EVCLIDIS ELEMENTA

EVCLIDIS
PRIORA
ELEMENTA SEX

AVCTORE

CAROLO EDVARDO FILIPPA
TAVRINENSE

REVERENDO PATRI

HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS IESV

DICATA.

AVGVSTÆ TAVRINORVM, M.DC.XCV.

Ex Typographia Ioannis Baptistæ Zappatæ.
Superiorum permissu.

REVERENDO PATRI
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS IESV
CAROLVS EDVARDVS FILIPPA.

TEnue hoc studiorum meorum opus, in obsequentissimi amoris in te mei pignus, tibi sistere non equidem auderem, nisi validissima æquè, ac suauissima vi impulsus, infra te alium adire, cui deuoueam, mihi integrum minimè esse, existimarem. Humili vultus colore apertè satis libellus ipse fatetur, id sibi pretij minimè inesse, quod tuis dignum auspicijs efficiat. Verùm Auctoris sui ingenio conformis, ac veluti moribus imbutus, arcano quodam amoris impetu, moræ impatiens

ad

ad te fertur, eò magis coactus, quò magis volens. In publicum enim prodire non sustineret, nisi tuo à nomine sibi decus, & patrocinium polliceretur? Quidni autem polliceatur? In eo potiùs, quàm mentis meæ, humanitatis tuæ opus elucescet, qua vnicè actus, iam pridem imperitum prorsùs, Mathematicæ disciplinæ, quæ te Patronum, ac lumen agnoscit, ad studia priuatim erudire non es dedignatus. Quapropter non accedit hic quidem ad te nunc primum, sed postquam à te difluxit, libens. ac suopte ingenio, vndè processit, regreditur; non tàm obsequium testaturus suum, quàm æquissimam mentis tuæ censuram subiturus. Hinc habes, quid in publicum proferam; tui scilicet Fontis aquam: quo impellente; tuis non minùs iussibus, quàm amori in te meo obsequendi desiderio: denique quid tibi vni me laborem hunc meum, offerre dicam, an reddere cogat. Hoc quoque, velim, scias, me summoperè delectari; quod nactus occasionem sim, qua amplissimis mihi collatis à te beneficijs, aliquid habeam, quod reponam. Id tamen ipsum tibi debeo: mihi siquidem deesset, quo meritis in me tuis responderem, nisi id quoque à te accepissem. Vale.

AD

AD LECTOREM.

QVas pridem ex Græcis, Latinisque scriptis excerpserant Euclidis Demonstrationes, Theon, Campanus, Commandinus, Steuinus, & alij, inter quos præclarè, & locupletissimè Christophorus Clauius Societatis Iesu, iterum tibi damus, Amice Lector, sed recensitas, & breuius colligatas. Quasdam enim immutauimus longas nimis, quasdam verò in partem expunximus etiam, ne quid in illis extaret, nisi quod pernecessarium, perutileque foret in intellectu. Quidquid deindè Demonstratio est, id aut Problema est, aut Theorema. Problema vocamus propositionem, quæ docet aliquid facere v. g. triangulum æquilaterum super data recta constituere. Theorema autem appellamus eam propositionem, quæ passionem aliquam vnius, vel plurium quantitatum simul perscrutatur, vt quod omne triangulum habeat tres angulos æquales duobus rectis. Quanta verò sit Mathematicæ vtilitas, breui intelliges. Vale, & stude.

Citationes ità exprimuntur.

Def. 1.	*Definitio prima, & sic de alijs numeris, vt Def. 4. &c.*
Post. 1.	*Postulatum primum.*
Ax. 1.	*Axioma primum.*
Prop. 1.	*Propositio prima, & sic secunda, tertia &c.*
1. 1.	*Prima propositio, vel definitio &c. libri primi, & sic 3. 2. tertia secundi libri &c.*

Ex his aliæ citationes, à quolibet facilè poterunt intelligi. Eadem enim in omnibus est ratio.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM PRIMVM.

DEFINITIONES.

I.

PVnctum est, cuius nulla pars.

II.

Linea est longitudo sine latitudine, cuius termini sunt puncta.

III.

Recta linea est, quæ ex æquo sua interiacet puncta; seù est breuissima extentio ab vno puncto ad aliud.

IV.

Superficies est, quæ longitudinem, latitudinemque tantùm habet, cuius extrema sunt lineæ.

V.

Plana superficies est, quæ ex æquo suas interiacet lineas.

VI.

Planus angulus est duarum linearũm in plano se mutuò tangentium, & non in directum iacentium,
22. Alterius ad alteram inclinatio.

VII.

Quod siquæ angulum continent lineæ, fuerint rectæ rectilineus ille angulus appellatur; si curuæ curuilineus; si vna curua, & alia recta, mixtus dicitur.

VIII.

Cum verò recta linea super rectam consistens lineam eos, qui deinceps sunt angulos, æquales inter se facit, rectus est vterque æqualium angulorum: & quæ insistit recta linea perpendicularis, vocatur eius, cui insistit. Qui verò angulus maior est recto, Obtu-

f. 16. sus vocatur: qui minor est, Acutus dicitur.

IX.

Terminus est, quod alicuius extremum est; Figura verò, quæ sub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

X.

Circulus est figura plana, sub vna linea compre-

f. 2. hensa, quæ peripheria appellatur, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ, inter se sunt æquales. Hoc verò punctum centrum circuli appellatur.

XI.

Diameter autem circuli, est recta quædam linea per centrum ducta, & ex vtraque parte in circuli cir-

f. 1. cumferentiam, seù peripheriam terminata.

XII.

f. 4. Semicirculus est figura, quæ continetur sub diametro, & sub ea linea, quæ de circuli peripheria aufertur.

XIII.

Rectilineæ figuræ sunt, quæ sub rectis lineis continentur. Trilateræ quidem sub tribus. Quadrilateræ, quæ sub quatuor. Multilateræ, quæ sub pluribus, quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.

XIV.

Trilaterarum porrò figurarum *quoad latera*. Æquilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

f 4. lia. Isosceles, quod sub duobus æqualibus continetur
8. lateribus; Scalenum, quod sub tribus inæqua-
7. libus.

XVI.

Rursus *quoad angulos* Rectangulum quidem trian-
f. 7. gulum est, quod rectum habet angulum. Amblygo-
9. nium est, cuius vnus angulus obtusus est. Oxigo-
26. nium, quod tres habet angulos acutos.

XVI.

Quadrilaterarum autem figurarum. Quadratum, quidem est figura æquilatera. & rectangula. Altera parte longior est quæ rectangula est, sed non æquilatera. Rhombus est, quæ æquilatera, sed rectangula
f. 37. non est. Rhomboides est, quæ æquilatera, nec rectan-
28. gula est, sed ex opposito latera, & angulos habet
36. æquales. Præter has, reliquæ quadrilateræ figuræ, Trapezia appellantur.

POSTVLATA.

I.

Postulatur vt à quouis puncto, in quoduis punctum rectam lineam ducere concedatur.

II.

Et rectam lineam terminatam, in continuum, rectumque producere.

III.

Item quouis centro, & interuallo circulum describere.

IV.

Item quacumque magnitudine data, sumi posse aliam magnitudinem, vel maiorem, vel minorem.

AXIOMATA.

I.

Quæ ſuperpoſita congruunt, æqualia ſunt: Et è contra, quæ æqualia ſunt, ſuperpoſita congruunt.

II.

Quæ eidem æqualia, & ad inuicem ſunt æqualia.

III.

Totum eſt ſua parte maius; & æquale eſt omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis.

IV.

Si æqualibus, æqualia, vel communia adijciantur; tota ſunt æqualia.

V.

Et ſi ab æqualibus æqualia, vel communia auferantur, quæ relinquuntur, æqualia erunt.

VI.

Si inæqualibus, æqualia, vel communia adiecta ſint, tota ſunt inæqualia.

VII.

Et ſi ab inæqualibus, æqualia, vel communia ablata ſint, reliqua ſunt inæqualia.

VIII.

Quæ eiuſdem, vel æqualium, duplicia, aut dimidia ſunt, & inter ſe ſunt æqualia.

IX.

Diameter diuidit bifariam circulum.

X.

Duæ rectæ lineæ non habent vnum, & idem ſegmentum commune.

XI.

Omnes anguli recti, ſunt inter ſe æquales.

XII.

Duæ rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt.

Quæ

Quæ posteriora quatuor axiomata cum videantur non ita per se nota, vt communi dignentur assensu, poterunt ideò sic demonstrari.

Sit circulus A B C D, cuius centrum sit E, Diameter verò A C *Def.* 11. Dico per Diametrum A E C, Secari bifariam circulum. Concipiatur enim animo pars A D C, superponi parti A B C, ita vt Diameter A C sit communis vtrique: circumferentia A D C, vel congruet tota circumferentiæ A B C, vel non; si primum iam patet axiomatis veritas *ax.* 1. si secundum, cadat aliquod punctum F peripheriæ A D C, extra, vel intra A B C, ductaque recta à centro E per
f. 1. F, secante peripheriam A B C in G *post.* 1. erunt duæ rectæ E F, E G, inter se æquales *Def.* 10. pars toti, Quod est absurdum *ax.* 3. & sic de quolibet alio puncto; Non ergo cadet aliquod punctum vnius partis extra aliam, vel intra, sed ambæ sibi mutuò congruent, quare æquales erunt *ax.* 1. Quod erat ostendendum.

Habeant si fieri potest duæ lineæ rectæ ABC, ABD; idem segmentum commune A B: Facto circulo ex interuallo A B. *post* 3. secante ambas rectas in punctis C, D; Erunt duæ circumferentiæ AED, AEDC,
f. 2. inter se æquales *ax.* 9. pars toti; Quod est absurdum *ax.* 3 Non ergo duæ lineæ rectæ possunt habere vnum & idem segmentum commune. Quod erat ostendendum.

Concipiatur animo superponi punctum E, vna cum linea E F, puncto B, & lineæ B C: Si E D, cadit supra B A, patet axiomatis veritas *ax.* 1. Si autem aliò cadat erit angulus D E F, minor, vel maior recto
f. 3. A B C, ideòque vel acutus, vel obtusus *def.* 8. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Anguli igitur recti sunt inter se æquales. Quod erat ostendendum.

Constat denique vltimum axioma, quod alij postulant concedi, ex def. 3. cum enim linea recta sit breuissima extentio ab vno puncto ad aliud, duci poterit vnica tantum linea à puncto E ad punctum F,
f. 7. quare si E F, est recta, non erit E G F, recta. Quod erat ostendendum.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

Super data recta linea terminata A B, triangulum æquilaterum construere.

Ex centris A, B, interuallis A B, B A, describantur
f. 4. duo circuli *post.* 3 se secantes in C, ex quo puncto ductæ rectæ C A, C B, *post.* 1. erunt æquales eidem A B, *def.* 10. Quare erunt & ipsæ inter se æquales *ax.* 2. & triangulum ABC, æquilaterum erit *def.* 14. Quod erat faciendum.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

Ad datum punctum A, datæ rectæ lineæ B C, æqualem rectam lineam ponere.

Ducatur recta B A *post.* 1. constituaturque super ipsam *prop.* 1. triangulum æquilaterum A D B, productis autem D A, in E, & D B, in F *post.* 2. centro B, interuallo B C, describatur circulus G C; & rursus
f. 5. centro D, interuallo D G, alius circulus describatur G H *post.* 3. Erunt igitur B C, & B G, æquales, item G D, D H, *def* 10. Quare demptis æqualibus D B, D A, *def.* 14. Reliquæ A H, B G, hoc est B C, æquales erunt, *ax* 5. Quod erat faciendum.

PRO-

PROBL. 3. PROPOS. 3.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus A B, & C, de maiore A B, minori C, rectam lineam abſcindere.

Ad alterum extremum punctum lineæ maioris A B, nempè ad A, ponatur linea A D, æqualis rectæ C, *prop.* 2. & centro A interuallo A D, deſcribatur circulus ſecans A B, in E, *poſt.* 3. A E, æqualis fiet A D *def.* 10. hoc eſt lineæ rectæ C, *ax.* 1. Quod erat faciendum.

THEOR. 1. PROPOS 4.

Si duo triangula A B C, D E F, duo latera A B, A C, duobus lateribus D E, D F, æqualia habuerint alterum alteri, & angulum BAC, angulo EDF, æqualem ſub æqualibus rectis lineis contentum; & baſin BC, baſi EF æqualem habebunt, & triangulum, triangulo æquale erunt: ac reliqui anguli reliquis angulis, æquales erunt, alter alteri, ſub quibus æqualia latera ſubtenduntur.

Intelligatur adaptari triangulum A B C triangulo D E F: cadente angulo A, in angulum D, rectæ A B, A C, congruent rectis D E, D F, & puncta B, C, cadent in puncta E, F *ax.* 1. quare baſis B C, baſi F E, congruet: ſi enim congruentibus punctis, & quidem B, ipſi E, & C ipſi F, baſis B C, baſi E F, non congruit duæ lineæ rectæ ſuperficiem claudunt, quod eſt abſurdum *ax.* 12. congruit ergo baſis B C, baſi E F; quare æquales erunt inter ſe, & totum triangulum, toto trigulo æquale, & reliqui anguli, reliquis angulis, sub quibus æqualia latera subtenduntur, æquales erunt *ax.* 1. Quod erat ostendendum.

THEOR. 2. PROPOS. 5.

Isoscelis trianguli A B C, qui ad basin B C sunt anguli ad inuicem, sunt æquales; & productis æqualibus rectis A B, in D, & A C, in E, qui sub basi sunt anguli, ad inuicem æquales erunt.

Capiatur in recta A D, punctum F, & auferatur à maiore A E, ipsi A F, minori æqualis A G *prop.* 3. Ducantur F C, G B; quoniam A F, ipsi A G. *ex const.* & A C ipsi A B, *ex hyp.* sunt æquales, communem angulum concludentes B A C, totum triangulum F A C, toti triangulo G A B, erit æquale *prop.* 4. cum rursus
f. 8. linea B F, æqualis sit lineæ C G, *ax.* 5. & F C, ipsi B G, angulique B F C, C G B, comprehensi æquales *prop.* 4. erunt triangula B F C, & C G B, quoque inter se æqualia; quare anguli F B C, B C G, sub basi B C, æquales sunt *prop.* 4. Item cum totus angulus A B G, toti A C F æqualis sit ostensus; & pars C B G, parti B C F æqualis, reliquus A B C, reliquo A C B ad basin BC, æqualis erit *ax.* 5. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Colligitur primo etiam in triangulo æquilatero angulos supra, & infra basin, si latera producantur esse æquales.

2. Omne triangulum æquilaterum, esse etiam æquiangulum, nam sumptis quibuscumque duobus lineis pro lateribus, reliqua pro basi, semper ostendetur angulos ad basin esse æquales inter se.

THEOR.

THEOR. 3. PROPOS. 6.

Si trianguli A B C, duo anguli A B C, & A C B, æquales ad inuicem fuerint; æquales quoque angulos ſubtendentia latera A C, A B æqualia ad inuicem erunt.

Si enim ſunt inæqualia, ſit A B maius, fiatque B D æquale minori A C *prop.* 3. ducaturque D C: quoniam igitur latus B D, æquale eſt lateri A C, *ex conſt.* & latus B C, commune, anguliq; comprehenſi DBC, A C B, æquales, *ex hyp.* erunt triangula DBC, & ABC inter ſe æqualia *prop.* 4. pars toti; quod eſt abſurdum
f. 9. *ax.* 3. Latus igitur AB, lateri AC, non eſt inæquale. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

Colligitur ex hac propoſitione, quod omne triangulum æquiangulum eſt etiam æquilaterum, nam acceptis quibuſlibet duobus angulis ſub vno latere, oſtendetur ſubtendentia latera æqualia eſſe inter ſe.

THEOR. 4. PROPOS. 7.

Super eadem recta linea A B, duabus eiſdem rectis lineis, aliæ duæ rectæ lineæ æquales altera alteri non conſtituentur ad aliud, atque aliud punctum ad eaſdem partes, eoſdemque fines A, & B poſſidentes.

Si enim eſt poſſibile ſuper eadem recta linea A B, duabus eiſdem rectis lineis A C, C B, aliæ duæ A D, D B, æquales altera alteri conſtituantur ad aliud punctum,

f. 11. ctum, quam C, hoc eſt D, quod certè in linea A C, vel C B, cadere non poteſt, nam lineæ A D, A C, vel B D, B C, eſſent æquales pars toti; quod eſt abſurdum. Cadat igitur intra triangulum A B C: & producta B D, in F, & B C in E, ductaque recta C D, erunt anguli A C D, A D C ad baſin æquales *prop. 5.* quòd cum angulus A C D minor ſit angulo E C D, & eodem minor erit A D C: Rurſus cum anguli E C D, F D C, ſub baſi ſint æquales, & angulus FDC,
f. 12. angulo A D C, minor, & eodem minor erit angulus E C D, quod eſt abſurdum, cum oſtenſus ſit maior: non ergo cadere poteſt punctum D, intra triangulum A B C. Cadat igitur extra, certè punctum C non cadet ſupra rectam A D, vel D B, vel intra triangulum A D B, nam ſequeretur idem quod ſupra; ſed aliò cadat ita vt altera linearum poſteriorum nempè A D, ſecet alteram priorum, vt ipſam B C. Connectantur illa duo puncta C, D: quoniam igitur CA, æqualis eſt
f. 10. AD, *ex hyp.* erunt anguli ad baſin C, D, hoc eſt ACD, A D C, æquales inter ſe *prop. 5.* quòd cum angulus A C D maior ſit angulo B C D, & eodem maior erit angulus C D A, & multo maior angulus B D C; quia verò latera D B, B C, ſunt æqualia, anguli ad baſin BCD, BDC æquales erunt; quod eſt abſurdum; ~~cum~~ oſtenſus iam ſit angulus C D B, angulo B C D, maior. Non ergo æquales ſunt inter ſe AC, AD, & inter ſe quoque, BC, BD. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 5. PROPOS. 8.

Si duo triangula ABC, DEF, duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DF, alterum alteri, æqualia habuerint, & baſin BC, baſi

EF,

EF, æqualem: Angulum etiam angulo sub æqualibus rectis lineis contentum æqualem habebunt.

Superponatur basis BC, basi EF, cadente puncto B, in punctum E, & C in F, punctum A non in aliud
f. 13. punctum cadet, quàm in D; *prop.* 7. & totum triangulum, toti triangulo congruet; quare angulus BAC, æqualis erit angulo EDF. Quod erat ostendendum.

PROBL. 4. PROPOS. 9.

Datum angulum rectilineum B A C, bifariam secare.

Accepto super AB quolibet puncto D, à linea AC, auferatur A E æqualis ipsi A D, *prop* 3 ductaque D E super ipsam, constituatur æquilaterum triangulum DFE, *prop.* 1. & connectatur A F. Cum igitur A D
f. 14. æqualis sit A E, *ex const.* & A F communis, basis verò D F basi E F æqualis, erit angulus DAF æqualis angulo EAF *prop* 8 Quod erat faciendum.

PROBL. 5. PROPOS. 10.

Datam rectam lineam terminatam A B, bifariam secare.

Constituatur super A B triangulum æquilaterum ACB, *prop.* 1. angulus verò ACB secatur bifariam per rectam CD, *prop.* 9. erunt duo triangula ACD, DCB,
f. 15. æqualia *prop* 4. quare & basis A D, basi D B, æqualis erit *prop.* 4. Quod erat faciendum.

PROBL.

PROBL. 6. PROPOS. 11.

Data recta linea infinita EF, à puncto D, in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

Accepto in ipsa ED, quouis puncto A, ponatur ipsi DA, æqualis DB, *prop.* 3. super verò AB constituatur æquilaterum triangulum ABC, *prop.* 1. & connectatur DC: quoniam latus AD, æquale est lateri DB, *ex const.* & latus DC commune, basis verò BC, basi AC æqualis, erit triangulum CDA, triangulo
f. 15. CDB, æquale *prop* 8. quare angulus CDA, angulo CDB, æqualis est; ideoque recti, & linea CD, perpendicularis ipsi AB, *def.* 8. hoc est EF. Quod erat faciendum.

PROBL. 7. PROPOS. 12.

Superdatam rectam lineam infinitam EF, à dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere.

Accipiatur in altera parte ipsius rectæ EF, quodlibet punctum G; & centro C, interuallo CG circulus describatur secans EF in punctis A, & B, diuisaque AB, bifariam in puncto D. *prop.* 10. ducantur CB,
f. 15 CA. Quoniam latus CB æquale est lateri CA, & CD commune, basis verò BD æqualis basi DA, erunt triangula CAD, CBD inter se æqualia *prop.* 8 quare anguli ad D sunt æquales, & linea CD perpendicularis *def.* 8. Quod erat faciendum.

THEOR.

THEOR. 6. PROPOS. 13.

Cum recta linea A B super rectam C D. consistens, angulos fecerit A B C, A B D, aut duos rectos, aut duobus rectis, æquales efficiet.

Si enim A B est perpendicularis ipsi C D, iam patet assertum ex def. 8 Si non; excitetur à puncto B perpendicularis B E, *prop.* 11. Quoniam igitur duo anguli
16. EBC, EBD recti, æquales sunt tribus angulis EBA, ABC, EBD, quibus æquales sunt CBA, ABD, erunt duo recti EBC, EBD, duobus quoque CBA, ABD, æquales, *ax.* 2. Quod erat ostendendum.

THEOR. 7. PROPOS. 14.

Si ad aliquam rectam lineam A B, atque ad eius punctum B, duæ rectæ lineæ CB, BD. non ad easdem partes ductæ vtrobique duobus rectis, angulos æquales fecerint; ipsæ in directum rectæ lineæ ad inuicem erunt.

Si enim non: esto in directum lineæ C B, alia B F constituta, erunt igitur duo anguli ABC, ABF duobus rectis equales *prop.* 13. quibus rectis æquales quo-
16. que sunt A B C, A B D. *ex hypothesi*, quare dempto communi ABC, erunt duo ABF, ABD inter se æquales *ax.* 5. pars toti; quod est absurdum; Non alia itaque in directum esse potest ipsi CD, quam BD. Quod erat ostendendum.

THEOR 8. PROPOS. 15.

Si duæ rectæ lineæ AB, CD se ad inuicem secuerint in E, angulos ad verticem oppositos efficient inter se æquales.

Quoniam CE cadit super rectam AEB, erunt anguli AEC, CEB, æquales duobus rectis *prop.* 13. eadem ratione duobus rectis æquales erunt duo BED, *f.* 17. BEC, quare dempto communi CEB, remanebunt duo AEC, & DEB ad inuicem æquales; eodem modo ostendetur de duobus ad verticem CEB, AED. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Colligitur primo duas lineas rectas se mutuo secantes efficere ad punctum sectionis quatuor angulos æquales, quatuor rectis.

2. Omnes angulos constitutos ad vnum, & idem punctum, quotcumque fuerint simul sumptos, quatuor rectis tantum æquales esse.

THEOR. 9. PROPOS. 16.

Cuiuscunque trianguli, veluti ABC vno latere BC, producto in D, exterior angulus ACD interno, & opposito CBA, seù BAC maior est.

Secta linea AC, bifariam in E *prop.* 10 iungatur BEF, fiatque EF æqualis BE, & iunctis F, C, protrahatur AC, in G: quoniam igitur BE æqualis est EF item *f.* 18. item AE, ipſi EC, angulique AEB, FEC ad verticem æquales *prop* 15. erit triangulum AEB, triangulo FEC æquale, & angulus BAC. angulo ECF, æqualis *prop* 4. quare cum angulus ACD maior ſit angulo ACF, & angulo BAC, ipſe maior erit; ſimiliter quoque, ſi ſecetur bifariam linea BC, oſtendetur angulus BCG, hoc eſt ACD *prop.* 15. maior angulo ABC. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

Colligitur quod ab vno, eodemque puncto ad eandem rectam lineam duci non poſſunt, plures quam duæ rectæ lineæ inter ſe æquales; nam ſi poſſibile eſſet, conſtituerentur duo triangula, quorum alterum haberet angulum externum, interno, & oppoſito æqualem; quod eſt abſurdum.

THEOR. 10. PROPOS. 17:

Cuiuſcunque trianguli vt ABC, duo anguli duobus rectis ſunt minores.

Producta BC in D, erit angulus ACD, angulo BAC maior *prop.* 16 addito igitur communi ACB, *f.* 18. erunt duo anguli ACB, CAB, duobus ACD, ACB, minores, adeòque minores duobus rectis; ſimiliter oſtendetur de duobus quibuslibet alijs. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

Colligitur primo in quocumque triangulo ſi vnus angulus eſt rectus, aut obtuſus, reliquos eſſe acutos; nam ſi vnus ex reli-

reliquis esset quoque vel rectus, vel obtusus; in eodem triangulo, duo anguli essent æquales, vel maiores duobus rectis, cuius contrarium ostensum est.

Colligitur 2. ab eodem puncto ad eamdem rectam lineam non posse deduci duas, aut plures lineas perpendiculares, alioquin duo anguli interni effecti à duabus perpendicularibus, essent æquales duobus rectis; quod est absurdum.

Colligitur 3. si linea recta cum alia recta angulos inæquales, hoc est vnum acutum, alterum obtusum faciat, lineam perpendicularem ab eius lineæ quouis puncto demissam ad aliam illam rectam, cadere ad partes anguli acuti; quoniam si caderet à parte anguli obtusi, triangulum esset constitutum, habens duos angulos maiores duobus rectis, vnum quidem obtusum & alterum rectum; quod est absurdum.

Colligitur 4. Omnes angulos trianguli æquilateri, & duos angulos supra basin trianguli isoscelis esse acutos, cum ad inuicem sint æquales.

THEOR. 11. PROPOS. 18.

Cuiuscunque trianguli nempè ABC, maius latus A C maiori angulo A B C, subtenditur.

Ex maiori A C, ipsi A B, sumatur æquale A D, ducaturque D B: erit angulus externus A D B interno
f. 19. BCD maior *prop.* 16. cui ADB cum æqualis sit angulus ABD *prop.* 5. eodem BCD & ipse maior erit; quare multo maior erit angulo BCD totus angulus ABC qui opponitur maiori lateri AC: eodem pacto demonstrabitur maior angulo A. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Manifeſtum fit ex hac demonſtratione omnes tres angulos trianguli ſcaleni eſſe inæquales, cum inæqualia habeant latera def. 14.

THEOR. 12. PROPOS. 19.

Cuiuſcunque trianguli puta ABC, maior angulus A B C maiori lateri A C, opponitur.

Si ipſum AC maius non eſt, erit aut æquale alterutri, aut minus vtroque. Si primum habebit angulus
f.19. B, in triangulo ABC, alterum angulum ſibi æqualem contra hypotheſin: ſi ſecundum, erit in eodem triangulo, alius angulus, angulo B, maior, quod eſt contra hypotheſin: quare latus AC, nec æquale alterutri, nec minus vtroque eſſe poteſt; ergo maius: Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

Hinc ſequitur ſi ab vno, eodemque puncto ad eandem rectam lineam ducantur plures rectæ eam, quæ perpendicularis eſt, eſſe omnium minimam, nam ipſa ſemper erit oppoſita vni angulo acuto prop. 17. *alia verò angulo recto ab ipſa perpendiculari facto.*

THEOR. 13. PROPOS. 20.

Cuiuſcunque trianguli, vt DBC duo latera quomodocunque aſſumpta DB, DC, reliquo BC, ſunt maiora.

Producta CD, in A, fiat AD æqualis DB, & connectatur A B; erunt anguli D A B, DBA æquales *prop. 5.*
f.19. sed angulus ABC, angulo ABD maior est, igitur & angulo A maior erit, quare latera BD, DC, (hoc est latus AC subtensum maiori angulo B.) maiora sunt reliquo B C subtenso minori A *prop. 18.* Quod erat ostendendum.

THEOR. 14. PROPOS. 21.

Si supra eãdem basin BC, intra triangulum ABC, aliud BDC constituatur; huius latera minora quidem erunt duobus lateribus alterius; maiorem verò angulum continebunt.

Protracta BD, in E, erunt duo latera, BA, AE, reliquo B E maiora *prop. 20.* quare si addatur commune EC, erunt duo BA, AC duobus BE, EC, maiora: ea-
f.20. dem ratione ostendetur duo latera E C, B E maiora esse duobus CD, DB, igitur & eisdem multo maiora erunt duo BA, AC. Rursus quia angulo A maior est externus DEC, quo suus externus BDC maior quoque est *prop. 16.* eodem angulo A, angulus BDC maior erit: Quod erat ostendendum.

PROBL. 8. PROPOS. 22.

Triangulum construere habens tria latera æqualia tribus datis rectis A, B, C, quarum duæ reliqua sint maiores.

In linea quacunque D E sumatur D F æqualis ipsi A; F G æqualis ipsi B, & G H æqualis ipsi C: centro deinde

deinde F interuallo F D describatur circulus, item centro G, interuallo G H, describatur alius circulus f. 21. secans primum in I; ducaturque IF, IG. Erit triangulum factum FIG, habens latus IG æquale rectæ GH, hoc est C, & latus I F æquale rectæ D F hoc est A, reliquumque FG æquale rectæ B. Quod erat faciẽdum.

PROBL. 9. PROPOS. 23.

Ad datam rectam lineam A B, datumque in ea punctum C, dato angulo rectilineo DEF, æqualem angulum constituere.

