# EVCLIDIS
# ELEMENTORVM
# LIBRI XV.

*Accessit XVI. de SOLIDORVM REGVLARIVM cuiuslibet intra quodlibet comparatione.*

Omnes perspicuis DEMONSTRATIONIBVS, accuratisque SCHOLIIS illustrati, ac multarum rerum accessione locupletati:

*Nunc tertiò editi, summaq; diligentia recogniti, atque emendati.*

Auctore
CHRISTOPHORO CLAVIO BAMBERGENSI, è Societate IESV.

COLONIAE,
Expensis IOH. BAPTISTAE CIOTTI
cIↃ IↃ XCI.

## LECTORI.

VOLVMINE hoc, Candide LECTOR, more recepto, lib. vj. priores Elementorum, commoditatis ergò diuisim damus: reliquos, volumine altero.

# SERENISSIMO PRINCIPI AC DOMINO,

## D. CAROLO EMMANVELI SABAVDIAE DVCI

CHRISTOPHORVS CLAVIVS è Societate IESV S. P. D.

*SCRIPSERAM superioribus annis in elementa Geometrica Euclidis, id est, in initia disciplinarum Mathematicarum, Commentarios: quorũ omnibus iam distractis exemplaribus, cùm alia essent recudenda, volui etiam dare operam, vt locupletiores multò, atq; vberiores ederentur. quod Dei beneficio successit. Sic enim se res habet, quod te non fugit, Dux Sereniß. quemadmodum nihil est simul inuentum, & perfectum; sic nemo est, qui à principio in qualibet re scribenda, aut exponenda poßit omnia peruidere: multa apparent iterũ ac sæpius cogitanti, quæ aciem quamlibet acutam antè fugiebant. Rectè hoc quoq; Euripides, vt pleraque omnia, sapientiores solent esse posteriores cogitationes. cum quo congruit, & cohæret vulgatum illud prouerbium, quod Publio tribuitur, Discipulus est prioris posterior dies. Itaq; cùm priorẽ editionem sumerem postea in manus, multa esse animaduerti; quæ si adderẽtur, non pauca ex Archimedis, Apollonij, Ptolemæi, aliorumq; inuentis videbantur melius explicari posse: si videlicet è pronunciatis, ac theorematis Euclideis alia quoq; necterentur. Quod ipsum etsi tunc etiã præstiti, multò tamen nunc feci copiosius: interijciens ea scilicet, quæ vel vtilia, vel necessaria fore censui ad aliorũ, vt dixi, auctorũ cognitionem. Addidi inter cætera, vt specimẽ dem aliquod rerũ, quæ hoc volumine accesserũt, demonstrationem Geometricam, eamq; apertißimam axiomatis vndecimi, quod proponitur ab Euclide: cùm ea, quã allatam scimus à Proclo, mutila esse atq; imperfecta videatur. Descriptionem item omnium figurarum, quæ rectilineæ æqua-*

*lium laterum & angulorum appellantur, in circulo. Rationem præterea & breuem, nec obscuram circuli quadrandi: rem, vt scis, tum à veteribus, tum à recentioribus sic expetitam, vt multorum in ea cõnatus magis apparuerit, quàm effectus. Effeci autem hoc (nisi fallor) ita accuratè, ac subtiliter, vt tam perfectè approbetur quadratum æquale circulo, quàm exquisitè rectilinea figura quælibet ad quadratum æquale ab Euclide dirigitur: immò (vt loquar aliquid audacius) aliquantò perfectius: cùm ad quadrandum circulum paucioribus linearum ductibus sit opus, quàm ad figuram rectilineam plurimorum angulorum, via, & ratione quadrandam, vt apertè docebitur lib. 6. Ad 9. deniq; lib. adieci numerorum fractorum demonstrationes clarissimas, aliaq́; nonnulla, quæ nunc quidẽ non numero, ꝙ ea mihi volo ad ipsamet loca, quibus explicabũtur, plena atq; integra reseruari. Laborem igitur hunc meũ, qualiscunq; est, cũ iterum essem daturus in vulgus, nemini arbitratus sum rectius, q̃ tibi, Dux Sereniss. dedicari posse. Primùm quidem, ꝙ cùm superiorẽ illam editionem sub* EMMANVELIS PHILIBERTI, *clariss. Ducis patris tui nomine apparere voluerim: stultè fecissem, si posteriorẽ hanc alij, q̃ tibi, qui eius es & ditionis & humanitatis & pietatis hæres, eiusq; imago corporis, atq; animi cõsecrassem. Deinde verò, ꝙ in hoc sequebar Archimedis exemplum: qui nemini opera sua iudicabat inscribenda, nisi ei, qui intelligens talium rerum, ac peritus fuisset. Quod cùm ita sit, quid ni hoc tibi potissimùm deberetur donũ, (si tamen donum dicendũ est id, quod qui dat, videtur accepisse) quẽ Ioan. Baptista Benedictus scientiss. rerũ Mathematicarum, ita testatur excellere in his artibus, illa præcipuè in parte, quæ principes viros, atq; excellentes Imperatores decet, vt ea, quæ pertinẽt ad instruendos exercitus, oppidaq́; munienda, per te ipse implere possis. Neque verò hæc postrema fuit causa, etsi postremo in loco ponitur: vt tibi alijsq;, quorum in manus hæc scripta peruenerint, hac saltem ratione ostenderẽ ita tibi obligatam esse Societatem nostram vniuersam, vt iure tibi omnia mea opera, & labores vindicare possis. Accipe tu hoc, quod tibi offertur, Princeps inuictissime: quod etsi paruum alicui videatur, atque exile, non dubito tamen futurum, quin vbi tuam istam attigerit*

*dexteram*

dexteram fortitudine fideq; præstantem, plurimum sit accepturum vel magnitudinis, vel gratiæ. Vale. Cal. Sept. M. D. LXXXIX.

## QVAE PRAECIPVE PRIORIBVS COMMENTARIJS POSTERIORE HAC EDITIONE ADDITA SINT.

I.

DEMONSTRATIO Geometrica Axiomatis 11. Euclidis, [*Si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemq; partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuò incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.*] multò euidētior, quàm ea, quā Proclus affert. ad propos. 28. lib. 1.

II.

DIVISIO lineæ rectæ in quotuis æquales partes, per solas priores 40. propos. lib. 1. absque ope proportionum 6. lib. ad propos. 40. lib. 1.

III.

QVO pacto construenda sint triangula Amblygonia, & Oxygonia, vt in numeris apparere possint, quæ ab Euclide demōstrata sunt propos. 12. & 13. lib. 2. ad propos. 12. & 13. lib. 2.

IIII.

RESPONSIO ad Apologiam Iac. Peletarij, de angulo cōtactus. ad prop. 16. lib. 3.

V.

CONSIDERATIO pulcherrima de figuris æquilateris, atque æquiangulis intra circulum, & extra circulum descriptis: Num scilicet, omnis æquilatera sit æquiangula etiam, & omnis æquiangula sit quoque æquilatera. ad finem lib. 4.

VI.

TRACTATIO copiosissima de proportionibus, & tribus præcipuis proportionalitatibus, Arithmetica, Geometrica, atque Harmonica. ad defin. 4. lib. 5.

VII.

PVLCHRA contemplatio, cur Euclides in defin. 6. & 8. lib. 5. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum æquemultiplicia definierit. ad defin. 8. lib. 5.

VIII.

DESCRIPTIO inflexæ cuiusdam lineæ facillima, per quam & in circulo figura quotlibet laterū æqualium describitur: circulus quadratur: angulus rectilineus in quotuis partes æquales distribuitur: Cuilibet arcui circuli recta æqualis exhibetur, & contrà: Et denique alia scitu iucundissima perficiuntur. ad finem lib. 6.

IX.

QVO pacto pleraque theoremata libri 7. demonstrentur quoque de numeris fractis, siue ipsis adhæreant numeri integri, siue non. ad propositiones lib. 7.

X.

MINVTIARVM siue numerorum fractorum demonstrationes clarissimæ. ad finem lib. 9.

XI.

DE proportionū compositione; quo videlicet modo Additio, Subtractio, Multiplicatio, ac Diuisio fieri debeat: aduersus quosdam Recentiores. ad finem lib. 9.

XII.

DESCRIPTIO quinque corporum Regularium in data sphæra ex Pappo Alexandrino, & quidem facilior, quàm ea, quā nobis tradidit Euclides. ad finem lib. 16.

XIII.

COMPARATIO Soliditatum & superficierum conuexarum, eorundem quinque corporum Regularium inter se. ad finem lib. 16.

*Cætera quæ passim hisce Commentarijs adiecta sunt nō pauca, diligens Lector nullo negotio notabit.*

# IN EVCLIDIS ELEMENTA PROLEGOMENA.

## PRAEFATIO.

SI QVIS fortè miratur, cur post tot præclarissimos in Euclidis Elementa Geometrica Commentarios ab egregiis, & in primis Mathematicarum rerum peritis Scriptoribus editos, nouas adhuc ipsi commentationes conscripserimus; is facilè sibi persuadebit, non temerè id à nobis esse factum, si consilij nostri rationem cognouerit. Cùm enim longa diuturnaque experientia nobis esset perspectum, atq; exploratum, eam esse vtilitatem, atque adeò necessitatem horũ elementorum, vt frustra quisquam se speret sine ipsorum præsidio, acutissimas, subtilissimasque Archimedis, Apollonij, Theodosij, Menelai, Ptolemæi, cæterorumque illustrium Mathematicorum demonstrationes posse percipere; vehementer dolebamus, tam insignem & illustrem auctorem à plerisque omnino negligi, à perpaucis verò pro dignitate tractari, ita vt vix hoc nostro seculo reperiantur, qui sedulam operam, ac studium in perdiscendis his elemẽtis ponant; ob eam potissimum, vt arbitror, causam, quòd difficultate rerum, quas tractant, atq; obscuritate deterreantur, nullumq; habeant hac in re ducem, quem sibi citra erroris periculum sequendum proponant. Extant quidem Commentarij Campani, ac Theonis in singulos Euclidis libros sanè eruditi, qui satis esse possint cuiuis ad facilè consequendam horũ elementorum doctrinam: Sed alter secutus in omnibus est traditionẽ Arabum, qui magna ex parte Euclidis ordinẽ, ac methodum peruerterunt, verbaq; propositionum eiusdem locis non paucis immutarunt, vt verus germanusq; auctoris sensus perdifficile possit intelligi; id quod maximè in 10. lib. perspicitur: Alter (Theonẽ intelligo) penè innumeris mendis, vitiisq; incuria librariorũ ità est deprauatus, & propter notas Græcas, quæ in eius demonstrationibus adhibentur, obscuras illas ac malè expressas adeò impeditus, vt magnam difficultatẽ inexercitatis ingeniis, perplexitatemq; gignat. Quò fit, vt Euclidẽ sine maximo labore ac studio nemo percipiat. Iam si alij ad nostrã vsque memoriam maius aliquod studium operamq; in hoc munus interpretandi Euclidis elementa contulerũt, hi vel sex priores tantùm libros exposuerunt: vel si qui in vniuersum Euclidem Commentarios ediderunt, hi persæpe, relictis antiquorum demonstrationibus certissimis, proprias alias, ac nouas confinxerunt, quæ plerunq; nõ tam firmæ sunt, neq; rem ipsam simpliciter & absolutè conficiunt; præsertim quòd modò è propositionibus voces quasdam perperã detrahunt, modò alias ineptè apponunt, modò deniq; nonnullas temerè immutãt, vt meritò de vero proprioq; Euclidis sensũ dubitare quis possit. Qua tamẽ in re Federicum Commandinum Vrbinatem, Geometram non vulgarẽ excipio, qui nuper Euclidem Latinè redditũ in pristinum nitorẽ restituit, paucis locis exceptis, in quibus nõ parũ à vero aberrauit, vt suo loco monebimus. Quæ cùm ita sint, resq; ac scientia tam præclara digna sit, quæ ope, studio, industria ab iis adiuuetur, qui aliquid ad hoc momenti afferre possunt, post diuturni temporis in rebus mathematicis operã collocatã; faciendum putauimus, vt lucubrationes nostras ac vigilias studiosis harum rerũ nonnihil (nisi fallimur) subsidij allaturas in publicum ederemus. Nunc quo modo, via, ac ratione res tota à nobis pertractetur, quidq; in hac interpretatione præstitũ sit, paucis accipe. Demonstrationes aliorũ, maximè Theonis, quas quidem ipsius esse Euclidis, non leuibus argumentis adducti cum plerisq; asseueramus, & Proclus etiam testatur, breuiores, quantum per rei difficultatẽ licuit, vel certè planiores, quando illud nõ potuimus, dilucidioresq; reddere conati sumus. Non enim illas nudè, ac totidem verbis, quot erant scriptæ, proposuimus. Etenim ea est interdum illarum breuitas, vt illud accidat, quod ab elegantissimo Poëta dictum est: *Breuis esse laboro, obscurus fio.* Interdum etiam cùm breuius, atque succinctius efferri possint, magna, ob longiorem, quàm satis est, sermonem, affertur molestia legenti. Quare vtrumque vitantes, eas, velut παραφραστικῶς, atque ad eum ferè modum tradidimus, quem, cùm publicè Euclidem interpretaremur, obseruauimus; hac etiam re auditorum desiderio, & voluntati, quantum

tum est in nobis, satisfacere cupientes. Ita enim, nostra sententia, Euclides facilius à studiosis, iis præsertim, qui ceu tyrones, hæc Mathematica studia nunc primùm auspicantur, ac maiore voluptate, vtilitateque cognoscetur. Præter hæc adiunximus multis in locis varia problemata, ac theoremata scitu non iniucunda, neque à scopo Geometriæ aliena, quæ partim ex Proclo, Campano, aliisque auctoribus decerpsimus, partim proprio (vt aiunt) Marte, assiduisque meditationibus ipsi confecimus. Data insuper in hoc diligens opera, vt definitiones Euclidis, præsertim obscuriores, & quæ aliquid visæ sunt habere difficultatis, (in quas plurimi, tanquam in scopulos quosdam incidentes, à recto cursu deflexerunt, & in errores varios atque absurdos, prorsusque ab instituto disciplinæ abhorrentes dilapsi sunt.) dilucidè atque perspicuè, quoad eius fieri potuit, explicarentur; id, quod harum artium studiosi facilè iudicabunt. Postremò quindecim libris Euclidis sextumdecimum ad comparationes quinque corporum regularium pertinentē, quem à Francisco Flussate Candalla accepimus, vt Elementa hæc Geometrica euaderent perfectiora, adiecimus.

# BENIGNO LECTORI.

*QVONIAM superiorem editionem Elementorum Euclidis non ingratam fuisse Mathematicarum disciplinarum studiosis intelleximus, exhibemus tibi benigne Lector, alteram editionem priore illa multò locupletiorem: in qua scilicet varia tum problemata, tum theoremata, quæ rebus Mathematicis magnum adiumentum allatura, longo vsu, atq; experientia comprobauimus, & quæ in priore editione desunt, adiecimus, plurimaq; loca subobscura clarioribus notis illustrauimus. Addidimus præterea nouam demonstrationē vndecimi axiomatis Euclidis, (quod in hisce Commentarijs est tertium decimum) quo vult, Si in duas rectas lineas altera recta incidēs, internos ad easdemq; partes angulos duobus rectis minores faciat, duas illas rectas lineas in infinitū pductas, coituras tandem ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores: addimus, inquam, nouam demonstrationem à nobis nuper inuentam, quam non iniucundam studioso Lectori futuram speramus, quòd eo principio tota doctrina de lineis parallelis, quæ immensa propemodum est, atque infinita, nitatur. Quanquā enim idem illud principium Arabes quoq; olim demonstrasse iam pridem acceperam: quia tamen eorum demonstrationem diu ac diligenter quæsitam videre mihi non licuit, (nondum enim ex Arabica in Latinam linguam conuersa est) coactus sum hanc meo, vt aiunt, Marte excogitare, vt nullus in eo principio tam necessariò iam dubitationi locus esset. Neq; enim Procli demonstratio, quam ad propos. 28. lib. 1. Euclides de re eadem affert, omni ex parte absoluta, ac Geometrica censeri potest; cuius rei causa eodem loco à nobis explicata est. Deinde ex Pappo Alexandrino inscriptiones omnium figurarū regularium in circulo, beneficio lineæ certa quadam ratione inflexæ, perfecimus: quod antè à Mathematicis desiderabatur. Ex qua eadē linea via quædam & ratio ad circulum quadrandum (res tot seculis à doctissimis viris exagitata) conficitur: quod suo loco docebitur. In definitionibus porrò quinti libri apertè ostendimus, cur Euclides magnitudines proportionales & improportionales per æquemultiplicium habitudinem describere coactus sit. Postremò (vt alia omittam) omnes operationes fractionum vulgarium, quæ in Arithmetica practica declarari solent, Geometricè demonstrauimus. Hæc ferè præcipua sunt, quæ hac posteriore editione ad Commentarios nostros in Euclidem accesserunt. Cætera vel theoremata, vel problemata, quibus editio hæc posterior priorem superat, quæ sanè plurima sunt, & Euclidis propositionibus sparsim inserta, inter legendum facilè comperies, si vtramque editionem cum altera conferens attentius paulò considerabis. Nunc quia hæc Euclidis elementa ostium atque aditum ad omnes alias disciplinas Mathematicas reserant, ac patefaciunt, operæpretium fore duximus, antequam ad ipsa interpretanda aggrediamur, paucis commemorare, vndenam Mathematicæ disciplinæ hoc nomen acceperint: quæ sit earum diuisio: à quibus primùm ortæ, & per quos deinde singulæ fuerint excultæ: quanta sit illarum præstantia atq; vtilitas; & si quæ sunt alia rei nostræ opportuna.*

# PROLEGOMENA.
# MATHEMATICAE DISCIPLINAE CVR SIC DICTAE SINT.

DISCIPLINAE *Mathematicæ, quæ quidem circa quantitatem versantur omnes, nomen acceperunt à dictione Græca* μάθημα*, siue* μάθησις*, quæ significat disciplinam, seu doctrinam. Cur autem hæ artes de quantitate agentes nomen disciplinæ, vel doctrinæ inter reliquas omnes solæ sint adeptæ, duas potissimùm causas apud probatos scriptores inuenio. Pythagorei enim, atque Platonici existimantes, animas rationales certo quodam ac determinato numero contineri, easque de corpore in corpus migrare, (quod tamen Christiana fides falsum esse perspicuè docet) testantur, eas nomen doctrinæ, siue disciplinæ obtinere, quòd maximè ex ipsis nanciscamur recordationem, reminiscentiamque illius scientiæ, qua anima nostra, (vt eorum est error) antequam corpus informaret, erat prædita. Quod quidem facili, ac familiari quodam exemplo comprobare nititur Plato in Dialogo, qui Menon inscribitur, vbi Socratem introducit pusionem quendam interrogantem Geometrica quædam de quadrati dimensione, ad quæ licet in principio respóderit, vt puer, gradatim tamen ascendens, eò deductus est, vt responderit id, quod tandem dicturus fuisset, si diutissimè perdidicisset Geometriam. Alijs autem placet, ideò has artes præ cæteris nomen scientiæ, & doctrinæ sibi vendicare, quòd solæ modum rationemque scientiæ retineant. Procedunt enim semper ex præcognitis quibusdam principijs ad conclusiones demonstrandas, quod proprium est munus, atque officium doctrinæ, siue disciplinæ, vt & Aristoteles 1. Posteriorum testatur; neque vnquam aliquid non probatum assumunt Mathematici, sed quandocunque aliquid docere volunt, si quid ad eam rem pertinet eorum, quæ antè docuerunt, id sumunt pro concesso, & probato: illud verò modo explicant, de quo antè nihil scriptum est. Quod quidem alias artes, disciplinásve non semper obseruare videmus, cùm plerunque in confirmationem eorum, quæ ostendere volunt, ea, quæ nondum sunt explicata, demonstratáve adducant.*

## DISCIPLINARVM MATHEMATICARVM DIVISIO.

PYTHAGOREI, *quos deinde secuti sunt omnes propemodum Mathematici, atque Philosophi non pauci, Mathematicas disciplinas vniuersas in quatuor partes distribuerunt, Arithmeticam, Musicam, Geometriam, atq; Astronomiam. Cùm enim omnis quantitas, circa quam versantur, sit vel discreta, sub qua omnes numeri, vel continua, sub qua omnes magnitudines comprehenduntur, & vtraque tam secundùm se, quàm comparatione alterius possit considerari; Visum fuit illis consentaneum quatuor prædictas facultates instituere, quæ vtramque quantitatem, pro duplici consideratione diligenter contemplarentur. Itaque Arithmetica agit de quantitate discreta secundùm se, inquirendo & accuratè explicando omnes numerorum proprietates, ac passiones. Musica tractat eandem quantitatem discretam, siue numerum comparatum cum alio, quatenus nimirum sonorum concentus respicit, atque harmoniam. Geometria de magnitudine, siue quantitate continua, secundùm se quoq;, vt immobilis existit, disputat. Astronomia denique tandem magnitudinem, vt est mobilis, considerat; qualia sunt cœlestia corpora, prout continuo motu cientur. Ad has autem quatuor scientias Mathematicas, quarum Arithmetica, & Geometria puræ, Musica verò atque Astronomia mixtæ dicuntur, omnes aliæ quouis modo de quantitate agentes, qualis est perspectiua, Geographia, & cæteræ huiusmodi, vel facilè, vt ad capita, à quibus dependent, reduci possunt.*

ALII *A ratione à Gemino antiquo Geometra, & ab alijs, vt auctor est Proclus in Commentarijs, quos in primum Euclidis librum edidit, Mathematicæ disciplinæ diuiduntur. Quam quidem diuisionem, quoniam eleganter, copioseque docet, ad quænam sese extendant Mathematicæ disciplinæ, fermè ad verbum ex Proclo iuxta interpretationem Francisci Barocij Patricij Veneti excerptam hîc subijcere statui. Volunt itaque prædicti auctores, scientiarum Mathematicarum quasdam in intellectibilibus duntaxat ab omni materia separatis, quasdam verò in sensilibus, ita vt attingant materiam sensibus obnoxiam, versari. Prioris generis statuunt duas longè primas, præcipuásque scientias, Arithmeticam & Geometriam: In posteriori verò genere constituunt sex, Astrologiam, Perspectiuam, Geodæsiam, Canonicam, siue Musicam, Supputatricem, atque Mechanicam. Astrologiam dicunt esse eam facultatem, quæ de mundanis edisserit motibus, de corporum cœlestium magnitudinibus, figuris & illuminationibus, à terraque distantijs, ac de alijs huiusmodi rebus. Huius rursum tres constituuntur partes; Gnomonica, quæ in horarum dimensione, positu gnomonum exercetur: Meteoroscopica, quæ eleuationum differentias, siderumque reperit distantias, nec non multa alia & varia Astrologica perdocet theoremata: & Dioptrica, quæ planetarum, cæterarumque stellarum distantias huiuscemodi Dioptricis dignoscit instrumentis. Perspectiuam aiunt à Geometria gigni, atque vti radijs visorijs, tanquam lineis, & angulis, qui ex hisce constituuntur oculorum radijs. Diuiditur autem in eam, quæ proprio nomine dicitur Perspectiua, quæ quidem reddit causam earum apparentiarum, quæ aliter, quàm sint, sese nobis offerre solent, ob eorum, quæ sub visum cadunt, alios situs & distantias, vt parallelarum coincidentiæ, vel quadratorum, tanquam circulorum, aspectionis: Et in vniuersam specularíam, quæ circa varias, multiplicesque versatur refractiones: Nec non in eam, quæ Sciographicè, hoc est, vmbrarum designatrix appellatur, quæ ostendit, qua ratione fieri possit, vt ea, quæ in imaginibus apparent, haud inconcinna, vel deformia ob designatorum distantias, altitudinesq; videantur. Geodæsiam appellant eam scientiam, quæ res quantas metitur, vt materialium rerum aceruos, tanquam conos & puteos, tanquam cylindros. Quod quidem non assequitur intellectilibus rectis lineis vt Geometriæ, sed sensilibus tantùm, interdum quidem certioribus quodam pacto, vt radijs Solaribus; interdum verò crassioribus, vt spartis & perpendiculo. Diuiditur hæc, vt Geometria, in eam partē, quæ plana, & in eam, quæ solida dimetitur. Canonicam, siue Musicam, vocant eam scientiam, quæ apparentes concentuum considerat rationes, sensusque vbique vtitur adminiculo; & quæ (vt Plato inquit) talis existit, vt menti aures ipsas præposuisse videatur. Supputatrix eadem apud ipsos est, quæ apud nos Arithmetica practica. Hæc enim numeros considerat,*

non

non vt intellectilibus, sed vt sunt in sensilibus ipsis. Mechanica denique, quæ in cognitione rerum sensilium, materiæque coniunctarum consistit, apud ipsos multiplex est. Quædam enim est instrumentorum effectrix, quæ ὀργανοποιικὴ vocatur, eorum, inquam, quæ gerendis sunt bellis idonea, qualia sanè Archimedes etiam fertur construxisse, Syracusas terra mariq; obsidentibus resistentia. Quædam mirabilium prorsus rerum effectrix, quæ θαυματοποιικὴ, dicitur; quippe quæ alia quidem spiritibus maximo cum artificio construit, quemadmodum etiam Ctesibius, atq; Heron operantur, alia autem ponderibus, quorum motus quidem inæquilibrium, status verò æquilibrium esse causam censendum est, vt Timæus etiam determinauit; alia verò neruis, spartisq; animatas conuolutiones, ac motus imitantibus: Quædam est æquilibrantium omnino, & eorum, quæ centroponderantia vocantur, cognitio: Quædam denique sphærarum effectrix, quæ σφαιροποιία appellatur, ad cœlestium circumuolutionum imitationem, qualem Archimedes etiam fabricatus est: Atq; vt vno verbo dicam, omnis, quæ materiam mouendi vim habet. Hæ igitur sunt disciplinæ Mathematicæ apud antiquos. Militarem autem artem, eam inquam, quæ ad instruendas, coordinandasq; pertinet acies, quam Græci τακτικὴν vocant, vnam aliquam ex Mathematices partibus dicendam esse non censent, vt quidam alij voluêre, sed vti eam volunt modo quidem arte supputandi, vt in enumerandis legionibus; modo verò Geodæsia, vt in diuidendis, dimetiendisq; castrametationi spatijs in campo. Quemadmodum neq; Historicam, neq; medendi artem Mathematices partem vllam esse dicunt, licet sæpenumerò tum Historici, tũ etiam Medici Mathematicis vtantur theorematibus; Rerum quidem gestarum scriptores, vel climatum situs referendo, vel vrbium magnitudines, & diametros, vel ambitus, circuitúsve colligendo: Medici verò quamplurimas res in arte sua huiuscemodi vijs dilucidando. Nam vtilitatem, quæ in Medicinam ab Astrologia peruenit, ipse etiam Hippocrates ostendit, ac ferè omnes, quicunque aliquid de opportunis temporibus, locisq; dixêre. Eadem sanè ratione ille etiam, qui aciebus instruendis operam accommodat, Mathematicis quidem vtetur theorematibus, nec tamen ob hoc erit Mathematicus, quamuis interdum quidem volens eam, quæ numerosa est, paucissimam ostendere multitudinẽ, castra suosq; exercitus ad figurã circuli formet; interdum verò ad figuram quadranguli, vel quinquanguli, vel alterius cuiusdam multanguli, vbi plurimam apparere cupit. Hæc igitur ferè sunt, quæ nobis antiqui Mathematici de harum scientiarum partitione reliquerunt.

## INVENTORES MATHEMATICARVM DISCIPLINARVM.

OMNES disciplinas Mathematicas à varijs & diuersis aucttoribus ortum originemq; duxisse, perspicuè historiæ testantur: Immò verò singulas nequaquam summam adeptas esse perfectionem statim ab initio, sed paulatim eas ab imperfectis ad perfectiora processisse, memoriæ quoq; proditum est. Arithmetices enim inuentores primi creduntur Phœnices, propter frequentes mercaturas, atq; commercia, vt auctor est Proclus. Quam mirum in modum postea Pythagoras, eiusq; successores, necnon Aegyptij, Græci deniq; atq; Arabes amplificârunt, varijsq; problematis, atq; theorematis illustrârunt. Musicam deinde à Mercurio primũ esse inuentam, multi scriptores tradunt, quam ipse postea Orpheo insigni Musico commendauit, atq; concredidit; Hic autem Thamyri & Lino: Linus verò Herculi, & sic successionibus continuis per alios Musicos præclaros ad nostra vsque tempora manauit. Geometria verò, auctore Proclo, ab Aegyptijs reperta est, ortumq; habuit ab agrorum dimensione. Cùm enim anniuersaria Nili inundatio agrorum terminos, ac limites ita confunderet, vastaretq;, vt nemo agrum dignoscere posset suum, cœperunt Aegyptij animos ad rationem mensurandorum agrorum applicare, vt hoc modo cuilibet, quod suum erat, redderetur. Quæ quidem ratio agros metiendi, quanquam tunc temporis adhuc rudis admodum fuerit, ac impolita, ab ipso tamen officio Geometria est appellata. γεωμετρέομαι enim, siue γεωμετρέω idem significat, quod terram metior. Cæterùm paulatim deinde Geometria cœpta est expoliri, & nõn contenta suis finibus, sese ad corpora etiam cœlestia dimetienda conuertit, traditditq; principia vniuersæ Astronomiæ, Perspectiuæ, Cosmographiæ, & alijs disciplinis quàm plurimis, quæ ex ipsa, veluti radices dependent. Hanc Thales Milesius ex Aegypto in Græciam primus transtulisse fertur: Deinde eam insignes Philosophi ac Mathematici plurimis acutissimisq; demonstrationibus locupletârunt, atq; exornârunt: Inter quos hi sunt præcipui ex veteribus; Pythagoras, Anaxagoras Clazomenius, Hippocrates Chius, Plato, Oenopides, Zenodorus, Brito, Antipho, Theodorus, Theætetus, Aristarchus, Eratosthenes, Archytas Tarentinus, Euclides, Serenus, Hypsicles Alexandrinus, Archimedes Syracusius, Apollonius Pergæus, Theodosius Tripolita, Mileus Romanus, qui & Menelaus, Theon Alexandrinus, Ptolemæus, Eutocius Ascalonita, Pappus, Proclus, & alij penè innumeri, quos omnes longum esset recensere. Astronomiam denique non pauci ab Atlante primùm inuentam esse autumant: Vnde ob eximiam, qua primus inter mortales præditus erat, Astronomiæ cognitionem, exortam esse volunt fabulam, illum suis humeris cœlum sustinere; Alij putant, Chaldæos diuturna obseruatione (quod etiam Cicero affirmat in libro de Diuinatione) siderum scientiam adinuenisse. Alij Aegyptios primos huius scientiæ faciunt inuentores: Alij Assyrios: Alij denique gloriam hanc & laudem Babylonijs esse deferendam, censent. Hac autem in scientia, vt est præstantissima, ita quoq; maximè illustres auctores claruerunt, quod non est huius loci declarare. Cæterùm præcipuis hisce quatuor disciplinis Mathematicis inuentis reliquæ omnes de quantitate quouis modo agentes, facilè ex ipsis, tanquam riuuli ex fonte, deriuatæ sunt, atque deductæ.

## NOBILITAS ATQVE PRAESTANTIA SCIENTIARVM MATHEMATICARVM.

QVONIAM disciplinæ Mathematicæ de rebus agunt, quæ absque vlla materia sensibili considerantur, quamuis re ipsa materiæ sint immersæ; perspicuum est eas medium inter Metaphysicam, & naturalem scientiam obtinere locum, si subiectum earum consideremus, vt rectè à Proclo probatur, Metaphysices etenim subiectum ab omni est materia seiunctum, & re, & ratione: Physices verò subiectum & re, & ratione materiæ sensibili est coniunctum: Vnde cùm subiectum Mathematicarum disciplinarum extra omnem materiam consideretur, quamuis re ipsa in ea reperiatur, liquidò constat, hoc medium esse inter alia duo.

Si verò nobilitas, atque præstantia scientiæ ex certitudine demonstrationum, quibus vtitur, sit indicanda: haud dubiè Mathematicæ disciplinæ inter cæteras omnes principem habebunt locum. Demonstrant enim omnia, de quibus suscipiunt disputationem, firmissimis rationibus, confirmantque, ita vt verè scientiam in auditoris animo gignant, omnemque prorsus dubitationem tollant: Id quod alijs scientijs vix tribuere possumus, cùm in eis sæpenumerò intellectus multitudine opinionum, ac sententiarum varietate in veritate conclusionum indicanda suspensus hæreat, atque incertus. Huius rei fidem apertè faciunt tot Peripateticorum sectæ, (vt alios interim Philosophos silentio inuoluam) quæ ab Aristotele, veluti rami è trunco aliquo exortæ, adeò & inter se, & nonnunquam à fonte ipso Aristotele dissident, vt prorsus ignores, quidnam sibi velit Aristoteles, num de nominibus, an de rebus potius disputationem instituat. Hinc fit, vt pars interpretes Græcos, pars Latinos, alij Arabes, alij Nominales, alij denique Reales, quos vocant, (qui omnes tamen Peripateticos se esse gloriantur) tanquam ductores sequantur. Quod quàm longè à Mathematicis demonstrationibus absit, neminem latere existimo. Theoremata enim Euclidis, cæterorumque Mathematicorum, eandem hodie, quam ante tot annos, in Scholis retinent veritatis puritatem, rerum certitudinem, demonstrationum robur, ac firmitatem. Huc accedit id, quod Plato ait in Philebo, seu Dialogo, qui de summo bono inscribitur; Eam scientiam esse digniorem, præstantioremque, quæ magis synceritatis, veritatisque est amans. Cùm igitur disciplinæ Mathematicæ veritatem adeò expetant, adament, excolantque, vt non solùm nihil, quod sit falsum, verùm etiam nihil, quod tantùm probabile existat, nihil denique admittant, quod certissimis demonstrationibus non confirment, corroborentque; dubium esse non potest, quin eis primus locus inter alias scientias omnes sit concedendus.

## VTILITATES VARIAE MATHEMATICARVM DISCIPLINARVM.

NON solùm vtiles, verùm etiam necessariæ admodum censeri debent disciplinæ Mathematicæ, cùm ad alias artes perfectè perdiscendas, tum ad rem etiam publicam rectè instituendam, & administrandam. Neque enim ad Metaphysicam, vt eleganter ostendit Proclus, vlli patet aditus, nisi per Mathematicas disciplinas. Nam si à rebus sensibilibus, quas Physicus considerat, ad res ab omni materia sensibili secretas, seiunctasque, quas contemplatur Metaphysicus, vires, aciemque nostri intellectus attollere absque vllo medio tentemus; nosmetipsos excæcabimus, non secus, ac ei contingit, qui è carcere aliquo tenebricoso, in quo diu latuit, in lucem Solis clarissimam emittitur. Quam ob rem, antequam à rebus physicis, quæ materiæ sensibus obnoxiæ sunt coniunctæ, ad res metaphysicas, quæ sunt ab eadem maximè auulsæ, intellectus ascendat; necesse est, ne harum claritate offundatur, prius eum assuefieri rebus minùs abstractis, quales à Mathematicis considerantur, vt facilius illas possit comprehendere. Quocirca rectè Diuinus Plato Mathematicas disciplinas erigere animum, & ad diuinarum rerum contemplationem exacuere mentis aciem affirmat. Quantum verò emolumenti hæ disciplinæ ad sacras literas rectè percipiendas, interpretandasque conferant, multis pulcherrimè nobis exponit B. Augustinus lib. 2. cap. 16. de Doctrina Christiana demonstrans, numerorum inscitia multa non intelligi à multis, quæ translatè, ac mysticè posita sunt in Scripturis. Cuius rei exempla non pauca in medium adducit, eandemque sententiam longè pòst pluribus verbis repetit eodem libro, capite 37. Hoc idem Diuus Hieronymus tomo 1. Epist. 5. asserens magnam inesse numeris vim, ad multa mysteria in Scripturis intelligenda: Quo item loco, Geometriam magnam afferre Theologis vtilitatem perhibet. Rursum Beatus Augustinus loco iam citato, capite 16. quem paulò antè retuli, testatur, Musicam pernecessariam esse doctori Christiano, subiungens paulò pòst, cap. 19. Theologos debere etiam Geographia diligenter esse instructos. Quod non ignorans Diuus Gregorius Nazianzenus, summis laudibus Diuum Basilium Præceptorem suum extollit, quòd in Astrologia, Geometria, numerorum cognitione, cæterisque scientijs Mathematicis, fuerit non mediocriter versatus. Non parum etiam conducunt hæ artes ad Philosophiam naturalem, moralem, Dialecticam, & ad reliquas id genus doctrinas, artesque perfectè acquirendas, vt perspicuè docet Proclus. His adde, quòd omnia volumina antiquorum Philosophorum, maximè Aristotelis, & Platonis, quos meritò duces nobis sequendos, ad bene recteque philosophandum proponimus, eorumque ferè omnium interpretum cùm Græcorum, tum Latinorum, exemplis Mathematicis sunt referta, ea potissimùm de causa, vt ea, quæ alioquin multis obstructa difficultatibus videbantur esse, per exempla huiusmodi clariora, magisque perspicua fierent: quæ proculdubiò nulla ratione percipiet is, qui scientiarum Mathematicarum omnino est expers. Quid? quòd olim nemo ausus esset celeberrimum Diuini Platonis Gymnasium frequentare, qui prius optimè Mathematicis disciplinis non fuisset exornatus? Vnde pro foribus Academiæ hoc symbolum dicitur pinxisse: ἀγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσίτω. Immò verò idem Plato in Philebo, omnes disciplinas sine Mathematicis viles esse non dubitauit asserere. Qua de causa in 7. de Republ. præcipit: Mathematicas disciplinas primò omnium esse addiscendas, propter varias, ac multiplices earum vtilitates, (vt copiosè scribit) non solùm ad reliquas artes rectius percipiendas, verùm etiam ad Rempublicam bene administrandam. Cuius ego rei multa exempla cùm præteriti temporis, tum nostræ ætatis, si id necesse foret, in medium possem adducere. Ibidem clarissimis verbis affirmat, præcipuè Arithmeticos naturâ ad omnes doctrinas aptos esse, idoneosque, adeò vt etiamsi nullam aliam nobis hæ scientiæ afferrent vtilitatem, (cùm tamen infinita propemodum alia commoda ex ipsis percipiamus) perdiscendas tamen omni studio eas esse statuat, quod ingenium mentemque ad reliquas artes omnes capessendas aptiorem reddant, & acutiorem. Quod quidem experientia ipsa magistra facilè comprobatur. Videmus enim eos, quorum ingenium facilè, & nullo negotio hisce disciplinis accommodatur, fructus non exiguos ex alijs scientijs percipere: Contrà verò, eos qui ad hasce facultates idonei minimè reperiuntur, prorsus ad cæteras esse ineptos. Quare iure optimo Plato tam frequenter in suis operibus iterum atque iterum harum disciplinarum vtilitatem nobis inculcat, atque commendat: præsertim in 7. de Republ. in Epinomide, seu Philosopho, in Timæo, vbi Mathematicas disciplinas omnis eruditionis ingenuæ viam appellat, & plerisque alijs in locis, quibus nunc enumerandis breuitatis memor de industria supersedeo. Ad has omnes vtilitates accedit maxima

xima iucunditas, atq; voluptas, quæ cuiusque animus his artibus colendis, exercendisque perfunditur. Sunt enim hæ præcipuæ ex septem artibus liberalibus, in quibus non solùm ingenui adolescentes, verùm etiam nobiles viri, Principes, Reges, ac Imperatores ad honestißimam, maximeque liberalem oblectationem animi, quam summa etiam cum vtilitate coniunctam pariunt, diu multumque versari solebant. Quorum exemplum multos adhuc nostra hac ætate imitari conspicimus. Testatur magnam animi voluptatem ex his artibus percipi, Diuinus Plato in 7. de Republica, vbi audacter dicit, & non temerè confirmat, oculum animæ, qui ab alijs studijs excæcatur, defoditurque, à Mathematicis tantùm disciplinis recreari, excitarique rursus ad eius, quod est, contemplationem. Omitto plurima alia testimonia Platonis, aliorumque grauißimorum Philosophorum, quibus harum disciplinarum vtilitas cum necessitate & delectatione coniuncta, atque præstantia abundè potest comprobari.

## EVCLIDIS ATQVE GEOMETRIAE COMMENDATIO.

QVISNAM fuerit Euclides, horum elementorum institutor, (vt aliquid etiam de auctore, quem nos his interpretandum proposuimus, deque Geometria vniuersa, in medium proferamus) & quo tempore floruerit, non satis conuenit inter scriptores. Multi enim, vt testatur vulgata elementorum Euclidis secundùm Campanum, & Theonem editio, atque eorundem inscriptio, existimant, eum fuisse Philosophum illum Megaris natum, quod oppidum Isthmo adiacet, Socratisque auditorem, qui sectam instituit à se dictam Megaricam, quæ alio nomine Dialectica appellabatur, eò quòd sectatores illius interrogando, respondendoque (quod proprium est munus Dialecticorum) libros conscriberent. De quo multa sunt in Diogene Laertio de Vitis Philosophorum. Scribit & de hoc Cicero Quæstionum Academicarum libro secundo, vbi ait: Post Euclides Socratis Discipulus Megareus, à quo ijdem illi Megarici dicti, qui id bonum solum esse dicebant, quod esset vnum, & simile, & idem, & semper. Fauet his auctoribus non parum id, quod Valerius Maximus octauo libro scribit: nimirum à Platone, qui Socratis etiam discipulus fuit, conductores aræ sacræ de modo, & forma eius secum sermonem conferre conatos, ad Euclidem Geometram ire iussos. Verùm si Proclo nobili scriptori, & alijs auctoribus antiquis credendum est, Euclides hic noster iunior fuit illo Megarico, floruitque tempore Ptolemæi primi, qui Ægypto, post Alexandri Magni mortem, Olympiade centesima decimaquinta, & ante Christum natum anno trecentesimo decimo nono cœpit imperare, vt Ioannes Lucidus refert. Quod quidem verius esse crediderim, hoc maximè adductus argumento, quòd Diogenes Laertius omnia opera Euclidis illius Megarici diligentißimè enumerans, nullam prorsus faciat mentionem huius celeberrimi voluminis de Geometricis elementis conscripti, in quo perpetuam, & nunquam morituram famam sibi comparauit Euclides, & gloriam. Neque enim putandum est, Diogenem in monumentis Philosophorum exercitatißimum, hoc tam insigne opus vel scientem voluisse præterire, vel ab Euclide suo esse compositum, ignorasse. Itaque Euclides noster, Geometra acutißimus, ab illo Megareo Philosopho longè alius est, qui cùm in doctrina Academicorum esset summa cum laude versatus, animum totum ad Mathematicas disciplinas transtulit; in quibus ita excelluit, vt concordi omnium indicio principem inter Mathematicos sibi locum iure optimo vendicârit. Scripsit autem volumina ad rem Mathematicam spectantia non pauca, in quibus eximia eius diligentia, admirandaque doctrina facilè elucet: qualia sunt eius Optica, Catoptrica, Elementares institutiones ad Musicam capessendam pertinentes, Phænomena, atque Datorum liber, opus de Diuisionibus, quod nonnulli suspicantur esse libellum illum acutißimum, de Superficierum diuisionibus, Machometo Bagdedino ascriptum, qui nuper Ioannis Dee Londinensis, & Federici Commandini Vrbinatis opera in lucem est editus. Conscripsit item Conica elementa, auctore Proclo, quæ tamen ad nos nondum peruenêre, & alia id genus opuscula. Maximè verò hoc volumen Elementorum Geometricorum, nunquam omnium consensione satis laudatum, tam mirabili ordine, tantaque eruditione contexuit, vt nullus vnquam eorum, qui similia conscripserunt elementa, (conscripserunt autem, vt ait Proclus, non pauci) par illi extiterit, nedum ipsum superârit. In quo quidem, vt summum ingenij acumen demonstrauit, ita non omnia, quæ ad rem Geometricam pertinent, in vulgus edenda; sed ea duntaxat, quæ visa sunt esse necessaria, atque vtilia, ad communem omnium vtilitatem, argumentis & rationibus firmißimis censuit esse comprobanda. Cæterùm, quanta sit horum Euclidis Elementorum Geometricorum, ac proinde vniuersæ Geometriæ, præstantia, ac vtilitas, partim ex ijs, quæ antè scripsimus; partim ex ijs, quæ nunc dicemus, non obscurè perspici potest. Dicuntur enim Geometrica elementa, eam ob causam, quòd sine ipsis nullum opus Mathematicum poßimus aggredi, ne dicam fructum aliquem inde percipere. Omnes siquidem Mathematicarum rerum scriptores, vt Archimedes, Apollonius, Theodosius, &c. in suis demonstrationibus vsurpant hæc Euclidis elementa, tanquam principia omnibus iam diu perspecta, atque demonstrata. Quamobrem sicut is, qui legere vult, elementa literarum discit prius, & illis aßiduè repetitis vtitur in vocibus omnibus exprimendis, sic qui alias disciplinas Mathematicas desiderat sibi reddere familiares, elementa hæc Geometrica plenè ac perfectè calleat prius necesse est. Ex his etenim elementis, veluti fonte vberrimo, omnis latitudinum, longitudinum, altitudinum, profunditatum, omnis agrorum, montium, insularum dimensio, atque diuisio, omnis in cœlo per instrumenta siderum obseruatio, omnis horologiorum sciotericorum compositio, omnis machinarum vis, & ponderum ratio, omnis apparentiarum variarum, qualis cernitur in speculis, in picturis, in aquis, & in aere variè illuminato, diuersitas manat. Ex his, inquam, elementis machinæ totius huius mundanæ est inuentum medium, atque centrum, inuenti cardines, circa quos perpetuò conuertitur, orbis denique totius explorata figura, ac quantitas. Ostenditur atque demonstratur vnius huius scientiæ vi cœli vniuersi, siderumque perennis conuersio, ortus, occasus, abitus, reditus, ascensus, descensus, diei ac noctis, temperamque toto anno per omnem terrarum situm, & mundi inclinationem, varietas. Coniunctiones item planetarum, oppositiones, aspectusque varij tam expeditè cognoscuntur, vt & loca illorum in cœlo, & eclipses, seu Solis ac Lunæ defectiones certißimè, antequam fiant, in omne posterum tempus à Mathematicis prædici queant. Hoc denique ingens Dei, & Naturæ opus, mundum, inquam, totum, mentis nostræ oculis, munere ac beneficio Geometriæ subiectum conspicimus. Adde Geometriam hominibus plurima, quæ penitus incredibilia esse videntur, omniumque fidem superant, perspicua facere, credibiliaque esse ostendere: Quale est illud, quod de Archimede Syracusio testantur historiæ. Cùm enim Hieron Syracusarum Rex nauem, quam Ptolemæo Ægyptiorum Regi mittere statuerat, tantæ esset molis fabricatus, vt eam omnes vnà Syracusij à loco dimouere minimè valerent: Archimedes Geometra peritissimus, vnius Geometriæ viribus fretus Regi promisit, se effecturum, vt ipsam solus Rex absq; vllo labore subduceret. Quod cùm præstitisset, in conspectu omnium Rex stupefactus exclamasse perhibetur; Ab hac die, quidquid dixerit Archimedes, illi credendum est. Non dissimile huic videtur mihi esse pulcherrimum illud factum, quod idem Archimedes ope Geometriæ gessit Syracusis, quando corona ex auro argentoque confecta, quam Rex summo studio fabricari iusserat, non dissoluta, singula auri & argenti pondera, quæ inter se aurificis fraude ac dolo commista erant, subtilissimè ostendit. Neque silentio præteriri debet, eundem Archimedem robori ac efficaciæ demonstrationum Geometricarum innixum sæpenumerò iactitasse, si haberet terram aliam, in qua pedem figeret, hanc nostram, quam incolimus, è loco se commouere posse. Pari ratione, datis viribus quibuscunque, pondus quodcunque se posse mouere. Et alia id genus, non solùm ab Archimede, verùm etiam ab alijs præclaris, & illustribus Geometris patrata esse, memoriæ proditum est. Tantum denique nomen vna hæc Geometria Archimedi peperit, vt Marcellus Romani exercitus imperator, contra quem diu Syracusanam vrbem defenderat Archimedes, machinis quibusdam per Geometricas demonstrationes adinuentis, & constructis, in expugnatæ vrbis direptione, ac cæde ciuium vnius Archimedis saluti publico edicto cauerit: quem, vbi contra imperium suum & voluntatem à gregario quodam milite interfectum cognouit, vehementer doluit, eumque honorem mortuo habuit, quem viuo habere non potuit. Cuius sepulchrum Cicero à se, cùm in Sicilia Quæstoris officio fungeretur, repertum esse, mirandum in modum gloriatur. Vnde mirari nemo debet, cur in summo semper honore apud Græcos fuerit Geometria. Accedit quoque ad præstantiam vtilitatemque Geometriæ, quòd cùm demonstrationes Geometricæ sint maximè illustres, nemo sine ipsis satis perspiciet, quæ sit vis demonstrationum, nemoque eisdem destitutus perfectus erit artifex methodi. Quod quidem ingenuè fatetur Galenus insignis Philosophus, ac Medicorum princeps, in libro, quem de libris proprijs inscripsit. Is enim instructissimus rebus Dialecticis, cùm scholas Peripateticorum ac Stoicorum sui temporis percurrisset omnium, & præcepta miro cum animi ardore studioque arripuisset; nihil ferè ab ipsis audisse se testatur, quod ad demonstrationis cognitionem pertineret; quinimò pleraque eorum, quæ tradiderant, ab illis in controuersia posita, nonnulla etiam naturali rationi pugnantia reperisse. Ita vt ad Pyrrhoniorum ferè (erant Pyrrhonij Philosophi, qui nihil decernebant, sed de omnibus dubitabant) hæsitantiam deuenturus fuerit, nisi Arithmeticæ, Geometriæ, Dialecticæque (quibus artibus ab auis & patre fuerat institutus) esset cognitione scientiaque reuocatus. Vnde suadet, sequendos esse characteres illos Arithmeticos, & linearum demonstrationes. Plato etiam cùm ob alias, tum ob eam etiam causam discendam esse Geometriam dixit, quòd eius cognitio maximè sit vtilis, vt aliæ artes facilius & rectius percipiantur. Postremò est hæc summa laus Geometriæ, omnibusque modis prædicanda, quòd non hæsit in exiguis & inferioribus hisce machinis, à quibus originem traxit: sed euolauit in cœlum vsque, & humanas mentes humi abiectas in illam rursus cœlestem sedem inuexit, & admirandam mundi huius fabricam, eiusque administrationem & gubernationem nostro intellectui subiecit.

## DIVISIO GEOMETRIAE ET ELEMENTORVM EVCLIDIS.

GEOMETRIA diuiditur in Planorum contemplationem, quæ generali vocabulo Geometria dicitur, & in doctrinam Solidorum, quam proprio ac peculiari nomine Stereometriam appellant Mathematici. Nam Geometria vniuersè sibi hunc scopum proponit, vt plana, aut solida vel constituat, vel constituta inter se comparet, aut diuidat. Neque verò mirum alicui videri debet, quòd cùm tria sint genera magnitudinum, linea, superficies & corpus, solùm de duobus posterioribus extent propriæ contemplationes, vt diximus, non autem de lineis, vel etiam punctis. Non, inquam, debet videri mirum, quoniam, vt ait Proclus, Geometria potissimùm circa figuras versatur, quæ in planis duntaxat, vel etiam solidis consistunt omnes. Non enim puncta, vel lineæ figuram vllam constituunt sine planis, aut solidis, ac proinde necesse non erat, proprium de punctis, & lineis scientiam instituere; Superficiebus verò, siue planis & corporibus, solidisve maximè conueniebat, vt proprias nanciscerentur tractationes. Volens igitur summus harum rerum artifex Euclides in hisce elementis perfectam, & omnibus numeris absolutam tradere cognitionem rerum Geometricarum, in prioribus sex libris agit de planis, in posterioribus verò quinque de solidis acutissimè disputat, eorumq; proprietates maximè illustres peruestigat. Quoniam verò cùm res omnes Geometricæ, tum præsertim solida illa quinque regularia, quæ corpora Platonica dici solent, perfectè tractari non poterant, absq; linearum commensurabilium, atq; incommensurabilium notitia; Immò verò quàm plurimæ magnitudines sub mensuram cadere nulla ratione absq; earundem linearum cognitione possunt, cùm earum latera sæpenumerò sint talia, vt ea communis & nota mensura data metiri nequeat, vt liquidò constat ijs, qui aliquando demonstrationes Geometricas in opus contulerunt, atq; vsum: idcircò vt hisce elementis Geometricis complecteretur omnia documenta ad magnitudinũ intelligentiam, dimensionemq; requisita, Stereometriæ suæ præposuit decimum librum, in quo subtiliter & copiosè de huiusmodi lineis disserit. Intelligens rursum Euclides, neq; hanc tractationem linearum commensurabilium & incommensurabilium sine numerorũ cognitione posse consistere, ante decimum librum agit de numerorum passionibus, easq; copiosè & diligenter tribus libris, qui hunc antecedunt, est persecutus. Quamobrem totum hoc volumẽ elementorum Geometricorum quindecim libris comprehensum (quorum quidem priores tredecim sine vlla controuersia Euclidi ascribuntur ab omnibus; posteriores verò duo à nonnullis Hypsiclis Alexandrini esse creduntur) secari rectè poterit in quatuor partes, ita vt prima pars contenta sex prioribus libris agat de planis; Secunda tres sequentes complectens, passiones numerorum perscrutetur; Tertia, quam solus decimus constituit liber, de lineis commensurabilibus, incommensurabilibusq; disputet; Quarta denique reliquis quinque libris absolutam scientiam solidorum, siue corporum complectatur. Prima pars rursum triplex est; Nam in prioribus quatuor libris agitur de planis absolutè, inuestigando eorũ æqualitatẽ & inæqualitatem; In quinto verò

libro

libro de proportionibus magnitudinum in genere disputatur: In sexto denique proportiones figurarum planarum discutiuntur. Quid verò Euclides in singulis alijs libris pertractet, proprijs in locis exponemus.

## QVID PROBLEMA, QVID THEOREMA, QVID PROPOSITIO, ET QVID LEMMA APVD Mathematicos.

*DEMONSTRATIO omnis Mathematicorum diuiditur ab antiquis scriptoribus in Problema, & Theorema. Problema vocant eam demonstrationem, quæ iubet, ac docet aliquid constituere. Vt si quis conetur demonstrare, supra lineam rectam finitam posse triangulum æquilaterum constitui, appellabitur huiuscemodi demonstratio problema, quoniã docet, qua ratione triangulũ æquilaterũ constitui debeat supra rectam lineam finitã. Dictum est aũt hoc genus demonstrationum Problema ad similitudinem problematis Dialectici. Sicut enim apud Dialecticos problema dicitur quæstio illa, cuius vtraque pars contradictionis (vt ipsi loquuntur) est probabilis, qualis hæc est quæstio: An totum distinguatur realiter à suis partibus simul acceptis? Sic etiam quæsitum illud apud Mathematicos, quo aliquid iubent construere, & cuius contrarium effici etiam potest; problema appellatur. Vt si quis proponat se demonstraturum, supra lineam rectam finitam triangulum æquilaterum posse constitui, efficiet problema, quia & triangulum nõ æquilaterum, nempe Isosceles, vel scalenum, supra eandem lineam constitui potest. Pari ratione, qui instituit angulum rectilineum secare bifariam, problema nobis exhibet, propterea quòd angulus idem diuidi potest in partes non æquales. Est tamen discrimen non paruũ inter Dialecticorum & Mathematicorum problema. Nam in problemate Dialectico vtrauis pars contradictionis suscepta confirmatur tantùm probabiliter, ita vt intellectus cuiusque ambigat vtranam illius pars vera sit: In Mathematico verò, quamcunque quis partem elegerit, eam firma demonstratione, ita vt nihil omnino dubij sit reliquum, comprobabit. Si enim Geometra statuat ex puncto quolibet lineæ rectæ propositæ lineam perpendicularem educere, efficiet vtique hoc ipsum ratione constanti, & euidenti: Eodem modo dicendum est, si ex eodem puncto velit educere lineam non perpendicularem. Theorema autem appellant eam demonstrationem, quæ solùm passionem aliquam proprietatemve vnius, vel plurium simul quantitatum perscrutatur. Vt si quis optet demonstrare, in omni triangulo tres angulos esse æquales duobus rectis, vocabunt talem demonstrationem Theorema, quia non iubet, aut docet triangulum, aut quippiam aliud construere, sed contemplatur tantummodò trianguli cuiuslibet constituti passionem hanc, quòd anguli illius duobus sint rectis æquales. Vnde à contemplatione ipsa, hæc demonstratio theorema dicitur. In theoremate fieri nulla ratione potest, contradictionis vtraque pars vera vt sit. Si enim quis demonstret, omnes angulos trianguli cuiuslibet duobus esse rectis angulis æquales, nullo poterit modo fieri, vt inæquales quoque sint duobus rectis. Eadem ratio in alijs theorematibus est intelligenda. Itaque vt vno verbo dicam, quæsitum illud Mathematicum construere aliquid docens, cuius etiam oppositum potest effici, Problema: Illud verò, quod nihil docet construere, & cuius pars opposita perpetuò falsa existit, Theorema appellatur. Vnde si quis proponeret in modum problematis, se in semicirculo velle angulum rectum constituere, irridendus omnino esset, & Geometriæ prorsus ignarus indicandus; quoniam omnes anguli in semicirculo constituti sunt recti, vt demonstrabitur libro 3. propositione 31. Quamobrem theorema hoc, & non problema dicendum erit. Cæterùm tam problema, quàm theorema dici consueuit apud Mathematicos Propositio, propterea quòd vtrumque aliquid nobis proponit, vt in exemplis adductis constat. Hæc ideò dixerim, vt studiosus lector non miretur, quando reperiet in Euclide, Apollonio, & cæteris Mathematicis, propositionum alias dici problemata, alias theoremata. Elementa enim Euclidis Geometrica, & Apollonij Conica, (vt aliorum interim volumina taceam) constant partim problematibus, partim theorematibus. Demonstrationes problematum semper concluduntur his ferè verbis: Quod faciendum erat: Theorematum verò hisce: Quod ostendendum, vel demonstrandum erat; habita nimirum ratione finis vtriusque. In quolibet autem problemate, ac theoremate plures demonstrationes continentur, & non vna tantùm, quamuis vltimus syllogismus demonstratiuus solùm concludat id, quod in initio demonstrandum proponitur, vt declarabimus in prima Euclidis propositione, & in cæteris omnibus manifestum erit.*

*QVONIAM verò ad demonstrationes problematum, atq; theorematum sæpenumerò requiruntur alia quædam theoremata, vel problemata minus principalia, & quæ facilè ex ijs, quæ prius demonstrata sunt, intelligi possunt; inseruntur interdum à Geometris huiusmodi theoremata, & problemata problematibus, atque theorematibus, de quibus præcipuè agitur, vt breuius demonstrari possint. Vocant autem illa Lemmata, propterea quòd solùm assumuntur ad alias demonstrationes; non autem de illis præcipua disputatio instituitur, quemadmodum de alijs. Itaque Lemma dici potest demonstratio, seu constructio illius, quod ad demonstrationẽ alicuius theorematis, vel problematis principalis assumitur, vt demonstratio expeditior fiat, ac breuior.*

## QVAENAM SINT PRINCIPIA APVD MATHEMATICOS.

*CVM omnis doctrina, omnisque disciplina ex præexistente gignatur cognitione, vt auctor est Aristoteles, atq; ex assumptis, & concessis quibusdam principijs suas demonstret conclusiones; Nulla autem scientia ex eiusdem Aristotelis, aliorumq; Philosophorũ sententia sua principia demonstret; habebunt vtiq; & Mathematicæ disciplinæ sua principia, ex quibus positis, & concessis sua problemata ac theoremata confirment. Horum autem tria tantummodo genera apud Mathematicos reperiuntur. In primo reponuntur omnes definitiones, quas nonnulli cum Aristotele suppositiones, vt vult Proclus, appellant. His autẽ vocabula artis explicantur, ne in tractatione ipsa, nominum ambiguitate, aut obscuritate circumuenti in paralogismos incidamus. Secundum genus complectitur Petitiones, siue Postulata, quæ quidem adeò clara sunt, & perspicua in illa scientia, quæ in manibus habetur, vt nulla indigeant confirmatione, sed auditoris duntaxat assensum exposcant, ne vlla sit in demonstrando hæsitatio, aut difficultas. Ad tertium genus referuntur Axiomata, seu communes animi notiones, quæ* non solùm in scientia proposita, sed etiam in omnibus alijs ita manifesta sunt, & euidentia, vt ab eis nulla ratione dissentire queat is, qui ipsa vocabula rectè perceperit. Atque his principijs rectè mihi videtur accommodari posse id, quod in Metaphysicis scribit de primis principijs Aristoteles: *A ianua quis aberrabit?* Vt preclarè à Cicerone, Pronunciata, siue Effata appellentur. Euclides igitur hoc in volumine Geometricorum Elementorum præmittit ante demonstrationes suarum conclusionum omnia hæc principia, vt ex ipsis, quæ quidem facilè à quouis intelliguntur, deducat admiranda theoremata; quibus nemo vnquam assensum præberet, nisi certa ac euidenti ratione confirmarentur. Vnde hoc etiam nomine summis laudibus efferenda est Geometria, omnibusque seculis prædicanda, quod ex tam exiguis initijs cuilibet quantumuis rudi & ignaro notißimis, & quidem perfacilibus progrediatur ad theoremata primo aspectu ab omni sensu humano, & intellectu remota, quæ tamen omnia miro ordine, ac methodo facili, demonstrationibusque certißimis ita confirmat, vt nihil omnino dubij in eis relinquatur. Porrò in huiuscemodi principijs tradendis hic ordo ab Euclide seruatur, vt in ipso quidem introitu scientiæ proponat principia toti Geometriæ communia, in alijs autem deinde libris, vbi res postulat, ea exponat principia, quæ propriè, & peculiari quadam ratione, ad materiam illorum subiectam videntur spectare. Neque verò omnia principia Geometrica ab Euclide in his elementis sunt explicata, sed multa reliquit lectori disquirenda; quæ tamen ex ijs, quæ tradidit, sine magno labore ac studio percipi possunt, & intelligi. Verùm ne in hac quoq; parte defuisse videamur rerum Mathematicarum studiosis, adiunximus varijs in locis ad principia ab Euclide posita, ex probatis auctoribus alia nonnulla, quorum ignoratione maximè cursum demonstrationum arbitrati sumus retardari posse. Sed iam ad expositionem ipsam Principiorum Euclidis accedamus.

## In Geometriam Euclidis Carmen.

Vtilis & suauis quàm sit diuina Mathesis,
  Quis possit digno commemorare modo?
Quanquam tot linguis doctis ego præditus essem,
  Conuexus quot habet sydera clara polus:
Quanquam Romani Ciceronis acumine clarus
  Præstarem cunctis vnus in orbe viris:
Non tamen hoc aptis possem proponere verbis,
  Materiam ingenio non capiente meo.
Et quamuis reliquas sicco pede conscius artes
  Ipse Mathematicas præteriisse velim:
Nónne Geometrice tamen hoc ostendere possit?
  Musice, Arithmetice nónne probare satis?
Harum equidem est vsus per vitam plurimus omnem.
  Quod, nisi nil sapiat, nemo negare potest.
Hæc quia cognouit quicunque Mathemata rectè,
  Promptior est aliis omnibus ille viris.
Ergo velut cuncti laudemq; decusq; merentur,
  Qui discunt studio talia cuncta bono:
Sic quoque debetur laus, gratia, gloria cunctis,
  Ordine qui tradunt talia cuncta bono.
Quod cùm sic habeat, certè non parua, licèt sit
  Ethnicus, Euclidi gloria iure datur.
Is quia perdoctis metirier omnia libris
  Edocuit studiis corda dicata bonis.

H. G. F.

EVCLIDIS

# ELEMENTVM PRIMVM.

## DEFINITIONES.

### I.

PVNCTVM est, cuius pars nulla est.

*TOTVS hic primus liber in eo positus est, vt nobis tradat ortus proprietatesq; triangulorum, tum quod ad eorum angulos spectat, tum quod ad latera: quæ quidem inter se comparat interdum, interdum verò vnumquodq; per se inspicit, & contemplatur. Nam aliquando ex lateribus trianguli angulos considerat, aliquando verò ex angulis latera, secundùm æqualitatem atque inæqualitatem, rimatur. Idemq; varijs rationibus inquirit in duobus quandoque triangulis inter se collatis. Deinde aperit nobis parallelarum proprietates, parallelogrammorúmque contemplationem aggreditur; tum inter se, tum etiam, vt cum triangulis inter easdem parallelas constitutis conferuntur. Vt autem hæc omnia rectiùs, & commodiùs exequatur Euclides, docet diuisionem anguli rectilinei, & lineæ rectæ in partes æquales, constitutionem lineæ perpendicularis, quo pacto angulus angulo fiat æqualis, & alia huiusmodi. Itaque vt vno verbo rem totam complectar, in primo libro traduntur, ex Procli sententia, rectilinearum figurarum maximè prima, ac præcipua, triangula inquam, atque parallelogramma. Ante omnia verò Euclides more Mathematicorum rem propositã exorditur à principijs, initio facto à definitionibus; quarum prima punctum explicat, docens illud dici punctum in quantitate continua, quod nullas habet partes. Quæ quidẽ definitio planiùs ac faciliùs percipietur, si priùs intelligamus, quantitatem continuam triplices habere partes, vnas secundùm longitudinem, alteras secundùm latitudinem, & secundùm profunditatem altitudinémve alteras; quanquam non omnis quantitas omnes has partes habet, sed quædam vnicas tantùm secundùm longitudinem; quædam duplices, ita vt illis adijciat partes etiam latitudinis; quædam denique præter duplices has partes, tertias quoq; altitudinis, siue profunditatis continet. Quantitas enim omnis continua aut longa solùm est, aut longa simul, & lata, aut longa, lata, atq; profunda. Neque aliam dimensionem habere potest res vlla quanta, vt rectè demonstrauit Ptolemæus in libello de Analemmate, opera Federici Commandini Vrbinatis nuper in pristinam dignitatem restituto, nécnon, vt ait Simplicius, in libello de Dimensione, qui quidem, quod sciam, adhuc nondum est excusus. Itaque quod in quantitate continua, siue magnitudine existit, intelligiturq; sine omni parte, ita vt neq; longum, neq; latum, neque profundum esse cogitetur, (vt nimirum excludamus animam rationalem, Nunc vel Instans temporis, & vnitatem, quæ etiam partes nõ habent) id appellatur ab Euclide, & à Geometris punctum.*

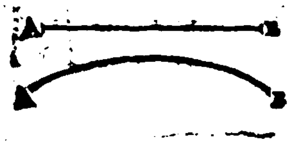
*Huius exemplum in rebus materialibus reperiri nullum potest, nisi velis, extremitatem alicuius acus acutissimæ, similitudinem puncti exprimere; quod quidem omni ex parte verum non est, quoniam ea extremitas diuidi potest, & secari infinitè, punctum verò indiuiduum prorsus debet existimari. Denique in magnitudine id concipi debet esse punctum, quod in numero vnitas, quodq; in tempore instans. Sunt enim & hæc concipienda indiuidua.*

punctum

### II.

LINEA verò, longitudo latitudinis expers.

*DEFINIT hic lineam, primam speciem magnitudinis, quam dicit esse quantitatem longam duntaxat, non autem latam, intellige neque profundam. A qua enim quantitate excluditur latitudo, ab eadem etiam necessariò profunditas remouetur, non autem contrà. Lineam autem hanc, siue longitudinem absque* *latitudine, non absurdè concipere, intelligereq́; poterimus ex termino loci alicuius partim illuminati, & partim obumbrati. Finis enim, seu terminus communis lucidi, & obumbrati, longitudo quædam est, ad longitudinem ipsiusmet luminis, & vmbræ extensa, carens omni latitudine, cùm sit limes vtriusque. Mathematici quoque, vt nobis inculcent veram lineæ intelligentiam, imaginantur punctum iam descriptum superiore definitione, è loco in locum moueri. Cùm enim punctum sit prorsus indiuiduum, relinquetur ex isto motu imaginario vestigium quoddam longum omnis expers latitudinis. Vt si punctum*




*A fluere intelligatur ex A, in B, vestigium effectum A B, linea appellabitur, cùm verè interuallum inter duo puncta A, & B, comprehensum sit longitudo quædam carens omni latitudine, propterea quòd punctum A, omni priuatum dimensione, eam efficere nulla ratione potuerit. Hinc factum est, vt alij dixerint, lineam nil esse aliud, quàm puncti fluxum: Alij verò, magnitudinem vno contentam interuallo. Potest enim linea vnico tantùm modo, vtpote secundùm longitudinem, secari atque diuidi.*

## III.

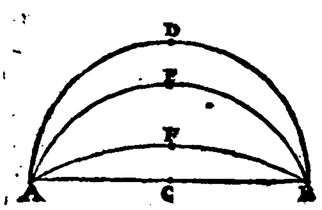
LINEAE autem termini, sunt puncta.

*DOCET, quænam sint extrema lineæ cuiusuis, seu termini, dicens lineam terminari, siue claudi vtrinque punctis; Non quòd omnis linea terminos habeat; quomodo enim lineæ infinitæ terminos assignare poterimus? quæ etiam ratione in linea circulari extremum aliquod deprehendemus? Sed quòd linea qualibet habens extrema, in suis extremitatibus puncta recipiat. Vt superior linea A B, extrema habet puncta A, & B. Idémque in omnibus lineis terminatis, ac finitis intelligendum est, ita vt earum extremitates sola esse puncta cogitemus.*

## IV.

RECTA linea est, quæ ex æquo sua interiacet puncta.

*TRIPLEX omnino est linea apud Mathematicos, recta, circularis, quam & curuam dicunt, & mixta, siue composita ex vtraque. Ex his describit hoc loco Euclides lineam rectam, quam dicit esse eam, quæ æqualiter inter sua puncta extenditur, hoc est, in qua nullum punctum intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel huc, atque illuc deflectendo subsultat; in qua denique nihil flexuosum reperitur. Hanc nobis ad viuum exprimit filum aliquod tenue summa vi extentum: In eo enim omnes partes mediæ cum extremis æqualem obtinent situm, neque vlla est alia sublimior, aut humilior, sed omnes æquabiliter inter extremos fines positæ progrediuntur. Proclus hanc definitionem exponens ait, tunc demum lineam aliquam*

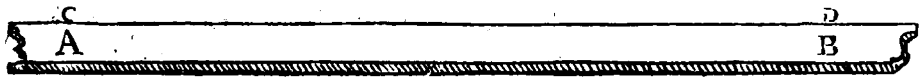



*ex æquo sua interiacere puncta, quando æquale occupat spatium ei, quod inter sua situm est puncta extrema. Vt linea A C B, dicetur recta, quoniam tantum occupat præcisè spatium, quanta est distantia puncti A, à puncto B: Lineæ verò A D B, A E B, A F B, non dicentur rectæ, cùm maiora obtineant spatia, quàm sit distantia extremorum punctorum A, & B. Sic etiam vides omnia puncta lineæ A C B, inter quæ est punctum C, æqualiter inter extrema A, & B, iacere, iuxta Euclidis definitionem; quod non cernitur in alijs lineis, quoniam puncta D, E, F, subsultant ab extremis A, & B. Plato rectam lineam perpulchrè sic definit: Linea recta est, cuius media obumbrant extrema. Vt in linea A C B, si punctum C, aut quoduis aliud medium, vim haberet occultandi, & A, extremum virtutem illuminandi, impedimento vtique esset C, punctum interiectum, ne B, extremum alterum ab A, illuminaretur: Rursus oculus in A, existens extremo, non videret aliud extremum B, ob interiectum punctum C; quod quidem non contingit in lineis non rectis, vt perspicuũ est in lineis A D B, A E B, A F B. Archimedes inquit, lineam rectam esse minimã earum, quæ terminos habent eosdem; qualis est A C B, comparata cum A D B, A E B, A F B. Si enim A C B, non esset minima earum, quæ eosdem terminos A, & B, possident, non ex æquo interiaceret sua puncta, sed ea potiùs linea, quæ minor diceretur, quàm A C B. Campanus describens rectam lineam, vocat eam breuissimam ex vno puncto in aliud extensionem. Quemadmodum autem Mathematici per fluxum puncti imaginarium concipiunt describi lineam, ita per qualitatem fluxus puncti qualitatem lineæ descriptæ intelligunt. Si namque punctum rectà fluere concipiatur per breuissimum spatium, ita vt neque in hanc partem, neque in illam deflectat, sed æquabilem quendam motum atque incessum teneat, dicetur linea illa descripta, Recta: Si verò punctum fluens cogitetur in motu vacillare, atque hinc inde titubare, appellabitur linea descripta, mixta: Si denique punctum fluens in suo motu non vacillet, sed in orbem feratur vniformi quodam motu, atque distantia à certo aliquo puncto, circa quod fertur, vocabitur descripta illa linea, circularis. Itaq́; si duo puncta moueantur similibus prorsus motibus, ita vt semper æqualiter inter se distent; describentur ab ipsis duæ lineæ similes, hoc est, si vna earum fuerit recta, erit & altera recta: si verò vna fuerit curua, erit & altera eodem omnino modo curua, &c. Lineas non rectas, quæ omnes obliquæ dici possunt, non definit hoc loco Euclides, sed circularẽ exponet definitione decimaquinta, mixtam prorsus omittẽs, quod ea in hisce elementis Geometricis nullum habeat vsum. Sunt autem plurima genera*

linearum

*linearum mistarum: quædam enim sunt vniformes; quædam difformes. Vniformium rursus aliæ sunt in plano, aliæ in solido. In plano sunt Hyperbole, Parabole, Ellipsis, de quibus agit copiosissimè Apollonius in conicis elementis; linea Conchoideos, de qua Nicomedes; linea Helica, de qua Archimedes in libro de lineis spiralibus tractationem instituit, & alia huiusmodi. In solido, seu superficie curua sunt alterius generis lineæ helicæ, quàm ea ab Archimede descripta, qualis est illa, quæ circa cylindrum aliquem conuoluitur; nec non ea, quæ circa conum existit, vel etiam quæ circa sphæram, cuiusmodi sunt spiræ illæ, quas Sol describit ab ortu in occasum, vt in sphæra docuimus. Difformium autem infinitus est numerus, quas non est opus hic recensere. Ex his constat, duas tantùm esse lineas simplices, rectam, & circularem, omnes autem alias, quæcunque sunt, mistas appellari, quòd ex illis componantur. Vnde ingeniosè concludit Aristoteles in libro de Cœlo iuxta triplicem lineam, tres tantùm esse motus, duos quidem simplices, rectum & circularem, tertium verò mistum, siue ex illis duobus compositum.* Lib. 1. text. 5.

*Sed quoniam lineas rectas regula ducere solemus, doceamus, qua ratione regulam propositam examinare possimus, num linea per illam descripta recta sit, nec ne. Sit ergo regula A B, secundùm cuius latus C D, recta*

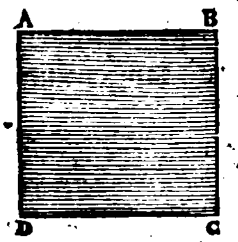



*C D, describatur ex pũcto C, in punctum D. Deinde conuertatur regula, vt, manẽte eadẽ parte superiore, punctũ C, statuatur in D, & punctum D, in C: & secundùm idẽ latus regulæ C D, recta ducatur ex puncto D, in punctũ C. Nã si posterior hæc linea priori omni ex parte congruet, dubitari non debet, quin regula A B, in lineis rectis ducendis fidere possimus: Si verò non congruet omni ex parte, latus illud C D, perfectè rectum non erit, sed corrigendum erit diligentiùs.*

## V.

SVPERFICIES est, quæ longitudinem, latitudinemque tantùm habet.

POST *lineam, quæ est prima quantitatis continuæ species, vnicamq́ habet dimensionem, definit superficiem, quæ secundam magnitudinis speciem constituit, additq́ primæ dimensioni secundùm longitudinem, alteram secundùm latitudinem. Nam in superficie reperitur non solùm longitudo, vt in linea, verùm etiam latitudo, sine tamen omni profunditate. Vt quantitas A B C D, inter lineas A B, B C, C D, D A, comprehensa, consideratáq́ secundùm longitudinem A B, vel D C, & secundùm latitudinem A D, vel B C, omnis expers profunditatis, appellatur superficies. Hanc nobis refert latitudo extrema cuiusque corporis, si ab ea omnis soliditas intellectu auferatur. Non incongruè etiam, vt ait Proclus, imaginem quasi expressam superficiei nobis exhibent vmbræ corporum. Hæ enim, cùm interiorem terræ partem penetrare non possint, longæ tantùm erunt, & latæ. Mathematici verò, vt nobis eam ob oculos ponant, monent, vt intelligamus lineam aliquam in transuersum moueri: Vestigium enim relictum ex isto motu erit quidem longum propter longitudinem lineæ, latum quoque, propter motũ, qui in transuersum est factus; nulla verò ratione profundum esse poterit, cùm linea ipsum describens, omni careat profunditate; quare superficies dicetur. Vt si linea A B, fluat versus D C, efficietur superficies A B C D. Alij describentes superficiem dicunt, eam esse corporis terminum: Alij verò, magnitudinem duobus constantem interuallis. Potest enim superficies diuidi, & secari duobus modis, vno quidem secundùm longitudinem, altero verò secundùm latitudinem.*




## VI.

SVPERFICIEI autem extrema, sunt lineæ.

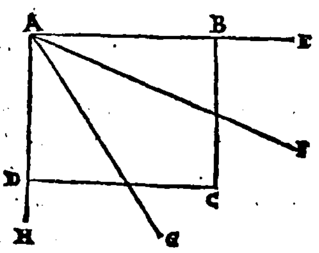
NON *dissimilis est hæc definitio superiori, quæ termini lineæ fuêre explicati. Vult enim extremitates superficiei esse lineas, quemadmodum lineæ fines extitêre puncta. Vt superioris superficiei A B C D, extrema sunt lineæ A B, B C, C D, D A; Eodemq́ modo in quacunque altera superficie, quæ extrema habet, lineas cogitare oportet in extremitatibus: Non autem in superficie infinita, vel etiam sphærica, quæ corpus sphæricum circundat. Potest etiã superficies aliqua claudi, & terminari vnica tantùm linea, qualis est circularis superficies, vt dicemus in definitione circuli.*

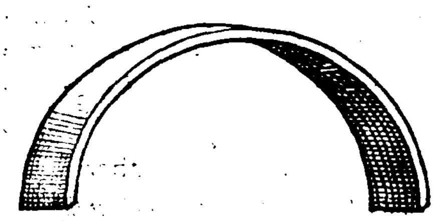
## VII.

PLANA superficies est, quæ ex æquo suas interiacet lineas.

HAEC *quoque definitio similitudinem quandam descriptionis lineæ rectæ gerit. Superficies enim, quæ ex æquo lineas suas interiacet, ita vt mediæ partes ab extremis sursum, deorsúmve subsultando nõ recedant, appellabitur plana: qualis est superficies perpoliti alicuius marmoris, in qua partes omnes in rectum sunt collocatæ, ita vt nihil habeat incisum angulis, nihil anfractibus, nihil eminens, nihil lacunosum: In hac enim partes intermediæ cum extremis æqualem adeptæ sunt situm, nec vlla est alia sublimior, humiliórve, sed omnes æquabiliter protenduntur. Alij superficiem planã definiunt, dicentes eam esse, cuius partes mediæ obum-*

brant extrema: Vel esse minimam, siue breuissimam omnium, quæ eadem habēt extrema: Vel cuius omnibus partibus recta linea accommodari potest, vt placet Heroni antiquo Geometræ. Vt superficies A B C D, tum demum plana dici debet, quando linea recta A E, circa punctum A, immobile circunducta, ita vt nunc eadem sit, quæ A B, nunc eadem, quæ A F, nunc eadem, quæ A G, & nunc eadē, quæ A H, nihil in superficie offendit depressum, aut sublatum, sed omnia puncta superficiei à linea recta tanguntur, & quodammodo raduntur. Quòd si minima superficiei particula aliis humilior à linea recta non tangeretur, vel ipsa linea recta libere nō posset circumduci, propter aliquem tumorem, seu eminentiam in superficie occurrentem, iam non posset nuncupari plana. Itaque vt sit plana, requiritur vt omnibus modis posit recta linea commensurari, hoc est, vt ei applicari possit recta linea secundùm A B, & A F, & denique secundùm omnes partes. Hæc autem superficies sola erit ea, quam imaginari, & intelligere possumus describi ex motu lineæ rectæ in transuersum, qui super duas alias lineas rectas conficitur. Vt si linea recta A B, per duas rectas A D, B C, feratur, efficietur superficies perfectè plana, iuxta omnes definitiones. Non enim difficile erit huic superficiei traditas descriptiones accommodare. Solent Mathematici superficiem planam frequenter appellare planum, ita vt quando loquuntur de plano, intelligenda semper sit superficies plana. Cæteræ omnes superficies, quibus non omni ex parte accommodari potest linea recta, qualis est superficies interior alicuius fornicis, vel exterior alicuius globi, columnæue rotundæ, vel etiam coni, &c. appellantur curuæ, & non planæ. Quamuis enim superficiei columnæ rotundæ, seu cylindri, secundùm longitudinē adaptari possit linea recta, tamen secundùm latitudinem minimè potest. Idemq; dicendum est de aliis. Superficies autē curua duplex est, conuexa videlicet, vt exterior superficies sphæræ, vel cylindri; & concaua, vt interior fornicis, siue arcus alicuius. Quoniam verò omnium harum contemplatio pertinet ad Stereometriam, idcircò Euclides hoc primo libro solum planam nobis explicauit, de qua est disputaturus prioribus sex libris.

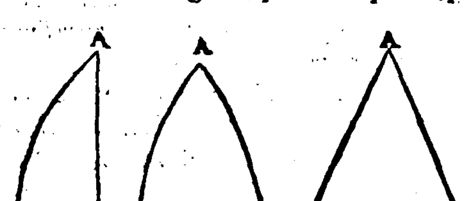


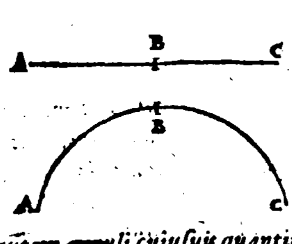



## IIX.

PLANVS verò angulus, est duarum linearum in plano se mutuò tangentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio.

DECLARAT, quidnam sit angulus planus, dicens; Quandocunq; duæ lineæ in plana aliqua superficie inuicem concurrunt, & non in directum constituuntur, efficietur ex huiusmodi concursu, seu inclinatione vnius ad alteram, angulus, qui dicitur planus, propterea quòd in plana constituatur superficie. Verbi gratia, quia duæ lineæ A B, A C, concurrunt in A, & non iacent in directum, ideò efficiunt angulum A, planum in eadem existentem superficie, in qua duæ illæ lineæ constituuntur. Dicentur autem duæ lineæ non in directum iacere, quando altera earum versus concursum protensa non coincidit cum altera, sed vel eā secat, vel certè statim post punctū concursus ab ea recedit. Quod dixerim propter angulū contactus, qui fit, quando duo circuli se contingūt, vel etiam, quando linea recta circulū tangit. Protracta enim recta linea post punctum contactus, quanquā non secet circulum, tamen statim post illud ab eo seiungitur. Eodem pacto circularis illa linea secundùm propriam dispositionē, ac formam extensa recedit à recta tangente, quamuis eam nō secet. Vnde verè est angulus constitutus in illo contactu: qua de re plura scribemus in proposit. 16. lib. 3. contra Iacobum Peletarium, qui contendit, eum non esse angulum. Quòd si duæ lineæ se mutuò tangant, iacentes in directum, ita vt alterutra producta congruat toti alteri, non fiet vllus angulus ex illo concursu, cùm nulla sit inclinatio, sed ambæ vnam integram lineam constituent. Vt quia recta A B, producta conuenit cum recta B C, non efficietur angulus in B. Sic etiam non fiet angulus in B, ex lineis curuis A B, B C, quia alterutra secundùm suam inflexionem, & obliquum ductum extensa, cum altera coincidit. Quare in directum dicentur iacere. Itaq; vt lineæ rectæ efficiant angulum, necesse est, vt post concursum productæ se mutuò secent: Curuæ autem lineæ, vel quarū altera curua, altera verò recta existit, angulum constituere verè possunt, etiamsi non se mutuò intersecent; sufficit enim, quòd sese contingant, ita vt statim post contactum altera ab altera separetur, quemadmodum & ante eundem semotæ cernuntur. Consistit autem anguli cuiusuis quantitas in sola inclinatione, non in longitudine linearum: lineæ etenim longius excurrentes, nō augent suam inclinationem, igitur neq; anguli magnitudinem. Sunt & alia duo genera angu-




lorum

lorum, quorum prius solidos comprehendit, de quibus Euclides differit in Stereometria, quiq; in corporibus existunt. Posterius verò sphærales, qui in superficie sphæra constituuntur ex circulorum maximorum circunferentiis, & de quibus copiosè agitur in sphæricis elementis Menelai. Horum autem omnium explicatio in alium locum à nobis reijcitur, cùm hîc de solis planis angulis sit futurus sermo.

## IX.

CVM autem, quæ angulum continent lineæ, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus appellatur.

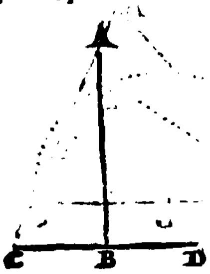
*ANGVLVS omnis planus conficitur aut ex lineis duabus rectis, qui quidē rectilineus dicitur, & de quo solùm hic agit Euclides; aut ex duabus curuis, quē curuilineum vocare licet; aut ex vna curua, & altera recta, qui non ineptè mixtus appellatur. Ex hisce porrò lineis possunt curuilinei anguli tribus variari modis, & mixti duobus, pro varia inclinatione, seu habitudine linearum curuarum, vtpotè secundùm conuexū, & concauum, ceu in propositis angulis*

*planè & apertè perspicitur: Rectilineus verò variari non potest ratione inclinationis, habitudinisve linearū, nisi maiorem, vel minorem inclinationem variam velimus dicere habitudinem; quod est absurdum; cùm hoc modo augeatur tantùm angulus rectilineus, aut diminuatur, quod & aliis commune est, non autem ita varietur, vt aliud constituat genus.*

## X.

CVM verò recta linea super rectam consistens lineam eos, qui sunt deinceps, angulos æquales inter se fecerit, rectus est vterque æqualium angulorum: Et quæ insistit recta linea, perpendicularis vocatur eius, cui insistit.

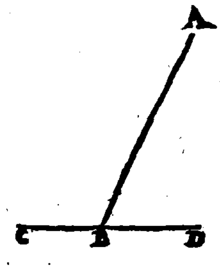
*VSVS frequentissimus reperitur in Geometria anguli recti, & lineæ perpendicularis, nec non anguli obtusi, & acuti, propterea docet hoc loco Euclides, quisnam angulus rectilineus apud Geometras appelletur rectus, & quænam linea perpendicularis: In sequentibus autem duabus definitionibus explicabit angulum obtusum, & acutum. Non enim alius dari potest angulus rectilineus, præter rectum, obtusum, & acutum. Igitur si recta linea A B, rectæ C D, insistens efficiat duos angulos prope punctum B, (qui quidem ideò dicūtur à Mathematicis esse deinceps, quòd eos eadem linea C D, protracta, prope idem punctum B, efficiat) inter se æquales, quod tum demum fiet, quando recta A B, non magis in C, quàm in D, inclinabit, sed æquabiliter rectæ C D, insistet, vocabitur vterq; angulus B, rectus, & recta A B, perpendicularis rectæ C D, cui insistit. Eadem ratione nominabitur recta C B, perpendicularis rectæ A B: quamuis enim C B, tantùm faciat cum A B, vnum angulum, tamē si A B, extenderetur in rectum & continuū versus punctum B, efficeretur alter angulus æqualis priori. Qua verò arte linea duci debeat efficiens cū altera duos angulos æquales, docebit Euclides proposit. 11. & 12. huius 1. lib. Itaq; vt in Geometria concludamus angulum aliquem esse rectum, aut lineā, quæ ipsum efficit, ad aliam esse perpendicularē, requiritur, & sufficit, vt probemus angulum, q; est ei deinceps, æqualem illi esse. Pari ratione, si dicatur aliquis angulus rectus, aut linea, quæ ipsum constituit, perpendicularis ad aliam, colligere licebit, angulum illi deinceps æqualem quoq; esse. Quando enim anguli, qui sunt deinceps fuerint inter se æquales, nuncupatur vterque illorum rectus, & linea ipsos efficiens, perpendicularis, iuxta hanc 10. definit. quando autem non fuerint æquales, non dicitur quisquam illorum rectus, vt constabit ex sequentibus duabus definitionibus, & propterea neq; linea eos constituens perpendicularis appellatur. Hæc dixerim, vt videas, quidnam liceat ex hac definitione colligere in rebus Geometricis, & quemnam vsum habeant apud Geometras descriptiones vocabulorum. Non enim magno labore hæc, quæ diximus, ad alias definitiones poterunt transferri.*




## XI.

OBTVSVS angulus est, qui recto maior est.

*QVANDO recta A B, rectæ C D, insistens, non fecerit angulos ad punctum B, æquales, & ob eam causam neutrum rectum, sed vnum quidem recto maiorem, alterum verò minorem, dicitur maior angulus obtusus, qualis est angulus B, ad punctum C, vergens, qui continetur rectis lineis A B, B C.*



XII.

ACVTVS verò, qui minor est recto.

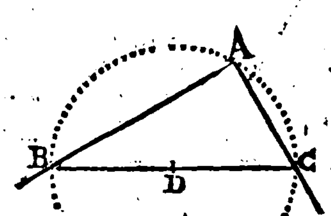
*Vt in præcedenti figura, minor angulus B, ad punctum D, vergens, qui continetur rectis lineis A B, B D, vocatur acutus. Itaq; angulus rectus, vt ex dictis colligitur, nullam patitur varietatem, vt vnus altero maior minórve detur, cùm linea perpendicularis eum efficiens nō debeat magis in vnam partē inclinare, q̃ in alteram: Obtusus verò, & Acutus augeri possunt, & minui infinitis modis, cùm ab illa inflexibilitate lineæ perpendicularis infinitis etiam modis recta linea possit recedere, vt perspicuum est. Quoniam verò ad quemuis angulum planū constituendum concurrunt duæ lineæ, & aliquando in vno puncto plures existunt anguli, solent Mathematici, vt tollatur confusio, angulūm quemlibet exprimere tribus literis, quarum media ostendit punctum, in quo lineæ conficiunt angulum, extremæ verò significant initia linearum, quæ angulum continent. Exempli gratia, in superiore figura angulum obtusum intelligunt per angulum A B C, acutum verò, p angulum A B D; quod diligēter est notandū, vt facilè dignoscamus angulos, quorū mentio fit in demōstrationibus.*

*IAM verò proposito nobis angulo aliquo rectilineo, si experiri velimus, num rectus sit, an obtusus, acutúsve, efficiemus id hoc modo. Contineant duæ rectæ A B, A C, angulum A. Ducta recta B C, vtcunque, quæ angulum subtēdat, & diuisa bifariā in D, describatur ex D, vt centro, ad interuallum D A, circumferentia circuli: quæ si p puncta B, C, transeat, [a] erit angulus A, rectus, vtpote qui in semicirculo B A C, existat: si verò idem semicirculus rectam B C, secet in E, F, erit angulus B A C, obtusus; propterea q; ductis rectis E A, F A; [b] angulus E A F, in semicirculo E A F, rectus est, q. quidem pars est anguli B A C: Si deniq; idem semicirculus rectam B C, productam secet in E, F, erit angulus B A C, acutus; propterea q; ductis rectis E A, F A, [c] angulus E A F, in semicirculo E A F, rectus est, q. quidē maior est angulo B A C.*

a 31. tertij.

b 31. tertij.

c 31. tertij.



*ALITER idem assequemur hoc modo. Describatur ex puncto D, quod rectam B C, dato angulo A, subtensam secat bifariam, semicirculus ad interuallum D B, vel D C: qui si transeat per punctum A, [d] datus angulus erit rectus, vtpote qui in semicirculo existat. Si verò idem semicirculus transeat supra punctum A, datus angulus erit obtusus. Ducta enim recta D A, secante circunferentiam in E, iungantur rectæ E B, E C, [e] eritq; angulus B E C, in semicirculo rectus. Cùm ergo angulus B A C, datus [f] maior sit angulo B E C, erit angulus datus A, recto maior, hoc est, obtusus. Si deniq; semicirculus idem secet rectas A B, A C, erit datus angulus acutus. Sumpto namq; puncto E, inter rectas A B, A C, in circunferētia, iungantur rectæ E B, E C. [g] eritq; angulus B E C, rectus in semicirculo: q. cum [h] maior sit angulo dato A, erit datus angulus A, recto minor, id est, acutus. Nō videatur autem mirum cuipiam, quod ad demonstrationem assumamus propositiones, quæ posteriùs demonstrantur ab Euclide; quod alienum esse videtur à puritate demonstrationum Geometricarum: Non videatur, inquam, mirū, quia cùm id, quod hoc loco ostendimus, necessarium nō sit ad sequentes demonstrationes, poterit commodè differri, donec propositiones requisitæ sint demonstratæ. Satis est, vt praxis huiusce rei hoc loco intelligatur. Idem obseruabimus in nonnullis praxibus problematum. Eas enim propriis in locis, quoad eius fieri poterit, proponemus, vt diuisionem anguli rectilinei in quotuis partes æquales eo in loco docebimus, vbi Euclides docet diuisionem eiusdem anguli in duas æquales partes, &c. quanquam ad earum praxium demonstrationes necessariæ sint propositiones posterius demonstratæ.*

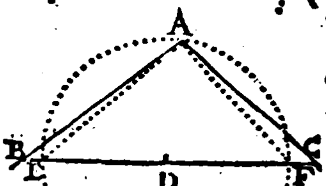
d 31. tertij.

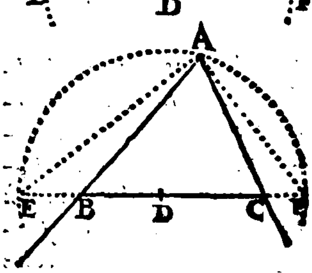
e 31. tertij.

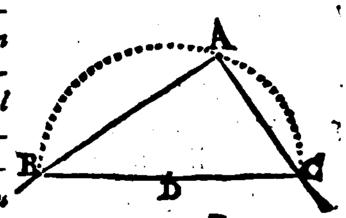
f 21. primi.

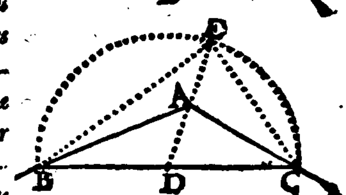
g 31. tertij.

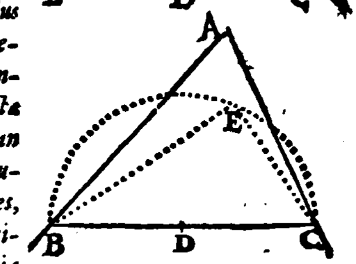
h 21. primi.

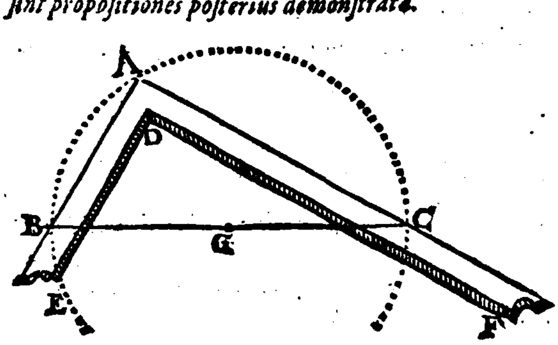












*FACILIVS idē cognoscemus beneficio normalis cuius accuratè fabricatæ, qualē refert instrumentum A B C, constans duabus regulis A E, A F, ad angulum rectum in A, coniunctis. Nam si latus A B, huius normæ, rectæ A B, applicetur, cadetq; puncto A, in punctum A; siquidem & normæ latus A C, rectæ A C, congruat, erit angulus A, rectus: si verò citra rectā A C, cadat normæ latus A C, erit angulus A, obtusus: si denique latus normæ A C, vltra rectam A C, cadat, acutus erit angulus, vt perspicuum est.*

IT A autem normam examinabimus, num accuratè sit fabricata, néc ne. Descripto semicirculo B A C, ex centro G, cuiusuis magnitudinis, ductaq; diametro B C, ponatur angulus A, in aliquo puncto circunferentiæ, vt in A, latusq; vnum normæ, vt A B, per B, punctum extremum diametri transeat. Nam si alterū tunc latus A C, per alterum punctum extremum C, transeat, ritè fabricata erit norma A B C; * quòd tunc angulus B A C, in semicirculo B A C, rectus sit: si verò latus A C, nō per C, transeat, emendanda erit norma; quia eius angulus A, tunc rectus non erit. Eadem ratione interiorem partem normæ examinabimus, si angulum D, circunferentiæ applicemus, & latera D E, D F, punctis extremis B, C, &c. a 31. tertij.

## XIII.

TERMINVS est, quod alicuius extremum est.

TRES sunt termini iuxta hāc definitionem. Punctum enim terminus est, seu extremum lineæ: Linea superficiei: & superficies corporis. Corpus autē terminare ampliùs nihil potest, quòd non reperiatur alia quantitas plures habens dimensiones, quàm tres. Omne siquidem terminatum superat terminum suum vna dimensione, vt perspicuum est ex adductis exemplis.

## XIV.

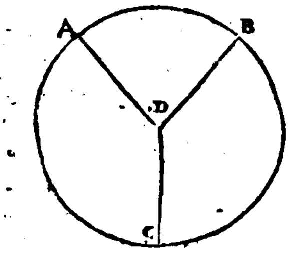
FIGVRA est, quæ sub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

NON omnis quantitas terminos possidens Figura dici potest, ne lineam finitā figurā appellare cogamur: Sed eæ solùm magnitudines, quæ latitudinē habent, nempe superficies terminatæ; & quæ profunditatem adeptæ quoq; sunt, vt solida finita, Figuræ nomine appellabuntur. Hæ enim propriè terminis comprehendi dicuntur. Nam linea finita non propriè dicitur punctis extremis comprehendi, cùm puncta lineā non ambiant, sed potiùs punctis terminari dicitur. Itaq; termini debent quantitatē, quæ figura dicitur, ambire, & non tantùm terminare. Superficies quoq; infinita, vel etiam corpus, cū nullis terminis comprehendatur, Figura vocari nulla ratione potest. Figuræ vnico comprehensæ termino sunt, Circulus, Ellipsis, sphæra, sphæroides, & alia huiusmodi: Pluribus verò terminis inclusæ figuræ sunt, Triangulum, Quadratum, Cubus, Pyramis, &c. Superficies terminatæ nuncupantur figuræ planæ: solida autem circumscripta, figuræ solidæ, siue corporeæ. Porrò quia formas, seu typos variarum figurarum inspicies q̄ plurimas in sequentibus, planarum quidem in prioribus 10. libris, solidarum verò in posterioribus quinque, propterea nulla hoc loco figura depingenda esse videtur.

## XV.

CIRCVLVS, est figura plana sub vna linea comprehensa, quæ peripheria appellatur, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ, inter se sunt æquales.

DEFINIT hîc circulum, figuram inter planas perfectissimā, docens figuram illam planā, quæ vnica linea circumscribitur, ad quam lineam omnes rectæ lineæ ductæ ab vno puncto, quod intra figuram existit, sunt æquales, vocari circulum. Vt si superficies, seu spatium concludatur vnica linea A B C, habueritq; hanc conditionem, vt ab aliquo puncto intus suscepto, vtpote à D, omnes rectæ lineæ cadentes ad terminum A B C, quales sunt D A, D B, D C, inter se sint æquales, appellabitur talis figura plana circulus, aliàs nō. Qua verò ratione in circulo punctum illud medium reperiri debeat, docebit Euclides proposit. 1. lib. 3. Adiungit quoq; Euclides lineam extremā circuli, qualis est A B C, appellari Peripheriam, seu, vt Latini exponūt, circunferentiam. Potest circulus etiam hac ratione describi. Circulus est figura plana, quæ describitur à linea recta finita circa alterū punctum extremū quiescens circunducta, cùm in eundem rursus locū restituta fuerit, vnde moueri cœperat. Quæ quidē descriptio persimilis est ei, qua ab Euclide sphæra describitur lib. 11. Vt si intelligatur recta A D, circa punctū D, quiescens moueri, donec ad eundē redeat locū, à quo dimoueri cœpit, describet ipsa recta totū spatiū circulare: punctum verò alterū extremū A, delineabit peripheriā A B C: Erit quoq; punctū quiescens D, illud, à quo omnes lineæ cadentes in peripheriā sunt inter se æquales, ꝓpterea ꝙ recta A D, circunducta, oēs lineas, q̄ ex D, possūt educi ad peripheriā, æquè metiatur. Igitur Ellipsis, quāuis figura sit plana vna linea circūscripta, tamē quia in ea non datur punctū, à quo ad ipsam lineā terminantē omnes rectæ lineæ sint æquales, circulus dici nequit.




## XVI.

HOC verò punctum centrum circuli appellatur.

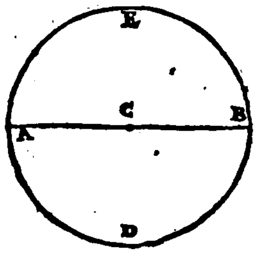
DOCET, punctum illud intra circulum, à quo omnes lineæ rectæ ad circunferentiam ductæ, sunt æquales, appellari centrum circuli; quale est præcedentis figuræ punctum D. Vnde perspicuum est, polum alicuius circuli in sphæra, à quo omnes rectæ ad peripheriam circuli cadentes sunt æquales, vt ait Theodosius in sphæricis elementis, non dici debere centrum circuli, cùm punctum illud, quod polus dicitur, existat in superficie sphæræ, non autem in superficie circuli; quæ tamen est necessariò requisita conditio, vt punctum aliquod centrum vocetur. Cæterùm, vt punctum aliquod circuli dicatur centrum, satis est, vt ab eo tres duntaxat li-

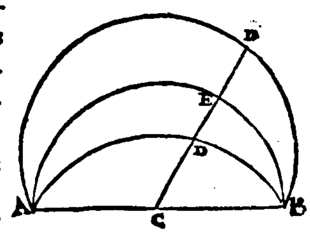
*neæ cadentes in peripheriam sint æquales inter se, vt demonstrat Euclides proposit.9.lib.3. Hac enim ratione fiet, vt omnes aliæ ab eodem puncto emissæ inter se sint æquales.*

## XVII.

DIAMETER autem circuli, est recta quædam linea per centrum ducta, & ex vtraque parte in circuli peripheriam terminata, quæ circulum bifariam secat.

*SI in circulo ducatur recta linea A B, per centrum C, ita vt extrema eius A, & B, terminentur in peripheria, appellabitur ea circuli diameter. Non igitur omnis in circulo recta linea ducta diameter dicetur, sed ea solummodò, quæ per centrum vsque ad peripheriam vtrinque extenditur. Vnde plures assignari poterunt in circulo diametri, vnum verò centrum duntaxat. Quòd autem Euclides addit, circulum bifariam secari à diametro, perspicuum ex eo esse potest, quòd diameter per medium circulum, vtpotè per centrum, ducitur. Hinc enim fit, vt propter directum diametri per centrum transitum, vtrinq; æquales circunferentiæ abscindantur. Quòd tamē Thaletem Milesium hac ratione demonstrasse testatur Proclus. Concipiamus animo, portionem A D B, accommodari, & coaptari portioni reliquæ A E B, ita vt diameter A B, communis sit vtrique portioni: Si igitur circumferentia A D B, congruat penitùs circunferentiæ A E B, manifestum est, duas illas portiones à diametro factas, esse inter se æquales, quandoquidem neutra alteram excedit: Si verò circunferentia A D B, nō omni ex parte cadere dicatur super circunferentiam A E B, sed vel extra eam, vel intra, vel partim extra, partim intra; tunc ducta recta à centro C, secante circunferentiam A D B, in D, & circunferentiam A E B, in E, erunt duæ rectæ C D, C E, ductæ ex centro ad circunferentiam eiusdem circuli æquales, per circuli definitionem, cùm tamen vna sit pars alterius, quod est absurdum. Non ergo cadet vna circunferentia extra aliam, vel intra, vel partim extra, partim intra, sed ambæ inter se aptabuntur, ideóque æquales erunt. quod demonstrandum proponebatur.*



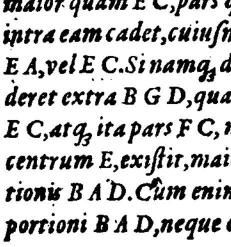




*EX hac demonstratione constat, diametrum non solùm circunferentiam, verumetiam totam aream circuli secare bifariam. Cùm enim semicircunferentiæ sibi mutuò congruant, vt ostensum est, congruent etiam superficies ipsæ inter diametrum, & vtramque circunferentiam comprehensæ, cùm neutra alteram excedat. Quare æquales inter se erunt.*

## XIIX.

SEMICIRCVLVS verò est figura, quę continetur sub diametro, & sub ea linea, quæ de circuli peripheria aufertur.

*EXEMPLI gratiâ, in superiori circulo figura A D B, contēta sub diametro A B, & peripheria A D B, dicitur semirculus, quia, vt in præcedenti definitione ostendimus, ea est dimidiata pars circuli. Eadē ratione erit figura A E B, semicirculus. Idem autē punctum C, diametrū secans bifariā, centrū est in circulo, & in semicirculo. Quòd si recta linea B D, nō transeat per centrum E, secabitur circulus ab ea non bifariā, sed in duas portiones inæquales B A D, B C D, quarū ea, in qua centrū circuli existit, cuiusmodi est portio B A D, maior est, quàm alia B C D, extra quam centrum E, reperitur. Esse autē portiones B A D, B C D, inæquales, ita probari potest. Concipiatur per centrum E, ducta diameter ad rectā B D, perpendicularis A C. Si igitur dictæ portiones dicantur esse æquales, & portio B C D, intelligatur moueri circa rectam B D, vt super portionem B A D, cadat, congruet illa portio huic, & recta F C, rectæ F A, congruet, ob angulos rectos ad F, q. omnes inter se æquales sunt ex definit.10. cùm sint sibi mutuò deinceps. Recta ergo F C, quæ nunc eadē est, quæ F A, maior erit, quàm E A, pars ipsius F A. Cùm ergo ipsi E A, sit æqualis E C, quòd ambæ ducantur è centro ad circunferentiam, erit quoque F C, maior quàm E C, pars quàm totū, quod est absurdum. Non igitur portio B C D, portioni B A D, congruet, sed intra eam cadet, cuiusmodi est portio B G D, vt recta F G, eadem tūc existens, quæ F C, minor possit esse quàm E A, vel E C. Si namq; diceretur cadere extra, vt si circulus esset B C D G, cuius centrum E, & portio B C D, caderet extra B G D, qualis est portio B A D, esset rursus F A, eadē tunc existens, quæ F C, maior q̄ E G, hoc est, q̄ E C, atq; ita pars F C, maior rursum foret toto E C. quod absurdum est. Ex quo patet, portionē B A D, in qua centrum E, existit, maiorem esse reliqua portione B C D, cùm hæc æqualis sit portioni B G D, quæ pars est portionis B A D. Cūm enim ostensum sit, portionem B C D, circa rectam B D, circunductam non posse congruere portioni B A D, neque cadere extra; cadet omninò intra, qualis est B G D.*




## XIX.

RECTILINEAE figuræ sunt, quæ sub rectis lineis continentur.

*POST definitionem circuli, traditurus iam Euclides descriptiones variarum figurarum, explicat priùs quanam* *quænam figuræ dicantur rectilineæ. De his enim potissimùm sermo futurus est in hisce libris. Omnes igitur figuræ planæ, quæ vndiq; rectis clauduntur lineis, rectilineæ nuncupantur. Ex quo perspicuum est, figuras planas curuis lineis comprehensas, dici curuilineas: Eas verò, quæ partim curuis, partim rectis circumscribuntur, appellari mixtas. Varia autem nunc genera figurarum rectilinearum ab Euclide describentur.*

## XX.

TRILATERAE quidem, quæ sub tribus.

*AFFIRMANS Euclides, eas rectilineas figuras dici trilateras, quæ tribus rectis lineis circumscribuntur, apertè nobis innuit, quonam modo Triangulum definiri debeat. Cùm enim in rectilineis figuris tot sint anguli, quot latera, seu rectæ lineæ, ex quibus constant, dicetur triangulum, figura tribus rectis lineis contenta, cuius omnes species iam iam adducentur.*

## XXI.

QVADRILATERAE verò, quæ sub quatuor.

*EADEM ratione erit Quadrangulum, figura quatuor rectis lineis contenta, cuius variæ species mox subsequentur.*

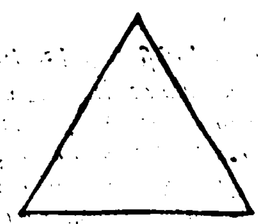
## XXII.

MVLTILATERAE autem, quæ sub pluribus, quàm quatuor, rectis lineis comprehenduntur.

*QVONIAM species rectilinearum figurarum sunt innumerabiles, propter infinitum numerorum progressum: Nam tres rectæ lineæ claudentes figuram efficiunt primam speciem, sub qua omnia triangula continentur; quatuor constituunt secundam, quæ omnia quadrangula complectitur; quinque tertiam componunt speciem; sex quartam, atque ita deinceps infinitè: Ideò Euclides, ne infinitatem hanc figurarum cogatur persequi, vocat omnes alias figuras rectilineas, quæ pluribus, quàm quatuor, rectis lineis circunscribuntur, generali vocabulo Multilateras; contentus denominatione trilaterarum figurarum, & quadrilaterarum, fortassis eam ob causam, quòd præcipuè in prioribus his libris de Triangulis, atque Quadrangulis sermo habeatur, & quòd facilè ad similitudinem harum duarum specierum cæteræ omnes à quolibet definiri possint. Quis enim ex dictis non colligat, figuram quinque lineis rectis contentam appellari quinquilateram, & sex lineis comprehensam, sexilateram, atque reliquas eodem modo? Sic etiam dici poterũt huiusmodi figuræ quinquangulæ, sexangulæ, septangulæ, &c.*

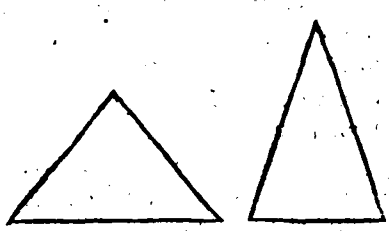
## XXIII.

TRILATERARVM autem figurarum, Aequilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.



*DESCENDIT iam ad singulas species triangulorum. Quia verò triangula diuidi possunt vel habita ratione laterum, vel angulorum, declarat priùs species prioris diuisionis, quæ tres sunt duntaxat, quòd tria latera tribus tantùm modis sese possint habere. Aut enim omnia æqualia sunt; aut duo tantùm, tertio existente vel maiore, vel minore; aut omnia inæqualia. Quando igitur omnia tria latera inter se æqualia sunt, dicitur triangulum Aequilaterum. Porrò ex æqualitate omnium trium laterũ trianguli æquilateri infertur, omnes tres eius angulos æquales quoq; esse, ceu ad 5. proposit. huius libri demonstrabimus.*

## XXIV.



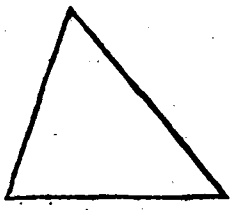
ISOSCELES autem est, quod duo tantùm æqualia habet latera.

*EX hac rursum æqualitate duorum laterum trianguli Isoscelis efficitur, duos angulos super reliquum latus etiam esse æquales, vt demonstrabit Euclides propositione quinta huius libri. Apposuimus autem duo triangula Isoscelia, quorum prius habet tertium latus vtrouis æqualium maius, posterius autem idem minus obtinet: ita vt duæ sint species trianguli Isoscelis; alterum, cuius tertium latus sit vtrouis æqualium maius; & alterum, cuius tertium latus vtrouis æqualium minus sit.*

## XXV.

SCALENVM verò est, quod tria inæqualia habet latera.

*HIC denique ex inæqualitate omnium laterũ trianguli Scaleni colligitur omnium angulorum inæqualitas, vt ostendetur propos. 18. huius 1. lib. Porrò ex his constat, eodem modo potuisse diuidi triangulum in tres*

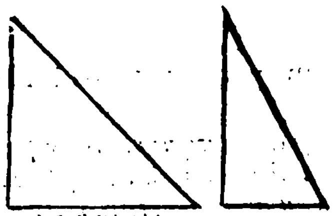


*species, si æqualitatis angulorum ratio haberetur. Cùm enim aut omnes tres anguli sint inter se æquales; aut duo tantùm, tertio maiore, vel minore existente; aut omnes tres inæquales; erit omne triangulum, vel æquiangulum, habens tres omnes angulos æquales; vel duorum tantùm angulorum æqualium; vel omnium angulorum inæqualium; quorum primum quidem Aequilatero, secundum verò Isosceli, tertium deniq; Scaleno respondet triangulo. Caterùm quanam arte construenda sint triangula huius partitionis super quauis data recta linea finita, trademus propositione prima huius libri.*

## XXVI.

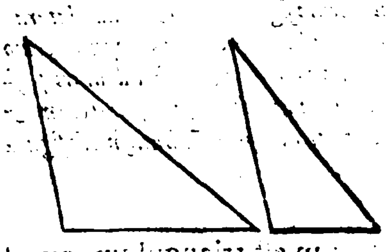
**AD** hæc etiam, trilaterarum figurarum, Rectangulum quidem triangulum est, quod rectum angulum habet.

*NVNC exponit triangulorum species iuxta posteriorē diuisionem, habita ratione varietatis angulorum. Quia verò tria tantummodò sunt angulorū rectilineorum genera diuersa; (Omnis enim angulus rectilineus vel est rectus, vel obtusus, vel acutus, vt suprà diximus,) fit vt tres quoque species triangulorum sub hac consideratione reperiantur. Nam aut vnus angulus trianguli est rectus, & ob eam rem reliqui acuti, vt ex 17. proposit. 1. lib. constabit; aut obtusus, & ob eandem causam reliqui acuti, aut denique nullus rectus, nullusq; obtusus, sed omnes acuti. Quando igitur triangulum aliquod habet angulum vnum rectum, vocatur ab Euclide, & aliis Geometris Rectangulum. Potest autem triangulum huiusmodi esse vel Isosceles, vel scalenum, vt hæ figuræ indicant, æquilaterum autem nulla ratione. Propter æqualitatem enim laterum essent per ea, quæ proposit. 5. dicemus, omnes etiam anguli æquales, ideoq; cùm vnus concedatur rectus, omnes tres recti, quod pugnat cum proposit. 17. & 32. huius libri.*



## XXVII.

**AMBLYGONIVM** autem, quod obtusum angulum habet.



*TRIANGVLVM Amblygoniū, siue obtusangulum esse quoque potest vel Isosceles, vel scalenum, vt in his figuris cernitur, non autē æquilaterū, aliàs eadem ratione essent omnes tres anguli per ea, quæ proposit. 5. ostendemus, æquales, ideoq; cū vnus ponatur obtusus, oēs tres obtusi, qđ multò magis pugnat cū propos. 17. & 32. huius lib.*

## XXIIX.

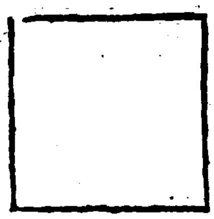
**OXYGONIVM** verò, quod tres habet acutos angulos.

