ABC describere triangulum triangulo DEF æquiangulum. Protrahatur ex utraque parte EF ad puncta H G, & sumatur circuli ABC centrum K: & recta linea KB utcunque ducatur: constituaturque ad rectam lineam KB, & ad punctum in ea K, angulo quidem DEG æqualis [a] angulus BKA, angulo autem DFH æqualis [a] angulus BKC, & per A B C puncta ducantur rectæ lineæ LAM MBN NCL circulum ABC contingentes.



[a] 23 primi.

Quoniam igitur circulum ABC contingunt LM MN NL in punctis A B C, à centro autem K ad A B C puncta ducuntur KA KB KC; erunt anguli ad puncta A B C recti [b] & quoniam quadrilateri AMBK anguli quatuor quatuor rectis æquales sunt; etenim in duo triangula dividitur; quorum anguli KAM KBM sunt recti; erunt reliqui AKB AMB duobus rectis æquales. sunt autem & DEG DEF æquales duobus rectis. anguli igitur AKB AMB angulis DEG DEF

[b] 18. tertii.

 æquales

æquales sunt, quorum AKB ipsi DEG est æqualis. ergo reliquus AMB reliquo DEF æqualis erit. similiter demonstrabitur angulus LNB ipsi DFE æqualis. ergo & reliquus MLN est æqualis c reliquo EDF. æquiangulum igitur est LMN triangulum triangulo DEF; & descriptum est circa circulum ABC. Quare circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triangulum descriptum est. Quod facere oportebat.

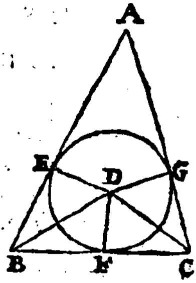
c 2. Cor. 32. primi.

PROP. IV. PROBL.

In dato triangulo circulum describere.

Sit datum triangulum ABC, oportet in triangulo ABC circulum describere. Secentur a anguli ABC BCA bifariam rectis lineis BD CD quæ conveniant inter se in D puncto: & à puncto D ad rectas lineas AB BC CA perpendiculares b ducantur DE DF DG. Quoniam angulus EBD est æqualis angulo FBD, est autem & rectus BED recto BFD æqualis: erunt duo triangula EBD DBF, duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, & utrique commune BD, quod scilicet uni æqualium angulorum subtenditur. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia c habebunt, atque erit DE æqualis DF. & eadem ratione DG æqualis DF. ergo & DE ipsi DG est æqualis. tres igitur rectæ lineæ DE DF DG inter se æquales sunt; quare centro D intervallo autem unius ipsarum DE DF DG circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta; & rectas lineas AB BC CA continget; propterea quòd recti sunt ad EFG anguli. si enim ipsas secet, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur intra circulum cadet, quod est absurdum d. non igitur centro D, intervallo autem unius ipsarum DE DF DG circulus descriptus secabit rectas lineas AB BC CA, quare ipsas continget; atque erit circulus descriptus in triangulo ABC. In dato igitur triangulo ABC circulus EFG descriptus est. Quod facere oportebat.

a 9. primi.
b 12 primi.
c 26. primi.
d 16. tertii.

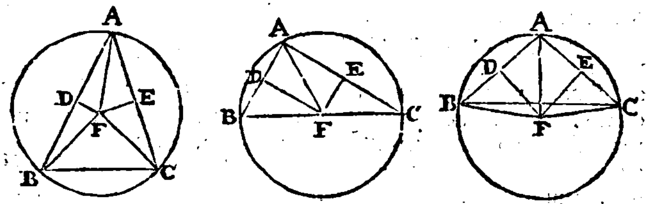


PROP.

PROP. V. THEOR.

Circa datum triangulum circulum describere.

Sit datum triangulum A B C. oportet circa datum triangulum A B C circulum describere. Secentur A B A C bifariam [a] in D E punctis: & à punctis D E ipsis A B A C ad rectos angulos [b] ducantur D F E F quæ quidem vel intra triangulum A B C convenient, vel in recta linea B C, vel extra ipsam. conveniant primo intra triangulum in puncto F: & [a] 10. primi. [b] 11. primi.



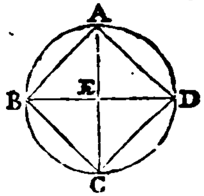
B F F C F A jungantur. quoniam igitur A D est æqualis D B, communis autem & ad rectos angulos D F; erit basis A F basi F B æqualis [c]. similiter ostendetur & C F æqualis F A. ergo & B F est æqualis F C. tres igitur F A F B F C inter se æquales sunt. quare centro F, intervallo autem unius ipsarum F A F B F C circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit: atque erit circulus descriptus circa triangulum A B C. & describatur ut A B C. secundo D F E F conveniant in recta linea B C, in puncto F, ut in secunda figura, & A F jungatur. similiter demonstrabimus punctum F centrum esse circuli circa triangulum A B C descripti. postremo D F E F conveniant extra triangulum A B C rursus in F puncto, ut in tertia figura: & jungantur A F F B F C. & quoniam rursus A D est æqualis D B, communis autem & ad rectos angulos D F, basis A F basi F B æqualis erit. similiter demonstrabimus & C F ipsi F A æqualem esse. quare & B F est æqualis F C. rursus igitur centro F, intervallo autem unius ipsarum F A F B F C circulus descriptus & per reliqua transibit puncta; atque erit circa triangulum A B C descriptus. Circa datum igitur triangulum circulus descriptus est. Quod facere oportebat. [c] 4. primi.

Cor. Si triangulum sit rectangulum centrum circuli cadet in latus angulo recto oppositum. si acutangulum cadet centrum intra triangulum, si obtusangulum cadet extra.

PROP. VI. PROBL.

In dato circulo quadratum describere.

Sit datus circulus A B C D. oportet in A B C D circulo quadratum describere. Ducantur circuli A B C D diametri ad rectos angulos inter se A C B D: & A B B C C D D A jungantur. Quoniam igitur B E est æqualis E D, etenim centrum est E, communis autem, & ad rectos angulos E A; erit basis B A æqualis [a] basi A D. & eadem ratione utraque ipsarum BC CD utrique BA AD æqualis; æquilaterum igitur est A B C D quadrilaterum. dico & rectangulum esse. quoniam enim recta linea B D diameter est A B C D circuli, erit B A D semicirculus. quare angulus B A D rectus [b] est. & eadem ratione unusquisque ipsorum A B C B C D C D A est rectus. rectangulum igitur est A B C quadrilaterum. ostensum autem est, & æquilaterum esse. ergo quadratum necessario erit, & descriptum est in circulo A B C D. in dato igitur A B C D circulo quadratum A B C D descriptum est. Quod facere oportebat.

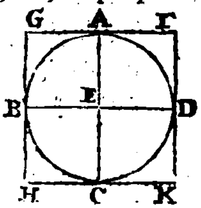


a 4. primi.
b 31. tertii.

PROP. VII. PROBL.

Circa datum circulum quadratum describere.

Sit datus circulus A B C D. oportet circa A B C D circulum quadratum describere. Ducantur circuli A B C D duæ diametri A C B D ad rectos inter se angulos, & per puncta A B C D ducantur circulum A B C D contingentes [a] F G G H H K K F. Quoniam igitur F G contingit circulum A B C D, à centro autem E ad contactum qui est ad A ducitur E A; erunt [b] anguli ad A recti. eadem ratione, & anguli ad puncta B C D recti sunt. & quoniam angulus A E B rectus est, est autem & rectus E B G; erit G H ipsi A C parallela [c]. eadem ratione, & A C parallela est F K. similiter demonstrabimus & utramque ipsarum G F H K ipsi B E D parallelam esse. quare & G F est parallela H K. parallelogramma igitur sunt G K G C A K F B B K, ac propterea G F quidem est [d] æqualis H K, G H vero ipsi F K. & quoniam A C æqualis est B D; sed A C quidem utrique ipsarum



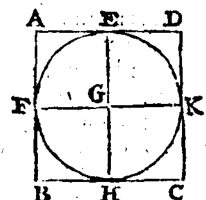
a 17. tertii.
b 18. tertii.
c 28. primi
d 34. primi.

ipſarum G H F K eſt [d] æqualis; B D vero æqualis utrique G F H K, & utraque G H F K utrique G F H K æqualis erit. æquilaterum igitur eſt F G H K quadrilaterum. dico & rectangulum eſſe. quoniam enim parallelogrammum eſt G B E A, atque eſt rectus A E B angulus, & ipſe A G B rectus erit. ſimiliter demonſtrabimus angulos etiam ad puncta H K F rectos eſſe. rectangulum igitur eſt quadrilaterum F G H K. demonſtratum autem eſt & æquilaterum. ergo quadratum ſit neceſſe eſt, & deſcriptum eſt circa circulum A B C D. Circa datum igitur circulum quadratum deſcriptum eſt. Quod facere oportebat.

PROP. VIII. PROBL.

In dato quadrato circulum deſcribere.

Sit datum quadratum A B C D. oportet in quadrato A B C D circulum deſcribere. Secetur utraque ipſarum A B A D bifariam [a] in punctis F E. & per E quidem alterutri ipſarum A B C D parallela [b] ducatur E H: per F vero ducatur F K parallela [b] alterutri A D B C. parallelogrammum igitur eſt unumquodque ipſorum A K K B A H H D A G G C B G G D: & latera ipſorum quæ ex oppoſito, ſunt æqualia [c]. & quoniam D A eſt æqualis A B; & ipſius quidem A D dimidium eſt A E; ipſius vero A B dimidium A F; erit A E ipſi A F æqualis. quare & oppoſita latera æqualia ſunt. ergo F G eſt æqualis G E. ſimiliter demonſtrabimus, & utramque ipſarum G H G K utrique F G G E æqualem eſſe. quatuor igitur G E G F G H G K inter ſe ſunt æquales. itaque centro quidem G, intervallo autem unius ipſarum G E G F G H G K circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta, & rectas lineas A B B C C D D A continget; propterea quod anguli ad E F H K recti ſunt. ſi enim circulus ſecabit rectas lineas A B B C C D D A, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur intra circulum cadet; quod [d] eſt abſurdum. non igitur centro quidem G intervallo autem unius ipſarum G E G F G H G K circulus deſcriptus rectas lineas A B B C C D D A ſecabit. quare ipſas neceſſario continget: atque erit deſcriptus in quadrato A B C D. In dato igitur quadrato circulus deſcriptus eſt. Quod facere oportebat.



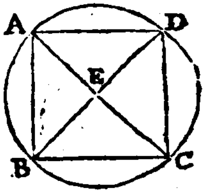
a 10 primi.
b 31. primi.
c 34. primi.
d 16. tertii.

PROP.

PROP. IX. PROBL.

Circa datum quadratum circulum describere.

Sit datum quadratum A B C D. oportet circa A B C D quadratum circulum describere. Jungantur enim A C B D, quæ se invicem in puncto E secent. & quoniam D A est æqualis A B, communis autem A C; duæ D A A C duabus B A A C æquales sunt; & basis D C æqualis basi B C; erit angulus D A C angulo B A C æqualis [a]. angulus igitur D A B bifariam sectus est recta linea A C. similiter demonstrabimus unumquemque angulorum A B C B C D, C D A rectis lineis A C D B bifariam sectum esse. quoniam igitur angulus D A B angulo A B C est æqualis. atque est anguli quidem D A B dimidium angulus E A B, anguli vero A B C dimidium E B A; & E A B angulus angulo E B A æqualis erit. quare & latus E A lateri E B est [b] æquale. similiter demonstrabimus & utramque rectarum linearum E C E D utrique E A E B æualem esse. ergo quatuor rectæ lineæ E A E B E C E D inter se sunt æquales. centro igitur E, intervallo autem unius ipsarum E A E B E C E D circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit; atque erit descriptus circa A B C D quadratum. describatur ut A B C D. Circa datum igitur quadratum circulus descriptus est. Quod facere oportebat.



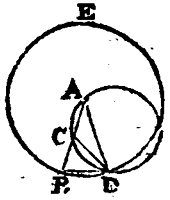
[a] 8 primi.

[b] 5. primi

PROP. X. PROBL.

Isosceles triangulum constituere, habens utrumque angulorum qui sunt ad basim, duplum reliqui.

Exponatur recta quædam recta linea A B, & secetur in C puncto, ita ut rectangulum contentum sub A B B C æquale [a] sit ei quod ex C A describitur quadrato: & centro quidem A, intervallo autem A B circulus describatur B D E; apteturque in B D E circulo recta linea B D æqualis [b] ipsi A C quæ non est major diametro circuli B D E: & junctis D A D C, circa A D C triangulum [c] circulus A C D describatur. itaque quoniam rectangulum A B C æquale est quadrato quod fit ex



[a] 11. secundi.

[b] 1. hujus.

[c] 5. hujus.

A C;

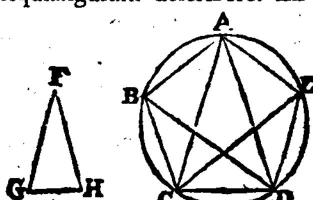
AC; æqualis autem est AC ipsi BD: erit sub AB BC rectangulum quadrato ex BD æquale. & quoniam extra circulum ACD sumptum est aliquod punctum B, & à puncto B in circulum ACD cadunt duæ rectæ lineæ BCA BD, quarum altera quidem secat, altera vero incidit; atque est rectangulum sub AB BC æquale quadrato ex BD: recta linea BD circulum ACD [c] continget. quoniam igitur BD contingit, & à contactu ad D ducta est DC; erit BDC angulus æqualis [d] ei qui in alterno circuli segmento constituitur, videlicet angulo DAC. quod cum angulus BDC æqualis sit ipsi DAC, communis apponatur CDA totus igitur BDA est æqualis duobus angulis CDA DAC. sed ipsis CDA DAC exterior angulus BCD est [e] æqualis. ergo & BDA æqualis est ipsi BCD. sed BDA angulus est [f] æqualis angulo CBD, quoniam & latus AD lateri AB est æquale. ergo & DBA ipsi BCD æqualis erit. tres igitur anguli BDA DBA BCD inter se æquales sunt. & quoniam angulus DBC æqualis est angulo BCD, & latus BD lateri DC est [g] æquale. sed BD ponitur æqualis ipsi CA. ergo & CA est æqualis CD. quare & angulus CDA æqualis est angulo DAC. anguli igitur CDA DAC simul sumpti ipsius anguli DAC duplices sunt. est autem & BCD angulus angulis CDA DAC æqualis; ergo & BCD duplex est ipsius DAC. sed BCD est æqualis alterutri ipsorum BDA DBA. quare & uterque BDA DBA ipsius DAB est duplex. Isosceles igitur triangulum constitutum est ADB habens utrumque eorum angulorum qui sunt ad basim, duplum reliqui. Quod facere oportebat.

c 37. tertii.
d 32. tertii.
e 32 primi.
f 5. primi.
g 6. primi.

PROP. XI. PROBL.

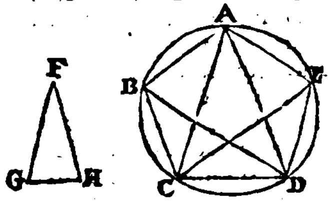
In dato circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum describere.

Sit datus circulus ABCDE. oportet in ABCDE circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum describere. Exponatur triangulum isosceles FGH habens utrumque eorum qui sunt ad basim GH angulorum, duplum [a] anguli qui est ad F: & describatur in circulo ABCDE triangulo FGH æquiangulum [b] triangulum ACD, ita ut angulo quidem qui est ad F æqualis sit angulus CAD; utrique vero ipsorum qui ad GH, sit æqualis uterque ACD CDA. & uterque



a 10. hujus.
b 2. hujus.

uterque igitur ACD CDA, anguli CAD est duplus. secetur
c 9 primi. uterque ipsorum ACD CDA bifariam c rectis lineis CE DB:
& AB BC CD DE EA jungantur. quoniam igitur uterque ipsorum ACD CDA duplus est ipsius CAD, & secti sunt bifariam rectis lineis CE DB, quinque anguli DAC ACE ECD CDB BDA inter se sunt æquales. æquales autem anguli in æqualibus circumferentiis insistunt d. quinque



d 26. tertii. igitur circumferentiæ AB BC CD DE EA æquales sunt inter se. sed æquales circumferentias e æquales rectæ lineæ
e 29. tertii. subtendunt. ergo & quinque rectæ lineæ AB BC CD DE EA inter se æquales sunt. æquilaterum igitur est ABCDE pentagonum. dico & æquiangulum esse. quoniam enim circumferentia AB æqualis est circumferentiæ DE, communis apponatur BCD. tota igitur ABCD circumferentia toti circumferentiæ EDCB est æqualis, & in circumferentia quidem ABCD insistit angulus AED, in circumferentia vero EDCB insistit BAE. ergo & BAE angulus est æqualis angulo AED. eadem ratione & unusquisque angulorum ABC BCD CDE unicuique ipsorum BAE AED est æqualis. æquiangulum igitur est ABCDE pentagonum: ostensum autem est & æquilaterum esse. Quare in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum descriptum est. Quod facere oportebat.

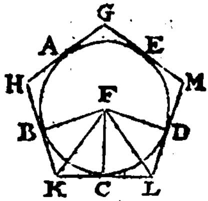
PROP. XII. PROBL.

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum & æquiangulum describere.

Sit datus circulus ABCDE. oportet circa circulum ABCDE pentagonum æquilaterum & æquiangulum describere. Intelligantur pentagoni in circulo descripti a angulorum puncta ABCDE, ita ut circumferentiæ AB BC CD DE EA sint
a per 11. hujus. æquales; & per puncta ABCDE ducantur b circulum contingentes GH HK KL LM MG, & sumpto circuli ABCDE
b 17. tertii. centro F, jungantur FB FK FC FL FD. quoniam igitur recta linea KL contingit circulum ABCDE in puncto C, & a centro F ad contactum qui est ad C ducta est FC, erit FC ad ipsam KL perpendicularis c. rectus igitur est uterque
c 18. tertii. angulorum qui sunt ad C. eadem ratione & anguli qui ad puncta B D recti sunt. & quoniam rectus angulus est FCK,

quadra-

quadratum quod fit ex F K æquale d est quadratis ex F C CK. & ob eandem causam quadratis ex F B B K æquale est ex F K quadratum. quadrata igitur ex F C C K quadratis ex F B B K æqualia sunt, quorum quod ex F C ei quod ex F B est æquale. ergo reliquum quod ex C K reliquo quod ex B K æquale erit. æqualis igitur est B K ipsi C K. & quoniam F B est æqualis F C, communis autem F K, duæ B F F K duabus C F F K æquales sunt, & basis B K est æqualis basi K C; erit angulus e quidem B F K angulo K F C æqualis, angulus vero B K F angulo F K C. duplus igitur est angulus B F C anguli K F C, & angulus B K C duplus ipsius F K C. eadem ratione, & angulus C F D anguli C F L est duplus: angulus vero C L D duplus anguli C L F. & quoniam circumferentia B C circumferentiæ C D est æqualis, & angulus B F C angulo C F D æqualis f erit. atque est angulus quidem B F C anguli K F C duplus: angulus vero D F C duplus ipsius L F C æqualis. igitur est angulus K F C angulo C F L. itaque duo triangula sunt F K C F L C, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteteri, & unum latus uni lateri æquale quod ipsis commune est F C: ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt g, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem. recta igitur linea K C est æqualis rectæ C L, & angulus F K C angulo F L C. & quoniam K C est æqualis C L, erit K L ipsius K C dupla. eadem ratione, & H K ipsius B K dupla ostendetur. rursus quoniam B K ostensa est æqualis ipsi K C: atque est K L quidem dupla K C, H K vero ipsius B K dupla: erit H K ipsi K L æqualis. similiter & unaquæque ipsarum G H G M M L ostendetur æqualis utrique H K K L. æquilaterum igitur est G H K L M pentagonum. dico etiam æquiangulum esse. quoniam enim angulus F K C est æqualis angulo F L C: & ostensus est angulus H K L duplus ipsius F K C; ipsius vero F L C duplus K L M: erit & H K L angulus angulo K L M æqualis. simili ratione ostendetur & unumquisque ipsorum K H G H G M G M L utrique H K L K L M æqualis. quinque igitur anguli G H K H K L K L M L M G M G H inter se æquales sunt. ergo æquiangulum est G H K L M pentagonum. ostensum autem est etiam æquilaterum esse: & descriptum est circa A B C D E circulum. Quod facere oportebat.



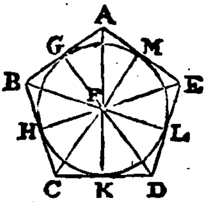
d 47. primi.
e 8. primi.
f 27. tertii.
g 26. primi.

PROP.

PROP. XIII. PROBL.

In dato pentagono, quod æquilaterum & æquiangulum sit circulum describere.

Sit datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum ABCDE. oportet in ABCDE pentagono circulum describere. Secetur uterque angulorum BCD CDE bifariam [a] rectis lineis CF DF; & à puncto F in quo conveniunt inter se CF DF ducantur rectæ lineæ FB FA FE. Quoniam igitur BC est æqualis CD, communis autem CF, duæ BC CF, duabus DC CF æquales sunt, & angulus BCF est æqualis angulo DCF. basis igitur BF basi FD est [b] æqualis, & BFC triangulum æquale triangulo DCF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales quibus æqualia latera subtenduntur; angulus igitur CBF angulo CDF æqualis erit. & quoniam angulus CDE anguli CDF est duplus, & angulus quidem CDE angulo ABC æqualis, angulus vero CDF angulo CBF æqualis; erit & CBA angulus duplus anguli CBF; ac propterea angulus ABF angulo FBC æqualis. angulus igitur ABC bifariam sectus est recta linea BF. similiter demonstrabitur unumquemque angulorum BAE AED rectis lineis AF FE bifariam sectum esse. à puncto F ad rectas lineas AB BC CD DE EA ducantur [c] perpendiculares FG FH FK FL FM. & quoniam angulus HCF est æqualis angulo KCF; est autem & rectus FHC recto FKC æqualis: erunt duo triangula FHC FKC, duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, commune scilicet utrisque FC quod uni æqualium angulorum subtenditur. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia [d] habebunt, atque erit perpendicularis FH perpendiculari FK æqualis. similiter ostendetur & unaquæque ipsarum FL FM FG æqualis utrique FH FK. quinque igitur rectæ lineæ FG FH FK FL FM inter se æquales sunt. quare centro F intervallo autem unius ipsarum FG FH FK FL FM, circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, & rectas lineas AB BC CD DE EA continget; propterea quod anguli ad GHKLM recti sunt. si enim non continget, sed ipsas secet, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, intra circulum cadet, quod absurdum [e] esse ostensum est. non igitur centro F, & inter-



a 9. primi.

b 4. primi.

c 12. primi.

d 26 primi.

e 16. tertii.

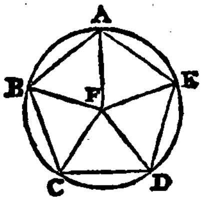
intervallo uno ipsorum punctorum G H K L M circulus descriptus rectas lineas A B B C C D D E E A secabit. quare ipsas contingat necesse est. describatur ut G H K L M. In dato igitur pentagono quod est æquilaterum, & æquiangulum circulus descriptus est. Quod facere oportebat.

Cor. Si duo anguli proximi figuræ æquilateræ & æquiangulæ bisecentur, & à puncto in quo coeunt lineæ angulum bisecantes, ducantur rectæ lineæ ad reliquos figuræ angulos, omnes anguli figuræ erunt bisecti.

PROP. XIV. PROBL.

Circa datum pentagonum quod æquilaterum & æquiangulum sit, circulum describere.

Sit datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum A B C D E. oportet circa pentagonum A B C D E circulum describere. Secetur uterque ipsorum B C D C D E angulorum, bifariam rectis lineis C F F D: & à puncto F in quo conveniunt rectæ lineæ, ad puncta B A E ducantur F B F A F E. & unusquisque angulorum C B A B A E A E D rectis lineis B F F A F E bifariam [a] sectus erit. & quoniam angulus B C D angulo C D E est æqualis; atqui est anguli quidem B C D dimidium angulus F C D, anguli vero C D E dimidium C D F; erit & F C D angulus æqualis angulo F D C, quare & latus C F lateri F D est æquale [b]. similiter demonstrabitur & una quæque ipsarum F B F A F E æqualis unicuique F C F D. quinque igitur rectæ lineæ F A F B F C F D F E inter se æquales sunt. ergo centro F, & intervallo unius ipsarum F A F B F C F D F E, circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta: atque erit descriptus circa pentagonum A B C D E quod æquilaterum est & æquiangulum. describatur, & sit A B C D E. Circa datum igitur pentagonum æquilaterum & æquiangulum circulus descriptus est. Quod facere oportebat.



[a] Cor. præcedente.

[b] 6. primi.

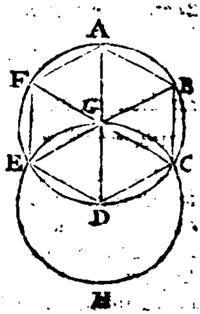
PROP. XV. PROBL.

In dato circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

Sit datus circulus A B C D E F. oportet in circulo A B C D E F hexagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

Ducatur

Ducatur circuli A B C D E F diameter A D, sumaturque centrum circuli G; & centro quidem D, intervallo autem D G circulus describatur E G C H, junctæ E G C G ad puncta B F producantur, & jungantur A B B C C D D E E F F A. dico hexagonum A B C D E F æquilaterum & æquiangulum esse. Quoniam enim G punctum centrum est A B C D E F circuli, erit G E ipsi G D æqualis. rursus quoniam D centrum est circuli E G C H, erit D E æqualis D G: sed G E ipsi G D æqualis ostensa est. ergo G E ipsi E D est æqualis. æquilaterum igitur est E G D triangulum, ideoque tres ipsius anguli E G D G D E D E G inter se æquales [a] sunt, & sunt trianguli tres anguli æquales [b] duobus rectis. angulus igitur E G D duorum rectorum tertia pars est. similiter ostendetur & D G C duorum rectorum tertia pars, & quoniam recta linea C G super rectam E B insistens, angulos qui deinceps sunt E G C C G B duobus rectis æquales [c] efficit; erit & reliquus C G B tertia pars duorum rectorum. anguli igitur E G D D G C C G B inter se sunt æquales. & qui ipsis ad verticem sunt anguli B G A A G F F G E æquales [d] sunt angulis E G D D G C C G B. quare sex anguli E G D D G C C G B B G A A G F F G E inter se æquales sunt. sed æquales anguli æqualibus circumferentiis insistunt [e]. sex igitur circumferentiæ A B B C C D D E E F F A inter se sunt æquales. æquales autem circumferentias æquales [f] rectæ lineæ subtendunt. ergo & sex rectæ lineæ inter se æquales sint necesse est, ac propterea æquilaterum est A B C D E F hexagonum. dico & æquiangulum esse. quoniam enim circumferentia A F circumferentiæ E D est æqualis, communis apponatur circumferentia A B C D: tota igitur F A B C D circumferentia æqualis est toti circumferentiæ E D C B A. & circumferentiæ quidem F A B C D angulus F E D insistit, circumferentiæ vero E D C B A insistit angulus A F E. angulus igitur A F E angulo D E F est [g] æqualis. similiter ostendentur & reliqui anguli hexagoni A B C D E F, sigillatim æquales utrique ipsorum A F E F E D. ergo æquiangulum est A B C D E F hexagonum. ostensum autem est & æquilaterum esse: & descriptum est circulo A B C D E F. In dato igitur circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum descriptum est. Quod facere oportebat.



[a] Cor. 5. primi.
[b] 32. primi.
[c] 13. primi
[d] 18. primi.
[e] 26 tertii.
[f] 29. tertii.
[g] 27. tertii.

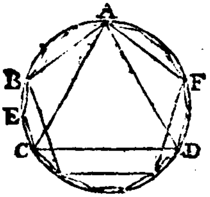
Ex hoc manifestum est hexagoni latus, ei quæ est ex centro circuli æquale esse. & si per puncta A B C D E F contingentes circulum ducamus, circa circulum describetur hexa-

hexagonum æquilaterum & æquiangulum, consequenter iis quæ in pentagono dicta sunt: & præterea similiter in dato hexagono circulum inscribemus, & circumscribemus. Quod facere oportebat.

PROP. XVI. PROBL.

In dato circulo quindecagonum æquilaterum & æquiangulum describere.

Sit datus circulus A B C D. oportet in A B C D circulo quindecagonum æquilaterum & æquiangulum describere. Sit A C latus trianguli quidem æquilateri in ipso circulo A B C D descripti, pentagoni vero æquilateri latus A B. quarum igitur partium est A B C D F circulus quindecim, earum circumferentia quidem A B C, tertia existens circuli, erit quinque; circumferentia vero A B, quæ quinta est circuli, erit trium. ergo reliqua B C est duarum. secetur B C bifariam



in puncto E. quare utraque ipsarum B E E C circumferentiarum, quintadecima pars est A B C D circuli. si igitur jungentes B E E C, æquales ipsis in continuum rectas lineas in circulo A B C D aptemus, in ipso quindecagonum æquilaterum & æquiangulum descriptum erit. Quod facere oportebat.

Similiter autem iis quæ dicta sunt in pentagono, si per circuli divisiones, contingentes circulum ducamus, circa ipsum describetur quindecagonum æquilaterum & æquiangulum. & insuper dato quindecagono æquilatero & æquiangulo circulum inscribemus, & circumscribemus.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER QUINTUS.

DIFFINITIONES.

I.

PArs est magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando minor majorem metitur.

II.

Multiplex est major minoris, quando majorem minor metitur.

III.

Proportio seu ratio est duarum magnitudinem ejusdem generis, secundum quantitatem, mutua quædam habitudo.

IV.

Proportionem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ multiplicatæ se invicem superare possunt.

V.

In eadem proportione magnitudines esse dicuntur, prima ad secundam & tertia ad quartam, quando primæ & tertiæ æque multiplices, secundæ & quartæ æque multiplices, juxta quamvis multiplicationem, utraque utramque, vel unà superant, vel unà æquales sunt, vel unà deficiunt, inter se comparatæ.

VI.

Magnitudines quæ eandem proportionem habent, proportionales vocentur.

VII.

VII.

Quando autem æque multiplicium, multiplex quidem primæ superaverit multiplicem secundæ, multiplex vero tertiæ non superaverit multiplicem quartæ, tunc prima ad secundam majorem proportionem habere dicitur quàm tertia ad quartam.

VIII.

Analogia est proportionum similitudo.

IX.

Analogia vero in tribus terminis ad minimum consistit.

X.

Quando tres magnitudines proportionales sunt, prima ad tertiam duplicatam proportionem habere dicetur ejus quàm habet ad secundam.

XI.

Quando autem quatuor magnitudines sunt proportionales, prima ad quartam triplicatam habere proportionem dicetur ejus quam habet ad secundam, & semper deinceps, una amplius, quoad analogia processerit.

XII.

Homologæ, vel similis rationis magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

XIII.

Alterna seu permutata ratio est sumptio antecedentis ad antecedentem & consequentis ad consequentem.

XIV.

Inversa ratio est sumptio consequentis ut antecedentis, ad antecedentem, ut ad consequentem.

XV.

Compositio rationis est sumptio antecedentis unà cum consequente, tanquam unius, ad ipsam consequentem.

XVI.

Divisio rationis est sumptio excessus quo antecedens superat consequentem, ad ipsam consequentem.

XVII.

Conversio rationis est sumptio antecedentis ad excessum quo antecedens ipsam consequentem superat.

XVIII.

Ex æquo sive ex æqualitate ratio est, cum plures magnitudines extiterint, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur & in eadem proportione, fueritque ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ita in secundis magnitudinibus prima ad ultimam: vel aliter, est sumptio extremarum per subtractionem mediarum.

XIX.

Ordinata proportio est quando fuerit ut antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem; ut autem consequens ad aliam quampiam, ita consequens ad aliam quampiam.

XX.

Perturbata vero proportio est quando tribus existentibus magnitudinibus, & aliis ipsis numero æqualibus, fuerit ut in primis magnitudinibus antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem, ut autem in primis magnitudinibus consequens ad aliam quampiam, ita in secundis alia quæpiam ad antecedentem.

AXIOMATA.

I.

Ejusdem sive æqualium æque multiplices inter se æquales sunt.

II.

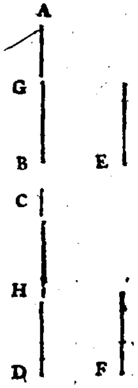
Quarum eadem æque multiplex est, vel quarum æquales sunt æque multiplices, & ipsæ inter se sunt æquales.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Si fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices, quotuplex est una magnitudo unius, totuplices erunt & omnes omnium.

Sint quotcunque magnitudines AB CD, quotcunque magnitudinum E F, æqualium numero, singulæ singularum æque mul-

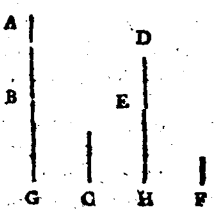
multiplices. dico quotuplex est A B ipsius E, totuplices esse & A B C D simul ipsarum E F simul. Quoniam enim A B æque multiplex est ipsius E, ac C D ipsius F; quot magnitudines sunt in A B, æquales ipsi E, tot erunt & in C D æquales ipsi F. dividatur A B quidem in partes ipsi E æquales, quæ sint A G G B; & C D dividatur in partes æquales ipsi F, videlicet C H H D. erit igitur multitudo partium C H H D æqualis multitudini ipsarum A G G B. & quoniam A G est æqualis E, & C H æqualis F; erunt & A G C H æquales ipsis E F. eadem ratione quoniam G B est æqualis E, & H D ipsi F; erunt G B H D æquales ipsis E F. quot igitur sunt in A B æquales ipsi E, tot sunt & in A B C D æquales ipsis E F. ergo quotuplex est A B ipsius E, totuplices erunt & A B C D simul ipsarum E F simul. Si igitur fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices, quotuplex est una magnitudo unius, totuplices erunt & omnes omnium. Quod demonstrare oportebat.



PROP. II. THEOR.

Si prima secundæ æque multiplex fuerit ac tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex ac sexta quartæ; erit etiam composita prima cum quinta secundæ æque multiplex ac tertia cum sexta quartæ.

Sit prima A B secundæ C æque multiplex, ac tertia D E quartæ F. sit autem & quinta B G secundæ C æque multiplex, ac sexta E H quartæ F. dico & compositam primam cum quinta scil. A G secundæ C æque multiplicem esse, ac tertiam cum sexta sc. D H quartæ F. Quoniam enim A B æque multiplex est C, ac D E ipsius F; quot magnitudines sunt in A B æquales C, tot erunt & in D E æquales F. eadem ratione & quot sunt in B G æquales C, tot & in E H erunt æquales F. quot igitur sunt in tota A G æquales C, tot erunt & in tota D H æquales F. ergo quotuplex est A G ipsius C, totuplex est &

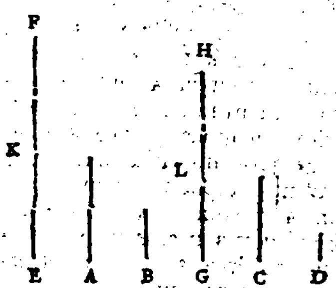


DH ipsius F. & composita igitur prima cum quinta AG secundæ C æque multiplex erit, ac tertia cum sexta DH quartæ F: quare si prima secundæ æque multiplex fuerit, ac tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex, ac sexta quartæ; erit composita quoque prima, cum quinta æque multiplex secundæ, ac tertia, cum sexta quartæ. Quod oportebat demonstrare.

PROP. III. THEOR.

Si prima secundæ æque multiplex fuerit ac tertia quartæ; sumantur autem æque multiplices primæ & tertiæ; erit &, ex æquali, sumptarum utraque utriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ.

Sit prima A secundæ B æque multiplex ac tertia C quartæ D: & sumantur ipsarum A C æque multiplices EF GH. dico EF æque multiplicem esse ipsius B, ac GH ipsius D. Quoniam enim EF æque multiplex est ipsius A, ac GH ipsius C; quot magnitudines sunt in EF æquales A, tot erunt & in GH æquales C. dividatur EF quidem in magnitudines ipsi A æquales EK KF; GH vero dividatur in



magnitudines æquales C, videlicet GL LH. erit igitur ipsarum EK KF multitudo æqualis multitudini ipsarum GL LH. & quoniam æque multiplex est A ipsius B ac C ipsius D: æqualis autem EK ipsi A, & GL ipsi C; erit EK æque multiplex ipsius B, ac GL ipsius D. eadem ratione æque multiplex erit KF ipsius B, ac LH ipsius D. quoniam igitur prima EK secundæ B æque multiplex est, ac tertia GL quartæ D; est autem & quinta KF secundæ B æque multiplex ac sexta LH quartæ D: erit & composita prima cum quinta EF, secundæ B æque multiplex [a], ac tertia cum sexta GH, quartæ D. Si igitur prima secundæ æque fuerit multiplex ac tertia quartæ, sumantur autem primæ & tertiæ æque multiplices: erit &, ex æquali, sumptarum utraque utriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ. Quod ostendisse oportuit.

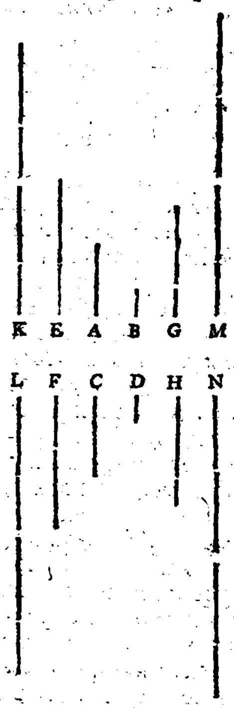
a 2. hujus.

PROP.

PROP. LV. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam: & æque multiplices primæ & tertiæ ad æque multiplices secundæ & quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem proportionem habebunt, inter se comparatæ.

Prima A ad secundam B eandem proportionem habeat quam tertia C ad quartam D: & sumantur ipsarum quidem A C utcunque æque multiplices E F; ipsarum vero B D aliæ utcunque æque multiplices G H. dico E ad G ita esse ut F ad H. Sumantur rursus ipsarum E F æque multiplices K L, & ipsarum G H æque multiplices M N. quoniam igitur E æque multiplex est ipsius A, atque F ipsius C; sumuntur autem ipsarum E F æque multiplices K L: erit K æque multiplex *a* ipsius A, atque L ipsius C. eadem ratione M æque multiplex erit ipsius B, atque N ipsius D. & quoniam est ut A ad B ita C ad D. sumptæ autem sunt ipsarum A C æque multiplices K L; & ipsarum B D aliæ utcunque æque multiplices M N: si *b* K superat M, superabit & L ipsam N; & si æqualis æqualis; & si minor minor. suntque K L quidem ipsarum E F æque multiplices; M N vero ipsarum G H aliæ utcunque æque multiplices. ut igitur E ad G ita *c* erit F ad H. quare si prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam, & æque multiplices primæ ac tertiæ ad æque multiplices secundæ ac quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem proportionem habebunt, inter se comparatæ. Quod demonstrare oportebat.



a 3. hujus.

b 5. Diffin. hujus.

c 5. Diffin.

Quoniam igitur demonstratum est si K superat M, & L ipsam N superare; & si æqualis, æqualem esse, & si minor, minorem:

minorem: constat etiam si M superat K, & N superare ipsam L; & si æqualis, æqualem esse; & si minor, minorem; ac
c 5. D.ffin. propterea ut G ad E ita esse H ad F.

Cor. Ex hoc manifestum est si quatuor magnitudines sint proportionales, & inverse proportionales esse.

PROP. V. THEOR.

Si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit atque ablata ablatæ, & reliqua reliquæ æque multiplex erit ac tota totius.

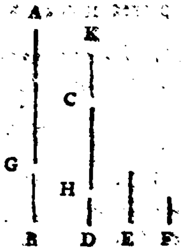
Magnitudo A B magnitudinis C D æque multiplex sit atque ablata A E ablatæ C F. dico & reliquam E B reliquæ F D æque multiplicem esse atque totam A B totius C D; Quotuplex enim est A E ipsius C F, totuplex fiat & E B ipsius C G. & quoniam A E æque multiplex est C F atque E B
a 1. hujus. ipsius C G; erit [a] A E æque multiplex C F, ac A B ipsius G F; ponitur autem æque multiplex A E ipsius C F, ac A B ipsius C D. æque multiplex igitur est A B utriusque G F
b 1. Axiom. hujus. C D; ac propterea G F ipsi C D est [b] æqualis. communis auferatur C F. reliqua igitur G C æqualis est reliquæ D F. itaque quoniam A E æque multiplex est C F, ac E B ipsius C G, estque C G æqualis D F; erit A E æque multiplex C F, ac E B ipsius F D. æque multiplex autem ponitur A E ipsius C F, ac A B ipsius C D. ergo E B est æque multiplex F D, ac A B ipsius C D. & reliqua igitur E B reliquæ F D æque multiplex est, atque tota A B totius C D. Quare si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit atque ablata ablatæ, & reliqua reliquæ æque erit multiplex, ac tota totius. Quod oportebat demonstrare.