Ducatur quælibet basis D F; deinde constituatur *prop.* 22. ad punctum C datæ rectæ A B triangulum ICG habens tria latera æqualia tribus rectis ED, DF, f. 22. FE, quod æquale erit triangulo DEF *prop.* 8. eritque angulus I C G, æqualis angulo D E F. Quod erat faciendum.

THEOR. 15. PROPOS. 24.

S triangulum ABC, duo latera AB, AC, æqualia habeat duobus lateribus D E, D F, alterius trianguli DEF, angulum vero A basi oppositum maiorem angulo D, & basin basi maiorem habebit.

Superponatur latus DE, lateri AB, quæ cum æqualia sint congruent cadente puncto D in A, & E in B; latus DF cadat intra latera AB, AC, propter minoritatem anguli, & basis EF cadat aut infra basin BC, aut in

 ipsam,

ipſam, aut ſupra ipſam. Cadat primo infra, iungatur FC: quoniam latera AC, AF æqualia ſunt, erunt anguli ACF, AFC æquales; ſed angulus A C F maior
f. 23. eſt angulo B C F, ergò & eodem maior erit angulus AFC, & multo maior totus angulus BFC; quare cum latus BC ſubtendatur maiori angulo F, & latus BF minori angulo B C F, erit baſis B C, baſi EF maior.
f. 24. Cadat ſecundò in ipſam BC, erit BF hoc eſt EF pars ipſius B C, adeòque minor erit. Cadat tertiò ſupra B C: erunt duo latera A F, F B minora lateribus BC, AC; *prop.* 21. Quare demptis æqualibus rectis AF,
f. 25. AC, reliqua BF, hoc eſt baſis EF, reliqua BC minor erit. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 16. PROPOS. 25.

Si è contra triangulum ABC habeat duo latera duobus lateribus, alterius trianguli DEF, æqualia vtrumque, vtrique, baſin verò B C, baſi E F maiorem: & angulum A baſi oppoſitum angulo D maiorem habebit.

Si enim non; erit A, aut æqualis D, ideòque baſes B C, E F æquales *prop.* 4. quod eſt contra hypotheſin:
f. 23. Aut minor, & tunc baſis B C, baſi E F minor erit *prop.* 24. quod eſt pariter contra hypotheſin; Non ergo æqualis, aut minor eſſe poteſt, ſed maior. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 17. PROPOS. 26.

Si duo triangula ABC, DEF habeant duos angulos B, C, duobus angulis E, F, æquales vtrumque, vtrique; Vnumque latus vni la-

teri

teri æquale; siue quod æqualibus adiacet angulis, seù quod vni æqualium subtenditur: & reliqua latera, reliquis lateribus æqualia vtrumque, vtrique, & reliquum angulum A reliquo D, æqualem habebunt.

Sit primum latus BC, æqualibus angulis adiacens, lateri EF æquale. Superponatur latus BC, lateri EF; latera BA, CA, cadent supra latera ED, FD, propter æqualitatem angulorum, punctumque A cadet in punctum D. Quare angulus D æqualis erit angulo A, & reliqua trianguli A B C latera, reliquis trianguli D E F, lateribus, æqualia erunt. Sint deinde latera AB, DE, æquales angulos subtendentia inrer se æqualia. Superponatur latus A B, lateri D E: latus B C cadet supra latus E D propter æqualitatem angulorum, & punctum C, cadet in F. Si enim non: cadat in G; erit igitur angulus EGD, hoc est BCA, æqualis angulo EFD, externus interno; Quod est absur-
f.26. dum. Non ergo cadet punctum C, in aliud quam F. Quare angulus A, æqualis erit angulo D, & reliqua trianguli ABC latera, reliquis trianguli DEF lateribus, æqualia erunt. Quod erat ostendendum.

ALIÆ DEFINITIONES.

X V I I.

Parallelæ rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sint
f.27. plano, & ex vtraque parte in infinitum producantur in neutram sibi mutuò incidunt.

X V I I I.

Parallelogrammum est figura quadrilatera, cuius
f.28. bina opposita latera sunt parallela.

XIX.

Cum verò in Parallelogrammo diameter ducta fuerit, duæque lineæ lateribus parallelæ, secantes diametrum in vno eodemque puncto, ita vt in quatuor distribuatur parallelogramma: Appellantur duo illa per quæ diameter non transit complementa; Duo verò reliqua, circa diametrum consistere dicuntur.

f. 35.

POSTVLATVM, SEV HYPOTHESIS.

V.

Si in duas rectas lineas, recta linea incidens interiores, & ad easdem partes angulos duobus rectis minores faciat, rectas illas duas lineas in infinitum productas, sibi mutuò incidere, necesse esse ad eas partes, vbi sunt anguli, duobus rectis minores.

THEOR. 18. PROPOS. 27.

Si in binas rectas AB, CD, recta incidens linea E F, alternatim angulos B E F, C F E, æquales ad inuicem fecerit: Illæ duæ rectæ parallelæ erunt.

f. 27. Si enim non: concurrant vtcumque in G, erit igitur triangulum E G F, habens angulum externum B E F interno, & opposito E F C æqualem. Quod est absurdum *prop.* 16. Non ergò productæ concurrere possunt, quare parallelæ erunt *def.* 17. Quod erat ostendendum.

THEOR. 19. PROPOS. 28.

Si in binas rectas AB, CD, recta incidens

E F,

EF, exteriorem angulum HEB interiori, & opposito DFE, ad easdem partes æqualem fecerit, aut interiores BEF, DFE, & ad easdem partes duobus rectis æquales: parallelæ erunt illæ duæ rectæ.

Quoniam angulus internus DFE, æqualis est angulo HEB *ex hyp.* cui æqualis est angulus ad verticem AEF *prop.* 15. erit eidem AEF, æqualis alternus DFE:
f.27. quare parallelæ erunt AB, CD *prop.* 27. Deinde quia anguli interni BEF, DFE, æquales sunt duobus rectis, quibus quoque æquales sunt duo BEF, BEH, *prop.* 13. Ablato communi BEF, reliqui BEH, DFE æquales erunt externus interno: Quare parallelæ erunt AB, CD. Quod erat ostendendum.

THEOR. 20. PROPOS. 29.

In parallelas rectas lineas AB, CD, recta incidens EF: & angulos alternos AEF, EFD æquales, & exteriorem HEB interiori, & opposito EFD æqualem, & interiores BEF, EFD duobus rectis æquales efficit.

Si enim AEF, & EFD non sunt æquales, erit alter AEF maior, quare addito communi BEF, cum quo AEF est duobus rectis æquales *prop.* 13. erunt duo EFD, BEF, duobus rectis minores, ideòque productæ AB, CD concurrent *post.* 5. quod est contra hypothesin. Non sunt ergò duo anguli AEF, EFD alterni
f.17. inæquales. Quoniam rursus EFD æqualis est angulo AEF, cui æqualis ad verticem habetur HEB, eidem

quoque æqualis erit internus D F E, & addito communi BEF, cum BEH, & BEF ſint æquales duobus rectis *prop.* 13. erunt etiam duo interni D F E, B E F, duobus rectis æquales. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 21. PROPOS. 30.

Si duæ rectæ lineæ AB, CD, eidem LM parallelæ fuerint, & inter ſe parallelæ erunt.

Quoniam AB, LM, parallelæ ſunt, erit angulus externus H E B, interno, & oppoſito F I M æqualis
f.27.prop. 29. Eadem ratione angulus E F D, eidem F I M æqualis oſtendetur. Quare anguli HEB, EFD, æquales ad inuicem ſunt: Parallelæ igitur inter ſe ſunt duæ AB, CD *prop.* 28. Quod erat oſtendendum.

PROBL. 10. PROPOS. 31.

A dato puncto F, datæ rectæ lineæ AB, parallelam rectam lineam ducere.

Sumpto quolibet puncto E in linea A B, ducatur EF, fiatque in puncto F angulus DFE, æqualis alter-
*f.*27. no angulo A E F *prop.* 23. Erunt iam lineæ A B, F D *prop.* 27. parallelæ. Quod erat faciendum.

THEOR. 22. PROPOS. 32.

Cuiuſcunque trianguli puta ABC, vno latere producto BC, in D: exterior angulus A C D, duobus interioribus, & oppoſitis CAB, CBA eſt æqualis; & trianguli tres interiores anguli, duobus rectis ſunt æquales.

Ducta

Ducta namque ex puncto C recta CF parallela ipsi AB *prop.* 31. erit angulus externus D C F, interno, & opposito CBA æqualis *prop.* 29. rursus æquales erunt alterni F C A, C A B, quare totus A C D, æqualis est duobus internis, & oppositis C A B, C B A, quibus si
f. 18. addatur communis A C B, erunt tres anguli A C B, C A B, C B A æquales duobus A C B, A C D, hoc est duobus rectis *prop.* 13. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Colligitur primò quòd quando duo anguli unius trianguli sunt æquales duobus alterius, & reliquus illius, reliquo huius æqualis est.

Colligitur 2. in omni triangulo isoscele, cuius angulus lateribus æqualibus comprehensus est rectus, quemlibet reliquorum ad basin esse semirectum. At si ille obtusus est, reliqui ad basin sunt semirecto minores; si autem acutus fuerit, hi semirecto maiores erunt.

Colligitur 3. quemlibet angulum trianguli æquilateri esse unam tertiam duorum rectorum, vel duas tertias unius recti.

Colligitur 4. Angulos internos quadrilateræ figuræ esse æquales quatuor rectis, quinque latera verò sex rectis. Quia qualibet figura rectilinea resolui potest in triangula, & quidem in tot, quota ipsa est inter figuras rectilineas, vel in tot, quot ipsa figura habet latera, seu angulos, demptis duobus: Quot verò triangula erunt, bis tot recti sunt anguli.

THEOR. 23. PROPOS. 33.

Rectæ lineæ AB, CD, quæ æquales rectas lineas C A, DB ad partes easdem coniungunt, & ipsæ æquales, & parallelæ erunt.

Ducta

Ducta CB; erunt anguli alternatim A CB, D B C æquales. Quia verò A C æqualis est ipsi D B, & C B
f. 18. communis; Erit basis BA, basi CD æqualis, & angulus ABC: *prop. 4.* angulo BCD, æqualis. Quare AB, DC parallelæ *prop. 27.* inter se erunt, & æquales. Quod erat ostendendum.

THEOR. 24. PROPOS. 34.

Parallelogrammum A B C D habens diametrum CB, habet quæ ex aduerso æqualia, & latera, & angulos, atque illud bifariam secat diameter.

Quoniam enim A B parallela est ipsi C D *def. 18.* erunt anguli ABC, DCB æquales *prop. 29.* eadem ratione, quia B D parallela est ipsi A C, anguli BCA, DBC æquales sunt; Quare cum triangula A B C,
f. 18. DCB, habeant duos angulos ACB, ABC, duobus D B C, D C B æquales, latusque CB commune, erunt inter se æqualia *prop. 26.* igitur, & latus AB æquale erit lateri C D, BD ipsi A C, angulus verò BAC, angulo BDC, & totus angulus DBA, toti DCA. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Colligitur primò omne quadrilaterum habens latera opposita æqualia esse parallelogrammum; nam ducta diametro ostendetur duo illa triangula esse inter se æqualia, adeòque latera opposita quadrilateri parallela esse per prop. 27.

Colligitur 2. Omne quadrilaterum habens angulos oppositos æquales esse parallelogrammum; Ex eo enim, quòd omnes quatuor anguli quadrilateri æquales sunt quatuor rectis,

demon-

demonstrabitur, quælibet duo ad easdem partes æquales esse duobus rectis, adeòque parallela esse latera opposita quadrilateri per prop. 28.

Colligitur 3. Omne quadrilaterum habens omnes angulos rectos esse parallelogrammum; Habebit enim angulos oppositos æquales.

Colligitur 4. Parallelogramma esse; figuram altera parte longiorem, cum rectangula sit; Rhombum, & Rhomboidem, quia ex aduerso latera habent æqualia.

THEOR. 25. PROPOS. 35.

Parallelogramma ABCD, BCFE, super eadem basi BC, & in eisdem parallelis AF, BC constituta inter se sunt æqualia.

Ratione enim parallelogrammorum est AD æqualis BC, item EF æqualis eidem BC, *prop. 34.* ideòque AD, EF inter se æquales; quare addita communi
fig. 29. DE, erunt AE, DF inter se æquales; quia autem AB parallela est ipsi CD, erit angulus externus D, interno A æqualis; adeòque cum triangula BAE, DCF habeant angulos A, D, & latera AE, DF, & AB, DC æqualia, totum toti æquale erit, & ablato communi triangulo DGE reliqua trapezia ABGD, EGCF remanebunt æqualia, additoque communi triangulo BGC, erunt parallelogramma ABCD, BCFE, æqualia. Idem ostendetur si punctum E cadet in D, *vt in fig. 30.* vel intra puncta A, D, *vt in fig. 31.* Quod erat ostendendum.

THEOR.

THEOR. 26. PROPOS. 36.

Parallelogramma A B C D, E H I F, ſuper æqualibus baſibus BC, HI, & in eiſdem parallelis FA, BI conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

Iungantur B E, C F: quia baſis B C æqualis eſt H I,
f.29. cui æqualis eſt E F *prop.* 34. erunt & E F, B C inter ſe æquales, quare cum parallelæ quoque ſint, erunt duo rectæ E B, F C inter ſe æquales, & parallelæ *prop.* 33. & E B C F parallelogrammum, quod cum ſit ſuper eadem baſi conſtitutum cum vtroque A B C D, HEFI, erit vtrique æquale, igitur & inter ſe æqualia erunt parallelogramma A C, E I. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 27. PROPOS. 37.

Triangula A B C, B C E, ſuper eadem baſi B C conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia.

Cum enim ſint dimidium ſuorum parallelogram-
f.29. morum *prop.* 34. nempè AC, EC ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtitutorum, quæ ſunt inter ſe æqualia *prop.* 35. erunt & ipſa inter ſe æqualia. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 28. PROPOS. 38.

Triangula ABC, HIE ſuper æqualibus baſibus BC, HI conſtituta, & in eiſdem parallelis inter ſe ſunt æqualia.

Trianf.29. Adhibita propositione 36. demonstrabitur eodem modo atque antecedens.

THEOR. 29. PROPOS. 39.

Triangula æqualia BAG, BDC, super eadem basi BC, & ad easdem partes constituta, & in eisdem sunt prrallelis BC, AD.

Si enim AD non est parallela ipsi BC, ei parallela f.32. ducatur *prop.* 31. alia AE, iungaturque EC; erit igitur triangulum BEC æquale ipsi BAC, *prop.* 27. hoc est BDC, pars toti; quod est absurdum. Non alia itaque parallela est ipsi BC, præter AD. Quod erat ostendendum.

THEOR. 30. PROPOS. 40.

Triangula æqualia ABC, DEF, super æqualibus basibus BC, DE constituta, & ad easdem partes in eisdem sunt parallelis.

Demonstrabitur ijsdem ferè verbis atque antecedens, vt constat ex fig. 33.

COROLLARIVM.

Colligitur ex duobus postremis propositionibus, methodus demonstrandi parallelogramma æqualia super eadem basi, vel æqualibus constituta, & ad easdem partes, in eisdem esse parallelis.

THEOR. 31. PROPOS. 41.

Si parallelogrammum A C, cum triangulo BEC, eandem basin BC, habuerit, in eisdemque parallelis fuerit; duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli.

Ducatur diameter A C, erit parallelogrammum
f.19 A C duplum sui trianguli A B C *prop* 34. cui cum æquale sit triangulum B E C, *prop.* 35. & huius duplum erit. Quod erat ostendendum.

PROBL. 11. PROPOS. 42.

Dato triangulo ABC, parallelogrammum æquale constituere in dato angulo rectilineo D.

Diuidatur bifariam B C, in E, iunctaque AE, super E C, in puncto E ponatur *prop.* 23, angulus F E C æqualis dato D. Deindè per A ducatur AF parallela
f.34. ipsi B C, & per C parallela CG ipsi EF: erit igitur parallelogrammum E G, habens angulum E, dato D æquale, & duplum trianguli A E C *prop.* 41. cui cum æquale sit A B E *prop.* 35. erunt ambo simul ipsi parallelogrammo æqualia. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Colligitur primò ex duabus postremis demonstrationibus triangulum habens basim duplam basis parallelogrammi, constitutumque in eisdem cum illo parallelis, eidem æquale esse.

Colli-

Colligitur 2. praxis constituendi triangulum æquale dato parallelogrammo in dato angulo rectilineo: si attentè constructio præcedentis problematis consideretur.

THEOR. 32. PROPOS. 43.

In omni parallelogrammo puta HILM, complementa OM, OI inter se sunt æqualia.

Quoniam enim triangula HNO, HRO æqualia sunt *prop. 34.* si demantur triangulis æqualibus HML, HIL erunt reliqua trapezia MNOL, IROL, inter se
f. 35. æqualia: quare si ab eis rursus demantur æqualia triangula OQL, OPL, erunt reliqua complementa IO, OM inter se æqualia. Quod erat ostendendum.

PROBL. 12. PROPOS. 44.

Ad datam rectam lineam RO, dato triangulo ABC, æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo D.

Constituatur *prop. 42.* ipsi ABC triangulo, æquale parallelogrammum FC, seu MO, in angulo NOQ, qui ipsi D sit æqualis, & indirectum rectæ QO, ponatur data recta RO; protracta verò MN, in H, ducatur per R recta HI, rectæ NO parallela, iunganturque H, O, productæ verò HO, MQ, coheant in L; cohibunt enim, nam cum anguli RHM, HMQ, sint æquales duobus rectis *prop. 29.* erunt OHN, NMQ duobus rectis minores. Deindè ex pūcto L ducatur LI parallela rectæ HM, producaturque NO ad P: Parallelogrammum igitur est HILM, eiusque diameter HL, circa verò ipsam dia-

f. 34. diametrum parallelogramma, sunt QP, RN, & com-
35. plementa OM, OI *def.* 18. & 19. Igitur complementum OM, ipsi OI est æquale, *prop.* 43. quare cum OM æquale sit dato triangulo A B C, & eidem æquale erit IO; habet autem angulum ROP, æqualem NOQ ad verticem, hoc est D, constitutumque est super datam rectam RO. Quod erat faciendum.

PROBL. 13. PROPOS. 45.

Dato rectilineo A B C, ad datam rectam lineam D E, æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo DEF.

Resoluatur rectilineum A B C in triangula A, B, C, & triangulo A, super datam DE in angulo DEF constituatur parallelogrammum æquale D F *prop.* 44. protractaque EF, triangulo B, super FG, hoc est datam ED, in angulo IFG, hoc est DEF constituatur
f. 36. æquale parallelogrammum I G: eodem modo pertracta I F, fiat I L æquale triangulo C: constat igitur omnia simul parallelogramma EG, FH, IL, hoc est totum E L, omnibus simul triangulis A, B, C, hoc est rectilineo A B C esse æqualia; constitutum verò fuit in angulo E super datam rectam DE. Quod erat faciendum.

PROBL. 14. PROPOS. 46.

Super datam lineam rectam AB, quadratum describere.

Datæ rectæ lineæ A B ex punctis A, B, excitentur duæ

duæ perpendiculares A C, B D, æquales ipsi A B, & connectatur recta C D; rectæ igitur A C, B D parallelæ erunt inter se *prop.* 28. & æquales, quare & C D, A B inter se parallelæ, & æquales erunt *prop.* 33 & anguli recti A, B, æquales oppositis C, D; ideòque figura A B C D æquilatera, & æquiangula erit, quare quadratum est *ex def.* 16. Quod erat faciendum.

f 37.

COROLLARIVM.

Hinc colligitur linearum æqualium, æqualia esse quadrata; & quadratorum æqualium, æquales esse lineas; quod facile etiam ostendetur, si vnum superponatur alteri, nam propter æqualitatem linearum, & angulorum vtpotè rectorum, sibi mutuò congruent; & si sibi mutuò congruunt cum superposita fuerint, lineæ æquales inter se erunt.

THEOR. 33. PROPOS. 47.

In rectangulo triangulo A B C, quadratum B E, quod à latere BC rectum angulum A subtendente describitur, æquale est quadratis B H, C F, quæ à lateribus A B, A C rectum angulum continentibus describuntur.

Ex A ducatur A L parallela ipsi B D, iunganturque AD, CI; quoniã anguli IBA, C B D sunt inter se æquales, *ax.* 11. addito communi A B C, erunt anguli IBC, A B D inter se æquales; triangula igitur I B C, A B D habent latera I B, B C lateribus A B, B D æqualia, angulosque comprehensos I B C, A B D æquales, quare

 &

& ipsa æqualia sunt, sed triangulum A B D est dimi-
f.38. dium parallelogrammi B L, item I B C dimidium B H prop. 41. igitur totum parallelogrammum B L, toti B H, æquale erit. Quod verò H A C constituat vnam rectam lineam constat ex propositione 14.: eodem modo ostendetur quadratum C F æquale parallelogrammo L C, quare totum parallelogrammum, hoc est quadratum C D æquale est quadratis B H, C F. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Colligitur primò, si in æquiangula quauis figura diameter ducatur, quadratum à diametro descriptum æquale esse duobus quadratis laterum vnum angulum rectum figuræ comprehendentium.

Colligitur 2. quod si illa figura æquiangula, & æquilatera, hoc est quadratum sit; quadratum à diametro descriptum duplum est prædicti quadrati, vtpotè æquale duobus quadratis laterum vnum angulum comprehendentium, quæ inter se æqualia sunt ex definitione quadrati.

Colligitur 3. praxis inueniendi quadratum æquale quotcunque propositis quadratis. Sint latera trium quadratorum A, B, C, quibus inueniendum sit quadratum æquale. Fiat rectus angulus F G H, sitque recta F G æqualis rectæ A, &
f.40. *G H æqualis ipsi B; tum ducatur H F: deindè fiat rectus angulus F H I, sitque recta H I, æqualis ipsi C, & iungatur I F, & sic in infinitum, si plura quadrata sint proposita. Patet enim quadratum I F æquale esse quadratis I H, H F, hoc est I H, H G, G F, seu A, B, C propositis.*

THEOR. 34. PROPOS. 48.

Si quadratum, quod ab vno laterum B C,

trian-

trianguli ABC, describitur, æquale sit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus AB, AC describuntur quadratis: angulus A comprehensus sub AB, AC, rectus est.

Excitetur ex puncto A super rectam AB perpendicularis DA, æqualis ipsi AC, connectaturque DB; erit *prop.* 47. quadratum DB, æquale quadratis AB,
f. 39. DA, hoc est quadratis BA, AC; atque adeò quadrato BC; quare BD, BC, erunt inter se æquales, & per prop. 8. triangulum DAB, triangulo BAC æquale, angulusque BAD, angulo BAC æqualis, ac proinde vt ille, & hic rectus erit. Quod erat ostendendum.

Finis Elementi primi.

EVCLIDIS ELEMENTVM SECVNDVM.

DEFINITIONES.

I.

f. 1. OMne parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendunt angulum.

II.

In omni parallelogrammo spatio vnumquodlibet eorum, quæ circa diametrum illius sunt parallelogrammorum cum duobus complementis
f. 3. gnomon vocetur. *Solent hic Mathematici cum Euclide, in hoc libro, & alijs sequentibus parallelogrammum rectangulum, simpliciter & sine addito rectangulum appellare.*

THEOR. 1. PROPOS. 1.

Si fuerint duæ rectæ lineæ A B, B C, seceturque ipsarum altera B C in quotcunque segmenta B D, D E, E C: rectangulum B F sub illis duabus rectis lineis contentum æquale est eis, quæ sub insecta A B, & quolibet segmentorum comprehenduntur rectangulis.

Erigantur perpendiculares DG, EH. Quoniam parallelogramma sunt rectangula BG, DH, EF, erit DG æqualis ipsi AB, & EH ipsi DG, hoc est AB *prop. 34. 1.* quare rectangula prædicta continebuntur sub insecta AB, & segmentis BD, DE, EC *def. 1.* sunt autem prædicta rectangula simul sumpta æqualia rectangulo BF comprehenso sub datis AB, BC *def. 1.* Quod erat ostendendum.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

Si recta linea BC secta sit vtcunque in D E: rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorum comprehenduntur æqualia sunt ei, quod à tota fit quadrato.

Repetatur eadem figura, fiatque AB æqualis ipsi BC. Erit igitur rectangulum BF, hoc est quadratum ex BC, æquale rectangulis BG, DH, EF comprehensis sub insecta AB, hoc est BC ipsi AB æquali, & quolibet segmentorum. Quod erat ostendendum.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

Si recta linea AB secta sit vtcunque in C: rectangulum AEFB, sub tota AB, & vno segmentorum comprehensum æquale est illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prædicto segmento describitur quadrato.

Sit AE, æqualis ipsi AC, erigaturque perpendicularis

laris CD, quæ æqualis erit *prop.* 34. 1. ipsi AE, hoc est
f. 2. AC; itaque rectangulum AF comprehensum sub tota AB, & AE, hoc est segmento AC, æquale est quadrato AD, quod à segmento AC fit, & rectangulo CF sub BC, CD, hoc est segmentis BC, CA comprehenso. Quod erat ostendendum.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

Si recta linea AB secta sit vtcunque in C: quadratum ADEB, quod à tota describitur æquale erit & illis, quæ à segmentis AC, CB describuntur quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur rectangulo.

Ducatur diameter BD, & ex C agatur CF parallela rectæ BE, seu AD, secans diametrum in G puncto, per quod ducatur HI parallela ipsi AB, seu DE, eritque quadratum in quatuor parallelogramma diuisum. Quoniam igitur angulus ABD est semirectus *corol.* 2. *prop.* 32. 1. & angulus GCB *prop.* 34. 1. rectus; erit angulus EGB *prop.* 32. 1. semirectus, adeoque æqualia latera CB, CG trianguli CBG, quare parallelogrammum CI erit quadratum ex segmento CB: eadem ratione ostendetur parallelogrammum HF esse quadratum ex HG, hoc est *prop.* 34. 1. segmento AG. Rursus quoniam BE æqualis est ipsi AB, & BI ipsi CB, erit reliqua EI æqualis reliquæ AC; ac propterea parallelogrammum GE continebitur sub segmento IE, hoc est AC, & IG, hoc est segmento CB. Est etiam parallelogrammum AG comprehensum sub segmento AC, & CG, hoc est segmento CB. Itaque totum quadratum AE, æquale est quadratis ex segmentis

AC,

AC, CB descriptis, & duplo rectangulo sub prædictis segmentis comprehenso. Quod erat ostendendum.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

Si recta MB secetur bifariam in A, & non bifariam in C: rectangulum MLGC sub segmentis inæqualibus MC, CB comprehensum vnà cum quadrato, quod ab intermedia sectionum AC, describitur, æquale est ei, quod à dimidia AB describitur, quadrato.

Repetatur super recta AB eadem figura. Quoniam igitur CB æqualis est ipsi CG, rectangulum MG comprehendetur sub segmentis inæqualibus MC, CB. Rursus quoniam complementum GE, æquale est complemento AG *prop. 43. 1.* addito communi CI, erit rectangulum EC, æquale rectangulo AI, hoc est MH *prop. 36. 1.* quare addito communi AG erit gnomon RSQ æquale rectangulo MG. Denique addito cõmuni quadrato HF erit totum quadratum AB à dimidia AB descriptum, æquale rectangulo MG sub segmentis inæqualibus MC, CB comprehenso vnà cum quadrato HF ab intermedia sectionum AC descripto. Quod erat ostendendum.

THEOR. 6. PROPOS 6.

Si recta NC bifariam secetur in A, & illi recta quædam CB in rectum adijciatur: rectangulum NOIB sub tota NC, cum adiecta

CB, & adiecta CB, vnà cum quadrato à dimidia A C descripto æquale est quadrato, quod ex dimidia A C, & adiecta C B, tanquam ab vna linea describitur.

Repetatur super recta AB eadem figura; & ipsi BN in rectum adijciatur recta NM æqualis ipsi CB, compleaturque rectangulum M L G C, quod æquale erit rectangulo N I. Erit igitur recta MB bifariam diuisa in A, & non bifariam in C, quare ex antecedenti rectangulum M G, hoc est N I vnà cum quadrato H F ex intermedia sectionum A C descripto, æquale erit quadrato A E, quod à dimidia AB describitur. Quod erat ostendendum.

f. 3. prop. 36. 1.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

Si recta linea A B (*repetita eadem figura*) vtcunque secetur in C: quadratum AE, quod à tota describitur, vnà cum quadrato C I ab vno segmentorum verb. grat. C B descripto æquale est illi, quod bis sub tota AB. & dicto segmento C B comprehenditur rectangulo, & illi quod à reliquo AC fit quadrato.

Quoniam rectangulum E C comprehenditur sub E B, hoc est A B, & segmento C B; similiter rectangulum A I sub tota AB, & IB hoc est dicto segmento CB, erit gnomon RSQ vnà cum quadrato C I æqualis duplo rectangulo sub tota A B, & segmento C B; quare addito communi quadrato H F à reliquo segmento

f. 3.

mento A C descripto, erit quadratum A E vnà cum quadrato CI æquale duplo rectangulo sub tota AB, & segmento C B, & illi, quod à reliquo segmento A C describitur quadrato. Quod erat ostendendum.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

Si recta linea A B secetur vtcunque in C rectangulum quater comprehensum sub tota A B, & vno segmentorum verb. grat. C B vna cum quadrato reliqui segmenti A C, æquale est quadrato, quod à tota A B, & dicto segmento C B tanquam ab vna linea describitur.