*OMNE triangulum Oxygonium, siue acutangulum, potest esse vel æquilaterum, vel Isosceles, vel Scalenum, vt cernere licet in triangulis, quæ in speciebus prioris diuisionis spectanda exhibuimus, ne eadem hic frustra repeterentur. Ex dictis igitur palàm fit, triangulum quodcunq; æquilaterum, esse necessariò Oxygonium: At omne triangulum, tam Isosceles, q̄ Scalenū, esse vel Rectangulum, vel Amblygonium, vel Oxygonium; atq; Isosceles Oxygonium rursum duplex, Isosceles nimirū Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualiū maius, atq; Isosceles Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualiū minus: Vt vnica sit species trianguli æquilateri, quatuor verò Isoscelis, & tres Scaleni: atq; in vniuersum octo triangulorum genera: æquilaterū, quod perpetuò Oxygonium esse diximus, Isosceles rectangulum, Isosceles Amblygonium, Isosceles Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualiū maius, Isosceles Oxygonium habens latus tertiū vtrouis æqualium minus, Scalenū rectangulum, Scalenum Amblygonium, & Scalenū Oxygonium. Quæ etiam hisce licebit nominibus immutatis appellare, Rectangulum Isosceles, Rectangulum Scalenū, Amblygoniū Isosceles, Amblygonium Scalenum, Oxygonium æquilaterū, Oxygonium Isosceles, habens tertium latus vtrouis æqualium maius, Oxygonium Isosceles habēs tertium latus vtrouis æqualium minus, & Oxygonium Scalenū. Quare perspicuum est, quamnā connexionem, siue affinitatē habeant inter se triangula vtriusq; partitionis. Posse autē dari triangulum Isosceles Oxygonium, cuius duorū laterū æqualiū vtrumuis tertio sit minus, vt rectè animaduertit Franciscus Barocius in sua Cosmographia, ostendemus ad propos. 15 lib. 4. In omni porrò triangulo, cuius duo quæcunque latera expressè nominantur, solet reliquū latus tertium à Mathematicis appellari Basis, siue illud infimum occuper locum, siue supremum, &c. Hoc te breuiter monere volui, ne putares aliquid latere mysterij in base trianguli, intelligeresq; quodlibet latus, omni discrimine remoto, basis nomine posse nuncupari.*

## XXIX.

**QVADRILATERARVM** autem figurarum, Quadratum quidem est, quod & æquilaterum, & rectangulum est.

POST figurarum trilaterarum species, exponit iam singulatim quadrilateras figuras, recensendo quinque tantummodò earum genera, quorum quatuor priora regularia sunt, posterius autem & quintum irregulare. Prima figura quadrilatera dicitur Quadratum, cuius quidem omnia quatuor latera inter se æqualia existunt, omnesq; anguli recti. Itaque quadrangulum æquilaterũ, & non rectangulum; vel contrà, rectangulum, & non æquilaterum, nequaquam Quadratum appellabitur. Docebit autem Euclides proposit. 46. huius libri, quonam modo construendum sit quadratum super recta linea proposita finita.



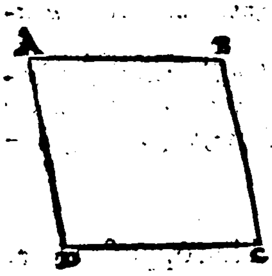
## XXX.

ALTERA verò parte longior figura est, quæ rectangula quidem, at æquilatera non est.


SECVNDA figura quadrilatera appellatur altera parte longior, in qua quidem anguli sunt recti, at latera non sunt inter se æqualia, quamuis bina opposita inter se æqualia existant. Vt in altera parte longiori A B C D, latera A B, D C, inter se, & A D, B C, inter se quoque æqualia sunt, cùm A B C D, propter angulorum rectitudinem, parallelogrammum sit, vt in hoc libro ad propositionem trigesimamquartam ostendemus.

## XXXI.

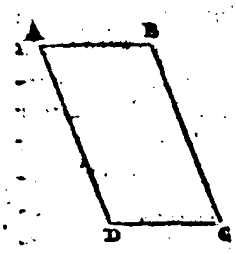
RHOMBVS autem, quę æquilatera, sed rectangula non est.




HAEC figura tertia inter quadrilateras, quæ Rhombus dicitur, oppositas prorsus habet conditiones, & diuersas à conditionibus figuræ altera parte longioris. Habet enim omnia latera æqualia, angulos verò non rectos, & inæquales, quamuis bini oppositi inter se æquales existant. Vt in Rhombo A B C D, anguli A, & C, inter se, & B, & D, quoque inter se æquales sunt, cùm A B C D, propter æqualitatem laterum, parallelogrammum sit, ceu ad eandem propositionem trigesimamquartam huius libri demonstrabitur.

## XXXII.

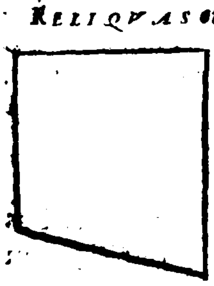
RHOMBOIDES verò, quæ aduersa & latera, & angulos habens inter se æquales, neque æquilatera est, neque rectangula.




EST hæc figura, quæ Rhomboides vocatur, quadrato omni ex parte opposita. Nã neq; eius latera omnia æqualia sunt, neque vllus angulus rectus, sed tamen latera bina opposita, qualia sunt A B, C D, & A D, BC, in Rhomboide A B C D, æqualia inter se, item anguli bini oppositi, quales sunt A, C, & B, D, inter se existunt æquales. Hæ igitur quatuor figuræ quadrilateræ dici possunt regulares; cæteræ verò omnes, quæcunque sunt, irregulares.

## XXXIII.

PRAETER has autem, reliquæ quadrilateræ figuræ, Trapezia appellentur.

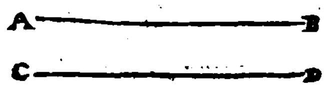


RELIQVAS omnes figuras quadrilateras, quæ à prædictis quatuor differunt, ita vt neq; latera omnia æqualia, neq; omnes angulos æquales, seu rectos, neque latera bina opposita; neq; angulos binos oppositos habeat inter sese æquales, generali vocabulo Trapezia nominat: quæ quidem cùm infinitis modis variari queat, rectè irregulares nuncupabuntur. Possunt enim duo anguli esse recti, vel vnus tantum, vel etiam nullus, sed vel vnus obtusus, & alij acuti, vel duo obtusi, & alij acuti, &c. Eademq; fieri potest quasi diuisio penes latera; Nam vel aliqua æqualia inter se sunt, vel nullum alteri est æquale, &c. Determinatas porrò trapeziorum species nonnullas afferemus post definitionẽ linearum parallelarum, seu æquidistantium, & parallelogrammi.

## XXXIV.

PARALLELAE rectæ lineæ sunt, quæ cùm in eodem sint planõ, & ex vtraque parte in infinitum producantur, in neutram sibi mutuò incidunt.

VT duæ, vel plures rectæ lineæ dicantur parallelæ, siue æquidistantes, non satis est, vt in quamcunque partem, etiam spatio infinito, productæ nunquã ad vnum punctum coëant; sed necesse quoque est, vt in vna plana superficie existant. Multæ siquidem lineæ rectæ non existentes in eadem superficie plana productæ ad spatium infinitum, nunquam in vnum conueniunt, & tamen non sunt parallelæ dicendæ; quales sunt, exempli gratiâ, duæ rectæ lineæ in transuersum positæ in medio aëre, & non se tangentes; Hæ etenim nunquam coire *possunt. Dicuntur autem duæ rectæ lineæ in eadem existere plana superficie, quando superficies aliqua plana vni earum accommodata, ita vt omnia puncta illius tangat, & circa illam immobilem circumuoluta, alteri quoque accommodari potest secundum omnia eius puncta, quamuis re ipsa in duabus superficiebus diuersis reperiatur; Vt propositis duabus rectis lineis A B, C D, si superficies aliqua plana rectæ A B, applicetur, omnia eius tangẽs puncta, ita vt circa illam circumducta tangat quoq; omnia puncta alterius rectæ C D; dicetur huiusmodi rectæ duæ lineæ in eadem superficie plana existere, aliàs non.*

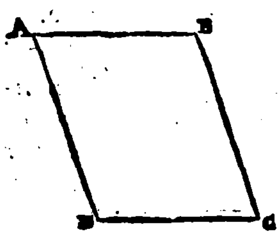



*Si igitur hæ duæ rectæ lineæ eadem non coëant, etiamsi infinitè producantur tam ad partes A, C, quàm ad B, D, appellabuntur parallelæ, siue æquidistantes. Cæterùm planiùs perfectiusq; intelliges in 11. lib. quo modo duæ rectæ lineæ, vel etiam plures in eadem dicantur superficie existere: Satis sit hoc loco breuiter admonuisse, rectè ab Euclide vtramque conditionem esse positam in definitione linearum parallelarum. Debent enim in eodem existere plano, & producta in vtramuis partem nunquam in vnum conuenire, quanquam hæc productio continuetur ad spatium infinitum. Quòd si duæ rectæ lineæ per immensum aliquod spatium extensæ non cernantur coire, constet tamen, eas tandem ex vna parte longiùs protractas in vnum punctum conuenturas, quamuis ex altera semper magis ac magis inter se distent, ac disiungantur, nequaquam appellandæ erunt parallelæ. Quotiescunque ergo duæ lineæ rectæ dicuntur à quopiam esse parallelæ, is necesse est concedat, illas in vna; eademq; superficie iacere, & nunquam posse coire. Similiter, si quis concludere velit, duas rectas lineas esse parallelas, hic demonstret priùs oportet, eas in eodem existere plano, & in neutram partem productas coniungi posse. Quæ in re non pauci videntur hallucinari, qui ex eo duntaxat conantur ostendere, aliquas rectas lineas esse parallelas, quod in neutram partem coëant, etiamsi infinitè producantur, nulla facta prorsus mentione alterius conditionis, quæ easdem lineas in eodem requirit existere plano.*

*HIC finem imponit Euclides definitionibus primi libri. Quoniam verò hoc eodem libro mentio fiet figuræ, quæ Parallelogrammum, nec non earum, quæ complementa parallelogrammi dicuntur, necessarium esse duximus, duabus definitionibus adiunctis explicare, quid sit Parallelogrammum, & quæ sint parallelogrammi complementa, vt faciliùs demonstrationes percipiantur.*

## XXXV.

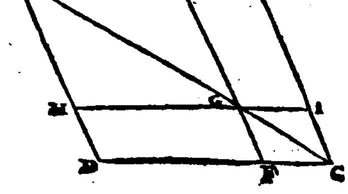
PARALLELOGRAMMVM est figura quadrilatera, cuius bina opposita latera sunt parallela, seu æquidistantia.




*VT figura quadrilatera A B C D, siquidem latus A B, æquidistet lateri D C, & latus A D, lateri B C, nuncupatur Parallelogrammum. Sunt autem quatuor solùm parallelogramma; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, & Rhomboides, quorũ priora duo rectangula, quòd omnes angulos habeant rectos, posteriora verò duo non rectangula vocantur, quòd nullus in eis angulus existat rectus. Cæterùm, quatuor has figuras esse parallelogramma, ostendemus ad proposit. 34. huius libri. Itaque possumus quadrilateras figuras, (vt & antiqui Geometræ) diuidere in Parallelogrammum, & Trapezium. Parallelogrammum rursus in rectangulum, & æquilaterum, quale est Quadratum; in nec rectangulum, nec æquilaterum, quale est Rhomboides; in rectangulum, sed non æquilaterum, qualis est figura altera parte longior; & in æquilaterum, sed non rectangulum, cuiusmodi est Rhombus. Trapeziorum quoq; aliud quidem habet duo latera opposita parallela, alia verò duo minimè; aliud autem nulla opposita latera habet parallela. Præterea illud prius vel habet duo illa latera, quæ non sunt parallela, inter se æqualia, diciturque Trapezium Isosceles; vel inæqualia, Trapeziumq; Scalenum appellatur. Itaq; ex his omnibus septem genera figurarum quadrilaterarum constitui possunt; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, Rhomboides, Trapezium Isosceles, Trapezium Scalenum, & Trapezium illud irregulare, in quo nulla latera sunt parallela.*

## XXXVI.

CVM verò in parallelogrammo diameter ducta fuerit, duæque lineæ lateribus parallelæ secantes diametrum in vno eodemq; puncto, ita vt parallelogrammum ab hisce parallelis in quatuor distribuatur parallelogramma; appellantur duo illa, per quæ diameter non transit, complementa; duo verò reliqua, per quæ diameter incedit, circa diametrũ consistere dicuntur.




*SIT parallelogrammum A B C D, in quo diameter A C; & linea E F, secans diametrum in G, & parallela existens lateribus A D, B C; Item linea H I, secans diametrum in eodem puncto G, parallelaq; lateribus A B, D C, existens. Quæ cùm ita sint, perspicuum est, parallelogrammum totum diuisum esse in quatuor parallelogramma, quorum*

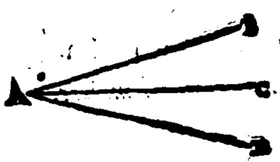
quidem

*quidem duo E B I G, G F D H, per quæ diameter A C, non transit, vocantur à Geometris complementa, siue supplementa reliquorum duorum A E G H, G I C F, quæ dicuntur circa diametrum consistere, quippe cùm per ea diameter transeat, vt videre est in præsenti figura.*

# PETITIONES, SIVE POSTVLATA.

## I.

POSTVLETVR, vt à quouis puncto in quoduis punctum, rectam lineam ducere concedatur.



*PRIMVM hoc postulatum planum admodum est, si rectè considerentur ea, quæ paulò antè de linea scripsimus. Nam cũ linea sit fluxus quidam puncti imaginarius, atq; adeò linea recta fluxus directo omnino itinere progrediens, fit vt si punctum quodpiã ad aliud directò moueri intellexerimus, ducta sanè sit à puncto ad punctum recta linea: Id quod prima hac petitione postulat Euclides, quemadmodum hîc vides à puncto A, ductam esse rectam lineam ad punctum B; ab eodemq; aliam ad punctum C; Item aliam ad punctum D; & sic innumera alia ab eodem puncto educi possunt ad alia atq; alia puncta.*

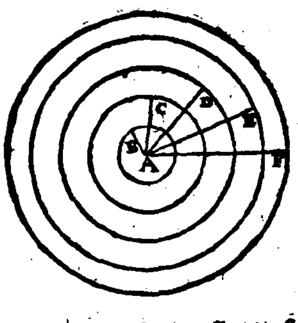
## II.

ET rectam lineam terminatam in continuum rectà producere.

*QVOD si punctum illud ferri adhuc cogitauerimus motu directò, & qui omnis inclinationis sit expers, producta erit ipsa recta linea terminata, & nunquam erit finis huius productionis, cùm punctum illud intelligere possimus moueri ad infinitam distãtiam. Sic linea recta A B, producta est primò in continuum ad punctum C, Deinde ad punctum D, &c.*

## III.

ITEM quouis centro, & interuallo circulum describere.



*IAM verò, si terminatam rectam lineam cuiuscunq; quantitatis mentè conceperimus applicatã esse secundùm alterũ extremũ ad quoduis punctũ ipsamq; circa hoc punctum fixum circunduci, donec ad eum reuertatur locum, à quo dimoueri cœpit; descriptus erit circulus, effectumq; quod tertia petitio iubet. Exemplum habes in his quinque lineis A B, A C, A D, A E, A F. quæ singulæ circa centrum A, circumuolutæ singulos circulos descripserunt iuxta quantitatem, seu interuallum ipsarum.*

*PRAETER hæc tria postulata, quibus Euclides contentus fuit, sunt multa alia æquè facilia, è quibus duntaxat in medium proferre decreui illud, quod frequentiùs repetendum erit in progressu totius Geometriæ. Reliqua enim prudens Lector ex se vel facilè intelliget.*

## IV.

ITEM quacunque magnitudine data, sumi posse aliam magnitudinẽ vel maiorem, vel minorem.

*OMNIS enim quantitas continua per additionem augeri, per diuisionẽ verò diminui potest infinitè: Vnde nunquam dabitur quantitas continua adeò magna, quin ea maior dari possit: neq; tam parua, quin minor ea possit exhiberi. Hoc idem in numeris verũ est, quoad additionem pertinet. Nam quilibet numerus per continuam additionẽ vnitatis augeri potest infinitè: quãuis in eius diminutione ad vnitatẽ indiuiduã deueniatur.*

# COMMVNES NOTIONES, SIVE Axiomata, quæ & Pronunciata dici solent, vel Dignitates.

## I.

QVAE eidem æqualia, & inter se sunt æqualia. Et quod vno æqualium maius est, aut minus, maius quoq; est, aut minus altero æqualium. Et si vnum æqualium maius est, aut minus magnitudine quapiam, alterum quoq; æqualium eadem magnitudine maius est, aut minus.

*FIERI nulla ratione potest, vt duæ quantitates inæquales, æquales sint alteri quantitati. Si enim minor illarum proposita quantitati æqualis extiterit, excedet eandem necessariò maior illarum; Et si maior æqualis* *fuerit proposita quantitati, superabitur minor ab eadem. Quare rectè colligitur, quantitates, quæ eidem quantitati æquales fuerint, inter se æquales quoque esse. Reliquæ quoque partes Axiomatis à nobis adiectæ, quòd frequentem vsum habeant, clarissimæ sunt.*

## II.

**Et** si æqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt æqualia.

*Si enim quantitates conflatæ, siue compositæ, inæquales forent, proculdubiò maiori plus esset adiectum, quàm minori, cùm antea æquales extiterint. Quare ex additione æqualium quantitatum ad quantitates æquales, conficientur quantitates quoque æquales.*

## III.

**Et** si ab æqualibus æqualia ablata sint, quæ relinquuntur, sunt æqualia.

*Nam si reliquæ quantitates forent inæquales, à minore plus fuisset detractum, quàm à maiore.*

## IV.

**Et** si inæqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt inæqualia. Et, si inæqualibus inæqualia adiecta sint, maiori maius, & minori minus, tota sunt inæqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

*Quin &, si æqualibus inæqualia adiecta sint, tota erunt inæqualia: quoniam maior quantitas addita vni æqualium, maiorem constituit quantitatem, quàm minor alteri æqualium adiecta: quemadmodum & si inæqualibus æqualia adijciantur, composita quantitas ex maiore, maior est, quàm composita ex minore. Alteram partem huius Axiomatis nos adiecimus, propter frequentem eius vsum.*

## V.

**Et** si ab inæqualibus æqualia ablata sint, reliqua sunt inæqualia. Et si ab inæqualibus inæqualia ablata sint, à maiori minus, & à minori maius, reliqua sunt inæqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

*Sic etiam, Si ab æqualibus inæqualia ablata sint, reliqua erunt inæqualia: quia maior quantitas ablata relinquet minorē quantitatem, quàm minor; quemadmodum residuū maioris maius est residuo minoris, si æqualia auferantur ab inæqualibus. Cæterùm Euclides non docet, quidnam simpliciter, & absolutè gignatur ex additione quantitatum inæqualium ad quantitates inæquales, vel quid relinquatur post subtractionem inæqualium quantitatum ab inæqualibus quantitatibus, propterea quòd nihil certò colligi inde potest, nisi quando maiori maius additur, & à maiori minus detrahitur, vt in secunda parte Axiomatis dictum est, quam nos ob insignem eius vtilitatem adiecimus. Possunt enim compositæ quantitates, vel residuæ, esse & inæquales, & æquales. Si enim ad 7. & 5. addantur 4. & 3. efficientur 11. & 8. quæ sunt inæqualia. Sic etiā si ex 7. & 5. detrahantur 2. & 1. relinquētur 5. & 4. quæ sunt inæqualia. At verò si ad 7. & 5. addantur 4. & 6. conficientur 11. et 11. quæ æqualia sunt. Item si detrahantur 3. & 1. ex 7. & 5. remanebunt 4. & 4. quæ æqualia quoque existunt.*

*Porro in his omnibus pronunciatis, primo excepto, nomine æqualium quantitatum intelligenda est etiam vna & eadem multis communis. Si enim æqualibus idem commune adijciatur, tota fient æqualia: Et si ab æqualibus idem commune detrahatur, residua æqualia erunt: Et si inæqualibus idem commune adiiciatur; vel eidem communi addantur inæqualia, tota fient inæqualia: & si ab inæqualibus idem commune detrahatur; vel ab eodem communi inæqualia auferantur, residua existent inæqualia.*

## VI.

**Et** quæ eiusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia. Et quod vnius æqualium duplum est, duplum est & alterius æqualium.

*Similiter, quæ eiusdem sunt triplicia, vel quadruplicia, vel quincuplicia, &c. inter se sunt æqualia. Si enim inæqualia forent, & maius eorum esset duplex, vel triplex, &c. alicuius quantitatis, deficeret vtique minus à duplici, vel triplici, &c. Quòd si contrà, minus esset duplex, vel triplex, &c. quantitatis cuiuspiam, excederet sanè maius duplex ipsum, vel triplex, &c. Hoc autem & ex secundo axiomate comprobari potest, ad hunc modum: Si enim duæ quantitates æquales fuerint alicui tertiæ, & vtrique tertia illa addatur, erunt compositæ duplices illius tertiæ, [a] sed & inter se æquales, ob idem additamentum. Quòd si rursum compositis eadem tertia adijciatur, erunt conflatæ triplices eiusdem tertiæ. Cùm igitur [b] & æquales inter se, propter idem additamentum, existant; eademque sit ratio in cæteris multiplicibus, perspicuum erit Axioma propositum. Secundam porrò partem huius axiomatis nos apposuimus, quòd non rarò eius vsus in rebus Geometricis requiratur.*

a 2. pron.
b 2. pron.

## VII.

**Et** quæ eiusdē sunt dimidia, inter se æqualia sunt. Et contrà, Quæ æqualia sunt, eiusdem sunt dimidia.

*Pari ratione, quæ eiusdem sunt partes tertia, vel quarta, vel quinta, &c. inter se æqualia sunt.*

*In his duobus pronunciatis per eandem quantitatem intelligi debent quantitates etiam æquales. Nam quæ æqualium duplicia sunt, vel triplicia, &c. inter se æqualia quoq; sunt: Item, quæ æqualium sunt dimidia, vel tertia, vel quarta, &c. & inter se æqualia necessariò existunt. Partem quoque secundam huiusce Axiomatis nos adiunximus, propterea quòd non minùs frequenter, quàm prima, à Geometris vsurpatur.*

## IIX.

Et quæ sibi mutuò congruunt, ea inter se sunt æqualia.

*Hoc est, duæ quantitates, quarum vna superposita alteri, neutra alteram excedit, sed ambæ inter se congruunt, æquales erunt. Vt duæ lineæ rectæ dicentur esse æquales, quando vna alteri superposita, ea quæ superponitur, alteri tota congruit, ita vt eam nec excedat, nec ab ea excedatur. Sic etiam duo anguli rectilinei æquales erunt, quando vno alteri superposito, is qui superponitur, alterum nec excedit, nec ab eo exceditur, sed lineæ illius cum lineis huius prorsus coincidunt: Ita enim erunt inclinationes linearum æquales, quamuis lineæ interdum inter se inæquales existant.*

*E contrario, Quæ inter se sunt æqualia, sibi mutuò congruent, si alterum alteri superponatur. Intelligendum est autem, quantitates sibi mutuò congruentes, esse æquales, secundùm id duntaxat, in quo sibi congruunt; Congruit autem longitudo longitudini tantùm, superficies superficiei, solidum solido, linearum inclinatio inclinationi linearum, &c.*

## IX.

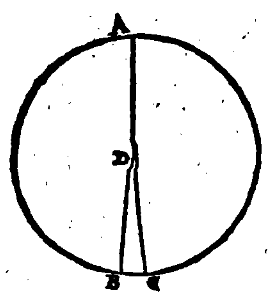
Et totum sua parte maius est.

*Cum pars à toto ablata relinquat adhuc aliquid, ne totum ipsum auferatur; perspicuum est, omne totum sua esse parte maius.*

*In sequentibus porrò pronuntiatis interrumpitur ordo Euclidis, propterea quòd duo alia axiomata hoc loco inserenda esse censuimus valde necessaria, cùm ex iis Axioma 12. quod Euclidi est decimum, demonstrari possit, vt ibi dicemus. In margine tamen numeros apposuimus ordini Euclidis respondentes.*

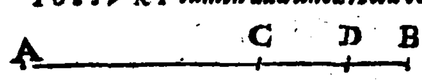
## X.

Dvae lineæ rectæ non habent vnum & idem segmentum commune.




*Non est difficile istud Axioma, si perfectè intelligatur natura rectæ lineæ. Cùm enim linea recta directò semper itinere, nullam in partem deflectendo, producatur, fieri nulla ratione potest, vt duæ lineæ rectæ habeant vnam partem, quamuis minimam, communem, præter vnicum punctum, in quo se mutuò intersecant. Quod tamen breuiter Proclus ita demonstrat. Habeant, si fieri potest, duæ rectæ A B, A C, partem communem A D. Ex centro autem D, & interuallo D A, [a] describatur circulus secans duas rectas propositas in punctis B, & C; [b] Erunt igitur duæ circunferentiæ A B, A B C, inter se æquales, (Sunt enim circunferentiæ semicirculorum æqualium, cùm A D B, A D C, ponantur esse diametri) pars & totũ, quod est absurdum. Non ergo duæ rectæ habent vnum & idem segmentum commune. Quod est propositum.*

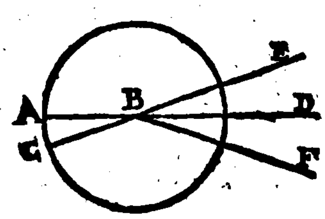
a 3.petit.
b 17.defin.




*Possvnt tamen duæ lineæ rectæ commune habere segmentum, quando vnam & eandem rectam lineam constituunt. Vt in hac figura, rectæ A D, B C, commune habent segmentum C D; quia ambæ vnam rectam constituunt lineam A B. At verò quando duæ rectæ sunt diuersæ, quales fuère A B, A C, in superiori exemplo, non possunt possidere segmentum aliquod commune, vt rectè à Proclo fuit demonstratum.*

## XI.

Dvae rectæ in vno puncto concurrentes, si producantur ambæ, necessariò se mutuò in eo puncto intersecabunt.




*Hoc etiam Axioma ex natura lineæ rectæ pendet. Quod tamen ita demonstrabimus: Coëant duæ rectæ A B, C B, in B. Dico illas productas se mutuò secare in B, nempe C B, productam cadere in E, supra rectam A B, productam. Nam si C B, producta non cadit supra A B, productam, congruet cum A B, producta, ita vt transeat per D, atque ita duæ rectæ A B D, C B D, habebunt idem segmentum commune B D, quod in antecedenti axiomate ostensum est fieri non posse: vel certè infra A B, productam cadet, ita vt C B, producta cadat in F, sitq; vna recta linea C B F. Centro igitur B, describatur ad quoduis interuallum circulus A C F D, secans rectas A B, C B, productas in D, F. Quia ergo vtraque re-*

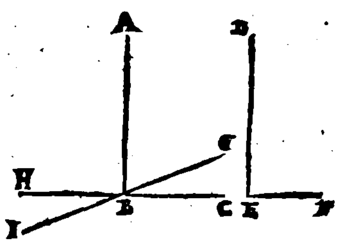
cta ABD, CBF, per centrum B, ducitur, erit tam ACD, quàm CF, semicirculus, per definitionem 18. ac proinde æquales erunt circumferentiæ ACD, CF, vt ad definitionem 17. demonstrauimus, totum & pars. Quod est absurdum.

*Dvo proxima Axiomata ab Euclide non ponuntur, quia tamen necessaria sunt ad aliorum Axiomatum probationes, ea hic inseruimus. Tria autem sequentia Euclidis sunt.*

x. XII.

Item, omnes anguli recti sunt inter se æquales.

*Hoc axioma apertissimũ esse cuilibet potest ex 10. definitione, qua angulus rectus describitur; propterea quòd inclinatio linearum angulum rectum constituentium augeri minuíve nequit, sed prorsus est immutabilis. Efficitur enim rectus angulus à linea perpendiculari, quæ quidem alteri lineæ rectæ ita superstat, vt faciat vtrobique angulos æquales, neque magis in vnam partem, quàm in alteram inclinet. Ex quo fit, omnes angulos rectos æquales inter se esse, cùm semper sit eadem inclinatio, quamuis lineæ sint inæquales interdum. Conatur tamen Proclus ex 10. definitione id demonstrare hac ratione: Sint duo anguli recti ABC, DEF. quos*



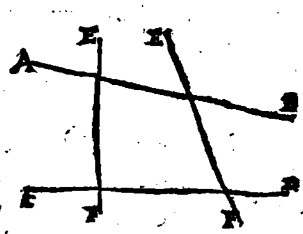
*dico esse inter se æquales. Si enim fieri potest, sint inæquales, sitque ABC, maior. Si igitur mente concipiamus punctum E, applicari puncto B, & rectam DE, rectæ AB, cadet recta EF, inter rectas AB, BC, qualis est BG, propterea quòd angulus DEF, minor ponitur angulo ABC. [a] Producatur CB, in rectum & continuum vsque ad H; Cùm igitur angulus ABC, sit rectus, [b] erit angulus ABH, illi deinceps æqualis, & rectus quoque: quare maior etiam angulo ABG. [c] Producta autem GB, in rectum & continuum vsque ad I, cadet portio producta BI, infra CB, productam, vt in præcedenti Axiomate est demonstratum. Quare cũ angulus ABG, ponatur rectus, [d] fiet angulus ABI, illi deinceps, æqualis. Quapropter angulus ABH, maior quoq; erit angulo ABI, pars toto, quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt duo anguli recti propositi, sed æquales. Quod est propositum: eademq; est ratio in cæteris.*

a 2. petit.
b 10. defin.
c 2. petit.
d 10. defin.

*Recte autem hoc loco monet Pappus, axioma istud non posse conuerti; non enim omnis angulus recto angulo æqualis rectus est, cùm & curuilineus recto æqualis esse queat, vt in 5. lib. demonstrabimus, qui tamen non dicitur rectus, cùm non sit rectilineus. Solus igitur angulus rectilineus æqualis angulo recto, rectus nuncupabitur: Et omnes anguli recti inter se æquales erunt, sine vlla exceptione.*

XI. XIII.

Et si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuò incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.

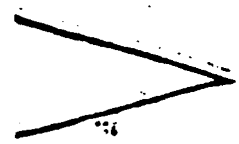


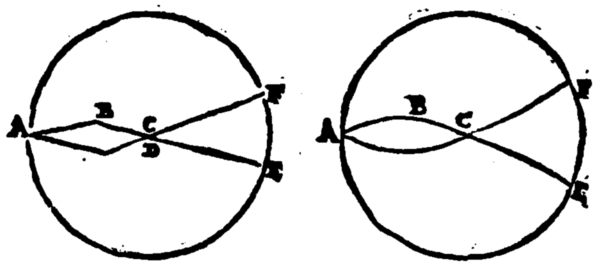
*Vt si in duas lineas rectas AB, CD, incidens alia recta EF, faciat duos angulos internos, & ex eadem parte BEF, DFE, minores duobus rectis, vult Euclides, illas tandem conuenturas esse ad aliquod punctum vnum, versus eam partem, in qua duo anguli minores existunt duobus rectis, vt appositum exemplum commonstrat. Ratio huius perspicua est, quoniam quando duo anguli interni, & ex eadem parte æquales sunt duobus rectis, duæ rectæ lineæ in neutram partem coire possunt, sed æquali semper spatio protendũtur, vt propositione 28. huius libri demonstrabitur. Quare si duo anguli interni, & ex eadem parte efficiuntur minores duobus rectis, necesse est ex ea parte dictarum linearum spatium coarctari, ex altera verò magis ac magis dilatari; ideóque eas conuenturas tandem esse aliquando in vnum punctum. Verùm, quia axioma hoc subobscurum videri solet tyronibus, immò à numero principiorum reijcitur à Gemino Geometra, Proclo, & alijs, quòd non facilè quiuis ei assensum præbeat; præsertim cùm reperiantur aliæ quædam lineæ, quarum spatium, licèt semper magis ac magis coangustetur, (quemadmodum & in duabus rectis AB, CD, accidit, vt ad propositionem vigesimam octauam huius libri demonstrabimus.) nunquam tamen in vnum punctum coëunt, etiamsi infinitè producantur, vt constat ex elementis conicis Apollonij Pergæi, & ex linea conchili Nicomedis. Idcirco pleniorem illius explicationem in scholium propositionis vigesimæ octauæ huius libri differimus, vbi illud ex Procli sententia Geometricè demonstrabimus, vt firmè, ac sine vlla dubitatione, tanquam verissimum, ad propositionis vigesimæ nonæ huius libri, (vbi primùm eius vsus incipit apparere) & ad aliarum propositionum demonstrationes possit assumi. Quod tamen nos aliter quàm Proclus, & quidem magis Geometricè demonstrabimus, ita vt nullus dubitationi locus relinquatur.*

XII. XIV.

Dvae rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

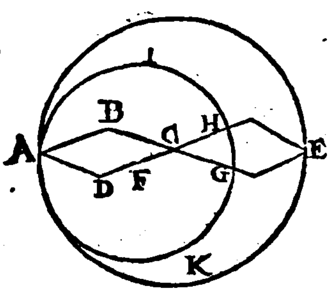
*Nullam prorsus habet difficultatem hoc principium: Si enim duæ rectæ lineæ ex vna parte coëant ad efficiendum angulum, necessariò ex altera parte semper magis ac magis disiungentur, si producantur, vt in exemplo proposito perspicuũ est. Quare vt superficies, spatiúmve quodpiam rectilineum ex omni parte concludatur, duabus rectis lineis tertia quadam adiungenda est. Ita enim conficietur spatium triangulare, seu figurarum rectilinearum prima. Proclus tamen demonstrat hoc principiũ, hoc modo: Si fieri potest, vt duæ lineæ rectæ claudant superficiem, comprehendant duæ rectæ A B C, A D C, superficiem A B C D, ita vt duæ illæ rectæ coëant in duobus punctis A, & C. Facto deinde centro C,[a] describatur circulus interuallo C A, [b] & producantur rectæ A B C, A D C, in rectum, & continuum vsque ad circunferentiam, nempe ad puncta E, & F. Itaque quia rectæ A C E, A C F, transeunt per centrum C, [c] erunt semicirculi A E, A E F, inter se æquales, & idcircò circunferentia quoque A E, circunferentiæ A E F, æqualis erit, pars toti, quod fieri non potest. Non ergo rectæ duæ lineæ spatium comprehendunt. Quod est propositum.*





a 3.petit.
b 2.petit.
c 17.defin.

*Sed quia fortassis aduersarius dicet, rectas A B C, A D C, productas coire iterũ in aliquo puncto circunferentiæ, vt in E, vel F, atque adeò non sequi, partem æqualem esse toti, demonstrabimus tunc idem Axioma hoc modo: Coëant ergo duæ illæ lineæ iterum, si fieri potest, in E. Sumpto puncto F, in recta A D C, quocunque, erit A F, minor, quàm F E, cùm minor sit, quàm A F C, hoc est, quàm C H E, quæ ipsi A F C, æqualis est, atque adeò multò minor, quàm F E. Circulus igitur ex F, ad interuallum F A, descriptus secabit rectam F E, in H, atque adeò C G E, in G. Quoniam igitur A F H, diameter circuli est, erit A I H, semicirculus, vt ad definit. 17. ostendimus: Portio autem A I G, quam aufert recta A B G, & in qua centrum non est, semicirculo minor, vt ad definit. 18. demonstrauimus. Est ergo circunferentia A I G, minor quàm A I H, pars q̃ totum, quod est absurdum. Quòd autem minor sit portio A I G, semicirculo, ostendemus, vt suprà. Nam ducta ex centro F, ad rectam A B G, perpendiculari & circunuoluta portione A I G, circa rectam A B G, cadet circunferentia A I G, intra circunferentiam A K G, ne pars maior sit quàm totum, vt suprà demonstrauimus.*

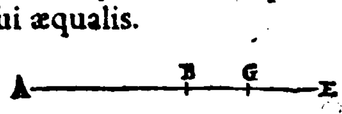


*Constat hoc etiam Axioma ex definitione lineæ rectæ. Cùm enim recta linea sit breuissima extensio ab vno puncto ad aliud, duci poterit vnica tantùm linea ab vno puncto ad aliud. Quare si A B C, recta est, non erit A D C, recta. Quod etiam patet ex definitione Platonis. Nam si A B C, est recta, obumbrabunt media illius extremitates eiusdem. Igitur media puncta lineæ A D C, non obumbrant extrema, cùm visus per rectam A B C, feratur. Non ergo recta est A D C.*

*His Axiomatis ab Euclide positis adiungemus nos nonnulla alia ex aliis Geometris decerpta, non minùs necessaria ad futuras demonstrationes Problematum atq; Theorematum cùm Euclidis, tum cæterorum Mathematicorum, quàm ea, quæ nobis tradidit Euclides.*

## XV.

Si æqualibus inæqualia adiiciantur, erit totorum excessus, adiunctorum excessui æqualis.



*Hoc, & sequens pronunciatum desumpsit Proclus ex Pappo. Aequalibus itaque quantitatibus A B, C D, addantur inæquales B E, D F, sitq; B E, maior quàm D F. Et ex B E, auferatur B G, æqualis ipsi D F, vt sit G E, excessus, quo quantitas addita B E, superat quantitatem additam D F. Quoniam igitur æqualibus A B, C D, addita sunt æqualia B G, D F,[d] erunt tota A G, C F, æqualia. Quare constat, totam quantitatem A E, superare totam C F, eodem excessu G E, quò magnitudo D F, adiuncta à magnitudine adiuncta B E, superatur. Quod est propositum.* d 2.pron.

## XVI.

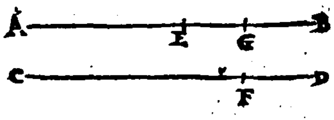
Si inæqualibus æqualia adiungantur, erit totorum excessus, excessui eorum, quę à principio erant, æqualis.

*In eadem figura, inæqualibus quantitatibus B E, D F, addantur æquales A B, C D. Et ex maiore B E, auferatur B G, æqualis ipsi D F, vt G E, sit excessus, quo quantitas B E, quantitatem D F, superat. Quo-*

a 2.pron. *niam igitur æqualibus B G, D F, addita sunt æqualia A B, C D, [a] erunt tota A G, C F, æqualia. Quamobrem tota quantitas A E, superabit totam C F, eodem excessu G E, quo maior quantitas proposita B E, minorem D F, superat. Quod est propositum.*

## XVII.

SI ab inæqualibus inæqualia demantur, erit residuorum excessus, excessui ablatorum æqualis.

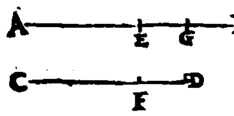


*AB æqualibus A B, C D, auferatur inæqualia B E, D F. Sitq; E G, excessus, quo quantitas B E, superat quantitatem D F; ita vt B G, æqualis sit ipsi D F. Quia igitur ab æqualibus A B, C D, ablata sunt æqualia*

b 3.pron. *B G, D F, [b] remanebunt A G, C F, æqualia. Perspicuum ergo est, residuum A E, superari à residuo C F, eodem excessu E G, quo magnitudo ablata B E, ablatam magnitudinem D F, superat. Quod est propositum.*

## XIIX.

SI ab inæqualibus æqualia demantur, erit residuorum excessus excessui totorum æqualis.



*AB inæqualibus A B, C D, auferatur æqualia A E, C F, Sitq; B G, excessus, quo tota quantitas A B, superat totam quantitatem C D, ita vt A G, æqualis sit ipsi*

c 3.pron. *C D. Quoniam igitur ab æqualibus A G, C D, ablata sunt æqualia A E, C F, [c] remanebunt E G, F D, æqualia. Quare residuum E B, superabit residuum F D, eodem excessu B G, quo tota quantitas A B, superat totam quantitatem C D. Quod est propositum.*

*IN his quoque quatuor proximè positis pronunciatis, nomine quantitatum æqualium intelligenda est vna etiam sola quantitas multis communis. Si enim eidem communi inæqualia adijciantur, erit totorum excessus adiunctorum excessui æqualis. Et si inæqualibus idem commune adiungatur, erit totorum excessus excessui eorum, quæ à principio erant, æqualis. Et si ab eodem communi inæqualia demantur, erit residuorum excessus excessui ablatorum æqualis. Et si ab inæqualibus idem commune dematur, erit residuorum excessus excessui totorum æqualis. Nam in numeris, si ad 6. addas 5. & 3. fiunt 11. & 9. quorum excessus est 2. idem qui ipsorum 5. & 3. Rursus, si ad 5. & 3. addas 6. fiunt 11. & 9. quorum excessus 2. idem est, qui ipsorum 5. & 3. Item si ex 8. demas 5. & 2. relinquuntur 3. & 6. quorum excessus 3. idem est, qui ipsorum 5. & 2. Denique si ex 10. & 7. demas 3. relinquuntur 7. & 4. quorum excessus 3. idem est, qui ipsorum 10. & 7.*

## XIX.

OMNE totum æquale est omnibus suis partibus simul sumptis.

*QVONIAM omnes partes simul sumptæ constituunt totum, cuius sunt partes, manifesta est veritas huius axiomatis.*

## XX.

SI totum totius est duplum, & ablatum ablati; erit & reliquũ reliqui duplum.

*VT quia totus numerus 20. duplus est totius numeri 10; Et ablatus ex illo 6. ablati ex hoc 3. propterea reliquus illius 14. duplus etiam est reliqui huius 7. In vniuersum autem hoc demonstrabitur propos. 5. lib. 5. nimirum. Si magnitudo magnitudinis æquè multiplex sit, atque ablata ablatæ, vt decupla, vel centupla, &c. & reliqua reliquæ æquè multiplex erit, atque tota totius.*

*COLLIGI potest ex dictis cum Proclo, & Gemino hoc discrimen, inter postulata, & Axiomata, quòd cùm vtraque sint per se nota, & indemonstrabilia, illa naturam sapiunt Problematum, propterea quòd aliquid fieri exposcant; hæc verò, Theoremata imitantur, cùm nihil fieri petant, sed solùm sententiam aliquam notissimam proponant. Differt autem Postulatum à problemate, quòd constructio postulati non indigeat vlla demonstratione, problematis autem constructionem concedat nemo sine demonstratione, eò quòd difficile aliquid nobis exhibeat construendum. Idem discrimen inter Axioma, & Theorema reperitur; Illud enim demonstrari non debet, hoc verò concedendum nulla est ratione, nisi demonstretur. Nam nemo huius propositionis demonstrationem, vel etiam probationem requiret. Quæ eidem æqualia, inter se quoque æqualia sunt. Huius autem statim demonstrationem desiderabit quis. Omnis trianguli tres anguli interni æquales sunt duobus rectis. Idem iudicium habeto de reliquis axiomatis, atque Theorematis, nec non de postulatis, problematisq;*

*CONSTAT quoque, Postulatorum alia propria esse Geometriæ, qualia sunt illa tria, quæ Euclides nobis proposuit; quædam verò communia, & Geometriæ, & Arithmeticæ, cuiusmodi est hoc, Quantitatem posse infinitè augeri. Tam enim numerus, quàm magnitudo, per additionem augeri potest, ita vt nunquam huius incrementi finis reperiatur. Idem dices de Axiomatis, siue pronunciatis. Nam octauum, decimum, vndecimum,*

decimum, duodecimum, tertiumdecimum, & quartumdecimum soli Geometriæ conueniunt; Reliqua verò omnia, adhibentur & ad demonstrationes Geometricas, & ad Arithmeticas. Quemadmodum enim magnitudines æquales ablatæ à magnitudinibus æqualibus, relinquunt magnitudines æquales, siue hæ magnitudines lineæ sint, siue superficies, siue corpora; ita quoque numeri æquales detracti è numeris æqualibus relinquunt numeros æquales, &c.

HAEC dicta à nobis sint de triplici hoc genere principiorum, nunc ad demonstrationes accedamus, ex quibus plenius, perfectiusq; principiorum omnium natura percipietur. Sunt enim plurima principia Mathematicorum eiusmodi, vt planè non intelligantur, nisi prius eorũ vsus appareat in demonstrationibus; id quod satis te experientia docebit.

ANTEQVAM porrò ad propositiones Euclidis interpretandas veniamus, paucis explicandũ est, quemnam ordinem, ac modum in ipsis demonstrationibus simus secuti. Primùm cuilibet propositioni duos numeros affiximus, quorum alter in margine depictus significat ordinem, quem Campanus ex traditione Arabum est secutus in Euclidis propositionibus, alter verò in ipsa propositionum serie descriptus refert dispositionem propositionum ex traditione Theonis, & quam adhuc obseruari cernimus in codicibus Græcis. Id verò eo consilio à nobis est factum: quoniam cùm à quibusdam Geometris propositiones Euclidis iuxta ordinem Campani, ab aliis verò iuxta Theonis seriem citentur, maximéque interdum duo hi interpretes inter se discrepent, in serie atque ordine propositionum, id quod maximè in 6.7. & 10. libro perspicitur; necessarium esse duximus, vt vtriusque interpretis numerus apponeretur. Ita enim fiet, vt si quando numerus propositionum à Geometra quopiam citatus non respondet alteri interpreti, alteri saltem conueniat. Deinde ne cursus demonstrationum interrumperetur, citauimus principia, & propositiones Euclidis in margine, præfixa cuilibet citationi semper literula aliqua alphabeti, vel alio quouis signo, cui similis literula, seu signum respondet in demonstratione, vt facilius cognoscatur, ad quem locum qualibet citatio sit referenda. Porrò citationes intelligendæ sunt hoc modo:

| | |
|---|---|
| 1. defin. | Prima definitio, & sic de aliis numeris, vt 4. defin. 23. defin. &c. |
| 1. petit. | Prima petitio, vel primum Postulatum. |
| 1. pronun. | Primum pronunciatum, seu axioma, & ita de reliquis numeris, vt prius. |
| 1. primi. | Prima propositio primi libri. |
| 23. Vndec. | Vigesimatertia propositio vndecimi libri. |
| 6. tertijdec. | Sexta tertijdecimi libri. |
| 9. sextidec. | Nona sextidecimi libri. |
| 13. duodec. | Decimatertia libri duodecimi. |
| 7. quindec. | Septima libri quindecimi. |
| 5. quartidec. | Quinta libri quartidecimi, &c. |

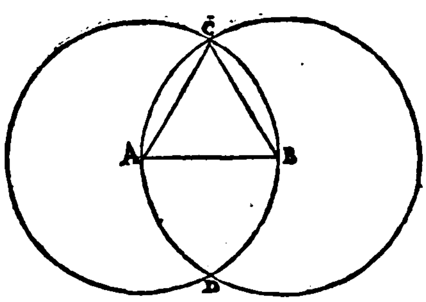
Ex his aliæ citationes à quolibet facilè poterunt intelligi. Eadem enim in omnibus est ratio.

# PROBLEMA I. PROPOSITIO I.

## SVPER data recta linea terminata triangulum Aequilaterum constituere.

IN omni problemate duo potissimùm sunt considerandæ, constructio illius, quod proponitur, & demonstratio, qua ostenditur, constructionem rectè esse institutam. Vt quoniam primum hoc problema iubet constituere triangulum æquilaterum super data recta linea terminata quacunque, ita vt linea recta proposita sit vnum latus trianguli, (Tunc enim figura dicitur constitui super recta linea, quando ipsa linea efficitur vnum figuræ latus) idcircò primùm oportet construere ex principiis concessis triangulum aliquod, deinde demonstrare, ipsum ea ratione constructum, esse æquilaterũ, hoc est, habere omnia tria latera inter se æqualia. Quod idem in aliis problematibus perspici potest. Hæc etiam duo reperiuntur ferè in omni Theoremate. Sæpenumerò enim vt demonstretur id, quod proponitur, construendum est, atq; efficiendum prius aliquid, ceu manifestum erit in sequentibus. Pauca verò admodum sunt theoremata, quæ nullam requirant constructionem.

SIT igitur proposita recta linea terminata AB, super quam constituere iubemur triangulum




a 3. petit. æquilaterum. Centro A, & interuallo rectæ A B, [a] describatur circulus C B D: Item centro B, & interuallo eiusdem rectæ B A, alius circulus describatur C A D, secans priorem in punctis C, & D. Ex quorum vtrouis, nempe
b 1. petit. ex C, [b] ducantur duæ rectæ lineæ C A, C B, ad puncta
c 20. definit. A, & B; [c] Eritque super rectam A B, constitutum triangulum A B C, hoc est, figura rectilinea contenta tribus rectis lineis. Dico, hoc triangulum ita constructum necessariò esse æquilaterum. Quoniam rectæ A B, A C, ducuntur ex centro A, ad circunferentiam circuli C B D, [d]
d 15. definit. erit recta A C, rectæ A B, æqualis: Rursus quia rectæ B C, B A, ducuntur ex centro B, ad circunferentiam circuli C A D, erit recta B C, rectæ B A, æqua-
e 1. pronun. lis. Tam igitur A C, quàm B C, æqualis est rectæ A B. [e] Quare & A C, B C, inter se æquales erũt, atque idcircò triangulum A B C, erit æquilaterum. Super data ergo recta linea terminata, &c. Quod faciendum erat.

## SCHOLIVM.

*VT autẽ videas, plures demonstrationes in vna propositione contineri, placuit primã hanc propositionem resoluere in prima sua principia, initio facto ab vltimo syllogismo demõstratiuo. Si quis igitur probare velit, triangulum A B C, constructum methodo prædicta, esse æquilaterum, vtetur hoc syllogismo demonstrante.*

a 23. defin. *Omne triangulum habens tria latera æqualia, [a] est æquilaterum.*

*Triangulum A B C, tria habet æqualia latera.*

*Triangulum igitur A B C, est æquilaterum.*

*Minorem confirmabit hoc alio syllogismo:*

b 1. pron. *Quæ eidem æqualia sunt, [b] inter se quoque sunt æqualia.*

*Duo latera A C, B C, æqualia sunt eidem lateri A B.*

*Igitur & duo latera A C, B C, inter se æqualia sunt. Ac propterea omnia tria latera A B, B C, æqualia existunt.*

*Minorem verò huius syllogismi hac ratione colliget:*

c 15. defin. *Lineæ rectæ à centro ductæ ad circunferentiam circuli, [c] inter se sunt æquales.*

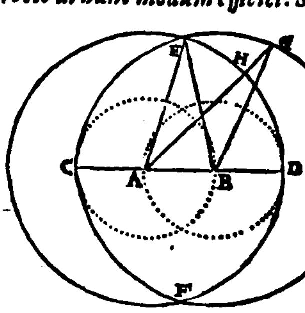
*Lineæ A B, A C, sunt ductæ à centro A, ad circunferentiam C B D.*

*Sunt igitur lineæ A B, A C, æquales inter se.*

*Eadémque ratione erunt lineæ A B, B C, æquales, cùm ducantur à centro B, ad circunferentiam C A D. Quamobrem minor præcedentis syllogismi tota confirmata erit.*

*Non aliter resolui poterunt omnes aliæ propositiones, non solùm Euclidis, verùm etiam cæterorum Mathematicorum. Negligunt tamen Mathematici resolutionem istam in suis demonstrationibus, eò quòd breuiùs, ac faciliùs sine ea demonstrent id, quod proponitur, vt perspicuũ esse potest ex superiori demonstratione.*

*SI quis autem super data recta desideret constituere triangulum quoque Isosceles, & scalenum, id cum Proclo in hunc modum efficiet. Sit recta linea A B, circa quam ex centris A, & B, describantur duo circuli, vti*




d 2. petit. *priùs. [d] Deinde producatur A B, in vtramque partem ad circunferen-*
e 3. petit. *tias vsq; ad puncta C, & D. Atque centro A, interuallo verò A D, [e] describatur circulus E D F. Item centro B, interuallo verò B C, circulus E C F, secans priorem in punctis E, & F. Ex quorum vtrolibet, nempe*
f 1. petit. *ex E, [f] ducantur ad puncta A, & B, duæ rectæ E A, E B. Factumq; erit*
g 20. defin. *super recta A B, [g] triangulum A B E; quod dico esse Isosceles, nimirum duo latera A E, B E, esse & æqualia inter se, et maiora latere A B. Cùm*
h 15. defin. *enim rectæ A E, A D, ducantur è centro A, ad circunferentiam E D F, [h] erit A E, æqualis rectæ A D. Item cùm rectæ B E, B C, ducãtur è centro*
i 15. defin. *B, ad circunferentiam E C F, [i] erit B E, æqualis rectæ B C: Sunt autem rectæ A D, B C, æquales inter se, (vtraque enim A C, & B D, æqualis est rectæ A B; cum A B, A C, ex eodem centro A, ad circunferentiam ducantur; Item B A, B D, ex eodem centro B, ad circunferẽtiam quoque egrediantur.*
k 1. pron. *tur. [k] Quare A C, B D, æquales inter se erunt. Addito igitur communi recta A B, [l] erit tota A D, toti B C, æqua-*
l 2. pronun. *lis.) [m] Igitur A E, B E, æquales quoq; inter se erunt. Quòd verò vtraque A E, B E, maior sit, quàm A B, perspi-*
m 1. pron. *cuum est, cùm A D, æqualis ostensa ipsi A E, [n] maior sit, quàm A B; Item B C, æqualis demonstrata ipsi B E, [o]*
n 9. pron. *maior quoque sit, quàm A B. Constitutum igitur est super recta A B, Isosceles A B E, habens duo latera A E,*
o 9. pron. *B E, æqualia inter se, & maiora latere A B, quod faciendum erat. Atq; hæc est demonstratio Procli, aliorúmque interpretum Euclidis.*
p 15. defin. *BREVIVS tamen videtur mihi posse demonstrari, triangulum A B E, esse Isosceles, hac ratione. [p] Quoniam A E, æqualis est rectæ A D, & recta A D, est dupla rectæ A B, propterea q. B A, B D, æquales inter se sunt;*
q 15. defin. *erit & A E, dupla rectæ A B. Rursus [q] quia B E, æqualis est rectæ B C, & B C, dupla est ipsius A B, propterea*
r 15. defin. *q. [r] A B, A C, æquales sunt inter se, erit & B E, dupla ipsius A B. Cùm igitur vtraq; A E, B E, dupla sit eiusdem*
s 6. pron. *A B, [s] erunt A E, B E, inter se æquales, maioresq; propterea recta A B. Isosceles ergo est triangulum A B E.*

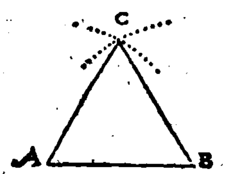
IAM

*IAM verò, si ex puncto A, [a] ducatur linea recta A G, ad circunferentiam E G F, quæ non sit eadem quæ A E, vel A D, secans circunferẽtiam E H D, in puncto H, & ex G, ad B, [b] ducatur alia recta G B, [c] constitutum erit triangulum A B G, super recta A B, quod dico esse scalenum. [d] Quoniam A G, maior est, quàm A H: [e] Sunt autem A H, A E, ex centro A, ducta, inter se æquales; erit & A G, maior quàm A E, hoc est, quàm B E, quæ ostensa est æqualis ipsi A E; igitur & maior erit A G, quàm B G, [f] cùm B G, sit æqualis ipsi B E. Est autem & B G, maior, quàm A B, quòd tota B C, æqualis ipsi B G, [g] maior sit, quàm A B, pars. Omnia ergo tria latera trianguli A B G, inæqualia sunt, ideoq; scalenum est ex definitione; quod erat faciendum.* a 1. petit. b 1. petit. c 20. defin. d 9. pron. e 15. defin. f 15. defin. g 9. pron.

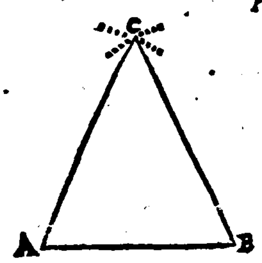
*BREVIVS quoq; ostendemus, triangulum A G B, esse scalenum, hac ratione. Quoniam tam [h] A H, A D, ex centro A, ducta, sunt æquales, quàm B G, B C, ex centro B, ducta: Sunt autem A D, B C, ipsius A B, dupla, quòd A B, vtrique B D, A C, æqualis sit; erunt quoque A H, B G, ipsius A B, dupla, ac propterea maiores, quàm A B. Cùm ergo [i] A G, maior sit, quàm A H, siue quàm B G, scalenum erit triangulum A G B, habẽs latus A G, maximum, B G, medium, & A B, minimum.* h 15. defin. i 9. pron.

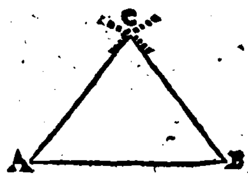
## PRAXIS.

*CONABIMVR in singulis ferè problematibus Euclidis tradere praxin quandam facilem, & breuem, qua effici possit id, quod Euclides pluribus verbis, atq; lineis contendit construere; Idq; in ijs præsertim obseruabimus, quæ frequentiorem vsum habent apud Mathematicos, & in quibus praxis compendium aliquod secum videtur afferre.*

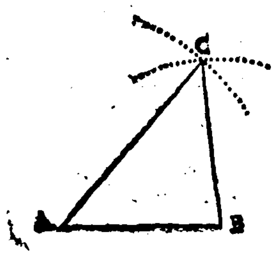


*ITAQVE triangulum æquilaterum ita facilè construetur super data recta A B. Ex centris A, & B, interuallo verò data recta A B, describantur duo arcus circulorum se interfecantes in puncto C, siue hoc infra lineam contingat, siue supra. Post hac ducantur duæ rectæ A C, B C, ex puncto C, ad puncta A, & B, factumq; erit, quod proponitur. Cuius rei eadem est demonstratio cum superiori, si modò circuli essent integri, ac perfecti. Transirent enim necessariò per puncta A, & B.*





*ISOSCELES ita conficietur. Ex centris A, & B, interuallo verò maiore, quàm A B si data rectam esse velimus minus latus; vel minore, si eandem in latus maius eligamus, describantur duo arcus secantes se in C. Postea ducantur rectæ A C, & B C; constructúmque erit Isosceles: quoniam A C, B C, æquales erunt propter æquale interuallum assumptum, maius scilicet aut minus, quàm recta A B.*

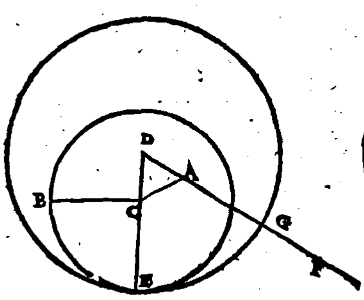


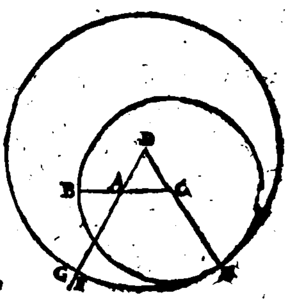
*SCALENVM denique hoc modo fabricabitur super data recta A B. Ex centro B, interuallo verò maiore, quàm B A, describatur arcus aliquis: Item ex centro A, interuallo verò adhuc maiore, quàm priùs assumptum, describatur alter arcus priorem secans in C. Deinde ducantur rectæ A C, B C; constitutúmque erit Scalenum, vt constat ex inæqualitate interuallorum, quæ assumpta fuerunt ex constructione.*

*CAETERVM quo pacto triangulum constitui debeat, habens tria latera æqualia tribus datis lineis quibuscunque, singula singulis, latiùs explicabimus propofit. 22. huius libri.*

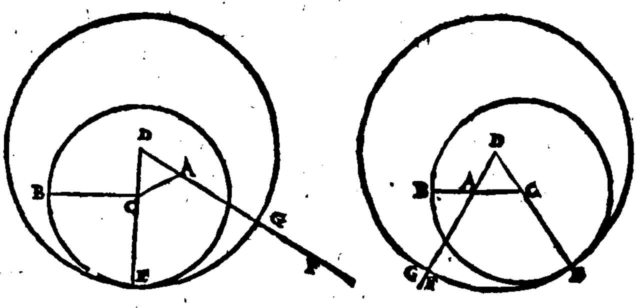
# PROBL. 2. PROPOS. 2. 2.

AD datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.





SIT punctum datum A, & data recta linea B C, cui aliam rectam æqualem ponere oportet ad punctum A. Facto alterutro extremo lineæ B C, nempe C, centro [a] describatur circulus B E, interuallo rectæ B C. Et ex A, ad centrum C, [b] recta ducatur A C; (nisi punctum A, intra rectam B C, fuerit: Tunc enim pro linea ducta sumetur A C, vt secunda figura indicat.) Super recta verò A C, [c] construatur triangulum æquilaterum A C D, sursum, aut deorsum versus, vt libuerit; cuius duo latera modò constituta D A, D C, versus rectam A C, [d] extendantur; D C, quidem opposita puncto dato A, vsque ad circunferentiam in E; D A, verò opposita centro C, quantumlibet in F. Deinde centro D, interuallo verò rectæ D E, per C, centrum transeuntis, [e] alter cir- a 3. petit. b 1. petit. c 1. primi. d 2. petit. e 3. petit.




culus describatur E G, secans rectam D F, in G. Dico rectam A G, quæ posita est ad punctum datum A, æqualem esse datæ rectæ B C. Quoniam D E, D G, ductæ sunt ex centro D, ad circunferētiam E G,[a] ipsæ inter se æquales erunt: Ablatis igitur D A, D C, æqualibus lateribus trianguli æquilateri A C D,[b] remanebit A G, æqualis rectæ C E. Sed eidem C E,[c] æqualis est recta B C. (cùm ambæ rectæ C B, C E, cadant ex centro C, ad circunferentiam B E.) Igitur rectæ A G, B C, quandoquidem vtraque æqualis est ostensa rectæ C E, inter se[d] æquales erunt. Ad datum igitur punctum, &c. quod erat faciendum.

a 15. definit. b 3. pronun. c 15. definit. d 1. pronun.

QVOD si punctum datum fuerit in extremo datæ lineæ, quale est C, facilè absoluetur problema. Si enim centro C, & interuallo C B,[e] describatur circulus, ad cuius circunferētiam recta[f] ducatur vtcunque C E, erit hæc posita ad punctum datum C,[g] æqualis datę rectæ B C, cum vtraque & B C, & C E ex eodem centro egrediatur ad circunferentiam B E.

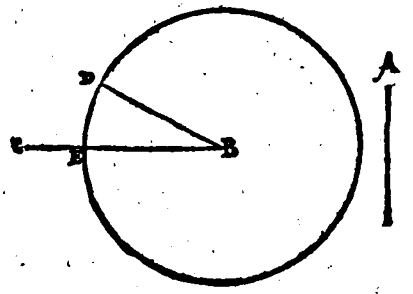
e 3. petit. f 1. petit. g 15. definit.

*SCHOLIVM.*

*HVIVS problematis varij esse possunt casus, vt ait Proclus. Aut enim datū punctū in ipsa data recta est positum, aut extra ipsam: Si in ipsa, erit vel alterum extremorū eius, vel inter vtrumque iacebit extremum. Si verò extra ipsam, erit vel è directo datæ lineæ, ita vt producta in rectum, & continuum per ipsum punctum transeat; vel non è directo, ita vt ab ipso ad datæ lineæ extremorum quoduis recta linea ducta cum data recta angulum efficiat; quo modo vel supra datam lineam erit constitutum, vel infra, vt manifestum est. In omnibus autem istis casibus semper eadem est constructio, & demonstratio. Quòd si in constructione fiat triangulum A C D, super recta A C, Isosceles, eodem modo ostendemus, rectam A G, rectæ B C, æqualem esse.*

## 3. PROBL. 3. PROPOS. 3.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, de maiore æqualem minori rectam lineam detrahere.




SINT duæ rectæ inæquales A, minor, & B C, maior, oporteatq; ex maiore B C, detrahere lineam æqualem minori A. Ad alterutrum extremorum lineæ maioris B C, nempe ad punctum B,[h] ponatur aliqua linea, quæ sit B D, æqualis minori A. Deinde centro B, interuallo autem B D, circulus[i] describatur secans B C, in E. Dico B E, detractam esse æqualem ipsi A. Quoniam B E,[k] æqualis est rectæ B D, & eidem B D, æqualis est recta A, p constructionem;[l] erunt A, & B E, inter se æquales. Duabus igitur datis rectis, &c. quod erat faciendum.

h 2. primi. i 3. petit. k 15. definit. l 1. pronun.

QVOD si duæ rectæ datæ coniungantur in vno extremo, quales sunt B D, & B C, coniunctæ in extremo vtriusque B; describēdus erit circulus ex B, ad interuallū minoris B D. Hic enim auferet B E, æqualem ipsi B D, vt constat ex definitione circuli.

*SCHOLIVM.*

*VARIOS etiam posse casus esse in hoc problemate, nemo ignorat, cùm duæ lineæ inæquales datæ vel inter se distent, ita vt neutra alteram contingat; vel non, sed vel coniungantur ad vnum extremum, vel se mutuò secent, vel certè altera alteram suo extremo tangat duntaxat, &c. de qua re lege Proclum hoc in loco.*

## 4. THEOREMA 1. PROPOS. 4.

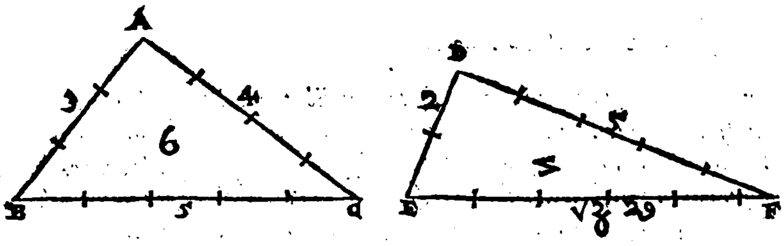
SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, vtrumque vtrique; habeant verò & angulum angulo æqualem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basim basi æqualem habebunt; eritque triangulum triangulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, vterque vtrique, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

SINT duo triangula A B C, D E F, & vnius vtrumque latus A B, A C, æquale sit alterius vtrique lateri D E, D F, hoc est, A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F; angulusque A, contentus lateribus A B, A C, æqualis angulo D, contento lateribus D E, D F. Dico basim B C, æqualem quoque esse basi E F; & triangulum A B C, triangulo D E F; & vtrumque angulum B, & C, vtrique angulo E, & F, id est,

Id eſt, angulos B, & E, qui opponuntur lateribus æqualibus A C, D F, inter ſe; & angulos C, & F, qui opponuntur æqualibus lateribus A B, D E, inter ſe quoque eſſe æquales. Quoniam e-
nim recta A B, rectæ D E, ponitur æqualis, fit, vt ſi altera alteri ſuperponi intelligatur, colloca-
to puncto A, in puncto D, [a] ipſæ ſibi mutuò congruant, punctumque B, in punctum E, cadat. Ne- a 8. pronun.
que enim dicere quis poterit, partem rectæ A B, rectæ D E, congruere, & partem non, quia tunc
duæ rectæ haberent idem ſegmentum commune, [b] quod eſt impoſsibile. Quòd ſi quis dicat, po- b 10. pron.
ſito puncto A, in D, cadere quidem punctum B, in E, ſed rectam A B, cadere vel ad dextram, vel ad
ſiniſtram D E, claudent duæ rectæ lineæ ſuperficiem. [c] quod fieri non poteſt. Quare recta A B, re- c 14. pron.
ctæ D E, congruet, vt dictũ eſt. Cùm ergo angulus A, angulo D, ponatur æqualis, [d] congruet quo- d 8. pronun.
que alter alteri, hoc eſt, recta A C, rectæ D F, congruet, punctumque C, in punctum F, cadet, ob æ-
qualitatem rectarum A C, D F. Baſis igitur B C, baſi E F, congruet quoque: aliâs ſi ſuprà caderet,
aut infrà, vt efficeretur recta E G F, vel E H F, clauderent duæ rectæ E F, E G F; vel E F, E H F, ſu-
perficiem, (negare enim nemo poterit, tam E G F, quàm E H F, rectam eſſe, cùm vtraque pona-
tur eſſe eadem, quæ recta B C.) quod eſt abſurdum. Duæ enim rectæ ſuperficiem [e] claudere non e 14. pron.
poſſunt. Quocirca [f] baſis B C, baſi E F, æqualis erit, cùm neutra alteram excedat; & triangulum f 8. pronun.
A B C, triangulo D E F; & angulus B, angulo E; & angulus C, angulo F, æqualis, ob eandem cau-
ſam, exiſtet. Quare ſi duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, &c. Quod de-
monſtrandum erat.

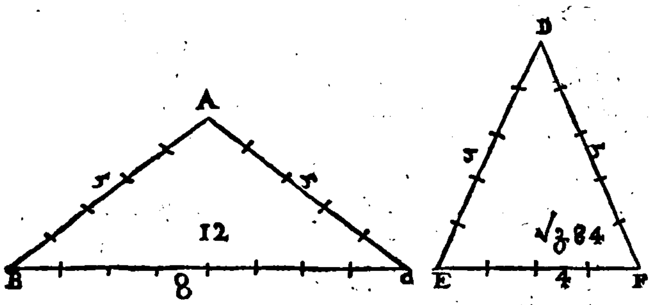
## *SCHOLIVM.*

*RECTE Euclides duas conditiones poſuit in antecedente huius theorematis, quarum prima eſt, vt duo latera vnius trianguli æqualia ſint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumque vtrique; Secunda, vt angulus etiam vnius contentus illis lateribus æqualis ſit angulo alterius contento lateribus, quæ iſtis ſunt æqualia. Deficiente enim alterutra harum conditionum, neque baſes, neque reliqui anguli poterunt vnquam eſſe æquales, vt probè hoc loco à Proclo demonſtratur: Triangula verò ipſa licèt poſſint eſſe æqualia, poſteriore duntaxat conditione deficiente, vt ex ſcholio propoſit. 37. huius libri conſtabit, tamen rarò admodum illud contingit. Sint enim triangulorum A B C, D E F, anguli A, & D, æquales, nempe recti; & latera A B, A C, æqualia lateribus D E, D F, non quidem vtrumque vtrique, ſed*



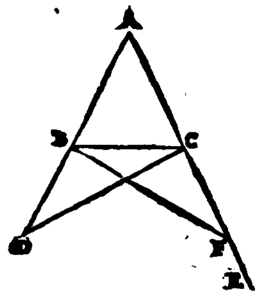

*illa ſimul ſumpta hiſce ſimul ſumptis, ſitq; A B, 3. A C, 4. vt ambo ſimul efficiant 7. At verò D E, ſit 2. & D F, 5. vt ambo quoque ſimul 7. conſtituant. Quibus poſitis, erit baſis B C, 5. & baſis E F, radix quadrata huius numeri 29. quæ maior quidem eſt, quàm 5. minor autem, quàm 6. Item area trianguli A B C, erit 6. area verò trianguli D E F, 5. Anguli denique ſuper baſim B C, inæquales erunt angulis ſuper baſim E F. Quæ quidem omnia ita eſſe, hic oſtenderemus, niſi ad eorum demonſtrationem requirerentur multa, quæ nondum ſunt confirmata. Vides igitur omnia inæqualia eſſe, propterea quòd non vtrunque latus vtrique lateri æquale exiſtit in dictis triangulis A B C, D E F.*

*RVRSVS triangulorum A B C, D E F, latera A B, A C, æqualia ſint lateribus D E, D F, vtrumque vtrique, ſitq; vnumquodq; 5. anguli verò A, & D, contenti dictis lateribus inæquales, ſitq; A, maior, quàm D. Quibus conceſſis, erit baſis B C, maior baſe E F, vt propoſit. 24. huius libri oſtendetur. Quòd ſi baſim B C, ponamus eſſe 8. baſim autẽ E F, 4. erit area trianguli A B C, 12. area verò trianguli D E F, radix quadrata huius numeri 84. quæ maior quidem eſt, quàm 9. minor verò, quàm 10. id quod notiſſimum eſt Geometris. Vt igitur duorum triangulorum & baſes, & anguli, nec non triangula ipſa æqualia inter ſe ſint, neceſſe eſt, vt vtrumque latus vnius æquale ſit vtrique lateri alterius, & anguli quoque dictis lateribus contenti æquales exiſtant, vt optimè dixit Euclides.*




# THEOR. 2. PROPOS. 5.

ISOSCELIVM triangulorũ, qui ad baſim ſunt, anguli inter ſe ſunt æquales; Et productis æqualibus rectis lineis, qui ſub baſi ſunt, anguli inter ſe æquales erunt.

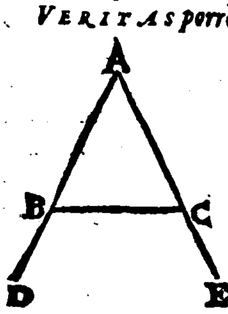



Sit triangulum Isosceles A B C, in quo duo latera A B, A C, inter se sint æqualia. Dico angulos A B C, A C B, supra basim B C, æquales inter se esse: Item si latera æqualia A B, A C, producantur quantum libuerit, vsque ad puncta D, & E, angulos quoque D B C, E C B, infra basim eandem B C, esse æquales. Ex linea enim A E, producta infinite [a] abscin-
a 3 primi. datur A F, æqualis ipsi A D, [b] & ducantur rectæ B F, C D. Consideren-
b 1.petit. tur deinde duo triangula A B F, A C D. Quia ergo duo latera A B, A F, trianguli A B F, æqualia sunt duob⁹ lateribus A C, AD, trianguli A C D, vtrumque vtrique, nempe A B, ipsi A C, ex hypothesi, & A F, ipsi A D, ex constructione; angulusque A, contentus lateribus A B, A F, æqualis est angulo A, contento lateribus A C, A D, immò angulus A, commu-
c 4.primi. nis est vtrique triangulo: [c] Erit basis B F, æqualis basi C D; & angulus F, angulo D; & angulus A B F, angulo A C D: cùm & priores duo, & posteriores opponantur æqualibus lateribus in dictis triangulis, vt patet. Rursus considerentur duo triangula B D C, C F B. Quoniam verò rectæ A D,
d 3.pronun. A F, æquales sunt, per constructionem, fit vt, si auferantur ex ipsis æquales A B, A C, [d] & reliquæ B D, & C F, sint æquales. Quare duo latera B D, D C, trianguli B D C, æqualia sunt duobus lateribus C F, F B, trianguli C F B, vtrumque vtrique, videlicet B D, ipsi C F, & D C, ipsi F B, vt probatum est: Sunt autem & anguli D, & F, contenti dictis lateribus æqualibus æquales, vt ostensum
e 4.primi. etiam fuit. Igitur erit angulus [e] D B C, angulo F C B, æqualis; & angulus B C D, angulo C B F. Tam enim priores duo, quàm posteriores, æqualibus opponuntur lateribus, existuntq; supra communem basim B C, vtriusque trianguli B D C, C F B. Quòd si ex totis angulis æqualibus A B F, A C D, (quos æquales esse iam demonstrauimus in prioribus triangulis) detrahantur anguli æ-
f 3.pronun. quales C B F, B C D, (quos itidem in posterioribus triangulis modò probauimus esse æquales) [f] remanebunt anguli A B C, A C B, supra basim B C, æquales: Ostensum est autem in posterioribus triangulis, & angulos D B C, F C B, qui quidem sunt infra eandem basim B C, esse æquales. Igitur & anguli supra basim inter se, & anguli infra eandem inter se sunt æquales; Ac propterea Isoscelium triangulorum, qui ad basim sunt, anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

## *SCHOLIVM.*

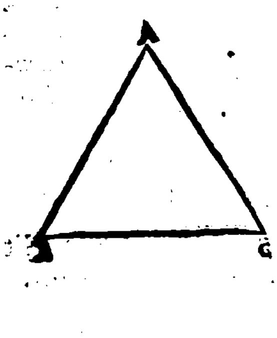
*Hæc propositio vera etiam est in triangulis æquilateris, cùm in quolibet reperiantur duo latera inter se æqualia, licèt eam Euclides solis Isoscelibus triangulis videatur accommodasse. Existentibus enim duobus lateribus A B, A C, trianguli A B C, æqualibus, siue reliquum latus B C, ipsis quoque sit æquale, vt contingit in triangulo æquilatero, siue inæquale, vt in Isoscele accidit, necessariò consequitur, & angulos supra basim inter se, & angulos infra eandem inter se quoque esse æquales, vt constat ex demonstratione prædicta. Solet autem theorema hoc tyronibus subdifficile, & obscuriusculum videri, propter multitudinem linearum, & angulorum, quibus nondum sunt assueti. Veruntamē, si diligenter theorematis præcedentis vis ac demonstratio ponderetur, non multo labore hoc, quod præ manibus habemus, à quolibet percipietur, si modò memor sit, illos angulos triangulorum probari æquales esse, in antecedenti theoremate, qui æqualibus lateribus opponuntur. Quod quidem quoniam Campanus non apposuit, causa fuit, vt confusa esse videatur, & subobscura eius demonstratio.*

*Veritas porrò huius theorematis, quoad vtramque partem, facilè quoque demonstrari potest per superpositionē, vt demonstrata fuit propositio 4. Sint enim rursum in triangulo A B C. duo latera æqualia A B, A C, quæ producantur quantùlibet vsq; ad D, & E. Dico tam angulos, A B C, A C B, supra basim B C, inter se æquales esse, q̃ angulos D B C, E C B, infra eandem basim. Si enim concipiamus mēte triangulum A B C, triangulo A C B. (ita vt idem triangulum sit instar duorum) superponi, ita vt recta A B, rectæ A C, superponatur, cadet punctum B, in C, ob æqualitatem laterum A B, A C. Quo posito cadet recta A C, super rectam A B, ob æqualitatem, siue identitatem anguli A; atq; punctum C, in punctum B, incidet, propter æqualitatem laterum A C, A B. Quapropter angulus A B C, angulo A C B, & angulus D B C, angulo E C B, congruet, [a] ac proinde tam illi, quàm hi inter se æquales erunt.*




a 8.pron.

## COROLLARIVM.



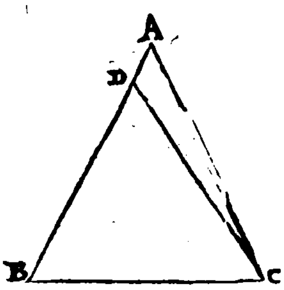

*Ex hac propositione quinta liquet, omne triangulum æquilaterum esse æquiangulum quoq;: Hoc est, tres angulos cuiuslibet trianguli æquilateri esse inter se æquales. Sit enim triangulum æquilaterum A B C. Quoniam igitur duo latera A B, A C, sunt æqualia. [b] erunt duo anguli B, & C, æquales. Item quia duo latera A B, B C, sunt æqualia, erunt & anguli C, & A, æquales. Quare omnes tres A, B, & C, æquales erunt. Quod ostendendum erat.*

b 5.primi.

THEOR.

# THEOR. 3. PROPOS. 6. 6.

Si trianguli duo anguli æquales inter se fuerint: & sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.

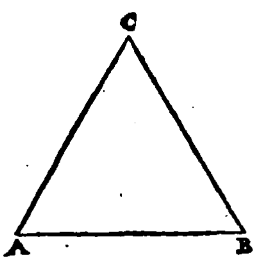


In triangulo A B C, sint duo anguli A B C, A C B, super latus B C, æquales. Dico duo latera illis opposita A B, A C, esse quoque æqualia. Si enim non credantur æqualia, existentibus nihilominus angulis dictis æqualibus, erit alterum maius altero; sit igitur A B, maius quàm A C, si fieri potest: Et ex A B, [a] abscindatur in D, recta B D, æqualis rectæ A C, (quæ minor dicitur esse, quàm A B,) ducaturq; recta C D. *a 3. primi.* Considerentur iam duo triangula A C B, D B C. In quibus cùm duo latera A C, C B, trianguli A C B, æqualia sint duobus lateribus D B, B C, trianguli D B C, vtrumque vtrique, nempe A C, ipsi D B, (abscidimus enim ex A B, ipsi A C, concessu aduersarij, æqualem D B,) & C B, ipsi B C, cùm sit vnũ & idem; Sint autẽ & anguli A C B, D B C, contenti dictis lateribus æquales, per hypothesin: [b] Erunt triangula A C B, D B C, æqualia, totũ, & pars, quod fieri non potest. *b 4. primi.* Non igitur erunt latera A B, A C, inæqualia, si anguli B, & C, super latus B C, æquales sunt, ne totum parti æquale esse concedamus: sed æqualia existent. Quare si trianguli duo anguli, &c. Quod demonstrandum erat.

## SCHOLIVM.

*Convertit hoc theorema primam partem præcedentis. Nam ibi demonstratum est, si duo latera trianguli inter se æqualia fuerint, angulos, qui ad basim sunt, esse quoque æquales: Hic verò, si anguli ad basim sint æquales, latera quoque angulis illis opposita esse æqualia. Non autem mirum alicui debet videri, si Mathematici interdum conuertunt propositiones, ita vt nunc ex antecedente quopiam concesso colligant per demonstrationem consequens aliquod, nunc verò rursus ex consequente hoc concesso inferant per aliam demonstrationem antecedens illud, vt ab Euclide in hisce duabus proximis propositionibus factum esse conspicimus: Non debet, inquam, videri mirum, quoniam non semper in rebus Mathematicis reciprocantur antecedens & consequens. Nam in propositionibus necessariis, quales sunt propositiones Geometricæ, potest interdum prædicatum esse vniuersalius subiecto, vt cum Dialecticis loquamur. Quare tunc non poterit conuerti propositio. Nam necessaria est hæc propositio; (Omnis homo est animal.) non tamen conuerti potest vniuersaliter, cùm non omne animal sit homo. Ita quoque fieri potest in propositionibus Geometricis necessariis: Cuius ego rei vnum duntaxat nunc exemplum tale in medium proferam. Demonstrat Euclides proposit. 16. huius libri. Si trianguli cuiusuis vnum latus producatur, angulum externũ maiorem esse duobus internis sibi oppositis; In qua quidem propositione nullo modo antecedens, & consequẽs reciprocantur. Non enim sequitur, si figura cuiusuis rectilinea, vno latere producto, angulus externus maior sit singulis internis oppositis, figuram illam esse triangulum, cùm possit etiam esse quadrilatera figura, vt ad proposit. 16. huius libri ostendemus. Eodemq; modo multa alia propositiones conuerti nequeũt. Quã ob rem necesse est, vt priùs demonstret Geometra propositionem aliquam conuerti, hoc est, antecedens & consequens illius reciprocari, antequam ex consequente concesso colligat antecedens. Non conuertit autem Euclides omnes propositiones, quæ conuerti possunt, sed eas duntaxat, quarum conuersione maximè indiget: Nos tamen dabimus operam, vt ferè omnes illas conuertamus, quæ aliquam videbuntur afferre vtilitatem.*

## COROLLARIVM.



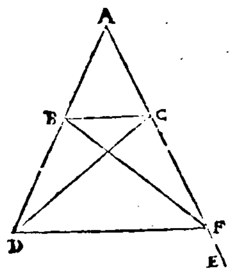
*Seqvitvr ex hac propositione, omne triangulum æquiangulum, id est, cuius omnes anguli sunt æquales, esse æquilaterum. Quod quidem conuersum est corollarij quintæ propositionis, vt liquet. Sint enim trianguli A B C, tres anguli æquales. Dico ipsum esse æquilaterum. Cùm enim duo anguli B, & C, sint æquales, [a] erunt latera A B, A C, æqualia. Rursus cùm duo anguli A, & B, sint æquales, erunt quoque latera A C, B C, æqualia, & idcircò omnia tria latera A B, B C, A C, æqualia. Quod ostendendum erat.* a 6. primi.

## EX PROCLO.

*Licebit nobis etiam conuertere secundam partem quintæ propositionis, hoc modo.*

Si trianguli cuiuslibet productis duobus lateribus, anguli infra basim fiant æquales, & duo latera illa æqualia inter se erunt.

*Trianguli enim A B C, productis lateribus A B, A C, ad D, & E, fiant anguli D B C, E C B, infra basim B C, æquales. Dico latera A B, A C, esse quoque inter se æqualia. Ex C E, quantumlibet producta [b] abscin-* b 3. primi.




*datur C F, æqualis ipsi B D, & ducantur rectæ B F, F D, D C. Consideretur deinde triangula D B C, F C B. In quibus cùm latera D B, B C, æqualia sint lateribus F C, C B, vtrumque vtrique, nempe D B, ipsi F C, per constructionem, & B C, ipsi C B, quod sit vnum & idem: sint autem & anguli D B C, F C B, dictis lateribus contenti æquales, per hypothesim:*

a 4. primi.

*[a] erunt & bases C D, B F, & anguli B C D, C B F, super has bases, cùm opponantur æqualibus lateribus B D, C F, æquales. Ablatis igitur hisce angulis æqualibus B C D, C B F, ex angulis F C B, D B C, per hypothesin æqualibus,*

b 3. pron.

*[b] remanebunt anguli F C D, D B F, æquales. Considerentur rursus triangula D B F, F C D. In quibus quoniam latera D B, B F, æqualia sunt lateribus F C, C D, vtrumque vtrique, nempe D B, ipsi F C, per constructionem, & B F, ipsi C D, vt modò ostensum est; Sunt autem & anguli contenti dictis lateribus D B F, F C D, æquales, vt etiam fuit nuper demonstratum:*

c 4. primi.

*[c] Erit angulus B D F, super basim D F, trianguli D B F, æqualis angulo C F D, super eandem basim F D, trianguli F C D. Hi enim æqualibus lateribus opponuntur. Cùm igitur in triangulo A D F, duo anguli A D F, A F D, sint æquales, vt nunc ostendimus,*

d 6. primi.

*[d] erunt latera A D, A F, æqualia. A quibus si rectæ B D, C F, per constructionem, æquales demantur,*

e 3. pron.

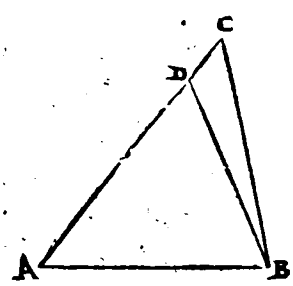
*[e] remanebunt A B, A C, latera trianguli A B C, æqualia. Quod erat ostendendum.*

7.

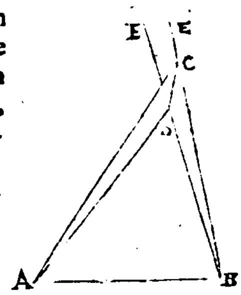
## THEOR. 4. PROPOS. 7.

SVPER eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, non constituentur, ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

SVPER recta A B, constituantur ad punctum quoduis C, duæ rectæ lineæ A C, B C. Dico super eandem rectam A B, versus partem eandem C, non posse ad aliud punctum, vt ad D, constitui duas alias rectas lineas, quæ sint æquales lineis A C, B C, vtraq; vtrique, nempe A C, ipsi A D, quæ eundem habent terminum A; & B C, ipsi B D, quæ eundem etiam terminũ possident B. Sint enim, si fieri potest, rectę A C, A D, inter se, & rectæ B C, B D, inter se etiam æquales. Aut igitur punctum D, erit in alterutra rectarum A C, B C, ita vt recta A D, in ipsam rectam A C, vel B D, in ipsam B C, cadat; aut intra triangulum A B C; aut extra.




SIT primò punctum D, in altera rectarum A C, B C, nempe in A C, vt A D, sit pars ipsius A C. Quoniam igitur rectæ A C, A D, eundẽ terminum A, habentes, dicuntur æquales, erit pars A D, toti A C, æqualis, quod fieri non potest.



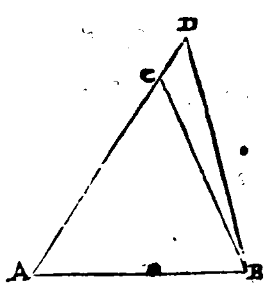

SIT deinde punctum D, intra triangulum A B C, & ducta recta C D, producantur rectæ B C, B D, vsque ad E, & F. Quoniam igitur in triangulo A C D, ponuntur latera A C, A D, æqualia,

a 5. primi.
b 9. pron.

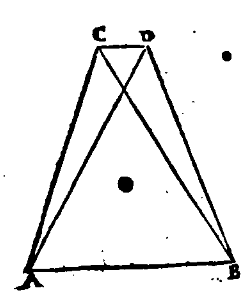
[a] erunt anguli A C D, A D C, super basim C D, æquales; [b] Est autem angulus A C D, minor angulo D C E; nempe pars toto: Igitur & angulus A D C, minor erit eodem angulo D C E. Quare angulus C D F, pars ipsius A D C, multò minor erit eodem angulo D C E. Rursus, quia in triangulo B C D, latera B C, B D, ponuntur æqualia,

c 5. primi.

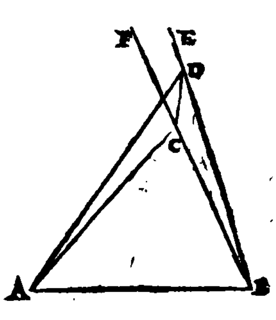
[c] erũt anguli C D F, D C E, sub basi C D, æquales. Ostensum autem fuit, quòd idem angulus C D F, multò sit minor angulo D C E. Idem ergo angulus C D F, & minor est angulo D C E, & eidem æqualis, quod est absurdum.




SIT postremò punctum D, extra triangulum A B C. Aut igitur in tali erit loco, vt vna linea super alteram cadat, vt in priori figura, dummodò loco D, intelligas C, & loco C, ipsum D; ex quo rursus colligetur pars æqualis toti, quod est absurdum.




AVT in tali erit loco, vt posteriores duæ lineæ ambiant priores duas, ceu in posteriori figura, si modo loco D, iterum intelligas C, & D, loco C. Quo posito, in idem absurdum incidemus, nempe angulum D C F, & minorem esse angulo C D E, & eidem æqualem, vt perspicuum est.




AVT denique punctum D, ita erit extra triangulum A B C, vt altera linearum posteriorum, nempe A D, secet alteram priorũ, vt ipsam B C. Ducta igitur recta C D, cùm in

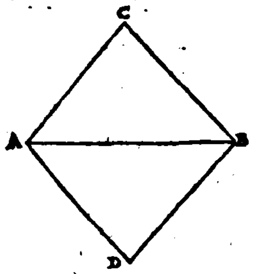
triangulo

triangulo A C D, latera A C, A D, ponãtur æqualia, [a] erunt anguli A C D, A D C, ſupra baſim C D, æquales: Ac proinde [b] cũ angulus A D C, minor ſit angulo B D C, pars toto, erit & angulus A C D, minor eodem angulo B D C. Quare multò minor erit angulus B C D, pars anguli A C D, angulo eodem B D C. Rurſus, cùm in triangulo B D C, latera B C, B D, ponantur æqualia, [c] erunt anguli B C D, B D C, ſuper baſim C D, æquales: Eſt autem iam oſtenſum, angulum B C D, multò eſſe minorem angulo B D C. Idem igitur angulus B C D, & minor eſt angulo B D C, & eidem æqualis, quod eſt abſurdum. Non ergo æquales ſunt inter ſe A C, A D, & inter ſe quoque B C, B D. Quare ſuper eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis, &c. Quod erat demonſtrandum.

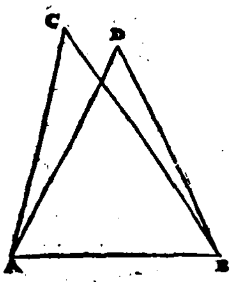
a 5. primi.
b 9. pronun.
c 5. primi.

*SCHOLIVM.*

*FIERI poteſt, vt duæ lineæ A D, B D, æquales ſint duabus A C, B C, vtraque vtrique, vt A D, ipſi B C, & B D, ipſi A C, vt vltima figura indicat. Verùm hoc modo non egrediuntur ab eodem puncto lineæ illæ, quæ ſunt æquales inter ſe, vt conſtat. Solæ enim A C, A D, eundem limitem poſſident A; Item B C, B D, eundem B; optiméque demonſtratum fuit ab Euclide, fieri non poſſe, vt A C, A D, inter ſe ſint æquales, ita vt B C, B D, quoque inter ſe æquales exiſtant. Rectè igitur in propoſitione appoſita ſunt hæc verba: eoſdemq́ terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habẽtes. Rurſus poſſunt eſſe duæ lineæ ſimul ſumptæ A D, B D, æquales duabus lineis A C, B C, ſimul ſumptis, vt in eadem figura perſpici poteſt: Sed hoc non oſtendit Euclides fieri non poſſe: Dixit enim non poſſe vtramque vtrique eſſe æqualem, &c.*



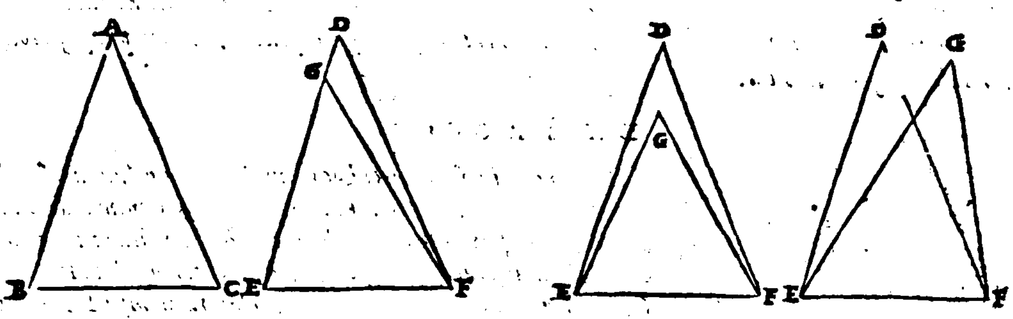

*EADEM ratione poſſunt ex A, & B, infra A B, baſim trianguli A B C, hoc eſt, ad contrarias partes, duci duæ lineæ rectæ A D, B D, conuenientes ad aliquod punctum, ita vt A D, exiens è puncto A, æqualis ſit ipſi A C; & B D, egrediens ex B, æqualis ipſi B C, vt perſpicuum eſt in appoſita figura. Non igitur ſine cauſa adiecit Euclides: ad eaſdem partes. Denique eſſe poterunt duæ lineæ A C, A D, æquales inter ſe, eundem terminum A, poſſidentes; Sed hoc poſito, fieri nulla ratione poterit, vt reliquæ duæ B C, B D, terminum habentes eundem B, inter ſe quoque ſint æquales, vt in hac figura apparet, & ab Euclide eſt demonſtratum. Appoſitè igitur dictum eſt in propoſitione: duabus eiſdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, &c. Quare vt planè ſcopus Euclidi in hac propoſitione propoſitus intelligatur, diligenter ſingula verba propoſitionis ſunt ponderanda.*




## THEOR. 5. PROPOS. 8. 8.

SI duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, vtrumque vtrique, æqualia, habuerint verò & baſim baſi æqualem: Angulum quoque ſub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt.

SINT duo latera A B, A C, trianguli A B C, duobus lateribus D E, D F, trianguli D E F, æqualia, vtrumque vtrique, nempe A B, ipſi D E, & A C, ipſi D F; ſit autem & baſis B C, baſi E F, æqualis. Dico angulum A, æqualem eſſe angulo D, quorum videlicet vterque dictis lateribus continetur. Nam ſi mente intelligatur baſis B C, ſuperponi baſi E F, [d] neutra excedet alteram, ſed punctum B, congruet puncto E, & punctũ C, puncto F, cùm hæ baſes ponantur æquales inter ſe. d 8. pronun.




Deinde ſi triangulum A B C, cogitetur cadere ſuper triangulum D E F, cadet punctum A, aut in ipſum punctum D, aut aliò. Si punctum A, in ipſum punctum D, cadat, congruent ſibi mutuò triangulorum latera, cùm ponantur æqualia; Ac propterea [e] angulus A, æqualis erit angulo D, cùm neuter alterum excedat. Quòd ſi punctum A, aliò dicatur cadere, vt ad G, quomodocunque id contingat, hoc eſt, ſiue in latus E D, ſiue intra triangulum E D F, ſiue extra, vt in figuris apparet; erit perpetuò E G, (quæ eadem eſt, quæ B A,) æqualis ipſi E D; & F G, (quæ eadem eſt, quæ C A,) æqualis ipſi F D, propterea quòd latera vnius trianguli æqualia ponantur lateribus al- e 8. pronun.

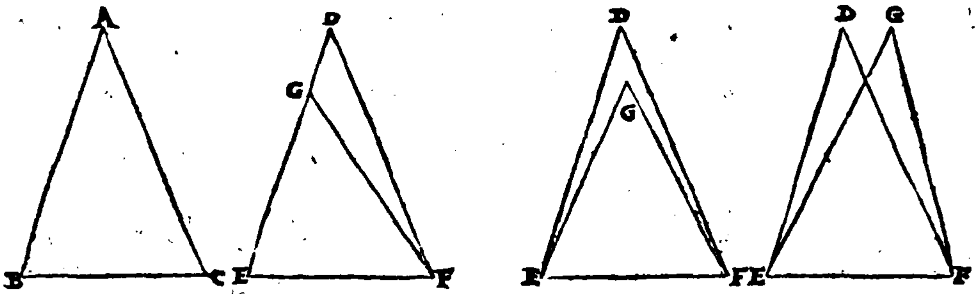
a 7 primi. terius. Hoc autem fieri non posse, iamdudum [a] demonstratum est, cùm tam rectæ E G, E D, terminum eundem E, quàm rectæ F G, F D, eundem limitem F, possideant. Non igitur punctum A, cadet aliò, quàm in punctum D: ac propterea angulus A, angulo D, æqualis erit. Quare si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, &c. Quod erat demonstrandum.

## SCHOLIVM.

*Vt vides, hac propositio conuertit primam partem propositionis quartæ. Sicut enim ibi ex æqualitate angulorum, qui lateribus æqualibus continentur, collecta fuit basium æqualitas, ita hic ex æqualitate basium concludit Euclides æqualitatem angulorum, qui lateribus æqualibus comprehenduntur. Possumus eodem modo ex prima & tertia parte conclusionis quartæ propositionis inferre totum antecedens eiusdem, ita vt theorema proponatur in hanc formam.*

Si duo triangula bases habuerint æquales, & angulos super bases constitutos æquales, vtrumque vtrique: Habebunt quoque reliqua latera æqualia, vtrumque vtrique, quæ videlicet æqualibus angulis subtenduntur, angulosque reliquos hisce lateribus inclusos æquales.

*Sit enim basis B C, æqualis basi E F, & angulus B, angulo E, angulúsque C, angulo D F E. Dico latus quoque A B, lateri D E, & latus A C, lateri D F, æquale esse, angulúmque A, angulo D. Nam si basis basi su-*

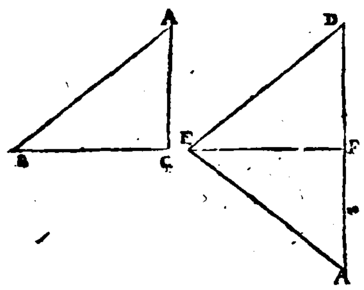



a 8. pron. *perponatur, [a] congruent sibi mutuò extrema earum, nec non & lineæ angulorum æqualium. Quare omnia sibi congruent, proptereáque omnia inter sese æqualia erunt. Verùm hoc idem theorema à nobis propositum, quod quidem magis propriè conuertere videtur quartam propositionem, quàm illud Euclidis, aliter demonstrabit Euclides in prima parte propositionis 26. vt eo loco monebimus.*

## COROLLARIVM.

*Porro ex antecedente huius octaua propositionis, non solùm colligi potest, angulos lateribus æqualibus contentos æquales esse, verùm etiam reliquos angulos, qui ad bases constituuntur, vtrumque vtrique, vt angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F; immò totum triangulum toti triangulo, vt constat ex eadem superpositione vnius trianguli super alterum. Nam sibi mutuò congruent & dicti anguli, & tota triangula, vt perspicuum est. Quod etiam ex quarta propositione colligi poterit, postquam demonstratum fuerit, angulos æqualibus comprehensos lateribus æquales esse. Inde enim fiet, quum latera quoque sint æqualia, & reliquos angulos, & tota triangula esse æqualia, vt in propositione quarta demonstratum est.*

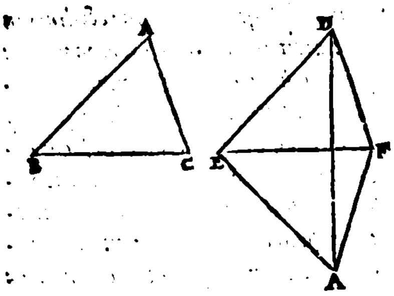
## EX PROCLO.




*Philonis familiares hoc idem theorema octauum ostendunt demonstratione affirmatiua, hac ratione. Posito enim eodem antecedente, superponi intelligatur basis B C, basi E F, ita vt triangulum A B C, cadat in diuersas partes, & non super triangulum D E F, quale est triangulum A E F. Aut igitur duo latera, nempe D F, F A, constituunt vnam lineam rectam, quod quidem continget, si duo anguli C, & F, recti extiterint; aut non. Si constituant vnam lineam rectam, veluti D A, ita propositum concludetur. Quoniam in triangulo A E D, duo latera A E, D E, ponuntur æqualia (est enim nunc A E, recta eadem, quæ A B, quæ per hypothesin recta D E, æqualis est) [b]*

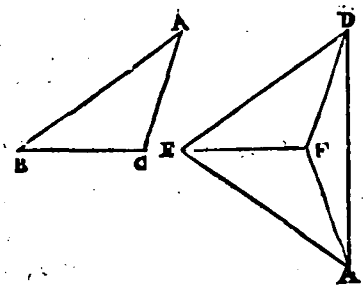
b 5. primi. *erunt anguli A, & D, super basin A D, æquales, quod erat ostendendum. Si verò neque D F, F A, neque D E, E A, lineam rectam conficiant, ducatur ex D, ad A, linea recta D A,*

quæ



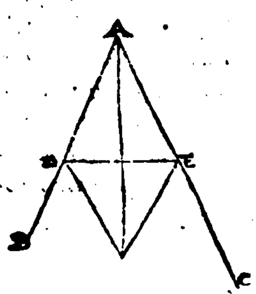
*quæ vel cadet intra triangula, vel extra. Cadat primùm intra, quod quidem accidet, quando anguli ad E, & F, sunt acuti. Quoniam igitur in triangulo A E D, duo latera A E, D E, æqualia ponuntur, [a] erũt duo anguli E A D, E D A, æquales ad basin D A. Eadem ratione, cùm duo latera A F, D F, æqualia sint per hypothesin, erunt duo anguli F A D, F D A, super basin D A, æquales. Si igitur hi æquales illis æqualibus addantur, [b] fient toti anguli E A F, E D F, æquales. Quod erat ostendendum. Cadat deinde recta D A, extra triangula, quod demùm fiet, quando anguli ad F, fuerint obtusi. Quoniam igitur in triangulo A E D, duo latera A E, D E, ponuntur æqualia, [c] erunt anguli E A D, E D A, æquales super basin D A. Eadem ratione, cùm duo latera A F, D F, in triangulo A F D, sint per hypothesin æqualia, erunt anguli F A D, F D A, super basin D A, æquales. His ergo à prioribus ablatis, [d] remanebunt anguli E A F, E D F, æquales; Quod demonstrandum proponebatur.*

a 5.primi.
b 2.pron.
c 5.primi.
d 3.pron.



## PROBL. 4. PROPOS. 9. 9.

DATVM angulum rectilineum bifariam secare.



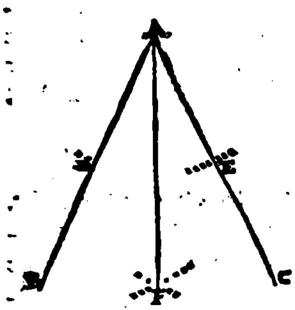
SIT diuidendus rectilineus angulus B A C, bifariam, hoc est, in duos angulos æquales. In recta A B, sumatur quodcunque punctum D, & rectæ A D, [a] secetur ex A C, recta A E, æqualis, ducaturq; recta D E. Deinde super D E, [b] constituatur triangulum æquilaterum D F E, & ducatur recta A F, diuidens angulum B A C, in angulos B A F, C A F. Dico hos angulos inter se esse æquales. Cùm enim latera D A, A F, trianguli D A F, æqualia sint lateribus E A, A F, trianguli E A F, vtrumque vtrique, quod D A, ipsi E A, per constructionem, sit æquale, & A F, commune; Sit autem & basis D F, basi E F, æqualis, propterea quòd triangulum D F E, constructum est æquilaterum: [c] Erit angulus D A F, angulo E A F, æqualis, ideóque angulus B A C, diuisus bifariam, quod erat faciendum.

a 3.primi.
b 1.primi.
c 8.primi.

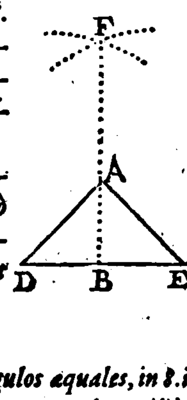
### SCHOLIVM.

*QVOD si loco trianguli æquilateri construamus triangulum Isosceles, nihilominus idem demonstrabimus. Id quod etiam in proximis tribus propositionibus, quæ sequuntur, fieri potest.*

### PRAXIS.



*DICTO citius angulus quilibet rectilineus, vt B A C, bifariam secabitur, hoc modo: Ex centro A, circino aliquo abscindantur rectæ æquales A D, A E, cuiuscunque magnitudinis. Et circino non variato (posses tamen ipsum variare, si velles) ex centris D, & E, describantur duo arcus secantes sese in F. Recta igitur ducta A F, secabit angulum B A C, bifariam. Si enim ducerentur rectæ D F, E F, essent hæ æquales, nempe semidiametri circulorum æqualium. Vnde vt prius, demonstrabitur, angulum D A F, æqualem esse angulo E A F. Non descripsimus autem dictas lineas, vt nuda praxis haberetur: Id quod in alijs quoq; praxibus, quoad eius fieri poterit, obseruabimus, ne linearum multitudo tenebras nobis offundat, pariátque confusionem.*

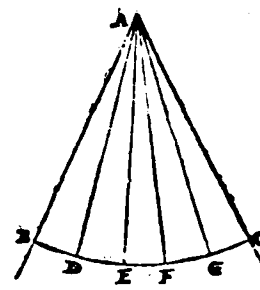


*QVOD si quando angulus rectilineus breuissimis lineis contentus, & in extremo alicuius plani positus, diuidendus sit bifariam, describemus ex D, & E, duos arcus sese mutuò intersecantes in F, supra angulum A, quia infra puncta D, & E, spatium deest, in quo describi possint. Recta enim ex F, per A, vsque ad B, eiecta secabit angulum A, bifariam, vt prius, vt in apposita figura apparet.*

### SCHOLIVM.

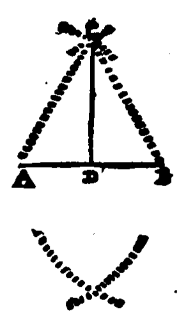
*HINC apertè colligitur, angulum rectilineum quemuis diuidi posse etiam in 4. angulos æquales, in 8. in 16. in 32. in 64. & ita deinceps, semper procedendo per augmentum duplex. Nam postquam angulus quilibet rectilineus in duos æquales angulos fuerit diuisus, si horum vterq; iterum bifariam secetur, habebimus 4. angulos æquales; Quòd si singuli rursus diuidantur bifariam, obtinebimus 8. angulos æquales, & sic deinceps. Non docuit autem Euclides vsquam, quanam ratione angulus rectilineus in quotuis partes æquales possit diuidi, quia id à nemine vsq; ad illum diem fuerat demonstratum. Ex Pappo tamen Alexandrino nos id docebi-*

*mus, beneficio cuiusdam lineæ curuæ, vel inflexæ ad finem libri 6. Interim verò si quis angulum rectilineum quemcunque propositũ in quotuis partes æquales diuidere desideret rudi, vt dicitur, Minerua, vti eum necesse erit circino, vt quasi attentando, & sæpius repetendo praxin ipsam ad finem desideratum perueniat; hac nimirum ratione: Sit angulus rectilineus B A C, diuidendus in 5. angulos æquales.*




*Ex A, centro describatur arcus circuli B C, ad quodcunque interuallum secãs rectas A B, A C, in B, & C. Deinde hic arcus beneficio circini (eius crura modò dilatando magis, modò restringendo, donec debitam habeant distantiam) diuidatur in tot partes æquales, in quot angulus propositus est diuidendus, vt in exemplo proposito in quinque partes in punctis D, E, F, G. Si namque ad hæc puncta ex A, rectæ ducantur lineæ, diuisus erit angulus B A C, in quinque æquales angulos. Cùm enim circino sumpta sint æqualia interualla B D, D E, &c. si ducantur rectæ B D, D E, &c. erunt hæ omnes inter se æquales. Quare erunt duo latera B A,*
a 15.defin. *A D, trianguli B A D,[a] æqualia duob. lateribus E A, A D, trianguli E A D, vtrumque vtrique, cùm omnia ex centro egrediantur ad circunferentiam vsque. Basis autem B D, basi quoque D E,*
b 8.primi. *vt dictum fuit, æqualis est:[b] Angulus igitur B A D, angulo E A D, æqualis existet; Eademq; ratione demonstrabitur, angulum E A D, angulo E A F, æqualem esse, & sic de cæteris. Breuius autem colligetur, omnes angulos ad A, esse inter se æquales, ex 27. propos. tertij libri: propterea quòd circunferentiæ B D, D E, &c. acceptæ sunt omnes æquales inter sese. Nemo verò miretur, quòd praxes exhibeamus interdum, quarũ demonstrationes ex sequentibus propositionibus pendent. Hoc enim, vt suprà ad definit. 10. diximus, eo consilio facimus, vt quoad eius fieri potest, singula proprijs in locis tractentur, diuisio nimirum anguli rectilinei cuiusuis in quotlibet partes æquales eo in loco, in quo Euclides docet diuisionem eiusdem anguli in duas partes æquales: Et diuisio lineæ rectæ in quotuis partes æquales, vbi eandem diuidit Euclides bifariam, & ita de singulis. Neque enim ad praxes huiusmodi requiruntur semper sequentes demonstrationes, sed solùm, vt probetur rectè esse per ipsas effectum, quod imperabatur. Quamobrem is, qui nõ contentus nuda praxi demonstrationem requirit, poterit regredi ad praxin quamlibet, postquam demonstrationes ad eam necessarias diligenter perceperit. Nam semper propositiones illas, quæ ad hanc rem debent adhiberi, citabimus in demonstrationibus nostrarum praxium; quemadmodum & in proxima praxi citauimus propositionem 27. tertij libri.*

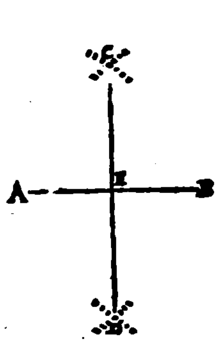
## PROBL. 5. PROPOS. 10.



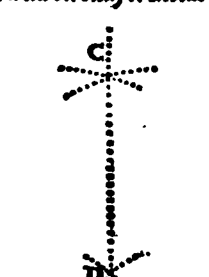

DATAM rectam lineam finitam bifariam secare.

a 1.primi. SIT recta finita A B, diuidenda bifariam, id est, in duas partes æquales.[a] Describatur super A B, triangulum æquilaterum A B C, cuius angulus C, per
b 9.primi. rectam C D,[b] diuidatur bifariam, rectaque C D, rectam A B, secet in D. Dico rectam A B, bifariam esse diuisam in D. Quoniam duo latera A C, C D, trianguli A C D, æqualia sunt duobus lateribus B C, C D, trianguli B C D, vtrumque vtrique, nempe A C, ipsi B C, cùm sint ambo latera trianguli æquilateri, & C D, est commune; Est autem & angulus A C D, angulo B C D, æqualis, per
c 4.primi. constructionem:[c] Erit basis A D, basi B D, æqualis. Datam ergo rectam A B, bifariam secuimus in D, quod facere oportebat.

### PRAXIS.




*EX centro A, ad quoduis interuallum, quod tamen dimidium lineæ A B, excedat, describantur duo arcus, vnus supernè, alter infernè; Et ex centro B, ad idem interuallum omnino alij duo arcus delineentur, qui priores secent in C, & D. Recta enim ducta C D, secabit rectam A B, in E, bifariam. Si enim ex A, & B, ad C, & D, ducantur quatuor rectæ, erunt hæ omnes inter se æquales, cùm ex centris ad circunferentias æqualium circulorum cadant; Nam arcus circulorum descripti sunt eodem interuallo. Quoniam igitur latera A C, C D, æqualia sunt lateribus B C, C D, vtrumque vtrique, & basis*
a 8.primi. *A D, basi B D,[a] erit angulus A C D, angulo B C D, æqualis. Rursus quia latera A C, C E, æqualia sunt lateribus B C, C E, v-*
b 4.primi. *trumque vtrique, & angulus A C E, angulo B C E, vt ostensum fuit;[b] erit basis A E, basi B E, æqualis.*




*IAM verò si linea bifariam diuidenda posita sit in extremo plani cuiuspiam, ita vt infra ipsam locus non sit, in quo commodè duo arcus sese intersecantes possint describi; descriptis supra eam duobus arcubus sese intersecantibus in C, describemus ad easdem partes alios duos arcus sese intersecantes mutuò in D, siue hæc fiat intra punctum C, vt in apposita figura, siue supra C. Nam recta per C, D, educta secabit rectam A B, bifariam in E.*

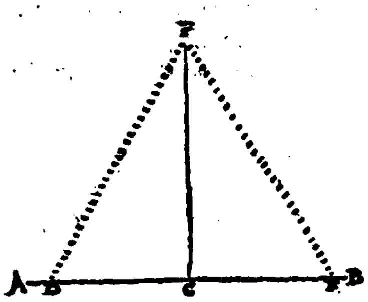
SCHO-

*SCHOLIVM.*

*Perspicvvm est, eodem modo diuidi posse eandem lineam rectam AB, in 4. partes aequales, & 8. in 16. in 32. &c. sicuti in propositione praecedenti diximus, de diuisione anguli rectilinei. Qua verò ratione quaeuis recta linea proposita diuidenda sit in quotcunque partes aequales, vberrimè trademus ad propositionem quadragesimam huius libri. Idémque longè faciliùs postea efficiemus ad propositionem decimam libri 6. vbi varias, & non iniucundas praxes in medium adducemus. Ibi enim videtur esse proprius huic rei locus, cùm huiusmodi praxes ferè omnes per linearum proportiones faciliùs demonstrentur. Neq; verò vnquam diuisione lineae in plures, quàm in duas partes aequales ad eum locum vsque indigebimus.*

# PROBLEMA 6. PROPOSITIO vndecima. 11.

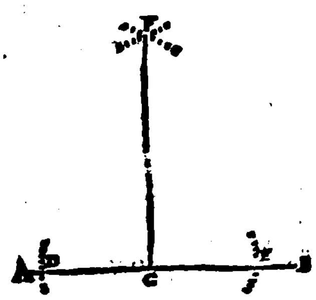
**Data** recta linea, à puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.



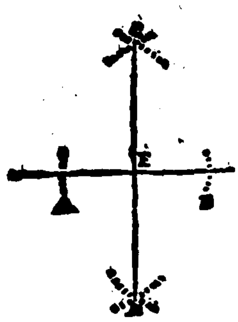
Recta linea data sit AB: & in ea punctum C, à quo iubemur erigere super AB, lineam ad angulos rectos, seu perpendicularem. A puncto C, sumatur recta CD,[a] cui aequalis auferatur CE. Deinde super DE,[b] constituatur triangulum aequilaterum DEF, atque ex F, ad C, ducatur recta FC, quam dico esse perpendicularem ad AB. Quoniam latera DC, CF, trianguli DCF, aequalia sunt lateribus EC, CF, trianguli ECF, vtrumque vtrique, nempe DC, ipsi EC, per constructionem, & CF, communes: Est verò & basis DF, basi EF, aequalis, ob triangulum aequilaterum:[c] Erunt anguli ad C, contenti dictis lateribus, aequales.[d] Quare dicetur vterque rectus, atque adeò FC, recta, ad AB, perpendicularis. Data igitur recta linea à puncto in ea dato, &c. Quod faciendum erat.

a 3. primi.
b 1. primi.
c 8. primi.
d 10. defin.

PRAXIS.

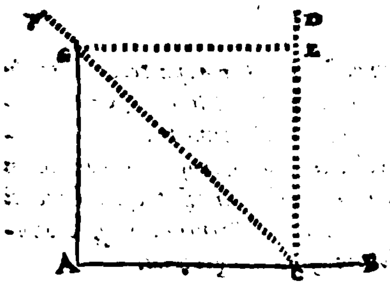


*Ex puncto C, abscindantur vtrinque lineae aequales CD, CE. Et ex D, & E, describantur duo arcus secantes sese in F. Recta namque ducta FC, erit perpendicularis. Demonstratio eadem est, quae Euclidis, si modò ducantur rectae DF, EF, quae aequales erunt, propter aequales circulos ex D, & E, descriptos, qui se intersecant in puncto F. Quòd si punctum datum in linea recta fuerit extremum, producenda erit linea in rectum & continuum, ad partes puncti dati, vt ex illo erigatur secundùm praxim datam linea perpendicularis. Vt si linea data fuerit AC, & punctum datum C, extremum; protrahenda erit AC, in B, & sumenda aequales CD, CE, &c. Si verò ad aliquam lineam constituenda sit linea perpendicularis, non quidem in puncto assignato, sed vtcunque, id efficietur hac methodo. Ex duobus punctis A, & B, quibuscunque lineae propositae describantur tam supernè, quàm infernè duo arcus sese intersecantes in C, & D. Nam recta ducta CD, erit perpendicularis ad AB, hoc est, faciet duos angulos ad E, rectos, seu aequales. Quod non aliter probabis, quàm suprà praxim, qua lineam in duas aequales diuisimus partes, demonstrauimus. Nam per quartam propositionem, erunt anguli ad E, aequales, quippe qui super aequales bases AE, BE, consistant, opponanturque aequalibus lateribus AC, BC, quae ex C, ad puncta A, & B, ducerentur.*



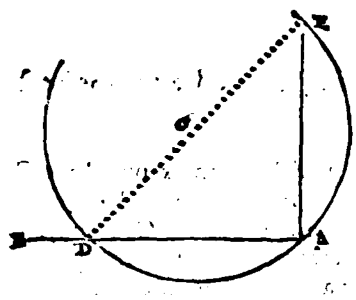
EX PROCLO.

