LES ELEMENS D'EUCLIDE,

EXPLIQUEZ D'UNE MANIERE nouvelle & très-facile, avec l'usage de chaque Proposition pour toutes les parties des Mathématiques.

Par le P. DECHALLES, *de la Comp. de* JESUS.

NOUVELLE EDITION.

Revûë, corrigée & augmentée par M. OZANAM, *de l'Académie Royale des Sciences.*

A PARIS,
Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT.

M. DCC. LIII.

HUIT LIVRES DES ELEMENS D'EUCLIDE.

Avec l'Usage des Propositions.

LIVRE PREMIER.

LE dessein d'Euclide dans ce Livre est, de donner les premiers principes de la Geometrie; & pour le faire avec methode, il commence par les Définitions, & par l'explication des Termes les plus ordinaires. Il fait ensuite quelques suppositions: Et ayant proposé quelques Maximes que la raison naturelle nous enseigne, il prétend ne rien avancer sans dé-

monstration, mais convaincre une personne qui ne voudroit rien accorder, que ce qu'on l'obligeroit d'avoüer. Dans les premieres Propositions il traite des Lignes & des divers Angles qui se forment à leur rencontre: & ayant besoin pour en démontrer les proprietez, de comparer quelques Triangles, il le fait dans les huit premieres Propositions. Il donne ensuite quelques pratiques pour diviser un angle, & une ligne en deux également, & pour tirer une perpendiculaire. Il poursuit les proprietez du Triangle; & ayant montré celles des lignes paralleles, il acheve d'expliquer les Triangles, pour passer aux Parallelogrammes; donnant la maniere de réduire toute sorte de Polygone à une figure plus reguliere, sçavoir à un Parallelogramme. Il finit ce premier Livre par la celébre Proposition de Pythagore, par laquelle il démontre que dans un Triangle rectangle, le quarré de la base est égal aux quarrez des deux autres côtez mis ensemble.

LES DEFINITIONS.

1. LE Point est ce qui ne contient aucune partie.

Cette définition se doit prendre dans ce sens. La quantité que nous concevons sans distinguer ses parties, ou sans penser qu'elle en ait, est un point Mathematique, bien different de ceux de Zenon, qui étoient tout à fait indivisibles, puis qu'on peut douter avec raison, si ces dernieres sont possibles quoiqu'on ne doute pas des premiers, si on les conçoit comme il faut.

2. La ligne est une longueur sans largeur.

Le sens de cette définition est le méme que celui de la précedente. La quantité que nous considerons comme une longueur, sans faire réflexion à sa largeur, ni à son épaisseur, est ce que nous entendons par ce mot de ligne; quoiqu'on ne puisse pas tra-

tracer une ligne réelle, qui n'ait quelque largeur déterminée. On dit ordinairement que la ligne est produite par le mouvement d'un point : ce qu'on doit bien remarquer ; puisque de cette sorte le mouvement peut produire toute sorte de quantité. Imaginez-vous donc qu'un point se meut, & qu'il laisse une trace dans le milieu qu'il parcourt, cette trace est une ligne.

3. Les deux extrêmitez d'une ligne sont des points.

4. La ligne droite est celle dont les points sont placez également dans l'entre-deux.

Ou si vous aimez mieux ; la ligne droite est la plus courte de toute celles qu'on peut tirer d'un point à l'autre.

5. La surface ou superficie, est une quantité qui a quelque longueur, & quelque largeur, sans aucune épaisseur.

6. La surface plane ou droite, est celle

celle dont les lignes sont posées également dans l'entre-deux; ou celle à laquelle une ligne droite se peut ajuster en tous sens.

J'ai déja remarqué que le mouvement pouvoit produire toute sorte de quantité: ainsi nous disons que quand une ligne en parcourt une autre, elle produit une surface, ou un plan: & que ce mouvement a du rapport à la multiplication Arithmetique. Imaginez-vous donc que la ligne A B parcourt la ligne B C, & qu'elle garde toûjours la même situation, sans pancher d'un côté ni d'autre: le point A décrira la ligne AD, le point B, la ligne B C, & les autres points d'entre-deux, d'autres lignes paralleles, qui composeront la surface A B, CD. J'ajoûte que ce mouvement répond à la multiplication Arithmetique: car si je sçavois le nombre des points, qui sont dans les lignes A B, B C, les multipliant l'un par l'autre, j'aurois le nombre des Planche 1. Fig. 1.

 points,

points, qui compoſe la ſurface ABCD. Comme ſi AB contenoit quatre points, & BC ſix: diſant quatre fois ſix, font vingt-quatre; la ſurface ABCD ſeroit compoſée de vingt-quatre points. Or à la place d'un point Mathematique je puis prendre quelque quantité que ce ſoit; par exemple, un pied, pourvû que je ne les ſoudiviſe pas en parties.

8. L'angle plan, eſt l'ouverture de deux lignes, qui ſe touchent ſur une ſuperficie plane, & qui ne compoſent pas une ſeule ligne.

Pl. 1. Fig. 2. *Comme l'ouverture D, des lignes AB, CB, qui ne ſont pas parties d'une même ligne.*

L'angle rectiligne eſt l'ouverture de deux lignes droites.

C'eſt principalement de cette ſorte d'angle, que je dois traiter maintenant; parce que l'experience me fait voir, que la plûpart de ceux qui commencent, ſe trompent, meſurant la grandeur d'un anlge, *angle, par le plus, ou moins de longueur des lignes qui le forment & le comprennent.*

L'angle le plus ouvert, eſt le plus grand; c'eſt-à-dire, quand les lignes d'un angle s'écartent davantage que celles d'un autre angle, les prenant à la même diſtance de leur pointe, le premier eſt plus grand que le ſecond. Ainſi l'angle A eſt plus grand que l'angle E; parce que prenant les points D & B autant éloignez de la pointe A, que les points G & L, le ſont de la pointe E; les points B & D, ſont plus écartez l'un de l'autre, que les points G & L: d'où je conclus que ſi on continuoit E G, E L, l'angle E ſeroit toûjours de même grandeur, & plus petit que l'angle A. Pl. 1. Fig. 3. & 4.

Nous nous ſervons de trois lettres, quand nous voulons nommer un angle, & la lettre du milieu en marque la pointe, comme l'angle B A D, eſt l'angle que les lignes B A, A D forment par *leur concours au point A: l'angle B A C, est celui des lignes B A, A C: l'angle C A D, est compris par les lignes C A, A D, & le point A est nommé angulaire.*

C'est par le Cercle qu'on mesure les angles. Ainsi voulant sçavoir la grandeur de l'angle BAD, je mets le pied du compas au point A, & je décris l'arc ou partie de Cercle BCD: l'angle sera d'autant plus grand, que l'arc BCD, qui le mesure, contiendra plus de parties de son Cercle: & parce que communément on divise un Cercle en trois cens soixante parties, qu'on nomme degrez, on dit qu'un angle est de vingt, trente, quarante degrez, quand l'arc renfermé dans ces lignes contient vingt, trente, quarante degrez. Ainsi l'angle est plus grand, qui contient plus de degrez: comme l'angle B A D, est plus grand que G E L. La ligne C A divise l'angle B A D par le milieu, parce que les arcs B C, CD sont égaux: & l'angle B A C,

est

est partie de l'angle B A D, parce que l'arc B C est partie de l'arc B D.

10. Quand une ligne tombant sur une autre, fait de part & d'autre des angles égaux; ils sont droits ou Ortogones, & la ligne est perpendiculaire, ou Ortogonale.

Comme si la ligne AB tombant sur CD, fait avec la ligne CD des angles égaux A B C, A B D; c'est-à-dire, si ayant décrit du centre B, un demi Cercle C A D; les arcs A C, A D sont égaux: les angles A B C, A B D sont appellez droits, & la ligne A B perpendiculaire. Ainsi parce que l'arc C A D est un demi Cercle, les arcs C A, A D sont chacun d'un quart de Cercle, c'est-à-dire la quatriéme partie de trois cens soixante degrez, qui est par consequent de nonante degrez. Pl. 1. Fig. 5.

11. L'angle obtus est plus grand qu'un angle droit.

Comme l'angle E B D, est obtus ou

émoussé; parce que son arc E B D, contient plus d'un quart de Cercle.

12. L'angle aigu est plus petit qu'un angle droit.

Comme l'angle E B C est aigu; parce que l'arc E C qui le mesure, a moins de nonante degrez.

13. Le Terme est l'extrêmité, ou le bout d'une quantité.

14. La figure est une quantité terminée par un ou plusieurs termes.

Elle doit être bornée & fermée de tous côtez pour être appellée figure.

15. Le Cercle est une figure plane, bornée par le contour d'une ligne, qu'on nomme circonference ou periferie, qui est par tout également éloignée du point du milieu de la figure, appellé Centre.

Pl. 1. Fig. 6. *La figure RV, SX est un Cercle, parce que toutes les lignes TR, TS, TV, TX, tirées du point T, jusqu'à la circonference RV, SX sont égales.*

16.

16. Ce point T du milieu du Cercle s'appelle centre.

17. Le diametre du Cercle, est quelque ligne droite que ce soit, qui passant par le centre, aboutit à sa circonference.

Il est évident que le diametre divise le Cercle & sa circonference en deux également, comme VX, ou RS.

Le demi diametre, ou rayon du Cercle, est une ligne qui partant du centre aboutit à la circonference du Cercle: Ainsi les lignes TS, TR, TV, TX, sont autant de demi diametres.

18. Le demi-Cercle est une figure terminée par le diametre, & la demi circonference, comme VSX.

19. Les figures rectilignes sont terminées par des lignes droites. Il y en a de trois, de quatre, de cinq, & d'autant de côtez qu'on voudra, & pour lors ces figures sont appellées Polygones.

Le

Le Triangle est la premiere de toutes les figures rectilignes.

Euclide divise les Triangles rectilignes, ou par les angles, ou par les côtez.

Pl. 1. Fig. 7. 8. & 9. 20. Le Triangle équilateral, est celui qui a les trois côtez égaux, comme le Triangle ABC.

21. Le Triangle Isocele, est celui qui a seulement deux côtez égaux, comme si les côtez DE, EF sont égaux, le Triangle DEF est Isocele.

22. Le Triangle Scalene a tous les côtez inégaux comme le Triangle HIG.

23. Le Triangle rectangle, ou Ortogone, est celui qui a un angle droit, comme DEF, supposé que l'angle E soit droit.

24. Le Triangle Obtusangle ou Amblygone a un angle obtus, comme IGH.

25. Le Triangle acutangle ou Oxy-

Oxygone a tous les angles aigus, comme A B C.

26. La figure Quadrilaterale ou qui a quatre côtez, est appellée rectangle, si les quatre angles sont droits. Pl. 1. Fig. 10.

27. Le quarré est le parfait rectangle, parce qu'il a tous les côtez égaux, & tous les angles droits, comme le quarré AB, qui est équilateral & rectangle.

28. La figure Quadrilaterale, qui est barlongue, & qui est équiangle, ayant tous les quatre angles droits comme CD, mais qui n'est pas équilaterale; n'ayant que les côtez opposez égaux, est ordinairement appellée quarré-long, ou simplement rectangle. Pl. 1. Fig. 11.

29. La figure Quadrilaterale, qui est équilaterale, mais non pas équiangle, ni rectangle, n'ayant que les angles opposez égaux comme BF, est appellée Rhombe. Pl. 1. Fig. 12.

30.

Pl. 1. Fig. 13. 30. La figure Quadrilaterale, qui a les côtez opposez égaux entr'eux, comme GH, sans être équilaterale ni rectangle; est appellée Rhomboïde.

31. Les autres figures Quadrilaterales irregulieres, s'appellent Trapeses.

32. Les lignes droites paralleles, sont celles qui ne concourent, jamais étant par tout également éloignées l'une de l'autre, comme les lignes AB, CD.

Pl. 1. Fig. 14. 33. Le parallelograme est une figure de quatre côtez, dont les deux côtez opposez sont parallels, comme la figure ABDC, dont les côtez AB, CD, & AC, BD sont parallels.

Pl. 1. Fig. 15. 34. Le diametre où diagonale d'un parallelograme, est une ligne droite, tirée d'angle en angle, comme BC.

35. Les complemens sont les deux petits parallelogrames par lesquels le diametre ne passe pas, comme AFEH, & GDIE.

Les

Les Demandes, ou Suppositions.

1. On ſuppoſe qu'on peut tirer une ligne droite, de quelque point que ce ſoit, à un autre.

2. Qu'on peut continuer une ligne droite, autant que l'on voudra.

3. Qu'on peut d'un centre donné, décire un Cercle à quelque ouverture de compas que ce ſoit.

Les Maximes, ou Axiomes.

1. Les quantitez qui ſont égales à une troiſiéme, ſont égales entr'elles.

2. Si on ajoûte des quantitez égales à d'autres quantitez auſſi égales, celles qui en ſeront produites ſeront égales.

3. Si on retranche de deux quantitez égales, deux autres quantitez auſſi égales, celles qui reſteront ſeront égales.

4. Si on ajoute des parties égales

à des quantitez inégales, les composées demeureront inégales.

5. Si des quantitez égales on en retranche des parties inégales, celles qui resteront seront inégales.

6. Les quantitez qui sont doubles, triples, quadruples d'une même quantité, sont égales entr'elles.

7. Les quantitez sont égales, lorsqu'étant ajustées l'une sur l'autre, elle ne se surpassent point.

8. Les lignes & les angles égaux, étant mis l'un sur l'autre, ne se surpassent pas

9. Le tout est plus grand que sa partie.

10. Tous les angles droits sont égaux entr'eux.

Pl. 1. Fig. 16. L'onziéme Maxime d'Euclide porte que, si les lignes AB, CD, forment avec la ligne EF, qui les coupe toutes deux, des angles internes BEF, DFE, plus petits que deux droits,

droits, ces lignes AB, CD étant prolongées, se rencontreront vers B & D.

Quoique cette Maxime soit véritable, elle n'est pas assez claire pour être reçûë pour Maxime: ainsi j'en substituë une autre en sa place.

11. Si deux lignes sont paralleles, toutes les perpendiculaires renfermées entr'elles seront égales.

Comme, si les lignes AB, CD sont paralleles, les lignes perpendiculaires FE, HG, sont égales. Car si EF étoit plus grande que GH; les lignes AB, & CD seroient plus éloignées entr'elles vers les points E & F, que vers G, & H: ce qui seroit contre la définition des paralleles, laquelle porte, qu'elles ont par tout la même distance, mesurée par des perpendiculaires. Pl. 1. Fig. 17.

12. Deux lignes droites, ne comprennent pas une espace: c'est-à-dire, ne l'enferment, & ne l'entourent pas de tous côtez.

Pl. 1. Fig. 18. 13. Deux lignes droites, n'ont pas un ſegment commun : *Je veux dire que des deux lignes droites AB, CB qui ſe rencontrent au point B, il ne ſe fait pas une ſeule ligne BD; mais qu'elles ſe coupent, & ſe ſéparent après s'être rencontrées en B. Car ſi on décrit un Cercle du point B comme centre, AFD ſeroit un demi Cercle, puiſque la ligne droite ABD, paſſant par le centre B, diviſe le Cercle en deux également. Le ſegment CFD ſeroit auſſi un demi Cercle, puiſque CBD ſeroit auſſi une ligne droite qui paſſeroit par le centre B: Donc le ſegment CFD ſeroit égal au ſegment AFD, la partie à ſon tout; ce qui ſeroit contraire à la neuviéme Maxime.*

AVERTISSEMENT.

Nous avons deux ſortes de Propoſitions : quelques-unes ne font que conſiderer une vérité, ſans deſcendre à la pra-

pratique; & nous les appellons Theoremes, Les autres nous proposent quelque chose à faire; & on les appelle Problêmes.

Le premier nombre des citations, est celui de la Proposition: Le second marque le Livre. Comme par la 2. du 3. signifie, par la seconde Proposition du troisiéme Livre. Que si on ne rencontre qu'un nombre, il signifie la Proposition du Livre que l'on explique.

PROPOSITION I.

PROBLEME.

Tracer un Triangle équilateral sur une ligne donnée.

QU'on propose la ligne AB pour base d'un Triangle équilateral. Décrivez du centre A, à l'intervalle AB, le Cercle BCD: décrivez aussi du centre B, à l'intervale BA, le Cercle

cle DAC, qui coupe le premier au point C. Tirez ensuite les lignes AC, BC. Je dis que tous les côtez du Triangle ABC sont égaux.

Démonstration.

Pl. 1. Fig. 19. Les lignes AB, AC, tirées du même centre A, à la circonference du Cercle BCD, sont égales par la définition du Cercle: les lignes BA, BC sont aussi égales, puisqu'elles sont tirées du centre B, à la circonference du Cercle CAD: enfin les lignes AC, BC étant égales à la même ligne AB, sont aussi égales entr'elles par le premier Axiome. Donc les trois côtez du Triangle ABC sont égaux.

USAGE.

Pl. 2. Fig. 20. *On peut se servir très-utilement du Triangle équilateral pour trouver une distance inaccessible, telle que la largeur d'une Rivière. Il faudroit pour cela décrire un Triangle équilateral sur une*

une planche, & s'en servir en cette sorte: le Triangle BDE étant posé horisontalement, observez un point A au delà de la Riviére, par le côté BD, & quelque autre point C, par le côté BE: transportez vôtre Triangle le long de la ligne BE, & faites en sorte de pouvoir le placer dans un endroit, où vous puissiez le long des côtez GC & GF, voir les points A & B. Je suppose qu'on y soit parvenu, & que le point C soit celui qu'on cherche; cela étant on aura le Triangle équilateral ABC, dont le côté BC peut se connoître. On peut aussi connoître la distance DF, qui étant parallele à BC peut passer par la base du Triangle équilateral DAF, lequel étant rapporté sur le papier par le moyen d'une Echelle, on peut trouver la perpendiculaire AN, qui est la distance qu'on cherche.

PRO-

PROPOSITION II. & III.

PROBLEME.

1. *Tirer d'un point donné une ligne égale à une autre.* 2. *Couper d'une grande ligne une partie égale à une plus petite.*

Fig. 21. SI l'on veut du point donné B, décrire une ligne égale à celle de A; prenez avec le Compas la longueur de cette ligne, & du point donné B comme centre décrivez un Cercle. Puis ayant tiré une ligne BD du centre à la circonference, elle sera égale à la donnée A par la définition du Cercle.

Maintenant si l'on veut de la grande ligne AC, retrancher une partie égale à la ligne A, il ne faut que prendre la longueur de cette ligne avec le Compas, & de l'extrêmité B comme centre décrire un Cercle, qui ayant coupé la ligne BC, on aura la partie BI, qui eſt ce qu'on demande.

USAGE.

On eſt ſouvent obligé de faire une ligne égale à une autre, & retrancher d'une grande ligne une partie égale à une plus petite, quand on conſtruit des figures ſur le Papier : on peut néanmoins remarquer, qu'il ſuffit quand on veut faire une ligne égale à une autre, de marquer deux points ſans décrire de Cercle comme Euclide l'enſeigne.

PROPOSITION IV.

THEOREME.

Si deux Triangles ont deux côtez égaux chacun au ſien, & les angles d'entre-deux égaux, il auront auſſi les baſes & les autres angles égaux.

AUx deux Triangles propoſez on ſuppoſe que le côté AB eſt égal au côté DE, & que pareillement les côtez AC & DF sont égaux, aussi bien que les angles A & D. On veut démontrer que les bases BC & EF égales, aussi bien que les angles qui sont à leurs extremitez.

Fig. 22. & 23.

Démonstration.

Si l'on suppose le Triangle ABC posé sur le Triangle DEF, en sorte que les côtez égaux conviennent parfaitement; les angles A & D ne se surpasseront pas, puisqu'ils ont été supposez égaux, non plus que leurs côtez AC, DF & AB, DE. Cela étant, leurs extrêmitez viendront aboutir les unes sur les autres, & la base BC se trouvera précisément égale à la base EF; les angles B & E seront égaux, puisque les côtez AB, BC de l'un conviennent parfaitement sur les côtez DE & EF de l'autre. L'angle C sera aussi démontré égal à l'angle F, par la même raison. Donc ces deux

deux Triangles sont égaux en tout sens, puisque nous avons fait voir qu'étant posez l'un sur l'autre, ils ne se surpassent point. C. Q. F. D.

USAGE.

Qu'on doive mesurer la ligne inaccessible AB; je regarde du point C, les points A & B; puis je mesure l'angle C. Je mesure avec la toise les lignes AC, BC, que je suppose être accessibles. Je m'écarte ensuite dans la Campagne, je fais un angle DFE égal à l'angle C. Je fais aussi FD & FE égal à CA & CB. Or suivant cette Proposition les lignes AB, DE sont égales. C'est pourquoi mesurant avec la toise la ligne accessible DE, je connoîtrai la ligne inaccessible AB. Fig. 24. & 25

PROPOSITION V.

THEOREME.

Dans les Triangles Isoceles ; les angles qui sont dessus la base sont égaux, comme aussi ceux qui sont au dessous.

QUe le Triangle ABC soit isocele, c'est-à-dire, que les côtez AB, AC soient égaux ; je dis que les angles ABC, ACB sont égaux, comme aussi les angles GBC, HCB, qui sont au dessous de la base BC. Qu'on s'imagine un autre Triangle DEF, qui ait l'angle D égal à l'angle A, & les côtez DE, DF égaux
Fig. 27. aux côtez AB, AC. Puisque les côtez AB, AC sont égaux, les quatre lignes AB, AC, DE, DF sont égales.

Démonstration.

Puisque les côtez AB, DE, AC, DF sont égaux, comme aussi les angles

gles A & D; ſi on mettoit le Triangle DEF, ſur ABC, ils ne ſe ſurpaſſeroient pas l'un l'autre, mais la ligne DE tomberoit ſur AB; DF ſur AC; & EF ſur BC (par la 4.) Donc l'angle DEF, ſeroit égal à ABC. Et puiſqu'une partie de la ligne DE, tombe ſur AB; toute la ligne DI, ſera ſur AG, autrement deux lignes droites n'auroient qu'une partie commune; donc l'angle IEF ſera égal à GBC. Que ſi on renverſe le Triangle DEF, le preſentant d'un autre ſens au Triangle ABC, c'eſt-à-dire, de telle ſorte que DF tombe ſur AB, & DE ſur AG. Puiſque les quatre lignes AB, DF, AC, DE ſont égales; comme auſſi les angles A & D: les Triangles s'ajuſteront dans ce ſens, & les angles ACB, DEF, IEF, ſeront égaux. Or dans la premiere comparaiſon, l'angle ABC étoit égal à DEF, & GBC à IEF; donc les angles ABC, ACB qui ſont égaux au même DEF, & GBC; HCB, qui ſont auſſi égaux au même IEF, ſeront égaux entr'eux.

PROPOSITION VI.

THEOREME.

Si un Triangle a deux angles égaux entr'eux, les côtez qui le ſoutiennent ſeront auſſi égaux.

Fig. 26. JE ſuppoſe que le Triangle ABC a les deux angles B & C égaux, cela étant, je dis que les côtez AB, AC qui ſoutiennent ces deux angles ſont auſſi égaux.

Démonſtration.

Pour faire voir que le côté AB eſt égal au côté AC, ſi les angles B & C ſont égaux. Suppoſons pour un inſtant qu'ils ſont inégaux; retranchez du côté AB, que je ſuppoſe être plus grand

grand que AC, la partie BD égale à ce même côté AC; tirez la ligne CD: ensuite comparez le Triangle DBC avec le Triangle ABC, le côté DB du premier Triangle, est égal au côté AC du second par supposition. Or le côté BC est commun aux deux Triangles; de plus l'angle B compris entre ces deux côtez DB & BC, est égal à l'angle ACB compris des deux côtez AC & CB; donc (par la 4.) les Triangles DBC & ABC seroient égaux; mais cela ne peut être sans absurdité, d'autant que ce seroit faire voir que la partie est aussi grande que le tout; il est donc impossible que le côté AB soit plus grand que le côté AC. On prouvera de même que le côté AC ne sçauroit être plus grand que le côté AB; ainsi les deux côtez AB, AC sont dont égaux entr'eux. C. Q. F. D.

J'ai démontré cette Proposition de

même qu'elle est démontrée dans les Oeuvres Posthumes de Mr. Rohault m'ayant paruë plus convaincante, que celles qui se trouvent dans les anciennes Editions de ce Livre.

USAGE.

Fig. 28. *On peut se servir très-utilement de cette Proposition pour mesurer l'élevation d'une Tour, ou d'une Obelisque; ainsi si l'on vouloit sçavoir l'élevation de l'Obelisque AB, il faudroit attendre que le Soleil fût élevé de 45. degrez sur l'horizon, pour avoir l'ombre CB, égale à la hauteur AB; car nous verrons par la suite qu'au Triangle rectangle, tel que ABC, si l'angle C est de 45. degrez, l'angle A sera aussi de 45. par consequent le Triangle sera Isocele; c'est-à-dire, que la hauteur AB sera égale à la longueur de l'ombre CB, laquelle étant connuë on aura ce qu'on cherche.*

Nous

Nous ometrons la Proposition septiéme, comme n'étant d'aucun usage.

PROPOSITION VIII.

THEOREME.

Si deux Triangles ont tous les côtez égaux, leurs angles compris par ces côtez égaux, seront aussi égaux entr'eux.

LEs Triangles ABC & DEF sont supposez avoir leurs côtez égaux les-uns aux autres, c'est-à-dire, que AB, égale à DE, AC à DF, & BC à EF. Cela étant je dis que l'angle A sera égal à l'angle D, B à E, C à F. Fig. 29.

Démonstration.

Cette Proposition peut se démontrer très-aisément, de même que la quatriéme. Car imaginez vous que le premier Triangle a été posé sur le second; cela étant leurs côtez ayant été ſuppoſez égaux, les extrêmitez des côtez de l'un viendront aboutir ſur les extrêmitez des côtez de l'autre, les trois points ABC, ne faiſant qu'un avec les trois points DEF, il eſt aiſé de voir que les angles formez par les côtez égaux, ſont égaux. C. Q F. D.

PROPOSITION IX.

PROBLEME.

Diviſer un angle en deux également.

Fig. 30. QU'on propoſe à diviſer en deux également l'angle SRT. Coupez deux lignes égales RS, TR, mettant le pied du Compas en R, & à quelque ouverture de compas que ce ſoit décrivant l'arc ST, tirez la ligne ST, & décrivez par la premiere Propoſition, le Triangle équilateral SVT. Je dis que la ligne RV, diviſe

divise l'angle SRT en deux également; c'est-à-dire, que les angles VRT, VRS sont égaux.

Démonstration.

Les Triangles VRS, VRT, ont le coté VR commun; le coté RT a été pris égal au coté RS: la base SV, est égale à VT, puisque le Triangle SVT est équilateral. Donc (par la 8.) les angles SRV, TRV sont égaux.

USAGE.

Il est nécessaire de se servir de cette Proposition dans les Problêmes suivans, on s'en sert encore dans la plûpart des reductions qu'on fait des figures. Il seroit à souhaiter qu'on pût diviser un angle en trois, en cinq parties égales aussi aisément qu'en quatre, en 8, *ou en* 16: *mais ceci est d'une Geométrie differente; c'est-à-dire, que cela ne se* *peut faire que par le moyen des courbes, c'est-à-dire, des sections coniques. On trouvera cependant dans le beau Dictionnaire de Mathematique de Mr Ozanam, au lieu où il traite de la Geométrie Speculaire, une courbe propre à diviser un angle en trois, en cinq également, qu'il dit être de l'invention de M. Tschirnhaus; cette courbe est est très-commode, & on peut s'en servir aisément.*

PROPOSITION X.

PROBLEME.

Diviser une ligne en deux également.

Fig. 31. ON propose de diviser la ligne AB, en deux parties égales, pour cela il ne faut que faire un Triangle équilateral ACB, & diviser (par le Prob. préced.) l'angle C en deux également, par la ligne EC; le point E ou cette ligne coupe AB,

AB, eſt le point du milieu qu'on cherche; ce qui eſt bien évident, car le Triangle ACE eſt égal au Triangle ACB, puiſqu'ils ont chacun un angle égal, qui eſt la moitié de celui qu'on vient de diviſer, le côté EC leur eſt commun, & les côtez AC, CB ſont égaux, donc (par la 4.) les baſes AE & EB ſont égales.

PROPOSITION XI.

PROBLEME.

D'un point pris ſur une ligne élever une perpendiculaire.

SOit la ligne donnée BC, & le point donné A, il faut de part & d'autre, de ce point donné, prendre les parties égales AB & AC; puis ayant ouvert un Compas d'une grandeur volontaire, du point C comme centre décrivez l'arc D, du point Fig. 32.

point B avec la même ouverture de Compas, décrivez-en un second qui aille couper le premier, du point A au point de section D, tirez la ligne AD, elle sera perpendiculaire sur DC.

Démonstration.

Nous avons les deux Triangles égaux DAB & DAC, car leurs côtez sont égaux par la construction: Donc (par la 8.) l'angle DAB & DAC sont égaux, & par conséquent droits, ce qui prouve que la ligne AD est perpendiculaire.

PROPOSITION XII.

PROBLEME.

Tirer une perpendiculaire à une ligne par un point hors de la même ligne.

Fig. 33. IL ne faut que du point A comme centre, décrire l'arc BC, ayant divisé la partie BC en deux également

ment au point E, la ligne tirée de A en E sera perpendiculaire, ce qui est aisé de démontrer; car les rayons AB, AC étant égaux aussi bien que les côtez BE, EC; la ligne AE étant commune, on connoîtra comme dans le Problême précédent, que la ligne AE est perpendiculaire, puisqu'elle fait deux angles droits avec la ligne BC.

PROPOSITION XIII.

THEOREME.

Une ligne qui tombe sur une autre, fait avec elle deux angles droits, ou deux angles, lesquels pris ensemble sont égaux à deux droits.

SI la ligne AD tombe perpendiculairement sur BC, les angles ADC & ADB seront droits (par la Définition 11.) mais si, par exemple, Fig. 34.

Fig. 35. ple, la ligne AD, au lieu d'être perpendiculaire étoit oblique, on auroit un angle obtus, lesquels pris ensemble vaudront deux droits; car si du point D comme centre vous décrivez un demi Cercle, l'arc FC sera la mesure de l'angle obtus, & l'arc BF sera la mesure de l'angle aigu; & comme ces deux arcs pris ensemble valent le demi Cercle, & que le demi Cercle est la mesure de deux angles droits; il s'ensuit qu'une ligne qui tombe sur une autre fait deux angles droits, ou deux angles qui leur sont égaux.

USAGE.

Fig. 36. *Quand nous connoissons un des deux angles, qu'une ligne fait en tombant sur une autre, il est facile de connoître l'autre; car, par exemple, si je connois l'angle EAD de 50. degrez, je n'ai qu'à les soustraire de 180, qui est*

est la valeur de deux angles droits, il restera 130 pour la valeur de l'angle obtus EAC.

J'obmettrai la Proposition 14. comme étant peu considerable. Je pourrai faire de même à l'égard de plusieurs autres, pour ne m'attacher uniquement qu'à celles dont on ne peut se passer.

PROPOSITION XV.

THEOREME.

Si deux lignes droites se coupent, les angles opposez au sommet sont égaux.

SOit les deux lignes AB & DC qui se coupent au point E. Je dis que l'angle AED, est égal à l'angle CEB. Fig. 38.

Démonstration.

Si l'on considere que la ligne AE, en tombant sur DC, fait avec elle les angles AED & AEC égaux à deux

deux droits (par la 13.) pareillement la ligne CE tombant sur AB, fait avec elle les angles BEC & AEC qui valent deux droits. Cela étant on peut remarquer que l'angle AEC est commun à cette valeur de deux droits; ainsi si on l'ôte des uns, & des autres, il restera l'angle CEB, égal à l'angle AED. C. Q. F. D.

USAGE.

Cette Proposition est très-considerable; elle sert principalement pour démontrer la 27. & pour l'appliquer à la pratique, soit, par exemple, l'angle AEC que l'on ne peut mesurer avec un instrument, parce que je suppose que c'est un Mur, ou tout autre Fig. 20. *corps solide qu'on ne peut parcourir, il faut prolonger les côtez AE & CE a volonté vers D & B, je veux dire qu'il faut se mettre sur l'alignement de ses côtez, pour avoir le Triangle BDE,*

BDE, qui se fait aussi petit, & aussi grand que l'on veut. Cela étant fait, il faut en mesurer les côtez pour les rapporter sur le Papier, pour faire un Triangle semblable, par lequel on pourra connoître l'angle E qu'on cherche.

PROPOSITION XVI.

THEOREME.

L'angle exterieur d'un Triangle fait par la continuation d'un côté, est plus grand que chacun des interieurs opposez.

Continuez le côté BC du Triangle ABC, je dis que l'angle exterieur ACD, est plus grand que l'angle interieur opposé ABC, ou BAC. Imaginez-vous que le Triangle ABC se meut le long de la ligne BD, & qu'il est transporté en CED. Fig. 39.

Dé-

Démonstration.

Il est impossible que le Triangle ABC se meuve de la sorte, sans que le point A change de place, allant vers E: Or s'il est meu vers E, l'angle ECD, c'est-à-dire ABC, est plus petit que l'angle ACD: donc l'angle interieur ABC, est plus petit que l'exterieur ACD.

Il est facile de prouver que l'angle A est aussi plus petit, que l'externe ACD: car ayant prolongé le côté AC jusqu'en F, les angles opposez BCF, ACD, sont égaux (par la 15.) & faisant glisser le Triangle ABC le long de la ligne ACF, je démontrerai que l'angle BCF est plus grand que l'angle A.

USAGE.

Pl. 3. Fig. 40. *Nous tirons de cette Proposition plusieurs conclusions très-utiles. La premiére* *niére que d'un point donné, on ne peut tirer qu'une perpendiculaire à une ligne. Par exemple, que la ligne AC ſoit perpendiculaire à BC: je dis que que AC, ne ſera pas perpendiculaire, parce que l'angle droit ACD qui eſt exterieur eſt plus grand que l'interieur ABC: donc ABC ne ſera pas un angle droit, ni AB une perpendiculaire.*

La ſeconde, qu'on ne peut tirer du même point A, que deux lignes égales; par exemple AC, AD ſur une même ligne ou plan FD, & que ſi on en tire une troiſiéme AE, elle ne ſera pas égale aux autres. Car puiſque AC, AD ſont égales, les angles ACD, ADC ſont égaux (par la 5.) or dans le Triangle AEC, l'angle externe ACB eſt plus grand que l'interne AEC: & ainſi l'angle ADE, eſt plus grand que AED: donc les lignes AE, AD, & par conſéquent AC, AE ne ſont pas égales.

La

La troisiéme, est que si la ligne AC, fait l'angle ACB aigu, & ACF obtus, la perpendiculaire tirée du point A, tombera du côté de l'aigu; car si on disoit que AE est perpendiculaire; & que l'angle AEF est droit, l'angle droit AEF seroit plus grand que l'angle obtus ACE. Ces conclusions nous servent pour mesurer les parallelogrammes, les Triangles, & les Trapezes, & pour les reduire aux figures rectangles.

On peut aussi facilement démontrer par cette Proposition la 27, comme on le peut voir dans les Elemens d'Euclide de Mr. Ozanam.

Nous omettrons la Proposition 17. comme n'étant qu'un Corollaire de la 32.

PRO-

PROPOSITION XVIII.

THEOREME.

Dans quelque Triangle que ce soit, le plus grand côté est opposé au plus grand angle.

QUe le côté BC du Triangle ABC, soit plus grand que le côté AC, je dis que l'angle BAC opposé au côté BC, est plus grand que l'angle B, opposé au côté AC. Coupez dans BC, la ligne CD égale à AC, & tirez AD. Fig. 42. & 43.

Démonstration.

Puisque les côtez AC, CD sont égaux, le Triangle ACD sera Isocele; & (par la 5.) les Angles CDA, CAD seront égaux. Or l'angle total BAC, est plus grand que l'angle CAD; donc l'angle BAC est plus grand que l'angle CDA; lequel é- Fig. 42. & 43.

tant

tant exterieur, eu égard au Triangle ABD, eſt plus grand que l'interieur B (par la 16.) donc l'angle BAC eſt plus grand que l'angle B.

La Propoſition 19. eſt, pour ainſi dire l'inverſe de celle-ci, ne diſant autre choſe, que le plus grand angle eſt oppoſé au plus grand côté; ainſi il me paroît qu'il eſt inutile de la rapporter ici, puiſque la démonſtration eſt la même que la précedente.

USAGE.

Fig. 43. *Cette Propoſition peut ſervir ſur le terrain, pour connoître de deux angles d'un Triangle celui qui eſt le plus grand, lors qu'on n'a point d'inſtrument pour les meſurer: car ſi, par exemple, le côté BC eſt plus grand que AC, qu'on peut meſurer à ſes pas, on connoît par cette Propoſition que l'angle BAC, eſt plus grand que l'angle C.*

PRO-

PROPOSITION XX.

THEOREME.

Dans quelque Triangle que ce ſoit, deux côtez pris enſemble ſont plus grand que le troiſiéme.

CEtte Propoſition ſe démontre aiſément par la définition de la ligne droite; car il eſt certain que dans le Triangle TLV, les deux côtez TL, & LV ſont plus grands pris enſemble que le côté TV, ce côté ici pouvant être conſideré comme une ligne droite, qui eſt la plus courte qu'on peut tirer du point T, au point V. Il n'en eſt pas de même des deux autres côtez pris enſemble, puiſqu'ils renferment une eſpace. C. Q. F. D. Fig. 46.

PROPOSITION XXI.

THEOREME.

Si dessus la même base, on décrit un petit Triangle dans un grand, les côtez du petit seront moindres que ceux du grand, & ils feront un angle plus grand.

Fig. 47. QU'on décrive le petit Triangle ADB; dans le Triangle ACB, dessus la même base AB. Je dis premierement que les côtez AC, BC, sont plus grands que les côtez AD, BD. continuez le côté AD jusqu'en E.

Démonstration.

Dans le Triangle ACE, les côtez AC, CE sont plus grands que le seul côté AE, (par la 20.) donc en y ajoûtant le côté EB, les côtez AC, CB seront plus grands que les côtez AE, EB. Pareillement dans le Triangle DBE, les côtez BE, ED, sont plus grands

grands que le ſeul côté BD ; & ajoûtant le côté AD, les côtez AE, EB, ſeront plus grands que AD, BD. Mais AE, EB ſont plus petits que AC, CB. Donc à plus forte raiſon AD, DB, ſeront plus petits que AC, CB.

Je dis de plus que l'angle ADB eſt plus grand que l'angle ACB ; car l'angle ADB eſt exterieur, eu égard au Triangle DEB. Il eſt donc plus grand que l'interieur DEB (par la 16.) pareillement l'angle DEB étant exterieur, eu égard au Triangle ACE, eſt plus grand que l'angle ACE : donc l'angle ADB eſt plus grand que l'angle ACB.

PROPOSITION XXII.

PROBLEME.

Décrire un Triangle qui ait ses côtez égaux à trois lignes données, pourvû que deux prises ensemble soient plus grandes que la troisiéme.

Fig. 48. QU'on propose à décrire un Triangle qui ait ses trois côtez égaux à trois lignes données à B, D, & E, Prenez avec le Compas la ligne D, & posant une de ses pointes au point B, faites un arc. Prenez ensuite la ligne E, & mettant le pied du Compas au point A, faites un autre arc qui coupe le premier au point C. Tirez les lignes AC, BC. Je dis que le Triangle ABC, est tel que vous le désirez.

Démonstration.

Le côté AC est égal à la ligne E, puisqu'il aboutit à un arc décrit du cen-

centre A à l'ouverture de la ligne donnée E. Pareillement le côté BC, eſt égal à la ligne D, puiſqu'il aboutit à un arc décrit du centre B, à l'ouverture de la ligne donnée D: & de plus la baſe AB eſt la troiſiéme ligne donnée; donc les trois côtez AC, BC, AB ſont égaux aux lignes E, D, AB.

J'ai ajoûté une condition, que deux des lignes priſes enſemble, ſoient plus grandes que la troiſiéme; parce que les arcs ne pourroient pas ſe couper, ſi les lignes D & E, étoient plus petites que la ligne AB, comme il eſt évident (par la 20.)

USAGE.

Cette Propoſition nous ſert conſiderablement pour faire une figure ſemblable à une autre. Les Ingenieurs ne peuvent s'en paſſer lorſqu'ils veulent toiſer le vuide des endroits, où on a pris des Terres pour conſtruire des Ouvrages;

car après avoir réduit ces figures en Triangles, on cherche la valeur des côtez pour les rapporter sur le Papier, & pouvoir par là connoître la superficie de toutes sortes de figures. On pourra voir nôtre Traité de la Geométrie des Ingenieurs, où je traite du détail du toisé des Ouvrages de Fortification en general.

PROPOSITION XXIII.

PROBLEME.

Faire un angle égal à un autre, à un point d'une ligne.

Fig. 50. & 51. QU'on propose à faire un angle égal à EDF, au point A de la ligne AB. Décrivez des points A & D, comme centres, deux arcs BC, EF, à même ouverture de Compas. Prenez la distance EF, & l'ayant transportée en BC, tirez la ligne AC. Je

Je dis que les angles BAC, EDF sont égaux.

Démonstration.

Les Triangles BAC, EDF ont les côtez AB, AC égaux aux côtez DE, DF, puisque les arcs BC, EF ont été décrits à la même ouverture de Compas: ils ont aussi les bases BC, EF égales: donc les angles BAC, EDF sont égaux (par la 8.)

USAGE.

Ce Problême est si nécessaire dans la Geodesie, dans les Fortifications, dans la Perspective, dans la Gnomonique, & dans toutes les autres parties des Mathematiques, que la plûpart de leurs pratiques seroient impossibles, si on ne sçavoit faire un angle égal à un autre, ou de tel nombre de degrez qu'on voudroit.

PROPOSITION XXIV. & XXV.

THEOREME.

De deux Triangles qui ont les deux côtez égaux, celui qui a le plus grand angle, a aussi la plus grande base; & celui qui a la plus grande base, a aussi le plus grand angle.

Fig. 52. & 53. QUe les côtez AB, DE; AC, DF, des Triangles ABC, DEF soient égaux; & que l'angle BAC soit plus grand que l'angle EDF. Je dis que la base BC, est plus grande que la base FE. Faites l'angle EDG égal à l'angle BAC (par la 32.) & la ligne DG égale à AC, puis tirez la ligne EG. Premierement les Triangles ABC, DEG, ayant les côtez AB, DF, AC, DG égaux; & l'angle EDG égal à EAC; ils auront aussi les bases BC, EG égales (par la 4.) & les lignes

D G,

DG, DF étant à AC, feront égales entr'elles.

Démonſtration.

Dans le Triangle DFG, les côtez DF & DG ſont égaux; & par conſequent les angles D, F, G, & D, G, F, le ſeront auſſi: mais l'angle EGF eſt plus petit que DGF; & l'angle EFG eſt plus grand que DFG; donc dans le Triangle EFG, l'angle EFG étant plus grand que l'angle EGF, le côté EG oppoſé à ce plus grand angle, ſera plus grand que le côté EF oppoſé au plus petit. Donc BG égal à EG, eſt plus grand que la baſe EF, C. Q. F. premierement D.

Que les côtez AB, DE, AC, DF, des Triangles ABC, DEF, ſoient égaux; & que la baſe BC, ſoit plus grande que la baſe EF; je dis que l'angle A ſera plus grand que l'angle D.

Si l'angle A n'étoit pas plus grand que l'angle D, il ſeroit ou égal, & Fig. 54. & 55.

 en

en ce cas les bases BC, EF seroient égales (par la 4.) ou il seroit plus petit, & la base EF seroit plus grande que la base BC. L'une & l'autre est contre la supposition.

PROPOSITION XXVI.

THEOREME.

Si un Triangle a un côté égal à celui d'un autre Triangle, & que les angles aux extrêmitez de ces côtez, soient égaux les uns aux autres, ces Triangles seront égaux en tout sens.

Fig. 56. & 57. SOient les deux Triangles ABC & DEF, dont le côté BC du premier est égal au côté EF du second; aussi bien que les angles qui sont à leurs extrêmitez, c'est-à-dire, l'angle B égal à l'angle E, & C à F. Je dis que ces deux Triangles ont tous leurs côtez égaux chacun au sien, aussi bien que leurs angles. *Dé-*

Démonstration.

Appliquez par pensée ces deux Triangles l'un sur l'autre, en telle sorte que les deux côtez B C & E F conviennent parfaitement; cela étant l'angle B n'excedera pas l'angle E, non plus que C l'angle F; or les côtez A B & D E rencontreront semblablement les deux autres côtez A C & F D à un point qui ne fera qu'un avec A & D. L'angle A sera donc égal à l'angle D; c'est pourquoi ces Triangles seront égaux (par la 8.) puisque chaque angle de l'un vient tomber sur chaque angle de l'autre.

USAGE.

Si l'on vouloit connoître la longueur d'une distance inaccessible, on le pourroit trés-facilement par cette Proposition. Soit, par exemple, la distance AD qu'on cherche; il faut pour la trouver commmencer par se donner une base telle que la ligne AC, & de l'extrêmité A Fig. 58.

 éle-

élever une perpendiculaire, c'est-à-dire, que l'angle CAD soit droit, on observera le point D, pour que de l'extrêmité C, on puisse faire un angle ACD, avec la base & le rayon visuel CD, qui va rencontrer le point D; cela étant fait, il faut prolonger le côté CD, pour avoir AB; donc l'extrêmité B sera terminée par le rayon CB, qui doit faire avec la base, le même angle que le précedent. Comme on peut parcourir la ligne AB, il est facile de la mesurer, & de connoître la distance AD.

USAGE II.

On peut trouver une distance inaccessible d'une maniere plus commode que la précedente; car celle-ci vous assujettit à avoir besoin d'une grande étenduë.

Voici une pratique dont je me suis servi pour connoître la largeur du Pas de Calais, c'est-à-dire, la distance qu'il y a du rivage de Calais, aux côtes d'Angleterre. J'ai pris sur le bord de la Mer

Mer une base d'une extrême grandeur; pour n'avoir pas la peine de la mesurer, j'en ai fait une plus petite qui m'a donné la grande par un calcul de Trigonometrie, & voici comme j'ai operé, soit, par exemple, la base AB de deux mille toises, aux extrêmitez de laquelle il y a des mirrts, c'est-à-dire, quelque chose qui puisse se voir de loin, ayant pris l'angle ABC formé par la base, le rayon BC, qui va rencontrer un objet au point C, je suppose cet angle de 86. *degrez; si de l'extrêmité A vous faites un second angle, dont le rayon AC aille rencontrer le point C, cet angle, par exemple, sera de* 69. *degrez; presentement il ne s'agit que de faire une Echelle sur le Papier, & y rapporter la longueur AB, & les deux angles A & B, dont les côtez prolongez formeront un Triangle semblable au premier, & si du point angulaire, opposé à la base, vous faites tomber une perpendiculaire sur cette mê-* Fig. 60. & 65.

me

me base, cette ligne sera la distance que l'on cherche, laquelle peut se connoître par l'Echelle du Triangle.

LEMME

Si deux lignes droites & paralleles viennent aboutir sur une autre ligne droite, les angles qu'elles formeront de même part seront égaux entr'eux.

Fig. 44. LEs lignes AB & CD sont supposées paralleles, les extrêmitez B & D se terminent sur la ligne EF; je dis que les angles ABD, CDF sont égaux. Ceci est naturel; car si ces angles n'étoient pas égaux, ces lignes ne seroient pas paralleles, d'autant qu'elles seroient inégalement inclinées sur la base EF; il s'ensuit donc qu'étant également inclinées elles sont paralleles, & que par consequent les angles ABD, CDF, qu'elles forment de même part, sont égaux. Ceci est

trop

trop clair pour avoir beſoin d'une démonſtration plus étenduë.

Les Propoſitions 27, 28, 29, & 30, ne contiennent pour ainſi dire que la même choſe expliquée differemment; c'eſt pourquoi j'ai crû faire plaiſir aux Commençants en les réduiſant toutes dans une ſeule, qui eſt la ſuivante.

PROPOSITION XXVIII.

THEOREME.

Quand deux lignes paralleles ſont coupées par une troiſiéme, elles forment les angles alternes égaux. Et quand une ligne tombe ſur deux autres, & qu'elles forment les angles alternes égaux, ces deux lignes ſont paralleles.

SI les lignes AB & CD ſont paralleles, & qu'elles ſoient coupées par la troiſiéme EH, je dis que les angles alternes BFH & FGC ſont égaux. Fig. 59.

Dé-

Démonstration.

On sçait que si les lignes AB & CD sont paralleles, leurs parties AF & CG le seront aussi : or comme on peut les considerer comme venant aboutir sur la ligne EH; on connoîtra par le Lemme précedent, que les angles EFA & EGC qu'elles forment de même part, sont égaux. Cela étant, considerez que les angles EFA & BFG sont égaux (par la 15.) or si ce dernier est égal à un des deux angles égaux, dont nous venons de parler, il sera aussi égal à l'autre; c'est-à-dire, que les angles alternes BFG & FGC sont égaux. Ce qu'il faloit premierement démontrer.

Je dis en second lieu, que si ces angles alternes sont égaux, les lignes AB & CD sont paralleles, cela ne pouvant être autrement, d'autant que ces angles alternes ne peuvent être égaux, sans que les deux EFA & FGC le le ſoient auſſi. Or ils ne peuvent être égaux, ſans que les lignes AB, CD ne ſoient paralleles.

COROLLAIRE.

On peut remarquer que quand deux lignes ſont coupées par une troiſiéme; & que celle ci forme avec les deux premiéres les deux angles interieurs de même part égaux à deux droits, ces deux lignes ſeront paralleles; ce qui ſe prouve aiſément dans la même figure, où il eſt aiſé de voir que les deux angles interieurs BFG & FGD valent deux droits, puiſqu'ils ſont égaux aux deux FGC & FGD, leſquels pris enſemble ſont égaux à deux droits (par la 14.) Fig. 59.

Nous pouvons dire encore que lorſque deux lignes ſont paralleles à une troiſiéme, elles ſont paralleles entr'elles. Ceci eſt trop naturel pour demander une démonſtration particuliere.

PRO-

PROPOSITION XXXI.

PROBLEME.

Tirer une ligne parallele à une autre, par un point donné.

Fig. 62. & 63. On propose à tirer une ligne par le point C, laquelle soit parallele à la ligne AB; tirez la ligne CE, & faites l'angle ECD égal à l'angle CEA; je dis que la ligne CD est parallele à AB.

Démonstration.

Les angles alternes DCE, CEA sont égaux; donc les lignes CD, AB sont paralleles.

USAGE.

Le Problême précedent, est très-propre pour tirer des lignes paralleles sur le Papier; mais on ne pourroit pas s'en servir pour tirer sur le Terrain une parallele à une autre inaccessible, par un point donné. Voici en peu de mots la maniere

niere dont il faudroit agir pour cela. La ligne AB est suposée inaccessible, on veut du point donné C, lui tirer une parallele Commencez par vous donner la base CD, du point C, observez les extrêmitez A & B, pour avoir l'angle ACB que je suppose être de 40. *degrez. Il faut de plus connoître l'angle ACD, qui sera, par exemple, de* 108. *degrez; à l'autre extrêmité D de la base, prenez comme ci-devant les angles ADB & CDB; je suppose le premier de* 60. *degrez, & le second de* 98: *Comme la base CD est commune aux deux Triangles ACD & CDB, & qu'on peut en connoître la longueur, qui sera, par exemple; de* 100. *toises; tout ceci étant connu, il est aisé de parvenir à la connoissance de l'angle ABC, lequel étant une fois trouvé, si l'on fait l'angle BCE qui lui soit égal, la ligne CE sera parallele à AB, à cause de l'égalité des angles alternes ABC, DCE.*

PRO-

PROPOSITION XXXII.