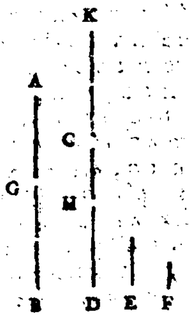
PROP. VI. THEOR.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices sint, & ablatæ quædam sint earundem æque multiplices, erunt & reliquæ vel eisdem æquales, vel ipsarum æque multiplices.

Duæ magnitudines A B C D duarum magnitudinum E F æque multiplices sint, & ablatæ A G C H earundem sint æque multiplices. dico & reliquas G B H D vel ipsis E F æquales esse,

esse, vel ipsarum æque multiplices. Sit enim primum G B æqualis E. dico & H D ipsi F esse æqualem. ponatur ipsi F æqualis C K. & quoniam A G æque multiplex est E, ac C H ipsius F; estque G B quidem æqualis E; C K vero æqualis F: erit A B æque multiplex [a] E, ac K H ipsius F, æque autem multiplex ponitur A B ipsius E, ac C D ipsius F. ergo K H æque multiplex est F, ac C D ipsius F. quoniam igitur utraque ipsarum K H C D est æque multiplex F, erit K H æqualis C D. communis auferatur C H. ergo reliqua K C reliquæ H D est æqualis. sed K C est æqualis F. & H D igitur ipsi F est æqualis; ideoque G B ipsi E, & H D ipsi F æqualis erit. similiter demonstrabimus si G B multiplex fuerit ipsius E, & H D ipsius F æque multiplicem esse. Si igitur duæ magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices sint, & ablatæ quædam sint earundem æque multiplices, erunt & reliquæ, vel eisdem æquales, vel ipsarum æque multiplices. Quod demonstrare oportebat.



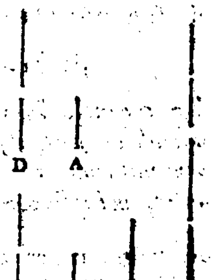


[a] 1. hujus.

PROP. VII. THEOR.

Æquales ad eandem eandem habent proportionem, & eadem ad æquales.

Sint æquales magnitudines A B, alia autem quævis magnitudo C. dico utramque ipsarum A B ad C eandem proportionem habere: & C ad utramque A B similiter eandem habere proportionem. Sumantur ipsarum A B æque multiplices D E, & ipsius C alia utcunque multiplex F. quoniam igitur æque multiplex est D ipsius A, ac E ipsius B, estque A ipsi B æqualis; erit & D æqualis E; alia autem utcunque est F. ergo si D superat F, & E ipsam F superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. & sunt D E qui-



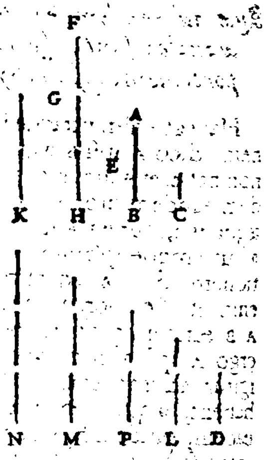
dem

dem ipsarum A B æque multiplices: F vero alia utcunque
[a] 5. Diffin. multiplex ipsius C. erit igitur [a] ut A ad C, ita B ad C. dico insuper C ad utramque ipsarum A B eandem habere proportionem. iisdem enim constructis similiter ostendemus D ipsi E æqualem esse, si igitur F superat D, ipsam quoque E superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. atque est F quidem ipsius C multiplex; D E vero aliæ utcunque æque multiplices ipsarum A B. ergo [a] ut C ad A, ita erit C ad B. Æquales igitur ad eandem, eandem habent proportionem, & eadem ad æquales. Quod ostendere oportebat.

PROP. VIII. THEOR.

Inæqualium magnitudinum major ad eandem, majorem habet proportionem, quam minor: & eadem ad minorem, majorem proportionem habet, quam ad majorem.

Sint inæquales magnitudines A B C, & sit A B major, sit alia vero utcunque D. dico A B ad D majorem habere proportionem quam C ad D. & D ad C majorem habere proportionem quam ad A B. Quoniam A B major est quam C,



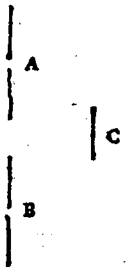
ponatur ipsi C æqualis B E, hoc est A B excedat C per A E. itaque A E aliquoties multiplicata major erit quam D. multiplicetur A E quoad fiat major quam D, sitque ipsius multiplex F G ipsa D major. quotuplex autem est F G ipsius A E, totuplex fiat G H ipsius E B, & K ipsius C. sumatur etiam ipsius D dupla quidem L tripla P, & sic deinceps una amplius, quoad ea quæ sumitur multiplex ipsius D, fiat prima quæ sit major quam K; sit illa N. sitque M multiplex ipsius D proxime minor quam N. quoniam itaque N prima multiplex est ipsius D quæ major est quam K; erit M non major quam K, hoc est K non erit minor quam M. & cum æque multiplex sit F G ipsius A E ac G H ipsius E B, erit F G
[a] 1.hujus. æque multiplex A E ac F H ipsius A B [a], æque autem multiplex est F G ipsius A E ac K ipsius C, ergo F H æque multiplex est A B, ac K ipsius C; hoc est F H K ipsarum A B & C sunt

sunt æque multiplices. rursus quoniam G H æque multiplex est ipsius E B ac K ipsius C, estque E B æqualis C erit & G H ipsi K æqualis *b*. sed K non minor est quam M non igitur G H *b* 1. Axiom. hujus.
minor erit quam M, sed est F G major quam D, ergo tota F H major erit quam M & D, sed M & D simul sunt æquales ipsi N quia M est multiplex ipsius D ipsi N proxime minor, quare F H major erit quam N, unde cum F H superat N, K vero ipsam N non superat, & sunt F H & K æque multiplices ipsarum A B & C, & est N ipsius D alia multiplex ergo *c* A B *c* 7. Diffin. hujus.
ad D majorem rationem habebit quam C ad D. Dico præterea & D ad C majorem habere proportionem, quam D ad A B. iisdem enim constructis similiter ostendemus N superare K, ipsam vero F H non superare, atque est N multiplex ipsius D, & F H K aliæ utcunque ipsarum A B C æque multiplices. ergo D ad C majorem proportionem habet *c*, quam D ad B. Inæqualium igitur magnitudinum major ad eandem majorem habet proportionem, quam minor, & eadem ad minorem majorem proportionem habet, quam ad majorem. Quod ostendere oportebat.

PROP. IX. THEOR.

Quæ ad eandem, eandem proportionem habent, inter se æquales sunt; & ad quas eadem, eandem habet proportionem, ipsæ inter se sunt æquales.

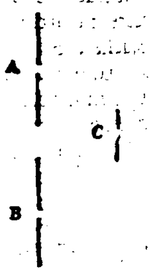
Habeat enim utraque ipsarum A B ad C eandem proportionem. dico A ipsi B æqualem esse. nam si non esset æqualis, non haberet *a* utraque ipsarum A B ad eandem eandem proportionem. habet autem. æqualis igitur est A ipsi B. Habeat rursus C ad utramque ipsarum A B eandem proportionem. dico A æqualem esse ipsi B. nisi enim ita sit, non *a* habebit C ad utramque A B eandem proportionem. habet autem. ergo A ipsi B necessario est æqualis. quæ igitur ad eandem, eandem proportionem habent, æquales inter se sunt: & ad quas eadem, eandem habet proportionem, ipsæ inter se sunt æquales. Quod demonstrare oportebat. *a* 8. hujus.



PROP.

PROP. X. THEOR.

Ad eandem; proportionem habentium quæ majorem proportionem habet, illa major est; ad quam vero eadem majorem habet proportionem, illa minor est.



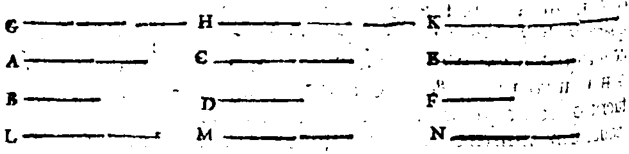
Habeat enim A ad C majorem proportionem, quam B ad C. dico A quam B majorem esse. si enim non est major, vel æqualis est, vel minor. æqualis autem non est A ipsi B, utraque enim ipsarum A B ad C eandem haberet [a] proportionem. atqui eandem non habet. non igitur A ipsi B est æqualis. sed neque minor est A quam B; haberet [b] enim A ad C minorem proportionem, quam B. atqui non habet minorem, non igitur A minor est, quam B. ostensum autem est neque esse æqualem. ergo A quam B major erit. habeat rursus C ad B majorem proportionem quam C ad A. dico B minorem esse quam A. si enim non est minor, vel æqualis est, vel major. æqualis utique non est B ipsi A; etenim C ad utramque ipsarum A B eandem proportionem [a] haberet. non habet autem. ergo A ipsi B non est æqualis. sed neque major est B quam A; haberet enim C ad B minorem [b] proportionem quàm ad A. atqui non habet. non igitur B quam A est major. ostensum autem est neque æqualem esse. ergo B minor erit quam A. Ad eandem igitur proportionem habentium quæ majorem proportionem habet, illa major est; & ad quam eadem majorem habet proportionem, illa minor est. Quod oportebat demonstrare.

a 7. hujus.
b 8. hujus.

PROP. XI. THEOR.

Quæ eidem eædem sunt proportiones, & inter se eædem sunt.

Sint enim ut A ad B ita C ad D: ut autem C ad D ita E ad F. dico ut A ad B, ita esse E ad F. sumantur enim ipsarum quidem A C E æque multiplices G H K; ipsarum vero B D F aliæ utcunque æque multiplices L M N. Quoniam igitur



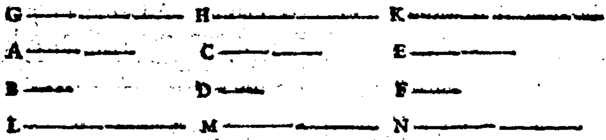
tur est ut A ad B, ita C ad D, & sumptæ sunt ipsarum A C æque multiplices G H, & ipsarum B D aliæ utcunque æque multiplices L M [a]; si G superat L, & H ipsam M superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. rursus quoniam est ut C ad D, ita E ad F, & sumptæ sunt ipsarum C E æque multiplices H K, ipsarum vero D F aliæ utcunque æque multiplices M N; si [a] H superat M, & K ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. sed si H superat M, & G superabit L; & si æqualis, æqualis; & si minor minor; quare si G superat L, & K ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. & sunt G K quidem ipsarum A E æque multiplices; L N vero ipsarum B F aliæ utcunque æque multiplices. ergo [a] ut A ad B, ita erit E ad F. Quæ igitur eidem eædem sunt proportiones, & inter se eædem sunt. Quod ostendisse oportuit.

[a] 5. Diffin. hujus.

PROP. XII. THEOR.

Si quotcunque magnitudines proportionales fuerint; ut una antecedentium ad unam consequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes consequentes.

Sint quotcunque magnitudines proportionales A B C D E F, & ut A ad B, ita sit C ad D, & E ad F. dico ut A ad B, ita esse A C E ad B D F. sumantur enim ipsarum A C E æ-



que multiplices G H K, & ipsarum B D F aliæ utcunque æque multiplices L M N. Quoniam igitur ut A ad B, ita est C ad D, E ad F, & sumptæ sunt ipsarum quidem A C E æque multiplices G H K, ipsarum vero B D F aliæ utcunque æque multiplices L M N; si [a] G superat L, & H ipsam M superabit, & K ipsam N; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. quare & si G superat L, superabunt & G H K ipsas L M N; & si æqualis, æquales; & si minor, minores. suntque G, & G H K ipsarum A, & A C E æque multiplices, quoniam si fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices; quotuplex est una magnitudo unius, totuplices [b] erunt & omnes omnium. eadem ratione & L & L M N ipsarum B, & B D F sunt æque multiplices. est igitur [a] ut A ad B, ita

[a] 5 Diffin. hujus.

[b] 1. hujus.

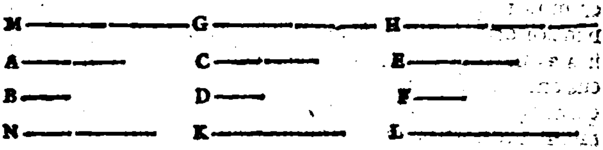
A C E

A C E ad B D F. Quare si quotcunque magnitudes proportionales fuerint, ut una antecedentium ad unam consequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes consequentes. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XIII. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam, tertia autem ad quartam majorem proportionem habeat quam quinta ad sextam: & prima ad secundam majorem habebit proportionem quam quinta ad sextam.

Prima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat quam tertia C ad quartam D, tertia autem C ad quartam D majorem habeat proportionem quam quinta E ad sextam F. dico & primam A ad secundam B majorem proportionem



habere, quam quintam E ad sextam F. Quoniam enim C ad D majorem proportionem habet quam E ad F, sunt quædam ipsarum C E æque multiplices, & ipsarum D F aliæ utcunque æque multiplices: & multiplex [a] quidem C superat multiplicem D; multiplex vero E non superat multiplicem F. sumantur, & sint ipsarum C E æque multiplices G H, & ipsarum D F aliæ utcunque æque multiplices K L, ita ut G quidem superet K: H vero ipsam L non superet: & quotuplex est G ipsius C, totuplex sit & M ipsius A; quotuplex autem K ipsius D, totuplex sit & N ipsius B. & quoniam est ut A ad B ita C ad D, & sumptæ sunt ipsarum A C æque multiplices M G, & ipsarum B D aliæ utcunque æque multiplices N K: si [b] M superat N, & G ipsam K superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. sed G superat K. ergo & M ipsam N superabit. H vero non superat L. suntque M H ipsarum A F æque multiplices, & N L ipsarum B F aliæ utcunque æque multiplices. ergo A ad B majorem proportionem habebit [a] quàm E ad F. Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem quàm tertia ad quartam; tertia vero ad quartam majorem proportionem habeat quàm quinta ad sextam: & prima ad secundam majorem habebit proportionem quam quinta ad sextam. Quod ostendere oportebat.

a 7. Diffin. hujus.

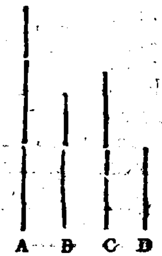
b 5. Diffin. hujus.

PROP.

PROP. XIV. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam; prima autem major sit quam tertia, & secunda quam quarta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

Prima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat quam tertia C ad quartam D: major autem sit A quàm C. dico & B quam D majorem esse. Quoniam enim A major est quam C, & alia est utcunque magnitudo B, habebit [a] A ad B majorem proportionem quàm C ad B; sed ut A ad B ita C ad D. ergo & C ad D majorem habebit [b] proportionem quàm C ad B. ad quam vero eadem majorem proportionem habet, illa minor [c] est. quare D est minor quàm B, ac propterea B quam D major erit. similiter demonstrabimus & si A æqualis sit ipsi C, & B ipsi D esse æqualem; & si A sit minor quam C, & B quàm D minorem esse. Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam; prima autem major sit quàm tertia, & secunda quam quarta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Quod demonstrare oportebat.

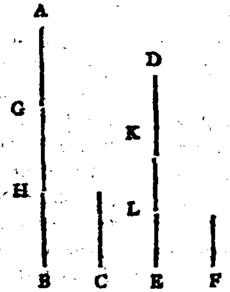


[a] 8. hujus.
[b] 13. hujus.
[c] 10. hujus.

PROP. XV. PROBL.

Partes inter se comparatæ eandem habent proportionem quam habent earum æque multiplices.

Sit enim AB æque multiplex C, ac DE ipsius F. dico ut C ad F, ita esse AB ad DE. Quoniam enim æque multiplex est AB ipsius C, ac DE ipsius F; quot magnitudines sunt in AB æquales ipsi C, totidem erunt & in DE æquales F. dividatur AB in magnitudines ipsi C æquales, quæ sint AG GH HB; & DE dividatur in magnitudines æquales F, videlicet in DK KL LE; erit igitur ipsarum AG GH HB multitudo æqualis multitudini DK KL LE. & quoniam æquales sunt AG GH HB, suntque DK KL

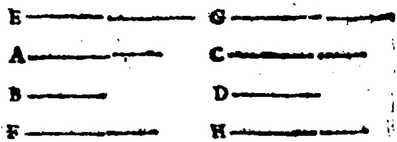


a 7. hujus. LE inter se æquales; ut AG ad DK, ita a erit GH ad KL, &
b 12. hujus. HB ad LE. atque erit b ut una antecedentium ad unam consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes: est igitur ut AG ad DK, ita AB ad DE. sed AG ipsi C est æqualis, & DK ipsi F. ergo ut C ad F, ita erit AB ad DE. Partes igitur inter se comparatæ eandem habent proportionem quam habent earum æque multiplices. Quod ostendendum fuit.

PROP. XVI. THEOR.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & permutatæ proportionales erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales A B C D, sitque ut A ad B, ita C ad D. dico & permutatas proportionales esse, videlicet ut A ad C, ita esse B ad D. Sumantur enim ipsarum quidem A B æque multiplices E F, ipsarum vero C D aliæ utcunque æque multiplices G H. & quoniam



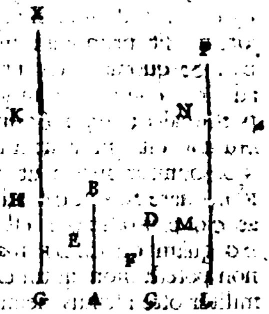
æque multiplex est E ipsius A, ac F ipsius B: partes autem
a 15. hujus. inter se comparatæ eandem habent a proportionem quam habent earum æque multiplices; erit ut A ad B ita E ad F. ut
b 11. hujus. autem A ad B ita C ad D. ergo & ut C ad D ita b E ad F. rursus quoniam G H sunt ipsarum C D æque multiplices, partes autem eandem proportionem habent, inter se comparatæ, quam habent earum æque multiplices; erit a ut C ad D ita G ad H. sed ut C ad D ita E ad F. ergo & ut E ad F ita G ad H. quod si quatuor magnitudines proportionales
c 14. hujus. sint, prima autem major c sit quàm tertia, & secunda quam quarta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. si igitur E superat G, & F ipsam H superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor; suntque E F ipsarum A B æque multiplices, & G H ipsarum C D aliæ utcunque æque mul-
d 5 Diffin. tiplices, ergo d ut A ad C ita erit B ad D. Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, & permutatæ proportionales erunt. Quod ostendere oportebat.

PROP.

PROP. XVII. THEOR.

Si compositæ magnitudines sint proportionales, & divisæ proportionales erunt.

Sint compositæ magnitudines proportionales AB BE CD DF: hoc est ut AB ad BE, ita sit CD ad DF. dico etiam divisas proportionales esse, videlicet ut AE ad EB ita esse CF ad FD. sumantur enim ipsarum quidem AE EB CF FD æque multiplices GH HK LM MN, ipsarum vero EB FD aliæ utcunque æque multiplices KX NP. Quoniam æque multiplex est GH ipsius AE, ac HK ipsius EB; erit [a] GH ipsius AE æque multiplex, ac GK ipsius AB. æque autem multiplex est GH ipsius AE, ac LM ipsius CF. ergo GK æque multiplex est AB, ac LM ipsius CF. rursus quoniam æque multiplex est LM ipsius CF, ac MN ipsius FD; erit [a] LM æque multiplex CF, ac LN ipsius CD. sed æque multiplex erat LM ipsius CF, ac GK ipsius AB. æque igitur multiplex est GK ipsius AB, ac LN ipsius CD. quare GK LN ipsarum AB CD æque multiplices erunt. rursus quoniam æque multiplex est HK ipsius EB, ac MN ipsius FD: est autem & KX ipsius EB æque multiplex, ac NP ipsius FD; & composita HX ipsius EB æque multiplex est [b], ac MP ipsius FD. quare cum sit ut AB ad BE, ita CD ad DF & sumptæ sint ipsarum quidem AB CD æque multiplices GK LN, ipsarum vero EB FD aliæ utcunque æque multiplices HX MP: si [c] GK superat HX, & LN superabit MP; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. superet igitur GK ipsam HX, communique ablata HK, & GH ipsam KX superabit. sed si GK superat HX, & LN superat MP; itaque superat LN ipsam MP: communique MN ablata, & LM superabit NP. quare si GH superat KX, & LM ipsam NP superabit. similiter demonstrabimus & si GH sit æqualis KX, & LM ipsi NP esse æqualem; & si minor, minorem. sunt autem GH LM ipsarum AE CF æque multiplices, & ipsarum EB FD aliæ utcunque æque multiplices KX NP. ergo [c] ut AE ad EB ita erit CF ad FD. Si igitur compositæ magnitudines sint proportionales, & divisæ proportionales erunt. Quod demonstrare oportebat.



[a] 1. hujus.

[b] 2. hujus.

[c] 5. Diffin. hujus.

PROP. XVIII. THEOR.

Si divisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt.

Sint divisæ magnitudines proportionales AE, EB CF FD: hoc est ut AE ad EB, ita CF ad FD. dico etiam compositas proportionales esse, videlicet ut AB ad BE, ita esse CD ad DF. Si enim non est ut AB ad BE, ita CD ad DF; erit ut AB ad BE, ita CD vel ad minorem quàm FD, vel ad majorem. sit primo ad minorem, nempe ad DG. & quoniam est ut AB ad BE, ita CD ad DG, compositæ magnitudines sunt proportionales; ergo & divisæ proportionales

a 17. hujus. erunt a. est igitur ut AE ad EB, ita CG ad GD. ponitur autem ut AE ad EB, ita CF ad

b 11. hujus. FD. quare & b ut CG ad GD, ita CF ad FD, at CG prima major est quam tertia CF. ergo & secunda

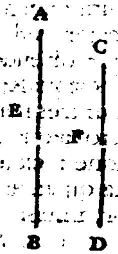
c 14. hujus. DG quàm quarta DF major c erit. sed & minor, quod fieri non potest. non igitur est ut AB ad BE, ita CD ad DG. similiter ostendemus neque esse ad majorem quàm DF. ad ipsam igitur DF sit necesse est. Quare si divisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XIX. THEOR.

Si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam: & reliqua ad reliquam erit ut tota ad totam.

Sit enim ut tota AB ad totam CD, ita ablata AE ad ablatam CF. dico & reliquam EB ad reliquam FD ita esse ut tota AB ad totam CD. Quo-

a 16. hujus. niam enim est ut tota AB ad totam CD, ita AE ad CF. & permutando erit a ut AB ad AE, ita CD ad CF. quoniam compositæ magnitudines sunt proportionales, & divisæ



b 17. hujus. proportionales erunt b, ut igitur BE ad EA, ita DF ad FC: rursusque permutando ut a BE ad DF, ita EA ad FC. sed ut EA ad CF,

c 11. hujus. ita posita est AB ad CD. & reliqua c igitur EB erit ad reliquam FD, ut tota AB ad totam CD. Quare si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam; & reliqua ad reliquam erit ut tota ad totam. Quod demonstrare oportebat.

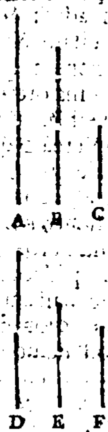
Cor.

Cor. Si quatuor magnitudines proportionales sint, per conversionem rationis proportionales erunt. Sit enim ut A B ad B E, ita C D ad D F; erit permutando A B ad C D, ita B E ad D F. quare cum est tota A B ad totam C D, ut ablata B E ad ablatam D F, erit & reliqua A E ad reliquam C F, ut tota A B ad totam C D. quare rursus permutando & invertendo erit ut A B ad A E, ita C D ad C F. quod est per conversionem rationis.

PROP. XX. THEOR.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur, in eadem proportione: ex æquali autem prima major sit, quàm tertia, & quarta quàm sexta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

Sint tres magnitudines A B C, & aliæ ipsis numero æquales D E F; binæ sumptæ, & in eadem proportione: sitque ut A ad B, ita D ad E, & ut B ad C, ita E ad F: ex æquali autem major sit A quam C: dico & D quam F majorem esse; & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem. Quoniam enim A major est quàm C, alia vero est utcunque B, & major ad eandem majorem habet [a] proportionem quàm minor; habebit A ad B majorem proportionem quàm C ad B. sed ut A ad B, ita D ad E; & invertendo ut C ad B, ita F ad E. ergo & D ad E majorem habet proportionem quàm F ad E: ad eandem vero proportionem habentium quæ majorem habet proportionem, illa major [b] est. major igitur est D quam F. similiter ostendemus & si A sit æqualis C, & D ipsi F æqualem esse; & si minor, minorem. Si igitur tres magnitudines fuerint, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur, & in eadem proportione: ex æquali autem prima major sit quàm tertia; & quarta quam sexta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Quod ostendere oportebat.



a 8. hujus.

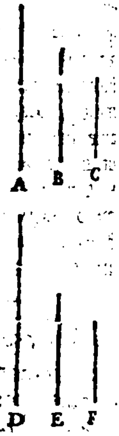
b 10. hujus.

PROP. XXI. THEOR.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur & in eadem proportione; sit autem perturbata earum analogia, & ex æquali prima major sit quam tertia; & quarta quam sexta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

Sint tres magnitudines proportionales A B C, & aliæ ipsis numero æquales D E F, binæ sumptæ & in eadem proportione. sit autem perturbata earum analogia, videlicet ut A quidem ad B, ita E ad F; ut vero B ad C, ita D ad E; & ex æquali A major sit quam C. dico & D quam F majorem esse; & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem. Quoniam enim major est A quam C, alia vero est B; habebit [a] A ad B majorem proportionem quàm C ad B. sed ut A ad B, ita E ad F: & invertendo ut C ad B, ita E ad D. quare & E ad F majorem habebit proportionem quam E ad D. ad quam vero eadem majorem proportionem habet illa minor est [b]. minor igitur est F quàm D; ac propterea D quam F major erit. similiter ostendemus & si A sit æqualis C, & D ipsi F esse æqualem; & si minor, minorem. Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ sumantur & in eadem proportione; sit autem perturbata earum analogia, & ex æquali autem prima major sit quam tertia; & quarta quam sexta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Quod demonstrare oportebat.

[a] 8. hujus.
[b] 10. hujus.

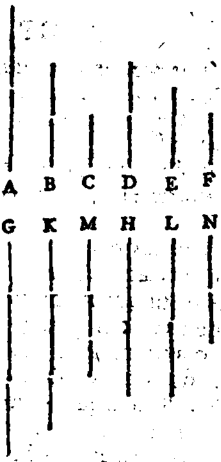


PROP. XXII. THEOR.

Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportione; & ex æquali in eadem proportione erunt.

Sint quotcunque magnitudines A B C, & aliæ ipsis numero æquales D E F, binæ sumptæ in eadem proportione, hoc est ut A quidem ad B, ita D ad E, ut autem B ad C, ita E ad F. dico & ex æquali in eadem proportione esse, ut A ad C, ita D ad F. sumantur enim ipsarum quidem A D æque multiplices G H; ipsarum vero B E aliæ utcunque æque multiplices

plices K L, & ipſarum C F aliæ utcunque æque multiplices M N. Quoniam igitur eſt ut A ad B, ita D ad E, & ſumptæ ſunt ipſarum A D æque multiplices G H, & ipſarum B E aliæ utcunque æque multiplices K L; erit ut ᵃ G ad K, ita H ad L. eadem quoque ratione erit ut K ad M, ita L ad N. & cum ſint tres magnitudines G K M, & aliæ ipſis numero æquales H L N, binæ ſumptæ & in eadem proportione; ex æquali ᵇ ſi G ſuperat M, & H ipſam N ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. ſuntque G H ipſarum A D æque multiplices, & M N ipſarum C F aliæ utcunque æque multiplices. ut igitur A ad C, ita erit ᶜ D ad F. Quare ſi ſint quotcunque magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem proportione, & ex æquali in eadem proportione erunt. Quod demonſtrare oportebat.



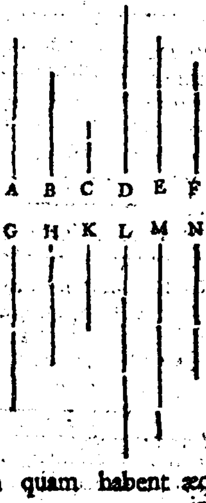
a 4. hujus.

b 10. hujus.

c Diffin. 5. hujus.

PROP. XXIII. THEOR.

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem proportione; ſit autem perturbata earum analogia: & ex æquali in eadem proportione erunt.



Sint tres magnitudines A B C, & aliæ ipſis numero æquales, binæ ſumptæ in eadem proportione, D E F; ſit autem perturbata earum analogia, hoc eſt ſit ut A ad B, ita E ad F, & ut B ad C, ita D ad E. dico ut A ad C, ita eſſe D ad F. Sumantur ipſarum quidem A B D æque multiplices G H L: ipſarum vero C E F aliæ utcunque æque multiplices K M N. & quoniam G H æque multiplices ſunt ipſarum A B, partes autem eandem habent proportionem quam habent æque

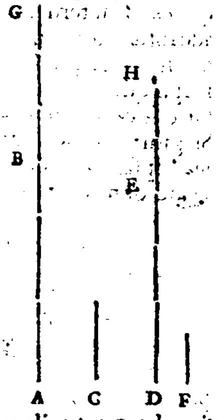
 ipſa-

a 15. hujus. ipsarum multiplices: erit a ut A ad B, ita G ad H. & simili ratione ut E ad F, ita M ad N. atque est ut A ad B, ita E ad
b 11. hujus F. ut b igitur G ad H, ita M ad N. rursus quoniam est ut B ad C, ita D ad E, & sumptæ sunt ipsarum B D æque multiplices H L, ipsarum vero C E aliæ utcunque æque multiplices K M: erit ut H ad K, ita L ad M. ostensum autem est & ut G ad H, ita esse M ad N. quoniam igitur tres magnitudines proportionales sunt G H K, & aliæ ipsis numero æquales L M N, binæ sumptæ in eadem proportione, estque ipsarum perturbata
c 21. hujus. analogia; ex æquali, si c G superat K, & L ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. sunt autem G K ipsarum A C æque multiplices: & L N æque multiplices ipsarum D F. ut igitur A ad C, ita erit D ad F. Quare si fuerint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportione, sit autem perturbata earum analogia; & ex æquali in eadem proportione erunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIV. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; habeat autem & quinta ad secundam proportionem eandem, quam sexta ad quartam: & composita prima cum quinta ad secundam eandem proportionem habebit, quam tertia cum sexta ad quartam.

Prima AB ad secundam C eandem habeat proportionem, quam tertia DE ad quartam F. habeat autem & quinta BG ad secundam C proportionem eandem quam sexta EH ad quartam F. dico & compositam primam cum quinta AG ad secundam C eandem proportionem habere, quam tertiam cum sexta DH ad quartam F. Quoniam enim est ut BG ad C, ita EH ad F; erit invertendo ut C ad BG, ita F ad EH. & quoniam ut AB ad C, ita est DE ad F: ut autem C ad BG, ita
a 22. hujus. F ad EH; erit a ex æquali ut AB ad BG, ita DE ad EH. quod cum divisæ magnitudines sint proportionales, & com-
b 18. hujus. positæ proportionales b erunt. ut igitur AG ad GB, ita est DH ad HE. sed &



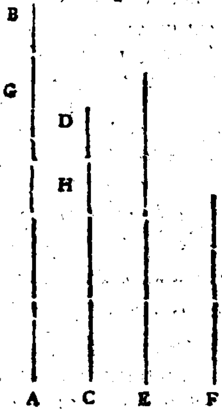
c hypoth. ut c GB ad C, ita HE ad F. ergo, ex a æquali, ut AG ad C, ita erit

erit D H ad F. Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem quàm tertia ad quartam: habeat autem & quinta ad secundam proportionem eandem quam sexta ad quartam: & composita prima cum quinta ad secundam eandem proportionem habebit quam tertia cum sexta ad quartam. Quod ostendere oportebat.

PROP. XXV. THEOR.

Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum & minima, duabus reliquis majores erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales A B C D E F; & sit ut A B ad C D, ita E ad F. sit autem maxima ipsarum A B & F minima. dico A B & F ipsis C D E majores esse. ponatur enim ipsi quidem E æqualis A G, ipsi vero F æqualis C H. Quoniam igitur est ut A B ad C D, ita E ad F: estque A G æqualis E, & C H æqualis F; erit ut A B ad D C, ita A G ad C H. & quoniam ut tota A B ad totam C D, ita ablata A G ad ablatam C H; & reliqua G B ad reliquam H D erit *a* ut tota A B ad C D totam. major autem est A B quàm C D. ergo & G B quàm H D major erit. quòd cum A G sit æqualis ipsi E, & C H ipsi F; erunt A G & F ipsi C H & E æquales. si autem inæqualibus æqualia addantur, tota inæqualia erunt. ergo G B H D inæqualibus existentibus, quippe cum G B sit major, si ipsi quidem G B addantur A G & F, ipsi vero H D addantur C H & E: fient A B & F, ipsis C D & E necessario majores. Si igitur quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum & minima, duabus reliquis majores erunt. Quod demonstrare oportebat.



a 19. hujus.

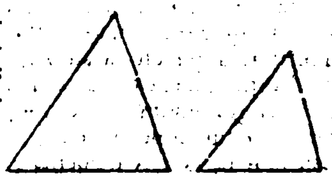
EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER SEXTUS.

DIFFINITIONES.

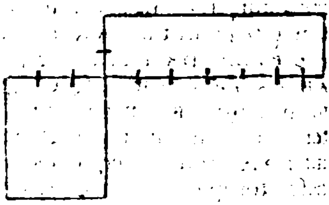
I

SImiles figuræ rectilineæ sunt quæ & singulos angulos æquales habent, & circa æquales angulos latera proportionalia.



II.

Reciprocæ figuræ sunt quando in utraque figura antecedentes,& consequentes rationum fuerint termini.



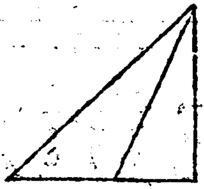
III.

Extrema ac media ratione secari recta linea dicitur, quando sit, ut tota ad majus segmentum, ita majus segmentum ad minus.

IV.

IV.

Altitudo cujuſque figuræ eſt, linea perpendicularis quæ à vertice ad baſim ducitur.



V.

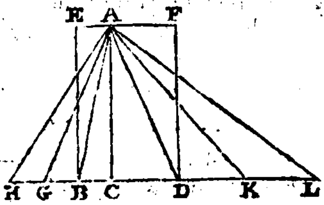
Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum quantitates inter ſe multiplicatæ, aliquam efficiunt rationem.

PROPOSITIO I.

THEOREMA.

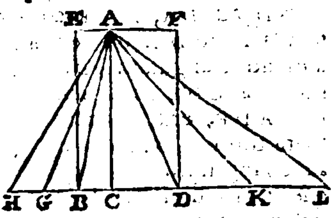
Triangula, & parallelogramma quæ eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes.

Sint triangula quidem ABC ACD, parallelogramma vero EC CF, quæ eandem habeant altitudinem, videlicet perpendicularem à puncto A ad BD ductam. dico ut baſis BC ad CD baſim, ita eſſe triangulum ABC ad triangulum ACD, & parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. producatur BD ex utraque parte ad puncta H L, & ipſi quidem BC baſi æquales quotcunque ponantur BG GH, ipſi vero baſi CD ponantur quotcunque æquales DK KL, & AG AH AK AL jungantur. Quoniam igitur CB BG GH inter ſe æquales ſunt, erunt & triangula AHG AGB ABC inter a ſe æqualia. ergo quotuplex eſt baſis HC ipſius BC baſis, totuplex eſt AHC triangulum trianguli ABC. eadem ratione quotuplex eſt LC baſis ipſius baſis CD, totuplex eſt & triangulum ALC ipſius ACD trianguli: & ſi æqualis eſt HC baſis baſi CL, & triangulum AHC triangulo ALC eſt a æquale: & ſi baſis HC baſim CL ſuperat, & triangulum AHC ſuperabit triangulum ALC: & ſi minor, minus. quatuor igitur magnitudinibus exiſtentibus, videlicet duabus baſibus BC CD, & duobus triangulis ABC ACD, ſumpta ſunt æque multiplicia baſis quidem BC, & ABC trianguli, videlicet



a 38. primi.

videlicet basis HC, & AHC triangulum: basis vero CD, & trianguli ACD, alia utcunque æque multiplicia, nempe CL basis, & ALC triangulum; atque ostensum est si HC basis basim CL superat, & triangulum AHC superare triangulum ALC; & si æqualis, æquale; & si minor, minus. est igitur [b] ut BC basis ad basim CD, ita triangulum ABC ad ACD triangulum. & quoniam trianguli ABC duplum est [c] parallelogrammum EC, & trianguli ACD parallelogrammum FC duplum [c], partes autem cum pariter multiplicibus eandem inter se proportionem habent: igitur ut ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. quoniam igitur ostensum est ut basis BC ad CD basim, ita esse ABC triangulum ad triangulum ACD; ut autem ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EF ad CF parallelogrammum; erit [d] ut BC basis ad basim CD, ita parallelogrammum EC ad FC parallelogrammum. Quare triangula & parallelogramma quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases. Quod demonstrare oportebat.



[b] Diffin. 5. quinti.
[c] 41. primi.
[d] 11. quinti

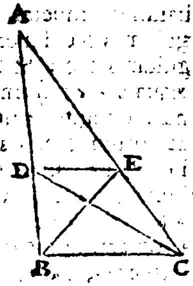
PROP. II. THEOR.

Si uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones conjungit recta linea, reliquo trianguli lateri parallela erit.

Trianguli enim ABC uni laterum BC, parallela ducatur DE. dico ut DB ad DA, ita esse CE ad EA. jungantur BE CD. triangulum igitur BDE triangulo CDE est [a] æquale, in eadem enim sunt basi DE, & in eisdem DE & BC parallelis; aliud autem triangulum est ADE: sed æqualia ad idem eandem habent [b] proportionem; ergo ut triangulum BDE ad triangulum ADE, ita est CDE triangulum ad triangulum ADE. ut autem triangulum BDE ad triangulum ADE, ita [c] est BD ad DA; nam cum eandem altitudinem habeant, videlicet perpendicularem à puncto E ad AB ductam, inter se sunt ut bases. & ob eandem causam, ut CDE triangulum ad triangulum ADE, ita CE ad EA. & ut igitur BD ad DA, ita est [d] CE ad EA. Et si trianguli ABC latera AB, AC pro-

[a] 37. primi.
[b] 7. quinti.
[c] 1. hujus.
[d] 11. quinti.

proportionaliter secta sint, ut BD ad DA, ita sit CE ad EA; & jungatur DE. dico DE ipsi BC parallelam esse. iisdem constructis, quoniam est ut BD ad DA, ita CE ad EA; ut autem BD ad DA, ita c est BDE triangulum ad triangulum ADE; & ut CE ad EA, ita CDE triangulum c ad triangulum ADE, erit ut triangulum BDE ad triangulum ADE, ita e CDE triangulum ad triangulum ADE. quod cum utrumque triangulorum BDE CDE ad triangulum ADE eandem habeat proportionem; erit BDE triangulum f triangulo CDE æquale; & sunt in eadem basi DE: æqualia autem triangula, & in eadem basi constituta, etiam in eisdem g sunt parallelis. ergo DE ipsi BC parallela est. Si igitur uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones conjungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit. Quod oportebat demonstrare.

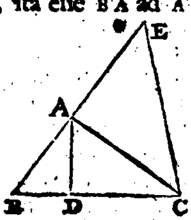


e 11. quinti.
f 9. quinti.
g 39. primi.

PROP. III. THEOR.

Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea secet etiam basim; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera. & si basis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam secabit.

Sit triangulum ABC, & secetur angulus BAC bifariam a recta linea AD. dico ut BD ad DC, ita esse BA ad AC. ducatur per C ipsi DA parallela b CE, & producta BA conveniat cum ipsa in E puncto. Quoniam igitur in parallelas AD EC incidit recta linea quædam AC, erit c ACE angulus angulo CAD æqualis. sed CAD angulus ponitur æqualis angulo BAD. ergo & BAD ipsi ACE angulo æqualis erit. rursus quoniam in parallelas AD EC recta linea



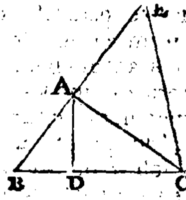
a 9. primi.
b 31. primi.
c 29. primi.

linea BAE incidit, exterior angulus BAD æqualis est *e* interiori ABC. ostensus autem est & angulus ACE angulo BAD æqualis. ergo & ACE ipsi ABC æqualis erit: ac propterea

d 6 primi. latus AE æquale *d* lateri AC. & quoniam uni laterum trianguli BCE, videlicet ipsi EC

e 2. hujus. parallela ducta est AD; erit *e* ut BD ad DC, ita BA ad AE; æqualis autem est AE ipsi AC.

f 7. quinti. est igitur *f* ut BD ad DC, ita BA ad AC. Et si sit ut BD ad DC, ita BA ad AC, & AD jungatur. dico angulum BAC bifariam sectum esse recta linea AD. iisdem enim constructis, quoniam est ut BD ad DC, ita BA ad AC; sed & ut



g 9. quinti. BD ad DC, ita *g* BA ad AE, etenim uni laterum trianguli BCE, videlicet ipsi EC parallela ducta est AD, erit & ut BA ad AC, ita BA ad AE. ergo AC est *g* æqualis AE, ac propterea & angulus AEC angulo ECA æqualis. sed angu-

h 20. primi. lus quidem AEC est æqualis *h* angulo exteriori BAD; angulus vero ACE æqualis *h* alterno CAD. quare & BAD angulus ipsi CAD æqualis erit. angulus igitur BAC bifariam sectus est recta linea AD. Ergo si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea etiam basim secet; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera. & si basis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam secabit. Quod oportebat demonstrare.