*Si punctū in linea datū fuerit extremū, & linea commodè produci nequiuerit, poterimus ex puncto dato*




*educere lineam perpendicularem, linea non producta, hac ratione. Sit recta A B, & punctum A. Ex C, puncto quolibet intra lineã educatur perpẽdicularis C D, vt docuit Euclides; &* a 3.primi. *[a] abscindatur C E, æqualis ipsi A C: Deinde* b 9.primi. *[b] diuidatur angulus C, bifariam, ducta recta C F: Et ex E, rursus, vt docuit Euclides, educatur E G, perpendicularis ad C D, secans rectam C F, in G. Ducta igitur recta G A, perpendicularis erit ad A B. Quoniã cùm latera A C, C G, trianguli A C G, æqualia sint lateribus E C, C G, trianguli E C G, vtrumque vtrique, & anguli hisce lateribus contenti æquales quoque, per constructionem:* c 4.primi. *[c] Erunt anguli A, & E, oppositi communi lateri C G, æquales;*
d 10.defin. *Sed E, est rectus per constructionem; igitur & A, rectus erit, [d] ideoq́; A G, ad A B, perpendicularis.*

*SCHOLIVM.*

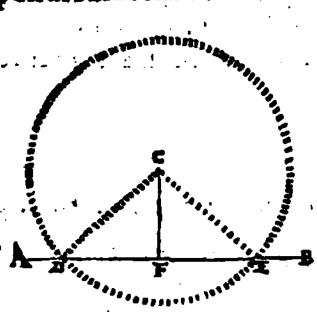



*BREVIVS lineam perpendicularẽ erigemus ex puncto dato, siue extremum illud sit, siue non, hoc modo: Sit data linea A B, punctúmque in ea A. Ex centro C, extra lineam assumpto, vbi libuerit, (dummodò recta A B, producta cum ipso non conueniat) interuallo verò accepto vsque ad A, describatur arcus circuli secans A B, in D. Et ex D, per C, recta ducatur secans arcum in E. Recta enim ducta E A, erit perpendicularis ad A B. Nam angulus A, est rectus, cùm sit in semicirculo D A E, vt ostendemus proposit. 31. lib. 3.*

*ALIAM praxim, quando punctum datum est in extremo lineæ, inuenies in scholio proposit. 31. huius libri.*

12. 
## PROBL. 7. PROPOS. 12.

SVPER datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod in ea nõ est, perpendicularem rectam deducere.

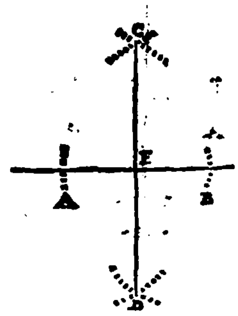



SIT recta A B, interminatæ quantitatis, & extra ipsam punctum C, à quo oporteat lineam perpendicularẽ deducere ad rectam AB. Centro C, interuallo verò quolibet circulus describatur secans AB, in D, & E. (quoniam interuallum assumptum tantum esse debet, vt
a 10.primi. transcendat rectam A B; aliàs eam non secaret.) [a] Diuisa autem recta D E, bifariam in F, ducatur recta C F, quam dico perpendicularem esse ad A B. Si enim ducantur C D, C E, erunt duo latera D F, F C, trianguli D F C, æqualia duobus lateribus E F, F C, trianguli E F C, vtrumque vtrique, per constructionem; est autem & basis C D, basi C E, æqualis, cùm hæ sint ex centro C, ad circunferentiam. Quare [b] erit angulus D F C, angulo E F C, æqualis, & pro-
b 8.primi. pterea vterque rectus. Ducta est igitur C F, perpendicularis, quod faciendum erat.

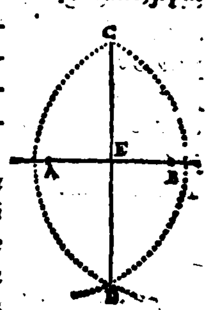
*SCHOLIVM.*

*PROBE apposuit Euclides hanc particulam:* infinitam. *Si enim linea esset finita, non posset semper à puncto dato extra ipsam perpendicularis ad eam deduci. Vt si linea finita esset B E, & punctum C, non posset ex C, describi circulus secans B E, in duobus punctis, quare neque ex C, perpendicularis duci ad B E. Hac igitur de causa vult Euclides, rectam datam esse infinitam, hoc est, nõ habere magnitudinem determinatam, vt saltem ad ipsam productam perpendicularis possit deduci. Ita enim fiet hic, si B E, producatur, donec circulus ex C, descriptus secet totam B A, productam in D, & E, &c.*

PRAXIS.

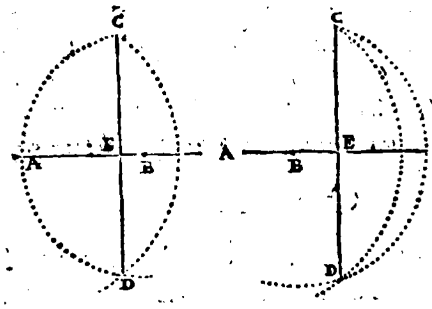



*CENTRO facto C, & interuallo quouis eodem, describantur duo arcus secantes rectam datam in A, & B. Deinde ex A, & B, eodemq́; interuallo, vel alio, si placuerit, alij duo arcus describantur secantes se in D. Nam ducta recta C D, secans A B, in E, erit perpẽdicularis ad A B. Demonstratio huius operationis nõ differt à demonstratione tra-*
a 4.primi. *dita in praxi proposit. 10. Nam anguli ad E, erũt recti, [a] nempe inter se æquales.*

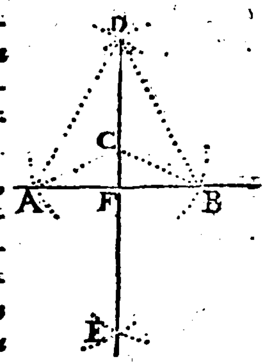



*IDEM efficiemus hoc modo: Ex quouis puncto A, in linea data, & interuallo quolibet vsq; ad C, assumpto, arcus circuli describatur: Deinde ex quolibet alio puncto B, interualloque vsque ad idem C, alius arcus describatur priorem secans in C, & D: Eritq́; ducta recta C D, secans A B, in E, perpendicularis ad A B. Demonstratio eadem est, quæ prior. Non*

est

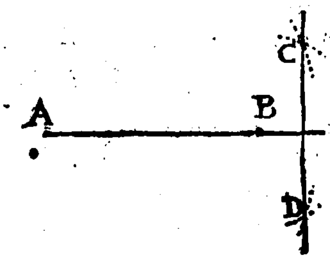


*est autem necesse, vt interuallum B C, æquale sit interuallo A C, vt in hac figura apparet: Facilior tamen erit, & breuior operatio, si idem semper interuallum accipiatur.*

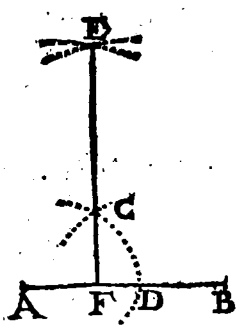


*QVOD si punctum C, fuerit nimis vicinum rectæ A B, ita agendum erit. Centro C, ad quoduis interuallum secetur recta A B, in duobus punctis A, B, ex quibus ad maius interuallum quodcunque, quàm A C, vel B C, bini arcus tam suprà, quàm infrà describantur, se intersecantes in D, E. Nam ducta recta D C F, quæ producta necessariò per punctum E, transibit, perpendicularis erit ad rectam A B, in F. Quod ita demonstrabimus, ductis rectis A D, B D, A C, B C. Quoniam duo latera D A, D C, trianguli A C D, duobus lateribus D B, D C, trianguli B C D, æqualia sunt, nec non & bases A C, B C, æquales sunt, [a] erũt anguli ad D, æquales. Quare cùm duo latera D A, D F, trianguli A D F, duobus lateribus D B, D F, trianguli B D F, æqualia sint; contineantq́; angulos ad D, æquales, vt ostendimus; [b] erunt anguli ad F, æquales, ac proinde recti, &c.*

a 8. primi.
b 4. primi.



*IAM verò si punctum datum sit iuxta extremum plani cuiuspiam, ita vt linea data non possit produci, ita agemus. Ex puncto quouis B, quod è regione dati puncti C, videatur quasi esse positum, hoc est, ferè in extremitate lineæ datæ A B, describantur duo arcus suprà & infra lineam A B, ad interuallum B C. Deinde ex puncto A, aliquantum remoto à puncto accepto B, (Quò autem magis distabunt inter se puncta A, & B, eò commodius puncta intersectionum arcuum cognoscentur) alij duo arcus ad interuallum A C, describantur, secantes priores in C, & D. Nam recta C D, perpendicularis erit ad datam rectam A B.*



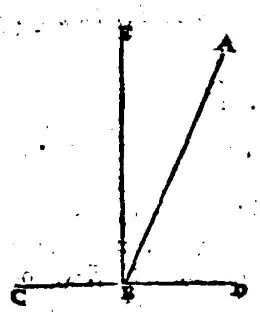
*SI autem puncto non prope extremum plani, in quo linea est, dato, linea sit in extremo plani, vt duo arcus infra lineam commodè se intersecare non possint, siue punctum datum C, sit propinquum lineæ A B, siue non, absoluemus problema hoc modo. Ad interuallum A C, vbicunque punctum A, sumatur, describatur ex C, arcus secans rectam A B, in D; atque ex A, D, duo arcus describantur versus punctum C, sese intersecantes in E. Recta namque ex E, per C, ducta secans A B, in F, perpendicularis erit ad A B, vt suprà demonstratum est, quando punctum C, erat prope lineam A B.*

*QVO verò modo nos gerere debeamus, quando & punctum datum est iuxta vnum extremum plani, & linea data prope alterum extremum; ita vt neque lineam producere liceat, neque duo arcus commodè se intersecare possint in D, infra datam rectam A B, docebimus in scholio propositionis 31. huius libri.*

## THEOR. 6. PROPOS. 13.

13.

CVM recta linea super rectam consistens lineam angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.



RECTA linea A B, consistens super rectam C D, faciat duos angulos A B C, A B D. Si igitur A B, fuerit perpendicularis ad C D, [a] erunt dicti anguli duo recti. Si verò A B, non fuerit perpendicularis, faciet vnum quidem angulum obtusum, alterum verò acutum. Dico igitur ipsos duobus esse rectis æquales. [b] Educatur enim B E, ex B, perpendicularis ad C D, vt sint duo anguli E B C, E B D, recti. Quoniam verò angulus rectus E B D, [c] æqualis est duobus angulis D B A, A B E; [d] erunt, apposito communi angulo recto E B C, duo recti E B D, E B C, tribus angulis D B A, A B E, E B C æquales. Rursus, quia [e] angulus A B C, duobus angulis A B E, E B C, æqualis est; [f] erunt apposito communi angulo A B D, duo anguli A B C, A B D, tribus angulis D B A, A B E, E B C, æquales. Sed eisdem his tribus ostendimus, æquales etiam esse duos rectos E B D, E B C: quæ autem eidem æqualia, [g] inter se sunt æqualia. Duo igitur anguli A B C, A B D, æquales sunt duobus rectis E B D, E B C. Cùm ergo recta linea super rectam consistens lineam, &c. Quod ostendere oportebat.

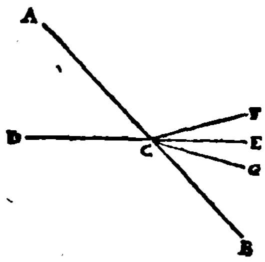
a 10. defin.
b 11. primi.
c 19. pron.
d 2. pron.
e 19. pron.
f 2. pron.
g 1. pronun.

*SCHOLIVM.*

*VIDETVR hæc propositio pendere ex communi quadam animi notione. Quo enim angulus A B C, superat rectum angulum E B C, eo reliquus angulus A B D, superatur ab angulo recto E B D. Nam sicut ibi excessus est angulus A B E, ita hic defectus est idem angulus A B E. Quocirca anguli A B C, A B D, duobus rectis æquales esse conuincuntur: siquidem tantùm vnus eorum suprà rectum acquirit, quantum alter deperdit.*

## 14. THEOR. 7. PROPOS. 14.

SI ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes ductæ eos, qui sunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.




AD punctum C, lineæ rectæ A B, in diuersas partes eductæ sint duæ rectæ C D, C E, facientes cum A B, duos angulos A C D, A C E, vel rectos, vel duobus rectis æquales. Dico ipsas C D, C E, inter se esse constitutas in directum, ita vt D C E, sit vna linea recta. Si enim non est recta D C E; producta D C, ad partes C, in directum & continuum cadet aut supra C E, vt sit recta D C F, aut infra C E, vt sit recta D C G. Si

a 13. primi. cadit suprà, cùm A C, consistat super rectam D C F, [a] fient duo anguli A C D, A C F, duobus rectis æquales: Ponuntur autem & duo anguli

b 12. pron. A C D, A C E, æquales duobus rectis; [b] & omnes recti sunt inter se æquales. Quare duo anguli A C D, A C F, duobus angulis A C D, A C E,

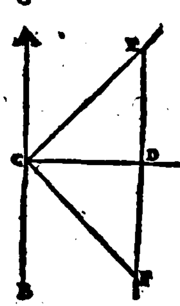
c 3. pronun. erunt æquales. Ablato igitur communi angulo A C D, [c] remanebũt anguli A C F, A C E, inter se æquales, pars & totum, quod est absurdum. Non igitur recta D C, producta cadet supra C E; Sed neque infra cadet; Eadem enim ratione probarentur anguli A C E, A C G, æquales. Igitur D C, producta eadem efficietur, quæ C E; proptereaque si ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, &c. Quod demonstrandum erat.

*SCHOLIVM.*

*EST hæc propositio præcedentis conuersa. In ea enim probatum fuit, si D C E, sit recta, angulos A C D, A C E, duobus esse rectis æquales; In hac verò demonstratum est, si dicti anguli sint duobus rectis æquales, rectas D C, E C, esse vnam lineam rectam.*

EX PROCLO.

*RECTE Euclides addidit in propositione hac [& non ad easdem partes.] Quoniam, vt ait Porphyrius, fieri potest, vt ad punctum aliquod lineæ datæ ad easdem partes duæ lineæ ducantur, facientes cum data duos angulos duobus rectis æquales; quæ tamen non constituant vnam lineam, eò quòd non ad diuersas sint ductæ*




a 11. primi. *partes. Sit enim punctum C, in linea A B, datum. Ducatur C D, [a] perpendicularis ad*

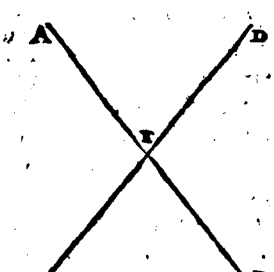
b 9. primi. *A B, [b] diuidaturq; rectus angulus A C D, bifariam per rectam C E. Deinde ex D, quo-*

c 11. primi. *libet puncto rectæ C D, [c] ducatur D E, perpendicularis ad C D, secans rectam C E, in E.*

d 3. primi. *Producta autem E D, ad partes D, [d] sumatur D F, æqualis rectæ D E, & ducatur recta F C. Quoniam igitur latera E D, D C, trianguli E D C, æqualia sunt lateribus F D, D C, trianguli F D C, vtrumque vtrique, & anguli D, ipsis contenti æquales, nempe*

e 4. primi. *recti; [e] erit basis E C, basi C F, æqualis, & angulus E C D, angulo F C D. Sed angulus E C D, dimidium est recti. (Est enim rectus A C D, diuisus bifariam.) Igitur & F C D, dimidium erit recti. Quare C F, cum A C, facit angulum A C F, constantem ex recto & dimidio recti; Facit autem C E, cum eadem A C, angulum A C E, dimidium etiam recti; Duo igitur anguli A C F, A C E, quos ad easdem partes faciunt rectæ C F, C E, cum A B, æquales sunt duobus rectis: Et tamen C F, C E, non sunt vna linea recta, propterea quòd non sunt ductæ ad diuersas partes, sed ad easdem.*

## 15. THEOR. 8. PROPOS. 15.




SI duæ rectæ lineæ se mutuò secuerint, angulos ad verticem æquales inter se efficient.

SECENT se duæ rectæ A B, C D, in puncto E, vtcunque. Dico angulos, quos faciunt ad verticem E, inter se esse æquales, angulum videlicet A E D, angulo B E C, & angulum A E C, angulo B E D. Quoniam

a 13. primi. recta D E, consistit super rectam A B, [a] erunt duo anguli A E D, D E B, æquales duobus rectis. Rursus quia recta B E, super rectam C D, consistit, erũt eadem ratione duo anguli C E B, B E D, duobus rectis æqua-

b 12. pron. les. Cùm igitur [b] omnes recti anguli inter se sint æquales; erunt duo anguli A E D, D E B, duobus angulis D E B, B E C, æquales. Dempto

igitur

igitur communi angulo D E B, [a] remanebit angulus A E D, angulo B E C, æqualis. Eadem ratione confirmabitur, angulos A E C, B E D, inter se æquales esse. Nam duo anguli A E C, C E B, [b] qui duobus sunt rectis æquales, æquales erunt duobus quoque angulis D E B, B E C, qui duobus rectis sunt æquales. Ablato igitur angulo communi B E C, [c] remanebunt anguli A E C, B E D, æquales inter se. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuò secuerint, &c. Quod ostendere oportebat. a 3. pronun. b 13. primi. c 3. pron.

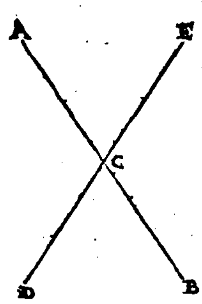
## COROLLARIVM I.

*EVCLIDES colligit ex demonstratione huius theorematis, (ex sententia Procli, quoniam alia exemplaria hoc corollarium non habent) duas lineas rectas se mutuò secantes efficere ad punctum sectionis quatuor angulos quatuor rectis angulis æquales. Nam in demonstratione ostensum fuit, tam duos angulos A E D, D E B, quàm duos A E C, C E B, duobus esse rectis æquales, per 13. proposit. Omnes igitur quatuor anguli ad E, constituti, æquipollent bis duobus rectis angulis. Quare quatuor rectis æquales existunt.*

## COROLLARIVM II.

*EADEM ratione colligemus, omnes angulos circa vnum & idem punctum constitutos, quotcunque fuerint, quatuor duntaxat rectis angulis æquales esse. Si enim ex E, aliæ lineæ quotlibet educantur, diuidentur solummodò illi quatuor anguli ad E, constituti in plurimas partes, [a] quæ omnes simul sumptæ totis suis adæquantur. Cùm ergo illi quatuor anguli æquales sint quatuor rectis, ex primo corollario, erunt quoque omnes alij simul sumpti quatuor tantùm rectis æquales. Ex quo perspicuum est, omne spatium punctum aliquod in plano circunstans æquiualere quatuor rectis angulis, vt multi authores asserunt: quia omnes anguli, qui circa illud punctum constitui possunt, quatuor sunt rectis angulis æquales. Simili modo constat, quotlibet lineas rectas se inuicem secantes, facere ad punctum sectionis angulos æquales quatuor rectis.* a 19. pron.

## EX PROCLO.

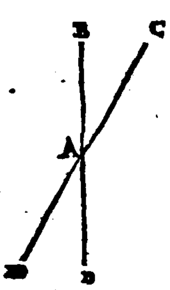



SI ad aliquam rectam lineam, ad eiusq; signum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes sumptæ angulos ad verticem æquales fecerint; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi inuicem erunt.

*Ex puncto C, rectæ A B, in diuersas partes egrediantur duæ rectæ C D, C E, facientes angulos A C E, B C D, inter se æquales: Vel etiam duos A C D, B C E. Dico duas C D, C E, efficere vnam lineam rectam. Quoniam enim angulus A C E, æqualis est angulo B C D; addito communi angulo B C E, [b] erunt duo anguli A C E, E C B, duobus angulis D C B, B C E, æquales: Sed [c] anguli A C E, E C B, sunt æquales duobus rectis. Igitur & duo D C B, B C E, duobus erunt rectis æquales. Quamobrem C D, C E, [d] erũt linea vna recta. Hoc autem, vt vides, conuersum est propositionis decimæquintæ.* b 2. pron. c 13. primi. d 14. primi.

## EX PELETARIO.

SI quatuor rectæ lineæ ab vno puncto exeuntes binos angulos oppositos inter se æquales fecerint, erunt quælibet duæ lineæ aduersæ in rectum sibi & continuũ coniunctæ.

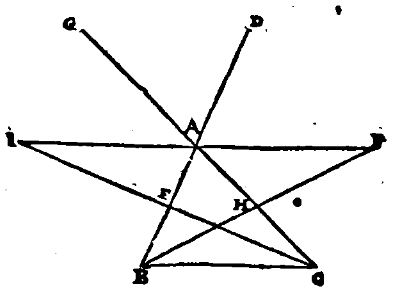



*Ex puncto A, quatuor lineæ eductæ A B, A C, A D, A E, faciant duos angulos oppositos B A E, C A D, inter se æquales: Item duos B A C, D A E, inter se æquales. Dico tam B A, A D, facere vnam lineam rectam, quàm C A, A E. Quoniam æquales sunt anguli B A E, C A D, si æquales illis addantur anguli B A C, D A E, [e] erunt duo anguli B A E, B A C, æquales duobus angulis C A D, D A E. Tam ergo illi, quàm hi dimidium sunt quatuor angulorum circa punctum A, consistentium: At hi quatuor æquales sunt quatuor rectis, per secundum corollarium præcedentis propositionis. Igitur duo anguli B A E, B A C, æquales sunt duobus rectis; [f] atque adeò C A, A E, vnam efficient lineam rectam. Eodem pacto ostendetur, duas B A, A D, vnam rectam efficere lineam. Nam eadẽ ratione erunt duo anguli B A E, E A D, æquales duobus angulis D A C, C A B. Quare, vt prius, concludetur propositum. Peletarius autem demonstrat hoc idem ratione ducente ad id, quod fieri nequit. Nos tamẽ demonstrationem nostram ostensiuam eius demonstrationi iure optimo præposuimus.* e 2. pron. f 14. primi.

16.

## THEOR. 9. PROPOS. 16.

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto, externus angulus vtrolibet interno, & opposito, maior est.



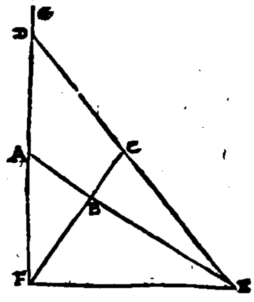
TRIANGVLI A B C, latus B A, producatur ad D. Dico angulum externum D A C, maiorem esse interno, & opposito A C B, itemque maiorem interno, & opposito A B C. Diuidatur[a] enim A C, bifariam in E; & ex B, per E, extendatur recta B E F, ita vt E F,[b] abscissa sit æqualis rectæ E B; ducaturq́; recta F A. Quoniam igitur latera C E, E B, trianguli C E B, æqualia sunt lateribus A E, E F, trianguli A E F, vtrumque vtrique, per constructionem; Sunt autem & anguli ad E, dictis lateribus comprehensi,[c] inter se æquales, cùm sint circa verticē E, & oppositi: Erit[d] basis C B, æqualis basi A F, & angulus E C B, angulo E A F; Est autem angulus D A C, externus maior angulo E A F, totum videlicet parte. Igitur & externus angulus D A C, maior erit interno & opposito angulo A C B. Quòd si latus C A, producatur ad G; & A B, diuidatur bifariam in H; extendaturque recta C H I, vt H I, æqualis sit rectæ H C, & ducatur recta I A: demonstrabitur eadem prorsus ratione, angulum externum G A B, maiorem esse interno angulo, & opposito A B C; Est autem[e] angulus D A C, angulo G A B, æqualis, cùm lineæ B D, C G, se mutuò secent in A. Igitur & angulus D A C, maior erit interno & opposito angulo A B C. Est autem idem angulus D A C, maior quoque ostensus angulo interno, & opposito A C B. Cuiuscunque ergo trianguli vno latere producto, &c. Quod demonstrandum erat.

a 10. primi.
b 3. primi.
c 15. primi.
d 4. primi.
e 15. primi.

### *SCHOLIVM.*

*NON dixit Euclides, angulum externum D A C, maiorem esse angulo B A C, interno, qui sibi est deinceps; sed solùm magnitudine superare vtrumlibet A C B, A B C, internorum, sibiq́, oppositorū: quoniam externus angulus æqualis potest esse angulo interno sibi deinceps, quando scilicet externus rectus est; Tunc enim necessariò is, qui sibi est deinceps, rectus quoque erit: Potest & esse minor, quando nimirum est acutus; Hoc enim posito, angulus illi deinceps obtusus erit. Solùm ergo, quando obtusus erit externus, superabit internum sibi deinceps; Hic enim necessariò acutus existet. Quæ omnia facilè colliguntur ex propos. 13. per quā angulus externus, & internus illi deinceps, æquales sunt duobus rectis.*

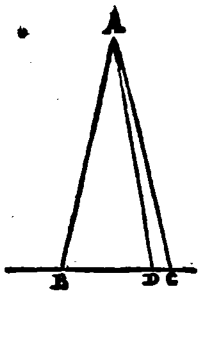
*ID verò, quod in scholio propos. 6. huius libri nos demonstraturos recepimus, nimirum hāc propositionem nō posse conuerti; cùm & vno latere figuræ quadrilateræ producto, externus angulus quolibet interno, & opposito possit esse maior; hac ratione absoluemus.*



*SIT figura quadrilatera A B C D, cuius angulus B A D, obtusus, & A B C, rectus constituatur, hac tamen lege, vt rectæ A B, D C, productæ ad partes B, & C, in puncto E, nec non & rectæ D A, C B, ad partes A, & B, in puncto F, coëant. Quod quidem fiet, si constituatur triangulum A D E, obtusangulum, & producta D A, versus A, ducatur ex quouis puncto F, ad A E, perpendicularis F B, secās latus D E, in C. Dico, si A D, producatur ad G, angulum externum C D G, maiorem esse quolibet trium internorū B A D, A B C, B C D, sibi oppositorum. Cùm enim A D E, triangulum sit,[a] erit angulus externus E D G, maior interno opposito D A E. Rursus cùm D A B, obtusus maior sit recto A B C, maior quoque multò erit E D G, ipso A B C. Postremò quia & in triangulo C D F,[b] angulus externus C D G, maior est interno, & opposito F C D; manifestum est, in quadrilatero A B C D, externum angulum C D G, maiorem esse internis, & oppositis B A D, A B C, B C D. Quam ob rem propos. hæc 16. conuerti nequit, quippe cùm eius antecedens, & consequens non reciprocentur, vt demonstratum est.*

a 16. primi.
b 16. primi.

### EX PROCLO.

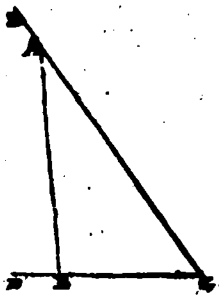


*SEQVITVR ex hac propositione, ab eodem puncto ad vnam eandemq́; lineam rectam non posse duci plures lineas rectas, quàm duas inter se æquales. Si enim fieri potest, ducantur ex A, ad lineam B C, tres lineæ rectæ æquales A B, A C, A D. Quoniam igitur latera A B, A C, sunt æqualia,[c] erunt anguli A C B, & A B C, æquales super basim B C. Rursus quia latera A B, A D, sunt æqualia,[d] erunt anguli A D B, & A B D, super basim B D, æquales. Quare cùm vterque angulus A C D, & A D B, æqualis sit angulo A B C,[e] erit angulus A D B, æqualis angulo A C D, externus interno opposito, quod est absurdum, cùm per hanc decimam sextam propositionem externus interno maior sit. Non ergo plures lineæ rectæ, quàm duæ, inter se æquales, ex A, ad B C, possunt duci. Quod est propositum.*

c 5. primi.
d 5. primi.
e 1. pron.

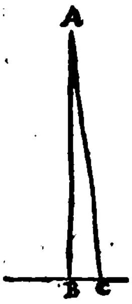
## THEOR. 10. PROPOS. 17. 17.

CVIVSCVNQVE trianguli duo anguli duobus rectis sunt minores, omnifariam sumpti.



SIT triangulum A B C. Dico duos angulos A B C, & A C B, minores esse
duobus rectis; Item duos C B A, & C A B; Itemq; duos B A C, & B C A. Producantur enim duo quæuis latera, nempe C B, C A, ad D, & E. Quoniam igi-
tur [a] angulus A B D, externus maior est interno & opposito angulo A C B; si a 16. primi.
addatur communis angulus A B C, [b] erunt duo anguli A B D, A B C, maio- b 4. pron.
res duobus angulis A B C, A C B: [c] Sed A B D, A B C, æquales sunt duobus c 13. primi.
rectis. Igitur A B C, A C B, minores sunt duobus rectis. Eadem ratione erunt
anguli C B A, & C A B, minores duobus rectis. Nam cùm angulus exter-
nus A B D, [d] maior sit angulo C A B, interno & opposito; [e] erunt, apposi- d 16. primi.
to communi angulo A B C, duo anguli A B D, A B C, maiores duobus angu- e 4. pron.
lis C A B, C B A. Cùm ergo [f] duo illi duobus rectis sint æquales, erunt hi alij f 13. primi.
duo duobus rectis minores. Non secus ostendemus, duos B A C, B C A, duobus esse rectis mino-
res. Cùm enim angulus externus B A E, [g] maior sit interno & opposito angulo B C A; si appona- g 16. primi.
tur cõmunis angulus B A C, [h] erunt duo anguli B A E, B A C, duobus angulis B C A, B A C, maio- h 4. pron.
res: ac proinde cùm illi duo [i] sint duobus rectis æquales, erunt duo hi minores duobus rectis. Cu- i 13. primi.
iuscunque igitur trianguli, &c. Quod erat demonstrandum.

### EX PROCLO.

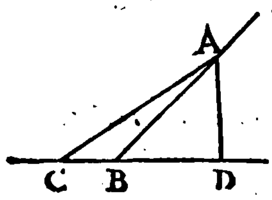


*HINC perspicuum est, ab eodem puncto ad eandem rectam lineam non posse deduci plures lineas perpendiculares, quàm vnam. Si enim fieri potest, ducantur ex A, ad rectam B C, duæ perpendiculares A B, A C. Erunt igitur in triangulo A B C, duo anguli interni B, & C, duobus rectis æquales, cùm sint duo recti, quod est absurdũ. [a] Sunt enim quilibet duo anguli in triangulo quocunque ostensi minores duobus rectis. Non ergo plures perpendiculares, quàm vna, ex A, ad B C, deduci possunt. Quod est propositum.* a 17. primi.

### COROLLARIVM I.

*CONSTAT enim ex his, In omni triangulo, cuius vnus angulus fuerit rectus, vel obtusus, reliquos esse acutos, ceu monuimus defin. 26. huius libri. Cùm enim per hanc propositionẽ duo quilibet anguli sint duobus rectis minores, necesse est, si vnus fuerit rectus, vel obtusus, quemcunque reliquorum esse acutum, ne duos angulos in triangulo rectos, aut duobus rectis maiores esse fateamur.*

### COROLLARIVM II.



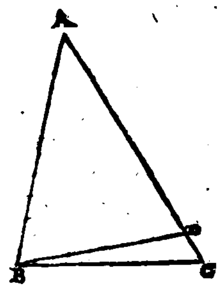
*SEQVITVR etiam ex hac propositione, si linea recta cum alia recta angulos inæquales faciat, vnum acutum, & obtusum alterũ, lineam perpendicularem ex quouis eius puncto ad aliam illam rectam demissam cadere ad partes acuti anguli. Faciat enim recta A B, cum recta C D, angulos inæquales, nempe A B D, acutum, & A B C, obtusum, demittaturq; ex puncto A, quocunque ad C D, perpendicularis A D. Dico A D, cadere ad partes anguli acuti A B D. Nam si non cadit ad partes acuti anguli A B D, cadat, si fieri potest, perpendicularis A C, ad partes anguli obtusi A B C. Igitur duo anguli A B C, A C B, obtusus, & rectus, in triangulo A B C, maiores sunt duobus rectis: [b] sed & duobus rectis sunt minores, quod est absurdum. Non ergo ex A, perpendicularis ad C D, deducta cadit ad partes anguli obtusi. Quare ad partes acuti anguli cadet.* b 17. primi.

### COROLLARIVM III.

*PARI ratione fit ex hac propositione manifestum, omnes angulos trianguli æquilateri, & duos angulos trianguli Isoscelis supra basin, esse acutos. Nam [c] cũ & quilibet duo in triangulo æquilatero, & duo in Isoscele supra basin sint inter se æquales; [d] sintq; simul tam illi duo, quàm hi duobus rectis minores; erit quilibet illorum recto minor, hoc est, acutus. Si enim rectus foret, aut obtusus, essent ambo vel duobus rectis æquales, aut maiores.* c 5. primi. d 17. primi.

## THEOR. 11. PROPOS. 18. 18.

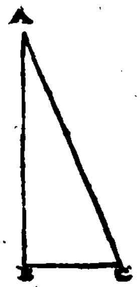
OMNIS trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.



IN triangulo A B C, sit latus A C, maius latere A B. Dico angulum A B C, subtensum à maiori latere A C, maiorem esse angulo A C B, qui à minori latere A B, subtenditur. Nam ex A C, [a] auferatur A D, æqualis ipsi A B, & ducatur recta B D. Quoniam igitur duo latera A B, A D, æqualia sunt per constructionem, [b] erunt anguli A B D, A D B, æquales: Est autè [c] angulus A D B, maior angulo A C B. Igitur & angulus A B D, maior erit angulo A C B. Quamobrè cùm [d] angulus totus A B C, maior adhuc sit angulo A B D; erit angulus A B C, multò maior angulo A C B. Eadem ratione, si latus A C, maius ponatur latere B C, ostendes angulum A B C, maiorem esse angulo B A C; si nimirum ex C A, abscindatur linea æqualis ipsi C B, &c. Quare omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit; Quod demonstrandum erat.

a 3. primi. b 5. primi. c 16. primi. d 9. pron.

## COROLLARIVM.

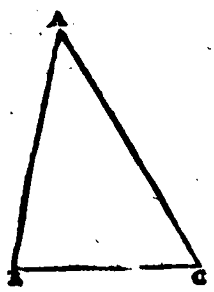


*Ex hoc sequitur, omnes tres angulos trianguli Scaleni esse inæquales, vt monuimus definitione decimaquinta huius libri. Sit enim triangulum Scalenum A B C, cuius maximum quidem latus A C, minimum autem B C, & medium locum habens A B. Dico eiusdem omnes angulos inæquales esse. Cùm enim latus A C, ponatur maius latere A B, erit, per hanc propositionem angulus B, angulo C, maior. Eadem ratione maior erit angulus C, angulo A, quandoquidem & latus A B, latere B C, maius ponitur. Sunt igitur omnes tres anguli inæquales, maximus quidem B, minimus verò A, & C, medium locum inter vtrumque tenens.*

11.

# THEOR. 12. PROPOS. 19.

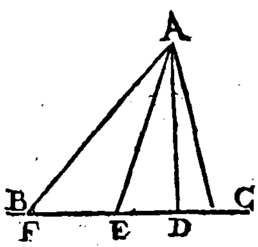
OMNIS trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur.



IN triangulo A B C, angulus B, maior sit angulo C. Dico latus A C, subtendens maiorem angulum B, maius esse latere A B, quod angulum minorem C, subtendit. Si enim latus A C, maius non est latere A B, erit vel æquale illi, vel minus. Si dicatur A C, æquale esse ipsi A B, [a] erit angulus B, æqualis angulo C; Est autem & maior per hypothesin, quod est absurdum. Si verò A C, minus esse dicatur latere A B, erit angulus B, subtensus à minori latere A C, minor angulo C, subtenso à maiori latere A B; Ponitur autem maior, quod magis est absurdum. Latus igitur A C, cùm neque æquale sit lateri A B, neque minus eo, erit maius. Eadem ratione probabitur, latus A C, maius esse latere B C, si angulus B, maior esse concedatur angulo A. Omnis ergo trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur; Quod demonstrandum proponebatur.

a 5. primi.

## COROLLARIVM.



*SEQVITVR ex hac propositione omnium rectarum ex quouis puncto ad rectam quamcunque ductarum, eam, quæ perpendicularis est, esse minimam. Ducantur enim ex puncto A, ad rectam B C, quotcunque lineæ A D, A E, A F, & aliæ, quarum A D, sola sit perpendicularis ad B C, & nulla alia, cùm ex eodem puncto ad eandem rectam sola vna perpendicularis duci possit, vt ex Proclo ad propositionem decimamsextam demonstrauimus. Dico omnium minimam esse A D. Nam in triangulo A E D, cùm duo anguli A D E, A E D, [a] sint duobus rectis minores, ponaturq́; A D E, rectus; erit A E D, acutus. Quare [b] maius erit latus A E, latere A D. Eodem modo ostendemus, omnes alias rectas maiores esse recta A D: ac proinde perpendicularis A D, omnium erit minima.*

a 17. primi. b 19. primi.

## EX PROCLO.

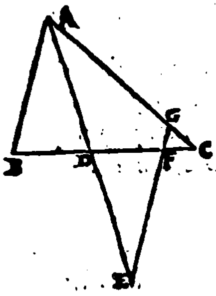
*POSSVMVS hoc idem theorema ostendere affirmatiua demonstratione, sine adminiculo præcedentis, si tamen priùs demonstretur hoc sequens theorema.*

SI trianguli angulus bifariam sectus fuerit, secansq́ue angulum recta linea ad basin ducta in partes inæquales ipsam diuidat; Latera illum angulum continentia inæqualia erunt.

erunt, & maius quidem illud, quod cum maiori basis segmento coincidit, minus verò, quod cum minori.

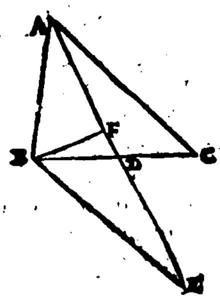
*Trianguli A B C, angulus B A C, diuidatur bifariam per rectam A D, quæ secet basin B C, in partes inæquales, maiusq́; segmentum sit D C. Dico latus A C, maius esse latere A B. Producatur enim A D, ad E,[a] vt sit D E, æqualis ipsi A D. Deinde ex maiori segmento D C, auferatur recta D F, æqualis minori segmento D B, & per F, ex E, extendatur recta E F G. Quoniam igitur latera A D, D B, trianguli A D B, æqualia sunt lateribus E D, D F, trianguli E D F, vtrumque vtrique, per constructionem; sunt autẽ &[b] anguli A D B, E D F, dictis lateribus contenti æquales;[c] Erunt bases A B, & E F, æquales, & angulo B A D, angulus F E D, æqualis: Est verò & angulus C A D, angulo B A D, æqualis per hypothesin; Igitur[d] anguli G A E, G E A, trianguli A G E, æquales erunt,[e] ideoq́; latera A G, E G, æqualia erunt. Est autem recta A C, maior quàm A G; quare & A C, maior erit, quàm E G. Et quia E G, maior est, quàm E F, erit & A C, multò maior, quàm E F. Cùm igitur demonstratum sit, rectam E F, æqualem esse rectæ A B, erit A C, latus maius latere A B, quod erat ostendendum.*

a 3. primi.
b 15. primi.
c 4. primi.
d 1. pron.
e 6. primi.



*Hoc ostenso theoremate, ita propositio 19. demonstrabitur. In triangulo A B C, angulus A B C, maior sit angulo C. Dico latus A C, maius esse latere A B. Diuisa enim recta B C, (super quam constituti sunt dicti anguli inæquales,) bifariam in D; ex A, per D, extendatur recta A D E,[f] vt sit D E, æqualis ipsi A D; ducaturq́; recta B E. Quoniã igitur latera A D, D C, triãguli A D C, æqualia sunt lateribus E D, D B, trianguli E D B, vtrumq́; vtriq́; per constructionẽ,[g] sunt autẽ & anguli A D C, E D B, dictis cõprehẽsi lateribus æquales:[h] Erũt bases A C, & B E, æquales, angulusq́; A C D, angulo E B D, æqualis: Et quia angulus A C D, ponitur esse minor angulo A B C, erit & angulus E B D, minor eodem angulo A B C; Ideoq́; angulus A B E, per rectam B D, diuidetur in partes inæquales. Si igitur bifariam secetur per rectam B F, cadet B F, supra B D, eò quòd angulus A B D, maior est angulo E B D. Quia verò E F,[i] maior est, quàm E D, & E D, posita est æqualis ipsi A D, erit E F, maior, quàm A D;[k] Sed adhuc A D, maior est, quàm A F; Multò igitur maior erit E F, quàm A F. Itaq; quia recta B F, diuidens angulum A B E, bifariam, secat basin A E, inæqualiter in F, éstque maius segmẽtum E F, minus autem A F; erit per theorema à Proclo proximè demonstratum, latus B E, maius latere A B. Ostensum est autem B E, æquale esse lateri A C. Igitur & A C, latus latere A B, maius erit. Quod erat demonstrandum.*

f 3. primi.
g 15. primi.
h 4. primi.
i 9. pron.
k 9. pron.



## SCHOLIVM.

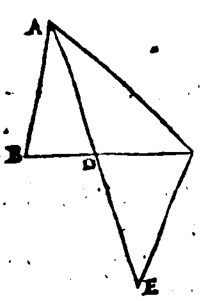
*Hæc propositio 19. conuersa est propositionis 18. vt perspicuum est. Campanus autem duarum istarum propositionum ordinem prorsus inuertit, ita vt ea, quæ apud nos est 18. apud ipsum sit 19. & contrà. Quarum vtramque ostendit ducendo ad id, quod fieri nequit, cùm tamen Euclides propositionem 18. directè, & ostensiuè confirmauerit, vt ex dictis liquidò constat.*

*Poterimus quoq; Theorema à Proclo demonstratum conuertere hoc modo.*

Si trianguli duo latera inæqualia fuerint, linea recta bifariam diuidens angulum ipsis contentum, secabit basin in partes inæquales, maiusq; segmẽtum erit prope maius latus.

*Dvo latera A B, A C, trianguli A B C, sint inæqualia; A C, maius, & A B, minus. Recta autẽ A D, diuidens angulum B A C, bifariam, secet basin B C, in D. Dico segmentum D C, maius esse segmento D B. Si enim non est maius, erit vel æquale, vel minus. Si dicatur esse æquale, producatur A D, ad E,[l] vt D E, æqualis sit ipsi D A, ducaturq́; recta E C. Quoniam igitur latera A D, D B, æqualia sunt lateribus E D, D C, vtrumque vtrique; A D, videlicet ipsi E D, per constructionem, & D B, ipsi D C, per hypothesin aduersarij: Sunt autem &[m] anguli ad D, dictis lateribus contenti æquales:[n] Erit basis A B, basi E C, æqualis, & angulo B A D, angulus C E D. Positus autem est & angulo B A D, angulus C A D, æqualis: Igitur & anguli C E D, C A D, æquales erunt:[o] Ideoq́; latus A C, lateri E C, æquale. Cùm igitur ostẽsum sit lateri E C, æquale esse quoq; latus A B,[p] erũt latera A C, A B, æqualia: quod est absurdũ, quia A C, maius ponebatur, quàm A B. Non erit igitur segmentum D C, segmento D B, æquale. Quòd si D C, dicatur esse minus, & D B, maius: erit, per theorema Procli, latus A B, maius latere A C: Ponebatur autem minus, quod multò magis est absurdum. Non igitur minus erit D C, quàm D B. Quare erit necessariò maius.*

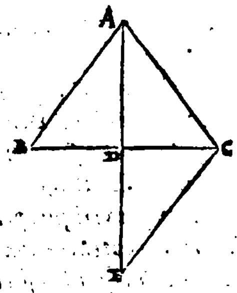
l 3. primi.
m 15. primi.
n 4. primi.
o 6. primi.
p 1. pron.



*Eodem modo demonstrari poterit hoc theorema.*

Si trianguli angulum recta linea bifariam diuidens, basin bifariam quoque secet, erunt duo latera angulum continentia inter se æqualia: Quòd si latera æqualia fuerint, basin etiam bifariam secabit linea recta, quæ angulum bifariam diuidit.

*Primvm recta A D, secans angulum B A C, bifariam diuidat quoque basin B C, in D, bifariam. Dico*

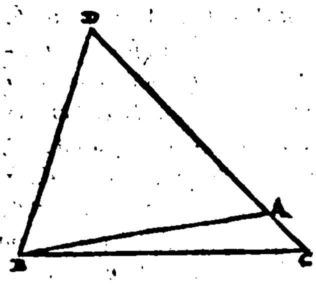


*latera A B, A C, inter se æqualia esse. Hoc autem demonstrabimus eadem ratione, qua in præcedenti theoremate ostensum fuit, latus A C, æquale esse lateri A B, si D C, segmentum segmento D B, æquale ponatur, dummodo figuram eodem modo*
a 15. primi. *construas. Cùm enim latera A D, D B, æqualia sint lateribus E D, D C: [a] & anguli*
b 4. primi. *ad D, dictis lateribus contenti æquales; [b] erunt bases A B, E C, æquales, & angulus*
c 6. primi. *C E D, angulo B A D, hoc est, angulo C A D, æqualis. Quare [c] A C, æquale erit ipsi E C, hoc est, ipsi A B.*

*Deinde sint latera A B, A C, æqualia, & recta A D, secans basim B C, in D, diuidat angulum B A C, bifariam. Dico segmentū D C, æquale esse segmento D B. Cùm enim latera A D, A B, æqualia sint lateribus; A D, A C, vtrumque vtrique, &*
d 4. primi. *anguli quoq; ad A, contenti dictis lateribus æquales per hypothesin, [d] erunt bases B D, D C, æquales.*

## 20. THEOR. 13. PROPOS. 20.

Omnis trianguli duo latera reliquo sunt maiora, quomodocunque assumpta.



Sit triangulum A B C. Dico quælibet eius duo latera, nempe A B, A C, simul maiora esse reliquo latere B C. Producatur vnum ex
a 3. primi. illis, vt C A, vsq; ad D, [a] sitq; recta A D, æqualis alteri lateri non producto A B, & ducatur recta D B. Quoniā igitur duo latera A B, A D,
b 5. primi. æqualia inter se sunt, per hypothesin, [b] erunt anguli A B D, A D B,
c 9. pronun. æquales inter se: Est autem angulo A B D, [c] maior angulus C B D. Igitur & angulus C B D, maior erit angulo A D B. In triangulo ergo
d 19. primi. C B D, latus C D, oppositum maiori angulo C B D, [d] maius erit latere B C, quod minori angulo C D B, opponitur. Cùm igitur duo latera A B, A C, simul æqualia sint ipsi C D, (si enim æqualibus A B,
e 2. pron. A D, commune addatur A C, [e] fient tota æqualia; nimirū linea composita ex A B, A C, & linea composita ex A D, A C,) erunt quoq; latera A B, A C, simul maiora latere B C. Eodem modo demonstrabitur, quælibet alia duo latera maiora esse reliquo. Quare omnis trianguli duo latera reliquo sunt maiora, &c. Quod demonstrandum erat.

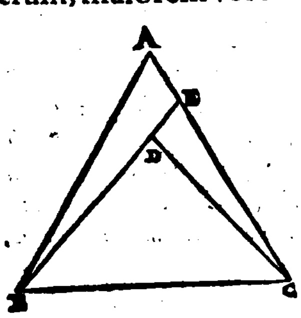
### EX PROCLO.

*Aliter hoc theorema, à familiaribus Heronis & Porphyrij demonstratur, nullo latere producto, hac ratione: Sit probandum duo latera A B, A C, trianguli A B C, maiora esse late-*
a 9. primi. *re B C. Diuidatur angulus B A C, illis lateribus contentus [a] bifariam per re-*
b 16. primi. *ctam A D. Quoniam igitur trianguli C D A, latus C D, protractum est ad B, [b] erit angulus externus B D A, maior interno & opposito C A D: Igitur & maior angulo B A D. Quare in triangulo A B D, latus A B, maiori angulo A D B,*

c 19. primi. *oppositum [c] maius erit latere B D, quod minori angulo B A D, opponitur. Eadem ratione ostendetur, latus*
d 16. primi. *A C, maius esse, quàm C D, quia angulus C D A, [d] maior est angulo B A D, hoc est, angulo C A D, &c. Quamobrem duo latera A B, A C, maiora erunt latere B C. Eademq; est ratio quorumcunque duorum laterum, si angulus ipsis comprehensus bifariam secetur.*

## 21. THEOR. 14. PROPOS. 21.

Si super trianguli vno latere, ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius constitutæ fuerint; hæ constitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maiorem verò angulum continebunt.



In triangulo A B C, super extremitates B, & C, lateris B C, intra triangulū constituantur duæ rectæ lineæ B D, C D, in puncto D, concurrentes. Dico B D, C D, simul minores esse duobus lateribus B A, C A, simul; At verò angulum B D C, maiorem angulo B A C. Produ-
a 20. primi. catur enim altera linearum interiorum, nempe B D, ad punctum E, lateris C A. Quoniam igitur in triangulo B A E, duo latera B A, A E, [a]
b 4. pron. maiora sunt latere B E, si addatur commune E C, [b] erunt B A, A C, maiora, quàm B E, E C. Rursus quia in triangulo C E D, duo latera
c 20. primi. C E, E D, [c] maiora sunt latere C D; si commune apponatur D B, [d] e-
d 4. pron. runt C E, E B, maiora, quàm C D, D B. Ostensum verò iam fuit, A B, C A, maiora esse, quàm B E, E C. Multò igitur maiora erunt B A, C A,
e 16. primi. quàm B D, C D, quod primò proponebatur. Præterea, quoniam angulus B D C, [e] maior est angulo D E C, externus interno; & angulus D E C, angulo B A C, maior quoque est, eandem ob caussam; Erit angulus B D C, multò maior angulo B A C; quod secundò proponebatur. Si igitur super trianguli vno latere, ab extremitatibus, &c. Quod erat ostendendum.

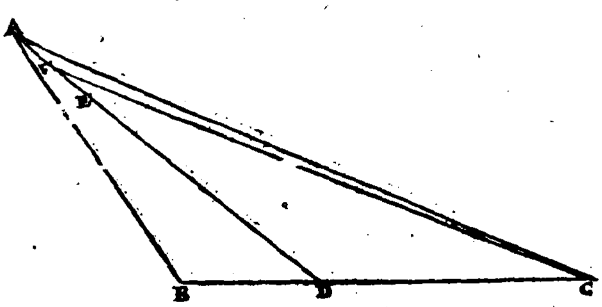
## SCHOLIVM.

*Qvam rectè Euclides dixerit, duas illas lineas intra triangulum constitutas, duci debere ab extremitatibus vnius lateris, apertè intelligi potest ex eo, quod mox ex Proclo demonstrabimus; in triangulis videlicet rectangulis, vel etiam amblygonijs, intra triangulum constitui posse duas lineas super vnum latus circa angulum rectum, vel obtusum, quarum quidem vna ab extremitate dicti lateris, altera verò à quouis puncto prope aliud extremum lateris eiusdem educitur, quæ maiores sint reliquis duobus trianguli lateribus. Item in triangulis scalenis eodem modo super maximum latus duas rectas intra trangulum constitui posse, quæ minorem comprehendant angulum, &c.*

## EX PROCLO.

*Sit triangulum habens exempli gratia angulum A B C, obtusum. Dico ab extremo C, & à quouis puncto, nempe à D, prope aliud extremum B, lateris B C, duci posse duas lineas intra triangulum ad aliquod punctum, quæ maiores sint duobus lateribus B A, A C. Ducatur enim recta D A: Et quoniam in triangulo A B D, duo anguli A B D, A D B,[a] minores sunt duobus rectis; Ponitur autem A B D, maior recto, nẽpe obtusus; erit A D B, minor recto, ideoq; minor angulo A B D. Quare latus A D,[b] maius erit latere A B. Ex D A,[c] abscindatur recta D E, æqualis rectæ A B; Et reliqua linea A E,[d] bifariam diuidatur in F. Si igitur ab extremo C, ad F, recta ducatur*

a 17. primi.
b 19. primi.
c 3. primi.
d 10. primi.

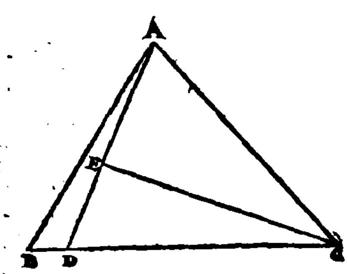


*EF, erunt duæ lineæ rectæ constitutæ C F, D F, intra triangulum maiores duobus lateribus B A, A C. Quoniam enim in triangulo A F C, duo latera A F, F C,[e] maiora sunt latere A C; Est autem recta A F, ipsi F E, æqualis, per constructionem; erunt C F, F E, maiores quoque latere C A. Si igitur æqualia addantur E D, & A B, fient rectæ C F, F D,[f] maiores lateribus C A, A B. Quod est propositum. Quòd si ad F, ex B, extremo recta duceretur, essent duæ rectæ constitutæ C F, B F, minores duobus lateribus C A, A B, vt Euclides demonstrauit.*

e 20. primi.
f 4. pron.

*Rvrsvs sit triangulum scalenum A B C, cuius latus maximum B C, minimum A B. Ex B C,[g] auferatur B D, æqualis rectæ A B, & ducatur A D, recta, ad cuius punctũ quodlibet, vt ad E, ab extremo C, recta ducatur C E. Constitutæ igitur erunt intra triangulum duæ lineæ C E, D E, quæ minorẽ angulum comprehendunt eo, quem efficiunt duo latera A B, A C. Cùm enim duo latera B A, B D, æqualia sint,[h] erunt duo anguli B A D, B D A, æquales: Sed B D A, angulus[i] maior est angulo C E D. Maior igitur erit & angulus B A D, angulo C E D. Quare multò maior erit totus angulus B A C, angulo C E D; Quod est propositum. Rectè igitur Euclides monuit, duas lineas intra triangulum constitutas educi debere ab extremis punctis vnius lateris, vt minores quidem sint duobus reliquis trianguli lateribus, maiorem verò complectantur angulum: Aliàs enim propositio vera non esset, vt iam est demonstratum.*

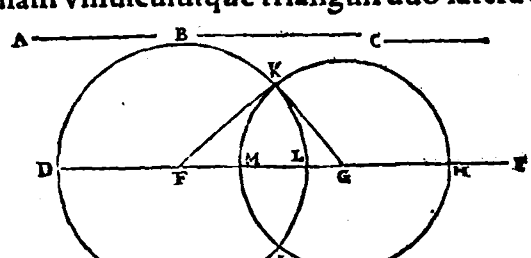
g 3. primi.
h 5. primi.
i 16. primi.



*Vervm de constitutione duarum linearum intra triangulum, quæ maiores sint, vel æquales duobus lateribus, plura ostendemus ex Pappo ad propos. 34. huius libri.*

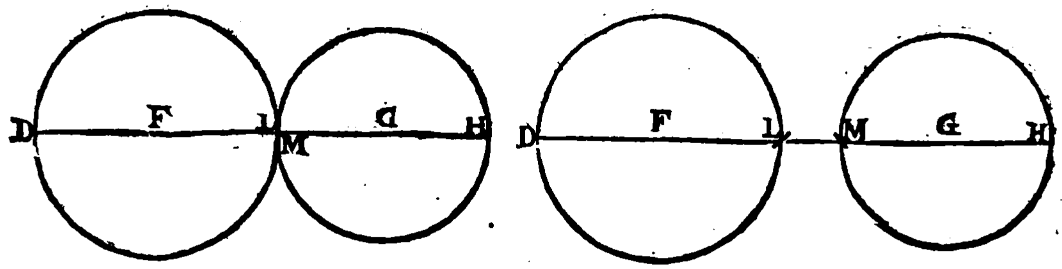
## PROBL. 8. PROPOS. 22. 22.

Ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum constituere. Oportet autem duas reliqua esse maiores omnifariam sumptas: quoniam vniuscuiusque trianguli duo latera omnifariã sumpta reliquo sunt maiora.



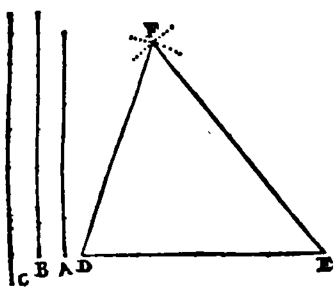
Tres lineæ rectæ datæ sint A, B, & C, quarum quælibet duæ reliqua sint maiores, (Aliàs ex ipsis nõ posset constitui triangulum, vt constat ex proposit. 20. in qua ostensum fuit, duo quænis latera trianguli reliquo esse maiora.) oporteatq; construere triangulum habens tria latera tribus datis lineis æqualia. Ex assumpta recta quauis D E, infinitæ magnitudinis[a] abscindatur recta D F, æqualis rectæ A; Et ex reliqua F E, recta F G, æqualis rectæ B; & ex reliqua G E, recta G H, æqualis rectæ C. Deinde centro F, interuallo verò F D, circulus describatur D I K: Item centro G, interuallo aũt G H, alius circulus describatur H I K, qui necessariò priorẽ secabit in punctis I, & K, (cũ enim duæ F D, G H, maiores ponantur recta F G; si ex F E, sumatur recta F L, æqualis ipsi F D: & ex G D, recta G M, æqualis ipsi G H, cadet punctum M, inter L, & D.

a 3. primi.



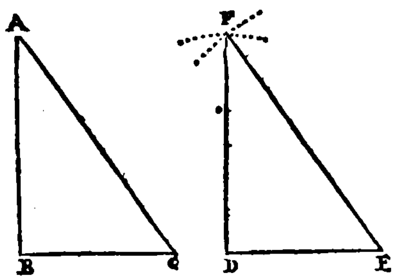

Si namq; M, caderet in L, punctum, essent G L, F L, hoc est, G H, & F D, æquales rectæ F G: Si verò M, caderet inter G, & L, essent eædem duæ F L, G M, hoc est, D F, G H, minores recta F G: quorũ vtrumq; est cõtra hypothesin. (Id quod ex appositis figuris apparet.) ex quorũ quolibet, nimirum ex K, ducantur ad puncta F, G, rectæ K F, K G, factumque erit triangulum F G K, cuius latera dico
a 15. defin. æqualia esse datis rectis A, B, & C. Cùm enim recta F K,[a] æqualis sit rectæ F D, & recta A, per con-
b 1. pron. structionem eidem F D, æqualis;[b] erit latus F K, rectæ A, æquale. Rursus quia G K, æqualis est ipsi G H; & recta C, eidem G H; erit quoq; latus G K, rectæ C, æquale: Positum autẽ fuit per constructionem, reliquum latus F G, reliquę rectæ B, æquale. Omnia igitur tria latera F K, F G, G K, tribus datis rectis A, B, C, æqualia sunt. Constituimus ergo ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum: Quod faciendum erat.

PRAXIS.




*Svmatvr recta D E, æqualis cuicunque rectarum datarum, nempe ipsi B, quam nunc volumus esse basin; Deinde ex D, ad interuallum rectæ A, arcus describatur: Item ex E, ad interuallum rectæ C, alter arcus secans priorem in F. Si igitur ducantur rectæ D F, E F, factum erit triangulum habens tria latera æqualia tribus datis lineis. Erit enim latus D F, æquale rectæ A, propter interuallum ipsius A, assumptum: & latus E F, ipsi C, propter assumptum interuallum C; D E, verò latus acceptum est rectæ B, æquale, ab initio.*

*SCHOLIVM.*

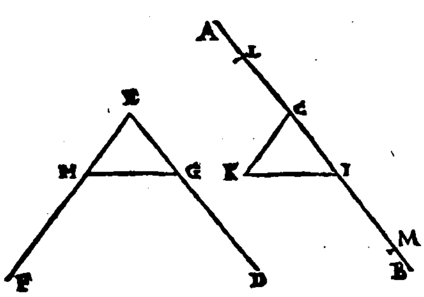



*Hac arte cuicunque triangulo proposito alterum prorsus æquale & quoad latera, angulósque, & quoad aream ipsius, constituemus. Sit namque triangulum quodcunque A B C, cui æquale omni ex parte est construendum. Intelligo eius latera, tanquam*
a 20. primi. *tres lineas rectas datas A B, B C, C A, quarum quælibet duæ[a] maiores sunt reliqua. Deinde sumo rectam D E, æqualem vni lateri, nempe B C; & ex D, interuallo lateris A B, arcum describo; item alium ex E, interuallo reliqui lateris C A, qui priorem secet in F, &c.*

23.

## PROBL. 9. PROPOS. 23.

Ad datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

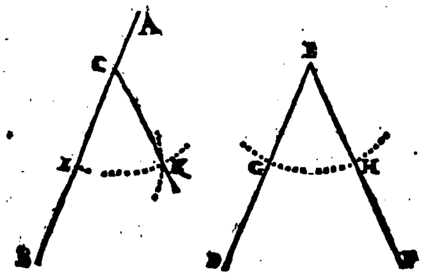



Data recta sit A B, datumque in ea punctum C, & datus angulus D E F. Oportet igitur ad rectam A B, in puncto C, angulũ constituere æqualem angulo E. Sumantur in rectis E D, E F, duo puncta vtcunque G, H, quæ recta G H, connectantur: Dein-
a 22. primi. de[a] constituatur triangulum C I K, habens tria latera æqualia tribus rectis E G, G H, H E, ita vt C I, æquale sit ipsi E G; & C K, ipsi E H; & I K, ipsi G H. (Quod facilè fiet, si C I, sumatur æqualis ipsi E G; & C L, ipsi E H, & I M, ipsi G H. Deinde ex centris C, & I, interuallis verò C L, & I M, circuli describantur, secantes sese in K, &c.) Dico angulum C, æqualem esse angulo E. Quoniam enim duo latera C I, C K, æqualia sunt duobus lateribus E G, E H, vtrumque vtrique, & basis I K, basi G H, per con-
b 8. primi. structionem;[b] erit angulus C, angulo E, æqualis. Effecimus igitur angulum ad C, æqualem angulo E, &c. Quod facere oportebat.

PRAXIS.

*Non differt huius problematis praxis ab illa, quam in præcedente problemate tradidimus; propterea quòd triangulum constituere oportet æquale alteri triangulo, vt angulus dato angulo æqualis exhibeatur, vt perspicuum est. Faciliùs tamen hac arte problema efficies. Sit linea data A B, punctúmque in ea C, & angulus*

*gulus datus E. Centro igitur E, & interuallo quouis arcus describatur G H; Eodémque interuallo ex centro C, arcus describatur I K, sumatúrque beneficio circini arcus I K, arcui G H, æqualis. Recta enim ducta C K, faciet angulum ad C, æqualem angulo E. Nam si ducerentur rectæ I K, G H, essent ipsæ æquales, propterea quòd circino non variato, vtramque distantiam I K, G H, accepimus. Cùm ergo & duo latera I C, C K, æqualia sint duobus G E, E H, ob æqualia interualla, quibus arcus sunt descripti; [a] erũt anguli I C K, G E H, æquales.* a 8. primi.



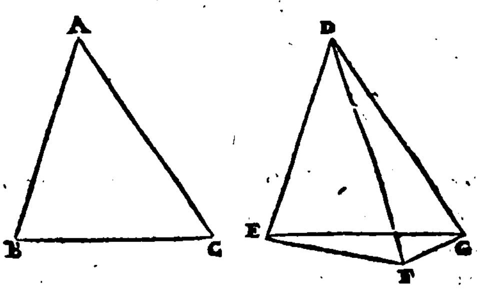

*CAETERVM qua ratione ex puncto extra datam rectam proposito recta duci possit, qua cum data recta angulum constituat dato angulo rectilineo æqualem, docebimus ad propositionem 31. huius libri.*

## THEOR. 15. PROPOS. 24. 24.

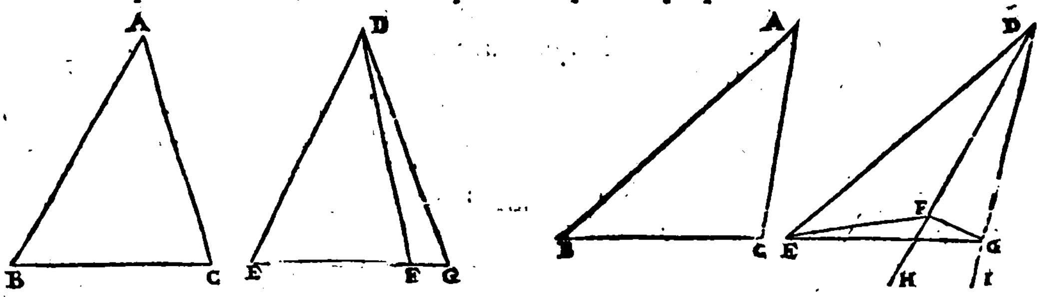
SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, angulum verò angulo maiorem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basin basi maiorem habebunt.

DVO latera A B, A C, trianguli A B C, æqualia sint duobus lateribus D E, D F, trianguli D E F, vtrumque vtrique, nempe A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F; Angulus verò A, maior sit angulo E D F. Dico basin B C, maiorem esse base E F. Ad lineam enim D E, ad eiúsque punctum D, [a] constituatur angulus E D G, æqualis angulo A; (cadetq; recta D G, extra triangulũ D E F, cùm angulus E D F, minor ponatur angulo A,) [b] ponaturque D G, æqualis ipsi D F, hoc est, ipsi A C. Ducta deinde recta E G, cadet ea aut supra rectam E F; aut in ipsam, aut infra ipsam. Cadat primùm supra E F, ducaturq; recta F G. Quia ergo latera A B, A C, æqualia sunt lateribus D E, D G, vtrumque vtrique, & angulus A, æqualis angulo E D G, per constructionẽ; [c] Erit basis B C, basi E G, æqualis. Rursus quia duo latera D F, D G, inter se sunt æqualia; [d] erũt anguli D F G, D G F, æquales. Est autem angulus D G F, [e] maior angulo E G F. Igitur & angulus D F G, eodem angulo E G F, maior erit. Quare multò maior erit totus angulus E F G, eodem angulo E G F. In triangulo igitur E F G, [f] maius erit latus E G, latere E F. Est autem ostensum E G, æquale esse ipsi B C. Maior igitur erit quoque B C, quàm E F. Quod est propositum.

a 23. primi. b 3. primi. c 4. primi. d 5. primi. e 9. pronun. f 19. primi.




CADAT deinde E G, in ipsam E F. Et quia rursus, vt priùs, basis E G, [g] æqualis est basi B C: Et E G, [h] maior quàm E F; erit & B C, maior, quàm E F, quod est propositum. g 4. primi. h 9. pron.

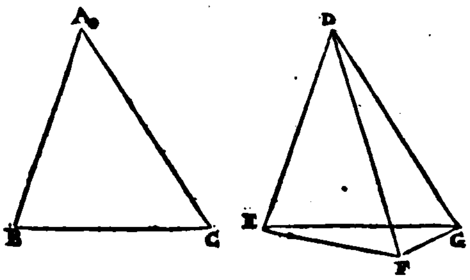



CADAT tertiò E G, infra E F, producaturq; rectæ D F, D G, vsq; ad H, & I, & ducatur recta F G. Erit autem rursus, vt priùs, [i] basis E G, basi B C, æqualis. Deinde quia duo latera D F, D G, æqualia sunt inter se, per constructionem, [k] erunt anguli G F H, F G I, infra basin F G, æquales. Est autem angulus F G I, [l] maior angulo F G E. Igitur & angulus G F H, eodẽ angulo F G E, maior erit. Quare multò maior erit totus angulus E F G, eodem angulo F G E. In triangulo ergo E F G, [m] maius erit latus E G, latere E F. Est autem ostẽsum E G, æquale esse ipsi B C. Maior igitur erit quoq; B C, basis basi E F. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus, &c. Quod erat ostendendum.

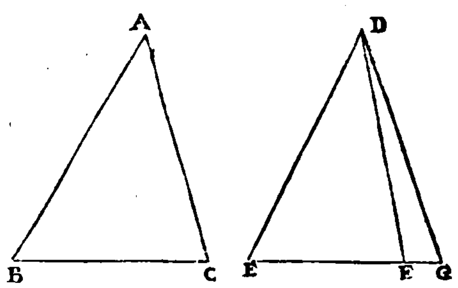
i 4. primi. k 5. primi. l 9. pron. m 19. primi.

### SCHOLIVM.

*SI quis fortè roget, cur in 4. proposit. Euclides ex eò quòd duo latera vnius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumque vtrique, & anguli contenti dictis lateribus æquales, concluserit non solùm æqualitatem basium, verùm etiam triangulorum, & reliquorum angulorum: hic autem ex eo, quòd duo latera vnius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumque vtrique, anguli verò lateribus illis comprehensi inæquales, colligat tantùm inæqualitatem basium, non autem triangulorum, & reliquorum angulorum: Huic respondendum est, necessariò id ab Euclide peritissimo Geometra esse factum. Nam ex antecedente huius theorematis semper consequitur basium inæqualitas, ita vt basis illius trianguli* *cuius angulus contentus lateribus assumptis est maior, superet basin alterius, cuius angulus minor existit, vt demonstratum est: non autem necesse est, triangulum illud maius hoc esse. Vt enim clarissimè ex Proclo demonstrabimus ad propositionem 37. huius primi libri, Triangulum maiorem habens angulum aliquando æquale est triangulo minorem habenti angulum, aliquando verò minus eodem, & aliquando maius. Non igitur potuit in vniuersum inferri ex eo, quòd angulus vnius trianguli maior est angulo alterius, triangulum etiam maius esse, cùm modò æquale sit, modò minus, & modò maius. Idem dici potest de angulis reliquis. Nam in prima figura huius theorematis angulus A B C, minor est semper angulo D E F; cùm angulus D E G, (q. æqualis est per 4. propos. angulo A B C,)[a] minor sit eodē angulo D E F, pars toto. In*




a 9.pron. *secunda autē figura existit quidem angulus A B C, angulo*
b 16.primi. *D E F, æqualis, per 4. propositionem. At verò angulus A C B, minor est angulo D F E, cū angulus D F E,[b] maior sit angulo D G F, externus interno, & opposito; & angulus D G F, æqualis sit angulo A C B. In tertia denique*



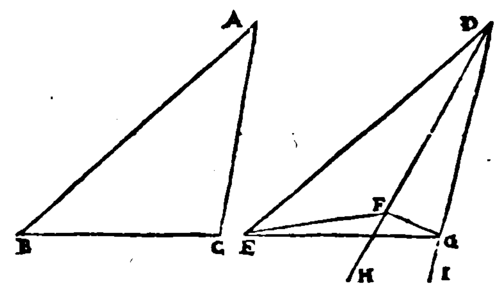
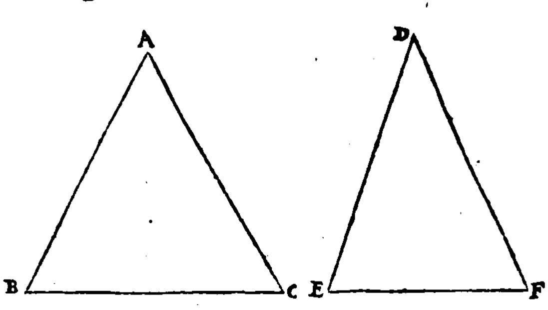




*figura angulus A B C, maior quidem est angulo D E F, propterea quòd angulus D E G, (æqualis existēs per 4.*
c 9.pron. *propos. angulo A B C,)[c] maior est eodē angulo D E F, totū parte: Sed angulus A C B, minor est angulo D F E.*
d 16.primi. *Nam si recta E F, producatur secans rectam D G, in K, fiet angulus D F E,[d] maior angulo D K E, externus interno: Est autem & angulus D K E, maior adhuc angulo D G E, externus quoque interno, & opposito. Multò igitur maior erit angulus D F E, angulo D G E, qui per 4. propos. æqualis est angulo A C B. Quod etiā constat ex 2. parte propos. 21. Nam interiores lineæ D F, E F, continent angulum maiorem angulo D G E, quem exteriores lineæ D G, E G, continent. Quare neque certi quicquam colligi potuit de inæqualitate reliquorum angulorum, cùm modò vnus altero sit maior, modò minor, & modò æqualis.*

## 25. THEOR. 16. PROPOS. 25.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, basin verò basi maiorem: Et angulum sub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.

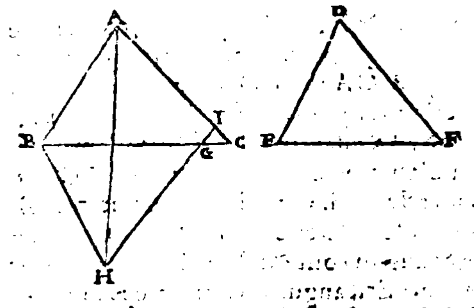



DVO latera A B, A C, trianguli A B C, æqualia sint duobus lateribus D E, D F, trianguli D E F, vtrumq; vtriq;, hoc est, A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F; Basis autem B C, maior sit base E F. Dico angulum A, maiorem esse angulo D. Si enim non est angulus A, maior angulo D, erit vel æqualis, vel minor. Si dicatur esse æqualis, cùm etiam duo latera circa A, æqualia sint duobus circa D, vtrumq; vtri-
a 4.primi. que, p hypothesin,[a] erit & basis B C, æqualis basi E F; quod est absurdum; Ponitur enim basis B C, base E F, maior: Si verò angulus A, dicatur esse minor angulo D; erit, ꝓpter æqualitatē la-
b 24.primi. terum circa istos angulos, basis E F,[b] maior base B C; qđ magis est absurdū, cùm E F, ponatur esse minor q̃ B C. Quare angulus A, cùm neq; possit æqualis esse angulo D, neq; minor, erit maior. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, &c. Quod erat ostendēdum.

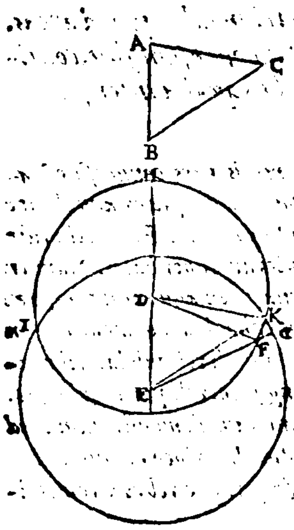
### *SCHOLIVM.*

*THEOREMA hoc conuersum est præcedentis. In eo enim ex maiori angulo demonstratū est, basin illi respondentem esse maiorem: In hoc autē ex maiori basi ostensum fuit, angulum illi respondentē maiorem esse. Differunt autē plurimùm hæc duo theoremata, nempe 24. & 25. ab illis, quæ explicata sunt propos. 18. & 19. Nam in 19. demonstratum est, in vno eodemq; triangulo maiori angulo maius latus respondere: At in 24. idem ostensum fuit in duobus diuersis triangulis, quorum duo latera vnius æqualia sunt duobus lateribus alterius, &c. Idemq; discrimen reperies inter propos. 18. & 25.*

*Menelavs Alexandrinus, vt ait Proclus, demõstrat hoc idem theorema ostensiuè, hac ratione: Positis*




*eisdem triangulis; ex base maiore B C, [a] abscindatur recta* a 3. primi.
*B G, æqualis basi minori E F. Fiat quoq; angulus G B H, [b] æ-* b 23. primi.
*qualis angulo D E F; [c] & sit B H, æqualis ipsi B A; atque adeò* c 3. primi.
*ipsi D E. Ducta autem recta linea A H, ducatur quoque recta*
*per G, ex H, secans A C, in I. Quoniam igitur duo latera B A,*
*B H, æqualia sunt, [d] erunt anguli B A H, B H A, æquales. Rur-* d 5. primi.
*sus quia latera B G, B H, æqualia sunt lateribus E F, E D, v-*
*trumque vtrique, & angulus G B H, æqualis angulo D E F, per*
*constructionem; [e] erit basis H G, basi D F, atq; adeò ipsi A C,* e 4. primi.
*æqualis, angulusq; G H B, angulo E D F. Et quoniã recta H I, [f]* f 9. pron.
*maior est, quàm H G, quæ est ostensa æqualis ipsi A C, erit quoq; maior H I, quàm A C: Sed A C, [g] maior est ad-* g 9. pron.
*huc, quàm A I. Multò ergo maior erit H I, quàm A I. Quare angulus I A H, [h] maior erit angulo I H A. Additis* h 18. primi.
*igitur duobus angulis B A H, B H A, qui ostensi sunt æquales, fiet [i] totus angulus B A C, toto angulo B H G, ma-* i 4. pron.
*ior: Sed angulus B H G, demonstratus fuit æqualis angulo D. Maior igitur etiam erit angulus B A C, angulo*
*D, quod est propositum. Quòd si quando contingat, rectam A H, cadere extra triangulum, auferendi erunt*
*anguli æquales B A H, B H A, &c. vt reliquus fiat angulus B A C, maior reliquo angulo B H G. Quando autem*
*recta A H, per punctum B, transit, nihil addendum erit, aut demendum, vt perspicuum est.*

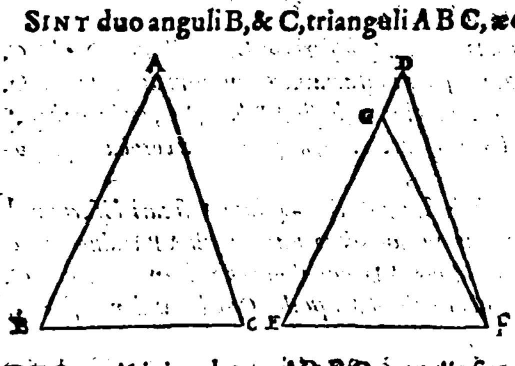



*Heron autem item ex eodem Proclo hoc modo demonstrat: Positis eis-*
*dem triangulis, producatur basis minor E F, ad G, vt sit E G, [k] æqualis basi* k 3. primi.
*maiori B C. Deinde centro D, interuallo autem D F, describatur circulus,*
*producaturq; E D, ad H, in circunferentiam. Quoniam igitur D H, [l] est æqua-* l 15. defin.
*lis ipsi D F, erit quoque D H, æqualis ipsi A C. Additis igitur æqualibus D E,*
*A B, [m] fient A C, A B, simul æquales toti H E: Sed A C, A B, [n] simul maiores* m 2. pron.
*sunt, quàm B C, atque adeò quàm E G. Igitur & H E, maior erit, quàm E G.* n 20. primi.
*Quare circulus descriptus ex centro E, & interuallo E G, intersecabit rectam*
*E H, atq; adeò circunferentiam prioris circuli in I, & K, punctis; ad K, autem*
*ducantur rectæ D K, E K. Et quoniam duo latera A B, A C, æqualia sunt duobus*
*lateribus D E, D K, vtrumque vtrique, (est enim D K, æquale ipsi D F, per defi-*
*nitionem circuli, D F, autem positum est æquale lateri A C,) & basis B C, basi*
*E K, æqualis: (cùm E K, æqualis sit ipsi E G, per definitionem circuli; E G, verò*
*recta per constructionem facta sit æqualis basi B C.) [o] Erit angulus B A C, an-* o 8. primi.
*gulo E D K, æqualis: Sed angulus E D K, maior est [p] angulo E D F. Quare &* p 9. pron.
*angulus A, angulo E D F, maior existet. Quod est propositum. Atq; hæc demon-*
*stratio generalior est priore, cùm omnibus casibus conueniat.*

## THEOR. 17. PROPOS. 26. 26.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, vtrumque vtrique, vnumque latus vni lateri æquale, siue quod æqualibus adiacet angulis, seu quod vni æqualium angulorum subtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, vtrumque vtrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

Sint duo anguli B, & C, trianguli A B C, æquales duobus angulis E, & E F D, trianguli D E F,



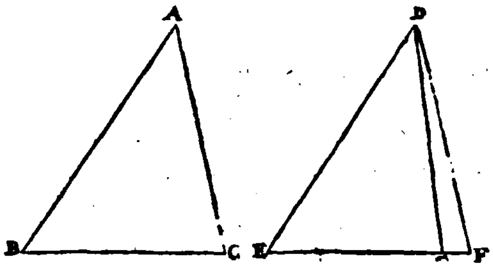

vterque vtrique, hoc est, B, ipsi E, & C, ipsi E F D;
Sitq; primò latus B C, quod angulis B, & C, adia-
cet, lateri E F, quod angulis E, & E F D, adiacet, æ-
quale. Dico, reliqua quoque latera A B, A C, reli-
quis lateribus D E, D F, æqualia esse, vtrumque
vtrique, hoc est, A B, ipsi D E, & A C, ipsi D F, ea
nimirum, quæ æqualibus angulis subtenduntur;
reliquumque angulum A, reliquo angulo D, æ-
qualem. Si enim latus A B, non est æquale late-
ri D E, sit D E, maius, à quo [a] abscindatur recta li- a 3. primi.
nea E G, æqualis rectæ lineæ AB, ducaturq; recta
G F. Quoniã igitur latera AB, B C, æqualia sunt lateribus G E, E F, vtrumq; vtriq;, & anguli B, & E,
æquales per hypothesin; [b] Erit angulus C, æqualis angulo E F G. Ponitur aũt angulus C, æqualis an- b 4. primi.
gulo EFD. Quare & angulus EFG, eidẽ angulo EFD, æqualis erit, pars toti; Quod est absurdũ. Nõ
est igitur latus AB, inæquale lateri DE, sed æquale. Quãobrẽ cũ latera AB, BC, æqualia sint laterib.

a 4.primi. D E, E F, vtrumque vtrique, & anguli contenti B, & E, æquales; [a] erunt & bases A C, D F, & anguli reliqui A, & D, æquales. Quod est propositum.

SINT deinde latera A B, D E, subtendentia æquales angulos C, & E F D, inter se æqualia. Dico rursus reliqua latera B C, C A, reliquis lateribus E F, F D, esse æqualia, vtrumque vtrique, hoc est, B C, ipsi E F, & C A, ipsi F D; reliquumque angulum A, reliquo angulo D, æqualem. Si enim latus B C, nõ est æquale lateri E F, sit E F, maius; [b] ex quo sumatur recta E G, æqualis ipsi B C, ducaturque recta D G. Quoniam igitur latera A B, B C, æqualia sunt lateribus D E, E G, vtrumque vtrique, & anguli contenti B, & E, æquales, per hypothesin; [c] Erit angulus C, angulo E G D, æqualis: Ponitur autem angulus C, angulo E F D, æqualis; Igitur & angulus E G D, angulo eidem E F D, æqualis erit, externus interno, & opposito, quod est absurdum. [d] Est enim maior. Non ergo est latus B C, lateri E F, inæquale. Quocirca, vt prius, colligetur institutum ex 4. propos. huius libri. Si duo igitur triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

b 3.primi.

c 4.primi.



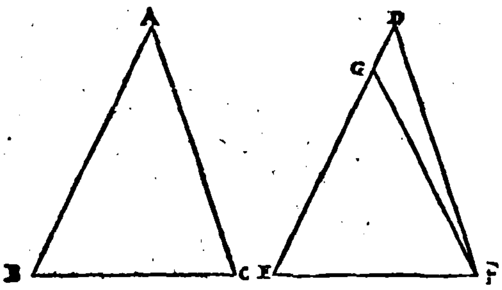

d 16.primi.

## COROLLARIVM.

*SEQVITVR ex demonstratione huius theorematis, tota etiam triangula, quoad aream, esse æqualia. Nam si latera A B, B C, lateribus D E, E F, æqualia sint, vt ostensum fuit, contineantq́ ex hypothesi angulos æquales B, E, [a] erunt tota quoq́ triangula æqualia inter se.*

a 4.primi.

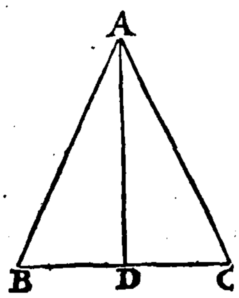
## SCHOLIVM.




*PRIOR huius theorematis pars conuersa est 4. propositionis, quoad eam partem, in qua ex æqualitate laterum, & angulorum ipsis contentorũ, collecta fuit æqualitas basium, & angulorum super bases. Nam in priori parte huius theorematis ex æqualitate basium B C, E F, & angulorum super has bases, demonstratum est, reliqua latera vnius trianguli reliquis lateribus æqualia esse, reliquumq́ angulum reliquo angulo, &c. Quod quidẽ alia nos ratione iam demonstrauimus ad propos. 8. huius lib. quemadmodũ eo loco monuimus.*

*HOC loco demonstrandum est theorema quoddam admodum necessarium, & perutile rebus Geometricis, videlicet.*

IN triangulo æquilatero, siue Isoscele, recta linea ab angulo duobus lateribus æqualibus comprehenso ducta, diuidensque vel angulum, vel basin bifariam, perpendicularis est ad basim, & siquidem angulum bifariam diuidat, secabit quoque basin bifariam. Si verò basim secet bifariam, diuidet quoque angulum bifariam. Et contrà; linea perpendicularis ad basin ducta diuidit & basin, & angulum bifariam.




*SINT in triangulo A B C, duo latera æqualia A B, A C, diuidatq́ primum recta A D, angulum A, bifariam. Dico rectam A D, esse ad B C, perpendicularem, secareq́ basin B C, bifariam. Cùm enim duo latera A B, A D, duobus lateribus A C, A D, sint æqualia, angulosq́ æquales contineant, ex hypothesi, [b] erũt & bases B D, C D, æquales, & anguli ad D, atq́ adeò recti.*

b 4.primi.

*DIVIDAT deinde recta A D, basin B C, bifariam. Dico rectam A D, ad B C, perpendicularẽ esse, & angulum A, secare bifariam. Cùm enim duo latera B D, D A, duobus lateribus C D, D A, æqualia sint, & basis A B, basi A C, ex hypothesi, [c] erunt quoq́ anguli ad D, æquales, atq́ adeò recti, ac proinde ex corollario propositionis 8. huius libri, & anguli ad A, æquales erunt.*

c 8.primi.

d 5.primi. *SED iam recta A D, sit ad B C, perpendicularis. Dico & basim B C, & angulum A, secari bifariam. [d] Erunt enim anguli B, C, supra basin B C, æquales. Itaq́ quoniam duo anguli D, B, trianguli A B D, duobus angulis D, C, trianguli A C D, æquales sunt, vterque vtrique, latúsque A D, æqualibus oppositum angulis B, C,*
e 26.primi. *cõmune; [e] erũt & reliqua latera B D, C D, æqualia, & reliqui anguli ad A, æquales. Quod erat demonstrãdũ.*

*SED & hoc theorema verum est.*

TRIANGVLVM, in quo linea recta ab vno angulorum ducta ad basim perpendicularis diuidit vel basim, vel angulum bifariam, habet duo latera dictum angulum comprehendentia æqualia: Et siquidem basis diuidatur bifariam, angulus quoque bifariam secabitur: si verò angulus bifariam secetur, basis quoque diuidetur bifariam.

IN

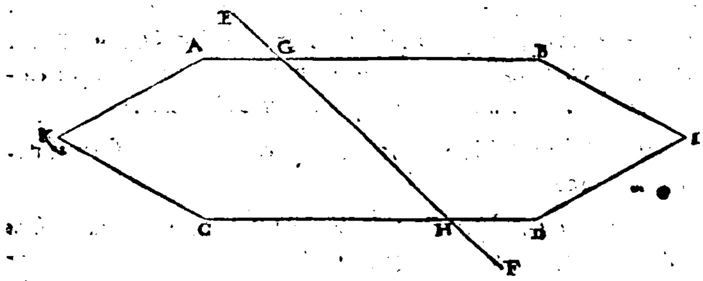
In eodem triangulo A B C, sit A D, ad B C, perpendicularis, diuidatq́; primùm basin B C, bifariam. Dico & latera A B, A C, esse æqualia & angulos ad A, æquales. Quoniam enim duo latera B D, D A, duobus lateribus C D, D A, æqualia sunt, angulosq́; comprehendunt æquales, nempe rectos; [a] erunt quoq; & bases A B, A C, & anguli ad A, æquales, quod est primum. a 4. primi.

Secet deinde perpendicularis A D, angulum A, bifariam. Dico & latera A B, A C, æqualia esse, & rectas B D, C D. Quoniam enim duo anguli D, A, trianguli A B D, duobus angulis D, A, trianguli A C D, æquales sunt, latusq́; A D, illis adiacens, commune; [b] erunt quoque & latera A B, A C, & latera B D, C D, æqualia. Quod est secundum. b 26. primi.

## THEOR. 18. PROPOS. 27. 27.

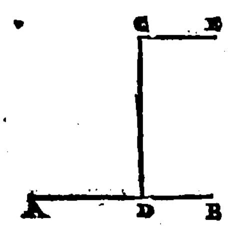
Si in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter se fecerit: parallelæ erunt inter se illæ rectæ lineæ.

In duas rectas A B, C D, incidens recta E F, faciat angulos alternatim A G H, D H G, inter se æquales. Dico lineas A B, C D, esse parallelas. Si enim non sunt parallelæ, coibunt tandem, si producantur infinitè. Si namq; non coirent vnquã, parallelæ essent, ex parallelarũ definitione. Conueniant ergo ad partes B, & D, in puncto I. Quoniã igitur triangulum est G I H, (cùm A B, recta continuata sit, itẽ recta C D; vsq; ad punctum I,) & angulus A G H, positus est æqualis angulo D H G; erit externus angulus A G H, æqualis interno, & opposito D H G; quod est absurdum; [a] quoniam externus interno maior est. Quòd si A B, C D, coire dicantur ad partes A, & C, in puncto K, erit rursus eadem ratione angulus externus D H G, æqualis interno, & opposito A G H, quod est absurdum. Non igitur coibunt lineæ A B, C D. Quare parallelæ erunt. Eodẽ modo, si ponantur anguli alterni B G H, C H G, æquales, demonstrabitur lineas A B, C D, esse parallelas. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens, &c. Quod erat ostendẽdum. a 16. primi.




### SCHOLIVM.

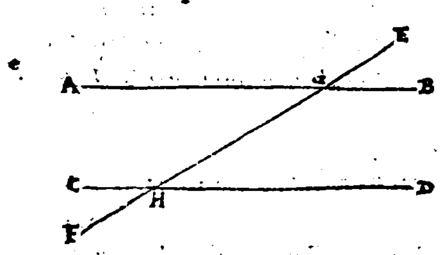
*Necesse est, vt lineæ, quæ dicũtur parallelæ, in eodem existant plano, vt ex definitione constat: Quarè non satis est duos angulos alternos æquales inter se esse, vt duæ lineæ probentur esse parallelæ, nisi ponatur, eas in vno eodemq́; existere plano. Fieri enim potest, vt linea recta incidens in duas rectas non in eodem plano existentes, faciat alternos angulos æquales. Sit enim C D, perpendicularis ad A B, rectam, quæ in subiecto plano existit; & ex C, in alio plano, ad C D, ducatur alia perpẽdicularis C E, ita vt punctũ E, intelligatur in sublimi. Quo posito, perspicuũ est, rectam C D, incidentem in rectas C E, A B, facere duos angulos E C D, A D C, alternos æquales, cùm sint recti; & tamen C E, A B, non sunt parallelæ, quòd non in eodem existant plano. Non apposuit autem Euclides in propositione hanc conditionem; in eodem plano existentes: sicut neque in subsequentibus; quoniam cùm in prioribus sex libris agatur de planis duntaxat, vt suprà diximus, omnia intelligenda sunt necessariò in eodem plano existere. In 11. verò lib. & alijs, qui ipsum sequuntur, monebit semper, lineas aliquas in eodem esse plano, vel in diuersis planis; quia in illis libris disseritur de solidis, in quibus diuersa plana considerari possunt. Quod idem dicendum est de punctis extra lineas, & superficies, &c.*

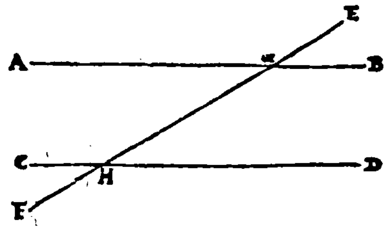



## PROBL. 19. PROPOS. 28. 28.

Si in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & opposito, & ad easdem partes, æqualem fecerit; Aut internos, & ad easdẽ partes duobus rectis æquales: Parallelæ erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

In duas rectas A B, C D, recta incidens E F, faciat primò externũ angulum E G A, æqualem angulo interno, & opposito ad easdẽ partes G H C. Dico rectas A B, C D, esse parallelas. Quoniam enim angulo E G A, æqualis ponitur angulus G H C; & eidem angulo E G A, [a] æqualis est angulus H G B; [b] erunt anguli alterni G H C, H G B, æquales. Quare lineæ A B, C D, [c] parallelæ erunt. Idem ostendetur, si angulus externus E G B, æqualis ponatur interno G H D. a 15. primi. b 1. pron. c 27. primi.



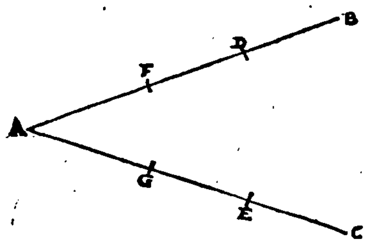



Deinde faciat recta E F, angulos internos ex eadem parte, nempe A G H, C H G, duobus rectis æquales. Dico rursus rectas A B, C D, esse parallelas. Quoniã enim anguli A G H, C H G, duobus rectis æquales ponuntur; Sunt
a 13. primi. autem & anguli A G E, A G H, [a] duobus rectis æquales; Erunt duo anguli A G H, C H G, duobus angulis A G E, A G H, æquales. Ablato igitur communi angulo A G H, remanebit angulus A G E, externus angulo C H G, interno, & opposito ad easdẽ partes æqualis. Quare vt iam ostensum est, erunt rectæ A B, C D, parallelæ. Idem ostendetur, si duo anguli B G H, D H G, duobus rectis ponantur æquales. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum, &c. Quod erat demonstrandum.

## *SCHOLIVM.*

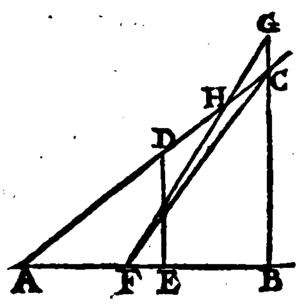
*Iamdudum pronunciatum tertiumdecimum à Principiorum numero reiecimus. Cùm igitur sequens proposit. 29. cum multis alijs illi ita innitatur, vt sine eius auxilio demonstrari nequeat, operæ pretium erit illud hoc loco, ex hactenus demonstratis theorematibus, atque problematibus, quæ ex eo nulla ratione dependent, Geometrica demonstratione confirmare, vt in expositione dicti Axiomatis polliciti sumus. Primo autem loco demonstrationem Procli afferemus. Deinde idem nos pronunciatum magis accuratè, atque euidentiùs demonstrabimus. Proclus igitur, antequàm illud demonstret, duo præmittit. Primum est:*

Si ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes infinitè producãtur, ipsarum distantia omnem finitam magnitudinem excedet.




*Exeant à puncto A, duæ rectæ A B, A C, facientes angulum A. Quoniam igitur puncta D, & E, plus inter se distant, quàm F, & G: Item puncta B, & C, plus quàm D, & E, & ita deinceps, si producantur vltrà recta linea A B, A C, perspicuum est, extrema earum puncta infinito spatio inter se distare, si infinitè ipsæ producantur. Si enim non infinito spatio distarent, augeri posset eorum distantia: igitur & lineæ ipsæ vltrà produci, quod est absurdum, cùm ponantur infinitè iam esse producta. Quare si dictæ lineæ A B, A C, producantur infinitè, ipsarum distantia excedet omnem finitam distantiam. Hoc pronunciato vsus est & Aristoteles lib. 1. de Cœlo, vbi demonstrauit, mundum non esse infinitum.*

*Quod autem rectæ A B, A C, quò longiùs protrahantur, eò magis inter se distent, (Hoc enim Proclus sine demonstratione assumpsit, cùm dixit puncta D, & E, in proxima figura plus inter se distare, quàm F, & G. Item B, & C, plus, quàm D, & E, &c.) hac ratione demonstrabimus. Demittantur ex punctis C, D, vtcunque in recta A C, acceptis, ad A B, perpendiculares C B, D E, quæ distantias punctorum C, D, à recta A B, metientur, cùm sint minimæ omnium rectarum ex C, D, ad A B, ductarum, vt in corollario proposit. 19. ostendimus. Dico C B, maiorem esse, quàm D E, at proinde plus distare rectam A C, à recta A B, in puncto C, remotiore, quàm in puncto propinquiore D. Si enim C B, non est maior, quàm D E, erit vel æqualis, vel minor. Sit primùm æqualis, & rectæ A E, abscindatur æqualis B F, ita vt punctum F, cadat vel inter A, & E, vel in E, vel denique inter E, & B, ducaturq́; recta F C. Quoniam igitur duo latera A E, E D, trianguli A E D, duobus lateribus F B, B C, trianguli F B C, æqualia sunt, vtrumque vtrique, angulosq́; continẽt æquales, vtpote rectos: [a]*



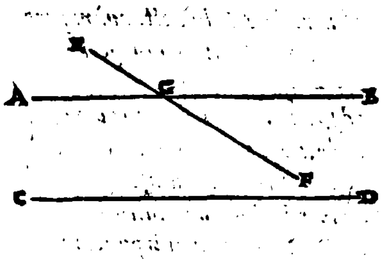

a 4. primi. *erũt & bases A D, F C, & anguli D A E, C F B, inter se æquales. Igitur externus angulus C F B, interno D A E,*
b 16. primi. *æqualis erit. [b] quod est absurdũ. Vel cùm externus angulus C F B, interno D A E, æqualis sit, [c] parallelæ erunt*
c 27. primi. *A C, F C. quod etiam absurdum est, cùm in C, concurrant.*

*Sit deinde C B, minor quàm D E, si fieri potest, & producta B C, fiat B G, ipsi D E, æqualis, iungaturq́; recta F G. Quia igitur duo latera A E, E D, trianguli A E D, duobus lateribus F B, B G, æqualia sunt, vtrum-*
d 4. primi. *que vtrique, angulosq́; continent æquales, puta rectos; [d] erunt & bases A D, F G, & anguli E A D, B F G, inter se æquales. Igitur externus angulus B F G, interno E A D, æqualis erit. quod est absurdum. Vel cùm exter-*
e 27. primi. *nus angulus B F G, interno E A D, æqualis sit, [e] erunt A C, F G, inter se parallelæ, quod absurdum etiam est, cùm se mutuò secent in H. Quocirca B C, ipsa E D, maior erit, cùm neque æqualis, neque minor esse possit, vt demonstratum est.*

*Secundum, quod Proclus præmittit, huiusmodi est:*

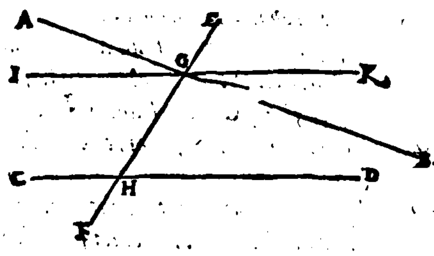
Si duarum parallelarum rectarum linearũ alteram secet quædam recta linea, reliquam quoque productam secabit.

*Sint duæ parallelæ A B, C D, & recta E F, secet ipsam A B, in G. Dico rectam E F, si producatur, secturam*




ram esse quoq; ipsam C D. Quoniam duæ rectæ G B, G F, in puncto G, angulum faciunt, si producantur infinitè, excedent omnem finitam distantiam; igitur & distantiam, qua parallela A B, à parallela C D, distat, cùm hac distantia sit finita, aliàs enim nõ essent lineæ parallelæ. Quare quando distantia G B, à G F, maior iam fuerit ea, quæ inter parallelas est, necesse est rectam G F, productam secuisse rectam C D. Nam quamdiu G F, continebitur inter duas parallelas, minori distantia à G B, remouebitur, quàm C D, ab eadem G B, vt constat. His igitur ita expositis, facilè demonstrabitur hoc theorema, quod est apud Euclidem, tertiumdecimum pronunciatum.

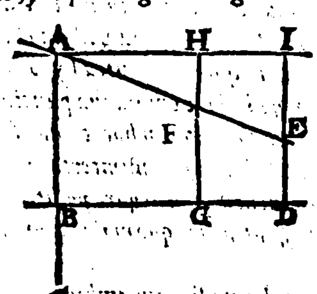
Si in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad easdemq; partes, angulos duobus rectis minores faciat; Duæ illæ rectæ lineæ infinitè productæ sibi mutuò incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.




In rectas A B, C D, incidens recta E F, faciat internos angulos ad partes B, & D, vt B G H, D H G, duobus rectis minores. Dico rectas A B, C D, coire ad easdem partes B, & D. Quoniam enim duo anguli B G H, D H G, minores ponuntur esse duobus rectis; Sunt autem duo anguli D H G, D H F, [a] duobus rectis æquales: Erunt duo anguli D H G, D H F, maiores duobus angulis D H G, B G H. Ablato ergo cõmuni angulo D H G, remanebit angulus D H F, [b] maior angulo B G H. Si igitur ad rectam F G, & ad punctum G, [c] constituatur angulus K G H, æqualis angulo D H F, cadet G K, supra G B, [d] secabitq; producta rectam A B. Quoniam igitur in duas rectas I K, C D, recta incidens E F, facit angulum externũ D H F, æqualem interno, & opposito K G H; [e] Erunt rectæ I K, C D, parallelæ. Secat autem recta A B, ipsam I K, in G: Producta igitur secabit quoq; ipsam C D, vt demonstratum est. Quare A B, cum C D, conueniet ad partes B, & D, nimirum in puncto L. quod est propositum.

a 13. primi.
b 5. pron.
c 23. primi.
d 11. pron.
e 28. primi.

Hac ergo ratione conatur Proclus Axioma 13. demonstrare. Sed quoniam principium, quod primo loco præmisit, æquè dubium, & obscurum esse videtur, atq; illud Axioma, afferemus nos demonstrationẽ magis accuratã, si prius doceamus, in quo difficultas, siue obscuritas principij illius à Proclo assumpti consistat. Quemadmodum igitur ex Procli, & aliorum Geometrarum sententia sine demonstratione concedendum non est, duas rectas, quæ semper sibi mutuò fiunt propinquiores, tandẽ aliquando concurrere, licèt sit verißimũ, cuiusmodi sunt duæ rectæ, in quas recta incidens facit internos duos angulos ex eadẽ parte duobus rectis minores; quorum vnus rectus sit, & alter acutus: Hæ enim sibi mutuò appropinquant ad eas partes, vbi duo illi anguli duobus rectis minores existunt, vt mox demonstrabimus; Quemadmodum, inquã, concedendũ hoc sine probatione non est, propterea quòd dari possunt in eodem plano duæ lineæ, vna recta, & altera inflexa, nimirum vel Hyperbole, vel linea conchoideos, sibi semper mutuò magis ac magis appropinquantes, quæ tamen nunquam coeant, licèt in infinitũ ambæ producantur, quorũ illud ab Apollonio Pergæo, hoc verò à Nicomede demonstratum est: ita quoq; non videtur sine demonstratione admittendum esse, (quanquam verißimum sit) duas rectas lineas angulum efficientes omnem finitam magnitudinem excedere, si in infinitum producantur ambæ, licèt semper magis ac magis inter se distent, vt nos suprà demonstrauimus. Nam exhiberi possunt duæ lineæ in eodem plano angulum comprehendentes, recta vna, & altera inflexa, quæ conchoideos appellatur à Nicomede, semper magis ac magis inter se distantes, quarum tamen distantia datam quamcunque rectam lineam nunquam superet, aut exæquet, licèt ambæ extendantur in infinitum.

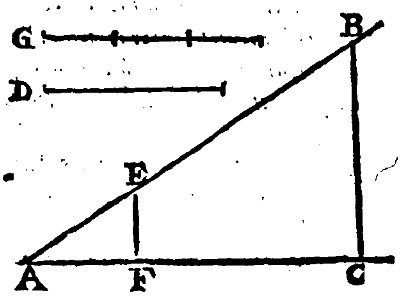



Data namque sit recta A B. Dico describi posse lineam rectam & inflexam, quarum vna ab altera semper magis recedat, distantiam tamen earũ nunquam æqualem esse rectæ A B, aut maiorem, quantumuis producantur ambæ. Producta enim recta A B, quantumlibet vsque ad C, ducatur per B, ad A C, perpendicularis B D; & polo C, interuallo autem A B, describatur linea conchoideos A E, inflexa nimirum linea, quæ rectæ B D, fiat quidem semper propinquior, nunquam tamen cum ea conueniat, vt à Nicomede traditur. Deinde per A, excitetur recta A I, ad A C, perpendicularis, quæ [f] ipsi B D, parallela erit. Postremò ex duobus punctis H, I, vtcunque in recta A I, acceptis demittatur ad B D, perpendiculares H G, I D, [g] quæ parallelæ, [h] atq; adeò æquales inter se erunt, angulósque [i] constituent ad H, I, rectos. Admittantur enim nunc, vt propositum ostendamus, omnes demonstrationes Euclidis, ac si ex axiomate decimotertio non penderent, aut etiamsi pendeant ex eo, concedantur tamen, perinde ac si axioma illud iam sit demonstratum ante propositionem 29. huius libri, vbi primùm vsus illius apparere incipit: vti verè à nobis mox ante propositionem 29. demonstrabitur. Itaq; quoniam F G, maior est, quàm E D, vt Nicomedes demonstrauit, erit F H, reliqua minor, quàm reliqua E I. Magis ergo inter se distant lineæ A I, A E, in punctis I, E, quàm in punctis H, F; atq; ita semper eas probabimus magis ac magis distare

f 28. primi.
g 28. primi.
h 34. primi.
i 29. primi.

ri, si longius protendantur. Distantia nihilominus semper minor erit, quàm recta A B, hoc est, quàm perpendicularis ex recta A I, ad rectam B D, demissa, cùm inflexa linea A E, ad rectam B D, nunquam perueniat, vt demonstratum est à Nicomede.

SCIO principium illud Procli in lineis rectis esse verissimum, & quod facili negotio, si omnes demonstrationes Euclidis, quæ ex axiomate 13. pendent, concedantur, demonstrari possit hoc modo: Contineant duæ rectæ A B, A C, angulum A, & data sit recta D, cuiusuis magnitudinis. Dico distantiam rectarum A B, A C, in infinitum productarum excedere magnitudinem D. Nam ex quouis puncto E, in recta A B, sumpto demittatur ad A C, perpendicularis E F, quæ si maior fuerit, quàm D, constat propositum: si verò non est maior, sumatur eius multiplex proximè maior, quàm D, nempe G. Sumpta autem A B, ipsius A E, ita multiplici, vt multiplex est G, ipsius E F, demittatur ex B, ad A C, perpendicularis B C, quā dico maiorem esse data recta D. Quoniam enim [a] est, vt A B, ad B C, ita A E, ad E F; (quòd ex corollario proposit. 4. libri 6. Euclidis triangula A B C, A E F, similia sint, ob rectas B C, E F, quæ [b] parallelæ sunt.) Et permutando, vt A B, ad A E; ita B C, ad E F: erit ita multiplex B C, ipsius E F, vt multiplex est A B, ipsius A E, hoc est, vt multiplex est G, ipsius E F. Cùm ergo B C, & G, æque multiplices sint ipsius E F, ipsæ erunt inter se æquales. Est autem, ex constructione, maior G, quàm D. Igitur & B C, distantia puncti B, à puncto C, maior erit, quàm recta D, data. quod est propositum.



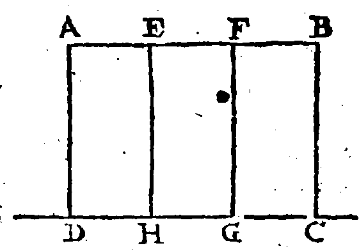

a 4. sexti.

b 28. primi.

VERVM demonstratio hæc sine proprietatibus linearum parallelarum, quæ axiomate illo 13. nituntur, vim nullam habet, ac proinde principium illud Procli assumi non potest ad illud axioma 13. demonstrandum, ne principium in eo demonstrando petatur. Quæ cùm ita sint, sedulò dedimus operam, vt illud ipsum Euclidis axioma demonstraremus ex ijs solùm, quæ ante propositionem 29. primi libri demonstrata sunt. Ante enim propositionem 29. vsus illius axiomatis apud Euclidem nullus est. Id quod in Euclide quodam Arabico factum etiam esse accepi, sed nunquam facta mihi est copia demonstrationem illam legendi, etsi obnixè illud iterum atque iterum ab eo, qui eum Euclidem Arabicum possidet, flagitaui. Quare hanc, quæ sequitur, excogitauimus. Primùm autem præmittenda quoque sunt nonnulla, quæ licet ad id, quod proponimus, demonstrandum requirātur necessariò, multò tamen euidentiora sunt, ac faciliora axiomate illo Euclidis, ita vt omni dubitatione exclusa, firmum eis assensum præbere possimus. Primum sit huiusmodi.

## I.

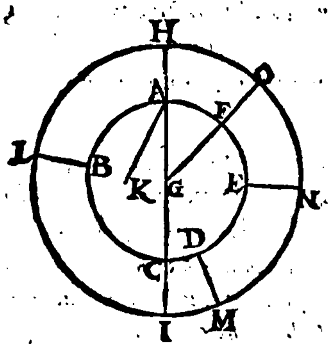
LINEA, cuius omnia puncta à recta linea, quæ in eodem cum ea plano existit, æqualiter distant, recta est.




VT si omnia puncta lineæ A B, à recta D C, æqualiter distent, hoc est, omnes perpēdiculares, quales sunt A D, E H, F G, B C, ad D C, demissæ æquales sint, (perpendicularis enim quælibet, cùm sit omnium ex eodem puncto ad rectam D C, ductarum minima, ex corollario propositionis 19. huius libri, distantiam puncti, à quo ducta est, metitur.) erit A B, linea recta. Hoc autem ex definitione lineæ rectæ liquidò constare potest. Nam si omnia puncta lineæ A B, æqualiter distant à recta D C, ex æquo sua interiacebit puncta, hoc est, nullum in ea punctum intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel huc, atque illuc deflectendo sussultabit, nihilq; in ea flexuosum reperietur, sed æquabiliter semper inter sua puncta extendetur, quemadmodum recta D C. Alioquin non omnia eius puncta æqualem à recta D C, distantiam haberent, quod est contra hypothesin. Neque verò cogitatione apprehendi potest, aliam lineam præter rectam, posse habere omnia sua puncta à recta linea, quæ in eodem cum illa plano existat, æqualiter distantia. Est sanè principium hoc, ex quo solo concesso, vnà cum ijs, quæ vsque ad propositionem 29. huius libri ostensa sunt, Axioma decimumtertium demonstrabimus, adeò clarum, vt lumine naturali cognitum sit, nemoq; sanæ mentis illud negare possit. Aut certè citra omnem controuersiam est eiusmodi, vt longè facilius ei quilibet assentiatur, quàm illi axiomati decimotertio Euclidis.

IDEM prorsus in linea circulari contingit. Nam etiam linea inflexa circularem lineam ambiens, cuius omnia puncta æqualiter à circulari distant, id est, à qua omnes rectæ in circularem lineam ad æquales angulos incidentes æquales sunt, circularis quoque est; ita vt naturam circularis lineæ, à qua æquali semper distantia abest, induat: quemadmodum linea æqualiter semper à recta linea distans, naturam lineæ rectæ, cui semper æquidistat, induit, propterea que recta est, vt diximus. Quòd autem inflexa illa linea circa lineam circularem sit quoque perfectè circularis, facilè ostendemus, si priùs demonstremus, rectam ex centro circuli ductam efficere cum circunferentia angulos binos æquales; & contrà, rectam, quæ æquales cum circunferentia angulos constituat, per centrum transire.

SIT



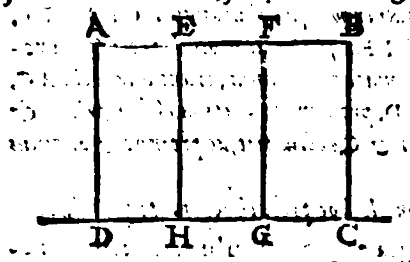

Sit igitur circulus A B C D E F, cuius centrum G. Dico rectam G C, ex centro ductam efficere tam angulos internos G C B, G C D, quàm externos I C B, I C D, inter se æquales. Producta enim I G, vsque ad A, si semicirculus A B C, circa diametrum A C, intelligatur circumuerti, congruet is semicirculo A E C, cum semicirculi eiusdem circuli sint inter se æquales. Quòd si quis dicat, vnum semicirculum alterum intersecare, ducenda erit recta linea ex centro G, secans vtramque circunferentiam, colligendúmque partem toti esse æqualem, nimirum semidiametrum vsque ad interiorem circunferentiam, semidiametro ad exteriorem vsque circunferentiam ductæ. quod absurdum est. Anguli igitur ad C, tam interni, quàm externi inter se congruēt, ac proinde æquales erunt. Efficiat iam recta H A K, æquales angulos ad A. Dico eam per centrum transire. Si enim non transeat, ducatur ex centro G, ad A, recta G A, quæ ex proximè demonstratis angulos G A B, G A F, constituet æquales. Non ergo æquales sunt K A B, K A F. Quod est contra hypothesin.

Hoc ostenso, ambiat inflexa linea H L I M N O, circularem lineam, A B C D E F, omniáque eius puncta ab hac æqualiter absint, id est, omnes rectæ ab ea linea in circularem lineam cadentes, efficientesq; angulos æquales, sint inter se æquales, cuiusmodi sunt H A, L B, I C, M D, N E, O F. Hæ enim cùm, vt demonstratum est, per centrum transeant, ᵃ erunt omnium ex punctis H, L, I, M, N, O, in conuexam peripheriam cadentium, minimæ; (Hoc enim demonstratum est ab Euclide propositione 8. libri 3. quæ solùm ex propositionibus, quæ 29. huius libri antecedunt, pendet, vt iure optimo huc transferri possit) atque adeò eorum distantiæ à subiecta linea circulari metientur. Dico lineam H L I M N O, esse circularem. Cùm enim omnes, vt proximè ostendimus, per centrum G, transeant, si æqualibus H A, O F, addantur æquales A G, F G; erunt totæ H G, O G, æquales: eademq; ratione omnes aliæ ex linea inflexa H L I M N O, ad G, ductæ æquales erunt, & rectis H G, O G, & inter se. Ex definitione circuli igitur linea inflexa circularis est. Quod erat demonstrandum. Ex hoc primo, quod præmisimus, sequitur secundum, videlicet. a 8. tertij.

## II.

Si recta linea super aliam rectam in transuersum moueatur, constituens in suo extremo cum ea angulos semper rectos, describet alterum illius extremum lineam quoq; rectam.

Vt si in priore figura recta A D, ad D C, perpendicularis moueatur in transuersum super rectam D C, constituens cum ea in D, semper rectos angulos, hoc est, non titubans, aut vacillans, sed æquabiliter semper incedens, describet extremum A, rectam quoq; lineam, nempe A B. Constat hoc ex eo, quod primo loco præmisimus, propterea quòd omnia puncta lineæ A B, descripta æqualiter à recta D C, distant, nimirum per rectam A D. Ex quo fit, ipsam lineam rectam esse, cùm, vt ibi dictum est, eius media ab extremis non subsultent, sed æqualiter inter ipsa iaceant, quippe cùm nullum eorum magis aut minus à recta C D, abscedat sursum, aut deorsum vergēdo, quàm aliud. Patet hoc etiam ex iis, quæ ad definitionem lineæ rectæ scripsimus. Cùm enim duo puncta D, A, similibus prorsus motibus ferantur, (quòd recta A D, in suo motu non titubet, aut vacillet, sed puncta D, A, æquè velociter incedant, æqualiter ergo semper inter se distent;) describent vtique lineas similes, vt in eadem definitione docuimus. Cùm ergo punctum D, rectam D C, describat, erit quoque linea A B, quam punctum A, describit, recta. Neque verò imaginari quis poterit, si linea recta in transuersum moueatur vniformiter sine vlla titubatione huc atque illuc, duo puncta eius extrema describere duas differentes inter se lineas; sed qualem vnum extremum describit, talem quoque ab altero extremo describi necesse est, propter vniformem illum, æquabilémque motum vtriusque puncti extremi. Est principium hoc æquè clarum, & euidens, atque antecedens.