THEOREME.

L'angle exterieur d'un Triangle, est égal aux deux interieurs opposez pris ensemble, & les trois angles d'un Triangle rectiligne sont égaux à deux droits.

Fig. 65. QUe le côté BC du Triangle ABC soit continué en D, je dis que l'angle exterieur ACD est égal aux deux angles interieurs A & B pris ensemble. Tirez par le point C, la ligne EC, parallele à AB.

Démonstration.

La ligne AB est parallele à CE, par consequent les angles ABC & ECD sont égaux: & de plus ces deux lignes étant paralleles, les angles alternes BAC & ACE sont égaux; donc l'angle exterieur ACD est égal aux deux interieurs A & B.

Je

Je démontre encore que les trois angles du Triangle valent deux droits; car l'angle exterieur ACD, ne peut les valoir, que lorsqu'on lui aura ajoûté l'angle ACB, qui est le troisiéme angle du Triangle ACB. D'où je conclus que les trois angles d'un Triangle valent deux droits, puisque l'angle exterieur qui est égal aux deux interieurs A & B, les vaudra en lui ajoûtant le troisiémei ACB.

Voici encore une autre maniere de démontrer cette Proposition; tirez la parallele EF à la base BC. Les deux côtez AB & AC font avec cette parallele trois angles qui valent deux droits, au point angulaire commun A. Pour démontrer que les trois angles BAE, BAC & CAF valent les trois angles du Triangle ABC; remarquez que l'angle B est égal à son alterne EAB, & que pareillement l'autre angle C, est aussi égal à son al- Fig. 66.

terne

terne CAF, le troisiéme angle BAC est commun; ce qui fait voir que les trois angles proposéz, dont la somme vaut deux droits, sont égaux aux trois angles du Triangle C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

L'angle exterieur d'un Triangle, est plus grand que chacun des deux autres interieurs oppolez; ce qui est bien évident, puisqu'il les vaut tous deux.

2. Les deux angles d'un Triangle pris ensemble valent moins que deux droits. Ceci est incontestable, puisque nous avons démontré qu'il les faloit tous trois pour les valoir.

3. Les trois angles d'un Triangle pris ensemble, sont égaux aux trois angles d'un autre Triangle; ceci est bien vrai, puisque dans l'un & dans l'autre les trois angles valent deux droits, & comme les angles droits

sont

ſont invariables, ceci doit être general.

4. Si les deux angles d'un Triangle ſont égaux aux deux angles d'un autre Triangle, leurs troiſiémes angles le ſeront auſſi.

5. Si dans un Triangle, il ſe trouve un angle droit, les deux autres ſeront aigûs, & ces deux angles aigus vaudront un droit.

6. Chaque angle d'un Triangle équilateral, eſt de 60. degrez; & par conſequent les trois angles pris enſemble, vaudront 180. degrez. Ce qui eſt general dans tous les Triangles rectilignes; ſoit qu'ils ſoient iſoceles, ou rectangles, ou ambligones, ou ſcalenes, ainſi des autres.

PRO-

PROPOSITION XXXIII.

THEOREME.

Les deux lignes sont égales & paralleles, qui sont tirées du même côté, par les extrêmitez de deux autres lignes paralleles & égales.

Pl. 4. Fig. 67. QUe les lignes AB, CD soient paralleles & égales, & qu'on tire les lignes AC, BD, par leurs extrêmitez du même côté : Je dis que les lignes AC, BD sont égales & paralleles. Tirez la diagonale BC.

Démonstration.

Puisque les lignes AB, CD sont paralleles ; les angles alternes ABC, BCD seront égaux. Ainsi les Triangles ABC, BCD, qui ont le côté BC commun, & les côtez AB, CD égaux, avec les angles ABC, BCD, auront les bases AC, BD, égales

(par

(par la 4.) comme aussi les angles DBC, BCA: lesquels étant alternes, les lignes AC, BD sont paralleles.

USAGE.

On met en pratique cette Proposition pour mesurer tant les hauteurs perpendiculaires A G des montagnes, que les lignes horizontales CG, qui sont cachées dans leurs épaisseurs. Servez-vous d'une équerre fort longue, ADB, que vous mettrez au point A, de sorte que son côté DB soit à plomb. Mesurez les côtez AD, DB, faites-en de même au point B, & mesurez BE, EC; les côtez paralleles à l'horizon, c'est-à-dire, AD, BE ajoûtés ensemble, donnent la ligne horizontale CG; & les côtez à plomb DB, EC, donnent la hauteur perpendiculaire AG. Cette façon de mesurer se nomme cultellation. Pl. 4. Fig. 63.

Cette Proposition peut encore servir pour mesurer sur la terre une ligne accessible par ses deux extrêmitez, &

inaccessible par le milieu. Car si l'on tire de ses deux extrémitez deux lignes quelconques égales & paralleles, & qu'on mesure la ligne qui joint les extrémitez de ces deux mêmes lignes, on aura la grandeur de la ligne proposée sur la terre. Voyez la Geométrie Pratique des Ingenieurs.

PROPOSITION XXXIV.

THEOREME.

Les côtez, & les angles opposez dans un parallelograme, sont égaux; & la diagonale le partage en deux également.

Pl. 4. Fig. 67. QUe la figure ABCD soit un parallelograme, c'est-à-dire, que les côtez AB, CD, AC, BD soient paralleles. Je dis que les côtez opposez AB, CD & AC, BD, sont égaux aussi bien que les angles A & D; ABD, ACD: & que la diagonale

nale BC partage toute la figure en deux également.

Démonstration.

Les lignes AB, CD, sont supposées paralleles : donc les angles alternes ABC, BCD, seront égaux. Pareillement les côtez AC, BD, étant supposez paralleles, les angles alternes ACB, CBD seront égaux. De plus, les Triangles ABC, BCD, qui ont le même côté BC, & les angles ABC, BCD, ACB, CBD égaux, seront égaux en tous sens (par la 26.) Donc les côtez AB, CD, AC, BD, & les angles A & D sont égaux; & la diagonale CB partage la figure en deux également : & puisque les angles ABC, BCD, ACD, CBD sont égaux, mettant ensemble ABC, CBD; BCD, ACB, nous concluons que les angles opposez ABD, ACD seront égaux.

USAGE.

Les Arpenteurs ont quelquefois besoin de cette Proposition, pour faire des partages. Si un champ est parallelograme, on le peut partager en deux
Pl. 4. Fig. 69. *également par la diagonale AD. Que si on est obligé de le partager par le point E, divisez la diagonale AD, en deux également en F, & tirez la ligne EFG, elle partagera la figure en deux également. Car les Triangles AEF, FGD qui ont les angles alternes EAF, FDG, AEF, FGD, & les côtez AF, FD égaux, sont égaux (par la 26.) Et puisque le trapeze BEFD, avec le Triangle AFE, c'est-à-dire, le Triangle ADB, est la moitié du parallelograme (par la 34.) le même trapeze EFDB, avec le Triangle DFG, sera la moitié de la figure. Donc la ligne EG la divise en deux également.*

La Proposition inverse de ce Theorême

rême est aussi véritable, sçavoir que si les côtez opposez AB, CD, sont égaux, aussi bien que les deux opposez AC, BD, la figure ADBC sera un parallelograme, à cause de l'égalité des deux Triangles ABC, BCD, (par la 8.) D'où l'on tire l'origine & la démonstration de cette régle double, que l'on appelle régle parallele.

On peut ici démontrer facilement l'onziéme Maxime d'Euclide, qui porte qui si une ligne droite, comme EF coupe les deux AB, CD, en sorte que les deux angles interieurs BEF, DFE, qui sont d'un même côté soient ensemble moindres que deux droits, les deux lignes AB, CD, étant prolongées concourront de ce même côté. Pl. 1. Fig. 70.

Pour démontrer cette verité, il suffira d'avoir démontré que si du même côté des angles interieurs BEF, DFE, on tire la droite GH terminée par les deux lignes AB, CD, & parallele à la

 ligne

ligne EF, cette ligne GH sera moindre que la ligne EF. Pour cette fin tirez par le point H la droite HI parallele à la ligne AB. Il est évident que cette ligne HI rencontre la ligne EF au point I entre les points E, F, parce que si elle la rencontroit au delà du point F, comme en L, il s'ensuivroit que les deux angles BEF, HLF, seroient égaux à deux droits, & par consequent plus grands que les deux BEF, DFE, qui sont supposez moindres que deux droits, & qu'ainsi en ôtant l'angle commun BEF, il resteroit l'angle HLE plus grand que l'angle DFE, ce qui est impossible, parce que l'angle HFE étant exterieur est plus grand que l'interieur HLE. (par la 16.) Donc puisque le point I, tombe entre les deux E, F, & que la figure GHIE, est un parallelograme, dont les côtez opposez GE, HI sont égaux, comme il a été démontré; il s'en-

s'ensuit que la ligne GH est plus petite que la ligne EF. Ce qu'il faloit démontrer.

PROPOSITION XXXV.

THEOREME.

Les Parallelogrames sont égaux, quand ayant la même base, ils sont entre les mêmes paralleles.

QUe les parallelogrames ABEC, ABDF, ayent la même base AB, & qu'ils soient entre les mêmes paralleles AB, CD: Je dis qu'ils sont égaux. Pl. 4. Fig. 71.

Démonstration.

Les côtez AB, CE, sont égaux (par la 34.) comme aussi AB, FD: donc CE, FD sont égales; & y ajoûtant EF, les lignes CF, ED seront égales. Les Triangles CFA, EDB, ont les côtez CA, EB, CF, ED égaux & les angles DEB, FC

A, l'un étant exterieur, & l'autre interieur du même côté, donc (par la 4.) les Triangles ACF, BED sont égaux; & leur ôtant à tous deux, ce qu'ils ont de commun, c'est-à-dire, le petit Triangle EFG, le trapeze FGBD, sera égal au trapeze CAGE: & ajoûtant à tous deux le petit Triangle AGB, les parallelogrames ABEC, ABDF seront égaux.

PROPOSITION XXXVI.

THEOREME.

Les Parallelogrames sont égaux, qui étans entre les paralleles, ont des bases égales.

Pl. 4. Fig. 72. QUe les bases CB, OD, des parallelogrames ACBF, ODEG soient égales; & que l'un & l'autre soit entre les paralleles AE, CD. Je dis que les parallelogrames sont égaux.

égaux. Tirez les lignes CG, BE.

Démonſtration.

Les baſes CB, OD, ſont égales: OD, GE ſont auſſi égales: donc CB, GE, ſont égales & paralleles; & par conſequent (ſuivant la 33.) CG, BE ſeront égales & paralleles; & CBEG ſera un parallelograme égal à CBFA (par la 35.) puiſqu'ils ont la même baſe. Pareillement prenant GE pour baſe; les parallelogrames GODE, CBEG ſont égaux (par la même.) Ainſi les parallelogrames ACBF, ODEG ſont égaux.

USAGE.

Nous réduiſons les parallelogrames qui ont les angles obliques, comme CBEG ou ODEG, à des rectangles, comme CBFA, de ſorte que meſurant ce dernier, ce qui eſt facile; c'eſt-à-dire, multipliant AC par CB, le produit ſera égal au parallelograme ACBF,

& par consequent au parallelograme CBEG, ou ODEG.

PROPOSITION XXXVII.

THEOREME.

Les Triangles sont égaux, qui ayant la même base, sont entre les mêmes paralleles.

Pl. 4. Fig. 73. LEs Triangles ACD, CDE seront égaux, s'ils ont la même base CD, & s'ils sont renfermez entre les paralleles AF, CH. Tirez les lignes DB, DF, paralleles aux lignes AC, CE, & vous aurez formé deux parallelogrames.

Démonstration.

Les parallelogrames ACBD, CEDF, sont égaux (par la 35.) les Triangles ACD, CDE sont leurs moitiez (par la 34.) Donc les Triangles ACD, CDE sont égaux.

PRO-

PROPOSITION XXXVIII.

THEOREME.

Les Triangles sont égaux, qui ayant des bases égales sont renfermez entre les mêmes paralleles.

LEs Triangles ACD, GEH, sont égaux, s'ils ont les bases CD, GH égales, & s'ils sont renfermez entre les paralleles AF, CH. Tirez les lignes BD, HF, paralleles aux côtez AC, EG: & vous aurez formé deux parallelogrames. Pl. 4. Fig. 73.

Démonstration.

Les parallelogrames, ACDB, EGHF sont égaux, (par la 36.) les Triangles ACD, EGH, sont leurs moitiez (par la 34.) Ils sont donc aussi égaux.

USAGE.

Nous avons dans ces Propositions une Pl. 4. Fig. 74.

 pra-

pratique pour partager un champ triangulaire en deux parties égales ; par exemple, le Triangle ABC. Divisez la ligne BC, que vous prendrez pour la base, en deux également en D: Je dis que les Triangles ABD, ADC sont égaux. Car si vous vous imaginez une ligne parallele à BC, qui passé par A, ces Triangles auront des bases égales, & seront entre les mêmes paralleles, & par consequent égaux. Nous pourrions faire d'autres partages, fondez sur la même Proposition que je laisse, de peur d'être trop long. Les Propositions 39. & 40. sont inutiles.

PROPOSITION XLI.

THEOREME.

Un parallelograme sera double d'un Triangle, si étant entre les mêmes paralleles, ils ont leurs bases égales.

Pl. 5. Fig. 77. SI le parallelograme ABCD, & le Triangle EBC sont entre les mê-

mêmes paralleles AE, BC; & s'ils ont la même baſe BC, ou s'ils ont des baſes égales; le parallelograme ſera le double du Triangle. Tirez la ligne AC.

Démonſtration.

Les Triangles ABC, BCE, *ſont* égaux, (par la 37.) Or le parallelograme ABCD eſt double du Triangle ABC (par la 34.) il eſt donc double du Triangle BCE. Il ſeroit pareillement double d'un Triangle qui ayant ſa baſe égale à BC, ſeroit entre les mêmes paralleles.

USAGE.

La Methode ordinaire de meſurer l'aire ou la ſurface d'un Triangle, eſt fondée ſur cette Propoſition: Qu'on propoſe le Triangle ABC, on tire de ſon angle A la ligne AD, perpendiculaire à la baſe BC; & multipliant la perpendiculaire AD par la demie baſe BE, le produit donne l'aire du Triangle; Pl. 5. Fig. 78.

gle ; parce que multipliant AD ou EF par BE, nous avons un rectangle BEFH qui est égal au Triangle ABC. Car le Triangle ABC est la moitié du rectangle HBCG (par la 41.) aussi bien que le rectangle BEFH.

Pl. 5. Fig. 79. *Nous mesurons toute sorte de rectilignes, comme ABCDE, le partageant en Triangles BCD, ABD, AED, tirant les lignes AD & BD, & les perpendiculaires CG, BF, EI. Car multipliant la moitié de BD, par CG, & la moitié de AD, par EI, & par BF, nous avons l'aire de tous ces Triangles ; & les ajoûtant ensemble, la somme est égale au rectiligne ABCDE.*

Pl. 5. Fig. 80. & 81. *Nous trouvons l'aire des Poligones reguliers, en multipliant la moitié de leur contour, par la perpendiculaire tirée du centre à un de leurs côtez : car multipliant IG par AG, on aura le rectangle HKLM égal au Triangle AIB : Et faisant le même pour tous les*

les autres Triangles, prenant toûjours les demi-bases, on aura le rectangle HKON, qui a le côté KO composé des demi-bases, & par consequent égal au demi-contour; & le côté HK égal à la perpendiculaire IG.

C'est suivant ce principe, qu'Archimede a démontré, qu'un Cercle étoit égal à un rectangle compris sous le demi-diametre, & sous une ligne égale à sa demi-circonference. Mais cela se trouve démontré autrement dans le Theor. 6. de la Planimetrie de Monsieur Ozanam.

PROPOSITION XLII.

PROBLEME.

Faire un Parallelograme égal à un Triangle, sous un angle donné.

ON desire un Parallelograme, qui soit égal au Triangle ABC, & qui ait un angle égal à l'angle E. Pl. 5. Fig. 82. & 83.

Par-

Partagez la baſe BC en deux également au point D: tirez AG parallele à BC, (par la 31.) Faites auſſi l'angle CDF égal à l'angle E, (par la 23.) Et enfin tirez la parallele CG. La figure FDCG eſt un parallelograme, puiſque les lignes FG, DC, DF, CG ſont paralleles: Il eſt égal au Triangle ABC, & l'angle CDF, eſt égal à l'angle E.

Démonſtration.

Le Triangle ADC eſt la moitié du parallelograme FDCG; (par la 41.) il eſt auſſi la moitié du Triangle ABC, puiſque les Triangles ADC, ADB ſont égaux (par la 37.) Donc le Triangle ABC eſt égal au parallelograme FDCG.

USAGE.

Cette Propoſition & les deux ſuivantes, ſont comme trois Lemmes pour réſoudre la Prop. 45.

PRO-

PROPOSITION XLIII.

THEOREME.

Les complemens d'un parallelograme sont égaux.

Dans le parallelograme ABDC, les complemens AFEH, EGDI sont égaux. Pl. 1. Fig. 15.

Démonstration.

Les Triangles ABC, BCD sont égaux (par la 33.) Donc si on en soustrait les Triangles HBE, BIE; FEC, CGE qui sont aussi égaux (par la même,) les complemens AEFH, EGDI qui restent, seront égaux.

PRO-

PROPOSITION XLIV.

PROBLEME.

Décrire un parallelograme sur une ligne, qui soit égal à un Triangle, & qui ait un angle déterminé.

Pl. 5. Fig. 84. ON propose à faire un parallelograme; qui ait un de ses angles égal à l'angle E, un de ses côtez égal à la ligne D; & qui soit égal au Triangle ABC. Faites (par la 42.) le parallelograme BFGH, qui ait l'angle HBF égal à l'angle E, & qui soit égal au Triangle ABC. Continuez les côtez GH, GF, de sorte que HI soit égal à la ligne D: tirez la ligne IBN, & deux paralleles à GI & BH. Prolongez aussi le côté FB. Le parallelograme MK est celui que vous désirez.

Démonstration.

Les angles HBF, ou l'angle E,

KBM

KBM sont égaux, (par la 15.) Pareillement les lignes KB, DM; KD, BM étant paralleles, les angles opposez B & D, seront égaux (par la 34.) & par consequent l'angle D est égal à l'angle E. Le côté KB est égal à ligne HI ou D: enfin le parallelograme MK est égal (par la précedente,) au parallelograme GFBH; & celui-ci a été fait égal au Triangle ABC. Donc le parallelograme MK est égal au Triangle ABC, & il a un angle D, égal à l'angle E.

USAGE.

Cette Proposition contient une espece de division Geometrique: car dans la division Arithmetique, on propose un nombre, qui peut être imaginé comme un rectangle; par exemple, le rectangle AB, de 12. pieds quarrez, qu'il faut diviser par un autre nombre comme par 2. c'est-à dire, qu'il faut faire Pl. 5. Fig. 85.

un

un autre rectangle, égal au rectangle AB, qui ait BD 2. pour un de ses côtez; & chercher de combien de pieds sera l'autre côté, c'est-à-dire, le quotient. On en vient à bout geometriquement avec la regle & le compas. Prenez BD de 2. pieds, & tirez la diagonale DEF: la ligne AF, est celle que vous cherchez. Car ayant achevé le rectangle DCFG, les complemens EG, EC, sont égaux (par la 43.) & EG a pour un de ses côtez la ligne EH égale à BD de 2. pieds, & EI égale à AF. Cette façon de diviser s'appelle Application, parce qu'on applique le rectangle AB à la ligne BD, ou EH; & c'est la raison pour laquelle on appelle la division Application; car les anciens Geometres se servoient plûtôt de la regle & du compas, que de l'Arithmetique.

PRO-

PROPOSITION XLV.

PROBLEME.

Décrire un parallelograme, qui ait un angle déterminé, & qui soit égal à un rectiligne donné.

ON propose le rectiligne ABCD, auquel il faut faire un parallelograme égal, & qui ait un angle égal à l'angle E. Partagez le rectiligne en Triangle, tirant la ligne BD: & faites (par la 42.) un parallelograme FGHI, qui ait l'angle FGH égal à l'angle E, & qui soit égal au Triangle ABD. Faites aussi (par la 44.) un parallelograme IHKL, qui soit égal au Triangle BCD, & qui ait une ligne égale à IH, & l'angle IHK égal à l'angle E. Le parallelograme FGKL sera égal au rectiligne ABCD. Pl. 5. Fig. 86. & 87.

Démonstration.

Il reste à prouver, que les parallelolelogrames FGHI, HKLI n'en sont qu'un, c'est à dire, que GH, HK sont une ligne droite. Les angles FGH, IHK sont égaux à l'angle E, & par consequent égaux : l'angle G, & GHI sont égaux à deux droits, puisque nous avons fait un parallelograme GHIF. Donc les angles GHI, KHI sont égaux à deux droits, & ainsi (par la 14.) GH, HK sont une ligne droite.

USAGE.

Cette Proposition est comme la pratique des précedentes, & sert pour mesurer la capacité de quelque figure que ce soit, la réduisant en Triangles, puis faisant un parallelograme rectangle égal à ces Triangles, qui sera égal à la figure. On peut même faire un parallelograme rectangle sur un côté determiné, & qui soit égal à plusieurs figures irregulieres. Pareillement, ayant plusieurs figures, on peut décrire un rectangle égal à leur difference.

Mais

Mais ce Problême se peut résoudre par une methode bien plus courte, sçavoir en réduisant le rectiligne donné en Triangle, par le Theor. 13. de la Planimetrie de Monsieur Ozanam, & en faisant un parallelograme égal à ce Triangle, (par la 42.)

PROPOSITION XLVI.

PROBLEME.

Décrire un quarré sur une ligne donnée.

POur décrire un quarré sur la ligne AB, tirez deux perpendiculaires AC, BD égales à AB, & tirez la ligne CD. Pl. 5. Fig. 88.

Démonstration.

Les angles A & B étant droits, les lignes AC, BD sont paralleles (par la 28.) Elles sont aussi égales (par la constr.) Donc les lignes AB, CD sont paralleles & égales (par la 33.) & les angles A & C, B & D égaux

égaux à deux droits. Et puisque A & B sont droits, les angles C & D le seront aussi. Donc la figure AD, a tous les côtés égaux, & tous les angles droits, & par consequent c'est un quarré.

USAGE.

Cette Proposition est comme une Lemme pour la Proposition suivante. Elle sert dans la Fortification pour la description des Redoutes quarrées, pour la construction des Citadelles à quatre Bastions, &c.

PROPOSITION XLVII.

THEOREME.

Le quarré de la base d'un Triangle rectangle, est égal aux quarrez des deux côtez, pris ensemble.

Pl. 5. Fig. 89. ON suppose que l'angle BAC est droit, & qu'on décrive des quarrez sur les côtez BC, AB, AC: celui

celui de la baſe BC ſera égal aux deux quarrez des côtez AB, AC. Tirez la ligne AH parallele à BD, & joignez les lignes AD, AE; FC, BG. Je prouve que le quarré AF eſt égal au rectangle BH, & le quarré AG au rectangle CH; & ainſi que le quarré BE eſt égal aux deux quarrez AF, AG.

Démonſtration.

Les Triangles FBC, ABD ont les côtez, AB, BF: BD, BC égaux: & les angles FBC, ABD ſont égaux, puiſque chacun, outre l'angle droit, contient l'angle ABC. Donc (par la 4.) les Triangles ABD, FBC ſont égaux. Or le quarré AF, eſt double du Triangle FBC, (par la 41.) puiſqu'ils ont la même baſe BF, & qu'ils ſont entre les paralleles BF, AC. Pareillement le rectangle BH eſt double du Triangle ABD, puiſqu'ils ont la même baſe BD, & qu'ils sont entre les paralleles BD, AH. Donc le quarré AF, est égal au rectangle BH. De même les Triangles ACE, GCB sont égaux (par la 4.) le quarré AG est double du Triangle BCG; & le rectangle CH est double du Triangle ACE (par la 41.) Donc le quarré AG, est égal au rectangle CH: & par consequent les quarrez AF, AG, sont égaux au quarré BDEC.

USAGE.

Fig. 90. *On dit que Pythagore ayant trouvé cette Proposition, sacrifia cent bœufs, pour remercier les Muses: ce ne fut pas sans raison, puisque cette Proposition sert de fondement à une grande partie des Mathematiques. Car premierement, la Trigonometrie ne peut pas s'en passer, puisqu'elle lui est nécessaire pour faire la table de toutes les lignes qu'on peut inscrire dans un Cercle, c'est-à-dire, des Cordes, des Sinus,*

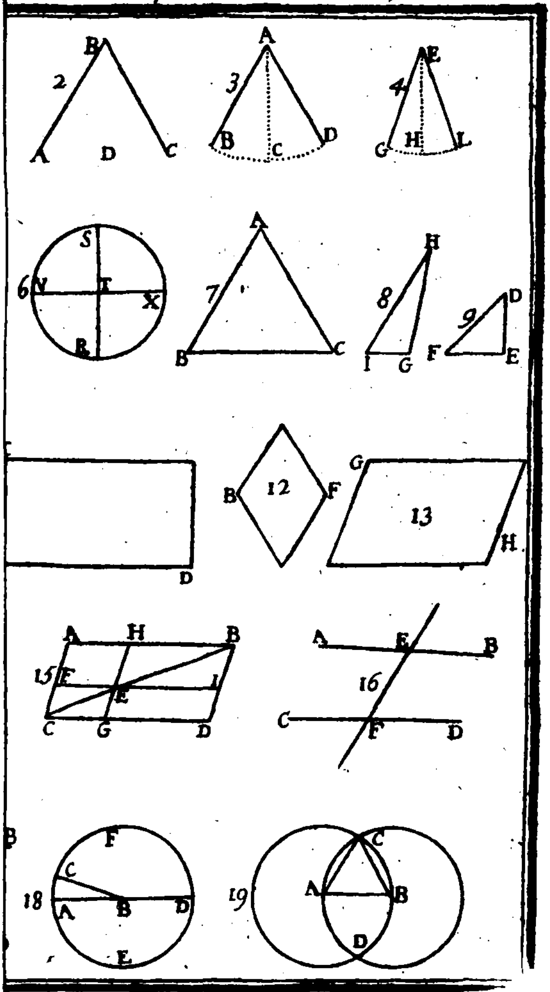
nus, des Tangentes, & des Secantes, ce que je fais voir dans un exemple.

Qu'on suppose que le demi-diametre AC, est divisé en 100000. *parties, & que l'arc BC est de* 30. *degrez. Puisque le Sinus d'un arc est la moitié de la corde ou sous-tendante du double d'un pareil arc; la corde de* 60. *degrez étant égale au demi-diametre AC; BD, qui est le Sinus de* 30. *degrez, sera égal à la moitié de AC: il sera donc de* 50000. *Dans le Triangle ADB, le quarré de AB, est égal aux quarrez de BD & AD. Faites donc le quarré AB, multipliant* 100000. *par* 100000. *& du produit, ôtez le quarré de BD* 50000. *restera le quarré de AD, ou BF Sinus du complement de* 30. *degrez; & tirant la racine quarrée on aura la ligne FB. Puis faisant comme AD, à DB: ainsi AC à CE; on aura la Tangente de* 30. *degrez CE: & ajoûtant les quarrez de*

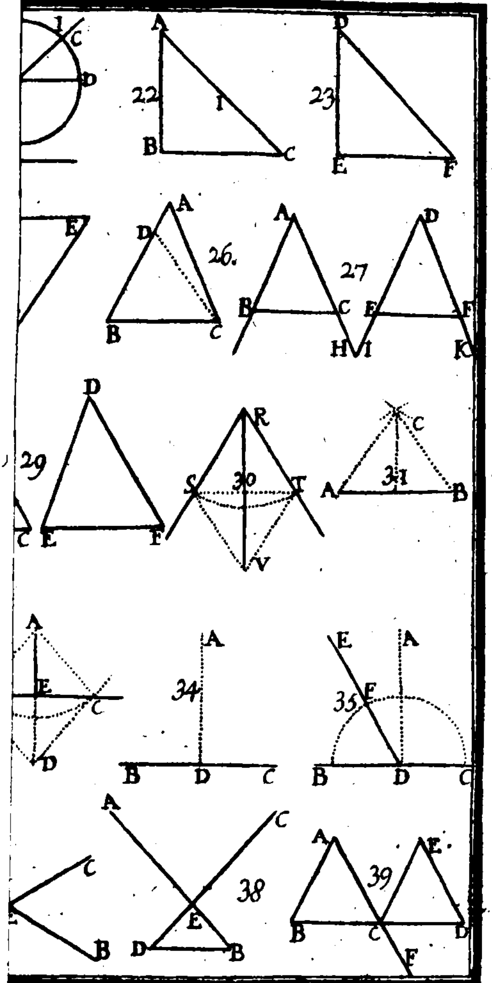
AC, CE, on aura (par la 47.) le quarré de AE: puis tirant la racine quarrée, on connoîtra la longueur de la ligne AE Secante de 30. degrez.

Par le moyen de cette Propoſition nous augmentons les figures autant que nous voulons: Par exemple, pour doubler le quarré ABCD, continuez le côté CD, de ſorte que CD, DE, ſoient égales: tirez AE, le quarré de AE ſera double du quarré ABCD, puiſqu'il eſt égal (par la 47.) aux quarrez de AD, DE. Faiſant l'angle droit AEF, & prenant EF égal à AB; le quarré de AF, ſera triple de ABCD. Faiſant encore l'angle AFG droit, & FG égale à AB, le quarré de AG ſera quadruple du quarré BD; ce que je dis du quarré ſe doit entendre de toutes les figures ſemblables.

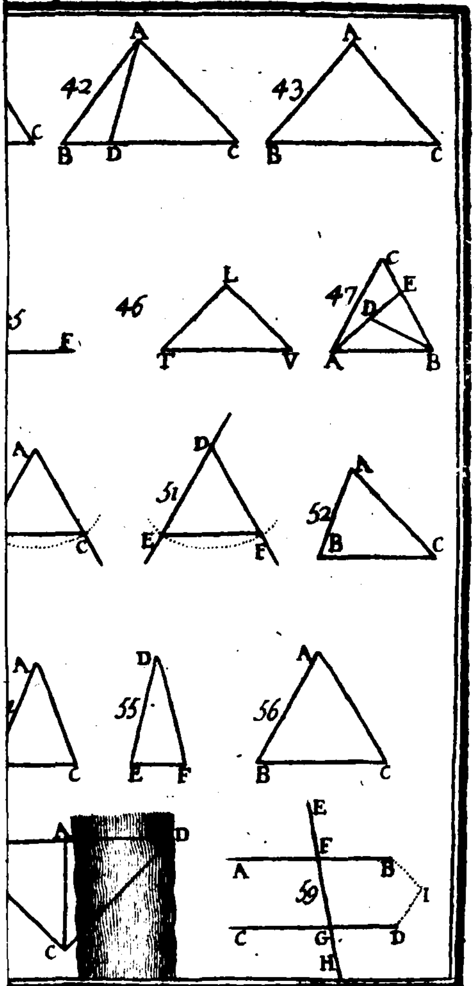
ELEcl. Livre premier Planche premiere.



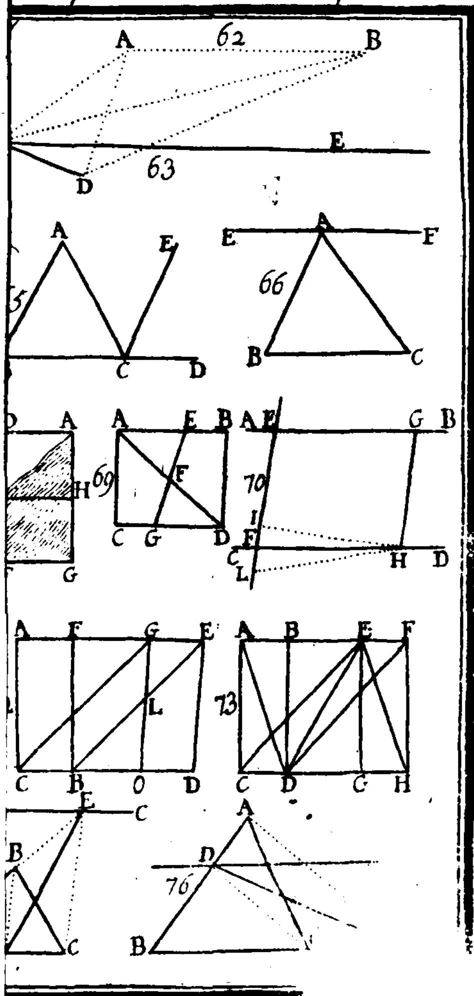
vre premier Planche deuxieme.



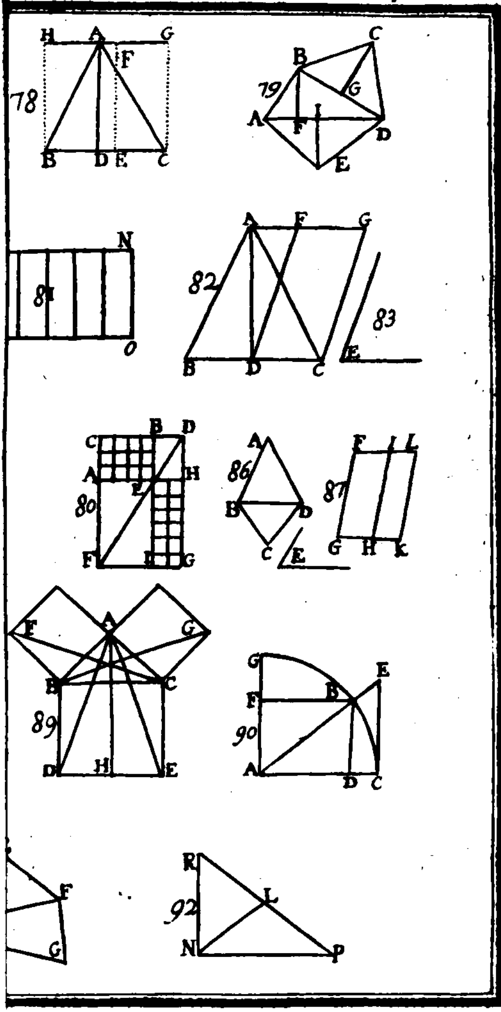
vre premier Planche troisieme.



vre premier Planche quatrieme.



Livre premier Planche cinquieme.



ELEMENS D'EUCLIDE.

LIVRE SECOND.

EUCLIDE traite dans ce Livre des puissances des lignes droites ; c'est-à dire, de leurs quarrez ; comparant les divers rectangles qui se forment sur une ligne divisée, tant avec le quarré qu'avec le rectangle de toute la ligne. Cette Partie est très-utile, puisqu'elle sert de fondement aux principales Pratiques de l'Algebre. Ces trois premieres Propositions démontrent la troisiéme regle de l'Arithmetique : la quatriéme nous enseigne à tirer la racine quarrée de quelque nombre que ce soit : les suivantes, jusqu'à la huitiéme, fervent en plusieurs rencontres dans l'Algebre : les autres nous donnent des Pratiques propres à la Trigonometrie.

Ce Livre paroît d'abord très-difficile , parce qu'on s'imagine qu'il contient quelque mystere, neanmoins la plûpart de ses démonstrations sont fondées sur un principe fort évident; qu'un tout est égal à toutes ses parties prises ensemble, ainsi on ne doit pas se rebuter, quoiqu'on ne comprenne pas du premier coup, les démonstrations de ce Livre.

Le parallelograme rectangle, ou simplement rectangle en un quadrilatere compris sous deux lignes, dont l'une est la hauteur & l'autre la longueur, comme nous l'avons déja dit dans les Définitions du premier Livre : c'est de ces sortes de rectangles dont nous allons parler dans ce Livre ici ; ainsi la figure BD, sera un un rectangle, puisque les quatre angles ABCD sont droits. Supposons que la ligne BC, soit de 6. pieds, & l'autre DC de 4. multipliant 6. par 4. on aura 24. pieds pour la valeur du rectangle BD, ce qui fait voir que pour trouver la superficie d'un rectangle, il faut multiplier la base par la hauteur.

La figure FDH s'appelle gnomon, étant comprise par les deux rectangles FE & HG, & le quarré EG.

PROPOSITION I.

THEOREME.

Si on propose deux lignes, dont l'une soit divisée en plusieurs parties, le rectangle, compris sous ces deux lignes, est égal au rectangle compris sous la ligne qui n'est pas divisée, & sous les parties de celle qui est divisée.

QU'on propose les ligne AB, AC; & que AB soit divisé en tant Pl. 1. Fig. 3.

de parties qu'on voudra; le rectangle AD, compris ſous les lignes AB, AC, eſt égal au rectangle AG, compris ſous AC, AE; au rectangle EH compris ſous EG égale à AC, & ſous EF; & au rectangle FD, compris ſous FH égale à AC, & ſous FB.

Démonſtration.

Le rectangle AD, eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble, qui ſont les rectangles AG, & EH, & FD; ſans qu'il y en ait aucun autre. Donc le rectangle AD, eſt égal au rectangle AG, EH, FD, pris enſemble.

Par les nombres.

La même Propoſition ſe verifie dans les nombres. Suppoſons que la ligne AC, eſt de 5. pieds, AE de 2, FE de 4, FB de 3, & par conſequent AB de 9. le rectangle compris ſous AC 5; & AB 9, c'eſt-à-dire 5. fois 9 qui ſont 45, eſt égal

égal à deux fois 5. ou 10. à 4. fois 5. ou 20, & à trois fois 5. ou 15; car 10. 20. & 15. font 45.

USAGE.

A.	53.
B.	8.
C.	50. 3.
B.	8.
D.	24.
E.	400.
F.	424.

Cette Propoſition démontre la pratique ordinaire de la multiplication. Par exemple, qu'on doive multiplier le nombre A 53, que la ligne AB repreſente, par le nombre B. 8. Je diviſe le nombre A, en autant de parties qu'il a de caracteres : par exemple, en deux, ſçavoir 50 & 3. qui eſt C, leſquelles je multiplie par 8, diſant : 8 fois 3 ſont 24 qui eſt D, & ainſi je fais un rectangle. Multipliant enſuite le nombre 50. par 8 le produit ſera E, 400. Il eſt évident que le produit de 8 fois 53, qui eſt F, 424. eſt égal au produit 24. & au produit 400. mis enſemble.

PROPOSITION II.

THEOREME.

Le quarré d'une ligne, est égal aux rectangles compris sous toute la ligne, & sous ses parties.

Pl. 1. Fig. 4. ON propose la ligne AB, & son quarré ABDC. Je dis que le quarré ABDC, est égal à un rectangle compris sous toute la ligne AB, & sous AE, & à un rectangle compris sous AB, & FE, & à un troisiéme compris sous AB, & FB.

Démonstration.

Le quarré ABCD est égal à toutes ses parties prises ensemble, qui sont les rectangles AG, EH, FD. Le premier AG est compris sous AC égale à AB, & sous AE. Le second EH, est compris sous EG égale à AC, ou AB, & sous FE. Le troisiéme FD, est compris sous FH

égale

égale à AB, & ſous FB: & c'eſt la même choſe, d'être compris ſous une ligne égale à AB, & d'être compris ſous AB. Donc le quarré de AB, eſt égal aux rectangles compris ſous AB & ſous AE, EF, FB.

Par les nombres.

Que la ligne AB, repreſente le nombre 9. ſon quarré ſera 81. Que la partie AE, ſoit 4. EF, 3. FB. 2. 9. fois 4. font 36. 9. fois 3. font 27. 9. fois 2. font 18. Il eſt évident, que 36. 27. & 18. font 81.

USAGE.

Cette Propoſition ſert pour prouver la multiplication; comme auſſi pour les équations de l'Algebre. Elle eſt comme un Corollaire de la précedente.

PROPOSITION. III.

THEOREME.

Si on divise une ligne en deux, le rectangle compris sous toute la ligne, & sous une de ses parties, est égal au quarré de cette même partie, & au rectangle compris sous les deux parties.

Pl. 1. Fig. 5. QU'on divise la ligne AB en deux au point C; & qu'on fasse un rectangle compris sous AB, & une de ses parties, par exemple AC, c'est-à-dire, que AD soit égale à AC; & qu'on acheve le rectangle AF. Il sera égal au quarré de AC, & au rectangle compris sous AC, BC. Tirez la perpendiculaire CE.

Démonstration.

Le rectangle AF compris sous AB, & sous AD égale à AC, est égal à toutes ses parties, qui sont les rectantangles AE, CF. Le premier AE eſt le quarré de AC, puiſque les lignes AC, AD ſont égales : & le rectangle CF eſt compris ſous CB, & ſous GE, égale à AD, ou AC. Donc le rectangle compris ſous AB, AC, eſt égal au quarré de AC, & à un rectangle compris ſous AC, CB.

Par les nombres.

Que AB ſoit 8. AC, 3. CB, 5. le rectangle compris ſous AB, & AC, ſera, 3. fois 8. ou 24. Le quarré de AC, 3. eſt 9. le rectangle compris ſous AC, 3. & CB, 5. eſt 3. fois 5. ou 15. Il eſt évident que 15. & 9. font 24.

U S A G E.

	45.
40.	3.
	3.
120.	9.
129.	

Cette Propoſition ſert pour démontrer encore la pratique ornaire de la Multiplication. Par exemple, ſi on veut multiplier le nombre 43. par 3. ayant diviſé le nombre 43. en 40. & en *ou 3. 3. fois 43. qui font 129. seront autant que 3. fois 3. ou 9. qui est le quarré de 3. & que 3. fois 40. qui sont 120. Ceux qui commencent, ne doivent pas perdre courage, s'ils ne conçoivent pas d'abord ces Propositions: car elles ne sont difficiles que parce qu'on s'imagine, comme j'ai déja dit, qu'elles contiennent quelque grand mystère.*

PROPOSITION IV.

THEOREME.

Si on divise une ligne en deux, le quarré de toute la ligne sera égal aux deux quarrez de ses parties & à deux rectangles compris sous ces mêmes parties.

Pl. 1. Fig. 6. QUe la ligne AB soit divisée en C, & qu'on fasse son quarré ABDE, qu'on tire la diagonale EB, &

& la perpendiculaire CF qui la coupe : & par ce point qu'on tire la ligne GL parallele à AB. Il eſt évident que le quarré ABDE eſt égal aux quatre rectangles GF, CL, CG, LE. Les deux premiers ſont les quarrez de AC & de CB : les deux complemens ſont compris ſous AC, CB.

Démonſtration.

Les côtez AE, AB ſont égaux : donc les angles AEB, ABE ſont demi droits ; & à cauſe des paralleles GL, AB, les angles des Triangles du quarré GF, (par la 29. du 1.) ſeront égaux ; comme auſſi les côtez (par la 6. du 1.) Donc GF eſt le quarré de AC. Pareillement le rectangle CL, eſt le quarré de CB : le rectangle GC, eſt compris ſous AC, & ſous AG égale à BL, ou BC : le rectangle LF eſt compris ſous LD, égale à AC, & ſous FD égale à BC.

Corollaire. Si on tire la diagonale d'un quarré, les rectangles qu'elle coupe sont quarrez.

S c o l i e.

On peut énoncer cette Proposition plus generalement, en disant que, si sur la ligne AB, divisée comme l'on voudra au point C, l'on décrit une figure de quatre côtez égaux comme ABDE, cette figure sera égale aux deux Rombs GF, CL, décrits sur les deux parties AC, BC, & aux deux parallelogrames CG, FL, décrits de ces deux mêmes parties. *Car la démonstration s'en fera de la même façon, pourvû que l'on suppose la ligne CF parallele au côté AE, & la ligne GL parallele à l'autre côté AB.*

U s a g e.

A.	144.
B.	22.
C.	12.

Cette Proposition nous donne la pratique pour trouver la racine quarrée d'un nombre proposé. Que ce soit le nom-

bre

bre A 144. *representé par le quarré AD, & sa racine par la ligne AB. Je sçai d'ailleurs qu'elle doit avoir deux chiffres. Je m'imagine donc, que cette ligne AB est divisée en C, que AC represente le premier chiffre, & BC, le second. Je cherche la racine du premier chiffre du nombre* 144. *qui est* 100., *& je trouve que c'est* 10. *& faisant son quarré* 100. *representé par le quarré GF, je le soustrais de* 144. *& il reste* 44. *pour les rectangles GC, FL & le quarré CL. Mais parce que cette figure d'un Gnomon n'est pas propre, je transporte le rectangle FL, en KG, & j'ai un rectangle total KL, c'est-à-dire* 44. *Je connois aussi presque tout le côté KB: car AC, est de* 10. *Donc KC sera de* 20. *Il faut donc diviser* 44 *par* 20. *c'est-à-dire, pour avoir ce diviseur, je double la racine trouvée, & je dis combien de fois* 20.

dans

dans 44? Je le trouve deux fois, pour le côté BL: mais parce que 20. n'étoit pas le côté KB tout entier; mais seulement KC; ce 2. qui vient au quotient, s'ajoûte au diviseur, qui sera 22. Ainsi le trouvant deux fois précisément dans 44. la racine quarrée sera 12. Vous voyez que le quarré 144. est égal au quarré de 10. au quarré de 2. qui est 4. & à deux fois 20. qui sont deux rectangles compris sous 2. & sous 10.

PROPOSITION V.

THEOREME.

Si une ligne est coupée également, & inégalement, le rectangle compris sous les parties inégales, avec le quarré de la partie du milieu, est égal au quarré de la moitié de la ligne.

Pl. 1. Fig. 7. SI la ligne AB est divisée également en C, & inégalement en D; le rec-

rectangle AH, compris sous les segmens AD, DB, avec le quarré de CD, sera égal au quarré de CB moitié de AB. Achevez la figure, ainsi que vous le voyez : les rectangles LG, DI seront des quarrez (par le Corol. de la 4.) Je prouve que le rectangle AH, compris sous AD, & DH égal à DB, avec le quarré LG, est égal au quarré CF.

Démonstration.

Le rectangle AL, est égal au rectangle DF ; l'un & l'autre étant compris sous la moitié de la ligne AB, & sous DB, ou DH qui lui est égal. Ajoûtez à tous deux le rectangle CH ; le rectangle AH sera égal au Gnomon CBG. Ajoûtez encore à tous deux le quarré LG, le rectangle AH, avec le quarré LG sera égal au quarré CF.

Par les nombres.

Que AB soit 10. AC sera 5. & CB aussi. Que CD soit 2. & DB, 3. le rectangle compris sous AD, 7. & BD,

3. c'est-à-dire 21. avec le quarré de CD 2. qui sera 4. sera égal au quarré de CB, 5. qui sera 25.

USAGE.

Pl. 1. Fig. 8. *On peut se servir très-utilement de ce Theorême, pour resoudre le Problême suivant, qui sans cela paroîtroit plus difficile. Trouver en nombres les deux côtez d'un rectangle, dont on connoît le contour & l'aire. Que le contour du rectangle ABCD, soit de 28. pieds, & l'aire de 48. Prolongez le côté AB vers E, en faisant BE égale à BC; & alors toute la ligne BE sera 14. puisque la somme des quatre côtez, ou le contour est 28. Divisez la ligne AE en deux également au point F, & alors chacune des deux moitiez AF, EF sera 7.*

Cette préparation étant faite, l'on considerera que puisque le rectangle des deux lignes AB, BE, ou AB, BC, c'est-à-dire 48. avec le quarré de BF, est égal au quarré 49. de AF, il s'ensuit, que

si

si de 49. on ôte 48. il restera 1. pour le quarré de BF, laquelle par consequent vaudra 1. c'est pourquoi en ajoûtant BF à AF, ou 1. à 7. on aura 8. pour le côté AB : & ôtant la même BF de EF, ou 1. de 7. on aura 6. pour BE, ou pour l'autre côté BC; ce qu'il faloit faire.

PROPOSITION VI.

THEOREME.

Si on ajoûte une ligne à une autre divisée en deux également, le rectangle compris sous la ligne composée des deux, & sous l'ajoûtée, avec le quarré de la moitié de la ligne divisée, est égal au quarré d'une ligne composée de la moitié de la divisée, & de toute l'ajoûtée.

SI on ajoûte la ligne BD, à la ligne AB, divisée également en C; le rectangle AN, compris sous AD & sous Pl. X. Fig. 9.

sous DN, ou BD, avec le quarré de CB, est égal au quarré de CD. Faites le quarré de CD, & ayant tiré la diagonale FD, tirez BG parallele à FC, qui coupe FD, au point H, par lequel passe la ligne HN parallele à AD: KG sera le quarré de BC; & BN, celui de BD.

Démonstration.

Les rectangles AK, CH, sur les bases égales AC, BC, sont égaux (par la 36. du 1.) Les complemens CH, HE sont égaux (par la 43. du 1.) Donc les rectangles AK, HE sont égaux. Ajoûtez à tous deux le rectangle CN, & le quarré KG: les rectangles AK, & CN, c'est-à-dire le rectangle AN avec le quarré KG, sera égal aux rectangles CN, HE & au quarré KG, c'est-à-dire au quarré CE.

Par les nombres.

Que AB soit de 8. parties; AC, de 4. CB, de 4. BD, de 3. ainsi AD sera

de

de 11. Il est évident que le rectangle AN, qui est trois fois 11. c'est-à-dire 33. avec le quarré de KG 16. qui font 49. est égal au quarré de GD, 7. qui est 49. car 7. fois 7. font 49.

USAGE.

Maurolycus mesure toute la terre sur une seule observation, en se servant de cette Proposition. Il veut qu'on observe du sommet A, d'une montagne connuë selon sa hauteur l'angle BAC, que fait la ligne AB qui touche la surface de la terre en B, avec la ligne AC qui passe par le centre: & que dans le Triangle ADF, la ligne DF étant une touchante; sçachant l'angle A, & l'angle droit ADF, on trouve par la Trigonometrie les côtez AF, FD; parce qu'il est facile de démontrer que FB, FD sont égales, on connoîtra la ligne AB & son quarré. Or nous démontrons par la Proposition précedente, que la ligne ED étant divisée en deux également au point Pl. 1. Fig. 10.

C,

C, & y ayant ajoûté DA ; le rectangle compris sous EA, & sous AD, avec le quarré CD ; ou CB, est égal au quarré de AC ; & l'angle ABC étant droit, (comme on le prouve au troisiéme Livre) le quarré de AC, est égal aux quarrez de AB, BC. Donc le rectangle sous AE, AD, avec le quarré de BC, est égal aux quarrez AB, BC. Otez de côté & d'autre le quarré de BC : le rectangle sous AE, AD sera égal aux quarrez de AB. Divisez donc le quarré de AB, que vous connoissez, par la hauteur de la montagne, qui est AD le quotient sera la ligne AE, de laquelle il faut soustraire la hauteur de la montagne, & vous aurez DE, le diametre de la terre.

Nous nous servons de la même Proposition dans l'Algebre ; comme, pour démontrer la pratique dont on se sert, pour trouver la racine d'un quarré égal à un nombre, plus quelques racines. Les deux

deux qui ſuivent, ſervent auſſi pour prouver d'autres ſemblables pratiques.