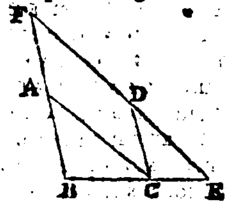
PROP. IV. THEOR.

Æquiangulorum triangulorum latera quæ circum æquales angulos proportionalia sunt; & homologa, sive ejusdem rationis, sunt latera quæ æqualibus angulis subtenduntur.

Sint æquiangula triangula ABC DCE, quæ angulum quidem ABC angulo DCE, angulum vero ACB angulo DEC æqualem habeant, & præterea angulum BAC angulo CDE. dico triangulorum ABC DCE proportionalia esse latera quæ sunt circa æquales angulos; & homologa, sive ejusdem rationis, latera esse quæ æqualibus angulis subtenduntur. ponatur BC in directum ipsi CE. Et quoniam

a 17. primi. anguli ABC ACB duobus rectis minores *a* sunt, æqualis autem est angulus ACB angulo DEC; erunt ABC DEC anguli

guli duobus rectis minores. quare B A B D productæ inter se convenient [b]; producantur, & conveniant in puncto F. & quoniam angulus D C E est æqualis angulo A B C; erit [c] B F ipsi D C parallela. rursus quoniam æqualis est angulus A C B angulo D E C, parallela [c] erit A C ipsi F E. parallelogrammum igitur est F A C D; ac propterea F A quidem ipsi C D, A C vero ipsi F D est [d] æqualis. & quoniam uni laterum trianguli F B E, videlicet ipsi F E, parallela ducta est A C; erit [e] ut B A ad A F, ita B C ad C E. æqualis autem est A F ipsi C D. ut igitur B A ad C D, ita B C ad C E, & permutando ut B A ad B C ita C D ad C E. rursus quoniam C D parallela est B F, erit [e] ut B C ad C E, ita F D ad D E. sed F D est æqualis A C. ergo ut [f] B C ad C E, ita A C ad D E. permutando igitur, ut B C ad C A ita C E ad E D. itaque quoniam ostensum est, ut A B ad B C ita D C ad C E, ut autem B C ad C A ita C E ad E D: erit [g] ex æquali, ut B A ad A C ita C D ad D E. Æquiangulorum igitur triangulorum proportionalia sunt latera quæ circum æquales angulos. & homologa, sive ejusdem rationis, latera sunt quæ æqualibus angulis subtenduntur. Quod demonstrare oportebat.

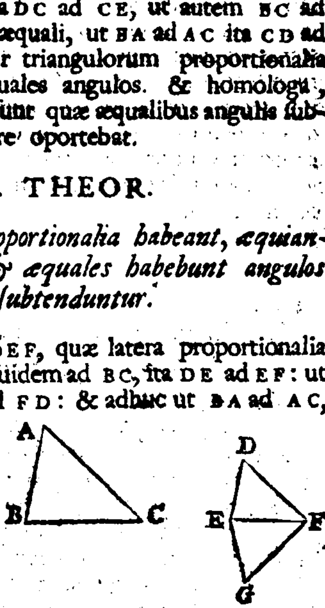


[b] 12. axio. primi.
[c] 28. primi.
[d] 34. primi.
[e] 2. hujus.
[f] 7. quinti.
[g] 22 quinti.

PROP. V. THEOR.

Si duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur.

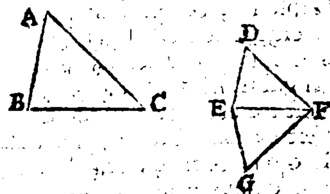
Sint duo triangula A B C D E F, quæ latera proportionalia habeant, hoc est, sit ut A B quidem ad B C, ita D E ad E F: ut autem B C ad C A, ita E F ad F D: & adhuc ut B A ad A C, ita E D ad D F. dico triangulum A B C triangulo D E F æquiangulum esse, & æquales habere angulos quibus homologa latera subtenduntur, angulum quidem A B C angulo D E F, angulum vero B C A angulo E F D, & præterea angulum B A C angulo E D F. Constituatur enim [a] ad rectam lineam E F, & ad puncta in ipsa E F, angulo quidem A B C æqualis angulus F E G; angulo autem B C A angulus



[a] 23. primi.

gulus E F G. quare reliquus B A C angulus [b] reliquo E G F est æqualis, ideoque æquiangulum est triangulum A B C triangulo E G F. triangulorum igitur A B C E G F proportionalia sunt latera quæ circum æquales angulos, & homologa latera sunt quæ æqualibus angulis subtenduntur. ergo ut A B ad B C [c], ita G E ad E F. sed ut A B ad B C, ita D E ad E F. ut igitur D E ad E F, ita [d] G E ad E F. quod cum utraque ipsarum D E E G ad E F eandem proportionem habeat, erit [e] D E ipsi E G æqualis. eadem ratione & D F æqualis F G. itaque quoniam D E est æqualis E G, communis autem E F; duæ D E E F duabus G E E F æquales sunt, & basis D F basi F G æqualis. angulus igitur D E F est æqualis [f] angulo G E F, & D E F triangulum æquale triangulo G E F, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo angulus quidem D E F est æqualis angulo G E F, angulus vero E D F æqualis angulo E G F; & quoniam angulus F E D est æqualis angulo G E F, & angulus G E F angulo A B C, erit & angulus A B C angulo F E D æqualis. eadem ratione & angulus A C B æqualis est angulo D F E, & adhuc angulus ad A angulo ad D. ergo A B C triangulum triangulo D E F æquiangulum erit. Si igitur duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula; & æquales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur. Quod oportebat demonstrare.

[b] Cor. 32. primi.
[c] 4. hujus.
[d] 11 quinti.
[e] 9. quinti.
[f] 8. primi.



PROP. VI. THEOR.

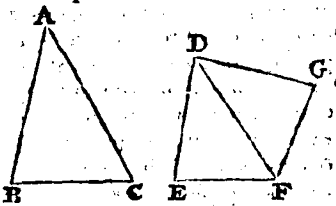
Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos quibus æqualia latera subtenduntur.

Sint duo triangula A B C D E F, unum angulum B A C uni angulo E D F æqualem habentia, circa æquales autem angulos, latera proportionalia, hoc est, sit ut B A ad A C, ita E D ad D F. dico triangulum A B C triangulo D E F æquiangulum esse, & angulum quidem A B C habere æqualem angulo D E F; angulum vero A C B angulo D F E. Constituatur [a] enim ad rectam lineam D F, & ad puncta in ipsa D F, alterutri angulorum B A C E D F æqualis angulus F D G, angulo autem A C B æqualis D F G. reliquus

[a] 23. primi.

igitur

igitur ad B reliquo ad G est [b] æqualis. ergo triangulum ABC triangulo DGF, æquiangulum est; ac propterea ut BA ad AC ita [c] est GD ad DF: ponitur autem & ut BA ad AC, ita ED ad DF. ut igitur [d] ED ad DF, ita GD ad DF. quare ED æqualis est [e] ipsi DG, & communis DF. ergo duæ ED DF duabus GD DF æquales sunt, & angulus EDF angulo GDF est æqualis; basis igitur EF est [f] æqualis basi FG, triangulumque DEF æquale triangulo GDF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo angulus quidem DFG est æqualis angulo DFE; angulus vero ad G angulo ad E. sed angulus DFG æqualis est angulo ACB; & angulus igitur ACB angulo DFE est æqualis. ponitur autem & BAC angulus æqualis angulo EDF. ergo & reliquus qui ad B æqualis est reliquo ad E. æquiangulum igitur est triangulum ABC triangulo DEF. Quare si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur. Quod ostendere oportebat.



[b] Cor. 32. primi.
[c] 4. hujus.
[d] 11 quinti.
[e] 9. quinti.
[f] 4. primi.

PROP. VII. THEOR.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum utrumque, simul vel minorem, vel non minorem recto, æquiangula erunt triangula; & æquales habebunt angulos circa quos latera sunt proportionalia.

Sint duo triangula ABC DEF, unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum BAC angulo EDF æqualem, circa alios autem angulos ABC DEF latera proportionalia, ut sit DE ad EF, sicut AB ad BC: & reliquorum quæ ad C F, utrumque simul minorem vel non minorem recto. dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum esse; angulumque ABC æqualem angulo DEF, & reliquum videlicet qui ad C reliquo qui ad F æqualem. Si inæqualis est angulus ABC angulo DEF, unus ipsorum major erit. sit major ABC: & constituatur [a] ad rectam lineam AB, & ad punctum in ipsa B, angulo DEF æqualis angulus ABG: &

[a] 23. primi.

quo-

quoniam angulus quidem A est æqualis angulo D, angulus vero ABG angulo DEF: erit reliquus AGB reliquo DFE æqualis[b]. æquiangulum igitur est ABG triangulum triangulo DEF.

b Cor. 32. primi.

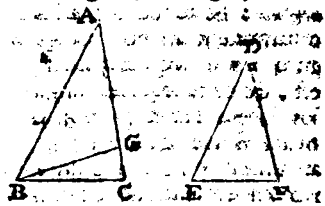
c 4. hujus.

quare ut[c] AB ad BG, sic DE ad EF: utque DE ad EF, sic ponitur AB ad BC. & ut igitur AB ad BC, sic AB ad BG.

d 9. quinti.

quod cum AB ad utramque BC BG eandem habeat proportionem, erit BC ipsi BG æqualis[d]: ac propterea angulus ad

e 5. primi.

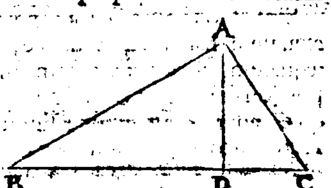


C est æqualis angulo BGC. quare uterque angulorum BCG BGC minor est recto, igitur qui ei deinceps est AGB major est recto, atque ostensus est angulus AGB æqualis angulo qui ad F. angulus igitur qui ad F recto major est. atqui ponitur non major: cum C non est major recto, quod est absurdum. non igitur inæqualis est angulus ABC angulo DEF. ergo ipsi est æqualis. est autem, & angulus ad A æqualis ei qui ad D: quare & reliquus qui ad C æqualis reliquo qui ad F. æquiangulum igitur est ABC triangulum triangulo DEF. Si igitur duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum utrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto: æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos circa quos proportionalia sunt latera. Quod oportebat demonstrare.

PROP. VIII. THEOR.

Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem sunt triangula, & toti, & inter se similia sunt.

Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC: & à puncto A ad BC perpendicularis ducatur AD. dico triangula ABC ADC toti triangulo ABC, & inter se similia esse. Quoniam enim angulus BAC est æqualis angulo ADB, rectus enim uterque est, & angulus ad B communis duobus triangulis ABC ABD; erit[a]



a Cor. 32. primi.

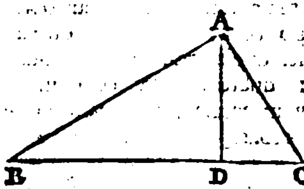
reliquus ACB reliquo BAD æqualis. æquiangulum igitur est triangulum ABC triangulo ABD. quare[b] ut BC quæ subtendit angulum rectum trianguli ABC, ad BA subtenden-

b 4. hujus.

tem

tem angulum rectum trianguli ABD, sic ipsa AB subtendens angulum ad C trianguli ABC, ad DB subtendentem angulum æqualem angulo ad C, videlicet BAD ipsius ABD trianguli: & adhuc AC ad AD subtendentem angulum ad B communem duobus triangulis. ergo triangulum ABC triangulo ABD æquiangulum [c] est; & circa æquales angulos latera habet proportionalia. simile igitur [c] est triangulum ABC triangulo ABD. eadem ratione demonstrabimus etiam ADC triangulum triangulo ABC simile esse. quare utrumque ipsorum ABD ADC toti ABC triangulo est simile. Dico insuper triangula ABD ADC etiam inter se similia esse. Quoniam enim angulus BDA rectus est æqualis recto ADC; sed & BAD ostensus est æqualis angulo ad C; erit reliquus ad B reliquo DAC æqualis. æquiangulum igitur est triangulum ABD triangulo ADC. ergo ut BD trianguli ABD subtendens BAD angulum, ad DA trianguli ADC subtendentem angulum qui est ad C, æqualem angulo BAD, sic ipsa AD trianguli ABD subtendens angulum ad B, ad DC subtendentem angulum DAC ei qui est ad B æqualem; & adhuc BA ad AC subtendentem angulum rectum ADC. simile igitur est ABD triangulum triangulo ADC. Quare si in triangulo rectangulo ab angulo recto ab basim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem sunt triangula, & toti, & inter se similia sunt. Quod oportebat demonstrare.

[c] 1. Diffin. hujus.



Cor. Ex hoc manifestum est, in triangulo rectangulo, ab angulo recto ad basim perpendicularem ductam, mediam proportionalem esse inter segmenta basis; & præterea inter basim & basis segmentum, latus utrumlibet segmento conterminum, medium esse proportionale.

PROP. IX. PROBL.

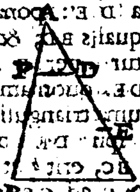
A data recta linea imperatam partem abscindere.

Sit data recta linea AB. oportet ab ipsa AB imperatam partem abscindere. Imperetur pars tertia; & ducatur à puncto A quædam recta linea AC, quæ cum ipsa AB angulum quemlibet contineat; sumaturque in AC quodvis punctum D, & ipsi AD æquales [a] ponantur DE EC, & jungatur

[a] 3. primi.

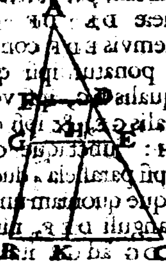
b 31. primi. jungatur BC; per D ipsi BC parallela b ducatur DF. itaque quoniam uni laterum trianguli ABC, videlicet ipsi BC, parallela ducta est FD; erit c ut CD ad DA, ita BF ad FA; dupla autem est CD ipsius DA. ergo & BF ipsius FA dupla erit. tripla igitur est BA ipsius AF. quare à data recta linea AB imperata tertia pars AF abscissa est. Quod facere oportebat.

c 2. hujus.



PROP. X. PROBL.

Datam rectam lineam insectam, datæ rectæ lineæ sectæ similiter secare.



Sit data quidem recta linea insecta AB, secta vero AC. oportet rectam lineam AB insectam ipsi AC sectæ similiter secare. sit secta AC in punctis D & E, & ponantur ita, ut angulum quemvis contineant; junctaque BC per puncta quidem D & E ipsi BC parallelæ a ducantur

a 31. primi. DF EG: per D vero ipsi AB ducatur parallela DHK. parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum FH HB; ac pro-

b 34. primi. pterea DH quidem est b æqualis FG, HK vero ipsi GB. & quoniam uni laterum trianguli DKC, ipsi scilicet KC, parallela ducta est HE; erit c ut CE ad ED, ita

c 2. hujus. KH ad HD. æqualis autem est KH quidem ipsi BG, HD vero ipsi GF. est igitur ut CE ad ED, ita BG ad GF. rursus quoniam uni laterum trianguli AGE, nimirum ipsi EG, parallela ducta est FD, ut ED ad DA, ita c erit GF ad FA. sed ostensum est ut CE ad ED, ita esse BG ad GF. ut igitur CE ad ED, ita est BG ad GF, & ut ED ad DA, ita GF ad FA. ergo data recta linea insecta AB, datæ rectæ lineæ sectæ AC similiter secta est. Quod facere oportebat.

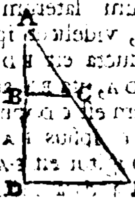
PROP. XI. PROBL.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem invenire.

Sint datæ duæ rectæ lineæ AB AC, & ponantur ita ut angulum quemvis contineant. oportet ipsis AB AC

tertiam

tertiam proportionalem invenire. Producantur A B A C ad puncta D E: ponaturque ipsi A C æqualis B D; & juncta B C, ducatur per D ipsi B C parallela D E. quoniam igitur uni laterum trianguli A D E, videlicet ipsi D E parallela ducta est B C, erit [b] ut A B ad B D, ita A C ad C E. æqualis autem est B D ipsi A C. ut igitur A B ad A C, ita est A C ad C E. quare datis rectis lineis A B A C tertia proportionalis inventa est C E. Quod facere oportebat.



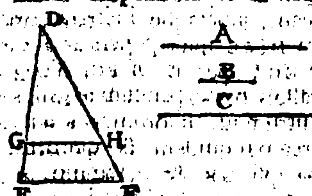
[a] 31. primi.

[b] 2. hujus.

PROP. XII. PROBL.

Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem invenire.

Sint datæ tres rectæ lineæ A B C. oportet ipsis A B C quartam proportionalem invenire. Exponantur duæ rectæ lineæ D E D F angulum quemvis E D F continentes: & ponatur ipsi quidem A æqualis D G, ipsi vero B æqualis G E, & ipsi C æqualis D H: junctaque G H, per E ipsi parallela [a] ducatur E F. itaque quoniam uni laterum trianguli D E F, nimirum ipsi E F, parallela ducta est G H, erit ut D G ad G E, ita D H ad H F. est autem D G ipsi A æqualis, G E vero æqualis B, & D H æqualis C. ut igitur A ad B, ita C ad H F. quare datis tribus rectis lineis A B C quarta proportionalis inventa est H F. Quod facere oportebat.



[a] 31. primi.

PROP. XIII. PROBL.

Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem invenire.

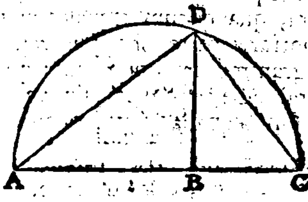
Sint datæ duæ rectæ lineæ A B B C. oportet inter ipsas A B, B C mediam proportionalem invenire. Ponantur in directum, & super ipsa A C describatur semicirculus A D C, ducaturque [a] à puncto B ipsi A C ad rectos angulos B D, & A D D C jungantur. Quoniam igitur in semicirculo est angulus A D C, [b] rectus est, & quoniam in triangulo rectan-

[a] 11. primi.

[b] 31. tertii.

gulo ADC, ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est DB, erit DB media proportionalis [c] inter segmenta basis AB BC. duabus igitur datis rectis lineis AB BC media proportionalis inventa est. Quod facere oportebat.

c Cor. 8. hujus



PROP. XIV. THEOR.

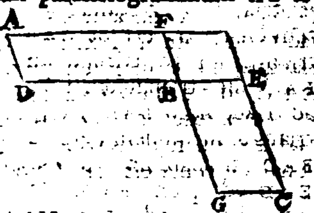
Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum latera quæ sunt circum æquales angulos, reciproca sunt: Et quorum parallelogrammorum unum uni æqualem habentium angulum, latera quæ circum æquales angulos, sunt reciproca; ea inter se sunt æqualia.

Sint æqualia parallelogramma AB BC, æquales habentia angulos ad B, & ponantur in directum DB BE. ergo & in directum [a] erunt FB BG. dico parallelogrammorum AB BC latera quæ sunt circum æquales angulos reciproca esse: hoc est ut DB ad BE ita esse GB ad BF. Compleatur enim parallelogrammum FE. & quoniam parallelogrammum AB æquale est parallelogrammo BC, aliud autem aliquod est FE parallelogrammum, erit ut AB ad FE [b], ita BC ad FE. sed ut AB quidem ad FE, ita [c] est DB ad BE; ut autem BC ad FE, ita [c] GB ad BF; ut igitur DB ad BE, ita GB ad BF. ergo parallelogrammorum AB BC latera quæ circum æquales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. Et si reciproca sunt seu ex contraria parte sibi ipsis respondeant latera quæ sunt circum æquales angulos, sit nempe ut BD ad BE, ita GB ad BF, dico parallelogrammum AB parallelogrammo BC æquale esse. quoniam enim est ut DB ad BE, ita GB ad BF, ut autem DB ad BE, ita [c] AB parallelogrammum ad parallelogrammum FE, & ut GB ad BF, ita [c] BC parallelogrammum ad parallelogrammum FE; erit & ut AB ad FE, ita BC ad FE. æquale igitur est AB parallelogrammo BC. Ergo æqualium & unum uni

a 14 primi.

b 7. quinti.

c 1. hujus.

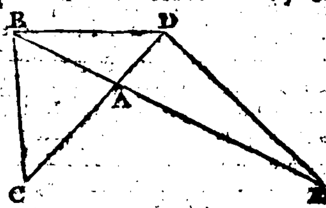


uni æqualem habentium angulum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt seu ex contraria parte sibi ipsis respondent, & quorum parallelogrammorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt; ea inter se sunt æqualia. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XV. THEOR.

Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum triangulorum latera quæ circum æquales angulos, angulos, sunt reciproca. Et quorum triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos reciproca sunt, ea inter se sunt æqualia.

Sint triangula ABC ADE unum angulum uni angulo æqualem habentia, angulum scilicet BAC angulo DAE. dico triangulorum ABC ADE latera quæ circum æquales angulos reciproca esse, hoc est ut CA ad AD, ita esse EA ad AB. ponantur enim ita ut indirectum sit CA ipsi AD. ergo & EA ipsi AB indirectum *a* erit; & jungatur BD. quoniam igitur triangulum ABC æquale est triangulo ADE, aliud autem est ABD; erit ut CAB triangulum ad triangulum BAD, ita *b* triangulum ADE ad triangulum BAD. sed ut triangulum quidem CAB ad BAD triangulum, ita *c* CA ad AD, ut autem triangulum EAD ad ipsum BAD, ita *c* EA ad AB. ut *d* igitur CA ad AD, ita EA ad AB. quare triangulorum ABC ADE latera quæ circum æquales angulos reciproca sunt. Et si reciproca sunt latera triangulorum ABC ADE, scil. sit ut CA ad AD, ita EA ad AB. dico triangulum ABC triangulo ADE æquale esse. juncta enim rursus BD, quoniam ut CA ad AD, ita est EA ad AB, ut autem CA ad AD, ita *c* ABC triangulum ad triangulum BAD; & ut EA ad AB, ita *c* triangulum EAD ad BAD triangulum, erit ut ABC triangulum ad triangulum BAD, ita triangulum EAD ad BAD triangulum. utrumque igitur triangulorum ABC ADE ad triangulum BAD eandem habet proportionem; ac propterea æquale est ABC triangulum



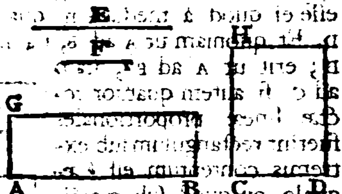
a 34. primi.
b 7. quinti.
c 1. hujus.
d 11 quinti.

gulum triangulo A B E. Æqualium igitur, & unum uni æqualem habentium angulum triangulorum latera quæ circum æquales angulos, reciproca sunt, & quorum triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos reciproca sunt, ea inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XVI. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis contentum æquale est ei rectangulo quod sub mediis continetur: Et si rectangulum sub extremis contentum æquale fuerit ei quod sub mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales A B C D E F, itaque ut A B ad C D, ita E ad F. dico rectangulum contentum sub rectis lineis A B F æquale esse ei quod sub ipsis C D E continetur. ducantur enim à punctis A C ipsis A B C D ad rectos angulos A G C H; ponaturque ipsi quidem F æqualis A G, ipsi vero E æqualis C H, & compleantur B G D H parallelogramma. Quoniam igitur est ut A B ad C D, ita E ad F; est autem E æqualis C H, & F ipsi A G: erit ut A B ad C D, ita C H ad A G. parallelogrammorum igitur B G D H latera quæ sunt circum æquales angulos reciproca sunt; quoniam autem æquiangulorum parallelogrammorum latera quæ sunt circum æquales angulos



a 14. hujus. reciproca sunt, ea inter se sunt æqualia; ergo parallelogrammum B G æquale est parallelogrammo D H. atque est parallelogrammum quidem B G, quod sub rectis lineis A B F continetur, etenim A G est æqualis F. parallelogrammum vero D H quod continetur sub ipsis C D E, cum C H ipsi E sit æqualis, rectangulum igitur contentum sub A B & F est æquale ei quod sub ipsis C D & E continetur. Et si rectangulum contentum sub A B F sit æquale ei quod sub C D & E continetur, dico quatuor rectas lineas proportionales esse, videlicet ut A B ad C D, ita E ad F. iisdem enim constructis quoniam rectangulum contentum sub A B & F est æquale ei quod sub C D & E continetur, atque est

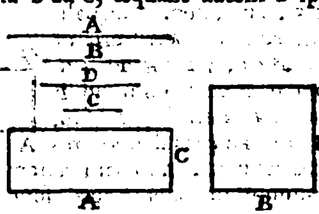
 contentum

contentum quidem sub A B, F rectangulum A G; etenim A G est æqualis F: contentum vero sub C D, E est rectangulum D H, quod C H ipsi E sit æqualis: erit parallelogrammum B G æquale parallelogrammo D H, & sunt æquiangula. æqualium autem & æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos reciproca sunt: quare ut A B ad C D, ita C H ad A G, æqualis autem est C H ipsi E, & A G ipsi F. ut igitur A B ad C D, ita E ad F. Ergo si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis contentum æquale est ei quod sub mediis continetur: & si rectangulum sub extremis contentum æquale fuerit ei quod sub mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare. a 14. hujus.

PROP. XVII. THEOR.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis contentum æquale est ei quod à media fit quadrato. Et si rectangulum sub extremis contentum æquale fuerit ei quod à media fit quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint tres rectæ lineæ proportionales A B C: & sit ut A ad B, ita B ad C. dico rectangulum contentum sub A C æquale esse ei quod à media B fit quadrato. ponatur ipsi B æqualis D. Et quoniam ut A ad B, ita B ad C, æqualis autem B ipsi D; erit ut A ad B a, ita D ad C. si autem quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint rectangulum sub extremis contentum est b æquale ei quod sub mediis continetur. ergo rectangulum sub A C contentum est æquale ei quod continetur sub B D. sed rectangulum contentum sub B D est æquale quadrato quod fit ex ipsa B; etenim B est æqualis D. rectangulum igitur contentum sub A C est æquale ei quod ex B fit quadrato. Et si rectangulum contentum sub A C æquale sit quadrato quod fit ex B. dico ut A ad B, ita esse B ad C. iisdem enim constructis quoniam rectangulum contentum sub A C æquale est quadrato quod fit ex B, at quadratum quod fit ex B est rectangulum quod sub ipsis B D continetur, est enim B æqualis ipsi D; erit rectangulum contentum sub A C æquale ei quod sub B D continetur. si autem rectangulum sub extremis contentum æquale fuerit ei quod sub mediis continetur, quatuor rectæ lineæ pro- a 7 quinti. b 16. hujus.



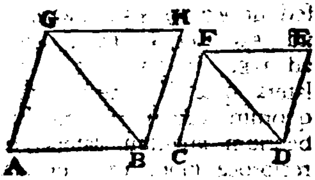
 portionales

portionales *b* erunt. est igitur ut A ad B, ita C ad D; æqualis autem B ipsi D; ergo ut A ad B, ita B ad C. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis contentum est æquale ei quod à media fit quadrato. Et si rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei quod à media fit quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XVIII. PROBL.

A data recta linea dato rectilineo simile, & similiter positum rectilineum describere.

Sit data recta linea A B, datum autem rectilineum C E. oportet à recta linea A B rectilineo C E simile, & similiter positum rectilineum describere. Jungatur D F, & ad rectam lineam A B, & ad puncta in ipsa A B, angulo quidem C æqualis angulus *a* constituatur G A B, angulo autem C D F angulus A B G. reliquus igitur C F D angulus reliquo A G B est *b* æqualis. ergo æquiangulum est F C D triangulum triangulo G A B; ac propterea *c* ut F D ad G B, ita F C ad G A, & C D ad A B. rursus constituatur ad rectam lineam B G, & ad puncta in ipsa B G, angulo quidem D F E æqualis angulus B G H, angulo quidem F D E æqualis G B H. ergo reliquus *b* ad E reliquo ad H est æqualis. æquiangulum igitur est triangulum F D E triangulo G B H. quare ut *c* F D ad G B, ita F E ad G H, & E D ad H B. ostensum autem est &, ut F D ad G B, ita F C ad G A, & C D ad A B: & ut igitur *d* F C ad A G, ita C D ad A B; & F E ad G H, & adhuc E D ad H B. itaque quoniam angulus quidem C F D est æqualis angulo A G B; angulus autem D F E angulo B G H. erit totus C F E angulus toti A G H æqualis. eadem ratione & C D E est æqualis ipsi A B H, & præterea angulus quidem ad C angulo ad A æqualis, angulus vero ad E angulo ad H. æquiangulum igitur est A H ipsi C E, & latera circum æquales ipsius angulos habet proportionalia. ergo rectilineum A H rectilineo C E simile *e* erit: A data igitur recta linea A B dato rectilineo C E simile, & similiter positum rectilineum A H descriptum est. Quod facere oportebat.



a 23. primi.

b Cor. 32. primi.

c 4. hujus.

d 11. quinti

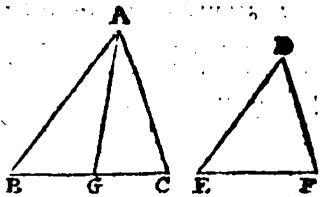
e 1. Diffin. hujus.

PROP.

PROP. XIX. THEOR.

Similia triangula inter se sunt in duplicata proportione laterum homologorum.

Sint similia triangula ABC DEF habentia angulum ad B æqualem angulo ad E, & sit ut AB ad BC, ita DE ad EF, ita ut latus BC homologum sit lateri EF. Dico ABC triangulum ad triangulum DEF duplicatam proportionem habere ejus quam habet BC ad EF. Sumatur enim ipsis [a] BC EF tertia proportionalis BG, ut sit BC ad EF, ita EF ad BG. & jungatur GA. quoniam igitur ut AB ad BC, ita est DE ad EF; erit permutando ut AB ad DE, ita BC ad EF. sed ut BC ad EF, ita EF ad BG. ut [b] igitur AB ad DE, ita EF ad BG. quare triangulorum ABG DEF latera quæ sunt circum æquales angulos reciproca sunt. quorum autem triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera quæ circum æquales angulos reciproca sunt, ea inter se æqualia [c] sunt. æquale igitur est ABG triangulum triangulo DEF. & quoniam est ut BC ad EF, ita EF ad BG; si autem tres rectæ lineæ proportionales sint, prima ad tertiam duplicatam proportionem [d] habet ejus quam habet ad secundam: habebit igitur BC ad BG duplicatam proportionem ejus quam habet BC ad EF. ut autem BC ad BG, ita ABC triangulum ad triangulum ABG. ergo & ABC triangulum ad triangulum ABG duplicatam proportionem habet ejus quam BC habet ad EF. est autem ABG triangulum triangulo DEF æquale. & triangulum igitur ABC ad triangulum DEF duplicatam proportionem habebit ejus quam habet BC ad EF. Quare similia triangula inter se in duplicata sunt proportione laterum homologorum. Quod ostendere oportebat.



[a] 11. hujus.

[b] 11 quinti.

[c] 15. hujus.

[d] Diffin. 10. quinti.

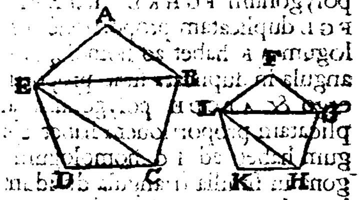
COR. Ex hoc manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse triangulum, quod fit à prima ad triangulum quod à secunda simile, & similiter descriptum; quoniam ostensum est ut CB ad BG, ita ABC triangulum ad triangulum ABG, hoc est ad triangulum DEF. Quod ostendere oportebat.

PROP.

PROP. XX. THEOR.

Similia polygona in similia triangula dividuntur, & numero æqualia, & homologa totis; & polygonum ad polygonum duplicatam proportionem habet ejus quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint similia polygona ABCDE FGHKL, & sit AB homologum ipsi FG. dico polygona ABCDE FGHKL in similia triangula dividi, & numero æqualia, & homologa totis; & polygonum ABCDE ad polygonum FGHKL duplicatam proportionem habere ejus quam habet AB ad FG. jungantur BE EC GL LH. Et quoniam simile est ABCDE polygonum polygono FGHKL, angulus BAE angulo GFL est æqualis: atque est ut BA ad AE, ita GF ad FL. quoniam igitur duo triangula sunt ABE FGL unum angulum uni angulo æqualem habentia; circum æquales autem angulos latera proportionalia: erit *a* triangulum ABE triangulo FGL æquiangulum. ergo & simile. angulus igitur ABE æqualis est angulo FGL. est autem & totus ABC angulus æqualis *b* toti FGH, propter similitudinem polygonorum. ergo reliquus EBC reliquo LGH est æqualis. & quoniam ob similitudinem triangulorum ABE FGL, est ut EB ad BA, ita LG ad GF. sed & propter similitudinem polygonorum *b*, ut AB ad BC, ita est FG ad GH; erit ex æquali ut *c* EB ad BC, ita LG ad GH. hoc est circum æquales angulos EBC LGH latera sunt proportionalia; æquiangulum igitur est EBC triangulum triangulo LGH. quare & simile. eadem ratione & ECD triangulum simile est triangulo LHK. similia igitur polygona ABCDE FGHKL in similia triangula dividuntur, & numero æqualia. dico & homologa totis, hoc est ut proportionalia sint triangula, & antecedentia quidem sunt ABE EBC ECD, consequentia autem ipsorum FGL LGH LHK. & ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL duplicatam proportionem habere ejus quam latus homologum habet ad homologum latus; hoc est AB ad FG. quoniam enim simile est ABE triangulum triangulo FGL, habebit ABE triangulum ad triangulum FGL duplicatam proportionem *d* ejus quam habet BE ad GL. eadem ratione & triangulum BEC ad GLH triangulum duplicatam *d* proportionem habet ejus quam BE ad GL. est igitur ut ABE trian-



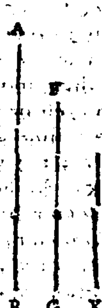
a 6. hujus.
b 1. Diffin. hujus.
c 21 quinti.
d 19. hujus.
e 11 quinti.

triangulum ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GLH triangulum. rursus quoniam simile est triangulum EBC triangulo LGH, habebit EBC triangulum ad triangulum LGH duplicatam proportionem ejus quam recta linea CE habet ad rectam HL. eadem ratione & ECD triangulum ad triangulum LHK duplicatam proportionem habet ejus quam CD ad HL. est igitur ut triangulum BEC ad triangulum LGH, ita CED triangulum ad triangulum LHK. ostensum autem est, & ut EBC triangulum ad triangulum LGH, ita triangulum ABE ad triangulum FGL. ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GHL triangulum, & triangulum ECD ad ipsum LHK. & igitur ut unum antecedentium ad unum consequentium, sic omnia antecedentia ad omnia consequentia. ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL, ita ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL: sed ABE triangulum ad triangulum FGL duplicatam proportionem habet ejus quam latus homologum AB habet ad homologum latus FG: similia enim triangula in duplicata sunt proportione laterum homologorum. ergo & ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL duplicatam proportionem habet ejus quam AB latus homologum habet ad FG homologum latus. Similia igitur polygona in similia triangula dividuntur, & numero æqualia, & homologa totis; & polygonum ad polygonum duplicatam habet proportionem ejus quam habet latus homologum ad homologum latus. Quod oportebat demonstrare. 12 quinti.

Eodem modo & in similibus quadrilateris ostendetur ea esse in duplicata proportione laterum homologorum. ostensum autem est & triangulis.

COROLL.

1. Ergo universe similes figuræ rectilineæ inter se sunt in duplicata proportione homologorum laterum; & si ipsis AB FG tertiam proportionalem sumamus, quæ sit X; habebit AB ad X duplicatam proportionem ejus quam habet AB ad FG. habet autem & polygonum ad polygonum, & quadrilaterum ad quadrilaterum duplicatam proportionem ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est AB ad FG; atque ostensum est hoc in triangulis.



2. Universe igitur manifestum est, si tres rectæ lineæ propor-

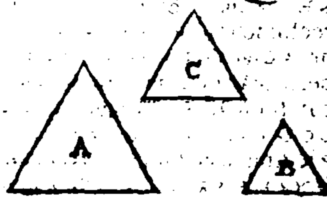
proportionales fuerint, ut prima ad tertiam; ita esse figuram quæ fit à prima, ad eam quæ a secunda, similem & similiter descriptam. Quod ostendere oportebat.

PROP. XXI. THEOR.

Quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se similia sunt.

Sit enim utrumque rectilineorum A B simile rectilineo C. dico & rectilineum A rectilineo B simile esse. Quoniam enim simile est A rectilineum rectilineo C, & ipsi æquiangulum a erit, & circum æquales angulos latera habebit proportionalia. rursus quoniam simile est rectilineum B rectilineo C, æquiangulum ipsi erit, & circum æquales angulos latera proportionalia habebit a. utrumque igitur rectilineorum A B ipsi C æquiangulum est, & circum æquales angulos latera habet proportionalia. quare & rectilineum A ipsi B est æquiangulum, lateraque circum æquales angulos proportionalia habet; ac propterea A ipsi B est simile. Quod demonstrare oportebat.

a 1. Diffin. hujus.



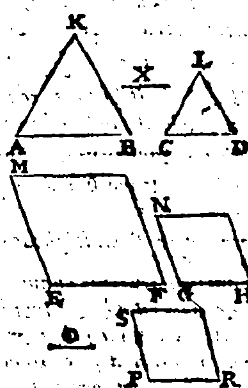
PROP. XXII. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & rectilinea quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia erunt. Et si rectilinea quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta, proportionalia fuerint, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales A B C D E F G H, & ut A B ad C D, ita sit E F ad G H. describanturque a ab ipsis quidem A B C D similia, & similiter posita rectilinea K A B L C D: ab ipsis vero E F G H describantur rectilinea similia, & similiter posita M F N H. dico ut K A B rectilineum ad rectilineum L C D, ita esse rectilineum M F ad ipsum N H rectilineum. Sumatur ipsis b quidem A B C D tertia proportionalis X; ipsis vero E F G H tertia proportionalis O. Et quoniam est ut A B ad C D, ita E F ad G H: ut autem C D ad X, ita G H ad O; erit ex æquali c ut A B ad X, ita E F ad O. sed ut A B quidem ad X, ita est d rectilineum K A B ad L C D rectilineum,

a 18. hujus.
b 11. hujus.
c 22 quinti.
d Cor. 20. hujus.

lineum; ut autem EF ad O, ita [d] rectilineum MF ad rectilineum NH. ut igitur KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita est [e] rectilineum MF ad NH rectilineum. Et si sit ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineum MF ad rectilineum NH. dico ut AB ad CD, ita esse EF ad GH. fiat enim ut AB ad CD, ita EF ad [f] PR, & describatur ab ipsa PR alterutri rectilineorum MF NH simile, & similiter positum rectilineum SR. quoniam igitur est ut AB ad CD, ita EF ad PR, & descripta sunt ab ipsis quidem AB CD similia, & similiter posita KAB LCD rectilinea, ab ipsis vero EF PR similia & similiter posita rectilinea MF SR, erit [g] ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineum MF ad RS rectilineum: ponitur autem & ut rectilineum KAB ad rectilineum LCD, ita MF rectilineum ad rectilineum NH. ergo ut rectilineum MF ad rectilineum NH, ita MF rectilineum ad rectilineum SR. quod cum rectilineum MF ad utrumque ipsorum NH SR eandem habeat proportionem, erit [h] rectilineum NH ipsi SR æquale. est autem ipsi simile, & similiter positum. ergo GH est æqualis PR. & quoniam ut AB ad CD, ita est EF ad PR: æqualis autem PR ipsi GH; erit ut AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & rectilinea quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia erunt: & si rectilinea quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta proportionalia fuerint, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.



[e] 11 quinti.

[f] 12. hujus.

[g] ex prius demonstratis.

[h] 9 quinti.

LEMMA.

Positis tribus rectis quibuscunque A, B & C; ratio primæ A ad tertiam C, æqualis est rationi compositæ ex ratione primæ A ad secundam B, & ratione secundæ B ad tertiam C.

Sit V. G. numerus ternarius exponens seu denominator rationis A ad B, hoc est sit A tripla ipsius B, & sit numerus quaternarius exponens rationis B ad C, erit numerus duodenarius ex numeri ternarii & quaternarii multiplicatione compo-

compositus exponens rationis A *ad* C, *nam quia* A *continet* B *ter*, & B *continet* C *quater*, *continebit* A *ipsum* C *ter quater*, *seu duodecies: idem de aliis multiplicibus vel submultiplicibus verum est. Universalis vero hujus Theorematis demonstratio talis est. Quantitas rationis* A *ad* B *est numerus* $\frac{A}{B}$, *scil. qui multiplicans consequentem producit antecedentem. Et similiter quantitas rationis* B *ad* C *est* $\frac{B}{C}$. *Atque hæ duæ quantitates inter se multiplicatæ efficiunt numerum* $\frac{A \times B}{B \times C}$ *qui est quantitas rationis quam rectangulum comprehensum sub rectis* A & B *habet ad rectangulum sub* B & C *rectis. Adeoque dicta ratio rectanguli sub* A & B, *ad rectangulum sub* B & C *est, quæ in sensu def. 5. hujus, componitur ex rationibus* A *ad* B & B *ad* C. *Sed per* 1. 6. *rectangulum sub* A & B *est ad rectangulum sub* B & C, *ut* A *ad* C: & *igitur ratio* A *ad* C *æqualis est rationi compositæ ex rationibus* A *ad* B, & B *ad* C.