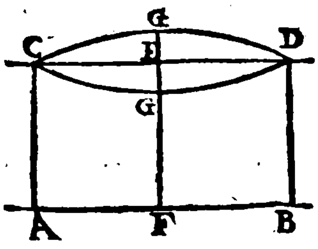

Contingit autem idem omnino in circulari linea. Nam eodem pacto recta linea super lineā circularē in transuersum fluens æquabiliter, constituens nimirum in suo extremo cum circulari æquales semper angulos, non vacillando, aut deflectendo huc atque illuc, circularem lineam altero suo extremo describit, ita vt naturam circularis lineæ subiectæ, à qua æqualiter semper distat, linea illa descripta induat: quemadmodum linea recta A D, super rectam D C, in transuersum fluens æquabiliter, constituēs nimirum cum ea in suo extremo D, angulos semper rectos, ita vt nusquam declinet, huc atque illuc deflectendo, aut titubando, lineam rectam A B, altero extremo A, delineat: adeo vt linea descripta A B, naturam induat rectæ lineæ subiectæ D C, à qua æqualiter semper recedit. Rectam autem, quæ super lineam circularem in transuersum fluit æquabiliter, describere altero suo extremo lineam quoque circularem, facilè demonstrabimus. Moueatur enim in figura posteriore recta H A, in transuersum super peripheriam A B C D E F, æquabiliter, faciens semper in extremo A, cum ea angulos æquales. Dico lineam H L I M N O, ab altero extremo H, descriptam esse quoq; circularem. Cùm enim recta H A, in omni situ motus illius imaginarij faciat æquales angulos cum peripheria

Huc pertinet primā huius paginæ figura.

*A B C D E F, sit vt ea producta in centrum G, cadat, vt suprà ostendimus. Quare additis rectis, aequalibus H A, O F, ad rectas aequales A G, F G, fient tota recta H G, O G, & oēs aliæ, inter se aequales: ac propterea ex definitione circuli H L I M N O, circunferentia circuli erit. Quod ostendendum erat. Hinc sequitur tertium.*

III.

Si ad rectam lineā duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur, erit perpendicularis ex quouis puncto huius rectæ ad priorem rectam demissa, vtrilibet priorum perpendicularium æqualis.



*Sint ad rectam A B, erectæ duæ perpendiculares A C, B D, inter se aequales: Et ducta recta C D, demittatur ex quolibet eius puncto E, ad A B, perpendicularis E F. Dico E F, vtrique A C, B D, esse aequalem. Si namque aequalis non est, erit vel maior, vel minor. Abscissa ergo aequali F G, si intelligatur recta A C, moueri in transuersum per rectam A B, faciens cum ea angulos semper rectos, describet punctum C, lineā rectam per G, transeuntem, vt suprà ostensum est, qualis est C G D. Duæ ergo rectæ C E D, C G D, superficiem claudent. Quod est absurdum. Aequalis igitur est E F, vtrique A C, B D. Quod erat ostendendum. Ex hoc quartum, quod sequitur, demonstrabimus.*

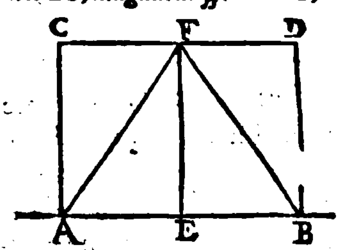
IV.

Si ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter se æquales, quarū extrema puncta per lineam rectam coniungantur, efficiet hæc recta cum vtraque perpendiculari angulum rectum.

*Sint ad rectam A B, erectæ duæ perpendiculares A C, B D, aequales inter se, ducaturq; recta C D. Dico vtrumq; angulum C, D, rectum esse. Secta namq; recta A B, bifariam in E, excitetur in E, ad A B, perpendicularis E F, iunganturq; rectæ A F, B F. Quoniā igitur duo latera A E, E F, trianguli A E F, duobus lateribus B E, E F, trianguli B E F, aequalia sunt, vtrumq; vtrique, angulosq; continent aequales, puta rectos,[a] erunt quoq; & bases A F, B F, & tam anguli F A E, F B E, quàm A F E, B F E, inter se aequales. Ablatis igitur aequalibus angulis F A E, F B E, ex rectis aequalibus C A E, D B E, reliqui erunt aequales anguli C A F, D B F. Itaq; cùm duo latera C A, A F, trianguli C A F, duobus lateribus D B, B F, trianguli D B F, aequalia sint, angulosq; cōplectantur aequales, vt ostēdimus,[b] erūt quoq; & bases C F, D F, & tam anguli C, D, quā C F A, D F B, inter se aequales. Si ergo aequalibus angulis C F A, D F B, addantur anguli A F E, B F E, ostensi aequales, fient toti anguli C F E, D F E, aequales, ac proinde recti. Quia verò perpendicularis E F, vtriq; A C, B D, aequalis est, vt proximo theoremate ostendimus, erunt duæ rectæ A C, E F, ad A E, perpendiculares, inter se aequales. Quare, vt de angulis C, D, proximè probatum est, anguli C, & E F C, aequales inter se erunt. Est autem E F C, ostensus rectus. Igitur & C, rectus erit, ac proinde & angulus D, qui ostensus est ipsi C, aequalis, rectus erit.*

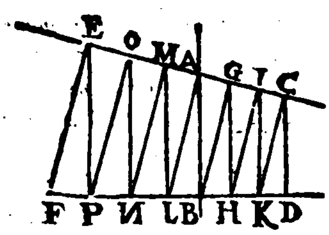
a 4. primi.

b 4. primi.



*Caeterum angulos C, D, rectos esse, demonstrabimus alio modo, hoc priùs theoremate premisso.*

Si in duas rectas lineas alia recta incidens faciat cum vna earum angulum internum rectum, & cum altera ex eadem parte acutum, duæ illæ rectæ minùs semper inter se distabūt ad eas partes, vbi est angulus acutus, ex altera verò parte semper inter se magis distabunt.



*Recta linea A B, in rectas A C, B D, incidens faciat angulū A B D, rectum, & B A C, acutum. Dico rectas A C, B D, minùs semper inter se distare versus C, D, productas, magis verò, si versus E, F, producantur.[c] Ducatur enim ex B, ad A C, perpendicularis B G, quæ ex coroll. 2. propos. 17. huius lib. ad partes acuti anguli B A C, cadet. ac ꝓpterea angulus G B D, pars recti anguli A B D, acutus erit. Demissa ergo ex G, ad B D, perpendicularis G H, cadet quoq; ad partes anguli acuti G B D, ex eodem coroll. angulusq; propterea H G C, pars recti anguli B G C, acutus erit. Rursus ergo ducta perpendicularis H I, ad A C, per idem corollar. ad partes acuti anguli H G C, cadet, ideoq; angulus I H D, pars recti anguli G H D, acutus erit. Atq; ita deinceps in infinitum, si ex I, ad B D, perpendicularis I K, ducatur, & ex K, perpendicularis K C, ad A C, & ex C, ad B D, perpendicularis C D, &c. cadent omnes ad partes angulorum acutorum, vna post aliam. Quoniam igitur in triangulo A B G, angulus B A G, acutus est, & A G B, rectus,[d] erit recta A B, maior quàm B G; & in triangulo B G H, recta B G, angulo recto G H B, opposita, maior quàm G H; & in triangulo G H I, recta G H, maior quàm H I: Atque ita deinceps erunt semper rectæ, quæ ipsi A B, propiores sunt, maiores iis, quæ remotiores sunt, & nunquam finis erit huius decrementi perpendicularium, cùm nunquam possit esse finis ducendarum perpendicularium. Quapropter recta A C, in G, minùs distabit à recta B D, q̄ in A, & in I, minùs, quàm in G, & in C, minùs, quàm in I, &c. quandoquidem*

c 11. primi.

d 19. primi.

perpendicu-

*perpendiculares A B, G H, I K, C D, &c. quæ ordinatim decreſcũt, vt oſtendimus, minima ſunt omnium à punctis A, G, I, C, in rectam B D, cadentium, vt ex corollario propoſ. 19. huius libri liquet, ac proinde eorundem punctorum diſtantias ab eadem recta B D, metiuntur. Conſtat ergo, rectas A C, B D, ad partes C, D, productas continenter fieri minùs inter ſe diſtantes: quod eſt primum.*

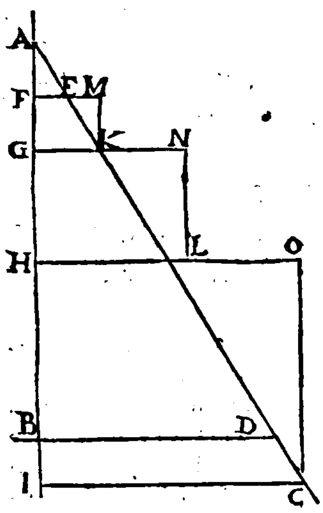
*DVCATVR rurſus [a] ex A, ad A C, perpẽdicularis A L, quæ angulum obtuſum B A E, partietur in rectum E A L, & acutum L A B, hoc eſt, cadet inter A B, & A E; eritq́ angulus A L B, acutus, cùm ambo A B L, A L B, [b] ſint duobus rectis minores, atque A B L, rectus ſit; ac proinde angulus A L F, obtuſus erit. Eadẽ ratione perpendicularis L M, ex L, ad B F, ducta cadet inter L A, L F, facietq́ angulum L M A, acutũ, & L M E, obtuſum. Item perpendicularis M N, ex M, ad A E, erecta cadet inter M L, M E, angulumq́ M N B, acutum, & M N F, obtuſum conſtituet. Atq́ ita deinceps in infinitum, ſi ex N, ad B F, perpendicularis erigatur N O, & ex O, ad A E, perpendicularis O P, & ex P, ad B F, perpendicularis P E, & ex E, ad A E, perpendicularis E F, &c. diuident omnes ſigillatim angulos obtuſos, vnã poſt aliam. Quoniam igitur in triangulo A B L, angulus A B L, rectus eſt, & A L B, acutus [c] erit A L, recta maior, quàm A B, & in triangulo A L M, recta L M, angulo recto L A M, oppoſita, maior quàm A L: atq́ in triangulo L M N, recta M N, recto angulo M L N, oppoſita, maior quàm M L: Atq́ ita deinceps erunt ſemper rectæ, quæ ab A B, longiùs abſunt, maiores ijs, quæ propinquiores ſunt, in infinitum. Quamobrem recta A E, in M, magis à recta B F, diſtabit, quàm in A, & in O, magis, quàm in M, & in E, magis, quàm in O, &c. quandoquidem perpendiculares A B, M L, O N, E P, &c. quas ordinatim augeri, oſtenſum fuit, minima ſunt omnium ex punctis A, M, O, E, in rectam B F, cadentium, &c. Liquidò ergo conſtat, rectas A C, B D, ad partes E, F, productas continenter fieri magis inter ſe diſtantes, quod eſt ſecundum. Quòd ſi proteruus quiſpiam vellet contendere, rectam A L, quæ ad A C, perpendicularis eſt, non concurrere cum D B, producta; conſtabit multò magis id, quod demonſtrandum proponitur. Nam linea D B, vltra punctũ B, multò magis à recta C A, diſtabit, quàm in puncto B; quandoquidem A L, ad A C, perpendicularis in infinitũ producta non concurrit cum D B, cùm tamẽ G B, ad eandem A C, perpendicularis cum D B, concurrat in B, &c.* a 11. primi. b 17 primi. c 19. primi.

*HAEC cùm ita ſint, nullo negotio demonſtrabimus, in ſuperiori figura angulos C, D, eſſe rectos. Nam ſi angulus C, verbi gratia, non dicatur eſſe rectus, erit vel acutus, vel obtuſus. Sit primùm acutus. Quoniam ergo recta C A, in rectas A B, C D, incidens efficit angulum C A B, rectum, & C, acutum, minùs ſemper inter ſe diſtabunt rectæ C D, A B, ad partes D, B, productæ, hoc eſt, perpendiculares ex C D, in A B, demiſſæ ordinatim minores fient, quàm C A, vt proximè demonſtratum eſt. Minor ergo eſt perpendicularis D B, quàm C A, quod eſt abſurdum, cùm ponatur æqualis. Non igitur acutus eſt angulus C. Eademq́ ratione neq́ angulus D, acutus erit. Sit deinde angulus C, obtuſus. Quia igitur recta C A, in rectas C D, A B, incidens facit angulũ C A B, rectum, & C, obtuſum, magis ſemper inter ſe diſtabunt rectæ C D, A B, ad partes D, B, productæ, hoc eſt, perpendiculares ex C D, in A B, demiſſæ continenter augebuntur, vt proximè oſtendimus. Maior ergo eſt perpendicularis D B, q̃ C A, quod eſt abſurdum, cùm æqualis ponatur. Non igitur obtuſus eſt angulus C. Eademq́ ratione neq́ angulus D, obtuſus erit. Sed neq́ acutus eſt oſtenſus. Rectus igitur vterq́ eſt, quod erat oſtendendũ.*

*EX his demonſtratis, facilè iam Axioma 13. demonſtrabimus hoc modo.*

## V.

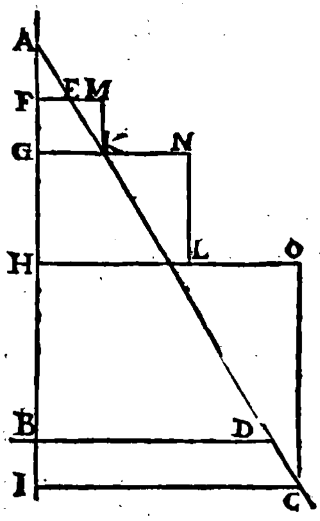
SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad eaſdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ ſibi mutuò incident ad eas partes, vbi ſunt anguli duobus rectis minores.




*HOC eſt Axioma 13. apud Euclidem in noſtris Commentarijs; apud alios eſt vndecimum, quod demonſtrandum ſuſcepimus. Incidens ergo recta A B, in rectas A C, B D, faciat internos, ad eaſdemq́ partes angulos A B D, B A C, duobus rectis minores. Dico rectas A C, B D, ad partes C, D, productas coire. Sit enim primũ alter angulorum, nempe A B D, rectus, & alter B A C, acutus. Sumpto in recta A C, puncto quolibet E, [d] ducatur ex eo ad rectam A B, perpẽdicularis E F, & rectæ A F, æqualis accipiatur F G, & G H, æqualis ipſi A G, & H I, ipſi A H, ita vt A G, ipſius A F, & A H, ipſius A G, & A I, ipſius A H, dupla ſit. Et quoniam ſi rectæ A F, abſcindantur continuè æquales rectæ ex A B, aliqua tandem pars vltra B, punctum cadet, quod finita recta A B, per continuam ablationẽ vnius eiuſdemq́ quantitatis abſumatur tandem, quandoquidem linea A F, ita multiplicari poteſt, (quod fit, ſumendo ipſi in A B, continenter partes æquales) vt tandem aliquando finitam lineam A B, ſuperet: Id quod Euclides frequenter aſſumit in lib. 5. & alijs ſequentibus, vbi datis duabus magnitudinibus inæqualibus, proportionem inter ſe habentibus, iubet plerunque minorem ita multiplicari, donec maiorem ſuperet. Fit vt multò magis, ſi ipſi A F, æqualis abſcindatur F G, & toti deinde A G, non autem ſoli A F, æqualis auferatur G H: Item toti A H, non autem ſoli A F, vel A G, æqualis dematur H I, & ſic deinceps, cadat tandem pars aliqua vltra punctum B. Statuatur ergo punctum I, terminans* d 12. primi.

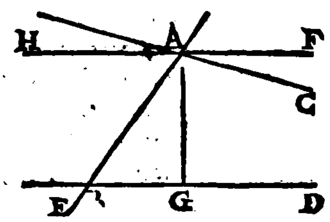
tertiam duplam in dato exemplo, existere vltra punctum B. Accipiatur quoq; in recta A C, recta E K, ipsi A E; & K L, ipsi A K, & L C, ipsi A L, æqualis, ita vt tot sint partes in recta A C, quot in recta A I; ducanturq; rectæ K G, L H, C I, producanturq; vnà cum E F, vt E M, K N, L O, ipsis EF, K G, L H, fiant æquales, ac tandem rectæ iungantur, M K, N L, O C. Itaq; quoniam duo latera K E, E M, trianguli K E M, duobus lateribus A E, E F, trianguli A E F, per constructionem æqualia sunt, vtrumque vtrique, a angulosq; ad verticem E, continēt æquales, b erit & basis M K, basi A F, & angulus M, angulo F, æqualis. Est autem & F G, eidem A F, æqualis, & angulus F, rectus, ex constructione. Igitur & M K, F G, c æquales inter se erunt, & angulus M, quoq; rectus. Quare cùm ad F M, excitatæ sint duæ perpendiculares æquales F G, M K, erit per antecedens theorema, angulus G, rectus. Rursus ergo, quia duo latera L K, K N, trianguli L K N, duobus lateribus A K, K G, trianguli A K G, æqualia sunt, ex constructione, d angulosq; comprehendunt æquales ad K, verticē, e erit & angulus N L, basi A G, & angulus N, angulo G, æqualis. Est autem & G H, ex constructione, eidem A G, æqualis, & angulus G, rectus, vt proximè demonstratum est. Igitur & N L, G H, inter se f erūt æquales, & angulus N, quoq; rectus. Quocirca per præcedens theorema, erit etiam angulus H, rectus. Eadem ratione ostendemus angulum I, rectum esse: atque ita deinceps, si plures essent partes rectæ A B. Est autem & angulus B, per hypothesin rectus. Igitur rectæ I C, B D, g parallelæ sunt, ac propterea B D, producta rectam A C, secabit supra punctum C; atq; adeò in puncto illo sectionis rectæ A C, B D, coibunt. Quod erat demonstrandum.

a 15. primi.
b 4. primi.
c 1. pron.
d 15. primi.
e 4. primi.
f 1. pron.
g 28. primi.



Sit deinde neuter angulorū A B D, B A C, rectus, sed A B D, quidem acutus, & B A C, vel acutus etiam, vel obtusus. Quia igitur duo anguli A B D, B A C, duobus rectis ponuntur minores; h sunt autem duo anguli A B D, D B E, duobus rectis æquales: erūt hi duo illis duobus maiores. Ablato ergo communi A B D, maior erit reliquus D B E, reliquo B A C. i Constituatur in A, ad rectam A B, angulus B A F, angulo D B E, æqualis: Cadetq; recta A F, supra rectam A C; cùm A F, maiorem angulum cum A B, constituat, quàm A C. Quia igitur externus angulus D B E, interno B A F, ex eadem parte opposito æqualis est, k erunt rectæ A F, B D, inter se parallelæ. Demittatur quoq; ex A, ad B D, l perpendicularis A G, quæ ex corollario 2 propos. 17. huius lib. ad partes acuti anguli A B D, cadet: Eritq; angulus quoq; G A F, rectus. Nam si acutus esse dicatur, efficiet recta A G, in rectas A F, B D, incidēs angulū A G D, rectum, & G A F, acutum, ac proinde, vt proximè demonstrauimus, rectæ A F, B D, ad partes F, D, productæ coibunt tandem: Quod est absurdum: Ostensæ enim sunt parallelæ. Si autem angulus G A F, dicatur esse obtusus, erit G A H, acutus. Quare ex proximè demonstratis, coibunt rectæ A F, B D, ad partes H, B, productæ, quod est absurdū, cùm parallelæ sint ostensæ. Non est ergo angulus G A F, acutus, aut obtusus. Igitur rectus, ac proinde eius pars G A C, acutus. Quoniam igitur recta A G, in rectas A C, B D, incidens facit angulum G, rectum, & G A C, acutum, concurrent rectæ A C, B D, ad partes C, D, productæ, vt proximè demonstrauimus. Si igitur recta A B, in rectas A C, B D, incidens faciat duos angulos minores duobus rectis, neutrum tamen angulorum A B D, B A C, rectū, ipsæ rectæ, A C, B D, ad partes C, D, productæ conuenient. Quod erat ostendendum.

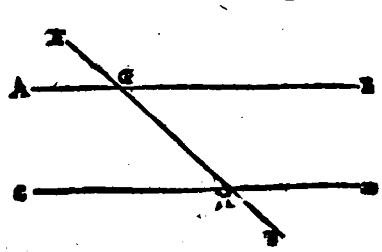
h 13. primi.
i 23. primi.
k 28. primi.
l 12. primi.



Qvamvis autem, concesso principio nostro, optimè à nobis demonstratum sit 13. hoc Axioma, & à Proclo etiam, si eius principium difficilius quidem, quàm nostrū, admittatur, vt iure optimo inter theoremata, & non inter principia possit connumerari; tamen ne ordinem Euclidis in quoquam immutemus, vtemur eo in omnibus propositionibus, quarum demonstrationes ex ipso pendent, tanquam pronunciato. Sed iam ad seriem propositionum Euclidis reuertamur.

## 29. THEOR. 20. PROPOS. 29.

In parallelas rectas lineas recta incidens linea; Et alternatim angulos inter se æquales efficit; & externum interno, & opposito, & ad easdem partes æqualem; & internos, & ad easdem partes, duobus rectis æquales facit.



a 4. pron.
b 13. primi.
c 13. pron.

In parallelas AB, C D, recta incidat E F. Dico primùm angulos alternos A G H, D H G, inter se esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit alter, nempe A G H, maior. Quoniam igitur angulus A G H, maior est angulo D H G, si addatur cō munis angulus B G H, a erunt duo A G H, B G H, maiores duob⁹ D H G, B G H: At duo A G H, B G H, b æquales sunt duobus rectis. Igitur duo D H G, B G H, minores sunt duobus rectis. Quare cū sint interni, & ad easdē partes B, & D, c coibunt lineæ A B, C D, ad eas partes, quod est absurdū, cùm ponantur

ponantur esse parallelæ. Non est igitur angulus A G H, maior angulo D H G: Sed neque minor. Eadem enim ratione ostenderetur, rectas coire ad partes A, & C. Igitur æquales erunt anguli alterni A G H, D H G. Eademque est ratio de angulis alternis B G H, C H G.

Dico secundò, angulum externum A G E, æqualem esse interno, & ad easdem partes opposito C H G. Quoniam enim angulo B G H, æqualis est alternus C H G, vt ostensum est; & eidem B G H,[a] æqualis est angulus A G E; Erunt anguli A G E, C H G,[b] inter se quoque æquales. Eodem modo demonstrabitur, angulum B G E, æqualem esse angulo D H G. a 15. primi. b 1. pronun.

Dico tertiò, angulos internos ad easdē partes A G H, C H G, æquales esse duobus rectis. Quoniam enim ostensum fuit, angulum externum A G E, æqualem esse angulo C H G, interno; si addatur cōmunis A G H,[c] erūt duo A G E, A G H, duobus C H G, A G H, æquales: Sed duo A G E, A G H,[d] æquales sunt duobus rectis. Igitur & duo anguli C H G, A G H, æquales duobus rectis erunt. Eodem modo anguli B G H, D H G, duobus erunt rectis æquales. In parallelas ergo rectas lineas recta incidens linea, & alternatim angulos, &c. Quod erat demonstrandum. c 2. pron. d 13. primi.

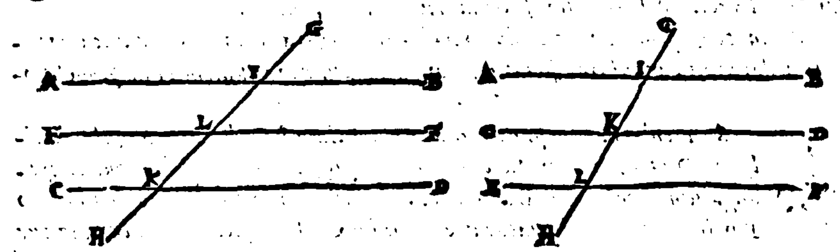
*SCHOLIVM.*

*Convertit autem hoc præsens theorema duo præcedentia theoremata, vt perspicuum est.*

## THEOR. 21. PROPOS. 30. 30.

Qvæ eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ.

Sint rectæ A B, C D, eidē rectæ E F, parallelæ. Dico & ipsas A B, C D, esse inter se parallelas. Quoniam enim omnes hæ lineæ in eodem ponuntur esse plano, (Nam propos. 9. libri 11. agitur de lineis in diuersis planis) ducta recta G H, secabit omnes, nimirum A B, in I; C D, in K; & E F, in L. Quia igitur A B, ponitur parallela ipsi E F,[a] erit angulus A I L, alterno F L I, æqualis. a 29. primi.

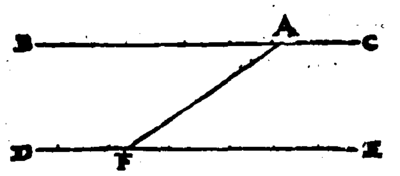


Rursus quia C D, ponitur etiam parallela ipsi E F,[b] erit angulus D K I, eidem angulo F L I, nempe internus externo, vel externus interno, æqualis. Quare anguli A I L, D K I,[c] æquales inter se quoq; erunt. Cùm igitur sint alterni,[d] erunt rectæ A B, C D, parallelæ inter se. Quæ igitur eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ. Quod demonstrandum erat. b 29. primi. c 1. pronun. d 27. primi.

*SCHOLIVM.*

*Qvod si quis dicat, duas rectas A I, B I, parallelas esse rectæ C D, & tamen ipsas non esse parallelas; Occurrendum est, duas A I, B I, nō esse duas lineas, sed partes tantum vnius lineæ. Concipiendum enim est animo, quaslibet parallelas infinitè esse productas; Constat autem A I, productam coincidere cum B I. Quamobrem propositio hæc generalius ita poterat proponi.*

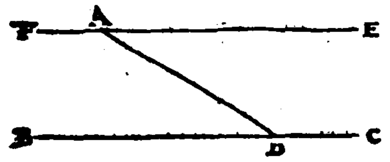
Qvæ eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ: vel certè, quando inter se coëunt, vnam eandemque lineam constituunt.



*Sint enim duæ rectæ A B, A C, coëuntes in A, parallelæ ipsi D E. Dico illas in rectum esse cōstitutas. Ex puncto enim A, ducatur recta A F, secans D E, in F, vtcunq;. Quoniam igitur A B, D E, sunt parallelæ,[a] erūt anguli alterni B A F, A F E, æquales. Addito ergo communi angulo C A F,[b] erūt duo anguli ad A, æquales duobus angulis C A F, A F E. Sed hi duo æquales[c] sunt duobus rectis, cùm sint interni inter duas parallelas A C, D E. Igitur & duo anguli ad A, duobus erūt rectis æquales; ac propterea[d] in rectum erunt constitutæ ipsæ A B, A C. Quod est propositum.* a 29. primi. b 2. pron. c 29. primi. d 14. primi.

## PROBL. 10. PROPOS. 31. 31.

A dato puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.



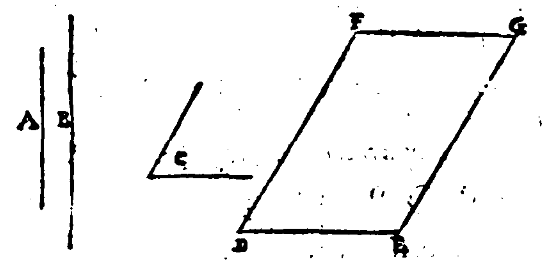
Ex puncto A, ducenda sit linea parallela lineæ B C. Ducatur ex A, ad B C, linea A D, vtcunq;, faciens angulum quemcunque A D B; Cui ad A,[a] æqualis cōstituatur E A D. Dico rectam E A, extensam ad F, quantumlibet, parallelā esse ipsi B C. Cùm enim anguli alterni A D B, D A E, æquales sint per constructionem:[b] Erunt rectæ B C, E F, parallelæ. A dato igitur puncto, datæ rectæ lineæ, &c. Quod erat faciendum. a 23. primi. b 27. primi.

*SCHOLIVM.*

*Debet autem punctum datum in tali esse loco situm extra lineam datam, vt hæc producta cū illo non conueniat. Quod quidē apertè colligitur ex ipsa constructione problematis. Nam ex puncto dato ducenda est*

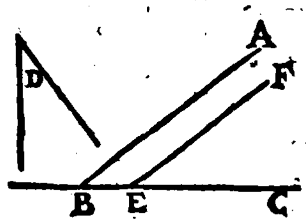
linea faciens angulum aliquem cum linea data, qui fieri non possit, si punctum in directum iaceret cum ipsa linea data. Quemadmodum autem ab vno, eodemq; puncto ad eandem rectam non plures perpendiculares, quàm vna, ducuntur, vt ostendimus propos.17. ex Proclo; ita etiam per idem punctum, datæ rectæ plures parallelæ, quàm vna, duci nequeunt. Si enim duæ ducerentur, conuenirent ipsæ in puncto illo eodem, quod est ab-
a 30.primi. surdum,[a] cum sint parallelæ inter se, propterea quòd vni & eidem, cui parallelæ dicuntur duci, sunt parallelæ.

Ex hoc porrò problemate, & illo, quod propos.23. continetur, facili negotio constituemus parallelogrammum, cuius vnus angulorum æqualis sit, dato angulo rectilineo, lateraq; angulum illum comprehendentia datis duabus rectis lineis æqualia.



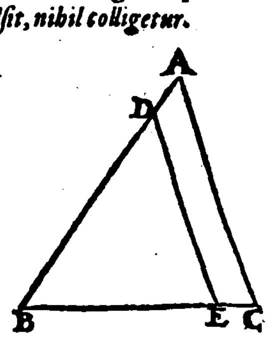

Sint enim data recta A B, oporteatq; constituere parallelogrammum habens angulum æqualem dato angulo rectilineo C, lateraq; circa
illum angulum rectis A, B, æqualia. Sumpta recta
b 23.primi. D E, quæ rectæ A, sit æqualis,[b] fiat angulus E D F,
c 3.primi. angulo C,[c] & recta D F, rectæ B, æqualis. Deinde
d 31.primi. per E,[d] agatur recta E G, ipsi D F, parallela, & per F, recta F G, ipsi D E, parallela secans E G, in G. Quoniam ergò & latera D F, E G, & D E, F G, pa-
e 35.defin. rallela sunt, ex constructione;[e] parallelogrammum erit D E G F. Quod cùm ex constructione, habeat angulum D, angulo dato C, æqualem, & latera D E, D F, circa dictum angulum D, datis rectis A, B, æqualia; factum erit, quod proponitur.

Pari ratione ex hoc problemate, & propositione 23. ducemus à puncto extra datam rectam lineam proposito lineam rectam, quæ cum data recta angulum efficiat, dato angulo rectilineo æqualem, vt ad propositionem 23. polliciti sumus.

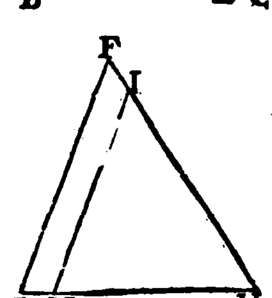



Sit enim datum punctum A, extra rectam B C, & datus angulus rectilineus D, oporteatq; ex A, ad rectam B C, ducere lineam rectam, quæ cum ea angulum, dato angulo D, æqualem comprehendat. Sumpto quolibet puncto
f 23.primi. E, in linea B C,[f] constituatur in eo angulus C E F, angulo D, æqualis. Si igitur recta E F, per datũ punctũ A, transeat, factum erit, quod iubetur. Si verò nõ
g 31.primi. transeat per A,[g] ducatur per A, recta A B, ipsi E F, parallela secans B C, in B.
h 29.primi. Dico angulum A B C, angulo D, æqualem esse. Cùm enim parallelæ sint A B, E F,[h] erit angulus C E F, externus interno A B C, ex eadem parte opposito
i 1.pron. æqualis. Cùm ergo & angulus D, angulo E, per constructionẽ sit æqualis,[i] æquales inter se erũt anguli A B C, & D. quod est propositum.

Non videtur autem alienũ ostendere hoc loco, rectè Euclidem proposit.26. vt demonstraret æqualitatem laterum in duobus triangulis, ex æqualitate duorũ angulorum, & vnius lateris præcepisse, latus illud vel adiacere debere angulis æqualibus, vel certè subtendere angulum æqualem. Nam nisi altera harum conditionum adsit, nihil colligetur.



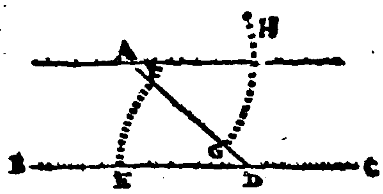

Sit enim triangulum A B C, sintq; latera A B, A C, latere B C, maiora.
k 31.primi. Abscindatur B D, æqualis ipsi B C,[k] ducaturq; D E, ipsi A C, parallela.[l] e-
l 29.primi. ritq; angulus B E D, angulo C, æqualis. Quare duo anguli B, C, trianguli A B C, duobus angulis B, E, trianguli D B E, æquales sunt, vterque vtrique, latusq; B C, lateri D B, æquale; cùm tamen reliqua latera reliquis lateribus æqualia non sint. Est enim B E, minus, quàm B C, atque adeò neque lateri A C, neque lateri A B, æquale esse potest; quòd hæc latera maiora ponantur latere B C. Causa huius rei est, quòd latus B C, in triangulo A B C, adiacet angulis dictis, at latus D B, in triangulo D B E, opponitur vni angulorum dictorum, nimirum angulo D E B, qui angulo C, æqualis est.



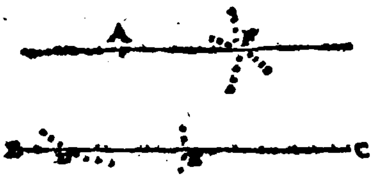

Sit rursus triangulum F G H, sintq; iterũ latera F G, F H, latere G H,
m 31.primi. maiora, & F H, maius, quàm F G. Abscindatur H I, ipsi F G, æqualis,[m] duca-
n 29.primi. turq; I K, ipsi F G, parallela:[n] eritq; angulus H K I, angulo G, æqualis. Sunt ergo duo anguli H, G, trianguli F G H, duobus angulis H, K, trianguli I K H, æquales, vterque vtrique, latusq; F G, lateri I H, æquale; cùm tamen reliqua latera reliquis lateribus æqualia non sint. Est enim H K, minus, quàm H G, atq; adeò neq; lateri H G, neq; lateri F H, æquale esse potest, quòd latus F H, maius etiam ponitur, quàm G H. Ratio huius rei est, quòd latus F G, in triangulo F G H, opponitur angulo H, at latus I H, opponitur angulo K, in triangulo I K H, qui non ponitur æqualis angulo H, sed angulo G, est æqualis,[o] qui
o 18.primi. maior est angulo H, propterea quòd latus F H, maius posuimus latere F G. Distulimus hanc demonstrationem hunc in locum, propter linearum parallelarum proprietates, ex quibus pendet.

PRAXIS.

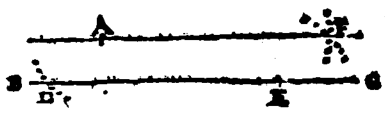
## PRAXIS.




SIT ducenda parallela ipsi B C, per punctum A. Ducatur recta A D, vtcunque ad B C, & ex D, & A, ad idem interuallum quodlibet describantur duo arcus ad diuersas partes, vnus ad partes B, alter ad partes C: Deinde beneficio circini arcui E F, abscindatur ex arcu altero arcus G H, æqualis. Si igitur ex A, per H, recta ducatur, [a] erit hæc parallela ipsi B C. Nam alterni anguli E D F, H A G, sunt æquales, vt constat ex praxi propos. 23. &c. a 27. primi.

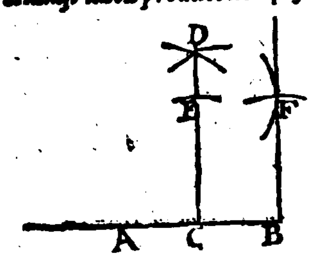



ALIO modo ducetur per idem punctum A, datum linea parallela lineæ datæ B C, hac arte: Ex centro A, ad quoduis interuallum describatur arcus secans B C, in puncto D; & eodem interuallo ex D, sumatur punctum E, in eadem recta B C: Deinde eodem interuallo ex A, & E, describantur duo arcus secantes sese in F. Nam ducta recta A F, erit parallela rectæ B C. Quoniam enim propter idem interuallum assumptũ recta A F, æqualis est rectæ D E; & recta A D, rectæ E F, si ducerentur hæ lineæ; erit A F, opposita D E, parallela, vt postea demonstrabimus propos. 34.

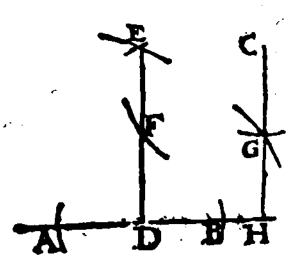



QVOD si punctum A, vicinum fuerit rectæ B C, commodius hac lege parallela optata ducetur. Ex A, sumatur punctũ D, in B C, ad quoduis interuallum; Et ex quouis puncto eiusdẽ rectæ B C, nempe E, quod tamẽ aliquantulum distet à puncto D, (Quo enim maior fuerit distantia inter D, & E, eò facilius, & accuratius parallela ducetur) eodem interuallo arcus describatur ad partes A: Deinde ex A, interuallo D E, alter arcus descriptus secet priorem arcum in F. Recta namque ducta A F, erit parallela rectæ B C, vt prius; quia recta A F, æqualis est rectæ D E, ob idem interuallum; & recta A D, rectæ E F, si hæ rectæ ductæ essent, &c.

EX his facile ducemus ex puncto extremo alicuius lineæ perpendicularẽ lineam ad ipsam datam lineam, etiamsi linea produci non possit, quod in scholio propositionis 11. promisimus. Sit enim recta A B, ex cuius extremo puncto B, educenda sit ad eam perpendicularis. Sumpto puncto quouis C, abscindatur recta C B, æqualis C A, & ex A, & B, ad quoduis interuallum duo arcus describãtur secantes sese in D, ducaturq; recta D C, quæ ad A B, perpendicularis erit, vt ad propositionem 11. scripsimus. Deinde per B, ducatur ipsi C D, parallela, hoc modo, secundùm praxim huius 31. propositionis proximè explicatam. Ex C D, abscissa recta quantacunque C E, describatur ex B, ad interuallum C E, arcus, quem in F, secet alius arcus ex E, ad interuallum C B, descriptus, ducaturq; recta B F. Hæc namque ipsi C D, parallela erit, vt ex praxi huius propositionis 31. liquet. Igitur cùm angulus A C D, [b] æqualis sit interno C B F: sit autem A C D, rectus, erit & C B F, rectus, ac proinde B F, ad A B, perpendicularis erit. b 29. primi.



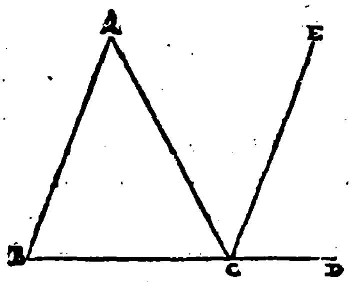

SIMILITER si data sit recta A B, & punctum extra ipsam C, in extremo ferè plani, in quo recta illa iacet, ducemus ex C, ad A B, perpendicularem, neque producta linea, neque extenso plano infra rectam A B, vt polliciti sumus ad propositionem 12. hoc modo: Sumpto puncto D, vtcunque in linea A B, abscindantur vtrinque inter se æquales D A, D B, & ex A, & B, ad quoduis interuallum duo arcus describantur, secantes sese in E, ducaturq; recta E D, quæ ex praxi propositionis 11. ad A B, perpendicularis erit. Deinde per C, ducatur ipsi D E, parallela, hoc modo, secundùm praxim huius propositionis 31. Ex dato puncto C, ad quoduis interuallum describatur arcus secans rectam D E, in F: eodémque interuallo ex D, versus C, alius arcus describatur, quem in G, intersecet alius arcus ex C, ad interuallum D F, delineatus. Recta namque ducta ex C, per G, secans A B, in H, parallela erit rectæ D F, ex praxi huius propositionis 31. Quare, vt proximè scripsimus, C H, ad A B, perpendicularis erit, sicuti & E D, ad eandem perpendicularis est.




## THEOR. 22. PROPOS. 32. 12.

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto: Externus angulus duobus internis, & oppositis est æqualis. Et trianguli tres interni anguli duobus sunt rectis æquales.

PRODVCATVR in triangulo A B C, latus B C, ad D. Dico primò, angulum externum A C D, æqualẽ esse duobus internis, & oppositis simul A, & B. [a] Ducatur n. ex C, linea C E parallela rectæ a 31. primi.




a 29.primi. A B. Quoniam igitur recta A C, incidit in parallelas A B, C E,[a] erunt anguli alterni A, & A C E, æquales. Rursus, quia recta
b 29.primi. B D, in easdē parallelas incidit, [b] erit angulus externus D C E,
c 2.pron. æqualis interno B. Additis igitur æqualibus A C E, & A, [c] fiet totus A C D, (qui ex duobus D C E, A C E, componitur) duobus A, & B, simul æqualis. Quod est propositum.

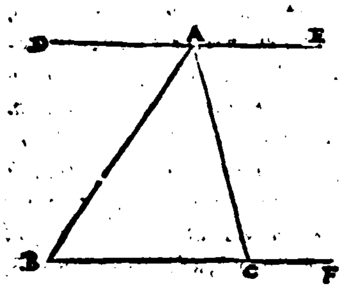
Dico secundò, tres angulos internos eiusdem trianguli A, B, & A C B, duobus esse rectis æquales. Cùm enim externus angulus A C D, vt ostensum fuit, æqualis sit duobus internis
d 2.pron. A, & B; si addatur communis A C B, [d] erunt duo anguli A C D,
e 13.primi. A C B, æquales tribus A, B, & A C B: Sed duo A C D, A C B, [e] æquales sunt duobus rectis. Igitur & tres interni A, B, A C B, duobus sunt rectis æquales. Quare cuiuscunque trianguli vno latere producto, &c. Quod erat demonstrandum.

## SCHOLIVM.

*Cvm demonstratum sit propositione 16. angulum externum cuiuslibet trianguli maiorem esse vtrolibet interno, & opposito, hic autem, eundem externum eisdem internis simul esse æqualem, perspicuum est, alterutrum internorum, & oppositorum superari ab externo, reliquo interno angulo opposito. Vt in triangulo proposito angulus A, internus superatur ab angulo externo A C D, angulo B, interno: Et angulus B, internus superatur ab eodē externo angulo A C D, angulo A, interno, quandoquidem angulus A C D, duobus angulis A, & B, est ostensus hoc loco æqualis. Rursum, quia demonstratum est propositione 17. duos angulos cuiuslibet trianguli quomodocunque sumptos, duobus esse rectis minores, hic verò omnes tres duobus rectis æquales esse; manifestum est, duos à duobus rectis deficere, reliquo angulo trianguli. Vt in eodem triangulo, duo anguli A, & B, à duobus rectis deficiunt angulo A C B, &c.*

*Omne porrò triangulum habere tres angulos duobus rectis æquales, primi omnium, vt refert Eudemus,*
a 31. primi. *Pythagorei demonstrarunt hac ratione. Sit triangulum A B C, & per punctum A,[a] ducatur recta B C, parallela D E. Quoniam igitur[b] anguli alterni D A B, & A B C, æquales sunt, si addantur æquales E A C, & A C B, (sunt enim & hi alterni)[c] erunt duo anguli D A B, E A C, duobus A B C, A C B, æquales. Addito ergo communi angulo B A C,[d] erunt tres anguli D A B, B A C, C A E, æquales tribus angulis A B C, B A C, A C B. Sed anguli D A B, B A C, C A E, æquales sunt duobus rectis, vt constat ex propositione 13. Igitur & in triangulo A B C, anguli A B C, B A C, A C B, duobus sunt rectis æquales, quod est propositum. Ex hoc autem facilè concludemus, angulum externum A C F, si latus B C, sit protractum, æqualem esse duobus internis, & oppositis A B C, B A C. Quoniam enim anguli A B C, B A C, A C B, æquales sunt duobus rectis, vt ostensum fuit.[e] Sunt autem & anguli A C F, A C B, duobus rectis æquales; Erunt anguli A B C, B A C, A C B, angulis A C F, A C B, æquales. Dempto igitur communi angulo A C B,[f] remanebit angulus A C F, duobus angulis A B C, B A C, æqualis.*

b 29. primi.
c 2. pron.
d 2. primi.




e 13. primi.
f 3. pron.

Huc pertinet prima huius paginæ figura. *Facile etiam conuerti poterit prima pars propositionis Euclidis: Hoc est, si ab vno angulo trianguli, linea recta ducatur, vt angulus externus æqualis sit duobus internis, & oppositis, illam lineam esse in directum ipsi lateri constitutā. Ex C, enim ducatur C D, recta, sitq; angulus A C D, æqualis duobus angulis A B C, B A C. Dico, rectas B C, C D, in directum iacere. Cùm enim angulus A C D, æqualis sit angulis A B C, B A C si*
g 2. pron. *addatur cōmunis angulus A C B,[g] erunt anguli A C D, A C B, æquales angulis A B C, B A C, A C B. Sed A B C,*
h 32. primi. *B A C, A C B,[h] æquales sunt duobus rectis. Igitur & anguli A C D, A C B, duobus erunt rectis æquales. Quare B C, C D, vnam lineam rectam constituunt.*

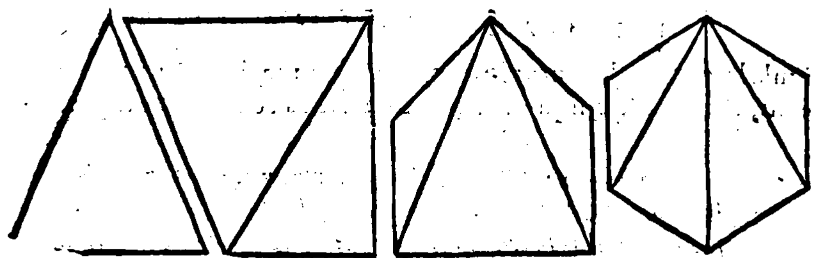
## QVOT ANGVLIS RECTIS AEQVIualeant anguli omnes interni cuiuscunque figuræ rectilineæ.

*Dvobvs modis ex hac propositione 32. colligemus, quotnam rectis angulis æquiualeant interni anguli figuræ cuiuslibet rectilineæ, quorum primus hic est.*

Omnes anguli figuræ rectilineæ cuiusuis sunt æquales bis tot rectis angulis, quota ipsa est inter figuras rectilineas.

*Hoc est, Omnes anguli primæ figuræ rectilineæ æquales sunt bis vni recto, id est, duobus rectis: Anguli verò secundæ figuræ rectilineæ æquales sunt bis duobus rectis, nempe quatuor rectis; Anguli autem tertiæ figuræ rectilineæ æquales sunt bis tribus rectis, sex videlicet rectis. Et sic de reliquis. Eum autem*

autem locum quælibet figura rectilinea obtinet inter figuras rectilineas, quem indicat numerus laterum, seu angulorum, dempto binario; quoniam duæ lineæ rectæ superficiem non concludunt, vnde nec figuram constituunt, sed cùm minimum tres rectæ lineæ ad figuræ constitutionem requiruntur. Ex quo fit, triangulum, quia habet tria latera, totidémque angulos, esse primam inter rectilineas figuras. Nam binario dempto ex tribus, relinquitur vnum. Sic erit figura habens 20. latera, seu angulos, inter figuras rectilineas decimaoctaua cùm binarius subtractus ex 20. relinquat 18. Idem iudicium de alijs figuris est habendum. Itaque figura contẽta 20. lateribus, cùm sit decimaoctaua, habebit angulos 20. æquiualentes 36. rectis angulis, nempe bis 18. angulis rectis, vt dictum est. Ita quoque omnes 10. anguli figuræ 10. lateribus contentæ, æquiualebunt 16. angulis rectis, cùm talis figura sit octaua inter rectilineas figuras. Hoc autem hac ratione demonstrabitur. Omnis figura rectilinea in tot triangula diuiditur, quota ipsa est inter figuras, seu quot ipsa habet angulos latérue, binario dempto. Nam à quouis angulo ipsius ad omnes angulos oppositos duci possunt lineæ rectæ, solùm ad duos propinquos angulos non possunt duci. Quare in tot triangula distribuetur, quot ipsa habet angulos, demptis duobus illis angulis. Sic vides, triangulũ non posse diuidi in alia triangula; quadrangulũ verò in duo

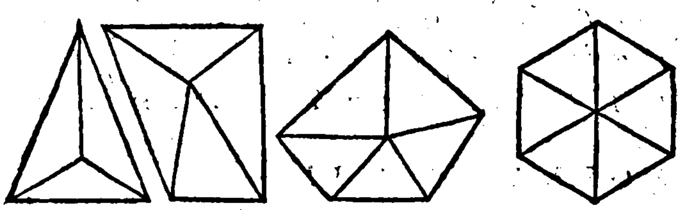


secari: quinquangulum in tria: sexangulum in quatuor, &c. Cùm igitur anguli horum triangulorũ constituant omnes angulos rectilineæ figuræ propositæ, & omnes anguli cuiuslibet trianguli æquales sint duobus rectis: perspicuum est omnes angulos figuræ cuiusuis rectilineæ æquales esse bis tot rectis, in quot triangula diuiditur, hoc est, quota ipsa est inter rectilineas figuras. Quod quidem manifestè perspicitur in propositis figuris.

SECVNDVS modus, quo scitur valor angulorum cuiuslibet figuræ rectilineæ, hic est.

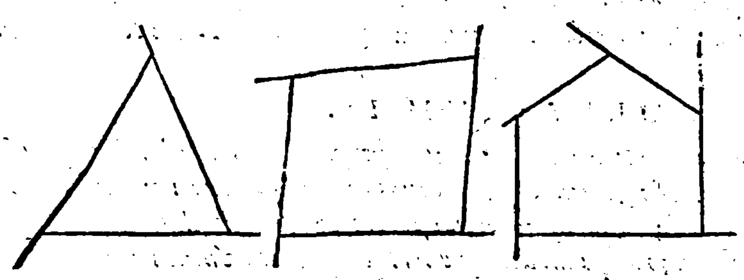
OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiusuis, æquales sunt bis tot rectis angulis, demptis quatuor, quot ipsa continet latera, seu angulos.

HOC est, anguli cuiuslibet trianguli æquales sunt bis tribus rectis, demptis quatuor, nempe duobus rectis. Ita etiam anguli figuræ continẽtis 20. latera æquiualebunt bis 20. angulis rectis, minus quatuor, nimirum 36. rectis angulis, &c. Demõstratiõ autẽ huius rei talis est: Si à quouis puncto intra figuram assumpto ad omnes angulos rectæ lineæ ducantur, efficientur tot triangula, quot latera, angulósue figura ipsa continet.

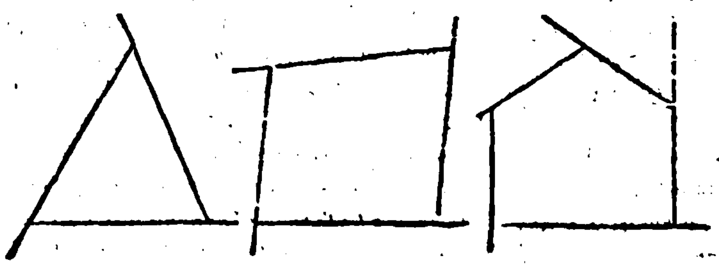


Cùm igitur anguli cuiuscunq; trianguli [a] æquales sint duobus rectis, erunt omnes anguli illorum triangulorum æquales bis tot rectis, quot latera figuram ambiunt. At anguli eorundem triangulorum circa punctum intra figuram assumptum consistentes non pertinent ad angulos figuræ rectilineæ propositæ, vt constat. Quare si hi auferantur, erunt reliqui triangulorum anguli constituentes angulos figuræ propositæ, bis quoq; tot rectis æquales, demptis illis circa punctum assumptum constitutis, quot latera, vel angulos continet figura. Sunt autem omnes illi anguli, quotquot sint, circa dictum punctum existentes æquales 4. rectis tantummodò, vt collegimus ex proposit. 15. Quamobrem anguli cuiusque figuræ bis tot rectis sunt æquales, ablatis quatuor, quot ipsa figura continet angulos, seu latera, quod est propositum. a 32. primi.

EX hoc porrò secundo modo liquet, si singula latera figuræ cuiusuis rectilineæ producãtur ordinatim versus eandem partem, omnes angulos externos æquales esse quatuor rectis. Nam quilibet externus, & illi deinceps internus, [b] æquantur duobus rectis; atque adeò omnes externi vnà cum omnibus internis æquales erunt bis tot rectis, quot latera, angulósue figura continet. Sunt autem & soli interni bis tot rectis æquales, minus quatuor, vt demonstrauimus. Si igitur interni auferãtur, remanebunt externi 4. tantùm rectis æquales, qui nimirũ desunt internis angulis, vt interni & externi simul bis tot rectos conficiant, quot latera figuram propositam ambiunt. Exemplum: In triangulo quouis, anguli interni et ex- b 13. primi.



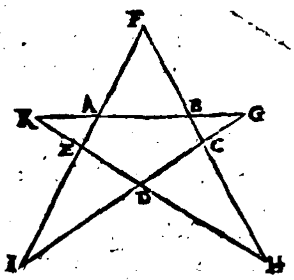
a 32. primi.



*terni simul æquales sunt sex rectis. Cùm igitur interni [a] duobus sint rectis æquales, erunt soli externi æquales quatuor duntaxat rectis. In quadrilatero anguli externi & interni simul æquales sunt octo rectis. Cùm igitur interni soli æquales sint quatuor rectis, vt ostendimus, erunt & soli externi quatuor etiam rectis æquales. In pentagono, seu quinquangulo, anguli interni & externi sunt æquales 10. rectis. Quoniam verò interni adæquantur sex rectis, vt demonstrauimus, remanebunt externi æquales quatuor tantùm rectis. Quæ omnia in appositis figuris conspiciuntur. Eademq́ est ratio in alijs omnibus figuris.*

## EX CAMPANO.

SI pentagoni singula latera producantur in partem vtramque, ita vt quælibet duo extra pentagonum coëant, efficietur quinque anguli ex lateribus coëuntibus æquales duobus solùm rectis.




*In pentagono A B C D E, latera in vtramque partem producta coëant in punctis F, G, H, I, K. Dico quinque angulos F, G, H, I, K, æquales tantùm esse duobus rectis. In triangulo enim B H K, cùm latus H B, sit protractum ad F, [b] erit externus angulus F B K, duobus internis, & oppositis H, K, æqualis. Eadem ratione in triangulo A I G, erit externus angulus F A G, æqualis duobus internis, & oppositis I, G. Quare duo anguli F B A, F A B, æquales sunt quatuor angulis G, H, I, K. Addito igitur communi angulo F, [c] erunt tres anguli A, B, F, trianguli A B F, æquales quinque angulis F, G, H, I, K. Sed anguli A, B, F, trianguli A B F, [d] æquales sunt duobus rectis. Igitur & quinque anguli F, G, H, I, K, duobus rectis sunt æquales. Quod est propositum.*

b 32. primi.
c 2. pron.
d 32. primi.

## COROLLARIVM I.

*Ex hac propos. 32. colligitur, tres angulos cuiuslibet trianguli simul sumptos æquales esse tri-*
e 32. primi. *bus angulis cuiusque alterius trianguli simul sumptis: Quoniam tam illi tres, quàm hi, [e] æquales sunt duobus angulis rectis. Vnde si duo anguli vnius trianguli fuerint æquales duobus angulis alterius trianguli, erit & reliquus illius reliquo huius æqualis, æquiangulaque erunt ipsa triangula.*

## COROLLARIVM II.

*CONSTAT etiam, in omni triangulo Isoscele, cuius angulus lateribus æqualibus comprehensus rectus fuerit, quemlibet reliquorum esse semirectum. Nam reliqui duo simul conficiunt vnum rectum, [f] cùm omnes tres sint æquales duobus rectis: & tertius ille ponatur rectus. Quare [g] cùm duo reliqui inter se sint æquales, erit quilibet eorum semirectus. At verò si angulus æqualibus lateribus contentus fuerit obtusus, quemlibet aliorum esse semirecto minorem. Reliqui enim duo simul minores erunt vno recto, &c. Si denique dictus angulus extiterit acutus, vtrumque reliquorum maiorem esse semirecto. Quoniam reliqui duo simul maiores erunt vno recto, &c.*

f 32. primi.
g 5. primi.

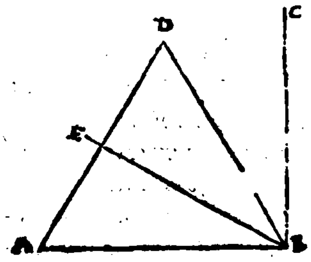
## COROLLARIVM III.

*PERSPICVVM quoque est, quemuis angulum trianguli æquilateri esse duas tertias par-*
h 32. primi. *tes vnius recti, uel tertiam partem duorum rectorum. Duo enim anguli recti, [h] quibus æquales sunt tres anguli trianguli æquilateri, diuisi in tres angulos, faciunt duas tertias partes vnius recti.*

## COROLLARIVM IV.

*LIQVET etiam, si ab vno angulo trianguli æquilateri perpendicularis ad latus oppositum ducatur, constitui duo triangula scalena, quorum vnumquodque habet vnum angulum rectum prope perpendicularem; alium duas tertias partes vnius recti, illum scilicet, qui est & angulus trianguli æquilateri; reliquum denique tertiam partem vnius recti.*

### SCHOLIVM.

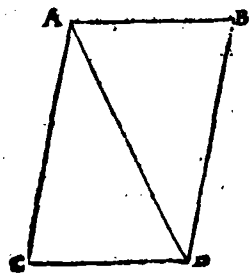



*PORRO ex tertio corollario depromi potest methodus, qua angulus rectus in tres angulos æquales diuidatur. Sit enim angulus rectus A B C. Super rectam A B, [a] constituatur triangulum æquilaterum A B D. Et quia per corollarium tertium angulus A B D, facit duas tertias partes anguli recti A B C; erit angulus C B D, pars tertia eiusdem recti. Diuiso igitur angulo A B D, [b] bifariam, per rectam B E, erit vterque angulus A B E, E B D, tertia quoque pars recti. Quare rectus angulus A B C, diuisus est in tres angulos æquales. Quod est propositum.*

a 1. primi.
b 9. primi.

## THEOR. 23. PROPOS. 33. 33.

RECTAE lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas ad partes easdem coniungũt; & ipsæ æquales, & parallelæ sunt.




SINT rectæ lineæ A B, C D, æquales, & parallelæ; Ipsas autem coniungant ad easdem partes rectæ A C, B D. Dico A C, B D, æquales quoque esse, & parallelas. Ducatur enim recta A D. Quoniam igitur A D, incidit in parallelas A B, C D, [a] erunt anguli alterni B A D, C D A, æquales. Quare cùm duo latera B A, A D, trianguli B A D, æqualia sint duobus lateribus C D, D A, trianguli C D A, vtrumque vtrique, & anguli quoque dictis lateribus inclusi æquales; [b] erunt bases B D, A C, æquales, & angulus A D B, angulo D A C, æqualis. Cùm igitur hi anguli sint alterni inter rectas A C, B D, [c] erunt A C, B D, parallelæ: Probatum autem iam fuit, easdem esse æquales. Rectæ ergo lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas, &c. Quod erat demonstrandum.

a 29. primi.
b 4. primi.
c 27. primi.

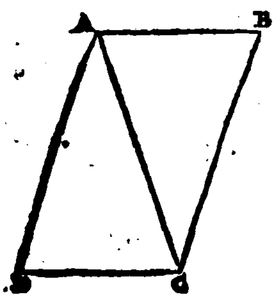
### SCHOLIVM.

*DIXIT Euclides, lineas æquales, & parallelas ad easdem partes debere coniungi, vt ipsæ coniungentes sint & æquales, & parallelæ. Nam si ad partes diuersas coniungerentur, vt ad A, & D. item ad B, & C. neque coniungentes lineæ essent parallelæ vnquam, sed perpetuò se mutuò secarent, neque essent æquales, nisi rarò admodum, vt ex sequenti propositione constabit.*

## THEOR. 24. PROPOS. 34. 34.

PARALLELOGRAMMORVM spatiorum æqualia sunt inter se, quæ ex aduerso, & latera, & anguli; atque illa bifariam secat diameter.

SIT parallelogrammum A B C D, quale definiuimus definitione 35. Dico latera opposita A B, D C, inter se esse æqualia, nec non latera opposita A D, B C. Item angulos oppositos B, & D, æquales inter se esse, nec non & angulos oppositos D A B, & D C B. Denique ducta diametro A C, parallelogrammum ipsum bifariam secari. Cùm enim A B, D C, sint parallelæ, [d] erunt anguli alterni B A C, D C A, æquales. Rursus quia A D, B C, sunt parallelæ, [e] erunt & anguli alterni B C A, D A C, æquales. Itaque cùm duo anguli B A C, B C A, trianguli A B C, æquales sint duobus angulis D C A, D A C, trianguli A D C, vterque vtrique; & latus A C, dictis angulis adiacens, commune vtrique triangulo; [f] erit recta A B, æqualis oppositæ rectæ D C, & recta B C, oppositæ rectæ A D. quod est primum. Erit rursus eadem de causa angulus B, angulo D, æqualis. Et quia si æqualibus angulis B A C, D C A, addantur æquales anguli D A C, B C A, toti quoque anguli B A D, B C D, [g] fiunt æquales; constat secundum, angulos nimirũ oppositos esse æquales. Quoniam verò duo latera A B, B C, trianguli A B C, æqualia sunt duobus lateribus C D, D A, trianguli C D A, vtrumque vtrique, & angulus B, angulo D, æqualis, vt iam ostendimus; [h] erunt triangula A B C, C D A, æqualia, ideoq; parallelogrammum A B C D, diuisum erit bifariam à diametro A C, quod tertio loco proponebatur. Parallelogrammorum igitur spatiorũ æqualia sunt inter se, quæ ex aduerso, &c. Quod ostendendum erat.



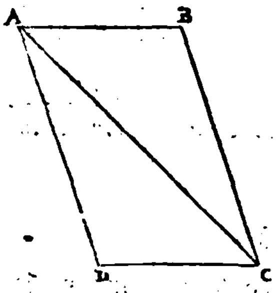

d 29. primi.
e 29. primi.
f 26. primi.
g 2. pron.
h 4. primi.

### SCHOLIVM.

*APPOSITE dixit Euclides, solummodò parallelogramma à diametro diuidi bifariam, non autem & angulos. In Quadrato enim, & Rhombo duntaxat anguli etiam bifariam diuiduntur à diametro: At in figura Altera parte longiori, & in Rhomboide in partes inæquales. Quæ omnia perspicua erunt, si priùs ostende-*

*rimus, quatuor hasce figuras, Quadratum, Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, esse parallelogramma. Hoc autem demonstrabimus tribus sequentibus theorematibus, quorum primum est.*

OMNE quadrilaterum habens latera opposita æqualia, est parallelogrammum.

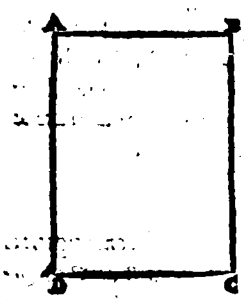



*SINT in quadrilatero A B C D, latera opposita A B, D C, æqualia; Item opposita latera A D, B C. Dico A B C D, esse parallelogrammum: hoc est, lineas A B, D C, esse parallelas: Itémque lineas A D, B C. Ducta enim diametro A C, erunt duo latera A B, B C, trianguli A B C, æqualia duobus lateribus C D,*
a 8.primi. *D A, trianguli C D A, vtrumque vtrique, & basis A C, communis. Igitur [a] erit angulus B, angulo D, æqualis. Rursus quia latera A B, B C, æqualia sunt la-*
b 4.primi. *teribus C D, D A, vtrumque vtrique, & anguli B, D, ostensi æquales; [b] erit an-*
c 27.primi. *gulus B A C, angulo D C A, alterno æqualis, & angulus B C A, alterno angulo D A C. Quare [c] erunt A B, & D C, parallelæ: Item A D, & B C, quod est propositum.*

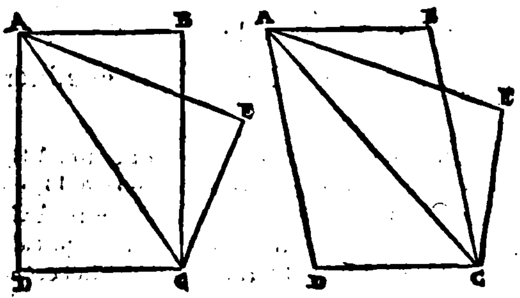
*HINC constat, Rhombum & Rhomboidem esse parallelogramma: quoniam opposita eorum latera sunt inter se æqualia, vt manifestum est ex eorum definitionibus. Pari ratione quadratum, parallelogrammum erit, quod latera opposita habeat æqualia. Sunt enim omnia quatuor eius latera inter se æqualia, per eius definitionem. Conuertit autem hoc theorema primam partem propositionis 34. vt patet.*

*SECVNDVM theorema tale est.*

OMNE quadrilaterum habens angulos oppositos æquales, est parallelogrammum.




*SINT in quadrilatero A B C D, anguli oppositi A, & C, æquales: Item oppositi anguli B, & D. Dico A B C D, esse parallelogrammum, hoc est, lineas A B, D C, esse parallelas: Itémque lineas A D, B C. Nam si æqualibus angulis*
d 2.pron. *A, & C, addantur æquales anguli B, & D: [d] erunt duo anguli A, & B, duobus angulis D, & C, æquales, & idcircò anguli A, & B, dimidium facient quatuor angulorum A, B, C, & D. Cùm igitur hi quatuor æquales sint quatuor rectis, vt ad propositionem 32. demonstrauimus, erunt duo A, & B, duobus rectis æqua-*
e 28.primi. *les. Quare A D, B C, [e] parallelæ sunt. Eadem ratione erunt A B, D C, parallelæ. Erunt enim duo quoque anguli A, & D, duobus angulis B, & C, æquales, &c. Quod est propositum. Ex hoc etiam manifestum est, Rhomboidem esse parallelogrammum, cùm eius anguli oppositi æquales sint, per definitionem. Similiter quadratum, & altera parte longius. Sunt enim & eorum anguli oppositi æquales, cùm sint recti, ex eorum definitionibus.*

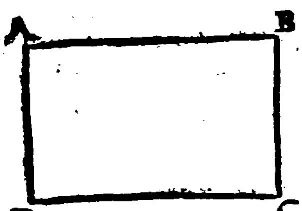



*HOC theorema conuertit secundam partem propositionis 34. vt constat. Tertia autem pars non potest conuerti. Nam & trapezium aliquod bifariam secari potest à diametro, & tamen non est parallelogrammum. Sit enim altera parte longius, vel Rhomboides A B C D, quod parallelogrammum esse ostensum est; in quo, ducta diametro A C, constituatur super A C, triangulo A B C, æquale triangulum A E C, inuerso ordine; ita vt latus C E, sit æquale lateri A B, & A E, ipsi C B, vt in scholio propositionis 22. docui-*
f 34.primi. *mus; fiatq́; trapezium A E C D. Quoniam verò triangulum A B C, triangulo A D C, æquale est, [f] quòd diameter A C, bifariam secet parallelogrammum D B: Erit & triangulum A E C, triangulo A D C, æquale: ac proinde trapezium A E C D, bifariam diuidetur à diametro A C.*

*QVOD si quadrilaterum aliquod diuidatur bifariam ab vtraque diametro, illud parallelogrammum erit, vt ostendemus ad propos. 39. Quod quidem in nullo trapezio fieri potest.*

*TERTIVM theorema huiusmodi est.*

OMNE quadrilaterum habens omnes angulos rectos, est parallelogrammum.

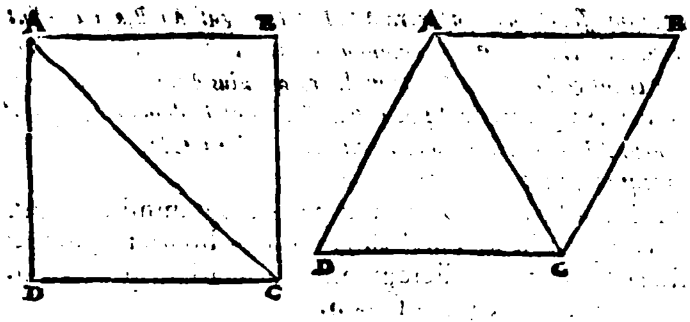



*SINT in quadrilatero A B C D, omnes quatuor anguli recti. Dico ipsum esse parallelogrammũ: hoc est, lineas A B, D C, esse parallelas: Itemq́; A D, B C.*
g 28.primi. *Quoniã enim duo anguli A, & B, æquales sunt duobus rectis, cũ sint duo recti; [g] erunt A D, B C, parallelæ. Eodem modo erunt A B, D C, parallelæ; atque adeò A B C D, parallelogrammum. quod est propositum.*

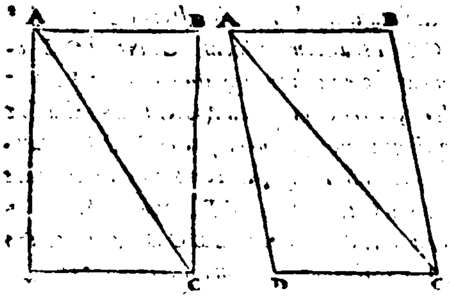
*HINC rursum constat, Quadratum, & Altera parte longius, esse parallelogramma, cùm eorum anguli omnes existant recti, vt liquet ex eorum definitionibus.*

*HIS in hunc modum demonstratis, Quadratum scilicet, Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, esse parallelogramma, facilè ostendemus, angulos Quadrati, & Rhombi, bifariam secari à diametro.*

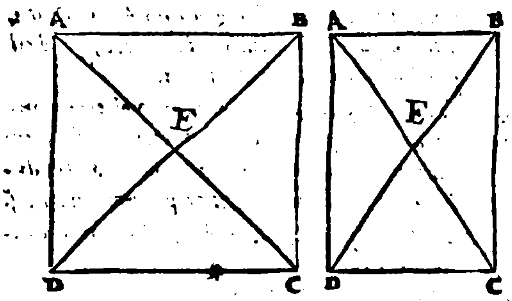
Angulos



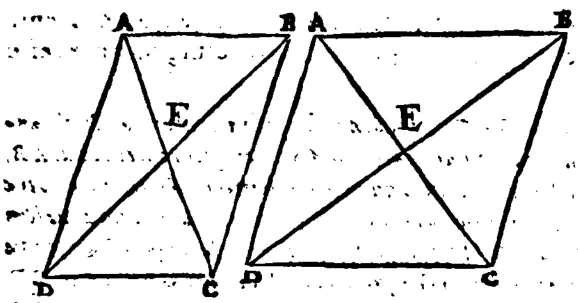
*Angulos verò figuræ Altera parte longioris, & Rhomboidis, non bifariam, vt paulò ante monuimus. Sit enim Quadratum, vel Rhombus A B C D, in quo diameter A C. Quoniam igitur duo latera B A, A C. trianguli B A C, æqualia sunt duobus lateribus D A, A C, trianguli D A C, vtrumque vtrique, & basis B C, basi D C; (sunt enim hæ figuræ æquilateræ) [a] erunt anguli B A C, D A C, æquales. Quare angulus B A D, diuiditur bifariam. Eodem modo demonstrabimus, reliquos angulos bifariam secari à diametro.* a 8. primi.



*Sit rursus Altera parte longius, vel Rhõboides A B C D, in quo diameter A C, sitq; maius latus A B. Quoniam igitur in triangulo A B C, latus A B, maius est latere B C, [b] erit angulus B C A, maior angulo B A C. Est autem angulus B C A, [c] æqualis angulo D A C, alterno: quod B C, A D, parallelæ sint. (Est enim A B C D, ostensum, esse parallelogrammũ.) Igitur & angulus D A C, maior erit angulo B A C. Atq; propterea angulus B A D, inæqualiter diuiditur à diametro A C. Eadem est ratio aliorum angulorum. Quamobrem appositè Euclides in tertia parte huius propositionis dixit, solum parallelogramma bifariam à diametro secari, non autem & angulos.* b 18. primi. c 29. primi.



*Eodem ferè pacto ostendemus, duas diametros in Quadrato, & Altera parte longiore æquales esse: At verò in Rhombo, & Rhomboide inæquales, maiorem quidem eam, quæ angulos acutos, minorem verò eam, quæ obtusos angulos dispertit. Sit enim quadratum, vel altera parte longius A B C D, in quo diametri A C, B D; quas dico esse æquales. Cùm enim duo latera A B, B C, trianguli A B C, æqualia sint duobus lateribus A B, A D; trianguli B A D; vtrumque vtrique, & angulus A B C, angulo B A D, quia vterque rectus, [d] erit basis A C, basi B D, æqualis: Ac proinde diametri in quadrato, & figura altera parte longiore æquales sunt.* d 4. primi.



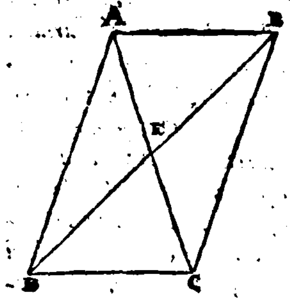
*Sit rursus Rhombus, vel Rhomboides, A B C D, in quo diametri A C, B D; sitq; angulus B A D, maior; A B C, minor. Non enim æquales sunt, quia aliàs vterque esset rectus, cùm ambo [e] æquales sint duobus rectis: quod est absurdum, & contra definitiones Rhombi & Rhomboidis. Dico diametrum B D, maiorem esse diametro A C. Quoniam enim duo latera A B, A D, trianguli B A D, æqualia sunt duobus lateribus A B, B C, trianguli A B C, vtrumque vtrique, & angulus B A D, angulo A B C, maior existit: [f] erit basis B D, maior base A C, quod est propositum. Ex quo manifestum est, cur in propositione trigesima tertia Euclides asseruerit, eas tantùm lineas, quæ coniungunt parallelas æquales ad easdem partes, æquales esse, vt ibidem annotauimus. Nam in Rhombo, & Rhomboide rectæ A C, B D, inæquales sunt, licèt coniungant parallelas æquales A B, D C: quia non ad easdem partes ipsas coniungunt, vt perspicuum est.* e 29. primi. f 24. primi.

*In omni tamen parallelogrammo diametri se mutuò bifariam diuidunt. Cùm enim duo anguli E A D, E D A, trianguli A E D, [g] æquales sint alternis angulis E C B, E B C, trianguli B E C, vterque vtrique; & [h] latus A D, æquale lateri B C, opposito in parallelogrammo A B C D, quorum vtrumque æqualibus adiacet angulis; [i] Erit & A E, recta rectæ C E, & recta D E, rectæ B E, æqualis. Quare vtraque diameter bifariam diuiditur in puncto E.* g 29. primi. h 34. primi. i 26. primi.

*Hvivs autem, quod modò diximus, conuersum etiam demonstrabimus, nimirum.*

**Omne quadrilaterum, in quo diametri se mutuò bifariam diuidunt, parallelogrammum est.**

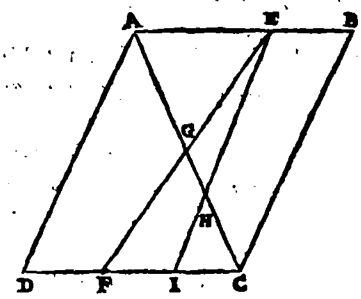
*In quadrilatero enim A B C D, diametri A C, B D, se mutuò bifariam diuidant in E. Dico A B C D, pa-*




rallelogrammum esse. Cùm enim latera A E, E B, trianguli A E B, æqualia sint
a 15. primi. lateribus C E, E D, trianguli C E D, & anguli contenti ad verticem E,[a] æqua-
b 4. primi. les quoque;[b] erunt & bases A B, C D, æquales, & angulus A B E, angulo alter-
c 27. primi. no C D E, æqualis.[c] Quare rectæ A B, C D, parallelæ sunt. Eadem ratione paral
lelæ ostendentur A D, C B. Parallelogrammum ergo est A B C D.

Hvc quoquè referri potest hoc theorema.

Recta linea secans diametrum parallelogrammi bifariam quomodocunque, diuidit parallelogrammum bifariam quoque: & recta linea diuidens parallelogrammum bifariam quouis modo, secat quoque diametrum bifariam.




In parallelogrammo A B C D, diametrum A C, bifariam secet recta E F, in puncto G. Dico parallelogrammum diuidi bifariam. Quo-
d 29. primi. niam enim angulus E A G,[d] æqualis est angulo alterno F C G, &[e]
e 15. primi. angulus E G A, angulo F G C; Est autem & latus A G, lateri C G, æ-
f 26. primi. quale, per hypothesin, quia ambo æqualibus angulis adiacent;[f] erunt
& latera E G, F G, æqualia. Quare cùm latera A G, G E, æqualia sint
g 4. primi. lateribus C G, G F, & anguli quoque contenti æquales:[g] erunt trian-
gula A G E, C G F, æqualia. Addita igitur communi quantitate
h 2. pron. B C G E,[h] erit triangulum A B C, trapezio B C F E, æquale: Sed trian
i 34. primi. gulum A B C,[i] dimidium est parallelogrammi A B C D. Igitur & tra
pezium dimidium erit eiusdem parallelogrammi, ideoq; recta E F, parallelogrammum bifariam secat.

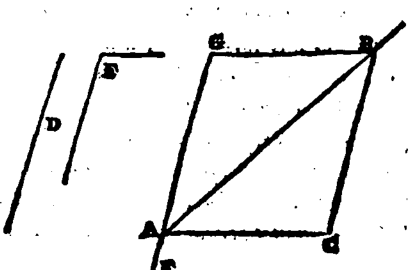
Secet iam E F, parallelogrammum bifariam: Dico & diametrum A C, bifariam secari in G. Si enim
k 10. primi. diameter A C, non bifariam diuiditur in G,[k] diuidatur bifariam in alio puncto, vt in H, per quod ducatur
recta E H I. Erit ergo, vt iam demonstrauimus, E I C B, trapezium dimidium parallelogrammi A B C D, atq;
adeò æquale trapezio E F C B, quod etiam dimidium ponitur eiusdem parallelogrammi, pars toti, quod est
absurdum. Diuiditur igitur A C, bifariam in G, & non in alio puncto, quod erat propositum.

Hinc facilè colligitur, si in latere aliquo parallelogrammi cuiusque punctum signetur, vel etiam intra parallelogrammum, vel extra, quod tamen non sit in diametro, nisi ipsum secet diametrum bifariam: qua ratione ab illo puncto linea duci debeat, quæ parallelogrammum bifariam secet. Si enim diameter ducatur, & à puncto dato per medium punctum diametri recta ducatur, factum erit, quod proponitur. Vt si punctum sit E, in latere A B, ducenda est recta E F, per G, punctum, in quo diameter A C, bifariam diuiditur: & sic de aliis punctis.

Demonstrat quoque hic Peletarius problema non iniucundum. videlicet.

Inter duas lineas rectas infinitas angulum facientes, lineam rectam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum altera illarum faciat angulum cuiuis angulo dato æqualem. Oportet autem hunc angulum datum, & eum, qui lineis datis continetur, minores esse duobus rectis.

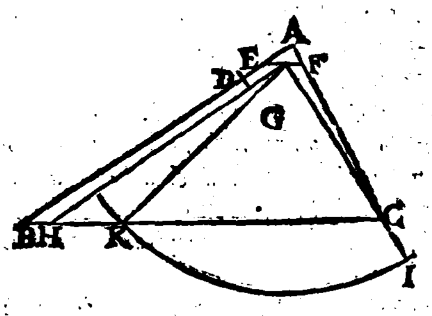
Dvæ rectæ infinitæ A B, A C, contineat angulum B A C, sitq; data recta finita quæcunque D, & angulus datus E, hac lege, vt duo anguli E, & B A C, minores sint duobus rectis. Oportet igitur inter rectas A B,



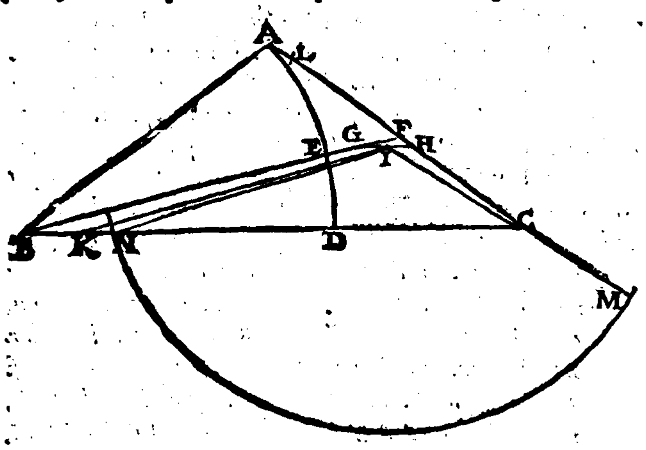

A C, collocare rectam æqualem quidem rectæ D, cùm alterutra
verò illarum, nimirum cum A C, facientem angulum æqualem
l 23. primi. angulo dato E.[l] Fiat angulus C A F, æqualis angulo E, & produ
m 3. primi. cta F A, ad G,[m] fit A G, æqualis rectæ D; & per G,[n] ducatur G B,
n 31. primi. parallela ipsi A C, secans A B, in B: Deinde per B, ducatur B C,
parallela ipsi A G, secans A C, in C. Dico rectam B C, collocatam
inter rectas A B, A C, æqualem esse rectæ D, angulumq; B C A,
angulo E. Cùm enim parallelogrammũ sit, per constructionem,
o 34. primi. A C B G,[o] erit recta B C, rectæ G A, æqualis: At G A, æqualis est,
per constructionem, rectæ D. Igitur & B C, rectæ D, æqualis e-
p 29. primi. rit. Rursus quia[p] angulus B C A, angulo alterno C A F, æqualis est: & eidem angulo C A F, æqualis est, per constructionem, angulus E: erunt anguli E, & B C A, æquales. Quod est propositum. Cæterùm ex constructione manifestum esse cuilibet potest, cur duo anguli dati minores esse debeant duobus rectis. Nam aliàs non fieret triangulum A B C, si anguli B A C, & B C A, æquales essent duobus rectis, vel maiores, vt constat ex propositione 17. vel 32.

## SCHOLIVM II.

Non alienũ erit à nostro instituto, adiicere quædam hoc loco ad lineas intra triangulum constitutas pertinentia, quæ à Pappo Alexandrino lib. 3. Mathematicarũ collect. demonstratur: quemadmodum facturos nos recepimus ad propos. 21. Primùm igitur in omni triangulo, quod non sit æquilaterũ, vel Isosceles habens basim *latere minorẽ non solùm à duobus punctis basis constitui possunt duæ rectæ intra triangulum, quæ simul sumptæ maiores sint duobus lateribus simul sumptis, vt à Proclo in triangulis rectangulis, vel obtusangulis ostensum est ad propos. 21. sed etiam æquales.*

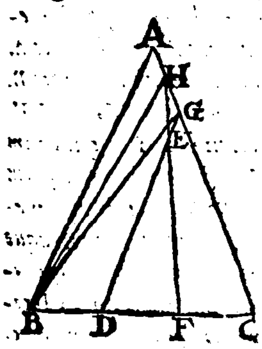



*SIT enim primum triangulum A B C, habens latus A B, latere A C, maius, sitq; B D, dimidium vtriusque lateris A B, A C, simul: Sumpto autẽ inter A D, puncto E, vtcunque, agatur E F, ipsi B C, parallela; & ex quouis puncto G, lateri A B, parallela ducatur G H, rectaq; iungatur G C. Et quoniam E A, A F,[a] maiores sunt, quàm E F: Item C F, F G, maiores quàm G C; erũt E A,* a 20. primi. *A C, F G, simul maiores, quàm E F, G C, simul: ablataq; communi F G, erunt E A, A C, simul maiores, quàm E G, G C, simul; ac proinde multò maiores, quàm G C, sola. Producatur ergò G C, fiatq; G I, ipsis E A, A C, simul æqualis. Quia verò B E, maior est, quàm vtraque E A, A C, simul, quòd B E, superet B D, dimidium vtriusque B A, A C, simul, at E A, A C simul deficiant à dimidio earundem, nimirum ab vtraque D A, A C, simul; erit quoq; B E, maior, quàm G I, quæ ipsis E A, A C, simul est æqualis. Cùm igitur[b] ipsi B E, æqualis sit G H, in parallelogrammo B E G H; erit quo-* b 34. primi. *que G H, maior, quàm G I. Si igitur centro G, & interuallo G I, circulus describatur, secabit is rectam G H, ac propterea & ipsam C H, prius secabit in K. Connectatur G K. Dico vtramque G H, G K, simul æqualem esse vtriq; A B, A C, simul. Id quod ex constructione perspicuum est. Nam G H, ipsi B E, æqualis est, & G I, hoc est, G K, ipsis E A, A C, simul. Atque hoc infinitis modis fieri potest, prout punctum E, remotiùs à D, sumptum fuerit, & punctum G, à puncto E; hoc est, prout tam A D, quàm E F, infinitis in punctis secari potest.*

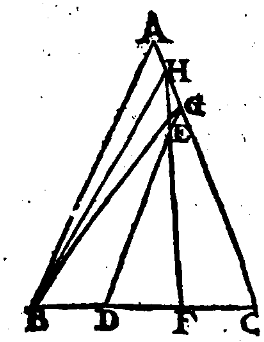



*SIT deinde Isosceles A B C, habens basim B C, vtrouis latere maiorem. Descripto ex centro B, per A, arcu A D, secãte rectam B C, in D, ducatur vtcunque recta B F, secans arcũ in E, & latus A C, in F: & in E F, per quoduis punctum G, ipsi D C, parallela agatur G H, & per quodcunque eius punctum I, ipsi B F, parallela ducatur I K, rectaq; iungatur I C; atque ipsi E G, æqualis abscindatur A L. Erit igitur B G, ipsis A B, A L, simul æqualis, at L C, minor quã B E, siue A B. & ob id multò minor, quàm B G. Et quia ipsi B G,[c] æqualis est I K, in paralle-* c 34. primi. *logrammo B G I K; erit quoq; I K, ipsis A B, A L, simul æqualis, maior autẽ, quàm L C. Itaq;[d] quia G F, F H, maiores sunt, quàm G H; & H C, H I, maiores, quàm I C: erunt G F, F C, H I, simul maio-* d 20. primi. *res, quàm G H, I C; & ablata communi H I, erunt reliquæ G F, F C, simul maiores, quàm G I, I C, simul; ac proinde apposita communi B G, fient B F, F C, simul maiores, quàm B G, G I, I C, simul. Sed ipsis B F, F C,[e]* e 20. primi. *maiores sunt B A, A C, simul. Ergo multò maiores erunt B A, A C, simul, quàm B G, G I, I C, simul. Cùm ergo B G, ipsis B A, A L, simul æqualis sit, erit reliqua L C, maior, quàm reliquæ G I, I C, simul, ac proinde multò maior, quàm I C, sola. Ponatur I M, (producta I C,) ipsi L C, æqualis. Et quia I K, ostensa est maior, quàm L C, hoc est, quàm I M; si ex centro I, per M, arcus circuli describatur, secabit is rectam I K, ac proinde prius ipsam C K, secabit in N. Connectatur I N. Dico vtramque I K, I N, simul æqualem esse vtrique A B, A C, simul. Id quod ex constructione patet. Est namque I K, ipsis A B, A L, simul æqualis, & I N, hoc est, I M, ipsi L C, æqualis. Atq; hoc infinitis modis fieri potest: cùm B F, infinitis modis duci possit, & tam E F, quàm G H, infinitis modis secari.*

*CONSTAT autem, si intra idem triangulum A B C, ducantur duæ rectæ, quæ rectas H G, G K, in priori triangulo, vel rectas K I, I N, in posteriori includant, eas maiores fore simul sumptas lateribus A B, A C, simul sumptis: quippe quia[f] maiores forẽt rectis H G, G K, in priori triangulo, vel rectis K I, I N, in posteriori.* f 21. primi.

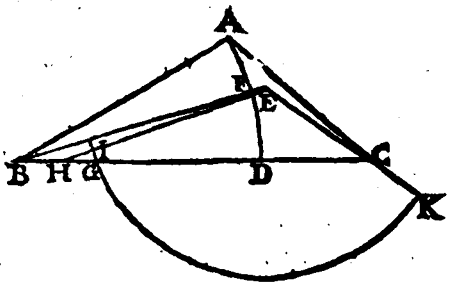



*AT verò in triangulo æquilatero, vel Isoscele habente basim vtrouis latere minorem, non posse intus constitui duas lineas maiores, vel æquales simul sumptas duobus lateribus simul sumptis, sed quascunque interiores esse minores, ita ostendi potest. In triangulo enim A B C, cuius duo latera A B, A C, æqualia, & basis B C, non maior, sed vel æqualis, vel minor; ita vt angulus A, maior non sit, quàm angulus B, vel C,[g] sed vel æqualis, vel minor: constituatur duæ rectæ D E,* g 5. vel 18. primi. *E F, vtcunque, quas dico minores esse simul sumptas duobus lateribus A B, A C, simul sumptis. Producatur enim D E, secans latus A C, in G, iungaturq; recta G B. Quoniã igitur[h] duo anguli A B C, & C, æquales sunt, estq; A B C, maior* h 5. primi.



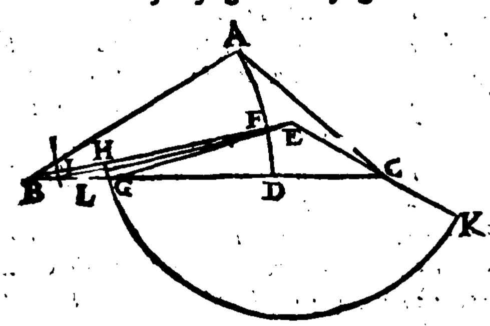

a 16. primi. angulo G B C; erit quoque C, maior angulo G B C. Est autem [a] & angulus G D B, angulo C, maior, externus interno. Igitur multò maior erit angulus
b 19. primi. G D B, angulo G B C; [b] ac proinde latus G B, latere G D, maius erit. Quia ve-
c 16. primi. rò [c] angulus B G A, maior est angulo C, externus interno; angulusq́; C, vel æqualis est angulo A, vel maior, vt ostendimus: erit quoque angulus B G A, angu-
d 19. primi. lo A, maior. Quare [d] latus A B, latere G B, maius erit: Sed recta G B, ostensa est maior, quàm G D; ac proinde multò maior, quàm D E. Igitur latus A B, multò etiam maius erit, quàm D E. Eadem ratione, si F E, producatur secans A C, in H, iungaturque recta H B, ostendemus latus A B, ac proinde & A C, maius esse, quàm F E. Quocirca latera A B, A C, simul maiora sunt duabus rectis D E, E F, simul sumptis. Quòd si F E, producta secaret latus A B, demonstraremus eodem modo, latus A C, maius esse rectâ E F.

IAM verò, si admirabile videatur iis, qui Geometriæ ignari sunt, in illis, quæ diximus, triangulis duci posse lineas interiores, quæ simul sumptæ maiores sint, vel æquales duobus lateribus simul sumptis: admirabilius sanè erit, intra eadem illa triangula constitui posse duas lineas, quarũ singulæ singulis lateribus maiores sint, vel æquales. Sint ergo primùm constituendæ singulæ lineæ singulis lateribus maiores in triangulo A B C, cuius latus A B, minus non sit latere A C, at latus B C, vtrouis latere A B, A C, maius. Descripto ex centro B, arcu circuli A D, sumatur quoduis punctum E, inter arcum A D, & latus A C, ducaturq́; recta B E, secans arcum in F; ita vt B E, maior sit, quàm B F, hoc est, quàm B A, iungaturq́; E C. Quia ve-




e 21. primi. rò [e] B E, E C, simul minores sunt, quã A B, A C, simul, estq́; B E, maior, quàm A B, erit E C, multò minor, quã A C. Producta igitur E C, fiat E K, ipsi A C, æqualis, ac propterea minor, quàm E B: describaturq́; ex E, per K, arcus circuli, qui rectam E B, secabit, ac proinde & ipsam C B, prius secabit in G. Sumpto denique inter B, & G, quouis puncto H, iungatur recta E H, secans arcum in I: factúmque erit, quod proponitur. Nam B E, maior est, quàm B A, & E H, maior, quàm E I, hoc est, quàm E K, vel A C.

DEINDE sint singulæ lineæ singulis lateribus æquales constituendæ intra idem triangulum: fiatq́; eadem constructio, dempta linea E H, sed arcus K G, secet rectam E B, in H. Et latus B A, latere A C, ponatur maius, eritq́; B E, recta maior, quàm A B, cùm maior sit, quàm B F, quæ æqualis est ipsi A B. Sumpta igitur E I, æquali ipsi A B, cadet punctum I, inter B, & H: quandoquidem E B, maior est, quàm A B, & E H, minor, quàm A B. Ex E, per I, describatur arcus circuli secans B C, in L, iunganturq́; rectæ E L, E G: factumq́; erit, quod proponitur. Nam E L, ipsi E I, hoc est, ipsi A B, æqualis est, & E G, ipsi E K, hoc est, ipsi A C.

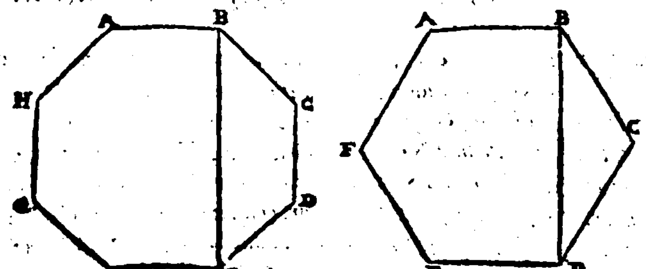



PRÆTEREA hæc demonstrat Pappus, intra eadem, quæ diximus, triangula constitui posse duas rectas duobus lateribus maiores, & quæ habeant ad eadem latera proportionem datam, quæ tamen dupla proportione minor sit: quod incredibile cuipiam videri possit. Quæ res hoc loco demonstrari non potest, cùm ex proportionibus pendeat.

## EX PROCLO.

IN omni figura rectilinea latera habente numero paria, siquidem fuerit æquilatera, & æquiangula: erunt duo quælibet latera opposita, parallela inter sese.

LATERA opposita dicuntur illa duo, quæ ex vtraque parte latera habent æqualia numero: vt in hexagono A B C D E F, latera opposita erunt A B, E D: quoniam tam ad partes A, & E, duo sunt latera, quàm ad partes B, & D. In octogono verò A B C D E F G H, latera opposita erunt A B, F E, quia tam ad partes A, & F, tria sunt latera, quàm ad partes B, & E. Et sic in alijs figuris æquilateris parium laterum, ex vtraque parte oppositorum laterum, erunt tot latera, quot sunt in dimidio numero laterum, minus vno. Vt in quadrangulo erit vnum, in hexagono erunt duo, in octogono tria, in decagono quatuor,



*tuor, in figura duodecim laterum, quinque, &c. Dico igitur qualibet latera opposita esse parallela: A B, nimirum ipsi E D, in hexagono: & A B, ipsi F E, in octogono, & sic de cateris. Connectantur enim duo extrema oppositorum laterum ad easdem partes linea recta, qualis est in hexagono B D, & in octogono B E. Et quoniam, vt ad 32. propos. demonstrauimus, sex anguli hexagoni aquales sunt octo rectis, erũt tres anguli B, C, D; eiusdem hexagoni aquales quatuor rectis, propterea q; omnes anguli ponuntur aquales: Sunt autem anguli* a 32. primi.
*B C D, C B D, C D B, trianguli B C D,[a] duobus rectis aquales. Reliqui igitur anguli A B D, E D B, duobus rectis aquales erunt. Quare[b] parallela erunt A B, & E D. Rursus quia octo anguli octogoni aquales sunt duodecim rectis, erunt quatuor eius anguli B, C, D, E, sex rectis aquales: Sunt autem quatuor anguli quadrilateri B C D E, aquales quatuor rectis. Igitur duo reliqui anguli A B E, F E B, duobus erũt rectis aquales,[c] atq; adeo A B, F E, parallela erunt. Eodem modo demonstrabitur, in omnibus aliis figuris huiusmodi, angulos duos ad lineam rectam extrema oppositorum laterum coniungentem existentes, duobus esse rectis aquales. Nam in decagono aufert ea linea pentagonum, cuius anguli aquales sunt sex rectis: At quinque anguli decagoni aquales sunt octo rectis. Ablatis igitur sex, relinquũtur duo recti. In figura aquilatera, & aquiangula duodecim laterum eadem linea abscindet hexagonum, cuius anguli sunt octo rectis aquales: At sex anguli totius figura aquales sunt decem rectis. Demptis igitur octo, remanent duo recti, &c.*

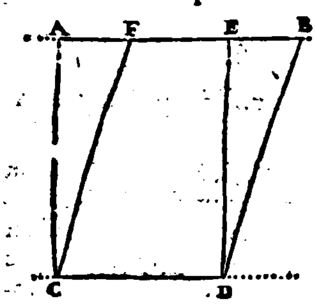
b 28. primi.
c 28. primi.

*QVAMVIS autẽ omnis figura aquiangula parium laterum habeat latera opposita parallela, vt ostendimus: tamen sola quadrilatera figura latera opposita habens parallela, ab Euclide, & alijs Geometris parallelogrammum dici consueuit, propterea q; in definitionibus Parallelogrammum diximus esse figuram quadrilateram, &c.*

## THEOR. 25. PROPOS. 35.

35.

PARALLELOGRAMMA super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se sunt æqualia.

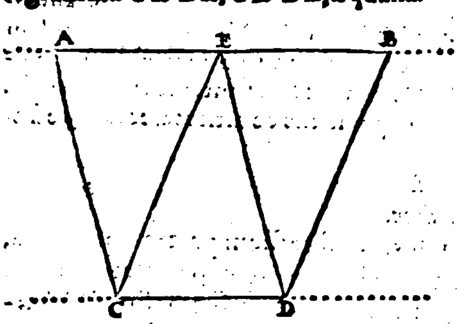


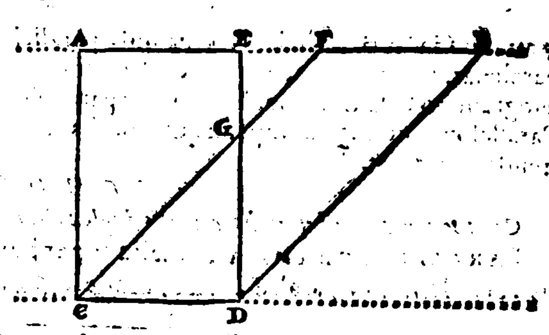

INTER duas parallelas A B, C D, super basi C D, existant duo parallelogramma C D E A, C D B F. Dicuntur autem parallelogramma in eisdem esse parallelis, quãdo duo latera opposita partes sunt parallelarum, vt in exemplo proposito cernitur. Dico ipsa parallelogramma inter se esse æqualia, non quoad angulos & latera, sed quoad aream, seu capacitatem. Cadat enim primò punctum F, inter A, & E. Quoniam igitur in parallelogrammo C D E A, recta A E,[a] æqualis est rectæ C D, oppositæ; & eidem C D, æqualis est F B, in parallelogrammo C D B F, opposita; Erunt A E, F B,[b] inter se æquales. Dempta igitur cõmuni F E,[c] remanebit A F, ipsi E B, æqualis:[d] Est autem & A C, ipsi E D, oppositæ æqualis in parallelogrammo C D E A;[e] & angulus B E D, angulo F A C, externus interno.[f] Quare triangulum F A C, triangulo B E D, æquale erit. Addito igitur communi trapezio C D E F,[g] fiet totum parallelogrammum C D E A, toti parallelogrammo C D B F, æquale. Quod est propositum.

a 34. primi.
b 1. pron.
c 3. pron.
d 34. primi.
e 29. primi.
f 4. primi.
g 2. pronun.

CADAT secundò punctum F, in punctum E. Dico rursus parallelogramma C D E A, C D B E, æqualia esse. Erunt enim, vt prius, rectæ A E, E B, æquales, nec non & anguli B E D, E A C; atque adeò[h] triangula E A C, B E D, æqualia. Addito igitur communi triangulo C D E,[i] fient parallelogramma C D E A, C D B E, æqualia.

h 4. primi.
i 2. pronun.



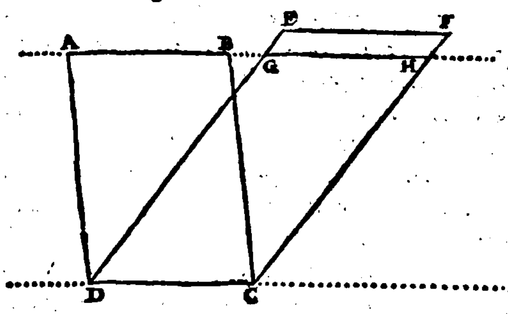

CADAT tertiò punctum F, vltra E, ita vt recta C F, secet rectam D E, in G. Quoniam igitur, vt prius, rectæ A E, F B, sunt æquales; si communis addatur E F;[k] erit tota A F, toti E B, æqualis, nec non & anguli B E D, F A C, æquales erunt; atque adeò[l] triangulum F A C, triangulo B E D, æquale. Ablato ergo cõmuni triãgulo E G F,[m] remanebit trãpezium A E G C, trãpezio F G D B, æquale. Quocirca addito communi triangulo C D G, fiet totum parallelogrammum C D E A, toti parallelogrammo C D B F, æquale. Parallelogramma igitur super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. Quod erat demonstrandum.

k 2. pronun.
l 4. primi.
m 3. pron.

*SCHOLIVM.*

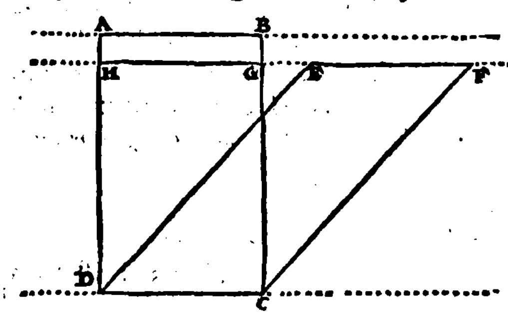
CONVERTEMVS facilè hanc propositionem, hoc modo:

Parallelogramma æqualia ſuper eandem baſin, ad eaſdemque partes conſtituta, erunt inter eaſdem parallelas.




*Sint duo parallelogrāma æqualia A B C D, C D E F, ſuper eandem baſin C D, & ad eaſdem partes. Dico rectam A B, productam in directum iacere ipſi E F, & propterea ipſa parallelogramma inter eaſdem eſſe parallelas. Aliàs enim A B, producta vel cadet infra E F, vel ſupra. Cadat primò infra, qualis eſt A H. Erit igitur parallelogrammum C D G H,* [a] *æquale parallelogrāmo A B C D: Ponitur autem eidem parallelogrammo A B C D, æquale parallelogrammum C D E F. Quare parallelogramma C D E F, C D G H, æqualia erunt, totum & pars, quod eſt abſurdum. Non ergo cadet A B, infra E F.*

a 35. primi.



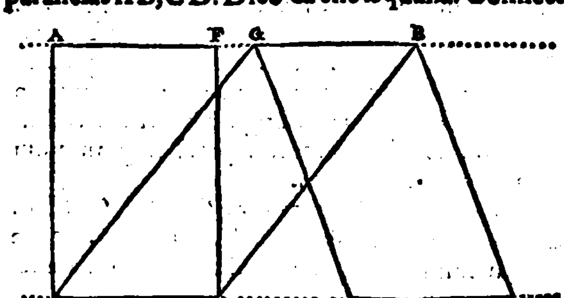

*Cadat ſecundò A B, producta ſupra E F. Cadet igitur F E, protracta infra A B. Quare, vt priùs, erunt parallelogramma A B C D, C D H G, æqualia. totum & pars, quod eſt abſurdum. Idem abſurdum conſequeretur, ſi C F, D E, producerentur vſque ad A B, protractam. Eademq; demonſtratio conueniet omnibus caſibus, qui occurrere poſſunt, hoc eſt, ſiue punctum E, ſit vltra B, ſiue non, vt perſpicuū eſt. Non ergo cadet A B, ſupra E F; ſed nec infra, vt demonſtratum eſt: ergo producta in directum iacet ipſi E F; ac proinde parallelogramma A B C D, C D E F, in eiſdem ſunt parallelis.*

## THEOR. 26. PROPOS. 36.

36.

Parallelogramma ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdē parallelis conſtituta inter ſe ſunt æqualia.

Sint duo parallelogramma A C E F, G H D B, ſuper æquales baſes C E, H D, inter eaſdem parallelas A B, C D. Dico ea eſſe æqualia. Connectantur enim extrema rectarum C E, G B, ad eaſdem partes lineis rectis C G, E B. Quoniam igitur recta C E, æqualis ponitur rectæ H D, & eidem H D, [a] æqualis eſt G B, in parallelogrammo G H D B, oppoſita; erunt C E, G B, [b] æquales inter ſe: Sunt autem & parallelæ, per hypotheſin. Quare & C G, E B, ipſas coniungentes, [c] parallelæ erunt, & æquales, ideoque C E B G, parallelogrammum erit. Itaq; cùm parallelogramma A C E F, G C E B, ſint inter eaſdem parallelas, & ſuper eandē baſin C E, [d] erit parallelogrammum A C E F, parallelogrammo G C E B, æquale. Rurſus quia parallelogramma G C E B, G H D B, ſunt inter eaſdem parallelas, & ſuper eandem baſin G B, [e] erit quoque parallelogrammum G H D B, eidem parallelogrammo G C E B, æquale. Quare & parallelogrāma A C E F, G H D B, [f] inter ſe æqualia erūt. Parallelogramma igitur ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, &c. Quod oſtendendum erat.

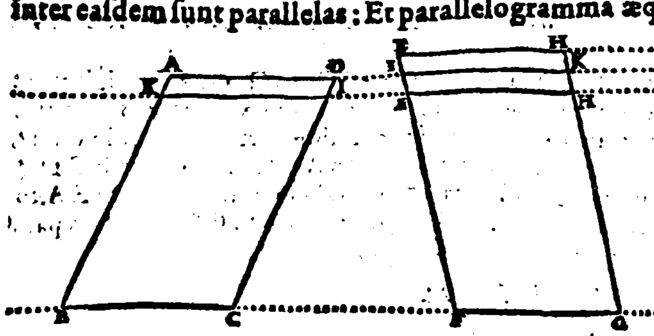



a 34. primi.
b 1. pron.
c 33. primi.
d 35. primi.
e 35. primi.
f 1. pron.

### SCHOLIVM.

*Conuerſum huius theorematis duplex eſt, ad hunc modum.*

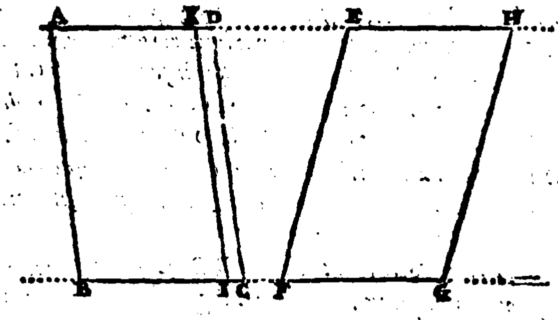
Parallelogramma æqualia ſuper baſes æquales, & ad eaſdem partes conſtituta, inter eaſdem ſunt parallelas: Et parallelogramma æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non eandem habuerint baſin, ſuper æquales baſes ſunt conſtituta.




*Sint primùm duo parallelogramma æqualia A B C D, E F G H, ſuper baſes æquales B C, F G, & ad eaſdem partes conſtituta. Dico ea eſſe inter eaſdem parallelas, hoc eſt, A D, protractam coire in directum cum E H. Nam aliàs cadet aut infra E H, aut ſupra. Quo poſito, ſequitur, totū & partem eſſe æqualia, quemadmodum in*

conuerſa

*conuersa præcedentis propositionis est dictum, & figura facilè commonstrat. Intelligenda sunt autem bases æquales datæ in eadem linea recta B G.*




*Sint secundò eadem parallelogramma æqualia inter easdem parallelas A H, B G. Dico bases B C, F G, esse æquales. Si enim altera, nempe B C, dicatur maior, [a] abscindatur B I, æqualis rectæ F G, & [b] ducatur I K, parallela ipsi C D. Erit ergo parallelogrammum A B I K, [c] æquale parallelogrammo E F G H; & ideò parallelogrammo A B C D, pars toti, quod est absurdum. Non ergo B C, maior est, quàm F G. Eadem ratione neque minor erit. Quare bases B C, F G, æquales sunt.*
a 3. primi.
b 31. primi.
c 36. primi.

*Sequens quoque theorema facilè hinc demonstrabitur.*

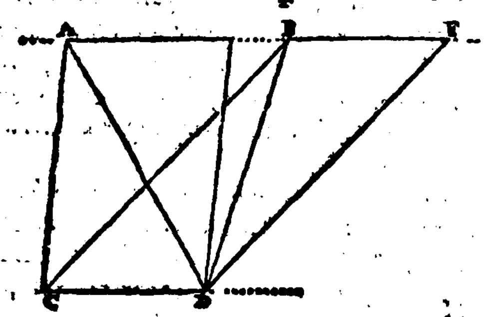
Si duo parallelogramma inter easdem parallelas habeant bases inæquales, illud, cuius basis maior est, maius erit. Et contrà, si duo parallelogramma sint inæqualia inter easdem parallelas, basis maioris maior erit.

*Sint enim in posteriori figura parallelogrāma B D, F H, inter parallelas A H, B G, sitq́ basis B C, maior*
*base F G. Dico parallelogrammū B D, parallelogrammo F H, maius esse. [d] Auferatur enim recta B I, ipsi F G,* d 3. primi.
*æqualis, [e] ducaturq́ I K, ipsi A B, parallela. Erunt ergo [f] parallelogramma B H, F K, supra æquales bases B I,* e 31. primi.
*F G, æqualia. Cùm igitur B D, [g] maius sit, quàm B K, erit idem B D, maius, quàm F H.* f 36. primi.

*Sint rursum parallelogramma B D, F H, inæqualia, & B D, maius. Dico basim B C, maiorem esse basi* g 9. pron.
*F G. Nam si foret æqualis, [h] essent parallelogramma æqualia, quod est absurdum, cùm B D, ponatur maius. Si* h 36. primi.
*autem esset minor, foret parallelogrammum F H, maius, quàm B D, vt proximè ostendimus. quod multò magis est absurdum, cùm B D, maius ponatur, quàm F H. Basis ergo B C, cùm neq́ æqualis sit ipsi F G, neq́ minor, erit maior, quàm F G. quod est propositum.*

## THEOR. 27. PROPOS. 37. 37.

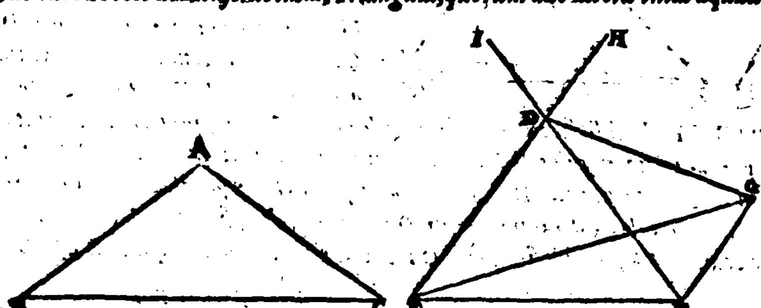
Triangvla sup eadē basi cōstituta, & in eisdē parallelis, inter se sunt æqualia.




Inter parallelas A B, C D, & super basin C D, sint constituta duo triangula A C D, B C D. Dicitur autē triangulum inter duas esse parallelas constitutum, quādo basis est pars vnius, & angulus oppositus alteram attingit. Dico ea triangula esse æ-
qualia. Per D, enim [a] ducatur D E, parallela rectæ A C, & D F, parallela rectæ B C. [b] Erunt igitur parallelogramma A C D E, B C D F, æqualia. Sunt enim super eandem basin C D, & inter easdem parallelas. Sed horum dimidia sunt triangula A C D, B C D; [c] quòd A D, B D, diametri bifariam secent parallelogramma A C D E, B C D F. Igitur & triangula A C D, B C D, [d] æqualia erunt. Triangula igitur super eadem basi, &c. Quod erat demonstrandum.
a 31. primi.
b 35. primi.
c 34. primi.
d 7. pronun.

*SCHOLIVM.*

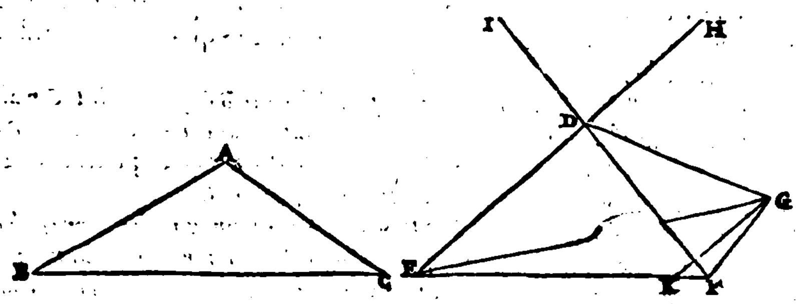
*Conversa huius propositionis demonstrabitur ab Euclide propos. 39. Porrò ex hac propositione facilè cum Proclo demonstrabimus, Triangula, quorum duo latera vnius æqualia sint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique, & angulus vnius illis lateribus contentus maior angulo alterius, aliquando esse æqualia, & aliquando inæqualia: Id quod ad propos. 24. polliciti sumus. Sint enim duo triangula A B C, D E F, & latera A B, A C, æqualia lateribus D E, D F, & angulus A, maior angulo E D F, sintq́ primùm hi duo anguli duobus rectis æquales. Dico triangula esse æqualia. Producatur enim E D, ad H, &*




*F D, ad I; [a] fiatque angulus E D G, æqualis angulo A, [b] & recta D G, rectæ D F, seu A C; ducanturque re-* a 23. primi.
*ctæ E G, G F. Quoniam igitur duo anguli A, & E D F, ponuntur æquales duobus rectis, & angulus E D G,* b 3. primi.
*æqualis factus est angulo A; erunt & anguli E D G, E D F, duobus rectis æquales: Sunt autem & anguli E D G, G D H, [c] duobus rectis æquales. Igitur anguli E D G, E D F, angulis E D G, G D H, æquales erunt.* c 13. primi.