On peut auſſi par le moyen de cette Propoſition réſoudre facilement le Problême ſuivant. Trouver en nombres les deux côtez d'un rectangle, dont on connoît la difference des deux côtez & l'aire. Que la difference des deux côtez AB, BC, du rectangle ABCD ſoit de 4. pieds, & l'aire de 192. Prenez ſur le plus grand côté AB la ligne BE, égale à l'autre côté AC, & alors la ligne AE ſera la difference de ces deux côtez, & elle vaudra par conſequent 4. & ſi on la diviſe en deux également au point F, chacune des deux moitiez AF, EF, vaudra 2. Pl. 1. Fig. 11.

Cette préparation étant faite, l'on conſiderera que puiſque le rectangle des deux lignes AB, BE, ou AB, BC, ou 192. avec le quarré 4. de la ligne EF, c'eſt-à dire en tout 196. eſt égal au quarré de la ligne BF, en prenant la *racine quarrée de 196. on aura 14. pour cette ligne BF, à laquelle ajoûtant AF, ou 2. on aura 16. pour le plus grand côté AB: & de laquelle ôtant EF, ou 2. il restera 12. pour la ligne BE, ou pour l'autre côté BC.*

On trouvera dans le sixieme Livre le moyen d'avoir deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données. J'ai tiré ce Problême des Elemens de Geometrie de Clavius; lequel le démontre très-aisément par le moyen de cette Proposition.

PROPOSITION VII.

THEOREME.

Si on divise une ligne, le quarré de toute la ligne, & celui d'une de ses parties seront égaux à deux rectangles compris sous toute la ligne, & sous cette premiere partie, & au quarré de l'autre partie.

Pl. 1. Fig. 12. QU'ON divise la ligne AB à discretion, au point C; le quarré AD, AD, de la ligne AB, avec le quarré AL, fera égal à deux rectangles compris fous AB, AC, avec le quarré de CB. Faites le quarré de AB; puis ayant tiré la diagonale EB, & les lignes CF, HGI, prolongez EA, de forte que AK foit égale à AC: ainfi AL, fera le quarré de AC, & HK fera égale à AB. Car HA eft égale à GC, & GC eft égale à CB, puifque CI eft le quarré de CB, (par le Corol. de la 4.)

Démonftration.

Il eft évident que les quarrez AD, AL, font égaux aux rectangles HL, HD, & au quarré CI. Or le rectangle HL eft compris fous HK, égale à AB, & fous LK, égale à AC. Pareillement le rectangle HD eft compris fous HI, égale à AB, & fous HE, égale à AC. Donc les quarrez de AB, AC, font égaux à deux rectangles compris sous AB, AC, & au quarré de CB.

Par les nombres.

Qu'on suppose la ligne AB de 9. parties; AC, de 4; CB, de 5: le quarré de AB, 9. est 81: celui de 4. est 16. Or 81 & 16 sont 97. Un rectangle sous AB, AC, ou 4. fois 9. font 36., étant pris deux fois, ce sont 72: le quarré de CB, 5. est 25. Or 25. & 72. font aussi 97.

USAGE.

Pl. 1. Fig. 13. *Par le moyen de cette Proposition, l'on peut résoudre facilement le Problême suivant. Trouver en nombres les deux côtez d'un rectangle, dont on connoît l'aire & la diagonale. Que l'aire du rectangle ABCD soit 240. pieds, & la diagonale AC de 26. Prenez sur le plus grand côté AB, la ligne BE égale à l'autre côté BC, & alors la ligne AE sera la difference de ces deux côtez que l'on pourra trouver en cette sorte.*

Puis-

Puisque les quarrez des lignes AB, BE, ou AB, BC, c'est-à-dire, (par la 47.) le quarré 676. de la diagonale AC, qui a été supposée de 26. pieds, est égal au quarré de la ligne AE, & au double du rectangle AB, BE, ou AB, BC, c'est-à-dire à 480; si l'on ôte ce double 480. du quarré précedent 676, il restera 196. pour le quarré de la ligne AE, ou de la difference des côtez AB, BC, laquelle par consequent sera de 14. pieds. Cette difference étant ainsi connuë, avec l'aire du rectangle ABCD, les deux côtez AB, BC, se pourront connoître, comme il a été enseigné dans la Proposition précedente.

PROPOSITION VIII.

THEOREME.

Si on divise une ligne, & qu'on lui ajoûte une de ses parties, le quarré de la ligne composée, sera égal à quatre rectangles, compris sous la premiere ligne, & sous cette partie ajoûtée, avec le quarré de l'autre partie.

Pl. 1. Fig. 14. QU'ON divise la ligne AB à discretion, au point C; & qu'on lui ajoûte BD, égale à CB: le quarré de AD sera égal à 4. rectangles compris sous AB, BC ou BD, & au quarré de AC. Qu'on fasse le quarré de AD; & ayant tiré la diagonale AE, qu'on tire les perpendiculaires BP, CN, qui coupent la diagonale en I, & en O: qu'on tire aussi les lignes MOH, GIR, paralleles à AB: les rectangles GC, LK, PH, MB,

NR

NR seront des quarrez (par le Corol. de la 4.)

Démonstration.

Le quarré ADEF, est égal à toutes ses parties : les rectangles LB, OD, PN sont compris sous des lignes égales à AB. Si vous ajoûtez le rectangle, MI au rectangle PH; vous aurez un rectangle compris sous une ligne égale à AB, & sous une autre égale à CB, ou BD. Il ne reste que le quarré GC, qui est celui de AC. Donc le quarré de AD est égal à quatre rectangles compris sous AB, BD, & au quarré de AC.

Par les nombres.

Que la ligne AB, soit de 7. parties; AC, de 3; BC, de 4, aussibien que BD, le quarré de AD, 11. sera 121. Un rectangle sous AB, 7; & BD, 4, est de 28 : lequel étant pris quatre fois, sont 112, le quarré de 3 est 9. Or 112 & 9. sont 121.

 USA-

USAGE.

Cette Proposition sert principalement pour démontrer que le Foyer d'une Parabole est éloigné de son sommet d'une quantité égale à la quatriéme partie du Parametre de l'axe, comme l'on peut voir dans le Traité des Sections Coniques de M. Ozanam.

Pl. 5. Fig. 8. *Elle sert aussi pour résoudre autrement le Problême, qui a déja été résolu dans la Proposition 5. comme vous allez voir.* Trouver en nombres les deux côtez d'un rectangle, dont on connoît le contour & l'aire. *Que le contour du rectangle ABCD soit de 28. pieds, & l'aire de 48. Prenez sur le plus grand côté AB prolongé, les deux lignes BE, BF, égales chacune à l'autre côté BC, & alors la ligne AE sera la somme des deux côtez AB, BC, & par consequent de 14. pieds, parce qu'elle est la moitié du contour, qui a été supposé de 28. pieds, & la ligne AF*

sera

sera la difference des mêmes côtez que l'on pourra connoître en cette sorte.

Puisque le quarré de la ligne AE ou 196. *est égal à quatre rectangles sous les lignes AB, BE, ou AB, BC, ou à* 192, *& au quarré de la ligne AF; si de* 196, *on ôte* 192. *le reste* 4. *sera le quarré de la ligne AF, laquelle par consequent vaudra* 2. *Si de la ligne AE, on ôte AF, & si l'on ôte* 2. *de* 14. *il restera* 12, *pour la ligne EF, dont la moitié donnera* 6 *pour chacune des deux lignes égales BE, BF, c'est-à-dire, pour le plus petit côté BC. Et si à la ligne AF on ajoûte BF, ou* 2 *à* 6, *on aura* 8 *pour le plus grand côté AB. Ainsi les deux côtez AB, BC, seront connus.*

Les deux Propositions 9. *&* 10. *ne sont pas fort considerables, d'autant qu'on peut s'en passer dans ces Elemens. Je ne les ai néanmoins pas obmises, mais vous pouvez les passer si vous voulez, pour vous attacher principalement à la* 11.

qui est très-considerable, & qu'il est bon d'entendre parfaitement.

PROPOSITION IX.

THEOREME.

Si une ligne est divisée également, & inégalement; les quarrez des parties inégales seront doubles du quarré de la moitié de la ligne, & de celui de la partie d'entre-deux.

Pl. 1. Fig. 15. QU'ON divise la ligne AB en deux également, au point C., & inégalement, au point D. Les quarrez des parties inégales AD, DB, seront doubles des quarrez de AC, qui est la moitié, de AB, & du quarré de l'entre-deux CD. Tirez à AB, la perpendiculaire CE, égale à AC: tirez aussi les lignes AE, BE, & la perpendiculaire DF; comme aussi FG, parallele à CD: tirez ensuite la ligne AF.

Dé-

Démonstration.

Les lignes AC, CE, sont égales; & l'angle C est droit: donc (par la 5. du 1.) les angles CAE, CEA, sont égaux & demi-droits. Pareillement les angles CEB, CBE, GFE, DFB sont demi-droits, les lignes GF, GE, DF, DB sont égales, & l'angle total AEB est droit. Le quarré de AE (par la 47. du 1.) est égal aux quarrez de AC, CE, qui sont égaux: Donc il est double du quarré de AC. De même le quarré EF est double du quarré de GF, ou CD: or le quarré de AF, est égal aux quarrez de AE, EF, puisque l'angle AEF est droit; donc le quarré AF, est le double des quarrez de AC, CD. Ce même quarré AF est égal aux quarrez de AD, DF ou DB, puisque l'angle D est droit: donc les quarrez de AD, DB, sont sont doubles des quarrez de AC, CD.

Par les nombres.

Que AB ſoit 10; AC, 5.; CD, 3; DB 2: les quarrez de AD, 8. & DB, 2; c'eſt-à-dire 64., & 4., qui font 68., ſont doubles du quarré AC qui eſt 25., & du quarré de CD, 3. qui eſt 9; car 25. & 9., font 34., qui eſt la moitié de 68.

USAGE.

Pl. 1. Fig. 17. *Cette Propoſition ſert à réſoudre facilement le Problême ſuivant, qui ſans cela paroît plus difficile. Trouver les deux côtez d'un rectangle, dont on connoît la diagonale, & la ſomme des deux côtez inégaux. Que la diagonale AC du rectangle ABCD ſoit de 26. pieds, & la ſomme des deux côtez AC, BC, ſoit de 34 pieds. Prolongez le plus grand côté AB vers E, en faiſant BE égale à BC, pour avoir la ſomme AE des deux côtez AB, BC, qui ſera de 34. pieds: & diviſez cette ſomme AE en deux également au point F, &*

cha-

chacune des deux moitiez AF, EF, sera de 17 pieds. Après cela faites le raisonnement suivant.

Puisque les quarrez des deux lignes AE, BE, c'est-à-dire, (par la 47. du 1.) le quarré de la seule ligne AC, ou 676, est double des quarrez des lignes AF, BF, sa moitié 338. sera la somme des quarrez des lignes AF, BF: & comme le quarré de AF est 289, il s'ensuit que si l'on ôte ce quarré 289. de la moitié précedente 336, il restera 49. pour le quarré de la ligne BF, laquelle par consequent vaudra 7. Si à la ligne AF on ajoûte BF: ou 17 à 7, l'on aura 24 pour le plus grand côté AB: & si de la ligne EF, on ôte la ligne BF, ou que de 17 l'on ôte 7, il restera 10 pour la ligne BE, ou pour son égale BC. Ainsi les deux côtez AB, BC, seront connus.

PRO-

PROPOSITION X.

Theoreme.

Si on ajoûte une ligne, à une autre divisée également; le quarré de la ligne composée des deux, avec le quarré de l'ajoûtée, sont doubles du quarré de la moitié de la ligne, & du quarré de celle qui est composée de cette moitié & de l'ajoûtée.

Pl. 1. Fig. 18. SI on suppose la ligne AB, divisée par le milieu au point C; & si on y ajoûte la ligne BD: les quarrez de AD, & de BD, seront doubles des quarrez AC & CD. Tirez les perpendiculaires CE, DF, égales à AC: tirez ensuite les lignes AE, EF, AG, EBG.

Démonstration.

Les lignes AC, CE, CB, étant égales, & les angles au point C étant droits, les angles AEC, CEB, CBE, DBG,

DBG, DGB, seront demi-droits; & les lignes BD, DG, EF, FG, CD, seront égales. Le quarré de AE, est double du quarré de AC: le quarré de EG, est aussi double du quarré de EF, ou CD, (par la 47. du 1.) Or le quarré AG, est égal aux quarrez de AE, EG (par la 47. du 1.) Donc le quarré de AG est double des quarrez de AC, CD; le même AG (par la 47. du 1.) est égal aux quarrez de AD, DG, ou DB. Donc les quarrez de AD, BD, sont doubles des quarrez de AC, CD.

USAGE.

On peut se servir de cette Proposition pour résoudre avec facilité le Problême suivant. Trouver les deux côtez d'un rectangle, dont on connoît la diagonale, & la difference des deux côtez inègaux. Que la diagonale AC du rectangle ABCD soit de 26, & la diffe-

difference des deux côtez AB, BC soit de 14. pieds. Pour trouver les deux côtez AB, BC, on raisonnera de la sorte. Retranchez du plus grand côté AB, la ligne BE égale au plus petit BC, & alors la ligne AE sera la difference de ces deux côtez AC, BC, & elle sera par consequent de 14. pieds: & si l'on divise cette difference AE en deux également au point F, chacune des deux moitiez AF, EF, sera de 7 pieds. Cela étant supposé, voici comment on peut connoître les deux côtez AB, BC.

Parce que le quarré de la ligne AB, avec le quarré de la ligne BE, ou BC; c'est-à-dire (par la 47. du 1.) le quarré 676 de la diagonale AC, est double des quarrez des lignes AF, BF, sa moitié 338. sera égale à la somme des mêmes quarrez AF, BF; c'est pourquoi si de cette moitié 338, ou le quarré 49 de la ligne AF, il reste-

restera 289 pour le quarré de la ligne BF; laquelle par consequent vaudra 17: si l'on ajoûte la ligne AF à BF, ou 7 à 17, la somme donnera 24 pour le plus grand côté AB; & si l'on ôte la ligne EF de BF, ou 7 de 17, le reste donnera 10 pour BE ou BC, &c.

PROPOSITION XI.

PROBLEME.

Diviser une ligne de telle sorte que le rectangle compris sous toute la ligne, & sous la plus petite de ses parties, soit égal au quarré de l'autre partie qui est plus grande.

ON propose la ligne AB à diviser en H, de telle sorte que le rectangle compris sous toute la ligne AB, & sous HB, soit égal au quarré de AH. Faites le quarré de de AB (par la 46. du 1.) divisez AD par le milieu en E: tirez EB, & coupez EF, égale à EB; faites le quarré de AF, c'est-à-dire, que AF, AH soient égales. Je dis que le quarré de AH, qui est la plus grande partie de la ligne divisée, sera égale au rectangle HC, compris sous HB qui est la plus petite partie, & la ligne BC, égale à AB.

Démonstration.

La ligne AD est divisée également au point E, & on y a ajoûté la ligne FA: donc (par la 6.) le rectangle DG compris sous DF & FG, égale à AF, avec le quarré de AE, est égale au quarré de EF égale à EB. Or le quarré de EB est égal au quarré de AB, AE, (par la 47. du 1.) donc les quarrez de AB, AE sont égaux au rectangle DG, & au quarré de AE; & ôtant de part & d'autre le quarré de AE; le quarré de AB, qui

qui eſt AC, ſera égal au rectangle DG: ôtant auſſi le rectangle DH, qui eſt dans tous deux le rectangle HG, ſera égal au quarré AG.

USAGE.

Cette Propoſition ſert pour couper une ligne, ſelon l'extrême & la moyenne raiſon, ainſi que nous enſeignerons dans le 6. Livre, Propoſition 30. Elle revient ſouvent au 14. Livre des Elemens d'Euclide, pour trouver les côtez des corps réguliers; elle ſert pour la 10. Propoſition du quatriéme Livre, pour inſcrire un Pentagone dans un Cercle, comme auſſi un Pentedecagone. Vous verrez d'autres Uſages d'une ligne diviſée de cette ſorte, dans la Propoſition 30 du Livre 6.

PRO-

PROPOSITION XII.

THEOREME.

Dans un Triangle obtusangle, le quarré du côté opposé à l'angle obtus, est égal aux quarrez des deux autres côtez, & à deux rectangles compris sur le côté, sur lequel étant produit on a tiré une perpendiculaire, & sous la ligne qui est entre le Triangle, & cette perpendiculaire.

QUe l'angle ACB, du Triangle ABC, soit obtus; & qu'on tire du point A, AD perpendiculaire à BC produite; le quarré du côté AB est égal aux quarrez des côtez AC, CB, & à deux rectangles compris sous le côté BC, & sous DC.

Démonstration.

Le quarré de AB est égal aux quarrez de AD, BD (par la 47. du 1.) le quarré de DB est égal aux quarrez de de DC, & de CB, & à deux rectangles compris ſous DC, CB, (par la 4.) donc le quarré AB eſt égal aux quarrez de AD, DC, CB, & à deux rectangles compris ſous DC, CB. Au lieu des deux premiers quarrez AD, DC, mettez le quarré AC qui leur eſt égal (par la 47. du 1.) le quarré de AB, ſera égal aux quarrez de AC & CB, & à deux rectangles compris ſous DC, CB.

USAGE.

Cette Propoſition ſert dans la Planimetrie, pour meſurer l'aire d'un Triangle, ſes trois côtez étant connus. Par exemple, ſi le côté AB étoit de 20 *pieds, AC de* 13, *BC de* 11. *le quarré de AB ſeroit de* 400. *Celui de AC de* 169, *& celui de BC de* 121, *la ſomme des deux derniers eſt* 290, *laquelle étant ſouſtraite de* 400, *laiſſe* 110 *pour les deux rectangles ſous BC, CD. La moitié* 55 *ſera un de ces rec-*

rectangles; & le divisant par BC, 11, nous aurons 5 pour la ligne CD. Son quarré est de 25. lequel étant soustrait du quarré de AC 169, *reste le quarré de AD* 144, *& sa racine* 12, *sera le côté AD: laquelle étant multipliée par* $5\frac{1}{2}$ *moitié de BC, vous aurez l'aire du* Triangle *ABC, de* 60. *pieds quarrez.*

PROPOSITION XIII.

THEOREME.

Dans quelque Triangle rectiligne que ce soit, le quarré du côté opposé à l'angle aigu, avec deux rectangles compris sous le côté sur lequel la perpendiculaire tombe, & sous la ligne qui est entre la perpendiculaire & cet angle, est égal aux quarrez des autres côtez.

SI on propose le Triangle ABC, qui ait l'angle C aigu, & si on tire

tire AD perpendiculaire à BC : le quarré du côté AB opposé à l'angle aigu C, avec deux rectangles compris sous BC, DC, sera égal aux quarrez AC, BC.

Démonstration.

La ligne BC est divisée en D : donc (par la 7.) les quarrez de BC, DC, sont égaux à deux rectangles sous BC, DC, & au quarré de BD, ajoûtez le quarré AD, de côté & d'autre, les quarrez de BC, DC, AD, seront égaux à deux rectangles sous BC, CD, & aux quarrez de BD, AD. Au lieu des quarrez de CD, AD, mettez le quarré de AC qui leur est égal (par la 47. du 1.) & au lieu des quarrez de BD, AD, substituez le quarré de AB, qui leur est égal, les quarrez BC, AC, seront égaux au quarré de AB, & à deux rectangles compris sous BC, DC.

USAGE.

Ces Propositions sont fort utiles dans la Trigonometrie; je m'en suis servi dans la huitiéme Proposition du troisiéme Livre, pour prouver que dans un Triangle, il y avoit même raison du Sinus total, au Sinus d'un angle, que du rectangle compris sous les côtez qui forment cet angle au double du Triangle. Je m'en sers aussi dans plusieurs autres Propositions comme dans la 7.

PROPOSITION XIV.

PROBLEME.

Décrire un quarré égal à un rectiligne donné.

POur décrire un quarré égal au rectiligne A; faites (par la 45. du 1.) un rectangle BCDE égal au rectiligne A. Si ces côtez CD, CB, étoient égaux, nous aurions ce que nous désirons: s'ils sont inégaux, con-

continuez la ligne BC, de ſorte que CF ſoit égal à CD; & diviſant la ligne BF, par le milieu au point G, décrivez le demi-Cercle FHB: enfin prolongez DC en H, le quarré de la ligne CH, eſt égal au rectiligne A. Tirez la ligne GH.

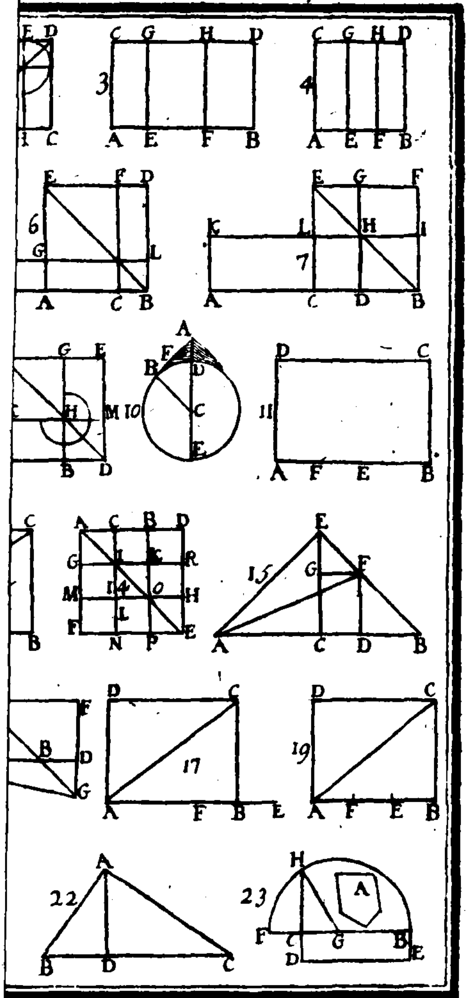
Démonſtration.

La ligne BF, eſt diviſée également en G, & inégalement en C: donc (par la 5.) le rectangle compris ſous BC, CD, ou CF, c'eſt-à-dire le rectangle BD, avec le quarré CG, eſt égal au quarré de GB, ou de GH ſon égal. (Or par la 47. du 1.) le quarré de CH eſt égal aux quarrez de CG, CH: donc le rectangle BD, & le quarré de CG ſont égaux aux quarrez de CG, & de CH. Et ôtant le quarré CG qui leur eſt commun; le rectangle BD, ou le rectiligne A eſt égal au quarré de CH.

USAGE.

Cette Proposition sert premierement, pour réduire au quarré quelque rectiligne que ce soit : & comme le quarré est la premiere mesure de toutes les surfaces, à cause que sa largeur, & sa longueur sont égales, nous mesurons par ce moyen toutes sortes de figures rectilignes. Secondement, cette Proposition nous enseigne à trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données, ainsi que nous verrons dans le sixiéme Livre.

r Second Planche premiere.



LIVRE TROISIEME DES ELEMENS D'EUCLIDE.

CE troisiéme Livre explique les proprietez du Cercle, & compare les diverses lignes qu'on peut tirer au dedans, & au dehors de sa circonference. Il considere encore les circonstances des Cercles, qui se coupent, ou qui touchent une ligne droite; & les differens angles qui se forment tant à leur centre, qu'à leur circonference. Enfin il donne les premiers principes, pour établir les pratiques de Geometrie, par lesquelles nous nous servons très-utilement du Cercle dans presque tous les Traitez des Mathematiques.

DEFINITIONS.

Les Cercles égaux sont ceux dont les diametres sont égaux, ou dont les lignes droites menées du centre à la circonference, sont égales.

2. *Les Cercles concentriques sont ceux qui sont décrits d'un même centre, tels que sont les Cercles A & B, qui ont pour centre le point C, & dont les circonferences A & B sont par tout également éloignées.*

Fig. 2. 3. *Les Cercles excentriques sont ceux qui n'ont pas le même centre, c'est-à-dire, qui ont été décrits de centre differens, & dont les circonferences ne sont pas par tout également éloignées, comme les Cercles E & F.*

4. *La Tangente d'un Cercle est une ligne droite qui touche la circonference sans la couper, comme AB.*

Fig. 3. 5. *La Secante au contraire est une ligne*

ligne qui coupe un Cercle, telle que la ligne AC.

6. *Deux lignes sont dites également éloignées du centre d'un Cercle, lorsque les perpendiculaires qu'on tire du centre sur ces lignes sont égales. Ainsi les lignes HI & KL seront également éloignées du centre G, si les perpendiculaires OG & GN sont égales.* Fig. 5.

7. *Le Segment d'un Cercle est une figure terminée d'un côté par une ligne droite, & de l'autre par une partie de la circonference d'un Cercle, comme LON, LMN.* Fig. 4.

8. *L'angle du Segment est l'angle mixte, compris de l'arc du segment & de sa base comme l'angle OLN, ou LMN.*

9. *Un angle est dans le segment dans lequel sont les lignes qui le forment, comme l'angle FGH est dans le segment FGH.* Fig. 6.

10. *Un angle est dessus l'arc auquel*

il est opposé, ou qui lui sert de base, comme l'angle FGH est dessus l'arc FIH.

Fig. 7. 11. *Le secteur est une figure comprise sous deux demi-diametres, & sous l'arc qui leur sert de base, comme la figure FIGH.*

12. *Des Cercles sont dits se toucher l'un l'autre, quand leurs circonferences se touchent sans se couper.*

13. *Deux Cercles sont dits se couper l'un l'autre, lorsque leurs circonferences ne se touchent pas simplement, mais qu'ils entrent réciproquement l'un dans l'autre.*

AVERTISSEMENT.

Nous avons supprimé la 2. Proposition d'Euclide; & en la place de la 1. & de la 4. nous en avons substitué d'autres plus propres à démontrer celles qui les suivront. Euclide nous donne dans la premiere Proposition de ce Livre, le moyen de trouver le centre d'un *d'un Cercle; mais comme sa Démonstration est difficile, j'ai cru ne devoir parler de ce Problême qu'après la Proposition 3. qui est très-propre pour le démontrer.*

PROPOSITION I.

THEOREME.

Les circonferences des Cercles concentriques, c'est-à-dire, qui ont le même centre, sont paralleles.

CEci s'entend de soi-même; car tous les rayons de la plus grande circonference, sont perpendiculaires à l'une & à l'autre, c'est-à-dire, que le rayon AB, est perpendiculaire sur la circonference B, comme sur la circonference C. Donc ôtant le rayon de la plus petite, c'est-à-dire AC, la partie CB qui reste entre les deux circonferences, sera la mesure de leur distance. Or Fig. 8.

tous les rayons tirez du centre A à la plus grande circonference, feront le même effet. Donc tous les points de chacune de ces circonferences seront également distants de tous les points de l'autre ; donc elles sont paralleles. C. Q. F. D.

PROPOSITION III.

THEOREME.

Si dans un Cercle une ligne droite passe par le centre, & coupe en deux également une autre ligne droite qui n'y passe point, elle la coupera perpendiculairement ; & si elle la coupe perpendiculairement elle la coupera en deux également.

Fig. 9. JE suppose premierement que la ligne droite BD, qui est dans le Cercle ABC, passe par le centre E, & qu'elle coupe en deux également au point F, la ligne AC qui n'y passe

paſſe point; cela étant, je dis que la ligne BD, coupe la ligne AC perpendiculairement. Pour le prouver.

Menez les lignes droites AE, EC, cela poſé. Dans les Triangles AFE & CFE, le côté AF eſt égal au côté FC par ſuppoſition; le côté EE eſt eſt commun à ces deux Triangles. De plus la baſe EA eſt égale à la baſe EC, par la définition du Cercle; donc (par la 8. du 1.) l'angle AFE eſt égal à l'angle CFE, & la ligne BD eſt perpendiculaire à AC. C. Q. F. D.

Je ſuppoſe en ſecond lieu, que la ligne BD qui paſſe par le centre du Cercle, coupe la ligne AC perpendiculairement; cela étant, je dis qu'elle la coupe auſſi en deux également.

Pour le prouver. Puiſque les lignes EA, EC, ſont égales par la définition du Cercle, les angles FAC & ECA ſont égaux (par la 5. du 1.) Fig. 9.

1.) d'ailleurs puiſque la ligne BF eſt perpendiculaire à la ligne AC, les deux angles EFA, EFC ſont auſſi égaux; ſi bien que les deux Triangles EFA, EFC ont deux angles égaux à deux angles chacun au ſien, le côté EF qui eſt commun aux deux, ſoutient des angles égaux; partant (par la 26. du 1.) le côté AF eſt égal au côté FC. C. Q. F. D.

PROPOSITION IV.

PROBLEME.

Trouver le centre d'un Cercle.

Fig. 10. POur trouver le centre du Cercle X, tirez la corde CD, laquelle étant diviſée en deux également au point E, il faut y élever la perpendiculaire EF, qui venant aboutir à la circonference, ſera le diametre du Cercle (par la précedente.) Cela étant, elle doit paſſer par le centre; ſi

si on divise donc cette ligne en deux également au point H; on aura ce qu'on cherche.

PROPOSITION V. & VI.

THEOREME.

Les Cercles qui se touchent, non plus que ceux qui se coupent en dedans, n'ont pas le même centre.

IL est bien évident (par la Définition 2. & par la Prop. 1.) que si deux Cercles se coupent, leurs circonferences ne seront point paralleles, n'étant point concentriques: cela étant, ils ne peuvent avoir le même centre; pareillement s'ils se touchent en dedans, leurs circonferences ne seront point paralleles; or n'étant point paralleles, ils ne peuvent avoir le même centre.

Nous passerons les Propositions 7. & 8. comme étant peu considerables.

PROPOSITION IX.

THEOREME.

D'un point pris dans un Cercle, qui n'eſt pas le centre, on ne peut tirer que deux lignes égales à la circonference, & il n'y a que du centre qu'on puiſſe en tirer trois.

Fig. 11. JE dis que du point A on ne peut tirer que deux lignes égales à la circonference, & pour le prouver, faites que l'angle CBA ſoit égal à l'angle ABD. Tirez auſſi les lignes CA & AD.

Démonſtration.

Nous avons deux Triangles qui ont chacun un angle égal par la conſtruction. Le côté AB eſt commun, & les lignes BD & CD ſont égales, ayant été tirées du centre B; donc (par la 4.) les baſes CA & AD ſeront

ront égales ; ainsi voilà deux lignes droites menées du point A à la circonference, qui sont égales. Mais qu'on ne puisse pas mener une troisiéme égale aux deux autres ; cela est évident, car cette ligne approchera, ou s'éloignera plus ou moins du point F, que ne font les lignes CA & AD, ce qui causera l'inégalité. Il n'y a donc que du centre B. d'où l'on puisse tirer à la circonference plus de deux lignes égales. C. Q. F. D.

PROPOSITION X.

THEOREME.

Si deux Cercles se coupent, ils ne peuvent se couper qu'en deux points.

JE suppose que les deux Cercles ABDE & FBCE se coupent l'un l'autre ; cela étant, je dis qu'ils ne Fig. 13.

se

ſe peuvent couper qu'en deux points. Suppoſons neanmoins, s'il eſt poſſible, qu'ils ſe coupent l'un l'autre aux trois points A, B, D; cela poſé, trouvez (par la 4.) le centre H du Cercle ABDE; puis du centre menez aux trois points où ces Cercles ſe coupent, les rayons HA, HB & HD.

Démonſtration.

Le point H étant le centre du Cercle ABDE, les lignes qu'on vient de tirer à ſa circonference ſont égales entr'elles; mais ces trois lignes là vont auſſi ſe terminer à la circonference du Cercle FBCE; il s'enſuivroit donc que le point H ſeroit le centre commun de ces deux Cercles; puiſqu'on a tiré trois égales à leurs circonferences; mais deux Cercles qui ſe coupent ne pouvant avoir le même centre; il eſt donc impoſſible qu'ils puiſſent ſe couper à plus

plus des deux points. C. Q. F. D.

Nous passerons la Proposition 11. n'étant point considerable.

PROPOSITION XII.

THEOREME.

Si deux Cercles se touchent par le dehors, la ligne tirée par leurs centres passera par le point d'attouchement.

JE suppose que les Cercles ABC, DBE se touchent l'un l'autre par dehors au point B, & que du centre de l'un au centre de l'autre, on ait mené la ligne droite FG; cela étant, je dis que cette ligne passe par leur point d'attouchement. Fig. 25.

Démonstration.

Posons donc, s'il est possible, qu'elle passe par les points C & E, & qu'ainsi la ligne FCEG, soit une ligne droite; cela étant, les deux lignes

gnes BF, BG, ne concoureront pas directement, & ainsi feront un angle au point B, & avec la troisiéme FCEG, feront un Triangle, dont les deux côtez BF, BG, seront ensemble plus grands que le troisiéme FCEG (par la 20. du 1.) Mais les lignes FC, GE sont égales à BF, BG (par la définition du Cercle) donc ces mêmes lignes FC, GE seroient aussi plus grandes que la ligne entiere FCEG, c'est-à-dire, la partie que le tout, ce qui est impossible; il est donc impossible que la ligne qui est menée par les centres F & G, passe par un autre point que B. C. Q. F. D.

PROPOSITION XIII.

THEOREME.

Deux Cercles se touchent seulement dans un point.

PRemierement, si deux Cercles se touchent en dedans, ils ne se touchecheront qu'en un seul point C, marqué par la ligne BAC, qui passe par leurs centres A & B; car s'ils se touchent encore au point D, tirez les lignes AD, BD.

Démonstration.

Les lignes AD, AC étant tirées du centre du petit Cercle, sont égales, & ajoûtant AB, les lignes BA, AC, & BA, AD seroient égales: or BC, BD étant tirées du centre du grand Cercle, seroient aussi égales; donc les côtez BA, AD seroient égaux au seul côté BD, ce qui est contraire à la Proposition 20. du 1. Fig. 12.

Secondement, si les deux Cercles se touchent en dehors, tirant la ligne AB d'un centre à l'autre; elle passera par le point C où les Cercles se touchent (par la 12.); car si vous dites qu'ils se touchent encore au point D, ayant tiré les lignes AD, BD; les lignes BD, BC, AC, AD étant égales;

les, les deux côtez d'un Triangle pris ensemble seroient égaux au troisiéme; ce qui est contraire à la Proposition 20. du 1.

USAGE.

Les Propositions précedentes s'entendent pour ainsi dire d'elles-mêmes, je les ai neanmoins voulu démontrer pour accoutumer ceux qui commencent la Geometrie, à ne recevoir pour vrai, que ce qui leur a été prouvé. Quant à l'usage qu'on peut faire de ces trois Propositions, on peut s'en servir dans l'Astronomie, pour expliquer le mouvement des Planettes quand on se sert d'Epycicles.

PRO-

PROPOSITION XIV.

THEOREME.

Les lignes égales tirées dans un Cercle sont également éloignées du centre; & celles qui sont également éloignées du centre, sont égales.

JE dis que si les lignes AB & CD sont également éloignées du centre E, elles seront égales: tirez les lignes EG & EH, qui seront égales par la définition 6. On sçait aussi (par la Proposition 3.) que ces perpendiculaires divisent en deux également les lignes AB & CD, aux points G & H. Tirez les lignes ED & EB qui seront des rayons du Cercle, puisqu'elles sont tirées du centre E. Fig. 18.

Démonstration.

Je dis premierement, que les Triangles rectangles BGE & EHD ont tous leurs

leurs côtez égaux; car on ſçait que les lignes BE & ED ſont égales, auſſi bien que les deux autres GE & EH : or les quarrez de ces lignes égales ſeront égaux entr'eux; & (par la 47. du 1.) le quarré GE ne pourra valoir le quarré EB, qu'en lui ajoûtant le quarré GB : pareillement le quarré EH ne pourra valoir le quarré ED ou EB, qu'en lui ajoûtant le quarré HD; mais comme les quarrez des côtez EG & GH ſont égaux; il s'enſuit que les quarrez des côtez GB & HD, le ſeront auſſi, étant les moitiez des lignes AB & CD; je conclus que puiſqu'ils ſont égaux, les lignes dont ils ſont les moitiez ſont égales.

PRO-

PROPOSITION XV.

THEOREME.

De toutes les lignes qu'on peut tirer dans un Cercle, celle qui passe par le centre est la plus grande; & celle qui approche le plus du centre, est plus grande que celle qui en approche le moins.

SOit donc la ligne DE qui passe par le centre C, qui sera par consequent le diametre; il faut montrer que cette ligne est plus grande que AB; tirez les rayons CA & CB. Fig. 19.

Démonstration.

Dans le Triangle ACB, les deux côtez AC & CB pris ensemble, sont plus grands que le troisiéme AB (par la 20. du 1.) or comme ces deux côtez AB & AC sont égaux à la ligne DE, il s'ensuit que cette ligne DE sera plus grande que AB,

Pre-

Presentement considerez que plus les extrêmitez A & B des rayons AC & CB approcheront de D & de E, plus l'angle ACB sera ouvert ; & par consequent le côté AB deviendra plus grand, étant opposé à un angle plus ouvert ; donc plus une ligne approche du centre, plus elle excede sur une autre qui en est plus éloignée.

USAGE.

Cette Proposition peut servir considerablement pour connoître le rapport des Cercles paralleles qui sont décrits sur une Sphere, & trouver combien ceux qui sont renfermez entre le Pole & l'Equateur, sont plus petits que celui qui a pour diametre celui de la Sphere.

PRO-

PROPOSITION XVI.

THEOREME.

Une ligne perpendiculaire à l'extrêmité d'un rayon, touche le Cercle, & ne le touche qu'à un seul point.

JE dis que si la ligne BD est perpendiculaire sur le rayon BK, elle ne touchera le Cercle qu'au seul point B. Fig. 20.

Démonstration.

Pour démontrer que la ligne BD, ne peut toucher le Cercle à un second point C; je mene une ligne de K. en C; après quoi je dis que le point C de la touchante ne peut toucher le Cercle: car pour démontrer qu'il le touche, il faudroit faire que les lignes BK & KC soient égales; ce qui ne peut être: car (par la 47. du 1.) le Triangle CBK étant rectangle en B, le quarré BK sera toutoûjours plus petit que le quarré de l'hypotenuse KC, & par consequent la ligne KC sera plus grande que le rayon BK. Ce qui fait voir que le point C est au de là de la circonference; & que la ligne BD ne touche le Cercle qu'au seul point B. C. Q. F. D.

PROPOSITION XVII.

PROBLEME.

D'un point pris hors d'un Cercle, tirer une ligne qui le touche.

Fig. 14. SOit A le point donné duquel il faut mener une Tangente au Cercle X, aprés avoir tiré la ligne AB, de A en B centre du Cercle X; il faut décrire sur cette ligne comme diametre le demi-Cercle ABC, & au point de section C, mener AC qui sera la Tangente qu'on cherchoit. La démonstration en est facile, comme

me on le verra dans la Propoſition 21, où l'on prouve qu'un angle tel que BCA qui eſt renfermé dans un demi-Cercle eſt droit. Cela étant, la ligne CA ſera démontrée être la Tangente, ſi elle eſt perpendiculaire ſur le rayon BC, par la Propoſition précedente.

Je ne me ſuis point ſervi de la methode d'Euclide pour réſoudre ce Problême, m'ayant paru trop compoſée.

USAGE.

Il eſt néceſſaire de ſçavoir mener une Tangente à un Cercle par un point donné, car l'uſage en eſt fort étendu dans la Trigonometrie; c'eſt ce qui a obligé les Geometres d'en faire des Tables qui ſervent à meſurer toutes ſortes de Triangles, même les ſpheriques.

PROPOSITION XVIII.

Theoreme.

La ligne tirée du centre d'un Cercle, au point où une ligne droite le touche, est perpendiculaire à la même ligne.

Fig. 20. BD est une Tangente, & je tire du centre K, le rayon KB, que je dis être perpendiculaire sur la Tangente au point B où elle touche le Cercle.

Démonstration.

On peut connoître aisément (par la 16.) que puisqu'une ligne Tangente à l'extrêmité du rayon d'un Cercle, est perpendiculaire sur le même rayon, elle le sera pareillement, si l'on tire une ligne du centre au point d'attouchement; car la ligne KB étant la plus courte qu'on peut tirer du point K au point B, il il eſt aiſé de voir que toute autre ligne qu'on tireroit du point K d'un côté ou d'autre, du point B ne ſeroit point perpendiculaire, puiſque d'un point donné hors d'une ligne, on n'en peut tirer qu'une perpendiculaire.

La Propoſition 19 d'Euclide n'étant qu'une répetition de la précedente, j'en ai ſubſtitué une autre qui ſervira comme de Lemme à celles qui ſuivent.

PROPOSITION XIX.

THEOREME.

Si la Tangente d'un Cercle fait avec la Corde d'un arc, un angle au point d'attouchement, l'angle aura pour meſure la moitié de cet arc.

JE veux prouver que l'angle BAC formé par la Tangente AB, & la Corde AC, a pour meſure la moi- Fig. 21.

tié de l'arc AFC. Tirez du centre D, la ligne DA ſur le point d'attouchement, laquelle ſera perpendiculaire ſur la Tangente. Tirez pareillement DF perpendiculaire ſur la Corde AC, laquelle ſera diviſée en deux également au point E.

Démonſtration.

L'angle BAD eſt droit (par la 16.) & le Triangle ADE eſt rectangle ayant l'angle droit E; cela étant, les angles EAD & ADE vaudront un droit. Or l'angle DAE ne peut valoir un droit qu'en lui ajoûtant l'angle CAB, ou ADE; il s'enſuit donc que les angles ADF & CAB ſont égaux; & comme l'angle D a pour meſure l'arc AF qui eſt la moitié de l'arc AC, je conclus que l'angle BAC qui lui eſt égal, aura auſſi pour meſure la moitié de l'arc AC. C. Q. F. D.

PRO-

PROPOSITION XX.

THEOREME.

L'angle qui a son sommet à la circonference d'un Cercle, a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il s'appuye, & l'angle du centre est double de celui de la circonference.

ON veut prouver que l'angle BAC a pour mesure la moitié de l'arc BC; & que cet angle BAC qui est à la circonference est moitié de l'angle O qui est au centre. Tirez par le sommet de l'angle A, la Tangente DE. Fig. 22.

Démonstration.

La Tangente DE fait trois angles dont le point angulaire commun est A, ces angles DAB, BAC, & CAE sont égaux à deux droits: c'est-à-dire, qu'ils auront ensemble pour mesure la moitié de la circonference du Cercle, qui est la même chose que les moitiez des arcs AB, BC, & CA; mais l'angle DAB a pour mesure la moitié de l'arc AB; & l'angle EAC la moitié de l'arc AC par la précedente; donc l'angle BAC a pour mesure la moitié de l'arc BC.

Enfin l'angle du centre O, est double de l'angle BAC, qui est la circonference; ce qui est bien évident, car l'angle du centre a pour mesure l'arc CB; & on sçait que l'angle BAC n'en a que la moitié; donc l'angle O est double de l'angle BAC. C. Q. F. D.

USAGE.

On se sert très-utilement de cette Proposition dans l'Astronomie pour déterminer l'appogée du Soleil, & l'excentricité de son Cercle, par trois observations. On suppose pour cela que l'angle du centre est double de celui de la circonference. Ptolomée s'en sert fort

fort bien pour déterminer l'Epycicle de la Lune. On peut voir dans nôtre Traité de Trigonometrie combien cette Proposition est considerable, & on peut dire que c'est une des belles proprietez du Cercle.

PROPOSITION. XXI.

THEOREME.

Les angles qui sont dans les mêmes segments de Cercle, ou qui ont les mêmes arcs pour bases sont égaux.

ON peut prouver aisément que les angles C & B sont égaux, puisque s'appuyant sur l'arc DAE, ils ont chacun pour mesure la moitié de ce même arc. Fig. 23.

Après avoir démontré que l'angle de la circonference a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il s'appuye; considerons les angles qui peuvent se former dans un Cercle, dont le sommet *n'eſt ni au centre, ni à la circonference, c'eſt ce que nous allons voir dans les deux Corollaires ſuivans,*

COROLLAIRE I.

Fig. 24. Voici l'angle ABC qui n'eſt ni au centre, ni à la circonference; on demande quelle eſt la partie du Cercle qui peut déterminer ſa meſure.* Prolongez les côtez AB, AC juſqu'à la circonference EF: je dis que cet angle aura pour meſure la moitié de l'arc AC, plus la moitié de l'arc EF; ayant tiré la ligne FC, on aura le Triangle BCF. On ſçait que l'angle exterieur ABC eſt égal aux deux autres interieurs F & C (par la 32. du 1.) or comme cet angle exterieur eſt celui dont nous cherchons la meſure; il eſt évident que la meſure des angles F & C pris enſemble, ſera ce qu'on demande. Or comme la meſure de l'angle AFC, eſt la moitié de l'arc AC;

&

& que celle de l'angle ECF, eſt la moitié de l'arc EF; il s'enſuit que la moitié de ces deux arcs pris enſemble ſera la meſure de l'angle ABC.

COROLLAIRE II.

Voici un angle hors du Cercle dont les côtez viennent ſe terminer ſur la circonference concave. On demande encore quelle eſt la partie du Cercle qui doit meſurer l'angle BAC; je dis que c'eſt la moitié de l'arc BC, moins la moitié de l'arc DE; ayant tiré la ligne DC, on aura le Triangle DAC, dont l'angle exterieur BDC eſt égal aux deux autres interieurs A & C. Or comme l'angle BDC moins l'angle C, eſt égal à l'angle A; & comme la meſure de l'angle BDC, eſt la moitié de l'arc BC; que celle de l'angle C eſt la moitié de l'arc DE; il s'enſuit qu'en ôtant la moitié de Fig. 25.

cet arc DE; à la moitié de l'arc BC, la difference sera la mesure de l'angle A.

PROPOSITION XXII.

THEOREME.

Les figures quadrilateres inscrites dans un Cercle, ont les angles opposez égaux à deux droits.

Fig. 26. IL est aisé de démontrer que les deux angles opposez A & C pris ensemble, valent deux droits; car l'angle A ayant pour mesure la moitié de l'arc BCD, & l'angle C ayant pareillement pour mesure la moitié de l'arc BAD: ces deux angles auront donc pour mesure la moitié de la circonference du Cercle, & comme cette moitié est la mesure de deux droits, il s'ensuit que les angles A & C, vaudront deux droits; par la même raison les deux B & D vaudront aussi deux droits.

USA-

USAGE.

On peut par cette Proposition prouver que les deux côtez d'un Triangle obtusangle ont entr'eux la même raison que les Sinus des angles opposez. Ce que j'ai démontré clairement dans nôtre Traité de Trigonometrie.

PROPOSITION XXIII.

THEOREME.

Deux semblables segments de Cercle décrits dessus la même ligne sont égaux.

J'Appelle des semblables segments de Cercle, ceux qui contiennent des angles égaux, & je dis que s'ils sont décrits sur la même ligne AB, ils tomberont l'un sur l'autre, & ne se surpasseront en aucun endroit ; car s'ils se surpassoient, ainsi que font les segments ADB, ACB, ils ne seroient pas semblables, & pour le démontrer, Fig. 16.

tirez les lignes ADC, BD, & BC.

Démonstration.

L'angle ADB est exterieur, eu égard au Triangle DBC : donc (par la 32. du 1.) il est plus grand que l'angle ACB, & par consequent les segments ADB, ACB contiennent des angles inégaux ; ce que j'appelle être dissemblables.

PROPOSITION XXIV.

THEOREME.

Deux semblables segments de Cercle décrits sur des lignes, sont égaux.

Fig. 17. SI les segments de Cercle AEB, CFD sont semblables, & si les lignes AB, CD sont égales, ils seront égaux.

Démonstration.

Qu'on s'imagine que la ligne CD est posée sur la ligne AB, elles ne se surpasseront pas l'une & l'autre ; puis-

qu'on

qu'on suppose qu'elles sont égales, & pour lors les segments AEB, CED seront décrits sur la même ligne; ils seront donc égaux par la précedente.

PROPOSITION XXV.

PROBLEME.

Achever un Cercle dont nous n'avons qu'une partie.

ON nous donne l'arc ABC, & nous voulons achever le Cercle; il ne faut que chercher son centre; tirez les lignes AB, BC, & les ayant divisées par le milieu en D & E; tirez leur deux perpendiculaires DI, EI, qui se rencontreront au point I, centre du Cercle. Fig. 27.

Démonstration.

Le centre est dans la ligne DI (par la 4.) il est aussi dans EI (par la même) il est donc dans le point I.

USAGE.

Cette Proposition est très-utile pour con-

connoître le diametre d'un Cercle dont on n'a qu'un arc; la plûpart des voutes sont faites en arc de Cercle, lorsqu'elles ne sont pas à plein centre; si on veut en faire le toisé, il faut nécessairement connoître la valeur de cette partie de Cercle, ce qu'on ne peut trouver sans le diametre; mais comme on ne peut point agir dans ces occasions-là, comme on fait sur le papier, c'est-à-dire, qu'on ne peut se servir du Compas pour trouver le diametre d'une voute; nous donnerons à la fin de la Proposition 35. une methode qui peut servir à surmonter cette difficulté.

PROPOSITION XXVI.

THEOREME.

Les angles égaux qui sont ou au centre, ou à la circonference des Cercles, ont pour base des arcs égaux.

Fig. 28. SI dans cette figure les angles égaux D & I, sont au centre des Cercles

cles égaux ABC, EFG; les arcs BC, FG seront égaux; car si l'arc BC étoit plus grand ou plus petit que l'arc FG, puisque les arcs sont les mesures des angles, l'angle D seroit ou plus grand, ou plus petit que l'angle I.

Que si les angles égaux A & E sont à la circonference des Cercles égaux; les angles D & I, qui sont doubles des angles A & E étant égaux; les arcs BC, FG seront aussi égaux.

PROPOSITION XXVII.

THEOREME.

Les angles qui sont ou au centre, ou à la circonference des Cercles égaux, & qui ont des arcs égaux pour base, sont aussi égaux.

SI dans les deux figures précedentes les angles D & I sont au centre des Cercles égaux; & s'ils ont pour base des arcs égaux BC, FG: ils seront égaux; Fig. 28.

égaux ; parce que leurs mesures BC, FG sont égales. Que si les angles A & E étant à la circonference des Cercles égaux, ont pour base des arcs égaux BC, FG : les angles du centre seront égaux ; & eux qui sont leur moitié (par la 20.) seront aussi égaux.

Les Propositions 28. & 29. ne sont, pour ainsi dire, que répeter les précedentes, c'est pourquoi nous les passerons.

PROPOSITION XXX.

PROBLEME.

Diviser un arc de Cercle en deux également.

Fig. 29. ON propose l'arc AEB à diviser en deux également ; mettez le pied du Compas au point A, & faites les deux arcs E & G. Puis le transportez sans l'ouvrir ni fermer au point B. Décri-

Décrivez deux autres arcs qui coupent les premiers en F & en G. Si on tire la ligne FG, elle coupera en deux également l'arc proposé au point E, tirez la Corde AB.

On connoît aisément que la ligne AB est divisée également au point D, par la perpendiculaire FG. Or le centre du Cercle doit se trouver dans cette ligne (par la 4.) supposons que ce soit le point C; après avoir tiré les rayons CB & CA, on aura 2. Triangles rectangles, qui ont tous leurs côtez égaux; ce qui se prouve de soi-même. Donc (par la 8.) les côtez AD & DB étant égaux, les angles ACE & ECB qui leur sont opposez, le seront aussi. D'où je conclus que les arcs AE & EB sont égaux, puisqu'ils sont chacun la mesure des angles égaux.

PRO-

PROPOSITION XXXI.

THEOREME.

L'angle qui est dans un demi Cercle, est droit; celui qui est compris dans un plus grand segment, est aigu; & celui qui est dans un plus petit, est obtus.

Démonstration.

Fig. 30. L'Angle BAC qui est renfermé dans un demi Cercle est droit puisque s'appuyant sur le diametre BC, il a pour mesure la moitié du demi-Cercle BEC.