Positis vero quatuor rectis quibuscunque A, B, C, & D, *ratio primæ* A *ad quartam* D *æqualis est rationi compositæ ex ratione primæ* A *ad secundam* B, & *ratione secundæ* B *ad tertiam* C, & *ratione tertiæ* C *ad quartam* D.

Nam in tribus rectis A, C, & D, *ratio* A *ad* D *æqualis est rationi compositæ ex rationibus* A *ad* C, & C *ad* D. *Et hactenus ostensum rationem* A *ad* C *æqualem esse rationi compositæ ex rationibus* A *ad* B, & B *ad* C. *Et igitur ratio* A *ad* D *æqualis est rationi compositæ ex rationibus* A *ad* B, B *ad* C, & C *ad* D. *Similiter ostendetur, in quotcunque rectis, rationem primæ ad ultimam æqualem esse rationi compositæ ex rationibus primæ ad secundam, secundæ ad tertiam, tertiæ ad quartam, & ita deinceps usque ad ultimam.*

Si exponantur aliæ magnitudines quælibet, præter rectas, idem obtinebit. Quod constabit si concipiantur tot rectæ A, B, C, &c. *ordine positæ quot sunt magnitudines, & in eadem ratione: ita viz. ut recta* A *sit ad rectam* B *ut prima magnitudo ad secundam, & recta* B *ad rectam* C *ut secunda magnitudo ad tertiam, & ita porro. Manifestum est per 22. 5. esse ex æquo rectam* A *ad ultimam rectam sicut prima magnitudo ad ultimam. Sed ratio rectæ* A *ad ultimam rectam æqualis est rationi compositæ ex rationibus rectarum,*

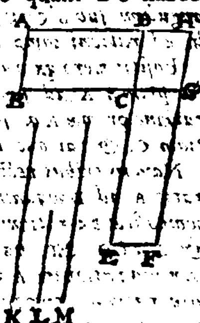
ita

ita parte usque ad ultimam rectam. Et ex hypothesi, ratio cujuslibet rectæ ad sibi proximam eadem est, quæ ratio magnitudinis ejusdem ordinis ad sibi proximam. Et igitur ratio primæ magnitudinis ad ultimam æqualis est rationi compositæ ex rationibus primæ magnitudinis ad secundam, secundæ ad tertiam, & ita deinceps usque ad ultimam. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIII. THEOR.

Æquiangula parallelogramma inter se proportionem habent ex lateribus compositam.

Sint æquiangula parallelogramma A C C F æqualem habentia B C D angulum angulo E C G. dico parallelogrammum A C ad parallelogrammum C F proportionem habere compositam ex lateribus, videlicet compositam ex proportione quam habet B C ad C G, & ex proportione quam D C habet ad C E. ponatur enim ut B C sit indirectum ipsi C G. ergo & D C ipsi C E indirectum *a* erit: & compleatur D G parallelogrammum: exponaturque recta linea quædam K, & fiat ut B C ad C G, ita *b* K ad L, ut autem D C ad C E, ita L ad M. proportiones igitur ipsius K ad L, & L ad M eædem sunt quæ proportiones laterum videlicet B C ad C G, & D C ad C E. sed proportio K ad M composita est *c* ex proportione K ad L, & proportione L ad M. quare & K ad M proportionem habet ex lateribus compositam. & quoniam est ut B C ad C G *d*, ita A C parallelogrammum ad parallelogrammum C H; sed ut B C ad C G, ita K ad L: erit *e* ut K ad L, ita parallelogrammum A C ad C H parallelogrammum. rursus quoniam est ut D C ad C E, ita C H parallelogrammum ad parallelogrammum C F: ut autem D C ad C E, ita L ad M: ergo ut L ad M, ita erit parallelogrammum C H ad C F parallelogrammum. itaque cum ostensum sit ut K quidem ad L, ita A C parallelogrammum ad parallelogrammum C H; ut autem L ad M, ita parallelogrammum C H ad C F parallelogrammum; erit *f* ex æquali ut K ad M, ita A C parallelogrammum ad ipsum C F. habet autem K ad M proportionem ex lateribus compositam. ergo & A C parallelogrammum ad parallelogrammum C F proportionem habebit compositam ex lateribus. Æquiangula igitur parallelogramma



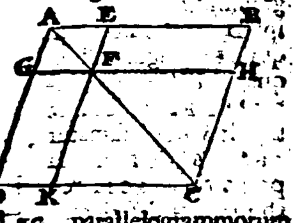
a 14. primi.
b 12. hujus.
c per Lemma superius.
d 1. hujus.
e 11 quinti.
f 20 quinti.

lelogramma inter se proportionem habent ex lateribus compositam. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXIV. THEOR.

Omnis parallelogrammi, quæ circa diametrum sunt parallelogramma & toti, & inter se similia sunt.

Sit parallelogrammum ABCD, cujus diameter AC: circa diametrum vero AC parallelogramma sint EG HK: dico parallelogramma EG HK & toti ABCD, & inter se similia esse. Quoniam enim uni laterum trianguli ABC, videlicet ipsi BC parallela ducta est EF, erit [a] ut BE ad EA, ita CF ad FA. quoniam rursus uni laterum trianguli ACD, nempe ipsi CD ducta est parallela FG, ut CF ad FA, ita [a] erit DG ad GA. sed ut CF ad FA ita ostensa est & BE ad EA. ergo & ut BE ad EA, ita [b] DG ad GA, componendoque [c] ut BA ad AE, ita DA ad AG, & permutando ut BA ad AD, ita EA ad AG. parallelogrammorum igitur ABCD EG latera quæ circa communem angulum BAD proportionalia sunt. & quoniam parallela est GF ipsi DC, angulus quidem AGF est [d] æqualis angulo ADC, angulus vero GFA æqualis angulo DCA, & angulus DAC est communis duobus triangulis ADC AGF; erit triangulum ADC triangulo AGF æquiangulum. eadem ratione & triangulum ACB æquiangulum est triangulo AFE. totum igitur parallelogrammum ABCD parallelogrammo EG est æquiangulum. ergo ut AD ad DC, ita [e] AG ad GF, ut autem DC ad CA, ita GF ad FA, & ut AC ad CB, ita AF ad FE, & præterea ut CB ad BA, ita FE ad EA. itaque quoniam ostensum est ut DC ad CA, ita esse GF ad FA, ut autem AC ad CB, ita AF ad FE; erit ex æquali ut DC ad CB, ita GF ad FE. ergo parallelogrammorum ABCD EG proportionalia sunt latera quæ circum æquales angulos, ac propterea parallelogrammum ABCD parallelogrammo EG est simile. eadem ratione, & parallelogrammum ABCD simile est parallelogrammo KH. utrumque igitur ipsorum EG HK parallelogrammorum, parallelogrammo ABCD est simile. quæ autem eidem rectilineo sunt similia, & inter se similia [f] sunt: parallelogrammum igitur EG simile est parallelogrammo HK. Quare omnis parallelogrammi quæ circa diametrum



a 2. hujus.
b 11. quinti.
c 18. quinti.
d 29. primi.
e 4. hujus.
f 21. hujus.

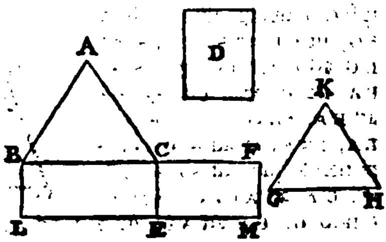
trum

trum sunt parallelogramma & toti, & inter se sunt similia. Quod ostendere oportebat.

PROP. XXV. PROBL.

Dato rectilineo simile, & alteri dato æquale idem constituere.

Sit datum quidem rectilineum cui oportet simile constituere, A B C, cui autem æquale sit D. oportet ipsi A B C simile, & ipsi D æquale idem constituere. Applicetur a ad rectam quidem lineam B C rectilineo A B C æquale parallelogrammum B E. ad rectam vero C E applicetur a parallelogrammum C M æquale ipsi D, in angulo F C E, qui C B L angulo est æqualis. in directum igitur b est B C ipsi C F, & L E ipsi E M. sumatur c inter B C C F media proportionalis G H, & d ab ipsa G H describatur rectilineum K G H simile & similiter positum rectilineo A B C. Et quoniam est ut B C ad G H, ita G H ad C F, si autem tres rectæ lineæ proportionales sint, ut prima ad tertiam e, ita est figura quæ fit à prima, ad eam quæ à secunda, similem & similiter descriptam: erit ut B C ad C F, ita A B C rectilineum ad rectilineum K G H. sed & ut B C ad C F, ita f parallelogrammum B E ad E F parallelogrammum, ut g igitur rectilineum A B C ad rectilineum K G H, ita B E parallelogrammum ad parallelogrammum E F. quare permutando ut A B C rectilineum ad parallelogrammum B E, ita rectilineum K G H ad E F parallelogrammum. est autem rectilineum A B C æquale parallelogrammo B E. æquale igitur est & K G H rectilineum parallelogrammo E F. sed E F parallelogrammum æquale est rectilineo D. ergo & rectilineum K G H ipsi D est æquale: est autem K G H simile rectilineo A B C. Dato igitur rectilineo A B C simile, & alteri dato D æquale idem constitutum est K G H. Quod facere oportebat.

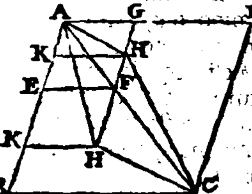


a 44. primi.
b 14. primi.
c 13. hujus.
d 18. hujus.
e Cor. 20. hujus.
f 1. hujus.
g 11 quinti.

PROP. XXVI. THEOR.

Si à parallelogrammo parallelogrammum auferatur simile toti, & similiter positum, communem ipsi angulum habens, circa eandem diametrum est toti.

A parallelogrammo enim ABCD parallelogrammum AF auferatur, simile ipsi ABCD, & similiter positum, communemque ipsi angulum habens DAB. dico parallelogrammum ABCD circa eandem esse diametrum parallelogrammo AF, non enim, sed si fieri potest, sit ipsorum diameter AHC, & producatur GF usque ad H; ducaturque per H alterutri ipsarum AD BC parallela HK. Quoniam igitur circa eandem diametrum est ABCD parallelogrammum



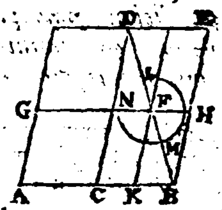
a 24. hujus. parallelogrammo KG; & erit [a] parallelogrammum ABCD
b 1. Diffin. hujus. parallelogrammo KG simile. ergo ut [b] DA ad AB, ita GA ad AK. est autem & propter similitudinem parallelogrammo-
c 11 quinti. rum ABCD, EG, ut DA ad AB, ita GA ad AE. & [c] igitur ut GA ad AE, ita GA ad AK. quòd cum GA ad utramque ipsarum AK AE eandem proportionem habeat; erit [d] AE
d 9 quinti. ipsi AK æqualis, minor majori, quod fieri non potest. non igitur circa eandem diametrum est ABCD parallelogrammum parallelogrammo AH. quare circa eandem diametrum erit ipsi AF. Si igitur à parallelogrammo parallelogrammum auferatur simile toti, & similiter positum, communem ipsi angulum habens, circa eandem diametrum est toti. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXVII. THEOR.

Omnium parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis similibus, & similiter positis, ei quæ à dimidia describitur, maximum est quod ad dimidiam est applicatum, simile existens defectui.

Sit recta linea AB; seceturque bifariam in C; & ad AB rectam lineam applicetur parallelogrammum AD deficiens figura parallelogramma CE, simili & similiter posita ei quæ à dimidia ipsius AB descripta est. dico omnium paralle-

parallelogrammorum ad rectam lineam A B applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis similibus, & similiter positis ipsi C E, maximum esse A D. Applicetur enim ad rectam lineam A B parallelogrammum A F, deficiens figura parallelogramma H K simili, & similiter posita ipsi C E. dico A D parallelogrammum parallelogrammo A F majus esse.



Quoniam enim simile est parallelogrammum C E parallelogrammo H K, circa eandem diametrum [a] sunt. ducatur eorum diameter D B, & describatur figura. quoniam igitur C F [b] est æquale ipsi F E, commune apponatur H K. totum igitur C H toti K E est æquale. sed C H est [c] æquale C G, quoniam & recta linea A C ipsi C B. ergo & G C ipsi E K æquale est. commune apponatur C F. totum igitur A F est æquale gnomoni L M N: quare & C E, hoc est A D parallelogrammum parallelogrammo A F est majus. Omnium igitur parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis similibus, & similiter positis ei quæ a dimidia describitur, maximum est quod ad dimidiam est applicatum. Quod demonstrare oportebat.

[a] 26. hujus.
[b] 43 primi.
[c] 36 primi.

PROP. XXVIII. PROBL.

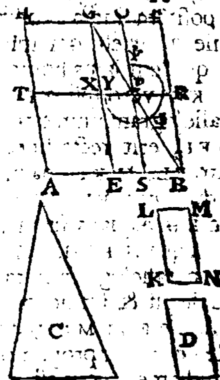
Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma quæ similis sit alteri datæ. oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non majus esse eo quod ad dimidiam applicatur; similibus existentibus defectibus, & eo quod à dimidia, & eo, cui oportet simile deficere.

Sit data quidem recta linea A B: datum autem rectilineum, cui oportet æquale ad datam rectam lineam A B applicare, sit C non majus existens eo quod ad dimidiam applicatum est, similibus existentibus defectibus: cui autem oportet simile deficere sit D. oportet ad datam rectam lineam A B, dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit ipsi D. Secetur A B bifariam in E, & ab ipsa E B describatur [a] simile, & similiter positum ipsi D; quod sit E B F G, & compleatur A G parallelogrammum. itaque A G vel æquale est ipsi C, vel eo majus,

[a] 18 hujus.

 ob

ob determinationem; & si quidem AG sit æquale C, factum jam erit quod proponebatur: etenim ad rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum AG applicatum est, deficiens figura parallelogramma EF ipsi D simili. si autem non est æquale, erit HE majus quàm C; atque EF æquale est HE. ergo, & EF quàm C est majus. quo autem EF superat C, ei excessui æquale, ipsi vero D simile & similiter positum, idem *a* constituatur KLMN. sed D est simile EF. quare & KM ipsi EF simile erit. sit igitur recta linea KL homologa ipsi GE, LM vero ipsi GF. & quoniam æquale est EF ipsis C & KM, erit EF ipso KM majus. major igitur est recta linea GE ipsa KL; & GF ipsa LM. ponatur GX æqualis KL, & GO æqualis LM, & compleatur XGOP parallelogrammum. æquale igitur est & simile XO ipsi KM. sed KM simile est EF. ergo & *b* XO ipsi EF est simile, circa eandem igitur est *c* diametrum XO ipsi EF. sit ipsorum diameter GPB, & figura describatur. itaque quoniam EF est æquale ipsis C & KM simul, quorum XO est æquale KM, erit reliquus ΥΦΨ gnomon æqualis reliquo C. & quoniam OR est æquale XS, commune apponatur SR. totum igitur OB toti XB est æquale. sed XB est æquale TE, quoniam & latus AE lateri EB. quare & TE ipsi OB æquale. commune apponatur XS. ergo totum TS est æquale toti gnomoni ΥΦΨ. at ΥΦΨ gnomon ipsi C ostensus est æqualis: & TS igitur ipsi C æquale erit. Quare ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum TS applicatum est, deficiens figura parallelogramma SR ipsi D simili, quoniam & SR simile est ipsi GB. Quod facere oportebat.



a 25. hujus.

b 21. hujus.

c 26. hujus.

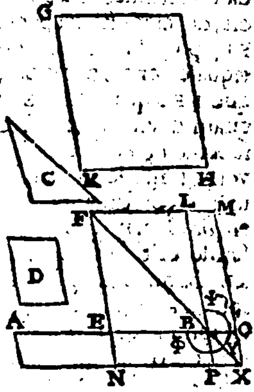
PROP. XXIX. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri datæ.

Sit data recta linea AB, datum vero rectilineum, cui oportet æquale ad ipsam AB applicare, sit C; cui autem oportet simile excedere D. oportet ad AB rectam lineam dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, excedens figura

gura parallelogramma simili D. Secetur AB bifariam in E, atque ex EB ipsi D simile, & similiter *a* positum parallelogrammum describatur EL. & utrisque quidem EL & C æquale, ipsi vero D simile, & similiter positum idem *b* constituatur GH. simile igitur est GH ipsi EL. sitque KH quidem latus homologum lateri FL, KG vero ipsi FE. & quoniam parallelogrammum GH majus est ipso EL, erit recta linea KH major quàm FL, & KG major quàm FE. producantur FL FE, & ipsi quidem KH æqualis sit FLM, ipsi vero KG æqualis FEN, & compleatur MN parallelogrammum. ergo MN æquale est & simile ipsi GH. sed GH est simile EL: MN igitur ipsi EL simile *c* erit; ac propterea circa eandem diametrum *d* est EL ipsi MN. ducatur ipsorum diameter FX, & figura describatur. itaque quoniam GH ipsi EL & C est æquale, sed GH est æquale MN; erit & MN æquale ipsi EL & C. commune auferatur EL. reliquus igitur ΨΥΦ gnomon ipsi C est æqualis. & quoniam AE est æqualis EB, æquale erit & AN parallelogrammum parallelogrammo NB, hoc est ipsi LO. commune apponatur EX. totum igitur AX æquale est gnomoni ΦΥΨ. sed ΦΥΨ gnomon est æqualis C. ergo & AX ipsi C erit æquale. ad datam igitur rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicatum est AX, excedens figura parallelogramma PO, ipsi D simili, quoniam & ipsi EL simile est OP. Quod fecisse oportebat.

a 18. hujus. *b* 25. hujus. *c* 21. hujus. *d* 26. hujus.



PROP. XXX. PROBL.

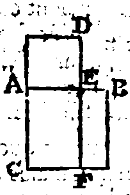
Datam rectam lineam terminatam extrema ac media ratione secare.

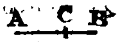
Sit data recta linea terminata AB. oportet ipsam AB extrema ac media ratione secare. Describatur *a* ex AB quadratum BC, & ad AC ipsi BC æquale parallelogrammum *b* applicetur CD, excedens figura AD ipsi BC simili. quadratum autem est BC. ergo & AD quadratum erit. & quoniam BC est æquale CD; commune auferatur CE. reliquum igitur BF reliquo AD est æquale; est autem & ipsi æquiangulum. ergo ipsorum BF AD latera quæ circum æquales

a 46. primi *b* 29. hujus.

 angulos

c 14. hujus. angulos reciproce sunt proportionalia. ut igitur FE ad ED, ita est AE ad EB. est d 34. primi. autem FE æqualis AC, hoc est ipsi AB; & ED ipsi AE. quare ut BA ad AE, ita AE ad EB. sed AB major est quam AE. ergo AE quam e 14. quinti. EB est e major. recta igitur linea AB extrema, ac media ratione secta est in E. & majus ipsius segmentum est AE. Quod facere oportebat.



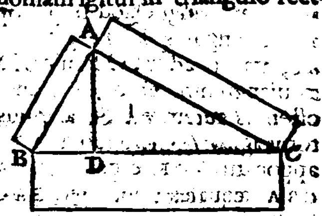


Aliter. Sit data recta linea AB. oportet ipsam AB extrema ac media ratione secare. Secetur enim AB in C, ita ut f 11. secundi. rectangulum f quod continetur sub AB BC æquale sit quadrato ex AC. quoniam igitur rectangulum sub AB BC æ- g 17. hujus. quale g est quadrato ex AC, erit ut BA ad AC ita AC ad CB, ergo AB recta linea extrema ac media ratione secta est. Quod facere oportebat.

PROP. XXXI. THEOR.

In rectangulis triangulis figura quæ fit à latere rectum angulum subtendente, æqualis est eis quæ à lateribus rectum angulum continentibus fiunt, similibus, & similiter descriptis.

Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC. dico figuram, quæ fit ex BC æqualem esse eis quæ ex BA AC fiunt similibus, & similiter descriptis. ducatur perpendicularis AD. Quoniam igitur in triangulo rectangulo ACB ab angulo recto, qui est ad A, ad BC basim perpendicularis ducta a 8. hujus. est AD, erunt a triangula ABD ADC quæ sunt ad perpendicularem similia toti ABC, & inter se. & quoniam simile est ABC triangulum triangulo ABD, erit ut CB ad BA, ita BA ad BD. quod cum tres rectæ lineæ proportionales sint, ut prima b Cor. 20. hujus. ad tertiam, ita erit b figura quæ fit ex prima ad eam quæ ex secunda, similem, & similiter descriptam. ut igitur CB ad BD, ita figura quæ fit ex CB ad eam quæ ex BA, similem & similiter descriptam. eadem ratione, & ut BC ad CD, ita figura quæ fit ex BC ad eam quæ ex CA. quare & ut BC ad



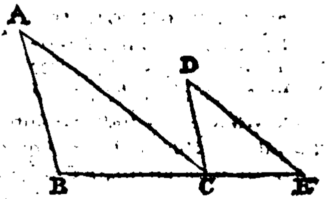
ipsas,

ipsas BD DC, ita [c] figura quæ ex BC ad eas quæ ex BA AC, [c] 24 quinti.
similes, & similiter descriptas. æqualis autem est BC ipsis BD DC. ergo figura quæ fit ex BC æqualis est eis quæ ex BA AC fiunt, similibus, & similiter descriptis. in rectangulis igitur triangulis, figura quæ fit à latere rectum angulum subtendente, æqualis est eis quæ à lateribus rectum angulum continentibus fiunt, similibus, & similiter descriptis. Quod ostendere oportebat.

PROP. XXXII. THEOR.

Si duo triangula componantur ad unum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita ut homologa latera ipsorum etiam sint parallela, reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt.

Sint duo triangula ABC DCE quæ duo latera BA AC duobus lateribus CD DE proportionalia habeant, scil. sit sicut BA ad AC, ita CD ad DE; parallela autem sit AB ipsi DC & AC ipsi DE. dico BC ipsi CE in directum esse. Quoniam enim AB parallela est DC, & in ipsas incidit recta linea AC; erunt [a] anguli alterni BAC ACD æquales inter se. eadem ratione & angulus CDE æqualis est angulo ACD; quare & BAC ipsi CDE est æqualis. & quoniam duo triangula sunt ABC, DCE, unum angulum [a] 29. primi.



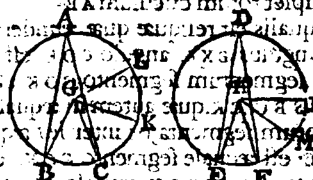
ad A, uni angulo ad D æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia, quod sit ut BA ad AC, ita CD ad DE; erit [b] triangulum ABC triangulo DCE [b] 6. hujus.
æquiangulum. ergo ABC angulus est æqualis angulo DCE. ostensus autem est & angulus ACD æqualis angulo BAC. totus igitur ACE duobus ABC BAC est æqualis. communis apponatur ACB, ergo anguli ACE ACB angulis BAC ACB CBA æquales sunt. sed BAC ACB CBA anguli duobus rectis sunt æquales. & anguli igitur ACE ACB duobus rectis æquales erunt. itaque ad quandam rectam lineam AC, & ad punctum in ipsa C, duæ rectæ lineæ BC CE non ad easdem partes positæ, angulos qui deinceps sunt ACE ACB duobus rectis æquales efficiunt. ergo BC ipsi CE in directum erit. Si igitur duo triangula componantur ad unum angu- [c] 14. primi.
lum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habe-

ant, ita ut homologa latera ipsorum etiam sint parallela; reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXXIII. THEOR.

In circulis æqualibus, anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ quibus insistunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant: adhuc autem & sectores, quippe qui ad centra sunt constituti.

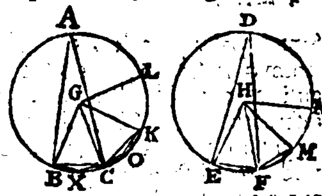
Sint æquales circuli A B C D E F; & ad centra quidem ipsorum G H sint anguli B G C E H F, ad circumferentias vero anguli B A C E D F. dico ut circumferentia B C ad E F circumferentiam, ita esse & B G C angulum ad angulum E H F, & angulum B A C ad angulum D E F: & adhuc sectorem B G C ad E H F sectorem. ponantur enim circumferentiæ quidem B C æquales quotcunque deinceps C K K L; circumferentiæ vero E F, rursus æquales quotcunque F M M N: & jungantur G K G L H M H N. Quoniam igitur circumferentiæ B C C K K L inter se sunt æquales, & anguli



a 27. tertii. B G C C G K K G L inter se æquales erunt. quotuplex igitur est circumferentia B L circumferentiæ B C, totuplex est & B G L angulus anguli B G C. eadem ratione & quotuplex est circumferentia N E circumferentiæ E F, totuplex & E H N angulus anguli E H F. si vero æqualis est B L circumferentia circumferentiæ E N; & angulus B G L angulo E H N erit æqualis; & si circumferentia B L major est circumferentia E N, major erit & B G L angulus angulo E H N; & si minor, minor. quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus nimirum circumferentiis B C E F, & duobus angulis B G C E H F, sumpta sunt circumferentiæ quidem B C, & B G C anguli æque multiplicia, videlicet circumferentia B L & B G L angulus; circumferentiæ vero E F, & E H F anguli æque multiplicia, nempe circumferentia E N, & angulus E H N. atque ostensum est si circumferentia B L superat circumferentiam E N, & B G L angulum superare angulum E H N; & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem esse. b Diffin. 5. quinti. ut igitur circumferentia B C ad E F circumferentiam, ita angulus B G C ad angulum E H F. sed ut B G C angulus ad angulum E H F, ita

angulus

angulus BAC ad EDF angulum. uterque enim utriusque est duplex. ut igitur BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita & angulus BGC ad angulum EHF, & angulus BAC ad EDF angulum. quare in circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem quam circumferentiæ quibus insistunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. dico insuper & ut BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita esse sectorem GBC ad HFE sectorem. Iungantur enim BC CK, & sumptis in circumferentiis BC CK punctis X, O, iungantur & BX XC CO OK: itaque quoniam duæ BG GC duabus CG GK æquales sunt, & angulos æquales continent; erit & basis BC basi CK æqualis. æquale igitur est GBC triangulum triangulo GCK, & quoniam circumferentia BC circumferentiæ CK est æqualis, & reliqua circumferentia quæ complet totum circulum ABC æqualis est reliquæ quæ eundem circulum complet. quare & angulus BXC angulo COK est æqualis. simile igitur est BXC segmentum segmento COK: & sunt in æqualibus rectis lineis BC CK. quæ autem in æqualibus rectis lineis similia circulorum segmenta, & inter se æqualia sunt. ergo segmentum BXC est æquale segmento COK. est autem & BGC triangulum triangulo CGK æquale. & totus igitur sector BGC sectori CGK æqualis erit. eadem ratione & GKL sector utrique ipsorum GKC, GCB est æqualis. tres igitur sectores BGC CGK KGL æquales sunt inter se. similiter & sectores HEF HFM HMN inter se sunt æquales. quotuplex igitur est LB circumferentia circumferentiæ BC, totuplex est & GBL sector sectoris GBC. eadem ratione & quotuplex est circumferentia NE circumferentiæ EF, totuplex est & HEN sector sectoris HEF. Sed si circumferentia BL circumferentiæ EN est æqualis, & sector BGL æqualis est sectori EHN; & si circumferentia BL superat circumferentiam EN, superat & BGL sector sectorem EHN; & si minor, minor. quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem BC EF circumferentiis, duobus vero sectoribus GBC EHF, sumpta sunt æque multiplicia circumferentiæ quidem BC & GBC sectoris, circumferentia BL, & GBL sector. circumferentiæ vero EF, & sectoris HEF æque multiplicia, circumferentia EN, & HEN sector, atque ostensum est si BL circumferentia superat circumferentiam EN, & sectorem BGL superare sectorem EHN; & si æqualis, æqualem esse; & si minor, minorem.



15 quinti.
20 tertii.
4 primi.
24 tertii.

minorem. est igitur ut BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita sector GBC ad HEF sectorem. Quod ostendere oportebat.

COROLL.

1. Angulus ad centrum est ad quatuor rectos, ut arcus cui insistit ad totam circumferentiam: nam ut angulus BAC ad rectum, ita BC arcus ad circuli quadrantem; quare quadruplicando consequentes, erit angulus BAC ad quatuor rectos, ut arcus BC ad totam circumferentiam.

2. Inæqualium circulorum arcus IL BC qui æquales subtendunt angulos, sive ad centra, sive ad peripherias, sunt similes. Nam est IL ad totam peripheriam ILE, ut angulus IAL ad quatuor rectos: est vero ut IAL seu BAC ad quatuor rectos, ita arcus BC ad totam peripheriam BCF. quare ut

IL ad totam peripheriam ILE, ita BC ad totam peripheriam BCF. ac proinde arcus IL BC sunt similes.

3. Duæ semidiametri AB AC à concentricis peripheriis arcus auferunt similes IL BC.

EUCLIDIS ELEMENTORUM

LIBER UNDECIMUS.

DIFFINITIONES.

I.

Solidum est, quod longitudinem, latitudinem & crassitudinem habet.

II.

Solidi terminus est superficies.

III.

Recta linea ad planum recta est, quando ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt, & in subjecto sunt plano, rectos angulos efficit.

IV.

Planum ad Planum rectum est, cum rectæ lineæ quæ communi planorum sectioni ad rectos angulos in uno plano ducuntur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

V.

Rectæ lineæ ad planum inclinatio est, cum à sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis; atque à puncto quod perpendicularis in ipso plano effecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodem est plano, altera recta linea fuerit adjuncta; est, inquam, angulus acutus insistente linea, & adjuncta comprehensus.

VI.

VI.

Plani ad planum inclinatio est, angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in utroque planorum ad idem communis sectionis punctum ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

VII.

Planum ad planum similiter inclinari dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

VIII.

Parallela plana sunt, quæ inter se non conveniunt.

IX.

Similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur, multitudine æqualibus.

X.

Æquales & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

XI.

Solidus angulus est, plurium quàm duarum linearum quæ se mutuo contingunt, nec in eadem sunt superficie, ad omnes lineas inclinatio. Vel solidus angulus est, qui pluribus quàm duobus planis angulis in eodem non consistentibus plano, sed ad unum punctum constitutis continetur.

XII.

Pyramis est figura solida planis comprehensa, quæ ab uno plano ad unum punctum constituuntur.

XIII.

Prisma est figura solida quæ planis continetur, quorum adversa duo sunt & æqualia, & similia, & parallela; alia vero parallelogramma.

XIV.

Sphæra est, quando semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus in seipsum rursus revolvitur unde moveri cœperat, circum assumpta figura.

XV.

XV.

Axis autem sphæræ est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus convertitur.

XVI.

Centrum sphæræ est idem quod & semicirculi.

XVII.

Diameter autem sphæræ est recta quædam linea per centrum ducta, & utrinque à sphæræ superficie terminata.

XVIII.

Conus est, quando rectanguli trianguli manente uno latere eorum quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in seipsum rursus revolvitur, unde moveri cœperat, circum assumpta figura. Atque si quiescens recta linea æqualis sit reliquæ quæ circa rectum angulum continetur, orthogonius erit conus: si vero minor, amblygonius: si vero major, oxygonius.

XIX.

Axis autem coni est quiescens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

XX.

Basis vero coni est circulus qui à circumducta recta linea describitur.

XXI.

Cylindrus est, quando rectanguli parallelogrammi manente uno latere eorum quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in seipsum rursus revolvitur, unde cœperat moveri, circum assumpta figura.

XXII.

Axis autem cylindri est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum convertitur.

XXIII.

Bases vero cylindri sunt circuli à duobus adversis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

XXIV.

Similes coni & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri proportionales sunt.

XXV.

XXV.

Cubus est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

Tetraedrum est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus & æquilateris contenta.

XXVII.

Octaedrum est figura solida sub octo triangulis æqualibus & æquilateris contenta.

XXVIII.

Dodecaedrum est figura solida sub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XXIX.

Icosaedrum est figura solida sub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

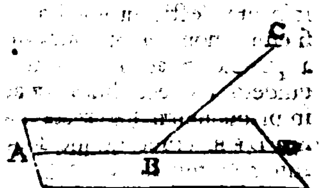
XXX.

Parallelepipedum est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum quæ ex adverso parallelæ sunt, contenta.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Rectæ lineæ pars quædam non est in subjecto plano, quædam vero in sublimi.

Si enim fieri potest, rectæ lineæ A B pars quidem A B sit in subjecto plano, pars vero B C in sublimi. erit recta linea quædam ipsi A B in directum continuata in subjecto plano. sitque D B. duabus igitur datis rectis lineis A B C A B D commune segmentum est A B, quod fieri non potest: recta enim linea cum recta linea non



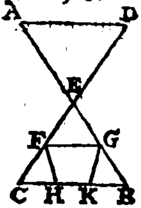
convenit in pluribus punctis, quam uno. Non igitur rectæ lineæ pars quædam est in subjecto plano, quædam vero in sublimi. Quod demonstrare oportebat.

PROP.

PROP. II. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ se invicem secent, in uno sunt plano, & omne triangulum in uno plano consistit.

Duæ enim rectæ lineæ A B C D se invicem in puncto E secent. dico ipsas A B C D in uno esse plano, & omne triangulum in uno plano consistere. Sumantur enim in ipsis E B E C quævis puncta F G; junganturque C B F G, & F H. G K ducantur. dico primum E B C triangulum consistere in uno plano. si enim trianguli E B C pars quædam F H C, vel G B K in subjecto plano est, reliqua vero in alio plano; erit & linearum E B E C pars in subjecto plano, & pars in alio. quòd si trianguli E C B pars F C B G. sit in subjecto plano, reliqua vero in alio, utrarumque rectarum linearum E C E B quædam pars erit in subjecto plano, quædam vero in alio. quod absurdum esse [a] ostendimus. triangulum igitur E B C in uno est plano. in quo autem plano est B C E triangulum, in hoc est utraque ipsarum E C E B: in quo autem utraque ipsarum E C E B, in hoc & A B C D. Ergo rectæ lineæ A B C D in uno sunt plano, & omne triangulum in uno plano consistit. Quod erat demonstrandum.

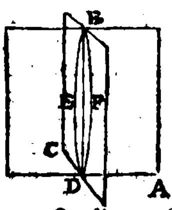


[a] 1. hujus.

PROP. III. THEOR.

Si duo plana se invicem secent, communis ipsorum sectio recta linea erit.

Duo plana A B B C se invicem secent, communis autem ipsorum sectio sit D B linea. dico lineam D B rectam esse. si enim non ita sit, ducatur à puncto D ad B in plano quidem A B recta linea D E B; in plano autem B C recta linea D F B. erunt utique duarum rectarum linearum D E B D F B iidem termini, & ipsæ spatium continebunt, quod est absurdum [a]. non igitur D E B D F B rectæ lineæ sunt. similiter ostendemus neque aliam quampiam, quæ à puncto D ad B ducitur rectam esse, præter ipsam D B: communem scilicet planorum A B B C sectionem. Si igitur duo plana se invicem secent, communis ipsorum sectio recta linea erit. Quod ostendere oportebat.



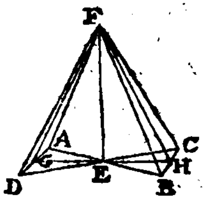
[a] Axio. 1.

PROP.

PROP. IV. THEOR.

Si recta linea duabus rectis lineis se invicem secantibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit.

Recta linea quædam EF duabus rectis lineis AB CD se invicem secantibus in E puncto, ab ipso E ad rectos angulos insistat. dico EF etiam plano per AB CD ducto ad rectos angulos esse. Sumantur rectæ lineæ AE EB GE DE inter se æquales: perque E ducatur recta linea GEH utcunque & jungantur AD CB; deinde à quovis puncto F ducantur FA FG FD FC FH FB. & quoniam duæ rectæ lineæ AE ED duabus rectis lineis CE EB æquales sunt, &



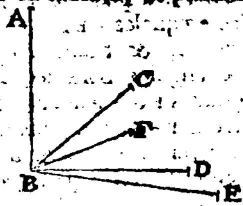
a 15 primi. angulos a æquales AED CEB continent, erit b AD basis basi
b 4 primi. CB æqualis, & triangulum AED triangulo CEB æquale. ergo & angulus DAE æqualis est angulo EBC. est autem, & angulus AEG a æqualis angulo BEH. duo igitur triangula sunt AGE BEH, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus AE uni lateri EB æquale quod est ad æquales angulos. quare & reliqua latera
c 26 primi. reliquis lateribus æqualia habebunt c. ergo GE quidem est æqualis EH; AG vero ipsi BH. quod cum AE sit æqualis EB, communis autem, & ad rectos angulos FE; erit b basis AF basi FB æqualis; eadem quoque ratione & CF æqualis erit FD. præterea quoniam AD est æqualis CB, & AF ipsi FB, erunt duæ FA AD duabus FB BC æquales, altera al-
d 8 primi. teri; & ostensa est basis DF æqualis basi FC. angulus d igitur FAD angulo FBC est æqualis. rursus ostensa est AG æqualis BH; sed & AF ipsi FB est æqualis. duæ igitur FA AG duabus FB BH æquales sunt, & angulus FAG æqualis est angulo FBH; ut demonstratum fuit; basis igitur GF basi FH est b æqualis. rursus quoniam GE ostensa est æqualis EH, communis autem EF; erunt duæ GE EF æquales duabus HE EF; & basis HF est æqualis basi FG. angulus d igitur GEF angulo HEF est æqualis, & ideirco rectus est uterque angulorum GEF HEF. ergo FE ad GH utcunque per E ductam rectos efficit angulos. similiter ostendemus FE etiam ad omnes rectas lineas, quæ ipsum contingunt, & in subjecto sunt plano, rectos angulos efficere. recta autem ad
e 3. Diffin. planum recta est e quando ad omnes rectas lineas ipsam contingentes,

tingentes, & in eodem existentes plano rectos efficit angulos. quare FE subjecto plano ad rectos angulos insistit. at subjectum planum est quod per AB CD rectas lineas ducitur. ergo FE ad rectos angulos erit ducto per AB CD plano. Si igitur recta linea duabus rectis lineis se invicem secantibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit. Quod demonstrare oportebat.

PROP. V. THEOR.

Si recta linea tribus rectis lineis sese tangentibus, in communi sectione, ad rectos angulos insistat, tres illæ rectæ lineæ in uno plano erunt.

Recta linea quædam AB tribus rectis lineis BC BD BE, in contactu B, ad rectos angulos insistat. dico BC BD BE in uno plano esse. Non enim, sed si fieri potest, sint BD BE quidem in subjecto plano, BC vero in sublimi, & planum per AB BC producatur. communem utique sectionem in subjecto plano faciet [a] rectam lineam; faciat BF. in uno igitur sunt plano per AB BC ducto, tres rectæ lineæ AB BC BF. & quoniam AB utrique ipsarum BD BE ad rectos angulos insistit, & ducto per ipsas DB BE plano ad rectos angulos erit. planum autem per DB BE est subjectum planum. ergo AB ad subjectum planum recta [b] est. quare & ad [c] omnes rectas lineas ipsam contingentes, quæ in eodem plano sunt, rectos faciet angulos; sed ipsam tangit BF in subjecto existens plano. ergo angulus ABF rectus est. ponitur autem & ABC angulus rectus. æqualis igitur est angulus ABF angulo ABC, & in eodem sunt plano; quod fieri non potest. recta igitur linea BC non est in sublimi; quare tres rectæ lineæ BC BD BE in uno sunt plano. Si igitur recta linea tribus rectis lineis sese tangentibus, in communi sectione, ad rectos angulos insistat, tres illæ rectæ lineæ in uno plano erunt. Quod demonstrare oportebat.



[a] 3. hujus.
[b] 4. hujus.
[c] 3. Diffin.

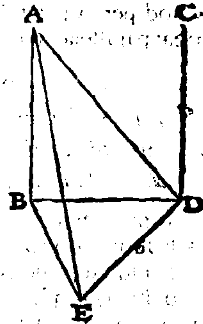
PROP. VI. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter sese parallelæ erunt.