Adijciatur in rectum BD æqualis ipsi C B. Quoniam igitur quadratum ex AD æquale est *prop.* 4. quadratis ex AB, BD, vna cum rectangulo sub AB, BD bis, hoc est quadratis ex AB, BC vna cum rectangulo
f. 4. bis sub AB, BC: quadrata autem ex AB, BC æqualia sunt *prop.* 7. rectangulo bis sub AB, BC vna cum quadrato A C; erit igitur quadratum ex A D æquale rectangulo quater sub A B, B C, vna cum quadrato ex A C. Quod erat ostendendum.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

Si recta linea AB bifariam secetur in C, & non bifariam in D: quadrara, quæ ab inæqualibus segmentis AD, DB fiunt, simul duplicia sunt, & eius, quod à dimidia A C, & eius, quod sub intermedia sectionum CD fit quadrati.

Edu-

Educatur ex C perpendicularis C E æqualis ipsi C B, seu C A, fiatque triangulum A E B; & erecta perpendiculari D F secante E B in F ducatur ad A C perpendicularis F G, iungaturque A F: quoniam igitur rectus est angulus E C B trianguli isoscelis E C B, æquales erunt *prop.* 5. 1 & semirecti *prop.* 32. 1. vterque angulorum C E B, C B E. Similiter erit semirectus angulus C E A, adeoque rectus totus angulus A E B. Rursus quoniam rectus est angulus F D B, & semirectus D B F, semirectus etiam erit D F B; ac propterea æqualia latera D B, D F *prop.* 6. 1. eadem ratione æqualis erit E G ipsi G F. Itaque quadratum A E duplum
f. 5. erit *prop.* 47. 1. quadrati A C; & quadratum E F duplum quadrati G F, seu *prop.* 34. 1. quadrati C D. Quamobrem quadrata simul A E, E F hoc est *prop.* 47. 1. quadratum A F, siue quadrata A D, D F, hoc est quadrata A D, D B segmentorum inæqualium simul duplicia sunt, & quadrati ex dimidia A C, & quadrati ex intermedia sectionum C D. Quod erat ostendendum.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

Si recta linea A B secetur bifariam in C eiq; alia quædam B D adijciatur in rectum; quadratum ipsius A D compositæ ex tota A B & adiecta B D, vna cum quadrato adiectæ B D duplum est quadrati dimidiæ A C, & quadrati rectæ C D compositæ ex dimidia C B & adiecta B D.

Erigatur perpendicularis C E, æqualis ipsi A C, siue C B, factoque triangulo A E B compleatur rectangulum

lum C E F D; protractaque E B quoad occurrat ipsi F D in G, iungatur A G. Erit vt supra rectus angulus A E B, & semirectus C B E hoc est (huic ad inuicem) D B G adeoque semirectus etiam erit *prop* 32. 1. DGB; & similiter semirectus F E G; ac propterea æqualia latera BD, DG, & EF, FG; itaque quadratum A E duplum erit *prop*. 47. 1. quadrati A C, & quadratum E G duplum quadrati E F seu *prop*. 34. 1. quadrati CD. Quammobrem quadrata simul A E, E G, hoc est *prop*. 47. 1. quadratum A G, siue quadrata A D, D G hoc est quadrata AD, DB dupla erunt quadrati dimidiæ AC, & quadrati rectæ C D compositæ ex dimidia C B, & adiecta B D. Quod erat ostendendum.

PROBL. I. PROPOS. II.

Datam rectam A B, ita secare in H vt rectangulum H I C B sub tota A B, siue eius æquali B C, & segmento H B, æquale sit quadrato reliqui segmenti A H.

Facto quadrato A D C B, diuidatur A D bifariam in E, iunctaque B E huic æqualis sumatur E F; fiatque quadratum A F G H; Quoniam D A bifariam diuisa est in E, eique adiuncta est A F, erit rectangulum D F A, siue F I vna cum quadrato dimidiæ E A æquale *prop*. 6. quadrato E F siue E B, hoc est quadratis *prop*. 47. 1. EA, AB: quare dempto communi quadrato E A erit quadratum A B æquale rectangulo D G, & rursus dempto communi rectangulo A I, erit rectangulum H C æquale quadrato A G, quod à reliquo segmento A H describitur. Quod erat faciendum

Omnes supradictæ propositiones præter antecedentem applicari possunt in numeris, vti pannis docebit.

THEOR.

THEOR. 11. PROPOS. 12.

In triangulo obtusangulo A C B, quadratum lateris AB obtuso angulo oppositi ęquale est quadratis reliquorum laterum, & insuper duobus rectangulis sub vno latere puta BC (in quod demitatur perpendicularis AD) & linea C D, quæ restat vsque ad perpendicularem AD.

Quoniam Quadratum A B æquale est *prop.* 47. 1. quadratis A D, D B, siue quadrato A D, & quadratis
f. 8. *prop.* 4. B C, C D, vna cum duplo rectangulo B C D: sunt autem quadrata AD, C D, æqualia *prop.* 47. 1. quadrato A C; erit quadratum A B æquale quadratis A C, B C, vna cum duplo rectangulo B C D. Quod erat ostendendum.

THEOR. 12. PROPOS. 13.

In quocumque triangulo A E B quadratum lateris A B oppositi angulo acuto vna cum duplo rectangulo sub illo latere, puta E B (in quod ducta perpendicularis AD cadit), & linea E D, posita inter angulum acutum, & perpendicularem, æquale est quadrato reliquorum laterum.

f. 8. Quandoquidem quadratum A B æquale est quadratis AD, DB *prop.* 47. 1. addito communi duplo re-

ctan-

ctangulo B E D: erit quadratum A B, vna cum duplo rectangulo B E D, æquale quadratis A D, DB, & duplo rectangulo B E D; hoc est quadrato AD, & quadratis *prop*, 7. B E, E D, siuè quadrato B E, & quadrato A E. Quod erat ostendendum.

PROBL. 2. PROPOS. 14.

Dato rectilineo A æquale quadratum construere.

Rectilineo A æquale fiat *prop.* 45. 1. rectangulum D C B E, cuius latera si æqualia sint, factum erit, quod quæritur. Si autem inæqualia fuerint, sit B C maius; producaturque B C in F vt C F æqualis sit C D. Demum interualo G B dimidia ipsius F B, fiat semicirculus F H B, & D C protracta secet circonferentiam in H, iungaturque GH. Dico quadratum ex C H æquale esse rectangulo D B, seu rectilineo A. Quoniam rectangulum BFC, seu B D vna cum qua-
f. 9. drato C G, æquale est quadrato G B *prop.* 5. hoc est GH, siue quadratis C H, C G; dempto communi quadrato C G; erit quadratum CH æquale rectangulo B D. Quod erat faciendum.

Finis Elementi secundi.

EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVM.

DEFINITIONES.

I.

SVnt æquales circuli, quorum diametri sunt æquales, vel quorum quæ ex centris rectæ lineæ sunt æquales.

I I.

Recta linea circulum tangere dicitur,
f.13. quæ cum circulum tangat, si producatur circulum non secat.

I I I.

Circuli se se mutuò tangere dicuntur, qui se se mu-
f. 9. tuò tangentes, se se mutuò non secant.

I V.

In circulo æqualiter distare à centro rectæ lineæ di-
f.11. cuntur, cùm perpendiculares, quæ à centro in ipsas ducuntur sunt æquales. Longius autem abesse illa
f.12. dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.

V.

f.19. Segmentum circuli, est figura, quæ sub recta linea,
20. & circuli peripheria comprehenditur.

V I.

Segmenti autem angulus est, qui sub recta linea, &
f.23. circuli peripheria comprehenditur.

VII.

VII.

In segmento autem angulus est, cum in segmenti
f. 23. peripheria sumptum fuerit quodpiam punctum, & ab illo in terminos rectæ eius lineæ, quæ segmenti basis est, adiunctæ fuerint rectæ lineæ: is, inquam, angulus ab adiunctis illis lineis comprehensus.

VIII.

Cum verò comprehendentes angulum rectæ lineæ
f. 22. aliquam assumunt peripheriam, illi angulus insistere dicitur.

IX.

Sector autem circuli est, cum ad ipsius circuli centrum constitutus fuerit angulus, comprehensa nimi-
f. 22. rum figura, & à rectis lineis angulum continentibus, & à peripheria ab illis assumpta.

X.

f. 21. 22. Similia circuli segmenta sunt, quæ angulos capiunt æquales: aut in quibus anguli inter se sunt æquales.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

Dati circuli ABC, centrum reperire.

Ducatur in eo utcunque linea BC, diuisaque bifariam in E, agatur perpendicularis DEA, & diuidatur DA bifariam in F. Dico F esse centrum circuli. Si enim non: sit punctum G, & ducantur BG, GE, GC.
f. 1. Quoniam igitur BE æqualis est ipsi EC *ex constr.* communis verò GE, & basis BG, basi GC quoque æqualis *def.* 10 1. erunt anguli BEG, GEC *prop.* 8. 1. æquales, adeòque recti *def.* 8. 1. & angulus GEC rectus, æqualis recto AEC, pars toti; quod est absurdum. Non ergo aliud punctum quam F esse potest centrum circuli. Quod erat faciendum.

COROL-

COROLLARIVM.

Hinc colligitur si in circulo aliqua recta linea, aliquam aliam bifariam, & ad angulos rectos secat, in secante esse centrum circuli, & si ad inuicem se bifariam secantur centrum esse in communi earum concursu.

THEOR. 1. PROPOS. 2.

Si in circuli ABC peripheria duo quælibet puncta A, C, accepta fuerint: recta linea AC, quæ ad ipsa puncta adiungitur intra circulum cadit.

Sit centrum D, à quo ducantur DC, DA, sumaturque in recta A C, quodlibet punctum E, & iungatur DE. Erunt anguli ad basin A, C æquales *prop* 5. 1.
f. 2. sed angulus AED maior est quam C *prop.* 16. 1. quare & angulo A maior erit; adeôque recta E D opposita minori angulo A minor erit *prop.* 19. 1. semidiametro DA; igitur punctum E intra circulum erit. Idem ostendetur de reliquis punctis. Itaque linea AC tota intra circulum cadit. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum fit lineam rectam, quæ circulum tangit, in uno tantum punctum tangere. Si enim in duobus punctis eum tangeret, pars recta inter ea duo puncta posita, caderet intra circulum, quod est contra def. 2.

THEOR. 2. PROPOS. 3.

Si in circulum ABC, quædam recta linea FB

FB per centrum D extenſa, quandam lineam AC non per centrum extenſam bifariam ſecet in G: etiam ad angulos rectos eam ſecat. Et ſi ad angulos rectos eam ſecat, bifariam quoque ſecat.

Iungantur AD, DC: cum igitur AG æqualis ſit
f. 2. ipſi GC, *ex hyp.* & GD communis, baſis verò AD, baſi DC quoque æqualis, erunt anguli ad G *prop. 8. 1.* æquales, adeòque recti; & viciſſim cum recti anguli AGD, DGE ſint æquales, & angulus A æqualis angulo C, *prop. 5. 1.* latus verò DG commune, erunt triangula *prop. 26. 1.* AGD, CGD, æqualia, adeòque rectæ AG, GC inter ſe æquales. Quod erat oſtendeddum.

COROLLARIUM.

Hinc colligitur perpendicularem ductam à vertice trianguli æquilateri, vel iſoſcelis ad baſin, illam bifariam ſecare, & ſi bifariam ſecat, ad angulos rectos ſecare.

THEOR. 3. PROPOS. 4.

Si in circulo duæ rectæ lineæ AB, CD ſe ſe mutuò ſecent non per centrum E extenſæ, ſe ſe mutuò bifariam non ſecabunt.

Secent enim ſe in F, iungaturque FE. Recta FE
f. 3. per centrum E extenſa, cum rectas AB, CD, non per centrum extenſas (ſi fieri poteſt) bifariam ſecet in F, & ambas ad angulos rectos ſecabit *prop 3.* Quod eſt abſurdum vt patet. Quod erat oſtendendum.

EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVM.

DEFINITIONES.

I.

SVnt æquales circuli, quorum diametri sunt æquales, vel quorum quæ ex centris rectæ lineæ sunt æquales.

II.

Recta linea circulum tangere dicitur, f.13. quæ cum circulum tangat, si producatur circulum non secat.

III.

Circuli se se mutuò tangere dicuntur, qui se se mu-
f. 9. tuò tangentes, se se mutuò non secant.

IV.

In circulo æqualiter distare à centro rectæ lineæ di-
f.11. cuntur, cùm perpendiculares, quæ à centro in ipsas ducuntur sunt æquales. Longiùs autem abesse illa
f.12. dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.

V.

f.19. 20. Segmentum circuli, est figura, quæ sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

VI.

Segmenti autem angulus est, qui sub recta linea, &
f.23. circuli peripheria comprehenditur.

VII.

VII.

In segmento autem angulus est, cum in segmenti
f. 23. peripheria sumptum fuerit quodpiam punctum, & ab illo in terminos rectæ eius lineæ, quæ segmenti basis est, adiunctæ fuerint rectæ lineæ: is, inquam, angulus ab adiunctis illis lineis comprehensus.

VIII.

Cum verò comprehendentes angulum rectæ lineæ
f. 22. aliquam assumunt peripheriam, illi angulus insistere dicitur.

IX.

Sector autem circuli est, cum ad ipsius circuli centrum constitutus fuerit angulus, comprehensa nimi-
f. 22. rum figura, & à rectis lineis angulum continentibus, & à peripheria ab illis assumpta.

X.

f. 21. 22. Similia circuli segmenta sunt, quæ angulos capiunt æquales: aut in quibus anguli inter se sunt æquales.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

Dati circuli ABC, centrum reperire.

Ducatur in eo vtcunque linea BC, diuisaque bifariam in E, agatur perpendicularis DEA, & diuidatur DA bifariam in F. Dico F esse centrum circuli. Si enim non: sit punctum G, & ducantur BG, GE, GC.
f. 1. Quoniam igitur BE æqualis est ipsi EC *ex constr.* communis verò GE, & basis BG, basi GC quoque æqualis *def.* 10 1. erunt anguli BEG, GEC *prop.* 8. 1. æquales, adeòque recti *def.* 8. 1. & angulus GEC rectus, æqualis recto AEC, pars toti; quod est absurdum. Non ergo aliud punctum quam F esse potest centrum circuli. Quod erat faciendum.

COROL.

COROLLARIUM.

Hinc colligitur si in circulo aliqua recta linea, aliquam aliam bifariam, & ad angulos rectos secat, in secante esse centrum circuli, & si ad inuicem se bifariam secantur centrum esse in communi earum concursu.

THEOR. 1. PROPOS. 2.

Si in circuli ABC peripheria duo quælibet puncta A, C, accepta fuerint: recta linea AC, quæ ad ipsa puncta adiungitur intra circulum cadit.

Sit centrum D, à quo ducantur DC, DA, sumaturque in recta AC, quodlibet punctum E, & iungatur DE. Erunt anguli ad basin A, C æquales *prop* 5. 1.
f. 2. sed angulus AED maior est quam C *prop*. 16. 1. quare & angulo A maior erit; adeôque recta ED opposita minori angulo A minor erit *prop*. 19. 1. semidiametro DA; igitur punctum E intra circulum erit. Idem ostendetur de reliquis punctis. Itaque linea AC tota intra circulum cadit. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Hinc manifestum fit lineam rectam, quæ circulum tangit, in vno tantum punctum tangere. Si enim in duobus punctis eum tangeret, pars recta inter ea duo puncta posita, caderet intra circulum, quod est contra def. 2.

THEOR. 2. PROPOS. 3.

Si in circulum ABC, quædam recta linea

FB per centrum D extenſa, quandam lineam AC non per centrum extenſam bifariam ſecet in G: etiam ad angulos rectos eam ſecat. Et ſi ad angulos rectos eam ſecat, bifariam quoque ſecat.

Iungantur AD, DC: cum igitur AG æqualis ſit ipſi GC, *ex hyp.* & GD communis, baſis verò AD, baſi DC quoque æqualis, erunt anguli ad G *prop.* 8. 1. æquales, adeòque recti; & *viciſſim* cum recti anguli AGD, DGE ſint æquales, & angulus A æqualis angulo C, *prop.* 5. 1. latus verò DG commune, erunt triangula *prop.* 26. 1. AGD, CGD, æqualia, adeòque rectæ AG, GC inter ſe æquales. Quod erat oſtendendum.

f. 2.

COROLLARIVM.

Hinc colligitur perpendicularem ductam à vertice trianguli æquilateri, vel iſoſcelis ad baſin, illam bifariam ſecare, & ſi bifariam ſecat, ad angulos rectos ſecare.

THEOR. 3. PROPOS. 4.

Si in circulo duæ rectæ lineæ AB, CD ſe ſe mutuò ſecent non per centrum E extenſæ, ſe ſe mutuò bifariam non ſecabunt.

Secent enim ſe in F, iungaturque FE. Recta FE per centrum E extenſa, cum rectas AB, CD, non per centrum extenſas (ſi fieri poteſt) bifariam ſecet in F, & ambas ad angulos rectos ſecabit *prop* 3. Quod eſt abſurdum vt patet. Quod erat oſtendendum.

f. 3.

THEOR. 4. PROPOS. 5.

Si duo circuli A E B, A D B se mutuò secent in A, & B, non erit illorum idem centrum.

Si enim est possibile sit illorum idem centrum C ductæ ergo rectæ lineæ CA, CD à centro ad circumferentiam erunt æquales inter se, ità quoque æquales
f. 4. erunt ductæ CA, CE; quare CD, CE æquales sunt inter se, pars toti; quod est absurdum. Non ergo illorum idem centrum esse potest. Quod erat ostendendum.

THEOR. 5. PROPOS. 6.

Si duo circuli AB, AC se se mutuò tangant interius in A, eorum non erit idem centrum.

Eadem argumentatione ostendetur, atque antecedens, vt patet ex figura 4.

THEOR. 6. PROPOS. 7.

Si in circuli diametro A B, quodpiam sumatur punctum D; quod centrum non sit, ab eoque puncto in circulum quædam rectæ lineæ, vt DE, DF, DG cadant: maxima quidem erit DA, in qua centrum reperitur, minima verò reliqua D B; aliarum autem, vt

DE,

DE, DF, DG, propinquior illi; quæ per centrum ducitur remotiore, ſemper maior eſt. Duæ autem ſolum rectæ lineæ, puta D G, D H, ab eodem puncto D, in circulum cadunt ad vtraſque partes minimæ DB.

Iungantur C E, C F, C G. Erunt iam latera D C, CE, hoc eſt recta DCA maior *prop.* 20. 1. quã D E; eadẽ ratione maior erit quam DF, DG; Pariter cum duo latera CD, DG, maiora ſint latere CG, hoc eſt recta CB, ablata communi C D, relinquetur D B, minor quam D G, eodem modo oſtendetur minor, quam DF, DE. Rurſus quoniam angulus DCE, maior eſt quam DCF, latera verò circa angulos æqualia, erit
f. 5. baſis D E, baſi D F maior *prop.* 24. 1 Ita quoque D F maior erit quam DG; Denique ſi angulo GCD fiat æqualis angulus H C D, erit *prop.* 4 1. D G, ipſi D H æqualis, & nulla alia; quia quæcunque ducatur aut magis recederet, aut accederet ad maximam D A, adeòque maior, aut minor eſſet. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

Hinc colligitur propinquiorem illi, quæ per centrum ducitur remotiore, eſſe ſemper maiorem, licet ad diuerſas partes ducta ſint, vt conſtat ex dictis.

THEOR. 7. PROPOS. 8.

Si extra circulum ſumatur punctum quodpiam A, & ab eo puncto ad circulum de-

ducantur rectæ quædam lineæ, vt A E, A I, AH, quarum vna quidem AE per centrum F protendatur, reliquæ verò vt libet; in cauam peripheriam cadentium rectarum linearum, maxima quidem est illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem AI, AH, propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore semper maior est: In conuexam verò peripheriam cadentium rectarum linearum; minima quidem est AB, quæ inter punctum A, & diametrum interponitur; aliarum autem AD, AG, AL, propinquior minimæ remotiore semper minor est. Duæ autem tantum rectæ lineæ æquales vt A G, A C à puncto A in ipsum circulum cadunt ad vtrasque partes minimæ.

Iungantur F D, F G, F H, F I. Erunt latera A F, AI, hoc est recta AE, maior *prop.* 20. 1. quam A I; Eadem ratione ostendetur maior quacunque alia: & quia rectæ FD, DA maiores sunt quam AF, demptis æqualibus DF, BF, erit reliqua AD, maior quam AB; similiter ostendetur A G, A L maior quam AB: est igitur A B minima illarum, quæ sunt extra circulum, & A E maxima in cauam peripheriam cadentium. Deinde quoniam latera A F, F I æqualia sunt lateribus A F, F H, & angulus AFI maior quam AFH erit *prop.* 24. 1. basis A I maior A H. Eodem modo osten-
f. 6. detur AH, maior AM. Et quia latera AF, FD æqualia sunt lateribus AF, FG, angulus verò AFD, angulo AFG minor, erit basis AD basi AG minor, & simi-

liter

liter ostendetur minor quam A L. Propinquior igitur maximæ remotiore maior est; & propinquior minimæ, minor. Postremo si fiat angulus AFC æqualis angulo AFG erit *prop.* 4. 1. basis A C æqualis basi A G, & si quæuis alia ducatur propinquior erit, aut remotior minimæ; adeòque maior, aut minor ducta AC. Eodem modo ostendetur duas tantum lineas duci posse æquales, hoc est AN, A H in cauam peripheriam. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Colligitur hinc verum quoque esse propinquiorem maxima remotiore esse maiorem, & propinquiorem minima remotiore esse minorem, licet ad diuersas partes ducantur.

THEOR. 8. PROPOS. 9.

Si in circulo AB acceptum fuerit punctum aliquod C, & ab eo ad circulum cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales, vt CB, CG, CF; Acceptum punctum C est circuli centrum.

Si enim non: sit aliud ab eo diuersum nempè D. Cum igitur sumptum sit punctum C, quod centrum non est ab eoque in circulum rectæ CB, CG, CF cadunt, erit recta CB, seu alia, in quo centrum sit omnium maxima, eique propinquior semper remotiore
f. 5. maior *prop.* 7. adeòque duæ tantum æquales rectæ à puncto C in peripheriam cadent; quod est contra hypotesin. Non aliud ergo quam C esse potest centrum circuli. Quod erat ostendendum.

 THEOR.

THEOR. 9. PROPOS. 10.

Circulus A B C circulum E F in pluribus quam duobus punctis non secat.

Si enim fieri potest, illum secet in tribus punctis B, A. C, & à puncto D centro circuli B A C iungantur BD, AD, CD, quæ inter se æquales erunt; cadunt autem & in circunferentiam circuli EF, quare
f. 7. ipsum D centrum erit vtriusque circuli *prop. 9.* quod est absurdum *prop. 5.* Non ergo circulus circulum in pluribus quam duobus punctis secare potest. Quod erat ostendendum.

THEOR. 10. PROPOS. 11.

Si duo circuli AD, AE sese intus contingant in A, atque accepta fuerint eorum centra CB; ad eorum centra adiecta linea BC, & producta in contactum A cadit.

Si enim non: Aliò cadat, & interiorem circulum secet in D, exteriorem in E, ducanturque A C, A B: quoniam igitur B C, C A maiores sunt *prop. 20. 1.*
f. 8. quam B A, hoc est B E, ablata communi B C, erit C E æqualis rectæ CA, hoc est CD, pars toti; quod est abdum. Non ergo aliò cadere potest recta BC producta surquam in contactum A. Quod erat ostendendum.

THEOR. 11. PROPOS. 12.

Si duo circuli AD, AE sese exterius contin-

tin-

tingant in A, linea recta, quæ ad centra eorum B, C adiungitur per contactum A transibit.

Si enim fieri potest non transeat per A, sed secet circulos in D,E. Erit B D æqualis ipsi B A, & C E,
f. 9. ipsi C A, quare tota B C maior erit, vel æqualis ipsis AB, AC; quod est absurdum *prop.* 20. 1. Non ergo per aliud punctum quam per contactum A transire potest. Quod erat ostendendum.

THEOR. 12. PROPOS. 13.

Circulus AD circulum AE non tangit in pluribus punctis, quam vno, siue extra, siue intus tangat.

Si enim *primò* exterius se tangerent in duobus A, D,
f. 9. recta BC iungens eorum centra *prop* 12. per alterum illorum vt D transiret, iunctisque BA, CA, erit vt in antecedente propositione vnum trianguli latus BC æquale reliquis, quod est absurdum. *Secundo* interius si fieri potest se tangant in duobus punctis A,D: sint eorum centra B, C, & iungatur BC, quæ producta cadet in A *prop.* 11. Ducta autem C D æqualis erit
f. 10. rectæ AC, in qua est centrum B; quod est absurdum *prop.* 8. Non ergo circulum circulus tangere potest in pluribus punctis. Quod erat ostendendum.

THEOR. 13. PROPOS. 14.

In circulo æquales rectæ AB, CD, æqualiter distant à centro. Et cum æqualiter distant à centro æquales sunt inter se.

Ducantur à centro E ad rectas AB, CD, perpendiculares EF, EG, quæ ipsas bifariam secabunt *prop.* 3. eritque A F æqualis ipsi DG, & iungantur EA, AD; Quadratum igitur A E, hoc est quadrata *prop.* 47. 1. AF, FE, æquale erit quadrato ED, hoc est quadratis DG, GE, quare demptis æqualibus AF, DG reliqua quadrata EF, EG æqualia erunt, & rectæ F E, E G
f. 11. æquales; adeòque rectæ A B, C D æqualiter distant à centro *def.* 4. similiter ostendetur si rectæ A B, C D æqualiter distant à centro, hoc est si perpendicularis EF, EG sunt æquales *defin.* 4. quadrata AF, DG esse
b inter se æqualia, atque adeò rectas AB, DC, æquales esse. Quod erat ostendendum.

THEOR. 14. PROPOS. 15.

In circulo A D C, maxima quidem linea est diameter A C, aliarum autem, puta D E, F G ei propinquior remotiore semper maior.

Ducantur ex centro B rectæ B D, B F, B G, B E; Erunt iam latera E B, B D, hoc est diameter G B A maior latere E D *prop.* 20. 1. eodemque argumento ostendetur de reliquis, quæ duci possint. Ducantur
f. 12. deinde ad rectas D E, G F perpendiculares B I, B H, quæ inæquales erunt *def.* 4. diuident autem vtramuis E D, GF, bifariam in I, & H *prop.* 3. Quoniam igitur quadratum B F, hoc est quadrata B H, H F æqualia sunt quadrato BD, hoc est quadratis BI, ID *prop.* 47. 1. ablatis inæqualibus I B, & H B, reliqua quadrata HF, I D inæqualia erunt, & quidem I D maius quam F H, quare & recta I D maior erit recta HF, adeòque, &

dupla

dupla ED maior dupla CD: idem ostendetur de reliquis, quæ in circulo duci possint. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Hinc colligitur duas tantum rectas lineas æquales duci posse in eodem circulo ab altera parte diametri; nam quacumque ducatur, semper, vel propinquior, vel remotior erit diametro, adeòque aut maior, aut minor, vt ostensum est.

THEOR. 15. PROPOS. 16.

Si ab extremitate A diametri AB, cuiuscunque circuli ABC ad angulos rectos, quædam recta EA ducatur; extra ipsum circulum cadet, & in locum inter ipsam rectam lineam AE, & peripheriam CA comprehensum, altera recta linea non cadet, & semicirculi, quidem angulus CAD, quouis acuto rectilineo maior est, reliquus autem CAE minor.

Si *primo* perpendicularis EA non cadit tota extra circulum, cadat si fieri potest aliqua pars CA intra, iungaturque DC. Quoniam DA, & DC sunt inter se æquales, anguli A, C *prop. 5. 1.* ad basin inter se æquales erunt, adeòque ambo recti, quod est absurdum *prop. 17. 1.* tota ergo necessariò cadet extra circulum. *Secundo* si possibile est cadat inter ipsam rectam EA, & peripheriam CA, alia recta FA, ducaturque DG perpendicularis ad AF, secans peripheriam AC in H. Cum angulus G rectus sit, & DAG minor *f. 13.*

recto

recto erit latus DA, hoc est DH maius latere DG *prop.* 19. 1. pars toto; quod est absurdū. Non ergo aliqua alia inter rectam EA, & peripheriam CA cadere potest. *Tertio* si esset aliquis angulus acutus rectilineus maior semicirculi angulo CAD, vel minor angulo contingentiæ CAE, caderet aliqua recta inter perpendicularem EA, & circunscreptiam AC, vt est recta AF, quod fieri non potest: quare semicirculi angulus CAD quouis acuto rectilineo maior est, reliquus autem contingentiæ CAE, minor. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Colligitur primo rectam à diametri circuli extremitate ad angulos rectos ductam ipsum circulum tangere, si enim illum secaret, caderet intra, corol. prop. 2., quod est absurdum.

Colligitur secundo praxis ducendi tangentem per datum punctum in ipsa circumferentia circuli positum: si ducta diametro ab eius extremitate quapiam recta ducatur ad angulos rectos vt constat.