L'angle EAC renfermé dans le grand segment de Cercle EBAC, sera aigu, puisqu'il a pour mesure la moitié de l'arc EC qui est moindre qu'un demi Cercle.

Fig. 36. L'angle FAC sera obtus, puisque sa mesure est la moitié de l'arc FEC, qui est plus grand qu'un demi-Cercle.

USA-

USAGE.

Par cette Proposition les Ouvriers ont le moyen de connoître si leur équierre est juste; soit donc l'équierre DAB. On veut voir si l'angle A est positivement droit; ayant tiré la ligne DB, il faut la diviser par le milieu au point C, lequel sera le centre d'un Cercle qui doit passer par les trois points D, A, B, la ligne DB étant le diametre, l'angle A sera droit s'il touche la circonference, puisqu'il aura pour mesurer la moitié de l'arc DOB, qui est un quart de Cercle.

PROPOSITION XXXII.

THEOREME.

La ligne qui coupe le Cercle au point de l'attouchement, fait avec la touchante des angles égaux à ceux des segments alternes.

QUE la ligne BD coupe le Cercle au point B, qui est celui où la ligne Fig. 31.

ligne AC le touche; je dis que l'angle CBD, que la ligne BD comprend avec la touchante BC, eſt égale à l'angle E, qui eſt celui du ſegment alterne BED, & que l'angle ABD eſt égal à l'angle F du ſegment BFD.

Démonſtration.

Ceci eſt facile à démontrer; car l'angle ABD, formé par la touchante & la Corde, a pour meſure la moitié de l'arc BOD: il ſera donc égal à l'angle BFD du ſegment alterne, puiſque cet angle a auſſi pour meſure la moitié du même arc BOD ſur lequel il s'appuye. Par la même raiſon, l'angle CBD ayant pour meſure la moitié de l'arc BD, ſera égal à l'angle E, lequel s'appuyant ſur le même arc BD, doit en avoir auſſi la moitié pour meſure. C. Q. F. D.

PRO-

PROPOSITION XXXIII.

PROBLEME.

Décrire sur une ligne un segment de Cercle capable d'un angle donné.

NOUS entendons par un segment capable d'un angle donné, un arc sur lequel l'angle E s'appuyant l'a pour mesure. Faites sur la ligne AB l'angle BAC égal à l'angle E; élevez sur le point A, la perpendiculaire AD: pareillement élevez sur AC la perpendiculaire CD. Cela étant fait, on aura le Triangle rectangle ADC; ayant divisé l'hypotenuse en deux également au point F, lequel étant pris pour centre d'un Cercle qui doit passer par les points A, C, D, on aura le segment CAO capable de l'angle donné E; ce qui est bien évident; car l'angle E étant égal à l'angle Fig. 26. Fig. 32.

BAC,

BAC, ils auront chacun pour mesure la moitié de l'arc AOC (par la 19.) l'angle D qui est à la circonference sera aussi égal à l'angle E; puisqu'il a pour mesure la moitié de l'arc AOC sur lequel il s'appuye. C. Q. F. F. & D.

Comme la Proposition 34 est, pour ainsi dire, la même que celle-ci; pour ne la point separer, nous dirons que si l'on vouloit couper dans un Cercle un segment capable d'un angle donné, ayant tiré au Cercle une Tangente telle que AB, & du point d'attouchement ayant fait l'angle BAC égal à l'angle donné C, on aura le segment COA qui est ce qu'on cherche.

PRO-

PROPOSITION XXXV.

THEOREME.

Si deux lignes se coupent dans un Cercle, le rectangle compris sous les parties de l'une, est égal au rectangle compris sous les parties de l'autre.

PRemierement, si les deux lignes se coupent au centre du Cercle, elles seront égales & divisées également; ainsi il est évident que le rectangle compris sous les parties de l'une, est égal au rectangle compris sous les parties de l'autre. Fig. 33.

Secondement, que l'une des lignes passe par le centre F, comme AC, & divise la ligne BD en deux également au point E; je dis que le rectangle compris sous AE, EC, est égal au rectangle compris sous BE, ED, c'est-à-dire au quarré de BE, la ligne AC est perpendiculaire à BD (par la 3.) Fig. 33.

Dé-

Démonstration.

Fig. 34. Puisque la ligne AC est divisée également en F, & inégalement en E; le rectangle compris sous AE, EC, avec le quarré de EF, est égal au quarré de FC, ou FB (par la 5. du 2.) Or l'angle E étant droit, le quarré de FB est égal aux quarrez de BE, EF. Donc le rectangle compris sous AE, EC, avec le quarré de EF, est égal aux quarrez de BE, EF: & ôtant le quarré de EF; reste que le quarré de BE, est égal au rectangle sous AE, EC.

Fig. 34. Troisiémement, que la ligne AB passe par le centre F, & qu'elle divise inégalement la ligne CD au point DE. Tirez du centre GF perpendiculaire à CD: & (par la 3.) les lignes G, GD seront égales.

Démonstration.

Puisque la ligne AB est divisée également en F, & inégalement en E; le le rectangle compris sous AE, EB, avec le quarré de EF, est égal au quarré de BF, ou FC (par la 5. du 2.) au lieu de EF, mettez les quarrez FG, GE qui lui sont égaux (par la 47. du 1.) pareillement la ligne CD étant divisée également en G, & inégalement en E; le rectangle CE, ED, avec le quarré de GE, sera égal au quarré de GC. Ajoûtez le quarré de GF, le rectangle CEED, avec les quarrez de GE, FG, sera égal aux quarrez de GC, GF; c'est-à-dire (par la 47. du 1.) au quarré de CF: donc le rectangle AEB, avec les quarrez de GE, GF; & le rectangle de GE, ED avec les mêmes quarrez sont égaux: & par consequent ôtant ces mêmes quarrez, le rectangle AEB est égal au rectangle CED. Fig. 34.

Quatriémement, que les lignes CD, HI, se coupent au point E, & que ni

 l'une

l'une ni l'autre ne passe par le centre. Je dis que le rectangle CED, est égal au rectangle HE, EI. Car tirant la ligne AFB, les rectangles CED, HEI sont égaux au rectangle AEB (par le cas précédent,) donc ils sont égaux entr'eux.

USAGE.

Fig. 33. *On peut par le second cas de cette Proposition, trouver aisément le diametre d'un arc de Cercle, dont on connoît la Corde & le perpendiculaire élevée sur son milieu. Soit par exemple l'arc de Cercle BCD, si l'on connoît la Corde BD après l'avoir divisée par le milieu au point E, ayant élevé la perpendiculaire CE que je suppose être de 4 pieds, & la Corde BD de 12. il faut prendre la moitié de la Corde, & la multiplier par elle-même, c'est-à-dire, multiplier 6 par 6, le produit 36 étant divisé par 4, valeur de la perpendiculaire, on aura 9 pour quotient, qui sera la differen-*

ference du diametre à la perpendiculaire. Donc si l'on ajoûte le quotient au diviseur, on aura 13. valeur du diametre. Cette pratique est très-utile, comme je l'ai déja dit, pour trouver la valeur des portions de Cercle, quand on veut faire le toisé des voutes qui sont de cette nature.

PROPOSITION XXXVI.

THEOREME.

Si d'un point pris hors d'un Cercle on tire une ligne Tangente, & une autre qui aille se terminer sur la circonference concave, le quarré de la touchante sera égal au rectangle compris sous toute la ligne qui coupe le Cercle, & sous la partie exterieure.

SI du point A hors du Cercle, on tire la Tangente AB, & la Secante AC, je dis que le quarré de la Tangente est égal au rectangle com- Fig. 35

pris ſous toute la ligne AC, & la partie exterieure AD. Suppoſons en premier lieu, que cette ligne paſſe par le centre E, tirez la ligne EB perpendiculaire ſur le point d'attouchement B.

Démonſtration.

Le Triangle ABE eſt rectangle en B, puiſque le rayon BE a été tiré perpendiculaire ſur le point d'attouchement; la ligne DC eſt diviſée également au point E; on lui a ajoûté la ligne AD. Donc (par la 6. du 2.) le rectangle compris ſous la composée des deux, & ſous l'ajoûtée AD, avec le quarré du milieu DE, ſera égal au quarré de AE; or ce quarré eſt égal aux deux autres AB & BE; comme le quarré DE eſt égal au quarré BE, puiſqu'ils ſont les rayons du Cercle; il s'enſuit donc que le quarré DE eſt commun au rectangle compris ſous

AC

AC & AD, & au quarré AB : cela étant, si on ôte à tous deux ce quarré du milieu, le rectangle sera égal au quarré de la touchante.

Supposons maintenant que la ligne AC ne passe point par le centre, & qu'elle ait prise la situation de la ligne AH, je dis que le rectangle compris sous les lignes AH & AF est égal au quarré de la tangente AB. Pour le prouver, menés du centre E la perpendiculaire EG sur FH qu'elle divisera en deux également par la 3.; & tirés le rayon EF; cela posé.

Puisque la ligne FH est coupée en deux parties égales au point G, & que la ligne AF lui est ajoûtée; il s'ensuit (par la 6. du 2.) que le rectangle compris de AH, AF, avec le quarré de FG, est égal au quarré de AG; si donc à ces deux touts qui sont égaux, on ajoûte le quarré de GE, il s'ensuivra que le rectangle de AH, AF, & les deux quarrez de GF & de GE seront égaux aux deux quarrez de GE & de GA. Or les deux quarrez de GF & de GE sont égaux au quarré de EF, ou de son égal EB (par la 47. du 1.) & de même les deux quarrez de AG & de GE sont égaux au quarré de EA; si donc au lieu des deux quarrez de GF & de GE, on prend le quarré de EB; & au lieu des deux quarrez de GA & de GE, on prend le quarré de EA; il s'ensuivra que le rectangle compris de AH, AF, avec le quarré de EB, sera égal au quarré de EA. Mais les deux quarrez de AB & de EB sont aussi égaux au quarré de EA (par la 47. du 1.) Donc le rectangle de HA, AF, & le quarré de EB sont ensemble égaux aux deux quarrez de AB & de EB. Si donc de ces deux touts qui sont

Fig. 35.

égaux,

égaux, on ôte le quarré de EB qui leur est commun; il restera le rectangle de AH, AF, égal au quarré de AB. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

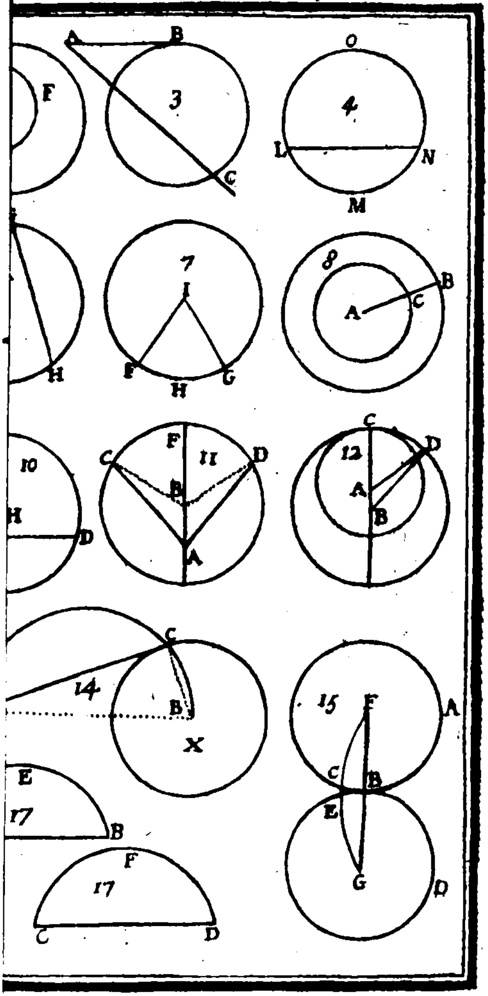
Il s'ensuit de cette Proposition, que si d'un point pris à discretion hors d'un Cercle, on mene tant de lignes droites que l'on voudra, qui coupent le Cercle, & qui aillent se terminer à sa circonference concave, le rectangle compris d'une de ses coupantes telle que l'on voudra, & de sa partie hors du Cercle, sera égal au rectangle compris de telle autre coupante que l'on voudra, & de sa partie hors du Cercle; car chacun de ces rectangles est égal au quarré de la touchante, qui seroit menée de ce même point.

COROLLAIRE II.

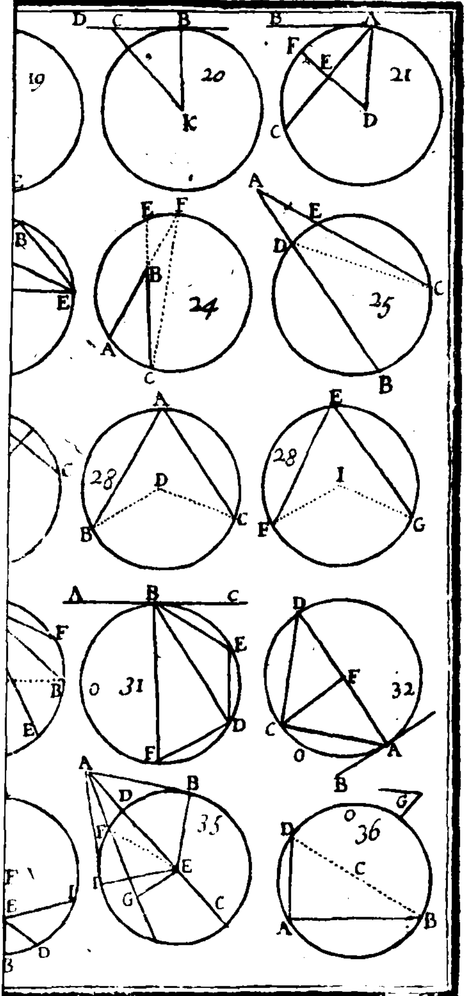
Il s'ensuit encore que si d'un point

pris à discretion hors d'un Cercle, on mene deux lignes droites qui le touchent, elles seront égales entr'elles; car le quarré de chacune de ces lignes est égal au rectangle d'une coupante, & de sa partie hors du Cercle, & ainsi chacun de ces quarrez est égal à l'autre. D'où il suit que les lignes qui en sont les côtez, sont égales.

vre troisieme Planche premiere.



re troisième Planche deuxième ..



LIVRE QUATRIE'ME DES ELEMENS D'EUCLIDE.

Ce quatriéme Livre est fort utile dans la Trigonometrie ; puisqu'en inscrivant les polygones dans un Cercle, nous avons des pratiques pour faire la table des soutendantes, des Sinus, des Tangentes, & des Secantes ; laquelle est très-nécessaire pour toute sorte de mesurages.

Secondement, en inscrivant des polygones dans un Cercle, nous avons les divers aspects des astres, qui prennent leurs noms des mêmes polygones.

Troisiémement, cette même pratique nous donne la quadrature du Cercle, autant juste qu'on en peut avoir besoin.

soin. Nous démontrons encore que les Cercles sont en raison doublée de leur diametre.

Quatriémement, l'Architecture militaire a besoin d'inscrire des polygones dans un Cercle, pour faire le dessein des Fortifications régulieres.

LES DEFINITIONS.

Pl. 1. Fig. 1. UNe figure rectiligne est inscrite dans un Cercle; ou le Cercle est décrit autour de la figure, lorsque tous ses angles sont en la circonference du même Cercle. *Comme le Triangle ABC est inscrit dans un Cercle, & le Cercle est décrit autour du Triangle; parce que les angles A, B, C, aboutissent à sa circonference. Le Triangle DEF n'est pas inscrit dans le Cercle, parce que l'angle D, n'aboutit pas à la circonference du Cercle.*

Pl. 1. Fig. 2. II. Une figure rectiligne est décrite

crite autour d'un Cercle, & le Cercle est inscrit au dedans de cette figure, quand tous les côtez de la figure touchent la circonference du Cercle. *Comme le Triangle GHI, est décrit autour du Cercle KLM, à cause que ses côtez touchent la circonference du Cercle en K, L, M.*

III. Une ligne est ajoûtée, ou inscrite dans un Cercle, lorsque ses deux bouts touchent la circonference du Cercle: *Comme dans la figure précedente, la ligne NO. La ligne RP n'est pas inscrite dans le Cercle.*

PROPOSITION I.

PROBLEME.

Inscrire dans un Cercle une ligne donnée, qui ne soit pas plus grande que son diametre.

ON propose à inscrire dans un Cercle AEBD, une ligne qui Pl. 1. Fig. 3.

 ne

ne ſurpaſſe pas ſon diametre. Prenez ſa longueur ſur le diametre, & que ce ſoit, par exemple BC. Mettez le pied du compas au point B, & décrivez un Cercle à l'ouverture BC, qui coupe le Cercle AEBD en D & E. Tirez la ligne BD, ou BE. Il eſt évident qu'elles ſont égales à BC, par la définition du Cercle.

USAGE.

Cette Propoſition eſt néceſſaire pour la pratique de celles qui ſuivent.

PROPOSITION II.

PROBLEME.

Inſcrire dans un Cercle un Triangle équiangle à un autre.

Pl. 1. Fig. 4. & 5.

ON propoſe le Cercle EGH dans lequel on veut inſcrire un Triangle équiangle au Triangle ABC. Tirez la touchante FED (par la 17. du 3.) & faites au point de l'attouchchement E, l'angle DEH, égal à l'angle B; & l'angle FEG, à l'angle C, (par la 23. du 1.) Tirez la ligne CH, le Triangle GEH sera équiangle à ABC.

Démonstration.

L'angle DEH est égal à EGH, du segment alterne (par la 32. du 3.) Or l'angle DEH a été fait égal à l'angle B: & par consequent les angles B & G sont égaux. Les angles C & H, sont aussi égaux, par la même raison; & (par le Corol. 2. de la 32 du 1.) les angles A & GEH seront égaux. Donc les Triangles EGH, ABC sont équiangles.

USAGE.

Cette Proposition sert pour inscrire dans un Cercle un Pentagone & un Pentedecagone, comme vous verrez dans les Propositions XI. & XVI.

PRO-

PROPOSITION III.

PROBLEME.

Décrire autour d'un Cercle, un Triangle équiangle à un autre.

Pl. 1. Fig. 6. & 7. SI on veut décrire autour du Cercle GKH, un Triangle équiangle à ABC, il faut continuer un des côtez BC, en D & en F, & faire l'angle GIH égal à l'angle ABD : & HIK égal à l'angle ACF : puis tirer les Tangentes LGM, LKN, NHM, par les points G, K, H. Les Tangentes se rencontreront : car les angles IKL, IGL étant droits, si on tiroit la ligne KG, qui n'est pas tirée, les angles KGL, GKL seroient plus petits que deux droits : donc (par l'onziéme axiome,) les lignes GL, KL doivent concourir.

Démonstration.

Tous les angles du quadrilatere GIHM,

GIHM, sont égaux à quatre droits; puisqu'il peut être partagé en deux Triangles: les angles IGM, IHM, que font les Tangentes, sont droits; donc les angles M & I valent deux droits, aussi-bien que les angles ABC, ABD. Or l'angle GIH, est égal à l'angle ABD: Donc l'angle M sera égal à l'angle ABC. Par la même raison, les angles N & ACB sont égaux: & ainsi les Triangles LMN, ABC sont équiangles.

PROPOSITION IV.

PROBLEME.

Inscrire un Cercle dans un Triangle.

SI vous voulez inscrire un Cercle dans le Triangle ABC: divisez en deux également les angles ABC, ACB (par la 9. du 1.) tirant les lignes CD, BD, qui concourent au Pl. 1. Fig. 8.

au point D. Tirez enſuite du point D, les perpendiculaires DE, DF, DG, leſquelles ſeront égales, de ſorte que le Cercle décrit du centre D, à l'ouverture DE, paſſera par F & G.

Démonſtration.

Les Triangles DEB, DBF ont les angles DEB, DFB égaux, puiſqu'ils ſont droits: les angles DBE, DBF ſont auſſi égaux, l'angle ABC ayant été diviſé en deux également; le côté DB eſt commun: Donc (par la 26. du 1.) ces Triangles ſeront égaux en tout ſens; & les côtez DE, DF ſeront égaux. On peut démontrer de la même façon, que les côtez DF, DG ſont égaux. On peut donc décrire un Cercle qui paſſe par les points E, F, G, & puiſque les angles E, F, G ſont droits, les côtez AB, AC, BC touchent le Cercle, qui ſera par conſequent inſcrit dans le Triangle.

Co-

COROLLAIRE.

Il suit de la pratique de ce Problême, que les trois lignes qui divisent en deux également les angles d'un Triangle, se rencontrent au dedans du Triangle en un même point, parce que le centre du Cercle inscrit est dans chacune. Il en est de même des trois lignes, qui divisent en deux également les côtez opposez, puisque le centre de gravité du Triangle est dans chacune.

PROPOSITION V.

PROBLEME.

Décrire un Cercle autour d'un Triangle.

SI vous voulez décrire un Cercle autour du Triangle ABC; divisez les côtez AB, BC en deux également, en D & E, & sur ces points élevez des perpendiculaires DF, qui concourent au point F. Si vous dé- Pl. 1. Fig. 9.

crivez

crivez un Cercle du centre F, à l'ouverture FB, il passera par A & C; c'est-à-dire, que les lignes FA, FB, FC, sont égales.

Démonstration.

Les Triangles ADF, BDF, ont le côté DF commun, & les côtez AD, DB égaux; puisque le côté AB a été divisé également, les angles en D sont égaux, étant droits. Donc (par la 4. du 1.) les bases AF, BF, sont égales: comme aussi les bases BF, CF.

USAGE.

Nous avons souvent besoin d'inscrire le Triangle dans le Cercle; comme dans la premiere Proposition du troisiéme Livre de ma Trigonometrie. Cette pratique est aussi nécessaire pour mesurer l'aire d'un Triangle, & en plusieurs autres rencontres.

PRO-

PROPOSITION VI.

PROBLEME.

Inscrire un quarré dans un Cercle.

Pour inscrire un quarré dans un Cercle ACBD; tirez au diametre AB, la perpendiculaire DC, qui passe par le centre E. Tirez aussi de l'extrêmité d'un diametre à l'extrêmité de l'autre, les lignes AC, CB, BD, AD: & vous aurez inscrit dans le Cercle le quarré ACBD. Pl. 1. Fig. 10.

Démonstration.

Les Triangles AEC, CEB ont les côtez AE, EC égaux aux côtez EC, EB, & les angles AEC, CEB égaux, puisqu'ils sont droits. Donc les bases AC, CB sont égales (par la 4. du 1.) De plus, puisque les côtez AE, CE sont égaux, les angles EAC, ECA seront égaux: & l'angle E étant droit, ils seront cha-

chacun demi-droits, (par la 32. du 1.) Ainsi l'angle ECB est la moitié d'un droit. Par consequent, l'angle ACB sera droit. Il en est de même de tous les autres : Donc la figure ACDB est un quarré.

PROPOSITION VII.

PROBLEME.

Décrire un quarré autour d'un Cercle.

Pl. 1. Fig. 11. AYant tiré les deux diametres AB, CD, qui se coupent perpendiculairement au centre E: tirez les touchantes FG, GH, HI, FI par les points A, D, B, C; & vous aurez décrit un quarré FGHI, autour du Cercle ACBD.

Démonstration.

Les angles E & A sont droits : Donc (par la 28. du 1.) les lignes FG, CD sont paralleles. Je prouve ve de la même façon, que CD, HI; FI, AB; AB, GH ſont paralleles. Donc la figure FCDG eſt un parallelograme: & (par la 34. du 1.) les lignes FG, CD ſont égales; comme auſſi CD, IH, FI, AB, GH; par conſequent les côtez de la figure FGHI ſont égaux. De plus, puiſque les lignes FG, CD ſont paralleles, & que l'angle FCE eſt droit, l'angle F, ſera auſſi droit (par la 29. du 1.) Je démontre de la même façon, que les angles G, H & I ſont droits: Donc la figure FGHI eſt un quarré, & ſes côtez touchent le Cercle.

PROPOSITION VIII.

PROBLEME.

Inſcrire un Cercle dans un quarré.

SI vous voulez inſcrire un Cercle dans le quarré FGHI: diviſez les Pl. 1. Fig. 11.

les côtez FG, GH, HI, FI par le milieu en A, D, B, C: & tirez les lignes AB, CD, qui se coupent au point E. Je démontre, que les lignes EA, ED, EC, EB sont égales; & que les angles en A, B, C, D sont droits: & qu'ainsi vous pouvez décrire un Cercle du centre E, qui passe par A, D, B, C, & qui touche les côtés du quarré.

Démonstration.

Puisque les lignes AB, GH conjoignent les lignes AG, BH qui sont paralleles & égales, elles seront aussi paralleles & égales: c'est pourquoi la figure AGDE est un parallelograme, & les lignes AE, GD; AG, ED sont égales: & AG, GD étant égales, AE, ED le seront aussi. Il en est de même des autres AE, EC, EB. De plus, AG, CD étant paralleles; &

& l'angle G étant droit, l'angle D le sera auſſi. On peut donc décrire du centre E, le Cercle ADBC qui paſſera par les points, A, D, B, C, & qui touchera les côtez du quarré.

PROPOSITION IX.

PROBLEME.

Décrire un Cercle autour d'un quarré.

POur décrire un Cercle autour d'un quarré ABFD; tirez les diagonales AF, BD, qui ſe coupent au point E. Ce point E ſera le centre du Cercle, qui paſſera par les points A, F, B, D. Je dois donc démontrer que les lignes AE, FE, BE, DE ſont égales. Pl. 1. Fig. 12.

Démonſtration.

Les côtez AB, FB ſont égaux, & l'angle B eſt droit: donc les angles FAB, BFA ſont égaux (par la la 5. du 1.) & demi-droits, (par la 32. du 1.) Je démontre de la même façon, que les angles ABD, ADB, FDB, DBF, font demi-droits, ainfi le Triangle AEB, ayant les angles EAB, EBA demi-droits & par conſequent égaux, il aura auſſi (par la 6. du 1.) les côtez AE, EB égaux. On démontre de même que les lignes EF, EB; EF, ED font égales.

USAGE.

Nous montrons dans le douzième Livre que les Polygones décrits dans le Cercle, dégenérent en Cercle; & que comme ces Polygones font toûjours en raiſon doublée de leurs diametres, les Cercles le font auſſi. Nous avons beſoin dans la Geometrie pratique, d'inſcrire le quarré, & les autres Polygones, dedans & autour d'un Cercle, pour réduire le Cercle au quarré.

PRO-

PROPOSITION X.

PROBLEME.

Décrire un Triangle Isocele qui ait les angles sur la base, chacun double du troisiéme.

POur décrire le Triangle Isocele ABD qui ait chacun des angles ABD, ADB, double de l'angle A; divisez la ligne AB, (par la 11. du 2.) de sorte que le quarré de AC soit égal au rectangle AD, BC. Décrivez du centre A, à l'ouverture AB, un Cercle BD, dans lequel vous inscrirez BD égale à AC. Tirez la ligne DC, & décrivez un Cercle autour du Triangle ACD, (par la 5.) Pl. 1. Fig. 10.

Démonstration.

Puisque le quarré de CA, ou BD, est égal au rectangle compris sous AB, BC; la ligne BD touchera le Cercle ACD, au point D, (par la 37. du 3.)

Donc l'angle BDC sera égal à l'angle A, compris dans le segment alterne CAD, (par la 32 du 3.) Or l'angle BCD exterieur eu égard au Triangle ACD, est égal aux angles A & CDA: donc l'angle BCD est égal à l'angle ADB. De plus l'angle ADB, est égal à l'angle ABD, (par la 5. du 1.) donc les angles DCB, DBC sont égaux, & (par la 6. du 1.) les côtez BD, DC seront égaux. Et puisque BD est égal à AC; les côtez AC, CD seront égaux, & les angles A & CDA le seront aussi. Donc l'angle ADB est double de l'angle A.

USAGE.

Ce Problême sert pour le suivant, c'est-à-dire, pour inscrire un Pentagone régulier dans un Cercle, où l'on voit que pour y inscrire un Eptagone régulier, il faudroit y inscrire un Triangle Isocele, où chacun des deux angles à la base fût triple de l'angle au sommet: mais ce Pro-

blême

blême étant solide, il ne peut pas être résolu par le Cercle & par la ligne droite seulement, & c'est à cause de cela qu'Euclide n'en a point parlé.

PROPOSITION XI.

PROBLEME.

Inscrire un Pentagone régulier dans un Cercle.

POur inscrire un Pentagone régulier dans un Cercle, décrivez (par la 18.) un Triangle Isocele ABC, qui ait les angles ABC, ACB sur la base, chacun double de l'angle A. Inscrivez (par la 2.) dans le Cercle, un Triangle DEF équiangle au Triangle ABC: divisez en deux également les angles DEF, DFE, tirant les lignes EG, FH. Enfin, joignez les lignes DH, DG, GF, EH: & vous aurez décrit un Pentagone régulier, c'est-à- Pl. 1. Fig. 14. & 15.

K 2 dire,

dire, qui a tous les côtez égaux, aussi bien que tous les angles.

Démonstration.

Les angles DEG, GEF, DFH, HFE, sont les moitiez des angles DEF, DFE, qui sont chacun double de l'angle A: donc ils sont tous égaux à l'angle A: & par consequent les cinq arcs, qui leur servent de base, sont égaux (par la 26. du 3.) & les lignes HD, HE, EF, FG, GD sont égales (par la 29. du 3.) Secondement, les angles DGF, GFE, ayant chacun pour base, trois de ces arcs égaux, seront aussi égaux. Donc les côtez, & les angles de ce Pentagone sont égaux.

SCOLIE.

On trouve dans la construction des Tables de Sinus de M. Ozanam, une autre methode plus facile pour inscrire un Pentagone régulier dans un Cercle, & aussi un Decagone régulier, de laquelle

quelle on tire la maniere de trouver en nombres les Sinus des arcs de 18 & de 36 degrez.

PROPOSITION XII.

PROBLEME.

Décrire un Pentagone régulier autour d'un Cercle.

INſcrivez un Pentagone régulier ABCDE dans le Cercle (par la précedente) tirant des Tangentes par les points A, B, C, D, E, (par la 17. du 3.) vous aurez décrit un Pentagone régulier autour du Cercle. Tirez les lignes FA, FG, FE, FH, FD. Pl. 1. Fig. 16.

Démonſtration.

Les lignes touchantes GA, GE ſont égales (par le 2. Corol. de la 36. du 3.) comme auſſi EH, HD : les lignes FA, FE ſont auſſi égales (par la définition du Cercle.) Donc (par la 8. du 1.) les Triangles FGA, FGE

 ſont

ſont égaux en tout ſens, & les angles AFG, EFG ſont égaux ; comme auſſi les angles EFH, DFH. Et parce que les angles EFA & EFD ſont égaux (par la 27. du 3.) leurs moitiez EFH, EFG ſeront égales: & (par la 26. du 1.) les Triangles EFH, EFG ſeront égaux en tout ſens, & les côtez EG, EH auſſi égaux. Je démontre de la même façon, que tous les côtez ſont diviſez en deux également : & par conſequent, puiſque les lignes AG, GE ſont égales, leurs doubles GH, GI ſeront auſſi égales. De plus, les angles G & H, étant doubles des angles FGE, FHD, ſont auſſi égaux. Nous avons donc décrit un Pentagone régulier autour d'un Cercle.

PRO-

PROPOSITION XIII.

PROBLEME.

Inſcrire un cercle dans un Pentagone régulier.

POur inſcrire un Cercle dans le Pentagone régulier ABCDE : diviſez les angles A & B en deux également par les lignes AF, BF, leſquelles concourront en F. Puis tirant la ligne FG perpendiculaire à AB, décrivez un Cercle du centre F, à l'ouverture FG. Je dis qu'il touchera tous les autres côtez, c'eſt-à-dire, qu'ayant tiré FH perpendiculaire à BC ; FG & FH ſeront égales. Tirez la ligne FC. Pl. 1. Fig. 17.

Démonſtration.

Puiſque les angles égaux A & B ont été diviſez en deux également, leurs moitiez GAF, GBF ſeront égales : & puiſque les angles en G ſont droits, & le côté FG commun, les Triangles

AFG, BFG feront égaux en tout fens (par la 26. du 1.) ainfi les lignes AG, GB font égales. De plus, je prouve que les lignes BG, BH; auffi-bien que FG, FH font égales: Et les côtez AB, BC d'un Pentagone régulier étant égaux, les lignes BH, HC feront égales, Par confequent les angles G & H étant droits & égaux; les Triangles BFH, HFC feront égaux en tout fens: & les angles FBH, FCH feront égaux (par la 4. du 1.) Et puifque les angles B & C font égaux; l'angle FCH fera la moitié de l'angle BCD. Ainfi allant à l'un & à l'autre, je démontrerai que toutes les perpendiculaires, FG, FH, & les autres font égales.

PRO-

PROPOSITION XIV.

PROBLEME.

Décrire un Cercle autour d'un Pentagone régulier.

POur décrire un Cercle autour d'un Pentagone régulier ABCDE, divisez deux de ses côtez AB, BC également en G & H ; tirez les perpendiculaires GF, HF. Le Cercle tiré du centre F, à l'ouverture FA, passera par B, C, D, E. Pl. 1. Fig. 15.

Démonstration.

Supposons que le Cercle est décrit, il est évident (par la 1. du 3.) qu'ayant divisé la ligne AB par le milieu en G ; & ayant tiré la perpendiculaire GF ; le centre de ce Cercle est dans cette perpendiculaire : il est aussi dans HF ; donc il est au point F.

USAGE.

Ces Propositions sont utiles pour faire *la table des Sinus, & pour tracer des Citadelles : car les Pentagones ſont les plus ordinaires. Il faut auſſi remarquer, que ces manieres de décrire un Pentagone autour d'un Cercle, ſe peuvent appliquer aux autres Polygones.*

PROPOSITION XV.

PROBLEME.

Décrire un Hexagone régulier dans un Cercle.

Pl. 1. Fig. 18. POur inſcrire un Hexagone régulier dans le Cercle ABCDEF : Tirez le diametre AD, & mettez le pied du compas au point D, décrivez un Cercle à l'ouverture du demi-diametre DG qui coupera le Cercle en C & en E : puis tirez les diametres EGB, CGF, & les lignes AB, AF & les autres.

Démonſtration.

Il eſt évident que les Triangles CDG,

CDG, DGE sont équilateres: car leurs côtez GC, DG, GE sont égaux étant tirez du centre à la circonference, & CD, DE ont été faits égaux à DG; c'est pourquoi les angles CGD, DGE, & leurs opposez au sommet BGA, AGF, sont chacun la troisiéme partie de deux droits; c'est-à-dire de 60 degrez. Or tous les angles qui se peuvent faire autour d'un point, valent quatre droits; c'est à dire de 360 degrez. Ainsi ôtant quatre fois 60. c'est-à-dire 240 de 360. resteront 120 pour BGC & FGE, qui seront chacun de 60. degrez, parce qu'ils sont égaux, (par la 15. du 1.) Ainsi tous les angles du centre étant égaux, tous les arcs & tous les côtez seront égaux; & chaque angle A, B, C, &c. sera composé de deux angles de soixante degrez, c'est-à-dire de cent vingt degrez. Ils seront donc égaux.

Coroll. Le côté de l'Hexagone est égal au demi-diametre.

USAGE.

Parce que le côté de l'Hexagone de la base, soûtendante ou corde d'un arc de soixante degrez, & qu'il est égal au demi-diametre; sa moitié est le Sinus de trente degrez: & c'est par ce Sinus que nous commençons la table des Sinus. Euclide traite de l'Hexagone dans les derniers Livres de ses Elemens.

PROPOSITION XVI.

PROBLEME.

Inscrire un Pentedecagone régulier dans un Cercle.

Pl. 1. Fig. 19. INscrivez dans un Cercle un Triangle équilateral ABC (par la 2.) & un Pentagone régulier (par la 11.) de sorte qu'un des angles du Triangle & du Pentagone se rencontrent au au point A, la ligne BF ſera le côté du Pentedecagone, & l'arc EB étant diviſé en 2. (par la 9. du 1.) au point I, les lignes BI, IE ſeront auſſi deux côtez du Pentedecagone; Si on inſcrit dans les autres arcs des lignes égales à BF, le Pentedecagone ſera achevé.

Démonſtration.

Puiſque la ligne AB eſt le côté du Triangle équilateral, l'arc AEB, ſera de 120 degrez, qui eſt le tiers de tout le Cercle; & par conſequent il contiendra 5 quinziémes: mais l'arc AE qui eſt l'arc du Pentagone, étant de 72 degrez qui ſont la cinquiéme partie du Cercle, contiendra trois quinziémes. Donc l'arc EB en contient deux, c'eſt-à-dire 48 degrez, & par conſequent l'arc BF ſera un quinziéme ou la moitié de l'arc EB, c'eſt-à-dire de 24 degrez pour chaque arc du Pentedecagone.

USAGE.

Cette Proposition sert pour ouvrir le chemin aux autres Polygones. Nous avons dans le compas la proportion, quelques methodes très-faciles pour inscrire tous les Polygones ordinaires; mais elles sont fondées sur celles-ci. Car on ne pourroit pas marquer sur cet instrument les Polygones, si on ne trouvoit leurs côtez par cette Proposition, ou par d'autres semblables.

LIVRE CINQUIE'ME DES ELEMENS D'EUCLIDE.

CE cinquiéme Livre est des plus considerables de tous ceux d'Euclide; on y trouve une facilité d'argumenter par proportion, qui est très-subtile & très-courte. Tous les Traitez qui sont fondez sur les proportions, ne peuvent se passer de cette Logique Mathematique. La Geometrie, l'Arithmetique, la Musique, la Statique: & pour dire en un mot tous les Traitez des Mathematiques se démontrent par les Propositions de ce Livre. Plusieurs sçavans Geometres ont reconnu que ce cinquiéme Livre, tel qu'Euclide l'a donné, n'étoit point dans l'ordre convenable à un Traité des Proportions;

vû

vû qu'il ne s'y étoit point assez étendu sur quantité de choses qui auroient contribué à faciliter l'intelligence du 6, du 11 & du 12, Livre. C'est aussi dans le dessein de les faire entendre plus facilement, que je me suis attaché à expliquer les Propositions d'une manière aisée, & pour ne point rebuter les Commençants, qui la plûpart ne sont point accoutumez à la maniere d'expliquer les Propositions avec des lettres alphabetiques, j'ai crû qu'il étoit à propos de les démontrer premierement par les nombres, afin de leur faciliter l'intelligence des Démonstrations par lettres.

Explication des caracteres dont on se sert dans ce cinquième Livre, pour les Démonstrations par les lettres.

1. Les lettres de l'alphabet A, B, C., D, &c. marquent toute sorte de grandeur en géneral sans en déterminer la valeur.

2.

2. A + B ſignifie A plus B, ou A ajoûté à B.

3. A - B veut dire A moins B ou B ôté de A.

4. A = B veut dire A égal à B.

5. Une ſeule lettre comme A, B, C, &c. marque une grandeur lineaire; ou d'une ſeule dimenſion.

6. Deux lettres comme AB, AC, AD, &c. marquent une grandeur plane ou de deux dimenſions, c'eſt-à-dire, le produit de la multiplication d'une lettre par une autre, ou d'une ligne par une autre ligne.

7. Quand il ſe trouve deux fois la même, comme AA, BB, &c. elles déſignent une figure plane, dont les deux dimenſions ſont égales, qu'on appelle quarré, d'autant que c'eſt le produit de la multiplication d'une grandeur par elle-même, ainſi cette lettre marque la racine de ce quarré.

8.

8. Quand il se trouve trois lettres comme ABC, DEF, &c. elles marquent une figure de trois dimensions qu'on appelle solide, ou le produit de la multiplication d'une grandeur plane par une lineaire.

9. Quand on trouve trois fois la même lettre, elle marque une figure de trois dimensions égales, qu'on appelle cube, dont cette lettre marque la racine.

10. Quand il se trouve des lettres l'une sur l'autre, avec une ligne entre-deux comme $\frac{A}{B}$ cela marque le quotient de la division d'A par B que l'on peut désigner par une seule lettre, comme par E, ou F, &c.

11. S'il se trouve dans la somme à diviser les même lettres que dans le diviseur, on les retranche de part & d'autre, & celles qui restent marquent le quotient; ainsi pour diviser ABC, par ADC, comme AC se trou-

trouvent de part & d'autre, on les retranche, & on a $\frac{B}{D}$ pour le quotient de la diviſion.

SECTION I.

DEFINITIONS.

1. LA grandeur en general eſt tout ce qui peut être multiplié & diviſé à l'infini, comme des *lignes*, des *plans*, & des *ſolides*.

2. Les grandeurs de même genre s'appellent *homogenes*, comme deux *lignes*, deux *ſurfaces*, deux *ſolides*.

3. Elles ſont dites *éterogenes*, quand elles ſont de divers genre, comme une *ligne*, un *plan*, un *ſolide*.

4. Les grandeurs *commenſurables* ſont celles qui ont une commune meſure qui exprime le rapport exact de l'une à l'autre; alors on dit que ces grandeurs ont un rapport, ou une raiſon de nombre à nombre.

5. Les autres grandeurs auxquelles on ne peut trouver de meſures communes

munes qui exprime leur rapport, ſont nommées *ſourdes* ou *incommenſurables.* Cependant il faut remarquer que deux grandeurs peuvent être commenſurables en puiſſance & non pas en racine, c'eſt-à-dire, que deux quarrez qui auroient un rapport de nombre à nombre pourroient être incommenſurables quant à leurs côtez.

Définitions des parties de la grandeur.

6. Les grandeurs étant rompuës produiſent des parties que l'on diſtingue ſelon le rapport qu'elles ont avec leur tout; la partie *aliquotte*, eſt celle qui ſe trouve contenuë un certain nombre de fois préciſément dans la grandeur dont elle eſt partie, comme 4 peut être dit partie aliquotte de 12, parce que ce nombre 4 ſe trouve contenu 3 fois préciſément dans 12; de même 5 peut être dit partie aliquotte de 15, parce que 15 contient 3, cinq fois préciſément.

7.

7. Les parties aliquottes *ſemblables* ſont celles qui ſont contenuës un égal nombre de fois dans leur tout; par exemple 4 & 6 peuvent être dits parties aliquottes *ſemblables* de 12 & de 18; car 4 eſt contenu trois fois dans 12, comme 6 eſt contenu 3 fois dans 18.

8. La partie *aliquante*, eſt celle qui ne meſure pas abſolument ſon tout, ainſi 5 eſt partie aliquante de 13; 5 ne ſe trouvant pas un certain nombre de fois préciſément dans 13, puiſqu'il ne s'y trouve que deux fois avec le reſte 3.

9. Les *équimultiples*, ſont des grandeurs qui contiennent leurs parties un égal nombre de fois au juſte; ainſi 36 & 12 ſont dits équimultiples de 6 & de 2; 36 contenant autant de fois 6, que 12 contient de fois 2.

10. *Multiple* eſt une grandeur qui

en

en contient précisément une autre un certain nombre de fois; c'est à-dire, que si l'on multiplie deux nombres l'un par l'autre, le produit qui en viendra sera dit multiple de l'un & de l'autre; ainsi multipliant 4 par 6, le produit 24 sera dit *multiple* de 4, & multiple de 6.

Définitions des raisons ou rapports.

11. Deux grandeurs de même nature, ou homogenes peuvent être considerées en deux manieres; la premiere, selon l'excez dont la plus grande surpasse la plus petite, ce qui s'appelle *difference*; & la seconde, selon la quantité de fois que la plus petite se trouve contenuë dans la plus grande, ce qui s'appelle *raison*, ou *rapport*, ou grandeurs *respectives*.

La raison est composée de deux grandeurs qu'on appelle *termes*, dont la premiere s'appelle *antecedent*, & la seconde *conséquent*.

12. La raiſon eſt *d'égalité*, ou *d'inégalité*; elle eſt dite raiſon d'égalité quand l'antecedent eſt égal à ſon conſequent, & on l'appelle raiſon d'inégalité, quand l'un eſt plus grand que l'autre; ce qui arrive en deux manieres; la premiere, quand l'antecedent eſt plus grand que le conſequent; & la ſeconde, quand l'antecedent eſt moindre que le conſequent: la premiere, s'appelle raiſon de plus grande inégalité, ou raiſon d'égalité *majeure*; & la ſeconde, de moindre inégalité, ou raiſon d'inégalité *mineure*.

13. On connoît la valeur d'une raiſon en diviſant l'antecedent par le conſequent, ainſi la valeur de la raiſon de 12 à 4 eſt 3, puiſque diviſant 12 par 4 vient 3 de même celle de 5 à 20 eſt 4; ce qui fait voir que la grandeur d'une raiſon à une autre, n'eſt autre choſe que la

la quantité de fois que le conſequent eſt contenu dans l'antecedent ; ou ce qui eſt la même choſe, la quantité de parties que l'antecedent contient de ſon conſequent.

14. Une raiſon eſt égale à une autre raiſon, quand la raiſon des deux premiers termes eſt égale à la raiſon des deux ſeconds ; c'eſt-à-dire, quand ſon antecedent contient autant de fois ſon conſequent, que l'antecedent de l'autre contient le ſien ; par exemple, la raiſon de 12 à 4, eſt égale à celle de 15 à 5, puiſque 12 contient autant de fois de 4, que 15 contient de fois 5, ſçavoir 3 fois.

Pour ſignifier la proportion qui regne entre quatre grandeurs proportionnelles, on marque quatre petits points qui ſe mettent après les deux premiers termes.

15. Une raiſon eſt plus grande qu'une

qu'une autre, quand ſon antecedent contient ſon conſequent plus de fois que l'antecedent de l'autre ne contient le ſien; je puis donc dire que la raiſon de 15 à 5 eſt plus grande que celle de 12 à 6, d'autant que l'un eſt contenu 3 fois dans le premier terme, & celui là n'y eſt contenu que 2. Il arrive la même choſe quand l'antecedent d'une raiſon eſt plus grande partie de ſon conſequent, que l'antecedent de l'autre ne l'eſt du ſien; ainſi la raiſon de 12 à 6, eſt plus grande que celle de 5 à 15; puiſque 6 eſt la moitié de 12, & que 5 n'eſt que le tiers de 15.

16. Si quatre grandeurs ſont diſpoſées de telle ſorte que la premiere ſurpaſſe ou ſoit ſurpaſſée par la ſeconde, comme la troiſiéme ſurpaſſe, ou eſt ſurpaſſée, par la quatriéme; elles composeront une *proportion* que

l'on apelle *arithmetique*, ainſi 8, 12, 16, 20, compoſent une de ces proportions, puiſque 8 eſt ſurpaſſé par 12 de 4, comme 16 eſt ſurpaſſé de 20 également de 4.

17. S'il ſe trouve plus de quatre grandeurs qui ſoient en proportion; c'eſt-à-dire, qui ayent un même excez les unes ſur les autres, on appelle ces grandeurs *progreſſion arithmetique*, comme ſont les nombres 1, 2, 3, 4, 5. La plus conſiderable proprieté de la proportion arithmetique, eſt que quand quatre grandeurs ſe ſurpaſſent également les unes les autres, comme nous venons de dire, la ſomme des deux *extrêmes* eſt égale à la ſomme des deux *moyennes*. Ainſi 9, 11, 13, 15, ſont, comme vous voyez, en proportion arithmetique, puiſqu'ils ſe ſurpaſſent tous également; car 11 ſurpaſſe 9 de 2, comme 13 ſurpaſſe

11 également de deux, ainſi des autres. Or je dis donc que la ſomme de deux extrêmes 9 & 15, eſt égale à la ſomme des deux moyennes 11 & 13. puiſque la ſomme de l'un & l'autre eſt de 24. Nous entendons en Geometrie par le mot *d'extrême*, le premier & le quatriéme terme d'une proportion; & par *moyenne*, le ſecond & le troiſiéme terme: ce qui ſe dit auſſi bien dans la proportion Geometrique, qu'Arithmetique.

18. Si quatre grandeurs ſont diſpoſées de telle ſorte, que la premiere contienne autant de fois, ou autant de parties de la ſeconde, que la troiſiéme contient de fois la quatriéme, ou de ſes parties, elles composeront une *proportion*, qu'on appelle *Geometrique*. Ainſi 15, 5, 24, 8. Car il eſt évident que 5 eſt le tiers de 15, comme 8 eſt le tiers

 de

de 24, la proportion Geometrique a une proprieté qui eſt très-conſiderable dans la Geometrie, qui eſt que la multiplication du premier terme par le quatriéme, produit une ſomme égale à celle du ſecond terme par le troiſiéme, car les deux extrêmes multipliez l'un par l'autre, donnent 120, auſſi bien que le produit de deux moyennes qui nous donnent le même nombre; s'il ſe trouve plus de quatre grandeurs qui ſoient proportionnelles, on les appelle *progreſſion Geometrique.* Nous démontrerons dans la ſuite la proprieté de la proportion tant Geometrique, qu'Arithmetique.

19. La proportion Arithmetique & Geometrique eſt *continuë* ou non *continuë.* La continuë eſt compoſée de trois termes, quand il ſe trouve que le premier ſurpaſſe, ou eſt ſurpaſſé par le ſecond comme le

ſe-

ſecond ſurpaſſe ou eſt ſurpaſſé par le troiſiéme, on l'appelle *Arithmetique*, comme ſont les grandeurs 8, 10, 12; mais quand la premiere contient autant de fois ou autant de parties de la ſeconde, que cette même ſeconde contient la troiſiéme ou de ſes parties, on l'appelle *continuë Geometrique*, comme ∺ 3, 9, 27.

20. La non continuë, eſt celle dont on a parlé ci-devant. Ces differentes proportions ſe marquent comme il ſuit, premierement la continuë Arithmetique eſt ∺ 8, 10, 12, & la non continuë 8 : : 10. 14. 16.

La ſeconde, eſt la *proportion Geometrique* continuë, comme ∺ 3, 9, 27, & la non continuë 12, 4 : : 15, 5 : il faut remarquer que la maniere d'argumenter par proportion, que nous allons enſeigner dans les

Propositions suivantes, se fera avec la proportion Geometrique, comme étant d'un plus grand usage que celle que nous avons appellée Arithmetique.

Quand quatre grandeurs sont proportionnelles, elles le seront encore en cinq manieres differentes, comme on le peut voir dans l'exemple suivant.

Des differentes manieres de comparer quatre grandeurs proportionnelles, sans troubler le rapport qui regne entr'elles.

Sçavoir, premierement *en raison inverse.* Deuxiémement en raison *alterne.* Troisiémement en *composant*, ou par composition de raison. Quatriémement *en divisant*, ou par division de raison. Cinquiémement par *conversion de raison.*

La premiere maniere.

Quand on conclud en raison inverse, on fait servir les consequents d'an-d'antecedents, & les antecedents de consequents; ainsi si 12, 4 :: 15, 5, en raison *inverse*; on concluëra que 4, 12 :: 5, 15.

Seconde maniére.

On concluëra en raison alterne, en prenant l'antecedent de la seconde raison pour consequent de la premiere, & le consequent de la premiere pour antecedent de la seconde; ainsi si 12, 4 :: 15, 5, on conclud en raison *alterne*, que 12, 15 : 4, 5.

Troisiéme maniere.

On conclud en composant que la somme de l'antecedent, & du consequent de la premiere raison est à son consequent, comme la somme de l'antecedent, & du consequent de la seconde raison, est à son consequent, qui est le quatriéme terme; donc si 12, 4 :: 15, 5, on concluëra *en composant*, que 16, 4 :: 20, 5.

Quatriéme maniere.