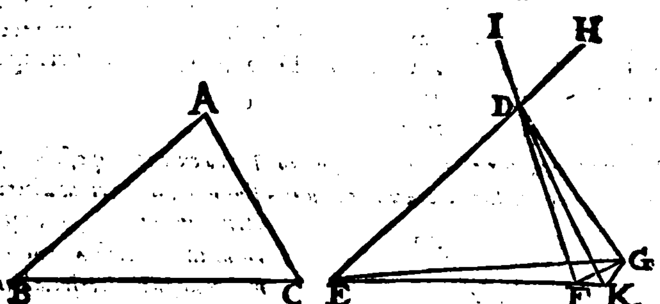
a 23.pron. *Quare ablato communi angulo E D G, ª remanebit angulo E D F, æqualis angulus G D H: Est autem quidem*
b 15. primi. *angulo E D F,ᵇ æqualis angulus H D I. Igitur & anguli G D H, H D I, æquales erũt: atq; adeò angulus G D H,*
c 5. primi. *dimidium erit totius anguli G D I. Rursus quia latera D F, D G, sunt æqualia in triangulo D F G; ᶜ erũt an-*
d 32. primi. *guli D F G, D G F, æquales; qui cùm ᵈ æquales sint externo angulo G D I, erit vterlibet eorũm, nempe D G F,*
e 7. pron. *dimidium anguli G D I: Ostensum est autem, angulum G D H, dimidium quoq; esse eiusdem anguli G D I.ᵉ*
f 27. primi. *Quare anguli G D H, D G F, æquales erunt. Et quia sunt alterni inter E H, F G, ᶠ erunt E H, F G. parallelæ.*
g 37. primi. *Quamobrem ᵍ triangula D E G, D E F, æqualia erunt, cùm habeant eandem basin D E. sintq; inter easdem*
h 4. primi. *parallelas D E, F G. Quoniam verò triangulum D E G, ʰ æquale est triangulo A B C, propterea quòd latera*
*D E, D G, æqualia sint lateribus A B, A C, & angulo A, æqualis angulus E D G: erit & triangulũ A B C, trian*
*gulo D E F, æquale. quod est propositum.*

*Sint deinde anguli A, & E D F, duobus rectis maiores. Dico triangulum A B C, quod maiorem habet*
i 23. primi. *angulum, minus esse triangulo D E F. Producatur enim E D, ad H, & F D, ad I; ⁱ fiatq; angulus E D G, æqua-*
k 3. primi. *lis angulo A, ᵏ & recta D G, rectæ D F, seu A C, æqualis, ducanturq; rectæ E G, G F. Quoniam igitur anguli*
*A, & E D F. ponuntur maiores duobus rectis, erũt & anguli E D G, E D F, duobus rectis maiores: Sunt autem anguli E D G, G D H,ˡ*
l 13. primi. *æquales duobus rectis. Igitur anguli E D G, E D F, maiores sũt angulis E D G, G D H.*




m 15. primi. *Quare ablato communi E D G, remanebit angulus E D F, maior angulo G D H. Quoniam verò ᵐ angulus*
*E D F, angulo H D I, æqualis est, erit quoq; H D I, maior, quàm G D H; atq; adeò G D H, minor, quàm dimi-*
n 5. primi. *dium anguli G D I. Rursus quia latera D G, D F, æqualia sunt: ⁿ erunt anguli D F G, D G F, æquales: qui*
o 32. primi. *cùm sint ᵒ æquales externo G D I, erit vteruis eorum, nempe D G F, dimidium anguli G D I: Ostensum est*
*autem, angulum G D H, minorem esse dimidio eiusdem G D I. Quare D G F, maior erit, quàm G D H. Abscin*
p 23. primi. *datur ex angulo D G F, angulus D G K, ᵖ æqualis angulo alterno G D H. Erit ergo G K, ᵠ parallela ipsi D E,*
q 27. primi. *secabitq; G K, rectam E F. Ducatur ex D, ad K, vbi G K, secat rectam E F, recta D K. Erit igitur triangulum*
r 37. primi. *D E G, ʳ æquale triangulo D E K. Quoniam autem triangulum D E G, ˢ æquale est triangulo A B C propterea*
s 4. primi. *quòd latera D E, D G, æqualia sunt lateribus A B, A C, & angulo A, angulus E D G, æqualis, erit & triangu-*
t 9. pron. *lum A B C, triangulo D E K, æquale. Cùm igitur D E K, ᵗ minus sit triangulo D E F; erit quoq; A B C, trian-*
*gulum triangulo D E F, minus. Quod est propositum.*

*Sint tertiò anguli A, & E D F, duobus rectis minores. Dico triangulum A B C, quod maiorem habet*
u 23. primi. *angulum, maius esse triangulo D E F. Producatur E D, ad H, & F D ad I; ᵘ fiatq; angulus E D G, æqualis an-*
x 3. primi. *gulo A, ˣ & recta D G, rectæ D F, seu A C; ducanturq; rectæ E G, G F. Quoniam igitur anguli A, & E D F,*
*ponuntur minores duobus rectis, erunt quoq; anguli E D G, E D F, duobus re-*
y 13. primi. *ctis minores: Sunt ʸ aũt anguli E D G, G D H, duobus rectis æquales. Igitur E D G, E D F, minores sunt, q̃ E D G, G D H; demptoq; communi E D G, re-*
z 15. primi. *manebit E D F, minor, quàm G D H. Est autem E D F, ᶻ æqualis ipsi H D I. Quare & H D I, minor erit, q̃ G D H; atque adeò G D H, maior est dimidio*

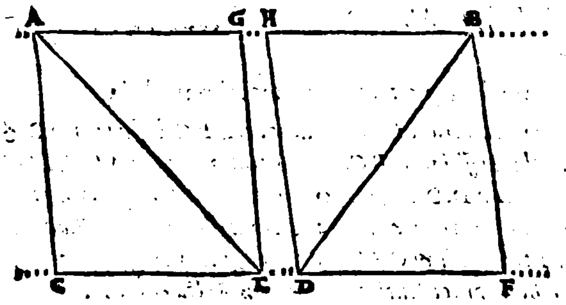



*anguli G D I. Quoniam autem D G F, dimidium est eiusdem anguli G D I, vt iam suprà ostensum fuit; e-*
a 23. primi. *rit G D H, maior, quàm D G F. Fiat igitur angulus D G K, ª æqualis angulo G D H, ducta recta G K, quæ se-*
*cabit rectam E F. protractam in K; & ducatur recta D K. Erit ergo, vt prius, G K, ᵇ parallela ipsi D E; ᶜ trian*
*gulumque D E G, triangulo D E K, æquale: Est autem iterum D E G, ᵈ æquale ipsi A B C. Igitur & A B C,*
b 27. primi. *æquale est ipsi D E K. Quocirca cùm D E K, ᵉ maius sit, quàm D E F; erit & A B C, maius, quàm D E F. Quod*
c 37. primi. *demonstrandum erat.*
d 4. primi. *Ex his perspicuum est, cur Euclides in proposit. 24. solùm collegerit inæqualitatem basium, non autem*
e 9. pron. *triangulorum, vt ibidem admonuimus.*

## THEOR. 28. PROPOS. 38.

**Triangvla** super æqualibus basibus constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

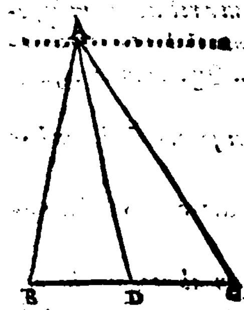
Inter




INTER parallelas AB, CD, & super æquales bases CE, FD, sint constituta triangula ACE, BFD. Dico ipsa esse æqualia. [a] Ducatur enim EG, parallela ipsi AC, & DH, ipsi BF: Eruntq; [b] parallelogramma ACEG, BFDH, æqualia. Cùm igitur horum [c] dimidia sint triangula ACE, BFD; [d] erunt hæc inter se æqualia. Triangula ergo super æqualibus basibus, &c. Quod erat ostendendum.

a 31. primi. b 36. primi. c 34. primi. d 7. pron.

## SCHOLIVM.

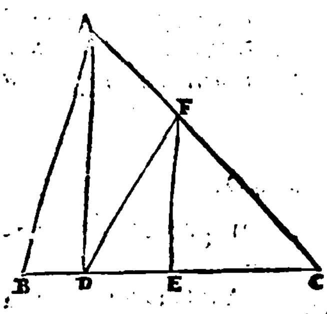



*CONVERSA huius ostendetur ab Euclide propos. 40.*

*COLLIGITVR autem ex hac propositione, si à quouis angulo trianguli ducatur linea recta diuidens latus oppositum bifariam, triangulum quoque bifariam secari. Ducatur enim in triangulo ABC, ex angulo A, recta AD, diuidens bifariam latus BC, in D. Dico triangulum ABC, bifariam quoque secari. Si enim per A, ducatur parallela ipsi BC, erunt duo triangula ABD, ADC, inter easdem parallelas, & super æquales bases. [a] Quare æqualia erunt.* a 38. primi.

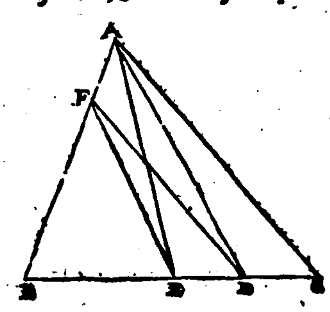
## EX PELETARIO.

A puncto quouis dato in vno latere trianguli propositi lineam rectam ducere, quæ bifariam secet triangulum datum.




*SIT triangulum ABC, & punctum datum D, in latere BC. Oportet igitur ex D, rectam lineam ducere, quæ bifariam diuidat triangulum. Quòd si punctum D, diuidat latus BC, bifariam, recta DA, ducta ad A, diuidet triangulum bifariam, vt in hoc scholio est ostensum: Si verò D, non diuidit BC, bifariam, [b] secetur BC, bifariam in E. Deinde ex D, ad angulum oppositum A, ducatur recta DA, & per E, [c] parallela EF, ipsi DA, secans AC, in F. Si igitur ducatur recta DF, erit triangulum diuisum bifariam à linea DF. Nam ducta recta EA, [d] erunt triangula EFA, EFD, æqualia, cùm sint super eandem basin EF, & inter easdem parallelas EF, AD. Addito igitur communi CFE, [e] erunt tota triangula AEC, CDF, æqualia: Est autem AEC, dimidium totius ABC, vt iam fuit ostensum. Igitur & CDF, dimidium est eiusdem trianguli ABC. quod erat probandum.*

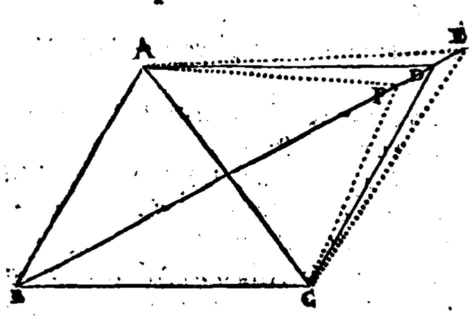
b 10. primi. c 31. primi. d 38. primi. e 2. pron.




*QVOD si punctum D, fuerit in altera medietate EC, eodem modo problema conficiemus: sed tunc triangulum abscindetur ad partes B, trapezium verò ad partes C, vt figura præsens satis indicat. Demonstratio autem eadem est, si in ea mutetur litera B, in C, & C, in B. Hoc tamen problema multò nos vniuersalius proponemus ad finem sexti libri.*

## THEOR. 29. PROPOS. 39. 39.

TRIANGVLA æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta; & in eisdem sunt parallelis.



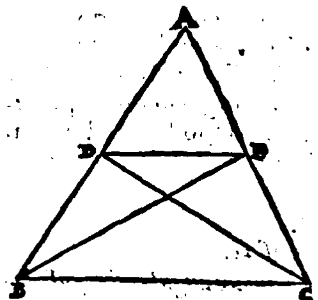

SINT duo triangula æqualia ABC, DBC, super eandem basin BC, & ad easdem partes. Dico ipsa esse inter easdem parallelas constituta, hoc est, rectam ductam AD, parallelam esse ipsi BC. Si enim non est, [a] ducatur ex A, parallela ipsi BC, quæ vel cadet supra AD, vel infra. Cadat primùm supra, qualis est AE, coeatque cum BD, protracta in E, & ducatur recta EC. Quoniam igitur parallelæ sunt AE, BC, [b] erit triangulo ABC, triangulum EBC, æquale: Est autem per hypothesin, triangulum quoque DBC, æquale eidem triangulo ABC. Igitur [c] erunt triangula DBC, EBC, æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Quòd si parallela ducta per A, cadat infra AD, qualis est AF; ducta recta FC, erunt eadem ratiocinatione triangula BFC, BDC, æqualia, pars & totum: quod est absurdum. Erit igitur AD, parallela ipsi BC. Quare triangula æqualia super eadem basi, &c. Quod ostendendum erat.

a 31. primi. b 37. primi. c 1. pronun.

### SCHOLIVM.

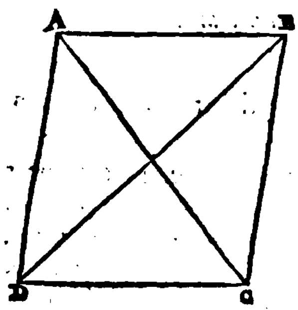
*Ex his infert Campanus sequens hoc theorema.*

LINEA recta secans duo trianguli latera bifariam, erit reliquo lateri parallela.




*SECET linea D E, latera A B, A C, trianguli A B C, bifariam in D, & E. Dico D E, parallelam esse lateri B C. Cùm enim triangula A D E, B D E,*
a 38.primi. *sint super æquales bases A D, D B, & inter easdē parallelas; (si per E, duceretur parallela ipsi A B;) a erit triangulum B D E, triangulo A D E, æquale: Eadem ratione erit triangulum C E D, eidē triangulo A D E, æquale. Quod etiam constat ex scholio præcedentis propositionis. Recta enim E D, secabit triangulum A E B, bifariam, & recta eadem D E, triangulum A D C, bifariam etiam, quòd bases A B, A C, sectæ sint bifariam à recta D E, ex hypothesi.*
b 1.pron.
c 39.primi. *Igitur triangula D B E, C E D. b æqualia erunt. Habent autem eandem basin D E, & sunt ad easdem partes constituta. Quare c inter easdem erunt parallelas, & idcircò D E, B C, parallelæ erunt. Quod est propositum.*

*ID autem, quod ad finem secundi theorematis in scholio propositionis 34. polliciti sumus, facilè ex hac propositione demonstrabimus. Videlicet.*

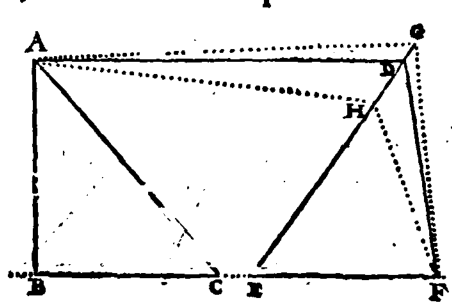



OMNE quadrilaterum, quod ab vtraque diametro bifariam diuiditur, parallelogrammum est.

*NAM quadrilaterum A B C D, diuidatur bifariam ab vtraque diametro A C, B D. Dico ipsum esse parallelogrammū. Cùm enim triangula A D C,*
d 7.pron.
e 39.primi. *B D C, dimidia sint eiusdem quadrilateri A B C D, d ipsa inter se æqualia erunt. Quare cùm eandem habeant basin D C, ad easdemq; partes sint, e ipsa in eisdem parallelis erunt; Atque idcircò rectæ A B, D C, parallelæ sunt. Non aliter ostendemus, parallelas esse A D, B C. Parallelogrammum igitur est A B C D. Quod est propositum.*

## 40. THEOR. 30. PROPOS. 40.

TRIANGVLA æqualia super æqualibus basibus, & ad easdem partes constituta; & in eisdem sunt parallelis.

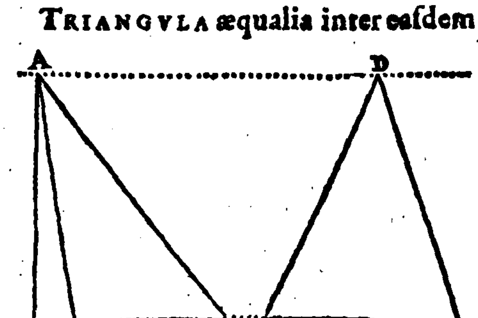



SINT duo triangula æqualia A B C, D E F, super bases æquales B C, E F, (quæ in eadem recta linea collocentur,) & ad easdem partes constituta. Dico ea esse in eisdem parallelis, hoc est, rectam ex A, ad D, ductam parallelam esse rectæ B F. Si enim non est, cadet parallela ipsi B F, per A, ducta vel supra A D, vel infra. Cadat primùm supra, coeatque cum E D, producta in G, & ducatur recta G F. Quoniam igitur parallelæ sunt
a 38.primi. A G, B F, a erit triangulum E F G, triangulo A B C, æquale: Ponitur autem & triangulum D E F, eidē triangulo
b 1.pron. A B C, æquale. Igitur b triangula D E F, G E F, æqualia erunt, pars & totum. Quòd est absurdum. Quòd si parallela ducta per A, cadat infra A D, qualis est A H: ducta recta H F, erunt eadem argumentatione triangula H E F, D E F, æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Est igitur A D, parallela ipsi B F. Quare triangula æqualia super æqualibus basibus, &c. Quod erat demonstrandum.

### SCHOLIVM.

*HAEC propositio conuertit vno modo propos. 38. Alio autem modo conuerti potest, quemadmodum propositionem 36. conuertimus in eius scholio, nimirum.*

TRIANGVLA æqualia inter easdem parallelas, si non eandem habuerint basim, super æquales bases erunt constituta.




*SINT triangula æqualia A B C, D E F, inter parallelas*
a 3. primi. *A D, B F, & super bases B C, E F, quas dico esse æquales. Si e-*
b 38.primi. *nim non sunt æquales, sit B C, maior. a Abscissa ergo recta C G, æquali ipsi E F, & ducta recta G A; b erit triangulum A G C, triangulo D E F, æquale. Ponitur autem & triangulum A B C, eidem triangulo D E F, æquale. Igitur triangula*
c 1.pron. *A G C, A B C, c æqualia erūt, pars & totum, quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt bases B C, E F, sed æquales. Quod est propositum.*

SEQVENS

*SEQVENS etiam theorema facili negotio demonstrabitur.*

Si duo triangula inter easdem parallelas habeant bases inæquales, illud, cuius basis maior est, maius erit. Et contrà, si duo triangula sint inæqualia inter easdem parallelas, basis maioris maior erit.

*SINT enim in proxima figura inter parallelas A D, B F, triangula A B C, D E F, sitq́; basis B C, base E F, maior. Dico triangulum A B C, maius esse triangulo D E F. Ablata enim recta C G, [a] æquali ipsi E F, ductaq́; recta A G; [b] erunt triangula A G C, D E F, supra æquales bases G C, E F, æqualia. Cùm ergo [c] triangulum A B C, triangulo A G C, maius sit; erit idem triangulum A B C, maius, quàm D E F.* a 3. primi. b 38 primi. c 9. pron.

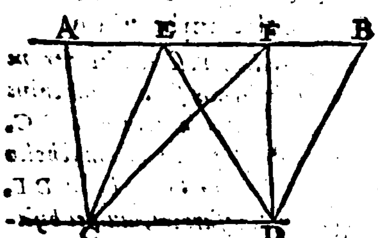
*SINT rursus triangula A B C, D E F, inæqualia, & A B C, maius. Dico basin B C, base E F, maiorem esse. Si enim dicatur æqualis, [d] erit triangulum A B C, triangulo D E F, æquale. quod est absurdum, cùm maius ponatur. Si verò credatur esse minor, erit triangulum D E F, maius triangulo A B C, vt proximè ostendimus, quod multò magis est absurdum, cùm A B C, ponatur maius, quàm D E F. Recta igitur B C, maior erit, quàm E F, cùm neque æqualis sit ostensa, neque minor. Quod est propositum.* d 38. primi.

*QVAE porrò hactenus de parallelogrammis, triangulisq́; inter easdem parallelas constitutis demonstrata sunt, facilè quoque demonstrari possunt de trapezijs inter easdem parallelas descriptis, eodem fermè ordine hoc modo.*

## I.

TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super eadem basi, quorum oppositæ bases inter se æquales sint, sunt inter se æqualia: Et trapezia æqualia in eisdem parallelis, & super eadem basi, habent bases oppositas æquales.

*DICVNTVR trapezia in eisdem esse parallelis, quando latera duo opposita parallela sunt, partésque sunt earundem parallelarum.*




*INTER parallelas igitur A B, C D, super eadem basi C D, constituta sint duo trapezia A C D E, F C D B, quorum bases oppositæ A E, F B, æquales sint. Dico ipsa inter se esse æqualia. Ductis enim rectis E C, F D, [e] erunt tam triangula E C D, F C D, super eadem basi C D, & in eisdem parallelis, inter se æqualia, [f] quàm triangula A C E, F D B, super æqualibus basibus A E, F B, & in eisdem parallelis. Si igitur æqualibus E C D, F C D, addantur æqualia A C E, F D B, [g] erunt tota trapezia A C D E, F C D B, inter se æqualia.* e 37. primi. f 38. primi. g 2. pron.

*SINT iam trapezia A C D E, F C D B, æqualia. Dico bases oppositas A E, F B, æquales quoque esse. Erunt enim rursus [h] triangula E C D, F C D, æqualia. Si igitur ex trapezijs æqualibus auferantur, [i] æqualia erunt reliqua triangula A C E, F D B. Quare, vt in hoc scholio ostendimus, bases A E, F B, æquales erunt.* h 37. primi. i 3. pron.

## II.

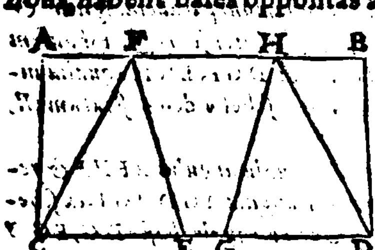
TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super eadem basi, quorum oppositæ bases sint inæquales, inæqualia sunt, maiusque est illud, cuius basis maior est; Et trapezia inæqualia in eisdem parallelis, & super eadem basi, habent bases oppositas inæquales, maiorque est illa, cuius trapezium maius est.

*VT in eadem figura, si basis A E, dicatur esse maior base F B; Dico trapezium A C D E, maius esse trapezio F C D B. [k] Erunt enim rursus triangula E C D, F C D, æqualia: At triangulum A C E, triangulo F D B, maius, vt in hoc scholio demonstrauimus. [l] Totum ergò trapezium A C D E, toto trapezio F C D B, maius erit.* k 37. primi. l 4. pron.

*RVRSVS si trapezium A C D E, dicatur esse maius trapezio F C D B; Dico basin A E, base F B, maiorem esse. [m] Erunt enim rursus triangula E C D, F C D, æqualia. Quare reliquum triangulum A C E, reliquo triangulo F D B, [n] maius erit: ac proinde, vt in hoc scholio ostensum est, basis A E, maior erit base F B. Quod ostendendum erat.* m 37. primi. n 5. pron.

## III.

TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, quorum oppositæ bases sint æquales, æqualia sunt: Et trapezia æqualia in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, habent bases oppositas æquales.




*INTER parallelas A B, C D, super æquales bases C E, G D, constituta sint duo trapezia A C E F, H G D B, quorũ bases oppositæ A F, H B, æquales quoque sint. Dico ipsa trapezia æqualia esse. Ductis enim rectis F C, H D, [o] erunt tam triangula F C E, H G D, super æquales bases C E, G D, quàm A C F, B D H, super bases æquales A F, B H, inter se æqualia. [p] Tota ergò trapezia æqualia erunt.* o 38. primi. p 2. pron.

*SINT iam trapezia A C E F, H G D B, æqualia super bases æquales C E, G D. Dico bases oppositas A F, B H, æquales quoque esse. [q]* q 38. primi.

g

*Erunt namque rursus triangula F C E, H G D, super æquales bases C E, G D, æqualia: quibus ablatis ex tra-*
a 3. pron. *peziis æqualibus, reliqua triangula A C F, B D H,* [a] *æqualia erunt; ac proinde, vt paulò antè in hoc scholio o-*
*stendimus, bases A F, B H, æquales erunt.*

## IV.

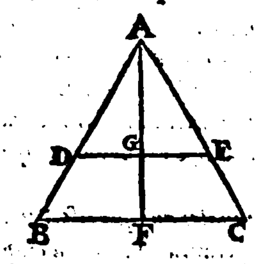
Trapezia in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, quorum oppositæ bases sint inæquales, inæqualia sunt, maiusque est illud, cuius basis maior est: Et trapezia inæqualia in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, habent oppositas bases inæquales, maiorque est illa, cuius trapezium maius est.

*Vt in eadem figura, si basis A F, dicatur esse maior base H B, erit trapezium A C E F, trapezio H G D B,*
b 38. primi. *maius.* [b] *Erunt enim rursum triangula F C E, H G D, super æquales bases C E, G D, æqualia: At triangulum*
c 4. pron. *A C F, maius triangulo B D H, vt suprà ostensum est, quòd basis A F, maior ponatur base B H.* [c] *Totum ergo*
*trapezium A C E F, toto trapezio H G D B, maius erit.*

d 38. primi. *Rursus si trapezium A C E F, maius ponatur trapezio H G D B, erit basis A F, base B H, maior.* [d] *Erunt*
*enim rursus triangula F C E, H G D, super æquales bases C E, G D, æqualia: quibus ablatis ex trapeziis inæ-*
e 5. pron. *qualibus, reliquum triangulum A C F, reliquo triangulo B D H,* [e] *maius erit; ac proinde, vt in hoc scholio o-*
*stensum fuit, basis A F, base B H, maior erit. Quod erat ostendendum.*

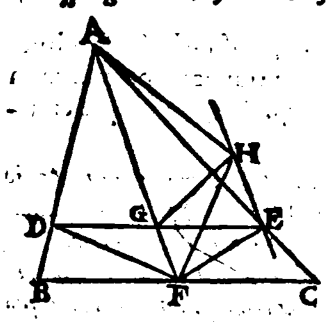
*Porro non videtur hic omittendum theorema sequens, per quod facili negotio lineam rectam quamcunque in quotuis partes æquales diuidemus: quod nos in scholio propositionis 10. huius libri facturos hoc loco recepimus. Quamuis enim idem demonstrari possit, & quidem facilius, per proportiones linearum, vt libro 6. ostendemus, iucundum tamẽ est intelligere, nullo labore idem absolui posse per propositiones hactenus demonstratas, sine proportionum adiumento. Theorema ergo est huiusmodi.*

Si in triangulo linea recta vni laterum parallela ducatur: Recta ex angulo opposito ducta, diuidensque alterutram parallelarum bifariam, diuidit quoque alteram bifariam.



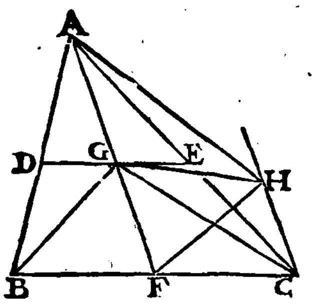

*In triangulo A B C, æquidistet D E, ipsi B C, & recta A F, secet alterutram*
*B C, D E, bifariam in F, vel G. Dico alteram quoque bifariam secari. Sint enim*
f 29. primi. *primùm anguli ad F, recti. Quo posito,* [f] *& anguli ad G, recti erunt. Si igitur B C,*
*diuiditur bifariam, diuidetur bifariam quoque angulus A, per ea, quæ in scholio propositionis 26. huius libri demonstrauimus; ac proinde recta A G, ad basim D E, trianguli A D E, perpendicularis, diuidensq́; angulum A, bifariam, diuidet bifariam quoq; basim D E, vt ibidem ostendimus, quod est propositum.*

*Si verò D E, ponatur diuidi bifariam, diuidetur, per idem scholium propositionis 26. huius libri, angulus quoque A, bifariam: ac proinde recta A F, ad basim B C, perpendicularis, diuidensq́; angulum A, bifariam, basim quoq; B C, bifariam secabit, quod est propositum.*

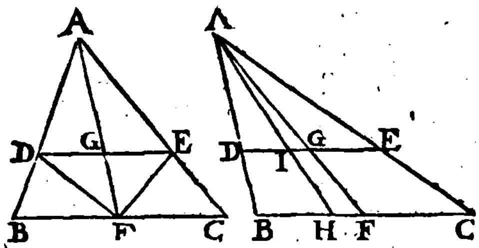



*Sint deinde anguli ad F, non recti, sed A F C, obtusus, & A F B, acu-*
g 29. primi. *tus. Quo posito, erit & A G E, obtusus, & A G D, acutus,* [g] *cùm hi illis sint*
h 23. primi. *æquales, externi internis. Si igitur B C, diuiditur bifariam,* [h] *constitua-*
i 3. primi. *tur acuto angulo A G D, æqualis angulus A G H,* [i] *& recta G H, rectæ G D,*
k 38. primi. *æqualis, ducanturq́; rectæ A H, H F, F D, F E. Quia igitur tam triangula to-*
l 3. pron. *ta A B F, A C F, ex scholio propositionis 38. huius libri æqualia sunt,* [k] *quàm*
*triangula ablata D B F, E C F, ob æquales bases B F, C F;* [l] *erunt quoque*
*reliqua triangula A D F, A E F, æqualia. Rursus quoniam duo latera A G,*
*G D, trianguli A G D, duobus lateribus A G, G H, æqualia sunt, angulós-*
m 4. primi. *que comprehendunt æquales A G D, A G H, ex constructione,* [m] *erunt quo-*
*que triangula A G D, A G H, æqualia. Pari ratione, quia duo latera D G, G F, duobus lateribus H G, G F, æ-*
*qualia sunt, ex constructione, angulósque continent æquales D G F, H G F, (cùm enim per constructionem*
n 13. primi. *anguli A G D, A G H, æquales sint, erunt quoque reliqui duorum rectorum D G F, H G F, æquales.* [n] *sunt e-*
o 4. primi. *nim tam A G D, D G F, quàm A G H, H G F, duobus rectis æquales.)* [o] *erunt quoque triangula D G F, H G F,*
p 2. pron. *æqualia:* [p] *ac proinde & tota triangula A D F, A H F, æqualia erunt. Est autem eidem triangulo A D F, æ-*
q 1. pron. *quale ostensum triangulum A E F. Igitur & inter se* [q] *æqualia erunt triangula A H F, A E F:* [r] *ac propterea*
r 39. primi. *inter duas easdem erunt parallelas, hoc est, ducta recta E H, erit basi A F, communi parallela. Igitur* [s] *&*
s 37. primi. *triangula H G F, E G F, inter easdem parallelas, & super eadem basi F G, æqualia inter se erunt. Est autem*
*triangulum H G F, triangulo D G F, ostensum æquale. Igitur triangula quoque D G F, E G F, æqualia inter se erunt; proptereáque basis quoque D G, basi G E, æqualis erit, vt in hoc scholio demonstratum est, quod est propositum.*

t 23. primi. *Si verò D E, ponatur bifariam diuidi,* [t] *constituatur angulo acuto A F B, æqualis angulus A F H,* [u] *& re-*
u 3. primi. *cta F H, rectæ F B, ducanturq́; rectæ A H, H G, G B, G C. Quoniam igitur tam triangula A G D, A G E, ex scho-*
x 38. primi. *lio propositionis 38. huius libri æqualia sunt,* [x] *quàm triangula D G B, E G C, ob æquales bases D G, E G;* [y]
y 2. pron. *erunt tota etiam triangula A G B, A G C, æqualia. Rursus quia duo latera A F, F B, duobus lateribus A F, F H,*
*æqualia*




*æqualia sunt, continentq́ angulos æquales A F B, A F H, ex constructione,[a] erunt triangula quoq; A F B, A F H, æqualia. Pari ratione, quia duo latera G F, F B, duobus lateribus G F, F H, æqualia sunt, æqualesq́; continēt angulos G F B, G F H, ex constructione,[b] erunt quoq; æqualia triangula G F B, G F H: quibus demptis ex æqualibus A F B, A F H,[c] æqualia erūt reliqua triangula A G B, A G H: Est autē eidem triangulo A G B, ostensum æquale triangulum A G C.[d] Igitur & triangula A G C, A G H, inter se erunt æqualia.[e] Quare & inter easdē parallelas erunt, hoc est, ducta recta C H, ipsi A F parallela erit: ac proinde[f] æqualia inter se erūt triangula G H F, G F C. Fuit autem ostensum triangulum G H F, triangulo G B F, æquale.[g] Igitur & æqualia inter se erunt triangula G F C, G F B; ideoq; vt in hoc scholio demonstrauimus, & bases F C, F B, æquales erunt. Quod est propositum.* a 4. primi. b 4. primi. c 3. pron. d 1. pron. e 39. primi. f 37. primi. g 1. pron.

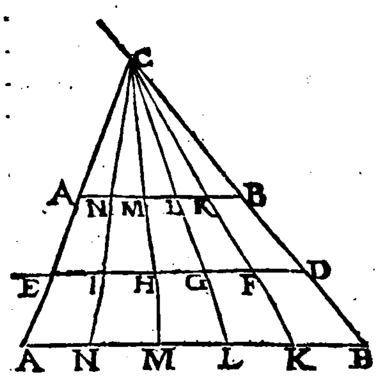



ALITER. *Diuisa sit primum B C, bifariam in F. Dico & D E, bifariam esse diuisam in G. Si enim D G, G E, non sunt æquales, sit maior D G, ducantúrque rectæ F D, F E. Erit igitur per ea, quæ in hoc scholio demonstrauimus, tam triangulum A D G, triangulo A E G, quàm triangulum F D G, triangulo F E G, maius.[h] Totum ergo triangulum A D F, toto triangulo A E F, maius erit: quibus si addantur triangula D B F, E C F,[i] quæ propter bases æquales B F, C F, æqualia sunt,[k] fiet totū triangulum A B F, toto triangulo A C F, maius; ac proinde, vt in hoc scholio monstrauimus, basis B F, base F C, maior erit: Sed & æqualis ponitur. Quod est absurdum. Bifariam ergo secta est D E, in G. Quod est propositum.* h 4. pron. i 38. primi. k 4. pron.

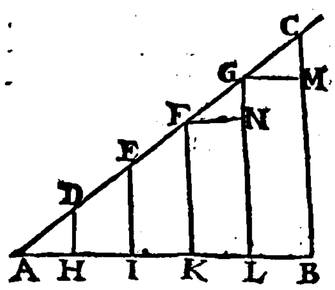
SIT *iam D E, secta bifariam in G. Dico & B C, diuidi bifariam in F. Sin minus,[l] diuidatur B C, in H, bifariam, ducaturq; recta A H, secans D E, in I. Quoniam igitur A H, secat B C, bifariam in H, secabit eadem ipsam D E, quoque bifariam in I, vt proximè ostendimus. Quod est absurdum, cùm bifariam secta esse ponatur in G. Sequeretur enim partem toto esse maiorem. Nam si D I, æqualis est ipsi I E, cùm I E, maior sit, quàm G E, erit quoque D I, maior, quàm G E, hoc est, quàm D G, quæ ipsi G E, æqualis ponitur. Diuiditur ergo B C bifariam in F. Quod erat demonstrandum.* l 10. primi.

HOC *ostenso theoremate, ad diuisionem lineæ rectæ in quotuis æquales partes iam veniamus.*

DATAM rectam lineam finitam in quotlibet partes æquales secare.



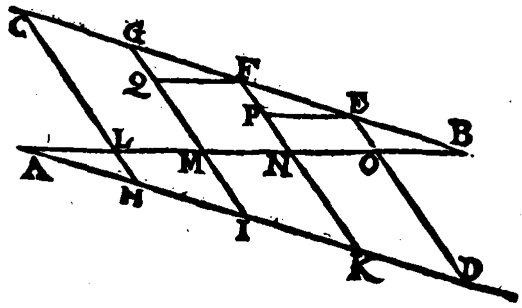

SIT *data recta A B, secanda in quinque partes æquales. Per extremum punctum B, ducta recta B C, vtcunque, & assumpto in B C, puncto quocunque D, siue infra B, siue supra,[m] ducatur per D, ipsi A B, parallela D E, ex qua[n] abscindantur quinque partes inter se æquales, D F, F G G H, H I, I E, hac tamen lege, vt existente puncto D, infra B, recta D E, ex quinque partibus æqualibus composita maior sit, quàm data A B, minor verò, existente puncto D, supra B, vt nimirum recta A C, per alterū extremum A, & per E, ducta cum B D, concurrere possit in puncto aliquo, vt in C: A quo si per puncta F, G, H, I, rectæ ducantur, secta erit data recta A B, in quinque partes æquales B K, K L, L M, M N, N A. Quoniam enim in triangulo C B L, recta D G, ipsi B L, est parallela, vel in triangulo C D G, recta B L, ipsi D G: sectaq; est D G, bifariam in F, secta quoque erit bifariam B L, in K, vt in proximo theoremate demonstrauimus. Eademq; ratione recta K M, in L, secta erit bifariam, quemadmodum & F H, in G bifariam secta est. Sunt ergo tres partes B K, K L, L M, inter se æquales, sicuti tres D F, F G, G H, atq; ita de cæteris.* m 31. primi. n 3. primi.




ALITER. *Ad extremum A, lineæ A B, secandæ in quinque partes æquales, constituatur angulus rectilineus quicunque A, & ex recta A C,[o] abscindantur quinque partes quantæcunque inter se æquales A D, D E, E F, F G, G C: ductáque recta C B,[p] agantur ei parallelæ G L, F K, E I, D H. Dico rectam A B, sectam esse in quinque partes æquales.[q] Ductis enim per G, F, ipsi A B, parallelis G M, F N;[r] quæ inter se etiam parallelæ erunt,[s] & ipsis B L, L K, æquales in parallelogrammis G B, F L;[t] erunt tam anguli F G N, G C M, externus & internus in parallelis G L, C B, quàm anguli C G M, G F N, externus & internus in parallelis G M, F N, æquales inter se. Quoniam igitur duo anguli C, G, trianguli C G M, duobus angulis G, F, trianguli G F N, æquales sunt, vterque vtrique, lateraque illis adiacentia C G, G F,* o 3. primi. p 31. primi. q 31. primi. r 30. primi. s 34. primi. t 29. primi.

a 26.primi. æqualia per constructionem; [a] erunt quoque latera G M, F N, æqualia: quæ cùm ostensa sint æqualia rectis B L, L K, erunt quoque B L, L K, inter se æquales. Eademq; ratione ostendemus K L, K I, æquales esse, necnon I K, H I, & H I, A H; ac propterea recta A B, in quinque æquales partes diuisa erit. Quod est propositum.

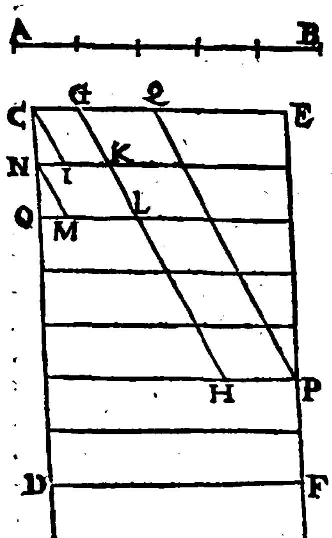
ALITER. Ad extrema puncta A, B, lineæ A B, in quinque partes æquales diuidendæ constituantur duo
b 27.primi. æquales anguli in diuersas partes A B C, B A D. Et in vtraque linea B C, A D, [b] quæ ob alternos angulos æqua-
c 3.primi. les A, B, parallelæ inter se sunt, [c] sumantur quatuor partes inter se omnino æquales, tot nimirum, vna minus, in quot partes linea secanda est, cuiusmodi sunt B E, E F, F G, G C, A H, H I, I K, K D, iungantúrque rectæ
d 33.primi. C H, G I, F K, E D, [d] quæ inter se erunt parallelæ, cùm coniungant extrema parallelarum æqualium. Dico
e 31.primi. rectam A B, in quinque partes æquales sectam esse. [e]
f 30.primi. Ductis enim per E, F; ipsi A B, parallelis E P, F Q, [f] quæ
g 34.primi. inter se quoque parallelæ erunt, [g] & ipsis N O, M N,
h 29.primi. æquales in parallelogrammis E N, F M, [h] erunt tam anguli E F P, F G Q, externus, & internus in parallelis F K, G I, quàm anguli G F Q, F E P, externus & internus in parallelis Q F, P E, inter se æquales. Itaque




quoniam duo anguli G, F, trianguli F G Q, duobus angulis F, E, trianguli E F P, æquales sunt, vterque vtri-
i 26.primi. que, lateráque illis adiacentia F G, E F, æqualia, per constructionem, [i] erunt quoque latera F Q, E P, inter se æqualia: quæ cùm ostensa sint æqualia rectis M N, N O, erunt etiam M N, N O, inter se æquales. Eadémque ratione æquales inter se erunt O B, N O, M N, L M, A L, proptereaq; recta A B, in quinque æquales partes diuisa erit. Quod est propositum.

k 33.primi. PRAXIS hac breuiùs ita demonstrabitur. [k] Quoniam rectæ E D, F K, G I, C H, parallelæ sunt, quòd coniungant extrema æqualium & parallelarum; secabitur recta B L, in quatuor partes æquales, nec non & recta A O, vt in præcedenti praxi ostendimus. Omnes ergo quinque partes A L, L M, M N, N O, O B, æquales erunt.

ALITER. Paretur instrumentum diuisionibus linearum in partes æquales accommodatum, hoc modo.
l 3.primi. Ductis duabus parallelis satis magno spatio inter se distantibus C D, E F, [l] sumantur in vtraque partes omnino inter se æquales quotcunque, tot videlicet in vna, quot in altera, & modicæ quantitatis, punctáque re-
m 33.primi. spondentia lineis rectis iungantur, [m] quæ parallelæ inter se erunt, cùm coniungant extrema parallelarum æqualium. Si igitur beneficio circini recta A B, in quinque diuidenda partes æquales transferatur ex quouis puncto G, vsque ad punctum H, ita vt quinque spatia parallelarum inter G, & H, includantur, diuisa erit ducta G H, ab illis parallelis in quin-
n 3.primi. que partes æquales, quibus partibus si in data A B, [n] sumantur partes æquales, diuisa quoque erit A B, in quinque æquales partes. Sectam autem esse G H, in quinque partes æquales, ita demonstrabitur. Ductis ex
o 30.primi. C, N, ipsi G H, parallelis C I, N M, [o] quæ inter se quoque parallelæ erunt; [p]
p 34.primi. & ipsis G K, K L, æquales in parallelogrammis G I, K M; [q] erunt tam an-
q 29.primi. guli C N I, N O M, externus & internus in parallelis N K, O L, quàm anguli O N M, N C I, externus & internus in parallelis N M, C I, æquales inter se. Igitur cùm duo anguli N, C, trianguli C N I, duobus angulis O, N, trianguli N O M, æquales sint, vterq; vtrique, lateraq; illis adiacentia
r 26.primi. C N, N O, æqualia, ex constructione, [r] erunt quoque latera C I, N M, inter se æqualia: quæ cùm ostensa sint æqualia rectis G K, K L, erunt quoque G K, K L, inter se æquales. Eadémque ratione omnes partes rectæ G H, ostendentur æquales; ac proinde recta G H, in quinque partes æquales erit diuisa.



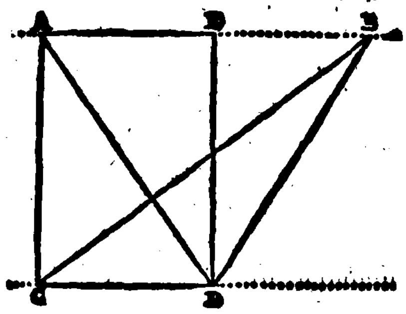

PRAXIS etiam hac breuiùs demonstrabitur, si hoc modo fiat. Sumptis quinque internallis rectæ E F, ab E, vsque ad P, transferatur recta A B, beneficio circini ex P, ad aliquod punctum rectæ C E, vt ad Q. Erit enim hac ratione ducta recta P Q, diuisa à parallelis in quinque partes æquales, vt in secunda praxi demonstratum est. Quare si partes rectæ P Q, quæ datæ rectæ A B, æqualis est, ex constructione, transferantur in datam rectam A B, diuisa quoque erit A B, in quinque partes æquales. Quod est propositum.

PLENIVS describitur hæc praxis lib. 6. in scholio propos. 10.

## 41. THEOR. 31. PROPOS. 41.

SI parallelogrammum cum triangulo eandem basin habuerit, in eisdemq; fuerit parallelis, duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli.

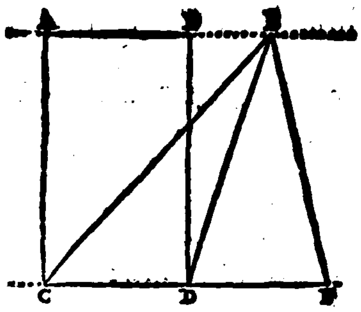
INTER



INTER parallelas AB, CD, & super basin CD, constituantur parallelogrammũ ACDE, & triangulum BCD. Dico parallelogrammum esse duplum trianguli BCD. Ducta enim diametro AD, in parallelogrammo, [a] erunt triangula ACD, BCD, æqualia: At parallelogrammum ACDE, duplum est trianguli ACD; [b] quòd triangula ACD, ADE, æqualia quoque inter se sint. Igitur & trianguli BCD, [c] duplum erit idem parallelogrammũ ACDE. Quamobrem si parallelogrammum cum triangulo, &c. Quod erat demonstrandum.

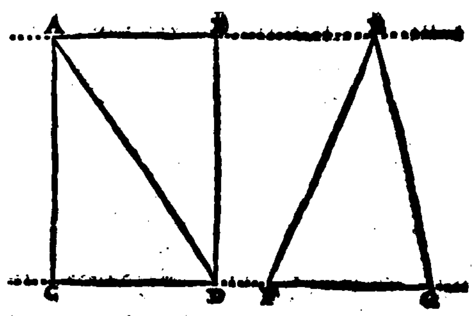
a 37. primi.
b 34. primi.
c 6. pronun.

## SCHOLIVM.



*HINC sequitur, si triangulum duplam habuerit basin, fuerit q́; in eisdem parallelis cum parallelogrammo, triangulum parallelogrammo æquale fore. Nam si basis CD, producatur ad F, vt sit DF, æqualis ipsi CD, ducatúrque recta FB, erit triangulum BCF, duplum trianguli BCD, [a] quòd triangula BCD, BDF, æqualia sint: Est autem & parallelogrammum ACDE, [b] duplum eiusdẽ trianguli BCD. [c] Igitur æqualia erũt triangulum BCF, & parallelogrammum ACDE.*

a 38. primi.
b 41. primi.
c 6. pron.

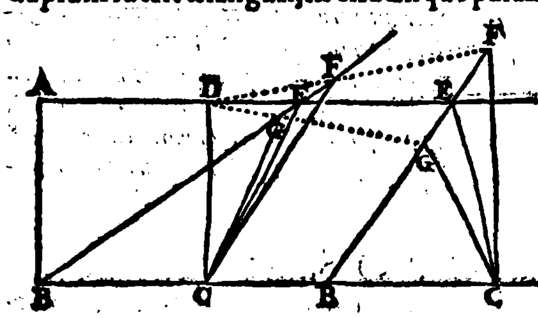


*IDEM hoc theorema Euclidis demonstrari potest eodem modo, si parallelogrammum & triangulum æquales habuerint bases, & non eandem, fuerintq́; in eisdem parallelis, vt cernis in parallelogrammo ACDE, & triangulo BFG, quorum bases CD, FG, æquales sunt. Ducta enim diametro AD, in parallelogrammo, [d] erunt triangula ACD, BFG, æqualia. Cùm igitur parallelogrammũ ACDE, duplũ sit trianguli ACD; [e] quòd diameter AD, secet parallelogrammũ ACDE, bifariam; [f] erit quoq́; idem trianguli BFG, duplum. Eadem ratione si basis FG, duplicaretur, & recta ad B, duceretur, fieret triangulum parallelogrammo æquale; quoniam triangulum hoc [g] esset duplum etiam trianguli BFG, &c.*

d 38. primi.
e 34. primi.
f 6. pron.
g 38. primi.

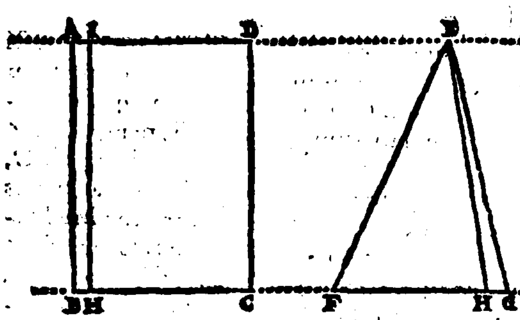
*CONVERSVM huius theorematis duplex est, hoc modo.*

Si trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemq́; habuerint basin, vel æquales, & ad easdem partes constituta; Erũt ipsa in eisdem parallelis. Et si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eisdemque parallelis; erunt bases æquales, si non sit eadem.



*SIT parallelogrammum ABCD, duplum trianguli EBC, siue eandem habeant basin, siue æquales. Dico parallelam AD, productam cadere in E, punctum. Nam aliàs cadet aut supra E, aut infra. Vnde, vt in 39. vel 40. propositione, ostendetur pars æqualis toti, vt & figura indicat. [h] Nam erit quoq́; parallelogrammum ABCD, trianguli BFC, vel BGC, duplum, [i] Quare triangula EBC, FBC, vel triangula EBC, GBC, æqualia erunt, pars & totũ. Quod est absurdum.*

h 41. primi.
i 6. pron.

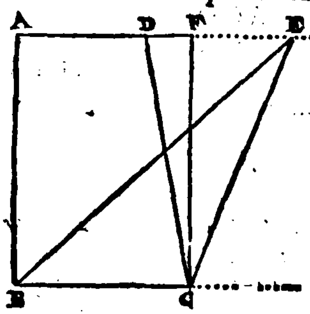


*SIT deinde parallelogrammũ ABCD, duplum trianguli EFG, in eisdémque parallelis. Dico bases BC, FG, esse æquales. Nam si altera, nempe BC, sit maior, abscissa æquali CH, & [k] ducta HI, parallela ipsi AB, demõstrabimus parallelogramma ABCD, IHCD, esse æqualia, totũ & partem; (quia vtrumque duplum est trianguli EFG; illud quidem p hypothesin, hoc verò per 41. proposit.) Quod est absurdum. Idem ostendemus, si basis FG, maior dicatur. Si enim abscindatur ipsi BC, æqualis FH, ducaturq́; recta HE, erunt triangula EFH, EFG, æqualia, pars & totum; (Nam vtrumque dimidium est parallelogrammi ABCD; Illud quidem per proposit. 41. hoc verò per hypothesin.) Quod est absurdum.*

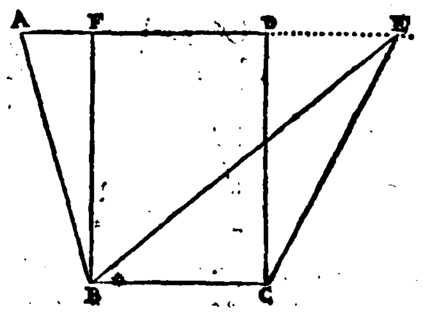
k 31. primi.

## EX PROCLO.

**Si** triangulum, & trapezium super eadem basi, & in eisdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij sit basis trianguli; erit trapezium minus duplo trianguli: Si verò minor linea parallela trapezij basis sit trianguli, erit trapeziũ maius duplo trianguli.



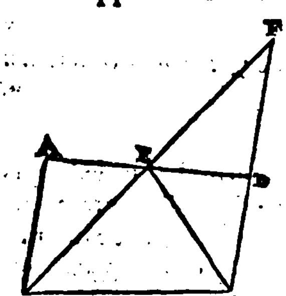

*Inter lineas parallelas A E, B C, sint cõstituta trapeziũ A B C D, & triangulum E B C, super basim B C, eandem, quæ sit tamen maior, q̃ altera linea A D, parallela in trapezio dato. Dico trapezium A B C D, minus esse duplo trianguli E B C. Cùm enim A D, minor ponatur quàm*
a 33. primi. *B C, sumatur A F, æqualis ipsi B C, & ducatur recta C F, [a] quæ erit pa-*
b 41. primi. *rallela ipsi A B; atque adeò parallelogrammum erit A B C F, [b] quod duplum est trianguli E B C. Quare trapezium A B C D, cùm sit pars parallelogrammi, minus erit duplo eiusdem trianguli E B C. quod est propositum.*




*Sint rursus trapeziũ, & triangulum, vt priùs, sed basis B C, sit minor, quàm reliqua linea parallela A D, in trapezio dato. Dico trapezium A B C D, maius esse duplo trianguli E B C. Cùm enim A D, maior sit, q̃*
c 33. primi. *B C, abscindatur D F, æqualis ipsi B C, & ducatur recta B F, [c] quæ erit parallela ipsi C D; atque adeò parallelogrammum erit*
d 41. primi. *B C D F: [d] quod duplum est trianguli E B C. Quare totum trapezium A B C D, quod superat parallelogrammum B C D F, maius erit duplo eiusdem trianguli E B C. quod est propositum.*

*Idem concludetur, si trapezium, & triangulum constituta fuerint super æquales bases, ita tamen, vt nunc quidem basis trapezij sit maior latere opposito parallelo, nunc verò minor.*

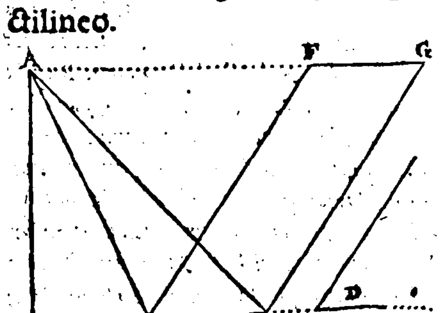
**Trapezium** habens duo latera opposita parallela, duplum est trianguli, quod basin habet vnum latus trapezij coniungens duas parallelas, verticem verò in medio puncto lateris oppositi.




*Sit trapezium A B C D, cuius duo latera opposita A B, D C, sint parallela, & super basin B C, constituatur triangulum E B C, verticem E, habens in medio puncto E, lateris A D. Dico trapezium A B C D, duplum esse trianguli E B C. Producatur enim vnum latus trianguli ad verticem, nempe B E,*
e 29. primi. *donec coëat cum C D, protracto in F. Et quia parallelæ sunt A B, C F, [e] erunt*
f 15. primi. *anguli alterni B A E, F D E, æquales: [f] Sunt autem & anguli A E B, D E F, æquales, quippe qui ad verticem E; & latus A E, trianguli A B E, lateri D E,*
g 26. primi. *trianguli D E F, æquale, per hypothesin. [g] Igitur & reliqua latera A B, B E, reliquis lateribus D F, F E, æqualia erunt, vtrumque vtrique, & reliqui anguli A B E, D F E, æquales: atque idcircò triangula A B E, D F E, ex corollario*
h 2. pron. *propos. 26. huius libri, æqualia erũt. Quare addito cõmuni triangulo C D E, [h] erunt triangulo C E F, æqualia*
i 38. primi. *triangula simul A B E, C D E. [i] Est autem & triangulum B C E, eidem triangulo C E F, æquale; cùm bases B E,*
k 1. pron. *E F, ostensæ sint æquales, & ipsa triangula inter easdem sint parallelas, si per C, duceretur parallela ipsi B F. [k] Igitur triangulum C B E, æquale erit triangulis A B E, C D E; & propterea C B E, triangulum dimidium erit trapezij A B C D, quod est propositum.*

## PROBL. 11. PROPOS. 42.

42. **Dato** triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.




**Datum** triangulum sit A B C, & datus angulus rectilineus D. Oportet igitur construere parallelogrammum æquale triangulo A B C, habens angulum æqualem an-
a 10. primi. gulo D. Diuidatur latus vnum trianguli, nempe B C, [a]
b 23. primi. bifariam in E, & [b] fiat angulus C E F, æqualis angulo D, prout libet, hoc est, siue angulus C E F, vergat ad partes C, siue ad partes B, prout magis videbitur expedire. Du-
c 31. primi. catur item per A, [c] recta A F, parallela ipsi B C, quæ secet E F, in F. Rursus per C, vel B, ducatur ipsi E F, parallela C G, occurrens rectæ A F, productæ in G. Eritque in angulo C E F, qui dato angulo rectilineo D, factus est æqualis, constitutum parallelogrammum C E F G, quod dico esse æquale triangulo A B C. Ducta enim
d 41. primi. recta E A: quoniam parallelogrammũ C E F G, [d] duplũ est trianguli A E C; & triangulum A B C, duplum

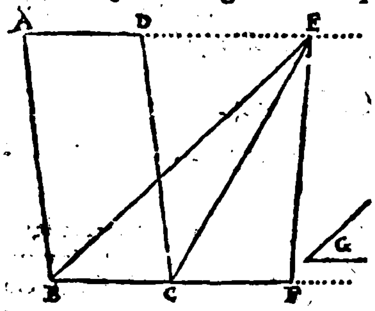
duplũ eiuſdẽ trianguli A E C, [a] qđ triangula A E C, A B E, ſuper æquales baſes E C, B E, & in eiſdem parallelis, ſint æqualia: Erũt parallelogrammũ C E F G, & triangulum A B C, [b] æqualia inter ſe. Cùm igitur angulus C E F, factus ſit æqualis angulo D, conſtat propoſitũ. Quocirca dato triangulo æquale parallelogrammum conſtituimus in dato angulo rectilineo. Quod erat faciendum. a 38. primi. b 6. pron.

*SCHOLIVM.*

*PRAXIS huius problematis facillima eſt ex ipſa constructione.*

*SVBIVNGIT autem hoc loco Peletarius ſubſequens problema, quod huius propoſ. conuerſum eſt.*

DATO parallelogrammo æquale triangulum conſtituere, in dato angulo rectilineo.

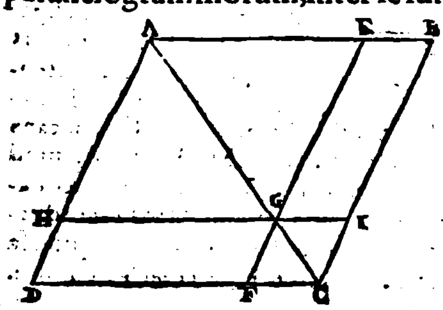



*SIT datum parallelogrammum A B C D, & datus angulus G. Fiat angulus C B E, angulo G, æqualis; ſecetq́ recta B E, rectã A D, productam in E: Extendatur quoq́ B C, ad F, ſitq́ C F, æqualis rectæ B C, & iungatur E F. Dico triangulũ B E F, habens angulum E B F, angulo dato G, æqualem, æquale eſſe parallelogrammo A B C D. Ducta enim recta C E, [a] erit parallelogrammũ A B C D, duplum trianguli B C E: Item triangulum B E F, eiuſdem trianguli B C E, duplum: [b] quòd æqualia ſint triangula E B C, E C F. Quare [c] æqualia inter ſe erunt parallelogrammum A B C D, & triangulum B E F. Quod eſt propoſitum.* a 41. primi. b 38. primi. c 6. pron.

*PRAXIS quoque huius problematis Peletarij ex ipſa constructione perfacilis eſt.*

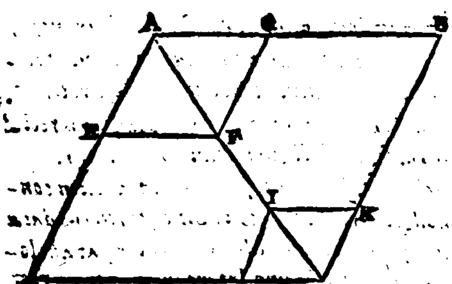
## THEOR. 32. PROPOS. 43. 43.

IN omni parallelogrammo, complementa eorum, quæ circa diametrum ſunt, parallelogrammorum, inter ſe ſunt æqualia.

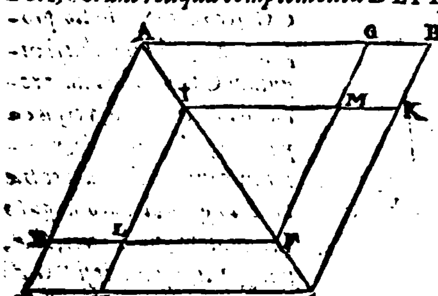



IN parallelográmo A B C D, ſint circa diametrũ A C, parallelográma A E G H, C F G I, & cõplemẽta D F G H, E B I G, vt in 36. defin. diximus. Dico complementa hęc inter ſe eſſe æqualia. Cũ enim [a] triangula A B C, C D A, æqualia ſint; Itemq́ triangula A E G, G H A; ſi hęc ab illis demátur, [b] remanebũt trapezia C B E G, C D H G, æqualia: [c] Sunt aũt & triangula C G I, C G F, æqualia. Quare ſi detrahátur ex trapeziis, [d] remanebunt æqualia complementa D F G H, E B I G. In omni igitur parallelogrammo, complementa, &c. Quod oſtendendum erat. a 34. primi. b 3. pron. c 34. primi. d 3. pron.

*SCHOLIVM.*




*EODEM modo hoc theorema demonſtratur à Proclo, etiamſi duo parallelogramma circa diametrum nõ coniungantur in puncto G, ſed vel vnũ ab altero ſit ſemotum, vel ambo ſe mutuò interſecent. Sit enim priùs vnum ab altero diſtans, ita vt complementa ſint figuræ quinquangulæ. Vt in parallelogrammo A B C D, circa diametrũ A C, conſiſtant parallelogrãma A E F G, C H I K. Dico cõplemẽta D E F I H, B K I F G, eſſe æqualia. Cũ enim [a] triangula A B C, C D A, æqualia inter ſe ſint; Item triangula A E F, C H I, æqualia triangulis A G F, C K I, [b] erunt reliqua complementa D E F I H, B K I F G, æqualia. Quod eſt propoſitum.* a 34. primi. b 3. pron.

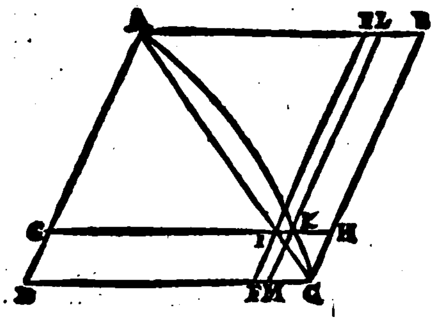



*SECENT ſe iam mutuò parallelogrãma A E F G, C H I K, circa diametrum conſiſtentia, ita vt communẽ partem habeãt I L F M. Dico adhuc complemẽta D E L H, B G M K, eſſe æqualia. Cùm enim [c] æqualia ſint triangula A B C, C D A; Itẽ triangula A F G, A F E; [d] erunt reliqua quadrilatera B C F G, D C F E, æqualia: Sunt [e] autẽ rurſus æqualia triangula I F M, I F L. Igitur ſi hæc addantur dictis quadrilateris, [f] erunt figuræ B C I M G, D C I L E, æquales. Cùm igitur & [g] æqualia ſint triangula C I K, C I H; [h] erunt reliqua complemẽta B G M K, D E L H, etiam æqualia. Quod eſt propoſitum.* c 34. primi. d 3. pron. e 34. primi. f 2. pron. g 34. primi. h 3. pron.

*CONVERSVM quoque huius theorematis cum Peletario demonſtrabimus, hoc modo.*

SI parallelogrammum diuiſum fuerit in quatuor parallelogramma, ita vt ex illis duo aduerſa ſint æqualia; conſiſtent reliqua duo circa diametrum.

*DVCTIS duabus rectis E F, G H, quæ ſint parallelæ rectis B C, C D, ſeq́ ſecent in I, diuiſum ſit parallelogrammum A B C D, in quatuor parallelogramma, quorum aduerſa duo B E I H, D F I G, ſint æqualia. Dico*



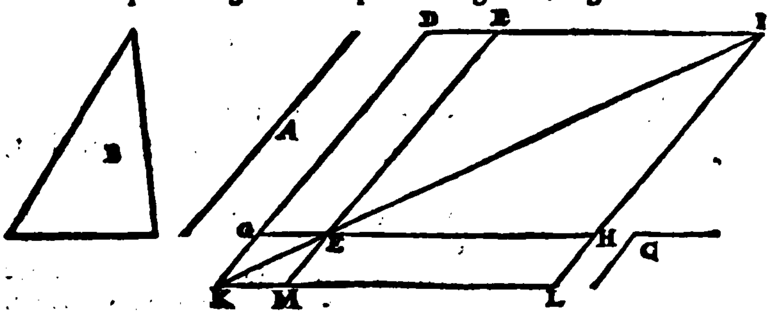
a 31. primi. b 43. primi. c 9. pron. d 1. pron.

*reliqua duo A E I G, C F I H, circa diametrũ consistere, hoc est, diametrũ à puncto C, ad punctũ A, ductã transire ꝑ punctum I. Si enim non transit, secet diameter C K A, rectam G H, in K, si fieri potest, & per K,[a] ducatur L M, parallela ipsi B C.[b] Erũt igitur complementa B H K L, D G K M, æqualia. Est[c] autem D G K M, maius quàm D G I F. Quare & maius erit B H K L, q̃ D G I F. Cùm ergo D G I F, æquale ponatur ipsi B E I H;[d] erit etiam B H K L, maius quàm B E I H, pars quàm totũ. Quod est absurdum. Non ergo diameter A C, rectam G H, in K, secat, sed per punctum I, transit. Quod est propositum.*

## 44. PROBL. 12. PROPOS. 44.

**Ad datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare, in dato angulo rectilineo.**

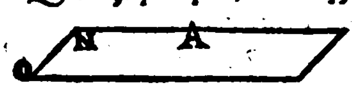
Data recta linea sit A, datum triangulum B, & datus angulus rectilineus C. Oportet igitur constituere parallelogrammũ æquale triangulo B, angulum habens æqualem angulo C, & vnum latus æquale rectæ A.



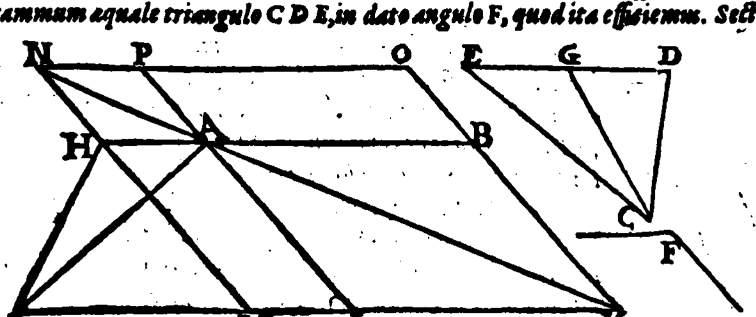
a 42. primi. Constituatur triangulo B,[a] æquale parallelogrammum D E F G, habens angulum E F G, angulo C, æqualem, producaturque G F, ad H, vt F H, sit æqualis rectæ A, b 31. primi. & per H,[b] ducatur H I, parallela ipsi F E, occurrens D E, productæ in I. Extendatur deinde ex I, ꝑ F, diac 31. primi. meter I F, occurrens rectæ D G, productæ in K; &[c] per K, ducatur K L, parallela ipsi G H, secans I H, protractam in L, producaturque E F, ad M. Dico parallelogrammum L M F H, esse id, quod quæritur. Habet enim latus F H, æquale datæ rectæ A, & angulum H F M, angulo dato C, æqua-
d 15. primi. lem,[d] cùm angulus H F M, æqualis sit angulo E F G, qui factus est æqualis angulo C: Denique pa-
e 43. primi. rallelogrammum L M F H, æquale est triangulo B,[e] cùm æquale sit complemẽto D E F G, quod factum est æquale triangulo B. Ad datã igitur rectã lineã dato triangulo, &c. Quod erat faciendum.

### *SCHOLIVM.*

*Qvod si quis optet, lineam ipsam A, datam, esse vnum latus parallelogrammi, non difficile erit transferre parallelogrammum F M L H, ad rectam A, ex iis, quæ in scholio propositionis 31. huius libri docuimus. Si enim in N, extremitate rectæ A, fiat angulus æqualis angulo M F H, & sumatur recta N O, æqualis rectæ F M, compleaturq; parallelogrammum, ceu in dicto scholio traditum fuit, effectum erit, quod quæritur.*



*Sed fortassis magis ex sententia Euclidis problema hoc conficiemus, si super ipsam rectam datam construamus parallelogrammum, non autem super æqualem, cuiusmodi fuit recta F H, &c. Sit ergo rursus data recta A B, datum triangulum C D E, & datus angulus F, oporteatq; super rectam A B, constituere parallelogrammum æquale triangulo C D E, in dato angulo F, quod ita efficiemus. Secto vno latere trianguli, vt D E, bifariam in G, ductaq; recta C G, secante ex scholio propositionis 38. huius lib. triangulum C D E, bifariam, producatur recta A B, versus eã partem, vbi parallelogrammum construẽdum debet habere angulum dato angulo F, æqualem, vt hic versus A, fiatq; A H, æqualis ipsi E G, di-*



a 23. primi. *midio lateris D E. Deinde in A,[a] constituatur angulus H A I, angulo E, æqualis, deorsum quidem, si parallelo-*
b 4. primi. *grammum versus superiorem partem sit construendum, sursum verò, si versus inferiorem. Posita autem re-*
c 31. primi. *cta A I, æquali ipsi E C, iungatur recta H I. Et quia duo latera H A, A I, duobus lateribus G E, E C, æqualia sunt,*
d 23. primi. *vtrumque vtrique, angulosq; continent æquales;[b] erunt triangula A H I, E G C, æqualia. Post hæc,[c] ducta per*
e 31. primi. *I, ipsi H B, parallela I K,[d] constituatur in A, versus hanc parallelam angulus H A L, angulo dato F, æqualis, se-*
f 41. primi. *cetq; A L, rectam I K, in L.[e] Ducta quoq; per H, ipsi A L, parallela H M, secante I K, in M,[f] erit parallelogram-*
*mum*

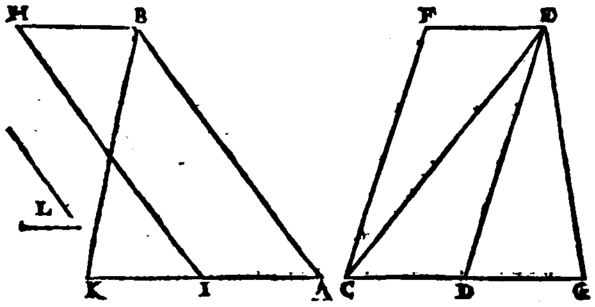
*mum A H M L, trianguli A H I, duplum: Est autem & triangulum C D E, trianguli E G C, duplum, quod æqualia ostensa sint triangula E G C, D G C. Igitur cùm æqualia sint demonstrata triangula A H I, E G C,[a] erunt æqualia parallelogrammum A H M L, & triangulum C D E. Iam verò, sumpta recta L K, datæ rectæ A B, æquali, ducatur recta K A, producaturq́; donec cum M H, producta coëat in N, & per N, agatur ipsi H B, parallela N O, donec in O, coëat cum K B, protracta, ac tandem L A, producatur vsque ad P, in rectâ N O. Dico parallelogrammum A B O P, esse id, quod quæritur. Est enim constitutum super datam rectam A B, habétque angulum B A P, dato angulo F, æqualem,[b] cùm æqualis sit angulo H A L, qui angulo F, factus est æqualis. Denique æquale est dato triangulo C D E,[c] cùm æquale sit parallelogrammo A H M L, quod triangulo C D E, ostensum fuit æquale.*

a 7. pron. b 15. primi. c 43. primi.

*PRAXIS verò huius problematis à constructione ipsa non differt, nisi quòd recta H I, duci non debet, neq; recta C G. Hæ enim propter demonstrationem tantùm ductæ sunt.*

*ADDIT hic aliud problema Peletarius, hoc modo.*

AD datam rectam lineam, dato parallelogrammo constituere æquale triangulum, in dato angulo rectilineo.




*SIT data recta A B, datum parallelogrammum C D E F, & datus angulus L. Producatur C D, ad G, vt D G, æqualis sit ipsi C D, & iungatur G E, recta: Eritq́; triangulum C E G, parallelogrammo C D E F, æquale, vt demonstrauimus scholio propos. 41.[d] Fiat iam super data recta A B, parallelogrammum A B H I, æquale triãgulo C E G, hoc est, parallelogrammo C D E F, habens angulum A, angulo L, æqualem; & producatur A I, ad K, vt sit I K, æqualis ipsi A I. iungaturq́; recta B K. Dico triangulum A B K, constitutum super datam rectam A B, habensq́; angulum A, æqualem dato angulo L, æquale esse dato parallelogrãmo C D E F. Cùm enim triangulum A B K, æquale sit parallelogrammo A B H I, ex scholio proposit. 41. quòd æquale est constructum parallelogrammo C D E F, constat propositum.*

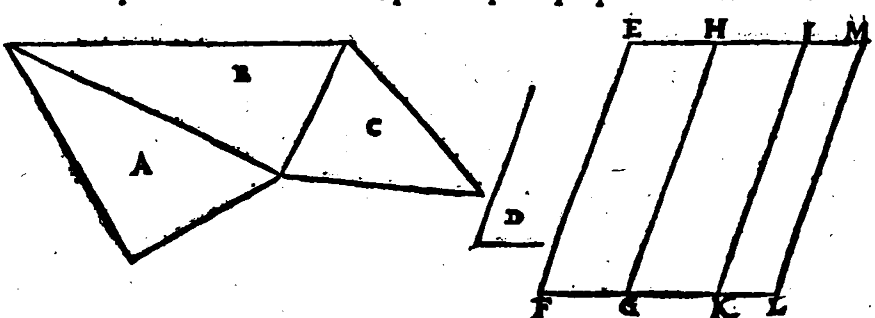
d 44. primi.

*PRAXIS huiusce problematis à constructione non differt: difficilisq; non est, si adhibeatur præcedens praxis, qua triangulo E C G, parallelogrammũ A B, H I, super data recta A B, in dato angulo A, construatur.*

## PROBL. 13. PROPOS. 45.

AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

QVAMVIS Euclides proponat hoc problema absolutè, non astringendo nos ad certã aliquam rectam lineam datam, vt in præcedenti propositione 44. fecerat, tamen quia in sequentibus frequenter vsurpatur in data recta linea, placuit ipsum proponere vnà cum data recta linea. Sit ergo recta data E F, rectilineum A B C, & datus angulus D. Oportet igitur construere ad datam rectam E F, parallelogrammum æquale rectilineo A B C, quod




habeat angulum æqualem angulo D. Resoluatur rectilineũ in triangula A, B, & C. Deinde triangulo A,[a] æquale parallelogrammum constituatur E F G H, super rectam E F, habens angulum F, angulo D, æqualem. Item super rectam G H, parallelogrammum G H I K, æquale triangulo B, habens angulum G, æqualem angulo D. Item super rectam I K, parallelogrammum I K L M, æquale triangulo C, habens angulum K, æqualem angulo D: Et sic deinceps procedatur, si plura fuerint triangula in dato rectilineo; factumq; erit quod iubetur. Nam tria parallelogramma constructa, quæ quidem æqualia sunt rectilineo dato A B C, conficiunt totum vnum parallelogrammum, quod sic demonstratur. Duo anguli E F G, H G K,[b] inter se sunt æquales, cùm vterque æqualis sit angulo D. Addito igitur communi angulo F G H, erunt duo anguli E F G, F G H,[c] qui duobus rectis æquiualent,[d] æquales duobus angulis H G K, F G H, ideoq; hi anguli duobus etiam rectis æquales erunt.[e] Quare F G, G K, vnam rectam lineam efficient. Eadem ratione ostendemus, E H, H I, vnam rectam lineam efficere, propterea quòd duo anguli E H G, H I K, æquales inter se sunt, ([f] cùm sint æquales oppositis angulis æqualibus E F G, H G K.)[g] & duo anguli H I K, I H G, duobus sunt re-

a 44. primi. b 1. pron. c 29. primi. d 2. pron. e 14. primi. f 34. primi. g 29. primi.

a 30.primi. ctis æquales,&c. Cùm igitur E I, F K, sint parallelæ; [a] Itemque E F, I K, quòd vtraque parallela sit rectæ H G; Parallelogrammum erit E F K I. Eodem modo demonstrabitur, parallelogrammum I K L M, adiunctum parallelogrammo E F K I, cōstituere totū vnum parallelogrammum E F L M. Ad datam ergo rectam lineā E F, dato rectilineo A B C, constituimus æquale parallelogrammum E F L M, habens angulum F, æqualem angulo D, dato. Quod erat efficiendum.

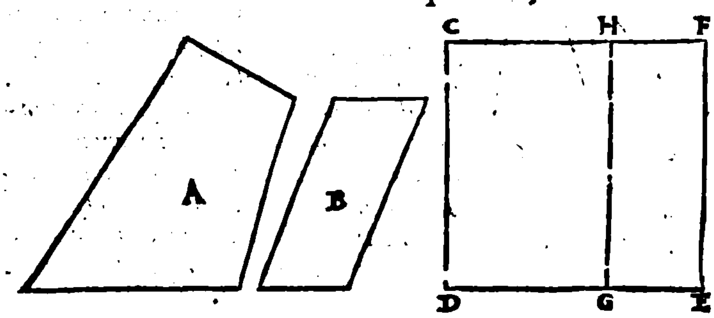
## SCHOLIVM.

*PARI ratione, propositis quotcunque rectilineis, constituemus illis parallelogrammum æquale, si omnia resoluantur in triangula, quibus æqualia parallelogramma exhibeantur, singulis singula, per propositionem 44. veluti factum est in hoc problemate. Nam cùm omnia hæc parallelogramma efficiant vnum parallelogrammum, vti hic demonstratum fuit, constitutum erit parallelogrammum æquale rectilineis propositis. Vt si quis intelligat duo rectilinea proposita A B, & C; Atq; A B, resoluatur in triangula A & B, singulisq; triangulis A, B, C, singula parallelogramma E G, G I, I L, super rectas E F, H G, I K, iuxta artem huius problematis, æqualia constituantur, ex propositione 44. erit constructum parallelogrammum totum E F L M, æquale duobus rectilineis A B, & C. Et sic de pluribus.*

*PRAXIS autem huius problematis ex praxi præcedentis propositionis sæpius repetita petenda est.*

*HVC referri poterit problema vtilissimum ex Peletario, quod nos tamen alia ratione, & breuiori demonstrabimus in hunc modum.*

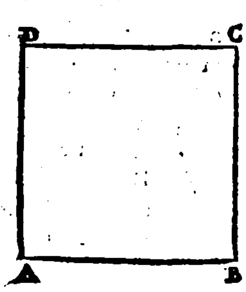
DATIS duobus rectilineis inæqualibus, excessum maioris supra minus inquirere.



a 45.primi. *SINT data rectilinea A, & B, sitq; A, maius. Oportet igitur indagare, qua magnitudine rectilineum A, superet rectilineum B. [a] Fiat parallelogrammum C D E F, in quocunque angulo D, æquale maiori rectilineo A. Et super rectam C D, parallelogrammū C D G H, in eodem angulo D, æquale rectilineo minori B. Quoniam igitur parallelogrammum C D E F, superat parallelogrammū C D G H, parallelogrammo E F H G; superabit quoq; figura A, figuram B, eodem parallelogrammo E F H G. Quod est propositum.*

## 45. PROBL. 14. PROPOS. 46.

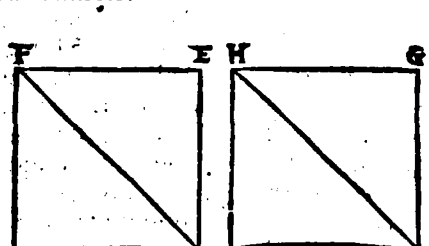
A DATA recta linea quadratum describere.



a 11.primi. b 28.primi. c 33.primi. d 34.primi. SIT data recta A B. super quam oporteat quadratum describere. Ex A, & B, [a] educantur A D, B C, perpendiculares ad A B, sintque ipsi A B, æquales, & connectatur recta C D. Dico A B C D, esse quadratum. Cùm enim anguli A, & B, sint recti, [b] erunt A D, B C, parallelæ: Sunt autem & æquales, quòd vtraque æqualis sit ipsi A B. Igitur [c] & A B, D C, parallelæ sunt & æquales: & ideò parallelogrammum est A B C D, in quo cùm A D, D C, C B, æquales sint ipsi A B, omnes quatuor lineæ æquales existunt: Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cùm C. & D, [d] æquales sint oppositis rectis A, & B. Quadratum igitur est A B C D, ex definitione; Ac proinde à data recta linea quadratum descripsimus. Quod faciendum erat.

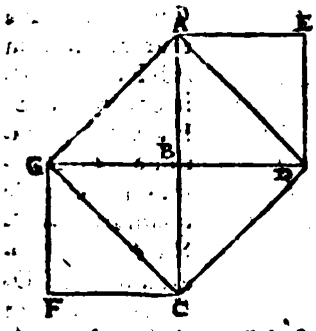
## EX PROCLO.

LINEARVM æqualium æqualia sunt quadrata: & quadratorum æqualium æquales sunt lineæ.



a 4.primi. b 34.primi. *SINT primùm rectæ A B, C D, æquales. Dico earum quadrata A B E F, C D G H, æqualia quoque esse. Ductis enim diametris B F, D H, erunt duo latera B A, A F, trianguli B A F, duobus lateribus D C, C H, trianguli D C H, æqualia, vtrumque vtrique, cùm ex definitione quadrati rectæ A F, C H, æquales sint rectis A B, C D. Sunt autem, & anguli A, & C, æquales, nempe recti. [a] Igitur triangula B A F, D C H, æqualia erunt. Quæ [b] cùm sint dimidia quadratorum, erunt & quadrata tota æqualia. Quod est propositum.*

*SINT deinde quadrata A B D E, B C F G, æqualia. Dico lineas quoq; ipsorū A B, B C, æquales esse. Coniungantur*




*iungantur enim quadrata ad angulum B, vt rectæ A B, B C, in directū constituantur. Et quoniā anguli A B G, A B D, sunt recti,[a] erunt & rectæ G B, B D, in directū constituta. Ducantur diametri A D, C G, iunganturq́; rectæ A G, C D. Quoniam igitur quadrata A B D E, B C F G, æqualia sunt, erūt & triangula A B D, B C G, eorum dimidia, æqualia. Addito ergo communi triangulo B C D, fiet totum triangulum A C D, toti triangulo G D C, æquale. Quare triangula A C D, G D C, cùm eandem habeant basin C D, ad easdemq́; sint partes,[b] in eisdē sunt parallelis: ideoq́; parallelæ sunt A G, C D. Et quoniam, vt in scholio propos. 34. ostendimus, diameter in quadrato secat angulos quadrati bifariam, erunt anguli D A C, G C A, alterni semirecti, ideoq́; æquales. Quamobrem,[c] & parallelæ sunt A D, C G. Igitur parallelogrammum est A D C G; ac propterea[d] rectæ A D, C G, æquales. Quoniam ergo in triangulis A B D, B C G, latera A D, C G, æqualia sunt, & anguli, quibus ea latera adiacent, inter se etiam æquales, cùm sint semirecti, vt in scholio propos. 34. ostensum fuit;[e] erunt reliqua latera æqualia, nempe A B, ipsi B C, &c. Quod est propositum.*

a 14. primi. b 39. primi. c 27. primi. d 34. primi. e 26. primi.

## *SCHOLIVM.*

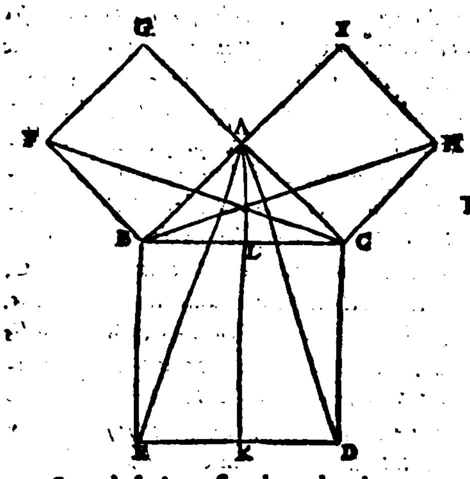
*POSSVNT hæc omnia multò breuiùs probari per superpositionem quadrati vnius super aliud. Nam si lineæ sint æquales, si vna alteri superponatur, congruent ipsæ inter se. Cùm ergo & anguli sint æquales, nempe recti, conuenient quoq; ipsi inter se, ideoq́; totum quadratum toti quadrato congruet: Quod si quadrata sint æqualia, congruent ipsa inter se, propter æqualitatem angulorum. Igitur & lineæ: aliàs vnum quadratum alio maius esset.*

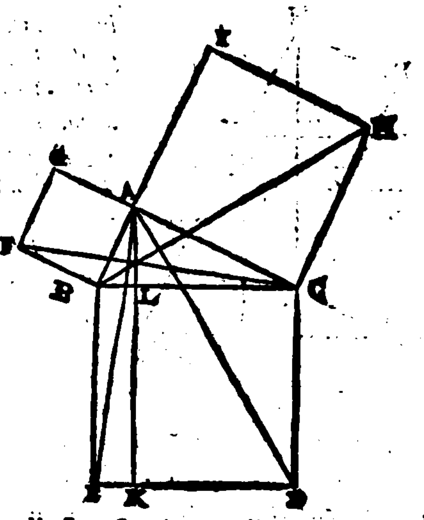
*PRAXIS autem huius problematis perfacilis est. Si namque ad datam rectam A B, in altero extremorum, vt in A, erigatur perpendicularis A D, ipsi datæ rectæ A B, æqualis, & ex B, & D, ad interuallum eiusdem A B, duo arcus describantur sese in C, intersecātes, iunganturq́; rectæ B C, D C, constructum erit quadratum. Nam A B C D, cùm ex constructione sit figura æqualium laterum, atq; adeò latera opposita habeat æqualia, parallelogrammum erit, vt ad initium scholij propos. 34. demonstrauimus. Existente ergo angulo A, recto,[f] erunt & B, D, recti, nec non[g] & oppositus angulus C, &c.*

f 29. primi. g 34. primi.

## THEOR. 33. PROPOS. 47. 46.

IN rectangulis triangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur, quadratis.

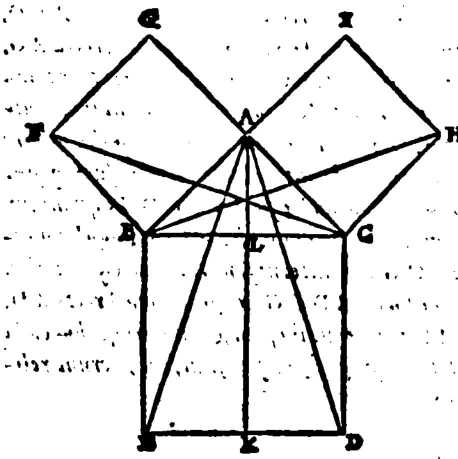


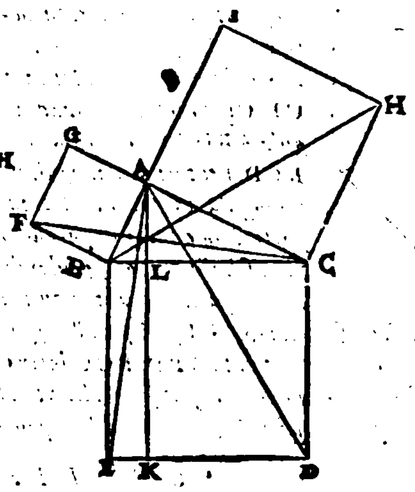




IN triangulo ABC, angulus BAC, sit rectus,[a] describanturque super A B, A C, B C, quadrata ABFG, ACHI, BCDE. Dico quadratum B C D E, descriptum super latus B C, quod angulo recto opponitur, æquale esse duobus quadratis A B F G, A C H I, quæ super alia duo latera sunt descripta, siue hæc duo latera æqualia sint, siue inæqualia. Ducatur enim recta A K,[b] parallela ipsi B E, vel ipsi C D, secans B C, in L, & iungantur rectæ A D, A E, C F, B H. Et quia duo anguli B A C, B A G, sunt recti,[c] erunt rectæ G A, A C, vna linea recta: eodemque modo I A, A B, vna recta linea erunt. Rursus quia anguli A B F, C B E, sunt æquales, cùm sint recti, si addatur communis angulus A B C,[d] fiet totus angulus C B F, toti angulo A B E, æqualis: similiterque totus angulus B C H, toti angulo A C D. Quoniam igitur duo latera A B, B E, trianguli A B E, æqualia sunt duobus lateribus F B, B C, trianguli F B C, vtrumque vtrique, vt constat ex definitione quadrati: Sunt autem & anguli A B E, F B C, contenti hisce lateribus æquales, vt ostendimus:[e] Erunt triangula A B E, F B C, æqualia. Est autē quadratum, seu parallelogrammum A B F G,[f] duplum trianguli F B C, cùm sint inter parallelas B F, C G, & super eandem basin B F: Et parallelogrammum B E K L, duplum trianguli A B E, quòd sint inter parallelas B E, A K, & super eandem basin B E.

a 46. primi. b 31. primi. c 14. primi. d 2. pronunci. e 4. primi. f 41. primi.

a 6.pronun.



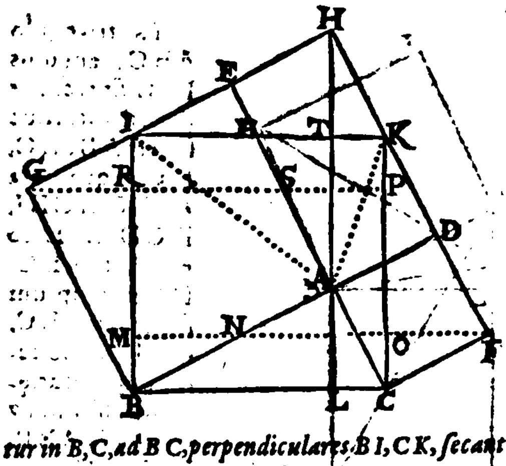

Quare [a] æqualia erūt quadratum A B F G,& parallelogrammū B E K L. Eadem ratione ostendemus,æqualia esse quadratum A C H I, & parallelogrammum C D K L. [b] Erūt enim rursus triangula A C D,H C B, æqualia,ideoq; eorum dupla,parallelogrammum videlicet C D K L, & quadratum A C H I,æqualia erunt. Quamobrem totum quadratum B C D E, quod componitur ex duobus parallelogrāmis B E K L, C D K L, æquale est duobus quadratis A B F G,A C H I. In rectangulis ergo triangulis, quadratum,&c. Quod demonstrandum erat.

b 4.primi.

## SCHOLIVM.

*FACILE ex theoremate isto quiuis intelliget, in triangulo amblygonio quadratum lateris obtuso angulo oppositi maius esse duobus quadratis simul aliorum duorum laterum: In quouis autem triangulo quadratum lateris vni acutorum angulorum oppositi minus esse duobus quadratis simul aliorum duorum laterum. Nam si angulus coarctaretur, donec fieret rectus, manentibus iisdem lateribus eum ambientibus, euaderet latus oppositum minus: Si autem acutus angulus dilataretur, donec fieret rectus, manentibus iisdem lateribus eum ambientibus, fieret latus oppositum maius, vt patet. Cùm ergo quadratum lateris angulo recto oppositi æquale sit hic ostensum duobus quadratis simul aliorum duorum laterum; perspicuum est, quadratum lateris obtuso angulo oppositi esse maius duobus quadratis simul aliorum duorum laterum: quadratum verò lateris angulo acuto oppositi esse minus duobus quadratis simul duorum laterum reliquorum. Quantò autem illud maius sit, & quantò hoc minus, demonstrabit Euclides lib. 2. propos. 12. & 13.*

*QVONIAM verò theorema hoc pulcherrimum est, vtilitatesq; habet insignes, operæpretium iudicaui tentare, num illud aliis viis demonstrari possit; Variata aliquantulum constructione; quod Peletarius sine proportionibus fieri posse negauit. Sit ergo rursus triangulum A B C, cuius angulus B A C, rectus sit, productisq; lateribus B A, C A, ad partes anguli recti, fiant A D, A E, ipsis A C, A B, æquales; & per C, D, B, E, ipsis A B, A C, parallelæ agantur, coëuntes in F, G. Et quia in parallelogrammis*




a34.primi. *C D, B E, [a] tam latera D F, F C, oppositis lateribus A C, A D, quàm latera E G, G B, lateribus oppositis A B, A E, æqualia sunt, erit vtrumque parallelogrammum æquilaterum. Sed & anguli omnes recti sunt.*

b34.primi. *[b] Nam F, G, oppositis rectis D A C, E A B, æquales sunt, ideoq; recti: Anguli autē C, D, B, E, recti sunt, quòd vteruis C, D, cum recto D A C,*

c29.primi. *& vteruis, B, E, cum recto E A B, [c] æqualis sit duobus rectis. Quadrata ergo sunt C D, B E, laterum A C, A B. Productis etiam lateribus F D, G E, donec conueniant in H, erigantur in B, C, ad B C, perpendiculares B I, C K, secantes G H, F H, in I, K, iungaturq; recta I K. Et quia, si à rectis angulis I B C, A B G, auferatur communis angulus A B I, reliqui A B C, G B I, æquales sunt; sunt autē & recti anguli B A C, B G I, æquales; erunt duo anguli A, B, trianguli A B C, duobus angulis G, B, trianguli G B I,*

d26.primi. *æquales, vterque vtrique: Sunt autem & latera A B, G B, illis adiacentia æqualia, ob quadratum B E. [d] Igitur & tam latera B C, B I, quàm A C, G I, æqualia erūt, & reliqui anguli C, I, æquales. Non aliter in triangulis A B C, F K C, æqualia erunt tam latera B C, C K, quàm A B, F K, & anguli B, K: proptereà quòd duo anguli A, C, trianguli A B C, duobus angulis F, C, trianguli F K C, æquales sint, (cū A, F, recti sunt, & duo anguli C, reliqui duorum rectorum, dempto communi A C K,) & latera A C, C F, illis adiacentia æqualia, ob quadra-*

e 1.pron. *tum C D. Quare rectæ B I, C K, [e] inter se etiam æquales erunt. [f] Cùm ergo sint quoq; parallelæ, [g] erunt etiam*

f 28.primi. *B C, I K, æquales & parallelæ. Quadratum igitur est B C K I, lateris B C, cùm quatuor eius latera sint æqua-*

g 33.primi. *lia, & omnes anguli recti, quòd anguli I, K, oppositis rectis C, B, æquales sint. Dico ergo quadratum C I, duobus quadratis B E, C D, æquale esse. Ducta enim ex H, per A, recta H T A L, ipsis B I, C K, parallela erit. Nam*

h34.primi. *quia [h] G E, ipsi B A, æqualis est, & E H, ipsi A D, hoc est, ipsi G I, quæ ipsi A C, siue A D, ostensa fuit æqualis, erit*

&

& addita communi E I, tota H I, toti G E, hoc est, ipsi A B, æqualis. Cùm ergo H I, A B, sint etiam parallelæ, [a] erunt quoque B I, A H, parallelæ & æquales. Eodemque modo A H, ipsi C K, parallela ostendetur, & æqualis. Quoniam igitur [b] tam quadratum B E, parallelogrammo B H, super eandem basin A B, quàm parallelogrammum B T, eidem parallelogrammo B H, super eandem basin B I, æquale est, [c] erit quoque quadratum B E, parallelogrammo B T, æquale. Sic etiam quia tam [d] quadratum C D, parallelogrammo C H, super eandem basin A C, quàm parallelogrammum C T, eidem parallelogrammo C H, super eandem basin C K, æquale est, [e] erit quoque quadratum C D, parallelogrammo C T, æquale. Totum ergo quadratum B C K I, ex duobus parallelogrammis B T, C T, compositum, duobus quadratis B E, C D, æquale est. Quod erat demonstrandum.

a 33. primi.
b 35. primi.
c 1. pron.
d 35. primi.
e 1. pron.

ALITER. Loco rectæ H T A L, iungantur duæ rectæ A I, A K, & per A, ipsis B I, C K, parallela ducatur T A L. Quoniam ergo [f] tam quadratum B E, (ostendemus enim vt prius, B K, B E, C D, quadrata esse laterum B C, A B, A C.) trianguli A B I, super eandem basin A B, quàm parallelogrammum B T, eiusdem trianguli A B I, super eandem basin B I, duplum est, [g] erit quadratum B E, parallelogrammo B T, æquale. Pari ratione, quia [h] tam quadratum C D, trianguli A C K, super eandem basin A C, quàm parallelogrammum C T, eiusdem trianguli A C K, super eandem basin C K, duplum est, [i] erit quoque quadratum C D, parallelogrammo C T, æquale. Quam ob rem, vt prius, totum quadratum B C K I, ex parallelogrammis duobus B T, C T, conflatum, duobus quadratis B E, C D, æquale est. Quod erat ostendendum.

f 41. primi.
g 6. pron.
h 41. primi.
i 6. pron.

ALITER. Loco rectarum H T A L, A I, A K, ducantur per F, G, ipsis B C, I K, parallelæ F M, G P, secantes A B, C K, in N, O, & B I, C E, in R, S. Eritque B R, ipsi K O, æqualis. Quoniam enim [k] anguli O, R, recti sunt, & O K F, R B G, æquales, quòd vterque angulo A B C, supra ostensus sit æqualis; erunt duo anguli O, K, trianguli F K O, duobus angulis R, B, trianguli G B R, æquales, vterque vtrique. Sunt autem & latera F K, B G, illis adiacentia æqualia, quòd vtrumque suprà sit ostensum ipsi B C, æquale. [l] Igitur & latera K O, B R, æqualia erunt. Itaque quoniam [m] tam parallelogramma B C F N, B C O M, super eandem basin B C, quàm parallelogramma B C S G, B C P R, super eandem basin B C, æqualia sunt, estque parallelogrammum B C P R, parallelogrammo I K O M, æquale, ob rectas B R, K O, ostensas æquales; (Nam hinc fit, vt si vnum alteri superponatur, sibi mutuò congruant, propter laterum, angulorumque æqualitatem) erunt ambo parallelogramma B C F N, B C S G, toti quadrato B C K I, ex duobus parallelogrammis B C O M, I K O M, composito æqualia. [n] Cùm ergo tam quadratum C D, parallelogrammo B C F N, super eandem basin C F, quàm quadratum B E, parallelogrammo B G S G, super eandem basin B G, æquale sit; erunt quoque ambo quadrata C D, B E, eidem quadrato B C K I, æqualia. Quod demonstrandum erat.

k 29. primi.
l 26. primi.
m 35. primi.
n 35. primi.

ATQVE in hunc modum aliæ demonstrationes excogitari poterunt. Video demonstrationem Euclidis simpliciorem esse, & magis expeditam, sed non iniucundum tamen est intelligere, variis demonstrationibus eandem veritatem posse confirmari.

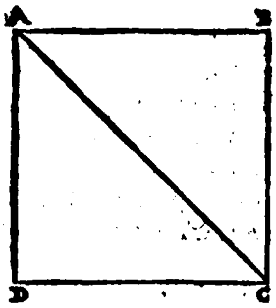
INVENTIO porrò admirabilis, atque pulcherrimi huius theorematis ad Pythagoram refertur, qui, vt scribit Vitruuius lib. 9. hostias Musis immolauit, quòd se in tam præclaro inuento adiuuerint. Sunt qui putent eum immolasse centum boues; si tamen Proclo credendum est, vnum tantummodò obtulit. Fortasse autem Pythagoras, vt nonnulli volunt, ex numeris occasionem sumpsit, vt theorema hoc inuestigaret. Cùm enim hos tres numeros 3. 4. 5. diligenter esset contemplatus, vidissetque quadratum numerum maioris æqualem esse quadratis numeris reliquorum; composuit triangulum scalenum, cuius maximum latus diuisum erat in 5. partes æquales, minimum in 3. eiusdem magnitudinis, & reliquum in 4. Quo facto, considerauit angulum sub his duobus lateribus contentum, inuenitque eum esse rectum. Idque in quamplurimis aliis numeris, vt in 6. 8. 10. & 9. 12. 15. &c. obseruauit. Quare inquirendum esse iudicauit, num in omni triangulo rectangulo quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, reliquorum laterum quadratis æquale esset, quandoquidem omnia triangula, quorum latera habebant magnitudinem secundum dictos numeros, continebant vnum angulum rectum. Atque ita tandem mirabile hoc theorema maxima animi voluptate adinuenit, firmaque ratione demonstrauit. Quod tamen Euclides mirandum in modum amplificauit lib. 6. propos. 31. vbi demonstrauit, non solùm quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, æquale esse quadratis reliquorum duorum laterum; Verùm etiam figuram quamlibet rectilineam super latus recto angulo oppositum constructam, siue ea sit triangulum, siue quadrangulum, &c. æqualem esse duabus figuris, quæ super reliqua latera describuntur, dummodo priori sint similes, similiterque descriptæ, vt ibidem ostendemus.

CAETERVM quoniam mentionem fecimus trium numerorum, quorum maximi quadratum æquale est quadratis reliquorum, non abs re fuerit, paucis explicare, quonam pacto huiusmodi numeri inueniantur. Habemus igitur his tribus numeris 3. 4. 5. si duplicentur, habebuntur alii tres, 6. 8. 10. si iidem triplicentur, exurgent alii tres 9. 12. 15. & si quadruplicentur, inuenientur hi tres 12. 16. 20. Atque ita reperientur quotcunque alii, si primi illi tres per quemcunque multiplicentur numerum. Traduntur tamen à Proclo duæ regulæ, quibus inueniuntur prædicti numeri, nulla habita ratione illorum trium. Prima ascribitur Pythagoræ, & est huiusmodi. Sumatur pro minimo quicunque numerus impar, vt 5. ex quo ita alios reperies. Ex quadrato numeri accepti, vt hic ex 25. reiice vnitatem. Nam reliqui numeri dimidium, videlicet 12. erit alter numerus, cui si addatur vnitas, exurget tertius numerus 13. Huius igitur quadratum æquale est quadratis aliorum. Quòd si numerus impar acceptus fuisset 3. essent reliqui duo numeri per hanc regulam 4. & 5. Secunda regula tribui-

*tur Platoni, quæ talis est. Accipiatur numerus quicunque par, nempe 6. Ex huius dimidij quadrato, nimirum 9. detrahe vnum, eidemq; adde vnum, habebisq; reliquos duos numeros 8. & 10. primus autem est 6. nimirum numerus par acceptus. Hac regula si accipiatur par 10. reperientur alij duo 24. & 26.*

COLLIGVNTVR *ex celeberrimo hoc Pythagoræ inuento plurima scitu non iniucunda tam theoremata, quàm problemata, è quibus visum est ea duntaxat in medium proferre, quæ vtilitatem magnam rebus Geometricis allatura creduntur, initium hinc sumentes.*

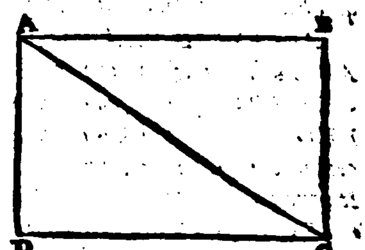
I.



SI in quadrato quouis diameter ducatur, quadratum à diametro descriptum duplum erit prædicti quadrati.

*IN quadrato A B C D, ducatur diameter A C. Dico quadratum A C, duplum esse quadrati A B C D. Cùm enim in triangulo A B C, angulus B, rectus*
a 47. primi. *sit, ª erit quadratum lateris A C, æquale duobus quadratis laterum A B, B C. Cùm igitur quadrata linearum A B, B C, æqualia sint, quòd lineæ A B, B C, sint æquales; erit quadratum lineæ A C, duplum cuiuslibet illorum, vt quadrati lineæ A B; hoc est, quadrati A B C D. Quod est propositum.*

I I.

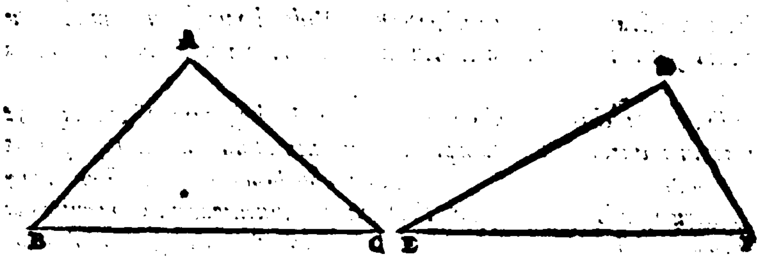


QVADRATVM diametri figuræ altera parte longioris æquale est duobus quadratis laterum inæqualium.

*IN altera parte longiori A B C D, ducatur diameter A C; & quia*
b 47. primi. *in triangulo A B C, angulus B, est rectus, ᵇ erit quadratum lateris A C, æquale duobus quadratis laterum inæqualium A B, B C. Quod est propositum.*

I I I.

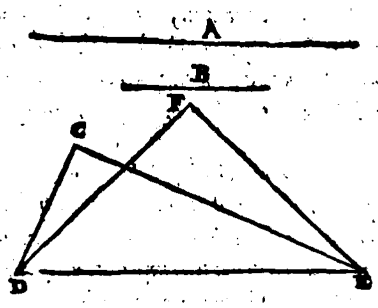
SI fuerint duo triangula rectangula, quorum latera rectis angulis opposita sint æqualia, erunt duo quadrata reliquorum duorũ laterum vnius trianguli æqualia duobus quadratis reliquorum duorum laterum alterius.



*TRIANGVLORVM A B C, D E F, anguli A, & D, sint recti, lateráque opposita B C, E F, æqualia. Dico duo quadrata laterum A B, A C, simul sumpta æqualia esse duobus quadratis laterum D E, D F, simul sumptis. Nam quadrata linearũ B C, E F, æqualia inter se sunt, cùm & ipsæ*
c 47. primi. *lineæ inter se ponantur æquales: Quadrato autem lineæ B C, ᶜ æqualia sunt quadrata linearum A B, A C: & Quadrato lineæ E F, æqualia sunt quadrata linearum D E, D F.*
d 1. pron. *ᵈ Quadrata ergo rectarum A B, A C, quadratis rectarum D E, D F, æqualia sunt. Quod est propositum.*

I V.

DVOBVS quadratis inæqualibus propositis, inuenire alia duo quadrata, quæ & æqualia sint inter se, & simul sumpta æqualia duobus inæqualibus propositis simul sumptis.

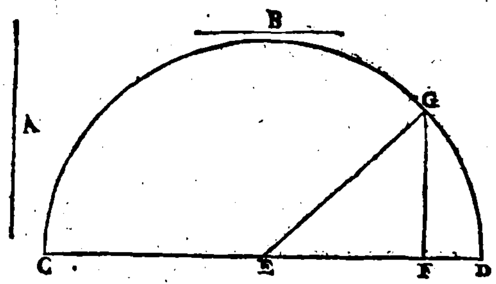


*SINT A, & B, latera duorum quadratorum inæqualium. Fiat angulus rectus D C E, sitq; D C, recta æqualis rectæ B, & recta C E, rectæ A. Ducta deinde recta D E, coniungente duo puncta D, E, con-*
e 23. pron. *stituantur super ipsam duo anguli semirecti D E F, E D F, ᵉ coëantq; rectæ D F, E F, in F. Quoniã igitur in triãgulo F D E, anguli F D E,*
f 6. primi. *F E D, æquales sunt; ᶠ erunt & latera D F, E F, æqualia, ideòque & quadrata eorundem laterum æqualia. Dico iam, eadem quadrata linearum D F, E F, æqualia esse quadratis linearum A, & B, hoc est, quadratis linearum C E, & C D. Nam cùm in triangulo D E F, an-*
g 32. primi. *guli F D E, F E D, faciant vnum rectum; ᵍ erit reliquus angulus F,*
h 47. primi. *rectus. ʰ Quamobrem erunt quadrata linearum D F, E F, æqualia quadrato lineæ D E: ⁱ Sed eidem quadrato*
i 47. primi. *lineæ D E, æqualia sunt quoque quadrata linearum C D, C E. Igitur quadrata linearum D F, E F, ᵏ æqualia*
k 1. pron. *sunt quadratis linearum D C, E C. Quod est propositum.*

V.

PROPOSITIS duabus lineis inæqualibus, inuenire id, quo plus potest maior, quàm minor.

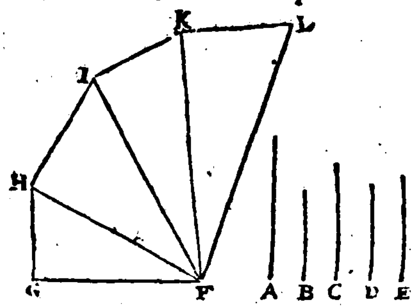
POTEN-




*Potentia lineæ rectæ dicitur eius quadratũ. Tantum enim quæuis recta linea posse dicitur, quantum est eius quadratum. Sint ergo duæ lineæ inæquales A, & B, oporteatque cognoscere, quantò maius sit quadratum maioris lineæ A, quàm minoris B. Ex quauis linea recta CD, sumatur CE, æqualis rectæ A, & EF, æqualis rectæ B. Deinde centro E, & interuallo EC, semicirculus describatur CGD; & ex F, ducatur FG, perpendicularis ad CD. Dico quadratum rectæ A, hoc est, rectæ CE, sibi æqualis, maius esse, quàm quadratum rectæ B, hoc est, rectæ EF, sibi æqualis, quadrato rectæ FG. Ducta enim recta EG,* [a] *erit eius quadratum æquale quadratis rectarum EF, FG, hoc est, quadratum rectæ EC, illi æquale, superabit quadratum rectæ EF, quadrato rectæ FG. Quod est propositum.* a 47. primi.

## VI.

Propositis quotcunque quadratis, siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis æquale.

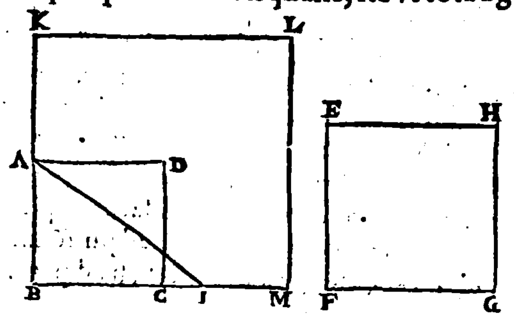



*Sint latera quinque quadratorũ A, B, C, D, E. Oporteatq́; inuenire quadratum æquale omnibus illis quinque. Fiat angulus rectus FGH, sitq́; recta FG, æqualis rectæ A, & recta GH, rectæ B. Ducta deinde recta HF, fiat angulus rectus FHI, sitq́; HI, æqualis rectæ C. Ducta rursus recta IF, fiat angulus rectus FIK, sitq́; IK, æqualis rectæ D. Ducta denique recta KF, fiat angulus rectus FKL, sitq́; KL, æqualis rectæ E; ducaturq́; recta FL. Dico quadratum rectæ FL, æquale esse quinque quadratis propositis. Quadratum enim rectæ FH,* [b] *æquale est quadratis rectarũ FG, GH, hoc est, quadratis rectarum A, & B. Rursus quadratum rectæ FI,* [c] *æquale est quadratis rectarum FH, HI, & idcirco quadratis rectarum A, B, & C. Item quadratum rectæ FK,* [d] *æquale est quadratis rectarum FI, IK, ideoq́; quadratis rectarum A, B, C, & D. Denique quadratum rectæ FL,* [e] *æquale est quadratis rectarum FK, KL, ac propterea quadratis rectarũ A, B, C, D, & E. Quod est propositum.*

b 47. primi.
c 47. primi.
d 47. primi.
e 47. primi.

## VII.

Propositis duobus quadratis quibuscunque, alteri illorum adiungere figurã, quæ reliquo quadrato sit æqualis, ita vt tota figura composita sit etiam quadrata.

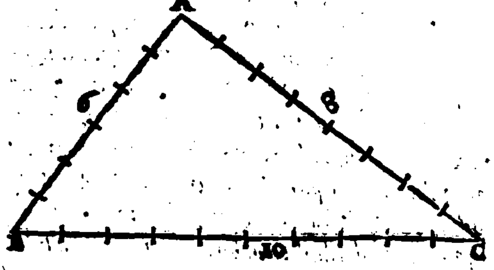



*Sint duo quadrata ABCD, EFGH; propositumq́; sit quadrato ABCD, apponere figuram, quæ sit æqualis quadrato EFGH, &c. Sumatur recta BI, æqualis rectæ FG, hoc est, lateri quadrati EFGH. Ducta autem recta AI, & producta recta BA, ad partes A, accipiatur BK, æqualis rectæ AI, perficiaturq́; quadratum BKLM. Dico figuram ADCMLK, quadrato ABCD, adiunctum, æqualem esse quadrato EFGH. Quoniam enim quadratum rectæ AI, hoc est, quadratum BKLM,* [f] *æquale est quadratis rectarum AB, BI; hoc est, quadratis ABCD, EFGH: si auferatur commune quadratum ABCD,* [g] *remanebit figura ADCMLK, æqualis quadrato EFGH. Quod est propositum.*

f 47. primi.
g 3. pron.

## VIII.

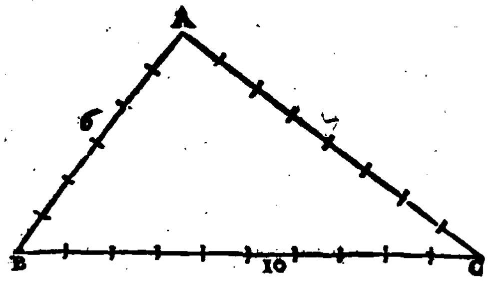
Cognitis duobus lateribus quibuscunque trianguli rectanguli, in cognitionem reliqui lateris peruenire.




*Sit angulus A, rectus in triangulo ABC, sintq́; primùm cognita latera AB, AC, circa angulum rectum, quorum AB, ponatur 6. palmorum, & AC, 8. Quoniam igitur quadrata rectarum AB, AC, nempe quadrati palmi 36. & 64.* [h] *æqualia sunt quadrato rectæ BC si illa cõiungantur simul, efficietur hoc quadratorũ palmorum 100. Latus ergo BC, continebit 10. palmos. Tantum enim est latus, seu radix quadrata 100. palmorum, vt perspicuum est apud Arithmeticos. Sint deinde cognita latera AB, BC, sitq́; AB, 6. palmorum, & BC, 10. Quoniam*

h 47. primi.

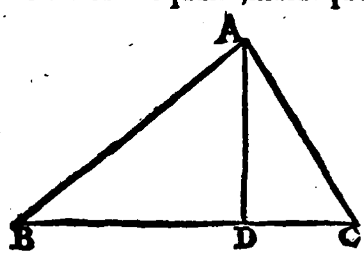
a47.primi.




*igitur quadrata rectarum A B, A C,[a] æqualia sunt quadrato rectæ B C; si quadratum rectæ A B, quod continet palmos 36. detrahatur ex quadrato rectæ B C, quod est palmorum 100, remanebit quadratũ rectæ A C, 64. palmorum. Latus ergo A C, continebit 8. palmos. Tanta enim est radix quadrata, seu latus 64. palmorum. Quod est propositum. Cæterùm non semper hac arte inuenientur numeri rationales, quia non omnis numerus habet latus, radicémue quadratam, vt notum est apud Arithmeticos. Vnde latus inuentum sæpe numero exprimi nequit, nisi per radicem surdam, quam vocant. Sed de his aliàs.*

## I X.

Si ex angulo à duobus lateribus inæqualibus trianguli comprehenso ad basin perpendicularis ducatur cadens intra triangulum, secabitur basis in partes inæquales, maiorque pars iuxta maius latus erit. Et contrà, si basis à perpendiculari secetur non bifariam, erunt duo latera inæqualia, maiusque illud erit, quod maiori basis segmento adiacet.




*Cadat primùm in triangulo A B C, cuius latus A B, maius sit latere A C, perpendicularis A D, ad B C, demissa intra triangulum, quod tum demum continget, quando vterque angulus B, C, acutus est, vt ex corollario 2. propos. 17. constat. Dico segmẽtum B D, esse maius segmento C D. Quoniam enim[b] tam quadratum ex A B, quadratis ex A D, B D, quàm quadratum ex A C, quadratis ex A D, C D, æquale est: Est autem quadratum ex A B, maius quadrato ex A C, quòd latus A B, latere A C, ponatur maius; erunt quoque duo quadrata ex A D, B D, maiora duobus quadratis ex A D, C D: Et ablato communi quadrato rectæ A D, reliquum quadratum ex B D, reliquo quadrato ex C D, maius erit. Quare & recta B D, maior erit, quàm recta C D. quod est primum.*

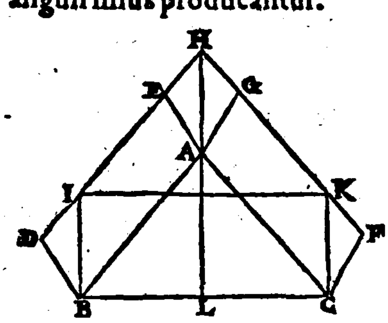
b47.primi.

*Faciat deinde perpendicularis A D, segmentum B D, maius segmento C D. Dico latus A B, maius esse latere A C. Erit enim quadratum ex B D, quadrato ex C D, maius. Additoq; quadrato communi ex A D, duo*
c47.primi. *quadrata ex B D, A D, duobus quadratis ex C D, A D, maiora erunt. Cùm ergo[c] tam quadratum ex A B, quadratis ex B D, A D, quàm quadratum ex A C, quadratis ex C D, A D, æquale sit; erit quoque quadratum ex A B, quadrato ex A C, maius: proptereaq; & latus A B, latere A C, maius erit. Quod est propositum.*

*Atque in hũc modum plurima alia ex inuento hoc Pythagoræ colligi possunt: quæ consultò, ne Lectori molesti simus, hic omittenda censuimus, & in alium locum differenda.*

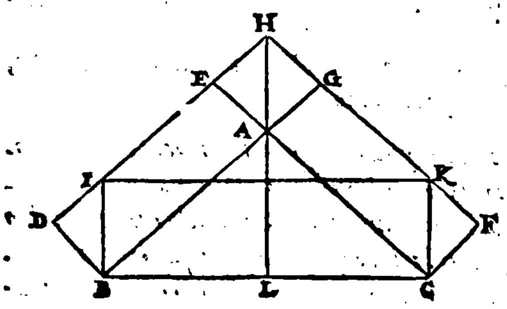
*Theoremati porrò hoc Pythagoreo multò vniuersalius est illud, quod à Pappo demonstratur in omni triangulo siue illud rectangulum sit, siue non, & de quibuscunque parallelogrammis super latera trianguli constructis tam rectangulis, quàm non rectangulis, etiamsi non sint inter se æquiangula. Quod nos in formam theorematis redigentes, clariùs hoc modo proposuimus, & meo iudicio generaliùs adhuc, quàm Pappus.*

In omni triangulo, parallelogramma quæcunque super duobus lateribus descripta, æqualia sunt parallelogrammo super reliquo latere constituto, cuius alterum latus æquale sit, & parallelum rectæ ductæ ab angulo, quem duo illa latera comprehẽdunt, ad punctum, in quo conueniunt latera parallelogrammorum lateribus trianguli opposita, si ad partes anguli illius producantur.