PROBL. 2. PROPOS. 17.

A dato puncto A rectam lineam ducere, quæ datum circulum BDC tangat.

Iungatur EA secans circulum in D, ex quo puncto ducatur tangens *corol.* 2 *prop.* 16. DF; Deindè in-
f. 14. teruallo EA describatur circulus AF secans DF in F, iunganturque EF, AB. Dico AB tangere circulum datum in B. Est enim angulus EBA æqualis *prop.* 4. 1.
angu-

angulo recto E D F: quare A B tangens est *corol. 1. prop. 16.* Quod erat faciendum.

THEOR. 16. PROPOS. 18.

Si quæpiam linea recta EA circulum ACB tangat, à centro autem D ad contactum A adiungatur quædam linea DA: quæ adiecta fuerit, ad ipsam contingentem E A perpendicularis erit.

Si enim non: ducatur alia D I ad ipsam E A perpendicularis secans circulum in H. Quoniam igitur
f. 13. angulus DIA est rectus, & DAI acutus *prop. 17. 1.* erit latus D A, hoc est D H maius latere D I pars toto; quod est absurdum. Non alia ergo quam D A, ad A E perpendicularis esse potest. Quod erat ostendendum.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

Si circulum ABC tetigerit recta quæpiam linea A E, à contactu autem A, recta linea BA ad angulos rectos ipsi tangenti AE excitetur; in excitata BA erit centrum circuli.

Si enim non: sit punctum L centrum extra rectam BA; iungaturque LA. Erit igitur LA perpendicularis *prop. 18* ad A E, angulique LAE, BAE æquales, pars toti; quod est absurdum. Itaque in excitata BA erit centrum circuli. Quod erat ostendendum.

THEOR.

Ducantur à centro E ad rectas AB, CD, perpendiculares EF, EG, quæ ipsas bifariam secabunt *prop.* 3. eritque A F æqualis ipsi DG, & iungantur EA, AD; Quadratum igitur A E, hoc est quadrata *prop.* 47. 1. AF, FE, æquale erit quadrato ED, hoc est quadratis DG, GE, quare demptis æqualibus AF, DG reliqua quadrata EF, EG æqualia erunt, & rectæ F E, E G
f. 11. æquales; adeòque rectæ A B, C D æqualiter distant à centro *def.* 4. similiter ostendetur si rectæ A B, C D æqualiter distant à centro, hoc est si perpendicularis EF, EG sunt æquales *defin.* 4. quadrata AF, DG esse inter se æqualia, atque adeò rectas AB, DC, æquales esse. Quod erat ostendendum.

THEOR. 14. PROPOS. 15.

In circulo A D C, maxima quidem linea est diameter A C, aliarum autem, puta D E, F G ei propinquior remotiore semper maior.

Ducantur ex centro B rectæ B D, B F, B G, B E; Erunt iam latera E B, B D, hoc est diameter G B A maior latere E D *prop.* 20. 1. eodemque argumento ostendetur de reliquis, quæ duci possint. Ducantur
f. 12. deinde ad rectas D E, G F perpendiculares B I, B H, quæ inæquales erunt *def.* 4. diuident autem vtramuis E D, GF, bifariam in I, & H *prop.* 3. Quoniam igitur quadratum B F, hoc est quadrata B H, H F æqualia sunt quadrato BD, hoc est quadratis BI, ID *prop.* 47. 1. ablatis inæqualibus I B, & H B, reliqua quadrata HF, I D inæqualia erunt, & quidem I D maius quam F H, quare & recta I D maior erit recta H F, adeòque, &

dupla

dupla ED maior dupla CD: idem ostendetur de reliquis, quæ in circulo duci possint. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Hinc colligitur duas tantum rectas lineas æquales duci posse in eodem circulo ab altera parte diametri; nam quacumque ducatur, semper, vel propinquior, vel remotior erit diametro, adeòque aut maior, aut minor, vt ostensum est.

THEOR. 15. PROPOS. 16.

Si ab extremitate A diametri AB, cuiuscunque circuli ABC ad angulos rectos, quædam recta EA ducatur; extra ipsum circulum cadet, & in locum inter ipsam rectam lineam AE, & peripheriam CA comprehensum, altera recta linea non cadet, & semicirculi, quidem angulus CAD, quouis acuto rectilineo maior est, reliquus autem CAE minor.

Si *primo* perpendicularis EA non cadit tota extra circulum, cadat si fieri potest aliqua pars CA intra, iungaturque DC. Quoniam DA, & DC sunt inter se æquales, anguli A, C *prop. 5. 1.* ad basin inter se æquales erunt, adeòque ambo recti, quod est absurdum *prop. 17. 1.* tota ergo necessariò cadet extra circulum. *Secundo* si possibile est cadat inter ipsam rectam EA, & peripheriam CA, alia recta FA, ducaturque DG perpendicularis ad AF, secans peripheriam
f. 13. AC in H. Cum angulus G rectus sit, & DAG minor

recto

recto erit latus D A, hoc est D H maius latere D G *prop.* 19. 1. pars toto ;quod est absurdū. Non ergo aliqua alia inter rectam E A, & peripheriam C A cadere potest. *Tertio* si esset aliquis angulus acutus rectilineus maior semicirculi angulo C A D, vel minor angulo contingentiæ C A E, caderet aliqua recta inter perpendicularem EA, & circunferentiam AC, vt est recta A F, quod fieri non potest: quare semicirculi angulus CAD quouis acuto rectilineo maior est, reliquus autem contingentiæ CAE, minor. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Colligitur primo rectam à diametri circuli extremitate ad angulos rectos ductam ipsum circulum tangere, si enim illum secaret, caderet intra, corol. prop. 2., quod est absurdum.

Colligitur secundo praxis ducendi tangentem per datum punctum in ipsa circunferentia circuli positum: si ducta diametro ab eius extremitate quæpiam recta ducatur ad angulos rectos vt constat.

PROBL. 2. PROPOS. 17.

A dato puncto A rectam lineam ducere, quæ datum circulum BDC tangat.

Iungatur EA secans circulum in D, ex quo puncto ducatur tangens *corol.* 2 *prop.* 16. D F; Deindè in- *f.* 14. teruallio EA describatur circulus A F secans D F in F, iunganturque E F, AB. Dico AB tangere circulum datum in B. Est enim angulus EBA æqualis *prop.* 4. 1. angu-

angulo recto E D F: quare A B tangens est *corol. 1. prop. 16.* Quod erat faciendum.

THEOR. 16. PROPOS. 18.

Si quępiam linea recta EA circulum ACB tangat, à centro autem D ad contactum A adiungatur quædam linea DA: quæ adiecta fuerit, ad ipsam contingentem E A perpendicularis erit.

Si enim non: ducatur alia D I ad ipsam E A perpendicularis secans circulum in H. Quoniam igitur
f.13. angulus DIA est rectus, & DAI acutus *prop. 17. 1.* erit latus D A, hoc est D H maius latere D I pars toto; quod est absurdum. Non alia ergo quam D A, ad A E perpendicularis esse potest. Quod erat ostendendum.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

Si circulum ABC tetigerit recta quæpiam linea A E, à contactu autem A, recta linea BA ad angulos rectos ipsi tangenti AE excitetur; in excitata BA erit centrum circuli.

Si enim non: sit punctum L centrum extra rectam BA; iungaturque LA. Erit igitur LA perpendicularis *prop. 18* ad A E, angulique LAE, BAE æquales, pars toti; quod est absurdum. Itaque in excitata BA erit centrum circuli. Quod erat ostendendum.

THEOR.

THEOR. 18. PROPOS. 20.

In circulo ABC angulus BEC ad centrum E duplex est anguli B A C ad peripheriam cum fuerit eadem BC basis angulorum.

Ducta AEF erunt anguli E A C, E C A *prop. 5. 1.* ad basin æquales quibus cum æqualis sit externus FEC *prop. 32. 1.* angulo EAC ipse duplus erit: eadem ratione ostendetur B E F duplus anguli B A E, quare totus B E C, totius B A E duplus erit. Quod si vnus
f. 15. angulus alium non includeret, vt sunt B E C, BDC; ducta DEG ostendetur eodem modo totus G E C duplus totius G D C, & ablatus G E B duplus ablati G D B, adeòque & reliquus B E C duplus reliqui BDC. Quod erat ostendendum.

THEOR. 19. PROPOS. 21.

In circulo ABC, qui in eodem segmento BADC sunt anguli A, D, sunt inter se æquales.

Sit *primo* segmentum illud BADC maius semicirculo, iunctisque ex centro E rectis E B, E C, erit an-
f. 15. gulus BEC duplus *prop. 20.* anguli BAC, & ita quoque duplus anguli B D C, quare innter se æquales erunt anguli A, & D. Sit *secundo* non maius semicirculo. Ducta AD erunt anguli A C D, D B A in segmento maiori, quam semicirculo æquales, item angu-
f. 16. li ad verticem A F B, D F C æquales, quare reliquus angulus BAF trianguli BAF æqualis erit *prop. 32. 1.* reliquo FDC trianguli FDC. Quod erat ostendendũ.

THEOR. 20. PROPOS. 22.

Quadrilateri ABCD in circulo ABC descripti, anguli B, D, item A, C, qui ex aduerso, duobus rectis sunt æquales.

Iungantur BD, AC: quoniam angulus CAD æqualis est angulo CBD *prop.* 21. item angulus BAC, angulo BDC, erunt duo anguli BDC, & CBD trianguli BDC, æquales duobus BAC, CAD, hoc est toti
f.16. BAD; quare addito communi BCD, erunt duo anguli BAD, DCB æquales tribus CBD, BDC, DCB, qui sunt duobus rectis æquales *prop.* 32. 1. quare & illi duobus rectis æquales erunt. Quod erat ostendendum.

THEOR. 21. PROPOS. 23.

Super eadem recta linea AB, duo segmenta circulorum similia, & inæqualia non constituuntur ad easdem partes.

Quod si fieri potest, sint illa duo segmenta similia, & inæqualia ACB, ADB, ductaque AC secante peri-
f.17. pheriam A D B in D iunganturB D, BC, erunt igitur anguli C, D inter se æquales *def.* 10. internus externo; quod est absurdum *prop.* 16. 1. Non ergo constitui possunt. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Colligitur primo neque ad diuersas partes eiusdem recta

consti-

constitui posse duo segmenta similia, & inaequalia: nam pu suppositionem in idem absurdum incidetur.

Colligitur secundo segmenta similia super eadem basi constituta esse aequalia.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

Super æqualibus rectis lineis similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.

Constat assertum huius propositionis ex corollario secundo antecedentis; quandoquidem superpositæ illæ æquales rectæ sibi congruent, ità, & peripheriæ vt constat.

PROBL. 3. PROPOS. 25.

Circuli segmento ABC dato, describere circulum cuius est segmentum.

Ducta A C, diuidatur bifariam, & ad angulos rectos per rectam D B, iungaturque A B; Si anguli A,
f.18. & B æquales sunt, erit *prop. 9.* D centrum circuli, Cuius A B C est segmentum. Si autem sunt inæquales, fiat angulo B, æqualis angulus B A E, iungaturque EC: Cum triangula ADE, EDC habeant angulos A D E, E D C æquales, & latus A D æquale lateri
f 19. D C, D E verò commune, erunt *prop. 4. 1.* bases E C,
20. E A, seu E B *prop. 6. 1.* inter se æquales: quare E C *prop. 9.* centrum erit circuli quæsiti. Quod erat faciendum.

THEOR.

THEOR. 23. PROPOS. 26.

In æqualibus circulis ABC, DEF, æquales anguli, æqualibus peripherijs insistunt siue ad centra, vt G, H, siue ad peripherias, veluti B, E, constituti insistant.

Iunctis A C, F D, cum latera AG, GC æqualia sint lateribus FH, HD, *def. 1.* angulique comprehensi G, H *ex hypo.* æquales, basis A C æqualis erit basi F D. Facti rursus anguli B, E ad peripherias ABC, DEF, inter se æquales *prop. 20.* erunt; quare segmenta ABC, FED similia *def. 10.* & æqualia *prop. 24.* sunt; Igitur si ab æqualibus circulis ABC, FED, demantur æqualia segmenta CBA, DEF, erunt reliquæ peripheriæ AC,
f.21. FD inter se æquales. Deindè æquales sint anguli BE
22. ad peripherias; quoniam anguli G, H, dupli sunt *prop. 20.* angulorum æqualium BE, ipsi inter se æquales erunt; quare vt prius erunt peripheriæ AC, DF inter se æquales. Quod erat ostendendum.

THEOR. 24. PROPOS. 27.

In æqualibus circulis A B C, D E F, anguli qui æqualibus peripherijs AC, FD insistunt, sunt inter se æquales, siue ad centra vt G, H, siue ad peripherias vt B, E constituti insistãt.

Si enim peripheriæ A C, D F, sint æquales, & inæ-
f.21. quales anguli, verb. gr. ad centra; sit maior angulus
22. AGC, fiatque angulus AGI æqualis angulo DHF. Erunt æquales peripheriæ AI, DF, ergo & AI, AC,

pars

pars toti; quod est absurdum. Æquales igitur sunt anguli inter se. Quod erat ostendendum.

THEOR. 25. PROPOS. 28.

In æqualibus circulis ABC, DEF, æquales rectæ lineæ AB, FD, æquales peripherias auferunt, maiorem quidem ABC maiori DEF; minorem autem AC, minori FD.

Iunctis AG, GC, & HD, HF, erunt duo latera duobus lateribus æqualia *def.* 1. & basis AC, basi
f.21. FD, quare angulus G, *prop.* 8. 1. æqualis erit angulo
22. H, ideòque peripheriæ ABC, DEF, erunt inter se æquales *prop.* 26. item peripheriæ, AC, DF. Quod erat ostendendum.

THEOR. 26. PROPOS. 29.

In æqualibus circulis ABC, DEF, æquales peripherias AC, DF, æquales rectæ lineæ subtendunt.

Cum enim peripheriæ sint æquales, æquales etiam
f.21. erunt anguli *repetita eadem fig.* G, H ad centra *prop.* 27.
22. quare æquales erunt *prop.* 4. 1. bases AC, DF. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Hinc colligitur ex quatuor postremis demonstrationibus idem verum esse si sermo sit de eodem circulo ut patet.

PROBL.

PROBL. 4. PROPOS. 30.

Datam peripheriam ABC, bifariam secare.

Ducta A C, & diuisa bifariam in D, excitetur perpendicularis DB, iunganturque AB, BC. Erit igitur f.19. AB æqualis *prop. 4. 1.* ipsi BC, atque adeò peripheria AB æqualis *prop. 28.* peripheriæ CD. Quod erat faciendum.

THEOR. 27. PROPOS. 31.

In circulo ABEC, factus angulus ABC in semicirculo A E C rectus est, factus autem BAC in maiori segmento BAC, minor recto; Qui vero factus est vt B E C in minori segmento BEC, maior recto. Et insuper angulus CBA, maioris segmenti BAC, recto quidem maior est, minoris autem segmenti EBC, minor est recto.

Ducatur BD, continueturque AB in F. Quoniam D B æqualis est ipsi D C, erit angulus D C B æqualis angulo D B C, & eadem ratione D B A æqualis ipsi DAB, quare cum anguli ad centrum D, duplum sint angulorum ad peripheriam *prop. 20.* BCA, BAC, & f.21. angulorum ipsis æqualium CBD, ABD, hoc est totius anguli CBA duplum erunt: Atque adeò cum anguli ad D sint æquales *prop. 13. 1.* duobus rectis, erit angulus CBA, vni recto æqualis, & angulus BAC, *prop. 17. 1.* minor recto; angulus verò C E B, qui cum angulo BAC est duobus rectis *prop. 22.* æqualis, obtusus erit,

 adeò

adeòque maior recto. Rursus cum angulus rectus ABC pars sit anguli segmenti maioris CBA, qui comprehenditur recta BC, & peripheria BAC, erit angulus segmenti maioris, recto minor; cum verò angulus EBC segmenti minoris comprehensus sub recta CB, & peripheria BEC, pars sit anguli recti *prop. 13. 1.* FBC, erit angulus segmenti minoris, recto minor. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Colligitur primo angulum trianguli, qui reliquis duobus ad basin æqualis est, rectum esse; vt ostensum est de angulo B, trianguli ABC, (in fig. 23.)

Colligitur secundo segmentum circuli, in quo angulus constitutus est rectus, semicirculum esse; In quo verò acutus, segmentum maius, & in quo obtusus est, segmentum minus esse: & segmentum, cuius angulus est maior recto, esse semicirculo maius, cuius verò minor, esse vel semicirculum, vel semicirculo minus.

THEOR. 28. PROPOS. 32.

Si circulum CD tetigerit aliqua recta linea AB in C, à contactu autem C producatur quædam recta linea CD circulum secans in D: anguli ACD, BCD, quos ad contingentem facit, æquales sunt angulis CED, CFD, qui in alternis circuli segmentis consistunt.

Si enim CD transit per centrum H, iam patet assertum ex antecedenti. Si non; transeat CE, quæ perpendi-

pendicularis erit *prop.* 18. ad A B, & angulus C D E
f. 24. constitutus in semicirculo C F E rectus, adeòque reli-
qui DEC, DCE, trianguli CDE, æquales erunt vni
recto, seù angulo ACE, quare ablato communi DCE,
erit angulus A C D æqualis angulo DEC in alterno
segmento. Cum autem quadrilateri C F D E anguli
oppositi CFD, CED æquales sint duobus rectis *prop.* 22.
seù duobus BGD, ACD, ablatis æqualibus ACD,
CED, (vt ostensum est) erit reliquus BCD æqualis
reliquo C F D in alterno segmento. Quod erat
ostenden-dum.

PROBL. 5. PROPOS. 33.

Super data recta linea AB, describere segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo C.

Si angulus datus sit rectus, data A B diameter erit
circuli quæsiti *prop.* 31. Sin autem sit, vel acutus, vel
obtusus: constituatur angulus BAD, æqualis angulo
dato C, & ex A super A D, erigatur perpendicularis
f. 25. AE, fiatque angulo BAE, æqualis angulus ABF: erunt
prop 6. 1. rectæ BF, AF inter se æquales, ideòque cen-
tro F, & intervallo F A describatur circulus B E A.
Dico segmentum A I B esse illud, quod quæritur.
Quoniam enim recta D A, circulum tangit in A, an-
gulus AIB in alterno segmento æqualis erit *prop.* 32.
angulo DAB ad contactum A, hoc est angulo dato C.
Quod erat faciendum.

PROBL. 6. PROPOS. 34.

A dato circulo A B E segmentum abscindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo C.

Ducta enim B A D tangente circulum in A, fiat angulus BAD æqualis dato C. Patet segmentum A I B
f.25. capere angulum æqualem prop. 32. angulo BAD, hoc est dato C. Quod erat faciendum.

THEOR. 29. PROPOS. 35.

Si in circulo A B C duæ rectæ lineæ A B, CD se se mutuo secuerint in E: rectangulum comprehensum sub vnius segmentis AE, EB, æquale est ei, quod, sub alterius segmentis CE, ED, comprehenditur,

Aut enim E est centrum circuli, & patet veritas
f.26. propositionis *coroll. prop.* 46. 1. Aut vna tantum C D transit per centrum G, & diuidit bifariam, & ad angulos rectos *prop.* 3. ipsam A B. Iuncta F A, cum recta C D, diuisa sit bifariam in F, & non bifariam in E, erit rectangulum C E D, cum quadrato F E *prop.* 5. 2. æquale quadrato dimidiæ F D, hoc est F B, hoc est
f.27. *prop.* 47. 1. quadratis F E, E B; quare dempto communi quadrato F E, erit rectangulum C E D æquale quadrato EB, hoc est rectangulo AEB. Deindè transeat quidem C D per centrum F, sed ipsam A B bifariam non secet, & ducatur ad A B perpendicularis FG, quæ ipsam AB bifariam diuidet *prop.* 3. iungaturque F B. Erit igitur rectangulum C E D, & quadra-
f.28. tum FE *prop.* 5. 2. hoc est *prop.* 47. 1. quadrata FG, GE æqualia quadrato FD, seu FB, hoc est quadratis FG, G B, dempto igitur communi quadrato F G, erit rectangulum CED, & quadratum GE æquale quadrato BG, hoc est *prop.* 5. 2. rectangulo A E B, & quadrato G E, quare dempto rursus communi quadrato G E,

erit

erit rectangulum CED æquale rectangulo AEB. Postremo neutra per centrum F transeat; ducta GEH per
f.29. centrum F, erunt rectangula CED, BEA æqualia inter se, cum vtrunque debeat esse æquale rectangulo GEH. Quod erat ostendendum.

THEOR. 30. PROPOS. 36.

Si extra circulum ABC sumatur punctum aliquod D, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ AD, DB, quarum altera quidem A D, circulum secet in C, altera verò D B tangat in B: quod sub tota secante A D, & exterius inter punctum, & conuexam peripheriam assumpta D C, comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente DB, describitur quadrato.

Transeat enim *primo* recta D A per centrum E, & iungatur AB, quæ perpendicularis erit ad DB *prop.* 18.
f.30. Erunt igitur quadrata D B, B E *prop.* 47. 1. æqualia quadrato D E, hoc est *prop.* 6. 2. rectangulo ADC vna cum quadrato E C, seu EB, quare ablato communi E B, erit quadratum D B æquale rectangulo A D C. *Secundo* non transeat recta D A per centrum E: ducta perpendiculari E F ad A C, iungantur E D, E C, E B, quæ perpendicularis erit *prop.* 18. ad B D. Erit igitur vt prius rectangulum A D C, cum quadrato C F *prop.* 6. 2. æquale quadrato F D, additoque communi quadrato FE, erit rectangulum ADC, & quadrata CF,
f.31. F E, hoc est *prop.* 47. 1. quadratum C E, æquale quadratis FD, FE, hoc est quadrato ED, hoc est quadra-

 tis

tis DB, BE: quare demptis æqualibus quadratis BE, EC erit rectangulum ADC æquale quadrato BD. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Colligitur primo si à puncto, quod extra circulum est, ducantur plurima recta circulum secantes, rectangula sub totis, & sub segmentis inter punctum, & conuexam peripheriam interceptis esse æqualia: omnia enim sunt eidem quadrato tangentis æqualia.

Colligitur secundo duas tangentes ex eodem puncto ductas ad circulum, esse æquales, cum earum quadrata debeant esse æqualia.

Colligitur tertiò ex eodem puncto duas tantum duci posse rectas tangentes; quia cuiusuis alia quadratum esset, vel maius, vel minus, prop. 8.

Colligitur quarto duarum rectarum æqualium ex eodem puncto in circulum cadentium, si vna ipsum tangat, etiam aliam tangere.

THEOR. 31. PROPOS. 37.

Si extra circulum ABC, sumatur punctum aliquod D, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera DA circulum secet in C, altera DB in eum incidat in B, sit autem, quod sub tota secante AD, & exterius inter punctum, & conuexam peripheriam assumpta CD comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente DB describitur, quadrato: incidens DB circulum tanget

Duca-

Ducatur enim tangens DF, & iungantur EF, EB, & ED (si DA non transit per centrum.) Erit iam quadratum FD æquale rectangulo ADC, *prop. 36.* cui cum æquale quoque sit, *ex hyp.* quadratum DB, erunt quadrata DE, DB, inter se æqualia, adeòque æquales
f. 30. rectæ DF, DB *coroll. prop. 36. 1.* Quoniam igitur latus
31. FE æquale est lateri BE, & DE commune, basis verò DF, æqualis basi DB, erit angulus DBE æqualis angulo DFE, qui cum rectus sit, & ille rectus erit: quare DB circulum tangit in B *coroll. 1. prop. 16.* Quod erat ostendendum.

Finis Elementi tertij.

EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVM.

DEFINITIONES.

I.

Figura rectilinea in figura rectilinea inſcribi dicitur, cum ſinguli eius figuræ, quæ inſcribitur, anguli, ſingula latera eius, in qua inſcribitur, tangunt.

II.

Similiter, & figura circum figuram deſcribi dicitur, cum ſingula eius, quæ circumſcribitur, latera ſingulos eius figuræ angulos tetigerint, circum quam illa deſcribitur.

III.

Figura rectilinea in circulo inſcribi dicitur, cum ſinguli eius figuræ, quæ inſcribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.

IV.

Figura verò rectilinea circa circulum deſcribi dicitur, cum ſingula latera eius, quæ circumſcribitur, circuli peripheriam tangunt.

V.

Similiter, & circulus in figura rectilinea inſcribi dicitur, cum circuli peripheria ſingula latera tangit eius figuræ, cui inſcribitur.

VI.

VI.

Circulus autem circum figuram describi dicitur, cum circuli peripheria singulos tangit eius figuræ, quam circumscribit, angulos.

VII.

Recta linea in circulo accommodari, seu coaptari dicitur, cum eius extrema in circuli peripheria fuerint.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

In dato circulo A B C rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ D, quæ circuli diametro D E non sit maior *prop.* 15. 3.

Si enim data recta D æqualis est diametro, factum
f. 1. est problema: si verò minor; ex diametro BE abscindatur E F æqualis datæ D, & centro E interuallo EF describatur circulus AFC, iungaturque AE, quæ æqualis erit rectæ E F, hoc est datæ D. Quod erat faciendum.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

In dato circulo ABC, triangulum describere dato triangulo DEF æquiangulum.

Ducatur tangens G A H, fiatque angulo D æqualis angulus HAB, & angulo E æqualis GAC, iungaturque C B. Dico triangulum ACB æquiangulum esse triangulo dato D E F. Angulus enim HAB, hoc est
f. 2. C, *prop.* 32. 3. æqualis est angulo D, & GAC, hoc est

B ipsi E; quare reliquus A æqualis erit *prop.* 32. 1. reliquo F. Quod erat faciendum.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

Circa datum circulum A B C triangulum describere dato triangulo D E F æquiangulum.

Productis lateribus sint anguli externi G,H,I. Angulo G, fiat æqualis ad centrum L angulus A LB, item angulo H æqualis angulus B L C; à punctis verò A, B, C erigantur perpendiculares, quæ circulum tangent *coroll. 1. prop.* 16. 3. in punctis A, B, C, & concurrent in M, N, O, *post.* 5. (si enim duceretur v. g.
f. 3. recta AB, fierent duo anguli MAB, MBA, minores duobus rectis vt constat) Dico triangulum M N O æquiangulum esse triangulo D E F. Quoniam enim quatuor anguli quadrilateri L A M B æquales sunt quatuor rectis *coroll. 4. prop.* 32. 1. quorum duo MAL, MBL iam recti existunt (*ex constructione*,) erunt reliqui ALB, AMB duobus rectis æquales, atque adeò æquales duobus G, D: sunt autem ALB, & G inter se æquales (*ex constructione*;) Igitur & D,M æquales inter se erunt: Eadem ratione angulus E æqualis erit angulo N, quare & reliquus F æqualis erit *coroll. 1. prop.* 32. 1. reliquo O. Quod erat faciendum.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

In dato triangulo M N O circulum inscribere.

Diuisis duobus angulis N, O, bifariam à rectis L N, LO, I, O, concurrentibus *post.* 5. in triangulum in puncto L, ducantur ex L perpendiculares LA, LB, LC. Quoniã igitur triangula B L N, L C N habent duos angulos LBN, LNB æquales duobus angulis LCN, LNC, & latus L N commune, erit recta L B æqualis *prop.* 26. 1. rectæ L C; similiter recta L A, æqualis ostendetur eidem L C. Circulus igitur centro L, interuallo L C. descriptus trãsibit per puncta A, B, C, tangetque latera *corol.* 1. *prop.* 16. 3. trianguli M N O, cum perpendicularia sint ad semidiametros. Quod erat faciendum.

f. 3.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

Circa datum triangulum ABC describere circulum.

Diuisis duobus lateribus A B, A C bifariam à perpendicularibus I L, I M, coeuntibus in F *post.* 5. iungantur IA, IB, IC, erunt triangula AMI, CMI æqualia *prop.* 4. 1. atque adeò bases AI, CI æquales; eadem ratione æquales erunt AI, BI; quare circulus centro I interuallo IA descriptus per puncta A, B, C transibit. Quod erat faciendum.

f. 2.

PROBL. 6. PROPOS. 6.

In dato circulo A B C D, quadratum describere.

Ducta diameter AC, diuidatur bifariam, & ad angulos rectos per diametrum DB in centro E, iunganturque A B, B C, C D, D A. Dico quadrilaterum

ABCD

ABCD esse quadratum. Quoniam enim anguli
f. 4. ad centrum E sunt recti, adeòque æquales; erunt quatuor peripheriæ AB, BC, CD, DA prop. 26. 3. inter se æquales; quare & rectæ AB, BC, CD, DA eas subtendentes, æquales erunt prop. 29. 3.: sunt autem, & anguli A, B, C, D in semicirculo, recti prop. 31. 3. Quod erat faciendum.

PROBL. 7. PROPOS. 7.

Circa datum circulum ABC describere quadratum.

Ductis vt supra diametris AC, BD secantibus se ad angulos rectos in centro E, ducantur tangentes per puncta A, B, C, D coeuntes necessario post 5. in G, H, I, F. Dico quadrilaterum FGHI circulo cir-
f. 4. cumscriptum, quadratum esse. Quoniam enim rectæ FI, AC, GH sunt inter se parallelæ prop. 28. 1., item quoque paralleiæ rectæ lineæ FG, DB, IH, erunt anguli F, G, H, I recti prop. 29. 1. Insuper quoniam AC æqualis est ipsi BD, erunt latera ipsis æqualia FG, HI, & GH, FI, inter se æqualia: quare FH quadratum erit. Quod erat faciendum.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

In dato quadrato FGHI circulum describere.