Pour conclure en division de raison, l'on se fait des antecedents de la difference qui est entre l'antecedent & le consequent ; ainsi si 12, 4 :: 15, 5, on concluëra *en division de raison*, que 8, 4 :: 10, 5.

Cinquiéme maniere.

Pour conclure par conversion de raison, on se fait des consequents du reste de la soustraction faite des consequents de leur antecedent ; ainsi puisque 12, 4 :: 15, 5, on concluëra par *conversion de raison*, que 12, 8 :: 15, 10.

Voici un exemple des cinq manieres de conclure qu'il est bon de sçavoir par-cœur ; car cette maniere d'argumenter par proportion, est presque génerale dans toutes les comparaisons que l'on fait des grandeurs les unes aux autres ; ainsi les quatre grandeurs suivantes 20, 5 :: 16,

4 ;

4; ſe peuvent changer comme il ſuit.
En raiſon inverſe.... 5, 20 :: 4, 16.
En raiſon alterne.... 20, 16 :: 5, 4.
En compoſant..... 25, 5 :: 20, 4.
En diviſant. .... 15, 5 :: 12, 4.
Et par converſion de raiſon. 20, 5 :: 16, 12.

Il y a encore une autre maniere de comparer les grandeurs que voici.

21. *Propoſition ordonnée*, eſt l'arrangement de pluſieurs grandeurs diſpoſées de telle ſorte que la premiere eſt à la ſeconde des ſuperieurs, comme la premiere eſt à la ſeconde des inferieurs, & que la ſeconde eſt à la troiſiéme des mêmes ſuperieurs, comme la ſeconde eſt à la troiſiéme des inferieurs, ainſi la premiere 12, étant à la ſeconde 4 des ſuperieurs, comme la premiere 30, eſt à la ſeconde 10 des inferieurs. Et la ſeconde 4. étant auſſi à la troiſiéme 2 des mêmes ſuperieurs, comme la

seconde 10 est à la troisiéme 5 des inferieurs; ces six grandeurs composeront la proportion ordonnée que voici.

12, 4, 2.
30, 10, 5.

Proportion troublée, est quand plusieurs grandeurs sont dispoſées comme les suivantes.

12, 4, 2.
18, 9, 3.

C'est-à-dire, que la premiere 12 est à la seconde 4 des superieurs, comme la seconde 9 est à la troisiéme 3 des inferieurs; & la seconde 4. est à la troisiéme 2 des mêmes superieurs, comme la premiere 18 est à la seconde 9 des inferieurs.

On conclud en raison *égale* dans la proportion ordonnée & troublée, quand on conclud que la premiere grandeur est à la derniere d'une part, comme la premiere est à la derniere

de

de l'autre ; ainsi dans l'exemple ci dessus, l'ordonnée 12, 2 :: 30, 5, & dans la troublée 12, 2 :: 18, 3., il n'est pas difficile de voir que l'on peut conclure en raison égale, puisque dans la proportion ordonnée & troublée, les raisons des grandeurs superieures sont égales aux raisons des grandeurs inferieures.

PROPOSITION I.

THEOREME. I.

Deux grandeurs sont égales lorsqu'elles ont même raison à une troisiême grandeur.

SOit *b*, *g* :: *b*, *f*, c'est-à-dire, que *g* & *f* ont une même raison avec *b*, je dis que $g = f$ ayant divisé *g* par *b*, *g* & *f* par le même *b*, puisque les raisons de *b* à *g*, & de *b* à *f* sont égales, ces deux divisions auront un même exposant, ou même quotient ; c'est-à-dire, que si *b* se trouve trois fois dans *g*, il se trouvera aussi trois fois dans *f*. Donc les grandeurs *g* & *f* sont égales.

PROPOSITION III.

THEOREME II.

Les raisons qui sont égales à une troisiéme, sont égales entr'elles ; car s'il y a même raison de 12 à 4, que de 9 à 3, & que 18 soit à 6 comme 9 est à 3, je conclus qu'il y aura même raison de 12 à 4, que de 18 à 6.

Démonstration.

SI 12 contient autant de fois 4, que 9 contient de fois 3, & que pareillement 18 contienne autant de fois 6, comme 9 contient 3 ; je conclus que la raison de 12 à 4, est égale à celle de 18 à 6. Car si de ces trois raisons on divise les antecedents par les consequents, on trouvera que l'exposant de la raison de chacune de ces grandeurs est 3. Ce qu'il faloit démontrer.

Démontrons que si les deux raisons de *a* à *b*, & de *e* à *f* sont égales à la troisiéme de *c* à *d*, elles sont égales entr'elles; si *a* contient quatre fois *b*, *c* contient aussi quatre fois *d*, mais *e* contient autant de fois *f*, que le même *c* contient de fois *d*. Donc *e* contient quatre fois *f*. Ainsi *a* est à *b*, comme *e* est à *f*

PROPOSITION III.

THEOREME. III.

Si plusieurs grandeurs sont proportionnelles, il y aura même raison de la somme de tous les antecedents à la somme de tous les consequents, que d'un antecedent à son consequent : c'est-à-dire, que si les grandeurs 9, 3, 12, 4, sont proportionnelles, la somme de 9 & de 12 sera à la somme de 3 & de 4, comme 9 est à

3, ou ce qui est la même chose, comme 12 est à 4.

Démonstration.

CEci est clair, car la somme 21 des deux antecedents est à la somme 7 des deux consequents, comme 9 est à 3; c'est-à-dire, que nous avons cette proportion 21, 7 :: 9, 3. Car si l'on divise l'antecedent 21 par son consequent 7, on aura 3, aussi bien que divisant le second antecedent 9 par son consequent 3, on aura aussi 3. Donc, puisque les antecedents contiennent également leurs consequents, les grandeurs sont proportionnelles. La Démonstration par lettres est à la fin de la proposition 10.

PRO-

PROPOSITION IV.

THEOREME. IV.

S'il y a même raison de la premiere quantité à la seconde, que de la troisiéme à la quatriéme; & que la premiére approche d'être égale à la troisiéme, la seconde approchera aussi d'être égale à la quatriéme dans la même raison.

Démonstration.

POur éclaircir cette Proposition, nous dirons que si 12, 4 :: 9, 3, la premiere quantité 12 approchera d'être égale à la troisiéme 9, comme la seconde 4 approchera d'être égale à la quatriéme ; dans la même raison ; & si au contraire la premiere quantité étoit inferieure à la troisiéme, la seconde le seroit aussi à la quatriéme dans la même raison. Cela est bien évident ; car si l'on compare re les antecedents avec les antecedents, & les consequents avec les consequents en raison alterne, ils seront toûjours en même raison. Ainsi 12, 9 :: 4, 3, où l'on voit que la difference du premier antecedent à son consequent est d'un quart; aussi bien que la difference du second antecedent à son consequent est aussi d'un quart, puisque 9 est les trois quarts de 12, comme 3 est les trois quarts de 4, & je puis dire encore que dans la proportion 12, 4 :: 9, 3. Si l'antecedent de la premiere raison étoit égale à l'antecedent de la seconde, le consequent de la premiere seroit aussi égal au consequent de la seconde. Ce qu'il faloit démontrer.

Soit *b* plus grand que *c*, *m* & que *n*.

Si *c* est le tiers de *b*, & que *n* ne soit que le quart de *m*, la raison de *b*. *c*. approchera plus de l'égalité, & par consequent sera plus grande que la raison de *m*. *n*. Car *b*. *c*. ne seront pas si éloignez d'être égaux. Mais comme me cela même n'est pas toûjours aisé à sçavoir, voici une autre voye qui peut servir à sortir de cette difficulté, quand les termes d'une raison sont multipliables par ceux de l'autre.

Lorsque deux raisons ont un terme commun, ou ce qui est la même chose, lorsquè l'on compare deux grandeurs à une troisiéme, il est alors très-certain que celle dont la difference est moindre avec cette troisiéme grandeur, a une plus grande raison à cette grandeur, que celle dont la difference est plus grande. Car on ne peut pas douter alors que la raison de celle dont la difference est moindre, n'approche plus de l'égalité. Cela est très-clair.

Deux raisons étant égales à deux raisons inégales chacune à chacune, celle qui est égale à la plus grande, est plus grande que celle qui est égale à la plus petite. Cela est encore évident.

On demande deux raisons qui ayent un terme commun, qui soient égales à ces deux premieres, ce qui se fera ainsi.

Soient les deux raisons dont on est en peine qui est la plus grande *b. c. m. n.*

Multipliant les consequents l'un par l'autre, ce qui donne *cn.* & chaque antecedent par le consequent de l'autre raison, ce qui donne pour la premiere raison *bn.* & pour la seconde *mc.*

On aura deux nouvelles raisons égales aux deux premieres ; car *bn. cn. : : bc.* & *mc. cn : : m. n.*

Comme donc ces deux raisons *bn*, *cn*, & *mc*, *cn* ont un terme commun, sçavoir *cn*, comparant l'antecedent de chaque raison avec ce terme commun, si la difference de *bn*, à

cn

en est plus grande que la difference de *me*, avec le même *en*, la raison de *bn* à *en* sera plus petite. Et par consequent celle de *b. e.* sera plus petite que celle de *m. n.*

Pour sçavoir si la raison de 5 à 7 est plus grande, ou plus petite que la raison de 8 à 11.

Je multiplie les consequents, c'est-à-dire 7 par 11, ce qui me donne 77.

Puis l'antecedent d'une raison par le consequent de l'autre, ce qui me donne pour la premiere raison 5 par 11, c'est-à-dire 55.

Et pour la seconde raison 8 par 7, c'est-à-dire 56.

Et ainsi j'ai deux nouvelles raisons égales aux deux premieres chacune à chacune. Car 5, 7 : 55, 77. & 8, 11 : : 56, 77.

Or il est visible que la difference de 55 à 77 est plus grande d'une unité, que celle de 56 au même 77.

Donc la même raison de 55 à 77 est plus éloignée de la raison de l'égalité. Donc elle est plus petite. Donc la raison de 5 à 7, qui lui est égale, est aussi plus petite que la raison de 8 à 11, qui est égale à celle de 55 à 77.

PROPOSITION V.

THEOREME V.

Deux grandeurs demeurent en même raison, quoiqu'on ajoûte à l'un & à l'autre, pourvû que ce qu'on ajoûte à la premiere, soit à ce qu'on ajoûte à la secon-

seconde, comme la premiere est à la seconde. Soient les deux grandeurs 12 & 4; si on leur ajoûte les grandeurs 9 & 3, qui sont dans la même raison; les sommes 21 & 7 seront dans la même raison que les premiers 12 & 4.

Démonstration.

COmme les deux grandeurs 12 & 4, sont en même raison que les deux autres 9 & 3, on aura cette proportion 12, 4 : : 9, 3. Et par la troisiéme proportion la somme des antecedents 12 & 9, sera à la somme des consequents 3 & 4, comme l'antecedent 12 est à son consequent 4. Donc 21, 7 : : 12, 4. Ce qu'il faloit démontrer.

J'aurois pû, comme ci-devant, démontrer cette Proposition par les lettres, mais cela paroit inutile, puisque ce seroit répeter ce qu'on a dit par nombres.

PRO-

PROPOSITION VI.

THEOREME VI.

Deux grandeurs demeurent en même raison, quoiqu'on retranche de l'une & de l'autre, pourvû que ce qu'on retranche de la premiere soit à ce qu'on retranche de la seconde, comme la premiere est à cette même seconde.

Démonstration.

CEtte Proposition est claire, car si des deux grandeurs 15 & 20, on retranche les deux grandeurs 6 & 8, les restants 9 & 12 seront encore dans la même raison; car 15 est les trois quarts de 20, comme 9 est les trois quarts de 12. Ces restants sont donc dans la même raison, à cause que 6 est les trois quarts de 8, qui sont les deux grandeurs qu'on a soustraites.

a étant à c, comme b est à d. il faut démontrer que $a-b$, $c-d$: : a, c; a contenant autant c, comme b contient de fois d. En faisant deux divi-

divisions, l'une de *a* par *c*, & l'autre de *b* par *d*; on aura un même quotient, qu'on peut désigner si l'on veut par la lettre *e*. Ainsi multipliant *e* par *c*, viendra *e c* égal à *a*, & *e* par *d*, viendra *e d* égal à *b*. De sorte qu'au lieu de l'antecedent *a* moins *b*, on peut poser *e c* moins *e d* qui lui est égal. Ainsi il ne s'agit plus que de démontrer que *e c—ed*, *c—d* : : *a*, *c*; en divisant l'antecedent *e c—e d* par consequent *c—d*, viendra *e* au quotient, puisque *c—d* étant multiplié par *e* produit *ec—ed*. mais *a* ayant été divisé par *c*, a aussi donné au quotient *e*. Ainsi ces deux raisons sont égales, puisqu'elles ont un même quotient, c'est-à-dire que *a—b*, *c—d* : : *a*, *c*.

PROPOSITION VII.

THEOREME. VII.

Si on multiplie les deux termes d'une raison par une même grandeur, les produits de ces deux termes sont encore dans la même raison; ainsi multipliant les deux termes 12 & 4 par une même grandeur 3, on aura 36 & 12 pour le produit de 12 par 3 : ces nombres, dis-je, seront encore dans la même raison.

Dé-

Démonstration.

SI l'on divise l'antecedent 36 par le consequent 12, l'on aura 3; & pareillement divisant l'antecedent 12 par le consequent 4 de la premiere raison, l'on aura aussi 3. Ce qui fait voir que les antecedents contiennent également leurs consequents. Donc 36, 12 : : 12, 4.

Les deux grandeurs *a* & *b* étant multipliées par une même grandeur *c*, les produits *a c* & *b c* sont en même raison que *a* à *b*. Pour faire cette démonstration on divise *a* par *b*. vient au quotient par exemple *e*; ainsi multipliant *b* par *e*, vient *e b* égal à *a*, de sorte qu'au lieu des produits *a c* & *b c*. on peut mettre leurs égales *e b c*. *b c*, qui sont en même raison que *a* est à *b*. puisqu'en divisant *e b c*. par *b c*. vient *e* qui est le même quotient qui a été trouvé dans la division de *a* par *b*; donc *e b c*, ou son égal *a c*, nous donnerons cette proportion *a c*, *b c* : : *a*, *b*.

PRO-

PROPOSITION VIII.

THEOREME. VIII.

Si on divise les deux termes d'une raison par un même diviseur, ce qui viendra au quotient des divisions, sera en même raison que les grandeurs divisées; ainsi divisant les deux termes 24 & 8 *par une même grandeur* 4, *les quotiens* 6 & 2 *seront en même raison que* 24 *est à* 8.

Démonstration.

IL est bien vrai que 24, 8 : : 6, 2; car le consequent 8 est contenu 3 fois dans son antecedent 24; comme le consequent 2 est contenu 3 fois dans son antecedent 6. Ce qu'il faloit démontrer.

Les deux grandeurs a & b étant divisées par la grandeur c; vient par exemple e & f; c'est-à-dire que ce sera égal à a, & que cf est égal à b; de sorte que ce sera à cf, comme a est à b. & par la précedente ce, cf : : e, f. Donc e, f : : a, b. Ce qu'il faloit démontrer.

PRO-

PROPOSITION IX.

THEOREME IX.

Si quatre grandeurs sont proportionnelles, le produit des extrêmes est égal au produit des moyennes; il faut donc prouver que si 12 est à 4, comme 9 est à 3, le produit des deux extrêmes 12 & 3, est égal à celui des deux moyennes 4 & 9.

Démonstration.

DES quatre grandeurs proportionnelles 12, 4 :: 9, 3, si l'on multiplie l'antecedent & le consequent de la seconde raison par l'antecedent de la premiere, on aura 108, 36 :: 9, 3; si pareillement on multiplie l'antecedent & le consequent de la premiere raison par l'antecedent de la seconde, on aura encore 18, 36 :: 12, 4. Or dans la premiere proportion, & dans la secon-

ſeconde, les premiers antecédents ſont égaux auſſi bien que les deux conſequents ; ſi on fait la réduction ſuivante 108 $\left\{ \begin{matrix} 36 :: 9, 3, \\ 36 :: 12, 4, \end{matrix} \right.$ comme il ſe trouve que l'antecédent commun 108, a même raiſon aux deux conſequents 36 ; il s'enſuit par la premiere Propoſition que ces deux conſequents ſont égaux.

Remarquez que dans les deux proportions précedentes, l'antecedent 108 leur peut être commun, puiſqu'il a été produit deux par la multiplication de 12 par 9 ; il a même raiſon comme nous venons de dire aux deux conſequents 36, dont l'un a été produit par la multiplication des extrêmes, & l'autre par la multiplication des moyennes. Ceci ſe démontre plus aiſément par les lettres, comme vous l'allez voir.

Soient ces quatre grandeurs *b*, *d* :: *f*, *g*, dont *b* & *g* ſont les extrêmes, *d* & *f* les moyens, il faut démontrer que $bg = df$. ayant nommé *q*. le quotient de la raiſon de

b à d, celui de la raison de f à g sera aussi q. Je puis nommer $q\,b$ la grandeur d & $q\,f$, la grandeur g; ainsi il faut démontrer que $b\,q\,f = b\,q\,f$; ce qui est évident, puisque ce sont les mêmes grandeurs.

PROPOSITION X.

THEOREME X.

Lorsque quatre grandeurs sont tellement disposées, que le produit des extrêmes est égal à celui des moyennes, ces quatre grandeurs sont proportionnelles.

Démonstration.

Soient ces quatre grandeurs b, d, f, g. si $f\,d$ produit des moyens f & d, est égal à $b\,g$ produit des extrêmes b & g; je dis que $b, d :: f. g$, je multiplie f & g par b: on aura $b\,f$, $b\,g :: f, g$. Je multiplie b & d par f; de même il viendra $b\,f$, $f\,d :: b, d$. Or puisque $f\,d$ & $b\,g$ sont deux produits égaux: donc $b\,f \left\{ \begin{array}{l} f\,d :: b, d. \\ b\,g :: f, g. \end{array} \right.$ La raison de $b\,f$ à $f\,d$ est la même que celle de $b\,f$ à $b\,g$, puisque $f\,d$ & $b\,g$ étant égaux, ce n'est qu'une même grandeur. Donc la raison de b à d est la même que celle de f à g: ainsi $b, d :: f, g$. Ce qu'il faloit démontrer.

C'est ici le lieu de démontrer ce que nous avons dit après la Définition 20. qui est que quatre grandeurs proportionnelles se peuvent changer en cinq manieres, comme il suit.

Si

Si $a, b :: c, d$ par la neuviéme $ad = bc$.

Et en raison inverse $b, a :: d, c$, puisque par la neuviéme bc est égal ad. C. Q. F. D.

Pareillement si $a, b :: c, d$ par la neuviéme $ad = bc$, on peut conclure en raison alterne par la dixiéme, que $a, c :: b, d$, puisque ad est égal à bc. C. Q. F. D.

De même si $a, b :: c, d$, on peut conclure en composant que $a+b, b :: c+d, d$ par la dixiéme, car le produit des extrêmes étant $ad+bd$, & le produit des moyennes $bc+bd$, ces deux produits sont égaux, puisque ad de l'un est égal à bc de l'autre, & que bd se trouve dans l'un & dans l'autre de ces produits. Le produit de bc sera, dis-je, égal au produit de ad, puisque l'un & l'autre provient de la proportion $a, b :: c, d$ qui donne $bc = ad$. C. Q. F. D.

Pour la division de raison si $a, b :: c, d$ on aura $ad = bc$. On peut conclure en divisant, que $a-d, d :: c-d\ bd$ par la dixiéme. Car $ad-bd$ est le produit des extrêmes, & $bc-bd$ le produit des moyennes; ces deux produits sont égaux, puisque ad de l'un est égal à bc de l'autre, & que bd se trouve de moins dans l'un & dans l'autre; c'est-à-dire, qu'on aura $bc-db = da-db$. C. Q. F. D.

Enfin si $a, b :: c, d$ on aura toûjours $ad = bc$, & par conversion de raison $a, a-b :: c, c-d$, car par la dixiéme $ac-ad = ac-bc$, dautant que ac se trouve dans chacun des membres de l'équation, & que les deux grandeurs ad & bc qui ont le signe moins sont égales. C. Q. F. D.

Comme nous n'avons démontré la Proposition 3. que par les nombres, nous l'allons démontrer ici plus generalement par les lettres.

Nous dirons donc que si plusieurs grandeurs sont proportionnelles la somme des antecedents sera à celle des consequents, comme l'un des antecedents est à son consequent.

Ainsi si a, $b :: c$, $d :: e$, f.
En raison alterne a, $c :: b$, d.
En composant $a+c$, $c :: b+d$, d.
En raison alterne $a+c$, $b+d :: c$, d ou $::$ e, f son égale.
Ainsi $a+c$, $b+d :: e$, f.
En raison alterne $a+c$, $e :: b+d$, f.
En composant $a+c+e$, $e :: b+d+f$, f.
En raison alterne $a+c+e$, $b+d+f :: e$, f, ou $:: c$, d, ou $:: a$, d. C. Q. F. D.

PROPOSITION XI.

THEOREME. XI.

SI six grandeurs sont disposées de telle sorte que la premiere soit à la seconde, comme la troisiéme est à la quatriéme, & que la cinquiéme soit à la même seconde, comme la sixiéme est à la quatriéme, la premiere ajoûtée avec la cinquiéme sera à la seconde, comme la troisiéme ajoûtée avec la sixiéme, est à la quatriéme. Ainsi la premiere 12 étant à la seconde 4, comme la troisiéme 9 est à la quatriéme 3, & la cinquiéme 8 étant à la seconde 4, comme me la ſixiéme 6 eſt à la quatriéme 3, 20 qui eſt la ſomme de la premiere & de la cinquiéme, ſçavoir 12 & 8 eſt à la ſeconde 4, comme 15 qui eſt la ſomme de la troiſiéme & de la ſixiéme, ſçavoir 9 & 6 eſt à la quatriéme 3, puiſque 20 contient 4 cinq fois, comme 15 contient 3.

Démonſtration.

$$\begin{array}{lcccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & a, & b :: & c, & d \\ \& & e, & b :: & f, & d \\ & 5 & 2 & 6 & 4 \end{array}$$

En raiſon inverſe $b, e :: d, f$. Ainſi on a une proportion ordonnée, puiſque $a, b :: c, d$, & que $b, e :: d, f$. par la précedente $a, b, e,$ / c, d, f. $a, e :: c, f$.

En compoſant $a + e, e :: c + f, f$. Ce qui fait qu'il ſe trouve une ſeconde proportion ordonnée, ſçavoir :

$$\begin{array}{l} a + e, e, b. \\ c + f, f, d. \end{array}$$

Donc par la precedente $a + e, b :: c + f, d$. C. Q. F. D.

Avertiſſement.

Nous n'avons pas encore parlé de l'u-l'usage qu'on peut faire de toutes les Propositions précedentes ; on en connoîtra assez la consequence dans le 6, 11, & 12. Livre, puisque toutes les Propositions qui y sont renfermées, ne sont fondées que sur la doctrine des proportions : Neanmoins avant de finir cette premiere Section, il est à propos de donner quelques Problêmes, pour faire connoître la raison de la regle de Trois, qui tire son principe de la Proposition 9, comme on le va voir.

PROPOSITION XII.

PROBLEME I.

Connoissant le premier, le second, & le troisiéme terme d'une proportion, trouver le quatriéme.

SOient les trois grandeurs 15, 5, 24, auxquelles on veut trouver une quatriéme proportionnelle, il faut

faut multiplier le second terme par le troisiéme, & diviser le produit par le premier, on aura ce qu'on cherche; car 24 multiplié par 5, font 120, qui étant divisé par 15, donne 8 au quotient pour le quatriéme terme qu'on cherche; & on aura 15, 5 :: 24, 8.

PROPOSITION XIII.

PROBLEME. II.

Le premier, le second, & le quatriéme terme d'une proportion étant connu trouver le troisiéme.

IL faut multiplier le premier terme par le quatriéme, & le diviser par le second. Ainsi des trois grandeurs 12, 4, 5, si on multiplie 12 par 5, viendra 60, qui étant divisé par 4, donne 15, pour le troisiéme terme de cette proportion 12, 4 :: 15, 5.

Comme la regle de Trois n'eſt autre choſe que de trouver un quatriéme terme proportionnel à trois autres, on pourra aiſément reſoudre les Problêmes ſuivans.

PROPOSITION XIV.

PROBLEME III.

On demande ſi quatre hommes font 50 toiſes de Maçonnerie en dix jours, combien en feront 12 *dans le même tems.*

Comme on a dans cette Propoſition 3 termes de connus, il ne s'agit donc que d'en trouver un quatriéme; pour cela il n'y a qu'à multiplier 4 par 50, qui eſt le premier & le ſecond terme, on aura 400 pour le produit, qui étant diviſé par 12, donnera 150 pour le quotient, qui eſt le quatriéme terme qu'on cherche; on aura donc 4, 50 :: 12, 150.

PRO-

PROPOSITION XV.

PROBLEME IV.

Le second, le troisiéme, & le quatriéme terme d'une proportion étant connu, trouver le premier.

UNe Place est investie, dans laquelle il y a 18000 hommes pour la défendre, lesquels ont des vivres pour trois mois ; on demande combien il faut renvoyer de Troupes afin d'avoir assez de munitions pour soûtenir un Siege de 9 mois. On a trois termes de connus qui sont 18000, 3 & 9. Il faut multiplier le premier terme par le second, c'est-à-dire 3 par 18000, on aura 54000, qui divisé par 9, donnent 6000, qui est le premier terme de la proportion, & en même tems le nombre des Soldats qu'il faut garder dans la Place, d'où je vois qu'il faut renvoyer 12000, & la regle nous donne cette proportion 6000, 18000 :: 3, 9.

Comme ces regles peuvent s'entendre aisément par la Proposition 9, j'ai cru qu'il étoit inutile de les démontrer chacunes en particulier.

La regle précedente, est ce qu'on appelle communément regle de Trois inverse, qu'on peut rendre directe pour peu qu'on entende les proportions.

SECTION II.

Des raisons composées que les puissances de plusieurs dimensions peuvent avoir entr'elles.

DEFINITIONS.

1. UNe raison est *composée* lorsqu'elle est faite de deux ou de plusieurs raisons *multipliées* les unes par les autres.

Ainsi

Ainſi la raiſon *ſextuple* eſt appellée composée, lorſqu'on conſidere que cette raiſon eſt faite de la raiſon *double* multipliée par la raiſon *triple.*

2. On appelle raiſons *compoſantes* celles dont la multiplication a produit une raiſon composée.

Ainſi la raiſon triple & la raiſon double ſont les raiſons compoſantes de la raiſon ſextuple, qui a été composée par la multiplication de ces deux raiſons.

3. Une raiſon composée de deux raiſons égales, s'appelle raiſon *doublée* de chacune de ces raiſons.

La raiſon de 2. à 8 eſt composée de deux raiſons égales; de 2 à 4, & de 4 à 8; cette raiſon de 2 à 8 eſt doublée.

4. Une raiſon composée de trois raiſons égales, s'appelle raiſon *triplée* de chacune de ces raiſons.

5. Une raiſon compoſée de quatre raiſons égales, eſt une raiſon *quadruplée*, ainſi de ſuite.

Raiſon doublée n'eſt pas la même choſe qu'une raiſon double, ni une raiſon triplée n'eſt pas la même choſe qu'une raiſon triple, &c. Ce que vous remarquerez aſſez dans la ſuite.

Axiome Premier.

Des raiſons ſont cenſées être multipliées les unes par les autres, lorſque l'on multiplie leurs expoſans les uns par les autres.

Cette Propoſition eſt évidente après ce qu'on a remarqué ci-deſſus, que lorſqu'on a reduit des raiſons à un même conſequent, & qu'ainſi on a trouvé des grandeurs qui expoſent les raiſons, que ces raiſons ont les unes avec les autres; on peut faire ſur elles toutes les operations de l'Arithmetique, comme ſur des grandeurs abſoluës.

Axio-

Axiome Second.

Les raiſons compoſées ſont égales, lorſque les raiſons compoſantes ſont égales.

Cela eſt évident. Les touts ſont égaux qui ont des parties égales. Des nombres égaux ajoûtez ou multipliez de la même maniere ſont des ſommes égales, ou des produits égaux.

PROPOSITION I.

THEOREME. I.

Deux raiſons compoſées ſont égales entr'elles, lorſque les raiſons compoſantes de l'une ſont égales aux raiſons compoſantes de l'autre, chacune à chacune.

SOient les quatre raiſons égales entr'elles 2 à 2, $b, c :: m, n$, & pareillement $d, f :: p, q$, je dis que la raiſon compoſée de $b\,c$ & de

d

d f qui eſt *b d* & *c f*, eſt égale à la raiſon composée de *m n* & de *p q* qui eſt *m p*, *n q*, c'eſt-à-dire, que *b d*, *c f* : : *m p*, *n q*. Cela s'entend de ſoi-même; car ſi ces grandeurs composées ſont priſes pour des plans, & que *b* longueur du premier ſoit à *c* longueur du ſecond, comme *m* longueur du troiſiéme à *n* longueur du quatriéme, *& que *d* largeur du premier ſoit à *f* largeur du ſecond, comme *p* largeur du troiſiéme à *q* largeur du quatriéme. Il eſt évident que le premier doit être au ſecond, comme le troiſiéme au quatriéme; c'eſt-à-dire, que *b d*, *c f* : : *m p*, *n q*. C. Q. F. D.

PRO-

PROPOSITION II.

THEOREME. II.

Trois grandeurs homogenes quelconques étant données, la raison de la premiere à la troisiéme est composée de la raison de la premiere à la seconde; plus de celle de la seconde à la troisiéme, ce n'est que la même chose que nous venons de démontrer.

SOient donc *b. f. p.* la raison du premier au troisiéme terme, c'est-à-dire de *b. p*, ne peut manquer d'être composée de la raison *b*, *f*, & de la raison de *f*, *p*, puisque la même grandeur *f* est consequent de la premiere, & antecedent de la seconde. Ainsi ayant la multiplication des antecedents & des consequents, on aura *b f*, *f p* : : *b*, *p*, où l'on voit que chacun des deux premiers termes est composé de la raison de

b

b à f, & de f à p. Or par la Définition premiere $bf, fp :: b.f + f.p.$ d'où l'on peut encore tirer celle-ci $b. p :: b.f. + f.p.$ C. Q. F. D.

PROPOSITION III.

THEOREME III.

Des grandeurs homogenes quelconques étant données, celle qui suit la premiere étant plus grande qu'elle, l'exposant de la raison de la premiere à la seconde, multipliant celui de la raison de la seconde à la troisiéme, produit l'exposant de la raison de la premiere à la troisiéme, & cet exposant multipliant celui de la raison de la troisiéme à la quatriéme, produit celui de la raison de la premiere à la quatriéme; ainsi de suite.

Démonstration.

On sçait que pour trouver l'exposant d'une raison, il faut diviser

viser le nombre superieur par l'inferieur, qui sont les deux termes de la raison. Cela étant, des quatre grandeurs, 2, 4, 8, 16, on voit que l'exposant du premier au second terme est 2, aussi bien que celui du second au troisiéme qui se trouve encore 2, si ces deux exposants sont multipliés l'un par l'autre, leur produit 4 sera l'exposant du premier au troisiéme terme, cela se trouve ainsi; car divisant 8 par 2, on aura 4 qui est l'exposant qu'on cherche; & si pareillement l'on multiplie cet exposant 4 par celui du troisiéme au quatriéme, le produit 8 sera aussi l'exposant de 2 à 16, qui est le premier & le quatriéme terme. Par là on peut donc trouver l'exposant d'une infinité de termes, & par leur moyen connoître dans une progression des termes que l'on ignore, puisque l'exposant d'un terme à un autre est

égal

égal à celui qui précede le second, comme on peut remarquer que 8, qui est le terme qui précede celui de 16, est égal à l'exposant de 2 à 16.

Cette Proposition se démontre plus generalement par les lettres, comme on le va voir.

Soient ces grandeurs de suite b, c, d, f, l'exposant de la raison de b à c soit nommé q, c'est-à-dire le quotient de c divisé par b. Celui de la raison de c à d soit nommé p, il faut prouver que $q\ p$ sera l'exposant de la raison de b à d; pour cela considerez que $qb = c$, & puisque p est le quotient de d divisé par c, ou par $q\ b$, égal à c. Donc $qpb = d$. Or le quotient de $q\ p\ b$ divisé par b est $q\ p$, partant $q\ p$ est l'exposant de la raison de b à d, selon la Définition qui a été donnée de l'exposant d'une raison. C. Q. F. D.

Soit nommé y l'exposant de la raison de d à f; Donc $y\ q\ p\ b = f$. Or ayant divisé $y\ q\ p\ b$ par b, le quotient est $y\ q\ p$ qui est le produit des quotiens $q\ p$ & y. Donc l'exposant de la raison de b à f est fait par la multiplication des exposants des raisons des grandeurs interposées. C. Q. F. D.

PRO-

PROPOSITION IV.

THEOREME IV.

LA raiſon d'une grandeur de pluſieurs dimenſions à toute autre grandeur homogene d'autant de dimenſions, eſt compoſée de toutes les raiſons de chacune des dimenſions, d'une grandeur de chacune des dimenſions de l'autre,

Ce n'eſt qu'une application de la Définition de la raiſon compoſée. Car comparant chacune des dimenſions d'une grandeur, à chacune des dimenſions de l'autre, on met tous les antecedents de ces raiſons dans une des grandeurs, & tous les conſequents dans l'autre. Or une grandeur de pluſieurs dimenſions eſt la même choſe que le produit des ces dimenſions multipliées l'une par l'autre, & par conſequent les grandeurs ſont

ſont entr'elles comme le produit de leurs dimenſions, c'eſt-à-dire, comme le produit des antecedents des raiſons de chacune des dimenſions de l'une à chacune des dimenſions de l'autre, au produit des conſequents de ces mêmes raiſons. Ce qui eſt une raiſon compoſée de ces raiſons par la Définition même de la raiſon compoſée.

COROLLAIRE I.

Toute grandeur plane eſt à une autre grandeur plane en raiſon compoſée des deux raiſons de chacun des côtez de l'une à chacun des deux côtez de l'autre.

C'eſt la même choſe que la précedente.

COROLLAIRE II.

Toute grandeur ſolide eſt à une autre grandeur ſolide en raiſon compoſée des trois raiſons de chacun des côtez de l'une à chacun des côtez de l'autre.

C'eſt

C'eſt la même choſe que la Propoſition génerale.

COROLLAIRE III.

Les grandeurs planes & ſolides ayant quelqu'une de leurs dimenſions égales, & l'autre inégale, ſont entr'elles comme les inégales.

b f. b g : : f. g.

b fd. bfg : : d. g.

bfd. bmn : : fd. mn.

COROLLAIRE IV.

Les plans dont les deux dimenſions ont même raiſon chacune de l'une à chacune de l'autre, ſont en raiſon triplée de cette raiſon. Cela eſt clair par le premier Corollaire, & la Définition de la raiſon doublée.

COROLLAIRE V.

Les ſolides dont les trois dimenſions ont même raiſon chacune de l'une à chacune de l'autre, ſont en raiſon triplée de cette raiſon.

Cela

Cela eſt encore clair par le ſecond Corollaire & la Définition de la raiſon triplée.

Corollaire VI.

Tous les quarrez & tous les cubes ſont en raiſon les uns doublés, les autres triplés de la raiſon de leurs racines.

Car toutes les dimenſions des quarrez & des cubes étant égales entr'elles, elles ne peuvent pas avoir chacune la même raiſon à chacune des dimenſions des autres quarrez & des autres cubes.

Corollaire VII.

Si quatre grandeurs ſont proportionnelles, leurs quarrez & leurs cubes le ſont auſſi.

ſi *b. c : : f. g.*
bb. cc : : ff. gg
bbb. ccc : : fff. ggg.

Car les quarrez étant en raiſon doublée de leurs racines, & les cubes en rai-

raiſon triplée, les raiſons doublées & triplées de raiſons égales, doivent être égales par le premier Theorême.

COROLLAIRE VIII.

Le produit de deux grandeurs eſt un moyen proportionnel entre les quarrez de ces grandeurs.

Soient ces deux grandeurs *b* & *d*, dont le produit eſt *b d*. Le quarré de *b* eſt *b b*, celui de *d* eſt *d d*. Je dis que $\div$ *b b*, *b d*, *d d*, ce qui eſt facile à entendre car $\left.\begin{matrix} bb.\ bd. \\ bd.\ dd. \end{matrix}\right\} :: bd.$ Donc *b b*. *b d* :: *b d*. *d d*. Donc $\div$ *b b*. *b d*. *d d*.

COROLLAIRE IX.

En toute progreſſion Geometrique les quarrez de deux termes qui ſe ſuivent immediatement, ſont entr'eux comme le premier terme à celui qui ſuit le ſecond.

Soit $\div$ *b*. *c*. *d*. *f*, &c. je dis que *b b*. *c c* :: *b*. *d*. Car la raiſon de *b b* à *c c* eſt doublée de la raiſon de *b* à *c*, qui eſt la même que celle de *c* à *d*. Or la raiſon de *b* à *d* eſt compoſée de ces deux mêmes raiſons : donc par le ſecond Axiome, il y a même raiſon entre *b b* & *c c*, qu'entre *b* & *d*; donc *b b*, *c c* :: *b*, *d*.

COROLLAIRE X.

Dans une progreſſion Geometrique le

le cube du premier terme est au cube du second, comme le premier terme est à celui qui suit le troisiéme.

Soit *b. c. d. f*, &c. je dis que *b b b. c c c : : b. f.* La raison de *b b b* à *c c c* est triplée de celle de *b* à *c*, qui est la même que celle de *c* à *d*, & de *d* à *f*. Or la raison de *b* à *f* est composée de ces trois mêmes raisons. Donc celle de *b b b* à *c c c* est égale à celle de *b* à *f*.

Les deux Corollaires précedents sont d'une grande utilité; l'un nous donne la maniere d'augmenter ou de diminuer un plan selon une raison donnée; & l'on tire de l'autre la maniere d'augmenter ou de diminuer un solide, ce qui s'appelle proprement la duplication du cube. Nous donnerons à la fin du 12. Livre quelques Problêmes sur les solides qui serviront à appliquer les proportions à la Geometrie. Pareillement à la fin du 6. on trouvera une espece d'application des proportions aux grandeurs planes, d'où l'on pourra tirer le moyen de les divi-

diviſer, de les augmenter, ou diminuer ſelon une raiſon donnée.

PROPOSITION V.

PROBLEME. I.

Trouver un moyen proportionnel entre deux grandeurs données.

IL faut multiplier les deux grandeurs données l'une par l'autre. La racine quarrée de ce produit ſera un moyen proportionnel entre ces deux grandeurs. Ainſi les deux grandeurs données étant *b* & *c*, la racine quarrée de *b c* ſera un moyen proportionnel entre *b* & *c*. Si l'on cherche un moyen entre 2 & 18. Je multiplie donc 2 par 18, ce qui fait 36, la racine quarrée de ce produit qui eſt 6, ſera un moyen proportionnel entre 2 & 18.

PROPOSITION VI.

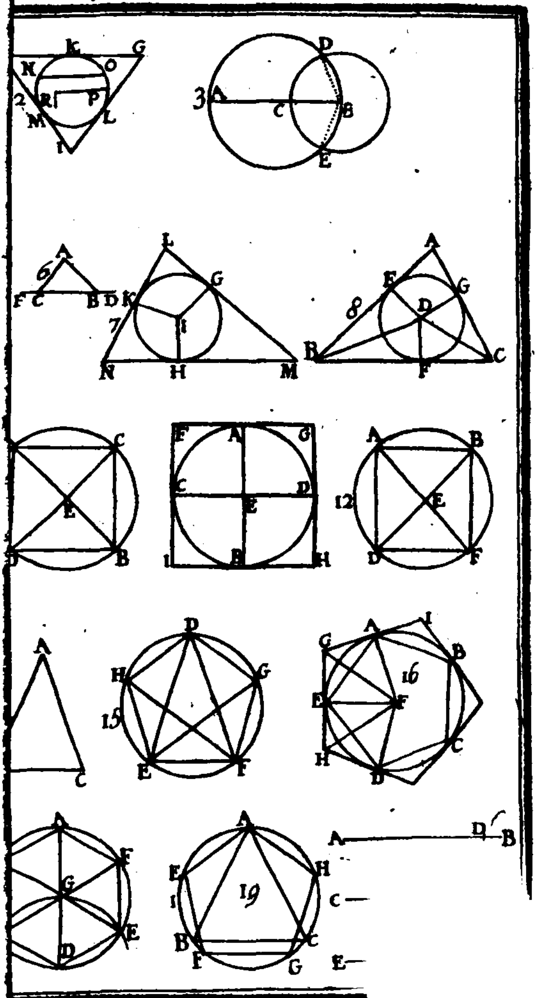
PROBLEME. II.

Trouver deux moyens proportionnels entre deux grandeurs données.

SOient ces deux nombres 2 & 16, entre lesquels il faut trouver deux moyens proportionnels. J'appelle ces moyens m & n, ainsi $\div$ 2, m, n, 16, le cube de 2, qui est 8, est à m^3, comme 2 est à 16; ainsi 8, m^3 :: 2, 16, ou 2, 16 :: 8, m^3.

Voilà donc une proportion de quatre termes, dont les trois premiers sont connus. Je trouve la valeur du cube m^3, multipliant 16 par 8, ce qui fait 128, que je divise par 2, premier terme de cette proportion, le quotient est 64, qui sera la valeur de m^3. La racine cube de 64 est 4; donc m premier moyen vaut 4. Je cherche ensuite par la Proposition précedente un

Livre quatrieme et 5e Planche premiere.



un moyen proportionnel entre 4 & 16, qui est 8. Donc n vaut 8; ainsi j'ai trouvé entre 2 & 16 deux moyens proportionnels; ce qui étoit proposé.

PROPOSITION VII.

PROBLEME. III.

Trois grandeurs étant en proportion continue connoissant la somme des deux extrêmes, & la moyenne en particulier connoître chacun des deux extrêmes.

Soit nommé a la somme des deux extrêmes, & b sera la moyenne; il faut diviser a en deux également, c'est-à-dire, la somme des deux extrêmes: Si l'on nomme c la moitié, on aura $a=2c$. ayant quarré c, il faut en ôter le quarré b, c'est-à-dire, le quarré de la moyenne. On aura donc $cc-bb$, si l'on nomme ee la difference de cc à bb, on aura $cc=bb+ee$, ayant pris la racine de oe, on aura e qui étant ajoûté avec c, donnera $c+e$ pour le plus grand des deux extrêmes, & l'autre sera $c=e$, ce qui donnera cette proportion $c-e, b :: b, c+e$, qui est ce qu'on cherche. Cette Proposition est fondée sur la 14 du 2.

LIVRE SIXIE'ME
DES ELEMENS
D'EUCLIDE.

CE *Livre commence à appliquer à des matieres particulieres la doctrine des proportions, que le Livre précedent n'explique qu'en general. Il commence par les figures les plus simples, c'est-à-dire, par les Triangles, donnant des regles, pour déterminer non-seulement la proportion de leurs côtez, mais encore celle de leur capacité, aire ou surface. Ensuite il enseigne à trouver les lignes proportionnelles, & à augmenter ou diminuer quelque figure que ce soit, selon une raison donnée. Il démontre la regle de trois: il étend la quarante-septiéme du premier, à toutes sortes de figures. En-*

Enfin il nous donne des principes très-faciles & très-assurez pour nous conduire dans toute sorte de mesurages.

LES DEFINITIONS.

1. LEs figures rectilignes sont semblables, lorsqu'elles ont tous les angles égaux, & les côtez qui forment ces angles proportionnels. *Comme les figures ABC, DEF seront semblables, si les angles A & D; B & E; C & F sont égaux; & s'il y a même raison de AB à AC, que de DE à DF; & de AB à CE, que de DE à EF.* Pl. 1. Fig. 1. & 2.

2. Les figures sont réciproques, quand on les peut comparer de telle sorte, que l'antecedent d'une raison, & le consequent de l'autre se trouvent dans la même figure: *C'est-à-dire, quand l'analogie commence dans une figure, & finit par la même. Comme,* Pl. 1. Fig. 3. & 4.

me, s'il y avoit même raison de AB à CD, que de DE à BF.

Pl. 1. Fig. 5. ——— 3. Une ligne est divisée par A CB l'extrême & moyenne raison, quand il y a même raison de toute la ligne à sa plus grande partie à la plus petite. *Comme, s'il y avoit même raison de AB à AC, que de AC à CB; la ligne AB seroit divisée au point C par l'extrême & moyenne raison.*

Pl. 1. Fig. 6. 4. La hauteur d'une figure, est la perpendiculaire tirée de son sommet à sa base. *Comme les Triangles ABC, EFG, les perpendiculaires EH, AD, soit qu'elles tombent dehors, ou qu'elles se tirent dans le Triangle sont leur hauteur. Les Triangles, les parallelogrames, qui ont des hauteurs égales, peuvent être posez entre les mêmes paralleles. Car ayant mis leurs bases sur la même ligne HC; si les perpendiculaires DA, HE sont égales; les lignes EA, HC seront paralleles.*

5.

5. Une raison est composée de plusieurs raisons, quand les quantitez homologues de ces raisons étant multipliées, en font une troisiéme.

Il faut remarquer qu'une raison (au moins la rationnelle) a un nom tiré de quelque nombre qui marque, quel rapport à l'antecedent de cette raison à son consequent. Comme si on propose deux grandeurs, l'une de 12 pieds, & l'autre de 6, nous disons que la raison de 12 à 6 est double. Pareillement, si on propose deux grandeurs 4 & 12, nous dirons que c'est une raison soûtriple; & $\frac{1}{3}$ un tiers en est le dénominateur, qui marque qu'il y a même raison de 4 à 12, que de $\frac{1}{3}$ à un, ou comme 1 à 3. On peut appeller ce dénominateur la quantité de la raison. Qu'on propose donc trois termes 12, 6, 2. La premiere raison de 12 à 6 est double, son dénominateur est 2, la raison de 6 à 2 est triple, son déno-

minateur est 3, la raison de 12 à 2 est composée de la raison de 12 à 6, & de celle de 6 à 2. Ainsi pour avoir le dénominateur de la raison 12 à 2 qui est composée de double & de triple, multipliez 3 par 2, & vous aurez 6; donc la raison de 12 à 2 est sextuple. C'est ce que les Mathematiciens entendent, par composition de raisons, quoiqu'on la devroit plûtôt appeller multiplication de raisons.

PROPOSITION I.

THEOREME.

Les Parallelogrames & les Triangles de même hauteur, ont même raison que leurs bases.

Pl. 1. Fig. 7. QU'ON propose les Triangles AGC, DEM de même hauteur, de sorte qu'on puisse les placer entre les paralleles AD, GM: Je dis qu'il y aura même raison de la la base GC à la base EM, que du Triangle AGC, au Triangle DEM. Qu'on divise la base EM en autant de parties égales qu'on voudra, & qu'on tire par chaque division des lignes DF, DH, &c. Qu'on divise aussi la ligne GC, en parties égales à celles de la ligne EM, & qu'on tire des lignes du sommet A à ces divisions : Tous ces petits Triangles, formez dans les deux grands, sont entre les mêmes paralleles, & ils ont des bases égales : ils sont donc égaux (par la 38. du 1.)

Démonstration.

La base GC, contient autant de parties aliquottes de la ligne EM, qu'on a pû trouver de parties égales à EF. Or autant qu'il y a dans la base GC de parties égales à EF; autant le Triangle AGC contient de petits Triangles égaux à ceux qui ſont dans le Triangle DEM ; leſquels étant égaux entr'eux, ſont ſes parties aliquotes : donc autant que la baſe GC contient de parties aliquotes de EM, autant le Triangle AGC contient de parties aliquotes du Triangle DEM ; ce qui arrivera dans toute ſorte de diviſion. Il y a donc même raiſon de la baſe GC à la baſe EM, que du Triangle AGC au Triangle DEM.

USAGE.

Pl. 1. Fig. 8. *Non-ſeulement cette Propoſition eſt néceſſaire pour démontrer celles qui ſuivent ; mais on s'en peut ſervir pour diviſer les champs.*

Qu'on propoſe un trapeze ABCD, qui ait les côtez AD, BC paralleles, & qu'on en veüille prendre la troiſiéme partie, CL ſoit égale à AD: & BG la troiſiéme partie de BL. Tirez AG. Je dis que le Triangle ABG eſt la troiſiéme partie du trapeze ABCD.

Dé-

Démonstration.

Les Triangles ADF, FCL, sont équiangles à cause des paralleles AD, CL, & ils ont les côtez AD, CL égaux : Ils sont donc égaux (par la 26. du 1.) & par consequent le Triangle ABL est égal au trapeze ; Or le Triangle ABG est la troisiéme partie du Triangle ABL par la précedente : Donc le Triangle ABG est le tiers du trapeze ABCD.

PROPOSITION II.

Theoreme.

Une ligne tirée dans un Triangle parallelement à sa base, divise ses côtez proportionnellement. Que si une ligne divise proportionnellement les côtez d'un Triangle, elle sera parallele à sa base.

SI dans le Triangle ABC, la ligne DE, est parallele à la base BC; Pl. 1. Fig. 9.

les côtez AB, AC seront divisez proportionnellement, c'est-à-dire, qu'il y aura même raison de AD à DB, que de AE à EC. Tirez les lignes DC, BE. Les Triangles DBE, DEC, qui ont la même base DE, & qui sont renfermez entre les mêmes paralleles DE, BC, sont égaux, (par la 37. du 1.)

Démonstration.

Les Triangles ADE, DBE, ont le même sommet E, prenant AD, DB pour leurs bases: & si on tiroit par le point E, une parallele à AB, ils seroient entre ces paralleles, & auroient par consequent même hauteur: ils ont donc même raison que leurs bases (par la 1.) c'est-à-dire, qu'il y a même raison de AD à DB, que du Triangle ADE au Triangle DEB, ou à son égal CED. Or il y a aussi même raison du Triangle ADE au Triangle CDE, que de la base

baſe AE à EC. Il y a donc même raiſon de AD à DB, que AE à EC.

Que s'il y avoit même raiſon de AE à EC, que de AD à DB : Je dis que les lignes DE, BC ſeroient paralleles.

Démonſtration.

Il y a même raiſon de AD à DB, que du Triangle ADE au Triangle DEB (par la 1.) il y a auſſi mê- raiſon de AE à EC, que du Triangle ADE au Triangle DEC : par conſequent il y aura même raiſon du Triangle ADE au Triangle BDE, que du même Triangle ADE au Triangle CED. Ainſi (par la 1. du 5.) les Triangles BDE, CED ſont égaux, &c. (par la 39. du 1.) ils ſont entre les mêmes paralleles. Donc les lignes DE, BC ſont paralleles.

USAGE.

Cette Propoſition eſt abſolument né-

ceſſai-

cessaire pour les suivantes. Elle sert aussi pour démontrer la composition de raisons. Car puisque DB est à AD, comme EC à AE, en composant il y aura aussi même raison de AB à AD, que de AC à AE, à cause des deux Triangles équiangles ABC, ADE, comme il sera démontré dans la quatriéme Proposition.

PROPOSITION III.

THEOREME.

La ligne qui partage en deux également l'angle d'un Triangle, partage sa base en deux parties qui sont en même raison que les côtez. Que si la ligne partage la base en deux parties proportionnelles aux côtez, elle divisera l'angle en deux également.

Pl. 1. Fig. 10. SI la ligne AD partage en deux également l'angle BAC: il y aura ra même raiſon de AB à AC, que de BD à DC. Continuez le côté CA, & prenez AE égale à AB; puis tirez la ligne EB.