Duæ enim rectæ lineæ AB CD subjecto plano sint ad rectos angulos. dico AB ipsi CD parallelam esse. occurrant

 enim

enim subjecto plano in punctis B D, jungaturque B D recta linea, cui ad rectos angulos in subjecto plano ducatur D E, & posita D E ipsi A B æquali, jungantur B E A E A D. Quoniam igitur A B recta est ad subjectum planum, & ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt, & in subjecto sunt plano, rectos angulos [a] efficiet. contingit autem A B utraque ipsarum B D B E existens in subjecto plano. ergo uterque angulorum A B D A B E rectus est. eadem ratione rectus etiam est uterque ipsorum C D B C D E. & quoniam A B æqualis est ipsi D E, communis autem B D. erunt duæ A B B D duabus E D D B æquales, & rectos angulos continent; basis igitur A D basi B E est [b] æqualis. rursus quoniam A B est æqualis D E, & A D ipsi B E, duæ A B B E duabus E D D A æquales sunt, & basis ipsarum A E communis; ergo angulus A B E angulo E D A est [c] æqualis. sed A B E rectus est. rectus igitur & E D A; & idcirco E D ad D A est perpendicularis. sed & perpendicularis est ad utramque ipsarum B D D C. quare E D tribus rectis lineis B D D A D C in contactu ad rectos insistit angulos. tres igitur rectæ lineæ B D D A D C in uno sunt [d] plano. in quo autem sunt B D D A, in eo est A B, omne enim triangulum in uno [e] est plano. ergo A B B D D C in uno plano sint necesse est: atque est uterque angulorum A B D B D C rectus. parallela igitur [f] est A B ipsi C D. quare si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter se parallelæ erunt. Q. E. D.

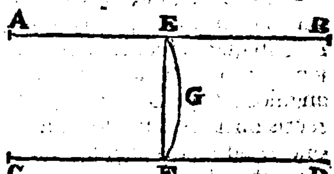


[a] 3. Diffin. hujus.
[b] 4. primi.
[c] 8. primi.
[d] 5. hujus.
[e] 2. hujus.
[f] 28. primi.

PROP. VII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, sumantur autem in utraque ipsarum quælibet puncta; quæ dicta puncta conjungit recta in eodem erit plano, in quo & parallelæ.

Sint duæ rectæ lineæ parallelæ A B C D, & in utraque ipsarum sumantur quælibet puncta E F. dico rectam lineam quæ puncta E F conjungit, in eodem plano esse, in quo sunt parallelæ. non enim, sed si fieri potest, sit in sublimi, ut E G F, & per E G F, planum ducatur quod in subjecto plano sectionem faciet [a] rectam lineam; faciat ut



[a] 3. hujus.

ut E F: ergo duæ rectæ lineæ E G F E F spatium continebunt, quod fieri non [b] potest. non igitur quæ à puncto E ad F ducitur recta linea in sublimi est plano, quare erit in eo quod per A B C D parallelas transit. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelæ sint, &c. Quod oportebat demonstrare. [b] 10. axio. primi.

PROP. VIII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, altera autem ipsarum plano alicui sit ad rectos angulos, & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

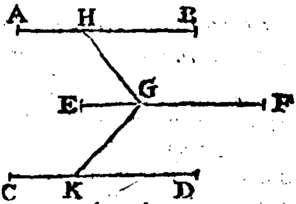
Sint duæ rectæ lineæ parallelæ A B C D, & altera ipsarum A B subjecto plano sit ad rectos angulos. dico & reliquam C D eidem plano ad rectos angulos esse. occurrant enim A B C D subjecto plano in punctis B D, & B D jungatur. ergo A B C D B D in uno sunt [b] plano. ducatur ipsi B D ad rectos angulos in subjecto plano D E: & ponatur D E ipsi A B æqualis: junganturque B E A E A D. & quoniam A B perpendicularis est ad subjectum planum, & ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt suntque in subjecto plano, perpendicularis [a] erit. rectus igitur est uterque angulorum A B D A B E. quod cum in parallelas rectas lineas A B C D recta incidit B D, erunt anguli A B D C D B duobus rectis [b] æquales. rectus autem est A B D. ergo & C D B est rectus; ac propterea C D perpendicularis est ad B D. & quoniam A B est æqualis D E, communis autem B D, duæ A B B D duabus E D D B æquales sunt; & angulus A B D est æqualis angulo E D B, rectus enim uterque est, basis igitur A D basi B E est [c] æqualis. rursus quoniam A B æqualis est D E, & B E ipsi A D; erunt duæ A B B E duabus E D D A æquales, altera alteri; & basis earum communis A E. quare angulus A B E est [d] æqualis angulo E D A. rectus autem est A B E. ergo & E D A est rectus, & E D ad D A perpendicularis. sed & perpendicularis est ad B D. ergo E D etiam ad planum per B D D A perpendicularis [e] erit, & ad omnes rectas lineas quæ in eodem existentes plano ipsam contingunt, rectos [f] faciet angulos. at in plano per B A A D est D C, quoniam in plano per B D D A sunt [g] A B B D: in quo autem sunt A B B D in eodem [i] est ipsa D C. quare E D ipsi D C est ad rectos angulos: ideoque C D ad rectos angulos est ipsi D E; sed & etiam ipsi D B. ergo C D duabus rectis lineis D E D B se mutuo secantibus in communi sectione D ad rectos angulos insistit; ac propterea plano per D E D B est [e] ad rectos angulos. planum autem per D E D B est subjectum planum. ergo C D subjecto plano ad rectos angulos erit. Quod demonstrare oportebat.

Vide figuram Prop. sexta.
[b] 2. hujus.
[a] 3. Diffin.
[b] 29. primi.
[c] 4. primi.
[d] 8. primi.
[e] 4. hujus.
[f] 3. Diffin.
[g] 2. hujus.
[i] 7. hujus.

PROP. IX. THEOR.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, non existentes in eodem in quo ipsa plano, etiam inter se parallelæ erunt.

Sit utraque ipsarum A B C D parallela ipsi E F, non existentes in eodem, in quo ipsa plano. dico A B ipsi C D parallelam esse. sumatur in E F quodvis punctum G, à quo ipsi E F, in plano quidem per E F A B transeunte, ad rectos angulos ducatur G H; in plano autem transeunte per E F C D, rursus ducatur ipsi E F ad rectos angulos G K. & quoniam E F ad utramque ipsarum G H G K est perpendicularis, erit E F etiam ad rectos [a] angulos plano per G H G K transeunte. atque est E F ipsi A B parallela. ergo & A B plano per H G K ad rectos angulos [b] est. eadem ratione & C D plano per H G K est ad rectos angulos. utraque igitur ipsarum A B C D plano per H G K ad rectos angulos erit. Si autem duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, parallelæ [c] erunt inter se. ergo A B ipsi C D est parallela. Quod demonstrare oportebat.

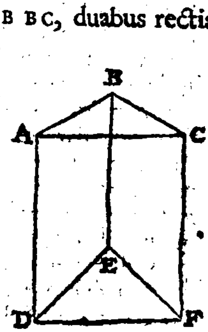


a 4. hujus.
b 8. hujus.
c 6. hujus.

PROP. X. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ sese contingentes, duabus rectis lineis sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt.

Duæ rectæ lineæ sese contingentes A B B C, duabus rectis lineis D E E F sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano. dico angulum A B C angulo D E F æqualem esse. assumantur enim B A B C E D E F inter se æquales: & jungantur A D C F B E A C D F. quoniam igitur B A ipsi E D æqualis est & parallela, erit & [a] A D æqualis & parallela ipsi B E. eadem ratione & C F ipsi B E æqualis & parallela erit. utraque igitur ipsarum A D C F ipsi B E æqualis est & parallela. quæ autem eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, non existentes in eodem plano; & in-



a 33. primi.

ter

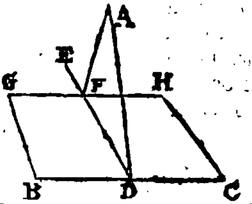
ter se parallelæ *b* erunt. ergo AD parallela est ipsi CF & æqualis. atque ipsas conjungunt AC DF; & AC igitur ipsi DF æqualis est & *c* parallela. & quoniam duæ rectæ lineæ AB BC duabus DE EF æquales sunt, & basis AC est æqualis basi DF; erit *d* angulus ABC angulo DEF æqualis. Si igitur duæ rectæ lineæ sese contingentes, duabus rectis lineis sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt. Quod oportebat demonstrare.

b 9. hujus. *c* 33. primi. *d* 8. primi.

PROP. XI. PROBL.

A dato puncto in sublimi, ad subjectum planum, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum in sublimi A, datum autem subjectum planum BH. oportet à puncto A ad subjectum planum perpendicularem rectam lineam ducere. In subjecto plano ducatur quædam recta linea utcunque BC, & à puncto A ad BC perpendicularis agatur *c* AD. siquidem igitur AD perpendicularis sit etiam ad subjectum planum; factum jam erit, quod proponebatur: sin minus; ducatur à puncto D ipsi BC, in subjecto plano, ad rectos *b* angulos DE: & à puncto A ad DE perpendicularis *c* ducatur AF. denique per F ducatur GH ipsi BC parallela. Quoniam BC utrique ipsarum DA DE est ad rectos angulos, erit *d* & BC ad rectos angulos plano per ED DA transeunti. quin ipsi BC parallela est GH; si autem sint duæ rectæ lineæ parallelæ, quarum una plano alicui sit ad rectos angulos; & reliqua *e* eidem plano ad rectos angulos erit. quare & GH plano per ED DA transeunti ad rectos angulos est: ac propterea ad omnes rectas lineas, quæ in eodem plano existentes ipsam contingunt, est *f* perpendicularis. contingit autem ipsam AF existens in plano per ED DA. ergo GH perpendicularis est ad AF. & ob id AF est perpendicularis ad GH: est autem AF ad DE perpendicularis. ergo AF perpendicularis est ad utramque ipsarum HG DE. si autem recta linea duabus rectis lineis sese contingentibus, in communi sectione, ad rectos angulos insistat, etiam plano per ipsas ducto ad rectos angulos *d* erit. quare AF plano per ED GH ducto est ad rectos angulos. planum autem per ED GH est subjectum planum. ergo AF ad subjectum planum est perpendicularis. A dato igitur puncto sublimi A, ad



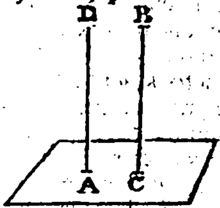
b 11. primi. *c* 12. primi. *d* 4. hujus. *e* 8. hujus. *f* 3. Diffin.

ſubjectum planum, perpendicularis recta linea ducta eſt A F. Quod facere oportebat.

PROP. XII. PROBL.

Dato plano, à puncto quod in ipſo datum eſt, ad rectos angulos rectam lineam conſtituere.

Sit datum quidem planum ſubjectum, punctum autem quod in ipſo ſit A. oportet à puncto A ſubjecto plano ad rectos angulos rectam lineam conſtituere. Intelligatur aliquod punctum ſublime B, à quo ad ſubjectum planum agatur [a] perpendicularis B C; & per A ipſi B C parallela [b] ducatur A D. quoniam igitur duæ rectæ lineæ parallelæ ſunt A D C B, una autem ipſarum B C ſubjecto plano eſt ad rectos angulos; & reliqua [c] A D ſubjecto plano ad rectos angulos erit. Dato igitur plano à puncto quod in ipſo eſt datum, ad rectos angulos recta linea conſtituta eſt. Quod facere oportebat.

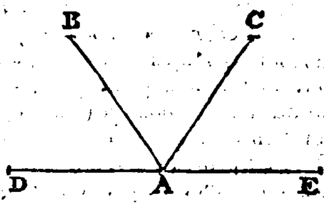


a 11 hujus
b 31. primi.
c 8. hujus.

PROP. XIII. THEOR.

Dato plano, à puncto quod in ipſo eſt, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non conſtituentur ex eadem parte.

Si enim fieri poteſt, dato plano, à puncto quod in ipſo eſt A, duæ rectæ lineæ A B A C ad rectos angulos conſtituantur ex eadem parte: & ducatur planum per B A A C, quod faciet ſectionem per A in ſubjecto plano [a] rectam lineam. faciat D A E. ergo rectæ lineæ A B A C D A E in uno ſunt plano. & quoniam C A ſubjecto plano ad rectos angulos eſt, & ad [b] omnes rectas lineas, quæ in ſubjecto plano exiſtentes ipſam contingunt, rectos faciet angulos. contingit autem ipſam D A E, quæ eſt in ſubjecto plano. angulus igitur C A E rectus eſt. eadem ratione & rectus eſt B A E. ergo angulus C A E ipſi B A E eſt æqualis, & in uno ſunt plano, quod fieri non poteſt. Non igitur dato plano, à puncto, quod in ipſo eſt, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos conſtituentur ex eadem parte. Quod oportebat demonſtrare.



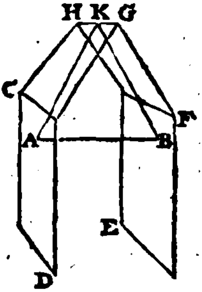
a 3. hujus.
b 3. Diffin.

PROP.

PROP. XIV. THEOR.

Ad quæ plana, eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt.

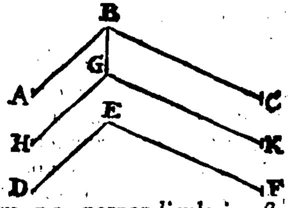
Recta quædam linea A B ad utrumque ipsorum planorum CD EF sit perpendicularis. dico ea plana parallela esse. Si enim non ita sit, producta convenient inter se: conveniant, & communem sectionem faciant rectam lineam G H; & in ipsa G H sumpto quovis puncto K, jungatur A K B K. Quoniam igitur A B perpendicularis est ad E F planum; erit & perpendicularis ad ipsam B K rectam lineam in plano E F producto existentem. quare angulus A B K rectus est. eadem ratione & B A K est rectus: ideoque trianguli A B K duo anguli A B K B A K duobus rectis sunt æquales, quod fieri non ᵃ potest. non igitur plana C D E F producta inter se convenient. quare C D E F parallela sint necesse est. Ad quæ igitur plana, eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt. Quod demonstrare oportebat. ᵃ 17. primi.



PROP. XV. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; & quæ per ipsas transeunt plana parallela erunt.

Duæ rectæ lineæ sese tangentes A B B C, duabus rectis lineis sese tangentibus D E E F parallelæ sint, & non in eodem plano. dico plana quæ per A B B C, D E E F transeunt, si producantur, inter se non convenire. Ducatur à puncto B ad planum, quod per D E E F transit perpendicularis B G, quæ plano in puncto G occurrat, & per G ducatur ipsi quidem E D parallela G H; ipsi vero E F parallela G K. itaque quoniam B G perpendicularis est ad planum per D E E F; & ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt, & in eodem sunt plano, rectos faciet ᵃ angulos, contingit autem ipsam utraque earum G H G K, quæ sunt in ᵃ 3. Diffini

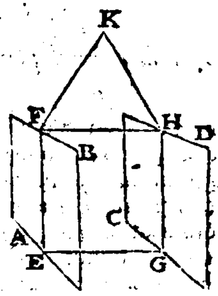


eodem plano. rectus igitur est uterque angulorum BGH BGK. & quoniam BA parallela est ipsi GH, anguli GBA
b 19 primi. BGH duobus rectis sunt b æquales. rectus autem est BGH. ergo & GBA rectus erit, ideoque GB ad BA est perpendicularis. eadem ratione & GB est perpendicularis ad BC. cum igitur recta linea BG duabus rectis lineis BA BC se invicem secantibus ad rectos angulos insistat; erit BG etiam
d 4. hujus. ad planum per BA BC ductum d perpendicularis. atque est ad planum per DE EF perpendicularis. ergo BG perpendicularis est ad utrumque planorum quæ per AB BC, DE EF transeunt. Ad quæ vero plana eadem recta linea est per-
e 14. hujus. pendicularis, ea parallela e sunt. parallelum igitur est planum per AB BC plano per DE EF. Quare si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano, & quæ per ipsas transeunt plana parallela erunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XVI. THEOR.

Si duo plana parallela ab aliquo plano secentur, communes ipsorum sectiones parallelæ erunt.

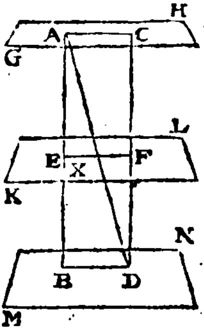
Duo plana parallela AB CD à plano aliquo EFHG secentur; communes autem ipsorum sectiones sint EF GH. dico EF ipsi GH parallelam esse. Si enim non est parallela, productæ EF GH inter se convenient, vel ad partes FH, vel ad partes EG. producantur prius, ut ad FH, & conveniant in K. quoniam igitur EFK est in plano AB, & omnia quæ in EFK sumuntur puncta in eodem plano erunt: unum autem punctorum quæ sunt in EFK, est ipsum K punctum. ergo K est in plano AB. eadem ratione & K est in CD plano. ergo plana AB CD producta inter se convenient. non conveniunt autem, cum parallela ponantur. non igitur EF GH rectæ lineæ productæ convenient ad partes FH. similiter demonstrabimus neque ad partes EG convenire, si producantur. quæ autem neutra ex parte conveniunt parallelæ sunt. ergo EF ipsi GH est parallela. Si igitur duo plana parallela ab aliquo plano secentur, communes ipsorum sectiones parallelæ erunt. Quod demonstrare oportebat.



PROP. XVII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ à parallelis secentur planis, in easdem proportiones secabuntur.

Duæ rectæ lineæ A B C D à parallelis planis G H K L M N secentur in punctis A E B C F D. dico ut A E recta linea ad ipsam E B, ita esse C F ad F D. Jungantur enim A C B D A D: & occurrat A D plano K L in puncto X: & E X X F jungantur. Quoniam igitur duo plana parallela K L M N à plano E B D X secantur, communes ipsorum sectiones E X B D parallelæ [a] sunt. eadem ratione quoniam duo plana parallela G H K L à plano A X F C secantur, communes ipsorum sectiones A C F X sunt parallelæ. & quoniam uni laterum trianguli A B D, videlicet ipsi B D parallela ducta est E X, ut A E ad E B, ita [b] erit A X ad X D. rursus quoniam uni laterum trianguli A D C, nempe ipsi A C parallela ducta est X F, erit ut A X ad X D [b], ita C F ad F D. ostensum autem est ut A X ad X D, ita esse A E ad E B. ut igitur A E ad E B, ita est [c] C F ad F D. Quare si duæ rectæ lineæ à parallelis secentur planis, in easdem proportiones secabuntur. Quod demonstrare oportebat.

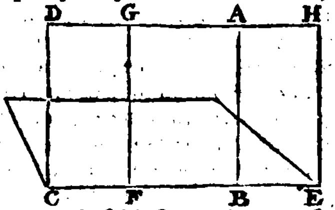


[a] 16. hujus.
[b] 2 sexti.
[c] 11 quinti.

PROP. XVIII. THEOR.

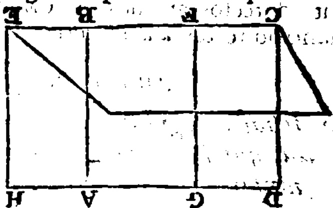
Si recta linea plano alicui sit ad rectos angulos; & omnia quæ per ipsam transeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

Recta linea quædam A B subjecto plano sit ad rectos angulos. dico & omnia plana quæ per ipsam A B transeunt, subjecto plano ad rectos angulos esse. Producatur enim per A B planum D E, sitque plani D E, & subjecti plani communis sectio C E: & sumatur in C E quodvis punctum F; à quo ipsi C E ad rectos angulos, in D E plano, ducatur F G. quoniam igitur A B ad subjectum planum est perpendicularis; & ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt & in eodem sunt plano perpendicularis [a] erit. quare etiam



[a] 3 Diffin.

etiam ad CE est perpendicularis. angulus igitur ABF rectus est: sed & GFB est rectus. ergo AB parallela est ipsi FG. est autem AB subjecto plano ad rectos angulos. & FG igitur eidem plano ad rectos angulos [b] erit. at planum ad planum rectum est, quando communi planorum sectioni ad rectos angulos ductæ rectæ lineæ in uno planorum, reliquo plano ad rectos angulos [c] sint: at communi planorum sectioni CE in uno plano DE ad rectos angulos ducta FG, ostensa est subjecto plano ad rectos esse angulos. ergo planum DE rectum est ad subjectum planum. similiter demonstrabuntur & omnia quæ per AB transeunt plana subjecto plano recta esse. Si igitur recta linea plano alicui sit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipsam transeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt. Quod oportebat demonstrare.



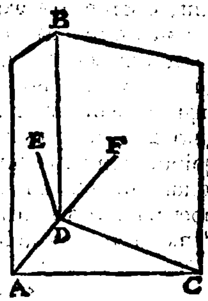
[b] 8. hujus.

[c] 4. Diffin hujus.

PROP. XIX. THEOR.

Si duo plana se invicem secantia plano alicui sint ad rectos angulos, & communis ipsorum sectio eidem plano ad rectos angulos erit.

Duo plana se invicem secantia AB, BC subjecto plano sint ad rectos angulos; communis autem ipsorum sectio sit BD. dico BD subjecto plano ad rectos angulos esse. Non enim, sed si fieri potest; non sit BD ad rectos angulos subjecto plano: & à puncto D ducatur in plano quidem AB, ipsi AD rectæ lineæ ad rectos angulos DE: in plano autem BC ducatur ipsi CD ad rectos angulos DF. Et quoniam planum AB ad subjectum planum rectum est, & communi ipsorum sectioni AD ad rectos angulos in plano AB ducta est DE, erit [a] DE ad subjectum planum perpendicularis. similiter ostendemus & DF perpendicularem esse ad subjectum planum. quare ab eodem puncto D subjecto plano duæ rectæ lineæ ad rectos angulos constitutæ sunt ex eadem parte, quod fieri non [b] potest. non igitur subjecto plano à puncto D ad rectos angulos constituentur aliæ rectæ lineæ, præter ipsam DB, communem planorum



[a] 4. Diffin

[b] 13. hujus.

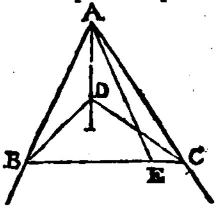
AB BC

AB, BC sectionem. quare DB subjecto plano est perpendicularis. Ergo si duo plana se invicem secantia plano alicui sint ad rectos angulos, & communis ipsorum sectio eidem plano ad rectos angulos erit. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XX. THEOR.

Si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo majores sunt, quomodocunque sumpti.

Solidus angulus ad A tribus angulis planis BAC CAD DAB contineatur. dico angulorum BAC CAD DAB duos quoslibet reliquo majores esse, quomodocunque sumptos. Si enim BAC CAD DAB anguli inter se æquales sint, perspicuum est duos quoslibet reliquo majores esse, quomodocunque sumptos. sin minus, sit major BAC. & ad rectam lineam AB, & ad punctum in ipsa A, constituatur a angulo DAB, in plano per BA AC transeunte, æqualis angulus BAE; ponaturque ipsi AD æqualis AE; & per E ducta BEC secet rectas lineas AB AC in punctis B C, & DB DC jungantur. itaque quoniam DA est æqualis AE, communis autem AB, duæ DA AB æquales sunt duabus AE AB; & angulus DAB æqualis est angulo BAE. basis igitur DB basi BE est b æqualis. & quoniam duæ DB DC ipsa BC majores sunt, quarum DB æqualis ostensa est ipsi BE; erit reliqua DC quam reliqua EC major. quod cum DA sit æqualis AE, communis autem AC & basis DC major basi EC; erit c angulus DAC angulo EAC major. sed ex constructione est DAB angulus æqualis ipsi BAE. quare DAB DAC anguli, angulo BAC majores sunt. similiter demonstrabimus, & si duo quilibet alii sumantur, eos reliquo esse majores. Si igitur solidus angulus tribus angulis planis contineatur; duo quilibet reliquo majores sunt, quomodocunque sumpti. Quod demonstrare oportebat.



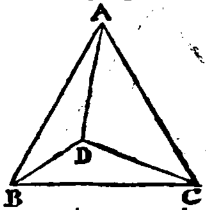
a 23. primi.
b 4. primi.
c 25. primi.

PROP. XXI. THEOR.

Omnis solidus angulus, minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur.

Sit solidus angulus ad A, planis angulis BAC CAD DAB con-

contentus. dico angulos BAC CAD DAB quatuor rectis esse minores. Sumantur enim in unaquaque ipsarum AB AC AD quævis puncta B C D, & BC CD DB jungantur. Quoniam igitur solidus angulus ad B, tribus angulis planis continetur CBA ABD CBD, duo quilibet reliquo majores [a] sunt. anguli igitur CBA ABD, angulo CBD sunt majores. eadem ratione, & anguli quidem BCA ACD, majores sunt angulo BCD; anguli vero CDA ADB majores angulo CDB. quare sex anguli CBA ABD BCA ACD ADC ADB tribus angulis CBD BCD CDB sunt majores. sed tres anguli CBD BDC DCB sunt [b] æquales duobus rectis. sex igitur anguli CBA ABD BCA ACD ADC ADB duobus rectis majores sunt. quod cum singulorum triangulorum ABC ACD ADB tres anguli sint æquales duobus rectis, erunt trium triangulorum novem anguli CBA ACB BAC ACD DAC CDA ADB DBA BAD æquales sex rectis. quorum sex anguli ABC BCA ACD CDA ADB DBA duobus rectis sunt majores. reliqui igitur BAC CAD DAB tres anguli, qui solidum continent angulum, quatuor rectis minores erunt. Quare omnis solidus angulus, minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur. Quod oportebat demonstrare.



a 20 hujus.
b 32 primi.

PROP. XXII. THEOR.

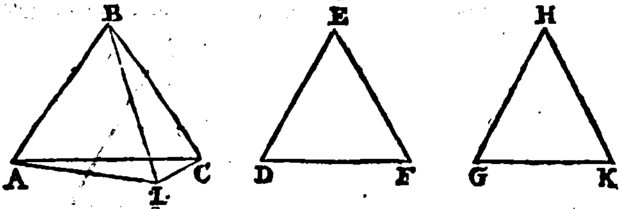
Si sint tres anguli plani, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, contineant autem ipsos rectæ lineæ æquales; fieri potest, ut ex iis quæ rectas æquales conjungunt, triangulum constituatur.

Sint dati tres anguli plani ABC DEF GHK, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti: contineant autem ipsos æquales rectæ lineæ AB BC DE EF GH HK, & AC DF GK jungantur. dico fieri posse ut ex æqualibus ipsis AC DF GK triangulum constituatur: hoc est duas reliqua majores esse quomodocunque sumptas. Si igitur anguli ad ad B E H sint æquales, & AC DF GK æquales [a] erunt, & duæ reliquâ majores. sin minus, sint inæquales anguli ad B E H, & major sit angulus ad B utrovis ipsorum qui sunt ad E H. major igitur est & [b] recta linea AC utravis ipsarum DF GK. & manifestum est ipsam AC unà cum altera ipsarum DF GK, reliqua esse majorem. dico & DF GK ipsa AC

a 4. primi.
b 24 primi.

majores

majores esse. constituatur [a] ad rectam lineam A B, & ad punctum in ea B, angulo G H K æqualis angulus A B L, & uni [a] 23. primi.

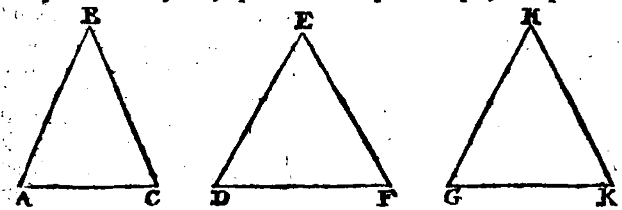


ipsarum A B B C D E E F G H H K ponatur æqualis B L, & A L C L jungantur. Quoniam igitur duæ A B B L duabus G H H K æquales sunt, altera alteri, & angulos æquales continent; erit basis A L basi G K æqualis. & quoniam anguli ad E H, angulo A B C majores sunt, quorum angulus G H K est æqualis ipsi A B L; erit reliquus qui ad E, angulo L B C major. quod cum duæ L B B C duabus D E E F æquales sunt, altera alteri; & angulus D E F angulo L B C major; basis D F basi L C major [b] erit. ostensa est autem G K æqualis A L. [b] 24. primi. ergo D F G K ipsis A L L C sunt majores; sed A L L C majores sunt ipsa A C. multo igitur D F G K, ipsa A C majores erunt. quare rectarum linearum A C D F G K duæ reliqua majores sunt quomodocunque sumptæ; ac propterea fieri potest ut ex æqualibus ipsis A C D F G K triangulum constituatur. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXIII. PROBL.

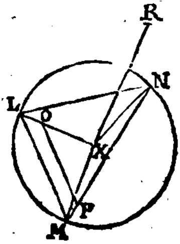
Ex tribus angulis planis, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, solidum angulum constituere. oportet autem tres angulos quatuor rectis esse minores.

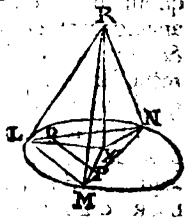
Sint dati tres anguli plani A B C D E F G H K, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, sintque tres



anguli quatuor rectis minores. oportet ex æqualibus ipsis A B C D E F G H K solidum angulum constituere. abscindantur æquales A B B C D E E F G H H K; & A C D F G K jungantur. fieri

fieri igitur potest ut ex æqualibus ipsis AC DF GK constituatur a triangulum. Itaque b constituatur LMN, ita ut AC quidem sit æqualis LM, DF vero ipsi MN: & præterea GK ipsi LN, & circa LMN triangulum circulus LMN c describatur: sumaturque ipsius centrum X, quod vel erit intra triangulum LMN, vel in uno ejus latere, vel extra. Sit primo intra: & LX MX NX jungantur. dico AB majorem esse ipsa LX. si enim non ita sit, vel AB erit æqualis LX, vel ea minor. sit primo æqualis. quoniam igitur AB est æqualis LX, atque est AB ipsi BC æqualis; erit LX æqualis BC, est autem LX æqualis XM. duæ igitur AB BC duabus LX XM æquales sunt, altera alteri; & AC basis basi LM æqualis ponitur. quare d angulus ABC angulo LXM est æqualis: eadem ratione & angulus quidem DEF est æqualis angulo MXN, angulus vero GHK angulo NXL. tres igitur anguli ABC DEF GHK tribus LXM MXN NXL æquales sunt. sed tres LXM MXN NXL quatuor rectis sunt e æquales. ergo & tres ABC DEF GHK æquales erunt quatuor rectis. atqui ponuntur quatuor rectis minores, quod est absurdum. non igitur AB ipsi LX est æqualis. dico præterea neque AB minorem esse ipsa LX si enim fieri potest, sit minor, & ponatur ipsi quidem AB æqualis XO, ipsi vero BC æqualis XP, & OP jungatur. quoniam igitur AB est æqualis BC, & XO ipsi XP æqualis erit. ergo & reliqua OL reliquæ PM est æqualis; ac propterea LM parallela f est ipsi OP; & LMX triangulum triangulo OPX æquiangulum. est g igitur ut XL ad LM, ita XO ad OP; & permutando ut LX ad XO, ita LM ad OP. major autem est LX, quam XO. ergo & LM quam OP est major. sed LM posita est æqualis AC. & AC igitur quam OP major erit. itaque quoniam duæ rectæ lineæ AB BC duabus OX XP æquales sunt, & basis AC major basi OP; erit h angulus ABC angulo OXP major. similiter demonstrabimus & DEF angulum majorem esse angulo MXN, & angulum GHK angulo NXL. tres igitur anguli ABC DEF GHK tribus LXM MXN NXL sunt majores. at anguli ABC DEF GHK quatuor rectis minores ponuntur. multo igitur anguli LXM MXN NXL minores erunt quatuor rectis. sed & i æquales. quod est absurdum. non igitur AB minor est, quam





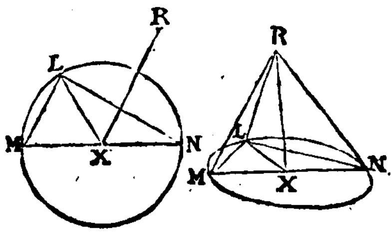
a 22. hujus.
b 22. primi.
c 5 quarti.
d 8. primi.
e Cor. 15. primi.
f 2 sexti.
g 4 sexti.
h 25. primi.
i Cor. 15. primi.

LX.

LX. ostensum autem est neque esse æqualem. ergo major sit necesse est. constituatur [k] à puncto X circuli LMN plano ad rectos angulos XR. & excessui quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX, ponatur æquale quadratum quod fit ex RX, & RL RM RN jungantur. quoniam igitur RX perpendicularis est ad planum LMN circuli, & ad unamquamque ipsarum LX MX NX erit [l] perpendicularis. & quoniam LX est æqualis XM, communis autem & ad rectos angulos XR, erit basis LR æqualis [m] basi RM. eadem ratione & RN utrique ipsarum RL RM est æqualis. tres igitur rectæ lineæ RL RM RN inter se æquales sunt. & quoniam quadratum XR ponitur æquale excessui, quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX; erit quadratum ex AB quadratis ex LX XR æquale. quadratis autem ex LX XR æquale est [n] quadratum ex RL; rectus enim angulus est LXR. ergo quadratum ex AB quadrato ex RL æquale erit; ideoque AB ipsi RL est æqualis. sed ipsi quidem AB æqualis est unaquæque ipsarum BC DE EF GH HK: ipsi vero RL æqualis utraque ipsarum RM RN. unaquæque igitur ipsarum AB BC DE EF GH HK unicuique ipsarum RL RM RN est æqualis. quod cum duæ LR RM duabus AB BC æquales sint, & basis LM ponatur æqualis basi AC: erit [o] angulus LRM æqualis angulo ABC. eadem ratione & angulus quidem MRN angulo DEF, angulus autem LRN angulo GHK est æqualis. ex tribus igitur angulis planis LRM MRN LRN, qui æquales sunt tribus datis ABC DEF GHK solidus angulus constitutus est ad R.

[k] 12. hujus. [l] 3. diffin. [m] 4 primi. [n] 47. primi. [o] 8 primi.

Sed sit centrum circuli in uno laterum trianguli, videlicet in MN, quod sit X, & XL jungatur. dico rursus AB majorem esse ipsa LX. si enim non ita sit, vel AB est æqualis LX vel ipsa minor. sit primo æqualis. duæ igitur AB BC, hoc est DE EF duabus MX XL, hoc est ipsi MN æquales sunt. sed MN ponitur æqualis DF.

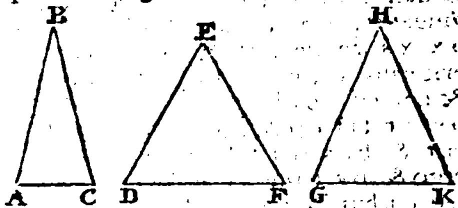


ergo DE EF ipsi DF sunt æquales. quod fieri non [p] potest. non igitur AB est æqualis LX. similiter neque minor. multo enim magis id quod fieri non potest sequeretur. ergo AB ipsa LX major est. & similiter si excessui quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX æquale ponatur quadratum

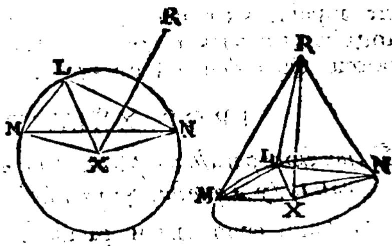
[p] 20. primi.

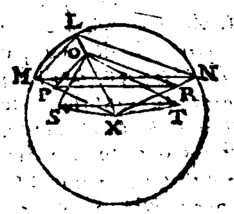
ex R X, & ipsa R X circuli plano ad rectos angulos con-stituatur, fiet problema.

Sed sit centrum circuli extra triangulum L M N, quod sit X, & L X M X N X jungantur. dico & sic A B ipsa L X majorem esse. Si enim non ita sit, vel æqualis est, vel minor. sit primo æqualis. ergo duæ A B B C duabus M X X L æquales sunt, altera alteri; & basis A C est æqualis basi M L. angulus igitur A B C æqualis est angulo M X L. eadem ratione & G H K angulus ipsi L X N est æqualis; ac propterea totus M X N æqualis duobus A B C G H K. sed & anguli A B C G H K angulo D E F majores sunt. & angulus igitur M X N ipso D E F est major.



at quoniam duæ D E E F duabus M X X N æquales sunt, & basis D F æqualis basi M N, erit M X N angulus angulo D E F æqualis. ostensus autem est major, quod est absurdum. non igitur A B est æqualis L X: deinceps vero ostendemus neque minorem esse, quare major necessario erit. & si rursus circuli plano ad rectos angulos constituamus X R, & ipsam æqualem ponamus lateri quadrati eius, quo quadratum ex A B superat quadratum ex L X, problema constituetur. dico vero neque minorem esse A B ipsa L X. si enim fieri potest, sit minor; & ipsi quidem A B æqualis ponatur X O, ipsi vero B C æqualis X P, & O P jungatur. quoniam igitur A B ipsi B C est æqualis, erit X O æqualis X P. ergo & reliqua O L reliquæ P M æqualis. parallela igitur q est L M ipsi P O, & triangulum L M X triangulo P X O æquiangulum. quare r ut X L ad L M, ita X O ad O P: & permutando ut L X ad X O, ita L M ad O P. major autem est L X quam X O. ergo L M quam O P est major. sed L M est æqualis A C. & A C igitur quam O P major erit.





q 2 sexti.

r 4 sexti.

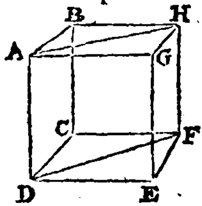
sit. itaque quoniam duæ A B B C duabus O X X P sunt æquales altera alteri; & basis A C major est basi O P; erit *a* angulus A B C angulo O X P major. similiter & si X R sumatur æqualis utrivis ipsarum X O X P, & jungatur O R, ostendemus angulum G H K angulo O X R majorem. constituatur ad rectam lineam L X, & punctum in ipsa X angulo quidem A B C æqualis angulus L X S, angulo autem G H K æqualis L X T, & ponatur utraque X S X T ipsi O X æqualis: junganturque O S O T S T. & quoniam duæ A B B C duabus O X X S æquales sunt, & angulus A B C æqualis angulo O X S, erit basis A C, hoc est L M, basi O S æqualis. eadem ratione, & L N est æqualis ipsi O T. quod cum duæ M L L N duabus O S O T sint æquales, & angulus M L N major angulo S O T; erit & basis M N basi S T major. sed M N est æqualis D F. ergo & D F quam S T major erit. quoniam igitur duæ D E E F duabus S X X T æquales sunt, & basis D F major basi S T; erit angulus D E F angulo S X T major. æqualis autem est angulus S X T angulis A B C G H K. ergo D E F angulus angulis A B C G H K major est: sed & minor. Quod fieri non potest. Quod demonstrare oportebat. *a 25 primi.*

PROP. XXIV. THEOR.

Si solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana, & æqualia, & parallelogramma erunt.

Solidum enim C D G H parallelis planis A C G F B G C E F B A E contineatur. dico opposita ejus plana, & æqualia, & parallelogramma esse. Quoniam enim duo plana parallela B G C E, à plano A C secantur, communes ipsorum sectiones *a* parallelæ sunt: ergo A B ipsi C D est parallela. rursus quoniam duo plana parallela B F A E secantur à plano A C, communes ipsorum sectiones parallelæ *a* sunt: parallela igitur est A D ipsi B C. ostensa autem est & A B parallela C D. ergo A C parallelogrammum erit. similiter demonstrabimus, & unumquodque ipsorum C E F G G B B F A E parallelogrammum esse. jungantur A H D F. & quoniam parallela est A B quidem ipsi D C; B H vero ipsi C F, erunt A B B H sese tangentes, duabus D C C F sese tangentibus parallelæ, & non in eodem plano: quare æquales *b* angulos continebunt. angulus igitur A B H angulo D C F est æqualis. Et quoniam duæ A B B H duabus D C C F æquales *c* sunt, & angulus

a 16 hujus.



b 10 hujus.
c 34 primi.

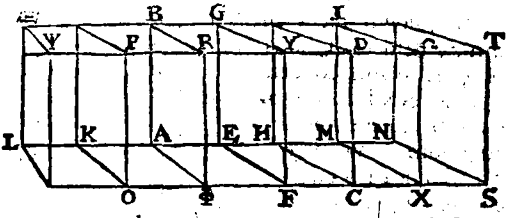
d 4. primi. angulus ABH æqualis angulo DCF, erit [d] basis AH basi DF æqualis: & ABH triangulum æquale triangulo DCF. quod
e 41. primi. cum ipsius quidem ABH trianguli, duplum [e] sit BG parallelogrammum: ipsius vero DCF trianguli, duplum parallelogrammum CE: erit BG parallelogrammum æquale parallelogrammo CE. similiter demonstrabimus & AC parallelogrammum parallelogrammo GF, & parallelogrammum AE parallelogrammo BF æquale esse. Si igitur solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana, & æqualia, & parallelogramma sunt. Quod oportebat demonstrare.

Cor. Ex jam demonstratis constat, si solidum parallelis contineatur planis, opposita ipsius plana, & æqualia esse, & similia, quippe quæ & singulos angulos æquales, & circa æquales angulos latera proportionalia habeant.

PROP. XXV. THEOR.

Si solidum parallelepipedum plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut basis ad basim, ita solidum ad solidum.