*Sit triangulum quodcunque A B C, constituanturq; super latera A B, A C, parallelogramma quæcunq; A B D E, A C F G, quorũ latera D E, F G, quæ lateribus A B, A C, assumptis in triangulo opponuntur, producta ad partes anguli A, dictis lateribus A B, A C, comprehensi, conueniãt in H, ducaturq; recta A H. Dico parallelogramma A D, A F, æqualia esse parallelogrammo super latus B C, descripto, cuius alterũ latus æquale sit, & parallelum rectæ A H. Producta enim H A, secet B C in L, & per B, C, agantur B I, C K, parallelæ ipsi A H, iungaturq; recta I K. Quoniam igitur parallelogramma sunt*
d34.primi. *B I H A, C K H A;[d] erit vtraq; B I, C K, ipsi A H, æqualis; atq; adeò*
e30.primi. *& inter se æquales erunt B I, C K;[e] quæ cùm sint etiam parallelæ, quòd eidem A H, parallelæ sint;[f] erunt quoq;*
f33.primi. *B C, I K, parallelæ, & æquales. Quare parallelogrammum est B C K I, super latus B C, habens alterum latus*
g35.primi. *B I, rectæ A H, æquale; & parallelum: Cui quidem æqualia ostendenda sunt parallelogramma A D, A F.[g] Quia ergo æqualia sunt parallelogramma A D, A B I H, quòd eandem habeant basin A B, in eisdémque sint paral-*
h35.primi. *lelis A B, H D;[h] Est autem A B I H, parallelogrammo I L, æquale, quòd illud cum hoc etiam eandem habeat*

*basim*

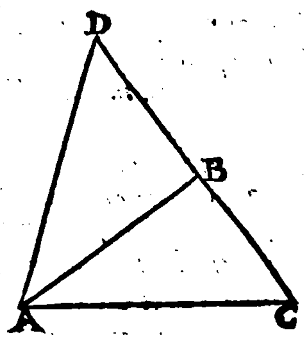



*basin B I, in eisdemq́; sit parallelis B I, L H: Erit quoq; A D, eidem I L, æquale. Non aliter ostendemus, A F, ipsi K L, esse æquale. Quare parallelogramma A D, A F, parallelogrammo B K, æqualia sunt. Quod est propositum.*

*PAPPVS construit figuram aliter. Nam sumit rectas A C, A E; & A B, A G, in directum positas, ita vt parallelogramma A D, A F, sint æquiangula, habentia angulos A E D, A G F, angulo B A C,[a] internos externo æquales, seu hæc eius figura indicat. Sed nos vniuersalius rem proposuimus, vt manifestum est.* a 29. primi.

## THEOR. 34. PROPOS. 48. 47.

SI quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, æquale sit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, quadratis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.




DETVR triangulum A B C, sitque quadratum lateris A C, æquale quadratis reliquorum laterum B A, B C. Dico angulum A B C, esse rectum. Ducatur namque B D, perpendicularis ad B A, & æqualis rectæ B C, connectaturque recta A D. Quoniam igitur in triangulo A B D, angulus A B D, rectus est;[a] erit quadratum rectæ A D, æquale quadratis rectarum B A, B D: Est autẽ quadratum rectæ B D, quadrato rectæ B C, æquale, ob linearum æqualitatẽ. Quare quadratum rectæ A D, quadratis rectarum B A, B C, æquale erit. Cùm ergo quadratum rectæ A C, eisdem quadratis rectarum B A, B C, æquale ponatur;[b] erunt quadrata rectarũ A D, A C, inter se æqualia, ac propterea & rectę ipsæ A D, A C, æquales. Quoniam igitur latera B A, B D, trianguli A B D, æqualia sunt lateribus B A, B C, trianguli A B C; & basis A D, ostensa est æqualis basi A C;[c] erunt anguli A B D, A B C, æquales: Est autem angulus A B D, ex constructione rectus. Igitur & angulus A B C, rectus erit. Si igitur quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, &c. Quod demonstrandum erat.

a 47. primi. b 1. pronun. c 8. primi.

*SCHOLIVM.*

*CONVERSVM est autem theorema hoc præcedentis theorematis Pythagorici, vt perspicuum est.*

## *Triangulorum comparationes.*

NOVEM modis duo triangula inter se comparauit Euclides hoc libro. Primùm quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, continentque angulum angulo æqualem,[d] collegit æqualitatem basium, reliquorum angulorum, atque adeò totorum triangulorum. d 4. primi.

DEINDE, quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, basisq; basi æqualis,[e] intulit æqualitatem angulorum illis lateribus comprehensorum. Vbi nos conclusimus etiam æqualitatem reliquorum angulorum, totaque triangula probauimus esse æqualia. e 8. primi.

TERTIO, cùm duo latera duobus lateribus sunt æqualia, vtrumque vtrique, comprehendunt autem angulos inæquales,[f] ostendit basim maiori angulo oppositum esse maiorem base minori angulo opposita. f 24. primi.

QVARTO, cùm duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, at bases inæquales,[g] demonstrauit angulum maiori basi oppositum esse maiorem angulo minori basi opposito. g 25. primi.

QVINTO, quando duo anguli duobus angulis æquales sunt, vterque vtrique, & vnum latus vni lateri æquale, siue quod æqualibus angulis adiacet, siue quod vni æqualium angulorum opponitur,[h] probauit reliqua latera vnius reliquis lateribus alterius esse æqualia, & reliquum angulum reliquo angulo. Vbi nos docuimus, ~~sequi etiam, tota triangula~~ esse æqualia. h 26. primi.

SEXTO[i] demonstrauit, duo triangula super eandem basin, & inter easdem parallelas constituta, esse æqualia. i 37. primi.

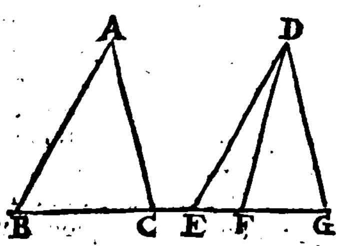
SEPTIMO[k] ostendit, duo triangula super æquales bases, & inter easdem parallelas constituta, æqualia esse. k 38. primi.

a 39. primi. OCTAVO [a] docuit, duo triangula æqualia ſuper eandem baſim, & verſus eandem partem conſtituta, eſſe inter eaſdem parallelas.

b 40. primi. NONO denique [b] probauit, duo triangula æqualia ſuper æquales baſes in eadem linea, in eandemque partem conſtituta, eſſe inter eaſdem parallelas.

*ATQVE his modis argumentandi in duobus triangulis propoſitis vniuerſa ferè Geometria vti videtur, vt propterea diligenter memoriæ mandandi ſint. Quemadmodum autem à propoſ. 26. in ſcholio propoſ. 31. excluſimus duas comparationes, quando nimirum duo anguli duobus angulis æquales ſunt, & vnum latus vni lateri æquale, non quidem, quod æqualibus adiacet angulis, vel quod vni æqualium angulorum opponitur in vtroque triangulo; ſed quod in vno quidem angulis æqualibus adiacet, in altero verò vni æqualium angulorum opponitur: vel quod in vno opponitur vni æqualium angulorũ, in altero verò alteri æqualium angulorum: Quemadmodum, inquam, duas haſce comparationes excluſimus, quòd ex iis non ſequatur reliquorum laterum æqualitas, vt in ſcholio propoſ. 31. demonſtrauimus: Ita quoque à propoſ. 4. excludendæ ſunt tres comparationes, ex quibus nullo modo inferri poteſt baſium æqualitas.*

*PRIMVM enim quando duo latera duobus lateribus æqualia ſunt, vtrumque vtrique, & vnus angulus vni angulo, qui vni æqualium laterum opponitur, baſes æquales eſſe nequeunt; niſi quando angulus in vtroque triangulo alteri lateri æquali oppoſitus, vel eſt minor recto, vel non minor recto.*




*SIT enim Iſoſceles D F G, habens latera D F, D G, æqualia, & producta baſe G F, vſque ad E, iungatur recta E D, & triangulo D E G, æquale triangulum conſtruatur A B C, cuius latera A B, A C, lateribus D E, D G, æqualia ſint, & baſis B C, baſi E G. Sunt igitur duo latera A B, A C, duobus lateribus D E, D F, æqualia, vtrumque vtrique, anguliq; B, E, æqualibus lateribus A C, D F, oppoſiti æquales: & tamen baſis B C, maior eſt baſe E F; quòd B C, ipſi E G, æqualis ſit. Ratio eſt, quòd angulus C, acutus eſt,*

a 5. primi. *at D F E, obtuſus. Nam cùm [a] anguli D F G, & G, æquales ſint; [b] & ſimul ſumpti minores duo-*

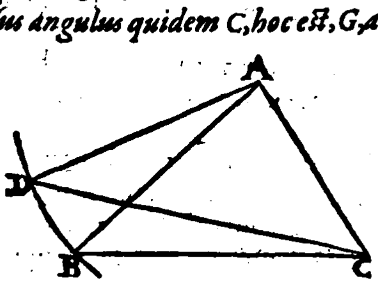
b 17. primi. *bus rectis; erit vterque minor recto, ac proinde D F E, recto maior: quandoquidem [c] duo an-*

c 13. primi. *guli ad F, æquales ſunt duobus rectis. Quòd ſi duo latera A B, A C, duobus lateribus D E, D G, ſint æqualia, angulusq; B, angulo E, & vterque angulus C, G, vel minor recto, vel non minor; tum demũ ſequitur, baſes B C, E G, æquales eſſe, &c. Nam ſi baſis B C, minor eſſet, quàm E G; ſi A B, ipſi D E, ſuperponeretur, congrueret quidem B C, ipſi E G, propter æqualitatẽ angulorum B, E, ſed punctum C, citra G, caderet, vt in F. Quia igitur latera D F, D G, æqualia ſunt,*

d 5. primi. *quòd D F, idem ſit, quod A C, ipſi D G, æquale; [d] erunt anguli D F G, & G, æquales, ac pro-*

e 17. primi. *pterea vterque minor recto; [e] quòd ambo minores ſint duobus rectis. Cùm igitur [f] duo an-*

f 13. primi. *guli ad F, ſint duobus rectis æquales, erit D F E, hoc eſt, C, qui à D F E, nõ differt, recto maior. Non ergo vterque angulus C, & G, minor eſt, aut non minor recto, ſed G, quidem acutus, & C, obtuſus, quod eſt contra hypotheſin. Eodem modo, ſi baſis B C, dicatur eſſe maior baſe E F, (poſitis lateribus A B, A C, æqualibus ipſis D E, D F, & angulo B, æquali ipſi E, & vtroque angulo C, & F, vel minore recto, vel non minore.) cadet punctum C, vltra F, vt in G; eritq; rurſus angulus quidem C, hoc eſt, G, acutus, & D F E, obtuſus, quod eſt contra hypotheſin.*



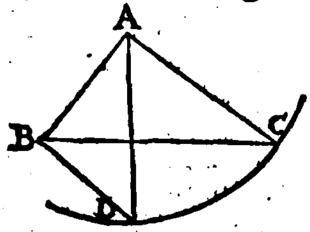

*DEINDE quando duo latera duobus lateribus æqualia ſunt, vtrumque vtrique, & vnus angulus vni angulo, ita vt vnus vni æqualium laterum & alter alteri opponatur, nihil etiam colligi poteſt. Nam ſit triangulum A B C, cuius latus A B, maius ſit latere A C. Erit [g] ergo an-*

g 18. primi. *gulus A C B, maior angulo A B C. Fiat angulus A C D, angulo A B C, æqualis; cadetq; C D, ſupra C B. Deſcribatur quoque ex A, per B, arcus circuli ſecans C D, in D, iungaturq; recta A D. Sunt igitur duo latera A B, A C, duobus lateribus A D, A C, æqualia, vtrumque vtrique, & angulus A B C, lateri A C, oppoſitus, æqualis angulo A C D, lateri A D, oppoſito: Et tamen baſes B C, D C, æquales non ſunt. Si enim æquales eſſent, eſſent tam duæ rectæ A B, A D, quàm duæ C B, C D, æ-*

quales

æquales, [a] quod est absurdum. Vel etiam anguli B A C, D A C, [b] æquales essent, pars & totum. quod est absurdum. a 7. primi. b 8. primi.

POSTREMO, quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, & angulus in vno triangulo illis lateribus comprehensus, æqualis angulo, qui in altero triangulo opponitur vni illorum laterum, nihil etiam potest inferri. Sit namq; triangulum A B C, cuius vtrumque latus A C, C B, maius sit latere A B; & B C, maius quã A C. Erit [c] ergo angulus B A C, maior angulo A B C. Si igitur fiat angulus A B D, angulo B A C, æqualis, cadet B D, infra B C. Describatur quoq; arcus circuli ex A, per C, qui infra B C, cadet, secabitq; B D, in D. Iuncta igitur recta A D; erunt duo latera A B, A C, duobus lateribus A B, A D, æqualia, vtrumque vtrique, angulusq; B A C, illis lateribus A B, A C, comprehensus, æqualis angulo A B D, qui lateri A D, opponitur: Et tamen bases, B C, B D, æquales non sunt. Aliàs tam rectæ A C, A D, quàm B C, B D, æquales essent. [d] quod est absurdum. Vel etiam anguli B A C, B A D, [e] æquales essent, totum & pars. quod est absurdum. c 18. primi. d 7. primi. e 8. primi.




RECTE igitur Euclides propos. 4. præcepit angulum illis lateribus comprehensum in vno triangulo debere esse æqualem angulo alterius trianguli, qui illis quoq; lateribus comprehenditur: quandoquidem sine hac conditione nihil colligere licet, vt demonstrauimus.

FINIS ELEMENTI PRIMI.

# EVCLIDIS ELEMENTVM SECVNDVM.

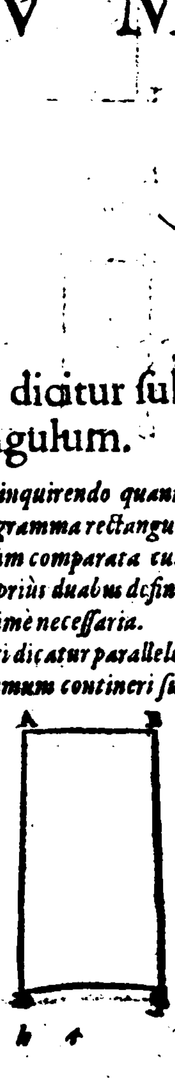
## DEFINITIONES.

### I.

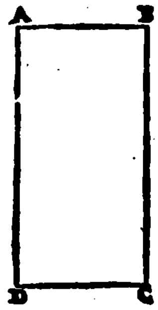
**OMNE parallelogrammũ rectangulum contineri dicitur sub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendunt angulum.**

AGIT Euclides secundo hoc libro de potentiis linearum rectarum, inquirendo quanta sint, & quadrata partium cuiusuis lineæ rectæ diuisæ, & parallelogramma rectangula sub partibus eiusdem lineæ diuisæ comprehensa, tam inter se, quàm comparata cum quadrato totius lineæ, &c. Quod vt commodè exequatur, explicat priùs duabus definitionibus duo ad ea, quæ demonstranda sunt, rectè intelligenda maximè necessaria.

PRIORI definitione exponit, sub quibus rectis lineis contineri dicatur parallelogrammum quodcunque rectangulum: Et quid sit, parallelogrammum contineri sub duabus lineis rectis. Quod vt intelligatur, explicandum primùm est, Parallelogrammum illud dici rectangulum, cuius omnes anguli sunt recti. Cuius quidem duo tantùm sunt genera. Quadratum, & Altera parte longius. In his enim omnes anguli sunt recti; vt perspicuum est ex eorum definitionibus. In omni porrò parallelogrammo, si vnus angulus duntaxat detur rectus, erunt & reliqui tres necessariò recti. Sit enim in parallelogrammo A B C D, angulus A, rectus. Dico reliquos tres angulos B, C, D, rectos quoq; esse. Nam cùm parallelæ sint A D, B C, [f] erunt anguli A, & B, interni duobus rectis æquales: At angulus A, rectus est, ex hypothesi. Igitur & B, rectus erit. Quoniam verò [g] quilibet suo opposito est æqualis, vt angulus A, angulo C, & angulus B, angulo D; erunt & anguli C, & D, recti. f 29. primi. g 34. primi.

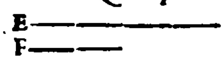



DICIT itaque Euclides, quodlibet parallelogrammum rectangulum contineri sub




duabus rectis lineis, quæ vnum eius angulum rectum continent. Vt parallelogrammum rectangulum A B C D, contineri dicitur sub duabus lineis rectis A B, A D; vel sub A D, D C; vel sub D C, C B, vel denique sub A B, B C: quoniam qualibet huiusmodi duæ lineæ exprimunt totam parallelogrammi magnitudinem, vna quidem, vt A B, vel D C, eius longitudinem, altera verò, vt A D, vel B C, eius latitudinem. Vnde expressis duabus lineis, quæ angulum rectum continent in parallelogrammo rectangulo, statim tota eius quantitas concipitur, intelligiturq́; longitudo nimirũ, atq; latitudo. Accedit etiam, quòd ex motu imaginario vnius lineæ in alteram huiusmodi parallelogrammum conficitur. Si namque animo concipiatur recta A B, deorsum secundùm rectam A D, moueri in transuersum, ita vt semper angulum rectum cum A D, constituat, donec punctum A, ad punctum D, & punctum B, ad punctum C, perueniat, descriptum erit totum parallelogrammum A B C D. Idem fiet, si A D, ponatur moueri in transuersum secundùm rectam A B, &c. Quamobrem iure optimo sub talibus duabus lineis rectis contineri dicitur parallelogrammum rectangulum.

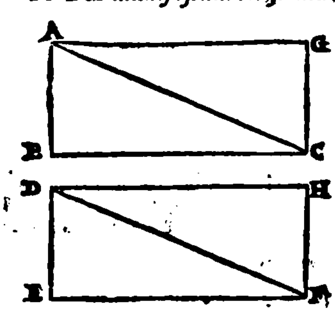
Itaqve parallelogrammum rectangulum, quod sub duabus rectis lineis contineri dicitur, erit illud, cuius duo latera circa vnum angulum rectum æqualia sunt duabus illis rectis lineis, vtrumque vtrique. Vt parallelogrammum rectangulum sub rectis E, & F, contentum, erit idem, quod parallelogrammũ A B C D: quoniam latus A B, æquale est rectæ E, & latus A D, rectæ F.




Perspicvvm autem est ex dictis, parallelogrammum rectangulum contentum sub duabus lineis

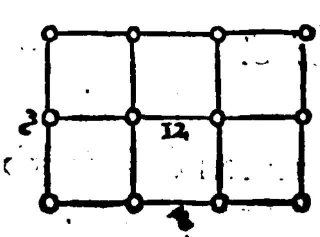
a 34.primi. æqualibus esse quadratum. Cùm enim qualibet illarum linearum æqualium [a] æqualis sit linea opposita, erunt omnia quatuor parallelogrammi rectanguli latera æqualia. Quare ex definitione quadrati, quadratum erit.

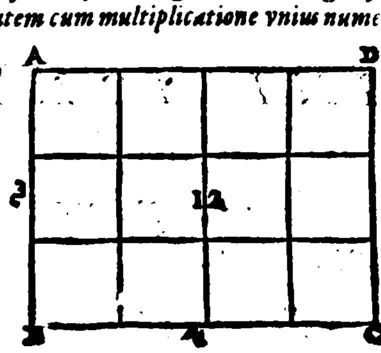
Item manifestum est, si duæ rectæ lineæ aliis duabus rectis lineis æquales fuerint, vtraq; vtrique, rectangulum parallelogrammum sub prioribus duabus comprehensum, æquale esse ei, quod sub duabus posterioribus comprehenditur, parallelogrammo rectangulo: quoniam & anguli, & latera vnius æqualia sunt & angulis, & lateribus alterius. Quod tamẽ facilè hac etiam ratione demonstrari potest. Sint rectæ A B, B C, æquales rectis D E, E F, vtraque vtrique. Dico parallelogrammũ rectangulum A B C G; contentum sub A B, B C, æquale esse parallelogrammo rectangulo D E F H, contento sub D E, E F. Ductis etenim diametris A C, D F, cùm latera A B, B C, trianguli A B C, æqualia sint lateribus D E, E F, trianguli D E F, & anguli B, & E, æquales, nempe recti; [b] erunt triangula A B C, D E F, æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triangula A G C, D H F. Quare tota parallelogramma A B C G, D E F H, æqualia erunt.

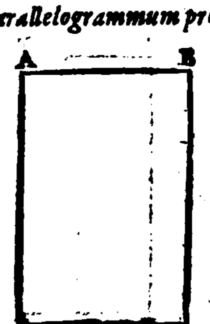



b 4.primi.

Habet autem comprehensio hac parallelogrammi rectanguli sub duabus rectis lineis angulum rectum continentibus, magnam affinitatem cum multiplicatione vnius numeri in alterum. Sicut enim ex multiplicatione 3. in 4. producitur numerus 12. qui in formam parallelogrammi constituitur, vnde & contineri dicitur sub 3. & 4. Ita quoque parallelogrammum A B C D, comprehensum sub duab. rectis A B, B C, quarum illa sit 3. palmorum, hæc autem 4. constat 12. palmis quadratis, qui quidem ex ductu lineæ A B, 3. palmorum in lineã B C, 4. palmorum producuntur, vt figura indicat, notumq́; est Arithmeticis, atque Geometris, demonstraturq́; à Ioanne Regiomontano libro 1. de Triangulis, propos. 16. Hinc fit, vt nonnulli dicant, parallelogrammum rectangulum gigni ex ductu duarum linearum circa angulum rectum vnius in alteram. Vt proximè antecedens parallelogrammum ex ductu lineæ A B, in lineam B C, vel (quod idem est) ex ductu lineæ B C, in lineam A B. Idem enim parallelogrammum procreatur, siue minor linea in maiorem, siue maior in minorem ducatur; quemadmodum etiam idem producitur numerus, siue minor numerus in maiorem, siue maior in minorem ducatur, vt ab Euclide demonstratur lib. 7. propos. 16. Tam enim ex multiplicatione 3. in 4. quàm ex 4. in 3. producitur hic numerus 12.



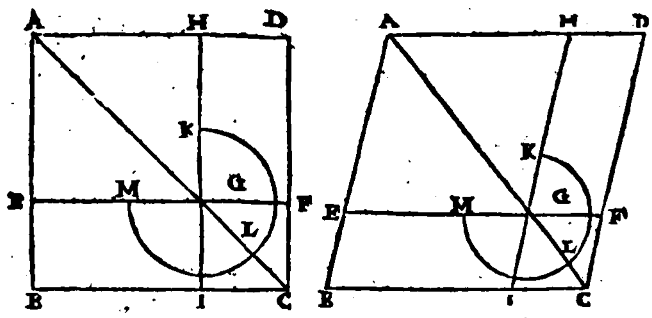

Obiter quoq; monendus mihi Lector videtur, Euclidem in hoc secundo libro, & in aliis, qui sequuntur, parallelogrammum rectangulum appellare simpliciter rectangulum; quod etiam cæteri Geometræ obseruant, ita vt nomine rectanguli perpetuò intelligendum sit parallelogrammum rectangulum. Rursus, ne toties eadem litteræ repetantur, solent Geometræ exprimere parallelogrammum tam rectangulum, quàm non rectangulum duabus duntaxat literis, quæ per diametrum opponuntur. Vt appositum parallelogrammum appellant A C, vel B D.

In

## II.

IN omni parallelogrammo spatio, vnum quodlibet eorũ, quæ circa diametrum illius sunt, parallelogrammorum cum duobus complementis, Gnomon vocetur.

*IN Parallelogrammo A B C D, siue rectangulum illud sit, siue non, ducatur diameter A C, ex cuius puncto quolibet G, ducantur rectæ E F, H I, parallelæ lateribus parallelogrãmi, ita vt parallelogrammũ diuisum sit in quatuor parallelogramma, quorum duo E H, I F, dicuntur esse circa diametrũ, alia verò duo B G, G D, complementa, vt manifestum est ex vltima definitione primi libri. Itaque figura composita ex parallelogrãmo vtrolibet circa diametrum, vt ex I F, vnà cũ duobus complementis B G, G D, qualis est figura E B C D H G E, quam complectitur circunferentia K L M, dicitur Gnomon. Eadem ratione figura F D A B I G F, composita ex parallelogrammo E H, circa diametrum, & duobus complementis B G, G D, Gnomon appellabitur.*

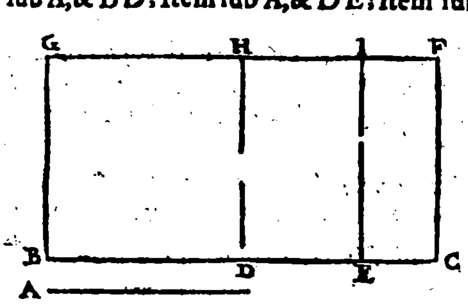


*SED iam ad propositiones secundi huius libri veniamus, in quibus sanè operæpretium fuerit, multum laboris in eis exquisitè intelligendis ponere, propter multiplicem earum vsum, cùm in rebus Geometricis, tum in humanis commerciis. Nam ex nonnullis harum propositionum demonstrantur regulæ illæ admirabiles Algebræ, quibus vix credo in disciplinis humanis præstãtius aliquid reperiri; quippe cùm miracula quædam numerorum (vt ita dicam) eruant tam abstrusa, ac recondita, vt facultas illa omnem captum humanum superare videatur, tanta nihilominus facilitate, atque voluptate, vt facilius videatur esse nihil. Ex aliis deinde propositionibus huius libri eliciuntur demonstrationes, quibus inter se adduntur, subtrahũtur, multiplicantur, atque diuiduntur numeri surdi, (quos dicunt) hoc est, qui nullo modo exprimi possunt; cuiusmodi sunt radices numerorum non quadratorũ, aut non cubicorum, quæ neq; per Diuinã potentiam in numeris possunt exhiberi, quòd hæc res contradictionem implicet, vt Philosophi, atq; Theologi loquuntur. Quo quid admirabilius? Quis enim credat, per demonstrationem sciri posse, quid producatur ex radice quadrata numeri 8. ad radicem quadratam numeri 18. adiecta, cùm vtraque radix incognita sit, & nulla ratione exprimi queat, & illa paulò minor sit, quàm 3. hæc verò paulò maior, quàm 4? Et tamen summa, quæ ex vtraque fit, colligitur ex vi propositionũ 4. huius lib. radix quadrata numeri 50. quæ paulò maior est, quàm 7. Præterea ex propositione 12. & 13. eiusdem huius lib. area, & quantitas cuiusuis trianguli exquisitissimè cognoscitur, ex qua cognitione rursus dimensio omnium magnitudinum fluit, atq; dimanat. Postremò vltima propositio huius libri omnem figuram rectilineam irregularem, vel etiam plures, ad quadratum æquale mira facilitate reducit. Vt verè aureus dici mereatur hic liber, cùm mole quidem sit perexiguus, vtilitates verò cõtineat propè infinitas.*

## THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, seceturque ipsarum altera in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub insecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rectangulis.

SINT duæ rectæ A, & B C, quarum B C, secetur quomodocunque in quotlibet segmenta B D, D E, E C. Dico rectangulum sub A, & B C, comprehensum æquale esse omnibus rectangulis simul sumptis, quæ sub linea indiuisa A, & quolibet segmento comprehenduntur, nempe rectangulo sub A, & B D; Item sub A, & D E; Item sub A, & E C, comprehenso.



RECTANGVLVM enim B F, comprehendatur sub A, & B C, hoc est, recta G B, æqualis sit rectæ A. Quod quidem fiet, si erigantur ad B C, duæ perpendiculares B G, C F, æquales rectæ A, ducaturque recta F G. Nam rectæ B G, C F, [a] parallelæ erunt, ob rectos angulos B, C: Sed & [b] æquales inter se sunt, quòd vtraque rectæ A, æqualis ponatur. Igitur [c] erunt quoque G F, B C, parallelæ & æquales inter se: ac proinde rectangulum erit B F, contẽtum sub A, siue G B, & B C, ex defin. 1. huius libri. Deinde ex D, & E, ducantur rectæ D H, E I, parallelæ ipsi B G, vel C F. Itaque D H, E I, cùm parallelæ sint ipsi B G, [d] inter se quoque parallelæ erunt. Rursus eædem, cùm ex constructione parallelogramma sint B H, B I, [e] æquales erunt rectæ B G, ac propterea rectæ A. Quoniam igitur recta B G, æqualis est rectæ A, erit rectangulum B H, comprehensum sub insecta linea A, &

a 28. primi.
b 1. pron.
c 33. primi.
d 30. primi.
e 34. primi.

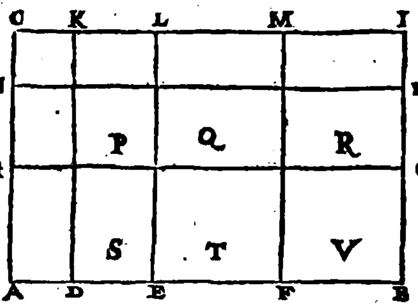
segmento B D. Eadem ratione erit rectangulum D I, comprehensum sub A, & segmento D E. Item rectangulum E F, sub A, & segmento E C. Quare cùm rectangula B H, D I, E F, æqualia sint toti rectangulo B F; perspicuũ est, rectangulum comprehensum sub A, & B C, æquale esse rectangulis omnibus, quæ sub A, & segmentis B D, D E, E C, comprehenduntur. Si ergo fuerint duæ rectæ lineæ, seceturq; ipsarum altera, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

*QVONIAM lib. 9. propos. 14. decem priora theoremata secundi huius libri, quæ Euclides lineis accommodat, in numeris etiam demonstrabimus, si diuidantur, vt lineæ; non abs re fuerit, breuiter numeris applicare ea, quæ pluribus verbis de lineis hic demonstrantur, præsertim cùm multiplicatio numeri vnius in alterum respondeat ductui vnius lineæ in alteram, vt suprà diximus. Itaque propositis duobus numeris quibuscunque vt 6. & 10. diuidatur posterior in tres partes 5. 3. & 2. Dico 60. numerum productum ex 6. in 10. æqualem esse tribus numeris 30. 18. & 12. qui ex multiplicatione 6. in 5. & 3. & 2. gignuntur: id quod perspicuũ est.*

*DEMONSTRAT hoc loco Federicus Commandinus duo alia theoremata, quæ iam sequuntur.*

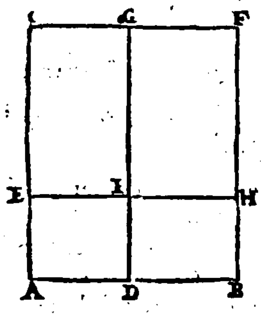
SI fuerint duæ rectæ lineæ, secenturque ambæ in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis vnius, & quolibet segmentorum alterius continentur rectangulis.




*SINT duæ rectæ A B, A C, rectum angulum A, continentes, quæ secentur in partes A D, D E, E F, F B; A G, G H, H C. Dico rectangulum sub rectis A B, A C, comprehensum æquale esse rectangulis, quæ sub A D, A G; A D, G H; A D, H C: D E, A G; D E, G H; D E, H C: E F, A G; E F, G H; E F, H C: F B, A G; F B, G H; F B, H C, continentur. Compleatur rectangulum A I, ducanturque D K, E L, F M, parallelæ ipsi A C, vel B I: Item H N, G O, parallelæ ipsi A B, vel C I; quæ secent priores in P, Q, R, S, T, V. Quoniam igitur rectangulum A S, continetur sub A D, A G; & G P, sub A D, G H; & H K, sub A D, H C; (a quòd rectæ G S, H P, ipsi A D, sint æquales:) Item rectangula D T, S Q, P L, continentur sub D E, A G; D E, G H; D E, H C; (b quòd D S, S P, P K, ipsis A G, G H, H C, æquales sint, & S T, P Q, ipsi D E.) Et eadem ratione rectangula E V, T R, Q M, continentur sub E F, A G; E F, G H; E F, H C: Nec non rectangula F O, V N, R I, sub F B, A G; F B, G H; F B, H C; perspicuum est, rectangulum sub A B, A C, æquale esse rectangulis sub singulis partibus A D, D E, E F, F B, & quolibet segmentorum A G, G H, H C, comprehensis. Quod est propositum.*

a 34. primi.
b 34. primi.

SI sint duæ rectæ lineæ, secenturque ambæ vtcunque: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, vnà cum rectangulo sub vna parte vnius, & vna parte alterius comprehenso, æquale est eis, quæ sub totis lineis, & dictis partibus mutuò continentur, rectangulis, vnà cum rectangulo sub reliquis partibus comprehenso.




*SINT duæ rectæ A B, A C, angulum continentes rectum A, quæ secentur vtcunque in D, & E. Dico rectangulum comprehensum sub A B, A C; vnà cum rectangulo comprehenso sub partibus A D, E C, æquale esse rectangulis contentis sub A B, E C; A C, A D; vnà cũ rectangulo sub D B, A E, comprehenso. Compleatur enim rectangulum A F, agaturq; per D, recta D G, ipsi A C, vel B F, parallela; nec nõ per E, recta E H, secans D G, in I, parallela ipsi A B, vel C F. Quoniam igitur rectangulũ A F, æquale est rectangulis E F, D H, A I; si addatur commune E G, erunt rectangula A F, E G, nempe sub totis A B, A C, & partibus A D, E C, cõprehensa, æqualia rectangulis E F, A G, D H, sub A B, E C; A C, A D; D B, A E, comprehensis æqualia. Quod est propositum.*

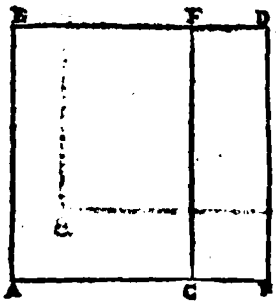
*IN numeris etiam hæc eadem perspicua sunt. Propositis enim duobus hisce numeris 10. & 8. quorum prior in tres partes, 2. 3. 5. posterior verò in duas, 3. 5. diuidatur; perspicuum est, 80. numerum productum ex 10. in 8. æqualem esse sex numeris 6. 10. 9. 15. 15. 25. qui producũtur ex singulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 3. 5. efficiuntq; simul additi 80. vt volebat theorema 1. Federici.*

*RVRSVS, si iidem numeri secentur vtcunque, prior quidem in 3. 7. posterior autem in 2. 6. manifestum quoq; est 80. numerum productum ex 10. in 8. vnà cum 18. numero producto ex 3. in 6. æqualem esse tribus numeris 60. 24. 14. qui producuntur ex 10. in 6. & ex 8. in 3. & ex reliqua parte 7. in reliquam partem 2. cùm vtrobique efficiantur 98. vt theorema 2. Federici optabat.*

## 2. THEOR. 2. PROPOS. 2.

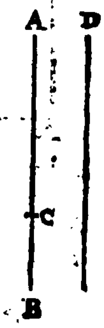
SI recta linea secta sit vtcunque: Rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorum comprehenduntur, æqualia sunt ei, quod à tota fit, quadrato.

RECTA



Recta linea A B, diuidatur vtcunque in C, duas in partes. Dico duo rectangula comprehensa sub tota A B, & segmentis A C, C B, simul sumpta, æqualia esse quadrato totius lineæ A B. Describatur enim A D, quadratum lineæ A B, & ex C, ducatur C F, parallela rectæ A E, vel B D, quæ [a] æqualis erit rectæ A E, hoc est, rectæ A B, cui æqualis est recta A E, ex definitione quadrati. Quoniam igitur recta A E, æqualis est rectæ A B, erit rectangulum A F, comprehensum sub tota A B, & segmento A C. Similiter erit rectangulum C D, comprehẽsum sub tota A B, & segmẽto C B. Quare cùm rectangula A F, C D, æqualia sint quadrato A D, perspicuum est, rectangula comprehensa sub A B, & segmentis A C, C B, æqualia esse quadrato lineæ A B. Si igitur recta linea secta sit vtcunque, &c. Quod demonstrandum erat.

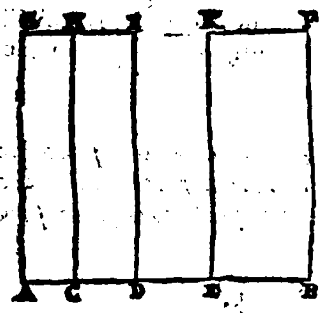
a 34. primi.



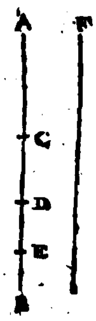
Aliter. Sumatur recta D, æqualis rectæ A B. Quoniam igitur A B, diuisa est in C, erit rectangulum comprehensum sub insecta D, & recta A B, hoc est, quadratum rectæ A B, [b] æquale duobus rectangulis, quæ comprehenduntur sub D, insecta, hoc est, sub A B, & singulis segmentis A C, C B. quod est propositum.

b 1. secundi.

## SCHOLIVM.

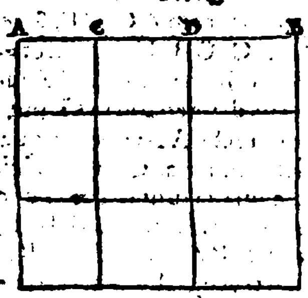


*Qvanqvam Euclides secũdum hoc theorema proponat de linea recta diuisa in duas tantummodò partes vtcunq., idem tamen eisdem medijs demonstrabitur, si linea diuidatur in quotcunque partes, vt ex his figuris manifestum est. In numeris verò idem perspicitur hoc modo. Numerus 10. diuisus sit in duas partes 7. & 3. Dico numeros 70. & 30. qui producuntur ex multiplicatione 10. in 7. & 3. æquales esse 100. quadrato ipsius numeri 10. vt manifestũ est. Simili modo, si numerus 10. diuidatur in plures partes 3. 2. 4. & 1. erũt numeri 30. 20. 40. & 10. geniti ex 10. in 3. 2. 4. & 1. æquales 100. quadrato ipsius numeri 10.*



*Simili modo demonstrat hoc loco Federicus Commandinus hoc theorema.*

Si linea recta secetur in quotcunque segmenta: Quadratum, quod à tota fit, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis, & quolibet segmento comprehenduntur rectangulis.



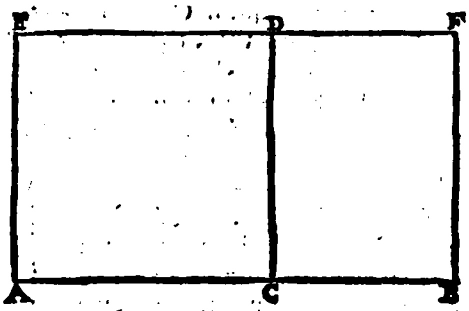
*Sit recta A B, diuisa in partes quotcunque A C, C D, D B. Dico quadratum ex A B, descriptum, æquale esse rectangulis, quæ sub singulis partibus A C, C D, D B, & quolibet segmentorum A C, C D, D B, comprehenduntur: hoc est, rectangulis sub A C, A C; A C, C D; A C, D B: C D, A C; C D, C D: C D, D B: D B, A C; D B, C D; D B, D B, comprehensis. Sumpta enim recta E F, quæ æqualis sit ipsi A B, diuisáque in partes E G, G H, H F, partibus A C, C D, D B, æquales; Erit ex ijs, quæ ad propositionem primam huius libri, demonstrauimus, rectangulum sub A B, E F, hoc est, quadratum ipsius A B, æquale rectangulis sub A C, E G; A C, G H; A C, H F: C D, E G: C D, G H: C D, H F: D B, E G: D B, G H; D B, H F. Cùm igitur partes A C, C D, D B, partibus E G, G H, H F, sint æquales; erit quoque quadratum ex A B, æquale rectangulis sub A C, A C; A C, C D; A C, D B; C D, A C; C D, C D; C D, D B: D B, A C; D B, C D; D B, D B. Quod est propositum.*

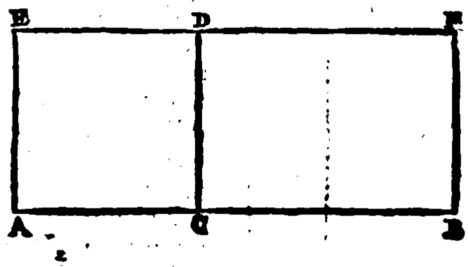
*In numeris idem est manifestum. Sit enim numerus 10. diuidatur in 2. 3. 5. erit 100. quadratum totius æqualis his nouẽ numeris 4. 6. 10. 6. 9. 15. 10. 15. 25. qui ex singulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 2. 3. 5. procreantur, vt perspicuum est.*

# THEOR. 3. PROPOS. 3.

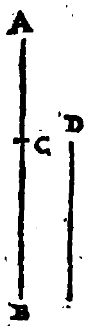
Si recta linea secta sit vtcunque: Rectangulum sub tota, & vno segmentorum comprehensum, æquale est illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prædicto segmento describitur, quadrato.

Linea recta A B, diuisa sit vtcunque in puncto C. Dico rectangulum comprehensum sub tota A B, & vtrouis segmento, vt A C, (siue hoc segmentum maius sit, siue minus) æquale esse rectangulo sub segmentis A C, C B, comprehenso, & quadrato prioris segmenti assumpti A C. Constituatur enim quadratum dicti segmenti A C, quod sit A D; & ex B, educatur B E, parallela ipsi




A E, donec coeat cum E D, protracta in F. Quoniam igitur A E, recta rectæ A C, æqualis est, ex quadrati definitione; erit rectangulum A F, comprehensum sub tota A B, & segmento A C. Rursus, quia recta C D, eadem ratione æqualis est rectæ A C; erit rectangulum C F, comprehensum sub segmentis A C, & C B. Cùm igitur rectangulum A F, æquale sit quadrato A D, & rectangulo C F; liquidò constat, rectangulum sub A B, tota, & segmẽto A C, comprehensum, esse æquale rectangulo comprehenso sub segmentis A C, C B, & quadrato prædicti segmenti A C. Itaque si recta linea secta sit vtcunque, &c. Quod erat ostendendum.



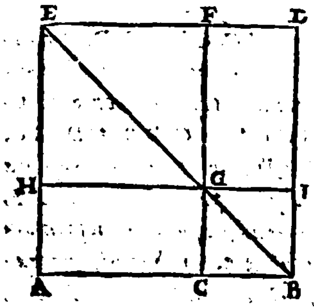

a 1. secundi. ALITER. Accipiatur recta D, æqualis segmento A C. Quoniam igitur recta A B, diuisa est in C, erit rectangulum comprehensum sub D, & A B, hoc est, sub A B, & A C, a æquale rectangulo sub D, & C B, hoc est, sub AC, C B, & rectangulo sub D, & A C, hoc est, quadrato segmenti A C. Quod est propositum.

*SCHOLIVM.*

*Vt hoc theorema numeris accommodetur, sit numerus 10. diuisus in 7. & 3. Dico numerum 70. productum ex 10. in 7. æqualem esse numero 21. qui ex 7. in 3. producitur, vnà cum 49. quadrato prioris partis 7. Id quod res ipsa indicat. Pari ratione erit numerus 30. procreatus ex 10. in 3. æqualis numero 21. producto ex 3. in 7. simul cum 9. quadrato prædicti numeri 3.*

# 4. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea secta sit vtcunque: Quadratum, quod à tota describitur, æquale est & illis, quæ à segmentis describuntur, quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo.




RECTA linea A B, diuisa sit vtcunque in C. Dico quadratum totius rectæ A B, æquale esse quadratis segmentorum A C, C B, & rectangulo comprehenso bis sub segmentis A C, C B. Describatur enim super A B, quadratum A D, ducaturque diameter B E. Deinde ex C, agatur C F, parallela rectæ B D, secans diametrum in G, puncto, per quod rursus ducatur H I, parallela rectæ A B; eritque quadratum A D, diuisum in quatuor parallelogramma. Quoniam igi-

b 5. primi. tur trianguli A B E, duo latera A B, A E, æqualia sunt, b erunt duo

c 32. primi. anguli A B E, A E B, æquales: Atqui c tres anguli A B E, A E B, BAE, trianguli A B E, duobus rectis sunt æquales, & B A E, rectus est. Reliqui ergo duo anguli A B E, A E B, semirecti erunt. Eadem ratione ostendes angulos D B E, D E B, semirectos esse. Quod etiã constat ex iis, quæ ad 34. prop. lib. 1. demonstrauimus. Nã, vt ibi ostensum est, diameter B E, diuidit angulos rectos A B D, A E D, bifariã. Quia

d 32. primi. ergo anguli quoq; tres trianguli E F G, d æquales sunt duobus rectis, & angulus E F G, rectus est, e

e 29. primi. cũ sit æqualis recto D, externus interno; necnõ F E G, ostensus semirectus; erit & reliquus E G F,

f 6. primi. semirectus; ideoq; æqualis angulo F E G. Quare f æqualia erunt latera E F, F G: quæ cùm sint g æ-

g 34. primi. qualia oppositis lateribus G H, H E, erit parallelogrammum F H, quadratũ, cùm omnia eius latera sint æqualia, & omnes anguli recti; propterea quòd existente vno angulo recto, nempe F E H, vel F, in parallelogrammo F H, omnes quatuor recti sunt, vt ad definit. 1. huius libri monstrauimus.

Eadem ratione quadratum erit C I. Quamobrem C I, F H, quadrata sunt segmentorum


h 34. primi. A C, C B, quòd latus H G, h æquale sit rectæ A C. Rectangula quoque A G, D G, comprehensa erunt sub segmentis A C, C B, propterea quòd C G, G I, æquales sunt rectæ C B, ob quadra-

i 34. primi. tum C I; & F G, æqualis rectæ G H, ob quadratum F H, hoc est, i rectæ A C. Quocirca cùm quadratum A D, æquale sit quadratis C I, F H, & rectangulis A G, D G; constat quadratum A D, totius lineæ A B, æquale esse quadratis segmentorũ A C, C B, & rectangulo comprehenso sub eisdẽ segmentis A C, C B, bis sumpto. Igitur si recta linea secta sit vtcunque, quadratum, quod à tota describitur, &c. Quod demonstrandum erat.

k 2. secundi. ALITER. Quoniam recta A B, diuisa est in C, k erit quadratũ totius A B, æquale rectangulis, quæ sub tota A B, & segmentis A C, C B, comprehenduntur: Rectangulum autẽ sub

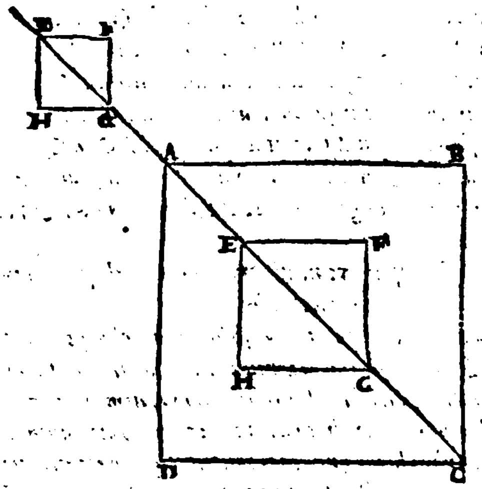
l 3. secundi. A B, A C, comprehensum, l æquale est rectangulo comprehenso sub A C, C B, & quadrato segmenti

segmenti A C: Item rectangulum sub A B, C B, comprehensum, æquale est rectangulo sub C B, A C, comprehenso, & quadrato segmenti C B. Igitur quadratum rectæ A B, æquale etiam est quadratis segmentorum A C, C B, & rectangulis sub A C, C B, & sub C B, A C. Quod est propositum.

## COROLLARIVM I.

*Hinc manifestum est, parallelogramma circa diametrum quadrati esse quadrata.*

*Constat hoc ex priori huius theorematis demonstratione, in qua ostensum est, rectangula C I, F H, quæ sunt circa diametrum B E, esse quadrata. In omnibus enim aliis quadratis eadem erit demonstratio. Est tamen corollarium istud intelligendum de illis parallelogrammis circa diametrũ quadrati, quæ communem aliquem angulum habent cum toto quadrato, cuiusmodi sunt dicta parallelogramma C I, F H. Illud enim angulum habet A B D, communem cum quadrato, hoc vero angulum A E D. Idem nihilominus verum est de quibuscunque parallelogrammis circa diametrum quadrati, etiam protractum, quamuis non habeant cum quadrato angulum aliquem communem, dummodo eorum latera parallela sint quadrati lateribus. Circa enim diametrũ A C, quadrati B D, consistat parallelogrammum F H, siue intra quadratum, siue extra, quod tamen habeat latera lateribus quadrati B D, parallela. Dico F H, esse quadratum. Cum enim parallelæ sint A B, E F, [a] erunt anguli B A C, F E G, æquales, internus, & externus; atque eadem ratione anguli B C A, F G E, æquales erunt: Sunt autem anguli B A C, B C A, semirecti, vt ostensum iam fuit. Igitur & anguli F E G, F G E, semirecti erunt: [b] proptereaq; latera E F, F G, illis opposita, æqualia, [c] & angulus F, rectus. Quare cum E F, F G, latera [d] æqualia sint oppositis lateribus G H, H E, æquilaterum erit parallelogrammum F H: Sed & rectangulum est, ex iis, quæ ad definitionem 1. huius libri ostendimus, propterea quòd angulus vnus F, rectus est demonstratus. Igitur F H, quadratum erit. Quod est propositum.*




a 29. primi.
b 6. primi.
c 32. primi.
d 34. primi.

## COROLLARIVM II.

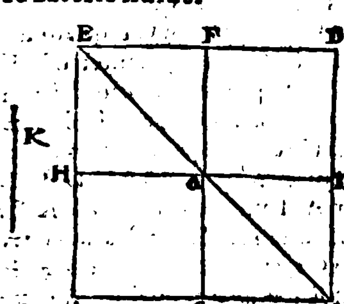
*Seqvitvr etiam ex demonstratione huius propos. 4. diametrum cuiusuis quadrati diuidere eius angulos bifariam. Probatum enim fuit, angulos A E B, D E B, esse semirectos, &c. Id quod etiam ad propos. 34. lib. 1. demonstrauimus.*

## SCHOLIVM.

*In numeris ita theorema hoc quartum exercebitur. Sit numerus 10. diuisus vtcunque in 7. & 3. Vides igitur 100. quadratum totius numeri æquale esse 49. & 9. quadratis partium 7. & 3. vnà cum numero 21. qui ex 7. in 3. procreatur, bis sumpto. Nam 49. 9. 21. & 21. efficiunt 100.*

*Perfacile autem erit ex hoc theoremate 4. demonstrare hoc aliud theorema.*

Si linea recta fuerit dupla lineæ rectæ, quadratum ex illa descriptum, quadruplum est quadrati ex hac descripti. Et si quadratũ quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum est lateris huius.




*Sit enim primum linea A B, dupla lineæ K. Dico quadratum rectæ A B, quadruplum esse quadrati rectæ K. Nam diuisa A B, bifariam in C, si fiat constructio, vt in 4. hoc theoremate, erunt 4 parallelogramma A G, C I, I F, F H, quadrata, atq; inter se æqualia, cum omnia eorum latera sint æqualia, omnesq; anguli recti, vt facile demonstrari potest ex propositione 34. libri 1. Quare cum quadratum A D, æquale sit quatuor quadratis A G, C I, I F, F H, erit quadratũ lineæ A B, quadruplum quadrati lineæ A C, hoc est, lineæ K, quæ æqualis est ipsi A C. Est enim vtraque dimidium lineæ A B.*

*Brevivs. [e] Quadratum rectæ A B, æquale est quadratis rectarum A C, C B, & rectangulo sub rectis lineis A C, C B, bis comprehenso. Cum igitur quadrata rectarum æqualium A C, C B, æqualia sint; & rectangulum sub æqualibus A C, C B, quadratum quoq; sit, atq; æquale quadrato rectæ A C; Constat quadratum rectæ A B, quadruplum esse quadrati rectæ A C; cum æquale sit quatuor quadratis, quorum vnumquodque quadrato rectæ A C, æquale est.* e 4. secundi.

*Sit deinde quadratum rectæ A B, quadruplum quadrati rectæ K. Dico latus A B, duplum esse lateris K. Nam diuisa recta A B, bifariam in C, vt A B, dupla sit ipsius A C; erit, vt iam demonstratum est, quadratum rectæ A B, quadruplum quadrati rectæ A C: Ponitur autem & quadruplum quadrati rectæ K. Igitur æqualia* sunt quadrata rectarum K, & A C, & ipsæ propterea recta K, & A C, æquales: Est autem A B, ex constructione, ipsius A C, dupla. Dupla igitur etiam erit ipsius K. Hæc tamen omnia aliter demonstrabimus ad propositionem 20. libri 6.

CAETERVM ex hac propos. 4. colligi potest modus inueniendi numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoque numerum constituat. Si namque ex dato numero auferatur 1. erit quadratus numerus ex reliqui numeri dimidio in se multiplicato productus, is qui quæritur. Vt si datus sit numerus 15. inueniendusque numerus quadratus, cum quo datus numerus 15. faciat numerum item quadratum; detrahemus 1. ex 15. & reliqui numeri 14. dimidium 7. accipiemus. Nam numerus quadratus 49. ex eo dimidio in se multiplicato productus erit is cum quo datus numerus 15. constituit 64. quadratum numerum, cuius latus est 8. nempe numerus vna vnitate maior, quàm 7. latus quadrati inuenti. Ratio huius rei hæc est. Quoniam quadratum A D, recta A B, a æquale est duobus quadratis F H, C I, partium A C, C B, vnà cum rectangulo bis comprehenso sub A C, C B: si gnomonem H B F, qui cum quadrato F H, constituit totum quadratum A D, ponamus 15. quantus nimirum est datus numerus: quadratum autem C I. statuamus 1. atque adeò latus quoque eius C B, 1. erit vtrumuis rectangulorum A G, D G, 7. ac proinde segmentum A C, 7. vt nimirum ex A C, in C B, quæ est 1. fiant 7. Quadratum ergo F H, erit 49. Totum autem latus A B, erit 8. nempe vna vnitate maius, quàm A C, latus quadrati F H. Hæc ergo est causa, cur ex dato numero, hoc est, ex gnomone H B F, detrahamus 1. & reliqui numeri dimidium statuamus latus quadrati F H, quæsiti.

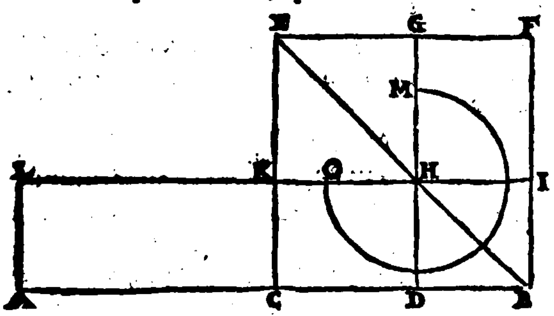
a 4. Euclidi.

VT autem numeri fracti vitentur, datus numerus debet esse impar, vt nimirum ablata 1. reliquus numerus diuidi possit bifariam. Regula nihilominus vera est, quicunque numerus datus sit.

VICISSIM reperiemus numerum quadratum, à quo datus quiuis numerus subtractus relinquat numerum quoque quadratum. Nam si ex numero dato dematur 1. & reliqui numeri dimidio adiiciatur 1. conficietur latus quadrati quæsiti. Vt si rursum datus sit numerus 15. Detracta 1. erit reliqui numeri 14. dimidium 7. cui addita 1. fiet latus quadrati quæsiti 8. Si enim ex eius quadrato 64. detrahas 15. remanet quadratus numerus 49. cuius latus est 7. quod perpetuò est vna vnitate minus, quàm latus quadrati inuenti. Ratio etiam huius regulæ facilis est, ex eadem figura huius propos. 4. Nam si gnomonem H B F, qui ex quadrato A D, subtractus reliquum facit quadratum F H, ponamus 15. quantus nimirum est numerus datus: Quadratum verò C I, statuamus 1. atque adeò & latus eius C B, 1. erit vtrumlibet rectangulorum A G, D G, 7. ac proinde & segmentum A C, 7. vt suprà dictum est, & tota linea A B, 8. &c.

## 5. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Rectangulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, vnà cum quadrato, quod ab intermedia sectionum, æquale est ei, quod à dimidia describitur, quadrato.

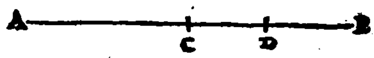


DIVIDATVR recta A B, bifariam in C, & per inæqualia in D, vt sectionum intermedia sit recta C D, qua nimirum dimidia C B, minus segmentum D B, superat, vel qua maius segmentũ A D, dimidium A C, excedit. Dico rectangulum sub segmentis inæqualibus A D, D B, comprehẽsum, vnà cum quadrato rectæ C D, quæ inter duas est sectiones, æquale esse quadrato dimidiæ C B. Describatur enim C F, quadratũ super dimidia C B; & ducta diametro B E, ducatur ex D, recta D G, parallela rectæ B F, secans diametrum B E, in H, puncto, per quod ducatur rectæ B C, parallela I K: Item ex A, rectæ C E, parallela A L, secans I K, productam in L. Erunt igitur per coroll. 1. præcedentis propos. D I, K G, quadrata, ideoque D H, recta rectæ D B, æqualis: a Est autem & K H, ipsi C D, æqualis. Quare rectangulum A H, comprehendetur sub A D, D B; & K G, erit quadratum rectæ C D. Probandum itaque est, rectangulum A H, vnà cum quadrato K G, æquale esse quadrato C F. Quoniam ergo b complementa C H, F H, æqualia sunt; si addatur commune quadratum D I, erit parallelogrammũ D F, parallelogrammo C I, æquale: c Est autẽ & A K, eidem C I, æquale, quòd & bases A C, C B, æquales sint. Igitur D F, A K, æqualia etiam inter se erũt: quibus si commune apponatur C H, erit gnomon M N O, rectangulo A H, æqualis. Quocirca cũm gnomon M N O, & quadratum K G, æqualia sint quadrato C F; erit & rectangulum A H, vnà cum quadrato K G, æquale eidem quadrato C F. Si recta ergo linea secetur in æqualia, & non æqualia, &c. Quod ostendendum erat.

a 34. primi.
b 43. primi.
c 36. primi.

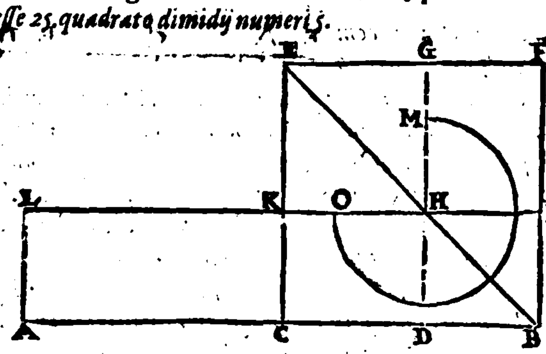
### SCHOLIVM.

ALITER hoc theorema cum Francisco Maurolyco demonstrabimus, eo modo, quo idem in numeris demonstratur à Barlaam Monacho. quod etiam cum eodem Maurolyco in sequentibus propositionibus vsque ad nonam exclusiuè faciemus. Demonstrationes autem has numeris accommodatas reperies ad proposit. 14. lib. 9.



*Ita ergo propositum exequemur. quia quadratum ex C B,[a] æquale est quadratis ex C D, D B, vnà cum rectangulo bis sub D B, C D; Rectangulo autem sub D B, C D, vnà cum quadrato ex D B, æquale est rectangulum sub D B, C B; Erit quadratum ex C B,[b] æquale reliquo quadrato ex C D, vnà cum reliquo rectangulo sub D B, C D, & rectangulo sub D B, C B, vel sub D B, A C. Atqui rectangulis sub D B, A C, & sub D B, C D,[c] æquale est rectangulum sub D B, & tota A D. Igitur quadratum ex C B, æquale erit quadrato ex C D, vnà cum rectangulo sub D B, A D; hoc est, rectangulum sub A D, D B, vnà cum quadrato ex C D, æquale erit quadrato ex C B. Quod erat demonstrandum.* a 4. secũdi. b 3. secũdi. c 1. secũdi.

*IDEM in numeris est manifestum. Diuidatur enim numerus 10. æqualiter in 5. & 5. Item inæqualiter in 7. & 3. ita vt medius numerus inter sectiones sit 2. quo videlicet dimidius numerus 5. superat minorem partem 3. &c. Vides igitur, numerum 21. ex 7. in 3. productum, vnà cum 4. quadrato intermedij numeri 2. æqualem esse 25. quadrato dimidij numeri 5.*



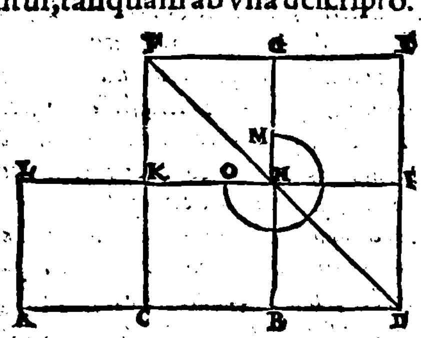
*Ex hac etiam proposit. 5. inueniemus alio modo numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoq; conficiat numerum. Nam si dato numero adijciatur 1. & à compositi numeri dimidio detrahatur 1. reliquum fiet latus quadrati quæsiti. Vt si datus numerus sit 15. Addita 1. fit 16. à cuius dimidio 8. si dematur 1. manet 7. latus quadrati 49. cum quo datus numerus 15. componit numerũ quadratum 64. cuius latus est 8. quod perpetuò est vna vnitate maius latere 7. quadrati inuenti. Ratio huius regulæ ex demonstratione propos. 5. difficilis non est. Cùm enim rectangulum A H, cum quadrato K G,[d] æquale sit quadrato C F; si rectangulum A H, ponatur 15. sicut numerus datus; at verò quadratum D I, statuatur 1. ac proinde latus D B, quoque 1. erit recta A D, 15. vt nimirum ex A D, in D B, gignatur 15. rectangulum videlicet A H. Addita ergo 1. erit tota linea A B. 16. à cuius dimidio 8. dempta 1. relinquetur C D, 7. latus nimirum quadrati K G.* d 5. secũdi.

*HIC quoque si fracti numeri vitandi sint, debet numerus datus esse impar, vt videlicet, addita 1. diuidi possit bifariam.*

*E contrariò reperiemus numerum quadratum, à quo si datus quiuis numerus subtrahatur, reliquus fiat numerus quoque quadratus. Nam si ad datum numerum adijciatur 1. erit dimidium compositi numeri latus quadrati quæsiti. Vt si rursum numerus 15. datus sit. Addita 1. erit compositi numeri dimidium 8. latus quadrati 64. quæsiti. Si enim demas datum numerum 15. reliquus fiet quadratus numerus 49. cuius latus 7. perpetuò minus est vna vnitate, quàm latus quadrati inuenti. Ratio huius rei perspicua quoque est ex eadem figura huius propos. 5. Nam si rectangulum A H, quod ex quadrato C F, ablatũ relinquit quadratum K G, statuatur 15. sicut datus numerus; & quadratum D I, ponatur 1. atque adeò & D B, eius latus 1. erit tota A B, 16. & eius dimidium C B, 8. &c.*

## THEOR. 6. PROPOS. 6. 6.

SI recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adiiciatur: Rectangulum comprehensum sub tota cum adiecta, & adiecta vnà cum quadrato à dimidia, æquale est quadrato à linea, quæ tum ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tanquam ab vna descripto.



SECETVR recta A B, bifariam in C, & ei in rectum addatur B D. Dico rectangulum comprehensum sub tota composita A D, & D B, adiecta, vnà cum quadrato dimidiæ C B, æquale esse quadrato lineæ C D, quæ ex dimidia C B, & adiecta B D, componitur. Describatur namque C E, quadratum super C D, & ducta diametro D F, ducatur ex B, recta B G, parallela rectæ D E, secans diametrum D F, in H, puncto, per quod agatur I K, parallela rectæ C D: Item ex A, ducatur rectæ C F, parallela A L, secans I K, productum in L. Erũt igitur per corollar. 1. propos. 4. huius lib. B I, K G, quadrata, ideoq; recta D I, rectæ D B, æqualis:[a] Est autem & K H, rectæ C B, æqualis. Quare rectangulum A I, comprehendetur sub rectis A D, D B; & K G, erit quadratum rectæ C B. Probandum itaque est, rectangulum A I, vnà cum quadrato K G, æquale esse quadrato C E. Quoniam ergo parallelogrammum A K,[b] æquale est parallelogrãmo C H, quòd bases A C, C B, æquales sint:[c] Est autem & parallelogrammum H E, eidem C H, æquale, complementũ complemento; erunt A K, H E, æqualia inter se. Addito ergo communi C I, erit rectangulum A I, gnomoni M N O, æquale. Quo- a 34. primi. b 36. primi. c 43. primi.

circa cùm gnomon M N O, & quadratum K G, quadrato C E, sint æqualia: erit & rectangulum A I, vnà cum eodem quadrato K G, eidem quadrato C E, æquale. Itaque si recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adiiciatur, &c. Quod erat demonstrandum.

### SCHOLIVM.


a 4. secũdi. *ALITER. Quia quadratũ ex C D,[a] æquale est quadratis ex C B, B D, vnà cũ rectangulo bis sub D B, C B, hoc est, quadratis ex C B, B D, vnà cũ rectangulis sub B D, C B, & sub D B, A C: (sumpta A C, semel pro C B, quæ illi æqualis ponitur.) Est autem rectangulis sub D B, A C: D B, C B: & sub* b 1. secũdi. *D B, D B, (quod est quadratum ex D B,)[b] æquale rectangulum sub D B, & tota A D. Igitur quadratum ex C D, æquale est reliquo quadrato ex C B, vnà cum rectangulo sub D B, A D: Hoc est, rectangulum sub A D, D B, vnà cum quadrato ex C B, æquale est quadrato ex C D. Quod demonstrandum erat.*


*CAETERVM si rem attentiùs considerare velimus, comperiemus propositionem hanc 6. per præcedentem 5. facillimè posse demonstrari: id quod etiam eruditus vir, & in omni doctrinarum genere exercitatissimus, Mauricius Brescius Gratianopolitanus, Regius olim Mathematicarum disciplinarum in Academia Parisiensi Professor, animaduertit. Sit enim recta A B, secta in C, bifariam, & ei addita recta quantacunque B D. Dico rectangulum comprehensum sub tota A D, composita, & adiecta B D, vnà cũ quadrato dimidiæ C B, æquale esse quadrato rectæ C D, ex dimidia, & adiecta composita. Addita namque recta A D, ex altera parte rectæ A E, quæ adiectæ B D, æqualis sit, erit tota E D, secta in C, æqualiter, & in B,* c 5. secũdi. *inæqualiter, quòd E A, A C, ipsis D B, B C, æquales sint. Recta quoque E B, rectæ A D, æqualis erit, quòd E A, ipsi D B, sit æqualis, & A B, vtrique communis.[c] Rectangulum igitur sub partibus inæqualibus E B, B D, vnà cum quadrato intermediæ sectionis C B, hoc est, rectangulum sub A D, B D, vnà cum quadrato dimidiæ C B, æquale erit quadrato dimidiæ C D, hoc est, quadrato rectæ ex dimidia C B, data recta A B, & ex adiecta B D, composita. Quod est propositum.*

*SECETVR iam numerus 10. bifariã, (vt & hoc theorema numeris accõmodemus.) in 5. & 5. addaturq; ei numerus 2. Vides igitur numerũ 24. qui producitur ex toto numero cõposito 12. in adiectum 2. vnà cum 25. quadrato dimidij numeri, æquale esse 49. quadrato huius numeri 7. qui ex dimidio 5. & adiecto 2. cõponitur.*

*EX hoc porrò theoremate colligitur proprietas insignis Arithmeticæ proportionalitatis, quæ consistit in eodem semper excessu quantitatum proportionalium. Cùm enim A D, superet C D, magnitudine A C, hoc est, C B, & C D, superet B D, eadem magnitudine C B: habebunt tres lineæ A D, C D, B D, proportionalitatem Arithmeticam quandoquidem prima A D, superat secundam C D, eodẽ excessu A C, siue C B, quo secunda C D, tertiam B D, superat. Quare cùm ostensum sit, rectangulum sub extremis A D, B D, vnà cũ quadrato excessus C B, æquale esse quadrato lineæ mediæ C D; perspicuè colligitur, in omni proportionalitate Arithmetica trium linearũ, rectangulum sub extremis contentum, vnà cum quadrato excessus, æquale esse quadrato lineæ mediæ. Semper enim tres lineæ Arithmeticè proportionales ita inter se coniungi poterunt, vt efficiant vnam lineam bifariam diuisam, (quæ nimirum æqualis sit excessui inter primã & tertiam) cui tertia, siue minor addita sit in rectum, mediaq; composita sit ex dimidio excessu inter primam & tertiam, & ex tertia. Vt patet, si tres rectæ sint datæ A D, C D, B D. Si namq; ex prima A D, abscindatur D C, æqualis mediæ, & ex media hac D C, auferatur tertia D B, erit A B, (excessus inter primam & tertiam) secta bifariam in C, eiq; addita tertia B D. Cùm enim C B, excessus sit inter mediam C D, & tertiam B D, qui æqualis esse debet, ob proportionalitatem Arithmeticam, ipsi A C, nempe excessui inter primam A D, & mediam C D, erit necessariò A B, secta in C, bifariam. Eademq; ratio est in alijs. Quod idem in numeris cernitur, qui eundem habent excessum. In numeris enim 4. 7. 10. eundem excessum 3. habentibus, numerus 40. productus ab extremis 4. 10. vnà cum 9. quadrato excessus 3. æqualis est quadrato numero 49. qui ex medio numero 7. procreatur.*

*EX hac etiam propos. 6. reperiemus, vt ex 4. propos. numerum quadratũ, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoq; numerũ componat. Nam si ex dato numero dematur 1. & reliquus numerus bifariam secetur, erit quadratus huius dimidij is, qui quæritur. Vt si datus numerus sit 15. Dempta 1. relinquitur 14. cuius dimidium 7. dabit numerum quadratũ 49. quæsitum. Nam 15. cũ 49. facit quadratũ numerum 64. cuius latus 8, vna vnitate maius est latere 7. quadrati inuenti. Huius rei ratio manifesta est ex hac 6. propos. Cùm enim* d 6. secũdi. *rectangulum A I, cum quadrato G K,[d] æquale sit quadrato C E; si rectangulum A I. statuatur 15. at quadratum B I, 1. ideoq; & latus B D, 1. erit tota linea A D, 15. vt nimirum multiplicata in B D, 1. producat rectangulum A I, 15. Ablata igitur 1. B D, remanet A B, 14. cuius dimidium 7. dabit C B, latus quadrati K G, quæsiti.*

*NECESSE autem etiam hic est, datum numerum esse imparem, vt fracti numeri vitentur, vt videlicet dempta 1. bifariam possit diuidi.*

*VERSA vice inueniemus numerũ quadratũ, à quo datus numerus detractus quadratũ etiam numerum relinquat. Si enim ex dato numero tollatur 1. & reliqui numeri dimidio adiiciatur rursus 1. conficietur latus quadrati quæsiti. Vt si datus sit numerus 15. Dempta 1. erit 7. dimidium reliqui numeri 14. additaq; 1. fiet latus quadrati quæsiti 8. Nam si ex eius quadrato 64. subducas datum numerum 15. reliquus erit quadratus numerus 49. cuius latus 7. semper vna vnitate minus est latere inuento 8. Ratio est, quia si rectangulum A I, quod*

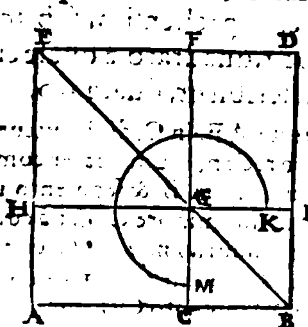
ex qua-

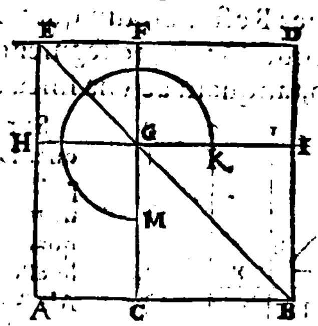
*ex quadrato C E, subtractum relinquit quadratum K G, statuatur 15. at quadratum B I, ideoq; & B D, eius latus 1. erit tota linea A D, 15. vt dictum est. Dempta ergo 1. B D, erit A B, 14. cuius dimidio C B, quod est 7. si rursus apponatur 1. fiet latus C D, 8. quod quæritur, &c.*

## THEOR. 7. PROPOS. 7.

7.

SI recta linea secetur vtcunque; Quod à tota, quodque ab vno segmentorum, vtraque simul quadrata, æqualia sunt & illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à reliquo segmento fit, quadrato.




SECETVR recta A B, vtcunque in C. Dico quadratũ totius A B, & quadratum segmẽti siue maioris, siue minoris A C, æqualia esse rectangulo bis comprehẽso sub tota A B, & dicto segmento A C, vnà cum quadrato reliqui segmenti C B. Describatur enim super A B, quadratum A D; & ducta diametro B E, ducatur ex C, recta C F, parallela rectæ A E, secans diametrum in puncto G, per quod agatur H I, parallela rectæ A B. Erunt igitur per corollarium 1. propos. 4. huius lib. C I, H F, quadrata: & quia recta G H,[a] æqualis est rectæ A C, erit H F, quadratum segmenti A C. Rursus quia A E, æqualis est ipsi A B, erit rectangulum A F, comprehensum sub tota A B, & segmento A C. Eadem ratione, rectangulum H D, comprehensum erit sub eisdem rectis A B, A C, quod rectæ D E, E H, æquales sint rectis A B, A C, ob quadrata A D, F H. Quoniam igitur rectangulis A F, F I, vnà cum quadrato C I, hoc est, gnomoni K L M, vnà cum quadrato C I, æquale est quadratum A D; si apponatur commune quadratum H F, erunt quadrata A D, H F, æqualia rectangulis A F, D H, (quorum quodlibet comprehenditur sub tota A B, & segmento A C,) vnà cũ C I, quadrato reliqui segmenti C B. Si igitur recta linea secetur vtcunque, &c. Quod erat demonstrandum.

a 34. primi.

### SCHOLIVM.


*ALITER. Quia quadratum ex A B,[a] æquale est quadratis ex A C, C B, vnà cum rectangulo bis sub A C, C B; si addatur commune quadratum ex A C, erunt quadrata ex A B, A C, æqualia quadrato ex A C, bis, & quadrato ex C B, vnà cum rectangulo bis sub A C, C B. Sed rectangulo sub A C, C B, vnà cum quadrato ex A C,[b] æquale est rectangulum sub A B, A C: Et proinde rectangulo bis sub A C, C B, vnà cum quadrato ex A C, bis, æquale est rectangulum sub A B, A C, bis. Igitur quadrata ex A B, A C, æqualia sunt reliquo quadrato ex C B, vnà cum rectangulo bis sub A B, A C. Quod demonstrandum erat.*

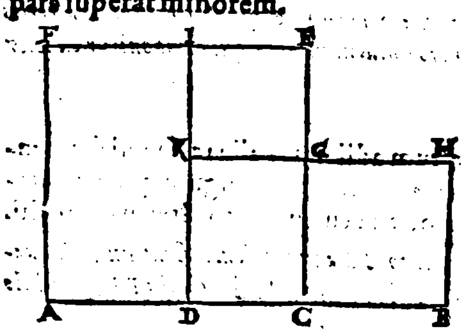
a 4. secundi.

b 3. secundi.

*IN numeris autem diuidatur numerus 10. vtcunque in 6. & 4. Igitur 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 36. quadratus numerus partis 6. æquales sunt numero 120. qui fit bis ex toto 10. in partem 6. vnà cum 16. quadrato numero alterius partis 4. vt constat. Sic etiam 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 16. quadratus numerus partis 4. æquales sunt numero 80. qui bis fit ex toto 10. in partem 4. vnà cum 36. quadrato numero alterius partis 6.*

### EX FEDERICO COMMANDINO.

SI recta linea in partes inæquales secetur: Earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur, vnà cum quadrato eius lineæ, qua maior pars superat minorem.




*SECETVR recta A B, in partes inæquales A C, C B, sitq; maior pars A C; ponatur autẽ minori parti C B, æqualis linea A D, vt D C, sit excessus, quo pars A C, superat partem C B. Dico quadrata partium A C, C B, æqualia esse rectangulo, quod bis continetur sub A C, C B, vnà cum quadrato lineæ D C. Constituantur enim quadrata A E, C H, & agatur D I, ipsi C E, parallela, producaturq; H G, ad K. Itaq; quoniam A D, ipsi C B, est æqualis, addita communi D C, erit tota A C, hoc est, C E, toti D B, æqualis; Est autẽ & C G, ipsi C B, æqualis, quod quadratum sit C H. Igitur & reliqua G E, reliquæ D C, æqualis erit: Ac proinde, cum & I E, ipsi D C, sit æqualis, erunt G E, I E, æquales: ideoque I G, quadratum erit ab excessu D C, descriptum. Quoniam verò rectangula A I, D H, continentur sub partibus A C, C B, (Est enim A C, vtrique lineæ A F, D B, & C B, vtrique A D, B H, æqualis) manifestum est, qua-*

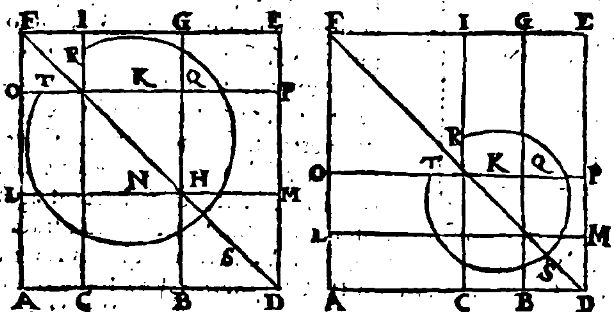
drata A E, C H, partium A C, C B, æqualia esse rectangulis A I, D H, quæ continentur sub partibus A C, C B, vnà cum quadrato I G, excessus D C. Quod est propositum.

*SCHOLIVM.*

*In numeris. Secetur numerus 10. inæqualiter in 4. & 6. ita vt maior pars superet minorem numero 2. Vides igitur numeros 16. 36. quadratos partium, qui efficiunt 52. æquales esse numero 24. qui ex 4. in 6. fit, bis sumpto, vnà cum 4. quadrato excessus 2. vt volebat theorema.*

## 8. THEOR. 8. PROPOS. 8.

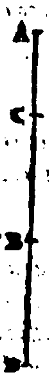
SI recta linea secetur vtcunque; Rectangulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorum, cum eo, quod à reliquo segmento fit, quadrato, æquale est ei, quod à tota, & dicto segmento, tanquam ab vna linea describitur, quadrato.




SIT recta AB, in C, diuisa vtcunque. Dico rectangulum quater comprehensum sub A B, & segmento siue maiore, siue minore C B, vnà cum quadrato reliqui segmenti A C, æquale esse quadrato lineæ, quæ ex recta AB, & dicto segmento C B, componitur. Producatur enim A B, versus dictum segmẽtum C B, ad D. sitq; B D, recta æqualis segmento C B; & super tota A D, quadratum describatur A E. Ducta autem diametro D F, ducantur B G, C I, parallelæ ipsi D E, secantes diametrum in H, K, punctis, per quæ ducantur L M, O P, parallelæ ipsi A D, quæ secent priores parallelas in N, Q. Erunt igitur per corollarium 1, propos. 4. huius lib. O I, N Q, B M, L G, C P, circa diametrũ D F, quadrata. Et quia O K, [a] æqualis est rectæ A C, erit O I, quadratum segmẽti A C. Rursus [b] quia N H, æqualis est rectæ C B, erit N Q, quadratum segmenti C B, ideoq; quadrato B M, æquale, cùm rectæ C B, B D, æquales sint. Quare rectæ B H, H Q, æquales sunt segmento C B, atque adeò duo rectangula A H, L Q, comprehensa erunt sub A B, & segmento C B, [c] cùm L H, sit æqualis rectæ A B. Eadem ratione erunt duo rectangula N G, H E, comprehẽsa sub A B, & C B, cum N H, H M, rectæ [d] æquales sint rectis C B, B D; & rectæ G H, E M, rectæ F L, hoc est, rectæ L H, hoc est, rectæ A B. Et quia quadrata N Q, B M, æqualia sunt; si addatur commune K G, erũt B M, K G, simul æqualia rectangulo N G. Quapropter quinque rectangula A H, L Q, H E, B M, & K G, gnomonem R S T, componentia, æqualia sunt rectangulo quater comprehenso sub recta A B, & segmento C B. Cùm igitur gnomon R S T, & quadratum O I, æqualia sint quadrato A E; erit rectangulum quater comprehensum sub data recta A B, & segmento C B, vnà cum quadrato reliqui segmẽti A C, æquale quadrato lineæ A D, compositæ ex A B, & dicto segmento C B. Quamobrem, si recta linea secetur vtcunque, &c. Quod demonstrandum erat.

a 34. primi.
b 34. primi.
c 34. primi.
d 34. primi.

*SCHOLIVM.*




*ALITER. Quia quadratum ex A D, [a] æquale est quadratis ex A B, B D, vnà cum rectangulo bis sub A B, B D, hoc est, quadratis ex A B, B C, vnà cum rectangulo bis sub A B, B C: At quadrata ex A B, B C, [b] æqualia sunt rectangulo bis sub A B, B C, vnà cum quadrato ex A C; Erit quadratum ex A D, æquale rectangulo quater sub A B, B C, vnà cum quadrato ex A C. Quod demonstrandum erat.*

a 4. secũdi.
b 7. secũdi.

*SECETVR iam numerus 10. vtcunque in 6. & 4. Numerus igitur 240. qui quater fit ex toto 10. in partem 6. vnà cum 16. quadrato numero alterius partis 4. hoc est, numerus 256. æqualis est numero quadrato huius numeri 16. qui componitur ex dato numero 10. & dicta parte 6. vt constat. Eodem modo, numerus 160. qui fit quater ex 10. toto, in partem 4. vnà cum 36. quadrato numero alterius partis 6. hoc est, numerus 196. æqualis est quadrato numero huius numeri 14. qui componitur ex 10. & 4. vt perspicuum est.*

*POTEST propositio hæc 8. ita etiam proponi.*

Si linea recta secetur vtcunque, eique in rectum adiiciatur alia recta vni segmentorum æqualis: Quadratum totius lineæ compositæ æquale est rectangulo quater comprehenso sub data linea, & adiecta siue dicto segmento, vnà cũ quadrato alterius segmẽti.

*NAM recta A B, secta est in C, vtcunq;, eiq; addita B D, segmento C B, æqualis, demonstratumq; est, quadratum totius A D, æquale esse rectangulo quater comprehenso sub data linea A B, & adiecta B D, siue dicto segmento C B, vnà cum quadrato alterius segmenti A C.*

*Item sic.*

Si linea recta secetur bifariam, eiq; in rectum adiiciatur recta alia quantacunque: Quadratum

dratum totius compositæ lineæ æquale est rectangulo quater comprehenso sub linea composita ex dimidia, & adiecta, & sub dimidia, vnà cum quadrato adiectæ.

*Nam recta D C, secta est bifariam in E, eiq; addita C A, probatumq; fuit, quadratum totius A D, æquale esse rectangulo quater comprehenso sub A B, cōposita ex B C, dimidia, & adiecta A C, & sub dimidia C B, vnà cum quadrato adiectæ A C.*

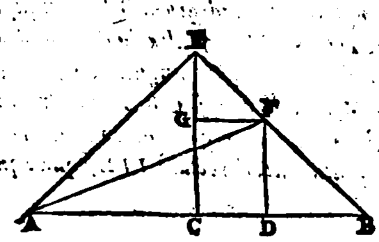
*Iam verò ex hac quoque propositione 8. inueniemus alia ratione numerum quadratum, cum quo datus quilibet numerus conficiat numerum similiter quadratum. Nam si ex quarta parte numeri dati dematur 1. reliquum erit latus quadrati quæsiti. Vt si datus numerus sit 32. Tollatur 1. ex eius quarta parte 8. Reliquus enim numerus 7. dabit quadratum 49. cum quò datus numerus 32. efficit quadratum 81. Cuius latus 9. est semper vna vnitate maius quarta parte dati numeri. Facilis est huiusce rei ratio. Quoniam enim rectangulum A H, quater sumptum, cum quadrato O I, [a] æquale est quadrato A E; si rectangulum A H, ponatur 8. nempe quarta pars dati numeri, at verò quadratum C H, adeoq; & C B, eius latus, 1. erit linea A B, 8. vt ducta in C B, 1. faciat 8. Ablata ergo 1. reliquum erit A C, latus quadrati O I, 7. quod quæritur.* a 8. secūdi.

*Vt autem fractiones vitentur, necesse est, datum numerum diuidi posse in quatuor partes æquales, ita vt à 4. numeretur.*

*Contra, inueniemus quoque numerum quadratum, à quo datus numerus subtractus relinquat numerum etiam quadratum. Si namque ad quartam partem numeri dati addatur 1. constituetur latus quadrati quæsiti. Vt si datus rursum sit numerus 32. si ad quartam eius partem 8. adiiciatur 1. fiet latus 9. à cuius quadrato 81. si detrahatur datus numerus 32. remanebit quadratus numerus 49. cuius latus 7. semper est vna vnitate minus quarta parte dati numeri. Ratio est, quia si quarta pars gnomonis R S T, qui ex quadrato A E, sublatus relinquit quadratum O I, hoc est, si rectangulum A H, quod gnomonis R S T, quartam partem esse demonstrauimus, statuatur 8. quarta pars dati numeri 32. at quadratū B M, ideoq; & latus eius B D, 1. erit linea A B. 8. vt dictum est, ac proinde totum latus A D, 9. ex cuius quadrato A E, quod est, 81. si auferatur gnomon R S T, quem posuimus esse 32. reliquum fiet quadratum O I, 49. cuius latus A C, est 7. quandoquidem A B, erat 8. & C B, hoc est, B D, illi æqualis, 1. quod quidem latus A C, perpetuò vna vnitate minus est quarta parte numeri dati 32. vt dictum est.*

## THEOR. 9. PROPOS. 9.

SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, simul duplicia sunt, & eius, quod à dimidia, & eius, quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.




SECETVR recta A B, bifariam in C, & non bifariam in D. Dico, quadrata segmentorum inæqualium A D, D B, simul dupla esse quadratorum simul, quæ fiunt ex dimidia A C, & ex intermedia sectionum C D. Educatur enim ex C, ad A B, perpēdicularis C E, quæ sit æqualis dimidiæ A C, vel C B, ducanturque rectæ E A, E B. Deinde ex D, ducatur quoque ad A B, perpendicularis D F, secans E B, in puncto F, p quod ducatur F G, parallela ipsi A B, secans C E, in G, ducaturq; tandem A F. Quoniā igitur in triangulo A C E, latera C A, C E, æqualia sunt; [a] erunt anguli C A E, C E A, æquales: Est autem angulus A C E, rectus: Reliqui igitur [b] anguli alium rectum conficient, ideoq; A E C, semirectus erit. Eadem ratione angulus B E C, semirectus erit; ac propterea totus A E B, rectus. Rursus, quia trianguli F G E, angulus E G F, [c] æqualis est recto E C B, externus interno; [d] erunt reliqui duo anguli vni recto æquales. Ostensum autem est, angulum F E G, esse semirectum. Igitur & E F G, semirectus erit, proptereaque anguli E F G, F E G, æquales erunt, [e] ideoque & latera E G, G F, æqualia inter se. Eodem modo ostendetur, in triangulo B D F, latera B D, D F, esse æqualia. Nam angulus F D B, est rectus, & B, semirectus, &c. Itaque cum in triangulo A C E, angulus C, rectus sit, [f] erit quadratum lateris A E, æquale duobus quadratis laterum A C, C E: Atqui hæc duo quadrata inter se sunt æqualia, quòd & lineæ A C, C E, æquales sint. Igitur quadratum lateris A E, duplum erit quadrati lateris A C. Rursus quia in triangulo E G F, angulus G, rectus est, [g] erit quadratum lateris E F, æquale duobus quadratis laterum E G, G F: At duo hæc quadrata inter se æqualia sunt, ob æqualitatē linearum E G, G F. Igitur quadratum lateris E F, duplum erit quadrati lateris F G, hoc est, quadrati lineæ C D. Est enim C D, [h] recta rectæ F G, æqualis; cùm C F, sit parallelogrammum. Quare duo quadrata rectarū A E, E F, dupla sunt duorum quadratorum linearū rectarum A C, C D: Sunt autem duo quadrata rectarum A E, E F, [i] æqualia quadrato rectæ A F; & quadratum rectæ A F, æquale duobus quadratis rectarum A D, D F. Igitur & duo quadrata rectarum A D, D F, dupla sunt duorum quadratorum rectarum A C, C D: Atqui quadratum rectę D F, æquale est quadrato rectę D B. Ostensum

a 5. primi.
b 32. primi.
c 29. primi.
d 32. primi.
e 6. primi.
f 47. primi.
g 47. primi.
h 34. primi.
i 47. primi.

enim est, rectas D F, D B, esse æquales. Quare duo quoque quadrata rectarum A D, D B, segmentorum inæqualium dupla sunt quadratorum rectarum A C, C D, dimidiæ lineæ, & intermediæ sectionum. Si ergo recta linea secetur in æqualia; & non æqualia, &c. Quod erat demonstrandum.

*SCHOLIVM.*

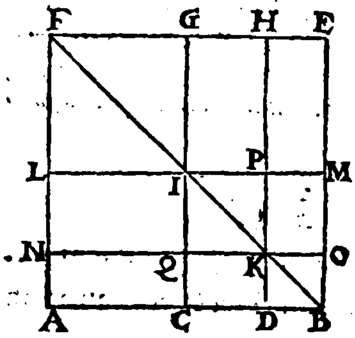
a 4. secũdi. *ALITER. Quia quadratum ex linea recta A D, descriptum,*[a] *æquale est quadratis descriptis ex A C, C D, vnà cum parallelogrammo rectangulo bis sub rectis A C, C D, comprehenso; si commune apponatur quadratum ex D B, erunt duo quadrata ex A D, D B, æqualia tribus quadratis ex A C, C D, D B, vnà cum rectangulo bis sub A C, C D, vel sub B C, C D; Atqui quadrato ex D B, vnà cum rectangulo bis sub B C, C D,*[b] *æqualia sunt quadrata ex B C, seu A C, & ex C D. Quadrata igitur ex A D, D B, æqualia sunt bis quadratis ex A C, C D: Ac propterea quadrata ex A D, D B, dupla sunt quadratorum ex A C, C D. Quod ostendendum erat.*

b 7. secũdi.

*ALITER ex Federico Commandino. Quoniam A C, ipsi C B, æqualis est, & superat C B, ipsam C D, recta D B; superabit quoque A C, ipsam C D, eadem recta D B. Quare, vt ad 7. propos. huius libri demonstrauimus, quadrata rectarũ A C, C D, æqualia sunt rectangulo sub A C, C D, bis, vnà cum quadrato rectæ D B; Ac propterea quadrata rectarum A C, C D, & rectangulum sub A C, C D, bis, vnà cum quadrato rectæ D B, dupla sunt quadratorũ ex A C, C D: Sed quadratis rectarum A C, C D, vnà cum rectangulo sub A C, C D, bis*[c] *est æquale quadratum rectæ A D. Igitur & quadrata rectarum A D, D B, dupla sunt quadratorum ex A C, C D.*

c 4. secũdi.

*IAM verò rursus numerus 10. diuidatur æqualiter in 5. & 5. Itẽ inæqualiter in 7. & 3. vt sit intermedia sectio numerus 2. ceu in propos. 5. est dictum. Quadrati numeri igitur 49. & 9. partium inæqualium 7. & 3, dupli sunt quadratorum 25. & 4. dimidij numeri 5. & numeri 2. inter duas sectiones, vt manifestum est.*



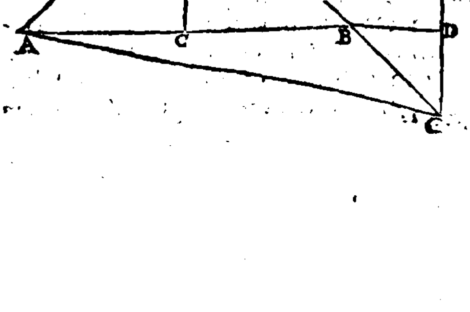

*QVOD si lubeat, demonstrabimus & hanc 9. proposit. ex ipsa constructione, vt precedentes, hoc modo. Descripto quadrato A E, totius lineæ A B, ductaq; diametro B F, ducantur per C, D, lateribus A F, B E, parallelæ C G, D H, secantes diametrum B F, in punctis I, K, per quæ lateribus A B, F E, parallelæ agantur L M, N O, secantes C G, D H, in Q, P. Quoniam igitur ex coroll. 1. propos. 4. huius libri quadrata sunt L G, Q P, D O, C M, N H,*[d] *estq; L I, ipsi A C, & Q K, ipsi C D, & N K, ipsi A D, æqualis; erũt N H, D O, quadrata partium inæqualium A D, D B, & L G, Q P, quadrata dimidiatæ lineæ A C, & intermediæ sectionis C D. Dico illa horum esse dupla. Quoniam enim quadrata N H, D O, superant quadrata L G, Q P, quadrato D O, & rectangulis N I, I H: Sunt autem quadratum D O, & rectangula N I, I H, æqualia quadratis L G, Q P, vt mox demonstrabitur: liquidò constat, quadrata N H, D O, quadratorum L G, Q P, esse dupla, cùm hæc bis in illis contineantur. Quòd autem tria hæc rectangula D O, N I, I H, æqualia sint quadratis L G, Q P, ita ostendetur. Rectangulum N I,*[e] *æquale est rectangulo Q M, quòd rectæ N Q, Q O,*[f] *æquales sint æqualibus A C, C B. Igitur N I, complectitur quadratum Q P, & insuper K M. Si ergo K M, D O, I H, æqualia sint quadrato L G, erunt necessariò D O, N I, I H, æqualia duobus quadratis L G, Q P. Esse autem K M, D O, I H, æqualia quadrato L G, sic demonstrabimus.*[g] *Rectangula K M, D O, simul æqualia sunt ipsi P E, quòd rectæ B M, M E, æquales sint, cùm B M, æqualis sit ipsi C B, ob quadratum C M,*[h] *& M E, ipsi F L, hoc est, ipsi L I, ob quadratum L G, hoc est,*[i] *ipsi A C. Addito ergo communi I H, erunt K M, D O, I H, æqualia ipsi I E, hoc est, quadrato L G;*[k] *quod I E, L G, æqualia sint, ob rectas L I, I M,*[l] *quæ æqualibus A C, C B, æquales sunt. Quod est propositum.*

d 34. primi.
e 36. primi.
f 34. primi.
g 36. primi.
h 34. primi.
i 34. primi.
k 36. primi.
l 34. primi.

## THEOR. 10. PROPOS. 10.

10.

SI recta linea secetur bifariam, adiiciatur autem ei in rectum quæpiam recta linea: Quod à tota cum adiuncta, & quod ab adiuncta, vtraque simul quadrata, duplicia sunt & eius, quod à dimidia, & eius, quod à composita ex dimidia & adiuncta, tanquam ab vna, descriptum sit, quadrati.




SECETVR recta A B, bifariam in C, & ei in rectum addatur B D. Dico duo quadrata rectarum A D, B D, simul dupla esse quadratorum simul, quæ ex rectis A C, C D, describuntur. Super A B, enim ex C, erigatur perpendicularis C E, quæ sit æqualis dimidiæ A C, vel C B, & iungantur rectæ A E, E B. Per D, deinde educatur D F, ipsi C E, parallela, occurrens rectæ E B, protractæ in G; & per E, ducatur rectæ C D, parallela E F, secans D F, in F, iungaturque recta A G. Ostendetur iam, angulum A E B, esse rectum, vt in præcedenti propositione, & C E B, semirectum;[a] ideoque eius alternum

a 29. primi.

E G F,

E G F, semirectum quoq;: [a] Est autẽ angulus F, rectus, cùm in parallelogrammo C F, recto angulo C, opponatur. [b] Igitur & reliquus F E G, semirectus erit, & propterea ipsi E G F, æqualis. Quare [c] rectæ E F, F G, angulis F E G, E G F, oppositæ, æquales quoq; erunt. Eadem arte ostendes, rectas B D, D G, esse æquales, propterea ꝙ angulus B D G, sit rectus, & B G D, semirectus, &c. Quoniam igitur quadratum rectæ A E, [d] æquale est quadratis æqualibus rectarum æqualium A C, C E; erit quadratum rectæ A E, duplum quadrati rectæ A C. Rursus quia quadratum rectæ E G, [e] quadratis æqualibus rectarum æqualium E F, F G, æquale est; erit quoq; quadratum rectæ E G, duplum quadrati rectæ E F, hoc est, rectæ C D, [f] cùm C D, recta æqualis sit rectæ E F. Duo igitur quadrata rectarum A E, E G, dupla sunt quadratorum ex rectis A C, C D, descriptorum. Atqui duobus quadratis rectarum A E, E G, æquale est [g] quadratũ rectæ lineæ A G; & quadrato rectæ A G, æqualia sunt duo quadrata, quæ ex duabus lineis rectis A D, D G, describũtur. Quadrata ergo rectarũ A D, D G, dupla sunt quadratorum ex rectis A C, C D, descriptorũ. Cùm igitur quadratum rectæ D G, æquale sit quadrato rectæ B D; erunt quoq; quadrata rectarum A D, D B, dupla quadratorũ, quæ ex rectis A C, C D, describuntur. Itaque si recta linea secetur bifariam, &c. Quod ostendendũ erat.

a 34. primi. b 32. primi. c 6. primi. d 47. primi. e 47. primi. f 34. primi. g 47. primi.

## SCHOLIVM.

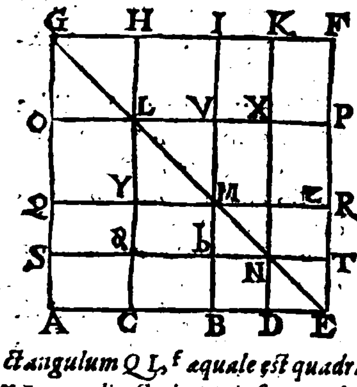

*ALITER. Quia quadratum ex A D, [a] æquale est quadratis ex A C, C D, vnà cum rectangulo bis sub A C, C D, vel sub B C, C D; si commune addatur quadratum ex B D, erunt duo quadrata ex A D, B D, æqualia tribus quadratis ex A C, C D, B D, vnà cum rectangulo bis sub B C, C D. [b] Sed quadrato ex B D, vnà cum rectangulo bis sub B C, C D, æqualia sunt quadrata ex C D, B C, hoc est, quadrata ex A C, C D. Igitur quadrata ex A D, B D, æqualia sunt quadratis ex A C, C D, bis; Ac proinde quadrata ex A D, B D, dupla sunt quadratorum ex A C, C D; Quod erat demonstrandum.* (a 4. secũdi. b 7. secũdi.)

*ALITER ex Federico Commandino. Quoniam A C, ipsi C B, est æqualis, & superat C D, ipsam C B, recta B D; superabit quoq; C D, ipsam A C, eadem recta B D. Quare, vt ad 7. propos. huius libri ostendimus, quadrata ex A C, C D, æqualia sunt rectangulo sub A C, C D, bis, vnà cum quadrato rectæ B D; Ac propterea quadrata rectarum A C, C D, & rectangulum sub A C, C D, bis, vnà cum quadrato rectæ B D, dupla sunt quadratorum ex A C, C D: Atqui quadratis rectarum A C, C D, vnà cum rectangulo sub A C, C D, bis, [c] æquale est quadratũ rectæ A D. Igitur & quadrata rectarum A D, B D, dupla sunt quadratorum ex A C, C D.* (c 4. secũdi.)

*NVMERVS 10. bifariam secetur in 5. & 5. cui addatur numerus quiuis 3. vt totus numerus compositus sit 13. Quadrati igitur numeri 169. & 9. horum numerorũ 13. & 3. dupli sunt numerorũ quadratorum 25. & 64. qui ex his numeris 5. & 8. gignuntur, vt perspicuum est.*

*SED & hæc propos. 10. facile ex præcedente 9. demonstrabitur, quemadmodum suprà demonstrata fuit 6. ex 5. Sit enim recta A B, secta bifariam in C, eiq; addita recta quantacunque B D. Dico duo quadrata rectarum A D, B D, simul dupla esse duorũ quadratorum rectarum A C, C D; simul. Addita namque rectæ A D, ad partes A, recta A E, quæ adiectæ B D, æqualis sit; erit tota E D, secta in C, bifariam, & in B, non bifariam, quòd E A, A C, ipsis D B, B C, æquales sint. Recta quoq; E B, rectæ A D, æqualis erit, quòd E A, ipsi D B, sit æqualis, & A B, vtrique communis. [d] Quadrata igitur rectarum E B, B D, hoc est, rectarum A D, B D, dupla erũt quadratorum rectarum E C, C B, hoc est, rectarum C D, A C, quod est propositum.* (d 9. secũdi.)

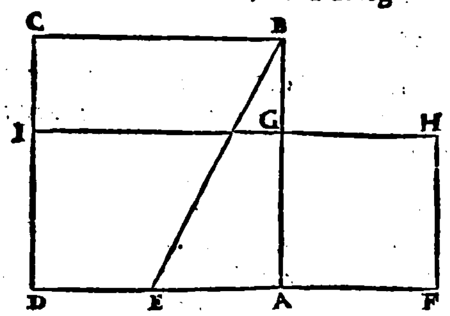

*QVOD si lubeat eandem hæc propositionem 10. demonstrare ex ipsa constructione, quemadmodum præcedentem 9. ostendimus, fiet id hoc modo. Producta A D, ad E, vt D E, sit adiectæ lineæ B D, æqualis, descriptóque quadrato A F, totius lineæ A E, ducantur per C, B, D, lateribus A G, E F, parallelæ C H, B I, D K, secantes dictam diametrum E G, in L, M, N, punctis, per quæ lateribus A E, G F, parallelæ agantur O P, Q R, S T. secantes priores in V, X, Y, Z, a, b. Quoniam igitur ex corollario 1. propos. 4. huius libri omnia rectangula circa diametrum E G, quadrata sunt, [e] estq; S N, ipsi A D, æqualis, & O L, ipsi A C, & a N, ipsi C D; erit S K, quadratum rectæ A D, & D T, quadratum rectæ D E, siue B D, & O H, a X, quadrata rectarum A C, C D. Dico quadrata S K, D T, simul dupla esse quadratorum O H, a X, simul. Quoniam enim quadrata S K, D T, superãt quadrata O H, a X, quadrato D T, & rectangulis S L, L K: Sunt autem quadratum D T, & rectangula S L, L K, æqualia quadratis O H, a X, vt mox demonstrabitur; liquidò constat, quadrata S K, D T, quadratorum O H, a X, dupla esse, cùm hæc in illis contineantur bis. Quòd autem tria hæc rectangula D T, S L, L K, quadratis O H, a X, æqualia sint, ita patebit. Rectangulum Q L, [f] æquale est quadrato O H, ob lineas Q O, O G, quæ æquales sunt; [g] propterea quòd Q O, ipsi Y L, æqualis est, & Y L, ipsi O G, ob æqualia quadrata Y V, O H, æqualium laterum O L, L V. Item [h] S Y, ipsi a M, & L I, ipsi Y V, & V K, ipsi V Z, & D T, ipsi b Z. Igitur quinque rectangula Q L, S Y, L I, V K, D T, hoc est, tria rectangula D T, S L, L K, æqualia sunt quinque rectangulis O H, a M, Y V, V Z, b Z, hoc est, duobus quadratis O H, a X. Quod est propositum.* (e 34. primi. f 36. primi. g 34. primi. h 34. primi.)



11. ## PROBL. I. PROPOS. II.

DATAM rectam lineam secare, vt comprehensum sub tota, & altero segmentorum rectangulum, æquale sit ei, quod à reliquo segmento fit, quadrato.

DATA sit recta A B, quam secare oportet in duas partes, ita vt rectangulum compreheñsum sub tota AB, & altero eius segmẽto, nempe minori, æquale sit quadrato reliqui segmenti, nimirũ maioris. Describatur ex A B, quadratũ A C, & diuiso latere A D, quod cum linea data A B, angulum rectum efficit, bifariam in E, iungatur recta E B, cui ex E A, producta æqualis sumatur E F, & ipsi AF, abscindatur ex recta AB, data æqualis AG. Est enim AB, maior, quàm A F. Nam cùm E B, sit æqualis ipsi E F, ex constructione; a sint autem latera A E, A B, maiora latere E B; erũt quoq; rectæ E A, AB, maiores recta E F: ac proinde ablata communi A E, reliqua AB, maior erit, quàm reliqua A F. Dico rectam AB, sectam esse in G, ita vt rectangulum comprehensum sub A B, B G, æquale sit quadrato rectæ AG; adeò vt AG, sit maius segmentum, & B G, minus. Ducatur enim per G, recta H I, parallela rectæ D F, secans C D, in I; Ac per F, ducatur ipsi AG, parallela F H, secans H I, in H. Erit igitur parallelogrammum A H, quadratum segmenti A G, cũ omnia quatuor latera eius sint æqualia, quippe cũ b F H, G H, æqualia sint oppositis A G, A F, æqualibus; omnesq; anguli eiusdem recti, ob rectum A, vt ad defin. 1. huius lib. ostendimus. Rectangulum quoque C G, comprehensum erit sub AB, & segmento B G; quòd AB, æqualis sit ipsi B C. Itaq; probandum est, rectangulum C G, & quadratum A H, æqualia esse. Quoniam igitur recta D A, diuisa est bifariam in E, & ei addita in rectum A F; c erit rectangulum sub D F, F A, hoc est, rectangulum D H, (cùm F H, sit æqualis ipsi F A;) vnà cum quadrato dimidiæ AE, æquale quadrato rectæ E F, hoc est, quadrato rectæ E B, quę rectæ E F, æqualis est: Est autem quadratum rectæ E B, d æquale quadratis rectarum A E, A B. Quare rectangulum D H, vnà cum quadrato rectæ A E, æquale quoq; est quadratis rectarum AE, A B. Dempto ergo communi quadrato rectæ A E, remanebit rectangulum D H, æquale quadrato rectæ A B, hoc est, quadrato A C. Ablato igitur rursus communi rectangulo A I, remanebunt rectangulum C G, & quadratum A H, inter se æqualia. Quod est propositum. Datam igitur rectam AB, secuimus, &c. Quod erat faciendum.




a 20. primi.
b 34. primi.
c 6 secũdi.
d 47. primi.

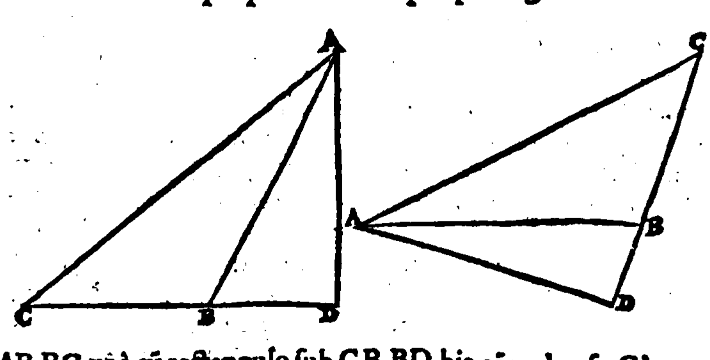
*SCHOLIVM.*

*Hoc theorema nulla ratione accommodari potest numeris. Non enim numerus vllus in duos potest numeros diuidi, vt numerus productus ex toto in alteram partẽ æqualis sit quadrato alterius partis, vt demonstrabimus ad propos. 14. lib. 9. Vbi etiam decem theoremata antecedentia huius libri in numeris demonstrabimus. Clariùs autem idem ostendemus ad propos. 29. eiusdem lib. 9.*

*PRAXIS autem huiusce problematis non est difficilis. Nam ad extremum A, vbi terminari debet maius segmentum linea data A B, excitata perpendiculari A D, ipsi datæ lineæ A B, æquali, eaq; secta in E, bifariam; si ad interuallum E B, resecetur E A, producta in F, erit A F, maiori segmento A G, æqualis, vt demonstratũ est.*

12. ## THEOR. 11. PROPOS. 12.

IN amblygoniis triangulis, quadratum, quod fit à latere angulum obtusum subtendente, maius est quadratis, quę fiunt à lateribus obtusum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab vno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod, cùm protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.



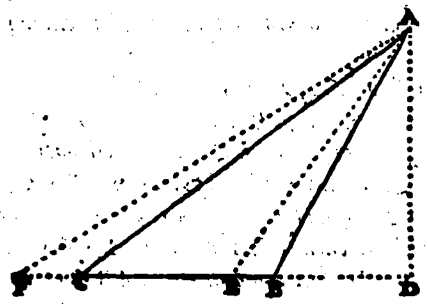

TRIANGVLVM A B C, habeat angulum A B C, obtusum, & ex A, in latus C B, ad partes anguli obtusi protractũ cadat perpẽdicularis AD. Dico quadratum lateris AC, quod obtuso angulo opponitur, maius esse quadratis laterũ A B, B C, rectangulo bis cõprehenso sub C B, B D, hoc est, quadratum lateris AC, æquale esse duobus quadratis laterum AB, BC, vnà cũ rectangulo sub CB, BD, bis cõprehenso. Cùm n. recta CD, diuisa sit in B, vtcunq; e erit quadratũ rectæ C D, æquale duobus quadratis rectarum C B, B D, & rectangulo compreheñso bis

e 4. secundi.

bis sub CB, BD. Addito igitur communi quadrato rectæ AD, erũt duo quadrata rectarum CD, DA, æqualia tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD: Est autem quadratis rectarum CD, DA, [a] æquale quadratum rectæ AC. Quare & quadratum rectæ AC, æquale erit tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenso a 47. primi.
bis sub CB, BD. Cùm igitur quadratis rectarum BD, DA, [b] æquale sit quadratum rectæ AB; erit b 47. primi.
quadratum rectæ AC, æquale quadratis rectarum CB, BA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Quod est propositum. In amblygoniis ergo triangulis, quadratum, quod fit, &c. Quod erat ostendendum.

## *SCHOLIVM.*

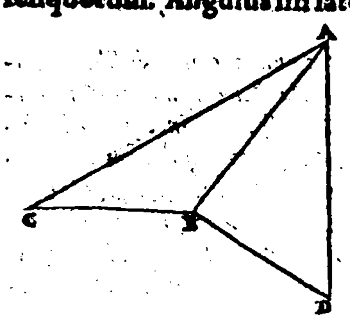
*IAM hoc loco demonstrauit Euclides, quantò maius sit in triangulo amblygonio quadratum lateris angulo obtuso oppositi, quadratis aliorum duorum laterum: In sequenti autem propos. 13. ostendet, quantò quadratum lateris acuto angulo oppositi minus sit quadratis reliquorum duorum laterum, vt ad initium scholij propos. 47. lib. 1. monuimus.*




*QVONIAM verò assumpsit Euclides, perpendicularem ductã ex A, cadere in latus CB, ad partes anguli obtusi protractum, ideò paucis id demonstrabimus. Sit in triangulo ABC, angulus ABC, obtusus, & latus CB, ad partes B, protractum. Dico perpendicularem ex A, deductam cadere extra triangulum in latus CB, protractum; cuiusmodi est recta AD. Si enim caderet intrà triangulum, qualis est recta AE, essent duo anguli ABE, AEB, duobus rectis maiores, cùm ille sit obtusus, hic verò rectus. Quod est contra proposit. 17. lib. 1. Si verò caderet extra triangulum in latus BC, productum ad partes C, qualis est recta AF, essent rursus in triangulo ABF, duo anguli ABF, AFB, maiores duobus rectis, cùm ille sit obtusus, hic verò rectus. Quod est absurdum.*

*SED & hoc theorema verum est:*

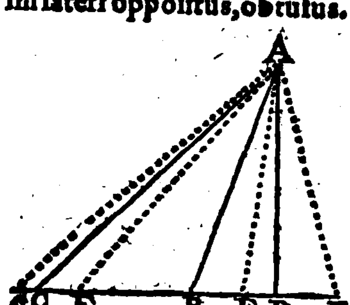
Si in triangulo quadratum vnius lateris maius sit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppositus, obtusus erit.




*IN triangulo ABC, quadratum lateris AC, maius sit quadratis laterum AB, BC. Dico angulum B, quem latus AC, subtendit, esse obtusum. Ducatur enim ex B, ad AB, perpendicularis BD, lineæ BC, æqualis, iungaturq; recta AD. Quoniam igitur quadratum ex AD, [a] æquale est qua-* a 47. primi.
*dratis ex AB, BD, hoc est, ex AB, BC: Ponitur autem quadratum ex AC, maius quadratis ex AB, BC; Erit quadratum ex AD, minus quadrato ex AC; & idcircò recta AD, minor, quàm recta AC. Itaque quia latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia sunt lateribus AB, BD, trianguli ABD, vtrumque vtrique, & basis AC, maior est basi AD; [b] Erit angulus ABC;* b 25. primi.
*maior angulo ABD: Sed ABD, rectus est. Igitur ABC, recto maior, & obtusus erit. Quod est propositum.*

*QVIN etiam conuersum huius propos. 12. demonstrabimus: nimirum.*

Si in triangulo quadratum vnius lateris maius sit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub exteriore linea, quam ex illo latere producto recta linea ab opposito angulo demissa abscindit: Demissa hæc linea ad latus productum perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, obtusus.




*IN triangulo ABC, ad latus CB, protractum demittatur ex opposito angulo A, recta AD, sitq; quadratum lateris AC, maius, quàm quadrata laterum AB, BC, rectangulo sub CB, BD, bis comprehenso. Dico AD, ad CD, esse perpendicularem, & angulum ABC, obtusum. Si enim AD, perpendicularis non est, ducatur ex A, ad CB, perpendicularis, quã dico cadere necessariò in CB, productam ad partes B. Cadat enim, si fieri potest, in B, ita vt AB, sit ad CB, perpendicularis. Erit igitur [c] qua-* c 47. primi.
*dratum ex AC, æquale quadratis ex AB, BC, quod est absurdum, cum maius ponatur. Non cadit ergo perpendicularis ex A, in CB, demissa in punctum B.*

*CADAT deinde, si fieri potest, perpendicularis ex A, demissa in latus BC, qualis est AF. Erit igitur [d]* d 47. primi.
*quadratum ex AC, æquale quadratis ex AF, FC: Ponitur autem quadratum ex AC, maius quadratis ex AB, BC. Igitur & quadrata ex AF, FC, maiora erunt quadratis ex AB, BC, quod est absurdum. Sunt enim quadrata ex AB, BC, maiora quadratis ex AF, FC, quod recta AB, recto angulo AFB, opposita [e] maior sit, quàm* e 19. primi.

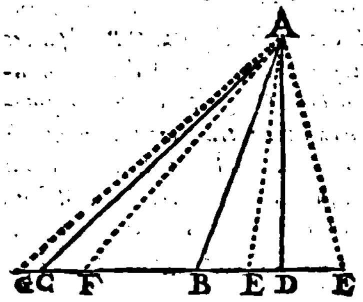
AF, & BC, tota maior parte FC. Perpendicularis ergo ex A, demissa non cadit in CB.

CADAT tertiò, si fieri potest, perpendicularis ex A, ad latus BC, demissa, in C, ita vt AC, sit perpendicularis. Erit igitur quadratum ex AB, [a] æquale quadratis ex AC, CB, ac proinde quadratum ex AC, minus erit quadrato ex AB, & propterea multò minus quadratis ex AB, BC, quod est absurdum, cùm ponatur maius. Perpendicularis ergo ex A, ad BC, demissa non cadit in C.

a 47. primi.

CADAT quartò, si fieri potest, perpendicularis ex A, in BC, protractam ad partes C, qualis est AG. Quoniam igitur duo anguli AGC, ACG, [b] minores sunt duobus rectis, estque AGC, rectus; erit ACG, minor recto, ac proinde ACB, obtusus. Recta ergo AB, [c] maior erit, quàm AC, & propterea quadratum ex AC, minus erit quadrato ex AB; ac proinde multò minus quadratis, ex AB, BC: sed & maius ponitur, quod est absurdum. Cùm ergo perpendicularis ex A, demissa ad CB, non cadat in B, neque inter C, B, neque in C, neque extra C, cadet extra B, qualis est AD, vt demõstrabitur. Quare angulus ABD, [d] acutus erit, & ABC, obtusus, quod secundo loco proponitur demonstrandum. Cæterùm angulum ABC, esse obtusum, si quadratum rectæ AC, maius sit quadratis rectarum AB, BC, faciliùs demonstrauimus in proximo theoremate huius scholij: ex quo fit, vt ad initium huius scholij ostensum est, perpendicularem ex A, ad CB, demissam cadere extra triangulum ad partes anguli obtusi.

b 17. primi.
c 19. primi.
d 17. primi.