Démonſtration.

L'angle exterieur CAB, du Triangle iſocele ABE, eſt égal aux deux internes AEB, ABE: leſquels étant égaux (par la 5. du 1.) puiſque les côtez AE AB ſont égaux, l'angle BAD, moitié de BAC ſera égal à l'un d'eux; c'eſt-à-dire, à l'angle ABE. Donc (par la 28. du 1.) les lignes AD, EB ſont paralleles: & (par la 2.) il y a même raiſon de EA, ou AB à AC, que de BD à DC.

Secondement, s'il y a même raiſon de AB à AC, que BD à DC: l'angle BAC ſera diviſé également en deux.

Démonſtration.

Il y a même raiſon de AB, ou EA

EA à AC, que de BD à DC: Donc (par le 2. cas de la 2.) les lignes EB, AD sont paralleles: & (par la 28. du 1.) les angles alternes EBA, BAD, l'interne BEA, & l'externe DAC, seront égaux, & les angles EBA, AEB étant égaux; les angles BAD, DAC, le seront aussi. Donc l'angle BAC aura été divisé également.

USAGE.

Nous nous servons de cette Proposition pour avoir la proportion des côtez.

PROPOSITION IV.

THEOREME.

Les Triangles équiangles ont les côtez proportionnels.

Pl. 1. Fig. 11. SI les Triangles ABC, DCE sont équiangles; c'est-à dire, que les angles ABC, DCE, BAC, CDE sont égaux: il y aura même raison de de BA à BC, que de CD à CE. Pareillement la raiſon de AC à BC, ſera la même que la raiſon de DE à CE, & la raiſon de BA à AC, ſera la même que celle de CD à DE. Joignez les Triangles, de ſorte que les baſes BC, CE ſoient ſur la même ligne; & continuez les côtez ED, BA: puiſque les angles ACB, DEC ſont égaux; les lignes AC, FE ſont paralleles, de même que CD, BF (par la 28. du 1.) & AFDC ſera un parallelograme.

Démonſtration.

A la baſe dans le Triangle BFE, AC eſt parallele à FE, donc (par la 2.) il y aura même raiſon de BA à F ou CD, que de BC à CE: (& par échange) il y aura même raiſon de AB à BC; que de DC à CE. Pareillement dans le même Triangle, CD étant parallele à la baſe BF, il y aura même raiſon de

FC,

FC, ou AC à DE, que BC à CE (par la 2.) & par échange, il y aura même raiſon de AC à BC, que de DE à CE. Enfin puiſqu'il y a même raiſon de BA à BC, que de CD à CE, & même raiſon de BC à AC, que de CE à DE, il y aura (par égalité,) même raiſon de BA à AC, que de CD à DE.

Corollaire. Si dans un Triangle on tire une ligne parallele à un des côtez, on fera deux Triangles équiangles.

USAGE.

Cette Propoſition eſt fort étenduë, & elle peut paſſer pour un principe très-univerſel dans toutes ſortes de meſurages. Car premierement les pratiques ordinaires pour meſurer les lignes inacceſſibles, en décrivant un petit Triangle ſemblable à celui qui eſt formé ſur le terrain, ſont établies ſur cette Propoſition, comme auſſi la plûpart

part des instrumens, sur lesquels se forment des Triangles semblables à ceux que nous voulons mesurer; comme le quarré Geometrique, le Pantometre, l'Arbaleste, l'Instrument universel de M. Ozanam, & les autres. De plus, nous ne sçaurions lever le plan d'une place, que par cette Proposition: de sorte que pour en expliquer les usages, il faudroit donner le premier Livre de la Geometrie Pratique.

PROPOSITION V.

THEOREME.

Les Triangles qui ont les côtez proportionnels sont équiangles.

SI les Triangles ABC, DEF ont les côtez proportionnels; c'est-à dire, s'il y a même raison de AB à BC, que de DE à EF: comme aussi la raison de AB à AC, est la même que celle de DE à DF: les angles

Pl. 1. Fig. 12. & 13.

angles ABC, DEF; A & D, C & F feront égaux. Faites l'angle FEG égal à l'angle B, EFG égal à l'angle C.

Démonstration.

Les Triangles ABC, EFG, ont deux angles égaux : ils sont donc équiangles (par le Corol. 2. de la 32. du 1.) & (par la 4.) il y aura même raison de AB à BC, que de GE à EF. Or on suppose qu'il y a même raison de DE à EF, que de AB à BC : ainsi il y a même raison de DE à EF, que de EG à EF. Donc (par la 1. du 5.) DE, EG sont égales. Pareillement DE, FG le sont aussi, & (par la 8. du 1.) les Triangles DEF, GEF sont équiangles. Or l'angle GEF a été fait égal à l'angle B : donc l'angle DEF, est égal à l'angle B; & l'angle DFE à l'angle C. Ainsi les Triangles ABC, DEF sont équiangles.

PRO-

PROPOSITION VI.

THEOREME.

Les Triangles qui ont les côtez proportionnels, autour d'un angle égal sont équiangles.

SI les angles B & E des Triangles ABC, DEF, étant égaux, il y a même raison de AB à BC, que de ED à EF; les Triangles ABC, DEF seront équiangles. Faites l'angle FEG égal à l'angle B, & l'angle EFG égal à l'angle C. Pl. 11. Fig. 12. & 13.

Démonstration.

Les Triangles ABC, EGF sont équiangles (par le Corol. 2. de la 32. du 1.) il y a donc même raison de AB à BC, que de EG à EF (par la 4.) Or comme AB est à BC, ainsi DE à EF: il y a donc même raison de DE à EF, que de GE à EF. Ainsi (par la 1. du 5.) DE, DE, EG ſont égales: & les Triangles DEF, GEF, qui ont les angles DEF, GEF, chacun égal à l'angle B, & les côtez DE, EG égaux avec le côté EF commun; ſeront égaux en tous ſens (par la 4. du 1.) ils ſeront donc équiangles: & le Triangle EGF, étant équiangles à ABC; les Triangles ABC, DEF ſont équiangles.

La Propoſition 7. eſt inutile.

PROPOSITION VIII.

THEOREME.

La perpendiculaire tirée de l'angle droit d'un Triangle rectangle, au côté qui lui eſt oppoſé, le diviſe en deux Triangles qui lui ſont ſemblables.

Pl. 1. Fig. 14. SI de l'angle droit ABC, on tire une perpendiculaire BD, au côté oppoſé AC; elle diviſera le Triangle

gle rectangle ABC, en deux Triangles ADB, BDC, qui seront semblables ou équiangles au Triangle ABC.

Démonstration.

Les Triangles ABC, ADB ont le même angle A: les angles ADB, ABC sont droits : ils sont donc équiangles (par le Corol. 2. de la 32. du 1.) Pareillement les Triangles BDC, ABC, ont l'angle C commun: & les angles ABC, BDC étant droits, sont aussi égaux. Donc les Triangles ABC, DBC sont semblables.

USAGE.

Nous mesurons les distances inaccessibles par l'équiere suivant cette Proposition. Par exemple, s'il faut mesurer la distance DC; ayant tiré la perpendiculaire DB, & ayant mis un équiere au point B, de sorte que regardant par un de ses côtez BC, je *je voye le point C, & par ſon autre côté, le point A: il eſt évident qu'il y aura même raiſon de AB à DB, que de DB à DC. Ainſi multipliant DB par ſoi-même, & diviſant le produit par AD, le quotient ſera DC.*

COROLLAIRE.

Il s'enſuit que le côté AB eſt moyen proportionnel entre la baſe AC, & le ſegment AD, & que pareillement le côté BC eſt moyen proportionnel entre la même baſe AC, & le ſegment correſpondant CD. Par où l'on démontrera facilement la 47. Prop. du 1. L. Car ſi l'on met la lettre b, pour la baſe AC, la lettre c, pour le côté AB, & la lettre d, pour l'autre côté BC, l'on aura $\frac{cc}{b}$ *pour le ſegment AD, &* $\frac{dd}{b}$ *pour l'autre ſegment CD, & par conſequens* $\frac{cc+dd}{b}$ *pour la baſe AC, ou pour b. Ainſi l'on aura cette équation,* $\frac{cc+dd}{b} \backsim b$, *ou* $cc+dd \backsim bb$, *par où l'on*

voit

voit que le quarré de la base AC, est égal à la somme des quarrez des deux côtez AB, BC.

PROPOSITION IX.

PROBLEME.

Couper la partie qu'on voudra d'une ligne.

QU'ON propose la ligne AB, de laquelle on veut avoir les trois cinquiémes. Faites l'angle ECD à discretion: prenez dans une de ses lignes CD, cinq parties égales à discretion; & que CF en contienne trois, & que CE soit egale à AB. Tirez ensuite la ligne DE, puis EG parallele à DE: la ligne CG contiendra trois cinquiémes parties de CE, ou AB. Pl. 1. Fig. 15.

Démonstration.

Dans le Triangle ECD, FG étant parallele à la base DE, il y aura même raison de CF à FD, que de CG à GE (par la 2.) & en composant, il y aura même raison de CG à CE, que de CF à CD. Or CF contient trois cinquiémes de CD: Donc CG contiendra trois cinquiémes de CE, ou AB.

PROPOSITION X.

PROBLEME.

Diviser une ligne de même façon qu'une autre ligne est divisée.

Pl. 1. Fig. 16. SI on veut diviser la ligne AB, de même façon que la ligne AC est divisée. Joignez ces deux lignes à quelque angle qu'il vous plaira, comme CAB: Tirez la ligne BC, & les paralleles HX, GT, & les autres. La ligne AB sera divisée de même façon que AC.

Démonstration.

Puisque dans le Triangle BAC, on a tiré HX & les autres lignes paralleles à la base BC; elles diviseront proportionnellement les côtez AB, AC,

(par

(par la 2.) Donc la ligne AB sera divisée de la même façon que AC.

Pour le faire facilement, on peut tirer BD parallele à AC, & transporter les mêmes divisions de AC sur BD: puis tirer les lignes de l'un à l'autre elles couperont AB dans des points qui la diviseront de même que AC.

PROPOSITION XI.

PROBLEME.

Trouver une troisiéme proportionnelle à deux lignes données.

ON cherche une troisiéme proportionnelle aux lignes AB, BC; c'est-à dire, qu'il y ait même raison de AB à BC, que de BC à la ligne que vous cherchez. Prenez de suite les lignes AB, BC, en sorte qu'elles fassent une ligne droite. Faites à discretion l'angle EAC: & que AD soit égale à BC: tirez la ligne BD, & sa Pl. 1. Fig. 17. & 18.

parallele CE. La ligne DE sera celle que vous cherchez.

Démonstration.

Dans le Triangle EAC, la ligne DB est parallele à la base CE: Il y a donc (par la 2.) même raison de AB à BC, que de AD, ou BC à DE.

S C O L I E.

On trouve dans le Traité du Compas de Proportion de Monsieur Ozanam, une methode très-courte pour trouver à deux lignes données une troisiéme proportionnelle.

PROPOSITION XII.

P R O B L E M E.

Trouver une quatriéme proportionnelle à trois lignes données.

Pl. 1. Fig. 19. & 20. QU'ON propose trois lignes AB, BC, DE, auxquelles il faut trouver une quatriéme proportionnelle. Faites un angle FAC à discretion: pre-

prenez sur AC, les lignes AB, BC; & sur FA, la ligne AD, égale à DE: tirez ensuite la ligne DB, & sa parallele FC. Je dis que DF, est la ligne que vous cherchez; c'est-à-dire, qu'il y a même raison de AB à BC, que de DE ou AD, à DF.

Démonstration.

Dans le Triangle FAC, la ligne DB, est parallele à la base FC, il y a donc même raison de AB à BC, que de AD à DF, (par la 2.)

USAGE.

L'usage du compas de proportion est établi sur ces quatre Propositions, car nous divisons une ligne, comme il nous plaît, par le Compas de proportion: nous faisons des regles de trois, sans nous servir de l'Arithmetique: nous tirons la racine quarrée, & cubique: nous doublons le cube: nous mesurons toute sorte de Triangles: nous trouvons la capacité des surfaces, & la solidité des corps:

nous augmentons ou diminuons quelque figure que ce soit, selon la proportion qu'il nous plaît: & tous ces usages se démontrent par les Propositions précedentes.

PROPOSITION XIII.

PROBLEME.

Trouver une moyenne proportionnelle, entre deux lignes données.

Pl. 7. Fig. 21. SI vous voulez une moyenne proportionnelle entre les lignes LV, VR: les ayant jointes sur une ligne droite, divisez la ligne LR, en deux également au point M; & ayant décrit un demi-Cercle LTR du centre M; tirez la perpendiculaire VT. Elle sera moyenne proportionnelle entre LV, VR. Tirez les lignes LT, TR.

Démonstration.

L'angle LTR, décrit dans un demi-Cercle, est droit (par la 31. du 3.) & (par la 8.) les Triangles LVT, TVR

TVR sont semblables : il y a donc même raison dans le Triangle LVT, de LV à VT, que de VT à VR dans le Triangle TVR, (par la 4.) Ainsi VT est moyenne proportionnelle entre LV & VR.

USAGE.

Nous réduisons au quarré, quelque parallelograme rectangle que ce soit, par cette Proposition. Par exemple, le rectangle compris sous LV, VR, que je démontrerai ci-après (dans la Prop. 17.) être égal au quarré de VT.

PROPOSITION XIV.

THEOREME.

Les Parallelogrames équiangles & égaux ont les côtez réciproques, & les parallelogrames équiangles, & ceux qui ont les côtez réciproques, sont égaux.

SI les parallelogrames L & M sont équiangles & égaux, ils auront Pl. 1. Fig. 22.

 les

les côtez réciproques : c'eſt-à-dire, qu'il y aura même raiſon de CD à DE, que de FD à BD. Car puiſqu'ils ont les angles égaux, on les pourra joindre de telle ſorte, que leurs côtez CD, DE ſoient ſur une ligne droite (par la 15. du 1.) Continuez les côtez AB, GE; vous acheverez le parallelograme BDEH.

Démonſtration.

Puiſque les parallelogrames L & M ſont égaux, ils auront même raiſon au parallelograme BDEH : Or la raiſon du paralellograme L au parallelograme BDEH, eſt la même que la baſe CD à la baſe DE (par la 1.) & celle du parallelograme M, ou DFGE, au parallelograme BDHE, eſt la même que de la baſe FD à la baſe BD. Donc il y a même raiſon de CD à DE, que de FD à BD.

Secondement. Si les parallelogrames équiangles L & M, ont leurs côtez

tez réciproques, ils seront égaux.

Démonstration.

Les côtez des parallelogrames sont réciproques; c'est-à-dire, qu'il y a même raison de CD à DE, que de FD à DB: or comme la base CD à DE, ainsi le parallelograme L au parallelograme BDEH (par la 1.) & comme FD à BD; ainsi le parallelograme M à BEDH: il y a donc même raison de L à BDEH, que de M au même BDEH. Ainsi (par la 1. du 5.) les parallelogrames L & M sont égaux.

USAGE.

Cette Proposition sert pour la démonstration de la regle de trois inverse. Car si l'on disoit, par exemple, si la longueur CD donne BD pour la largeur, combien donnera la longueur DF? elle doit donner la largeur DE: que l'on trouvera en multipliant ensemble les deux premiers termes CD, BD, pour avoir l'aire du parallelograme ABCD égal au parallelo-

lograme DEGF, & en divisant cette aire par le troisiéme terme DF.

PROPOSITION XV.

THEOREME.

Les Triangles égaux, & qui ont un angle égal, ont les côtez qui forment cet angle, réciproques: Et s'ils ont les côtez réciproques, ils seront égaux.

Pl. 1. Fig. 23. SI les Triangles F & G étant égaux, ont les angles ACB, ECD égaux: leurs côtez autour de cet angle seront réciproques; c'est-à-dire, qu'il y aura même raison de BC à CE, que de CD à CA. Disposez tellement ces Triangles, que les côtez DC, CA soient une ligne droite: puisque les angles ACB, ECD sont supposez égaux, les lignes BC, CE feront aussi une ligne droite (par la 15. du 1.) Tirez la ligne AE.

Démonstration.

Il y a même raison du Triangle AB C,

C, au Triangle ACE, que du Trian-ECD, égal au premier, au même Triangle ACE, (par la 1. du 5.) Or comme ABC à ACE, ainſi la baſe BC à la baſe CE, (par la 1.) puiſqu'ils ont le même ſommet A: & comme ECD à ACE, ainſi la baſe CD à CA, (par la même.) Il y a donc même raiſon de BC à CE que de CD à CA.

Que ſi on ſuppoſe que les côtez ſont réciproques; c'eſt-à-dire, qu'il y ait même raiſon de BC à CE, que de CD à CA: les Triangles ABC, CDE ſeront égaux, parce qu'ils auront même raiſon au Triangle ACE.

PROPOSITION XVI.

THEOREME.

Si quatre lignes sont proportionnelles le rectangle compris sous la premiere & la quatriéme, est égal au rectangle compris sous la seconde & la troisiéme. Que si le rectangle compris sous les extrêmes, est égal au rectangle compris sous celle du milieu, les quatre lignes sont proportionnelles.

Pl. 2. Fig. 24. & 25.

SI les lignes A, B, C, D, sont proportionnelles; c'est-à-dire, s'il y à même raison de A à B, que de C à D, le rectangle compris sous la premiere A, & la quatriéme D, sera égal au rectangle compris sous B & C.

Démonstration.

Les rectangles ont l'angle égal, puisqu'il est droit; ils ont aussi les côtez réciproques : ils sont donc égaux (par la 14.)

Pa-

Pareillement, s'ils ſont égaux ils auront les côtez réciproques; c'eſt-à-dire, il y aura même raiſon de A à B, que C à D.

PROPOSITION XVII.

THEOREME.

Si trois lignes ſont proportionnelles, le rectangle compris ſous la premiere & la derniere, eſt égal au quarré de celle du milieu. Que ſi le quarré de celle du milieu, eſt égal au rectangle des extrêmes; les trois lignes ſont proportionnelles.

SI les trois lignes A, B, D, ſont proportionnelles; le rectangle compris ſous A & ſous D, ſera égal au quarré de B. Prolongez la ligne D, & prenez C égale à B, il y aura même raiſon de A à B, que de C à D: donc les quatre lignes A, B, C, D, ſont proportionnelles. Pl. 2. Fig. 24.

Dé-

Démonstration.

Le rectangle sous A & sous D, sera égal au rectangle sous B & sous C (par la précedente.) Or ce dernier rectangle est un quarré, puisque les lignes B & C sont égales : donc le rectangle compris sous A & sous D, est égal au quarré de B.

Pareillement, si le rectangle sous A & D, est égal au quarré de B ; il y aura même raison de A à B, que de C à D : & puisque B & C sont égales, il y aura même raison de A à B, que de B à D.

USAGE.

Ces quatre Propositions démontrent la regle d'Arithmetique, que nous appellons communément la regle de trois, & par consequent les regles de societé, de faux, & toutes les autres qui se font par proportion. Par exemple, qu'on propose les trois nombres A 8, B 6, C 4, il s'agit de chercher

cher le quatriéme nombre proportionnel. Suppoſez qu'on l'ait trouvé, & que ce ſoit D. Le rectangle compris ſous A & D, eſt égal au rectangle compris ſous B & C (par la 16.) Or je puis avoir ce rectangle, multipliant B par C; c'eſt-à-dire 6 par 4, & j'aurai 24: donc le rectangle compris ſous A & D, eſt 24. C'eſt pourquoi le diviſant par A 8, le quotient ſera 3, qui eſt le nombre que je cherche.

PROPOSITION XVIII.

PROBLEME.

Décrire un Polygone ſemblable à un autre, ſur une ligne donnée.

ON propoſe la ligne AB, ſur laquelle on veut décrire un polygone ſemblable au polygone CFDE. Ayant diviſé le polygone CFDE en Triangles, faites ſur la ligne AB, un Triangle ABH, ſembla- Pl. 2. Fig. 26. & 27.

blable au Triangle CFE; c'est-à-dire, faites l'angle ABH égal à l'angle CFE, & BAH égal à FCE. Ainsi les Triangles ABH, CFE seront équiangles (par la 32. du 1.) Faites aussi sur BH un Triangle équiangle à FDE.

Démonstration.

Puisque les Triangles qui sont parties des polygones, sont équiangles; les deux polygones sont équiangles. De plus, puisque les Triangles ABH, CFE sont équiangles, il y aura même raison de AB à BH, que de CF à FE (par la 4,) Pareillement, les Triangles HBG, EFD étant équiangles; il y aura même raison de BH à BG, que de FE à FD: & par égalité, il y aura même raison de AB à BG, que de CF à FD. Et ainsi de tous les autres côtez. Donc (par la défin. 1.) les polygones sont semblables.

Usa-

USAGE.

C'est sur cette Proposition que nous établissons la plûpart des Pratiques pour lever le plan d'une place, d'un bâtiment, d'un champ, d'une forest, & même de tout un païs : car faisant valoir les parties d'une ligne divisée également, pour des pieds, ou pour des toises; nous décrivons une figure semblable au prototype, mais plus petite, dans laquelle nous pouvons voir la proportion de toutes ces lignes. Et parce qu'il nous est plus facile de travailler sur le papier que sur le terrain: nous pouvons renfermer dans cette Proposition presque toute la Geodesie, toutes les Chorographies, toutes les cartes de Geographie, la façon de réduire de grand en petit; de sorte que cette Proposition s'étend presque par tous les Arts, qui ont besoin d'avoir le dessein, ou le modéle de leurs ouvrages.

PRO-

PROPOSITION. XIX.

THEOREME.

Les Triangles ſemblables, c'eſt-à-dire équiangles, ſont en raiſon doublée, de celle de leurs côtez homologues.

Pl. 2. Fig. 28. & 29.

SI les Triangles ABC, DEF ſont ſemblables, ou équiangles; ils feront en raiſon doublée des côtez homologues BC, EF; c'eſt-à-dire, que la raiſon du Triangle ABC au Triangle DEF ſera doublée de la raiſon de BC à EF: de ſorte que cherchant la troiſiéme proportionnelle HI aux lignes BC, EF; en faiſant qu'il y ait même raiſon de BC à EF, que de EF à HI; le Triangle ABC aura même raiſon au Triangle DEF, que la ligne BC à la ligne HI. Ce qui s'appelle avoir une raiſon doublée. Que BG & HI ſoient égales; & qu'on tire la ligne AG.

Dé-

Démonstration.

Les angles B & E des Triangles ABG, DEF sont égaux : d'ailleurs, puisque les Triangles ABC, DEF sont semblables, il y aura même raison (par la 4.) de AB à DE, que de BC à EF : Or comme BC à EF, ainsi EF à HI, ou BG : donc comme AB à DE, ainsi EF à BG : & par consequent les côtez des Triangles ABG, DEF, étant réciproques : les Triangles seront égaux (par la 15.) Or (par la 1.) le Triangle ABC a même raison au Triangle ABG, que BC à BG, ou HI : donc le Triangle ABC a même même raison au Triangle DEF, que BC à HI.

COROLLAIRE.

Il suit de cette Proposition, que les Triangles semblables sont dans la raison des quarrez de leurs côtez homologues, parce que ces quarrez sont

aussi

aussi en raison doublée de celle de leurs côtez.

USAGE.

Ces Propositions corrigent l'opinion de plusieurs, qui s'imaginent facilement que les figures semblables sont en même raison que leurs côtez. Par exemple, qu'on propose deux quarrez, deux pentagones, deux hexagones, deux cercles; & que le côté du premier soit double de celui du second; la premiere figure sera quadruple de la seconde. Si le côté de la premiere, est triple de celui de la seconde, la premiere figure sera neuf fois aussi grande que la seconde. Ainsi pour faire un quarré triple de l'autre, il faudroit chercher une moyenne proportionnelle entre un & trois, qui seroit presque 1 $\frac{2}{3}$ pour le côté de la figure triple.

PROPOSITION XX.

THEOREME.

Les polygones ſemblables ſe peuvent diviſer en autant de Triangles ſemblables; & leurs ſuperficies ſont en raiſon doublée de leurs côtez homologues.

SI les polygones ABCDE, GHIML ſont ſemblables; on les pourra diviſer en autant de Triangles ſemblables, & qui feront des ſemblables parties de leur tout. Tirez les lignes AC, AD, GI, GL. Pl. 2. Fig. 30. & 31.

Démonſtration.

Puiſque les polygones ſont ſemblables, leurs angles B & H feront égaux; & il y aura même raiſon de AB à BC, que de GH à HI (par la 1. défin.) donc les Triangles ABC, GHI ſont ſemblables (par la 6.) & (par la 4.) il y aura même raiſon

de

de BC à CA, que de HI a GI. De plus, puiſqu'il y a même raiſon de CD à BC, que de IL, à IH, & la même de BC à CA, que de HI à GI: il y aura par égalité, même raiſon de CD à CA; que de IL à GI. Or les angles BCD & HIL étant égaux, ſi vous en ôtez les angles égaux ACB, GIH; les angles ACD, GIL ſeront égaux. Donc les Triangles ACD, GIL ſeront ſemblables (par la 6.) Ainſi il eſt facile de parcourir tous les Triangles des polygones, & de prouver qu'ils ſont ſemblables.

J'ajoûte que les polygones ſont en raiſon doublée de leurs côtez homologues.

Démonſtration.

Chaque Triangle eſt à ſon ſemblable en raiſon doublée des côtez homologues (par la 19.) Donc chaque Triangle d'un polygone à chaque

que Triangle de l'autre, eſt en raiſon doublée des côtez homologues, & leurs côtez ayant même raiſon (par la 4.) puiſque tous les Triangles ſont ſemblables, la raiſon doublée ſera la même; & de plus, il y a même raiſon de chaque Triangle à ſon ſemblable, que de tous les Triangles d'un polygone à tous ceux de l'autre (par la 3. du 5.) c'eſt-à-dire d'un polygone à l'autre. Donc les Triangles ſont en même raiſon que les polygones: & puiſque les Triangles ſont en raiſon doublée de leurs côtez homologues, les polygones le feront auſſi.

Coroll. 1. Les polygones ſemblables ſont comme les quarrez de leurs côtez homologues.

Coroll. 2. Si trois lignes ſont continuellement proportionnelles, le polygone décrit ſur la premiere, aura même raiſon au polygone décrit ſur

la

la seconde que la premiere à la troisiéme; c'est-à-dire, en raison doublée de celle de la premiere ligne, à la seconde.

PROPOSITION XXI.

THEOREME.

Les polygones qui sont semblables à un troisiéme polygone, le sont aussi entr'eux.

Pl. 2. Fig. 32. 33 & 34.

SI deux polygones sont semblables à un troisiéme, ils seront semblables entr'eux; car ils se pourront chacun diviser en autant de Triangles semblables qu'il y en a dans le troisiéme. Or les Triangles semblables à un troisiéme, le sont aussi entr'eux, parce que les angles qui sont égaux à un troisiéme, sont égaux entr'eux; & les angles des Triangles étant égaux, ceux des polygones qui en sont composez, le sont aussi.

J'a-

J'ajoûte que si les côtez des Triangles sont en même raison, ceux des polygones le seront aussi, puisque ce sont les mêmes. Donc les polygones qui sont semblables à un troisiéme polygone, ont les angles égaux, & les côtez proportionnels. C'est pourquoi (par la défin. 1.) ils sont semblables entr'eux.

PROPOSITION XXII.

THEOREME.

Les polygones semblables décrits sur quatre lignes proportionnelles, sont aussi proportionels. Et si les polygones sont en même raison, les lignes le seront aussi.

S'IL y a même raison de BC à EF, que de HT à MN; il y aura aussi même raison du polygone ABC au polygone semblable DEF, que du polygone HL au po- Pl. 2. Fig. 35. 36. 37. 38. & 39.

P lygo-

lygone ſemblable MO. Cherchez aux lignes BC, EF, une troiſiéme proportionnelle G; & aux lignes HT, MN, la troiſiéme proportionnelle P (par la 1.) Puiſqu'il y a même raiſon de BC à EF, que de HT à MN; & de EF à G, que de MN à P: il y aura par égalité même raiſon de BC à G, que de HT à P: cette raiſon ſera doublée de celle de BC à EF, ou HT à MN.

Démonſtration.

Le polygone ABC au polygone DEF, eſt en raiſon doublée de celle de BC à EF (par la 20.) c'eſt-à-dire, comme BC à G: & le polygone HL, à MO a même raiſon que HT à P. Il y a donc même raiſon de ABC à DEF, que de HL à MO.

Que ſi les polygones ſemblables ſont proportionnels; les lignes étant

en

en raiſon ſoûdoublée, ſeront proportionnelles.

USAGE.

A,	B,	C,	D.
3,	2,	6,	4.
9,	4,	36,	16.
E,	F,	G,	H.

Cette Propoſition ſe peut facilement appliquer aux nombres. Si les nombres A, B, C, D, ſont proportionnels, leurs quarrez E, F, G, H, le ſeront auſſi: ce qui nous ſert dans l'Arithmetique, & encore plus dans l'Algebre.

PROPOSITION XXIII.

THEOREME.

Les parallelogrames équiangles, ſont en raiſon compoſée de celles de leurs côtez.

SI les parallelogrames L. & M ſont équiangles; la raiſon de L à M, ſera compoſée de celle de AB à DE, & de celle de BD à DF. Joignez les parallelogrames, de ſorte Pl. 2. Fig. 22.

que leurs côtez BD, DF ſoient ſur une ligne droite, auſſi bien que CD, DE; ce qui ſe peut, s'ils ſont équiangles. Achevez le parallelograme BDEH.

Démonſtration.

Le parallelograme L, a même raiſon au parallelograme BDEH, que la baſe AB à la baſe BH ou DE (par la 1.) le parallelograme BDEH a même raiſon au parallelograme DFGE, c'eſt-à-dire M, que la baſe BD à la baſe DF. Or la raiſon du parallelograme L, au parallelograme M, eſt composée de celle de L au parallelograme BDEH, & celle de BDEH, au parallelograme M. Donc la raiſon de L à M, eſt composée de celle de AB à DE, & de celle de BD à EG, ou DF.

PRO-

PROPOSITION XXIV.

THEOREME.

Dans toute ſorte de parallelograme, ceux par leſquels la diagonale paſſe, ſont ſemblables au grand.

QUe la diagonale du parallelograme AC, paſſe par les parallelogrames EF, GH: Je dis qu'ils ſont ſemblables au parallelograme AC. Pl. 2. Fig. 40.

Démonſtration.

Les parallelogrames AC, EF ont le même angle B: & parce que dans le Triangle BCD, IF eſt parallele à la baſe DC, les Triangles BFI, BCD ſont équiangles. Il y a donc (par la 4.) même raiſon de BC à CD, que de BF à FI: & par conſequent les côtez ſont en même raiſon. Pareillement, IH étant parallele à BC; il y aura même raiſon de DH à HI, que de

DC à BC; les angles sont aussi égaux, tous les côtez étant paralleles: Donc (par la défin. 1.) les parallelogrames EF, GH sont semblables au parallelograme AC.

USAGE.

Je me suis servi de cette Proposition dans la Proposition 10. *du dernier Livre de la Perspective, pour montrer qu'on traçoit une image semblable à l'original, par le parallelograme composé de quatre regles.*

PROPOSITION XXV.

PROBLEME.

Décrire un polygone semblable à un polygone donné, & égal à un autre.

Pl. 2. Fig. 41. & 42. SI vous voulez décrire un polygone égal au rectiligne A, & semblable au polygone B: Faites un parallelograme CE égal au polygone B, (par la 45. du 1.) & sur DE, fai-

faites un parallelograme EF égal au rectiligne A, (par la 45. du 1.) Cherchez ensuite une moyenne proportionnelle GH, entre CD & DF (par la 13.) Faites enfin sur GH, un polygone O, semblable à B (par la 18.) il sera égal au rectiligne A.

Démonstration.

Puisque CD, GH, DF sont continuellement proportionnelles; le rectiligne B décrit sur la premiere, sera au rectiligne O décrit sur la seconde, comme CD à DF, (par le Corol. 2. de la 20.) Or comme CD à DF, ainsi le parallelograme CE à EF, ou B à A, puisqu'ils sont égaux. Il y a donc même raison de B à O, que de B à A. Ainsi (par la 1. du 5.) A & O sont égaux.

USAGE.

Cette Proposition contient un changement de figure gardant toûjours l'égalité; ce qui est très-utile, principa-

lement dans la Geometrie pratique pour réduire les figures au quarré.

Ce Problême se trouve résolu beaucoup plus facilement & indépendamment de la 45. Prop. du L. 1. dans l'Euclide de Monsieur Ozanam.

PROPOSITION XXVI.

THEOREME.

Si dans un parallelograme, on en décrit un plus petit, qui lui soit semblable, & qu'il y ait un angle commun à tous les deux; la diagonale du grand rencontrera l'angle du petit.

Pl. 2. Fig. 43. SI dans le parallelograme AC, on en décrit un autre plus petit DG, qui lui soit semblable, & que l'angle D soit commun : La diagonale DB, passera par le point G. Car si elle n'y passoit pas, mais qu'elle passât par I, ainsi que fait la ligne BID, tirez la ligne IE, parallele à HD.

Dé-

Démonstration.

Le parallelograme DI, eſt ſemblable au parallelograme AC (par la 24.) Or on ſuppoſe que le parallelélograme DG, lui eſt auſſi ſemblable : donc les parallelogrames DI, DG feroient ſemblables ; ce qui eſt impoſſible : autrement il y auroit même raiſon de HI à IE, ou FG, que de HG à GF : & (par la 1. du 5.) les lignes HI, HG feroient égales.

Les Propoſitions vingt-ſept, vint-huit, & vingt-neuf ſont inutiles.

PROPOSITION XXX.

THEOREME.

Couper une ligne ſelon l'extrême, & moyenne raiſon.

$\overline{ACB}$ ON propoſe la ligne AB, à diviſer ſelon l'extrême, & moyenne raiſon ; c'eſt-à-dire, de ſorte qu'il y ait même raiſon de AB à Pl. 2. Fig. 44.

AC, que de AC à CB. Divisez la ligne AB (par la 11. du 2.) de sorte que le rectangle compris sous AB, CB, soit égal au quarré de AC.

Démonstration.

Puisque le rectangle sous AB, BC, est égal au quarré de AC, il y aura même raison de AB à AC, que de AC à BC (par la 17.)

USAGE.

Cette Proposition est nécessaire au treiziéme Livre d'Euclide, pour trouver le côté des cinq corps réguliers. Le Frere Lucas de S. Sepulchre a composé un Livre des proprietez d'une ligne coupée selon l'extrême & moyenne raison.

PRO-

PROPOSITION XXXI.

THEOREME.

Un polygone décrit sur la base d'un Triangle rectangle, est égal aux deux polygones semblables, décrits sur les côtez du même Triangle.

SI le Triangle ABC a un angle droit BAC; le polygone D, décrit sur la base EC, est égal aux polygones semblables F & E, décrits sur les côtez AB, AC. Pl. 2. Fig. 45.

Démonstration.

Les polygones D, E, F, sont entr'eux en raison doublée de celle de leurs côtez homologues BC, AB, AC (par la 20.) Si on décrivoit des quarrez sur ces mêmes côtez, ils seroient aussi entr'eux en raison doublée de leurs côtez. Or (par la 47. du 1.) le quarré de BC seroit égal aux quarrez de AC, AB: Donc le polygone D décrit ſur BC, eſt égal aux polygones ſemblables E & F, décrits ſur AB, AC.

USAGE.

On ſe ſert de cette Propoſition pour aggrandir ou diminuer toutes ſortes de figures: car elle eſt plus univerſelle que la 47. du 1. laquelle neanmoins eſt ſi utile, qu'il ſemble que preſque toute la Geometrie ſoit établie ſur ce principe.

La 32. Propoſition eſt inutile.

PROPOSITION XXXIII.

THEOREME

Dans les Cercles égaux, les angles tant du centre que de la circonference, comme auſſi les ſecteurs, ſont en même raiſon que les arcs, qui leur ſervent de baſe.

Pl. 2. Fig. 46. & 47. SI les Cercles ANC, DOF ſont égaux, il y aura même raiſon de l'angle ABC à l'angle DEF, que de l'arc AC à l'arc DF. Que AG, GH, HC

HC ſoient des arcs égaux, & par conſequent des parties aliquotes de l'arc AC; & qu'on diviſe l'arc DF, en autant de parties égales à AG, qu'on y en pourra rencontrer: & qu'on tire les lignes EI, EK, & les autres.

Démonſtration.

Tous les angles ABG, GBH, HBC, DEI, IEK, & les autres ſont égaux (par la 27. du 3.) ainſi AG, partie aliquote de l'arc AC, ſe rencontre dans l'arc DF, autant de fois que l'angle ABG, partie aliquote de l'angle ABC, ſe rencontre dans l'angle DEF: il y a donc même raiſon de l'arc AC à l'arc DF, que de l'angle ABC à l'angle DEF.

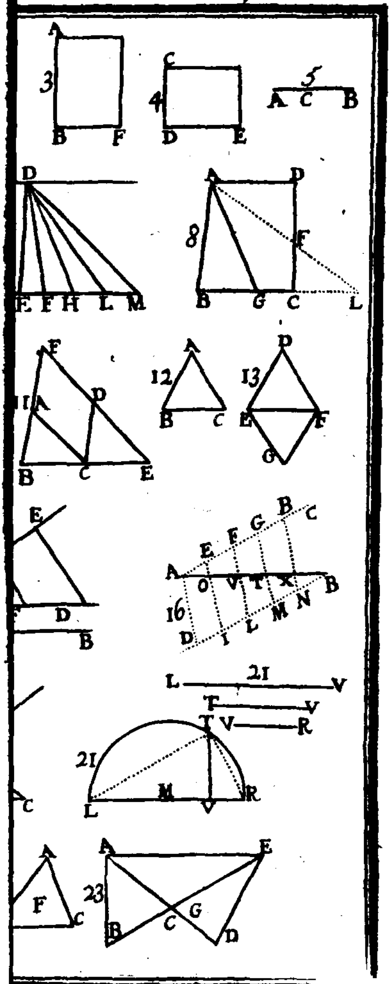
Et parce que les angles N & O ſont les moitiez des angles ABC, DEF, ils ſeront en même raiſon qu'eux: il y aura donc même raiſon de l'angle N à l'angle O, que de l'arc AC à l'arc DF.

Il en eſt de même des ſecteurs: car

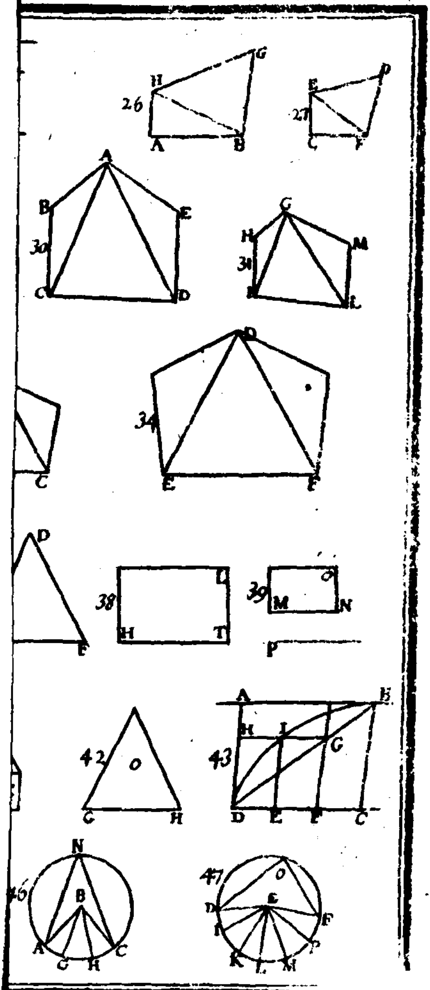
ſi

si on tiroit des lignes AG, GH, HC, DI, IK, & les autres; elles seroient égales (par la 28. du 3.) & on diviseroit chaque petit secteur en un Triangle, & un segment. Les Triangles seroient égaux (par la 8. du 1.) & les petits segments seroient aussi égaux (par la 24. du 3.) Donc tous les petits secteurs seroient égaux: & ainsi autant que l'arc DF contient de parties aliquotes de l'arc AC, autant le secteur DFK, contiendra de parties aliquotes du secteur ABC. Il y a donc même raison de l'arc à l'arc, que du secteur au secteur.

L Ixieme Planche premiere.



cieme Planche deuxieme.



LIVRE ONZIÈME DES ELEMENS D'EUCLIDE.

Ce Livre renferme les premiers principes des corps solides, de sorte qu'il est impossible de rien établir touchant la troisiéme espece de la quantité sans sçavoir ce qu'il nous enseigne. C'est ce qui le rend très-nécessaire à la plûpart des traitez Mathematiques. Premierement, les Spheriques de Theodose le supposent entierement : la Trigonometrie spherique, la troisiéme partie de la Geometrie pratique, plusieurs Propositions de la Statique & de la Geographie, sont établies sur les principes des corps solides. La Gnomonique, les sections Coniques,

niques, & le traité de la Coupe des pierres, ne sont difficiles que parce que l'on est souvent obligé de representer sur le papier, les figures qui ont du relief, & qui sont comprises par plusieurs surfaces. Je laisse le septiéme, le huitiéme, le neuviéme, & le dixiéme Livre des Elemens d'Euclide, parce qu'ils sont inutiles à presque toutes les parties des Mathematiques. Je me suis souvent étonné qu'on les ait mis au nombre des Elemens, puisqu'il est évident qu'Euclide ne les a composez que pour établir la doctrine des incommensurables, laquelle n'étant qu'une vaine curiosité, ne devoit pas être placée entre les Livres élementaires, mais devoit former un traité particulier. On peut dire le même du Livre treiziéme, & des autres: ainsi je crois qu'on peut apprendre presque toutes les Mathematiques, pourvû qu'on sçache ces huit Livres des Elemens d'Euclide.

LES

LES DEFINITIONS.

1. LE corps solide est une quantité qui est longue, large & profonde ou épaisse. *Comme la figure LT: sa longueur est NX, sa largeur NO, son épaisseur LN.* Pl. 1. Fig. 1.

2. Les extrêmitez ou bords d'un corps solide, sont les surfaces.

3. Une ligne est perpendiculaire à un plan, quand elle est perpendiculaire à toutes les lignes qu'elle rencontre dans ce plan. *Comme la ligne AB, sera perpendiculaire au plan CD, si elle est perpendiculaire aux lignes CD, FE; lesquelles étant tirées dans le plan CD, passent par le point B, de sorte que les angles ABC, ABD, ABE, ABF soient droits.* Pl. 1. Fig. 2.

4. Un plan est perpendiculaire à un autre, quand la ligne perpendiculaire à la commune section des plans, Pl. 1. Fig. 3.

plans, & tirée dans l'un, est aussi perpendiculaire à l'autre plan.

Nous appellons commune section des plans, une ligne qui est dans les deux plans: comme la ligne AB, qui est aussi bien dans le plan AC, que dans le plan AD. Si donc la ligne DE, tirée dans le plan AD, & perpendiculaire à AB, est aussi perpendiculaire au plan AC: le plan AD sera perpendiculaire au plan AC.

Pl. 1. Fig. 4. 5. Si la ligne AB n'est pas perpendiculaire au plan CD; & si l'on tire du point A, la ligne AE perpendiculaire au plan CD, & ensuite la ligne BE: l'angle ABE, est celui de l'inclinaison de la ligne AB, au plan CD, c'est-à-dire, de la pente de la ligne AB sur le plan CD.

Pl. 1. Fig. 5. 6. L'inclinaison d'un plan à l'autre, est l'angle aigu compris par les deux perpendiculaires à la commune section, tirées dans chaque plan.

Com-

Comme l'inclinaiſon du plan AB au plan AD, n'eſt autre que l'angle BCD compris par les lignes BC, CD, tirées dans les deux plans, perpendiculairement à la commune ſection AE.

7. Les plans ſeront inclinez de même façon, ſi les angles d'inclinaiſon ſont égaux.

8. Les plans paralleles étant continuez autant qu'on voudra, ſont toûjours en même diſtance l'un de l'autre.

9. Les figures ſolides ſemblables, ſont compriſes ou terminées par autant de plans ſemblables; comme deux cubes. *Cette définition ne convient pas aux figures qui ont des ſurfaces courbes, comme la Sphere, le Cylindre, le Cone.*

10. Les figures ſolides, égales & ſemblables, ſont compriſes ou terminées par autant de plans ſemblables & égaux. *De ſorte que, ſi on*

s'ima-

s'imagine qu'elles se penetrent l'une l'autre; elles ne se surpasseront pas, ayant les angles & les côtez égaux.

11. Un angle solide est le concours, ou l'inclination de plusieurs lignes, qui sont dans divers plans. *Comme le concours des lignes AB, AC, AD, qui sont dans divers plans.*

Pl. 1. Fig. 6. 12. La pyramide est une figure solide, terminée au moins par trois Triangles, qui ont leurs bases dans le même plan. *Comme la figure ABCD.*

Pl. 1. Fig. 7. 13. Le prisme est une figure solide, qui a deux plans paralleles, semblables & égaux; & les autres parallelogrames. *Comme la figure AB. Ses plans opposez peuvent être polygones.*

14. La sphere est une figure solide terminée par une seule surface, de laquelle tirant plusieurs lignes, à un point pris au milieu de la figure,

gure, elles seront toutes égales. *Quelques autres définissent la Sphere par le mouvement d'un demi Cercle, qui roule autour de son diametre immobile.*

15. L'essieu ou l'axe de la sphere, est cette ligne immobile autour de laquelle le demi Cercle roule.

16. Le centre de la sphere est le même que celui du demi Cercle qui roule.

17. Le diametre de la sphere, est quelque ligne que ce soit, qui passe par le centre de la sphere, & aboutit à sa surface.

18. Si une ligne immobile dans un de ses points, pris hors d'un plan d'un Cercle, parcourt la circonference; elle décrit un cone. *Comme si la ligne AB étant immobile au point A, parcourt la circonference du Cercle BED: elle décrira le cone ABED. Le point A sera son sommet, & le cercle BED sa base.* Pl. 1. Fig. 8.

19.

19. L'essieu du cone, est la ligne tirée de son sommet, au centre de la base. *Comme AC.*

Pl. 1. Fig. 9. 20. Si une ligne parcourt de telle sorte la circonference de deux Cercles paralleles, qu'elle soit toûjours parallele à celle qui est tirée d'un centre à l'autre, c'est-à-dire, à l'essieu; elle décrira un cylindre.

21. Les Cones & les Cylindres sont droits, quand l'essieu est perpendiculaire au plan de la base: & les Cones droits sont semblables quand leur essieu, & les diametres des bases sont en même raison Il faut ajoûter aux inclinez, pour être semblables, que leurs essieux soient également inclinez au plan de leur base.

22. Un Parallelipipede est un solide terminé par six parallelogrames, dont les opposez sont parallels.

PRO-

PROPOSITION I.

THEOREME.

Une ligne droite ne peut avoir une de ses parties dedans un plan, & l'autre dehors.

SI la ligne AB est dans le plan AD, étant continuée, elle n'en sortira pas; mais toutes ses parties seront dans le même plan. Car s'il se peut faire que BC soit partie de la ligne AB continuée. Tirez dans le plan CD, la ligne BD perpendiculaire à AB, tirez aussi dans le même plan BE perpendiculaire à BD. Pl. 1. Fig. 10.

Démonstration.

Les angles ABD, DBE sont deux angles droits: donc (par la 14. du 1.) AB, BE ne font qu'une même ligne: & par consequent BC, n'est pas partie de la ligne AB continuée:

au-

autrement deux lignes droites CB, EB, auroient la même partie AB; ce que nous avons rejetté dans la 13. Maxime du premier Livre.

USAGE.

Nous établissons sur cette Proposition un principe de Gnomonique, qui est que l'ombre d'un style ne tombe pas hors du plan d'un grand Cercle, dans lequel est le Soleil. Puisque le bout du style est pris pour le centre du Ciel; & par consequent pour le centre de tous les grands Cercles: l'ombre étant toûjours en ligne droite du rayon, tiré depuis le Soleil jusques au corps opaque; ce rayon étant dans ce grand Cercle, il faut que l'ombre y soit aussi. Voyez la Gnomonique de Monsieur Ozanam.

PRO-

PROPOSITION II.

THEOREME.

Les lignes qui ſe coupent, ſont dans le même plan, auſſi-bien que toutes les parties d'un Triangle.

SI les deux lignes BE, CD ſe coupent au point A; & ſi on forme un Triangle, tirant la baſe BC; je dis que toutes les parties du Triangle ABC, ſont dans le même plan, & que les lignes BE, CD, y ſont auſſi. Pl. I. Fig. II.

Démonſtration.

On ne peut pas dire qu'aucune partie du Triangle ABC ſoit dans un plan, & que l'autre partie en ſoit dehors, qu'on ne diſe qu'une partie d'une ligne eſt dans un plan, que l'autre partie de la même ligne n'y eſt pas; ce qui eſt contraire à la premiere Propoſition: & puiſque les côtez du Triangle sont dans le même plan dans lequel est le Triangle; les lignes BE, CD seront dans le même plan.

USAGE.

Cette Proposition détermine suffisamment un plan par deux lignes droites qui se rencontrent, ou par un Triangle. Je m'en suis servi dans l'optique, pour prouver que les lignes paralleles objectives, qui rencontrent le tableau, doivent être representées par des lignes qui concourent dans un point.

PROPOSITION III.

THEOREME.

La commune section des deux plans est une ligne droite.

Pl. 1. Fig. 12. SI les plans AB, CD se coupent, leur commune section EF, sera une ligne droite. Car si elle ne l'étoit

toit pas, prenez deux points communs aux deux plans qui ſoient E & F ; & tirez une ligne droite du point E au point F, dans le plan AB, & que ce ſoit EHF. Tirez auſſi dans le plan CD, une ligne droite EF : ſi elle n'eſt pas la même que la précedente, que ce ſoit EGF.

Démonſtration.

Ces lignes tirées dans les deux plans, ſont deux lignes differentes, & elles renferment un eſpace ; ce qui eſt contraire à la douziéme Maxime ; donc elles ne feront qu'une même ligne droite, laquelle étant dans les deux plans, ſera leur commune ſection.

USAGE.

Cette Propoſition eſt fondamentale. Nous la ſuppoſons dans la Gnomonique, quand nous repreſentons dans nos horloges ſolaires, les Cercles des heu-

res, en marquant par une ligne droite la commune ſection de leur plan, & de celui de la muraille. On la ſuppoſe auſſi dans les autres; de ſorte que même on ne la cite pas.

PROPOSITION IV.

THEOREME.

Si une ligne eſt perpendiculaire à deux autres qui ſe coupent, elle le ſera auſſi au plan des mêmes lignes.

Pl. 1. Fig. 13. SI la ligne AB eſt perpendiculaire aux lignes CD, EF, qui ſe coupent au point B; de ſorte que les angles ABC, ABD, ABE, ABF ſoient droits; elle ſera perpendiculaire au plan des lignes CD, EF; c'eſt-à-dire, qu'elle ſera perpendiculaire à toutes les lignes qu'on tirera dans le même plan, par le point B: comme à la ligne GBH. Qu'on coupe les lignes égales, BC, BD, BE, BE, BF; & qu'on tire les lignes EC, DF, AC, AD, AE, AF, AG & AH.

Démonstration.

Les quatre Triangles ABC, ABD, ABE, ABF, ont les angles droits au point B; & les côtez BC, BD, BE, BF égaux avec le côté AB, qui leur eſt commun. Donc les baſes AC, AD, AE, AF ſont égales (par la 4. du 1.)