Solidum enim parallelepipedum ABCD plano YE secetur, oppositis planis RA DH parallelo. dico ut EFΦA basis ad basim EHCF, ita esse ABFY solidum ad solidum EGCD. Producatur enim AH ex utraque parte, & ponantur ipsi



quidem EH æquales quotcunque HM MN; ipsi vero AE æquales quotcunque AK KL, & compleantur parallelogramma LO KΦ HX MS, & solida LP KR HΩ MT. quoniam igitur æquales inter se sunt LK KA AE rectæ lineæ;
a 1 sexti. erunt & parallelogramma LO KΦ AF inter se [a] æqualia: itemque æqualia inter se parallelogramma KΞ KB AG, & adhuc
b 24. hujus. parallelogramma LΨ KP AR inter se [b] æqualia; opposita enim sunt. eadem ratione & parallelogramma EC HX MS æqualia inter se sunt; itemque parallelogramma HG HI IN inter se æqualia: & insuper parallelogramma DH MΩ NT. tria igitur plana solidorum LP KR AY tribus planis æqualia sunt: sed tria tribus oppositis sunt æqualia. ergo tria solida

LP

LF KR HT inter se æqualia [c] erunt. eadem ratione & tria solida ED HD MT sunt æqualia inter se. quotuplex igitur est basis LF ipsius AF basis, totuplex est & LY solidum solidi AY. eadem ratione quotuplex est NF basis ipsius basis HF, totuplex est & solidum NY ipsius ED solidi: & si basis LF est æqualis basi NF, & solidum LY solido NY æquale erit; & si basis LF superat NF basim, & LY solidum NY superabit; & si minor, minus. quatuor igitur magnitudinibus existentibus, duabus scilicet basibus AF FH, & duobus solidis AY ED; sumpta sunt æque multiplicia, basis quidem AF, & AY solidi, videlicet basis LF, & solidum LY: basis vero HF, & ED solidi, nempe basis NF, & solidum NY. & demonstratum est si basis LF superat basim NF, & LY solidum solidum NY superare; & si æqualis æquale; & si minor minus. est igitur [d] ut AF basis ad basim FH, ita AY solidum ad solidum ED. Quare si solidum parallelepipedum plano secetur, oppositis planis parallelo; erit ut basis ad basim, ita solidum ad solidum. Quod oportebat demonstrare.

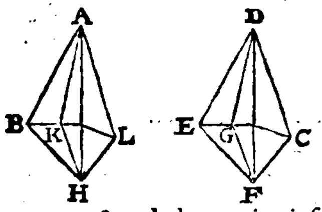
c 10. Diffin. hujus.

d 6. Diffin. quinti.

PROP. XXVI. PROBL.

Ad datam rectam lineam, & ad datum in ipsa punctum dato angulo solido æqualem solidum angulum constituere.

Sit data quidem recta linea AB, datum autem in ipsa punctum A, & datus solidus angulus ad D qui EDC EDF FDC angulis planis continetur. oportet ad datam rectam lineam AB, & ad datum in ipsa punctum A, dato angulo solido ad D æqualem solidum angulum constituere. Sumatur in linea DF quodvis punctum F, à quo ad planum per ED DC transiens ducatur [a] perpendicularis FG, & plano in puncto G occurrat; jungaturque DG, & ad rectam lineam AB, & ad datum in ipsa punctum A, angulo quidem EDC æqualis angulus [b] constituatur BAL; angulo autem EDG constituatur æqualis BAK. deinde ipsi DG ponatur æqualis AK, & à puncto K plano per BAL ad rectos angulos [c] erigatur KH; ponaturque ipsi GF æqualis KH, & HA jungatur. dico angulum solidum ad A qui angulis BAL BAH HAL continetur, æqualem esse solido angulo ad D, angulis EDC EDF FDC contento. sumantur

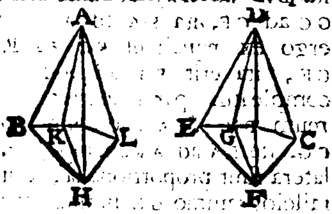


a 11. hujus.

b 23. primi.

c 12. hujus.

mantur enim æquales rectæ lineæ A B, D E, & jungantur H B K B, F E G E. quoniam igitur F G perpendicularis est ad subjectum planum, & ad omnes rectas lineas quæ ipsam con-
d 3. Diffin. tingunt, suntque in subjecto plano, rectos faciet d angulos, uterque igitur angulorum F G D, F G E rectus est. eadem ratione, & uterque ipsorum H K A, H K B est rectus. & quoniam duæ K A A B duabus G D D E æquales sunt altera alteri, & angulos æquales
e 4. primi. continent; erit e basis B K, basi E G æqualis. est autem & K H æqualis G F, atque angulos rectos continent. æqualis igitur & H B ipsi



F E. rursus quoniam duæ A K K H duabus D G G F æquales sunt, & rectos continent angulos; erit basis A H basi D F æqualis: estque A B æqualis D E. duæ igitur H A A B duabus F D D E sunt æquales; & basis H B est æqualis basi F E.
f 8. primi. ergo angulus f B A H angulo E D F æqualis erit. eadem ratione, & angulus H A L angulo F D C est æqualis, quandoquidem si assumamus æquales A L D C, & jungamus K L H L G C F C, quoniam totus B A L est æqualis toti E D C, quorum B A K ipsi E D G ponatur æqualis; erit reliquus K A L æqualis reliquo G D C. & quoniam duæ K A A L duabus G D D C æquales sunt, & angulos æquales continent; basis K L basi G C æqualis erit. est autem & K H æqualis G F. duæ igitur L K K H, duabus C G G F sunt æquales; anguloſque rectos continent: ergo basis H L æqualis est basi F C. rursus quoniam duæ H A A L, duabus F D D C æquales sunt, & basis H L æqualis basi F C; erit angulus H A L æqualis angulo F D C. atque est angulus B A L angulo E D C æqualis. Ad datam igitur rectam lineam, & ad datum in ipsa punctum, dato angulo solido æqualis angulus solidus constitutus est. Quod facere oportebat.

PROP. XXVII. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato solido parallelepipedo simile, & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

Sit recta quidem linea A B; datum vero solidum parallelepipedum C D. oportet ad datam rectam lineam A B dato solido parallelipipedo C D simile, & similiter positum solidum parallelepipedum describere. Constituatur ad rectam lineam A B,

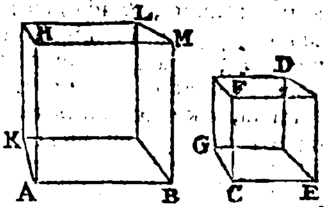
&

& ad datum in ipsa punctum A angulo solido ad C æqualis a angulus, qui angulis BAH HAK KAB contineatur, ita ut angulus quidem BAH æqualis sit angulo ECF, angulus vero BAK angulo ECG, & adhuc angulus HAK angulo GCF; & fiat b ut EC ad CG, ita BA ad AK, ut autem GC ad CF, ita KA ad AH. ergo ex æquali ut EC ad CF, ita erit BA ad AH. compleatur parallelogrammum BH, & AL solidum. quoniam igitur est ut EC ad CG, ita BA ad AK, nempe, circa æquales angulos ECG BAK latera sunt proportionalia; erit parallelogrammum KB parallelogrammo GE simile. eadem quoque ratione parallelogrammum KH simile est parallelogrammo GF, & parallelogrammum HB parallelogrammo FE. tria igitur parallelogramma solidi AL tribus parallelogrammis solidi CD similia sunt: sed tria tribus oppositis sunt c æqualia, & similia. ergo totum AL solidum toti solido CD simile erit. Ad datam igitur rectam lineam AB dato solido parallelepipedo CD simile, & similiter positum solidum parallelepipedum AL descriptum est. Quod facere oportebat.

a 26. hujus.

b 12. sexti.

c Cor. 24. hujus.



PROP. XXVIII. THEOR.

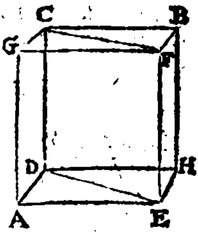
Si solidum parallelepipedum plano secetur per diagonales oppositorum planorum, ab ipso plano bifariam secabitur.

Solidum enim parallelepipedum AB plano CDEF secetur per diagonales oppositorum planorum, videlicet CF DB: dico solidum AB à plano CDEF bifariam secari.

Quoniam enim æquale a est CGF triangulum triangulo CBF, triangulum vero ADE triangulo DEH; est autem & CA parallelogrammum parallelogrammo BE æquale b, oppositum enim est; & parallelogrammum CE æquale parallelogrammo CH; erit prisma contentum duobus triangulis CGF ADE, & tribus parallelogrammis GE AC CE æquale prismati, quod continetur duobus triangulis CFB DEH, & tribus parallelogrammis CH BE CE; etenim æqualibus planis, & numero & magnitudine continentur. ergo totum AB solidum

a 34. primi.

b 24. hujus.

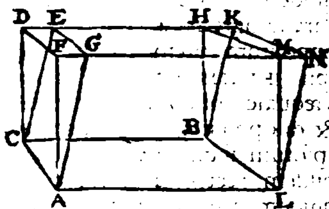


dum à plano CDEF bifariam secatur. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIX. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.

Sint enim in eadem basi AB solida parallelepipeda CM CN, eadem altitudine, quorum stantes AF AG LM LN CD CE BH BK sint in eisdem rectis lineis FN DK, dico solidum CM solido CN æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est utrumque ipsorum CH CK; erit CB, utrique ipsarum DH EK [a] æqualis, ergo & DH est æqualis EK. communis auferatur EH. reliqua igitur DE æqualis est reliquæ HK. quare & [b] DEC triangulum est æquale triangulo HKB. parallelogrammum autem DG est æquale parallelogrammo HN. eadem ratione & AFG triangulum æquale est triangulo LMN. est autem parallelogrammum CF parallelogrammo [c] BM, & parallelogrammum CG parallelogrammo BN æquale: opposita enim sunt. ergo & prisma contentum duobus triangulis AFG DEC, & tribus parallelogrammis AD DG GC est æquale prismati, quod duobus triangulis LMN HBK, & tribus parallelogrammis BM NH BN continetur. commune apponatur solidum, cujus basis quidem parallelogrammum AB, oppositum autem ipsi GEHM. ergo totum CM solidum parallelepipedum toti solido parallelepipedo CN est æquale. Solida igitur parallelepipeda quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.



a 34 primi.

b 8 primi.

c 24 hujus.

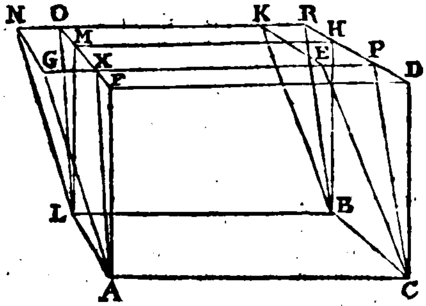
PROP. XXX. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.

Sint in eadem basi AB solida parallelepipeda CM CN & eadem altitudine, quorum stantes AF AG LM LN CD CE

BH

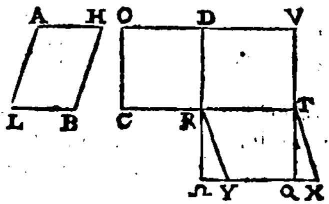
BH BN non sint in eisdem rectis lineis. dico solidum CM solido CN æquale esse. producantur enim NK DH, & GE FM, conveniantque inter se punctis R X; & adhuc producantur FM GE ad O P puncta: & AX LO CP BR jungantur. solidum CM, cujus basis quidem ACBL parallelogrammū, oppositum autem ipsi FDHM est * æquale solido CO, cujus basis parallelogrammum ACBL & ei oppositum XPRO, in eadem enim sunt basi ACBL, & ipsorum stantes AF AX LM LO CD CP BH BR sunt in eisdem rectis lineis FO DR. sed solidum CO, cujus basis quidem parallelogrammum ACBL, oppositum autem ipsi XPRO est * æquale solido CN, cujus basis ACBL parallelogrammum, & ipsi oppositum GEKN. etenim in eadem sunt basi ACBL, & eorum stantes AG AX CE CP LN LO BK BR sunt in eisdem rectis lineis GP NR. quare & CM solidum solido CN æquale erit. Solida igitur parrallelepipeda quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat. * 29 hujus.



PROP. XXXI. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ in æqualibus sunt basibus, & eadem altitudine, inter se sunt æqualia.

Sint in æqualibus basibus AB CD solida parallelepipeda AE CF, & eadem altitudine. dico solidum AE solido CF æquale esse. sint primo stantes HK BE AG LM OP DF CZ RS ad rectos angulos basibus AB CD: angulus autem ALB angulo CRD sit inæqualis, & producatur ipsi CR in directum RT: constituaturque ad rectam lineam RT, & ad punctum in ipsa R, angulo ALB æqualis * angulus TRY. & ponatur ipsi quidem AL æqualis * 23. primi

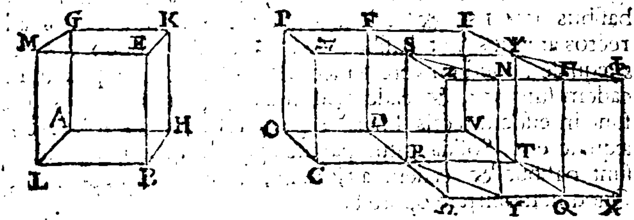


 RT,

R T, ipsi vero L B æqualis R Y, & ad punctum Y ipsi R T parallela ducatur Y X, compleaturque parallelogrammum R X, & Φ Y solidum. quoniam igitur duæ Y R R T duabus A L L B æquales sunt, & angulos continent æquales; erit parallelogrammum R X æquale & simile parallelogrammo H L: & quoniam rursus A L est æqualis R T, & L M ipsi R S, angulosque æquales continent, parallelogrammum R Ψ parallelogrammo A M æquale & simile erit. eadem ratione L E parallelogrammum ipsi S Y æquale est & simile. tria igitur parallelogramma solidi A E tribus parallelogrammis solidi Φ Y æqualia & similia sunt. sed & tria tribus opposita &

b 24 hujus. b æqualia sunt & similia. totum igitur A E solidum parallelepipedum toti solido parallelepipedo Φ Y est æquale. producantur D R X Y, conveniantque inter se in puncto Ω, & per T ipsi D Ω parallela ducatur T Q, & producantur T Q, O D, & conveniant in V, compleanturque solida Ω Ψ R I. solidum igitur Ψ Ω cujus basis est R Ψ parallelogrammum, oppositum

c 29. hujus. autem ipsi Ω Γ est c æquale solido Ψ Y, cujus basis est R Ψ parallelogrammum, & oppositum ipsi Y Φ, in eadem enim

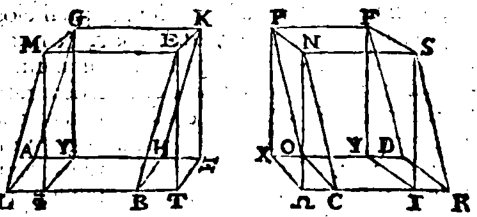


sunt basi R Ψ, & eadem altitudine, & eorum stantes R Ω R Y T Q T X S Z S N Ψ Γ Ψ Φ in eisdem sunt rectis lineis Ω X Z Φ. sed solidum Ψ Y æquale est solido A E. ergo & Ψ Ω solido A E est æquale. præterea quoniam parallelogrammum R Y X T est æquale parallelogrammo Ω T, etenim in eadem est basi R T, & in eisdem parallelis R T, Ω X, & parallelogrammum R Y X T parallelogrammo C D est æquale, quoniam & ipsi A B est æquale; parallelogrammum Ω T æquale est parallelogrammo C D: aliud autem est parallelogrammum D T. est igitur ut C D basis ad basim D T, ita Ω T ad ipsam D T. & quoniam solidum parallelepipedum C I secatur plano R F planis oppositis parallelo;

d 25 hujus. erit ut d C D basis ad basim D T, ita solidum C F ad R I solidum. eadem ratione quoniam solidum parallelepipedum Ω I secatur plano R Ψ oppositis planis parallelo, ut Ω T basis d ad basim D T, ita erit solidum Ω Ψ ad R I solidum. sed ut C D basis ad basim D T, ita basis Ω T ad ipsam T D. ut igitur solidum C F ad R I solidum, ita

solidum

solidum ΩΨ ad solidum R L quod cum utrumque solidorum C F ΩΨ ad solidum R I eandem habeat proportionem, solidum C F solido ΩΨ est æquale. solidum autem ΩΨ ostensum est æquale solido A E. ergo & *e* A E ipsi C F æquale erit. *e* 9. quinti.

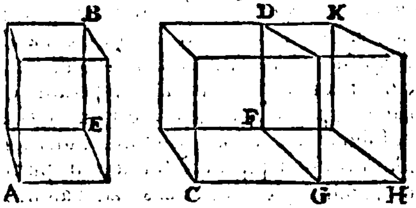


Sed non sint stantes A G H K B E L M C N O P D F R S ad rectos angulos ipsis A B C D basibus. dico rursus solidum A E æquale esse solido C F. ducantur *f* à punctis K E G M P F N S *f* 11. hujus. ad subjectum planum perpendiculares K Ξ E T G Y M Φ P X F Ψ N Ω S I, & plano in punctis Ξ T Y Φ X Ψ Ω I occurrant, & jungantur Ξ T Y Φ ΞY TΦ XΨ XΩ ΩI ΨI. æquale igitur est KΦ solidum solido P I; in æqualibus enim sunt basibus K M P S, & eadem altitudine, quorum stantes ad rectos angulos sunt basibus. sed KΦ solidum solido A E est *g* æquale; solidum vero P I æquale *g* solido C F. si quidem in *g* 30. hujus. eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis. ergo & solidum A E solido C F æquale erit. Solida igitur parallelepipeda quæ in æqualibus sunt basibus & eadem altitudine, inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXXII. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ eandem habent altitudinem inter se sunt ut bases.

Sint solida parallelepipeda A B C D, quæ eandem altitudinem habeant. dico inter se esse ut bases; hoc est ut A B basis ad basim C F ita solidum A B ad C D solidum. applicetur enim ad rectam lineam F G parallelogrammo A E æquale F H, & à basi F H eadem



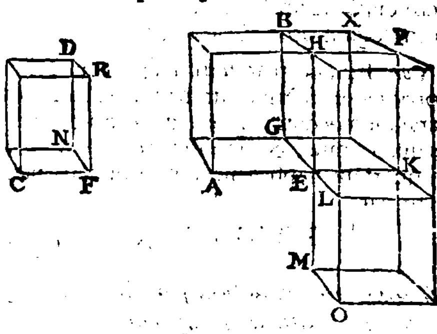
altitudine ipsi C D solidum parallelepipedum G K compleatur. solidum igitur A B solido G K est *a* æquale; in æqualibus *a* 31. hujus. enim

enim sunt basibus A E F H, & eadem altitudine. itaque quoniam solidum parellelepipedum C K plano D G secatur oppositis b 25. hujus. planis parellelo; erit ut b H F basis ad basim F C, ita solidum H D ad D C solidum; atque est basis quidem F H basi A E æqualis, solidum vero G K æquale solido A B: est igitur & ut A E basis ad basim C F, ita solidum A B ad solidum C D. Quare solida parallelepipeda quæ eandem habent altitudinem inter se sunt ut bases. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXXIII. THEOR.

Similia solida parallelepipeda inter se sunt in triplicata proportione homologorum laterum.

Sint similia solida parallelepipeda A B C D. latus autem A E homologum sit lateri C F. Dico solidum A B ad C D solidum triplicatam proportionem habere ejus, quam habet A E ad C F. producantur enim E K E L E M in directum ipsis A E G E H E: & ipsi quidem C F æqualis ponatur E K, ipsi vero F N æqualis E L; & adhuc ipsi F R æqualis E M, & K L parallelogrammum, & K O solidum compleatur. quoniam igitur duæ K E E L duabus C F F N æquales sunt; sed & angulus K E L angulo C F N est æqualis; quia & angulus A E G ipsi C F N ob similitudinem solidorum A B C D: erit & K L parallelogrammum simile & æquale parallelogrammo C N. eadem ratione, & parallelogrammum K M æquale est & simile parallelogrammo C R, & adhuc parallelogrammum O E ipsi D F parallelogrammo. tria igitur parallelogramma solidi K O tribus parallelogrammis C D solidi æqualia & similia sunt. sed tria tribus oppositis æqualia a sunt & similia: a 24 hujus. totum igitur K O solidum æquale est & simile toti solido C D. compleatur G K parallelogrammum; & à basibus quidem G K K L parallelogrammis, altitudine vero eadem ipsi A B, solida compleantur A X L P. & quoniam ob similitudinem solidorum A B C D est ut A E ad C F, ita E G ad F N; & E H ad F R; æqualis autem F C ipsi E K, & F N ipsi E L, &



F R

F R ipsi E M: erit ut A E ad E K, ita G E ad E L, & H E ad E M: sed ut A E quidem ad E K, [b] ita A G parallelogrammum ad parallelogrammum G K: ut autem G E ad E L, ita G K ad K L: & ut H E ad E M, ita P E ad K M. & ut igitur A G parallelogrammum ad parallelogrammum G K, ita G K ad K L, & P E ad K M. sed ut A G quidem ad G K, ita [c] A B solidum ad solidum E X: ut autem G K ad K L, ita solidum E X ad P L solidum: & ut P E ad K M, ita P L solidum ad solidum K O. & ut igitur solidum A B ad solidum E X, ita [d] E X ad P L, & P L ad K O. si autem quatuor sint magnitudines deinceps proportionales, prima ad quartam triplicatam proportionem [e] habet ejus, quam ad secundam. ergo & A B solidum ad solidum K O triplicatam habet proportionem ejus, quam A B ad E X. sed ut A B ad E X, ita A G parallelogrammum ad parallelogrammum G K; & A E recta linea ad ipsam E K. quare & A B solidum ad solidum K O triplicatam proportionem habebit ejus, quam A E habet ad E K. æquale autem est solidum K O solido C D, & recta linea E K rectæ C F est æqualis. ergo & A B solidum ad solidum C D triplicatam habet proportionem ejus, quam latus ipsius homologum A E habet ad C F homologum latus. Quod demonstrare oportebat.

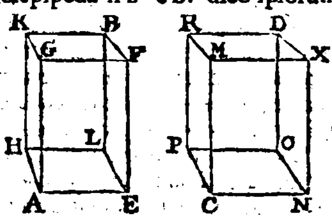
[b] 1. sexti.
[c] 32. hujus.
[d] 11. quinti.
[e] 11. Diffin. quinti.

Cor. Ex hoc manifestum est, si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad quartam, ita esse solidum parallelepipedum quod fit à prima ad solidum quod à secunda simile, & similiter descriptum; quoniam & prima ad quartam triplicatam proportionem habet ejus, quam ad secundam.

PROP. XXXIV. THEOR.

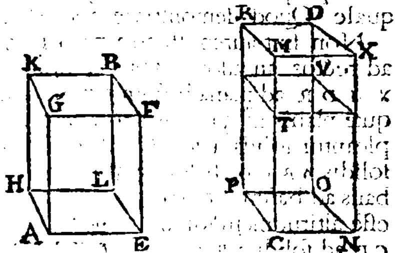
Æqualium solidorum parallelepipedorum reciprocantur bases & altitudines, & quorum solidorum parallelepipedorum reciprocantur bases & altitudines, ea inter se sunt æqualia.

Sint æqualia solida parallelepipeda A B C D. dico ipsorum bases & altitudines reciprocari, hoc est ut E H basis ad basim N P, ita esse altitudinem solidi C D ad solidi A B altitudinem. Sint enim primo stantes A G E F L B H K C M N X O D P R ad rectos angulos basibus ipsorum.



dico ut E H basis ad basim N P, ita esse C M ad A G. si igitur basis

basis E H basi N P sit æqualis, est autem & A B solidum æquale solido C D; erit & C M æqualis ipsi A G. si enim basibus E H N P æqualibus existentibus non sint A G C M altitudines æquales, neque A B solidum solido C D æquale erit. ponitur autem æquale. non igitur inæqualis est altitudo C M altitudini A G. ergo æqualis sit necesse est; ac propterea ut E H basis ad basim N P, ita erit C M ad A G. At vero non sit basis E H æqualis basi N P. sed E H sit major. est autem & A B solidum solido C D æquale. ergo major est C M ipsa A G; alioqui rursus sequeretur solida A B C D æqualia non esse, quæ ponuntur æqualia, itaque ponatur C T æqualis ipsi A G: & à basi quidem N P, altitudine autem C T solidum parallelepipedum V C compleatur. quoniam igitur solidum A B solido C D est æquale, aliud autem aliquod est V C, & æqualia *a* ad idem eandem habent proportionem; erit ut A B solidum ad solidum C V, ita C D solidum ad solidum C V. sed ut A B solidum ad solidum C V, ita *b* basis E H ad N P basim, æque alta enim sunt A B C V solida, ut autem solidum C D ad ipsum C V, ita *c* M P basis ad basim P T, & M C ad C T. & igitur ut basis E H ad N P basim, ita M C ad C T. est autem C T æqualis A G. ergo & ut E H basis ad basim N P, ita M C ad A G. quare solidorum parallelepipedorum A B C D bases & altitudines reciprocantur. Rursus solidorum parallelepipedorum A B C D bases & altitudines reciprocentur: sitque ut E H basis ad basim N P, ita solidi C D altitudo ad altitudinem solidi A B. Dico solidum A B solido C D æquale esse. sint enim rursus stantes ad rectos angulos basibus. & si quidem basis E H sit æqualis basi N P, estque ut E H basis ad basim N P, ita altitudo solidi C D ad solidi A B altitudinem: erit solidi C D altitudo altitudini solidi A B æqualis. solida autem parallelepipeda, quæ sunt in æqualibus basibus & eadem altitudine inter se *d* æqualia sunt. ergo solidum A B solido C D est æquale. sed non sit E H basis æqualis basi N P, & sit E H major. major igitur est & solidi C D altitudo altitudine solidi A B, hoc est C M ipsa A G, ponatur ipsi A G æqualis rursus C T, & similiter solidum C V compleatur. itaque quoniam est ut E H basis ad basim N P, ita M C ad ipsam A G; æqualis autem est A G ipsi C T: erit ut basis E H ad N P basim, ita M C ad C T. sed ut basis E H ad



a 7. quinti.

b 32. hujus.

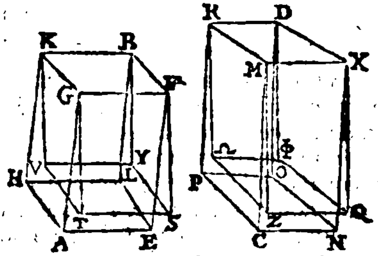
c 25. hujus.

d 30. hujus.

N P

NP basim; ita AB solidum ad solidum VC; æque alta enim sunt solida AB CV. ut autem MC ad CT, ita & MP basis ad basim PT, & solidum CD ad CV solidum. & igitur ut solidum AB ad solidum CV, ita CD solidum ad solidum CV. quod cum utrumque solidorum AB CD ad ipsum CV eandem proportionem habeat; erit AB solidum solido CD æquale. Quod demonstrare oportebat.

Non sint autem stantes FE BL GA KH XN DO MC RP ad rectos angulos basibus ipsorum: & à punctis F G B K X M D R ad plana basium EH NP ducantur perpendiculares, quæ planis in punctis S T Y V Q Z Ω Φ occurrant & compleantur solida FV XΩ. dico & sic æqualibus existentibus solidis AB CD, bases & altitudines reciprocari, scil. ut EH basis ad basim NP, ita esse altitudinem solidi CD ad solidi AB altitudinem. quoniam enim solidum AB solido CD est æquale; solido autem AB æquale est solidum BT; in eadem namque sunt basi FK, & eadem altitudine; quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis: & solidum DC est [e] æquale solido DZ, quod in eadem sint basi XR, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis; erit & solidum BT solido DZ æquale. æqualium autem solidorum parallelepipedorum, quorum altitudines basibus ipsorum sunt ad rectos angulos, bases [f] & altitudines reciprocantur. est igitur ut FK basis ad basim XR, ita solidi DZ altitudo ad altitudinem solidi BT. atque est basis quidem FK basi EH æqualis, basis vero XR æqualis basi NP. quare ut EH basis ad basim NP, ita est altitudo solidi DZ ad solidi BT altitudinem. eædem autem sunt altitudines solidorum DZ DC, itemque solidorum BT BA. est igitur ut EH basis ad basim NP, ita solidi DC altitudo ad altitudinem solidi AB. ergo solidorum parallelepipedorum AB CD bases & altitudines reciprocantur. Rursus solidorum parallelepipedorum AB CD bases & altitudines reciprocentur, sitque ut EH basis ad basim NP, ita altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem. dico solidum AB solido CD æquale esse. iisdem namque constructis, quoniam ut EH basis ad basim NP, ita solidi CD altitudo ad altitudinem solidi AB; & basis quidem EH est æqualis basi FK; NP vero ipsi XR: erit ut FK basis ad basim XR, ita



e 30. hujus.

f Ex ante demonstratis.

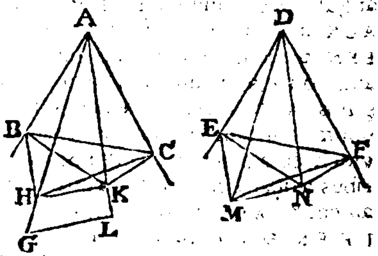
altitudo

altitudo solidi C D ad solidi A B altitudinem. eædem autem sunt altitudines solidorum A B B T, & ipsorum C D D Z. est igitur ut F K basis ad basim X R, ita solidi D Z altitudo ad altitudinem solidi B T. quare solidorum B T D Z parallelepipedorum bases & altitudines reciprocantur; quorum autem solidorum parallelepipedorum altitudines sunt ad rectos angulos basibus ipsorum, & bases & altitudines reciprocantur, ea inter se sunt æqualia. ergo B T solidum solido D Z est æquale. sed solidum quidem B T æquale est solido B A, etenim in eadem sunt basi F K, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis: solidum vero D Z est æquale solido D C, si quidem in eadem sunt basi X R, & eadem altitudine, & non in eisdem rectis lineis. ergo & solidum A B solido C D est æquale. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXXV. THEOR.

Si sint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum rectis lineis à principio positis angulos contineant æquales, alterum alteri; in sublimibus autem sumantur quævis puncta, atque ab ipsis ad plana in quibus sunt anguli perpendiculares ducantur; & à punctis, quæ à perpendicularibus fiunt in planis ad primos angulos jungantur rectæ lineæ: cum sublimibus æquales angulos continebunt.

Sint duo anguli rectilinei æquales B A C E D F: & à punctis A D sublimes rectæ lineæ A G D M constituantur, quæ cum rectis lineis à principio positis æquales angulos contineant, alterum alteri: angulum quidem M D E æqualem angulo G A B, angulum vero MDF angulo GAC æqualem: & sumantur in ipsis A G D M quævis puncta G M, à quibus ad plana per B A C E D F ducantur perpendiculares G L M N, occurrentes planis in punctis L N; & L A N D jungantur. dico angulum G A L angulo M D N æqualem esse. ponatur ipsi D M æqualis A H, & per H ipsi G L parallela ducatur H K. est autem G L perpendicularis ad planum



per

per BAC. ergo & HK ad [a] planum per BAC perpendicularis erit. ducantur a punctis K N ad rectas lineas AB AC DF DE perpendiculares KC NF KB NE, & HC CB MF FE jungantur. quoniam igitur quadratum ex HA æquale [b] est quadratis ex HK KA; quadrato autem ex KA æqualia [b] sunt ex KC CA quadrata; erit quadratum ex HA quadratis ex HK KC CA æquale. quadratis autem ex HK KC æquale est quadratum ex HC. quadratum igitur ex HA quadratis ex HC CA æquale erit: & idcirco angulus HCA [c] est rectus. eadem ratione & angulus DFM rectus est. ergo angulus ACH ipsi DFM est æqualis. est autem & HAC angulus æqualis angulo MDF. duo igitur triangula sunt MDF HAC duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulorum subtenditur; videlicet HA ipsi DM. ergo & reliqua latera reliquis lateribus [d] æqualia habebunt, alterum alteri. quare AC est æqualis DF. similiter demonstrabimus & AB ipsi DE æquale esse. jungantur HB ME. & quoniam quadratum ex AH est æquale quadratis ex AK KH; quadrato autem ex AK æqualia sunt quadrata ex AB BK: erunt quadrata ex AB BK KH quadrato ex AH æqualia. sed quadratis ex BK KH æquale est ex BH quadratum; rectus enim angulus est HKB, propterea quòd & HK perpendicularis est ad subjectum planum. quadratum [c] igitur ex AH æquale est quadratis ex AB BH. quare angulus ABH rectus est. eadem ratione & angulus DEM est rectus. est autem & BAH angulus æqualis angulo EDM, ita enim ponitur: atque est AH æqualis DM. ergo & AB ipsi DE [d] est æqualis. quoniam igitur AC quidem est æqualis DF, AB vero ipsi DE; erunt duæ CA AB duabus FD DE æquales. sed & angulus BAC angulo FDE est æqualis. basis [e] igitur BC basi EF, & triangulum triangulo, & reliqui anguli reliquis æquales sunt. ergo angulus ACB angulo DFE est æqualis. est autem & rectus ACK æqualis recto DFN. quare & reliquus BCK reliquo EFN æqualis. eadem ratione, & CBK angulus est æqualis angulo FEN. itaque duo triangula sunt BCK EFN, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, quod est ad æquales angulos, videlicet BC ipsi EF. ergo & [d] reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt. æqualis igitur est CK ipsi FN. est autem & AC ipsi DF æqualis. quare duæ AC CK duabus DF FN æquales sunt, & rectos continent angulos. basis igitur AK est æqualis basi DN. & cum AH sit æqualis DM, erit & quod fit ex AH quadratum quadrato ex DM æquale. sed quadrato ex AH æqualia sunt ex AK KH quadrata; etenim

[a] 8. hujus.
[b] 47. primi.
[c] 48. primi.
[d] 26. primi.
[e] 4. primi.

nim rectus est angulus AKH. quadrato autem ex DM æqualia sunt quadrata ex DN NM, quòd angulus DNM rectus sit: quadrata igitur ex AK KH quadratis ex DN NM sunt æqualia; quorum quadratum ex AK æquale est quadrato ex DN. ergo reliquum ex KH quadratum reliquo quadrato ex NM est æquale. & ideo recta linea HK ipsi MN æqualis. quod cum duæ HA AK duabus MD DN æquales sint, altera alteri, & basis HK basi NM ostensa sit æqualis; angulus HAK

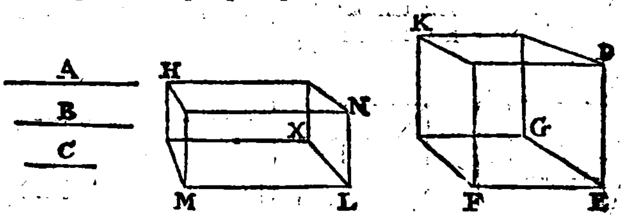
ƒ 8. primi. angulo MDN æqualis ƒ erit. Quod oportebat demonstrare.

Cor. Ex hoc manifestum est, si sint duo anguli plani rectilinei æquales, ab ipsis autem constituantur sublimes rectæ lineæ æquales, quæ cum rectis lineis à principio positis æquales contineant angulos, alterum alteri, perpendiculares, quæ ab ipsis ad plana in quibus sunt primi anguli ducantur, inter se æquales esse.

PROP. XXXVI. THEOR.

Si tres rectæ lineæ proportionales sint, solidum parallelepipedum quod à tribus fit æquale est solido parallelepipedo quod fit à media, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto.

Sint tres rectæ lineæ proportionales A B C, sit scil. ut A ad B ita B ad C. dico solidum quod fit ex ipsis A B C, æquale esse solido quod fit ex B, æquilatero quidem, æquiangulo autem antedicto. Exponatur solidus angulus ad E contentus tribus angulis planis DEG GEF FED; & ipsi quidem B ponatur æqualis unaquæque ipsarum DE GE EF, & solidum



parallelepipedum EK compleatur: ipsi vero A ponatur æqualis LM; & ad rectam lineam LM, & ad punctum in

a 26. hujus. ipsa L constituatur a angulo solido ad E æqualis angulus contentus NLX XLM MLN, & ponatur ipsi quidem B æqualis LN, ipsi vero C æqualis LX. quoniam igitur est ut A ad B ita B ad C, æqualis autem est A ipsi LM, & B unicuique ipsarum LN EF EG ED, & C ipsi LX; erit ut LM ad EF

ita

ita G E ad L X: & circum æquales angulos M L X G E F, latera sunt reciproca. ergo M X parallelogrammum parallelogrammo G F est [b] æquale. & quoniam duo anguli plani rectilinei æquales sunt G E F X L M, & in ipsis sublimes rectæ lineæ constituuntur L N E D æquales inter se, & cum rectis lineis à principio positis æquales continentes angulos, alterum alteri; erunt [c] perpendiculares quæ à punctis N D ad plana per X L M G E F ducuntur, inter se æquales. ergo solida L H E K eadem sunt altitudine. quæ verò in æqualibus basibus sunt solida parallelepipeda, & eadem altitudine, inter se [d] sunt æqualia. ergo solidum H L æquale est solido E K: atque est solidum quidem H L quod fit à tribus A B C, solidum vero E K quod fit ex B. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales sint, solidum parallelepipedum quod fit à tribus, æquale est solido parallelepipedo quod fit, &c. Quod demonstrare oportebat.

[b] 14 sexti.

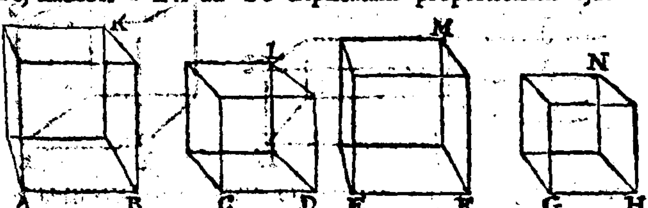
[c] Cor. 35. hujus.

[d] 31. hujus.

PROP. XXXVII. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales sint, & quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia, & similiter descripta proportionalia erunt. Et si quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia, & similiter descripta proportionalia sint; & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales A B C D E F G H, sit scil. ut A B ad C D, ita E F ad G H, & describantur ab ipsis A B C D E F G H similia, & similiter posita solida parallelepipeda K A L C M E N G. dico ut K A ad L C, ita esse M E ad N G. Quoniam enim solidum parallelepipedum K A simile est ipsi L C, habebit [a] K A ad L C triplicatam proportionem ejus



quam A B habet ad C D. eadem ratione & solidum M E ad ipsum N G [a] triplicatam proportionem habebit ejus quam habet E F ad G H: atque est ut A B ad C D, ita E F ad G H. ut igitur A K ad L C, ita M E ad N G. Sed sit ut solidum A K ad solidum L C, ita M E solidum ad solidum N G. dico ut

[a] 33. hujus.

 recta

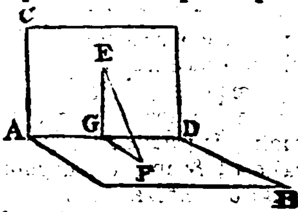
recta linea AB ad rectam CD, ita esse rectam EF ad ipsam GH. quoniam enim rursus AK ad LC triplicatam [a] proportionem habet ejus quam AB habet ad CD; habet autem, & ME ad NG triplicatam proportionem ejus quam EF ad GH; atque ut AK ad LC, ita ME ad NG: erit ut AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales sint, &c. Quod oportebat demonstrare.

[a] 33 hujus.

PROP. XXXVIII. THEOR.

Si planum ad planum rectum sit; & ab aliquo puncto eorum quæ sunt in uno plano, ad alterum planum perpendicularis ducatur, ea in communem planorum sectionem cadet.

Planum nempe CD ad planum AB rectum sit, communis autem eorum sectio sit AD, & in ipso CD plano, quodvis punctum E sumatur. dico perpendicularem quæ à puncto E ad planum AB ducitur, cadere in ipsam AD. Non enim; sed si fieri potest, cadat extra, ut EF; & plano AB in puncto F occurrat: à puncto autem F ad DA in plano AB perpendicularis ducatur FG, quæ quidem & plano CD ad [a] rectos angulos erit; & EG jungatur. quoniam igitur FG plano CD est ad rectos angulos; contingit autem ipsam recta linea EG quæ est in eodem CD plano: erit angulus FGE [a] rectus. sed & EF plano AB ad rectos angulos est; rectus igitur est angulus EFG. quare trianguli EFG duo anguli duobus rectis sunt æquales; quod est [b] absurdum. non igitur à puncto E ad AB planum perpendicularis ducta extra rectam lineam DA cadet. ergo in ipsam cadat necesse est. Si igitur planum ad planum rectum sit, &c. Quod oportebat demonstrare.



[a] 4. Diffin. hujus.
[a] 3. Diffin. hujus.
[b] 17. primi.

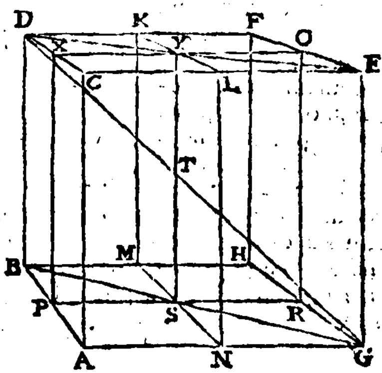
PROP. XXXIX. THEOR.