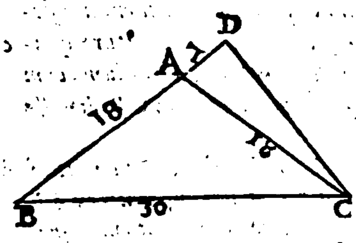


QVOD autem AD, sit ad CB, perpendicularis, ita demonstrabimus. Si non est, ducatur AE, ad CB, perpendicularis cadens vltra B, vt ostendimus. Quoniam igitur angulus ABC, ostensus est obtusus, erit quadratum rectæ AC, maius quàm quadrata rectarum AB, BC, rectangulo bis comprehenso sub CB, BE: sed & quadratũ eiusdem rectæ AC, maius ponitur quàm quadrata earundem rectarum AB, BC, rectangulo bis comprehenso sub CB, BD. Igitur quadrata ex AB, BC, vnà cum rectangulo bis sub CB, BD, comprehenso æqualia erunt quadratis ex AB, BC, vnà cum rectangulo sub CB, BE, bis comprehenso: & ablatis quadratis communibus rectarũ AB, BC, rectangulum bis sub CB, BE, comprehensum æquale erit rectangulo bis comprehenso sub CB, BD, ac proinde & rectangulum sub CB, BE, semel comprehensum æquale erit rectangulo semel sub CB, BD, comprehenso, & recta BE, rectæ BD, æqualis, pars toti, vel totum parti. quod est absurdum. Est ergo AD, ad CD, perpendicularis, & nulla alia. quod est propositum.

IAM verò, quoniam neque hoc duodecimum theorema, neque sequens 13. per numeros, quando libet, explicari potest, quòd posito vno latere trianguli quotlibet partium æqualium, alia latera, eorumque partes à perpendicularibus lineis factæ plerunque numeris exprimi nequeant, sed sint lineæ illi lateri incommensurabiles: quod in præcedentibus propositionibus non accidebat, quippe cùm, posita diuisa recta linea quotlibet partium æqualium, eius partes statui possint pro libito ei commensurabiles, vt in exemplis numerorum adhibitis factum est; præscribemus regulas quasdam, quibus Geometricè triangula amblygonia, atque oxygonia (quotquot quis optauerit) constituantur eiusmodi, vt omnia latera, partesque eorum à lineis perpendicularibus factæ sint lineæ commensurabiles: atque adeò veritas vtriusque theorematis in numeris quoque appareat. Hic autem de amblygoniis triangulis agemus, & in scholio sequentis propositionis de Oxygoniis. Quoniam autem amblygonium triangulum est, vel Isosceles, in quo tertium latus semper [e] maius est, quòd obtuso angulo opponatur, vel scalenum, (æquilaterum enim esse non potest, vt ad defin. 27. lib. 1. diximus,) & in scaleno lineæ perpendicularis cadit vel in minimum latus productum, vel in medium, proponemus tres regulas. Prima exhibebimus triangulum amblygonium Isosceles laterum commensurabilium, in quo etiam segmentum vtriuslibet laterum æqualium producti inter perpendicularem, & angulum obtusum eisdem lateribus commensurabile sit. Secunda constituemus triangulum amblygonium scalenum laterum etiam commensurabilium, & in quo segmentum minimi lateris producti inter perpendicularem, & angulum obtusum lateribus eisdem sit commensurabile. Tertia denique triangulum amblygonium scalenum proponemus commensurabilium laterum, & in quo segmentum lateris medij producti inter lineam perpendicularem, & obtusum angulum eisdem lateribus commensurabile existat.

e 19. primi.

## REGVLA I.

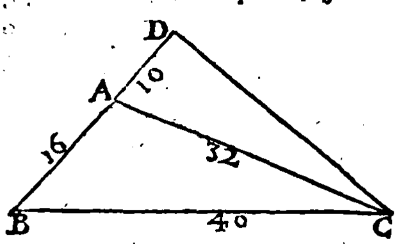


AD construendum triangulum amblygonium Isosceles laterũ commensurabilium, in quo segmentum exterius alterius laterum æqualium producti inter perpendicularem lineam, & angulum obtusum, eisdem lateribus quoque sit commensurabile; statuatur segmentum exterius tot partium æqualium, vt earum numerus à 7. numeretur, vt 7. vel 14. vel 21. vel 28. &c. Deinde vtrumuis laterum æqualium ponatur dicti segmenti duplum superquadrupartiens septimas, maximum autem obtuso angulo oppositum eiusdem segmenti quadruplum superbipartiens septimas: Vt in triangulo ABC, ducta sit CD, ad BA, latus productum. Si igitur AD, constituatur partium

*7. & vtrumuis laterum A B, A C, partium 18. qui numerus habetur, si duplicaueris 7. addiderisq; $\frac{4}{7}$. ipsius: latus verò B C, partium 30. quem numerum habebis, si quadruplicaueris 7. adiunxerisq; $\frac{2}{7}$. ipsius erit triangulum A B C, quod quaeritur. In hoc enim triangulo quadratum lateris B C, est 900. cui aequalia sunt quadrata laterum A B, A C, nempe 324. 324. vnà cum rectangulo bis comprehenso sub A B, A D, hoc est, cum 126. 126. Hac enim conficiunt quoque summam 900. Quam ob rem, vt in hoc scholio ostendimus, erit ducta C D, ad B D, perpendicularis, & angulus B A C, obtusus. Quòd si singulos numeros huius trianguli per quemlibet numerum multiplices, procreabis alias lineas trianguli commensurabiles, prioribus tamen proportionales. Vt si inuentos numeros duplices, efficies A D, 14. & tam A B, quàm A C, 36. at B C, 60. Propositum quoque triangulum reperies, statuendo segmentum exterius A D, quotcunque partium, etiamsi à 7. non numerentur: sed tunc latera erunt numeri integri cum fractionibus. Idem denique triangulum offendes, statuendo latus quodcunq; à quo incipere vis, quotlibet partium, dummodò maximum fiat segmenti A D, quadruplum superbipartiens septimas, vtrumuis autem aequalium sit eiusdem segmenti duplum superquadrupartiens septimas.*

## REGVLA II.

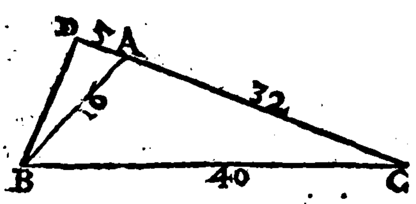
*VT efficiatur triangulum amblygonium Scalenum laterum commensurabilium, in quo perpendicularis cadens in minimum latus productum faciat segmetum exterius commensurabile etiam lateribus: statuatur exterius segmentū quotuis partium aequalium à quinque numeratarū, vt 5. vel 10. vel 15. vel 20. &c. Quibus si addas $\frac{1}{5}$. habebis minimum latus. Si verò easdem partes dicti segmenti triplices, addasq; $\frac{1}{5}$. vel si partes minimi lateris inuentas duplices, efficies medium latus. Si denique partes easdem dicti segmenti quadruplices,*




*reperies latus maximum. Vt si in apposito triangulo segmentum A D, constituatur 10. erit A B. 16. A C, 32. & B C, 40. Vbi etiam vides, quadrato lateris B C, quod est 1600. aequalia esse quadrata laterum A B, A C, nimirū 256. 1024. vnà cum rectangulo bis sub A B, A D, comprehenso, id est, cum 160. 160. Ex quo fit C D, esse ad B D, perpendicularem, & angulum B A C, obtusum, vt suprà in hoc scholio ostendimus. Iam si singulos numeros inuentos multiplices per quemuis numerum, gignentur alij numeri illis proportionales, qui idem praestabunt. Vt si eos duplices, erit latus A B, 32. A C, 64. & B C, 80. qui quidem numeri reperientur eadem arte, si exterius segmentum A D, statuas partium 20. quae duplam quoque proportionem habent ad priores partes 10. Sic si eosdem numeros triplices, efficies segmentum exterius A D, partium 30. latus A B, 48. A C, 96. B C, 120. & sic deinceps.*

## REGVLA III.

*PRO triangulo amblygonio Scaleno commensurabilium laterum, in quo perpendicularis linea in medium latus productum cadens efficiat quoque segmentum lateribus trianguli commensurabile; accipiatur rursum exterius segmentum quotlibet partium à 5. numeratarum, vt in praecedenti regula. Quas si triplices, addasq; $\frac{1}{5}$. produces minimum latus. Si verò easdem multiplices per 6. adiungasq; $\frac{2}{5}$. habebis latus medium: Si denique easdem per 8. multiplices, produces maximum latus.*



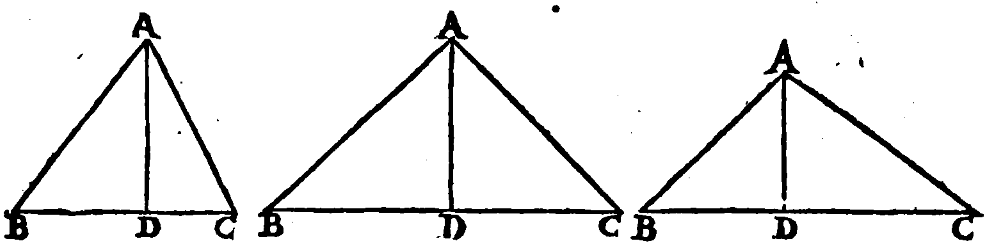

*Vt si in triangulo proposito segmentum A D, fiat partium 5. erit A B, 16. A C, 32. & B C, 40. Atq; ita quadrato lateris B C, nimirum 1600. aequalia existent quadrata laterū A B, A C, nempe 256. 1024. vnà cum rectangulo bis comprehenso sub A C, A D, hoc est, cum 160. 160. Ac proinde B D, ad C D, erit perpendicularis, angulusq; B A C, obtusus, vt in hoc scholio suprà demonstrauimus. Quòd si numeros inuentos per quemuis numerum multiplices, inuenies alios numeros laterum illis proportionales, in quibus eadem haec proposit. 12. examinabitur. Vt si eos quadruplices, efficies segmentum exterius A D, partium 20. latus A B, 64. A C, 128. & B C, 160. Si verò eosdem illos priores numeros per 10. multiplices, erit segmentum exterius A D, 50. latus A B, 160. A C, 320. & B C, 400. Atque ita in infinitum.*

*CAVE autem, existimes posito latere aliquo trianguli amblygonij, vel segmento exteriori, quotlibet partium aequalium, alia latera cum illo seruare necessariò proportiones illas, quas in regulis praedictis explicauimus, adeò vt cognito vno, reliqua etiam cognoscantur. Hoc enim falsum est, cùm illa variari possint mille modis, & alias atq; alias proportiones habere. Itaq; ex tribus praescriptis regulis solùm colligendum erit, ex lineis rectis, quae dictas proportiones seruent, constitui posse triangulum amblygonium, vnà cum segmento exteriore, in quo veritas propositionis 12. posit examinari.*

# THEOR. 12. PROPOS. 13.

13.

IN oxygoniis triangulis, quadratum à latere angulum acutum subtendente minus est quadratis, quae fiunt à lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehẽſo,& ab vno laterũ,quæ ſunt circa acutũ angulũ, in qđ perpẽdicularis cadit,&ab aſſumpta interius linea ſub perpẽdiculari ꝓpe acutũ angulũ.

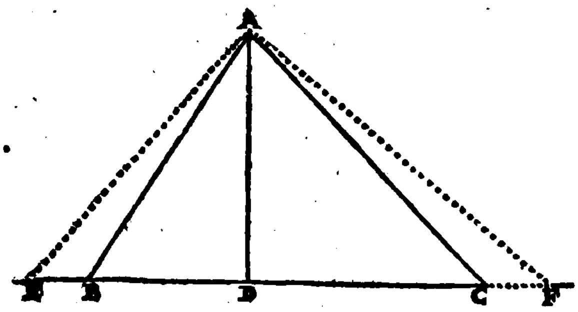



SINT omnes anguli trianguli A B C,acuti,& ex A, perpendicularis A D, demiſſa cadat in latus B C. Dico quadratum lateris AB,quod acuto angulo A C B,opponitur,minus eſſe quadratis laterum A C,C B,circa angulum acutum dictum, rectangulo bis comprehenſo ſub B C,C D, hoc eſt, quadratum lateris A B, vnà cum rectangulo bis comprehenſo ſub B C, C D, æquale eſſe duobus quadratis laterum A C,C B. Cûm enim recta B C,diuiſa ſit in D,vtcunque,erunt quadrata recta-
a 7 ſecundi. rum B C,C D,[a] æqualia rectangulo comprehenſo bis ſub B C,C D; & quadrato rectæ B D. Addito ergo communi quadrato rectæ D A, erunt tria quadrata rectarũ B C,C D,D A,æqualia rectangulo bis comprehenſo ſub B C,C D, & duobus quadratis rectarum B D, D A: Duobus autẽ qua-
b 47. primi. dratis rectarum C D,D A,[b] æquale eſt quadratum rectæ C A. Duo igitur quadrata rectarum B C, C A,æqualia ſunt rectangulo bis comprehenſo ſub B C,C D,& duobus quadratis rectarum B D,
c 47. primi. D A. Cùm ergo duobus quadratis rectarum B D,D A,[c] æquale ſit quadratum rectæ A B, erũt duo quadrata rectarum B C,C A,æqualia rectangulo bis comprehenſo ſub B C,C D,& quadrato rectæ A B. quod eſt propoſitum. Eodem modo oſtendetur,quadrata rectarum A B,B C,æqualia eſſe rectangulo bis comprehenſo ſub C B,B D,& quadrato rectæ A C,hoc eſt,quadratum lateris AC,minus eſſe quadratis laterum AB,B C,rectangulo comprehenſo bis ſub C B,B D. In oxygoniis ergo triangulis,quadratum à latere,&c. Quod demonſtrandum erat.

*SCHOLIVM.*

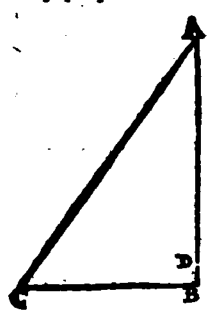
*ITAQVE ex tribus propoſitionibus,nempe 47.lib.1. & 12. atque 13.huius lib.cognoſcimus,quantum ſit quadratum cuiuſuis lateris trianguli cum quadratis aliorum duorum laterum comparatum,nempe an ſit illis æquale,an maius,minúsve, & quantò maius ſit,aut minus, prout videlicet angulus aſſumpto lateri oppoſitus fuerit rectus,vel obtuſus, aut acutus.*

*QVAMVIS autẽ Euclides theorema hoc proponat de triangulis duntaxat oxygonijs, quæ ſcilicet omnes angulos habent acutos. Idem tamen verùm etiã eſt in triangulis rectangulis,& amblygoniis,vt conſtat ex poſterioribus duobus triangulis in ſchemate propoſitis. Sunt enim in hiſce triãgulis neceſſariò duo reliqui anguli acuti, vt perſpicuè colligi poteſt ex propoſ.17. vel 32.lib.1. Hoc ſolùm obſeruandũ eſt in triangulis rectangulis,& amblygoniis, perpendicularem duci debere ab angulo recto,vel obtuſo,in oxygoniis verò à quolibet. Ita n. ſemper cadet perpendicularis intra triangulũ, vt Euclides in demõſtratione aſſumpſit. Quod quidẽ facile demõſtrabitur hac ratione. Sint in triangulo A B C, duo anguli A B C, A C B, acuti, angulus verò B A C, rectus, vel obtuſus, acutúsve. Dico perpendicularẽ ex A, demiſſam cadere*




*intra triangulũ. Si enim caderet extra in C B, protractã ad partes B, cuiuſmodi eſt recta A E, eſſet in triangu-*
a 16. primi. *lo A B E, angulus exterior A B C, acutus,[a] maior interno & oppoſito recto A E B, quod eſt abſurdũ. Si verò caderet extra B C, productã ad partes C, qualis eſt recta A F, in idem incideremus abſurdum, vt manifeſtum eſt.*

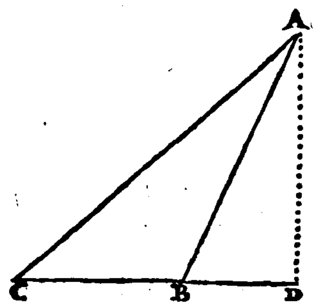
*IDEM hoc theorema in triangulis rectangulis, & obtuſangulis demonſtrat Federicus Commandinus, etiamſi perpendicularis A D, nõ cadat in latus B C, ſed vel eadem ſit, quæ latus A B, vt in rectangulis, vel extra triangulum cadat, vt in obtuſangulis accidit, ceu in ſcholio propoſitionis præcedentis demonſtrauimus: quod tum demũ accidet, cùm perpendicularis non ab angulo recto, vel obtuſo, ſed ab altero acutorum demittitur.*




*SIT triangulum rectangulũ A B C, cuius angulus B, ſit rectus; & ex angulo A, acuto ad B C, perpendicularis ducatur A D, quæ eadẽ erit, quæ latus A B, propter angulum rectum B. Dico quadratum lateris A B, acutum angulum C, ſubtendentis, minus eſſe, quàm quadrata laterum A C, C B, rectangulo bis comprehenſo ſub latere C B, in quòd perpendicularis cadit, & ſub linea C D, quæ interiicitur inter perpendicula-*
b 47. primi. *rem A D, & acutũ angulum C. Cum enim quadrata ex A B, C B,[b] æqualia ſint quadrato ex A C; addito communi quadrato ex C B, erunt tria quadrata, nempe quod ex A B, & duplum eius, quod ex C B, æqualia duobus quadratis ex A C, C B: At quadratum ex C B, idem eſt, quod rectangu-*

rectangulum sub C B, C D. Igitur & quadratũ ex A B, vnà cum rectangulo bis sub C B, C D, æquale est quadratis ex A C, C B; Ac proinde quadratum ex A B, minus est, quàm quadrata ex A C, C B, rectangulo bis, sub C B, C D. Quod est propositum.

RVRSVS sit triangulum obtusangulum A B C, cuius angulus B, obtusus; & ex angulo acuto A, ad B C, perpendicularis ducatur A D, extra triangulum cadens. Dico quadratum lateris A B, acutum angulum C, subtendentis minus esse, quàm quadrata laterũ A C, C B, rectangulo comprehenso bis sub C B, & C D. Quoniam enim quadrata ex A D, C D, [a] æqualia sunt quadrato ex A C; addito quadrato ex C B, communi, erunt tria quadrata ex A D, C D, C B, æqualia duobus quadratis ex A C, C B: At quadratum ex C D, [b] æquale est quadratis ex C B, B D, & rectangulo bis sub C B, B D. Igitur & duo quadrata ex A D, C B, vnà cum quadratis ex C B, B D, & rectangulo bis sub C B, B D, æqualia sunt quadratis ex A C, C B: Sunt autem quadrata ex A D, B D, [c] æqualia quadrato ex A B. Quare quadratum quoque ex A B, & duplum quadrati ex C B, vnà cum rectangulo bis sub C B, B D, æqualia sunt quadratis ex A C, C B. Atqui quadrato ex C B, vnà cum rectangulo sub C B, B D, [d] æquale est rectangulum sub C D, C B; Ac propterea duplo quadrati ex C B, vnà cum rectangulo bis sub C B, B D, æquale est rectangulum bis sub C D, C B. Igitur & quadratũ ex A B, vnà cum rectangulo bis sub C B, C D, æquale est quadratis ex A C, C B; Ac proinde quadratum ex A B, minus est, quàm quadrata ex A C, C B, rectangulo bis sub C B, C D. Quod est propositum.



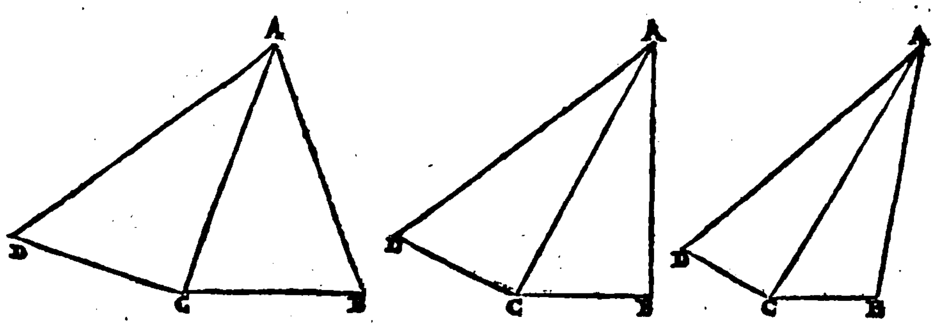

a 47. primi.
b 4. secũdi.
c 47. primi.
d 3. secũdi.

ALITER, & breuiùs. Quoniam quadratum ex A C, [e] maius est, quàm quadrata ex A B, B C, rectangulo bis sub C B, B D, comprehenso, hoc est, quadratum ex A C, æquale est quadratis ex A B, B C, vnà cum rectangulo sub C B, B D, bis comprehenso; erit quadratum ex A B, minus, quàm quadratum ex A C, quadrato ex B C, & rectangulo sub C B, B D, bis: Ac proinde si quadrato ex A C, addatur quadratum ex B C, erit quadratum ex A B, minus quàm quadrata ex A C, B C, quadrato ex B C, bis sumpto, & rectangulo bis sub C B, B D, comprehenso. Cùm ergo quadrato ex B C, vnà cum rectangulo sub C B, B D, contento, [f] æquale sit rectangulum sub C B, C D, contentum; erit quoq; quadratum ex A B, minus quàm quadrata ex A C, C B, rectangulo comprehenso bis sub C B, C D. Quod est propositum.

e 12. secũdi.
f 3. secũdi.

IN scholio quodam antiquo demonstratur sequens theorema, instar illius, quod nos in scholio præcedentis propositionis secundo loco demonstrauimus. Videlicet.

SI in triangulo quadratum vnius lateris minus sit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppositus, acutus erit.



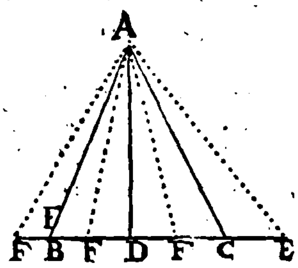

IN triangulo A B C, quadratum lateris A B, minus sit, quàm quadrata laterum A C, C B. Dico angulum C, quem dictum latus subtendit, esse acutum. Ducatur enim ex C, ad A C, perpendicularis C D, lineæ C B, æqualis, iungaturq; recta A D. Quoniam igitur quadratum ex A D, [g] æquale est quadratis ex A C, C D, hoc est, ex A C, C B: Ponitur autem quadratum ex A B, minus quadratis ex A C, C B; Erit quadratum ex A D, maius quadrato ex A B: & ideò recta A D, maior quàm recta A B. Itaque quia duo latera A C, C D, trianguli A C D, æqualia sunt duobus lateribus A C, C B, trianguli A C B, vtrumque vtrique; & basis A D, maior base A B, [h] Erit angulus A C D, maior angulo A C B: Sed A C D, rectus est, ex constructione. Ergo A C B, recto minor, & acutus erit.

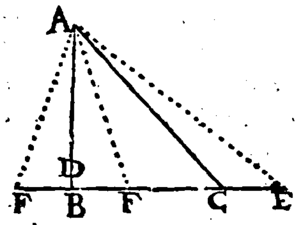
g 47. primi.
h 25. primi.

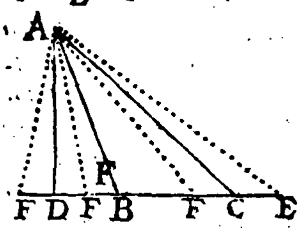
SED & conuersum huius propos. 13. ostendemus, nimirum.

SI in triangulo quadratum vnius lateris minus sit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterũ, & sub recta linea inter angulum priori lateri oppositum, & rectam lineam ab angulo alteri illi lateri opposito demissam: Linea hæc demissa ad alterum illud latus perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, acutus.

IN triangulo A B C, ad latus B C, demittatur ex angulo opposito A, recta A D; sitq; quadratum lateris A B, minus quàm quadrata laterum A C, C B, rectangulo sub B C, C D, bis comprehenso. Dico A D, esse per-




*pendicularem ad B C, & angulum A C B, acutum. Si namque A D, perpendicularis non est, ducatur ex A, ad B C, perpendicularis, quam dico necessariò cadere citra punctum C, versus B, hoc est, vel in latus B C, vel in punctum B, vel in latus B C, versus B, productum. Cadat enim, si fieri potest,* a 47. primi. *in C, ita vt A C, sit ad B C, perpendicularis. Erit igitur* [a] *quadratum ex A B, æquale quadratis ex A C, C B. quod est absurdum, cùm minus ponatur. Non cadit ergo perpendicularis ex A, deducta ad B C, in punctum C.*

*CADAT deinde, si fieri potest, perpendicularis ex A, demissa vltra* b 47. primi. *C, in E, qualis est A E. Erit igitur* [b] *quadratum ex A B, æquale quadratis ex A E, E B: Ponitur autem quadratum ex A B, minus quadratis ex A C,* c 47. primi. *C B. Igitur & quadrata ex A E, E B, minora erunt quadratis ex A C, C B. Cùm ergo quadratũ ex A C,* [c] *æquale sit quadratis ex A E, E C; erunt quoque quadrata ex A E, E B, minora quadratis ex A E, E C, C B: Et ablato communi quadrato rectæ A E, erit reliquum quadratũ ex E B, minus quo-* d 4. secũdi. *que quadratis ex E C, C B. quod est absurdum. Cùm enim quadratum ex E B,* [d] *æquale sit quadratis ex E C, C B, vnà cum rectangulo bis comprehenso sub E C, C B, maius erit quadratum ex E B, quadratis ex E C, C B. Non ergo perpendicularis cadit vltra C: Sed neque in C, cadit, vt ostendimus. Igitur cadet citra punctum C, qualis est A D, vt demonstrabitur, ac* e 17. primi. *propterea* [e] *angulus A C B, acutus erit. Quod secundo loco proponitur demonstrandum. Cæterùm angulum A C B, esse acutum, si quadratum rectæ A B, minus sit quadratis rectarum A C, C B, facilius demonstrauimus in proximè antecedente theoremate huius scholij: ex quo fit, quemadmodum in corollario secundo propositionis 17. libri primi ostensum est, perpendicularem ex A, ad B C, demissam cadere citra angulum A C B, acutum versus B.*

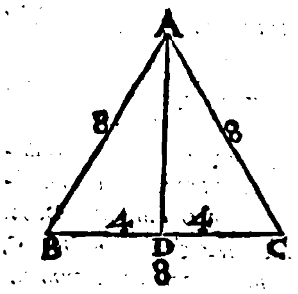
*QVOD autem A D, sit ad B C, perpendicularis, ita ostendemus. Si non est, sit A F, ad B C, perpendicularis, cadens citra punctum C, vt probatum est, vbicunque hoc contingat, siue intra triangulum, siue in punctum B, siue extra triangulum. (In secundo tantùm triangulo non dicet aduersarius, perpendicularem ca-* f 12. secũdi. *dere in B; quia eadem esset, quæ A D, quod ille negat.) Quia ergo angulus A C B, ostensus fuit acutus,* [f] *erit quadratum ex A B, minus, quàm quadrata ex A C, C B, rectangulo bis comprehenso sub B C, C F, hoc est, quadratum ex A B, vnà cum rectangulo comprehenso bis sub B C, C F, æquale est quadratis ex A C, C B: Ponitur autem quadratum idem ex A B, minus quoque, quàm quadrata ex A C, C B, rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, hoc est, quadratũ idem ex A B, vnà cum rectangulo bis contento sub B C, C D, æquale ponitur quadratis ex A C, C B. Igitur quadratum ex A B, vnà cum rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, æquale erit quadrato eidem ex A B, vnà cum rectangulo comprehenso bis sub B C, C F: Et ablato communi quadrato rectæ A B, rectangulum sub B C, C D, bis comprehensum æquale erit rectangulo bis sub B C, C F, comprehenso; ac proinde & rectangulum semel comprehensum sub B C, C D, æquale erit rectangulo semel comprehẽso sub B C, C F, ideoq́; & rectæ C D, C F, æquales erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Est igitur A D, ad B C, perpendicularis, & non alia. Quod est propositum.*

*QVEMADMODVM autẽ in scholio superioris propositionis triangula amblygonia construximus laterum, & linearum commensurabilium, in quibus per numeros veritas propositionis 12. examinari possit, ita hoc loco oxygonia triangula constituemus laterum, atque linearum commensurabilium, in quibus huius 13. propositionis veritas explicetur. Quia verò triangulum oxygonium est vel æquilaterum, vel Isosceles, vel Scalenum; complectemur totam hanc doctrinam septem regulis. Prima de triangulo æquilatero oxygonio aget. Secunda de Isoscele, in quo perpendicularis cadit in tertium latus inæquale, siue maius illud sit, siue minus vtrouis æqualium. Tertia de Isoscele, cuius tertium latus maius est, perpendicularísque in alterutrum æqualium laterum cadit. Quarta de Isoscele, cuius latus tertium minus est, & perpendicularis rursus in alterutrum laterum æqualium cadit. Quinta de Scaleno, in quo perpendicularis cadit in minimum latus. Sexta de Scaleno, in quo perpendicularis in medium latus demittitur. Septima denique de Scaleno, in quo ad maximum latus perpendicularis ducitur. Loquor autem hîc de illis etiam triangulis, in quibus perpendicularis linea cadit intra triangulum, ac proinde duo anguli supra basin sunt acuti, siue oppositus angulus acutus etiam sit, siue non. De his enim propositio etiam intelligenda est, vt diximus. Quo pacto autem triangula, in quibus linea perpendicularis cadit vel extra ipsa, vel cum vno laterum coincidit, numeris quoq; possint accommodari, docebimus ad finem regularum.*

## REGVLA I.

*SI quodlibet latus trianguli æquilateri statuatur quotuis partium æqualium, numero tamen parium, vt*

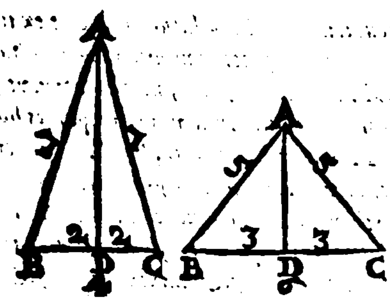
*fractiones*




fractiones vitentur, erunt omnia latera & inter se, & segmentis à linea perpendiculari factis commensurabilia. Vt in triangulo æquilatero A B C, diuidet perpendicularis A D, oppositum latus B C, bifariam, vt in scholio propositionis 26. lib. 1. demonstrauimus. Quam ob rem posito quolibet latere 8. erunt segmenta B D, C D, 4. 4. Vbi vides quadratum lateris A B, angulo acuto C, oppositi, (omnes enim anguli in triangulo æquilatero acuti sunt, ex corollario 3. propositionis 17. lib. 1.) hoc est, 64. vnà cum rectangulo bis contento sub B C, C D, id est, cum 32. 32. efficere 128. quantum videlicet conficiunt duo quadrata laterum A C, C B, nempe 64. 64.

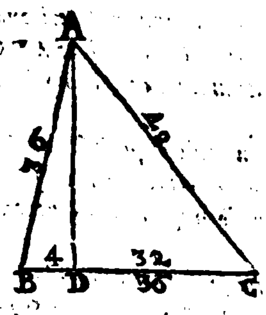
## REGVLA II.

Si vtrumque laterum æqualium trianguli Isoscelis statuatur quotcunque partium æqualium, tertium autem quotlibet partium numero parium, vt fractiones vitentur, siue pauciores partes in hoc latere ponantur, quàm in vtrolibet æqualium, siue plures, dummmodò tot nō sint, quot in vtroque simul, aut plures; quia sic nō posset fieri triangulum, propterea quod duo latera æqualia non essent maiora tertio latere, sed vel æqualia, vel minora; quòd propositioni 20. lib. 1. repugnat. Si inquā, latera hoc modo numeris exponantur, erunt omnes lineæ trianguli inter se commensurabiles. Vt si in priori horum Isoscelium vtrumuis latus A B, A C, statuatur 7. & B C, 4. In posteriori autem vtrumlibet A B, A C, 5. & B C, 6. Cum ergo perpendicularis A D, diuidat basim B C, bifariam, ex scholio proposit. 26. lib. 1. erunt segmenta B D, C D, in priori quidem triangulo 2. 2. in posteriori verò 3. 3. Vbi etiam perspicuum est, quadratum lateris A B, angulo acuto C, oppositi, (vterque enim angulus B, C, acutus est, ex corollario 3. propos. 17. lib. 1.) vnà cum rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, æquale esse quadratis simul laterum A C, C B, &c.



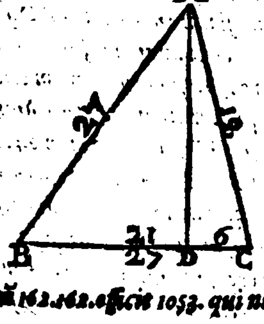

## REGVLA III.

In triangulo Isoscele, in quo tertium latus maius est, & perpendicularis in alterum æqualium laterum cadit, erit segmentum prope maius latus tertium, maius, vt ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus. Si igitur minus segmentum statuas quotuis partium, easq; per 8. multiplices, habebis segmentum maius: Si verò easdem ducas in 12. efficies tertium latus: Duo deniq; segmenta simul addita conflabunt vtrumque laterum æqualium; quod etiam produces ex multiplicatione minoris segmenti per 9. Vt si in Isoscele A B C, segmentum minus B D, ponatur 4. erit maius C D, 32. latus verò A C, 48. & vtrumque latus A B, B C, 36. 36. Quadratum igitur lateris A B, angulo acuto C, oppositi, nempe 1296. vnà cum eo, quod fit bis ex B C, in C D, id est, cum 1152. 1152. conficit 3600. quantum nimirum efficiunt duo quadrata ex A C, C B, nempe 2304. 1296. Ita quoque quadratū ex A C, nimirum 2304. vnà cum eo, quod bis fit ex C B, in B D, hoc est, cum 144. 144. facit 2592: qui numerus etiam conficitur ex quadratis laterum A B, B C, nimirum ex 1296. 1296. In huiusmodi ergo triangulo segmenta inæqualia proportionē habent octuplam: vtrumuis verò æqualium laterum ad minus segmentum proportionem habet noncuplam: Tertium denique latus maius ad idem segmentum minus habet proportionem duodecuplam.



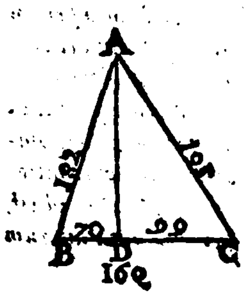

## REGVLA IV.

In triangulo Isoscele, cuius tertium latus minus est, & perpendicularis rursum in alterum æqualium laterum cadit, erit segmentum prope minus latus tertium, minus, vt ad propos. 47. lib. 1. ostensum est. Quod segmentum si statuas quotuis partium numero parium, vt fractiones fugiantur, easq; per 3. multiplices, & producto earundem medietatem adiicias, vel earum medietatem per 7. multiplices, produces maius segmentum: Si verò easdem partes minoris segmenti multiplices per 3. efficies tertium latus minus. Vtrumque denique æqualium laterum componetur ex duobus segmentis: quod etiam ex multiplicatione medietatis minoris segmenti per 9. producetur. Vt si in Isoscele A B C, minus segmentū C D, ponatur 6. erit maius B D, 21. & latus A C, 18. atq; tam A B, quàm B C, 27. Quadratum ergo lateris A B, angulo acuto C, oppositi, nimirum 729. vnà cū eo, quod fit bis ex B C, in C D, id est, cum 162. 162. efficit 1053. qui numerus etiam componitur ex quadratis laterū A C, C B, nempe ex 324. 729. &c.



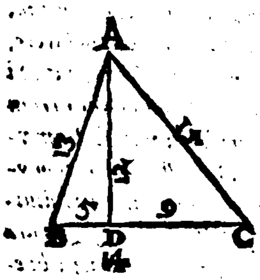

## REGVLA V.

In Scaleno triangulo, in quo perpendicularis in minimum latus demittitur, erit segmentum basis iuxta



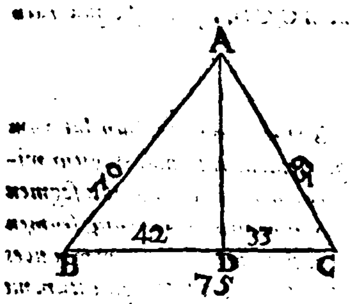

medium latus, minus, vt ad proposit. 47. lib 1. demonstratum est. Quod segmentum si constituatur tot partium æqualium, vt à 70. numerentur, nimirum partium 70. vel 140, vel 210. &c. eiq; addantur earum $\frac{29}{70}$ confectum erit segmentum maius, & ex additione partium horum segmentorum gignetur minimum latus. Si verò partes minoris segmenti duplicentur; & producto adiiciantur $\frac{42}{70}$. hoc est, $\frac{3}{5}$; earundem partium, procreabitur medium latus. Si denique partium eiusdem minoris segmenti duplicentur, productoq; $\frac{55}{70}$. id est, $\frac{11}{14}$. earundem addantur, componetur latus maximum. Vt in scaleno A B C, si minus segmentum B D, ponatur 70. erit maius C D, 99. & totum minimum latus B C, 169. Medium autem latus A B, 182. & maximum A C, 195. Quadratum ergo lateris A B, acuto angulo C, oppositi, hoc est, 33124. vnà cum numero, qui bis fit ex B C, in C D, id est, cum 16731. 16731. conficit numerum 66586. æqualem duobus simul quadratis 38025. 28561. laterum A C, C B, &c.

## REGVLA VI.




IN triangulo Scaleno, quando perpendicularis in medium latus cadit, erit ex iis, quæ ad propositionem 47. lib. 1. ostendimus, minus segmentum minimo lateri adiacens. Quod segmentum si statuatur tot æqualium partium, vt à 5. numerentur, vt 5. vel 10. vel 15. &c. eiq; addantur $\frac{4}{5}$. confectum erit segmentum maius, & partes horum segmentorum in vnam summam collecta component medium latus. Si autem partibus minoris segmenti duplicatis adiiciantur earundem $\frac{3}{5}$. producetur minimum latus. Triplum denique earundem partium minoris segmenti dabit latus maximum. Vt in Scaleno A B C, si minus segmentum B D, fiat 5. erit segmentum maius C D, 9. & totũ latus B C, medium, 14. Minimum verò A B, 13. & maximũ A C, 15. &c.

## REGVLA VII.




IN Scaleno denique triangulo, vbi perpendicularis ad maximum latus deducitur, erit minus segmentum iuxta latus minimum, ex iis, quæ ad propositionem 47. lib. 1. scripsimus. Si ergo pro minori segmento sumantur 33. vel quiuis alius numerus à 33. numeratus, vt 66. vel 99, &c. eiq; addantur $\frac{9}{33}$. hoc est, $\frac{3}{11}$. fiet maius segmentum: quæ duo segmenta simul composita maximum latus efferent. Si verò numero minoris segmenti duplicato adiiciantur, $\frac{4}{33}$. producetur medium latus. Si denique eidem numero lateris maximi apponantur $\frac{32}{33}$, exhibebitur minimum latus. Vt si in Scaleno A B C, minus segmentum C D, sit 33. erit maius segmentum B D, 42. totumq; latus maximum B C, 75. & medium A B. 70. & minimum A C, 65. &c.

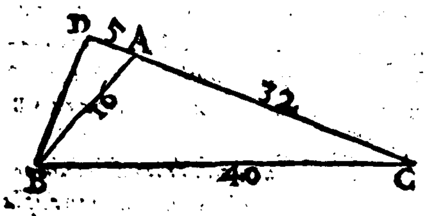
QVOD si singulos numeros harum regularum per eundem numerum aliquem, quicunque is sit, multiplices, procreabis alios numeros lateribus triangulorum tribuendos. Iidem etiam numeri reperientur, si minus segmentum, vel maius, vel quodcunque latus statuatur quotlibet partium, si modò proportiones seruentur, quas supradictis regulis expressimus.

HIC quoq; sciendum est, non in omni triangulo oxygonio proportiones præscriptas reperiri inter latera, cum mille modis possint variari eorum proportiones. Neq; verò hoc regulæ illæ docent, sed vsus earum in eo solum consistit, vt seruatis illis proportionibus, quas explicauimus, triangula oxygonia formari possint, in quibus propositio 13. huius lib. 2. ad numeros accommodetur.

Refer huc 6. huius paginæ figuram.

IAM verò si perpendicularis coincidat cum illo latere, cuius quadratum probādum est minus esse duobus quadratis aliorum duorum laterum, &c. Ita vt triangulum propositum sit rectangulum, quærendi sunt tres numeri pro lateribus, ex iis; quæ in scholio proposit. 47. lib. 1. scripsimus. Vt in figura regulæ 6. si in triangulo A B D, minimum latus B D, ponatur 5. erit A D, 12. & A B, 13. Vbi cernis quadratum lateris A D, acutò angulo B, oppositi, nempe 144. vnà cum eo, quod fit bis ex B D, in B D, hoc est, cum 25. 25. efficere 194. quantum videlicet conficiunt duo quadrata simul ex A B, B D, nimirum 169. 25. Eadem ratione, si minimum latus B D, statuatur partium 6. erit A D, 8. & A B, 10. Vbi etiam vides, quadratum lateris A D, acuto angulo B, subtensi, nimirum 64. vnà cum eo, quod fit ex B D, in B D, bis, hoc est, cum 36. 36. conficere 136. quem numerum etiam conficiunt duo numeri quadrati laterum A B, B D, nimirum 100. 36. Ita quoque cernis quadratum numerum lateris B D, acuto angulo A, oppositi, hoc est, 36. vnà cum eo, quod fit ex A D, in A D, bis, id est, cum 64. 64. efficere 164. quantum scilicet conficiunt duo numeri quadrati simul laterum A B, A D, nimirum 100. & 64. Denique si in alio triangulo A C D, minimum latus C D, ponas 9. reperies ex iis, quæ ad proposit. 47. lib. 1. scripsimus, A D, 40. & A C, 41. Vbi manifestum est, quadratum numerum lateris A D, angulo acuto oppositi, nimirum 1600. vnà cum numero, qui fit ex C D, in C D, bis; id est, cum 81. 81. facere 1762. qui numerus æqualis est quadratis numeris duorũ laterũ A C, C D, hoc est, duobus numeris 1681. 81. Hi enim conficiunt quoq; summam 1762. Quòd si minimũ latus C D, facias 7. comperies A D, 24. & A C, 25. in quibus numeris idem experieris. Nam quadratus numerus lateris C D, angulo acuto A, subtensi, id est, 49. vnà cum numero, qui bis producitur

ducitur ex A D, in A D, hoc est, cum 576.576. facit 1201. quantum scilicet efficiunt duo quadrati numeri laterum A C, A D, hoc est, 625.576.

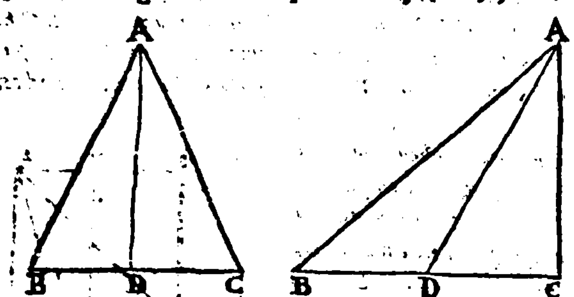



At si perpendicularis cadat extra triangulum, ita vt triangulum sit obtusangulum, quærendum erit segmentum exterius, vnà cum lateribus, vt in tribus regulis scholij præcedentis propositionis docuimus. Segmentum namque exterius cum latere producto dabit totum segmentum inter acutum angulum assumptum, & perpendicularem. Vt in figura regulæ 3. scholij antecedentis propositionis, erit segmentum totum C D, inter angulum acutum C, & perpendicularem B D, cadentem extra triangulum, 37. Vbi perspicuum est, quadratum lateris A B, angulo C, acuto oppositi, hoc est, 256. vnà cum rectangulo sub A C, C D, comprehenso bis, id est, cum 1184.1184. componere numerum 2624. qui æqualis est duobus quadratis simul laterum B C, A C, nimirum aggregato quadratorum numerorum 1600.1024. &c.

Neqve verò alienum putaui hoc loco ex Pappo Alexandrino sequens etiam theorema demonstrare.

Si in triangulo à quouis angulo recta linea ducatur, diuidens latus oppositum bifariam, erunt duo quadrata laterum eum angulum ambientium simul dupla duorum quadratorum simul sumptorum, quorum vnum ex linea ducta, alterum verò ex dimidiato latere describitur.

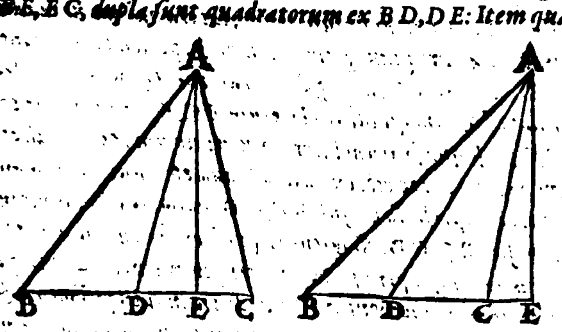
In triangulo A B C, recta A D, secet latus B C, bifariam in D. Dico quadrata ex A B, A C, dupla esse quadratorum ex A D, B D. Demittatur enim ex A, ad B C, perpendicularis, quæ primùm recta A D, congruat, ac proinde triangulum A B C, æquilaterum sit, vel Isosceles, vt ad proposit. 26. lib. 1. demonstrauimus. a Quoniam a 47. primi.




igitur tam quadratum ex A B, æquale est quadratis ex A D, D B, quàm quadratum ex A C, quadratis ex A D, D C; erunt duo quadrata ex A B, A C, æqualia quadrato ex A D, bis sumpto, vnà cũ quadratis ex D B, D C. Cùm ergo quadrata ex D B, D C, æqualia sint, si auferantur duo quadrata ex A D, D C, ablatũ erit dimidium quatuor quadratorum, nimirum quadrati ex A D, bis sumpti, & quadratorum ex D B, D C. Quare duo quadrata ex A B, A C, dupla sunt duorum quadratorum ex A D, D B. quod est propositum. Quod clariùs ita ostendetur. b Quoniam quadratum ex A B, duobus quadratis ex A D, D B, æquale est: Sunt autem duo quadrata ex A B, A C, quadrati ex A B, dupla, ob æqualitatem linearum A B, A C; erunt quoque quadrata ex A B, A C, dupla quadratorum ex A D, D B. Quod demonstrandum erat. b 47. primi.

Congrvat deinde perpendicularis A C, lateri A C. Et quia quadratum ex B C, quadruplum est tam quadrati ex B D, quàm quadrati ex D C, vt in scholio propositionis 4. huius libri ostendimus; erit idem quadratum ex B C, duplum duorum quadratorum ex D B, D C. Sunt autem duo quadrata ex A C, C D, bis sumpta, dupla quoque quadrati ex A D; quod c quadrata ex A C, C D, semel sumpta æqualia sint quadrati ex A D. Igitur quadratum ex B C, vnà cum quadratis ex A C, C D, bis sumptis, duplum erit quadratorum ex D B, D C, A D. Cùm ergo & quadratum ex C D, bis sumptum, duplum sit quadrati ex C D; d erit reliquum quadratum ex B C, vnà cum quadrato ex A C, bis sumpto, duplum quoque reliquorum quadratorum ex D B, A D. Sunt autem e quadrata ex B C, A C, æqualia quadrato ex A B. Igitur quadrata ex A B, A C, (quæ æqualia sunt quadrato ex B C, vnà cum quadrato ex A C, bis sumpto) dupla quoq; sunt quadratorum ex A D, D B. Quod est propositum. c 47. primi. d 20. pron. e 47. primi.

Tertio cadat perpendicularis A E, intra triangulum inter puncta D, C. Quia igitur f quadrata ex B E, E C, dupla sunt quadratorum ex B D, D E: Item quadrata ex A E, D E, bis sumpta dupla sunt quadrati ex A D; quòd g quadrata ex A E, E D, semel sumpta quadrato ex A D, æqualia sint; erunt quadrata ex B E, E C, vnà cum quadratis ex A E, D E, bis sumptis, dupla quoque quadratorum ex B D, D E, A D. Cùm ergo & quadratum ex D E, bis sumptum, duplum sit quadrati ex D E; h erunt reliqua quadrata ex B E, E C, vnà cum quadrato ex A E, bis sumpto, dupla quoque reliquorum quadratorum ex D B, A D. Quare cùm quadratis ex B E, A E, i æquale sit quadratum ex A B; & quadratis ex E C, A E, quadratum ex A C; erunt quoque quadrata ex A B, A C, dupla quadratorum ex A D, D B. Quod est propositum. f 9. secundi. g 47. primi. h 20. pron. i 47. primi.



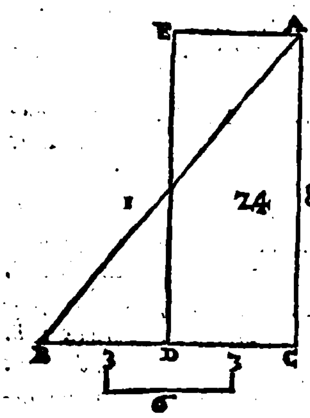
a 10.secundi. POSTREMO cadat perpendicularis A E, in latus B C, productum. Quoniam igitur [a] quadrata ex B E, C E, dupla sunt quadratorum ex B D, D E: Item quadrata ex A E, D E, bis sumpta, dupla sunt quadrati ex A D; quòd [b] quadrata ex A E, D E, semel sumpta, æqualia sint quadrato ex A D; erunt quadrata ex B E, C E, vnà cum quadratis ex A E, D E, bis sumptis, dupla quoque quadratorum ex B D, D E, A D. Cùm ergo & quadratum ex D E, bis sumptum, duplum sit quadrati ex D E; [c] erũt reliqua quadrata ex B E, C E, vnà cum quadrato ex A E, bis sumpto, dupla quoq; reliquorum quadratorum ex B D, A D. Quare cũ quadratis ex B E, A E, [d] æquale sit quadratum ex A B; & quadratis ex C E, A E, quadratum ex A C; erunt quoque quadrata ex A B, A C, dupla quadratorum ex A D, D B. Quod erat ostendendum.

b 47.primi.

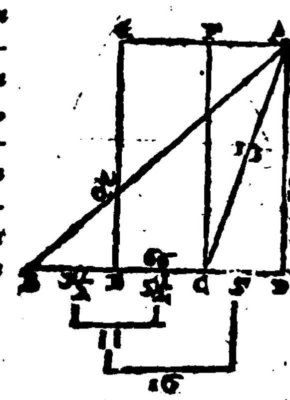
c 20.pron.

d 47.primi.

NON te moneat autem, quòd ad huius theorematis demonstrationem adhibuerimus pronunciatum 20. quod vniuersaliter in omni genere multiplicium ab Euclide demonstratur lib. 5. proposit. 5. quoniam in dupla proportione facilè concedi potest sine demonstratione, vt in expositione eius principij diximus: Vel propositio 5. lib. 5. ante hoc theorema demonstrari potest: Vel certè theorema ipsum post librum 5. demonstrari, ita vt circulus in demonstrando nulla ratione committatur, etiamsi principium illud demonstretur lib. 5. quia propositio 5. lib. 5. ex hoc theoremate non pendet.




EX his autem, quæ proximis duobus theorematibus, & proposit. 47. lib. 1. demonstrata sunt, aream cuiusque trianguli latera habẽtis nota inueniemus, vt rectè hoc loco monet Campanus, & Federicus Commandinus demonstrat, hac ferè ratione. Sit primò triangulum rectangulum A B C, cuius latera nota sint, nempe A B, 10. palmorum; A C, 8. B C. 6. Diuiso latere B C, bifariam in D, vt sint C D, B D, 3. palmorum, perficiatur rectangulum A C D E, quod æquale est triangulo A B C, vt in scholio propos. 41. lib. 1. ostendimus. Quia verò ex ductu C D, trium palmorum in C A, 8. palmorũ producitur area rectanguli C E, 24. palmorum quadratorum, vt ad initium huius libri docuimus; Totidem palmos quadratos cõtinebit triangulum A B C, rectangulo C E, æquale. Quod est propositum.

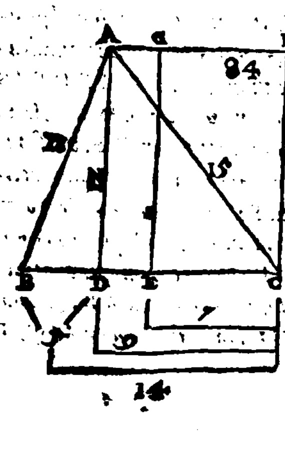



SIT deinde triangulum obtusangulum A B C, cuius latera sint cognita: A B, 20. palmorum; A C, 13. B C. 11. Primùm igitur inuenienda est quantitas perpendicularis lineæ A D ex A, in latus B C, protractum demissæ, hoc modo. Quoniam quadratum lateris A B, [e] maius est, quàm quadrata laterum A C, B C, rectangulo bis comprehenso sub B C, C D; si quadrata laterum A C, B C, nempe 169. 121. quæ efficiunt 290. detrahantur ex 400. quadrato lateris A B, remanebunt 110. pro rectangulo bis comprehenso sub B C, C D, cuius numeri dimidium 55. dabit rectangulum sub B C, C D. Si igitur 55. rectangulum sub B C, C D, diuidatur per 11. latus notum B C, exibit reliquum latus C D, 5. palmorum, vt Ioan. Regiomontanus demonstrat propos. 17. lib. 1. de triangulis, & à nobis demonstratũ est in lib. de mensurationibus omnium quantitatum. Quia verò quadrata laterum A D, C D, [f] æqualia sunt quadrato lateris A C; si quadratum 25. palmorum, nempe lateris C D, 5. palmorum nuper inuenti, auferatur ex 169. quadrato lateris A C, remanebũt 144. palmi pro quadrato lateris A D. Quare latus A D, erit 12. palmorum, cùm radix quadrata huius numeri 144. sit 12. Iam verò diuiso latere B C, bifariam in E, educantur ex C, E, ad B D, perpendiculares C F, E G, occurrentes rectæ A G, quæ per A, ipsi B D, parallela ducitur, in punctis F, G. Quibus peractis, si E C, palmorum quinque cum dimidio, ducatur in C F, 12. palmorum, (Est [g] enim C F, ipsi A D, æqualis,) exurget area rectanguli C G, 66. palmorum: quod cum æquale sit triangulo A B C, ex scholio propos. 41. lib. 1. (sunt enim rectangulum C G, & triangulum A B C, in eisdem parallelis, &c.) Erit quoq; area trianguli A B C, palmorum quadratorum 66. quod est propositum.

e 12.secundi.

f 47.primi.

g 34.primi.




SIT postremò triangulum acutangulum A B C, latera habens nota: A B, 13. palmorum; A C, 15. B C, 14. Primùm igitur hîc quoq; reperienda est quantitas perpendicularis A D, ex A, ad B C, demissæ, hac ratione. Quoniam quadratum lateris A B, [h] minus est, quàm quadrata laterum A C, B C, rectangulo comprehenso bis sub B C, C D; si quadratum lateris A B, nimirum 169. detrahatur ex quadratis laterum A C, B C, hoc est, ex 225. 196. quæ efficiunt 421. remanebunt 252. pro rectangulo comprehẽso bis sub B C, C D, cuius numeri dimidium 126. dabit rectangulum sub B C, C D. Si igitur 126. rectangulum sub B C, C D, diuidatur per B C, latus notum, vt per 14; exibit reliquum eius latus C D, palmorum 9. vt constat ex Ioan. Regiomontano lib. 1. de triangulis propos. 17. & à nobis demonstratum est in libro de mensurationibus omnium quantitatum. Quoniam autẽ quadrata ex A D, C D, [i] æqualia sunt quadrato ex A C; si quadratum 81. palmorum, nempe lateris C D, 9. palmorum nuper inuenti, aufera-

h 13.secundi.

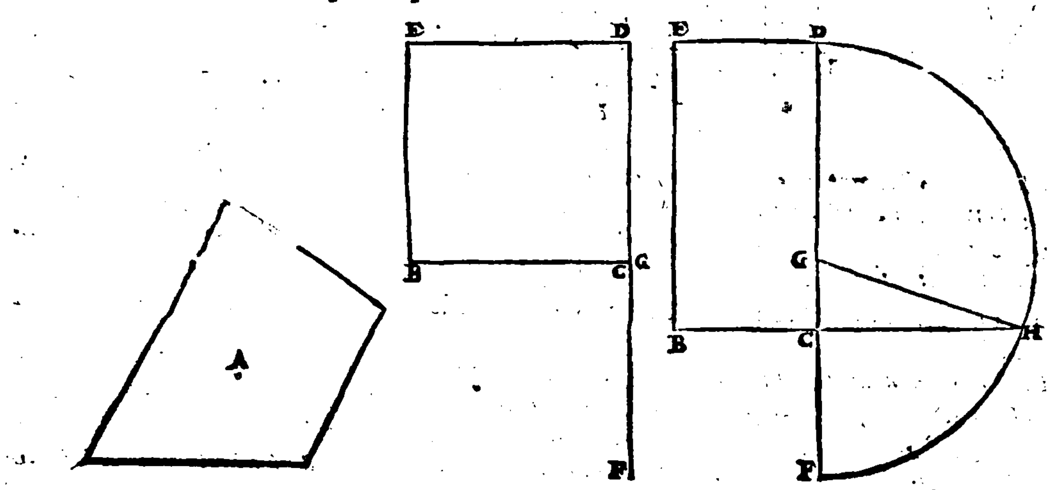
i 47.primi.

*tur ex 225. quadrato lateris A C; remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris A D. Quare cum radix quadrata huius numeri 144. sit 12; erit latus A D, 12. palmorum. Iam verò diuiso latere B C, bifariam in E, educantur ex C, E, ad B C, perpendiculares C F, E G, occurrentes rectæ A F, quæ per A, ipsi B C, parallela ducitur, in punctis G, F. Quibus peractis, si C E, 7. palmorum ducatur in E G, 12. palmorum; ( [a] est enim E G, rectæ ipsi A D, æqualis ) exurget area rectanguli E F, palmorum 84. Quod cum triangulo A B C, sit æquale, ex scholio propos. 41. lib. 1. (sunt enim rectangulum E F, & triangulum A B C, in eisdem parallelis, &c.) erit quoq; area trianguli A B C, 84. palmorum. Quod est propositum.* [a] 34. primi.

*Itaque in vniuersum area cuiuscunque trianguli producitur ex dimidio basis in perpendicularem, quæ à vertice ad basim demittitur, vt in exemplis datis est manifestum. Sed plura hac de re in libro de mensurationibus omnium quantitatum, quem propediem, Deo iuuante, in lucem edemus. Quo pacto autem, duobus lateribus, cum vno angulo, cognitis, vel duobus angulis, cum vno latere, reliqui anguli, & latera cognoscantur, demonstrauimus in nostris triangulis rectilineis.*

## PROBL. 2. PROPOS. 14. 14.

Dato rectilineo æquale quadratum constituere.



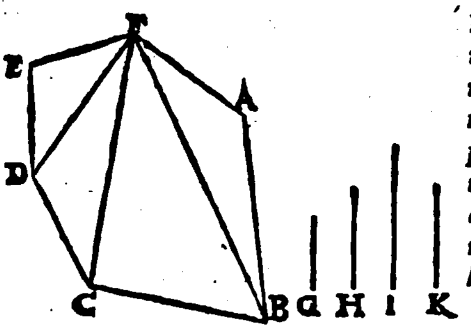

Sit datum rectilineum A, cui quadratum æquale constituendum est. [a] Constituatur parallelogrammum B C D E, æquale rectilineo A, habens angulum rectum, cuius vnum latus, vt D C, producatur ad F, sitque C F, recta æqualis rectæ B C. Diuidatur quoque D F, bifariam in puncto G, quod cadet aut in punctum C, aut non. Si cadit in punctum C, erit recta B C, (cùm æqualis ponatur rectæ C F,) rectæ C D, æqualis. Quare rectangulum B D, erit quadratum, cùm latera D E, E B, [b] æqualia sint oppositis lateribus B C, C D; atque adeò constitutum erit quadratum æquale rectilineo A. Si verò punctum G, non cadit in C; facto G, centro, describatur interuallo G D, vel G F, semicirculus F H D, producaturque B C, donec circunferentiam secet in H. Dico igitur, quadratum rectæ C H, esse æquale rectilineo A. Ducta enim recta G H; quia recta D F, diuiditur bifariam in G, & non bifariam in C; erit rectangulum comprehensum sub D C, C F, hoc est, rectangulum B D, vnà cum quadrato rectæ G C, [c] æquale quadrato rectæ G F, hoc est, quadrato rectæ G H; cùm rectæ G F, G H, sint æquales: At quadratum rectæ G H, [d] æquale est quadratis rectarum G C, C H. Igitur rectangulum B D, vnà cum quadrato rectæ G C, æquale quoque erit quadratis rectarum G C, C H. Quam ob rem dempto communi quadrato rectæ G C, remanebit rectangulum B D, hoc est, rectilineum A, quadrato rectæ C H, æquale. Dato ergo rectilineo æquale quadratum constituimus: Quod facere oportebat.

[a] 45. primi. [b] 34. primi. [c] 5. secundi. [d] 47. primi.

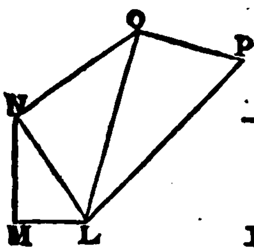
### SCHOLIVM.

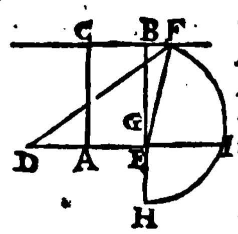
*Verum quia laboriosum est, rectangulum dato rectilineo multorum angulorum construere æquale, quod sæpius super datam rectam constituendum sit, ex propositione 44. libri 1. rectangulum æquale triangulo, faciliùs fortasse describemus quadratum dato rectilineo æquale, si datam figuram rectilineam in triangula resoluamus, & cuilibet triangulo quadratum æquale efficiamus, hoc est, latus quadrati, quod cuiuis triangulo æquale sit, inuestigemus: quod factu facillimum est, vt mox ostendemus. Nam si per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. scripsimus, inueniamus latus alterius quadrati, quod sit omnium inuentorum laterum quadratis æquale, factum erit, quod proponitur.*

*Vt si datum sit rectilineum A B C D E F, resoluemus illud in triangula A B F, F B C, C F D, D E F, inueniemusq; latera G, H, I, K, quorum quadrata sint illis ordine æqualia. Deinde angulum rectum constituemus M, & lineas L M, M N, lateribus G, H, æquales. Ducta autem recta N L, erigemus ad eam perpendicularem*




N O, lateri I, æqualem. Similiter ducta recta O L, excitabimus illi perpendicularem O P, lateri K, æqualem, iungemusq́; rectam P L. Atque hoc modo progrediemur, donec vltimo lateri sumpta sit perpendicularis linea æqualis, qualis hic fuit perpendicularis O P, vltimo lateri K, æqualis. Nam quadratum rectæ P L, postremo loco ductæ æquale erit omnibus quadratis laterum G, H, I, K, vt ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus, atq; adeò omnibus triangulis A B F, F B C, C F D, D E F, hoc est, datæ figuræ rectilineæ A B C D E F.

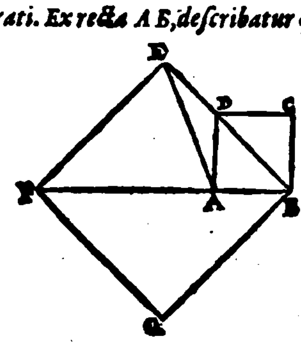



PRAXIS autem, qua cuiuis triangulo quadratum æquale inueniatur, facilis est. Sit enim inueniendum quadratum æquale quarto triangulo D E F, datæ rectilineæ figuræ. Diuidatur quodcunque latus, nempe D E, bifariam in A, producaturq́; quantum libet. Ducta deinde per angulum oppositum F, lateri D E, parallela F B, ducatur per E, ad D E, perpendicularis H E B, secans F B, in B, fitq́; E H, ipsi A E, dimidio lateris D E, æqualis. Postremò diuisa tota linea, B H, bifariam in G, describatur ex G, ad interuallum G H, vel G B, arcus secans latus D E, productum in I. Dico quadratum lateris E I, æquale esse triangulo D E F. Si namque compleatur rectangulum A E C, & semicirculus B H, ducaturq́; recta G I, ostendemus, vt in hac propos. 14. quadratum ex E I, rectangulo A B, æquale esse. Cùm ergo rectangulum A B, triangulo D E F, sit æquale, ex scholio propos. 41. lib. 1. quòd basis D E, sit dupla basis A E, constat propositum.

QVONIAM verò secundo hoc libro Euclides multa de rectangulis parallelogrammis, atque quadratis disputauit; rectè inseri hic poterit sequens problema de quadrato non iniucundum, ad hunc modum.

DATO excessu diametri alicuius quadrati supra latus eiusdem; Inuenire latus ipsius quadrati.




EXCEDAT diameter alicuius quadrati latus eiusdem recta A B; inueniendumq́; sit latus illius quadrati. Ex recta A B, describatur quadratum A C, cuius diameter ducta B D, producatur ad E, vt sit D E, rectæ A D, æqualis. Dico rectam E B, esse latus illius quadrati, cuius diameter excedit ipsum latus B E, excessu dato A B. Ducatur enim E F, perpendicularis ad B E, quæ rectam B A, productam secet in F. Quoniam igitur in triangulo B E F, angulus F E B, rectus est, & E B F, semirectus, ex
a 32. primi. corollario 2. propositionis 4. huius lib. [a] erit & B F E, semirectus. [b] Qua-
b 6. primi. re recta B E, F E, æquales sunt. Si igitur ex F, ducatur F G, parallela ipsi B E; & ex B, recta B G, parallela ipsi E F, occurrens priori in G; constitutum erit quadratum rectæ B E. Quòd si ducatur recta A E, [c] erunt an-
c 5. primi. guli A E D, E A D, æqualibus lineis D E, D A, oppositi æquales. Quare si demantur ex rectis angulis D E F, D A F, remanebũt anguli A E F, E A F,
d 6. primi. æquales; [d] ideoq́; rectæ E F, A F, æquales erunt. Quoniam verò diameter B F, rectam A F, superat data recta A B; superabit eadem diameter B F, latus quadrati E F, eadem recta A B, quod est propositum.

FINIS ELEMENTI SECVNDI.

EVCLI-

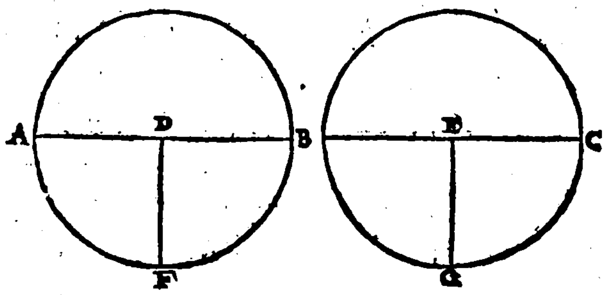
# EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVM.

## DEFINITIONES.

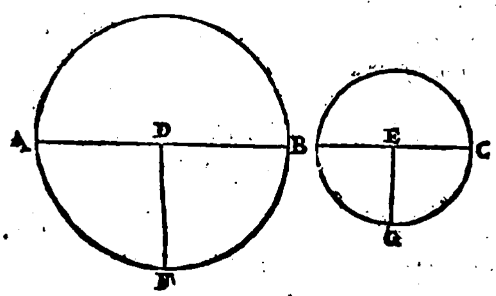
### I.

**AEQVALES** circuli sunt, quorum diametri sunt æquales; vel quorum, quæ ex centris, rectæ lineæ sunt æquales.

*QVONIAM Euclides hoc 3. libro varias circuli proprietates demonstrat, idcircò explicat priùs terminos quosdam, quorum frequens in eo futurus est vsus. Primùm itaque docet, eos circulos esse æquales, quorum diametri, vel semidiametri æquales sunt. Cùm enim circulus describatur ex circumuolutione semidiametri circa alterū extremum fixum, & immobile, vt libro 1. diximus, perspicuum est, eos circulos esse æquales, quorum semidiametri, seu rectæ ex centris ductæ, sunt æquales; vel etiam quorum totæ diametri æquales sunt.*

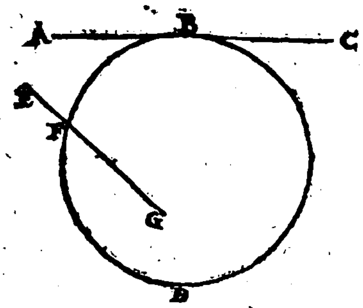


*Vt si diametri A B, B C, vel rectæ D F, E G, è centris D, & E, ductæ sint æquales, æquales erunt circuli A F B, & B G C. Sic etiam è contrario, si circuli sint æquales, erunt diametri, vel rectæ è centris ductæ, æquales. Ex his liquet circulos, quorum diametri, vel rectæ ductæ ex centris sunt inæquales, inæquales esse: atq; adeò illū, cuius diameter, vel semidiameter maior, maiorē. Et contrà, circulorū inæqualium diametros, semidiametrósve inæquales esse, maioris quidem maiorem, & minoris minorem.*



### II.

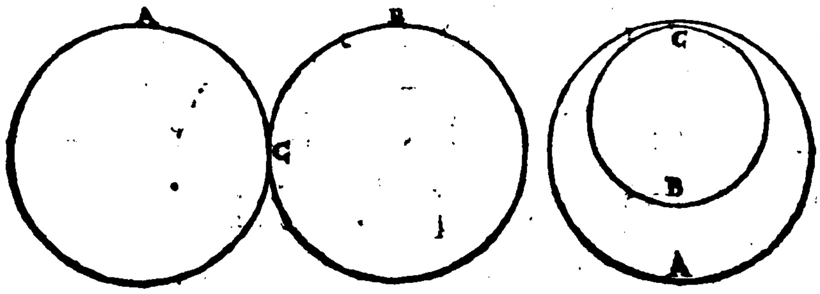
**RECTA** linea circulum tangere dicitur, quæ cùm circulum tangat, si producatur, circulum non secat.



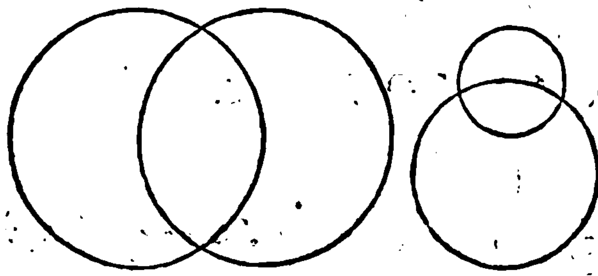
*VT recta A B, si ita circulum B F D, tangat in B, vt producta ad C, nulla ratione circulum secet, sed tota iaceat extra ipsum, dicetur tangere circulum. At verò recta E F, quia ita eundem circulum tangit in F, vt producta ad G, secet circulum, cadatq; intra ipsum, non dicetur circulum tangere, sed secare.*

### III.

**CIRCVLI** sese mutuò tangere dicuntur, qui sese mutuò tangentes, sese mutuò non secant.




*EODEM modo duo circuli A C, B C, ſe mutuò dicũtur tangere in C, ſi ita ſeſe cõtingant in C, vt neuter alterum ſecet. Eſt autem hic contactus circulorũ duplex. Aut enim exterius ſeſe circuli tangunt, vt quando vnus extra alterum eſt poſitus; aut interius, quando vnus intra alterum conſtituitur. Quòd ſi duo circuli ita ſe mutuò tangant, vt vnus alterum quoque ſecet, dicentur circuli illi ſe mutuò ſecare, & non tangere.*

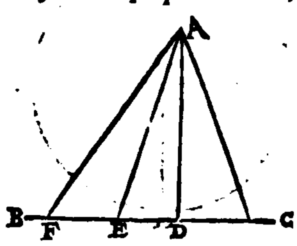


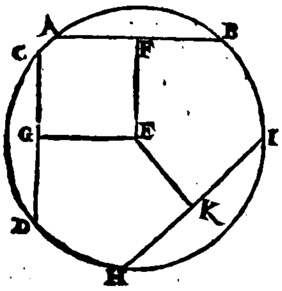
## IV.

IN circulo æqualiter diſtare à centro rectæ lineæ dicuntur, cũ perpendiculares, quæ à centro in ipſas ducuntur, ſunt æquales. Longius autẽ abeſſe illa dicitur, in quã maior perpendicularis cadit.

*QVONIAM inter omnes lineas rectas, quæ ab aliquo puncto ad quamlibet lineam rectam ducuntur, breuiſſima eſt perpendicularis, & ſemper eadem; aliæ verò infinitis modis variari poſſunt; rectè diſtantia illius puncti à linea illa recta accipitur penes lineam perpendicularem. Vt diſtantia puncti A, à recta B C, dicitur eſſe perpendicularis A D, non autem A E, vel A F, vel alia quæuis, quæ nõ perpendicularis eſt; quia A D, omnibus eſt breuior, ex corollario propoſitionis 19. libri 1. Immò non ſolùm A E, A F, maiores ſunt, quàm A D, ſed etiam ipſæ inter ſe inæquales ſunt. Eſt enim A F, [a] maior, quàm A E, cùm angulus A E F, ſit obtuſus, & A F E, acutus, & ſic de aliis lineis non perpendicularibus. Quòd enim A F E, acutus ſit, conſtat ex eo, quòd in triangulo A D F, duo anguli A D F, A F D, [b] minores ſunt duobus rectis. Hinc enim fit, cùm A D F, rectus ſit, angulum A F D, recto eſſe minorẽ. Eadem ratione angulus A E D, oſtendetur acutus propterea quòd in triangulo A D E, [c] duo anguli A D E, A E D, minores ſunt duobus rectis, & A D E, rectus eſt. ac proinde, cùm ambo A E D, A E F, [d] æquales ſint duobus rectis, erit A E F, obtuſus. Hinc factum eſt, vt Euclides æqualem diſtantiam rectarum in circulo ab ipſius centro definierit per æquales perpendiculares, & inæqualem diſtantiam per inæquales. Vt duæ rectæ A B, C D, in circulo A B C D, æqualiter dicẽtur diſtare à centro E, ſi perpẽdiculares E F, E G, æquales fuerint. At linea C D, longiùs abeſſe dicetur à centro E, quàm linea H I, ſi perpendicularis E G, maior fuerit perpendiculari E K.*

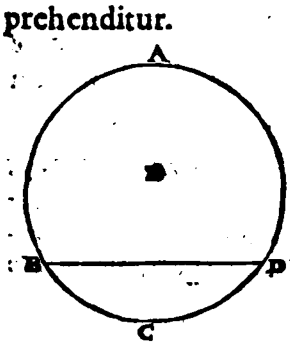
a 19. primi.
b 17. primi.
c 17. primi.
d 13. primi.




## V.

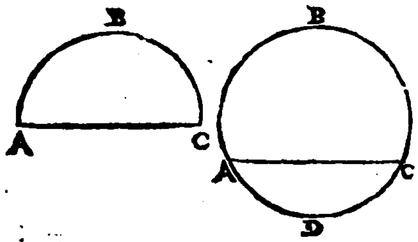
SEGMENTVM circuli eſt figura, quæ ſub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.




*VT ſi ducatur in circulo A B C D, recta B D, vtcunque, dicetur tam figura B A D, contenta circunferentia B A D, & recta B D; quàm figura B C D, comprehenſa recta B D, & circumferentia B C D, circuli ſegmentum. Ex his colligitur triplex circuli ſegmentum, Semicirculus, quando recta B D, per centrum E, incedit; Segmentum ſemicirculo maius, quando recta B D, non tranſit per centrum, in ipſo tamen centrum exiſtit, quale eſt ſegmentum B A D; Et Segmentum ſemicirculo minus, extra quod centrum circuli conſtituitur, cuiuſmodi eſt ſegmentum B C D. Id quod ad definitionem 18. lib. 1. demonſtrauimus. Vocatur à pleriſque Geometris recta B D, chorda, & circunferentia B A D, vel B C D, arcus.*

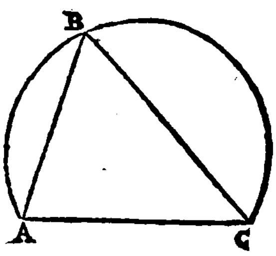
## VI.

SEGMENTI autem angulus eſt, qui ſub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.




*Definit iam Euclides tria genera angulorũ, q̃ in circulis consideretur. Primo loco angulum segmenti, dicens, angulum mixtum B A C, vel B C A, contentũ sub recta linea A C, & circunferentia A B C, appellari angulum segmenti. Quòd si segmẽtum circuli fuerit semicirculus, dicetur angulus semicirculi. Si verò segmentum maius semicirculo extiterit, vocabitur angulus segmenti maioris: Si denique segmentum minus fuerit semicirculo, angulus segmenti minoris nuncupabitur.*

VII.

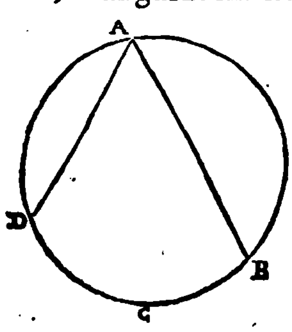


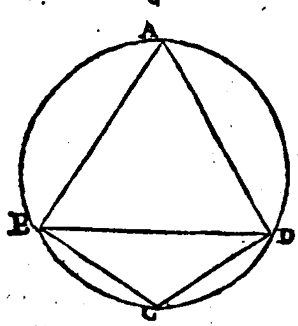

In segmento aũt angulus est, cũ in segmenti peripheria sumptũ fuerit quodpiam punctũ, & ab illo in terminos rectæ eius lineæ, quæ segmẽti basis est, adiunctę fuerint rectæ lineæ: Is, inquã, angulus ab adiunctis illis lineis cõprehensus.

*Sit segmentum circuli quodcunque A B C, cuius basis recta A C. Ex suscepto quolibet puncto B, in circunferentia, ducantur ad puncta A, & C, extrema basis, recta linea B A, B C. Angulus igitur rectilineus A B C, dicitur existere in segmento A B C.*

IIX.

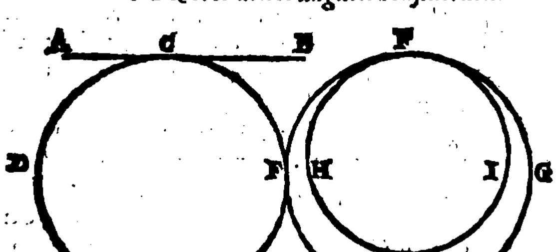
Cum verò comprehendentes angulum rectæ lineæ aliquam assumunt peripheriam, illi angulus insistere dicitur.




*Ex puncto A, quolibet suscepto in circunferẽtia circuli A B C D, ducãtur recta dua linea A B, A D, ad duo extrema B, & D, circũferẽtia B C D, cuiusq; quã quidẽ dua recta A B, A D, assumunt: Angulus itaq; rectilineus B A D, insistere dicitur circunferentia B C D. Perspicuũ autẽ est, hunc angulum à precedenti non differre, nisi voce tenus. Idem enim angulus rectilineus B A D, iuxta pracedentẽ quidẽ defin. dicitur esse in segmento B A D, si recta B D, basis duceretur; ex hac verò insistere circunferẽtia B C D. Non tamẽ confundendus est angulus in segmẽto aliquo, cũ angulo, q̃ circunferentia insistit, quãuis vnus et idem sit; ad diuersa siquidẽ referuntur. Angulus enim in segmento, segmentũ, in quo existit, angulus autẽ insistens circunferentia, circunferentiã, qua basis est ipsius anguli, respicit. Vnde si sumatur segmentũ aliquod circuli B C D, in circulo A B C D, nõ erit idẽ angulus in hoc segmẽto existens, & eius circunferentia insistens. Angulus enim in eo existens, erit B C D; at eius circunferẽtia B C D, insistẽs, erit angulus B A D, q̃ multũ ab eo differt. Qua in re mirũ in modũ hallucinati sunt Orontius, Peletarius, & alij interpretes nõnulli. Quòd aũt angulus in segmẽto, & angulus circunferẽtia cuipiã insistẽs, ad diuersos arcus referãtur, luce clarius patebit ex vlt. propos. lib. 6. qua solùm conuenire potest circunferẽtiis circulorũ, quibus anguli insistũt, non aũt in quibus existunt, vt eo in loco ostendemus. Idem quoq; facilè cõstat ex verbo Graco βεβηκέναι, quod ascendisse significat. Ascendit. n. angulus D A B, supra circunferentiã B C D.*

*Praeter tres dictos angulos consideratur etiã à Geometris angulus contingentia, q̃ continetur linea recta tangente circulũ, & circunferentia circuli; vel certè duabus circunferẽtiis se mutuò tangentibus, siue hoc exterius fiat, siue interius. Exemplum. Si recta A B, tangat circulum C D E, in C; angulus mixtus A C D, vel B C E, dicetur angulus contingentia, siue contactus: Rursus, si circulus C E D, tangat circulum E F G, exterius in E; Itẽ circulus H F I, circulũ E F G, interius in F; appellabitur tam angulus curuilineus C E F, q̃ E F H, vel G F I, angulus contactus, seu contingentia. Sunt itaq;, vt vides, tres anguli contingentia, vnus quidẽ mixtus, reliqui verò duo, curuilinei.*

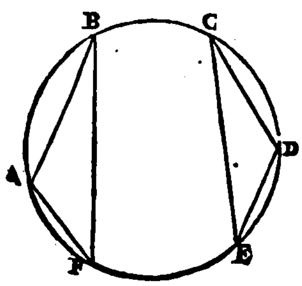



IX.


Sector autem circuli est, cũ ad ipsius circuli centrum constitutus fuerit angulus, comprehensa nimirũ figura, & à rectis lineis angulum continentibus, & à peripheria ab illis assumpta.

*Si in circulo A B C D, cuius centrũ E, recta A E, C E, constituant angulum A E C, ad centrum E; nominabitur figura A E C D, contenta rectis A E, E C, & circunferentia A D C, quam pradicta linea assumunt, Sector circuli. Ex hoc autẽ perspicuè etiam* *colligitur, angulum, qui defin. 8. explicatur, referri ad circunferẽtiam, quæ ipsius basis est, non autẽ ad eam, in qua existit, vt multi interpretes existimarunt. Nam sicut in hac defin. Euclides intelligit circunferentiam A D C, quæ basis est anguli ad centrũ constituti, quãdo mentionẽ facit peripheriæ à rectis A E, C E, assumptæ: Ita quoq; in illa intellexisse eum necesse est nomine peripheriæ, quam rectæ lineæ assumunt, eam, quæ basis est anguli ad circunferentiam constituti, quandoquidem in vtraq; defin. vsus est eodem verbo Græco ἀπολαμβάνω.*

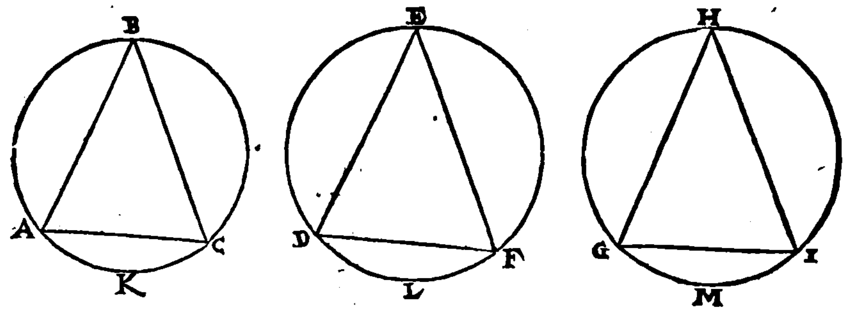
X.



SIMILIA circuli segmẽta sunt, quæ angulos capiũt æquales: Aut in quibus anguli inter se sunt æquales.

*SEGMENTA videlicet A B D F, D C A E, eiusdem circuli A B C D E F, quæ capiũt hos duos angulos A B F, D C E, æquales: vel, quod idem est, in quibus ijdem anguli æquales existunt, iuxta 7. defin. similia dicuntur, & ipsæ circunferentiæ A B D F, D C A E, similes quoq;.*

*EODEM modo segmenta diuersorũ circulorũ, tam æqualiũ, q̃ inæqualium, à Geometris dicuntur similia, q̃ vel suscipiunt æquales angulos; vel in quib. æquales anguli existunt. Vt si in circulis A B C K, D E F L, G H I M, anguli A B C, D E F, G H I, fuerint æquales, dicentur segmenta, seu circunferentiæ A B C, D E F, G H I, quæ dictos angulos suscipiunt, vel in quibus prædicti anguli existunt, similes.*

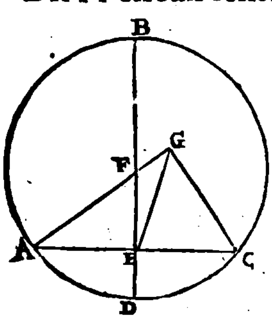


*Consistit autẽ hæc segmẽtorũ circunferentiarúmve similitudo in eo, q̃ qualis pars est vna circunferentia totius suæ circunferẽtiæ, talis quoq; sit altera circunferẽtia, quæ dicitur huic similis, totius suæ circunferẽtiæ; ita vt qualis, & quãta pars est circunferẽtia A B C, totius circunferẽtiæ A B C A, talis & tanta quoq; pars sit circunferentia D E F, totius circunferẽtiæ D E F D; Item talis, & tanta circunferentia G H I, totius circunferẽtiæ G H I G. Vel potius segmentorũ similitudo in hoc cõsistit, q̃ segmenta, seu circunferẽtiæ similes, ad totas circunferentias suas eandẽ habeant proportionẽ. Quòd autẽ segmenta, quæ vel æquales suscipiunt angulos, vel in quibus existunt æquales anguli, sint huiusmodi, demonstrabimus propos. vlt. lib. 6. Nunc satis sit, talia segmenta circulorũ, vel etiam arcus, circunferentiásve appellari similes.*

*EADEM ratione dicũtur arcus, vel circunferẽtiæ similes, quibus æquales anguli, iuxta defin. 8 insistunt. Vt si in iisdem circulis anguli A B C, D E F, G H I, sint æquales, dicentur arcus circunferentiæúe A K C, D L F, G M I, quibus insistunt, similes. Immò si anguli ad centra insistentes arcubus A K C, D L F, G M I, sint æquales, erunt adhuc ipsi arcus similes. Id quod à nobis in scholio propos. 22. huius lib. demonstrabitur.*

1. 
## PROBL. 1. PROPOS. 1.

DATI circuli centrum reperire.



SIT circulus datus A B C D, cuius centrum oportet inuenire. Ducatur in eo linea vtcunq; A C, [a] quę bifariã diuidatur in E, & per E, ad A C, perpendicularis agatur B D, vtrinq; in peripheria terminata in punctis B, D. Hac igitur bifariam secta in F; dico F, esse centrũ circuli propositi. In ipsa enim rectã B D, aliud punctũ, præter F, non erit centrum, cũ omne aliud punctũ ipsam diuidat inæqualiter, quandoquidem in F, diuisa fuit æqualiter. Si igitur F, nõ est centrũ, sit punctum G, extra rectam B D, centrum, à quo ducantur lineæ G A, G E, G C. Quoniã ergo latera A E, E G, trianguli A E G, æqualia sunt lateribus C E, E G, trianguli C E G; & basis A G, basi C G; (à centro enim ducuntur) [b] erũt anguli A E G, C E G, æquales, ideoq; recti: Erat autem & angulus A E F, rectus ex cõstructione. Igitur recti A E F, A E G, æquales sunt, pars & totũ. quod est absurdum. Non est ergo punctum G, centrum; eademq; est ratio de omni alio. Quare F, centrum erit. Itaque dati circuli centrum reperimus. Quod erat faciendum.

a 10. primi.

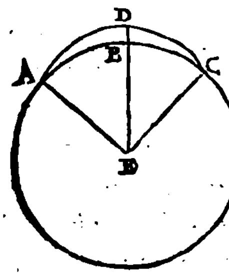
b 8. primi.

COROLLARIVM.

*HINC manifestũ est, si in circulo recta aliqua linea aliquã rectam lineã bifariã, & ad angulos rectos secet, in secãte esse centrũ circuli. Nam ex eo quòd B D, recta rectã A C, bifariam secat in E, & ad angulos rectos, ostensũ fuit, punctũ eius mediũ F, necessariò esse circuli centrũ.*

2. 
## THEOR. 1. PROPOS. 2.

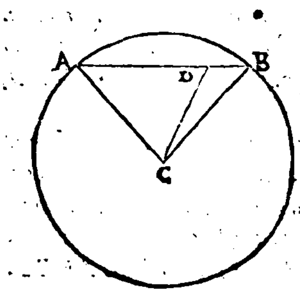
SI in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint; Recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur, intra circulum cadet.




In circulo A B C, sumantur quælibet duo puncta A, & C, in eius circumferentia. Dico rectam ex A, in C, ductam cadere intra circulum, ita vt ipsum secet. Si enim nō cadit intra, cadat extra, qualis est linea A D C, recta, vt vult aduersarius. Inuento [a] igitur centro E, ducantur ab eo ad puncta assumpta A, & C, necnon ad quoduis punctū D, in recta A D C, lineæ rectæ E A, E C, E D, secetque E D, circunferentiam in B. Quoniam ergo duo latera E A, E C, trianguli, cuius basis ponitur recta A D C, æqualia sunt, (è centro enim ducuntur) [b] erunt anguli E A D, E C D, æquales: Est autem angulus E D A, [c] angulo E C D, maior, externus interno opposito, cùm latus C D, in triangulo E C D, sit productum ad A. Igitur & angulo E A D, maior erit idem angulus E D A. Quare recta E A, maiori angulo A D E, opposita, hoc est, recta E B, sibi æqualis. [d] maior erit, quàm recta E D, minori angulo D A E, opposita, pars, quàm totum. Quod est absurdum. Non igitur recta ex A, in C, ducta extra circulum cadet, sed intra. Eodem enim modo demonstrabitur, rectam ductam ex A, in C, nō posse cadere super arcum A B C, ita vt eadē sit, quæ circunferentia A B C. Esset enim recta E A, maior q̄ recta E B. Quod etiā ex definitione rectæ lineæ patet, cū A B C, arcus sit linea curua, non autē recta. Itaque si in circuli peripheria duo quælibet puncta, &c. Quod erat ostendendum.

a 1. tertij.
b 5. primi.
c 16 primi.
d 19. primi.

## *SCHOLIVM.*




*Idem hoc theorema demonstrari poterit affirmatiuè hoc modo. Recta A B, coniungat duo puncta A, & B, in circunferentia circuli A B, cuius centrū C. Dico rectā A B, intra circulum cadere, ita vt omnia eius puncta media intra circulum existant. Assumatur enim quodcunq; eius punctū intermedium D, & ex centro educantur rectæ C A, C B, C D. Quoniam igitur duo latera C A, C B, trianguli C A B, æqualia sunt, [a] erunt anguli C A B, C B A, æquales: Est autem angulus C D A, [b] angulo C B A, maior, externus interno. Igitur idem angulus C D A, angulo C A D, maior erit, & ob id latus C A, [c] latere C D, maius erit. Quare cùm C A, sit ducta à centro ad circunferentiam vsq;, non perueniet recta C D, ad circunferentiam, ideoq; punctum D, intra circulum cadet. Idem ostendetur de quolibet alio puncto assumpto. Tota igitur recta A B, intra circulum cadit. Quod est propositum.*

a 5. primi.
b 16. primi.
c 19. primi.

## COROLLARIVM.

*Hinc est manifestum, lineam rectam, quæ circulum tangit, ita vt eum non secet, in vno tantū puncto ipsum tangere. Si enim in duobus punctis eum tangeret, [d] caderet pars rectæ inter duo puncta posita, intra circulum. Quare circulum secaret, quod est contra hypothesin.*

d 2. tertij.

# THEOR. 2. PROPOS. 3.

3.

Si in circulo recta quædam linea per centrum extensa quandam non per centrum extensam bifariam secet; & ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoque eam secabit.


Per centrum A, circuli B C D, recta C E, extensa diuidat rectam B D, non per centrum extensam, bifariam in F. Dico rectam A F, esse ad angulos rectos ipsi B D. Ductis enim rectis A B, A D, erunt duo latera A F, F B, trianguli A F B, duobus A F, F D, trianguli A F D, æqualia; & bases A B, A D, æquales; [e] Igitur anguli A F B, A F D, æquales erunt, hoc est, recti. Quod erat primò propositum. e 8. primi.

Sit iam A F, ad angulos rectos ipsi B D. Dico rectā B D, bifariam secari in F, à recta C E. Ductis enim iterum rectis A B, A D; cū latera A B, A D, trianguli A B D, sint æqualia, [b] erunt anguli A B D, A D B, æquales. Quoniam igitur duo anguli A F B, A B F, trianguli A B F, æquales sunt duobus angulis A F D, A D F, trianguli A D F; & latera A B, A D, quæ rectis angulis æqualibus opponuntur, æqualia quoque: [c] erunt latera F B, F D, æqualia. Quod secundò proponebatur. Si igitur in circulo recta quædam linea per centrum extensa, &c. Quod demonstrandum erat.

b 5. primi.
c 26. primi.

Facile quoque demonstrari poterat secunda hæc pars, quæ quidem conuersa est primæ partis, hac ratione. Si enim A F, perpendicularis est ad B D, erit tam quadratum rectæ A B, [d] æquale quadratis rectarum A F, F B, quàm quadratum rectę A D, quadratis rectarum A F, F D. Cùm igitur quadratum rectæ A B, æquale sit quadrato rectæ A D, erunt & quadrata rectarum A F, F B, æqualia quadratis rectarum, A F, F D. Quare dempto communi quadrato rectæ A F, remanebunt quadrata rectarum F B, F D, æqualia; atque idcircò & rectæ F B, F D, æquales erunt.

d 47. primi.

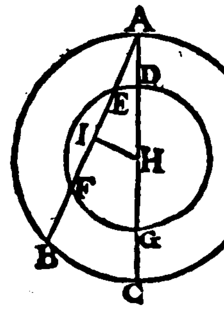
## COROLLARIVM.

*Ex hac demonstratione facilè inferemus, in quouis triangulo duorum laterum æqualium, siue æquilaterum illud sit, siue Isosceles, lineam, quæ basim bifariam secet, perpendicularem esse ad basim: Et contrà, lineam, quæ ad basim sit perpendicularis, basim secare bifariam. Nam in triangulo A B D, cuius duo latera A B, A D, æqualia sunt, atq; adeò ex centro A, per B, D, circulus describi potest; ex eo, quòd recta A F, secat basim B D, bifariam, ostensum est, angulos ad F, esse rectos: Et ex eo, quòd anguli ad F, recti sunt, demonstratum est, basim B D, à recta A F, bifariam secari. Sed hoc etiam demonstrauimus ad propositionem 26. libri 1. & quidem vniuersaliùs.*

## SCHOLIVM.

*CENSEMVS quoque demonstrandum esse hoc loco sequens theorema, ad ea, quæ sequuntur, non inutile: videlicet.*

DVOBVS circulis ex eodem centro descriptis, si ab aliquo puncto circunferentiæ exterioris recta ducatur interioris circunferentiam secans: erunt eius segmenta inter vtramq; circunferentiam posita, inter se æqualia.




a 15. defin.
b 3. pron.

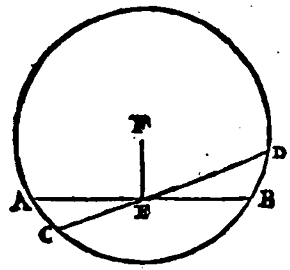
*DVO circuli A B C, D E F G, habeant idem centrum H, & ex puncto A, ducatur primùm per centrum H, recta A C, secans circunferentiam interiorem in D, G. Dico rectas A D, C G, æquales esse. Nam si ex H A, H C, quæ [a] æquales sunt, demantur H D, H G, quæ eadem ratione æquales sunt, [b] erunt rectæ A D, C G, æquales.*

c 12. primi.
d 3. tertij.
e 3. pron.

*DEINDE ex eodem puncto A, ducatur recta A B, nō per centrum, secans interiorem circunferentiam in E, F. Dico rursus, rectas A E, B F, esse æquales. [c] Ducta enim ex centro H, ad A B, perpendiculari H I, [d] secabit hæc tam rectam A B, in circulo A B C, quàm rectam E F, in circulo D E F G, bifariam. Ablatis igitur æqualibus I E, I F, ex æqualibus I A, I B, [e] remanebunt A E, B F, æquales. quod est propositum.*

4. 
## THEOR. 3. PROPOS. 4.

SI in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuò secent non per centrum extensæ; sese mutuò bifariam non secabunt.

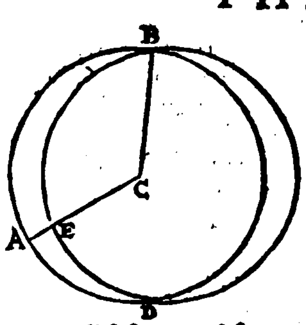



a 1. tertij.
b 3. tertij.

DVAE rectæ AB, CD, se mutuò in E, secent in circulo A C B D, non per centrū extensæ. Dico fieri non posse, vt mutuò sese bifariam secent. Si enim vna earum per centrum transit, certum est, eam bifariam non secari: solùm enim in centro, per quod altera ponitur non transire, bifariam diuiditur: Si verò neutra per centrum extenditur, quamuis vna earum nonnunquā bifariam ab altera diuidatur, tamen altera minimè secabitur bifariam. Diuisa enim sit & A B, & C D, si fieri potest, bifariam in E. [a] Inuēto igitur centro circuli F, ducatur ab eo ad E, recta F E. Quoniam ergo F E, ponitur secare rectā A B, bifariam in E, [b] secabit ipsam ad angulos rectos. Eadē ratione secabitur C D, ad angulos rectos, cùm ponatur bifariā diuidi in E. Quare rectus angulus F E D, recto angulo F E B, æqualis est, pars toti, quod est absurdum. Itaque si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuò secent, &c. Quod erat demonstrandum.

5. 
## THEOR. 4. PROPOS. 5.

SI duo circuli sese mutuò secent; non erit illorum idem centrum.



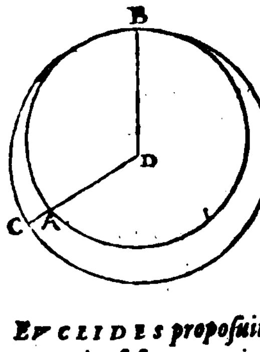

a 1. pron.

DVO circuli A B D, E B D, se mutuò secēt in B, & D. Dico ipsos non habere idem centrum. Sit enim, si fieri potest, idem centrum vtriusq; C, à quo duæ rectæ ducantur; C B, quidem ad sectionē B; C A, verò secans vtramque circunferentiam in A, & E. Quoniam igitur C, centrum ponitur circuli E B D, erit recta E C, rectæ B C, æqualis. Rursus quia C, centrum quoque ponitur circuli A B D, erit & recta A C, eidem rectæ B C, æqualis. Quare rectæ E C, A C, [a] æquales inter se erūt, pars, & totum, quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese mutuò secent, &c. Quod ostendendum erat.

6. 
## THEOR. 5. PROPOS. 6.

SI duo circuli sese mutuò interius tangant; eorum non erit idem centrum.

Dvæ




Dvo circuli A B, B C, se interius tangant in B. Dico eos non habere idem centrum. Habeant enim, si fieri potest, idem centrum D, à quo duæ rectæ ducãtur: D B, quidem ad tactum B; At D C, secans vtramque circunferentiam in A, & C. Quoniam igitur D, ponitur centrum circuli A B, erit recta A D, rectæ B D, æqualis. Rursus quia D, ponitur centrum circuli B C, erit recta C D, eidem rectæ B D, æqualis. Quare rectæ A D, & C D, [a] inter se erunt æquales, pars & totum, quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese mutuò interius tangant, &c. Quod demonstrandum erat. *a 1. pron.*

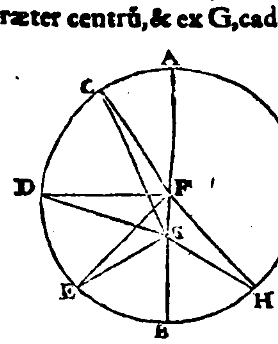
*SCHOLIVM.*

*Evclides proposuit theorema hoc de circulis sese interius tangentibus duntaxat, quoniam circulorum exterius sese tangentium, cùm vnus sit extra alium, non posse esse idem centrum, manifestum est.*

## THEOR. 6. PROPOS. 7. 7.

**Si in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, quod circuli centrum non sit, ab eoque puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant; Maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima verò reliqua; aliarum verò propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore semper maior est: Duæ autem solùm rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad vtrasque partes minimæ, vel maximæ.**

In diametro A B, circuli A C D E B, cuius centrum F, punctum assumatur quodcunque G, præter centrũ, & ex G, cadant in circulum quotcunque lineæ G C, G D, G E. Dico omnium, quæ ex G, ad circunferentiam ducuntur, maximam esse G A, in qua est centrum, minimam verò reliquam G B, quæ diametrum perficit: Deinde rectam G C, quæ rectæ G A, per centrum ductæ propinquior est, maiorem recta G D, quæ ab eadem G A, plus distat; & eadem ratione G D, maiorem recta G E; atque ita de aliis lineis, si ducerentur, in infinitum. Denique ex G, ad vtrasque partes minimæ lineæ G B, vel maximæ G A, duci posse tantummodò duas lineas inter se æquales. Ducantur è centro F, ad C, D, & E, rectæ lineæ F C, F D, F E. Quoniam igitur duo latera G F, F C, trianguli G F C, [b] maiora sunt latere G C; Sunt autẽ rectæ G F, F C, æquales rectis G F, F A, hoc est, toti rectæ G A; erit & G A, maior, quàm G C. Eadem ratione maior erit recta G A, quàm G D, & quàm G E. Quare G A, maxima est omnium, quæ ex G, in circulum cadunt. *b 20. primi.*




Deinde, quoniam in triangulo E F G, latus E F, [c] minus est duobus lateribus F G, G E; Est autem E F, ipsi F B, æqualis; erit & F B, minor duabus rectis F G, G E. Dempta ergo communi recta F G, remanebit adhuc G B, minor, quàm G E. Eadem ratione minor erit G B, quàm G D, & quàm G C. Quare G B, minima est omnium, quę ex G, in circuli circunferentiam cadunt. *c 20. primi.*

Rvrsvs, quia duo latera G F, F C, trianguli G F C, æqualia sunt duobus lateribus G F, F D, trianguli G F D; & angulus totus G F C, maior est angulo G F D; [d] erit basis G C, maior base G D. Eadem ratione maior erit G C, quàm G E. Item maior erit G D, quàm G E. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior est ea, quæ remotior. *d 24. primi.*

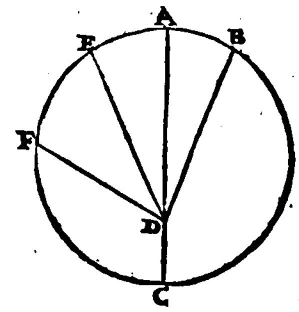
Fiat iam angulo B F E, ex altera parte æqualis angulus B F H, & ducatur recta G H. Quoniam igitur latera E F, F G, trianguli E F G, ęqualia sunt lateribus H F, F G, trianguli H F G, & anguli his lateribus contenti E F G, H F G, æquales: [e] erunt rectæ G E, G H, ex vtraque parte ipsius lineæ minimæ G B, vel maximæ G A, æquales inter se. Quòd autem nulla alia his duabus possit esse æqualis, constat. Nam si ex G, ducatur alia, quæ cadat supra punctum H, erit ea, cùm sit ei, quæ per centrum ducitur, propinquior, maior quàm G H: si verò cadat infra H, erit ea, cùm sit remotior ab eadem G A, per centrum ducta, minor quàm G H, vt ostensum fuit. Duæ igitur duntaxat rectæ lineę æquales ad vtrasque partes minimæ G B, vel maximæ G A, cadunt. Itaque si in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, &c. Quod erat demonstrandum. *e 4 primi.*

*SCHOLIVM.*

*Qvanqvam autem Euclides solùm demonstrauerit lineam, quæ propinquior est rectæ per centrum ductæ, remotiore esse maiorem, si ambæ lineæ ex eadem parte diametri A B, existant: idem tamẽ verum etiam est, si ad diuersas partes ductæ sint. Vt si quis dicat, rectam G D, propinquiorem esse rectæ G A, quàm rectam G H; dico G D, maiorem esse, quàm G H. Si namque ipsi G H, ex altera parte æqualis ducatur G E, vt dictum est, nempe si fiat angulo G F H, æqualis angulus G F E, &c. cadet punctum E, inter D, & B: quod G H, G E, æqualiter à G A, distent, ob æqualitatem angulorum G F H, G F E: & G D, ponatur minus distare, quàm G H, ac proinde minus, quàm G E. Cùm [a] ergo G D, maior sit, quàm G E, maior quoq; erit eadem G D, quàm G H.* a 7. tertij.

*HANC porrò propositionem nonnulli conuertunt hoc modo.*

SI intra circulum punctum sumatur, ab eoque puncto in circulum rectarum linearum cadentium, vna quidem maxima sit, vna verò minima; & reliquarum aliæ sint inæquales, aliæ æquales: Maxima quidem per centrum transibit, minima verò erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem erunt maximæ propinquiores, æquales autem ab eadem maxima, vel minima æqualiter distabunt.




*IN circulo A B C, punctum sumatur D, à quo rectæ quotcunque D A, D C, D E, D F, D B, cadant in circunferentiam, quarum omnium maxima sit D A, minima verò D C; ipsarum verò D E, D F, maior sit D E; denique D E, D B, sint æquales. Dico D A, per centrum transire, & D C, reliquam partem esse diametri, hoc est, D C, ipsi D A, esse in directum. Item D E, quæ maior ponitur, quàm D F, propinquiorem esse maximæ D A, quàm D F. Denique D E, D B, æqualiter ab eadem D A, vel D C, abesse. Primùm enim si D A, nō transit per centrum; ducta ex D, per centrū recta quapiam linea, [a] erit ea omnium ex D, cadentium maxima. Quod est absurdum; cùm D A, maxima ponatur. Transit ergo D A, per centrum.*

a 7. tertij.

b 7. tertij. *DEINDE si D C, non est in directum ipsi D A; protracta A D, in directum, [b] erit alia recta, quàm D C, ex D, cadens, nempe pars ipsius A D, protractæ, omnium minima; Quod est absurdum; cùm D C, minima ponatur. Est ergo D C, reliqua pars diametri.*

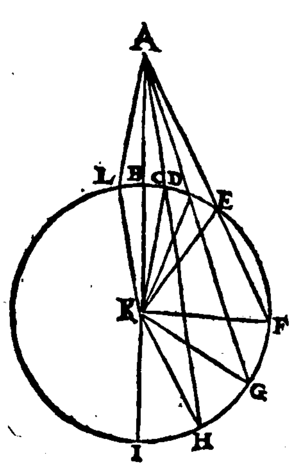
c 7. tertij. *RVRSVS si D E, non est vicinior maximæ D A, quàm D F; aut æqualiter distabunt ab ea, aut D E, longiùs ab ea aberit: Si æqualiter vtrinque à D A, dicantur distare, [c] ipsæ erunt æquales; quod est absurdum. Ponitur enim D E, maior. Si verò æqualiter ex eadem parte à D A, distare dicantur, erunt D E, D F, vna eademq́ linea; atq; adeò D E, maior non erit, quàm D F, quod est contra hypothesim. Quòd si D F, dicatur esse propinquior maximæ D A, [d] ipsa erit maior, quàm D E. Quod magis est absurdum.*

d 7. tertij.

e 7. tertij. *POSTREMO si D E, D B, non æqualiter distant à D A, vel D C, [e] erit ea, quæ magis distat, reliqua minor. Quod est absurdum. Ponuntur enim æquales D E, D B.*

## 8. THEOR. 7. PROPOS. 8.

SI extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ verò vt libet: In cauam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem est illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autē propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore, semper maior est; In conuexam verò peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem est illa, quæ inter punctum & diametrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior est minimæ, remotiore semper minor est. Duæ autē tantùm rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipsum circulum cadunt, ad vtrasque partes minimæ, vel maximæ.




Ex puncto A, extra circulum B C D E, cuius centrum K, lineæ secantes circulum ducantur, quarum A I, per centrum transeat, aliæ verò A H, A G, A F, vtcunque. Dico omnium esse maximam A I, quę per centrū incedit: Deinde rectam A H, quæ rectæ A I, quæ per centrū ducitur, propinquior existit, maiorē recta A G, quæ remotior est ab eadem A I: Et eadem ratione A G, maiorem, quàm A F. E contrario autem, rectam A B, omnium, quæ extra circulum sunt, minimam esse: Deinde rectam A C, quæ vicinior est minimæ A B, minorē esse recta A D, remotiore: Et eadē ratione, ipsam A D, minorē, q̄ A E. Deniq; ex A, ad vtrasque partes minimæ lineæ A B, vel maximæ A I, duci posse tantummodò duas lineas rectas inter se æquales. Ducantur ex centro K, ad puncta C, D, E, F, G, H, rectæ K C, K D, K E, K F, K G, K H.

a 20. primi. Quoniam igitur duo latera A K, K H, trianguli A K H, [a] maiora sunt recta A H; Sunt autem rectæ A K, K H, æquales rectis A K, K I, hoc est, toti rectæ A I; erit & A I, maior, quàm A H. Eadem ratione erit A I, maior, quàm A G, & quàm A F. Quare A I, est omnium, quæ ex A, in circulum cadunt, maxima.

b 24. primi. DEINDE, quoniam latera A K, K H, trianguli A K H; æqualia sunt lateribus A K, K G, trianguli A K G; Et angulus totus A K H, maior est angulo A K G; [b] erit basis A H, basi A G, maior. Eadem ratione maior erit A H, quàm A F: Item A G, maior, quàm A F. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior est linea remotiore.

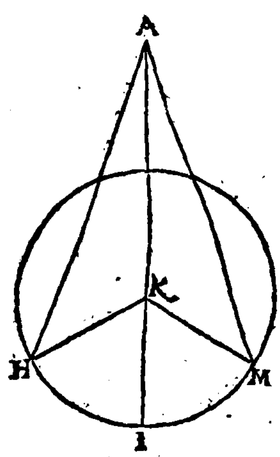
c 20. primi. RVRSVS, quia in triangulo A C K, recta A K, [c] minor est duabus A C, C K; si auferantur æquales B K, les B K, C K: remanebit adhuc A B, minor, quàm A C. Simili ratione erit A B, minor, quàm A D, & quàm A E. Quare A B, omnium linearum extra circulum, quæ ex A, ducuntur, minima est.

RVRSVS, cùm intra triangulum A D K, cadant duæ rectæ A C, C K, ab extremitatibus lateris A K; [a] erunt A C, C K, minores, quàm A D, D K. Sublatis igitur æqualibus C K, D K, remanebit adhuc A C, minor, quàm A D. Pari ratione erit A C, minor, quàm A E: Item A D, minor, quàm A E. Quare linea propinquior minimæ lineæ A B, minor est, quàm remotior ab eadem. [a] 21. primi.

POSTREMO fiat angulo A K C, angulus A K L, æqualis, & ducatur recta A L. Quoniam igitur latera A K, K C, trianguli A K C, æqualia sunt lateribus A K, K L, trianguli A K L; Sunt autem & anguli A K C, A K L, dictis lateribus contenti æquales; [b] erunt rectæ A C, A L, ex vtraque parte minimæ A B, vel maximæ A I, inter se æquales. Quòd autem nulla alia his possit esse æqualis, constat. Nam si ex A, ducatur recta cadens vltra L, erit ipsa, cùm sit remotior à minima, maior quàm A L. Quòd si cadat inter B, & L, erit ea, cùm sit minimę propinquior, minor quàm A L, vt ostensum est. Duæ igitur solùm rectæ lineæ æquales ad vtrasque partes minimæ, vel maximæ cadunt. Si igitur extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoq; puncto ad circulum deducantur rectę quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, &c. Quod erat demonstrandum. [b] 4. primi.

## SCHOLIVM.

*EADEM ratione ab A, in peripheriam concauam duæ tantùm lineæ æquales cadent, ad vtrasque partes maximæ A I.*



*FIAT enim angulo A K H, æqualis angulus A K M, iungaturq; recta A M. Quia igitur latera A K, K H, æqualia sunt lateribus A K, K M; sunt autem & anguli A K H, A K M, æquales: [a] erunt bases A H, A M, æquales. Neque verò vlla alia his duabus æqualis exhiberi potest. Nam quæcunque ex A, ducatur ad partes H; ea vel maior erit, vel minor, quàm A H, prout citra vel vltra rectam A H, ducta fuerit, vt manifestum est ex demonstratione theorematis.* [a] 4. primi.

*HAEC propositio vera etiam est, quando vna linearum ex A, cadentium circulum tangit. Hæc enim quia longiùs à linea per centrum ducta abest, minor erit omnibus aliis in cauam peripheriam cadentibus, qualis est recta A M, in priori figura. Nam ducta recta K M, ex centro ad contactum, erunt duo latera A K, K F, trianguli A K F, æqualia duobus lateribus A K, K M, trianguli A K M, angulus verò A K F, angulo A K M, maior. Igitur [b] basis A F, base A M, maior erit. Eadem ratione maior erit quæcunque alia in cauam peripheriam cadens, quàm recta A M.* [b] 24. primi.

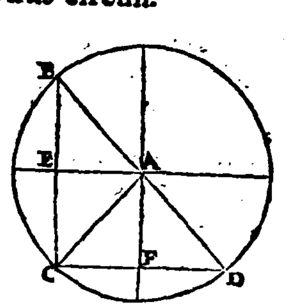
*PARI ratione eadem linea tangens A M, maior erit omnibus aliis in conuexam peripheriam cadentibus. Nam cùm duo latera A E, E K, [c] minora sint duobus lateribus A M, M K; si auferantur æquales rectæ K E, K M, erit reliqua A E, minor quàm reliqua A M. Eademq; ratio est de cæteris.* [c] 21. primi.

*QVAMQVAM verò Euclides solùm demonstrauerit, lineam propinquiorem ei, quæ per centrum ducitur, maiorem esse remotiore: Item lineam propinquiorem minimæ minorem esse remotiore, si ambæ lineæ ex eadem parte maximæ, vel minimæ existant: idem tamen verum etiam est, si ad diuersas partes ductæ sint. Quod non aliter demonstrabitur, quàm idem in scholio præcedentis propositionis de duabus lineis ad diuersas partes ductis demonstratum fuit.*

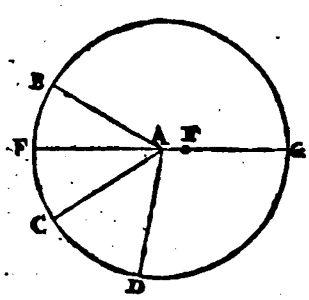
# THEOR. 8. PROPOS. 9.

9.

SI in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quàm duæ, rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum est ipsius circuli.



A puncto assumpto A, in circulo B C D, cadant plures rectæ quàm duæ A B, A C, A D, inter se æquales. Dico A, punctum esse centrum circuli. Connectantur enim puncta B, C, D, rectis B C, C D; quibus diuisis bifariam in E, & F, ducantur ex A, rectæ A E, A F. Quoniam igitur latera A E, E B, trianguli A E B, æqualia sunt lateribus A E, E C, trianguli A E C; & bases A B, A C, ponuntur etiam æquales; [a] erunt anguli A E B, A E C, æquales, ideoque recti. Eodem modo ostendemus angulos ad F, esse rectos. Quare cùm rectæ A E, A F, diuidant rectas B C, C D, bifariam, & ad angulos rectos, transibit vtraque producta per centrum circuli, per corollarium propositionis 1. huius libri. Punctum igitur A, in quo se mutuò secant, centrum erit circuli. Si enim esset aliud punctum centrum, non transiret vtraque per centrum. Si itaque in circulo acceptum fuerit punctum, &c. Quod demonstrandum erat. [a] 8. primi.



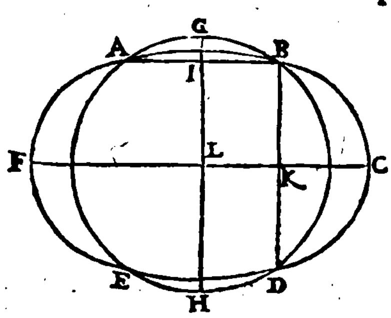

a 1. tertij. ALITER. Si punctum A, non est centrum circuli,[a] sit centrum inuentum E, ex quo per A, agatur diameter F G. Quoniam igitur in diametro F G, præter centrum acceptum est punctum A, à quo in circunferentiam cadunt rectæ A D, A C;[b] erit recta A D, quæ propinquior est rectæ A G, per centrum E, ductæ maior, quàm recta A C, (b 7. tertij.) remotior ab A G. quod est absurdum. Positæ sunt enim æquales rectæ A D, A C. Idem absurdum sequetur, si aliud punctum præter A, centrum ponatur.