Diuidantur latera bifariam in A, B, C, D à perpendicularibus AC, BD, se secantibus in E. Facta
erunt

erunt quatuor parallelogramma, & quadrata, eruntque æquales inter se rectæ EA, EB, EC, ED. Circu-
f. 4. lus igitur centro E interuallo EA descriptus transibit per puncta A, B, C, D, tangetque latera quadrati *corol.* 1. *prop.* 16. 3. Quod erat faciendum.

PROBL. 9. PROPOS. 9.

Circa datum quadratum ABCD circulum describere.

Ducantur diametri AC, BD se secantes in E. Erunt anguli ABD, ADB inter se *prop.* 5. 1. æquales, est autem angulus A rectus, quare ABD, ADB erunt
f. 4. semirecti *prop.* 31. 1. Similiter ostendetur reliquos angulos ad A, B, C, D esse semirectos; adeòque cum anguli ad basin EAB, EBA, trianguli AEB, sint æquales, erunt *prop.* 6. 1. rectæ EA, EB inter se æquales: eadem ratione æquales erunt EA, ED, EC. Circulus igitur centro E interuallo EA descriptus transibit per puncta A, B, C, D. Quod erat faciendum.

COROLLARIUM.

Hinc colligitur quadratum circumscriptum circulo, duplum esse quadrati inscripti. Latus enim circumscripti æquale est diametro inscripti, cuius quadratum est æquale, duplo quadrati lateris coroll. 2. *prop.* 47. 1.

PROBL. 10. PROPOS. 10.

Isosceles triangulum constituere, quod habeat vtrunque eorum, qui ad basin sunt, angulorum, duplum reliqui.

Quæuis recta A B secetur prop. 11. 2. ità in C vt rectangulum A B C æquale sit quadrato A C; centrum autem A interuallo A B, circulus describatur, eique applicetur prop. 1. recta B D æqualis maiori segmento A C, iunganturque C D, A D; circa verò triangulum A C D describatur prop. 5. circulus A C D, quem recta
f. 5. B D tanget in D prop. 37. 3, & angulus C A D in alterno segmento æqualis erit prop. 32. 3. angulo C D B ad contactum D; addito igitur communi angulo C D A erit angulus B D A, hoc est prop. 5. 1. A B D æqualis angulis C A D, C D A, hoc est externo B C D. Cum autem anguli C B D, B C D ad basim sint æquales, erit recta C D æqualis prop. 6. 1. rectæ B D, hoc est A C, quare anguli C A D, C D A prop. 5. 1. æquales erunt, eritque externus angulus B C D, hoc est A B D, vel A D B ad basim duplus reliqui anguli C A D. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum fit angulum B A D esse duas quintas vnius recti, vel vnam quintam duorum rectorum; cum omnes trianguli simul æquales sint duobus rectis.

PROBL. 11. PROPOS. 11.

In dato circulo A B C D E pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

Facto triangulo F G H secundum propositionem antecedentem, inscribatur prop. 2. in circulo A B C D, aliud A C D, illi æquiangulum, secenturque per rectas C E, D B, anguli A C D, A D C bifariam. Erunt igitur quin-

quinque anguli CAD, DCE, ECA, ADB, BDC in-
f. 6. ter se æquales ad peripheriam, quare quinque arcus CD, DE, EA, AB, BC, *prop. 26. 3.* sunt æquales; atque adeò ductæ quinque rectæ ipsos subtendentes erunt etiam *prop. 29. 3.* inter se æquales. Sunt autem, & anguli BAE, AED, EDC, DCB, CBA, insistentes peripherias æquales, vtpotè ex tribus æqualibus arcubus compositas *prop. 27. 3.* æquales. Pentagonum igitur est ABCDE, æquilaterum, & æquiangulum. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

Colligitur primo angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli esse tres quintas duorum rectorum, vel sex vnius recti: est enim triplus anguli, qui per corol. prop. 10. est vna quinta duorum rectorum, vel duas quintas vnius recti; vt constat.

Colligitur secundo quamuis figuram æquilateram inscriptam in circulo esse, & æquiangulam, cum eius quilibet angulus insistat peripherias æquales.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

Circa datum circulum ABCDE pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

Inscripto per præcedentem pentagono ABCDE, iunctisque à centro F, FB, FA, FE, FD, FC, per puncta A,B,C,D,E, ducantur tangentes coeuntes neces-
7. sario vt constat *post. 5.* in punctis M,L,I,H,G. Dico pentagonum circumscriptum GHILM æquilaterum

esse

esse, & æquiangulum. Quoniam enim triangula isoscelia BFA, AFE habent tria latera tribus lateribus æqualia, erit *prop.* 8. 1. angulus BFA æqualis angulo AFE. Ductis autem FL, FM, cum AL æqualis sit ipsi LE *corol.* 2. *prop.* 36. 3. & FA ipsi FE, FL verò communis erunt anguli *prop.* 8. 1. LFA, LFE inter se æquales, & similiter æquales erunt BFM, AFM: quare anguli MFA, AFL dimidium æqualium angulorum erunt inter se æquales; atque adeò cum anguli MFA, FAM, æquales sint angulis LFA, FAL, latus verò FA commune, erunt triangula MAF, LAF inter se *prop.* 26. 1. æqualia, & rectæ MA, AL æquales: eadem ratione æquales erunt rectæ LE, EI; ac propterea, & tota LM æqualis erit toti LI. Eodem modo ostendentur reliqua pentagoni latera, esse inter se æqualia. Sunt autem, & anguli BMA, ALE (& sic de alijs) inter se æquales vtpotè compositi ex angulis æqualibus, vt ostensum est. Quare pentagonum GHILM æquilaterum, & æquiangulum est. Quod erat faciendum.

PROBL. 13 PROPOS. 13.

In dato pentagono GAILM æquilatero, & æquiangulo circulum inscribere.

Diuisis bifariam angulis per rectas FG, FH, FI, FL, FM, hæ rectæ coibunt necessario in aliquo puncto, & eodem F, cum debeant esse æquales inter se *prop.* 6. 1 ex eo quod anguli MGF, GMF (& sic de alijs) sint æquales, vt constat. Pentagoni igitur lateribus diuisis bifariam per rectas FA, FB, FC, FD, FE, erunt
f. 7. ipsæ rectæ inter se *prop.* 4. 1. æquales, & perpendiculares

res *corol. prop.* 3. 3. ad pentagoni latera. Quare circulus centro F, interuallo F A descriptus transibit per puncta A,B,C,D,E, tangetque latera pentagoni *corol.* 1. *prop.* 16. 3. Quod erat faciendum.

PROBL. 14. PROPOS. 14.

Circa datum pentagonum ABCDE æquilaterum, & æquiangulum, circulum describere.

Diuisis rursus bifariam angulis per rectas F A, F B, FC, FD, FE, hæ rectæ vt prius coibunt in aliquo, &
f. 7. eodem puncto F, eruntque inter se æquales *prop.* 6. 1. Quare circulus centro F interuallo F A descriptus transibit per puncta A,B,C,D,E. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

Colligitur hinc ex tribus postremis demonstrationibus, praxis describendi circa datum circulum, quamcunque figuram æquiangulam, & æquilateram, & in ea inscribendi circulum; item circa datam quamcunque æquilateram, & æquiangulam figuram describendi circulum: vt constat ex demonstratis.

PROBL. 15. PROPOS. 15.

In dato circulo A B C D E F, hexagonum æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

Ducta semidiametro G A, fiat super illam triangulum æquilaterum A B G, cuius angulus A G B, erit duæ tertiæ *corol.* 3. *prop.* 32. 1. vnius recti; adeòque
f. 8. cum ad punctum G fieri possint anguli quatuor rectis *corol.* 2. *prop.* 13. 1. hoc est duodecim tertijs vnius

 recti

recti æquales, ad idem punctum G, fieri possunt sex anguli æquales angulo A G B inclusiuè. Fiant igitur per rectas GC, GD, GE, GF, & iungantur rectæ BC, CD, DE, EF, FA, AB, quæ inter se *prop. 4. 1.* æquales erunt. Quare æquilaterum erit hexagonum inscriptum A B C D E F, & æquiangulum *corol. 2. prop. 11.* Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

Colligitur primo hexagoni latus circulo inscripti æquale esse semidiametro circuli.

Colligitur secundo hexagoni angulus esse duas tertias duorum rectorum, vtpotè duplus anguli, trianguli æquilateri, qui est vna tertia duorum rectorum. corol 3. prop. 32. 1.

PROBL. 16. PROPOS. 16.

In dato circulo A B C quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

Facto triangulo æquilatero D, huic æquiangulum, aliud ABC inscribatur *prop 2.* circulo, in quo fiat pentagonum E F G H A *prop. 11.* æquilaterum, & æquiangulum habens vnum angulorum ad punctum A. Qualium igitur partium quindecim est tota circumferentia circuli, talium quinque erit AB, & talium tres AE, *f. 9.* seù sex AEF, atque adeò talium vna erit BF. Quare ducta BF subtendet decimam quintam partem totius circumferentiæ, cui si aliæ quatuordecim æquales in circulo accommodentur, inscriptum erit quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum *corol. 1. prop. 11.* Quod erat faciendum.

Finis Elementi quarti.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVM.

DEFINITIONES.

I.

Pars est magnitudo magnitudinis, minor maioris, cum minor metitur maiorem. *Duplex est apud Mathematicos, quædam vocatur aliquota, hoc est quæ metitur suum totum, ità vt aliquoties repetita, illud constituat; qualis est numerus 4 cum 8, 12, 16 &c. collatus: & quædam dicitur aliquanta, hoc est ea, quæ non metitur suum totum, sed aliquoties sumpta ipsum vel excedit, vel ab eodem deficit: cuiusmodi pars est numerus 4 cum 6, 9, 10, 18 &c. collatus. Hinc apparet definitionis sensus esse de parte aliquota tantum, & non aliquanta, vt clarius constabit ex libro septimo, vbi ab Euclide pars aliquanta, non dicitur pars, sed partes.*

II.

Multiplex autem est magnitudo magnitudinis, maior minoris; cum minor metitur maiorem.

III.

Ratio est duarum magnitudinum eiusdem generis mutua quædam secundum quantitatem habitudo, *hoc est si aliqua fiat comparatio duarum magnitudinum eiusdem generis inter se secundum quantitatem, hoc est se-*

cundum quod vna est altera vel maior, vel minor, vel æqualis, illa comparatio, seu habitudo mutua, ratio vocetur. Illa verò magnitudo, seu quantitas, quæ ad aliam refertur, antecedens dicitur, & ea, ad quam alia refertur, consequens dici solet.

IV.

Proportio verò, est rationum similitudo. *Quemadmodum enim comparatio duarum quantitatum inter se dicitur ratio; ità comparatio duarum vel plurium rationum inter se, proportio vocatur. plerique tamen Latini cum Græcis rationem vocant proportionem, & hanc vocant proportionalitatem.*

Diuiditur autem proportio, seù ratio, primo in rationalem, & irrationalem. Rationalis est ea, quæ in numeris potest exhiberi; qualis est proportio lineæ 20. palmorum ad lineam 10. palmorum. Irrationalis verò. ea est, quæ in numeris exhiberi nequit qualis est proportio diametri cuiuslibet quadrati ad latera eiusdem. Diuiditur secundo in proportionem æqualitatis, hoc est cuius quantitas antecedens, & consequens sunt æquales, vt inter 20, & 20 &c: & in proportionem inæqualitatis, hoc est cuius quantitas antecedens, & conseques sunt inæquales, vt inter 20. & 10, &c. subdiuiditur rursus proportio inæqualitatis in proportionem maioris inæqualitatis, hoc est cuius antecedens quantitas maior est consequenti; qualis est proportio 20. ad 10: & in proportionem minoris inæqualitatis, hoc est cuius antecedens quantitas minor est consequenti, qualis est proportio 10. ad 20.

Iam verò proportio (rationalis tamen) tã maioris inæqualitatis, quam minoris distribuitur in quinque genera, & & quidem prior in proportionem multiplicem super particularem, super partientem, multiplicem super particularem, & multiplicem super partientem: posterior autem in eadem genera secatur, si modo singulis vocabulis præponatur præpo-

sitio

stio sub *veluti in sub multiplicem &c. Proportio multiplex est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties vt bis, tres, decies &c. continet ità vt minor maiorem metiatur, qualis est* 20, *ad* 10, *hoc est dupla*, 15, *ad* 5, *hoc est tripla*, 36, *ad* 6, *hoc est sextuplà &c. Proportio superparticularis est habitudo maioris quantitatis ad minorem quando maior minorem semel dumtaxat continet & insuper vnam eius partem aliquotam, scilicet dimidiatam, tertiam, quartam &c. qualis est* 3, *ad* 2; *hoc est sesquialtera*, 12, *ad* 9, *hoc est sesquitertia*, 10, *ad* 8, *hoc est sesquiquarta &c. Superpartiens est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior. minorem semel dumtaxat continet, & insuper aliquot eius partes aliquotas, non efficientes vnam aliquotam: qualis est proportio* 7, *ad* 5, *hoc est super bipartiens quintas*, 20, *ad* 12, *hoc est super bipartiens tertias*, 11 *ad* 7, *hoc est super quadripartiens septimas &c. Multiplex super particularis est habitudo maioris quantitatis, ad minorem, quando maior minorem non semel, sed aliquoties continet, & prætereà vnam eius partem aliquotam; vt est proportio* 9, *ad* 4, *hoc est dupla sesquiquarta &c. Proportio denique multiplex super partiens, est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior aliquoties complectitur minorem, & insuper aliquot eius partes aliqnotas, vnam non efficientes, vt est* 11, *ad* 3, *hoc est tripla super bipartiens tertias &c. Idem intelligendum est de quinque proportionum rationalium minoris inæqualitatis, præmissa tantum semper præpositione* sub; *vt dictum est.*

Proportio verò, seù proportionalitas ab Euclide in hac definitione quarta definita, in plura genera diuiditur, inter quæ præcipuè ab Arithmeticis vocantur medietates: suntque tres. Arithmetica, Geometrica, & Musica, seù Armonica. Propertionalitas arithmetica est quando tres, vel plures numeri, per eandem diferentiam progrediuntur. Vt hÿ numeri

meri 4, 7, 10, 13 &c. quorum quilibet suum antecedentem ternario superat, dicuntur constituere proportionalitatem Arithmeticam. Est autem duplex, continua & discreta. Continua est quando in progressione numerorum nulla fit interruptio, sed quilibet cum proximè antecedenti confertur, vt in dato exemplo. Discreta autem est quando fit interruptio, ità vt bini tantum inter se conferantur, vt contingit in his numeris 4, 7, 8, 11, 30, 33 &c. nam eadem est differentia inter binos, 4, 7, & 8, 11, & 30, 33, non autem inter 4, 5, & 7, 8 &c.

Geometrica proportionalitas est, quando tres, vel plures numeri, eandem rationem habent; quam quidem hoc loco definit Euclides. Hac enim proportionalitas propriè dicitur, alia verò impropriè, cũ non sit eadẽ semper inter eorũ terminos proportio. Hac duplex quoque est continua, & discreta. Continua est, quando nulla fit interruptio, sed quilibet cum proximè antecedenti confertur, vt in his numeris 8, 12, 18, 27, &c. quorum primus ad secundum eandem proportionem habet, quam secundum ad tertium, & secundus ad tertium, siuè primus ad secundum, eandem quam tertius ad quartum &c. Discreta est quando fit interruptio, ità vt bini tantum inter se conferantur; vt in his numeris, 2, 3, 12, 18, 20, 30, &c. nam bini tantum, 2, 3, & 12, 18, & 20, 30 eandem habent proportionem, non autem 2, 3, & 3, 12, &c.

Musica denique, siuè Harmonica proportionalitas est, quando tres numeri ità ordinantur, vt eadem sit proportio maximi, ad minimum, qua differentia inter maiores duos, ad differentiam inter duos minores, vt hij tres numeri, 3, 4, 6. Quoniam eadem est proportio maximi 6, ad minimum 3, qua differentia inter maximum 6, & medium 4; nimirum numeri 2, ad differentiam inter medium 4, & minimum 3, idest ad 1, (cum vtrobique proportio sit dupla,) constituunt proportionalitatem Musicam, seù Harmonicam.

V.

V.

Rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ, se se mutuò superare. *Quare linea & superficies, superficies & corpus, angulus rectilineus & cõtingentia, finitum, & infinitum rationem inter se non habebunt, etsi sint eiusdem generis: cum alterutra quantitas multiplicata, nunquam alteram excedet, angulus enim contingentia, v. g. quantumuis multiplicatus, minor adhuc semper existit quouis angulo rectilineo, etiam minimo: secus angulus semicirculi proportionem habebit ad quemuis angulum rectilineum, quia ipse aliquoties multiplicatus quemcunque angulum rectilineum superabit, & è contra. Quamobrem aduertendum est non requiri, quod quantitates, quæ proportionem habere dicuntur inter se, sint in eodem genere proximo, sed sufficere, quod sint in eodem genere quantitatis, siuè in eodem genere subalterno; dummodò habeant requisitam conditionem in alata definitione.*

VI.

In eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam, & tertia ad quartam: cùm primæ, & tertiæ æquè multiplicia à secundæ, & quartæ æquè multiplicibus, qualiscunque sit hæc multiplicatio, vtrunque ab vtroque, vel vna deficiunt, vel vna æqualia sunt, vel vna excedunt, si ea sumantur, quæ inter se respondent.

VII.

Eandem autẽ habentes rationẽ magnitudines, proportionales vocentur. *Intelligendum est proportionales esse proportione geometrica, de qua solum loquitur in hoc libro Euclides; & quidem si sint quatuor magnitudines, & prima ad secundam se habeat vt tertia ad quartam; dicantur proportionales discretè; si verò sint tres tantum, & prima ad secundam sit vt secunda ad tertiam, continuè proportionales vocentur.*

VIII.

Cum verò æquè multiplicium, multiplex primæ magnitudinis excesserit multiplicem secundæ, & multiplex tertiæ non excesserit multiplicem quartæ: tunc prima ad secundam, maiorem rationem habere dicetur, quam tertia ad quartam. *Quod si è contrariò multiplex prima deficiat à multiplici secunda, non autem multiplex tertia à multiplici quarta; dicetur prima magnitudo ad secundam, minorem habere proportionem quam tertia ad quartam. & satis est vt id contingat in vno tantum exemplo, etiam si in aliјs vel æqualiter sint maiores, vel minores, vel æquales.*

IX.

Proportio autem in tribus terminis paucissimis consistit.

X.

Cum autem tres magnitudines proportionales fuerint, prima ad tertiam, duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundam. At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima ad quartam, triplicatam rationem habere dicitur, eius, quam habet ad secundam: & semper deinceps vno amplius quandiù proportio extiterit.

XI.

Homologæ, seù similes ratione magnitudines dicuntur, antecedentes quidem antecedentibus, consequentes verò consequentibus. *Hoc est si sint plures magnitudines proportionales v.g. vt A ad B, ità C ad D, magnitudines A, & C, antecedentes cuiusque rationis, dicentur homologæ, seù ratione similes, vt etiam consequentes B, & D.*

XII.

Alterna ratio est sumptio antecedentis comparati ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

Vt quando ex eo, quod valeat vt A ad B, ita C ad D, infertur; ergo permutando vt A ad C, ita B ad D.

XIII.

Inuersa ratio est sumptio consequentis, ceu antecedentis, ad antecedentem velut ad consequentem. *Vt quando ex eo quod sit vt A ad B, ità C ad D, infertur; ergo inuertendo, vel conuertendo, vel è contrario vt B ad A, ità D ad C.*

XIV.

Compositio rationis est sumptio antecedentis, cum consequente ceu vnius, ad ipsum consequentem. *Vt quando ex eo quod vt supra, infertur; ergo componendo vt AB simul ad B, ità CD ad D.*

XV.

Diuisio rationis, est sumptio excessus, quo consequentem superat antecedens, ad ipsum consequentem. *Vt quando ex eo quod sit vt totum AB ad partem B, ità totum CD ad partem D, infertur; ergo diuidendo vt A ad B, ità C ad D.*

XVI.

Conuersio rationis, est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsum consequentem. *Vt quando ex eo quod vt totum AB ad B, ità est CD ad D, infertur; ergo vt AB ad A, ità CD ad C.*

XVII.

Ex æqualitate, *seù ex æquo* ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ sumantur, & in eadem ratione: cum vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam, sic & in secundis magnitudinibus prima ad vltimam se se habuerit. Vel aliter sumptio extremorum per subductionem mediorũ. *Vt quando ex eo quod vt A ad B, ità D ad E, & vt B ad C, ità E ad F, infertur; ergo vt A ad C, ità D ad F. Et hæc ratio duplex est ordinata, & perturbata.*

XVIII.

Ordinata proportio eſt, cum fuerit quemadmodum antecedens ad conſequentem, ità antecedens ad conſequentem: fuerit etiam vt conſequens ad aliud quidpiam, ità conſequens ad aliud quidpiam.

XIX.

Perturbata autem proportio eſt, tribus poſitis magnitudinibus, & alijs, quæ ſint his multitudine pares, cùm vt in primis quidem magnitudinibus ſe habet antecedens ad conſequentem, ità in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentem: vt autem in primis magnitudinibus conſequens ad aliud quidpiàm, ſic in ſecundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem,

POSTVLATVM.

Quam proportionem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habere quamuis magnitudinem propoſitam ad aliquam aliam; & eandem habere quampiam aliam magnitudinem ad quamcunque magnitudinem propoſitam.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si fuerint quotcunque magnitudines AB, CD, quotcunque magnitudinum E, F æqualium numero, ſingulæ ſingularum æquè multiplices; quam multiplex eſt vnius E, vna magnitudo A B, vel vnius F vna C D, tam multiplices erunt omnes AB, CD ſimul, omnium E, F ſimul.

Si diuidatur AB, in partes AG, GB ipsi E æquales; item CD in CH, HD, æquales ipsi F: erunt magnitudines AG, GB tot numero, quot sunt CH, HD *def.* 2.
Quoniam verò AG æqualis est ipsi E, & CH ipsi F, erunt etiam AG, CH simul æquales ipsi E, F simul.
f. 1. Eadem ratione æquales erunt duæ GB, HD duabus E, F; & sic si plures erunt partes. Quoties igitur AB continet E, vel quoties CD continet F, toties AB, CD simul continebunt, E, F, simul; ideòque quam multiplex est vnius E vna AB, tam multiplices sunt omnes AB, CD simul, omnium E, F, simul *def.* 2.
Quod erat ostendendum.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

Si prima AB, secundæ C æquè fuerit multiplex, atque tertia DE quartæ F; fuerit autem & quinta BG secundæ C æquè multiplex, atque sexta EH quartæ F: erit & composita prima cum secunda hoc est AG, secundæ C æquè multiplex, atque tertia cum sexta hoc est DH quartæ F.

Quoties enim C continetur in AB, toties F continebitur in DE, eadem ratione quoties C continetur in BG, toties F continebitur in EH; quare si æqualibus numero multitudinibus AB, DE addantur æqua-
f. 2. les numero multitudines BG, EH, erunt totæ multitudines AG, DH inter se numero æquales; adeòque toties F continebitur in DH, quoties C continetur in AG, & ex def. 2. quam multiplex est AG hoc est prima AB cum quinta BG secundæ C, tam multiplex erit

erit D H hoc est tertia D E cum sexta E H, quartæ F. Quod erat ostendendum.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

Si sit prima A, secundæ B æquè multiplex, atque tertia C quartæ D; sumantur æquè multiplices E F primæ A, & G H tertiæ C; erit ex æquo sumptarum vtraque vtriusque æquè multiplex, altera quidem E F secundæ B, altera autem GH, quartæ D.

Cum enim E F, & G H sint æquè multiplices ipsarum A, & C v. g duplæ; erunt in EF, duæ magnitudines E I, I F, æquales ipsi A: similiter in G H erunt
f. 3. duæ GL, LH æquales ipsi C. Quoniam verò E I, seù A æquè multiplex est B, atque G L, seù C multiplex est ipsius D; & pariter I F, ita multiplex B, vt L H multiplex D: erit prima cum quinta E F æquè multiplex secundæ B *prop* 2. atque tertia cum sexta G H multiplex est quartæ D. Quod erat ostendendum.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

Si prima A ad secundam B eandem habuerit rationem vt tertia C ad quartam D etiam æquè multiplices primæ, & tertiæ E,F ad æquè multiplices secundæ, & quartæ G, H iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si prout inter se respondent, ità sumptæ fuerint.

Suman-

Sumantur ipsarum E F, quæcunque æquè multiplices L, M, & aliæ quæcunque æquè multiplices N O, ipsarum G, H secundum quamlibet multiplicationem. Constat ex antecedenti ipsas L, M æquè multiplices esse ipsarum A, & C, item ipsas N, O, æquè multiplices esse ipsarum B, & D: igitur cum sit vt A ad B, ità C ad D, si L maior fuerit aut æqualis, aut minor ipsa N, etiam M, maior aut æqualis, aut minor erit ipsa O *def. 6*. Idem ostendetur de quibuscunque alijs æquè multiplicibus: quare erit vt E ad G, ità F ad H *def. 6*. Quod erat ostendendum.

f. 4.

COROLLARIVM.

Hinc facilè ostendetur inuersa ratio, hoc est dato quod sit vt A ad B, ità C ad D valere etiam inuertendo seù conuertendo, ergo, vt B ad A, ità D ad C. Nam sumptis E, & F æquè multiplicibus prima A, & tertia C, item alia G & H, æquè multiplicibus secunda B, & quarta D; si E maior est, aut minor, aut æqualis G, hoc est si G minor est, aut maior aut æqualis E, erit quoque F maior, aut minor, aut æqualis H, hoc est H erit minor aut maior, aut æqualis F vt patet, vndè sequitur esse vt B ad A, ità D ad C iuxta definitionem sextam.

f. 4.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

Si magnitudo A B magnitudinis C D, æquè fuerit multiplex, atque ablata A E, ablatæ C F; etiam reliqua E B, ità multiplex erit reliquæ F D, vt tota A B totius C D, vel ablata A E ablatæ C F.

Sumatur G C, cuius E B ita multiplex sit vt est A B ipsius

ipsius C F; erit *prop.* 1. tota A B totius G F ita multiplex vt est vna A E, vnius C F: ac proindè erit eadem
f. 5. A B tam multiplex magnitudinis, C D, quam magnitudinis G F: quare G F, & C D æquales inter se erunt, & ablata communi C F, æquales etiam erunt reliquæ G C, & F D, ac propterea E B tam multiplex erit ipsius G C, quam ipsius F D. Est autem E B ita multiplex magnitudinis G C, vt A E, magnitudinis C F, vel A B, ipsius G F *ex hyp* seu C D: erit igitur eadem E B tam multiplex ipsius F D, vt ablata A E, ablatæ C F, vel tota A B, totius C D. Quod erat ostendendum.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

Si duæ magnitudines A B, C D, duarum magnitudinum E, F sint æquè multiplices, & detractæ quædam A G, C H sint earundem E, F æquè multiplices; etiam reliquæ G B, H D eisdem, aut æquales erunt, aut æquè ipsarum multiplices.

Cum enim multitudo partium magnitudinis A B ipsi E æqualium, est æqualis multitudini partium magnitudinis C D, ipsi F æqualium; item multitudo partium magnitudinis A G, æqualis multitudini partium
f. 6. ipsius C H; erit reliquum multitudinis partium reliquæ G B, æquale multitudini partium reliquæ H D; quare si G B æqualis est ipsi E etiam H D ipsi F, æqualis erit, & si G B multiplex est ipsius E, erit quoque æquè multiplex H D ipsius F. Quod erat ostendendum.

THEOR.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

Æquales magnitudines nempè A, B, ad eandem C, eandem habent rationem: & eadem C ad æquales, A, B.

Accipiantur D, E, æquè multiplices primæ A, & tertiæ B, item F multiplex secundæ, & quartæ C secundum quamlibet multiplicationem. Cum A, & B
f. 7. sint æquales, erunt semper earum æquè multiplices D, & E inter se æquales: quare si D maior fuerit, aut æqualis, aut minor ipsa F, etiam E maior, aut æqualis, aut minor erit ipsa F; adeòque, *ex def. 6.* erit vt A ad C, ità B ad C, & inuertendo *per corol* 1. 4. erit vt C ad A, ità C ad B. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Colligitur methodus ostendendi æquales magnitudines ad alias inter se æquales eandem habere rationem; si loco multiplicis sumantur duæ æquè multiplices, quæ æquales inter se erunt.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

Inæqualium magnitudinum A B, C, maior A B, ad eandem D, maiorem rationem habet, quam minor C: & eadem D ad minorem C, maiorem rationem habet, quam ad maiorem A B.