Si in solido parallelepipedo oppositorum planorum latera secentur bifariam, per sectiones vero plana ducantur, communis planorum sectio, & solidi parallelepipedi diameter, sese bifariam secabunt.

In solido enim parallelepipedo AF, oppositorum planorum CF AH latera bifariam secentur in punctis K L M N X O P R.

&c

& per sectiones plana ducantur KN XR; communis autem planorum sectio sit YS, & solidi parallelepipedi diameter sit DG. dico YS DG sese bifariam secare, hoc est YT quidem ipsi TS, DT vero ipsi TG æqualem esse. Jungantur enim DY YE BS SG. quoniam igitur DX parallela est ipsi OE, alterni anguli DXY YOE inter se æquales [a] sunt. & quoniam DX quidem est æqualis OE, XY vero ipsi YO, & angulos æquales continent; erit [b] basis DY æqualis basi YE. & triangulum DXY triangulo YOE, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, angulus igitur XYD est æqualis angulo OYE, & ob id [c] recta linea est DYE. eadem ratione, & BSG recta est, atque est BS æqualis SG. & quoniam CA ipsi DB æqualis est & parallela, & CA est æqualis, & parallela ipsi EG; erit & DB ipsi EG æqualis & parallela; & ipsas conjungunt rectæ lineæ DE GB; parallela igitur [d] est DE ipsi BG, & sumpta sunt in utraque ipsarum quævis puncta DY G S, & junctæ sunt DG YS. ergo DG YS in uno [e] sunt plano. quod cum DE sit parallela BG, erit & EDT angulus angulo BGT æqualis [a], alterni enim sunt. est autem & DTY angulus æqualis [f] ipsi GTS. duo igitur sunt triangula DTY GTS duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulorum subtenditur, videlicet DY ipsi GS: dimidia enim sunt ipsorum DE BG, ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt. quare DT quidem est æqualis TG, YT vero ipsi TS. Si igitur in solido parallelepipedo, &c. Quod oportebat demonstrare.



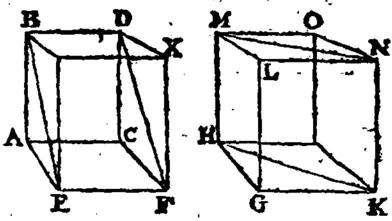
[a] 29. primi.
[b] 4 primi.
[c] 14. primi.
[d] 33. primi.
[e] 7. hujus.
[f] 15. primi.

PROP. XL. THEOR.

Si sint duo prismata æque alta, quorum unum quidem basim habeat parallelogrammum, alterum vero triangulum, & parallelogrammum duplum sit trianguli; ea inter se æqualia erunt.

Sint prismata æque alta ABCDEF GHKLMN & unum quidem basim habeat parallelogrammum AF, alterum vero

GHK triangulum, & duplum sit AF parallelogrammum trianguli GHK. dico prisma ABCDEF prismati GHKLMN æquale esse. Compleantur enim AX GO solida. & quoniam parallelogrammum AF trianguli GHK est duplum; est autem & HK parallelogrammum duplum [a] trianguli GHK; erit AF parallelogrammum parallelogrammo HK æquale. quæ vero in æqualibus sunt basibus solida parallelepipeda, & eadem altitudine inter se æqualia [b] sunt. æquale igitur AX solidum solido GO. atque est solidi quidem AX dimidium [c] ABCDEF prisma, solidi vero GO dimidium [c] est prisma GHKLMN. ergo ABCDEF prisma prismati GHKLMN est æquale. Si igitur sint duo prismata æque alta, &c. Quod demonstrare oportebat.



[a] 41 primi.
[b] 31. hujus.
[c] 28. hujus.

EUCLIDIS

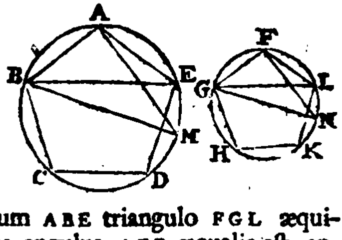
EUCLIDIS ELEMENTORUM.

LIBER DUODECIMUS.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Similia polygona circulis inscripta inter se sunt ut diametrorum quadrata.

Sint circuli ABCDE FGHKL, & in ipsis similia polygona ABCDE FGHKL; diametri autem circulorum sint BM GN. dico ut quadratum ex BM ad quadratum ex GN, ita esse ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL. jungantur enim BE AM GL FN. & quoniam polygonum ABCDE simile est polygono FGHKL; & BAE angulus angulo GFL est æqualis: atque est ut BA ad AE, ita GF ad FL. duo igitur triangula sunt BAE GFL unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum BAE angulo GFL, circa æquales autem angulos latera proportionalia, quare triangulum ABE triangulo FGL æquiangulum a est; ac propterea angulus AEB æqualis est angulo FLG. sed angulus quidem AEB angulo AMB est b æqualis; in eadem enim circumferentia consistunt. angulus autem KLG æqualis b est angulo FNG. ergo & AMB angulus est æqualis angulo FNG. est autem & rectus c angulus BAM æqualis recto GFN. quare & reliquus reliquo æqualis. æquiangulum igitur est triangulum AMB triangulo FGN. ergo d ut BM ad GN ita BA ad GF. sed proportionis quidem BM ad GN duplicata est proportio quadrati ex BM ad quadratum



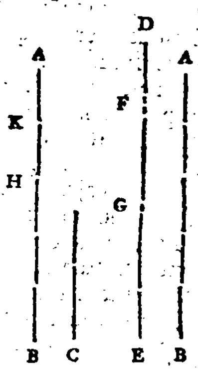
a 6 sexti.
b 21. tertii.
c 31. tertii.
d 4. sexti.

a 20 sexti quadratum ex G N; proportionis vero B A ad G F duplicata a est proportio A B C D E polygoni ad polygonum F G H K L: & ut igitur quadratum ex B M ad quadratum ex G N, ita polygonum A B C D E ad F G H K L polygonum. Quare similia polygona quæ in circulis describuntur, inter se sunt ut diametrorum quadrata. Quod demonstrare oportebat.

LEMMA.

Duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si à majori auferatur majus quàm dimidium, & ab eo quod reliquum est, rursus auferatur majus quàm dimidium; & hoc semper fiat: relinquetur tandem quædam magnitudo quæ minori magnitudine exposita minor erit.

Sint duæ magnitudines inæquales A B C, quarum major A B. dico si ab ipsa A B auferatur majus quàm dimidium, & ab eo quod reliquum est, rursus auferatur majus quàm dimidium, atque hoc semper fiat, relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ magnitudine C minor erit. etenim C multiplicata, fiet aliquando major magnitudine A B. multiplicetur, & sit D E ipsius quidem C multiplex, major autem quam A B, dividaturque D E in partes ipsi C æquales D F F G G E. & ab ipsa A B auferatur majus quam dimidium B H: ab ipsa vero A H rursus majus quam dimidium auferatur H K, atque hoc semper fiat, quoad divisiones, quæ sunt in A B, multitudine æquales fiant divisionibus, quæ in D E: sint igitur



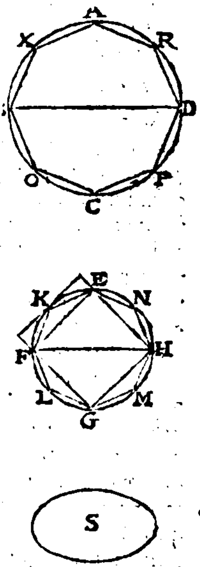
divisiones A K K H H B, divisionibus D F F G G E multitudine æquales. & quoniam major est D E quàm A B; & ablatum est ab ipsa quidem D E minus quam dimidium E G; ab ipsa vero A B majus quam dimidium B H; erit reliquum G D reliquo H A majus. rursus quoniam major est G D, quam H A, & ablatum est ab ipsa quidem G D dimidium G F; ab ipsa vero H A majus quam dimidium H K; reliquum F D reliquo A K majus erit. estque F D æqualis ipsi C. ergo C quam A K est major. minor igitur est A K quam C. ergo ex magnitudine A B relicta est magnitudo A K, exposita minori magnitudine

tudine q minor. Quod demonstrare oportebat. Similiter autem demonstrabitur etiam si dimidia ablata fuerint. *Est prima decimi.*

PROP. II. THEOR.

Circuli inter se sunt ut diametrorum quadrata.

Sint circuli ABCD EFGH, diametri autem ipsorum sint BD FH. dico ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita esse circulum ABCD ad EFGH circulum. Si enim non ita sit; erit ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulus ABCD vel ad spatium aliquod minus circulo EFGH, vel ad majus. sit primum ad minus quod sit S: & in circulo EFGH describatur quadratum EFGH. itaque descriptum in circulo quadratum majus est dimidio circuli EFGH; quoniam si per puncta E F G H contingentes circulum ducamus, erit descripti circa circulum quadrati dimidium EFGH. descripto autem circa circulum quadrato minor est circulus. ergo quadratum EFGH majus est dimidio circuli EFGH. secentur bifariam circumferentiæ EF FG GH HE in punctis K L M N: & EK KF FL LG GM MH HN NE jungantur. unum quodque igitur triangulorum EKF FLG GMH HNE majus est dimidio segmenti circuli in quo consistit, quoniam si per puncta K L M N contingentes circulum ducamus, & parallelogramma, quæ sunt in rectas lineas EF FG GH HE compleamus; erit a unumquodque triangulorum EKF FLG GMH HNE dimidium parallelogrammi, quod ad ipsum est: a 41. primi.



sed segmentum minus est parallelogrammo. quare unumquodque triangulorum EKF FLG GMH HNE majus est dimidio segmenti circuli, in quo consistit. reliquas igitur circumferentias bifariam secantes, & jungentes rectas lineas, atque hoc semper facientes, relinquemus tandem quædam circuli segmenta, quæ minora erunt excessu, quo circulus EFGH ipsum S spatium superat. etenim ostensum est in præcedenti Lemmate, duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si à majori auferatur majus quàm dimidium, & ab eo quod relinquitur, rursus majus quàm dimi-

 dium,

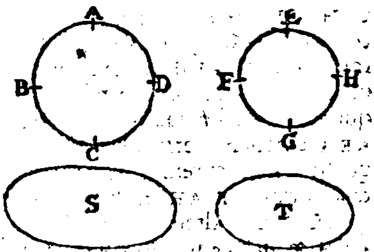
dium, & hoc semper fiat; relinqui tandem magnitudinem aliquam, quæ minori magnitudine exposita sit minor. itaque relicta sint segmenta circuli EFGH in rectas lineas EK KF FL LG GM MH HN NE, quæ minora sint excessu, quo circulus EFGH ipsum S spatium superat. ergo reliquum EKFLGMHN polygonum majus erit spatio S. Describatur etiam in circulo ABCD, polygono EKFLGMHN simile polygonum AXBOCPDR. est igitur ut quadratum ex BD

b 1. hujus. ad quadratum ex FH, b ita polygonum AXBOCPDR ad EKFLGMHN polygonum. sed & ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita ABCD circulus ad spatium S. ergo &

c 11 quinti. c ut circulus ABCD ad spatium S, ita polygonum AXBOCPDR ad EKFLGMHN polygonum; major autem est circulus ABCD eo quod in ipso est polygono. quare & spa-

d Ex hypothesi. tium S majus est d polygono EKFLGMHN. sed & e minus,

e 14 quinti. quod fieri non potest. Non igitur est ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita ABCD circulus ad spatium aliquod minus circulo EFGH. Similiter ostendemus neque esse ut quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita circulum EFGH ad aliquod spatium minus circulo



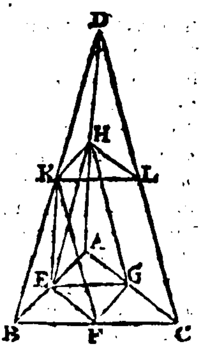
ABCD. dico igitur neque esse ut quadratum ex BD ad quadratum FH, ita circulum ABCD ad aliquod spatium majus circulo EFGH, si enim fieri potest, sit ad majus spatium S. erit igitur invertendo ut quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita spatium S ad ABCD circulum; sed quoniam S majus est EFGH circulo; erit ut spatium S ad ABCD circulum, ita circulus EFGH ad aliquod spatium minus circulo ABCD. ergo & ut quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita EFGH circulus ad aliquod spatium minus circulo ABCD, quod fieri non posse ostensum est. non igitur ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita est circulus ABCD ad spatium aliquod majus EFGH circulo. ostensum autem est neque ad minus. quare ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita erit ABCD circulus ad circulum EFGH. Circuli igitur inter se sunt ut diametrorum quadrata. Quod ostendere oportebat.

PROP.

PROP. III. THEOR.

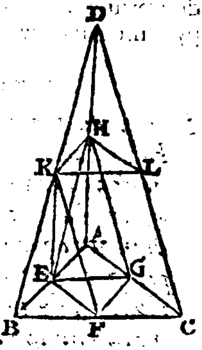
Omnis pyramis triangularem habens basim dividitur in duas pyramides, æquales & similes inter se, quæ triangulares bases habent, similesque toti, & in duo prismata æqualia, quæ quidem prismata dimidio totius pyramidis sunt majora.

Sit pyramis, cujus basis quidem A B C triangulum; vertex autem punctum D. dico pyramidem A B C D dividi in duas pyramides æquales & similes inter se, triangulares bases habentes, & similes toti, & in duo prismata æqualia; & duo prismata dimidio totius pyramidis esse majora. secentur enim A B B C C A A D D B D C bifariam in punctis E F G H K L, & E H E G G H H K K L L H E K K F F G jungantur. quoniam igitur A E quidem est æqualis E B, A H vero ipsi H D; erit [a] E H ipsi D B parallela. eadem ratione & H K est parallela ipsi A B. parallelogrammum igitur est H E B K. quare H K est [b] æqualis E B. sed E B ipsi A E est æqualis, ergo & A E ipsi H K æqualis erit; est autem & A H æqualis H D. duæ igitur A E A H duabus K H H D æquales sunt, altera alteri, & angulus E A H æqualis [c] angulo K H D; basis igitur [d] E H basi K D est æqualis; quare triangulum A E H æquale est & simile triangulo H K D. eadem ratione & triangulum A H G triangulo H L D æquale est & simile. & quoniam duæ rectæ lineæ sese tangentes E H H G duabus rectis lineis sese tangentibus K D D L parallelæ sunt, non autem in eodem plano, æquales angulos [e] continebunt. ergo angulus E H G est æqualis angulo K D L. rursus quoniam duæ rectæ lineæ E H H G duabus K D D L æquales sunt, altera alteri, & angulus E H G est æqualis angulo K D L; erit [d] basis E G basi K L æqualis; æquale igitur est & simile triangulum E H G triangulo K D L. eadem ratione & A E G triangulum est æquale & simile triangulo H K L. quare pyramis cujus basis quidem est A E G triangulum, vertex autem punctum H, æqualis & similis est pyramidi cujus basis est triangulum H K L, & vertex D punctum. & quoniam uni laterum trianguli A D B, videlicet ipsi A B, parallela ducta est H K; erit triangulum A D B triangulo D K H æquiangulum,



[a] 2. sexti.
[b] 34. primi.
[c] 29. primi.
[d] 4. primi.
[e] 10. undecimi.

angulum, & latera habent proportionalia. simile igitur est ADB triangulum triangulo DHK: & eadem ratione, triangulum quidem DBC simile est triangulo DKL; triangulum vero ADC triangulo DHL. & cum duæ rectæ lineæ, sese tangentes BA AC duabus rectis lineis sese tangentibus KH HL parallelæ sint, non existentes in eodem plano, hæ æquales angulos e continebunt. angulus igitur BAC angulo KHL est æqualis: atque est ut BA ad AC, ita KH ad HL. ergo ABC triangulum simile est triangulo HKL; ideoque pyramis, cujus basis quidem triangulum ABC, vertex autem punctum D, similis est pyramidi, cujus basis triangulum HKL, & vertex punctum D. sed pyramis cujus basis quidem HKL triangulum, vertex autem punctum D, ostensa est similis pyramidi, cujus basis triangulum AEG, & vertex H punctum. quare & pyramis cujus basis triangulum ABC & vertex punctum D, similis est pyramidi cujus basis AEG triangulum, & vertex punctum H. utraque igitur ipsarum AEGH HKLD pyramidum similis est toti pyramidi ABCD. & quoniam BF est æqualis FC, erit EBFG parallelogrammum duplum trianguli GFC: & quoniam duo prismata æque alta sunt, quorum unum quidem basim habet parallelogrammum,



alterum vero triangulum, estque parallelogrammum duplum trianguli; erunt ea prismata inter se æqualia f. ergo prisma contentum duobus triangulis BKF EHG, & tribus parallelogrammis EBFG EBKH KHGF, est æquale prismati quod duobus triangulis GFC HKL, & tribus parallelogrammis KFCL LCGH HKFG continetur. & manifestum est utrumque ipsorum prismatum, & cujus basis est EBGF parallelogrammum, opposita autem ipsi HK recta linea, & cujus basis est GFC triangulum, & oppositum ipsi triangulum KLH, majus esse utraque pyramidum quarum bases quidem AEG HKL triangula, vertices autem puncta H D; quoniam si jungamus EF EH rectas lineas, prisma quidem, cujus basis est EBFG parallelogrammum, & opposita ipsi recta linea HK, majus est pyramide cujus basis EBF triangulum, vertex autem punctum K; sed pyramis, cujus basis triangulum EBF, & vertex K punctum, est f æqualis pyramidi cujus basis AEG triangulum, & vertex punctum H; æqualibus enim & similibus planis continentur. quare & prisma cujus basis parallelogrammum EBFG, opposita autem ipsi

e 10. undecimi.

f 40. undecimi.

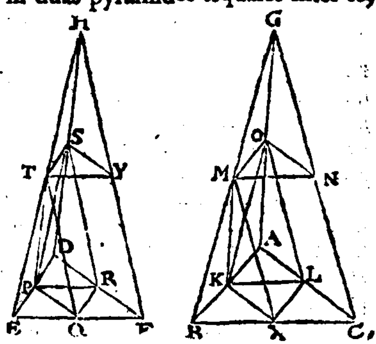
f 10. diffin. undecimi.

ipsi recta linea HK, majus est pyramide cujus basis AEG triangulum, & vertex punctum H. prisma vero cujus basis parallelogrammum EBFG, & opposita ipsi recta linea HK, est æquale prismati cujus basis GFC triangulum, & ipsi oppositum triangulum HKL: & pyramis cujus basis triangulum AEG, vertex autem H punctum, est æqualis pyramidi cujus basis HKL triangulum, & vertex punctum D. ergo duo prismata de quibus dictum est, sunt majora duabus dictis pyramidibus quorum bases triangula AEG HKL, vertices autem H D puncta. Tota igitur pyramis cujus basis ABC triangulum, vertex autem punctum D, divisa est in duas pyramides æquales, & similes inter se, & similes toti: & in duo prismata æqualia: suntque duo prismata dimidio totius pyramidis majora. Quæ ostendere oportebat.

PROP. IV. THEOR.

Si sint duæ pyramides æque altæ, quæ triangulares bases habeant, dividatur autem utraque ipsarum, & in duas pyramides æquales inter se, similesque toti, & in duo prismata æqualia, & factarum pyramidum utraque eodem modo dividatur, atque hoc semper fiat; erit ut unius pyramidis basis ad basim alterius, ita & in una pyramide prismata omnia ad prismata omnia in altera pyramide multitudine æqualia.

Sint duæ pyramides æque altæ quæ triangulares bases habeant ABC DEF, vertices autem sint puncta G H, & dividatur utraque ipsarum in duas pyramides æquales inter se, similesque toti, & in duo prismata æqualia, & factarum pyramidum utraque eodem modo divisa intelligatur: atque hoc semper fiat. dico ut ABC basis ad basim DEF, ita esse prismata omnia quæ sunt in pyramide ABCG ad prismata omnia quæ in pyramide DEFH multitudine æqualia.



Quoniam enim BX quidem est æqualis XC, AL vero æqualis LC; erit [a] XL ipsi AB parallela, & triangulum ABC triangulo LXC simile. eadem ratione & triangulum

[a] 2. sexti.

gulum DEF simile est triangulo RQF. & quoniam BC quidem est dupla CX, EF vero dupla ipsius FQ, ut BC ad CX, ita erit EF ad FQ. & descripta sunt ab ipsis BC CX similia & similiter posita rectilinea ABC LXC; ab ipsis vero EF FQ similia & similiter posita rectilinea DEF RQF. est

b 22. sexti. igitur b ut BAC triangulum ad triangulum LXC, ita triangulum DEF ad RQF triangulum; & permutando ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita LXC triangulum ad triangulum RQF. sed ut LXC triangulum ad triangulum

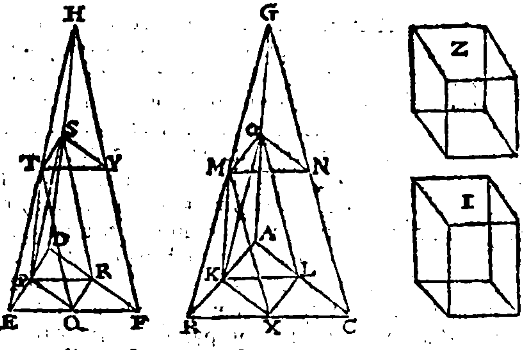
d 28. & 32. undecimi. KQF, ita d prisma cujus basis est triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN, ad prisma cujus basis RQF triangulum & oppositum ipsi STY. ut igitur e ABC triangulum ad triangulum DEF, ita prisma cujus basis est triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN, ad prisma cujus basis RQF triangulum, & oppositum ipsi STY. & quoniam duo prismata quæ in pyramide ABCG inter se æqualia sunt, sed & quæ in pyramide DEFH prismata inter se sunt æqualia; erit ut prisma cujus basis parallelogrammum KLXB, opposita vero ipsi recta linea MO, ad prisma cujus basis LXC triangulum, & oppositum ipsi OMN, ita prisma cujus basis parallelogrammum EPRQ, & opposita recta linea ST, ad prisma cujus basis RQF triangulum, oppositum vero ipsi STY. quare componendo, ut prismata KBXLMO LXCMNO ad prisma LXCMNO, ita prismata PEQRST RQFSTY ad prisma RQFSTY. & permutando, ut prismata KBXLMO LXCOMN ad prismata PEQRST RQFSTY, ita prisma LXCMNO ad prisma RQFSTY. ut autem prisma LXCMNO ad prisma RQFSTY, ita ostensa est basis LXC ad RQF basim, & ABC basis ad basim DEF. ergo & ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita quæ in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide DEFH. similiter autem, & si factas pyramides dividamus eodem modo velut OMNG STYH, erit ut OMN basis ad basim STY, ita quæ in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide STYH. sed ut OMN basis ad basim STY, ita basis ABC ad DEF basim. & ut igitur ABC basis ad basim DEF, ita quæ in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide DEFH; & quæ in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide STYH, & quatuor ad quatuor. eadem autem ostendentur & in factis prismatibus ex divisione pyramidum AKLO, & DPRS & omnium simpliciter multitudine æqualium. Quod demonstrare oportebat.

PROP.

PROP. V. THEOR.

Pyramides quæ eadem sunt altitudine, & triangulares bases habent, inter se sunt ut bases.

Sint eadem altitudine pyramides quarum bases quidem triangula ABC DEF, vertices autem puncta G H. dico ut ABC basis ad basim DEF, sic esse pyramidem ABCG ad DEFH pyramidem. Si enim non ita sit, erit ut ABC basis ad basim DEF, sic ABCG pyramis, vel ad solidum minus pyramide DEFH, vel ad majus. sit primum ad solidum minus, sitque Z: & dividatur pyramis DEFH in duas pyramides æquales inter se, & similes toti, & in duo prismata æqualia: sunt duo igitur prismata dimidio totius pyramidis majora. & rursus pyramides ex divisione factæ similiter dividantur, atque hoc semper fiat, quoad sumantur quædam pyramides à pyramide DEFH, quæ sint minores excessu quo pyramis DEFH solidum Z superat. itaque sumantur, &



sint exempli causa, pyramides DPRS STYH. erunt igitur reliqua in pyramide DEFH prismata solido Z majora. dividatur etiam ABCG pyramis in totidem partes similes pyramidi DEFH. ergo [a] ut ABC basis ad basim DEF, ita quæ in pyramide ABCG prismata ad prismata quæ in pyramide DEFH; sed ut ABC basis ad basim DEF, ita pyramis ABCG ad solidum Z, & igitur ut ABCG pyramis ad solidum Z, ita quæ in pyramide ABCG prismata ad prismata quæ in pyramide DEFH: major autem est pyramis ABCG prismatibus quæ in ipsa sunt, ergo & solidum Z prismatibus, quæ sunt in pyramide DEFH est majus. sed & [b] minus, quod fieri non potest. non igitur ut ABC basis ad basim DEF, ita est pyramis ABCG ad solidum aliquod minus pyramide DEFH. similiter ostendemus neque ut DEF basis ad basim

a 4. hujus.

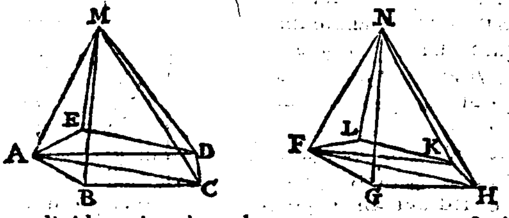
b ex prius demonstratis.

basim ABC, ita esse pyramidem DEFH ad solidum aliquod pyramide ABCG minus. dico igitur neque esse ut ABC basis ad basim DEF, ita ABCG pyramidem ad aliquod solidum majus pyramide DEFH. si enim fieri potest, sit ad majus, videlicet ad solidum I. erit igitur invertendo ut DEF basis ad basim ABC, ita solidum I ad ABCG pyramidem. cum autem solidum I majus est pyramide EDFH, erit ut solidum I ad ABCG pyramidem, ita DEFH pyramis ad solidum aliquod minus pyramide ABCG, ut proxime ostensum fuit. & ut igitur DEF basis ad basim ABC, ita pyramis DEFH ad solidum aliquod pyramide ABCG minus, quod est absurdum. non igitur ut ABC basis ad basim DEF, ita est ABCG pyramis ad solidum aliquod majus pyramide DEFH. ostensum autem est, neque ad minus. quare ut ABC basis ad basim DEF, ita est pyramis ABCG ad DEFH pyramidem. Pyramides igitur quæ eadem sunt altitudine, & triangulares bases habent, inter se sunt ut bases. Quod demonstrare opotrebat.

PROP. VI. THEOR.

Pyramides quæ eadem sunt altitudine, & polygonas bases habent, inter se sunt ut bases.

Sint eadem altitudine pyramides quæ polygonas bases habeant ABCDE FGHKL: vertices autem M N puncta. dico ut ABCDE basis ad basim FGHKL, ita esse ABCDEM pyramidem ad pyramidem FGHKLN. dividatur enim basis quidem ABCDE in triangula ABC ACD ADE; basis vero



FGHKL dividatur in triangula FGH FHK FKL. & in uno quoque triangulo intelligantur pyramides æque altæ atque pyramides quæ à principio. quoniam igitur est ut triangulum ABC ad triangulum ACD, [a] ita ABCM pyramis ad pyramidem ACDM: & componendo ut ABCD trapezium ad triangulum ACD, ita ABCDM pyramis ad pyramidem ACDM. sed & ut ACD triangulum ad ADE, ita [a] pyramis ACDM ad ADEM pyramidem. ergo ex æquali, ut ABCD basis ad basim ADE, ita ABCDM pyramis ad pyramidem ADEM; [a] 5. hujus.

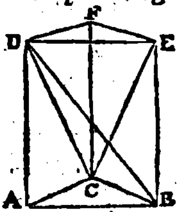
&

& rursus componendo ut ABCDE basis ad basim ADE, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem ADEM. eadem ratione & ut FGHKL basis ad basim FKL, ita & FGHKLN pyramis ad FKLN pyramidem. & quoniam duæ pyramides sunt ADEM FKLN, quæ triangulares bases habent, & eadem sunt altitudine; erit a ut ADE basis ad basim FKL, ita ADEM pyramis ad pyramidem FKLN. quòd cum sit ut ABCDE basis ad basim ADE, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem ADEM; ut autem ADE basis ad basim FKL, ita ADEM pyramis ad pyramidem FKLN; erit ex æquali, ut basis ABCDE ad FKL basim, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem FKLN. sed & ut FKL basis ad basim FGHKL, ita erat & FKLN pyramis ad pyramidem FGHKLN. quare rursus ex æquali, ut ABCDE basis ad basim FGHKL, ita est ABCDEM pyramis ad pyramidem FGHKLN. Pyramides igitur quæ eadem sunt altitudine, & polygonas bases habent, inter se sunt ut bases. Quod oportebat demonstrare.

PROP. VII. THEOR.

Omne prisma triangularem habens basim, dividitur in tres pyramides æquales inter se, quæ triangulares bases habent.

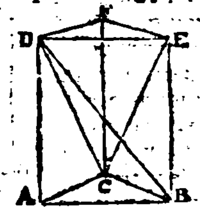
Sit prisma cujus basis quidem triangulum ABC, oppositum autem ipsi DEF. dico prisma ABCDEF dividi in tres pyramides æquales inter se, quæ triangulares habent bases. Jungantur enim BD EC CD. & quoniam parallelogrammum est ABED cujus diameter BD, erit ABD triangulum triangulo EBD a æquale. ergo pyramis cujus basis triangulum ABD, vertex autem punctum C, æqualis b est pyramidi cujus basis EDB triangulum, & vertex punctum C. sed pyramis cujus basis EDB triangulum, & vertex punctum C, eadem est cum pyramide cujus basis triangulum EBC, & vertex D punctum: iisdem enim planis continentur. ergo & pyramis cujus basis triangulum ABD, vertex autem punctum C, æqualis est pyramidi cujus basis EBC triangulum, & vertex punctum D. rursus quoniam FCBE parallelogrammum est cujus diameter CE, triangulum ECF triangulo CBE est a æquale. ergo & pyramis cujus basis BEC triangulum, vertex autem punctum D, æqualis est b pyramidi cujus basis triangulum ECF, & vertex punctum D: sed pyramis cujus basis



a 34. primi.

b 6. hujus.

basis quidem BCE triangulum, vertex autem punctum D, ostensa est æqualis pyramidi cujus basis triangulum ABD, & vertex C punctum; quare & pyramis cujus basis triangulum CEF, & vertex punctum D, æqualis est pyramidi cujus basis triangulum ABD, & vertex C punctum. prisma igitur ABCDEF dividitur in tres pyramides inter se æquales, quæ triangulares bases habent. & quoniam pyramis cujus basis ABD triangulum, vertex autem punctum C, eadem est cum pyramide, cujus basis triangulum CAB, & vertex D punctum, iisdem namque planis continentur: pyramis autem, cujus basis triangulum ABD, & vertex punctum C, tertia pars ostensa est prismatis cujus basis ABC triangulum, & oppositum ipsi DEF. & pyramis igitur, cujus basis triangulum ABC, vertex autem D punctum, tertia pars est prismatis eandem basim habentis, videlicet ABC triangulum & oppositum ipsi triangulum DEF. Quod demonstrare oportebat.



COROLLARIUM.

1. Ex hoc manifestum est omnem pyramidem tertiam partem esse prismatis basim habentis eandem, & altitudinem æqualem; quoniam si basis prismatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, & opposita ipsi eandem, dividitur in prismata quæ triangulares bases habent, & quæ ipsis opponuntur.

2. Prismata æque alta sunt inter se ut bases.

PROP. VIII. THEOR.

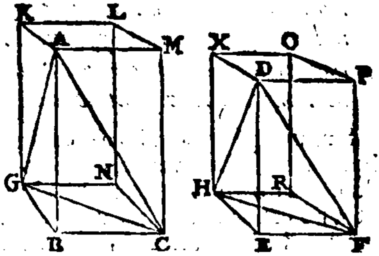
Similes pyramides quæ triangulares bases habent, in triplicata sunt proportione homologorum laterum.

Sint similes, & similiter positæ pyramides, quarum bases quidem triangula ABC DEF, vertices autem G H puncta. dico ABCG pyramidem ad pyramidem DEFH, triplicatam proportionem habere ejus quam BC habet ad EF. compleantur enim BGML EHPO solida parallelepipeda. & quoniam pyramis ABCG similis est pyramidi DEFH, erit [a] angulus ABC angulo DEF æqualis, angulusque GBC æqualis angulo HEF, & angulus ABG angulo DEH. atque [b] est ut AB ad DE, ita BC ad EF, & BG ad EH. quoniam igitur est

a 9 Diffin. undecimi.
b 1. Diffin. sexti.

ut

ut AB ad DE, ita BC ad EF, & circum æquales angulos latera sunt proportionalia, parallelogrammum BM parallelogrammo EP simile erit. eadem ratione, & parallelogrammum BN simile est parallelogrammo ER, & parallelogrammum BK ipsi EX parallelogrammo. tria igitur parallelogramma BM KB BN. tribus EP EX ER sunt similia. sed tria quidem MB BK BN tribus oppositis æqualia & similia sunt, tria vero EP EX ER tribus oppositis æqualia & similia. quare solida BGML EHPO similibus planis & numero æqualibus continentur; ac propterea [c] simile est BGML solidum solido EHPO. similia autem solida parallelepipeda in [e] triplicata sunt proportione homologorum laterum. ergo solidum BGML ad solidum EHPO triplicatam habet proportionem ejus quam habet latus homologum BC ad EF homologum latus. sed [d] ut BGML solidum ad solidum EHPO, ita ABCG pyramis ad pyramidem DEFH; pyramis enim sexta pars est ipsius solidi, cum prisma quod est dimidium solidi parallelepipedi, sit pyramidis triplum. quare & pyramis ABCG ad pyramidem DEFH triplicatam proportionem habebit ejus quam BC habet ad EF. Quod demonstrare oportebat.



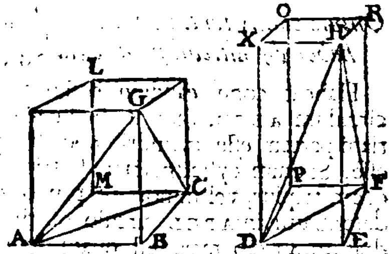
[e] 33. undecimi.
[d] 15. quinti.

Cor. Ex hoc perspicuum est, & similes pyramides quæ multangulas bases habent, inter se esse in triplicata proportione homologorum laterum. ipsis enim divisis in pyramides triangulares bases habentes, quoniam & similia polygona, quæ sunt in basibus, in similia triangula dividuntur, & numero æqualia & homologa totis; erit ut una pyramis in una pyramide triangularem habens basim ad pyramidem in altera triangularem basim habentem, ita & omnes pyramides in uno pyramide triangulares habentes bases ad omnes in altera triangulares bases habentes; hoc est ita pyramis ipsa multangulam habens basim ad pyramidem quæ multangulam basim habet. sed pyramis triangularem habens basim ad pyramidem quæ triangularem basim habet, est in triplicata proportione homologorum laterum: & pyramis igitur polygonam habens basim ad pyramidem similem basim habentem, triplicatam proportionem habebit ejus quam latus homologum habet ad homologum latus.

PROP. IX. THEOR.

Æqualium pyramidum, & triangulares bases habentium bases & altitudines reciproce sunt proportionales: & quarum pyramidum triangulares bases habentium bases & altitudines reciproce sunt proportionales, illæ sunt æquales.

Sint nempe pyramides æquales quæ triangulares bases habeant ABC. DEF, vertices vero G H puncta. dico pyramidum ABCG DEFH bases & altitudines reciprocari; scil. ut ABC basis ad basim DEF, ita esse pyramidis DEFH altitudinem ad altitudinem pyramidis ABCG. compleantur enim BGML EHPO solida parallelepipeda. & quoniam pyramis ABCG est æqualis pyramidi DEFH, atque est pyramidis quidem ABCG sextuplum BGML solidum, pyramidis vero DEFH sextuplum solidum EHPO; erit a solidum BGML solido EHPO æquale. æqualium autem solidorum parallelepipedorum bases & altitudines reciprocantur b. est igitur ut BM basis ad basim EP, ita EHPO solidi altitudo ad altitudinem solidi BGML. sed ut BM basis ad basim EP, ita a ABC triangulum ad triangulum DEF. ergo & ut ABC triangulum ad triangulum DEF, ita solidi EHPO altitudo ad altitudinem solidi BGML. sed solidi quidem EHPO altitudo eadem est cum altitudine pyramidis DEFH; solidi vero BGML altitudo eadem est cum altitudine pyramidis ABCG. est igitur ut ABC basis ad basim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. quare pyramidum ABCG DEFH bases & altitudines reciproce sunt proportionales, Et si pyramidum ABCG DEFH bases & altitudines reciproce sunt proportionales, sitque ut ABC basis ad basim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. dico ABCG pyramidem pyramidi DEFH æqualem esse. iisdem enim constructis, quoniam ut ABC basis ad basim DEF, ita est DEFH pyramidis altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG; ut autem ABC basis ad basim DEF, ita BM parallelogrammum ad parallelogrammum EP: erit & ut parallelogrammum BM ad EP parallelogrammum, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem



a 15. quinti.

b 34. undecimi.

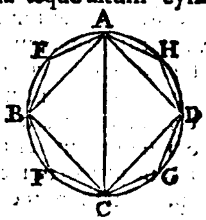
nem pyramidis A B C G. sed pyramidis quidem D E F H altitudo eadem est cum altitudine solidi parallelepipedi E H P O; pyramidis vero A B C G altitudo eadem est cum altitudine solidi parallelepipedi B G M L. est igitur ut B M basis ad basim E P, ita E H P O solidi parallelepipedi altitudo ad altitudinem solidi parallelepipedi B G M L. quorum autem solidorum parallelepipedorum bases & altitudines reciprocantur, ea [b] sunt æqualia. solidum igitur parallelepipedum B G M L æquale est solido parallelepipedo E H P O; atque est solidi quidem B G M L sexta pars pyramis A B C G: solidi vero E H P O itidem sexta pars pyramis D E F H. ergo pyramis A B C G pyramidi D E F H est æqualis. Æqualium igitur pyramidum, & triangulares bases habentium bases & altitudines reciproce sunt proportionales: & quarum pyramidum triangulares bases habentium bases & altitudines reciproce sunt proportionales, illæ sunt æquales. Quod oportebat demonstrare.

b 34. undecimi.

PROP. X. THEOR.

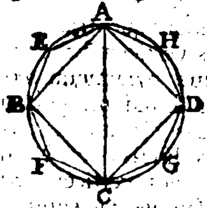
Omnis conus tertia pars est cylindri, qui eandem basim habet & altitudinem æqualem.

Habeat conus eandem basim quam cylindrus, videlicet circulum A B C D, & altitudinem æqualem. dico conum tertiam partem esse cylindri, hoc est cylindrum coni triplum esse. Si enim cylindrus non sit triplus coni, vel major erit quam triplus, vel minor. sit primo major quàm triplus; & describatur in A B C D circulo quadratum A B C D. ergo quadratum A B C D majus est quàm dimidium A B C D circuli. & à quadrato A B C D erigatur prisma æque altum cylindro, quod quidem prisma majus erit quàm cylindri dimidium; quoniam si circa circulum A B C D quadratum describatur erit inscriptum quadratum dimidium circumscripti: & sunt ab eisdem basibus erecta solida parallelepipeda æque alta, nimirum prismata ipsa. quare prismata inter se sunt [a] ut bases, & prisma igitur erectum à quadrato A B C D dimidium est prismatis erecti à quadrato quod circa circulum A B C D describitur, atque est cylindrus minor prismate erecto à quadrato quod describitur circa circulum A B C D. prisma igitur erectum à quadrato A B C D æque altum cylindro, dimidio cylindri est majus. secentur circumferentiæ A B B C C D D A bifariam in punctis E F G H, & A E E B B F F C C G G D D H



a 2. Cor. 7. hujus.