2. Les Triangles EBC, DBF seront égaux en tout ſens, ayant les côtez BC, BD, BE, BF égaux, & les angles CBE, DBF oppoſez au ſommet étant égaux : ainſi les angles BCE, BDF, BEC, BFD seront égaux (par la 4. du 1.) & les baſes EC, DF égales.

3. Les Triangles GBC, DBH, ayant les angles oppoſez CBG, DBH égaux, comme auſſi les angles DBH, BCG, & les côtez BC, BD : ils

auront (par la 26. du 1.) les côtez BG, BH; CG, DH. égaux.

4. Les Triangles ACE, AFD ayant les côtez AC, AD, AE, AF égaux, & les bases EC, DF égales, ils auront (par la 8. du 1.) les angles ADF, ACE égaux.

5. Les Triangles ACG, ADH ont les côtez AC, AD, CG, DH égaux; avec les angles ADH, ACG: ils auront donc les bases AG, AH égales.

Enfin les Triangles ABH, ABG ont tous les côtez égaux: donc (par la 8. du 1.) les angles ABG, ABH seront égaux, & la ligne AB perpendiculaire à GH. Ainsi la ligne AB sera perpendiculaire à quelque ligne qu'on tire par le point B, dans le plan des lignes CD, EF; ce que j'appelle être perpendiculaire au plan.

USAGE.

Cette Proposition revient fort souvent dans le premier Livre de Theodose : par exemple, pour montrer que l'essieu ou axe du monde est perpendiculaire au plan de l'équinoxial. Pareillement dans la Gnomonique, nous démontrons par cette Proposition, que la ligne équinoxiale est perpendiculaire à la meridienne, dans les horloges horizontaux. Elle n'est pas moins utile dans les autres traitez; comme dans celui des Astrolabes, ou dans celui de la Coupe des pierres.

PROPOSITION V.

THEOREME.

Si une ligne est perpendiculaire à trois autres qui se coupent dans le même point : elles seront toutes trois dans un même plan.

SI la ligne AB est perpendiculaire aux trois lignes BC, BD, Pl. 1. Fig. 14.

 BE,

BE, qui se coupent dans le même point B, les lignes BC, BD, BE, sont dans le même plan. Que le plan AE soit celui des lignes AB, BE; & que CF soit celui des lignes BC, BD. Si BE étoit de la commune section de ces deux plans, BE seroit dans le plan des lignes BC, BD, comme nous le prétendons: si EB n'est pas la commune section, que ce soit BG.

Démonstration.

AB est perpendiculaire aux lignes BC, BD: elle est donc perpendiculaire à leur plan CF (par la 4.) & (par la 3. défin.) AB sera perpendiculaire à BG. Or on suppose qu'elle est perpendiculaire à BE: donc les angles ABE, ABG seroient droits & égaux, & néanmoins l'une est partie de l'autre. Ainsi les deux plans ne peuvent avoir autre commune section que BE: elle est donc dans le plan CF. PRO-

PROPOSITION VI.

THEOREME.

Les lignes qui ſont perpendiculaires au même plan, ſont paralleles.

SI les lignes AB, CD ſont perpendiculaires au même plan EF; elles ſeront paralleles. Il eſt évident que les angles internes ABD, BDC ſont droits: mais cela ne ſuffit pas; car il faut encore prouver que les lignes AB, CD ſont dans le même plan. Tirez DG, perpendiculaire à BD, & égale à AB: tirez auſſi les lignes BG, AG, AD. Pl. 1. Fig. 15.

Démonſtration.

Les Triangles ABD, BDG, ont les côtez AB, DG égaux; BD eſt commun: les angles ABD, BDG ſont droits. Donc les baſes AD, BG ſont égales (par la 4. du 1.) De plus, les Triangles ABG, ADG, ont tous les côtez égaux: donc les angles ABG, ADG sont égaux: & ABG étant droit, puisque AB est perpendiculaire au plan, l'angle ADG est droit. Donc la ligne DG est perpendiculaire aux trois lignes CD, DA, BD; lesquelles par consequent sont dans le même plan (par la 5.) Or la ligne AB est aussi dans le plan des lignes AD, DC (par la 2.) donc AB, CD sont dans le même plan.

Corollaire. Deux lignes paralleles sont dans le même plan.

USAGE.

Nous démontrons par cette Proposition, que dans les Horloges solaires, les lignes des heures sont paralleles entr'elles, dans tous les plans qui sont paralleles à l'essieu du monde; comme dans les polaires, meridiens & autres décrits sur des plans paralleles à un Horizon de la Sphere droite.

PRO-

PROPOSITION VII.

THEOREME.

La ligne qui est tirée d'une parallele à l'autre est dans leur même plan.

LA ligne CD étant tirée du point B de la ligne AB, au point C de sa parallele CD. Je dis que la ligne CB, est dans le plan des lignes AB, CD. Pl. 1. Fig. 16.

Démonstration.

Les paralleles AB, * CD sont dans le même plan, dans lequel si vous tirez une ligne droite du point C, au point B, elle sera la même que CB: autrement deux lignes droites renfermeroient un espace contre la douziéme Maxime.

PROPOSITION VIII.

THEOREME.

Si de deux lignes paralleles, l'une est perpendiculaire à un plan, l'autre le sera aussi.

Pl. 7. Fig. 16. SI de deux lignes paralleles AB, CD; l'une AB est perpendiculaire au plan EF: CD le sera aussi. Tirez la ligne DB; puisque ABD est un angle droit, & que les lignes AB, CD sont supposées paralleles; l'angle CDB sera droit (par la 30. du 1.) Donc si je montre que l'angle CDG est droit; j'aurai prouvé (par la 4) que CD, est perpendiculaire au plan EF. Faites l'angle droit BDG, & prenez DG égale à AB: tirez ensuite les lignes BG, AG.

Démonstration.

Les Triangles ABD, BDG ont les côtez AB, DG égaux: le côté BD leur

leur eſt commun, les angles ABD, BDG ſont droits : Donc (par la 4. du 1.) les baſes AD, BG ſont égales. Les Triangles ADG, ABG, ont tous les côtez égaux: ainſi (par la 8. du 1.) les angles ADG, ABG ſont égaux. Ce dernier eſt droit, puiſque la ligne AB eſt ſuppoſée perpendiculaire au plan EF: donc l'angle ADG eſt droit; & la ligne DG étant perpendiculaire aux lignes DB, DA, ſera perpendiculaire au plan des lignes AD, BD, qui eſt le même dans lequel ſont les paralleles AB, CD. Ainſi l'angle GDC eſt un angle droit (par la défin. 3.) & CDB étant auſſi droit, CD ſera perpendiculaire au plan EF.

PRO-

PROPOSITION IX.

THEOREME.

Les lignes paralleles à une troisiéme, sont paralleles entr'elles.

Pl. 1. Fig. 17. SI les lignes AB, CD sont paralleles à la ligne EF; elles seront paralleles entr'elles, quoiqu'elles ne soient pas toutes trois dans le même plan. Tirez dans le plan des lignes AB, EF, la ligne HG perpendiculaire à AB: elle le sera aussi à EF: (par la 29. du 1.) Pareillement tirez dans le plan des lignes EF, CD, la ligne HI perpendiculaire à EF, CD.

Démonstration.

La ligne EH étant perpendiculaire aux lignes HG, HI; l'est aussi au plan des lignes HG, HI (par la 4.) donc (par la 8.) les lignes AG, CI le sont aussi, & (par la 6) elles seront paralleles.

USA-

USAGE.

Cette Proposition sert souvent dans la Perspective, pour déterminer dans un tableau l'image des lignes paralleles; & dans la section des Pierres, où l'on trouve que les deux côtez des paneaux sont paralleles entr'eux, parce qu'ils le sont à quelque ligne qui est dans un plan different. Dans la Gnomonique, nous prouvons que les Cercles verticaux doivent être marquez dans les murailles par des lignes à plomb, parce que les lignes qui sont leurs communes sections avec la muraille, sont paralleles à la ligne tirée du zenith au nadir.

PROPOSITION X.

THEOREME.

Si deux lignes qui concourent sont paralleles à deux autres, de different plan, elles formeront un angle égal.

SI les lignes AB, CD; AE, CF sont paralleles, quoiqu'elles ne soient pas Pl. I. Fig. 18.

pas toutes quatre dans le même plan, les angles BAE, DCF seront égaux: Que les lignes AB, CD; AE, CF soient égales: & tirez les lignes BE, DF, AC, BD, EF.

Démonstration.

Les lignes AB, CD sont supposées paralleles & égales: donc (par la 33. du 1.) les lignes AC, BD sont paralleles & égales; comme aussi AC, EF; & (par la précedente) BD, EF seront paralleles & égales: & (par la 33. du 1.) BE, DF seront aussi paralleles & égales. Ainsi les Triangles BAE, DCF ont tous les côtez égaux: (& par la 8.) les angles BAE, DCF seront égaux.

Corollaire. On pourroit faire quelques Propositions semblables, qui ne seroient pas inutiles, comme celle-ci. Si on tire dans un plan parallele, la ligne CD, parallele à AB, & si les angles BAE, DCF sont égaux, les lignes AE, CF sont paralleles.

USA-

USAGE.

Nous démontrons par cette Proposition, que les angles que font les plans des Cercles horaires dans un plan parallele à l'Equateur, sont égaux à ceux qu'ils font dans le plan de l'Equateur.

PROPOSITION XI.

PROBLEME.

Tirer une perpendiculaire à un plan d'un point donné hors de ce plan.

SI vous voulez du point C, tirer une perpendiculaire au plan AB : tirez la ligne EF à discretion, & CF qui lui soit perpendiculaire (par la 12. du 1.) Tirez ensuite (par la 11. du 1.) dans le plan AB, la ligne FG perpendiculaire à ED, & CG perpendiculaire à FG. Je démontre que CG sera perpendiculaire au plan AB. Tirez GH parallele à FE. Pl. 1. Fig. 19.

Démonstration.

La ligne EF étant perpendiculaire aux

aux lignes CF, FG, sera perpendiculaire au plan CFG (par la 4.) & HG étant parallele à EF, sera aussi perpendiculaire au même plan (par la 8.) Et puisque CG est perpendiculaire aux lignes GF, GH, elle sera perpendiculaire au plan AB (par la 4.)

PROPOSITION XII.

PROBLEME.

Tirer une perpendiculaire à un plan, par un point du même plan.

Pl. 1. Fig. 20. POur tirer par le point C, une perpendiculaire au plan AB: tirez du point E pris à discretion hors du plan, ED perpendiculaire au même plan (par la 11.) Tirez aussi (par la 30. du 1.) CF parallele à DE; CF sera perpendiculaire au plan AB (par la 8.)

PRO-

PROPOSITION XIII.

THEOREME.

On ne peut pas tirer par le même point, deux perpendiculaires à un plan.

SI les deux lignes CD, CE tirées par le même point C étoient perpendiculaires au plan AB, & que CF fût la commune ſection du plan de ces lignes, avec le plan AB: les angles ECF, DCF ſeroient droits; ce qui eſt impoſſible, l'un étant partie de l'autre. Pl. 1. Fig. 21.

J'ajoûte qu'on ne peut pas tirer du même point D, deux perpendiculaires DC, DF, au même plan AB: car ayant tiré la ligne CF, on auroit deux angles droits DCF, DFC dans un Triangle (contre la 32. du 1.)

USAGE.

Cette Propoſition a été néceſſaire pour montrer que la ligne perpendiculaire à un plan, étoit aſſez déterminée, puiſ-

qu'on

qu'on n'en peut tirer qu'une seule pour un point.

PROPOSITION XIV.

THEOREME.

Les plans sont paralleles, auxquels la même ligne est perpendiculaire.

Pl. 1. Fig. 22. SI la ligne AB est perpendiculaire aux plans AC, BD, ils seront paralleles; c'est-à-dire, qu'ils seront par tout également éloignez l'un de l'autre Tirez la ligne DC parallele à AB (par la 31. du 1.) & joignez les lignes BD, AC.

Démonstration.

On suppose que AB est perpendiculaire aux plans AC, BD: donc la ligne CD qui lui est parallele, leur sera aussi perpendiculaire (par la 8.) ainsi les angles B & D, A & C seront droits, & (par la 29. du 1.) les lignes AC, BD seront paralleles. La figure

gure ABCD ſera donc parallelograme. Or (par la 34. du 1.) les lignes AB, CD ſont égales : c'eſt-à-dire, que les plans dans les points A & C, ſont également éloignez : ainſi pouvant tirer la ligne CD, par quelque point que ce ſoit, les plans AB, CD ſeront par tout également éloignez l'un de l'autre.

USAGE.

Theodoſe démontre que les Cercles qui ont les mêmes poles, comme l'équinoxial, & les tropiques ſont paralleles ; parce que l'eſſieu du monde eſt perpendiculaire à leur plan.

PROPOSITION XV.

THEOREME

Si les deux lignes qui ſe rencontrent au même point, ſont paralleles à deux lignes d'un autre plan ; les plans de ces lignes ſeront paralleles.

SI les lignes AB, AC ſont paralleles aux lignes DE, DF qui ſont dans un Pl. 1. Fig. 23.

un autre plan ; les plans BC, FE sont paralleles. Tirez AI perpendiculaire au plan BC (par la 11.) & GI, IH paralleles à FD, DE ; elles le seront aussi aux lignes AB, AC (par la 9.)

Démonstration.

Les lignes AB, GI sont paralleles ; & l'angle IAB est droit, puisque IH est perpendiculaire au plan BC : donc (par la 29. du 1.) l'angle AIG est droit, AIH est aussi droit : Donc (par la 4.) la ligne AI est perpendiculaire au plan GH ; & l'étant aussi au plan BC, les plans BC, FE seront paralleles (par la 14.)

PROPOSITION XVI.

THEOREME.

Si un plan en coupe deux qui soient paralleles ; ses communes sections avec eux seront paralleles.

Pl. 2. Fig. 24. SI le plan AB en coupe deux autres paralleles AC, BD : Je démonmontre que les communes ſections AF, BE ſeront paralleles. Car ſi elles ne l'étoient pas, elles ſe rencontreroient étant continuées, par exemple au point G.

Démonſtration.

Les lignes AF, BE ſont dans les plans AC, BD, & n'en ſortent pas (par la 1.) donc ſi elles ſe rencontrent en G, les plans ſe rencontreront auſſi, & par conſequent ils ne ſeront pas paralleles, contre ce que nous avons ſuppoſé.

USAGE.

Nous démontrons par cette Propoſition, dans le traité des Sections coniques, & cylindriques, que le Cone, ou le Cylindre étant coupé par un plan parallele à ſa baſe, les ſections ſont des Cercles; nous décrivons les Aſtrolabes: nous prouvons dans la Gnomonique, que les angles que font les Cercles horaires, avec un plan parallele

à

à un grand Cercle, ſont égaux à ceux qu'ils forment dans le même Cercle: nous démontrons dans la Perſpective que les images des lignes objectives perpendiculaires au tableau, concourent au point de vûë.

PROPOSITION XVII.

THEOREME.

Deux lignes ſont diviſées proportionnellement par des plans paralleles.

Pl. 2. Fig. 25. QUe les lignes AB, CD ſoient diviſées par des plans paralleles. Je dis que AE, EB, & CF à FD, ſont en même raiſon. Tirez la ligne AD, qui rencontre le plan EF, au point G: tirez auſſi AC, BD, FG, EG.

Démonſtration.

Le plan du Triangle ABD, coupe les trois plans: donc (par la 16.) les

les sections BD, EG seront paralleles : & (par la 2. du 6.) il y aura même raison de AE à EB, que de AG à GD. Pareillement le plan du Triangle ADC, coupe les plans EF, AC : donc les sections AC, GF, sont paralleles, & il y aura même raison de FC à FD, que de AG à GD, c'est-à-dire, que de AE à EB.

PROPOSITION XVIII.

THEOREME.

Si une ligne est perpendiculaire à un plan; tous les plans dans lesquels elle se trouvera, seront perpendiculaires au même plan.

SI la ligne AB est perpendiculaire au plan ED; tous les plans dans lesquels elle se trouvera, seront perpendiculaires au plan ED. Que AB soit dans le plan AE, qui ait pour commune section avec le plan ED, Pl. 2. Fig. 26.

la ligne BE à laquelle on tire la perpendiculaire FI.

Démonstration.

Les angles ABI, BIF sont droits: donc les lignes AB, FI sont paralleles: & (par la 8.) FI sera perpendiculaire au plan ED. Ainsi le plan AE, sera perpendiculaire au plan ED (par la défin. 5.)

USAGE.

La premiere Proposition de la Gnomonique, & qui peut passer pour fondamentale, est établie sur cette Proposition: de laquelle on se sert aussi fort souvent dans la Trigonometrie spherique, dans la Perspective, & generalement dans tous les traitez qui sont obligez de considerer plusieurs plans.

PRO-

PROPOSITION XIX.

THEOREME.

Si deux plans qui se coupent sont perpendiculaires à un autre, leur commune section lui sera aussi perpendiculaire.

SI les plans AB, ED qui se coupent, sont perpendiculaires au plan IK; leur commune section EF est perpendiculaire au plan IK. Pl. 2. Fig. 27.

Démonstration.

Si EF n'est pas perpendiculaire au plan IK; qu'on tire dans le plan AB, la ligne GF, perpendiculaire à la commune section BF, & puisque le plan AB est perpendiculaire au plan IK; la ligne GF, sera perpendiculaire au même plan. Qu'on tire aussi FH perpendiculaire au plan IK. Nous aurions ainsi deux perpendiculaires au même plan, tirées par le même point F, (contre la 13. Prop.) Il faut donc conclure que EF est perpendiculaire au plan IK.

USAGE.

Nous démontrons par cette Proposition, que le Cercle qui passe par les poles du monde & par le zenith, est le meridien, & coupe en deux également tous les arcs diurnes; & que les astres employent autant de temps, depuis leur lever jusqu'à ce Cercle, qu'ils en employent depuis qu'ils y sont arrivez, jusqu'à leur coucher.

PROPOSITION XX.

THEOREME.

Si trois angles plans composent un angle solide, les deux doivent être plus grands que le troisiéme.

Pl. 2. Fig. 28.

SI les angles BAC, BAD, CAD composent l'angle solide A: & si BAC

BAC eſt le plus grand de tous ; les deux autres BAD, CAD pris enſemble, ſont plus grands que BAC. Que l'angle CAE ſoit égal à CAD; & que les lignes AD, AE ſoient égales. Tirez les lignes CEB, CD, BD.

Démonſtration.

Les Triangles CAE, CAD, ont les côtez AD, AE égaux; CA, commun; & les angles CAD, CAE égaux, donc (par la 4. du 1.) les baſes CD, CE ſont égales. Or les côtez CD, DB ſont plus grands que le ſeul BC, (par la 20. du 1.) donc ayant ôté les lignes égales CD, CE; la ligne BD ſera plus grande que BE. De plus, les Triangles BAE, BAD, ont les côtez AD, AE égaux; AB commun; & la baſe BD, plus grande que EB: Donc (par la 25. du 1.) l'angle DAB eſt plus grand que l'angle BAE: &

ajoûtant les angles CAD, CAE; les angles BAD, CAD feront plus grands que BAE, CAE, c'eft-à-dire que CAB.

PROPOSITION XXI.

Theoreme.

Tous les angles plans qui compofent un angle folide, font moindres que quatre droits.

Pl. 2. Fig. 29. SI les angles plans BAC, CAD, BAD compofent l'angle folide A; ils feront moindres que quatre droits. Tirez les lignes BC, CD, BD; & vous aurez une pyramide, qui a pour bafe le Triangle BCD.

Démonftration.

Il fe fait un angle folide au point B, duquel, les angles ABC, ABD font plus grands (par la préced.) que le feul CBD de la bafe. Pareillement ACB, ACD font plus grands que

que le seul BCD : & les angles ABC, ADB sont plus grands que le seul CDB. Or tous les angles de la base CBD, valent deux droits : donc les angles ABC, ABD, ACB, ACD, ADC, ADB sont plus grands que deux droits. Et parce que tous les angles des trois Triangles BAC, BAD, CAD valent six droits ; en ôtant plus de deux droits, resteront moins de quatre droits pour les angles qui se font au point A. Si l'angle solide A étoit composé de plus de trois angles plans ; de sorte que la base de la pyramide fût polygone ; on pourroit la partager en Triangles : & ayant fait la supposition, on trouveroit toûjours que les angles plans qui forment l'angle solide, sont moindres que quatre droits.

USAGE.

Ces deux Propositions servent pour déterminer, quand de plusieurs angles *plans, on peut faire un angle ſolide; ce qui eſt ſouvent néceſſaire dans le traité de la Coupe des Pierres, & dans les Propoſitions ſuivantes.*

Les Propoſitions vingt-deux & vingt-trois ſont inutiles.

PROPOSITION XXIV.

THEOREME.

Si un corps ſolide eſt terminé par des plans paralleles; les oppoſez ſeront des parallelogrames ſemblables & égaux.

Pl. 2. Fig. 30. SI le ſolide AB eſt terminé par des plans paralleles, les ſurfaces oppoſées ſeront des parallelogrames ſemblables & égaux.

Démonſtration.

Les plans paralleles AC, BE ſont coupez par le plan FE: donc les communes ſections AF, DE ſont paralleles (par la 16.) Pareillement

DF,

DE, AE: donc AD ſera un parallelograme. Je démontrerai de la même façon, que AG, FB, CG, & les autres, ſont dês parallelogrames. J'ajoûte que les parallelogrames opposez, par exemple, AG, BF, ſont ſemblables & égaux. Les lignes AE, EG ſont paralleles aux lignes FD, BD, & encore égales: donc les angles AEG, FDB ſont égaux (par la 15.) Je puis ainſi démontrer, que tous les côtez, & tous les angles des parallelogrames oppoſez, ſont égaux. Donc les parallelogrames ſont ſemblables & égaux.

PROPOSITION XXV.

THEOREME.

Si on divise un parallelepipede, par un plan parallele à un des siens; les deux corps solides, qui résulteront de cette division, seront en même raison que leurs bases.

Pl. 2. Fig. 31. SI le parallelepipede AB, est divisé par le plan CD, qui soit parallele aux plans opposez AF, BE: le solide AC à DB, sera en même raison que la base AI à la base DG. Qu'on s'imagine que la ligne AH, qui marque la hauteur de la figure, est divisée en autant de parties égales qu'on voudra, par exemple en dix mille, que nous pouvons prendre indivisiblement, c'est-à-dire, sans penser qu'on le peut soûdiviser. Qu'on s'imagine aussi autant de surfaces paralleles à la base AG, qu'il

Y

y a de parties dans la ligne AH : je n'en marque qu'une ſeule par toutes, qui ſera OS : de ſorte que le ſolide AB ſoit compoſé de toutes ces ſurfaces de même épaiſſeur, comme ſeroit une rame de papier compoſée de toutes ſes feüilles poſées l'une ſur l'autre. Il eſt évident que pour lors le ſolide AC ſera compoſé de dix mille ſurfaces égales à la baſe AI (par la préced.) & le ſolide DB, contiendra dix mille ſurfaces égales à la baſe DG.

Démonſtration.

Chaque ſurface du ſolide AC, a même raiſon à chaque ſurface du ſolide DB ; que la baſe AI, à la baſe DG ; puiſqu'elles ſont chacunes égales à leurs baſes : donc (par la 3. du 5.) toutes les ſurfaces du ſolide AC priſes enſemble, auront même raiſon à toutes les ſurfaces du ſolide DB, que la baſe AI, à la baſe

DG. Or toutes les ſurfaces du ſolide de AC, compoſent AC, qui n'a point d'autres parties que ces ſurfaces: & toutes les ſurfaces du ſolide de DB, ne ſont autre choſe que le ſolide DB : donc le ſolide AC au ſolide DB, a même raiſon que la baſe AI, à la baſe DG.

USAGE.

Cette façon de démontrer eſt de Cavalerius : je la trouve très-claire, pourvû qu'on s'en ſerve comme il faut, & que la ligne qui ſert de meſure aux épaiſſeurs des ſurfaces, ſoit priſe de même façon dans l'un & dans l'autre terme. Je m'en ſervirai encore ci-après, pour rendre plus faciles quelques démonſtrations trop embroüillées.

PRO-

PROPOSITION XXVI.

THEOREME.

Un parallelepipede se divise en deux également, par le plan diagonal, ou en deux prismes égaux.

QUe le parallelepipede AB soit divisé par le plan CD, tiré d'un angle à l'autre: Je dis qu'on l'a partagé en deux également. Qu'on s'imagine que la ligne AE est divisée en autant de parties qu'on voudra, & qu'on a tiré par chacune, autant de plans paralleles à la base AF: chacun de ces plans, est un parallelograme égal à la base AF (par la 24.) Pl. 2. Fig. 32.

Démonstration.

Tous les parallelogrames qu'on peut tirer paralleles à la base AF, sont divisez en deux également par le plan CD: car les Triangles qui se ſe formeront de côté & d'autre du plan CD, ont leur baſe commune égale à CG; & les côtez égaux, puiſque ce ſont ceux d'un parallelograme. Or il eſt évident que le parallelepipede AB, ne contient autre choſe que ſes ſurfaces parallelogrames, chacune deſquelles eſt diviſée en deux Triangles égaux: donc le parallelepipede AB, eſt diviſé en deux également par le plan CD.

Les Propoſitions XXVII. & XXVIII. ſont inutiles ſelon cette façon de démontrer. Les Propoſitions XXIX. & XXX. ſont auſſi inutiles.

PROPOSITION XXXI.

THEOREME.

Les parallelepipedes de même hauteur, qui ont la même baſe, ou des baſes égales, ſont égaux.

Pl. 2. Fig. 33. SI les parallelepipedes AB, CD ont une égale hauteur perpendicudiculaire AE, FG; avec des bases AH, CI, ou égales, ou la même: ils feront égaux. Qu'on pose les deux bases AH, CI sur le même plan; puisque les hauteurs perpendiculaires sont égales, les bases EB, FD feront dans le même plan paralleles à celui des bases AH, CI. Qu'on s'imagine que la ligne FG ou EA est divisée en autant de parties egales qu'on voudra: par exemple en dix mille; & qu'on tire par chacune des surfaces ou plans de même épaisseur, pour ainsi dire: je n'en marque qu'un pour tous, qui sera KM. Chaque surface formera dans les solides un plan parallele semblable, & égal à la base (par la 24.) comme KL, OM: & il y en aura autant dans un solide, que dans l'autre; puisque leur épaisseur que je prends perpendiculairement dans les lignes des hauteurs, est égale.

Dé-

Démonstration.

Il y a même raison de la base AH à la base CI, que de chaque plan KL à OM. Or y il en a pareil nombre dans l'un, que dans l'autre : ainsi il y aura même raison de tous les antecedens à tous les consequens ; c'est-à-dire, de tout le solide AB, à tout le solide CD ; que de la base AH à la base CI. On suppose aussi que les bases sont égales : donc les solides AB, CD sont égaux.

Coroll. Pour avoir la solidité d'un parallelepipede, on multiplie sa base par sa hauteur prise perpendiculairement, parce que cette perpendiculaire montre combien on trouve de surfaces égales à la base. *Comme, si je prens le pied pour mesure indivisible, c'est-à-dire, que je ne veux pas soûdiviser : si la base contenoit* 12. *pieds quarrez, & que la hauteur perpen-*

pendiculaire fût de 10 *pieds; j'aurois* 120 *pieds cubiques pour la solidité du corps AB. Car puisque la hauteur AE, a* 10 *pieds; je puis faire* 10 *parallelogrames égaux à la base, & qui auront chacun* 1 *pied d'épaisseur. Or la base avec l'épaisseur d'un pied, fait* 12 *pieds cubiques: elle en fera donc* 120, *si elle a la hauteur de* 10 *pieds.*

PROPOSITION XXXII.

THEOREME.

Les parallelepipedes de même hauteur, sont en même raison que leurs bases.

J'Ai démontré cette Proposition dans la précedente, prouvant qu'il y avoit même raison du parallelepipede AB au parallelepipede CD, que de la base AH à la base CI. Pl. 2. Fig. 33.

Ce-

Coroll. Les parallelepipedes qui ont les bases égales, sont en même raison que leurs hauteurs ; comme les parallelepipedes AB, AL, qui ont pour hauteurs perpendiculaires AK, AE : car si on divise la hauteur AK en autant de parties aliquotes qu'on voudra, & AE en autant de parties égales à ces premieres, qu'elle en contiendra, & si on tire par chacune des plans paralleles à la base, autant que AE contiendra de parties aliquotes de AK, autant le solide AB contiendra de surfaces égales à la base, lesquelles sont parties aliquotes du solide AL. Donc il y aura même raison du solide AB au solide AL, que de la hauteur AE à la hauteur AK.

USAGE.

Les trois Propositions précedentes contiennent presque tous les mesurages des parallelepipedes, & servent comme *me de premiers principes dans cette matiere. C'est ainsi que nous mesurons la solidité des murailles, multipliant leurs bases par leurs hauteurs.*

PROPOSITION XXXIII.

THEOREME.

Les parallelepipedes semblables, sont en raison triplée de leurs côtez homologues.

SI les parallelepipedes AB, CD sont semblables; c'est-à-dire, si tous les plans de l'un sont semblables aux plans de l'autre; & si tous leurs angles sont égaux, de sorte qu'on les puisse placer en ligne droite, c'est-à-dire, que AE, EF, HE, EI; GE, EC soient lignes droites, & qu'il y ait même raison de AE à EF, que de HE à EI, & que de GE à EC. Je dois démontrer que quatre solides sont continuel- * Pl. 2. Fig. 34.

tinuellement proportionnels, selon la raison du côté EA, à celui qui lui est homologue qui sera EF, ou DI.

Démonstration.

Le parallelepipede AB, a même raison à EL de même hauteur, que la base AH à la base EO (par la 32.) Or la base AH à la base EO, a même raison que AE à EF (par la 1. du 6.) Pareillement la raison du solide EL au solide EK est la même que de la base EO à la base ED, c'est-à-dire, que de HE à EI. Enfin le solide EK au solide EN, a même raison que la hauteur GE à la hauteur EC (par le Corol. préced.) ou prenant la ligne EF pour la hauteur commune, que de la base GI, à la base CI, c'est-à-dire, que de GE à EC. Or la raison de AE à EF, de HE à EI, de GE à EC, est la même comme nous le sup-

ſuppoſons: Par conſequent, il y a même raiſon du ſolide AB à EL, que de EL à EK, & de EK à CD. Donc (par la défin. 12. du 5.) la raiſon de AB à CD, ſera triplée de celle de AB à EL, ou de AE à ſon côté homologue EF.

Coroll. 1. Il s'enſuit que les parallelepipedes ſemblables, ſont comme les cubes de leurs côtez homologues, parce que les cubes ſont auſſi en raiſon triplée de leurs côtez.

Coroll. 2. Si quatre lignes ſont continuellement proportionnelles, le parallelepipede décrit ſur la premiere, a même raiſon à un ſemblable parallelepipede décrit ſur la ſeconde, que la premiere à la quatriéme; car la raiſon de la premiere à la quatriéme, eſt triplée de la premiere à la ſeconde.

USAGE.

Vous pouvez comprendre par cette

Pro-

Propoſition, que le célébre Problême de la duplication du cube propoſé par l'Oracle, conſiſte à trouver deux moyennes continuellement proportionnelles. Car ſi vous poſez pour premier terme, le côté du premier cube; que le quatriéme terme ſoit le double de ce premier: ſi vous trouviez deux moyennes proportionnelles; le cube décrit ſur la premiere ligne auroit même raiſon à celui qu'on décriroit ſur la ſeconde, que la premiere ligne à la quatriéme, qui ſeroit comme un à deux. Nous corrigeons auſſi par cette Propoſition la fauſſe opinion de ceux qui s'imaginent, que les ſolides ſemblables, ſont en même raiſon que leurs côtez: comme ſi un cube d'un pied de long étoit la moitié d'un cube de deux pieds de long, quoiqu'il ne ſoit que ſa huitiéme partie. C'eſt le principe de la regle de calibre, laquelle ſe peut appliquer non-ſeulement aux boulets de *canon, mais encore à toute ſorte de corps ſemblables. Par exemple, j'ai veu une perſonne qui vouloit faire une Architecture navale, & qui vouloit garder les mêmes proportions dans toutes ſortes de vaiſſeaux: mais il raiſonnoit ainſi, ſi un vaiſſeau de cent tonneaux doit avoir cinquante pieds de quille, celui de deux cens devra avoir cent pieds de quille. En quoi il ſe trompoit, car au lieu de faire un vaiſſeau double du premier, il le faiſoit octuple. Il devroit donner au ſecond vaiſſeau, pour être double du premier, un peu moins de ſoixante-trois pieds.*

PRO-

PROPOSITION XXXIV.

THEOREME.

Les parallelepipedes égaux ont les bases & les hauteurs réciproques, & ceux qui ont les hauteurs & les bases réciproques, sont égaux.

Pl. 2. Fig. 35. & 36. SI les parallelepipedes AB, CD sont égaux, ils auront les bases & les hauteurs réciproques; c'est-à-dire, il y aura même raison de la base AE à la base CF, que de la hauteur CH à la hauteur AG. Ayant fait CI égale à AG, tirez le plan IK parallele à la base CF.

Démonstration.

Le parallelepipede AB, a même raison à CK de même hauteur, que la base AE à CF (par la 32.) Or comme AB à CK, ainsi CD au même CK, puisque AB & CD, sont égaux: & comme CD à CK, qui a la même ba-

se,

ſe, ainſi la hauteur CH à la hauteur CI (par le Corol. de la 32.) donc, comme la baſe AE à la baſe CF, ainſi la hauteur CH à la hauteur CI ou AG.

J'ajoûte, que s'il y a même raiſon de AE à CF, que de la hauteur CH à la hauteur AG; les ſolides AB, CD ſeront égaux.

Démonſtration.

Il y a même raiſon de AB à CK de même hauteur, que de la baſe AE à la baſe CF (par la 32.) il y a auſſi même raiſon de la hauteur CH à la hauteur CI ou AG, que de CD à CK: nous ſuppoſons que la raiſon de AE à CF, eſt la même que celle de CH à CI ou AG: ainſi il y aura même raiſon du ſolide AB au ſolide CK, que du ſolide CD au même ſolide CK. Donc (par la 9. du 5.) les ſolides AB, CD ſont égaux.

USAGE.

Cette réciprocation des baſes, & des

hauteurs, rend ces solides faciles à mesurer: elle a même quelque analogie avec la Proposition quatorziéme du sixiéme Livre, qui porte que les parallelogrames équiangles & égaux, ont les côtez réciproques, & elle démontre aussi bien qu'elle, la pratique de la regle de trois.

La Proposition 35. est inutile.

PROPOSITION XXXVI.

THEOREME.

Si trois lignes sont continuellement proportionnelles, le parallelepipede fait de ces trois lignes est égal à un parallelepipede équiangle, qui a tous ses côtez égaux à celle du milieu.

Pl. 2. Fig. 37. 38. & 39.

SI les lignes A, B, C sont continuellement proportionnelles, le parallelepipede EF, formé de ces trois lignes, c'est-à-dire, qui a le côté FI égal à la ligne A, EH égal à B, & HI égal

égal à C, eſt égal au parallelepipede équiangle KL, qui a les côtez LM, MN, KN, égaux à la ligne B. Qu'on tire des points H & N les lignes HP, Nq perpendiculaires aux plans des baſes: elles ſeront égales, puiſque les angles ſolides E & K ſont ſuppoſez égaux, de ſorte que s'ils ſe pénetroient, ils ne ſe ſurpaſſeroient pas l'un l'autre, & que les lignes EH, KN ſont ſuppoſées égales. Donc les hauteurs HP, Nq ſont égales.

Démonſtration.

Il y a même raiſon de A à B, ou de FI à LM; que de B à C, ou de MN à HI: ainſi le parallelograme FH compris ſous FI, IH, eſt égal au parallelograme LN, compris ſous LM, MN égales à B (par la 14. du 6.) Les baſes ſont donc égales. Or les hauteurs HP, Nq le ſont auſſi. Donc (par la 31.) les parallelepipedes ſont égaux.

PROPOSITION XXXVII.

THEOREME.

Si quatre lignes sont proportionnelles, les parallelepipedes semblables décrits dessus ces lignes, sont proportionnelles: & si les parallelepipedes semblables sont proportionnels, les côtez homologues le sont aussi.

Pl. 2. Fig. 40. SI A à B est en même raison que C à D; les parallelepipedes semblables qui auront pour côtez homologues les lignes A, B, C, D, seront en même raison.

Démonstration.

Le parallelepipede A au parallelepipede B, est en raison triplée de celle de la ligne A à la ligne B, ou de celle de la ligne C à la ligne D. Or le parallelepipede C au parallelepipede D, est aussi en raison triplée de celle de C à D à D (par la 33.) Il y a donc même raison du parallelepipede A au parallelepipede B, que du parallelepipede C, au parallelepipede D.

J'ajoûte que si les parallelepipedes A, B, C, D, sont proportionnels, les côtez homologues A, B, C, D, seront aussi proportionnels.

Démonstration.

Puisque (par la supposition) le parallelepipede A, est au parallelepipede B, comme le parallelepipede C, au parallelepipede D, & que (par la 33.) le parallelepipede A, est au parallelepipede B, en raison triplée de celle du côté A, au côté homologue B: & le parallelepipede C, au parallelepipede D, en raison triplée de celle du côté C, au côté homologue D; il y a même raison du côté A, au côté B, que du côté C, au côté D.

PROPOSITION XXXVIII.

THEOREME.

Si deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre; la perpendiculaire tirée d'un point d'un des plans à l'autre, tombera sur la commune section.

Pl. 2. Fig. 41. SI les plans AB, CD, étant perpendiculaires l'un à l'autre, on tire du point E du plan AB, une ligne perpendiculaire au plan CD; elle tombera sur AG, commune section des plans. Tirez EF perpendiculaire à la commune section AG.

Démonstration.

La ligne EF perpendiculaire à AG, commune section des plans, qu'on suppose perpendiculaires, sera perpendiculaire au plan CD (par la défin. 4.) & puisqu'on ne peut pas tirer du point E deux perpendiculaires au plan CD (par la 13.) la perpendicu-

laire

laire tombera ſur la commune ſection AG.

Usage.

Cette Propoſition devoit être après la 17, puiſqu'elle regarde les ſolides en géneral. Elle nous ſert dans le traité des Aſtrolabes, pour prouver que dans l Analemme, tous les Cercles perpendiculaires au meridien, ſe marquent par des lignes droites.

PROPOSITION XXXIX.

Theoreme

Si on tire dans un parallelepipede, deux plans qui diviſent en deux également les côtez oppoſez, leur commune ſection, & la diagonale ſe coupent auſſi également.

Que les côtez oppoſez du parallelepipede AB ſoient diviſez en deux également par les plans CD, EF, leur commune ſection GH, & la dia- Pl. 2. Fig. 42.

gonale BA se diviseront également au point O. Tirez les lignes BG, GK, AH, LH.

Je prouve premierement qu'elles ne font qu'une ligne droite : car les Triangles DBG, KMG ont les côtez DB, KM égaux; puisqu'ils sont les moitiez des côtez égaux; comme aussi GD, GM. De plus DB, KM étant paralleles, les angles alternes BDG, GMK seront égaux (par la 28. du 1.) ainsi (par la 4. du 1.) les Triangles DBG, KGM seront égaux en tout sens; & par consequent les angles BGD, KGM: Or (par la 15. du 1.) BG, GK ne font qu'une seule ligne; comme aussi LH, HA: donc ALBK n'est qu'un seul plan dans lequel se trouve la diagonale AB, & GH commune section des plans. Le plan AL BK, coupant les plans paralleles AN, CD aura les communes sections GH, AK paralleles: & (par la 4. du 6.) il

y aura

y aura même raiſon de BK à BG, que de BA à BO, & de AK à OG, (par la 4. du 6.) Or BK eſt double de BG : donc BA eſt double de BO ; comme AK égale à HG, eſt double de GO. Ainſi les lignes GH, AB ſe coupent également au point O.

Corol. 1. Tous les diametres ſe diviſent au point O.

Corol. 2. On peut mettre ici quelques Corollaires qui dépendent de pluſieurs Propoſitions : par exemple, que les priſmes triangulaires de même hauteur, ſont en même raiſon que leurs baſes : car les parallelepipedes deſquels ils ſont la moitié (par la 32.) ſont en même raiſon que les baſes : ainſi les moitiez des baſes, & les moitiez des parallelepipedes ; c'eſt-à-dire, les priſmes ſeront en même raiſon.

Corol. 3. Les priſmes polygones de même hauteur, ont auſſi même raiſon que leurs baſes ; puiſqu'on les peut ré-

résoudre en prismes triangulaires, qui seront chacun en même raison que leurs bases.

Corol. 4. On peut appliquer aux prismes les autres Propositions des parallelepipedes : par exemple, que les prismes égaux ont les hauteurs & les bases réciproques : que les prismes semblables sont en raison triplée de celle de leurs côtez homologues.

USAGE.

Cette Proposition peut servir pour trouver le centre de gravité des parallelepipedes, & pour démontrer quelques Propositions du treizième & du quatorzième Livre d'Euclide.

PROPOSITION XL.

THEOREME.

Le prisme qui a pour base un parallelograme double de la base triangulaire d'un *d'un autre, & de même hauteur, lui est égal.*

QU'ON propoſe deux priſmes triangulaires ABE, CDG, de même hauteur, & qu'on prenne pour baſe du premier le parallelograme AE double du Triangle FGC, baſe du ſecond priſme. Je dis que ces priſmes ſont égaux. Imaginez-vous que les parallelepipedes AH, GI ſont achevez. Pl. 2. Fig. 43. & 44.

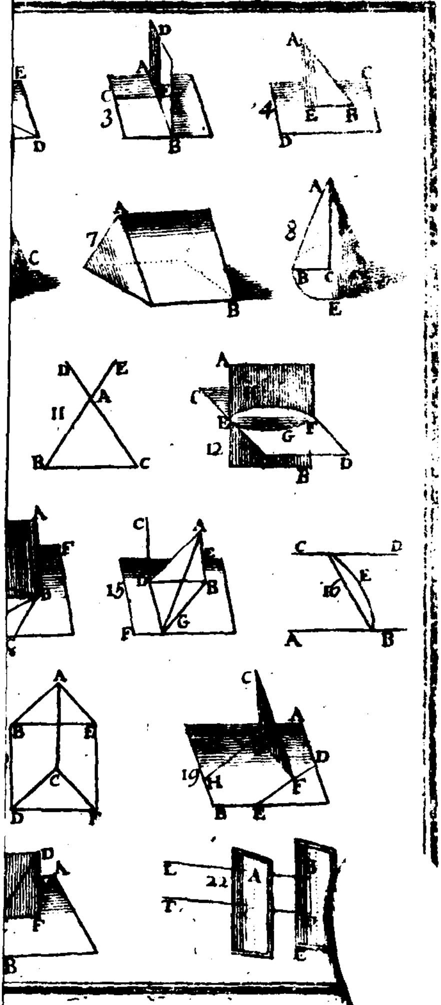
Démonſtration.

On ſuppoſe que la baſe AE eſt double du Triangle FGC: Or le parallelograme GK étant auſſi double du même Triangle (par la 34. du 1.) les parallelogrames AE, GK ſont égaux: & par conſequent les parallelepipedes AH, GI, qui ont les baſes & les hauteurs égales, ſont égaux; & les priſmes qui en ſont la moitié (par la 26.) ſeront auſſi égaux.

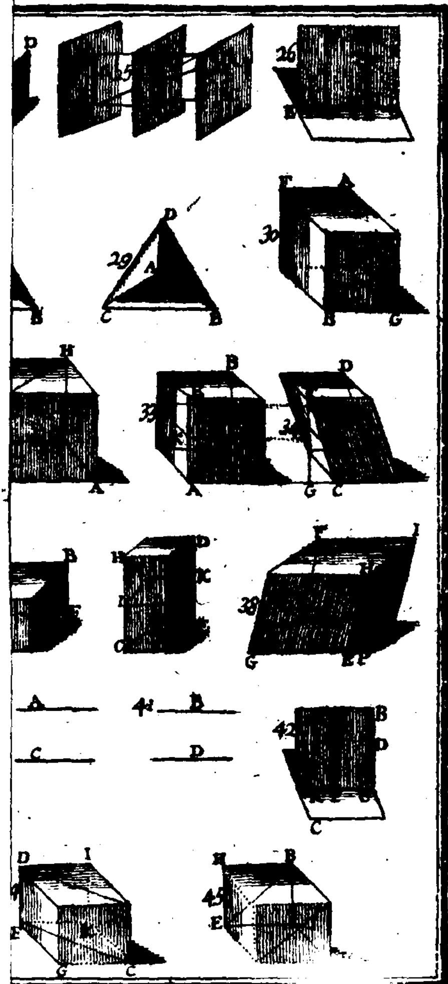
LIVRE DOUZIÉME, DES ELEMENS D'EUCLIDE.

Euclide, après avoir donné dans les Livres précedens, les principes generaux des corps solides, & expliqué la façon de mesurer les plus réguliers, c'est-à-dire, ceux qui sont terminez par des surfaces plates; traite dans celui-ci des corps renfermez dans des surfaces courbes, comme sont le Cylindre, le Cone, & la Sphere, & les comparant l'un avec l'autre, il donne les regles de leur solidité, & la façon de les mesurer. Ce Livre est fort utile, puisque nous y trouvons des principes sur lesquels les plus sçavans Geometres ont établi tant de belles démonstrations

... onzieme Planche premiere.



vre onzieme Planche deuxiéme.



trations du Cylindre, du Cone, & de la Sphere.

PROPOSITION I.

THEOREME.

Les polygones ſemblables, inſcrits dans des Cercles, ſont en même raiſon que les quarrez des diametres des mêmes Cercles.

SI les polygones ABCDE, FGHKL inſcrits dans des Cercles, ſont ſemblables; ils feront en même raiſon que les quarrez des diametres AM, FN. Tirez les lignes BM, GN, FH, AC. Pl. 1. Fig. 1. & 2.

Démonſtration.

On ſuppoſe que les polygones ſont ſemblables, c'eſt-à-dire, que les angles B & G ſont égaux; & qu'il y a même raiſon de AB à BC, que de FG à GH: d'où je conclus (par la 6. du 6) que les Triangles ABC, FGH

FGH ſont équiangles, & que les angles ACB, FHG ſont égaux: ainſi (par la 21. du 3.) les angles AMB, FNG ſont auſſi égaux. Or les angles ABM, FGN étant dans un demi Cercle, ſont droits (par la 31. du 3.) & par conſequent les Triangles ABM, FGN ſont équiangles. Donc (par la 4. du 6.) il y aura même raiſon de AB à FG, que de AM à FN (par la 22. du 6.) ſi on décrit deux polygones ſemblables ſur AB & FG, qui ſont ceux qu'on a propoſez; & deux autres auſſi ſemblables ſur AM & FN, qui ſeront leurs quarrez: il y aura même raiſon du polygone ABCDE au polygone FGHKL, que du quarré de AM au quarré de FN.

L E M M E.

Si une quantité eſt plus petite qu'un Cercle, on pourra inſcrire dans le même

même Cercle, un polygone régulier plus grand que cette quantité.

Q*Ue la figure A soit plus petite que le Cercle B; on pourra inscrire dans le même Cercle, un polygone régulier plus grand que la figure A, que la figure G soit la difference de la figure A, & du Cercle B, de sorte que les figures A & G prises ensemble soient égales au Cercle B. Inscrivez dans le Cercle B, le quarré CDEF (par la 6. du 4.) si ce quarré étoit plus grand que la figure A, nous aurions ce que nous prétendons. S'il est plus petit, divisez les quarts de Cercle CD, DE, EF, FC, en deux également par les points H, I, K, L, de sorte que vous ayez un octogone. Que si l'octogone est encore plus petit que la figure A, soûdivisez les arcs, & vous aurez un polygone de seize côtez, puis de trente-deux, de soixante-quatre. Je dis qu'en-* Pl. 1. Fig. 3. 4. & 5.

qu'enfin vous aurez un polygone plus grand que la figure A; c'est-à-dire, un polygone moins different du Cercle, que n'est la figure A; de sorte que la difference sera moindre que la figure G.

Démonstration.

Le quarré inscrit est plus de la moitié du Cercle, étant la moitié du quarré décrit autour du Cercle; & en décrivant l'octogone, vous prenez plus de la moitié du reste. c'est-à-dire, des quatre segmens CHD; DIE, EKF, CLF: Car le Triangle CHD, est la moitié du rectangle CO (par la 34. du 1.) il est donc plus de la moitié du segment CHD, il en est de même des autres arcs. Pareillement en décrivant un polygone de seize côtez, vous prenez plus de la moitié de ce qui restoit du Cercle, & ainsi de tous les autres. Vous laisserez donc enfin une plus petite quantité que G: Car il est évident qu'ayant proposé deux quan-

quantitez inégales, ſi vous prenez plus de la moitié de la plus grande, & enſuite plus de la moitié de ce qui reſte; & encore, plus de la moitié de celle qui reſte; enfin ce qui reſtera ſera moindre que la ſeconde quantité.

PROPOSITION II.

THEOREME.

Les ſuperficies des Cercles ſont en même raiſon que les quarrez de leurs diametres.

JE démontre que les Cercles A & B ſont en même raiſon que les quarrez de CDEF. Car s'ils n'étoient pas en même raiſon, le Cercle A auroit plus grande raiſon au Cercle B, que le quarré de CD au quarré de EF. Que la figure G ait même raiſon au Cercle B, que le quarré de CD au quarré de EF : la figure Pl. I. Fig. 6. 7. & 8.

figure G, sera plus petite que le Cercle A; & par le Lemme précedent, on pourra inscrire un polygone régulier plus grand que G dans le Cercle A. Qu'on inscrive aussi dans le Cercle B, un semblable polygone régulier.

Démonstration.

Le polygone de A au polygone de B, a même raison, que le quarré de CD au quarré de EF, (par la 1.) c'est-à-dire, la même que G au Cercle B: Or la quantité G est plus petite que le polygone inscrit dans A: ainsi (par la 14. du 5.) le Cercle B seroit plus petit que le polygone qui y est inscrit, ce qui est évidemment faux. Il faut donc dire que la figure G moindre que le Cercle A, ne peut pas avoir même raison au Cercle B, que le quarré de CD au quarré de EF: & par consequent, que le Cercle A n'a

pas

pas plus grande raiſon au Cercle B, que le quarré de CD au quarré de EF. Il ne l'a pas auſſi plus petite, parce que le Cercle B au Cercle A, auroit plus grande raiſon ; & on lui appliqueroit la même démonſtration.

Corollaire 1. Les Cercles ſont en raiſon doublée de celle de leurs diametres; parce que les quarrez étant des figures ſemblables, ſont en raiſon doublée de celle de leurs côtez (par la 20. du 6.)

Corol. 2. Les Cercles ſont en même raiſon, que les polygones ſemblables qui y ſont inſcrits.

Corol. 3. Il faut bien remarquer cette regle generale : Quand des figures ſemblables, inſcrites dans d'autres ; de telle ſorte qu'elles s'en approchent toûjours davantage, & qu'elles dégenerent enfin en ces figures, ſont toûjours en même raiſon : les figures qui les comprennent,

nent, ſont auſſi en même raiſon. Je veux dire que ſi de ſemblables polygones réguliers inſcrits dans divers Cercles, ſont toûjours en même raiſon que les quarrez des diametres; & que les faiſant de plus de côtez, ils s'en approchent toûjours davantage: les Cercles auront même raiſon que les quarrez des diametres. Cette façon de meſurer les corps ronds par inſcription eſt très-utile.