Intellagitur in AB magnitudo A E, cui æqualis sit

minor C, & reliqua sit E B, quæ rationem habeat ad D; Vniusque A E, E B sumantur æquè multiplices FG, GH, hac tamen lege vt GH maior quidem sit quā D, at F G non sit minor eadem D. Quoniam igitur duæ FG, GH æquè multiplices sunt duarum AE, EB,
f. 8. erit tota F H *prop.* 1. totius A B æquè multiplices vt vna F G, vnius A E, hoc est C; accipiatur quoque ipsius D multiplex I L; quæ proximè maior sit, quam FG (quod facile est cum D minor sit ipsa F G). Abscissa ergo I M æquali ipsi D, non erit L M maior, quam FG, cum tota I L sit proximè maior *ex hyp.* ipsa FG; adeòque si LM adhuc esset maior ipsa GF, tota I L esset plus quam proximè maior, quod est contra hypotesin. Cum itaque, GH maior sit ipsa D, seu I M, & reliqua FG maior quoque sit, vel æqualis reliquæ M L, erit tota F H, maior tota IL; atque adeò cum FH multiplex primæ AB excedat IL multiplicem secūdæ D; FG verò multiplex tertiæ C non excedat I L multiplicem quartæ D, imò ab ea excedatur, habebit per definitionem octauam maior AB ad D, maiorem rationem quam minor C ad eandem D. E contrario quia I L multiplex primæ D excedit F G multiplicem secundæ C, & I L multiplex tertiæ, hoc est eiusdem D, non excedit FH multiplicem quartæ AB: D maiorem rationem habebit ad minorem C, quam ad maiorem AB, *def.* 8. Quod erat ostendendum.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

Si duæ A, & B habent ad eandem magnitudinem C eandem rationem, æquales inter se sunt: & si eadem C ad duas A, & B habet eandem rationem, hæ quoque sunt inter se æquales.

Si

Si enim non sunt æquales, sit alterutra nempe A,
f. 7. maior quam B. A igitur ad C habet maiorem rationem, quam B ad eandem C: & C ad D minorem, quam ad B, *prop.* 8. quod est contra hypotesin, quare æquales esse debent A, & B. Quod erat ostendendum.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

Si AB maiorem rationem habet, quam C ad eandem D: AB maior erit. Et si eadem D maiorem rationem habet ad C, quam ad AB, AB quoque maior erit.

Si enim AB non est maior, erit aut æqualis, aut minor, quam C: atque adeò AB ad D habebit eandem,
f. 8. vel minorem rationem, quam C ad eandem D; habebitque D eandem, vel maiorem rationem ad AB, quam ad C, *prop.* 7. & 8. quod est contra hypotesin; non ergo AB æqualis, aut minor esse potest, quam C, sed maior. Quod erat ostendendum.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

Si rationes A ad B, & C ad D eædem sint rationi E ad F, & inter se eandem habebunt A ad B, & C ad D.

Sumantur omnium antecedentium A, E, C, æquè multiplices G, H, I, & omnium consequentium B, F, D, aliæ æquè multiplices secundum quamlibet multiplicationem L, M, N. Quoniam igitur est vt A ad B, ità E ad F, fit quòd si G maior est, aut æqualis, aut minor, quam L, etiam H maior sit aut æqualis, aut minor, quam M; sed cum sit vt E ad F, ità C ad *f. 9.* D, quando H maior est, aut æqualis, aut minor, quam M, I debet quoque esse maior, aut æqualis, aut minor quam N: Igitur si G maior fuerit, aut æqualis, aut minor, quam L, erit etiam I maior, aut æqualis, aut minor, quam N, adeòque erit vt A ad B, ità C ad D. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Hinc colligitur facilitas ostendendi, quod, quæ eisdem sunt eadem rationes, & inter se sunt eadem: Bis repetendo factam demonstrationem.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

Si sint magnitudines quotcunque proportionales AB, EF, CD; quemadmodum se habuerit vna A antecedentium, ad vnam B consequentium, ità se habebunt omnes antecedentes A, E, C, ad omnes consequentes B, F, D.

Sumptæ enim vt in antecedenti propositione omnium antecedentium æquè multiplices G, H, I, & omnium consequentium æquè multiplices L, M, N, erunt omnes G, H, I, simul omnium A, E, C, simul æquè multiplices, vt vna G vnius A; Item omnes L, M, N, omnium B, F, D, vt vna L vnius B *prop. 1.* Quo- *f. 9.* niam igitur est vt A ad B, ità E ad F, & C ad D; fit, quod si G excedit L, H excedat M, & I excedat N, &

si

si æqualis, æqualis, si minor, minor: adeòque si G excedit L, omnes G, H, I, excedent omnes L, M, N, si æqualis æquales, si minor, minores: quare erit vt A ad B, ita omnes A, E, C, ad omnes B, F, D. Quod erat ostendendum.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

Si prima A ad secundam B habuerit eandem rationem, quam tertia E ad quartam F; tertia verò E ad quartam F, habuerit maiorem rationem, quam quinta C ad sextam D: prima quoque A ad secundam B, habebit maiorem rationem, quam quinta C ad sextam D.

Adhibita eadem constructione, atque in antecedenti, fit, vt quando I est æqualis, vel minor, quam N, H possit esse maior, quam M *def* 8.; sed quando H est maior, quam M, semper G debet esse maior, quam L *def* 6.: adeòque quando I est æqualis, vel minor, quam N, G potest esse maior, quam L: quare maior
f. 9. erit ratio A ad B, quam C ad D *def* 8. Quod erat ostendendum.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

Si prima A ad secundam B habuerit eandem rationem, quam tertia C ad quartam D; prima verò A maior fuerit, quam tertia C: Erit & secunda B maior, quam quarta D.

 Cum

Cum enim A maior sit quam C, maior erit ratio A ad B, quam C ad eandem B *prop.* 8. sed vt A ad B, ità
f. 4. C ad D *ex hyp.* quare ratio C ad D maior erit, quam eadem C ad B *prop.* 13. ideòque B maior erit, quam D *prop.* 10. Quod erat ostendendum.

Similiter ostendemus, si prima A aqualis sit tertia C, secundam B esse quoque aqualem quarta D: Et si A maior sit, quam C, B etiam, maiorem esse, quam D.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

Partes E, F, cum earum pariter multiplicibus, A B, C D, in eadem sunt ratione, si pro vt sibi mutuo respondent, ità sumantur.

Diuisa A B, in partes A G, G B, æquales ipsi E, & CD in partes CH, HD æquales ipsi F, erit multitudo partium vnius æqualis multitudini partium alterius,
f. 1. eritque vt AG, ad CH, hoc est, vt E ad F *corol. prop.* 7. ità tota A B ad totam C D, *prop.* 12. Quod erat ostendendum.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

Si quatuor magnitudines eiusdem generis A, B, & C, D proportionales fuerint, & vicissim, seù permutando proportionales erunt.

Sumantur æquè multiplices E, G, ipsarum A, B; & F, H, ipsarum, C, D. Erit igitur vt A ad B, ita E ad G, & vt C ad D, ita F ad H *prop.* 15. atque adeò vt

E ad G, ità F ad H *corol. prop.* 11. Igitur si E maior fuerit, aut æqualis, aut minor, quam F, etiam G maior
f. 4. erit, aut æqualis, aut minor, quam H; quare erit vt A ad C, ità B ad D. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Hinc colligitur, quod si quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima verò maior sit, vel æqualis, aut minor, quam secunda; tertia quoque maior, vel æqualis, aut minor erit, quam quarta. Adhibita namque permutatione, secunda euadit tertia: adeòque constabit assertum ex prop. 14.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

Si compositæ magnitudines A B, C B; & DE, FE, proportionales fuerint: hæ quoque diuisæ proportionales erunt.

Sumptis ipsarum AC, DF, CB, FE æquè multiplicibus GH, IL, HM, LN, erit tota GM ità multiplex totius AB, vt GH, ipsius AC; item tota I N ità multiplex erit totius D E vt vna I L vnius D F *prop.* 1. at G H, I L, æquè multiplices sunt ipsarum A C, D F *ex construc.*: igitur & ipsarum A B, D E æquè multiplices erunt G M, I N. Accipiantur rursus ipsarum
f. 10. C B, F E aliæ æquè multiplices M O, N Q secundum quamlibet multiplicationem; erunt totæ H O, L Q æquè multiplices ipsarum CB, FE *prop.* 2. Sed cum sit vt A B ad C B, ità D E ad F E *ex hyp.* fit quod si G M maior est, aut æqualis, aut minor quam H O, etiam I N maior sit, aut æqualis, aut minor quam L Q: &

 abla-

ablatis communibus ex vtraque parte nempe HM, LN, si GH multiplex primæ AC maior est, aut æqualis, aut minor quam MO multiplex secundæ CB, IL multiplex tertiæ DF, maior, aut æqualis, aut minor erit, quam NQ multiplex quartæ FE: quare erit vt AC ad CB, ità DF ad FE. Quod erat ostendendum.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

Si diuisæ magnitudines AC, CB, & DF, FE sunt proportionales; hæ quoque compositæ proportionales erunt, hoc est componendo erit vt AB ad CB, ità DE ad FE.

Si enim non: sit vt AB ad CB, ità DE ad aliam FG maiorem, vel minorem, quam FE *post. huius.* Erit igitur diuidendo vt AC ad CB, hoc est DF ad FE, ità
f. 10. DF ad FG; quare FE, FG æquales inter se erunt *prop. 9.*; quod est absurdum, cum FG posita sit vel maior, vel minor ipsa FE. Non ergo DE ad maiorem aut minorem quam FE habebit eandem rationem quam AB ad CB, adeòque vt AB ad CB, ita est DE ad FE. Quod erat ostendendum.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

Si quemadmodum tota AB ad totam CD, ità ablata AE habuerit ad ablatam EF: etiam reliqua EB ad reliquam FD se habebit vt tota AB ad totam CD.

Cum sit vt AB ad CD, ita AE ad CF, erit permu-

tando

cando vt AB ad AE, ità CD ad CF *prop.* 16. & diui-
f. 5. dendo vt BE ad AE, ità DF ad CF *prop.* 17. & rursus permutando vt BE ad DF, ità AE ad CF, hoc est AB ad CD. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Hinc colligitur si magnitudines proportionales fuerint, etiam per conuersionem rationis proportionales esse, hoc est si sit vt AB ad EB, ità CD ad FD, esse quoque AB ad AE, ità CD ad CF; erit enim diuidendo vt AE ad EB, ità CF ad FD, & inuertendo vt EB ad AE, ità FD ad CF, & componendo vt AB ad AE, ità CD ad CF.

THEOR. 20. PROPOS. 20.

Si sint tres magnitudines A, C, B, & aliæ D, F, E, ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima A, quam tertia B maior fuerit: erit & quarta D quam sexta E maior: quod si minor, minor; si æqualis, æqualis.

Si enim prima A maior est quam tertia B, A habebit maiorem proportionem ad C, quam B ad eandem *prop.* 8.: sed vt A ad C, ità D ad F, & inuertendo vt B
f. 7. ad C, ità E ad F; quare E ad F minorem proportionem habebit, quam D ad F *prop.* 13.: adeòque quarta D maior erit, quam sexta E *prop.* 10. Eodem modo ostendemus si A æqualis est B, D æqualem esse E, si minor minorem. Quod erat ostendendum.

THEOR. 21. PROPOS. 21.

Si sint tres magnitudines A, C, B, & aliæ D, F, E, ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur, fueritque perturbata earum proportio, hoc est vt A ad C, ità F ad E, & vt C ad B, ità D ad F; ex æquo autem prima A, quam tertia B maior fuerit: erit & quarta D, quam sexta E maior; Quod si minor, minor; si æqualis, æqualis.

Si enim A maior est, quam B, A ad C habebit maiorem rationem, quam B ad eandem: sed vt A ad C,
f. 7. ità F ad E, & inuertendo vt B ad C, ità F ad D; ergo F ad D *prop.* 13. minorem proportionem habet, quam ad E: quare D maior erit, quam E *prop.* 10. Ita facilè ostendetur de reliquis casibus. Quod erat ostendendum.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

Si sint quotcumque magnitudines A, C, B, & aliæ D, F, E, ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur: etiam ex æquo in eadem ratione erunt.

Sumantur ipsarum A, D æquè multiplices G, H, & ipsarum C, F, aliæ secundum quamlibet multiplicationem æquè multiplices I, L; item ipsarum B E, aliæ M, N. Erunt igitur magnitudines G, I, M, in eadem quoque ratione cum magnitudinibus H, L, N,

prop.

prop. 4.: quare ex æquo si G maior est, aut æqualis,
f. 7. aut minor, quam M, etiam H maior erit, aut æqualis, aut minor, quam N *prop.* 20.; adeòque ex æqualitate vt A ad B, ità est D ad E. Quod erat ostendendum.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

Si sint magnitudines, A, C, B, aliæque D, F, E, ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; fuerit autem perturbata earum proportio, hoc est vt A ad C, ità F ad E; & vt C ad B, ità D ad F: etiam ex æquo in eadem ratione erunt; hoc est vt A ad B, ità D ad E.

Sumptis enim ipsarum A, C, & D, æquè multiplicibus G, I, H, item ipsarum B, & F, E, æquè multiplicibus M, L, N, erit G ad I vt A ad C, & L ad N, vt F ad E *prop.* 15., sed vt A ad C, ità F ad E, erit igitur vt G ad I, ità L ad N *prop.* 11. Rursus est vt C ad B, ità I ad M, & vt D ad F, ità H ad L *prop.* 4.; sed vt
f. 7. C ad B, ità est D ad F, igitur H ad L erit vt I ad M *prop.* 11.: atque adeò ex æquo si G maior, aut æqualis, aut minor fuerit, quam M, H quoque maior erit, aut æqualis, aut minor, quam N *prop.* 21. Quare erit ex æquo vt A ad B, ità D ad E. Quod erat ostendendum.

Idem ostendetur tam in superiori, quam in præsenti propositione si plures, quam tres magnitudines fuerint: semper enim possunt reduci ad tres, vt constat.

THEOR.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

Si prima A B, ad ſecunda C eandem habuerit rationem, quam tertia DE, ad quartam F, & quinta BG ad ſecundam C, eandem habuerit rationem, quam ſexta EH ad quartam F: & compoſita prima cum quinta, hoc eſt AG ad ſecundam C, eandem habebit rationem, quam compoſita tertia cum ſexta, hoc eſt DH ad quartam F.

Cum enim ſit vt BG ad C, ità EH ad F, erit inuertendo C ad BG, vt F ad EH. Quoniam igitur eſt AB
f. 2. ad C vt DE ad F, & C ad BG, vt F ad EH: erit ex æquo AB ad BG, vt DE ad EH, & componendo vt AG ad BG, ità DH ad EH; ſed vt BG ad C, ità EH ad F, igitur ex æquo AG ad C erit, vt DH ad F. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

Si quatuor magnitudines A B, C D, E, F, proportionales fuerint; maxima v. g. A B, & minima F *prop.* 14. *& cor. p.* 16. reliquis duabus maiores erunt.

Ablatis enim A G, C H æqualibus ipſis E, F; cum ſit tota A B ad totam CD, ità ablata AG ad ablatam
f. 6. CH, hoc eſt vt E ad F; erit & reliqua G B ad reliquam H D, vt tota ad totam *prop.* 19.; eſt autem A B maior, quam CD *ex hyp.*; igitur & G B maior erit,

quam

quam H D *prop.* 14. Quare si ipsis A G, E æqualibus, addantur æquales F, CH, erunt AG, & F simul æquales ipsis E, CH simul; additisque inæqualibus G B, HD, fient AB, & F simul maiores, quam E, & CD simul. Quod erat ostendendum.

Hic finem imponit Euclides elemento quinto. Quia tamen Campanus Commandinus, & Clauius, alias multas subiungunt, quæ citari solent ab Archimede, Apollonio, alijsque grauissimis Scriptoribus, quasi essent Euclidis, placuit eas non prætermittere.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

Si prima A ad secundam B maiorem proportionem habuerit, quam tertia C ad quartam D; habebit conuertendo secunda B ad primam A, minorem proportionem, quam quarta D ad tertiam C.

Vt C ad D sit alia E ad B *post.* Cum igitur E ad B, hoc est C ad D minorem proportionem habeat, quam
f. 11. A ad B, erit A maior, quam E *prop.* 10.; ideòque ratio B ad A minor erit, quam B ad E, hoc est D ad C *prop.* 8. Quod erat ostendendum.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

Si prima A ad secundam B habuerit maiorem proportionem, quam tertia C ad quartam D; habebit quoque vicissim prima A ad tertiam C maiorem, quam secunda B ad quartam D.

Sit

Sit iterum vt C ad D, ità E ad B. Erit rurſus A
f.11. maior, quam E *prop.* 10.: quare maior erit ratio A ad C *prop.* 8. quam E ad eandem, hoc eſt permutando, quam B ad D. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

Si prima A ad ſecundam B habuerit maiorem proportionem, quam tertia C ad quartam D; habebit quoque compoſita prima cum ſecunda AB ad ſecundam B maiorem rationem, quamcompoſita tertia cum quarta C D ad quartam D.

Vt C ad D ſit E ad B. Erit vt in antecedenti A maior quam E, & addita communi B, AB maior erit, quam EB; ideòque ratio A B ad B maior erit, quam
f.11. EB ad eandem B *prop.* 8.: & quia E ad B, eſt vt C ad D, & componendo EB ad B, eſt vt CD ad D, habebit AB ad B maiorem quoque rationem, quam CD ad D *prop.* 13. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

Si compoſita prima cum ſecunda A B ad ſecundam B habuerit maiorem proportionem, quam compoſita tertia cum quarra C D ad quartam D; habebit quoque diuidendo prima A ad ſecundam B maiorem proportionẽ, quam tertia C ad quartam D.

Sit

Sit enim EB ad B vt CD ad D, erit *prop.* 10. AB maior, quam E B, & ablata communi B, A maior erit,
f. 11. quam E, & ratio A ad B maior, quam E ad eandem *prop.* 8. hoc est vt C ad D, quia diuidendo est E ad B, vt C ad D. Quod erat ostendendum.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

Si composita prima cum secunda A B ad secundam B maiorem proportionem habuerit, quam composita tertia cum quarta C D ad quartam D; habebit per conuersionem rationis prima cum secunda A B ad primam A, minorem proportionem, quam tertia cum quarta CD ad tertiam C.

Habebit enim diuidendo A ad B maiorem proportionem, quam C ad D *prop.* 29. & inuertendo D ad C
f. 11. maiorem, quam B ad A *prop.* 26. & componendo DC ad C maiorem, quam BA ad A *prop.* 18. hoc est ratio BA ad A minor erit, quam DC ad C. Quod erat ostendendum.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

Si sint tres magnitudines A, B, C, & aliæ D, E, F, ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum A, ad secundam B, quam primæ posteriorum D ad secundam E, item secundæ B ad tertiam C, qnam secundæ E ad tertiam F; erit quoque ex æquo

maior

maior proportio primæ A ad tertiam C, quam primæ D ad tertiam F.

Posita G ad C, vt E ad F, erit iam B maior, quam G, *prop.* 10. & A ad G maiorem habebit proportionem, quam ad B *prop* 8. hoc est multo maiorem, quam D ad E. Sit rursus H ad G, vt D ad E; cum igitur proportio A ad G maior est, quam H ad G, hoc est,
f. 11. quam D ad E, A maior erit, quam H *prop.* 10. habebitque A ad vnam C maiorem proportionem, quam H ad eandem C, hoc est ex æquo *prop.* 22. quam D ad F. Quod erat ostendendum.

THEOR. 32. PROPOS. 32.

Si sint tres magnitudines A, B, C, & aliæ D, E, F, ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum A ad secundam B, quam secundæ posteriorum E ad tertiam F, item secundæ B ad tertiam C, quam primæ D ad secundam E: erit quoque ex æqualitate maior proportio primæ A ad tertiam C, quam primæ D ad tertiam F.

Vt D ad E sit G ad C: erit igitur B maior, quam G, *prop.* 10. habebitque A ad G maiorem proportionem, quam ad B *prop.* 8. hoc est multo maiorem, quam
f. 12. E ad F. Sit etiam H ad G, vt E ad F, A maior erit, quam H, adeòque A ad vnam C habebit maiorem rationem, quam H ad eandem C, hoc est ex æquo *prop.* 23. maiorem, quam D ad F. Quod erat ostendendum.

THEOR.

THEOR. 33. PROPOS. 33.

Si fuerit maior proportio totius AB ad totam C D, quam ablatæ A E ad ablatam CF; erit & reliquæ E B ad reliquam F D maior proportio, quam totius AB ad totam CD.

Quia est maior proportio AB ad CD, quam AE ad C F, erit permutando & maior *prop.* 27. ratio A B ad A E, quam CD ad CF, & per conuersionem rationis AB ad EB minorem habebit, quam CD ad FD *prop.* 30. & denuò permutando ratio A B ad C D minor erit, quam E B ad F D, hoc est ratio E B ad F D maior erit, quam A B ad C D. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Colligitur primo modum ostendendi valere eandem argumentationem in octo postremis propositionibus, quamuis pro voce maioris *ponerétur vox* minoris*, vt v. g si prima ad secundam habuerit minorem proportionem, quam tertia ad quartam, habere & conuertendo secundam ad primam, maiorem proportionem, quam quarta ad tertiam, & sic de reliquis septem.*

Colligitur secundo, si argumentatio fiat per inuertionem, aut conuertionem rationis mutari proportionem de maiore in minorem, & de minore in maiorem; si autem fiat permutando, componendo, diuidendo, aut ex æqualitate, siue ordinata, siue perturbata, eandem proportionem seù maiorem, seù minorem seruari, vt perspicuum est ex demonstratis.

THEOR. 34. PROPOS. 34.

Si sint quotcunque magnitudines A, C, B, & aliæ D, F, E, ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum A ad primam posteriorum D; quam secundæ C ad secundam F; & hæc maior quoque, quam tertiæ B ad tertiam E, & sic deinceps, si magnitudines fuerint plus, quam tres: habebunt omnes priores A, C, B, simul ad omnes posteriores D, F E, simul maiorem proportionem, quam omnes priores C, B, relicta prima A, ad omnes posteriores F, E, relicta quoque prima D; item maiorem, quam vltima priorum B ad vltimam posteriorum E, minorem autem, quam prima priorum A ad primam posteriorum D.

Quoniam enim maior est proportio A ad D, quam C ad F, erit quoque maior permutando A ad C, quam D ad F; & componendo maior A C, ad C, quam D F ad F, & rursus permutando maior totius A C ad totam D F, quam ablatæ C ad ablatam F, & eadem multo maior reliquæ A ad reliquam D. Eadem argumentatione erit C ad F maior, quam totius C B ad totam F E, & multo maior, quam ablatæ B ad ablatam E: quare ratio A ad D multo maior erit, quam C B ad
f. 7. F E, & permutando maior quoque A ad C B, quam D ad F E, & componendo maior A C B, ad C B, quam D F E ad F E, & rursus permutando maiorem proportionem habebunt omnes A C B, ad omnes D F E

quam

quam CB ad FB relictis primis A, & D, & multo maiorem, quam vltima B ad vltimam E. Sed quia totius ACB ad totam DFE maior est proportio, quam ablatæ CB ad ablatam FE, & reliquæ A ad reliquam D maior erit, quam totius ACB ad totam DFE, hoc est omnes A, C, B, minorem proportionem habebunt ad omnes D, F, E, quam prima A ad primam D. Eadem arte concludetur eadem consequi in quatuor magnitudinibus per tres, in quinque per quatuor, & sic deinceps. Quod erat ostendendum.

Finis Elementi quinti.

EVCLIDIS ELEMENTVM SEXTVM.

DEFINITIONES.

I.

f. 10. Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum æquales angulos, proportionalia.

II.

Reciprocæ autem figuræ sunt, cum in vtraque figu-
f. 7. ra antecedentes, & consequentes rationum termini fuerint.

III.

Secundum extremam, & mediam rationem recta
f. 18. linea secta esse dicitur, cùm vt tota ad maius segmentum, ità maius ad minus se habuerit.

IV.

Altitudo cuiusque figuræ, est linea perpendicula-
f. 1. ris à vertice ad basin deducta.

V.

Ratio ex rationibus componi dicitur cum rationum quantitates inter se multiplicatæ aliquam effecerint rationem.

VI.

Parallelogrammum secundum aliquam rectam li-

neam

neam applicatum, deficere dicitur parallelogrammo,
f.15 quando non occupat totam lineam; excedere verò, quando occupat maiorem lineam, quam sit ea, secundùm quam applicatur.

V I I.

Similes arcus circulorum dicuntur, qui eandem habent ad totas suas circumferentias rationem. *Duæ*
f.21. *hæ posteriores definitiones ab alijs adduntur, quia earum vsus frequenter occurit, vt in propositionibus 27, 28, 29, 30 huius libri, & quamplurimis alijs decimi.*

THEOR. 1. PROPOS. 1.

Triangula ABC, DEF, & parallelogramma GC, HF, quorum eadem fuerit altitudo, hoc est inter easdem fuerint parallelas GD, BF; ità se habent inter se vt basis BC ad basim EF.

Producta ab vtraque parte recta BF, sumantur quotcunque BI, IL, LM, æquales ipsi BC, & aliæ quotcunque FN, NO, æquales ipsi EF; connectanturque AI, AL, AM, item DN, DO. Erunt triangula AIB, ALI, AML æqualia *prop.* 38 1. ipsi ABC, adeòque quam multiplex est MC basis BC, tam multiplex erit triangulum AMC, trianguli ABC. Similiter quam multiplex est EO basis EF, tam multiplex erit triangu-
f.1. lum EDO trianguli EDF; quare si MC, maior est, aut æqualis, aut minor, quam EO, etiam triangulum AMC maius, aut æquale, aut minus erit, quam DEO: igitur *ex def.* 6. 5. vt BC, ad EF, ità triangulum ABC ad triangulum DEF, & parallelogrammum GC ad parallelogrammum HF, vtpotè dupla suorum trian-

 gulo-

gulorum eandem rationem habentium, ac basis BC ad basin EF. Quod erat ostendendum.

Hinc facilè ostendetur conuersum huius theorematis, videlicet; triangula, & parallelogramma, quæ ità se habent vt bases, æquales habere altitudines, hoc est inter easdem esse parallelas def. 4.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

Si ad vnum latus BC, trianguli ABC, ducatur parallela DE: hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera; hoc est erit AE ad EC, vt AD, ad DB. Et è conuerso.

Iungantur BE, CD. Erunt igitur triangula DEB, DEC super eadem basi DE, & inter easdem parallelas constituta *prop.* 37. 1. inter se æqualia: quare erit triangulum ADE ad triangulum DEB, hoc est *prop.* 1. AD, ad DB vt idem ADE *prop.* 7. 5. ad triangulum
f. 2. DEC, hoc est *prop.* 1. AE ad EC.

Deindè sit AD ad DB, vt AE ad EC. Dico DE, BC parallelas esse. Erit enim AD, ad DB, hoc est *prop.* 1. triangulum ADE ad triangulum DEB, vt AC ad EC, hoc est *prop.* 1. triangulum ADE ad triangulum DEC: quare æqualia erunt inter se *prop.* 7. 5. triangula DEB, EDC; ac propterea cum eadem sit basis DE, parallelæ erunt *prop.* 39. 1. inter se rectæ DE, BC. Quod erat ostendendum.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

Si vnus angulus BAC, bifariam secetur per AD: basis segmenta BD, DC, erunt inter se, vt latera BA, AC. Et è conuerso.

Pro-

Protrahatur C A, factaque A E æqualis ipsi A B, iungatur EB. Æquales anguli *prop*. 5. 1. AEB, ABE erunt simul sumpti æquales externo BAC, & vni AEB æqualis erit DAC dimidium totius BAC; adeòque parallelæ inter se erunt *prop*. 28. 1. AD, EB; erit igitur
f. 3. BD, ad DC *prop*. 2. vt EA, hoc est BA ad AC.

Deindè sit BD ad DC vt BA, hoc est EA ad AC. Erunt *prop*. 2. parallelæ EB, AD: quare triangulus DAC, hoc est *prop*. 29. 1. AED, hoc est *prop*. 5. 1. ABE, æqualis erit *prop*. 29. 1. angulo D A B. Quod erat ostendendum.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

Æquiangulorum triãgulorum EBC, ADC proportionalia sunt latera, quæ circa æquales angulos; & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

Superpositus angulus C sit communis, & angulus D æqualis angulo B, & angulus A angulo E. Recta AD parallela erit *prop*. 28, 1. lateri EB, eritque EA ad AC vt *prop*. 1. BD, ad DC, & componendo *prop*. 18. 5. E C ad A C vt B C ad D C, & permutando *prop*. 16. 5.
f. 3. E C ad B C vt A C, ad D C. Proportionalia igitur sunt latera circa angulum C, & homologa, hoc est tam antecedentia, quam consequentia sunt, quæ æqualibus angulis subtenduntur. Similiter ostendetur esse BE ad EC, vt DA ad AC, & CB ad BE vt CD ad DA, si superpositio fiat ad angulos æquales A, E, & D, B. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Hinc colligitur lineam rectam, quæ parallela ducitur vni lateri in triangulo, auferre triangulum toti triangulo simile, secundum def. 1.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

Si duo triangula ABC, DEF, habeant latera proportionalia, hoc est AB ad BC, vt DE ad EF, & BC ad CA, vt EF ad FD, & CA ad AB, vt FD ad DE; æquiangula erunt, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.