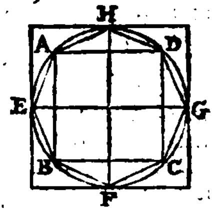
HA jungantur. unumquodque igitur triangulorum AEB BFC CGD DHA majus *b* est dimidio portionis circuli ABCD, in qua consistit. erigantur ab unoquoque triangulorum AEB BFC CGD DHA prismata æque alta cylindro. ergo & unumquodque erectorum prismatum majus est dimidio portionis cylindri quæ ad ipsum est, quoniam si per puncta EFGH parallelæ ipsis AB BC CD DA ducantur, & compleantur in ipsis AB BC CD DA parallelogramma, à quibus solida parallelepipeda æque alta cylindro erigantur: erunt uniuscujusque erectorum dimidia prismata ea quæ sunt in triangulis AEB BFC CGD DHA. & sunt cylindri portiones erectis solidis parallelepipedis minores. ergo & prismata quæ in triangulis AEB BFC CGD DHA majora sunt dimidio portionum cylindri quæ ad ipsa sunt. itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, jungentesque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes prismata æque alta cylindro, & hoc semper facientes tandem relinquentur quædam portiones cylindri quæ sint minores excessu quo cylindrus coni triplum superat. relinquantur jam; & sint AE EB BF FC CG GD DH HA. reliquum igitur prisma, cujus basis quidem polygonum AEBFCGDH, altitudo autem eadem quæ cylindri, majus est quàm triplum coni. sed prisma cujus basis AEBFCGDH polygonum, & altitudo eadem quæ cylindri, triplum *c* est pyramidis, cujus basis polygonum AEBFCGDH, vertex autem idem qui coni, & pyramis igitur cujus basis polygonum AEBFCGDH, vertex autem idem qui coni, major est cono qui basim habet ABCD circulum. sed & minor (ab ipso enim comprehenditur) quod fieri non potest. non igitur cylindrus major erit quàm triplus coni. dico insuper neque cylindrum minorem esse quam triplum coni. si enim fieri potest, sit cylindrus minor quàm triplus coni. erit invertendo conus major quam tertia pars cylindri. describatur in ABCD circulo quadratum ABCD, ergo quadratum ABCD majus est quam dimidium ABCD circuli; & à quadrato ABCD erigatur pyramis, verticem habens eundem quem conus. pyramis igitur erecta major est quàm coni dimidium: quoniam, ut ante demonstravimus, si circa circulum quadratum describatur, erit quadratum ABCD dimidium ejus quod circa circulum descriptum est: & si à quadratis erigantur solida parallelepipeda æque alta cono, quæ & prismata appellantur,



b sequitur ex 1. hujus.

c 1. Cor. 7. hujus.

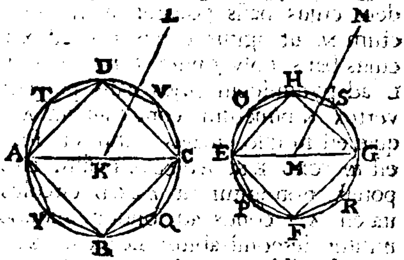
pellantur, erit quod à quadrato A B C D erigitur dimidium ejus, quod erectum est à quadrato circa circulum descripto; etenim inter se sunt ut bases, quare & tertiæ partes ipsarum. pyramis igitur cujus basis quadratum A B C D, dimidia est ejus pyramidis quæ à quadrato circa circulum descripto erigitur. sed pyramis erecta à quadrato descripto circa circulum, major est cono, ipsum namque comprehendit. ergo pyramis cujus basis A B C D quadratum, vertex autem idem qui coni, major est quàm coni dimidium. secentur circumferentiæ A B B C C D D A bifariam in punctis E F G H. & jungantur A E E B B F F C C G G D D H H A. & unumquodque igitur triangulorum A E B B F C C G D D H A majus est quam dimidium portionis circuli A B C D, in qua consistit. erigantur ab unoquoque triangulorum A E B B F C C G D D H A pyramides verticem habentes eundem quem conus. ergo & unaquæque pyramidum eodem modo erectarum major est quàm dimidium portionis coni quæ est ad ipsam. itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, jungentesque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides verticem habentes eundem quem conus, & hoc semper facientes, relinquemus tandem quasdam coni portiones quæ minores erunt excessu quo conus tertiam cylindri partem superat. relinquantur; & sint quæ in ipsis A E E B B F F C C G G D D H H A; reliqua igitur pyramis cujus basis polygonum A E B F C G D H, & vertex idem qui coni, major est quam tertia cylindri pars. sed pyramis cujus basis polygonum A E B F C D H vertex autem idem qui coni, tertia pars est prismatis cujus basis polygonum A E B F C D H, altitudo autem eadem quæ cylindri. prisma igitur cujus basis A E B F C G H polygonum, & altitudo eadem quæ cylindri, majus est cylindro cujus basis est circulus A B C D. sed & minus (ab ipso enim comprehenditur) quod fieri non potest. non igitur cylindrus minor est quam triplus coni. ostensum autem est neque majorem esse quam triplum, ergo cylindrus coni triplus sit necesse est; ac propterea conus tertia pars cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eandem quam ipse basim habentis, & altitudinem æqualem. Quod demonstrare oportebat.



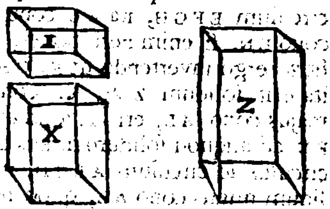
PROP. XI. THEOR.

Coni & cylindri qui eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases.

Sint in eadem altitudine coni & cylindri, quorum bases circuli ABCD EFGH, axes autem KL MN, & diametri basium AC EG. dico ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita esse conum AL ad EN conum. Si enim non ita sit, erit ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad aliquod solidum minus cono EN, vel ad majus; sit primo ad minus quod sit X; & quo minus est solidum X cono EN, ei æquale sit I solidum. conus igitur EN ipsis solidis X I est æqualis. describatur in EFGH, circulo quadratum EFGH quod majus est dimidio circuli. erigatur à quadrato EFGH pyramis æque alta cono. pyramis igitur erecta major est coni dimidio, nam si circa circulum quadratum describamus, & ab ipso erigamus pyramidem



æque altam cono; erit inscripta pyramis pyramidis circumscriptæ dimidium. etenim inter se a sunt ut bases. conus autem circumscripta pyramide est minor. ergo pyramis cujus basis quadratum EFGH, vertex autem idem qui coni, major est coni dimidio. secentur circumferentiæ EF FG GH HE bifariam in punctis P R S O; & OE EP PF FR RG GS SH jungantur. unumquodque igitur triangulorum HOE EPF FRG GSH majus est quam dimidium segmenti circuli, in quo consistit. erigatur ab unoquoque triangulorum HOE EPF FRG GSH pyramis æque alta cono. ergo & unaquæque erectarum pyramidum major est dimidio portionis coni, quæ est ad ipsam. itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, & jungentes rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides æque altas cono, atque hoc semper facientes, relinquemus tandem aliquas portiones coni, quæ solido I minores erunt. relinquantur, & sint quæ in ipsis HO OE EP PF FR RG GS SH.



a 6. hujus.

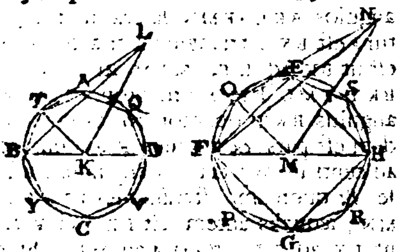
SH. reliqua igitur pyramis cujus basis polygonum HOEPFRGS, altitudo autem eadem quæ coni, major est solido X. describatur in circulo ABCD polygono HOEPFRGS simile & similiter positum polygonum DTAYBQCV, & ab ipso erigatur pyramis æque alta cono AL. quoniam igitur est ut quadratum ex AC ad quadratum ex EG, ita *a* DTAYBQCV polygonum ad polygonum HOEPFRGS; ut autem quadratum ex AC ad quadratum ex EG, ita ABCD circulus *b* ad circulum EFGH: erit ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita polygonum DTAYBQCV ad polygonum HOEPFRGS. sed ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad X solidum: & ut polygonum DTAYBQCV ad polygonum HOEPFRGS, ita pyramis cujus basis DTAYBQCV polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum HOEPFRGS, & vertex punctum N. ut igitur conus AL ad X solidum, ita pyramis, cujus basis polygonum DTAYBQCV, & vertex punctum L ad pyramidem cujus basis polygonum HOEPFRGS, & vertex N punctum. conus autem AL major est pyramide quæ est in ipso. majus igitur est solidum X pyramide quæ est in cono EN. sed & ostensum est minus, quod fieri non potest. non igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita est AL conus ad solidum aliquod minus cono EN. similiter demonstrabitur neque ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita esse conum EN ad aliquod solidum minus cono AL. dico præterea neque esse ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita AL conum ad aliquod solidum majus cono EN. si enim fieri potest, sit ad solidum majus, quod sit Z. ergo invertendo ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita erit solidum Z ad AL conum; sed cum est solidum Z majus cono AL, erit ut solidum Z ad AL conum, ita conus EN ad aliquod solidum minus cono AL: & igitur ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita conus EN ad aliquod solidum minus cono AL, quod fieri non posse ostensum est. non igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad aliquod solidum majus cono EN. ostensum autem est neque esse ad minus. ergo ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita est conus AL ad EN conum: sed ut conus ad conum, ita *c* est cylindrus ad cylindrum, est enim uterque utriusque triplus. & igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita in ipsis cylindri æque alti conis. Ergo coni & cylindri qui eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases. Quod demonstrare oportebat.

a 1. hujus.
b 2. hujus.
c 15. quinti.

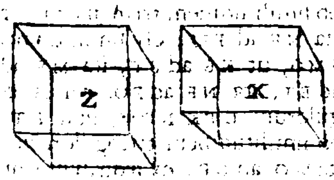
PROP. XII. THEOR.

Similes coni & cylindri inter se sunt in triplicata proportione diametrorum quæ sunt in basibus.

Sint similes coni & cylindri quorum bases quidem circuli ABCD EFGH, diametri vero basium BD FH, & axes conorum, vel cylindrorum KL MN. dico conum cujus basis ABCD circulus, vertex autem punctum L, ad conum cujus basis circulus EFGH, vertex autem N punctum, triplicatam habere proportionem ejus quam habet BD ad FH. si enim non habet conus ABCDL ad conum EFGHN triplicatam proportionem ejus quam BD habet ad FH, habebit ABCDL conus ad aliquod solidum minus cono EFGHN triplicatam proportionem, vel ad majus. habeat primo ad minus, quod sit X; & describatur in EFGH circulo quadratum EFGH.



quadratum igitur EFGH majus est dimidio EFGH circuli, & erigatur à quadrato EFGH pyramis æque alta cono. ergo erecta pyramis major est quam coni dimidium. itaque secentur EF FG GH HE circumferentiæ bifariam in punctis O P R S. & jungantur EO OF FP PG GR RH HS SE. unumquodque igitur triangulorum EOF FPG GRH HSE majus est



dimidio segmenti circuli EFGH, in quo consistit. & erigatur ab unoquoque triangulorum EOF FPG GRH HSE pyramis eundem verticem habens quem conus. ergo & unaquæque erectarum pyramidum major est quam dimidium portionis coni, quæ est ad ipsam. secantes igitur reliquas circumferentias bifariam, jungentesque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides eundem habentes verticem quem conus, atque hoc semper facientes, tandem relinquemus quasdam coni portiones quæ minores erunt excessu quo conus EFGHN ipsum X solidum superat. relinquantur, & sint quæ in ipsis EO OF FP PG GR RH HS SE. reliqua igitur pyramis cujus basis quidem polygonum

EOFP

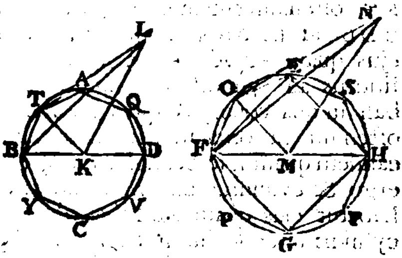
EOFPGRHS, vertex autem N punctum, major est solido X. describatur etiam in circulo ABCD, polygono EOFPGRHS simile & similiter positum polygonum ATBYCVDQ, à quo erigatur pyramis eundem verticem habens, quem conus, & triangulorum continentium pyramidem cujus basis quidem est polygonum ATBYCVDQ, vertex autem punctum L, unum sit LBT; triangulorum vero continentium pyramidem cujus basis EOFPGRHS polygonum, & vertex punctum N, unum sit NFO, & jungantur KT MO. quoniam igitur conus ABCDL similis est cono EFGHN, erit ut BD ad FH, ita KL axis ad axem MN. ut autem BD ad FH, [a] ita BK ad FM, & KL ad MN, & permutando ut BK ad KL, ita FM ad MN. & cum perpendicularis utraque est, & circa æquales angulos BKL FMN latera sunt proportionalia. simile igitur [b] est BKL triangulum triangulo FMN. Rursus quoniam est ut BK ad KT, ita FM ad MO, & circa æquales angulos BKT FMO latera sunt proportionalia; etenim quæ pars est angulus BKT quatuor rectorum qui sunt ad K centrum, eadem est pars & angulus FMO quatuor rectorum qui sunt ad centrum M: erit [b] triangulum BKT triangulo FMO simile. & quoniam ostensum est ut BK ad KL, ita esse FM ad MN; æqualis autem est BK ipsi KT, & FM ipsi MO: erit ut TK ad KL, ita OM ad MN: & circa æquales angulos TKL OMN latera sunt proportionalia; recti enim sunt. triangulum igitur LKT simile est triangulo NMO. quod cum ob similitudinem triangulorum BKL FMN, sit ut LB ad BK, ita NF ad FM; ob similitudinem vero triangulorum BKT FMO, ut KB ad BT, ita MF ad FO: erit ex æquali ut LB ad BT, ita NF ad FO. rursus cum ob similitudinem triangulorum LTK NOM, sit ut LT ad TK, ita NO ad OM; & ob similitudinem triangulorum KBT OMF, ut KT ad TB, ita MO ad OF: ex æquali erit ut LT ad TB, ita NO ad OF. ostensum autem est & ut TB ad BL, ita OF ad FN. quare rursus ex æquali ut TL ad LB, ita ON ad NF. triangulorum igitur LTB NOF proportionalia sunt latera, ideoque æquiangula sunt LTB NOF triangula, & inter se similia. quare & pyramis cujus basis triangulum BKT, vertex autem L punctum, similis est pyramidi cujus basis FMO triangulum, & vertex punctum N; similibus enim planis continentur, & multitudine æqualibus. pyramides autem similes, & quæ triangulares bases habent, in [c] triplicata sunt proportione homologorum laterum. ergo pyramis BKTL ad pyramidem FMON triplicatam habet proportionem ejus quam BK habet ad FM. similiter à punctis quidem A Q D V C Y ad K, à punctis vero E S H R G P ad M ducentes rectas

[a] 15. quinti.
[b] 6. sexti.
[c] 8. hujus.

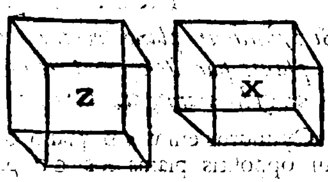
lineas

lineas, & à triangulis erigentes pyramides vertices eosdem habentes quos coni, ostendemus & unamquamque pyramidum ejusdem ordinis ad unamquamque alterius ordinis triplicatam proportionem habere ejus quam habet BK latus ad homologum latus MF, hoc est quam BD ad

d 12. quinti. FH. sed ut unum antecedentium [d] ad unum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. est igitur & ut BKTL pyramis ad pyramidem FMON, ita tota pyramis cujus basis ATBYCVDQ polygonum, vertex autem punctum L, ad totam pyramidem cujus basis polygonum EOFPGRHS, & vertex punctum N. quare & pyramis cujus basis ATBYCVDQ polygonum vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum



EOFPGRHS, & vertex punctum N, triplicatam proportionem habet ejus quam BD habet ad FH. ponitur autem conus cujus basis circulus ABCD vertex autem punctum L, ad solidum X triplicatam proportionem habere ejus quam BD ad FH. ut igitur conus cujus basis circulus ABCD, vertex autem punctum L, ad solidum X, ita est



pyramis cujus basis ATBYCVDQ polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum EOFPRHS, & vertex punctum N. dictus autem conus major est pyramide quæ in ipso; etenim eam comprehendit: majus igitur est & solidum X pyramide cujus basis polygonum EOFPGRHS, vertex autem punctum N. sed & minus, quod fieri non potest. non igitur conus cujus basis ABCD circulus, & vertex punctum L, ad aliquod solidum minus cono, cujus basis circulus EFGH, & vertex N punctum, triplicatam proportionem habet ejus quam BD habet ad FH. similiter demonstrabimus neque conum EFGHN ad aliquod solidum minus cono ABCDL triplicatam proportionem habere ejus quam habet FH ad BD. itaque dico neque ABCDL conum ad solidum majus cono EFGHN triplicatam habere proportionem ejus quam BD habet ad FH. si enim fieri potest, habeat ad aliquod solidum majus, quod sit Z. invertendo

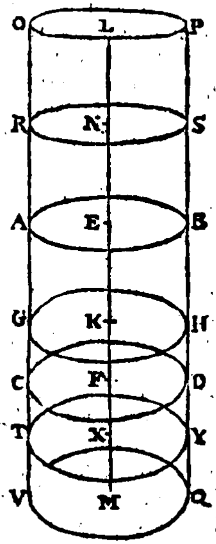
vertendo

vertendo igitur, solidum Z ad conum ABCDL triplicatam proportionem habet ejus quam FH ad BD: cum autem est solidum Z majus cono EFGHN; erit ut solidum Z ad conum ABCDL, ita EFGHN conus ad aliquod solidum minus cono ABCDL. ergo & conus EFGHN ad solidum aliquod minus cono ABCDL triplicatam proportionem habebit ejus quam FH habet ad BD, quod fieri non posse demonstratum est. non igitur ABCDL conus ad solidum aliquod majus cono EFGHN, triplicatam proportionem habet ejus quam BD ad FH ostensum autem est neque ad minus. quare conus ABCDL ad EFGHN conum triplicatam proportionem habet ejus quam BD ad FH. ut autem conus ad conum, ita ᵉ cylindrus ad cylindrum. cylindrus enim in eadem existens basi in qua conus, & ipsi æque altus, coni ᶠ triplus est. cum ostensum sit omnem conum tertiam partem esse cylindri eandem quam ipse basim habentis, & æqualem altitudinem. ergo & cylindrus ad cylindrum triplicatam proportionem habebit ejus quam BD habet ad FH. Similes igitur coni & cylindri inter se sunt in triplicata proportione diametrorum quæ sunt in basibus. Quod demonstrare oportebat.

ᵉ 15. quinti.
ᶠ 10. hujus.

PROP. XIII. THEOR.

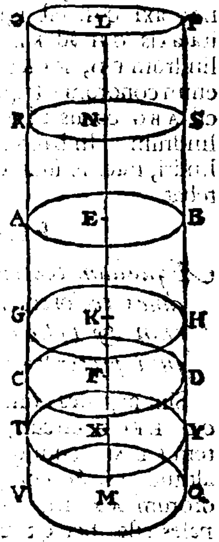
Si cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.



Cylindrus enim AD plano GH secetur oppositis planis AB CD parallelo, & occurrat axi EF in K puncto. dico ut BG cylindrus ad cylindrum GD, ita esse EK axem ad axem KF. producatur enim EF axis ex utraque parte ad puncta LM: & ipsi quidem EK axi ponantur æquales quotcunque EN NL; ipsi vero FK æquales quotcunque FX XM: & per puncta LNXM ducantur plana ipsis AB CD parallela, atque in planis per LNXM circa centra LNXM intelligantur circuli OP RS TY VQ æquales ipsis AB CD; & cylindri PR RB DT TQ intelligantur. quoniam igitur axes LN NE EK inter se sunt æquales, erunt cylindri PR RB BG inter se ᵃ ut bases; æquales autem sunt bases; ergo & cylindri PR RB BG sunt æquales. quòd cum axes LN NE EK inter se

ᵃ 11. hujus.

se æquales sunt, itemque cylindri PR RB BG inter se æquales; sitque ipsorum LN NE EK multitudo æqualis multitudini ipsorum PR RB BG: quotuplex est axis KL ipsius EK axis, totuplex erit & PG cylindrus cylindri GB. eadem ratione & quotuplex est MK axis ipsius axis KF, totuplex est & QG cylindrus cylindri GD. & si quidem axis LK sit æqualis axi KM, erit & PG cylindrus cylindro GQ æqualis; si autem axis LK major sit axe KM, & cylindrus PG major erit cylindro GQ; & si minor minor. quatuor igitur existentibus magnitudinibus, videlicet axibus EK KF, & cylindris BG GD, sumpta sunt æque multiplicia, axis quidem EK, & BG cylindri, nempe axis KL, & cylindrus PG; axis vero KF, & cylindri GD æque multiplicia, axis scilicet KM, & GQ cylindrus, & demonstratum est si LK axis superat axem KM & PG cylindrum superare cylindrum GQ; & si æqualis æqualis; & si minor minor. est [b] igitur axis EK ad axem KF, ut BG cylindrus ad cylindrum GD. Quare si cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem Quod demonstrare oportebat.

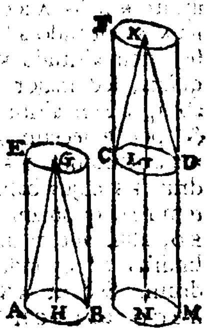


b 6. Diffin. quinti.

PROP. XIV. THEOR.

In æqualibus basibus existentes coni & cylindri, inter se sunt ut altitudines.

Sint enim in æqualibus basibus AB CD, cylindri EB FD. dico ut EB cylindrus ad cylindrum FD, ita esse GH axem ad axem KL. Producatur enim KL axis ad punctum N; ponaturque ipsi GH axi æqualis LN; & circa axem LN intelligatur cylindrus CM. quoniam igitur cylindri EB CM eandem habent altitudinem, inter se [a] sunt ut bases: bases autem sunt æquales. ergo & cylindri EB CM inter se æquales erunt. & quoniam cylindrus FM secatur plano CD, oppositis planis parallelo, erit [b] ut CM cylin-



a 11. hujus.

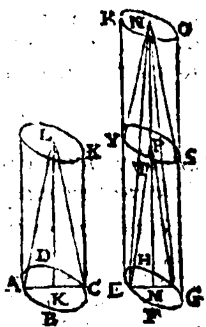
b 13. hujus.

cylindrus ad cylindrum FD, ita axis LN ad KL axem. æqualis autem est cylindrus quidem CM cylindro EB; axis vero LN axi GH. est igitur ut EB cylindrus ad cylindrum FD, ita axis GH ad KL axem: ut autem EB cylindrus ad cylindrum FD, ita [c] ABG conus ad conum CDK; cylindri sunt enim conorum [d] tripli. ergo & ut GH axis ad axem KL, ita est ABG conus ad conum CDK, & cylindrus EB ad FD cylindrum. In basibus igitur æqualibus existentes coni & cylindri, inter se sunt ut altitudines. Quod demonstrare oportebat. [c] 15 quinti. [d] 10. hujus.

PROP. XV. THEOR.

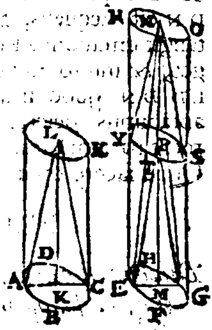
Æqualium conorum, & cylindrorum bases & altitudines reciproce sunt proportionales; & quorum conorum & cylindrorum bases & altitudines reciproce sunt proportionales, illi inter se sunt æquales.

Sint æquales coni & cylindri, quorum bases quidem ABCD EFGH circuli, & diametri ipsorum AC EG; axes autem KL MN; qui quidem & conorum vel cylindrorum sunt altitudines, & compleantur cylindri AX EO. dico cylindrorum AX EO bases & altitudines reciproce proportionales esse, hoc est ut ABCD basis ad basim EFGH, ita esse altitudinem MN ad altitudinem KL. altitudo enim KL vel æqualis est altitudini MN, vel non æqualis. Sit primo æqualis: atque est AX cylindrus æqualis cylindro EO. qui autem eandem habent altitudinem coni & cylindri inter se sunt [a] ut bases. æqualis igitur est basis ABCD basi EFGH. est igitur ut basis ABCD ad EFGH basim, ita MN altitudo ad altitudinem KL. non sit autem altitudo KL altitudini MN æqualis, sed major sit MN, & auferatur ab ipsa MN altitudini LK æqualis PM, & per P secetur EO cylindrus plano TYS, oppositis planis circulorum EFGH RO parallelo, intelligaturque cylindrus ES cujus basis quidem EFGH circulus, altitudo autem PM. quoniam igitur AX cylindrus æqualis est cylindro EO, alius autem aliquis est cylindrus ES; erit ut AX cylindrus ad cylindrum ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. Sed ut AX cylindrus ad cylindrum ES, [a] ita basis ABCD ad EFGH basim; cylindri enim AX ES eandem habent altitudinem; ut autem cylindrus EO ad ES cylindrum [a] 11. hujus.



drum

a 13. hujus. drum [a], ita MN altitudo ad altitudinem MP. nam cylindrus EO secatur plano TYS, oppositis planis parallelo. est igitur ut ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad MP altitudinem. æqualis autem est MP altitudo altitudini KL. quare ut basis ABCD ad EFGH basim, ita MN altitudo ad altitudinem KL. æqualium igitur cylindrorum AX EO bases & altitudines reciproce sunt proportionales.

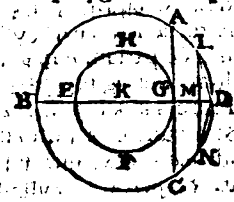


Sed si cylindrorum AX EO bases & altitudines sunt reciproce proportionales: hoc est ut ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem. dico AX cylindrum cylindro EO æqualem esse. iisdem enim constructis; quoniam ut ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem; altitudo autem KL æqualis est altitudini MP: erit ut ABCD basis ad basim EFGH, ita MN altitudo ad altitudinem MP. b 11. hujus. sed ut ABCD basis ad basim EFGH, ita [b] AX cylindrus ad cylindrum ES; eandem enim habent altitudinem. ut autem MN altitudo ad altitudinem MP, ita [a] cylindrus EO ad ES cylindrum: est igitur ut AX cylindrus ad cylindrum ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. cylindrus igitur AX cylindro EO est æqualis. similiter autem & in conis. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XVI. PROBL.

Duobus circulis circa idem centrum existentibus, in majori polygonum æqualium & numero parium laterum describere, quod minorem circulum non tangat.

Sint dati duo circuli ABCD EFGH circa idem centrum K. oportet in majori circulo ABCD polygonum æqualium & numero parium laterum describere, non tangens minorem circulum EFGH. ducatur per K centrum recta linea BD, atque à puncto G ipsi BD ad rectos angulos ducatur AG, & ad C producatur, & a 16. tertii. AC circulum EFGH [a] tangit.



Itaque circumferentiam BAD bifariam secantes, & ejus dimidium rursus bifariam, & hoc semper facientes, tandem relinquemus

linquemus circumferentiam minorem ipsa A D. relinquatur, sitque L D: & à puncto L ad B D perpendicularis agatur L M, & ad N producatur, junganturque L D D N. ergo L D ipsi D N est ^{a} æqualis, & quoniam L N parallela est A C, & A C tangit circulum E F G H; ipsa L N circulum E F G H non tanget, & multo minus tangent circulum E F G H rectæ lineæ L D D N. quod si ipsi L D æquales deinceps circulo A B C D aptabimus, describetur in eo polygonum æqualium & numero parium laterum non tangens minorem circulum E F G H. Quod facere oportebat. *b 29. tertii.*

PROP. XVII. PROBL.

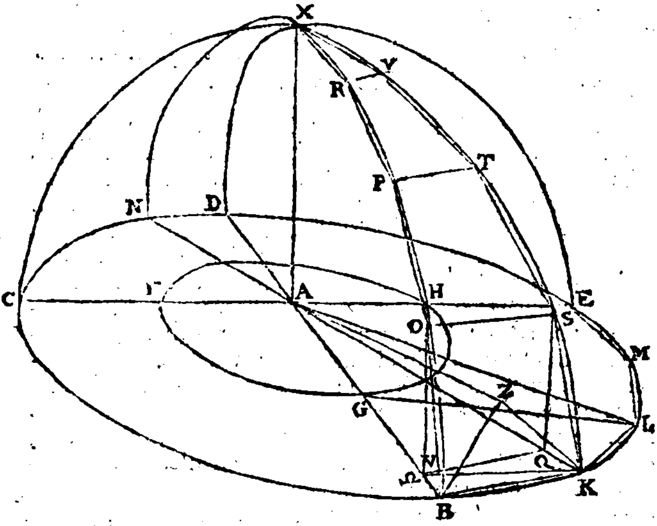
Duabus sphæris circa idem centrum existentibus, in majori solidum polyhedrum describere, quod minoris sphæræ superficiem non tangat.

Intelligantur duæ sphæræ circa idem centrum A. oportet in majori sphæra describere solidum polyhedrum minoris sphæræ superficiem non tangens. secentur sphæræ plano aliquo per centrum ducto; sectiones erunt circuli, quoniam diametro manente & semicirculo circumducto sphæra facta ^{a} est; ergo in quacunque positione semicirculum intelligamus, quod per ipsum producitur planum in superficie sphæræ circulum efficiet, & constat circulum esse maximum, cum diameter sphæræ quæ & semicirculi diameter est, major ^{b} sit omnibus rectis lineis quæ in circulo vel sphæra ducuntur: sit igitur in majori quidem sphæra circulus B C D E, in minori autem circulus F G H, & ducantur ipsorum duæ diametri ad rectos inter se angulos B D Q E. occurrat B D minori circulo in G; ducatur à puncto G ipsi A G ad rectos angulos G L, & jungatur A L. itaque circumferentiam E B bifariam secantes, & dimidium ipsius bifariam atque hoc semper facientes, tandem relinquemus quandam circumferentiam minorem ea parte circumferentiæ circuli B C D, quæ subtenditur à recta æquali ipsi G L. relinquatur, sitque circumferentia B K. minor igitur est recta B K quam G L; eritque B K latus polygoni æqualium & parium numero laterum non tangentis minorem circulum. sint igitur polygoni latera in quadrante circuli B E, rectæ B K K L L M M E, & puncta K A producatur ad N: & à puncto A plano circuli B C D E ad rectos angulos ^{c} constituatur A X, quæ superficiei sphæræ in puncto X occurrat, & per A X & utramque ipsarum B D K N plana ducantur, quæ ex jam dictis efficient in superficie sphæræ maximos circulos. itaque efficiant, & sint in diametris B D *a Diffin. 14. undecimi.* *b 15. tertii.* *c 12. undecimi.*

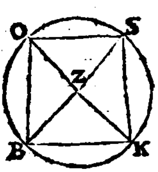
KN eorum semicirculi BXD BXN. quoniam igitur XA recta est ad planum circuli BCDE, erunt omnia plana quæ per ipsam XA transeunt, ad idem circuli planum [d] recta: quare & semicirculi BXD KXN recti sunt ad idem planum. & quoniam semicirculi BED BXD KXN æquales sunt, in æqualibus enim consistunt BD KN diametris; erunt & eorum quadrantes BE BX KX inter se æquales. quot igitur latera polygoni sunt in quadrante BE, tot erunt & in quadrantibus BX KX, æqualia ipsis BK KL LM ME. describantur, & sint BO OP PR RX KS ST TY YX: junganturque SO TP YR, & ab ipsis OS ad planum circuli BCDE perpendiculares ducantur. cadent hæ in [e] communes plano-

[d] 18. undecimi.

[e] 38. undecimi.



rum sectiones BD KN, quoniam & plana semicirculorum BXD KXN ad planum circuli BCDE recta sunt. itaque cadant, sintque OV SQ, & VQ jungatur. cum igitur in æqualibus semicirculis BXD KXN, æquales circumferentiæ sumptæ sint BO KS, & ductæ perpendiculares OV SQ, erit OV quidem ipsi SQ æqualis, BV vero



æqualis KQ. est autem & tota BA æqualis toti KA: ergo & reliqua VA reliquæ QA est æqualis. igitur ut BV ad VA, ita KQ ad QA: ideoque VQ ipsi BK parallela [f] est. quod cum utraque ipsarum OG SQ recta sit ad circuli BCDE planum,

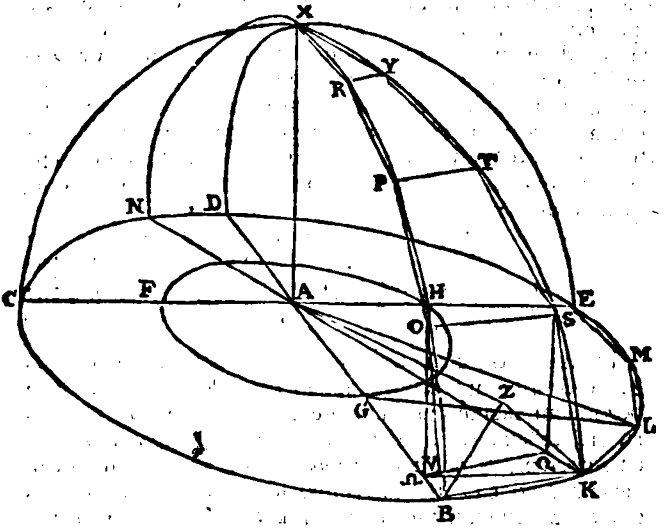
[f] 2. sexti.

erit

erit OV ipsi SQ parallela. ostensa autem est & ipsi æqualis. ergo QV SO æquales [b] sunt & parallelæ. & quoniam QV parallela est ipsi SO, sed & parallela ipsi KB; erit & [i] SO ipsi KB parallela: & ipsas conjungunt BO KS. ergo & KBOS quadrilaterum est in uno [k] plano: nam si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, & in utraque ipsarum quævis puncta sumantur, quæ dicta puncta conjungit recta linea in eodem est plano, in quo parallelæ. & eadem ratione utraque ipsorum quadrilaterorum SOPT TPRY in uno sunt plano. est autem in [l] uno plano & triangulum YRX. si igitur à punctis O S P T R Y ad A ductas rectas lineas intelligamus, constituetur quædam figura solida polyhedra inter circumferentias BX KX, ex pyramidibus composita, quarum bases quidem KBOS SOPT TPRY quadrilatera, & triangulum YRX; vertex autem punctum A. quòd si in unoquoque laterum KL LM ME, quemadmodum in KB eadem construamus, & in reliquis tribus quadrantibus, & in reliquo hemisphærio constituetur figura quædam polyhedra in sphæra descripta, & composita ex pyramidibus, quarum bases sunt quadrilatera jam dicta, & YRX triangulum, & quæ ejusdem ordinis sunt, vertex autem A punctum. dico dictam figuram polyhedram non tangere superficiem minoris sphæræ, in qua est circulus FGH. ducatur à [m] puncto A ad planum quadrilateri KBSO perpendicularis AZ, cui in puncto Z occurrat, & AZ ZK jungantur. itaque quoniam AZ recta est ad quadrilateri KBSO planum, & ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt, & in eodem sunt plano [n] rectos angulos faciet. ergo AZ ad utramque ipsarum BZ ZK est perpendicularis. & quoniam AB est æqualis AK, erit & quadratum ex AB quadrato ex AK æquale, & sunt quadrato quidem ex AB æqualia [o] quadrata ex AZ ZB, angulus enim ad Z rectus est; quadrato autem ex AK æqualia ex AZ ZK quadrata. ergo quadrata ex AZ ZB quadratis ex AZ ZK æqualia sunt. commune auferatur quadratum ex AZ. reliquum igitur quod ex BZ reliquo quod ex ZK est æquale; ergo recta BZ rectæ ZK æqualis. Similiter ostendemus, & quæ à puncto Z ad puncta O S ducuntur utrique ipsarum BZ ZK æquales esse. circulus igitur centro Z & intervallo una ipsarum ZB ZK descriptus etiam per puncta O S transibit. & quoniam in circulo est BKSO quadrilaterum, & sunt æquales OB BK KS & minor OS, erit angulus BZK obtusus; ideoque BK major quam BZ, sed & GL quam BK est major, multo igitur major est GL quam BZ. & quadratum ex GL quadrato ex BZ majus. & cum æqualis sit AL ipsi AB, erit quadratum ex AL, quadrato ex AB æquale;

[g] 6. undecimi.
[h] 33. primi.
[i] 9. undecimi.
[k] 7. undecimi.
[l] 2. undecimi.
[m] 11. undecimi.
[n] 3. diffin. undecimi.
[o] 47. primi.

sed quadrato quidem ex A L æqualia sunt quadrata ex A G G L, quadrato autem ex A B æqualia quadrata ex B Z Z A, quadrata igitur ex A G G L æqualia sunt quadratis ex B Z Z A, quorum quadratum ex B Z minus est quadrato ex G L; ergo reliquum ex Z A quadratum majus est quadrato ex A G,



& ob id recta linea Z A major est recta A G, atque est A Z quidem ad unam polyhedri basim, A G vero ad superficiem perpendicularis, quare polyhedrum minoris sphæræ superficiem non tanget. Duabus igitur sphæris circa idem centrum existentibus, in majori solidum descriptum est minoris sphæræ superficiem non tangens. Quod facere oportebat.

Cor. Quod si etiam in altera sphæra solido polyhedro descripto, in sphæra B C D E simile solidum polyhedrum describatur, habebit solidum polyhedrum in sphæra B C D E ad solidum polyhedrum in altera sphæra triplicatam proportionem ejus, quam diameter sphæræ B C D E habet ad alterius sphæræ diametrum. divisis enim solidis in pyramides numero æquales, & ejusdem ordinis: erunt pyramides similes. similes autem pyramides inter se in triplicata sunt proportione homologorum laterum. ergo pyramis cujus basis est K B O S quadrilaterum, vertex autem punctum A, ad pyramidem in altera sphæra ejusdem ordinis triplicatam proportionem habet ejus, quam latus homologum habet ad

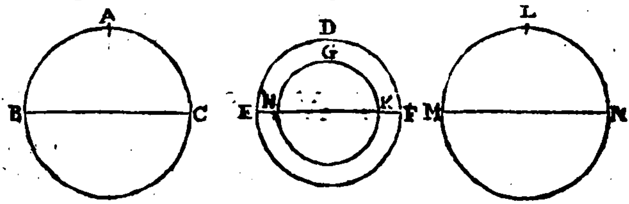
mologum

mologum latus; hoc est, quam habet A B ex centro sphæræ circa centrum A existentis ad eam, quæ est ex centro alterius sphæræ. similiter & unaquæque pyramis earum, quæ sunt in sphæra circa centrum A ad unamquamque pyramidum ejusdem ordinis, quæ sunt in altera sphæra, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet A B ad eam, quæ est ex centro alterius sphæræ. Et ut unum antecedentium ad unum consequentium, ita antecedentia omnia ad omnia consequentia. quare totum solidum polyhedrum, quod est in sphæra circa centrum A, ad totum solidum polyhedrum, quod in altera sphæra, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet A B ad eam, quæ est ex centro alterius sphæræ, hoc est, quam habet B D diameter ad alterius sphæræ diametrum.

PROP. XVIII. THEOR.

Sphæræ inter se in triplicata sunt proportione suarum diametrorum.

Intelligantur sphæræ A B C D E F; quarum diametri B C E F. dico A B C sphæram ad sphæram D E F triplicatam proportionem habere ejus, quam habet B C ad E F. Si enim non ita est, sphæra A B C ad sphæram minorem ipsa D E F, vel ad majorem, triplicatam proprotionem habebit ejus, quam habet B C ad E F. Habeat primo ad minorem, videlicet ad G H K. & intelligatur sphæra D E F circa idem centrum, circa quod sphæra G H K: describaturque in majori sphæra D E F solidum polyhedrum non tangens a minorem sphæram G H K in superficie; & in sphæra A B C describatur solidum polyhedrum simile ei, quod in sphæra D E F descri- a 17 hujus.



ptum est. solidum igitur polyhedrum, quod in sphæra A B C ad solidum polyhedrum, quod in sphæra D E F triplicatam b proportionem habet ejus, quam B C ad E F. habet autem A B C sphæra ad sphæram G H K triplicatam proportionem ejus, quam B C ad E F ergo ut A B C sphæra ad sphæram G H K, ita solidum polyhedrum in sphæra A B C ad solidum polyhedrum in sphæra D E F; & permutando, ut A B C b Corol antecedente.

sphæra ad solidum polyhedrum, quod in ipsa est, ita GHK sphæra ad solidum polyhedrum, quod in sphæra DEF. major autem est sphæra ABC solido polyhedro, quod est in ipsa. ergo & GHK sphæra polyhedro, quod in sphæra DEF est major. sed & minor, ab ipso enim comprehenditur, quod fieri non potest. non igitur ABC sphæra ad sphæram minorem ipsa DEF triplicatam proportionem habet ejus, quam BC ad EF. similiter ostendemus neque DEF sphæram ad sphæram minorem ipsa ABC triplicatam habere proportionem ejus, quam habet EF ad BC. dico insuper sphæram ABC neque ad majorem sphæram ipsa DEF triplicatam proportionem habere ejus, quam BC ad EF. si enim fieri potest, habeat ad majorem LMN. invertendo igitur sphæra LMN ad ABC sphæram triplicatam proportionem habet ejus, quam diameter EF ad BC diametrum. ut autem sphæra LMN ad ABC sphæram, ita sphæra DEF ad sphæram quandam minorem ipsa ABC, quoniam sphæra LMN major est ipsa DEF. ergo & DEF sphæra ad sphæram minorem ipsa ABC triplicatam proportionem habet ejus, quam EF ad BC; quod fieri non posse ostensum est. non igitur ABC sphæra ad sphæram majorem ipsa DEF triplicatam proportionem habet ejus, quam BC ad EF. ostensum autem est neque ad minorem. ergo ABC sphæra ad sphæram DEF triplicatam proportionem habebit ejus, quam BC ad EF. Quod demonstrare oportebat.

FINIS.