USAGE.

Cette Propoſition, eſt fort univerſelle, & fait que nous raiſonnons des Cercles, de même façon que des quarrez. Par exemple, nous diſons (dans la 47. du 1.) que dans un Triangle rectangle le ſeul quarré de la baſe, eſt égal aux quarrez des côtez pris enſemble. Nous pouvons dire le même des Cercles; c'eſt-à-dire, que le Cercle décrit ſur la baſe d'un Triangle

gle rectangle, est égal aux Cercles qui ont les côtez pour diametres : & de cette sorte, nous pouvons augmenter ou diminuer les Cercles selon la proportion que nous voulons. Nous prouvons aussi dans l'Optique, que la lumiere décroit en raison doublée de celle des distances des corps lumineux.

PROPOSITION III.

THEOREME.

Toute pyramide qui a la base triangulaire, peut être divisée en deux prismes égaux, qui font plus de la moitié de la pyramide, & en deux pyramides égales.

ON peut trouver dans la pyramide ABCD deux prismes égaux EBFI, EHKD qui seront plus grands que la moitié de la pyramide. Divisez les six côtez de la pyramide en deux également en G, F, E, I, H; Pl. 1. Fig. 9.

H, K; & tirez les lignes EG, GF, FE, EI, HI, FH, IK, EK.

Démonstration.

Dans le Triangle ABD, il y a même raison de AG à GB, que de AF à FD; puisque les lignes sont égales: donc (par la 2. du 6.) GF; BD sont paralleles; & GF sera la moitié de BD, c'est-à-dire, égale à BH. Pareillement GE, BI; FE, HI seront paralleles & égales: & (par la 15. du 11.) les plans GFE, BHI seront paralleles, & par consequent EBFI sera un prisme. J'en dis de même de la figure HEKD, laquelle sera aussi un prisme égal à l'autre (par la 40. du 11.) puisque la base parallelograme HIKD, est double de la triangulaire BHI (par la 41. du 1.)

En second lieu, les pyramides AEFG, ECKI sont semblables & égales.

Dé-

Démonſtration.

Les Triangles AFG, AEF ſont égaux (par la 8. du 1.) comme auſſi ECK, EIK: pareillement les Triangles AGE, EIC, & ainſi des autres Triangles des pyramides: elles ſont donc égales (par la défin. 10. du 11.) Elles ſont encore ſemblables à la grande pyramide AB, DC; car les Triangles ABC, AGE ſont ſemblables (par la 2. du 6.) les lignes GE, BC étant paralleles; ce que je puis démontrer de tous les autres Triangles des petites pyramides.

Enfin je dis que les priſmes ſont plus de la moitié de la premiere pyramide. Car ſi chacun étoit égal à une des petites pyramides, les deux priſmes ſeroient la moitié de la grande pyramide. Or ils ſont chacun plus grands qu'une des pyramides; comme le priſme GHE,

con-

contient une pyramide GBHI, qui n'en eſt que partie; & cette pyramide eſt égale & ſemblable aux autres, ayant tous ſes Triangles égaux & ſemblables à ceux de la pyramide BCFE, comme l'on peut facilement prouver par le parallelisme de leurs côtez: d'où je conclus que les deux priſmes pris enſemble, ſont plus grands que les deux pyramides, & par conſequent ſont plus grands que la moitié de la grande pyramide.

PROPOSITION IV.

THEOREME.

Si on diviſe deux pyramides triangulaires, de même hauteur, en deux priſmes, & deux pyramides, & que ces deux pyramides ſoient ſoûdiviſées de la même façon: tous les priſmes d'une pyramide auront même *me raiſon à tous ceux de l'autre, que la baſe d'une pyramide à la baſe de l'autre.*

SI l'on diviſe les deux pyramides ABCD, DEFG de même hauteur, & de baſe triangulaire, en deux priſmes, & en deux pyramides, ſelon la methode de la Propoſition III; & ſi on ſoûdiviſe de la même façon les deux petites pyramides; & ainſi conſecutivement, de ſorte qu'ayant fait autant de diviſions dans l'une que dans l'autre, on ait le même nombre de priſmes. Je dis que tous les priſmes de l'une, à tous les priſmes de l'autre, auront même raiſon que les baſes. Pl. 1. Fig. 10. & 11.

Démonſtration.

Puiſque les pyramides ſont de même hauteur, les priſmes produits par la premiere diviſion, auront auſſi même hauteur, puiſqu'ils ont chacun la moitié de celle de leur pyramide : Or les prismes de même hauteur, sont en même raison que leurs bases (par le Corol. de la 39. du 11.) Les bases BTV, EPX sont semblables aux bases BDC, EGF ; & ayant pour côtez, la moitié de ceux des grandes bases, elles ne seront que le quart des grandes bases ; ainsi elles seront en même raison que les grandes bases. Donc les premiers prismes auront même raison que les grandes bases. Je prouverai de la même façon, que les prismes produits par la seconde division, c'est-à-dire, des petites pyramides, seront en même raison que les bases des petites pyramides, lesquelles sont en même raison que les grandes bases. Donc tous les prismes de l'une, ont même raison à tous les prismes de l'autre, que la base, à la base.

USAGE.

Ces deux Propositions ont été nécessaires, pour comparer les pyramides l'une avec l'autre, & pour les mesurer.

PROPOSITION V.

THEOREME.

Les pyramides triangulaires de même hauteur, sont en même raison que leurs bases.

LEs pyramides ABCD, EFGH de même hauteur, sont en même raison que leurs bases. Car si cela n'étoit pas; une des pyramides, par exemple ABCD, auroit plus grande raison à la pyramide EFGH, que la base BCD à la base FGH. Ainsi une quantité L, plus petite que ABCD, auroit même raison à la pyramide EFGH, que la base BCD à la base FGH. Divi- Pl. 1. Fig. 12. 13. & 14.

ſez la pyramide ABCD ſelon la façon de la troiſiéme Propoſition: diviſez auſſi les pyramides qui réſulteront de la premiere diviſion, en deux priſmes, & deux pyramides; & celles-ci encore en deux autres priſmes: continuez ainſi ces diviſions, autant qu'il ſera beſoin: Puiſque les priſmes de la premiere diviſion ſont plus de la moitié de la pyramide ABCD (par la 3.) & que les priſmes de la ſeconde diviſion ſont plus de la moitié du reſte; c'eſt-à-dire, de deux petites pyramides, que ceux de la troiſiéme diviſion ſont plus de la moitié du reſte; il eſt évident qu'on fera tant de diviſions, que ce qui reſtera ſera plus petit, que l'excez de la pyramide ABCD par deſſus la quantité L; c'eſt-à-dire, que tous les priſmes étant mis enſemble, ſeront plus grands que la quantité L. Faites autant

tant de diviſions dans la pyramide EFGH, de ſorte que vous ayez autant de priſmes qu'il y en a dans ABCD.

Démonſtration.

Les priſmes de ABCD ont même raiſon aux priſmes de EFGH, que de la baſe BCD à la baſe FGH: Or la raiſon de la baſe BCD à la baſe FGH, eſt la même que celle de la quantité L à la pyramide EFGH: il y a donc même raiſon des priſmes de ABCD aux priſmes de EFGH, que de la quantité L à la pyramide EFGH. De plus, les priſmes de ABCD ſont plus grands, que la quantité L: Donc (par la 4. du 5.) les priſmes compris dans la pyramide EFGH, feroient plus grands que la même pyramide EFGH; ce qui eſt évidemment faux, la partie ne pouvant être plus grande que le tout. Il faut donc avoüer qu'une quantité plus petite que l'une des pyramides, ne peut avoir même raison à l'autre, que la base à la base; & par consequent aucune des pyramides n'a plus grande raison à l'autre, que la base à la base.

PROPOSITION VI.

THEOREME.

Toutes sortes de pyramides de même hauteur, ont même raison que leurs bases.

Pl. 2. Fig. 15. & 16. LEs pyramides ABC, DEFG, de même hauteur sont en même raison que les bases BC, EFG. Divisez les bases en Triangles.

Démonstration.

Les pyramides triangulaires AB, DE, de même hauteur sont en même raison que leurs bases (par la 5.) Pareillement, les pyramides triangulaires AC, DF sont en même me raiſon que leurs baſes. Il y aura donc même raiſon de la pyramide ABC à la pyramide DEF, que de la baſe BC à la baſe EF (par la 3. du 5.) De plus, puiſqu'il y a même raiſon de la pyramide DEF à la pyramide ABC, que de la baſe EF à la baſe BC: & qu'il y a encore même raiſon de la pyramide DG à la pyramide ABC, que de la baſe G, à la baſe BC: il y aura auſſi même raiſon de la pyramide DEFG à la pyramide ABC, que de la baſe EFG à la baſe C.

PROPOSITION VII.

THEOREME.

Toute pyramide eſt la troiſiéme partie d'un priſme de même baſe & de même hauteur.

QU'ON propoſe premierement un priſme triangulaire AB: Je dis qu'u- Pl. 1. Fig. 17.

qu'une pyramide qui aura pour baſe un des Triangles ACE, DBF, & qui ſera de même hauteur, comme la pyramide ACEF, ſera la troiſiéme partie du priſme. Tirez les trois diagonales AF, DC, FC, des trois parallelogrames.

Démonſtration.

Le priſme eſt diviſé en trois pyramides égales ACFE, ACFD, CFBD: Donc chacune ſera la troiſiéme partie du priſme. Les deux premieres ayant pour baſes les Triangles AFE, AFD, qui ſont égaux (par la 34. du 1.) & pour hauteur la perpendiculaire tirée de leur ſommet C au plan AF de leurs baſes; ſeront égales (par la précedente.) Les pyramides ACFD, CFB D, qui ont pour baſes les Triangles égaux ADC, DCB; & le même ſommet F, ſeront auſſi égales, (par la précedente.) Donc une de ces pyramides, par exemple, AFEC, qui a la la même baſe ACE, que le priſme; & la même hauteur, qui ſeroit la perpendiculaire tirée du point F, au plan de la baſe ACE; eſt la troiſiéme partie du même. Si le priſme étoit polygone; il le faudroit diviſer en pluſieurs priſmes triangulaires: & la pyramide qui auroit la même baſe, & la même hauteur, ſeroit auſſi diviſée en autant de pyramides triangulaires; chacune deſquelles ſeroit la troiſiéme partie de ſon priſme. Donc (par la 12, du 5.) la pyramide polygone ſera la troiſiéme partie du priſme polygone.

SCOLIE.

On auroit pû omettre les ſix Propoſitions précedentes, parce qu'elles ſemblent ne ſervir que pour celle-ci, laquelle ſe peut démontrer immediatement & très-facilement, par le Theorême IV. de la Planimetrie de Monſieur Ozanam.

PROPOSITION VIII.

THEOREME.

Les pyramides semblables, sont en raison triplée ou comme les cubes de leurs côtez homologues.

SI les pyramides sont triangulaires, on peut achever les prismes, qui seront aussi semblables, puisqu'ils auront les mêmes bases que les pyramides. Or les prismes semblables sont en raison triplée des côtez homologues (par la 39. du 11.) Donc les pyramides qui en sont les troisiémes parties (par la préced.) seront en raison triplée des côtez homologues.

Si les pyramides sont polygones on les peut réduire à des pyramides triangulaires.

PROPOSITION IX.

THEOREME.

Les pyramides égales ont les hauteurs & les bases réciproques; & celles qui ont les hauteurs & les bases réciproques, sont égales.

QU'ON propose deux pyramides triangulaires égales; elles auront les bases & les hauteurs réciproques. Qu'on fasse des prismes de même hauteur & de même base; puisque ces prismes sont triples, chacun de sa pyramide (par la 7.) ils seront aussi égaux. Or les prismes égaux, ont les bases & les hauteurs réciproques (par le 4. Corol. de la 39. du 11.) Donc les bases & les hauteurs des pyramides, qui sont les mêmes que celles des prismes leur sont réciproques.

Secondement, si les bases & les

 hau-

hauteurs des pyramides sont réciproques, les prismes seront égaux: comme aussi les pyramides, qui en sont les troisiémes parties.

Si les pyramides étoient polygones, il les faudroit réduire en polygones triangulaires.

Corollaire. On pourroit faire d'autres Propositions, par exemple, que les pyramides de même hauteur, sont en même raison que leurs bases & que celles qui ont mêmes bases, ont même raison que leurs hauteurs.

USAGE.

On tire de ces Propositions la façon de mesurer une pyramide; qui est de multiplier sa base par la troisiéme partie de sa hauteur. On peut ensuite faire cette autre Proposition. Que si un prisme est égal à une pyramide, les bases & la hauteur du prisme avec la troisiéme partie de la hauteur de la pyramide seront réciproques: c'est-à-dire, s'il y a même

raison

raiſon de la pyramide à la baſe du priſme, que de la hauteur du priſme à la troiſiéme partie de la hauteur de la pyramide, le priſme & la pyramide ſeront égaux.

LEMME.

Si on propoſe une quantité plus petite qu'un Cylindre, on pourra inſcrire dans le Cylindre un priſme polygone, plus grand que cette quantité.

SI la quantité A eſt plus petite, que le Cylindre qui a le Cercle B pour baſe; on pourra inſcrire dans ce Cylindre un priſme polygone plus grand que la quantité A. Le quarré CDEF eſt inſcrit, GHIK eſt circonſcrit, CLDEM FNO eſt un octogone. Tirez la Tangente PLq, & continuez les côtez ED, FC en P & q: imaginez-vous autant de priſmes de même hauteur que le Cylindre, qui ont pour baſes ces polygones. Pl. 1. Fig. 18. & 19.

Celui

Celui qui a pour base le quarré circonscrit, entoure le Cylindre; & celui qui est sur le quarré inscrit, est aussi inscrit dans le Cylindre.

Démonstration.

Les prismes de même hauteur, sont en même raison que leurs bases (par le 3. Corol. de la 39. du 11.) & le quarré inscrit étant la moitié du circonscrit, son prisme sera la moitié de l'autre: il sera donc plus de la moitié du Cylindre. Faisant un prisme qui ait l'octogone pour base, on ôte plus de la moitié de ce qui reste du Cylindre, ayant ôté le prisme du quarré inscrit; parce que le Triangle CLD est la moitié du rectangle C q: & puisque les prismes de même hauteur sont en même raison que leurs bases, le prisme qui a pour base le Triangle CLD, sera la moitié du prisme du rectangle DC Pq; il sera donc plus de la moitié de la partie du Cylindre qui a pour base le segment DLC. Il en est de même des autres seg-

segmens. Je démontre de la même façon; que faisant un prisme polygone de seize côtez, j'ôte plus de la moitié de ce qui reste du Cylindre, ayant ôté le prisme octogone; ainsi il restera une partie du Cylindre plus petite, que l'excez du Cylindre par dessus la quantité A. Nous aurons donc un prisme inscrit dans le Cylindre, qui sera moins surpassé par le Cylindre, que la quantité A; c'est-à-dire, qui sera plus grand que la quantité A. On peut raisonner de la même façon touchant les pyramides inscrites dans un Cone.

PROPOSITION X.

THEOREME.

Un Cone est la troisième partie d'un Cylindre de même base & de même hauteur.

SI un Cone & un Cylindre ont le Cercle A pour base, & la même hau- Pl. 1. Fig. 20. & 21.

hauteur; le Cylindre sera triple du Cone. Car si le Cylindre avoit plus grande raison au Cone, que triple; une quantité B moindre que le Cylindre, auroit la même raison au Cone, que trois à un: & (par le Lemme préced.) on pourroit inscrire dans le Cylindre, un prisme polygone plus grand que la quantité B. Supposons que c'est celui qui a pour base le polygone CDEFGH. Faites aussi sur la même base, une pyramide inscrite dans le Cone.

Démonstration.

Le Cylindre, le Cone, le Prisme & la Pyramide sont de même hauteur: donc le prisme est triple de la pyramide (par la 7.) Or la quantité B est aussi triple du Cone; il y a donc même raison du prisme à la pyramide, que de la quantité B au Cone: & (par la 14. du 5.) puisque le prisme est plus grand que la quantité B la pyramide

mide ſeroit plus grande que le Cone dans lequel elle eſt inſcrite, ce qui ne peut être.

Que ſi on diſoit que le Cone a plus grande raiſon au Cylindre, que d'un à trois, on peut ſe ſervir de la même methode pour démontrer le contraire.

PROPOSITION XI.

THEOREME.

Les Cylindres & les Cones de même hauteur, ſont en même raiſon que leurs baſes.

ON propoſe deux Cylindres, ou deux Cones de même hauteur; qui ont les Cercles A & B pour leurs baſes: Je dis qu'ils ſont en même raiſon que leurs baſes. Car s'ils ne ſont pas en même raiſon: l'un d'eux, par exemple A, aura plus grande raiſon au Cylindre B, que la baſe A à la baſe B: ainſi une quantité L, plus petite Pl. 2. Fig. 22. 23. & 24.

que

que le Cylindre A, aura même raison au Cylindre B, que la base A à la base B. On pourra donc inscrire un prisme polygone dans le Cylindre A, plus grand que la quantité L. Que ce soit celui qui a pour base le polygone CDEF; & qu'on inscrive un semblable polygone GHIK, dans la base B, qui serve de base au prisme de même hauteur.

Démonstration.

Les prismes de A, & de B, sont en même raison que leurs bases polygones (par le Corol. 3. de la 39. de la 11.) & les polygones sont en même raison que les Cercles (par le Corol. de la 2.) ainsi le prisme A sera en même raison au prisme B, que le Cercle A au Cercle B. Or comme le Cercle A est au Cercle B, ainsi la quantité L est au Cylindre B: donc, comme le prisme A est au prisme B, ainsi la quantité L est au Cylindre B. Le prisme me A est plus grand que la quantité L: par consequent (suivant la 4. du 5.) le prisme B inscrit dans le Cylindre B, seroit plus grand que lui, ce qui ne peut être. Donc aucun des Cylindres n'a pas plus grande raison à l'autre, que celle de sa base à l'autre base.

Corollaire. Les Cylindres sont triples des Cones, de même hauteur & de même base: Donc les Cones de même hauteur sont en même raison que leurs bases.

PROPOSITION XII.

THEOREME.

Les Cylindres & les Cones semblables, sont en raison triplée, de celle des diametres de leurs bases.

QU'ON propose deux Cylindres, ou deux Cones semblables, qui ayent les Cercles A & B pour bases. Je dis que la raison du Cylindre A au Cy- Pl. 2. Fig. 25. & 26.

Cylindre B, en est raison triplée de celle du diametre DC au diametre EF. Car s'il n'a pas une raison triplée: que la quantité G, plus petite que le Cylindre A, ait au Cylindre B, une raison triplée de celle du diametre DC au diametre EF; & qu'on inscrive un prisme dans le Cylindre A qui soit plus grand que G, & un autre semblable dans le Cylindre B, ils seront aussi hauts que les Cylindres; car les Cylindres semblables, ont les hauteurs & les diametres des bases proportionnels, aussi bien que les prismes, (par la défin. 11. de l'11.)

Démonstration.

Le diametre DC a même raison au diametre EF, que le côté DI au côté EL. Or les prismes semblables sont en raison triplée des côtez homologues (par le 4. Cor. de la 39. du 11.) donc le prisme de A au prisme de B, est en raison triplée de DC à EF. Nous avons sup-

ſuppoſé que la quantité G, eu égard au Cylindre B, étoit en raiſon triplée du diametre DC, au diametre EF. Ainſi il y aura même raiſon du priſme A au priſme B, que de la quantité G au Cylindre B, & (par la 4. du 5.) puiſque le priſme A, eſt plus grand que la quantité G, le priſme B, c'eſt-à-dire, décrit dans le Cylindre B, ſeroit plus grand que le même Cylindre; ce qui eſt impoſſible. Donc les Cylindres ſemblables ſont en raiſon triplée des diametres de leurs baſes.

Secondement. Les Cones ſont les troiſiémes parties des Cylindres (par la 10.) Donc les Cones ſemblables ſont en raiſon triplée de celle des diametres de leurs baſes.

PRO-

PROPOSITION XIII.

THEOREME.

Si un Cylindre est coupé par un plan parallele à sa base, les parties de l'essieu seront en même raison que les parties du Cylindre.

Pl. 2. Fig. 27. QUe le Cylindre AB soit coupé par le plan DC, parallele à sa base. Je dis qu'il y aura même raison du Cylindre AF au Cylindre FB, que de la ligne AF à la ligne FB. Tirez la ligne BG, perpendiculaire au plan de la base A: tirez aussi dans les plans des Cercles DC, & A, les lignes FE, AG.

Démonstration.

Le plan du Triangle BAG, coupe les plans paralleles A & DC: donc les sections FE, AG sont paralleles, (par le 16. du 11.) Ainsi il y a même raison de AF à FB, que des hauteurs GE à EB. Qu'on prenne une partie aliquote

quote de EB; & ayant divisé GE & EB, en des parties égales à cette partie aliquote qu'on tire des plans paralleles à la base A: Vous aurez autant de Cylindres de même hauteur, lesquels ayant des bases & des hauteurs égales, seront égaux (par la 11.) De plus, les lignes AF & FB seront divisées de même façon que EG, EB (par la 17. du 11.) ainsi la ligne AF contient autant de fois la partie aliquote de la ligne FB, que le Cylindre AF contient une semblable partie aliquote du Cylindre FB. Il y a donc même raison des parties du Cylindre, que des parties de l'essieu.

PROPOSITION XIV.

THEOREME.

Les Cylindres & les Cones de même base, sont en même raison que les hauteurs.

DEux Cylindres AB, CD de bases égales étant proposez; coupez dans Pl. 2. Fig. 28. & 29.

dans le plus grand, un Cylindre de même hauteur que le petit, tirant un plan EF parallele à sa base. Il est évident que les Cylindres CF, AB sont égaux (par la 11.) & que CF à CD, a même raison que GI à GH, ou (par le Coroll. de la préced.) que la hauteur de CF, à la hauteur de CD: il y a donc même raison de AB à CD, que de la hauteur de CF ou AB, à la hauteur de CD.

Pour les Cones, puisqu'ils sont les troisiémes parties des Cylindres; s'ils ont des bases égales, ils seront aussi en même raison que les hauteurs.

PROPOSITION XV.

THEOREME.

Les Cylindres, & les Cones égaux, ont les bases & les hauteurs réciproques: & ceux qui ont les bases & les hauteurs réciproques, sont égaux.

Pl. 2. Fig. 30. & 31.

SI les Cylindres AB, CD sont égaux; il y aura même raison de la base B à la à la base D, que de la hauteur CD à la hauteur AB. Que la hauteur DE soit égale à la hauteur AB.

Démonstration.

Il y a même raison du Cylindre AB, au Cylindre DE, de même hauteur que de la base B à la base D (par la 11.) Or comme le Cylindre AB est au Cylindre DE: ainsi le Cylindre CD égal à AB, est au Cylindre DE; c'est-à-dire, ainsi la hauteur CD, est à la hauteur AB ou DE. Donc comme la base B est à la base D: ainsi la hauteur CD est à la hauteur AB.

Secondement. S'il y a même raison de la base B à la base D, que de la hauteur CD à la hauteur AB; les Cylindres AB, CD seront égaux. Car le Cylindre AB est au Cylindre DE, comme la base B à la base D: & le Cylindre CD, aura même raison au Cylindre DE, que CD à DE: il y aura donc même raison du Cylindre AB au Cylindre DE, que du Cylindre CD, au même Cylindre DE, & (par la 9. du 5.) les Cylindres AB & CD seront égaux.

Les Propositions 16. & 17. sont fort difficiles, & ne servent que pour la 18. que je démontrerai plus facilement par les Lemmes suivans.

LEMME I.

Si on propose une quantité plus petite qu'une sphere; on pourra inscrire dans la même sphere, des Cylindres de même hauteur, plus grands que cette quantité.

Pl. 2. Fig. 32. 33. & 34.

QUe ABC soit un grand demi Cercle de la sphere, de laquelle il s'agit, & que la quantité D soit plus petite que la même sphere; je dis qu'on lui pourra inscrire des Cylindres de même hauteur, lesquels pris ensemble seront plus grands que la quantité D. Car si la demi sphere sur-

surpasse la quantité D, elle la surpassera de quelque grandeur; que cette grandeur soit le Cylindre MP. De sorte que les quantitez D & MP prises ensemble, soient égales à la demi sphere. Faites qu'il y ait même raison d'un grand Cercle de la sphere à la base MO, que de la hauteur MN à la hauteur MR. Divisez la ligne EB, en tant de parties égales que vous voudrez, chacune plus petite que MR: & tirant des paralleles à la ligne AG, décrivez des parallelogrames inscrits & circonscrits. Le nombre des circonscrits surpassera d'une unité celui des inscrits. Or tous les rectangles circonscrits surpassent les inscrits, par les petits rectangles, par lesquels la circonference du Cercle passe, & tous ces petits rectangles pris ensemble, sont égaux au rectangle AL. Imaginez-vous qu'on fait rouler le demi Cercle autour du diametre AC: le demi Cercle décrira une demi sphere, & les rectangles ins-

crits décriront des Cylindres inſcrits dans la demi ſphere, & les circonſcrits décriront des autres Cylindres.

Démonſtration.

Les Cylindres circonſcrits ſurpaſſent davantage les inſcrits, que la demi ſphere ne ſurpaſſe les mêmes Cylindres inſcrits, puiſqu'elle eſt renfermée dans les Cylindres circonſcrits. Or les circonſcrits ſurpaſſent les inſcrits du Cylindre AL: donc la demi ſphere ſurpaſſera moins les Cylindres inſcrits, que du Cylindre décrit par le rectangle AL. Ce Cylindre AL eſt plus petit que le Cylindre MP: car il y a même raiſon d'un grand Cercle de la ſphere qui ſert de baſe au Cylindre AL à la baſe MO, que de MN à MR: ainſi (par la préced.) un Cylindre qui auroit pour baſe un grand Cercle de la ſphere, & la hauteur MR ſeroit égal au Cylindre MP. Or le Cylindre AL ſous la même baſe, a une hauteur CL plus petite que MR: donc

le

le Cylindre AL est plus petit que le Cylindre MP. Par consequent la demi sphere qui surpasse la quantité D, par le Cylindre MP; & les Cylindres inscrits par une quantité moindre que AL; surpasse moins les Cylindres inscrits, que la quantité D. Donc la quantité D, est plus petite que les Cylindres inscrits.

Ce que j'ai dit d'une demi sphere, se peut appliquer à une sphere entiere.

LEMME II.

Les Cylindres semblables inscrits dans deux spheres, sont en raison triplée des diametres de la sphere : c'est-à-dire, comme les cubes de leurs diametres.

SI les deux Cylindres semblables CD, EF, sont inscrits dans les spheres A, B, ils seront en raison triplée des diametres LM, NO. Tirez les lignes GD, IF. Pl. 2. Fig. 35.

Démonstration.

Les Cylindres droits CD, EF sont semblables : ainsi il y a même raison de de HD à DR, que de q F à FS ; comme aussi il y aura même raison de KD à KG, que de PF à PI. Par consequent les Triangles GDK, IFP sont semblables (par la 6. du 6.) ainsi il y aura même raison de KD à PF, que de GD à IF, ou LM à ON. Or les Cylindres semblables CD, EF sont en raison triplée de KD à PF, demi diametres de leurs bases, (par la 13.) donc les Cylindres semblables CD, EF, inscrits dans les spheres A & B, sont en raison triplée des diametres des spheres.

PROPOSITION XVIII.

Les spheres sont en raison triplée de leurs diametres ; c'est-à-dire comme les cubes de leurs diametres.

Pl. 2. Fig. 36. LEs spheres A & B sont en raison triplée de celle des diametres CD, EF.

EF. Car si elles ne sont pas en raison triplée, une des spheres, comme A, sera en plus grande raison que triplée, de celle de CD à EF : donc une quantité G plus petite que la sphere A, sera en raison triplée de celle de CD à EF : ainsi on pourra (selon le premier Lemme) inscrire dans la sphere A, des Cylindres de même hauteur, plus grands que la quantité G. Qu'on inscrive dans la sphere B, autant de Cylindres semblables à ceux de la sphere A.

Démonstration.

Les Cylindres de la sphere A à ceux de la sphere B, seront en raison triplée de celle de CD à EF : Or la quantité G eu égard à la sphere B, est en raison triplée de celle de CD à EF : il y a donc même raison des Cylindres de la sphere A, aux Cylindres semblables de la sphere B ; que de la quantité G à la sphere B. Ainsi les Cylindres A étant plus grands que la quantité G, les Cylindres B; c'eſt-à-dire, inſcrits dans la ſphere B, ſeroient plus grands que la ſphere B, ce qui eſt impoſſible. Donc les ſpheres A & B ſont en raiſon triplée de celle de leurs diametres.

Corollaire. Les ſpheres ſont en même raiſon que les cubes de leurs diametres; puiſque les cubes étant des ſolides ſemblables, ſont en raiſon triplée de leurs côtez (par la 33. du 11.)

AVER-

AVERTISSEMENT.

Ce qu'Euclide dit de la Sphere dans ce 12. Livre, ne suffit pas pour en faire voir les proprietez, c'est pourquoi j'ai crû faire plaisir aux commençans en leur donnant les Propositions suivantes, dans lesquelles je les explique.

LEMME III.

La superficie de tout polygone régulier, est égale à celle d'un Triangle, qui a pour base le circuit ou perimetre du polygone, & pour hauteur la perpendiculaire tirée du centre du polygone sur un de ses côtez.

SI la base FG du Triangle EFG, est composée de huit parties égales, & que chacune de ses parties soit égale à un des côtez BC du polygone; & que ce polygone soit composé de huit côtez égaux, le circuit de ce polygo- Fig. 1. & 3.

 ne

ne ſera égal à la baſe FG du Triangle, & ſi la hauteur EH du Triangle, eſt égale à la perpendiculaire AD; je dis que le Triangle EFG, eſt égal au polygone. Pour le démontrer, conſiderez que ſi du centre A du polygone, on a tiré une ligne dans chacun des angles de ce polygone, on aura autant de Triangles égaux comme ce polygone a de côtez; & ſi du ſommet E du Triangle EFG, on tire des lignes à l'extrémité des parties égales de la baſe, qui ſont les côtez du polygone, on aura autant de Triangles comme il ſe trouve de parties dans la baſe; or comme tous ces Triangles ont tous des baſes égales, & la même hauteur EH: il s'enſuit qu'il y a autant de Triangles égaux dans le ſeul Triangle EFG, comme il s'en trouve dans le polygone. Donc il s'enſuit que le polygone A, eſt égal au Triangle EFG.

Main-

Maintenant si l'on considere qu'un Cercle tel que X, est un polygone d'une infinité de côtez, dont la somme est égale à la circonference du Cercle; il est évident, par ce que nous venons de dire, que si la base BC du Triangle ABC, est égale à la circonference du Cercle, & que sa hauteur AB soit le rayon, que la superficie du Triangle est égale à celle du Cercle; d'où je conclus que la superficie d'un Cercle est égale à celle d'un Triangle, qui a pour base la circonference du Cercle, & pour hauteur le rayon. Fig. 2.

LEMME IV.

Quand la hauteur d'un Cylindre est égale au diametre du Cercle de sa base, la surface de ce Cylindre est quadruple de celle du Cercle de sa base.

ON sçait que la surface de tout Cylindre est égale à un rectan- Fig. 4 & 5.

gle, qui à pour base la circonference du Cercle qui sert de base au Cylindre, & pour hauteur celle du Cylindre. Cela étant, je dis que si la hauteur CB du Cylindre H, est égale au diametre AB du Cercle de sa base, que la surface de ce Cylindre sera quadruple de celle du Cercle qui sert de base à ce Cylindre, c'est-à-dire, du Cercle, dont AB est le diametre. Pour le prouver, supposons que le rectangle FE, ait sa base DE égale à la circonference du Cercle, dont AB est le diametre, & que sa hauteur FD soit égale à celle du Cylindre; cela étant, le diametre AB sera égal à la hauteur FD; & le rectangle FE sera égal à la surface du Cylindre: or si l'on divise la ligne droite FD en deux également au point G, & qu'on tire une ligne de G en E, le Triangle GDE, sera égal au Cercle qui sert de base

au

au Cylindre, puisque DE est égal à sa circonference, & que GD est égal au rayon par le Lemme précedent : or comme ce Triangle n'est que le quart du rectangle FE; il s'ensuit que puisque le rectangle FE, est égal à la surface du Cylindre, que la surface du Cylindre est quadruple de celle du Cercle de sa base.

LEMME V.

La surface d'une pyramide droite, est égale à celle d'un Triangle, qui a pour base une ligne égale au circuit de la base de la pyramide, & pour hauteur une ligne égale à la perpendiculaire, tirée du sommet de la pyramide sur un des côtez du polygone de la base.

Soit la pyramide X, qu'on suppose avoir pour base un exagone régulier; cela étant, la surface Fig. 6. & 7.

ce

ce de cette pyramide sera composée d'autant de Triangles ABC, comme il y a de côtez dans la base, c'est-à-dire, elle sera composée de six Triangles isosceles, qui auront chacun pour hauteur la ligne AD; mais comme ces six Triangles sont égaux à un seul, qui auroit pour base la somme de toutes les bases, & pour hauteur la ligne AD; il s'ensuit donc que la surface d'une pyramide est égale à celle d'un Triangle, qui a pour base le circuit du polygone qui lui sert de base, & pour hauteur la perpendiculaire tirée du sommet de la pyramide sur un des côtez du polygone de la base.

Fig. 7. & 8. Or comme les Cones ont des Cercles pour bases, & que ces Cercles peuvent être considerez comme des polygones d'une infinité de côtez, on peut dire de même que la surface d'un Cone tel que ADE, est é-

gale

gale à un Triangle FHK. Donc la base HK est égale au Cercle, dont DE est le diametre, & donc la hauteur FH est égale à la ligne AD. J'ajoûterai encore que si le Cone ADE étoit tronqué, que la surface de la partie tronquée BCDE, est égale au trapeze NOHK, pourvû que la hauteur NH soit égale à la ligne BD de la partie tronquée du Cone; cela est trop clair pour demander de plus grandes démonstrations.

LEMME VI.

SI l'on divise la hauteur FH du Triangle rectangle FHK, qui peut passer pour la surface d'une pyramide en deux également, au point C, & qu'on tire à la base HK la parallele CD, le rectangle compris sous FH & CD, sera égal au Triangle Fig. 8.

gle

gle FHK: ce qui eſt bien évident; car puiſque les deux Triangles FCD & FHK ſont ſemblables, le côté FC étant la moitié du côté FH, CD ſera la moitié de la baſe HK.

J'ajoûterai encore que ſi l'on diviſe en deux également au point L, la hauteur NH du trapeze NOHK, & que du point L, on tire la parallele LM à la baſe HK, que le rectangle compris ſous NH & LM, ſera égal au trapeze NOHK; par conſequent à la ſurface du Cone tronqué BCDE, ce qui s'entendra aiſément, ſi l'on conſidere que le Triangle MQK, eſt égal au Triangle OPM.

Définition.

Spheroïde eſt un ſolide formé par la circonvolution d'un polygone régulier ſur ſon diametre, ainſi ſi l'on imagine que le Décagone Z, eſt tourné autour de ſon diametre FA, on on aura un ſolide qui ſera compoſé de pluſieurs autres; car le Triangle iſocele EFG, aura décrit un Cone, le trapeze DEGH, aura décrit un Cone tronqué, & le rectangle CDHI, aura décrit un Cylindre.

AVER-

AVERTISSEMENT.

Avant de lire le Theorême suivant, il est bon de faire attention que tout polygone régulier circonscrit autour d'un Cercle, touche le Cercle à chacun de ses côtez, & que le point où le Cercle touche, chaque côté du polygone est au milieu de ce côté, ceci doit s'être remarqué dans le 4. Livre.

THEOREME XIX.

Chaque surface des portions d'un Spheroïde est égale au rectangle, fait de la partie de l'axe à laquelle elle répond, & de la circonference du grand Cercle de la sphere inscrite dans ce Spheroïde.

IL faut s'imaginer que le Décagone Z, est le Cercle autour duquel il est circonscrit; on fait une cir-

circonvolution autour de l'axe FA, le polygone décrira un Spheroïde, & le Cercle une Sphere, qui se trouvera inscrite dedans ce poliedre; cela posé, je dis que la surface de la partie EFG, qui est un Cone, est égale au rectangle compris sous la partie de l'axe FN, & sous la circonference du Cercle, dont LM est le rayon, qui est aussi celui de la sphere; de même la surface de la partie DEGH, qui est un Cone tronqué, est égale au rectangle compris sous la partie de l'axe NO, & sous la circonference du Cercle, dont LM est le rayon; & enfin que la surface de la partie CDHI est égale au rectangle compris de OP, & du Cercle, dont LM est le rayon.

Démonstration.

Pour la partie de CDHI.

Comme cette partie est un Cylindre, & que la ligne LM est égale au au demi diametre du Cercle qui lui sert de base, il n'y a point de doute que la surface de la partie DHIC, ne soit égale au rectangle OP, & de la circonference, dont LM est le rayon.

Démonstration.

Pour la partie de DEGH.

Fig. 12. Afin de ne point embroüiller la figure, j'ai rapporté cette partie en particulier, aussi bien que l'autre EFG, afin de rendre les démonstrations plus claires; ainsi dans la figure douziéme, je partage ce Cone tronqué par la moitié, menant CM parallele à FK & à EL; je mene aussi GE parallele à KL, à laquelle elle est égale. Les Triangles EFG & ACD sont rectangles, ainsi les angles GFE & GEF valent un droit, l'angle GFE étant donc égal à l'angle FCD, puisqu'ils sont alternes, retranchant de l'angle droit FCA, l'angle

gle FCD, le reste DCA, sera égal à GEF; ainsi les deux Triangles ACD & EFG sont équiangles: donc GE ou KL, EF : : CD, CA, partant KL est à EF, comme le double de CD, qui est CM, est au double de AC, qui est CN; or les lignes CM, CN, prises comme diametres, sont entr'elles comme les circonferences des Cercles, dont elles sont diametres; donc le rectangle fait de GE, & de la circonference d'un Cercle, donc CN est le diametre, est égal au rectangle fait de EF, & de la circonference d'un Cercle dont CM est diametre, auquel est égale la surface du fragment de Cone; ce rectangle, dis-je, est égal à un rectangle fait de KL par la circonference d'un Cercle, dont CM est le diametre. Ce qu'il falloit prouver.

Démonſtration.

Fig. 13. Pour la partie FEG.

Preſentement dans la figure treiziéme, la ſurface du Cone DBG, par le Lemme V. eſt égale à un Triangle rectangle, dont BD eſt la hauteur, & la baſe un Cercle, dont DG eſt le diametre; partant à un parallelograme rectangle, dont BD eſt la hauteur, & la baſe eſt la circonference d'un Cercle, dont DE eſt le diametre, par le Lemme VI. ainſi il faut prouver que le rectangle de BD; par la circonference du Cercle, dont DE eſt diametre, eſt égal au rectangle de BE, par la circonference du Cercle, dont DF eſt le diametre.

Les deux Triangles DEF & DEB ſont ſemblables: donc BD : : BE, DF : : DE, or DF eſt à DE, comme les circonferences des Cercles, dont ils ſont les diametres; partant le le rectangle de BE, par la circonference du Cercle, dont DF est le diametre, est égal au rectangle de BD, par la circonference du Cercle; dont DE est le diametre. Ce qu'il falloit prouver.

THEOREME XX.

La surface d'un Spheroïde est égale au rectangle fait de son axe par la circonference du Cercle, ou Sphere qui lui est inscrite.

PAR le Theorême précedent, puisque la surface de chaque partie du Spheroïde, est égale au rectangle fait de chaque partie de son axe à laquelle elle répond, & de la circonference du Cercle ou Sphere, qui lui est inscrite, toute la surface entiere sera égale au rectangle de tout l'axe par la circonference du Cercle ou Sphere qui lui est inscrite, te, puiſque le tout & ſes parties ſont un produit égal, quand ils ſont multipliez par une même grandeur.

THEOREME XXI.

La ſurface d'une Sphere eſt égale au rectangle de ſon axe par la circonference d'un Cercle, qui a même diametre que cette Sphere.

CAR on ſçait que la Sphere eſt formée par la révolution d'un demi Cercle, ſur ſon diametre comme axe; or par le III. Lemme, le Cercle peut être conſideré comme un polygone régulier d'une infinité de côtez, ainſi par la définition du Spheroïde, la Sphere eſt un Spheroïde d'une infinité de Cercles, dont l'axe par conſequent eſt égal à l'axe ou diametre de la Sphere; ainſi puiſque par le précedent Theorême, la ſurface du Spheroïde eſt égale au rectan-

rectangle fait de son axe par la circonference d'un Cercle, dont le diametre est celui de la Sphere qui lui est inscrite, la surface de cette Sphere sera égale de même au rectangle fait de son axe, & de la circonference d'un Cercle, qui a même diametre que cette Sphere. Ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME XXII.

La surface d'une Sphere est égale à celle du contour d'un Cylindre ou elle est inscrite, qui a même hauteur que son axe.

LA surface de la Sphere AMNC, Fig. 14. est égale à un rectangle fait de son axe, par la circonference du Cercle fait sur son diametre MN. Or la surface du Cylindre où cette Sphere est inscrite, dont les côtez DP, EQ sont égaux à AC, l'axe de cette Sphere eſt égale à ce même rectangle, car comme on l'a pû remarquer, elle eſt égale au rectangle fait de PD, par la circonference du Cercle de ſa baſe, qui a pour diametre PQ, égal à MN, puiſque le diametre d'une Sphere inſcrite dans un Cylindre, doit être égal à celui de la baſe du Cylindre, ſelon l'idée qu'on a des figures inſcrites.

Or puiſque la ſurface de la Sphere eſt égale à celle du Cylindre dans lequel elle eſt inſcrite, & que cette ſurface de Cylindre eſt quadruple du Cercle de ſa baſe; il s'enſuit que la ſurface d'une Sphere ſera quadruple de celle de ſon grand Cercle, puiſque ce Cercle eſt le même que celui qui ſert de baſe au Cylindre, où la Sphere eſt inſcrite.

THEO.

THEOREME XXIII.

Si on coupe une Sphere inscrite dans un Cylindre par des plans perpendiculaires à son axe, la surface de chaque partie de la Sphere est égale à celle de la partie du Cylindre qui lui répond.

ON voit que AC axe de la Sphere, est la hauteur du Cylindre où la Sphere est inscrite, ainsi ce Cylindre touche par ses deux bases cette Sphere, je coupe l'axe AC par des plans perpendiculaires sur lui, qui coupe aussi le Cylindre: je dis que la surface de la partie MHIN, est égale à celle de la partie MGEN du Cylindre, comme aussi la surface de HAI, à celle de EFGD. Fig. 24.

Car on peut prendre cette Sphere pour un Spheroïde, ainsi la partie MHIN, & HAI pour des portions

 de

de Spheroïde ; ainsi par le Theorême 19 la surface de MHIN, est égale au rectangle BO, par la circonference d'un Cercle, dont MN est le diametre, auquel rectangle est égal la surface de FGMN, de même la surface de HAI, est égale au rectangle de AB, par la circonference d'un Cercle, dont GF est le diametre, auquel est égale la surface de la partie DEFG.

Par ce qui vient d'être dit dans les propositions précedentes, on pourra connoître aisément la superficie d'une Sphere, parce qu'on trouve par approximation la circonference de son grand Cercle, qui est à son diametre, comme 7 est à 22, selon Archimede, & comme nous avons fait voir dans le III. Lemme, qu'un Cercle étoit égal à un Triangle, qui avoit pour base la circonference du Cercle, & pour hauteur le rayon,

yon, on connoîtra la ſurface de la Sphere, puiſqu'elle eſt quatre fois celle de ſon grand Cercle : il nous reſte maintenant à faire voir le rapport que la ſolidité d'une Sphere a avec celle d'un Cylindre, dans lequel elle ſeroit inſcrite.

THEOREME XXIV.

Une Sphere eſt les deux tiers d'un Cylindre dans lequel elle eſt inſcrite.

JE ſuppoſe que ABCD ſoit un Cylindre, dont la hauteur QE eſt le rayon d'une demie Sphere CQD, dans lequel elle eſt inſcrite, joint à cette demie Sphere inſcrite dans ce Cylindre, eſt un Cone ABE, qui a pour baſe un Cercle, dont AB eſt le diametre, & pour axe la hauteur ou le rayon QE; cela poſé, ſi le Cylindre, la Sphere, & le Cone ſont coupez par un plan OP, parallele à Fig. 11.

la base CD, à quel point que ce soit de l'arc RC.

Je dis que le Cercle pris dans le Cone, c'est-à-dire le Cercle, dont MN est le rayon, est égal à la couronne qui se trouve par la section, entre la surface du Cylindre, & celle de la Sphere, c'est-à-dire; à la couronne qui aura OL pour largeur. Pour éclaircir ceci, je dirai que couronne n'est autre chose que l'espace qui se trouve entre deux circonferences concentriques, par le moyen desquelles je veux prouver que le Cone ABE, qui est le tiers du Cylindre ABCD, est égal à ce qui manque à la demie Sphere inscrite dans le Cylindre, pour valoir le Cylindre entier; pour faire cela, considerez que le rayon LE, qui est l'hypotenuse d'un Triangle rectangle LME, est égal à la ligne OM, & que, par la 47. du 1. les quarrez

des

des côtez LM & ME, ſont égaux au quarré du côté LE, & que par conſequent le Cercle dont LE eſt le rayon, eſt égal aux Cercles, dont l'un a pour rayon LM, & l'autre pour rayon ME ; mais le Triangle MNE eſt iſocele, puiſqu'il eſt ſemblable au Triangle AQE, par conſequent le Cercle, dont MN ſera le rayon, ſera égal au Cercle, dont ME ſera le demi diametre.

Or comme le Cercle qui a pour rayon LM, ne peut être égal au Cercle, dont OM, ou HC, feroient les rayons, ſans ajoûter la couronne OL, ou le Cercle, dont ME, ou MN feroit le rayon ; il s'enſuit que la couronne OL eſt égale au Cercle, dont NM feroit le rayon, qui eſt comme vous voyez, un Cercle pris dans le Cone, ainſi l'on peut prouver de la même façon, que la

par-

partie du Cone RSE, eſt égale à l'eſpace TRC, compris entre la ſurface du Cylindre, & celle de la Sphere.

Or il ne reſte plus qu'à démontrer que la partie de la Sphere RQS, eſt égale à l'eſpace ATR; pour cela il faut, comme ci-devant, faire attention que ſi le Cylindre, la demi Sphere, & le Cone, ſont coupez par un plan FV, au deſſus du point R, que le Cercle dont HI ſeroit le demi diametre, eſt égal à la couronne dont FK eſt la largeur. Pour le prouver, conſiderez que les lignes FI & HE ſont égales, & que par conſequent les Cercles dont elles ſont les rayons ſeront égaux entr'eux, auſſi bien que les Cercles, dont les lignes KI & IE ſeroient les demi diametres; cela étant, comme le Triangle HIE eſt rectangle, & que

le

le Cercle dont IE, ou KI feroit le rayon, ne peut valoir le Cercle, dont HE, ou FI feroit le rayon sans la couronne FK, ou le Cercle, dont HI feroit le rayon: il s'ensuit donc que la couronne, dont FK est la largeur, sera égal au Cercle, dont HI feroit le rayon, la démonstration est la même pour tous les Cercles & les couronnes que pourroient former les sections prises dans tous les points de l'arc RQ: or comme je viens de faire voir que la demi Sphere CQD, avec le Cone ABE, valent autant que les Cylindres ABCD; il s'ensuit que puisque le Cone ABE, est le tiers du Cylindre, la demi Sphere CBD en sera les deux tiers, ce qui feroit la même chose à l'égard de la Sphere entiere, si elle étoit inscrite dans un Cylindre qui eût pour hauteur la ligne CD, qui est le diame-

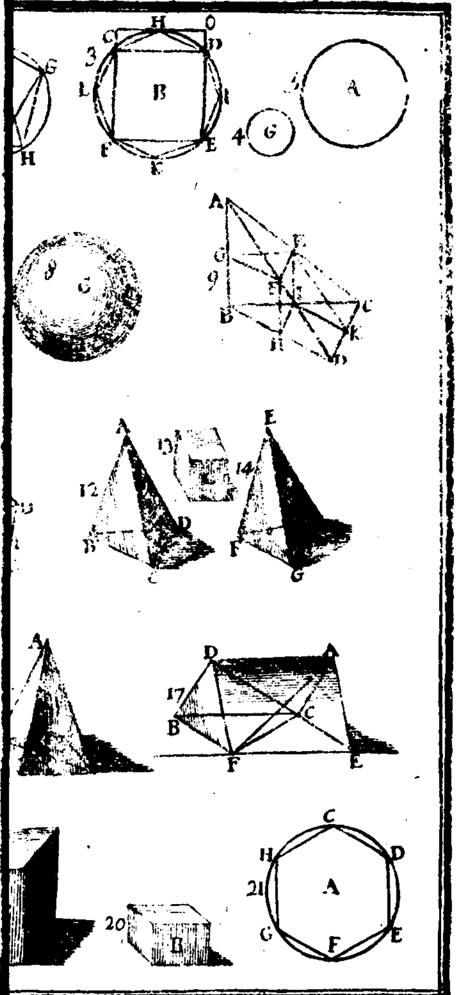
tre

tre de la Sphere. Ce qu'il falloit démontrer.

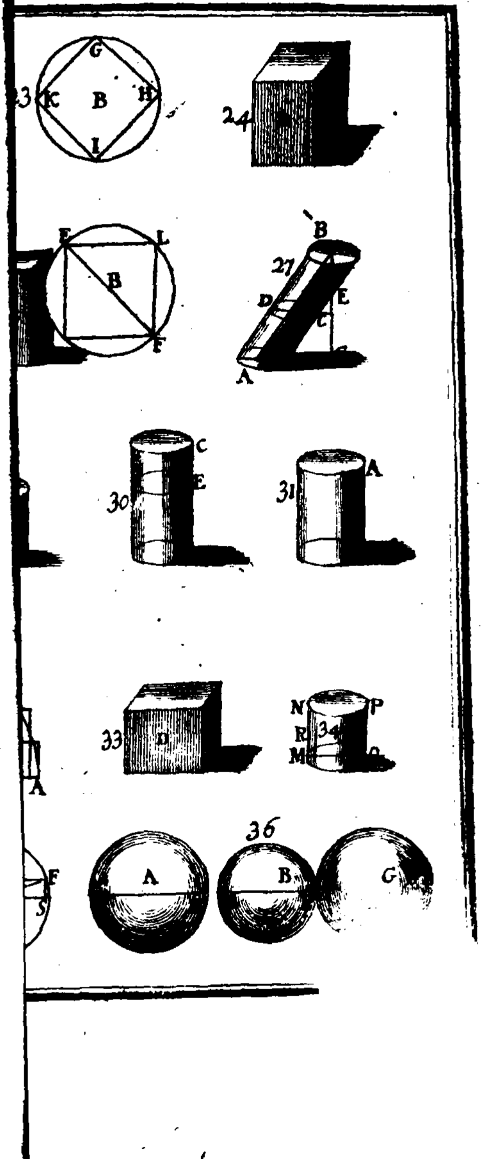
Il suit de là que pour trouver la solidité d'une Sphere, il faut multiplier l'aire de son grand Cercle par les deux tiers du diametre de la Sphere.

FIN.

re douzieme Planche premiere.



douzieme Planche deuxieme .



...re douzieme Planche troisieme.