Fiant enim angulis B, C æquales anguli G E F, GFE super rectas EF. Erit triangulum EGF æquiangulum *cor. 1. prop. 32. 1.* triangulo BAC, eritque AB ad BC, hoc est DE ad EF, vt *prop. 4.* GE ad EF: quare
f. 4. DE æqualis erit *prop. 9. 5.* ipsi GE, ac eadem ratione DF æqualis ipsi FG; & quoniam EF est communis, erit triangulum E D F æquiangulum *prop. 8. 1.* triangulo EGF, hoc est ABC. Quod erat ostendendum.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

Si duo triangula ABC, DEF vnum angulum B vni angulo E æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint, hoc est AB ad BC, vt DE ad EF; æquiangula erunt triangula, æqualesque habebunt

bebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.

Facto rursus triangulo GEF æquiangulo ipsi ABC, erit *prop. 4.* AB ad BC, hoc est DE ad EF, vt GE ad EF; adeòque GE, DE æquales erunt, est autem EF communis, & angulus GEF æqualis *ex construc.* angulo FED; igitur triangulum DEF æquiangulum erit *prop. 4. 1.* triangulo GEF, hoc est ABC. Quod erat ostendendum.

f. 4.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

Si duo triangula ABC, DEF vnum angulum A vni angulo D æqualem, circum autem alios angulos B, E, latera proportionalia habeant, hoc est AB ad BC, vt DE ad EF, reliquorum verò C, F, simul vtrumque aut minorem, aut non minorem recto; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circa quos proportionalia sunt latera.

Si enim non: Fiat angulo E æqualis angulus ABH. Erit triangulum ABH æquiangulum *cor. 1. prop. 32. 1.* triangulo DEF, & DE ad EF, hoc est AB ad BC erit, vt *prop. 4.* AB ad BH; adeòque BH, BC *prop. 9. 5.* æquales erunt, anguli que BHC, & C *prop. 5. 1.* æquales. Quare ex hypotesi quod vterque angulus C, seu BHC, & F, seu BHA, sit recto minor, erunt anguli ad H minores duobus rectis: quod est absurdum. In hypotesi verò quod C, seu BHC sit non minor recto erunt tres anguli trianguli BHC maiores duobus rectis; quod

f. 4.

est pariter absurdum. Igitur impossibile est, quod in tali hypotesi triangulum ABC æquiangulum non sit triangulo DEF. Quod erat ostendendum.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

Si in triangulo rectangulo ABC, ab angulo recto BAC in basin BC perpendicularis AD ducta sit; quæ ad perpendicularem triangula ADB, ADC, tum toti triangulo ABC, tum ipsa inter se similia sunt.

Angulus enim BAC æqualis est angulo ADB, & angulus B communis, quare *corol.* 1. 32. 1. æquiangula
f. 5. erunt triangula ABC, ADB. Similiter æquiangula erunt triangula BAC, ADC; adeòque & inter se æquiangula erunt triangula ADB, CDA; & *per prop.* 4. similia. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Hinc manifestum fit perpendicularem AD esse mediam proportionalem inter duo basis segmenta BD, DC: nam cum æquiangula sint triangula ADB, CDA erit ex prop. 4
f. 5 *BD ad AD, vt AD ad DC. Ità pariter vtrumlibet laterum angulum rectum A ambientium, medium proportionale esse inter totam basin, & illud segmentum basis, quod ei lateri adiacet; hoc est esse, vt BC ad AC, ità AC ad CD, & vt BC ad AB, ità AB ad BD.*

PROBL. 1. PROPOS. 9.

A data recta linea AB imperatam partem v. g. tertiam auferre.

Factus

Factus vtcunque angulus B A C in linea A C, sumantur tres partes æquales AD, DE, EC; iunctaque C B, ei parallela ducatur D F. Dico A F esse tertiam partem ipsius AB. Erit enim *ex 2 huius.* AF ad FB, vt
f. 6. A D ad D C, & componendo A B ad A F, vt A C ad AD: sed AC est tripla ipsius AD, ergo & AB erit tripla ipsius AF. Quod erat faciendum.

PROBL. 2. PROPOS. 10.

Datam rectam lineam insectam AB similiter secare, vt data altera recta A C secta fuerit in D, & E.

Iuncta rursus C B ei ducantur parallelæ rectæ EG, DF, quæ & inter se parallelæ erunt; quare erit *ex prop.* 2. AG ad GB, vt AE ad EC, & componendo AB ad
f. 6. GB, vt AC ad EC: rursus per conuertionem rationis AB ad AG, vt AC ad AE, & A G ad F G *prop. 2. & componendo*, vt AE ad DE.. Igitur ex æquo erit AB ad FG, vt AC ad DE. Demum *per eandem* 2. erit AF ad FB, vt AD ad DC, & componendo AB ad AF, vt AC ad AD. Quod erat faciendum.

PROBL. 3. PROPOS. 11.

Duabus datis rectis lineis AF, AD, tertiam proportionalem adinuenire.

Productis AD, AF sumatur ipsi AF æqualis DE in recta AE, & iuncta DF ei parallela ducatur EG. Erit
f. 6. FG tertia proportionalis; erit enim AD, hoc est AF ad DE, vt AF ad FG. Quod erat faciendum.

PROBL.

PROBL. 4. PROPOS. 12.

Tribus datis rectis lineis AD, DE, AF quartam proportionalem inuenire.

Positis sibi in directum duabus rectis AD, DE continentibus angulum A cum tertia AF iungatur DF, & f. 6. producta AF ducatur ipsi DF parallela EG. Erit FG quarta proportionalis: erit enim vt AD, ad DE *prop. 2.* ita AF ad FG. Quod erat faciendum.

PROBL. 5. PROPOS. 13.

Duabus datis rectis lineis BD, DC, mediam proportionalem adinuenire.

Datis rectis dispositis secundum vnam lineam rectam BDC, super ipsam describatur semicirculus f. 5. BAC, & erigatur perpendicularis DA. Iunctis enim AB, AC erit angulus A *prop. 31. 3.* rectus: quare erit *cor. prop. 8.* BD ad DA, vt DA ad DC. Quod erat faciendum.

THEOR. 9. PROPOS. 14.

Æqualium, & vnum vni habentium æqualem angulum A, parallelogrammorum AB, AC, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos; hoc est GA ad AF erit vt DA ad AE. Et è conuerso.

Iunctis parallelogrammis ad angulum A, ita vt

AG, AF constituant vnam lineam rectam, constituent etiam AD, AE vnam lineam *prop.* 14 1 rectam. Compleatur parallelogrammum AH. Æqualia parallelogramma AB, AC habebunt ad idem AH eandem rationem *prop.* 7 5. sed vt AB ad AH, ita est *prop.* 1. GA
f. 7. ad AF, & vt AC ad AH, ità est *prop.* 1. DA ad AE, quare vt GA ad AF, ità erit *prop.* 11. 5. DA ad AE. Deindè sit GA ad AF, hoc est *prop.* 1. AB ad AH, vt DA ad AE, hoc est *prop.* 1. vt AC ad AH: erunt parallelogramma AB, AC inter se æqualia *prop.* 9. 5. Quod erat ostendendum.

THEOR. 16. PROPOS. 15.

Æqualium & vnum vni, æqualem habentium angulum A triangulorum AEG, AFD, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et è conuerso.

Eodem modo, & eadem argumentatione ostendetur atque antecedens; cum enim sint dimidium suo-
f. 7. rum parallelogrammorum; si ipsa inter se sunt æqualia, & eorum parallelogramma inter se æqualia erunt: adeòque vt prius. Quod erat ostendendum.

THEOR. 11. PROPOS. 16.

Si quatuor rectæ lineæ DA, AE, GA, AF proportionales fuerint; quod sub extremis DA, AF comprehenditur rectangulum AC, æquale est ei, quod sub medijs AE, GA comprehenditur rectangulo AB. Et è conuerso.

Cum

Cum enim parallelogramma A C, A B habeant vnum vni angulum A æqualem vtpotè rectum *ex hyp.* & sit vt D A ad A E, ità G A ad A F; erunt inter se
f. 7. æqualia *prop. 14.*
8. Deindè si sint inter se æqualia, rectæ DA, AE, GA, AF proportionales erunt; erit enim *prop. 14.* DA ad AE, ità GA ad AF. Quod erat ostendendum.

THEOR. 12. PROPOS. 17.

Si tres rectæ A, B, C, sint proportionales, quod sub extremis A, C, comprehenditur rectangulo, æquale est ei, quod à dimidia B describitur quadrato. Et è conuerso.

Posita alia D æquali secundæ B, erunt iam quatuor
f. 9. rectæ lineæ proportionales, nempè vt A ad B, ità D, hoc est B ad C: quare vt supra. Quod erat ostendendum.

Idem verum est in vtraque demonstratione, etiamsi parallelogramma non sint rectangula, dummodo sint æquiangula; veluti manifestum fit ex prop. 14.

COROLLARIVM.

Hinc colligitur ex posteriori propositione, quamlibet rectam lineam esse mediam proportionalem, inter quasuis duas rectas, quæ comprehendant rectangulum æquale illius quadrato.

PROBL. 6. PROPOS. 18.

A data recta linea A B dato rectilineo M, simile, similiterque positum rectilineum describere.

Distin-

Distincto rectilineo M *cor. 4. prop. 32. 1.* in sua triangula, super AB fiat triangulum ABI æquiangulum triangulo CDF; faciendo angulum A æquale angulo FCD, & angulum B, angulo FDC *cor. 1. prop. 32. 1.* item super AI fiat ALI æquiangulum ipsi CGF, & super BI triangulum BHI, ipsi DEF æquiangulum. Erit totus angulus A, toti angulo C æqualis (com-
f. 10. positi enim sunt ex æqualibus angulis, vt constat), & angulus B angulo D, angulus H angulo E &c: latera verò circa æquales angulos proportionalia sunt; erit enim *prop. 4.* AL ad AI, vt CG ad CF, & IA ad AB, vt FC ad CD, & ex æquo LA ad AB, vt GC ad CD. Ità similiter ostendetur esse AB ad BH, vt CD ad DE, & BH ad HI, vt DE ad DF &c. Quare rectilinea M, N, similia sunt, similiterque descripta *def. 1.* Quod erat faciendum.

THEOR. 13. PROPOS. 19.

Similia triangula ABC, DEF inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum v. g. BC, EF.

Adinueniatur tertia proportionalis BG *prop. 11.* hoc est fiat, vt BC ad EF, ità EF ad BG; iungaturque AG: Ratio BC ad BG erit duplicata *def. 10. 5.* rationi BC ad EF. Quoniam igitur est AB ad BC, vt DE ad EF *ex hyp.* & permutando AB ad DE, vt BC ad EF, seù
f. 11. EF ad BG, angulus verò B æqualis angulo E *def. 1.* erunt triangula DEF, ABG inter se *prop. 15.* æqualia, & triangulum ABC ad triangulum DEF habebit eandem rationem *prop. 7. 5.* quam ad BAG, hoc est *prop. 1.* quam BC ad BG, seù duplicata rationis BC ad EF. Quod erat ostendendum.

COROL.

PROBL. 4. PROPOS. 12.

Tribus datis rectis lineis A D, DE, A F quartam proportionalem inuenire.

Positis sibi in directum duabus rectis AD,DE continentibus angulum A cum tertia AF iungatur DF, & *f. 6.* producta AF ducatur ipsi DF parallela EG. Erit FG quarta proportionalis: erit enim vt AD, ad DE *prop. 2.* ità AF ad FG. Quod erat faciendum.

PROBL 5. PROPOS. 13.

Duabus datis rectis lineis B D, DC, mediam proportionalem adinuenire.

Datis rectis dispositis secundum vnam lineam rectam BDC, super ipsam describatur semicirculus *f. 5.* BAC, & erigatur perpendicularis DA. Iunctis enim AB, AC erit angulus A *prop. 31. 3.* rectus: quare erit *cor. prop. 8.* BD ad DA, vt DA ad DC. Quod erat faciendum.

THEOR 9. PROPOS. 14.

Æqualium,& vnum vni habentium æqualem angulum A, parallelogrammorum AB, AC, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos; hoc est GA ad AF erit vt DA ad AE. Et è conuerso.

Iunctis parallelogrammis ad angulum A, ità vt AG,

AG, AF constituant vnam lineam rectam, constituent etiam AD, AE vnam lineam *prop.* 14 1 rectam. Compleatur parallelogrammum AH. Æqualia parallelogramma AB, AC habebunt ad idem AH eandem rationem *prop.* 7 5. sed vt AB ad AH, ita est *prop.* 1. GA ad AF, & vt AC ad AH, ità est *prop.* 1. DA ad AE,
f. 7. quare vt GA ad AF, ità erit *prop.* 11. 5. DA ad AE. Deindè sit GA ad AF, hoc est *prop.* 1. AB ad AH, vt DA ad AE, hoc est *prop.* 1. vt AC ad AH: erunt parallelogramma AB, AC inter se æqualia *prop.* 9. 5. Quod erat ostendendum.

THEOR. 16. PROPOS. 15.

Æqualium & vnum vni, æqualem habentium angulum A triangulorum AEG, AFD, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et è conuerso.

Eodem modo, & eadem argumentatione ostendetur atque antecedens; cum enim sint dimidium suorum
f. 7. parallelogrammorum; si ipsa inter se sunt æqualia, & eorum parallelogramma inter se æqualia erunt: adeòque vt prius. Quod erat ostendendum.

THEOR. 11. PROPOS. 16.

Si quatuor rectæ lineæ DA, AE, GA, AF proportionales fuerint; quod sub extremis DA, AF comprehenditur rectangulum AC, æquale est ei, quod sub medijs AE, GA comprehenditur rectangulo AB. Et è conuerso.

Cum

Cum enim parallelogramma A C, A B habeant vnum vni angulum A æqualem vtpotè rectum *ex hyp.* & sit vt D A ad A E, ità G A ad A F; erunt inter se
f. 7. æqualia *prop. 14.*
8. Deindè si sint inter se æqualia, rectæ DA, AE, GA, AF proportionales erunt; erit enim *prop. 14.* DA ad AE, ità GA ad AF. Quod erat ostendendum.

THEOR. 12. PROPOS. 17.

Si tres rectæ A, B, C, sint proportionales, quod sub extremis A, C, comprehenditur rectangulo, æquale est ei, quod à dimidia B describitur quadrato. Et è conuerso.

Posita alia D æquali secundæ B, erunt iam quatuor
f. 9. rectæ lineæ proportionales, nempè vt A ad B, ità D, hoc est B ad C: quare vt supra. Quod erat ostendendum.

Idem verum est in vtraque demonstratione, etiamsi parallelogramma non sint rectangula, dummodo sint æquiangula; veluti manifestum fit ex prop. 14.

COROLLARIUM.

Hinc colligitur ex posteriori propositione, quamlibet rectam lineam esse mediam proportionalem, inter quasuis duas rectas, quæ comprehendant rectangulum æquale illius quadrato.

PROBL. 6. PROPOS. 18.

A data recta linea A B dato rectilineo M, simile, similiterque positum rectilineum describere.

Distin-

Distincto rectilineo M *cor. 4. prop. 32. 1.* in sua triangula, super AB fiat triangulum ABI æquiangulum triangulo CDF; faciendo angulum A æquale angulo FCD, & angulum B, angulo FDC *cor. 1. prop. 32. 1.* item super AI fiat ALI æquiangulum ipsi CGF, & super BI triangulum BHI, ipsi DEF æquiangulum. Erit totus angulus A, toti angulo C æqualis (compositi enim sunt ex æqualibus angulis, vt constat), &
f. 10. angulus B angulo D, angulus H angulo E &c: latera verò circa æquales angulos proportionalia sunt; erit enim *prop. 4.* AL ad AI, vt CG ad CF, & IA ad AB, vt FC ad CD, & ex æquo LA ad AB, vt GC ad CD. Ità similiter ostendetur esse AB ad BH, vt CD ad DE, & BH ad HI, vt DE ad DF &c. Quare rectilinea M, N, similia sunt, similiterque descripta *def. 1.* Quod erat faciendum.

THEOR. 13. PROPOS. 19.

Similia triangula ABC, DEF inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum v. g. BC, EF.

Adinueniatur tertia proportionalis BG *prop. 11.* hoc est fiat, vt BC ad EF, ità EF ad BG; iungaturque AG: Ratio BC ad BG erit duplicata *def. 10. 5.* rationi BC ad EF. Quoniam igitur est AB ad BC, vt DE ad EF *ex hyp.* & permutando AB ad DE, vt BC ad EF, seù
f. 11. EF ad BG, angulus verò B æqualis angulo E *def. 1.* erunt triangula DEF, ABG inter se *prop. 15.* æqualia, & triangulum ABC ad triangulum DEF habebit eandem rationem *prop. 7. 5.* quam ad BAG, hoc est *prop. 1.* quam BC ad BG, seù duplicata rationis BC ad EF. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Hinc colligitur si tres rectæ lineæ proportionales fuerint; vt est prima ad tertiam, ità esse triangulum super primam descriptum ad triangulum super secundam simile, similiterque descriptum,

THEOR. 14. PROPOS. 20.

Similia polygona M,N, in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis. Et polygona duplicatam habent eam inter se rationem, quam latus homologum v. g. AB ad homologum latus CD.

Nam quia est IH ad HB vt FE, ad ED, angulique H, & E æquales *def.* 1. erunt triangula IHB, FED inter se *prop.* 6. similia; & eadem ratione triangulum ILA simile erit triangulo FGC. Quoniam verò ab æqualibus angulis ABH, CDE, ablati sunt æquales HBI, EDF, erunt reliqui IBA, FDC æquales, &
f. 10. similiter æquales erunt anguli IAB, FCD; quare æquiangula erunt *cor.* 1. *prop.* 32. 1. triangula AIB, CFD, & similia *prop.* 4.: & sic de reliquis, si plura essent triangula, ostendentur omnia omnibus numero æqualia. Deindè cum triangulum ILA ad triangulum FGC sit in duplicata ratione lateris LA v. g. ad latus homologum GC; & triangulum IAB, ad FCD in duplicata lateris AB ad CD, hoc est LA ad GC; & triangulum IHB ad triangulum FED in duplicata lateris HB ad ED, hoc est AB ad CD, hoc est LA ad GC: erunt triangula vnius polygoni proportionalia ad triangula alterius; adeòque erunt *prop.* 12. 5. vt

omnia

omnia triangula vnius ad omnia alterius, hoc est vt totum polygonum N ad polygonum M, ità vnum triangulum v. g. I A B ad triangulum suum correspondens FCD, hoc est *prop.* 19. in duplicata ratione lateris homologi A B ad latus homologum C D. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Hinc colligitur si fuerint tres rectæ proportionales, vt est prima ad tertiam, ità esse polygonum super prima, vel tertia descriptum, ad polygonum super secunda, vel quarta simile, similiterque descriptum.

THEOR. 15. PROPOS. 21.

Quæ rectilinea, vt ABC, DEF sunt eidem H similia, & inter se sunt similia.

Cum enim sint similia eidem H, erunt ipsi æquiangula, adeòque æquiangula inter se, & *per prop.* 4. inter se similia. Quod erat ostendendum.

THEOR. 16. PROPOS. 22.

Si quatuor rectæ lineæ CD, AB, BC, EF proportionales fuerint; etiam ab eis rectilinea similia, similiterquè descripta M, N, O, Q proportionalia erunt. Et si illa rectilinea proportionalia fuerint, ipsæ etiam rectæ proportionales erunt.

Quo-

Quoniam rectilineum M ad rectilineum N est in duplicata ratione *prop. 19.* rectæ CD ad rectam AB, seu BC ad EF, & rectilineum O ad rectilineum Q est similiter in duplicata ratione rectæ BC, ad EF, erunt rectilinea M,N,O,Q proportionalia.

Deindè cum sit vt M ad N, ità O ad Q, & M ad N
f. 10. sit in duplicata ratione *prop. 19.* rectæ CD ad rectam
& 11. AB, erit pariter O ad Q *prop. 11. 5.* in duplicata ratione CD ad AB; sed O ad Q est etiam in duplicata ratione *prop. 19.* rectæ BC ad rectam EF: igitur CD ad AB est *prop. 11. 5.* vt BC ad EF. Quod erat ostendendum.

THEOR. 17. PROPOS. 23.

Æquiangula parallelogramma, vt AB, AC inter se rationem habent eam, quæ ex lateribus v. g. DA, AE, & FA, AG componitur.

Ponatur EA in directum ipsi AD, erit AG, in directum *prop. 14. 1.* ipsi FA posita; compleaturque parallelogrammum EF. Ratio parallelogrammi AC ad
f. 7. parallelogrammum AB componitur ex rationibus *def. 5.* AC ad EF, & EF ad AB; sed AC ad FE est vt *prop. 1.* DA ad AE, & EF ad AB est vt *prop. 1.* FA ad AG: igitur ratio parallelogrammi AC ad parallelogrammum AB componitur ex rationibus DA ad AE, & FA, ad AG. Quod erat ostendendum.

THEOR. 18. PROPOS. 24.

In omni parallelogrammo, vt ABCD, quæ circa diametrum AC sunt parallelogramma, HF, EG, & toti DB, & inter se sunt similia.

Erunt

Erunt enim h
vt constat *prop.* 25
ABC, IGC; qu
GC; & similiter
f.12. AB, vt EI ad I
mum DB paralle
ne ostendetur pa
logrammo HF;
EG, HF. Quod

PRO

Dato rectili
dato D æqual

Super rectam
parallelogrammu
& super rectam C
tuatur aliud paral
neo dato D: erit
posita ipsi CB.
BC, CG, *media*
f.13. stituatur *prop.* 18.
similiterque posi
æquale esse dato
vt BE ad CH *prop*
rectilineum ILM
ILM ad CH: qua
ex construc. paralle
ILM æquale paral
lineo D, & simile
ciendum.

Erunt enim hæc parallelogramma toti æquiangula, vt constat *prop.* 29. 1. & æquiangula quoque triangula ABC, IGC; quare erit *prop.* 4. AB ad BC, vt IG ad GC; & similiter CD ad DA, vt CE ad EI; & DA ad
f.12. AB, vt EI ad IG. Simile igitur est parallelogrammum DB parallelogrammo EG *def.* 1.: eadem ratione ostendetur parallelogrammum DB simile parallelogrammo HF; adeòque & inter se *prop.* 21. similia EG, HF. Quod erat ostendendum.

PROBL. 7. PROPOS. 25.

Dato rectilineo ABC, simile; & alteri dato D æquale, idem constituere.

Super rectam lineam BC constituatur *prop.* 45. 1. parallelogrammum BE, æquale rectilineo dato ABC; & super rectam CE in angulo C æquale ipsi B constituatur aliud parallelogrammum CH, æquale rectilineo dato D: erit *prop.* 14. 1. recta CG in directum posita ipsi CB. Tum inueniatur *prop.* 13. inter rectas BC, CG, media proportionalis IL, super quam con-
f.13. stituatur *prop.* 18. rectilineum ILM, simile ipsi ABC, similiterque positum. Dico rectilineum ILM & æquale esse dato D; Erit enim vt BC ad CG, hoc est vt BE ad CH *prop.* 1. ità rectilineum ABC *cor. p.* 20. ad rectilineum ILM, & permutando vt ABC ad BE, ità ILM ad CH: quare cum rectilineum ABC æquale sit *ex construc.* parallelogrammo BE, erit & rectilineum ILM æquale parallelogrammo CH, hoc est dato rectilineo D, & simile dato ABC *ex construc.* Quod erat faciendum.

THEOR. 19. PROPOS. 26.

Si à parallelogrammo AC, parallelogrammum FG ablatum sit, & simile toti AC, & similiter positum, communem cum eo habens angulum C; hoc circa eandem cum toto diametrum AC consistit.

Si enim non. Secet diameter AC alterum latus v. g. EF in puncto H; ducatur HI parallela ipsi FC. Erit igitur *prop.* 24. CB ad BA, hoc est CF ad f. 14. FE *def.* 1. vt CF ad FH; quare rectæ FH, FE, æquales inter se erunt *prop.* 9. 5. pars toti; quod est absurdum. Itaque parallelogrammum FG circa diametrum AC, cum toto parallelogrammo AC consistit. Quod erat ostendendum.

THEOR. 20. PROPOS. 27.

Omnium parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam AB applicatorum deficientium figuris parallelogrammis, similibus, similiterque positis ipsi CF, quod à dimidia CB describitur, maximum est AD, quod ad dimidiã AC applicatur, simile existens defectui CF.

Sumpto enim *primo* quolibet puncto M in diametro DB intra parallelogrammum, ducantur per M rectæ LI, HQ parallelæ rectis DC, AB. Erit parallelogrammum AM secundum rectam AB applicatum

def. 6.

def. 6. deficiens parallelogrammo HI simile *prop. 24.* parallelogrammo CF, similiterque positum. Dico
f. 15. AD maius esse parallelogrammo AM. Quoniam CM æquale est *prop. 43. 1.* ipsi MF, addito communi HI, erit CH, hoc est *prop. 36. 1.* AG æquale ipsi FI, & addito rursus communi CM, erit gnomon MNO æquale ipsi AM; atque adeò DB, hoc est AD maius erit, quam AM.

Sumpto *secundo* puncto M in diametro DB producta extra parallelogrammum, ducantur per M rectæ HG, ML parallelæ ipsis CD productæ in N, seu AE productæ in H, & AB. Erit parallelogrammum AM
f. 16. applicatum *def. 6.* secundum rectam lineam AB deficiens parallelogrammo LG simile *prop. 24.* ipsi CF, similiterque positum. Dico parallelogrammum AD, maius esse parallelogrammo AM. Quoniam DG, hoc est DL *prop. 43. 1.* æquale est *prop 36. 1.* ipsi EN, ablato IN erit LD maius, quam EM, & addito communi AI, erit AD minus, quam AM. Quod erat ostendendum.

PROBL. 8. PROPOS. 28.

Ad datam rectam lineam AB dato rectilineo C, æquale parallelogrammum applicare, deficiens parallelogrammo, quod sit simile dato alteri parallelogrammo D. Oportet autem *ex antaced.* applicandum parallelogrammum non esse maius eo, quod ad dimidiam applicari potest.

Secta bifariam AB in E, super EB describatur *prop. 18*

parallelogrammum EG simile ipsi D, similiterque positum, compleaturque parallelogrammum BH. Si igitur AF est æquale ipsi C factum erit quod iubetur *prop.* 27.; si autem AF, vel EG sibi æquale, maius est, quam C; sit maius rectilineo I, ipsique constituatur in angulo F parallelogrammum FN *prop.* 25. simile, similiterque positum ipsi D, hoc est EG, cum quo
f. 17. circa eandem diametrum FNB *prop.* 26. consistet. Productis itaque LN, MN, erit parallelogrammum AN, ad rectam AB applicatum deficiens parallelogrammo FB simile, similiterque posito *prop.* 24. ipsi EG, hoc est D. Dico AN æquale esse dato rectilineo C. Est enim FN vna cum rectilineo C æquale parallelogrammo EG, adeòque ablato communi FN, erit rectilineum C æquale gnomoni NRS, hoc est parallelogrammo AN, vt patet. Quod erat ostendendum.

PROBL. 9. PROPOS. 24.

Ad datam rectam lineam ON, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum applicare, excedens parallelogrammo, quod simile sit dato alteri parallelogrammo D.

Diuisa ON bifariam in M, super MN *prop.* 18. construatur parallelogrammum FN, simile ipsi D similiterque positum, constituaturque in angulo F parallelogrammum FB æquale parallelogrammo FN & rectilineo C, & simile, similiterque positum *prop.* 25. ipsi D, hoc est FN cum quo, circa eandem diametrum FNB *prop.* 26. consistet. Productis itaque MN
f. 17. in P, & EB in A, donec concurrat cum OH ducta parallela ipsi FE, erit parallelogrammum AN ad re-

ctam

ctam O N applicatum excedens parallelogrammo N B simile, similiterque positum *prop.* 34. ipsi FN, hoc est D. Dico A N æquale esse rectilineo C. Est enim F N vnà cum rectilineo C æquale parallelogrammo EG; adeòque ablato communi FN, erit rectilineum C æquale gnomoni N R S, hoc est parallelogrammo A N, vt patet. Quod erat faciendum.

PROBL. 10. PROPOS. 30.

Propositam rectam lineam A B, extrema, ac media ratione secare.

Diuidatur *per vndecimam* 2. AB, ita in C, vt rectangulum sub tota A B, & segmento C B, æquale sit quadrato alterius segmenti A C. Erunt tres rectæ A B, AC, CB *prop.* 17. continuè proportionales; quare erit AB *def.* 3. secta in C extrema, ac media ratione. Quod erat faciendum.

f. 18.

THEOR. 21. PROPOS. 31.

In rectangulis triangulis puta ABC, figura quæuis B F à latere B C rectum angulum A subtendente descripta, æqualis est figuris BD, CE, quæ priori illi similes, & similiter positæ à lateribus AB, AC, rectum angulum continentibus describuntur.

Demitatur perpendicularis AH; erit iam *cor. prop.* 8. HC ad AC, vt eadem AC ad BC, item BH ad AB, vt

AB

AB ad BC; & CE ad BF erit, vt CH ad BC, item BD
f.19. ad BF, vt BH ad BC: adeòque vt prima CH cum quinta BH simul ad secundã BC *prop.24. 5.* ita erit CE tertia cum sexta BD simul ad BF quartam. Quare cum CH, BH simul æquales sint ipsi BC, erunt & CE, BD simul æqualia ipsi BF. Quod erat ostendendum.

THEOR. 22. PROPOS. 32.

Si duo triangula ABC, DCE, quæ duo latera AB, AC, lateribus DC, DE proportionalia habeant, secundum vnum angulum ACD composita fuerint, ità vt homologa latera, AB, DC, item AC, DE inter se sint parallela; tum reliqua illorum angulorum latera BC, CE in rectam lineam collocata reperientur.

Cum enim anguli A, & D sint inter se æquales, vtpote æquales *prop.* 29. 1. eidem alterno ACD, & circa eos latera proportionalia *ex hyp.* erit & angulus DCE *prop.* 6. æqualis angulo B, additoque communi ACB,
f.20. erunt anguli ACD, DCE, hoc est totus ACE, & ACB æquales tribus angulis A, B, C, trianguli ABC, qui cum æquales sint duobus rectis *prop.* 32. 1. erunt & anguli ACE, ACB duobus rectis æquales. Quare BC, CE *prop.* 14. 1. constituent vnam lineam rectam. Quod erat ostendendum.

THEOR. 23. PROPOS. 33.

In æqualibus circulis ABC, EFG anguli

siue

siue A, E ad peripherias, siuè D, H ad centra eandem habent rationem cum peripherijs BC, FG, quibus insistunt. Insuper verò, & sectores DBC, HFG.

Sumatur arcus B C vtcumque multiplex arcus B L, & anguli BDC, ità multiplex erit angulus BDL; item arcus F G vtcumque multiplex F O, & anguli FHG, ità multiplex erit angulus F H O: adeòque quando arcus BL maior est, aut æqualis, aut minor arcu FO, & angulus B D L maior, aut æqualis, aut minor erit
f. 21. angulo FHO; quare erit *ex def. 6. 5.* vt arcus B C ad arcum FG, ità angulus BDC ad angulum FHG: insuper & angulus BAC *prop. 15. 5.* ad angulum FEG, eò quod sint semisses *prop. 20. 3.* angulorum ad centra BDC, FHG. Idem eadem arte ostendetur de spatijs circa centra, hoc est DBC ad HFG esse, vt BC ad FG. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Colligitur primo sic esse sectorem ad sectorem, vt est angulus ad angulum. Vtraque enim proportio eadem est proportioni arcus ad arcum.

Colligitur secundo vt est angulus in centro ad quatuor rectos, ità esse arcum subtentum illi angulo ad totam circumferentiam. Et contra vt sunt quatuor recti ad angulum in centro, ità esse totam circumferentiam ad arcum illi angulo subtentum vt patet.

Finis Elementi sexti,

THEOR. 19. PROPOS. 26.

Si à parallelogrammo AC, parallelogrammum FG ablatum sit, & simile toti AC, & similiter positum, communem cum eo habens angulum C; hoc circa eandem cum toto diametrum AC consistit.

Si enim non. Secet diameter AC alterum latus v. g. EF in puncto H; ducatur HI parallela ipsi FC. Erit igitur *prop* 24. CB ad BA, hoc est CF ad FE *def.* 1. vt CF ad FH; quare rectæ FH, FE, æquales inter se erunt *prop.* 9. 5. pars toti: quod est absurdum. Itaque parallelogrammum FG circa diametrum AC, cum toto parallelogrammo AC consistit. Quod erat ostendendum.

f. 14.

THEOR. 20. PROPOS. 27.

Omnium parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam AB applicatorum deficientium figuris parallelogrammis similibus, similiterque positis ipsi CF, quod à dimidia CB describitur, maximum est AD, quod ad dimidiã AC applicatur, simile existens defectui CF.

Sumpto enim *primo* quolibet puncto M in diametro DB intra parallelogrammum, ducantur per M rectæ LI, HQ parallelæ rectis DC, AB. Erit parallelogrammum AM secundum rectam AB applicatum

def. 6. deficiens parallelogrammo HI simile *prop. 24.* parallelogrammo CF, similiterque positum. Dico
f. 15. AD maius esse parallelogrammo AM. Quoniam CM æquale est *prop. 43. 1.* ipsi MF, addito communi HI, erit CH, hoc est *prop. 36. 1.* AG æquale ipsi FI, & addito rursus communi CM, erit gnomon MNO æquale ipsi AM; atque adeò DB, hoc est AD maius erit, quam AM.

Sumpto *secundo* puncto M in diametro DB producta extra parallelogrammum, ducantur per M rectæ HG, ML parallelæ ipsis CD productæ in N, seu AE productæ in H, & AB. Erit parallelogrammum AM
f. 16. applicatum *def. 6.* secundum rectam lineam AB deficiens parallelogrammo LG simile *prop. 24.* ipsi CF, similiterque positum. Dico parallelogrammum AD, maius esse parallelogrammo AM. Quoniam DG, hoc est DL *prop. 43. 1.* æquale est *prop 36. 1.* ipsi EN, ablato IN erit LD maius, quam EM, & addito communi AI, erit AD minus, quam AM. Quod erat ostendendum.

PROBL. 8. PROPOS. 28.

Ad datam rectam lineam AB dato rectilineo C, æquale parallelogrammum applicare, deficiens parallelogrammo, quod sit simile dato alteri parallelogrammo D. Oportet autem *ex antaced.* applicandum parallelogrammum non esse maius eo, quod ad dimidiam applicari potest.

Secta bifariam AB in E, super EB describatur *prop. 18*

parallelogrammum EG simile ipsi D, similiterque positum, compleaturque parallelogrammum BH. Si igitur AF est æquale ipsi C factum erit quod iubetur *prop. 27.*; si autem AF, vel EG sibi æquale, maius est, quam C; sit maius rectilineo I, ipsique constituatur in angulo F parallelogrammum FN *prop. 25.* simile, similiterque positum ipsi D, hoc est EG, cum quo
f. 17. circa eandem diametrum FNB *prop. 26.* consistet. Productis itaque LN, MN, erit parallelogrammum AN, ad rectam AB applicatum deficiens parallelogrammo FB simile, similiterque posito *prop. 24.* ipsi EG, hoc est D. Dico AN æquale esse dato rectilineo C. Est enim FN vna cum rectilineo C æquale parallelogrammo EG, adeòque ablato communi FN, erit rectilineum C æquale gnomoni NRS, hoc est parallelogrammo AN, vt patet. Quod erat ostendendum.

PROBL. 9. PROPOS. 24.

Ad datam rectam lineam ON, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum applicare, excedens parallelogrammo, quod simile sit dato alteri parallelogrammo D.

Diuisa ON bifariam in M, super MN *prop. 18.* construatur parallelogrammum FN, simile ipsi D similiterque positum, constituaturque in angulo F parallelogrammum FB æquale parallelogrammo FN & rectilineo C, & simile, similiterque positum *prop. 25.* ipsi D, hoc est FN cum quo, circa eandem diametrum FNB *prop. 26.* consistet. Productis itaque MN
f. 17. in P, & EB in A, donec concurrat cum OH ducta parallela ipsi FE, erit parallelogrammum AN ad re-

ctam

ctam ON applicatum excedens parallelogrammo NB simile, similiterque positum *prop.* 34. ipsi FN, hoc est D. Dico AN æquale esse rectilineo C. Est enim FN vnà cum rectilineo C æquale parallelogrammo EG; adeòque ablato communi FN, erit rectilineum C æquale gnomoni NRS, hoc est parallelogrammo AN, vt patet. Quod erat faciendum.

PROBL. 10. PROPOS. 30.

Propositam rectam lineam AB, extrema, ac media ratione secare.

Diuidatur *per vndecimam* 2. AB, ita in C, vt rectangulum sub tota AB, & segmento CB, æquale sit quadrato alterius segmenti AC. Erunt tres rectæ AB, AC, CB *prop.* 17. continuè proportionales; quare erit AB *def.* 3. secta in C extrema, ac media ratione. Quod erat faciendum.

f. 18.

THEOR. 21. PROPOS. 31.

In rectangulis triangulis puta ABC, figura quæuis BF à latere BC rectum angulum A subtendente descripta, æqualis est figuris BD, CE, quæ priori illi similes, & similiter positæ à lateribus AB, AC, rectum angulum continentibus describuntur.

Demitatur perpendicularis AH; erit iam *cor. prop.* 8. HC ad AC, vt eadem AC ad BC, item BH ad AB, vt

AB

AB ad BC; & CE ad BF erit, vt CH ad BC, item BD
f.19. ad BF, vt BH ad BC: adeòque vt prima CH cum quinta BH simul ad secundã BC *prop.* 24. 5. ita erit CE tertia cum sexta BD simul ad BF quartam. Quare cum CH, BH simul æquales sint ipsi BC, erunt & CE, BD simul æqualia ipsi BF. Quod erat ostendendum.

THEOR. 22. PROPOS. 32.

Si duo triangula ABC, DCE, quæ duo latera AB, AC, lateribus DC, DE proportionalia habeant, secundum vnum angulum ACD composita fuerint, ità vt homologa latera, AB, DC, item AC, DE inter se sint parallela; tum reliqua illorum angulorum latera BC, CE in rectam lineam collocata reperientur.

Cum enim anguli A, & D sint inter se æquales, vtpote æquales *prop.* 29. 1. eidem alterno ACD, & circa eos latera proportionalia *ex hyp.* erit & angulus DCE *prop.* 6. æqualis angulo B, additoque communi ACB,
f.20. erunt anguli ACD, DCE, hoc est totus ACE, & ACB æquales tribus angulis A, B, C, trianguli ABC, qui cum æquales sint duobus rectis *prop.* 32. 1. erunt & anguli ACE, ACB duobus rectis æquales. Quare BC, CE *prop.* 14. 1. constituent vnam lineam rectam. Quod erat ostendendum.

THEOR. 23. PROPOS. 33.

In æqualibus circulis ABC, EFG anguli

siue

ſiue A, E ad peripherias, ſiuè D, H ad centra eandem habent rationem cum peripherijs BC, FG, quibus inſiſtunt. Inſuper verò, & ſectores DBC, HFG.

Sumatur arcus B C vtcumque multiplex arcus B L, & anguli BDC, ità multiplex erit angulus BDL; item arcus F G vtcumque multiplex F O, & anguli FHG, ità multiplex erit angulus F H O: adeòque quando arcus BL maior eſt, aut æqualis, aut minor arcu FO, & angulus B D L maior, aut æqualis, aut minor erit angulo FHO; quare erit *ex def. 6. 5.* vt arcus B C ad arcum FG, ità angulus BDC ad angulum FHG: inſuper & angulus BAC *prop. 15. 5.* ad angulum FEG, eò quod ſint ſemiſſes *prop. 20. 3.* angulorum ad centra BDC, FHG. Idem eadem arte oſtendetur de ſpatijs circa centra, hoc eſt DBC ad HFG eſſe, vt BC ad FG. Quod erat oſtendendum.

f. 21.

COROLLARIVM.

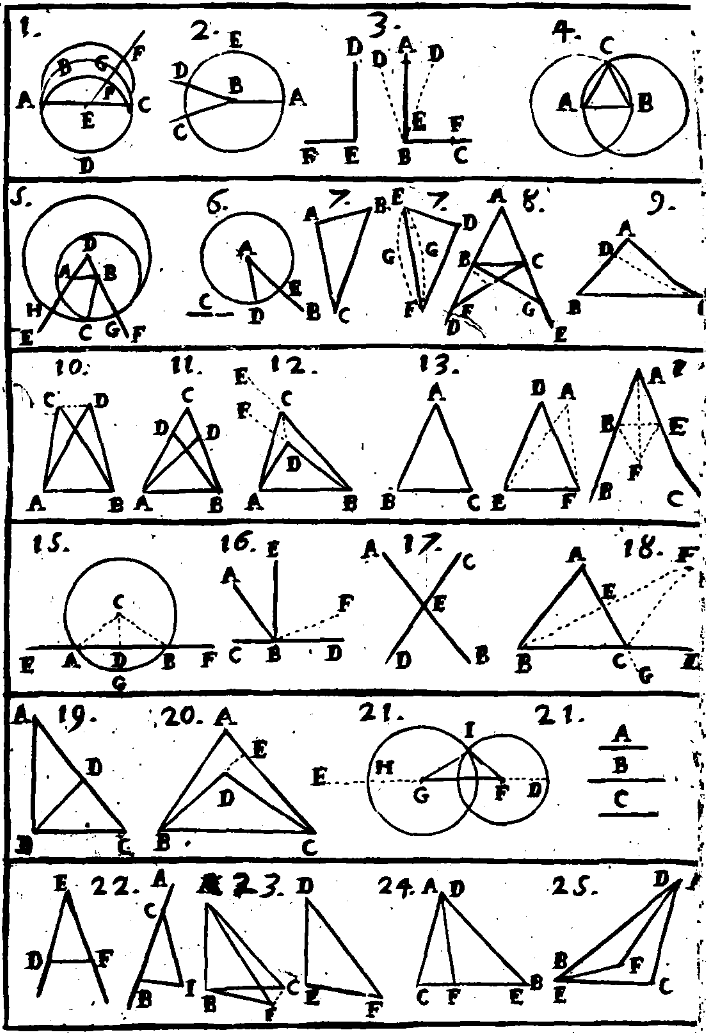
Colligitur primo ſic eſſe ſectorem ad ſectorem, vt eſt angulus ad angulum. Vtraque enim proportio eadem eſt proportioni arcus ad arcum.

Colligitur ſecundo vt eſt angulus in centro ad quatuor rectos, ità eſſe arcum ſubtentum illi angulo ad totam circumferentiam. Et contra vt ſunt quatuor recti ad angulum in centro, ità eſſe totam circumferentiam ad arcum illi angulo ſubtentum vt patet.

Finis Elementi ſexti,

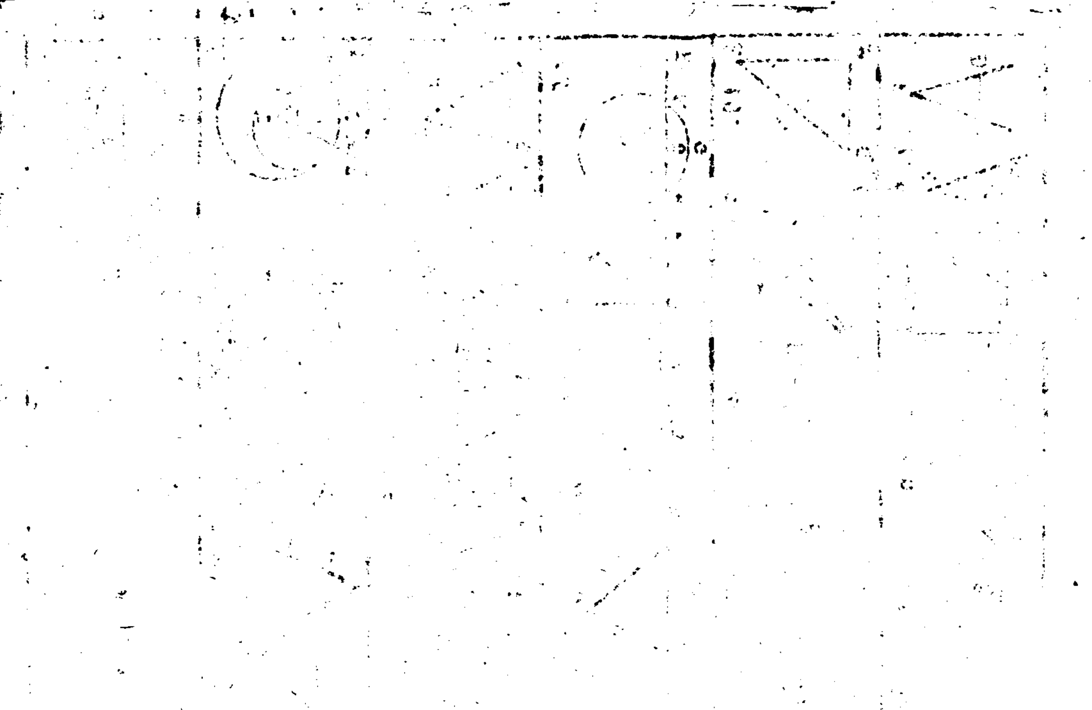
Elementum Primum

A



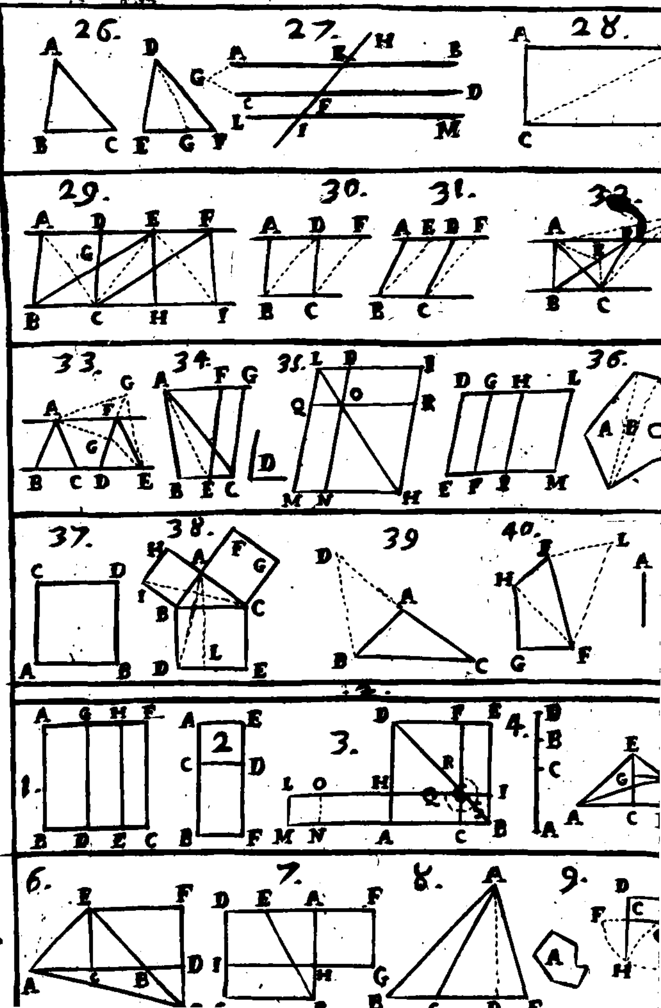
Elementum Primum

Elementum Secundum

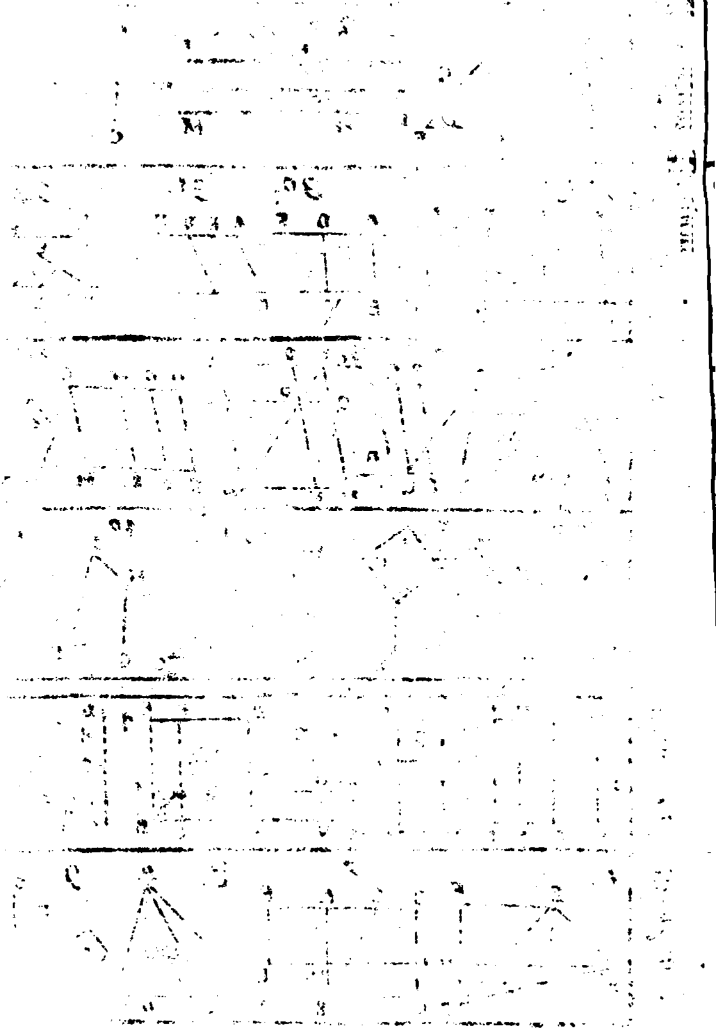


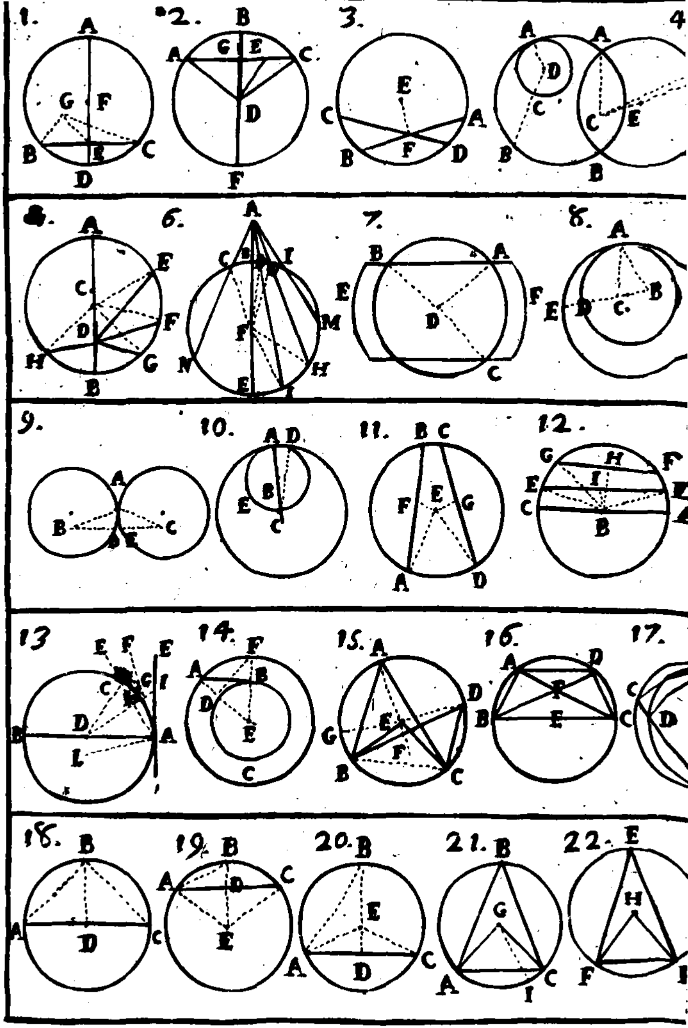
B

...Primum



Elementum Secundum



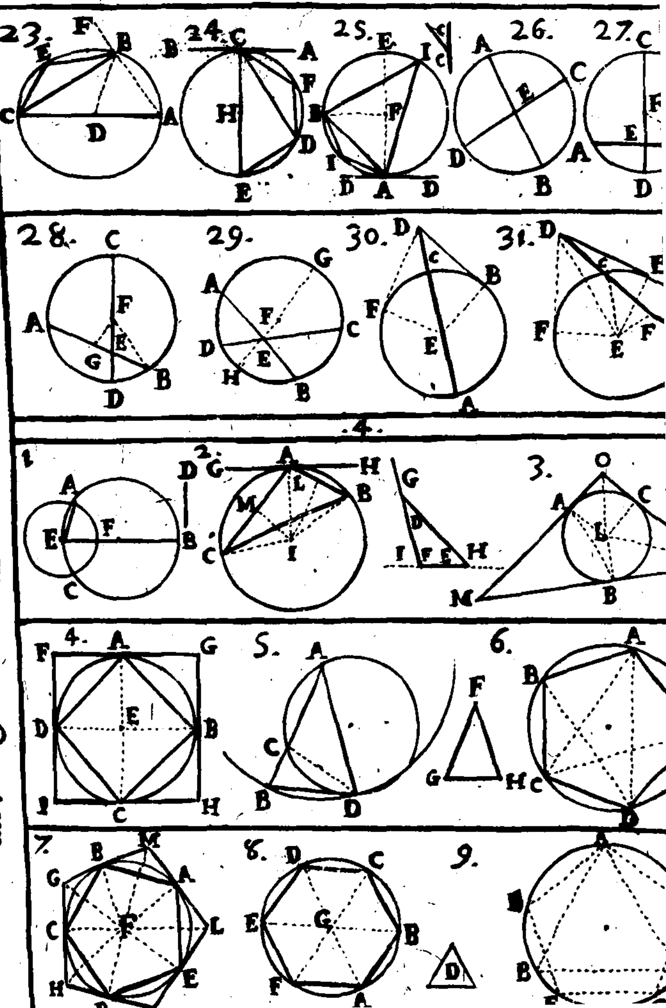

1.
2.
3.
4
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.

D

Elementum Tertium

Elementum Quartum

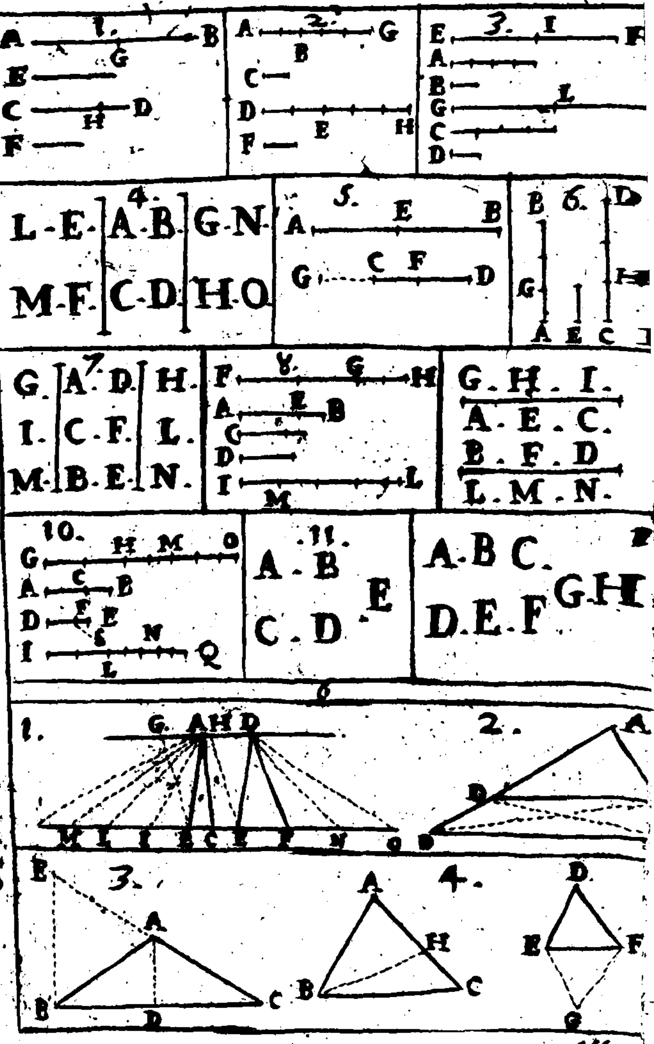
Elementum Quartum

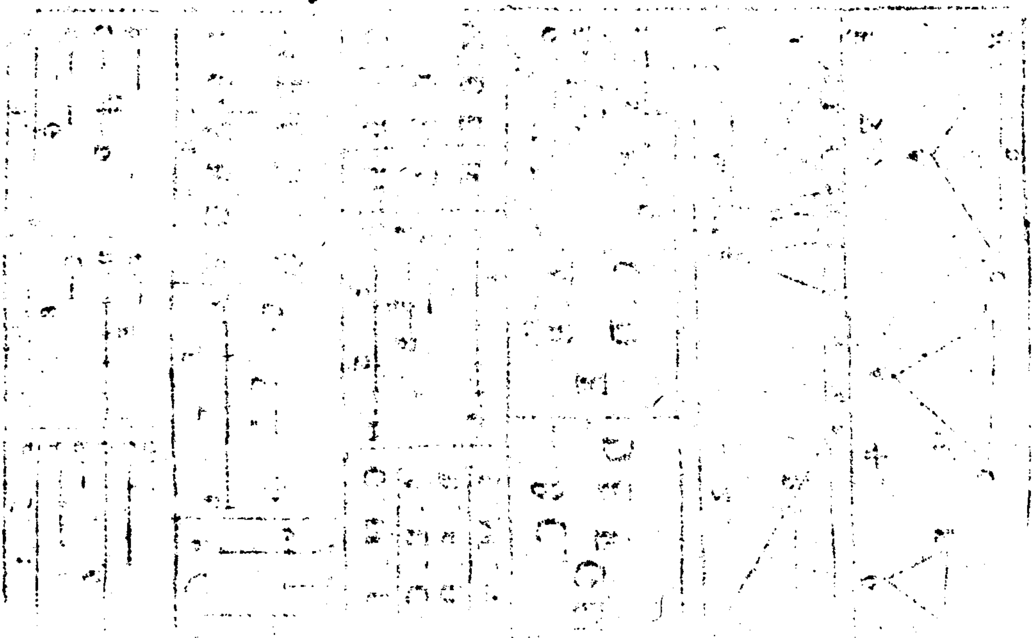


E

Elementum Quintum

Elementum Sextum





F

Elementum Sextum