QVOD si quando recta per centrum E, & punctum A, ducta coincidat cum vna trium æqualium datarum, vt si dicantur æquales tres (c 7. tertij.) A B, A F, A C, vbi E A, coincidit cum A F;[c] erit A F, omnium à puncto A, cadentium minima, atque adeò minor, quàm A B, & A C. quod est absurdum. Ponitur enim vtrique æqualis.

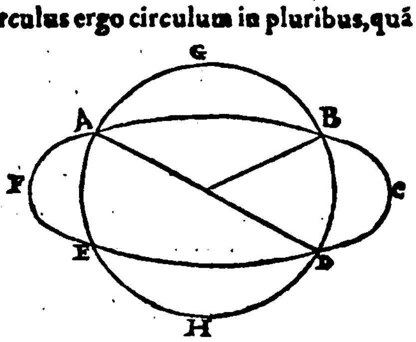
10.

## THEOR. 9. PROPOS. 10.

CIRCVLVS circulum in pluribus, quàm duobus, punctis non secat.




SECET enim, si fieri potest, circulus A B C D E F, circulũ A G B D H E, in pluribus, quàm duobus, punctis A, B, & D, (d 10. primi.) quæ iungãtur rectis A B, B D: quibus[d] bifariã diuisis in I, & (e 11. primi.) K,[e] educãtur ex I, & K, ad A B, & B D, perpẽdiculares I L, K L. Quoniã igitur rectæ I L, K L, secant rectas A B, B D, in circulo A G B D H E, bifariã, & ad angulos rectos; transibit vtraque, ex corollario propos. 1. huius lib. per centrum ipsius. Quare punctum L, in quo se diuidũt, erit centrum dicti circuli. Eodem modo demonstrabimus, punctum L, esse centrum circuli A B C D E F. Duo igitur circuli se mu- (f 5. tertij.) tuò secantes idem possident centrũ,[f] quod est absurdum. Circulus ergo circulum in pluribus, quã duobus, punctis non secat. Quod erat demonstrandum.

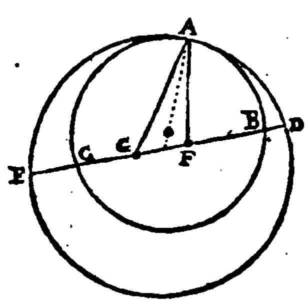



ALITER. Secent se iidem duo circuli, si fieri (g 1. tertij.) potest, in tribus punctis A, B, & D.[g] Inuentum autem sit I, centrum circuli A G B D H E, à quo ad dicta tria puncta ducantur rectæ I A, I B, I D, quæ per definitionem circuli æquales erunt inter se. Quoniam igitur intra circulum A B C D E F, assumptum est punctum I, à quo cadunt in circunferentiam plures, quàm duæ, rectæ æ- (h 9. tertij.) quales,[h] erit I, centrum circuli A B C D E F. Erat autem idem punctum I, centrum circuli A G B D H E. Duo ergo circuli se mutuò secan- (i 5. tertij.) tes habent idem centrum.[i] Quod est absurdum.

11.

## THEOR. 10. PROPOS. 11.

SI duo circuli sese intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra; ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.



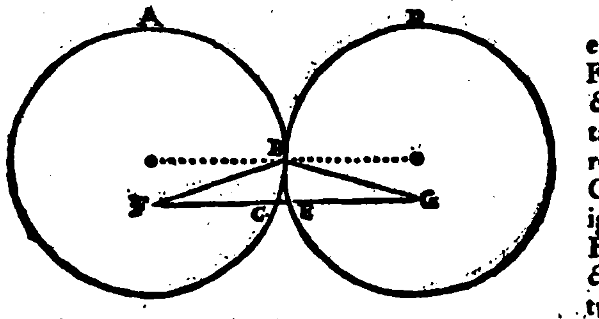

TANGAT circulus A B C, circulũ A D E, intus in A, & sit F, centrum circuli A B C, & G, centrum circuli A D E, quod necessariò (k 6. tertij.) ab illo diuersum erit, cùm duo circuli interius se tangentes,[k] non possint idem centrum habere. Dico rectam extensam per G, & F, cadere in contactum A. Si enim non cadit, secet vtrumque circulum in punctis D, B, C, E, & ex contactu A, ad centra F, G, rectę ducantur A F, A G. Quoniã igitur in triangulo A F G, duo latera G F, (l 20. primi.) F A,[l] maiora sunt latere G A; Est autem G A, recta rectæ G D, æqualis; (quod G, positum sit centrum circuli A D E,) erunt & G F, F A, rectæ maiores recta G D. Dempta igitur communi G F, remanebit F A, maior, quàm F D. Quare cùm F A, æqualis sit ipsi F B; (quòd F, positum fuerit centrum circuli A B C,) erit & F B, maior, quàm F D, pars quàm totum, quod est absurdum.

QVOD si quis velit contendere F, esse centrum circuli A D E, & G, centrum circuli A B C, insti- (m 20. primi.) tuetur argumẽtatio hac ratione. In triangulo A F G, duo latera F G, G A,[m] maiora sunt latere F A: Est autem recta F A, rectæ F E, æqualis. (cùm F, ponatur centrum circuli A D E.) Igitur rectæ F G, G A, maiores sunt recta F E. Dempta ergo communi F G, remanebit G A, maior, quàm G E. Quia igitur G A, æqualis est ipsi G C; (propterea quòd G, ponitur esse centrum circuli A B C,) erit quoque

que G C, maior, q̃ G E, pars q̃ totum, quod est absurdum. Idem absurdum sequetur, si centrum maioris circuli extra minorem ponatur. Non ergo recta F G, extensa vtrumque circulum secabit, sed in contactũ A, cadet. Quare si duo circuli sese intus contingant, &c. Quod erat demonstrandũ.

## THEOR. 11. PROPOS. 12. 11.

Si duo circuli sese exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum transibit.

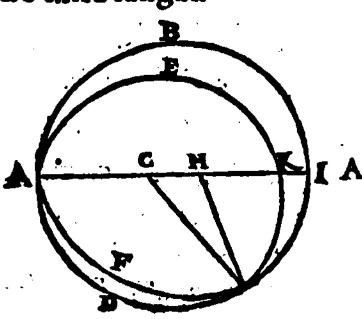


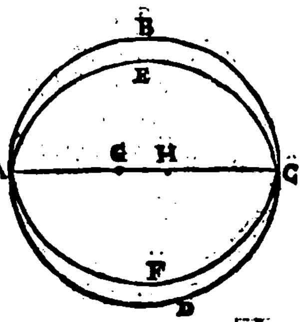

Circvli duo A B C, D B E, tangant se exterius in B, & centrum circuli A B C, sit F, circuli verò D B E, centrũ sit G. Dico rectam extensam per F, & G, transire per contactũ B. Si enim non transit, secet circunferentias in C, & E, ducanturque à centris F, G, ad B, contactũ rectæ F B, G B. Quoniam igitur in triangulo F B G, latera duo B F, B G, [a] maiora sunt latere F G: Est autem recta B F, rectæ F C, æqualis; (quòd F, ponatur centrum circuli A B C,) & recta G B, rectæ G E, æqualis; (quòd G, ponatur centrũ circuli D B E,) erunt & rectæ F C, G E, maiores quàm recta F G, pars quàm totum, (cùm F G, contineat præter F C, G E, rectam adhuc C E,) quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese exterius contingant, &c. Quod erat demonstrandum.

a 20. primi.

## THEOR. 12. PROPOS. 13. 12.

Circvlvs circulum non tangit in pluribus punctis, quàm vno, siue intus, siue extra tangat.



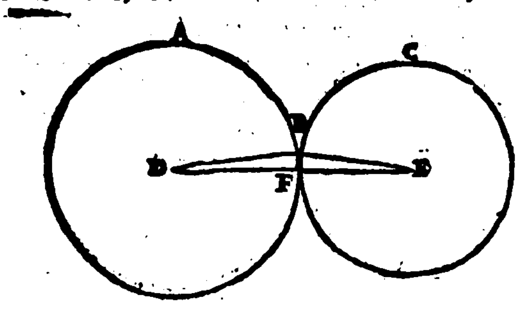




Tangant sese circuli A B C D, A E C F, intus, si fieri potest, in pluribus punctis, quã vnõ A, & C: Assumantur autem centra horum circulorum G, H, [b] quæ diuersa erunt; per quæ recta G H, in vtramq; partem extendatur, quam necesse est [c] cadere in contactus A, & C. Itaque cùm G, sit centrũ, & recta A G H C, diameter, diuidetur A G H C, bifariam in puncto G. Simili ratione diuidetur eadem A C, bifariam in H. quod est absurdum. Vna enim recta in vno duntaxat puncto diuiditur bifariam. Si namque G C, est dimidium totius A C, erit necessariò H C, dimidio minor, cùm sit pars dimidij G C.

b 6. tertij.
c 11. tertij.

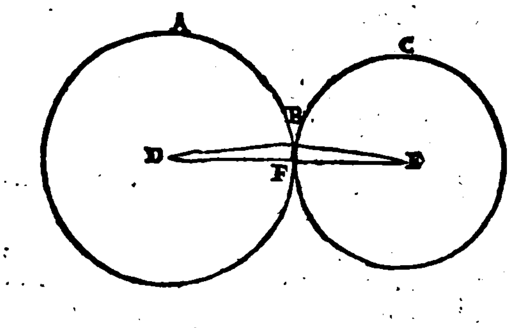
Qvod si quis dicat rectam G H, extensam ad partes quidem G, cadere in contactum A; At verò ad partes H, minimè pertinere ad contactum C, sed secare vtrumque circulum in I, & K, vt in secunda figura perspicuũ est: (Dicere enim quis posset, in præcedenti propositione ostensum esse, rectam per duo centra circulorum sese intus tangentium ductam cadere in vnum duntaxat contactum, non autem in alterum, quod tamen nemo rectè affirmare poterit, cùm demonstratio præcedentis propositionis vtrique contactui conueniat. Sed quidquid dicat aliquis, ostendemus absurdum illud esse.) ducendę erunt ex centris G, H, ad contactum C, rectę G C, H C. Ponatur igitur primò G, centrum circuli A B C D, & H, centrum circuli A E C F. Et quia in triangulo G H C, duo latera G H, H C, [d] maiora sunt latere G C; Sunt autem rectæ G H, H C, æquales ipsi G K: (quòd H C, H K, ex centro H, sint æquales, & G H, communis) & recta G C, rectæ G I; (quòd sint ex G, centro) erit quoque recta G K, maior quàm G I, pars quàm totum. quod est absurdum. Ponatur secundò G, centrum circuli A E C F; & H, centrum circuli A B C D. Quoniam igitur rectæ H G, G C, [e] maiores sunt recta H C; Est autem H C, æqualis rectæ H A; (cùm vtraque ducta sit ex centro H,) erunt quoque H G, G C, maiores recta H A. Quare dempta communi H G, erit G C, maior quàm G A. quod est absurdum, cũ vtraq; ex centro G, ducatur. Non igitur circuli intus se tangent in pluribus punctis, quàm vno.

d 20. primi.
e 20. primi.




Tangant se iam circuli A B, C B, exterius in pluribus punctis, quàm vno prope F. Ducatur ex D, centro circuli A B, ad E, centrũ circuli C B, recta D E, [f] quæ per contactum F, necessa-

f 12. tertij.



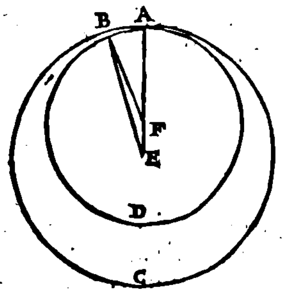
riò transibit. Si igitur etiam in alio puncto præter F, se tangunt, tangant sese in B. Ductis igitur rectis D B, E B, erũt rectæ D B, E B, æquales re-
a 20. primi. ctis D F, E F, hoc est, ipsi D E: a Sunt autem & maiores. quod est absurdum. Non ergo se tangent circuli exterius in pluribus punctis, q̃ vno.

ALITER. Si circuli A B, C B, exterius se tangant in duobus punctis B, & F; ducta recta B F, cadet ipsa intra vnum circulorum, per secundam propositionẽ huius tertij libri, & ideò extra alium, quod est contra eandem propositionem. Quare circulus circulum non tangit, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

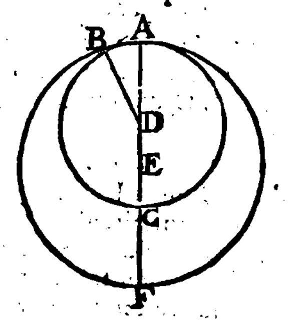
*SI rectè consideretur Euclidis demonstratio, qua probauit, circulum à circulo intus non posse tangi in pluribus punctis, quàm vno, videtur ea potissimum concludere, circulum non posse tangi à circulo in duobus, vel pluribus punctis, quæ longo interuallo à se dissideant, nõ autem eundem contactum plura puncta habere non posse; quamuis facilè hoc ipsum eodem argumento ferè demonstrari possit. Quare vt omni ex parte confirmatum relinquatur, circulum nõ posse tangere circulum in pluribus punctis, quàm vno, ostendemus breuiter, in vno eodemq; contactu nõ posse esse plura puncta, quàm vnum. Tangat enim circulus A B C, circulum A B D, prope A; & per eorum centra E, & F,*[a] *quæ diuersa sunt, recta ducatur E F,*[b] *quæ ad contactum perueniet necessariò, vt ad punctum A. Dico igitur, hos circulos sese duntaxat tangere in puncto A. Si enim se tangant in alio etiam puncto, vt in B, ductis ex B, ad centra E, & F, rectis B E, B F,*[c] *erunt rectæ E F, F B, maiores recta E B. Est autem recta E B, æqualis rectæ E A, cùm vtraque sit ex centro E. Igitur & rectæ E F, F B, maiores erunt recta E A. Quare dempta communi E F, remanebit F B, maior, quàm F A. quod est absurdum, cùm F B, F A, cadant è centro F, ad circunferentiam, ideoq; ex circuli definitione æquales existant: In solo ergo puncto A, se mutuò tangent circuli A B C, A B D, & non in alio.*

a 6. tertij.
b 11. tertij.
c 20. primi.



*NON videtur etiam omittendum hoc loco sequens theorema, videlicet.*

SI in semidiametro circuli producta punctum vltra centrum sumatur, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum semidiametri punctum descriptus tanget priorem circulum in dicto puncto extremo semidiametri, totusque extra eundem cadet.



*SIT circulus A B C, cuius centrum D, & in semidiametro A D, producta sumatur punctum quodcunque E, ex quo ad interuallum E A, circulus describatur A F, quem dico circulum A B C, in solo puncto A, tangere. Aut enim punctum E, est intra circulum A B C, aut extra. Si intra, quoniam A E, maior est, quàm A D, hoc est, quàm D C, hoc est, à fortiori, quàm E C; erit quoque E F, quæ ipsi A E, æqualis est, maior, quàm E C: ac proinde punctum F, extra circulum A B C, existet, circulusq; A F, extra eundẽ circulum A B C, prope punctum F, existet. Multò magis punctum F, extra circulum A B C, cadet, si E, extra eundem circulum A B C, existet. Si igitur circulus A F, non totus extra circulum A B C, cadat, ita vt eum in solo puncto A, tangat, secet, vel tangat circulus A F, circulum A B C, in alio puncto B, si fieri potest, ducaturq; recta D B. Quoniam igitur in diametro circuli A F, sumptum est punctum D, præter centrum E,*[d] *erit D A, omnium rectarum ex D, cadentium minima. Minor est ergo D A, quàm D B. quod est absurdum. Sunt enim æquales rectæ D A, D B, cadentes ex centro D, in circunferentiam eiusdem circuli A B C. Non ergo circulus A F, circulum A B C, secat aut tangit in alio puncto, quàm in A, sed totus extra illum cadit. Quod est propositum.*

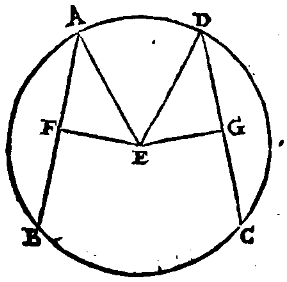
d 7. tertij.

*QVOD si in semidiametro non producta punctum sumatur citra centrum, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum semidiametri punctum descriptus tanget quoq; priorem circulum in dicto puncto extremo semidiametri, totusq; intra eundem cadet. Vt si in semidiametro A E, circuli A F, sumatur punctum D, ex quo ad interuallum D A, circulus describatur A B C, cadet hic totus intra illum, tangetq; eum in solo puncto A. Cùm enim ostensum proximè sit, circulum A F, cadere totũ extra circulum A B C, cadet vicissim totus hic intra illum, ita vt se mutuò in solo puncto A, contingant.*

## 13. THEOR. 13. PROPOS. 14.

IN circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro. Et quæ æqualiter distant à centro, æquales sunt inter se.

SINT




SINT in circulo A B C D, cuius centrũ E, duæ rectæ æquales AB, C D. Dico ipsas æqualiter distare à centro E. Ducantur enim ex E, centro ad rectas A B, C D, duæ perpendiculares E F, E G, & coniungantur rectæ E A, E D. [a] Secabunt rectę E F, E G, rectas A B, C D, bifariam. Quare cùm totæ A B, C D, æquales ponantur, erunt & dimidia earum, rectæ videlicet A F, D G, æqualia. Quoniam igitur quadrata rectarum E A, E D, æqualium, inter se sunt æqualia; Quadratum autem rectæ E A, [b] æquale est quadratis rectarum A F, F E; & quadratum rectæ E D, quadratis rectarum D G, G E: Erunt quoq; quadrata rectarum A F, F E, æqualia quadratis rectarum D G, G E. Ablatis ergo quadratis æqualibus æqualium rectarum A F, D G, remanebunt quadrata rectarum F E, G E, æqualia; ideoq; & rectæ E F, E G, æquales erunt. Distant igitur per 4. defin. huius libri rectæ A B, C D, æqualiter à centro E.

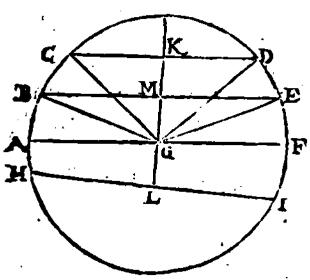
a 3. tertij.
b 47. primi.

RVRSVS distent rectæ A B, C D, æqualiter à centro E. Dico eas inter se esse æquales. Ducantur enim iterum ex centro E, ad A B, C D, perpendiculares E F, E G, quæ per 4. defin. huius lib. æquales erunt; [c] diuidentque rectas A B, C D, bifariam. Ductis igitur rectis E A, E D, erunt earum quadrata æqualia: Est autem quadratum rectæ E A, [d] æquale quadratis rectarum A F, F E; & quadratum rectæ E D, æquale quadratis rectarum D G, G E. Igitur & quadrata rectarum A F, F E, æqualia sunt quadratis rectarum D G, G E; ideoque ablatis æqualibus quadratis æqualium rectarum E F, E G, remanebunt quadrata rectarum A F, D G, æqualia; atq; adeò rectæ A F, D G, ac propterea earum duplæ A B, C D, æquales quoq; erunt. Itaque in circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro, &c. Quod erat demonstrandum.

c 3. tertij.
d 47. primi.

## THEOR. 14. PROPOS. 15. 14.

IN circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autẽ propinquior centro, remotiore semper maior.

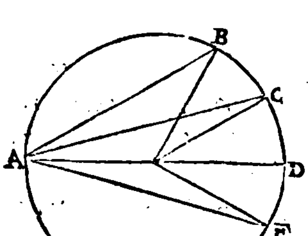



IN circulo A B C D E F, cuius centrum G, diameter sit A F; & recta ei propinquior H I, remotior autẽ C D. Dico omnium esse maximam A F; & H I, maiorem, quàm C D. Ducantur enim ex G, centro rectæ G K, G L, perpendiculares ad C D, H I. Et quia remotior est C D, à centro, quàm H I, erit G K, maior quàm G L, per 4. defin. huius libri. Abscindatur ex G K, recta G M, ipsi G L, æqualis, atque per M, educatur B M E, perpendicularis ad G K, & connectantur rectæ G B, G C, G D, G E. Quoniam igitur rectæ perpendiculares G M, G L, æquales sunt, æqualiter distabũt rectæ B E, H I, à cẽtro, per 4. defin. huius lib. [e] & ideò inter se æquales erunt. Rursus quia rectę G B, G E, [f] maiores quidẽ sunt recta B E, æquales autem diametro A F; erit & diameter A F, maior, quàm B E. Eadem ratione ostendetur A F, maior omnibus aliis lineis. Deinde quia latera G B, G E, trianguli B G E, æqualia sunt lateribus G C, G D, trianguli C G D; & angulus B G E, maior est angulo C G D; [g] erit recta B E, maior, quàm C D, atque adeò H I, quæ æqualis ostensa fuit ipsi B E, maior quoque erit, quàm C D. In circulo igitur maxima quidem linea est diameter, &c. Quod erat demonstrandum.

e 14. tertij.
f 20. primi.
g 24. primi.

### SCHOLIVM.

*EODEM ferè modo demonstrabitur theorema, si ab vno, eodémque circunferentiæ punctò plurimæ lineæ cadant.*




*CADANT enim à puncto A, plures lineæ A B, A C, A D, quarum A D, per centrum E, transeat. Dico A D, esse omnium maximã, & A C, maiorem remotiore A B. Ductis enim rectis B E, C E; cùm in triangulo A E C, latera A E, E C, [a] maiora sint latere A C; sintq; rectæ A E, E C, æquales rectis A E, E D, hoc est, rectæ A D; maior erit A D, quàm A C. Eademq; ratione maior erit, quàm A B; & sic de cæteris. Maxima ergo omnium est A D.*

a 20. primi.

*DEINDE, quia duo latera A E, E C, trianguli A E C, æqualia sunt duobus lateribus A E, E B, trianguli A E B; & angulus A E C, totus maior est angulo A E B, erit [b] basis A C, maior base A B. Eodemq; argumento erit A C, maior quacunq; alia linea, quæ à centro remotior est.*

b 24. primi.

*CAETERVM & hic duæ tantùm æquales lineæ duci possunt à puncto A, ad vtrasque partes maximæ A D. Si namque angulo A E C, æqualis fiat angulus A E F, iungaturq; recta A F; cùm latera A E, E C, æqualia sint lateribus A E, E F, & anguli contenti quoq; A E C, A E F, æquales; [c] erunt bases A C, A F, æquales. Neque verò vlla alia his duabus æqualis potest exhiberi. Quæcunque enim ducatur ex A, super A C, ea minor erit, quàm A C; si verò infra A C, ea maior erit, vt iam demonstratum est.*

c 4. primi.

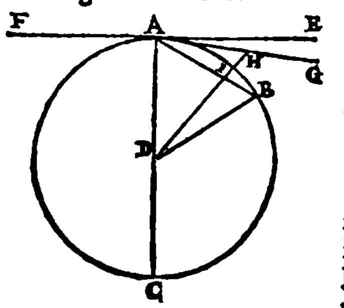
*QVOD si A B, A F, ad diuersas partes diametri A D, ductæ sint, & dicatur A F, propinquior centro, quàm A B, demonstrabitur, vt in scholio proposit. 7. huius libri A F, maiorem esse, quàm A B. Si namque, vt proximè*

*ostensum fuit, ducatur ipsi A F, æqualis A C, ex altera parte, nempe si fiat angulo A E F, æqualis angulus A E C,*
a 14. tertij. *&c. cadet punctum C, inter B, & D; quòd A F, A C,[a] æqualiter distent ab A D, ob earũ æqualitatem, aut certè ob æquales angulos A E F, A E C. Hinc enim fit, cùm A F, ponatur propinquior centro, quàm A B, vt & A C, ipsi A F, æqualis, propinquior sit centro, q̃ A B, ac proinde punctum C, sit inter B, & D. Cùm ergo A C, maior sit, quàm A B, vt in hoc scholio demonstratum est, maior erit quoq; A F, quàm A B.*

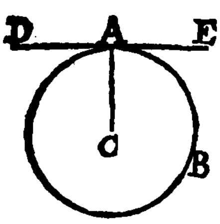
## 15. THEOR. 15. PROPOS. 16.

QVAE ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locum inter ipsam rectam lineam, & peripheriam comprehensum, altera recta linea non cadet, & semicirculi quidem angulus, quouis angulo acuto rectilineo maior est; reliquus autem minor.

IN circulo A B C, cuius centrum D, diameter sit A C, ad quam ex A, puncto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularem necessariò extra circulum cadere. Si enim ca-
a 5. primi. dit intra ipsum, qualis est A B; ducta D B,[a] erunt duo anguli D A B, D B A, æquales: sed D A B, rectus est, per constructionem: Igitur & D B A, rectus erit, quod est absurdum. Duo enim anguli
b 17. primi. in triangulo[b] minores sunt duobus rectis. Non igitur cadet perpendicularis intra circulum; neque eandem ob causam in ipsam circunferentiam, sed extra, qualis est E F. Dico iam ex A, inter A E, rectam, & circunferẽtiam AB, non posse cadere alteram rectam. Cadat enim, si fieri potest, recta AG, ad quam ex D, ducatur perpendicularis D H, secans circunferentiam in I, quæ necessariò ad partes anguli acuti D A G, cadet,
c 17. primi. ex coroll. 2. propos. 17. lib. 1. Quoniam igitur in triangulo D A H,[c] duo anguli D H A, D A H, minores sunt duobus rectis; & D H A, rectus est, per constructionem, erit angulus D A H, recto minor,
d 19. primi. ideoq; recta D A, hoc est, recta illi æqualis D I,[d] maior erit, quàm D H, pars quàm totũ, quod est absurdum. Non igitur intercipietur recta inter A E, & circunferentiam A B: sed quæcunque ex A, ducatur infra A E, ea secabit circulum. Dico denique angulum semicirculi, contentum diametro A C, & circunferentia A B, maiorem esse omni acuto angulo rectilineo; reliquum verò angulum contingentiæ, qui continetur recta A E, & circunferentia A B, minorem esse omni acuto angulo rectilineo. Quoniam enim ostensum est, omnem rectam ex A, ductam infra perpendicularem AE, cadere intra circulum, faciet necessariò ea linea cum A C, angulum rectilineum acutum minorem angulo semicirculi, at verò cum A E, angulum rectilineum acutum maiorem angulo contingentiæ, cùm ille sit pars anguli semicirculi, hic verò totum quidpiam respectu anguli contingentiæ. Id quod liquidò constat, ducta recta A B, quomodocunque infra A E. Nam cùm hæc linea A B, intra circulum cadat, vt demonstratum est, erit angulus rectilineus acutus C A B, minor angulo semicirculi contento sub diametro A C, & circunferentia A B C, cùm ille huius sit pars: Angulus verò contingentiæ contentus sub tangente linea A E, & circunferentia A B C, minor angulo rectilineo acuto B A E, quòd ille huius pars sit. Eademque ratio est de omnibus aliis angulis acutis rectilineis, cùm omnes contineantur à diametro A C, vel tangente A E, & rectis ex A, sub A E, ductis, quę omnes intra circulum cadent, vt demónstrauimus. Angulus igitur semicirculi, maior est omni acuto angulo rectilineo, reliquus autem angulus contingentiæ, minor. Itaque quæ ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, &c. Quod erat ostendendum.




### COROLLARIVM.

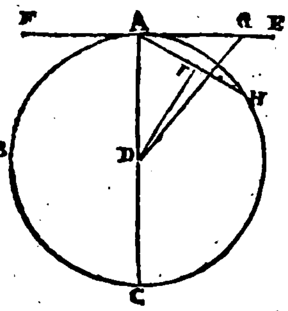



*HINC manifestum est, rectam à diametri circuli extremitate ad angulos rectos ductam, ipsum circulum tangere. Ostensum enim est, ipsam cadere extra circulum. Quare solùm in puncto illo diametri extremo circulum attingit.*

*QVARE si iubeamur per datum punctum A, in circunferentia circuli A B, rectam lineam ducere, quæ circulum tangat in A, ducemus ex A, ad centrum C, rectam A C, & ad eam excitabimus perpendicularem D A E. Hæc enim circulum tanget in A, vt demonstratum est.*

### EX ORONTIO.

*POTEST hoc idem theorema demonstrari ostensiuè hac ratione. Sit diameter A C, in circulo A B C, cuius centrum D. Ducatur ex A, ad A C, perpendicularis A E, quam dico extra circulum cadere. Sumatur e-*
a 17. primi. *nim in ea quoduis punctum G, & coniungatur recta G D. Quoniam igitur in triangulo A D G, duo anguli*
b 19. primi. *D A G, D G A,[a] minores sunt duobus rectis, & D A G, factus est rectus; erit D G A, recto minor. Quare[b] maior erit*




erit recta D G, quàm D A; ideoq; punctum G, extra circulum erit. Eademq; est ratio de omnibus alijs punctis rectæ A E. Cadet ergo tota A E, extra circulum: Ducatur iam ex A, infra A E, recta A H, quam dico necessariò secare circulum. Fiat enim angulus A D I, æqualis angulo E A H. Addito igitur communi angulo D A H, erunt duo anguli A D I, D A H, æquales toti angulo recto D A E, ideoq; minores duobus rectis: Quare [a] coibunt rectæ A H, D I, in aliquo puncto, vt in I. Dico igitur punctum I, esse intra circulum. Quoniam enim tres anguli in triangulo D A I, [b] æquales sunt duobus rectis, & duo anguli D A I, A D I, ostensi sunt æquales recto D A E; erit reliquus A I D, rectus, atq; adeò maior, quàm D A I, acutus. Quare recta D A, [c] maior est, quàm D I. Non igitur D I, ad circunferentiam perueniet; propterea q; punctum I, intra circulum existet; atq; adeò recta A H, circulum secabit. Reliquæ partes theorematis ostendentur, vt prius.

a 13. pron.
b 32. primi.
c 19. primi.

## SCHOLIVM.

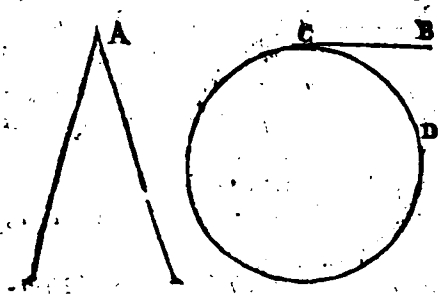
EXISTIMAT Peletarius, angulum contingentiæ, quem Euclides hic probauit minorem esse omni acuto angulo rectilineo, nihil esse, atq; adeò ex illo contactu lineæ rectæ, & circunferentiæ, non effici angulum vllum. Vt autem sententia illius planior fiat, afferemus in medium digressionem illam, quam ipse hoc loco instituit. Sit igitur inquit:

CVM huius theorematis caput postremum attentiùs considerarem, mihi sanè in mentem subijt primâ specie, Geometriam non satis sibi constare; immò adeò repugnantiam in se admittere.

PRIMVM enim extra intelligentiam est, vt inter quantitates minima dari possit; qualem hoc loco angulum, quem dicunt contingentiæ, seu rectiùs, contactus, minorem omni acuto posuimus. Nihilo magis conuenit, vt maxima quantitas detur, qualis hic angulus semicirculi omni acuto rectilineo maior ponitur. Quantitas enim eo nomine quantitas est, quod partibus constet, & secundùm eam æquale & inæquale dicatur. Quantitatis etiam continuæ in infinitum sectio est. Atq; adeò cùm in primam propositionem decimi incidissem, tum magis anxiè expendere cœpi, quonam pacto conciliari posset tam aperta, vt apparebat, repugnãtia. Sic enim habet prima decimi.

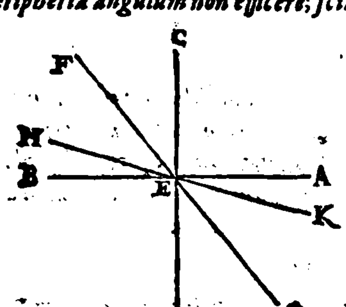
Si à maiori duarum quantitatum auferatur maius, quàm dimidium; ac rursus ex reliquo maius, quàm dimidium, idque continuò fiat; relinquetur tandem magnitudo minor magnitudine minore posita.

VERBI causa, sint duo anguli; A, quidem rectilineus, B C D, angulus (si modò sit angulus) contactus: Vult prima decimi, si auferatur ab angulo A, maius, quàm dimidiũ, ac rursus à reliqua parte maius quàm dimidium; sicq; continuò ex residuis partibus maius, quàm dimidium; tandem relinqui minorem angulum, quàm B C D. Cuius demonstrationem hîc non appono, cùm ex sequẽtibus pendeat.

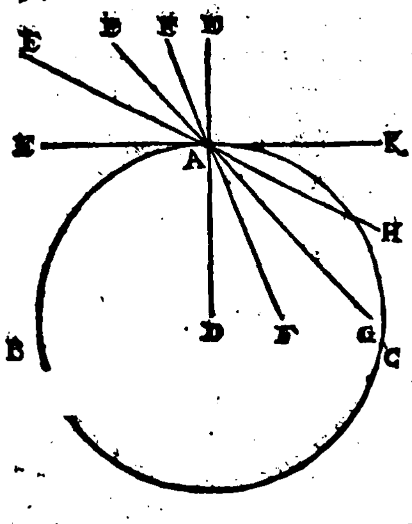



Nulla tamẽ in tota Geometria propositio est, quæ (vt sic dicam) magis naturaliter vera sit. Quod ex numeris (in quibus rerum omnium imagines) luce clarius euadit. Quis enim nõ videt, propositis duobus numeris 8. & 2. tùm ab octonario maius quàm dimidium abstuleris, vt quinarium; tum à ternario residuo, maius quàm dimidium, vt binarium; relinqui vnitatem posito binario minorem? Neq; verò ad rem facit, quod Campanus illic excipit, propositionis sententiam de quantitatibus eiusdem generis esse intelligendam. Hæc quippe conciliatio nulla est; quin etiã menti Euclidis contraria, vt nos, cũ illuc ventũ erit, manifestum faciemus. Immò & ipse Campanus secũ pugnat, cùm in secunda duodecimi demonstranda, alijsq; propositionibus nonnullis soliderũ, à curuo rectum auferat.

NOS igitur hanc dubitationem sic expediemus; vt dicamus, lineam rectam, quæ circulum tangit, cum peripheria angulum non efficere; scilicet B C D, nullo modo angulum dici debere. Omnis enim angulus in sectione consistit, non in contactu: Et vbi cessat sectio, cessat quoq; anguli forma. Atque vt vno verbo dicam, in decussatione, (Decussationem hoc loco, & sectionem sine discrimine accipio) omnes angulorũ species perficiuntur. Duabus enim lineis A B, & C D, se scindentibus in puncto E, ad angulos rectos, intelligatur C D, sic moueri in orbem, scilicet super puncto E, fixo, vt ex C D, fiat F G; hinc sanè ex recto angulo A E C, fiet obtusus A E F: Inde ex recto B E C, fiet acutus B E F. Cumq; facta fuerit H K, hinc quidẽ angulus obtusior fiet H E A, inde verò acutior B E H; sicq; continuò, donec peruenerit ad A B, & intra eosdem terminos concludatur cum ea. Tum enim immersa, vt sic dicam, linea C D, in lineam A B, euanescet angulus.

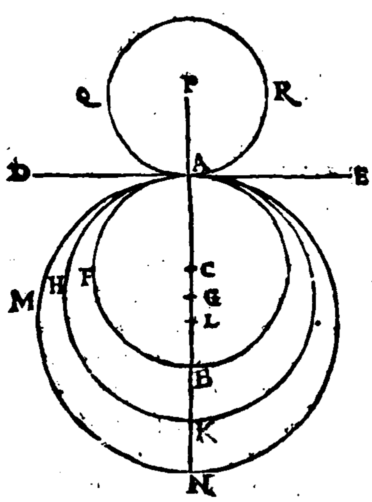



Neque diuersa ratio est in curuo. Sit enim in circulo A B C A, cuius centrum D, linea D E, præteriens peripheriam, & secans ipsam in A, puncto fixo, super quod circunducatur ipsa D E, per puncta F, G, H. Tum fient anguli continuò varij cum peripheria, in ipso puncto A; donec cessante decussatio-



ne linea E D, facta sit E K, & tangat circulum. Ac tum linea D E, non iam inclinata intelligitur, sed immersa in lineam B A C, quantum ad angulum attinet: non aliter quàm si B A H, esset linea recta; neque contrà facit, quòd deducantur lineæ, faciantq́; spatium C A K. Nam id sola A C, linea efficit, quæ rectam refugit: sed eam tamen in puncto A, amplectitur. Cùm igitur omnis angulus in pluribus punctis non consistat, quàm vno fit, vt punctum A, tam sit ineptum angulo constituendo, quàm modò erat punctum sectionis E, linearum rectarum. Fortasse dices punctum A, lineæ rectæ manere in suo recto, punctumq́; A, peripheriæ in suo rotundo; neq́; vtrumq́; esse idem punctum, sed lineas se tantū inter se veluti lambere, quia altera alteram penitùs, omniq́; puncto refugit; vt contraria contraposita fiant manifestiora. Id verò sensus non recipit. Duo enim circuli sese exterius tangentes, rectam lineā intermediam illibatam relinquerent. Scilicet, si intelligeremus circulum, qui in puncto A, tangeret ipsum A B C, circulum exteriùs: quod non patitur linearum natura. Sed demus id fieri posse; vt nihil in cogitationē cadat, quod semel vspiam Geometria non repræsentet. Illud tamen minimè vrgebit; Immò tantò minus contactus linearum erit angulus; Hiabit enim vtrinque ipsarum concursus. Sed nos hæc Geometricis rationibus confirmemus per theoremata.

CONTACTVS duorum circulorum interior, quantitas non est.



SIT enim circulus A F B A, cuius centrum C, diameter verò A B, per cuius extremitatem A, ducatur linea D E, ad angulos rectos. Et constat, ex consectario huius decimæsextæ, lineam D E, contingere ipsum A F B A, circulum: ac propterea D A F, esse minorem omni angulo acuto, ex ipsa Euclidis sententia: scilicet per vltimam partem huiusce decimæsextæ. Iam verò inter puncta C & B, suscipiatur in diametro A B, centrum G, & spatio G A, describatur alter maior circulus A H K A. Dico F A H, non esse quantitatem. Constat quippe circulū A H K A, transire inter rectam D A, & curuam A F, cùm sit semidiameter G A, maior semidiametro C A. Manifestum quoque est, lineam D E, tangere ipsum A H K A, circulum, ex eodem huiusce decimæsextæ cōsectario: ac propterea D A H, esse omni acuto minorem. Describatur tertiò, secundùm maius spatium L A, circulus A M N A; Et erit ex eodem consectario D A M, omni acuto minor. Sicq́; in infinitum, erunt omnes contactus, quos efficiet linea D E, cum circulis ductis per A, punctum, quorum centra in A B, linea, minores omni acuto rectilineo: ac sic omnes æquales, si modò æqualitas inter non quanta dici posit. Quapropter contactus D A M, erit æqualis contactui D A F: Fietq́; vt M A F, contactus interior circulorum neque augeat, neq́; minuat contactum D A M. Igitur M A F, quantitas non est. Quod erat demonstrandum.

SED & probabimus, contactum interiorem circulorum quantitatem non esse, in hunc modum. Nempe cùm omnes circuli sint similes, erunt & semicirculi similes. Quapropter anguli, qui fiunt à diametro & peripheria, in omnibus circulis sunt æquales, per conuersam definitionis similium sectionum. (Nam ab hac æqualitate angulorum non excludentur anguli mixti.) Erit igitur angulus B A F, æqualis vtrique angulorum K A H, & N A M: Ac propterea contactus F A M, nihil addit ad angulum B A F. Quare F A M, quantitas non est. Quod fuit demonstrandum. Hinc sequitur alterum.

CONTACTVS lineæ rectæ cum circulo, quantitas non est.

MANENTE enim eadem constructione, si D A F, sit quantitas; ipsa vtique diuidetur per lineam rectam, aut per obliquam. Non per lineam rectam, repugnante vltima parte huius decimæsextæ: neq́; per obliquam, vt per lineam A M. Esset enim F A M, pars ipsius D A F: Atqui F A M, quantitas non est, vt modò probauimus. Non est igitur F A M, pars ipsius D A F. Igitur D A F, neq́; per lineam rectam, neque per obliquam diuidi potest. Quare D A F, quantitas non est: quod erat probandum. Hinc exurgit tertium.

CONTACTVS duorum circulorum exterior, quantitas non est.

IN eadem constructione protrahatur B A, diameter ad punctum P. Tum centro P, interuallo autem P A, describatur circulus A Q R A, tangens circulum A B F A, exterius in puncto A. Dico contactum F A Q, non esse quantitatem. Id verò manifestum est ex posteriori demonstratione. Nam neque per lineam obliquam diuiditur, cùm F A M, non sit quantitas per primam harum; neq́; per rectam, cùm neq́; D A F, sit quantitas per

secundam

*secundam earundem; neque D A Q, quantitas per eandem. Quare cùm F A Q partes nullas habeat, quantitas non erit: quod erat probandum.*

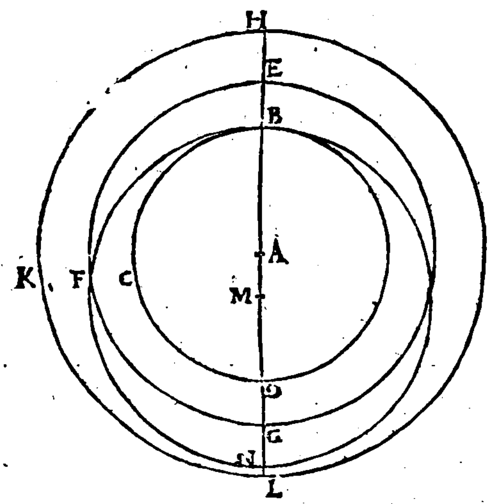
*Ex his emerget hoc pronunciatum, quòd in Geometria nemo hactenus admittendum esse cogitauit.*

ANGVLI, qui fiunt à diametro, & peripheria, siue intra, siue extra circulum, recti sunt, & rectis rectilineis æquales.

*Vt in posteriori figura, angulus B A F, æqualis est angulo B A D; cùm ipsi nihil accrescat ob contactum D A F, qui quantitas non est: & ob id Q A P, rectus est, & æqualis ipsi D A P, cùm D A Q, nihil addat: quod erat probandum.*

*HAEC Peletarius hoc in loco. In epistola autem, quam ad Cardanum scribit, affert aliam demonstrationem, quam ipse ait pleniorem esse. Hanc igitur hic subijcere statui. In primis autem præmittit hoc theorema.*

IN circulis anguli, qui fiunt à diametro & peripheria, sunt æquales.

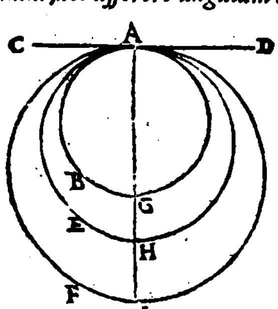


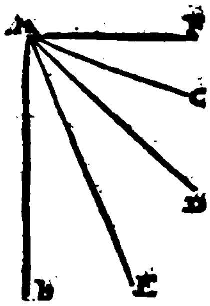

*SINT enim super centro A, duo circuli B C D B, & E F G E, quorũ diametri B D, & E G, & secet E G, ambos circulos in punctis E, B, D, & G. Aio duos angulos C B D, & F E D, esse æquales. Nam si sit F E D, maior ipso C B D: (neque enim contrà, C B D, maior vllo pacto erit ipso F E D,) ac describantur plures circuli super eodem centro A, quorum vnus hoc loco satis fuerit H K L H: fiet tandem ex continuo augmento angulus à diametro & peripheria: verbi gratiâ, angulus K H L, maior recto: quod est contra ipsius Euclidis sententiam, qui eos omnes angulos ponit recto minores. Sunt igitur anguli interiores, qui ad B, & E, inter se æquales: quod fuit ostendendum. Idem de exterioribus iudicium. Neque in hac demonstrandi ratione vllus est paralogismus. Licèt enim nulla sit comparatio angulorum, quos vocant, contactus, ad angulos rectilineos: attamen erit angulorum, qui fiunt ex sectione rectæ lineæ, & peripheriæ, aliqua collatio ad ipsos rectilineos. Eiusmodi enim anguli, qui mixti dicuntur, manifestè maiores, & minores fiunt.*

*HIS ad hunc modum demonstratis, aio contactum circulorum interiorem, non esse quantitatem. Super centro M, in eadẽ linea H L, posito, describatur circulus B F N B, tanto interuallo, quanto est circulus E F G E; posita scilicet M B, semidiametro æquali ipsi A E; qui circulus tangat B C D B, circulum in puncto B. Et manifestam est, angulum F B D, æqualem esse angulo F E D, propter æqualitatem peripheriarum & diametrorum. Quapropter & idem ipse F B D, erit angulo C B D, æqualis. Igitur C B F, contactus nihil addit ad ipsum C B D, angulum. Quare C B F, quantitas non est: quod fuit probandum. Atque hinc procedit demonstratio eorum, quæ in 3. lib. adduximus, theorematum.*

*HAEC igitur est Peletarij sententia de angulo contactus, quæ omnino Euclidi est contraria. Si enim Euclides sensisset, angulum contactus nihil prorsus esse, & angulum semicirculi æqualem recto rectilineo: Quid, obsecro, tantoperè desudasset, vt demonstraret angulum contactus esse minorem omni acuto rectilineo, angulum verò semicirculi maiorem? Quid enim clarius, quàm nihil, cuiusmodi est angulus contactus, ex Peletarij sententia, minus esse quocunque angulo? Quid quoque magis perspicuum, quàm angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum semicirculi, maiorem esse quolibet acuto? Quapropter angulum contactus verè esse angulum, ac quantitatem, affirmamus; atque adeò angulum semicirculi recto rectilineo minorem. Vnde dissoluenda sunt à nobis omnia Peletarij sophismata, quæ in hac digressione adduxit, ad confirmandum, angulum contactus nihil esse.*

*PRIMVM igitur extra intelligentiam esse fatemur, vt inter quantitates minima dari possit: sed inficiamur, nos asserere angulum contactus esse minimam quantitatem: Immò verò asseueramus, quemuis angulum contactus, etsi ab Euclide minor ostensus est omni acuto rectilineo, diuidi posse in partes infinitas; non quidem per lineam rectam, vt Euclides demonstrauit, & optimè; sed per lineam circularem. Vt proposito angulo contactus C A B, si per A, describatur circulus A E H, maior circulo A B G, tangens rectam C D, in A: fiet angulus contactus C A E, minor angulo contactus C A B. Quòd si adhuc maior circulus A F I, describatur, erit multò minor angulus contactus C A F, eodem angulo contactus C A B. Atque ita sine fine semper minorem angulum contactus efficiemus. Reperitur igitur inæqualitas inter angulos contactuum, quamuis quilibet eorum minor sit acuto rectilineo quocunque. Quemadmodum quiuis angulus acutus minor est recto, & tamen quolibet acuto dato, minor dari poterit, cùm diuidi possit infinitè. Vt angulus acutus*






B A C, minor est recto B A F, & tamen si ducatur recta A D, inter A C, A B, fiet acutus minor B A D: Quòd si alia recta A E, inter A B, A D, ducatur, erit multò minor acutus B A E, nec vnquam finis erit huius decrementi.

PARI ratione asserimus, angulum contactus augeri posse infinitè, ita vt quouis angulo contactus proposito dentur alij maiores sine numero. Vt in superiori figura circulari, angulo contactus C A F, maior est angulus contactus C A E, & multo maior angulus contactus C A B; Atque ita deinceps, si minores semper circuli, quàm A B G, describantur, tangentes rectam C D, in A, augebitur perpetuò angulus contactus; semper tamen minor existet quouis rectilineo acuto. Quemadmodum quouis angulo acuto dato, dantur alij acuti innumeri maiores. Vt in proxima figura, angulo acuto B A E, maior est acutus B A D, & multò adhuc maior acutus B A C. Quòd si alia recta ducatur inter perpendicularem A F, & rectam A C, fiet adhuc maior angulus acutus, nec vnquam finis erit huius incrementi. Sicut igitur in huiusmodi incremento nunquam peruenimus ad aliquem angulum acutum, qui sit æqualis angulo recto; vel maior recto, nisi acutus angulus mutetur in rectum, vel obtusum, sed semper recto, vel obtuso minor est angulus acutus: Ita quoq; in accretione anguli contactus nunquam deuenimus ad aliquem angulum contactus, qui æqualis sit acuto angulo rectilineo proposito, vel maior acuto, nisi angulus contactus mutetur in alium angulum mixtū, (qui quidem efficitur à duabus lineis se secantibus; cuiusmodi est angulus segmenti.) sed angulus contactus acuto semper minor est.

EODEM modo negamus, nos ponere angulum semicirculi maximam quantitatē. Immò asserimus, quolibet angulo semicirculi proposito, quamuis ostensus sit ab Euclide maior omni acuto angulo rectilineo, infinitos dari posse maiores. Vt in eadem figura superiori circulari, angulo semicirculi B A G, maior est angulus semicirculi E A H, & multò adhuc maior angulus semicirculi F A I: Atq; ita deinceps, si maiores semper circuli describantur, quàm A F I, tangentes rectam C D, in A, augebitur perpetuò angulus semicirculi, semper tamen minor existet angulo recto C A I. E contrario verò, angulo semicirculi F A I, minor est angulus semicirculi E A H, & multò adhuc minor angulus semicirculi B A G, nec vnquam finis erit huius decrementi, & tamē quilibet maior est quouis angulo acuto rectilineo, licèt infinitè diminuatur, vt Euclides demōstrauit. Quemadmodū quouis acuto angulo dato, inueniuntur alij quidē maiores, alij verò minores innumerabiles.

QVOD autem anguli contactus sint inæquales inter se, & non omnes æquales, vt vult Peletarius, similiter & anguli semicirculorum, ex eo manifestum est, quòd angulus quilibet consistit in vnico puncto, & linearum inclinatione, quæ non in directum iacent, vt constat ex anguli plani definitione. Hinc enim fit, vt æqualitas angulorum eiusdem generis requirat eandem inclinationē linearum, ita vt lineæ vnius conueniant omnino lineis alterius, si vnus alteri superponatur; Ea enim æqualia sunt, quæ sibi mutuò congruunt, iuxta octauum pronunciatum. Cùm igitur in angulis contactus, nec non in angulis semicirculorum, nequaquam reperiatur semper eadem inclinatio, quod (vno superposito alteri) lineæ eorum non sibi respondeant sed prorsus inter se dissideant, vt ex figuris superioribus perspicuum est; Non erunt omnes anguli huiuscemodi inter se æquales. Immò quilibet angulus contactus augeri, & diuidi poterit infinite per lineam curuam, licèt per rectam secari nequeat, vt rectè ostendit Euclides. Cuius etiam rei hæc afferri potest causa. Si enim linea contingens circulum concipiatur moueri circa punctum contactus immobile, continuò circulum secabit, donec iterum ipsum contingat: Tunc enim primum secare desinet circulum. Quare si vel minimè inclinari intelligatur super puncto illo contactus fixo, secabit circulum, cùm in vno tantùm puncto linea recta circulum possit tangere, vt ex 2. propos. huius lib. collegimus.

SOLVM igitur illi anguli contactus, pariterq; illi duntaxat anguli semicirculorū æquales inter se erunt, qui efficiuntur à peripheriis æqualibus: In his enim tantummodo lineæ sibi congruunt mutuò. Anguli verò contactus, qui efficiuntur à peripheriis minoribus, maiores erūt, Et qui à peripherijs maioribus, minores. Anguli denique semicirculorum maiorum maiores, minorum autem minores erunt, vt non obscurè intelligi potest ex superioribus figuris. Neq; enim lineæ talium angulorum sibi mutuò conueniunt.

CONSTAT ergo, quemuis angulum contactus habere partes, & vnum alteri posse æqualem exhiberi: ac rursus inæqualem, nempe maiorem, vel minorem: quemadmodum & in reliquis angulis omnibus fieri cernimus. Quod etiam de quocunque angulo semicirculi dici potest. Non igitur rectè intellexit Peletarius, angulum contactus minimam esse quantitatem, angulum verò semicirculi maximam.

DEINDE non est, quòd anxium reddat Peletarium prima propositio 10. libri. Ea enim intelligenda est tam de quantitatibus eiusdem generis, quàm diuersi, dummodò vtrauis multiplicata alterā excedere possit; cuiusmodi nō sunt angulus contactus, & angulus acutus rectilineus. Nam angulus quilibet contactus siue bis sumatur, siue ter, quatérve, siue denique quoties libuerit, semper minor est angulo acuto rectilineo. Si namque quotcunq; anguli contactus, vt centum, inter se æquales angulum acutum rectilineum excederent, vel se illi æquarent; esset quoq; vnus illorū maior, vel æqualis illi angulo acuto rectilineo, qui est centesima pars propositi anguli acuti rectilinei; quod est absurdū, cū quilibet angulus contactus minor sit quocunq; angulo acuto rectilineo, velut ab Euclide fuit demonstratū. Quare nullo modo ex illa propositione colligere licebit, si ab angulo acuto maius, quàm dimidiū auferatur, ac rursus ex reliquo maius, quàm dimidium, idq; continuò fiat, relinqui tandem angulum acutum minorem angulo contactus proposito: quoniam angulus contactus, vt dictum est, per quemcunque etiam numerum multiplicatus, siue quantumuis auctus, semper minor existit angulo acuto; nec vnquam ipsum superare potest: quod tamen necessariò requiritur ad demonstrationem illius propositionis. Vt enim demonstretur, multiplicanda est minor quantitas proposita toties, donec excedat maiorem, vt videre licet apud omnes interpretes Euclidis. Vnde Campanus, vel potius ipse Euclides per Campanū, quando in Stereometria à curuo rectum aufert, vel contrà, vt vult 1. proposit. lib. 10. assumit semper tales magnitudines, quarum alterutra multiplicata alteram excedere potest.

IAM verò nulla ratione concedemus Peletario, angulum tantummodò effici à duabus lineis se secantibus. Sufficit enim, vt angulus efficiatur, duas lineas in plano ad inuicem inclinari, ita tamen, vt non in directum iaceant, vt constat ex anguli plani descriptione tradita ab Euclide, quanquam se mutuò non secent, si producantur: cuiusmodi sunt peripheria, & linea recta illam tangens, vel etiam duæ peripheriæ se tangentes. Quare verè angulum efficiunt, vt anteà diximus.

PORRO demonstratio Peletarij, qua conatur ostendere, contactum interiorem non esse quantitatem, nullius est momenti. Quamuis enim omnes anguli contactus, qui efficiuntur à linea tangente, & peripheria, minores sint quolibet angulo acuto: non tamen propterea inter se omnes æquales esse necesse est, sed potest alio alius maior esse, & minor, vt diximus: quemadmodum etiam, omnes anguli acuti minores sunt angulo recto, & tamen ipsi inter se nō sunt omnes æquales. Sic etiam omnes formicæ (vt ex rebus quoq; naturalibus exemplum afferamus,) minores sunt homine, vel montes, cùm tamen ipsæ inter se valde sint inæquales. Quare non rectè concludit Peletarius, contactum interiorem nihil esse.

NEGAMVS deinde, angulos segmentorum similium æquales esse, sicut ipse assumit in sequenti demonstratione: Neq; enim hoc Euclides significauit in vltima definitione huius 3. lib. Sed docuit ea segmenta esse similia, in quibus anguli rectilinei sunt æquales, vel quæ angulos rectilineos capiunt æquales: non autē quorum anguli æquales existunt. Immò magnum discrimen est inter angulos in segmentis, & angulos segmentorum, vt apertè constabit ex propos. 31. huius libri.

EX his facilè reycientur reliquæ Peletarij demonstrationes. Angulus enim contactus, qui efficitur à linea tangente, & peripheria, diuiditur per lineam circularem, ita vt contactus interior sit verè pars eius, cùm contrarium nullo modo ostenderit. Eodem pacto angulus contactus, quē constituunt duo circuli se exterius tangentes, diuiditur & per lineam circularem, & per rectam, quæ vtrunque tangit. Pari ratione theorema illud refellitur, quo asseruit, angulum semicirculi æqualem esse angulo recto rectilineo. Excedit namque rectus angulus angulum semicirculi, angulo illo contactus, quem efficit linea tangens, & peripheria. Postremò hallucinatus est quoq; Peletarius in illa demonstratione, quam ad Cardanum misit. Etsi enim angulus semicirculi in maiori circulo maior est angulo semicirculi in circulo minori: non tamen propterea efficitur, vt aliquis angulus semicirculi maior sit angulo recto. Semper enim rectus angulus superabit quemuis angulum semicirculi, angulo illo contactus, qui efficitur à peripheria, & linea tangente. Quemadmodum etiam quouis angulo acuto proposito, dari possunt alij maiores: nunquam tamen aliquis acutus rectum excedet, vt in præcedenti figura cernere licet. Constat igitur ex his, angulum contactus verè esse angulum, demonstrationes autem Peletarij sophisticas esse, ac nullius momenti, homineq; Geometra prorsus indignas.

HAEC porrò mea de angulo contactus disputatio adeò Peletarium commouit, atque perturbauit, vt læsam esse omnino atq; offensam existimationem putauerit suam. Quare annis ferè quinque post mei in Euclidem commentarij editionem, hoc est, anno 1579. pro sui defensione Apologiam in me conscripsit: in qua tamen neque ausus est solutiones meas hoc loco adductas infringere, aut impugnare, neque opinionem suam, nouam illam quidem, & inauditam, nouis rationibus (scilicet nullas habebat) confirmare, sed verbis duntaxat, & conuiciis se defendere conatur, vt facilè ij, qui eam perlegerint, iudicabunt. Huic ego Apologiæ iam pridem non tam mei purgandi, quàm veritatis tuendæ gratia respondissem, nisi me ab hoc consilio grauissima eruditissimorum hominum auctoritas, qui eam responso omnino indignam iudicabant, reuocasset. Nunc verò quoniam locus hic à me postulare videtur, vt in secunda hac editione patrocinium veritatis iterū suscipiam, non alienum esse duxi, breuiter calumnias atq; iniurias, quibus frequenter me in ea Apologia afficit, quanta potero modestia, depellere. Quamuis enim hoc à me factum iam sit anno 1586. in meis triangulis sphæricis, vbi necessariò de re ipsa, eiusq; Apologia mentio facienda fuit: quia tamen fortassis non omnes librū illum meum viderunt, operæpretium arbitratus sum me facturum, si totam illam responsionem hic, vbi proprius eius locus est, interseram, vt benignus Lector intelligat, sine causa eum tanto animi dolore, & iracundia, quantam præ se fert, contra me exarsisse, falsoq; mihi imposuisse multa: me autem è contrario nullum verbum iniuriosum in illum effudisse, aut conuicium, quod frustra in Epistola nuncupatoria criminatur, vbi me à conuiciis non abstinere, apertè testatur. Atque in illa Apologia nihil adeò me offendit, quàm quòd me Peletarius non syncerè, sed animosè, atq; adeò inuidiosè fecisse insimulat, vt eum in meis commentariis vel reprehenderē, vel laudarem: quæ sanè vitia pusilli semper animi esse duxi, & ab homine liberaliter, Christianeq; educato alienissima. Verùm ea quàm longè absint tū à nostra Societatis disciplina, tum à mea consuetudine, nemo omnino, qui nos ac nostra nôrit, ignorat. His verò, qui nostra minimè nôrunt, hic ipse liber fidem faciet, syncerè omnia dici, nihil inuidiosè, nihil animosè: planè vt veritatem quæsitam, non cuiusque auctoritatē contemptam esse apparet. Neq; enim mihi tantum derogo, (etsi nihil arrogo) vt mihi vni interdictum putem, ne, si quid in alienis scriptis falsum videatur, occasione oblata, cur id mihi minùs probetur, ostendã; modò (quod pudentium, ac bene moratorum hominũ consuetudo postulat) id sine conuitio atq; irrisione faciam: Hoc autẽ liber ipse, qui in medio est, ita à me factum esse clamat. Etenim vt totũ hunc librũ peruolutes, ne verbum quidem vnum reperies, quod vel speciem maledicti habeat, atq; conuicij. Nam in scholio hoc de angulo contactus iurare liquidò possem, nihil me minùs cogitasse, q̃ vt Peletarium obtrectandi animo oppugnarem; sed illud habuisse propositum, (si modò consequi possem) vt suus esset veritati locus. Quod quidem eò liberiùs feci, ꝙ Peletario ipso non modò inuito, sed etiam libenti existimaui me esse facturum, quod vel ipso auctore facerem: qui non à Cardano solùm, atq; Campano, sed etiam à Proclo, Theone, Apollonio, Eratosthene, Pappo, Ptolemæo, Hippocrate Chio, Geometriæ luminibus, ab ipso deniq; omnium magistro Euclide dissentire nõ dubitauit. Nimirum quia, vt ab eodem in Apologia verè dictum est, in omni doctrina, præsertim verò in Geometria, non auctoritas est spectanda, sed veritas: quanquam non video, qui amicus veritatis sit is, apud quem veritas odium parit; nisi fortè aut decipi se nõ posse arbitratur, qui columina illa Geometriæ errasse interdum prædicat, aut veritatem in alienis rebus amat, ac quærit potiùs, q̃ in suis. Equidem si quis me in re quapiam (quod pro humani ingenij imbecillitate fieri posse video) errasse ostenderit, na ego maximam illi gratiam habuero, qui errãtem in viam veritatis reduxerit. At enim probat studium veritatis Peletarius, conuicia ferre non potest: quæ tandem conuicia? rogas? Demonstrationes meas appellas sophismata. Nunc demum, quæ conuicia dicat, intelligo. Nam alia nulla in meo hoc libro esse certò scio: ab his (si conuicia sunt) fateor me non abstinere. At ego homo simplex, & ignarus verborum, conuicia esse nunquã duxi, cùm verè dicerentur. Neq; enim, quo alio vocabulo demonstrationes planè fallaces, & adulterinas appellarem, habebam: neq; verò Philosophorum, ac Mathematicorum consuetudo loquendi magis appositum mihi verbum suppeditabat. Accedit, ꝙ cùm à Peletario homine in loquendo consideratissimo, germanas Campani, Cardaniq; demonstrationes paralogismos appellari viderem, existimaui in falsis eius demonstrationibus refellendis impuniùs persimili me vocabulo vsurum. Quòd si sophisma contumeliosius verbum est, q̃ paralogismus, in Gallia, ignoscat consuetudinis eius ignaro, atq; existimet, me paralogismos dicere voluisse. Atq; vt planè intelligat Peletarius, me non contradicendi studio illa scripsisse, mecum vnà consideret, quantam mihi materiam sui refellendi dederit, si hominem refellere potiùs, quàm rem, quæ tum agebatur, explanare in animo fuisset: quanquam occasionẽ eius reprehendendi in sinum delatam sæpiùs omisi, ne illum mihi delegisse viderer, in quem potissimùm incurrerem. Quàm præclara enim occasio fuit, in propos. 4. & 8. lib. 1. atq; in propos. 24. lib. 3. quam ipse 23. facit? In his enim omnibus reijcit demonstrationes antiquissimas Euclidis, tanquam non Geometricas; quippe in quibus figuram vnam alteri superponi concipere animo oporteat: quod ipse à Geometria dignitate putat esse alienum, hac solùm inductus ratione; quòd superpositionem illam mechanicum quid esse arbitretur, & quòd omnes ferè propositiones hoc modo, vt ait, possint demonstrari, etiam problemata, in quibus aliquid proponitur construẽdum: atq; in huius rei exemplũ adducit propos. 2. & 3. lib. 1. quæ problemata sunt. Hic certè Peletarium iure carpere potuissem, si id mihi fuisset propositum, vt falsò criminatur; maximè in eo, quòd eadem ratione vsui fore existimauit superpositionem in demonstrandis problematibus, ac theorematibus. Nam non satis intellexisse videtur, quo pacto Geometræ superpositionem illam vsurpent. Neq; enim volunt, re ipsa faciendam esse figurarum superpositionem, (hoc enim mechanicum quid esset) sed cogitatione tantùm, ac mente, quod opus est rationis atque intellectus. Itaq; in theorematibus quidem locũ habebit genus hoc argumentandi, in problematibus verò non. Namq; in theorematibus, propter magnitudinum æqualitatem, inæqualitatémve, quæ, vt nota, ponitur, facilè intellectus cuiusuis sine vlla hæsitatione comprehendi, vnam vel non excedere alteram, vel excedere, si animo concipiatur vna alteri esse superposita, quamuis re ipsa non fiat illa superpositio, vt in propos. 4. lib. 1. factum est: At in problematibus, in quibus magnitudinem quis alteri æqualem construere iubetur, licèt mente cogitet magnitudinẽ propositam transferri in alium locum, non tamen propterea quicquam efficiet; cùm re ipsa translatio nulla facta sit: Vt mirum sit, Peletarium sibi persuadere potuisse, propos. 2. & 3. lib. 1. & alias penè omnes per superpositionẽ, siue translationem linearum, figurarúmve posse demonstrari, si hoc modo argumentandi in Geometria vti liceret. Et certè hac in re non solùm Euclidem in crimen vocat Peletarius, verùm etiã Archimedem, quo, omnium iudicio, acutior in demonstrando, & subtilior fuit nemo, eiusq; commentatorem grauissimum, eumq; doctissimũ Eutocium Ascalonitam, qui eodem argumẽtandi genere vtuntur in æqueponderantibus, immò verò & omnes Geometras redarguat necesse est, qui non rarò hoc argumẽti genus adhibẽt. Sed videamus, quò tandem egregius hic noster Geometra, qui omnes alios Geometras reprehendit, sit deuolutus. Viderat Peletarius, (neq; enim rem adeò manifestam videre nõ poterat) si hunc modum argumentandi è medio tollat, vniuersam se Geometriam funditùs euertere, cùm plurimæ, eæq; præcipuæ propositiones in Geometria demonstrentur ex propos. 4. & 8. lib. 1. & ex 24. lib 3. quæ quidem alio modo demonstrari nequeunt, q̃ per illam figurarum superpositionẽ, non quidem re ipsa existentem, sed cogitatione duntaxat, vt dixi, comprehensam. Quò igitur se verteret? quid ageret? Excogitauit sanè rem magis à Geometria alienam, q̃ est superpositio illa figurarum. Coactus enim est asserere, propos. 4. lib. 1. esse definitionem angulorũ æqualium, (& quis vnquam talem audiuit definitionem?) atq; adcò concedendam eam esse sine demonstratione: propositionem verò 8. eiusdem lib. principium esse per se quoq; notũ. Quod vt credibile magis efficiat, ita scribit in *bit in propos.4.lib.1.* (Etenim nulla euidétiori specie æqualitas figurarum dignoscitur, quàm ex laterum æqualitate.) *Idemq; quasi confirmat, & repetit in propos.8.eiusdem libri, dum ita loquitur,* (Quis enim negauerit, duas superficies esse æquales, quarum latera & quantitate, & numero sunt æqualia?) *Hæc Peletarius, vt dictæ propositiones Euclidis sine demonstratione admittantur, commentatus est, sed quæ omnino falsa sunt: vt magnoperè mirãdum sit, potuisse eum propositiones à Geometria prorsus alienas tam inconsideratè proferre. Scilicet verum est, quod Philosophi asserunt; Dato vno absurdo, cætera consequuntur. Assumpserat enim Peletarius propos.4. & 8. lib.1. pro principiis: quod quidẽ falsum est, atq; absurdũ. Vnde ad eas absurditates necessariò deuenit, quas etiã illi, qui vix adhuc principia Geometriæ attigerunt, vel facilè vitare potuissent. Nam quis non videt, Rhombum, & Quadratũ, etiamsi latera habeant & quantitate, & numero æqualia, posse tamen inter se valde esse inæqualia? Id quod in Pentagonis quoq; æquilateris, & in aliis figuris plurium laterũ æqualium cerni potest: quod non est huius loci pluribus verbis explicare. Cùm ergo in omnibus figuris multilateris inæqualitas reperiatur, licèt latera habeant & quantitate, & numero æqualia, demonstrandum fuit necessariò Euclidi, æqualitatẽ triangulorum colligi ex laterum æqualitate, quandoquidem in aliis figuris ea non colligitur. Quare neq; propositio 4. Definitio, neq; propos.8. principium erit; ac proinde omnes propositiones, quæ illis nituntur, quæ innumerabiles propemodũ sunt, corruant necesse est, nisi demonstrationes Euclidis recipiãtur in illis propositionibus, cùm alio modo demonstrari non poßint. Demonstratio enim noua propos.4. quam Peletarius confinxit, nihil aliud est, q̃ (vt cum Logicis loquamur) petitio principij. Id quod perspicuum erit cuilibet, qui eam diligentiùs considerare voluerit. Nam in ea solùm construitur vnum triangulum posteriori ex duobus datis æquale, immò idem, atq; hoc ipsum quidem ineptißimè, cùm ad id præstandum circulos describat Peletarius, quibus tamen in demonstratione non vtitur, quod vitiosum omnino est in Geometria: Deinde infert, triangulum hoc constructum, quod à posteriori ex duobus propositis nõ differt, priori esse æquale, sine vlla demonstratione; certum autem est, hoc ab initio propositum fuisse, vt demonstraretur. Quocirca manifestè principium petit, cùm eadem facilitate statim in principio concludere potuisset, etiamsi nullam adhibuisset constructionem, triangula proposita esse æqualia; quippe cùm constructio illa ad rem non faciat. Idem dico de demonstratione propos.24. lib.3. quam etiam nouam confinxit: quod eorum iudicio, ad quorum manus eius commentarij peruenerunt, relinquo. Prætereo alia loca innumerabilia, in quibus abutitur propositionibus Euclidis in demonstrando, vt q; plerunq; 2. propos. libri 1. inscitè pro 3. assumat, &c. Neq; enim mihi in animo nunc est, eius commentarios examinare, sed solùm calumnias, quas frequẽtes in sua Apologia adhibuit, à me depellere. Quæ cũ ita sint, quod ille falsò de me, verè ego de illo dicere possem, rubere me, (vt eius verbis vtar) Euclidi interpretẽ contigisse, qui non iam Theonem, aut Campanum emendet, sed ipsum Euclidem sine causa reprehendat; quippe cũ ego Euclidem (vti par est) à calumniis ipsius defendam, omnesq; insidias, ac fallacias, quas contra eum instruxerat, detegam, ac refellam. Liquet igitur, me ea mente non fuisse, vt Peletarium redarguerem, cùm tot ac tantos errores dißimulauerim: quos ego ne nunc quidem in lucẽ protulissem, nisi vellem omnes & intelligere, quantũ Peletarius à me, de quo tam acerbè queritur, tum beneficium acceperit, & ex breui hac disputatione fructus aliquid, vtilitatisq; percipere. Nunc vt, q̃ dispari ille animo in me fuerit, appareat, eius calumnias breuiter exponã, atq; ita refellam, ac diluam, vt omnes oculis videant, eas esse calumnias: In quo tamen eiusmodi à me moderatio adhibebitur, vt modestiæ, quæ hominem religiosum decet, minimè obliuiscar. Neq; enim illi, vti prouocauit, respondebo.*

PRIMVM *itaq; mihi obijcit Peletarius, q; in eius demonstrationibus citandis ita me gesserim, vt si quo modo nomen ipsius supprimere potuissem, id me ostendam libenter fuisse facturum. Quod q̃ sit falsum, facilè indicabunt ij, qui meos commẽtarios legerint; cùm vbiq; eum honorificè appellem, eiq; plurimas demonstrationes ascribam, tanquam proprias, quas tamẽ aliter, q̃ ipse, & multò breuiùs demonstro, & interdum etiam (quod maius est) vniuersaliùs, vt liquidò constat ex iis, quæ tum ad propos.38. tum ad propos.45. lib.1. ex Peletario demonstraui, vt alia interim taceam: quæ non iniuria mihi vendicare potuissem: vt mirer, quid illi in mentem venerit, id à me parũ syncerè, atq; adeò inuidiosè factum existimare, quod ego verebar, ne nimis ambitiosè factum quispiam iudicaret. Quòd verò propos.16. lib.3. & in prioribus duabus defin. lib.5. vt ipse obijcit, animosè, vt ego fateor, liberè, quid de eius demonstrationibus sentirem, exposui, id feci, vt iam antè dixi, non cuiusquam lædendi causa, sed quærendæ veritatis. Ea enim est natura, & conditio eorum, qui liberalibus artibus dant operam, vt etiamsi alter alterius interdum sententiam impugnet, non tamẽ idcirco odiis potiùs, quàm ingeniis inter se certare videantur. Qui sit aliorum sensus ignoro, equidem, vt suprà dixi, ita sum animo, vt si quis me alicuius erroris in demonstrando commißi admoneret, ei q̃ maximas gratias haberem: atq; vt liberiùs id facerent, enixè rogaui non paucos, & nunc iterum eosdem, atq; etiam alios amicè oratos volo. Scio enim, quàm facilè poßit in suis quisq; inuentis hallucinari; video (quod ipse quoq; Peletarius in Apologia sapienter asseruit) omnibus hominibus commune esse, vt peccent. Deinde quòd in additionibus ad propos. 47. lib.1. eius mentionem non fecerim, non est, quòd ægre ferat, cùm illæ propositiones non sint ab ipso inuentæ. Quædam enim multò tempore ante ipsum demonstrata sunt vel à Campano, vel à Proclo, aut Theone, quasdam verò demonstraui egomet, antequam ipsius demonstrationes vidissem: quòd adeò manifestæ sint, & faciles, vt nulla probatione egeant, sed sint instar corollariorum proposit.47. Vt nulla prorsus laus, aut gloria illi accessura videretur, si maximè eas ab ipso inuentas esse, (quod tamen verum non est) prædicassem; cùm* *eas quilibet, modò primoribus labris studia Mathematica degustârit, nullo negotio ex illa propos. 47. colligere posit: Vt non videam, cur tandem eas propositiones tanti ponderis esse dicat, cùm sint omnium iudicio leuissimæ: adeò vt in plerisq; earum nec ipse Peletarius demonstrationem vllam, propter earum euidentiam adducat, sed eas nulla probatione egere fateatur. Deniq; non est, quòd tantoperè mihi succenseat idcirco, quòd constructionem Pentagoni æquilateri, & æquianguli supra datam rectam lineam finitam ei nō tribuerim: quoniam in ea constructione nihil prorsus ab eo sum mutuatus: quod iis diiudicandum relinquo, qui meam cum illius constructione contulerint. Nam & mea omnino diuersa est, & ille in sua mirificè (vt alia peccata taceam) abutitur propositione 9. lib. 3. cùm ex ea probet, punctum quoddam esse centrum circuli, qui nondum est descriptus. Geometra sanè dixisset, punctum illud esse eiusmodi, vt circulus ex eo descriptus ad interuallum cuiuslibet lineæ rectæ ex illis tribus, quæ ibi ostensæ sunt æquales, transeat per extremitates reliquarum duarum linearum æqualium. Nam propositio 9. lib. 3. nihil eo loco ad rem facit, cùm propositum ex ipsa constructione posit concludi, & ex demonstratis, vt proximè dixi, etiamsi propositio illa vera non esset, aut nusquam demonstrata. Idem peccatum committit Peletarius in omnibus propositionibus lib. 4. in quibus vel intra figuram rectilineam, vel circa eandem circulus describendus est. Quòd si ideò sum reprehendendus, quòd propositionem vnam, multò aliter à me, & breuiùs demonstratam, ei non ascripserim, non video quo pacto in idem ipse vitium non incurrat, cùm problema hoc* (Propositis duabus lineis inæqualibus, potentiam maioris supra minorem cognoscere.) *multis seculis ante ipsum à Theone demonstratum sibi arroget, hac solùm de causa, vt arbitror, quòd illud alia ratione, longiore tamen, demonstrauit. Mitto hoc aliud problema,* (Dato angulo rectilineo æqualem angulum curuilineum constituere.) *quod in Apologia suum proprium appellat, idemq; hactenus desideratum esse gloriatur: cùm tamen illud ipsum ego ex Proclo, qui multis ante eum seculis floruit, in definitione 5. libri 5. multò breuiùs & clariùs demonstrauerim. Nam, vt eo in loco ostendi, si rectæ lineæ datum angulum rectilineum continentes ponantur æquales, & circa ipsas duo semicirculi (qui æquales erunt) versus easdem partes describantur, illicò constitutus erit angulus curuilineus dato angulo rectilineo æqualis: Neq; opus est tot ambagibus vti, quot Peletarius ad eam rem demonstrandam adhibet; quamuis robur demonstrationis ipsius idem sit, quod meæ. Et quod magis mirandum est, fatetur Peletarius se meam demonstrationem vidisse, & eam nihilominus sibi audet, tanquam propriam arrogare. En cur Peletarius clamet, me non paucas demonstrationes parū honestè, vt mihi vendicem, sibi subducere conatum. Quis autem non videt, id eum in altero vituperare, quod ipse sibi gloriosum putat? Itaque multò veriùs, ac iustiùs eodem illum crimine ego, q̄ ille me, condemnare possum; cùm nunquā propositionum illarum inuentorem me appellauerim, vt ipse, sed solùm eius nomen, ob rationes à me expositas, reticuerim.*

DEINDE *angulum contactus, & acutum rectilineum eiusdem generis esse, contra me pluribus verbis conatur ostendere. Sed nescio quo modo aberrat, quod dicitur, à scopo. Solùm enim probat, vtrumq; angulum eodem genere quantitatis contineri, hoc est, vtrumq; angulum planum esse; quòd acutus angulus rectilineus, vel etiam rectus constare posit ex angulo contactus, & alio angulo mixto: quod neq; ego, neq; vllus vnquam Geometra negauit. Ego angulos illos eiusdem esse generis negaui, hac solùm de causa, quod angulus contactus, quantumuis multiplicatus angulum acutū rectilineum superare nequeat, vt in scholio huius propos. 16. euidenter ostendi. Hinc enim fit, vt alter ad alterum proportionem non habeat, atq; adeò quodam modo diuersi generis sint: quemadmodum eadem de causa linea recta finita, & infinita non censentur esse eiusdem generis, cùm altera ad alteram proportionem non habeat, quamuis sub eodem genere magnitudinis, nimirum sub linea recta, comprehendantur. Hoc itaq; feriat, vt collimasse videatur: quanquam vt omnia fatiat, collimabit nunquam, ita longè abest, quod est propositum. Magnitudines autem, quarum altera multiplicata alteram superare nequit, non censeri eiusdem generis, (quod ad proportionem attinet) licèt sub eodem genere quantitatis, hoc est, sub longitudine aut latitudine, aut profunditate, aut numero, collocentur, liquidò constat ex defin. 5. lib. 5. vbi Euclides satis perspicuè explicat, cuiusmodi debeant esse magnitudines eiusdem generis, inter quas proportio reperitur. Quare viderint alij, Peletarius homo consideratus, quàm cogitatè me incogitantem hominem appellarit; quasi non rectè intellexerim, quæ magnitudines sint eiusdem generis, quæ non sint. Nunquam enim dixi (id quod mihi affinxit, vt carperet) duarum magnitudinum, quæ sub diuersis quantitatis generibus collocantur, quales sunt linea, superficies, corpus, ac numerus, alterutram ita posse multiplicari, vt alteram superet: In quo, nemine reluctante, frustrà sese fatigat, vt doceat, id fieri non posse; sed de illis duntaxat magnitudinibus sum locutus; quæ cùm in eodem genere quantitatis versentur, diuersi tamen generis censeri possunt: quales sunt superficies rectilinea, & curuilinea, siue mixta: Itemq; linea recta, & curua. Hæ etenim ita differre inter se videntur, vt Aristoteles liquidò affirmârit, vnam alteri æqualem esse non posse: quod tamen (pace Aristotelis dictum sit) verum vsquequaque non est; cùm Archimedes in libro de Lineis spiralibus demonstrauerit, quænam linea recta æqualis posit esse circunferentiæ cuiusuis circuli dati, idemq; nos in quadratura circuli ostenderimus. Non igitur negare poterit Peletarius, ab Euclide defin. 5. lib. 5. aliquas quantitates à proportionis definitione excludi, diuersiq; propterea esse quodammodo generis, quod ad proportionem attinet, licèt in eodem magnitudinis genere ponantur: quales sunt angulus contactus, & angulus rectilineus; Linea item recta finita, & infinita: Multas item magnitudines comprehendi in eadem definitione proportionis, quas plerique excludebant; cuiusmodi sunt curuilinea superficies, & rectilinea, nec non*

*non*

non linea circularis, & recta, vt paulò antè diximus, latiusq; in defin. 5. lib. 5. exponemus. Verùm Peletarius, ne opinionem illam suam, quam de angulo contactus semel imbiberat, deserere cogeretur, noluit hanc expositionem 5. defin. lib. 5. recipere; immò eam vt oppugnet, omnes videtur in Apologia intendisse neruos, oblitus sui, qui ferè eodem modo illam defin. in 5. lib. olim exposuerat; nisi quòd non rectè inde colligit, angulum contactus non esse quantitatem, propterea quòd multiplicatus nullam magnitudinem, vt dicit, possit excedere. Hoc enim (pace eius dixerim) falsum est. Nam licet angulus contactus multiplicatus angulum rectilineum non possit excedere, excedet tamen alium angulum contactus. Quare ex illa defin. solùm rectè colligitur, angulum contactus ad angulum rectilineum non habere proportionem vllam; ad angulum verò alium contactus quemcunq; proportionem habere. Sed siue ita intellexerit eam defin. vt ex commentarijs eius in lib. 5. colligi potest, siue secus, vt in Apologia indicare videtur, nō multum laboro: Certè ita illam esse intelligendam, vt exposui, nemo, qui verba Euclidis diligenter expenderit, negabit. Verùm enimuerò, si mihi fidem habere non vult Peletarius, habebit certè, (nisi arrogans haberi volet) aut Proclo grauissimo scriptori, qui libro 2. in lib. 1. Euclid. ad definitionem anguli plani eodem modo definitionē illam intellexit, aut Petro Nonio Lusitano, quem tanti facit; (& meritò id quidem: fuit enim acerrimo vir ingenio, & nullo hac nostra ætate in Mathematicis inferior) vt eum vnum pro multis millibus testem citet, & suarum demonstrationum approbatorem, qui disertissimis verbis tum in libro de Erratis Orontij, tum in Algebra sua, illam definitionem explicat, vt à me est exposita: quinetiā ibidem asserit, ex ea defin. colligi, angulum contactus ad angulum rectilineum, & lineam finitam ad infinitam nullam habere proportionem; vt Petrus Nonius, quē testem produxerat pro se Peletarius, iam pro me testimonium dicat. Atq; ex hisce duobus locis Petri Nonij facilè quiuis intelliget, q̃ sine ratione, quanto contradicēdi studio mihi insultet Peletarius, cùm semel atq; iterum odiosè percontatur, vndenam potuerim illi lineam infinitā deportare. In idem enim crimen (si crimen est, lineam infinitam exempli causa nominare) vocat etiam Petrum Nonium testem suum, atq; adeò omnes Philosophos, quorum est illa vox nemini inaudita, præterquam Peletario, finiti ad infinitum nullam esse proportionem. Desinat igitur à me sciscitari, vnde lineam infinitam deportauerim: Inde enim respondebo, vnde eam Petrus Nonius, vnde Philosophi omnes deportârunt. Quid? nónne sophisma illud Peletarij, semper in hoc erro, demonstratio illa, volui dicere, & quidem palmaris, qua conatur ostendere, propositionem 1. lib. 10. cum proposit. 16. lib. 3. stare non posse, si angulus contactus concedatur esse quantitas, à Petro Nonio Peletarij cognitore eadem prorsus ratione, qua à me ipso, confutatur? Quæ si germana demonstratio est, miror quid sit, cur eam Nonius Geometriæ scientissimus, idémque Peletarij approbator, minùs probârit: Cur nihilo magis demonstrationes eiusdem, quibus planum facit, (vt putat) angulum contactus quantitatem non esse, eundem illum Nonium nihil admodum mouerint? Id enim (nisi fallor) illa Nonij verba, (Si quis sententiam Peletarij de angulo contactus amplecti velit.) declarant. Nam si demonstrationes existimasset, profectò Peletarij doctrinam in eo retinendam esse dixisset, Geometricæ enim demonstrationes eiusmodi sunt, vt assensum extorqueant, ac dubitationem omnem excludant, nulloq; modo quempiam sinant ancipiti opinione distrahi sic, vt tum assentiatur, si velit, tum, si nolit, dissentiat. En cur Peletarius Nonij testimonio aliorū iudicia contemnat, en præclarum testimonium quod Petrus Nonius eius demonstrationibus dedit: quò æquiore animo ferat, eas à me nihilo magis, quàm ab illo suo approbatore, demonstrationes putari.

Tertio, quòd existimare dixi Peletarium, angulum contingentiæ nihil esse, falsum esse, clamat: Nusquam enim dixisse se, nihil esse, sed quantitatem non esse. Itáne verò? at in prædicamento Quantitatis, quod neq; est punctum, (quis enim inclinationem illam punctum esse dixerit?) neq; quantitas, quo alio nomine vocetur, q̃ Nihil? Sed, vt vt dixit, profectò non modò mirabile est, sed monstri in Geometria simile, putare angulum contactus non esse quantitatem, qui postea additus aliis angulis efficiat curuilineum angulum rectilineo æqualem. Quis enim vnquam Geometrarum id, quod quantitas non est, magnitudini adiunxit, vt æqualem eam alteri efficeret? Præterea, & figura trilatera curuilinea intra tres circulos se mutuò tangentes conclusa nullum haberet angulum ex Peletarij sententia; quia tres illi contactus, anguli non sunt: cùm tamen tribus diuersis lineis contineatur; quod omnino nouū est, & inauditū apud Geometras. Itémq;, si quatuor, aut plures circuli se mutuò tangerent, vt fieret figura curuilinea quadrilatera, vel plurium laterum, illa nullum angulum haberet. Atq; etiam, si duæ lineæ rectæ angulum continentes, vnum eundemq; circulum tangerent, trilatera illa figura habens tertium latus curuum, vnicū tantùm haberet angulum. Quæ omnia si sunt absurda, consentanea non est opinio Peletarij. Sed nimis fortasse multa ad Nihil illud Peletarij euertendum, ad quod tuendum ille nihil afferat. Quoniam verò, ne pro Nihilo suo nihil agere videatur, quando res non potest, mea verba carpit, verba defendam: quæ quidem ille, nescio quibus præstigijs ita deprauat, vt dicere videar, Nihil esse minus quocunq; angulo: atq; (vt simplicem, credo, hominem irretiat) quærit ex me, quod tandem genus sermonis sit illud. Viderit is, cuius ex officina prodijt. Neq; enim ego eiusmodi sermonem agnosco, q. Nihil esse minus quocunq; angulo, nusquam dixerim, nisi ex sententia Peletarij. Sed videlicet homo vehemes, vt suum illud Nihil vlcisceretur, aliud mihi Nil affinxit, quo cū impunè pugnaret: At quàm palæstricè pugnat quàm sibi placet hoc loco, dum meum illud argumentum, quo petitus fuerat, in me ipsum mira venustate conuertit? Sic enim argumentatur. (Angulus contactus nihil est: Angulus contactus angulo contactus maior est. Angulus igitur maior nihilo est: Atqui Clauius eundē ponit minorē nihilo;

Est igitur angulus contactus nihilo maior, & idem nihilo minor.) *Mox quasi Nihil illud ab se effictum iugulasset, exclamat.* (En Clauij argumenta, quæ vtrum tandem Peletarij sophismata sunt, an Clauij potiùs figmenta, cùm ipse suum angulum contactus nihil esse dicat, non ego?) *Verùm vt hominem fæneum, atq; adumbratum nequicquā petere desinat, virum ostendam, qui cum, si velit, certare cum laude possit. Ego vt ostenderem, angulum contactus, ex Euclidis sententia, verè esse angulum, & angulum semicirculi angulo recto rectilineo minorem, ita sum argumentatus. Si Euclides sensisset, angulum contactus nihil prorsus esse, (hoc est, vt Peletarius intelligit, non esse angulum, vel non esse quantitatem) & angulum semicirculi æqualem recto rectilineo; quid, obsecro, tantoperè desudasset, vt demonstraret, angulum contactus esse minorem omni acuto rectilineo, angulum verò semicirculi maiorem? Quid enim clarius, quàm nihil, cuiusmodi est angulus contactus, ex Peletarij sententia, hoc est, quàm id, quod quantitas non est, minus esse quocunque angulo? Quid rursus magis perspicuum, quàm angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum semicirculi, maiorem esse quolibet acuto? Agnoscat itaque Peletarius, Nihil illud suum malè à nobis acceptum, idq; ita vlciscatur, vt meum hoc argumentum refellat: in quo ego si angulum contactus dixi esse nihil, & non potiùs eum nihil esse asserui ex sententia Peletarij, libenter manus dabo. Videtur Peletarius aut non intellexisse meum argumentum, aut intelligere noluisse: nisi eum quis dicat, dedita opera verba mea voluisse cauillari; quod & plerisque aliis in locis facere videtur. Nunquam enim dixi, angulum contactus minorem esse, aut maiorē nihilo: Solùm affirmaui, angulum contactus quemcunque minorem esse, aut maiorem aliquo alio angulo contactus, quem non ego dixi nihil esse, sed Peletarius, eundemq; Euclides minorem quolibet acuto rectilineo rectè demonstrauit. Vt autem intelligat Peletarius, me, quod ipse negat, didicisse Dialecticam, illum ipsum tam lepidum, atq; acutum syllogismum, quo Nihil illud ab se confictum mira venustate confixit, paulisper considerabimus; vt quàm suo iure Dialecticæ ignaros alios vocet, appareat. Nam mihi quidem malè tornatus ille ipse syllogismus videtur; incudiq; reddendus. Etenim cùm versetur in tertia figura, in eo maior extremitas, (vt Dialectici loquūtur) quæ est, Nihil de minori extremitate, quæ est, angulo cōtactus maior, in recto prædicari deberet, hoc pacto. Angulus contactus nihil est: Angulus cōtactus angulo contactus maior est. Igitur aliquid, quod angulo contactus maius est, nihil est. Quæ quidē conclusio rectè sequitur ex præmissis, quarū prior Peletarij est, nō mea, posterior autē mea, & Procli, immò & Euclidis. Conclusio autē illa Peletarij, Angulus igitur maior nihilo est, nulla ratione ex præmissis inferri potest. Nam si, angulum cū dicit, intelligit Peletarius angulum contactus, assumitur medius terminus, qui in vtraq; præmissa subijcitur: quod nefas esse, Aristoteles in prioribus Anal. & Dialectici omnes clamāt. Si autē alium angulum intelligit, assumitur in conclusione terminus, cuius nulla facta est mentio in præmissis: quod nihilo magis licere, nemo est tam plumbeus in Dialecticis, qui nesciat. Neq; contendat Peletarius, mentionē factam esse anguli in minore extremitate, vbi dictum est, angulum contactus angulo contactus maiorem esse. Nam angulus in minore extremitate positus est in obliquo, qui in conclusione subijcitur in recto: quod, vt auctore Aristotele, docent omnes Logici, sine peccatò fieri non potest. Quod, vt planum fiat, vtemur ea palæstra, quam ab illo didicimus. Si quispiam ita argumentetur; Angulus in semicirculo rectus est: Angulus in semicirculo angulo acuto maior est. Angulus igitur acutus maior recto est; quis, modò sit imbutus Dialecticis, eiusmodi argumentationem probet, cùm præmissæ veræ sint, conclusio autem falsa? Talis ille syllogismus est Peletarij, qui apud imperitam multitudinem alter Chrysippus videri voluit. Conclusio, quæ rectè ex præmissis inferretur, hæc esset. Igitur aliquis angulus, qui acuto maior est, rectus est. Sed tamen ei veniam dandam puto, quòd se Geometricum Dialecticum, ex alio quodam Dialecticorum genere profitetur, cuius ego me Dialecticæ, si ab Aristotelica abhorret, planè fateor ignarum. Fatetur deinde Peletarius, se non intelligere, quo pacto dicere possim angulum rectilineum minimum dari non posse, & tamen angulum contactus esse omni acuto rectilineo minorem, (ipse, vt aliquid addat de suo, dicit, omni minimo acuto rectilineo minorem; cùm tamen verbum illud, minimo, ego nō addiderim) cupitq; scire, quid aliud sit, angulum contactus minorem esse omni rectilineo acuto, quàm angulum contactus esse acutorum rectilineorum minimum. Qua in re morem geram homini non grauatè, etsi è scholio huius propos. 16. potuit id, quod cupit, cognoscere. Nempe ea ratione me illud potuisse dicere, qua dicimus, angulum obtusum rectilineum minimum dari non posse, & tamen angulum rectilineum acutū esse omni obtuso rectilineo minorem. Item quemadmodum aliud est, angulum rectilineum acutum minorem esse omni rectilineo obtuso, quàm angulum rectilineum acutum esse obtusorum rectilineorum minimum: propterea quòd angulus acutus non est obtusus. sicut nec angulus contactus rectilineus est, aut acutus. Id quod etiam clarissimè docet Proclus lib. 2. in primum Euclidis ad definitionem anguli recti, obtusi, & acuti. Sed hæc puerilia sunt, & quæ magis ad Grammaticos spectent, quàm ad Geometras. Quòd etiam, ne librum meum parum spissum viderer fecisse, suas demonstrationes ad verbum me recitasse queritur, id in me reprehendit, quod ego in ipso desidero. Id enim eo à me consilio factum est, vt omnes planè viderent, syncerè me, ac fideliter eius opinionem retulisse, nullumq; omnino verbum immutasse. Quod vtinam in meis verbis recitandis ipse facere in animum induxisset. Multò enim minus spissam Apologiam suam facere potuisset. Nam ego, quid erat, cur laborarem meum librum Peletarij verbis magis spissum efficere? Qui enim parum spissum iudicarem librum eum, qui nec raras, nec inanes in libros omnes Euclidis commētationes contineret, cùm Peletarius suum librum, qui sex priorum duntaxat librorum demōstrationes complectitur, satis spissum*

*sit*

*sit arbitratus? Sed eo sum æquior Peletario, quòd ex se alios iudicat. Nam in Apologia sua, ne inanis rerum videretur, tres demonstrationes nihil penitùs ad eam pertinentes inseruit: quarum priorem immeritò suam propriam facit, vt suprà dixi: posteriorem verò, quam mirum in modum gloriatur se clariorem fecisse, ego & longè breuiùs & dilucidiùs (nisi meorum me amor fallat) iam pridem demonstraui, vt mox, Deo adiuuante, ex libello meo de dimensionibus magnitudinum apparebit. Sed licuerit Peletario suæ Apologiæ, ne incomitata prodiret, nouo more comites ac pedissequas adiungere: mihi cur non liceat, quod omnibus semper licuit, aliorum sententias totas meis scriptis intexere? Aut igitur omnes reprehendat, atq; in primis Petrũ Nonium laudatorem suum, q idem fecit in refellendis paralogismis Orontij, aut sine causa id se mihi vitio dedisse fateatur. Quòd si postquam tam fideliter eius verba proposui, Peletarius criminatur, me eius sententiam perperam esse interpretatum, quid facturus fuisset, si alienis verbis eius opinionem in medium adduxissem? Equidem facilè sibi persuadebit quis, nullum eum verbum relicturum fuisse, quod non reprehendisset.*

QVARTO *vt leuiora hæc omittat, illud putat palmare, quòd me laborare ostendit, vt probem angulos contactus alios alijs esse inæquales: propterea q scripsi, æqualitatem angulorum eiusdem generis requirere eandem inclinationem linearum, ita vt lineæ vnius conueniant omnino lineis alterius, si alter alteri superponatur, iuxta octauum pronunciatum. Qua in re dupliciter me peccare ait. Primùm quòd dicã, ad æqualitatem angulorum eiusdem generis requiri eandem linearum inclinationem; cùm tamen angulus rectilineus ostensus sit à me æqualis curuilineo, atq; adeò eiusdem generis cum illo, licèt non sit in vtroq; eadem linearũ inclinatio. Deinde quòd putẽ angulos contactus ideò inter se inæquales esse, quòd sibi mutuò nõ congruant. Equidem si quid in eo à me peccatum esse intelligerem, & peccatum (quod est ingenuo, & liberaliter educato homine dignum) agnoscerem, & Peletario correctori, & emendatori meo (quocunq; id animo fecerit) gratias agerem. Nunc verò, cùm, tota re etiam atq; etiam considerata, nihil omnino vitij inesse videam, ita, quæ obijciuntur, diluam, vt tamen gratiam habeam Peletario, qui occasionẽ dedit eius loci diligentiùs explicandi. Ego igitur eo loco intellexi angulos eiusdem generis illos, qui vnam lineam habent rectam, & alteram circularem, quales sunt anguli contactus, & semicirculorum, de quibus tunc agebamus. Quare cùm linea recta vnius congruat lineæ rectæ alterius, circularis verò circulari nõ item, nisi circuli ponantur æquales, efficitur, angulos illos esse inæquales inter se, quippe cũ alter alterũ excedat. Eadem ratione, si dentur duo anguli curuilinei æqualium circulorum æquales, necesse est, lineas vnius lineis alterius congruere, si alter alteri superponatur. Quòd si Peletarius hanc doctrinam oppugnat, sciat se iam bellum mouere non mihi, sed Proclo, qui libro 3. in primum Euclidis ad propos. 4. idem prorsus docet, quod ego. Ait enim,* (Angulorum autẽ æqualitatem sumemus iuxta conuenientiam laterum in rectilineis: in cæterisq; omnibus, qui eiusdẽ sunt speciei, vt in Lunaribus, in Systroidibus, atq; in vtrinq; conuexis, &c.) *Et infrà;* (Quæ æqualia data sunt; sibi inuicem congruunt. Hoc autem non in omnibus verum est, sed in iis, quæ specie similia sunt. Specie autem similia hæc dico, vt recta linea rectæ lineæ, & circunferentia circunferentiæ circuli eiusdem, & anguli, qui à similibus similiter iacentibus lineis comprehensi sunt. Horum autem dico, quòd quę æqualia data fuerint, sibi inuicem congruunt.) *Nónne luce clarius ex his colligitur, Proclum illos solùm angulos contactus concedere æquales, quorum recta linea, & curua sibi mutuò congruunt? Temerè igitur Peletarius mihi obijcit angulum rectilineum, & curuilineum, triangulum & quadratum, atque alia huiusmodi, de quibus eo loco sermo non erat; quippe quæ non sint eiusdem speciei, atq; adeò æqualitatem tueantur, etiamsi alterum alteri non congruat. Vt iam vereri incipiam, ne Peletarius noster contentionis sit cupidior, quàm veritatis.*

POSTREMO, *vt nihil intactum relinquat, me non modò Geometriæ ignarũ vocat, sed etiam Logices: propterea quòd lib. 5. dixi, non rectè à quibusdam diuidi Proportionem rationalem in proportionem æqualitatis, atq; inæqualitatis; quòd multæ proportiones inæqualitatis sint etiam irrationales. Ego verò (etsi non is sum, qui mihi quicquam vllo in genere arrogem) tamen in hisce studiis, in quibus mediocriter versatus sum, planè rudem non esse, præ me semper tuli. Quantulum autem sit id, quod in vtroque possim, cæteri meliùs, qui vacant amore, & odio, iudicabunt. Peletario quidem ipsi ita me adhuc respondisse arbitror, vt iam minus fortasse ignarus Geometriæ, ac Dialecticæ videar, quàm putarat. Nunc, vt perspiciat, neq; me pertinacem esse, neque illa, quæ exagitat, à Dialecticorum præceptis abhorrere, libenter ei concedo, diuisionem illam, quam à me reprehensam criminatur, probam esse, ita tamen, si in quolibet diuisionis membro Diuisum intelligatur: neque verò hoc vnquam negaui, cùm alibi similes diuisiones vsurpem. Solum id eo loci contendi, rectiùs meo iudicio, diuidi Proportionem in vniuersum duplici diuisione, priori quidem in proportionem rationalem, & irrationalem; posteriori verò in proportionẽ æqualitatis, atq; inæqualitatis, (quod verissimum esse, neminem negaturum censeo, qui rem diligentiùs expenderit) cùm tam priora duo membra diuidentia, quam posteriora totum Diuisum (vt Logici loquuntur) exhauriant: quàm si prius membrum prioris diuisionis, hoc est, proportio rationalis, secetur in proportionẽ æqualitatis & inæqualitatis, cùm hæc membra diuidentia latiùs pateãt, q Diuisum, nisi in illis Diuisum intelligatur. Atq; eò magis duplex illa diuisio mihi probatur, q non desint, qui primùm partiantur Proportionẽ in proportionẽ æqualitatis, & inæqualitatis: posteriorem deinde hanc in proportionẽ rationalem & irrationalem: contrario scilicet modo, quàm priores. Vt igitur hanc controuersiam dirimerem, ac dubitationem, vtri rectiùs faciant, prioresne, an posteriores, tollerem,* ſtatui duabus diuiſionibus ſecandam eſſe Proportionem, quarū vtraq; abſolutiſſima eſt, ac perfectiſſima. Non aliter arbitror, omnes magis eſſe probaturos, ſi corpus duplici diuiſione ſecetur, primū quidem in viuens, & nō viuens: deinde verò in album, nigrum, ac mixto colore affectum: q̄ ſi corpus viuens diuidatur in album, nigrum, ac mixto colore affectum; ob cauſam iam dictam: licet hæc ſubdiuiſio bona ſit, ſi Diuiſum ſemper intelligatur. Huiuſmodi diuiſiones ſexcentas adducere poſſem: ſed ſatis eſt, me prudenti lectori inſtitutū meum in diuiſione Proportionis expoſuiſſe, & cur duplicem illam diuiſionē ſubdiuiſioni aliorum prætulerim. Quòd ſi tam acres, & ſeueri iudices ſingulorum verborum aut improprietatum, quæ per incogitantiam interdum excidunt, eſſe velimus, næ ſcriptorum nullus aliquo vitio carebit, neque ipſe quidem Peletarius, vt partim ex iis, quæ dicta ſunt, conſtat, partim etiam ex aliis eius demonſtrationibus apparere poteſt: quas ſi liberet ad certam illam Dialecticorum normam exquirere, profectò reprehendendi materia nō deeſſet. Verùm non eſt hoc noſtri conſilii, refellendi ſtudio vitia aliena ſcrutari, ſed vbi ſeſe occaſio obtulerit, meam (qualiſcunque eſt) de aliorum ſententiis ſententiam exponere: Solùm ab eo peto, (quoniam ſe tam acutum Dialecticum iactat, vt alios contemnere videatur: quanquam ex ſuperiore ſyllogiſmo, quem in me conuertit, liquidò conſtat, q̄ ſit Dialectica peritus) ex qua Logica hanc argumentationem hauſerit; Omnes anguli contactus ſunt minores quolibet angulo acuto rectilineo: ergo omnes inter ſe ſunt æquales. Itemq; hanc; Anguli ſemicirculorum, quò à maioribus circulis fiunt, eò ſunt maiores: igitur tandem ad aliquem peruenietur, qui recto rectilineo maior ſit; in qua quidem ad Cardanum ſcribit, nullum eſſe paralogiſmum. Ego ſanè vehementer miror, qua ratione in tam apertas hallucinationes, & viro Geometra omnino indignas, incidere potuerit. Sed argumentationes eiuſmodi ſatis ſuperq; in ſcholio huius propoſ. 16. à me ſunt confutatæ, adductis contra ipſas euidentiſſimis inſtantiis. Deinde quod me perſtringit, quaſi parum intellexerim, quæ ſit proportio rationalis, & quæ irrationalis, non multum laboro. Conſtat enim, eum ſtudio mihi detrahendi id dixiſſe; cùm has proportiones vbique ex ſententia grauiſſimorum ſcriptorum definierim: neq; verò ipſe, vllum peccatum à me ea in re eſſe commiſſum, poterit oſtendere. Certè commentarius meus in librum 10. Euclidis abundè declarat, num illas intellexerim, néc ne. Deniq; quòd criminatur, me in definitionibus lib. 5. proportionis nomen confundere cum Rationis nomine, nullo modo verum eſt. Perſpicuis enim verbis docui in defin. 4. lib. 5. me in commētario comparationem duarum quantitatum Proportionem cum pluribus Geometris appellaturum, habitudinem autem proportionum, Proportionalitatem; licèt in textu cum interprete illam dicam Rationem, hanc verò, Proportionem. Neque enim quicquam in textu Euclidis volui immutare. Itaque nulla in meis verbis poteſt eſſe ambiguitas.

Ex his, quæ diximus, ſatis (vt opinor) apparet, doctiſſimos illos viros, de quibus initio memini, non ſine cauſa Apologiam Peletarii inanem, ac reſponſionis indignam iudicaſſe. Ego tamen, ne contemnere hominem viderer, quem ſemper laudandum eſſe duxi, occaſione inuitatus reſpondendum amicè putaui. Exiſtimet ille, angulum contactus quantitatem non eſſe; atq; adeò angulum ſemicirculi recto rectilineo eſſe æqualem, ego certè contrariam ſententiam tuebor, donec aliud mihi demonſtratum ab aliquo fuerit: rationes enim Peletarii fallaces ſunt, nihilque continent in ſe probabilitatis, vt in ſcholio huius propoſ. 16. oſtendi, vbi omnes diſſolui: neque meis ipſe ſolutionibus vel vnum verbum (exceptis iis, quæ ſuprà ex lib. 10. adduxi) reſpondit; quod tamen maximè ad Apologiam pertinebat: Vt non ſine cauſa permulti exiſtimauerint, eum nō veritatis ſtudio eam Apologiam ſcripſiſſe, ſed ne veritati ceſſiſſe videretur. Nec verò quiſquā putet, me vnū exiſtimare, angulum contactus verè eſſe angulum, & angulum ſemicirculi recto rectilineo minorem. Multos enim eius rei auctores, eoſq; grauiſſimos laudare poſſum, Theonem, Campanū, Petrum Nonium, & (vt Nonius refert) Archimedem, atq; Iordanum: quin etiam (quod plurimi facio) Euclidem ipſum, eiuſq; commentatorem celeberrimum Proclum; vt taceam ex Gallis præſtantiſſimos, atque eruditiſſimos viros non paucos, è quorum numero in primis eſt Franciſcus Candalla ex illuſtriſſima Fluſſatum familia oriundus, qui inſigne volumen in elementa Geometrica Euclidis edidit, vbi ad propoſ. hanc 16. apertiſſimè docet, angulos contingentiæ verè eſſe angulos, ex definitione anguli plani, aliosq; aliis eſſe maiores, æquales, ac minores: Eos autem, qui aliter ſentiunt, (Peletarium proculdubiò intelligit. Præter eum enim ad hunc diem nemo hac de re ſcripſit) abſurdè multa ex falſis ſuppoſitis concludere affirmat. Huc accedat etiam Henricus Monantholius Mathematicarum artium Profeſſor regius, qui, cùm Apologiam Peletarii in me conſcriptam vidiſſet, opuſculum eruditum aduerſus Peletarium de angulo contactus edidit. Vt autem ſtudioſus Lector videat, quid in hoc negotio ſentiat Proclus, afferam in medium pauca quædam ex eius commentariis in lib. 1. Euclidis, quæ obiter notaui, & ex quibus liquidò conſtabit, eius ſententiam eſſe Peletarii commentò prorſus contrariam. Primùm itaque ita ſcribit lib. 2. in primum Euclidis, ad definitionem anguli plani. (Duæ namque circunferentiæ ſe inuicem ſecando, vel ſeſe contingendo, angulos efficiunt. Quinetiam à recta linea, & conuexa circunferentia angulus continetur, vt Cornicularis.) Intelligit autē nomine Cornicularis anguli angulum contactus mixtū. Paulò enim antè dixerat, angulum Cornicularem eſſe omni rectilineo minorem: quod ſolius anguli contactus proprium eſt. Deinde in eodem libro ad definitionem anguli recti, obtuſi, & acuti ita habet. (Cornicularis namque angulus omni recto eſt minor, quandoquidem & acuto, nec tamen acutus eſt: Semicircularis itidem quocunque recto eſt minor, acutus tamen non eſt.) Quid clarius, quàm Proclum hic aſſerere angulum ſemicirculi minorem eſſe recto? Rurſus lib. 3.

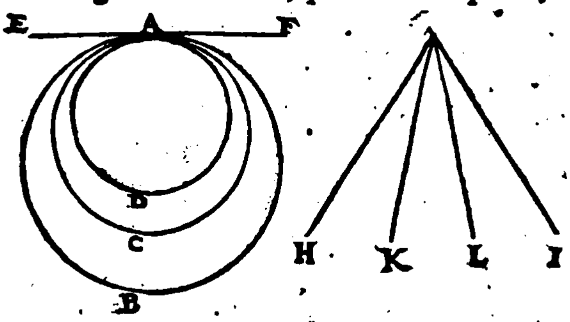
ad

*ad propos.4.lib.1.Euclidis ita scribit.* (Addiscemus enim, quòd angulus Cornicularis acuto semper inæqualis est, & nunquam æqualis; Et semicircularis similiter, transitusque à maiori ad minus non omnino per æquale fit.) *En quàm apertè docet angulum semicirculi æqualem esse non posse angulo rectilineo, transitumq́, propterea fieri à maiori ad minus non per æquale: quorum vtrumque Peletarius negat, audetq́, posterius appellare paralogismum. Denique eodem lib.3.ad propos.23. hac verba habentur.* (Cùm autem nullus angulus mixtus rectilineo æqualis esse possit, &c.) *Et Peletarius tamen non dubitat angulum semicirculi, qui mixtus est, angulo recto rectilineo facere æqualem, contra Procli sententiam. Ex his liquere arbitror, vt de cæteris taceam, idem sentire Proclum de angulo contactus, & semicirculi, quod ego contra Peletarium scripsi; quis autem neget, maiorem esse auctoritatem, meliora argumenta Procli, quàm Peletarij?*

*OBITER quoque hoc loco monendum lectorem censeo, id, quod de angulo contactus, qui fit in circulis, ex sententia Euclidis, & Procli docui, verum etiam esse de angulo contactus, qui in conicis sectionibus efficitur, nimirum in Parabola, Hyperbola, & Ellipsi. Vt enim Apollonius Pergæus demonstrat lib.1.propos.32.in locum, qui inter coni sectionem, & rectam lineam tangentem interijcitur, altera recta linea non cadit; atque adeò angulus ille contactus minor etiam est omni acuto rectilineo, & reliquus angulus ex recto (si nimirum ex puncto contactus ad lineam tangentem excitetur perpendicularis) omni acuto rectilineo maior. Si igitur, vt opinatur Peletarius, angulus contactus quantitas non est, (eadem enim hic est ratio, quæ in circulo) erunt omnes anguli contactus inter se æquales, hoc est, vt ipse vult, non inæquales, & reliquorum angulorum singuli recto rectilineo æquales. Vbi sanè maior absurditas apparet, quò ad sensum, in ea Ellipsi, quæ perexiguam habeat latitudinem, & in ea Hyperbola, quæ ferè linea recta esse videatur. Valde enim inæquales cernuntur anguli ad verticē illius Ellipsis, & Hyperbolæ constituti; vt incredibile omnino sit, nisi firma ratione demonstretur, angulos illos contactus ad vertices sectionum constitutos inter se, & reliquos ex rectis inter se quoque esse æquales; propterea quòd in ea Ellipsi linea tangens magis recedere perspiciatur à circunferentia Ellipsis, quàm in circulo; in illa verò Hyperbola minus. Sed hæc alio tempore examinanda relinquamus: nunc ad interruptam expositionem Euclidis reuertamur.*

## EX CARDANO.

ALIQVA quantitas potest continuè, & infinitè augeri, altera verò infinitè minui; & tamen augmentum illius, quantumcunque sit, minus semper erit decremento huius.

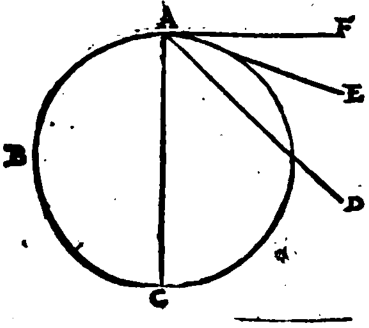



*PROPONANTVR enim angulus contactus B A E, & acutus H G I. Si igitur describantur alij circuli minores A C, A D, tangentes rectā E F, in A, augebitur continuè angulus contactus, vt dictum est. Si rursus inter rectas G H, G I, aliæ rectæ cadant G K, G L, diminuetur continuè angulus acutus: Et tamen semper angulus contactus, quantumlibet augeatur, minor est angulo acuto, quantumuis diminuatur.*

## EX CAMPANO.

*CAETERVM ex hac propositione 16. perspicuum est, vitiosam esse argumentationem hanc; qua vsus est Brison in quadrando circulo, vt auctor est Aristoteles. Videlicet,*

TRANSITVR à minori ad maius, vel contrà, & per omnia media; ergo per æquale. Vel, contingit reperire maius hoc, & minus eodem; ergo contingit reperire æquale.

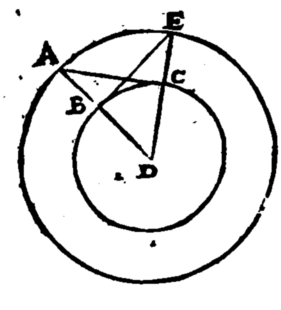



*DESCRIBATVR enim circulus A B C, cuius diameter A C, moueri intelligatur circa extremum punctum A, fixum, per puncta D, E, F, donec circulum contingat in A. Hoc concesso, manifestum est, quandiu recta A C, secat circulum, fieri angulum acutum minorem angulo semicirculi; quamprimum verò secare cessat, effici angulum rectum maiorem eodem angulo semicirculi. Cùm igitur factus sit transitus per omnes angulos rectilineos intermedios, patet vitium prioris argumentationis. Similiter quia nullus angulus rectilineus æqualis reperitur angulo semicirculi; (Rectus enim, vel obtusus, maior est; & acutus, minor;) constat quoq; vitiosam esse posteriorem consequentiam.*

# PROBL. 2. PROPOS. 17. 16.

A DATO puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.

Ex puncto A, ducenda sit linea, quæ tangat circulum B C, cuius centrum D. Ducatur recta




A D, secans circulum B C, in B. Deinde centro D, interuallo autem D A, describatur circulus A E, & ex B, educatur B E, perpendicularis ad A D, secans circulum A E, in E. Ducta denique recta E D, secante circulum B C, in C, connectatur recta A C: quam dico tangere circulum B C, in C. Cùm enim duo latera D E, D B, trianguli B D E, æqualia sint duobus lateribus D A, D C, trianguli C D A, vtrumque vtrique, vt constat ex circuli definitione; angulusque D, contentus dictis lateribus, sit communis: Erunt[a] & bases B E, C A, & anguli D B E, D C A, super ipsas, æquales. Est autem D B E, rectus ex constructione. Igitur & D C A, rectus erit. Itaque C A, cùm sit perpendicularis ducta ad C, extremum semidiametri C D, tanget circulum, ex corollarium præcedentis propositionis. A dato ergo puncto A, ducta est A C, recta tangens circulum B C, in C, quod faciendum erat.

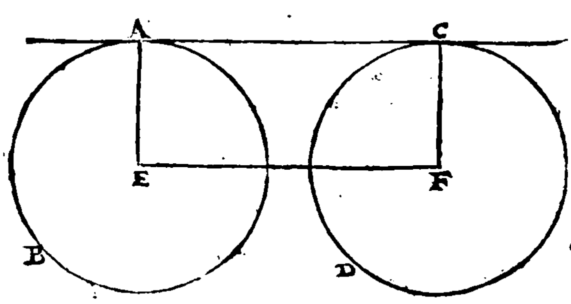
a 4. primi.

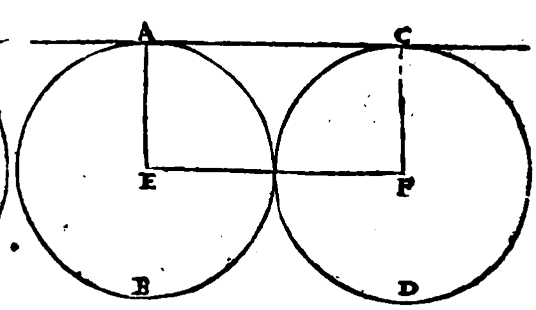
## SCHOLIVM.

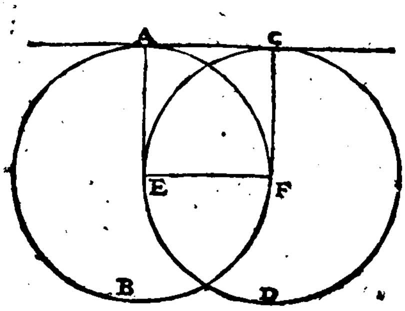
*PRAXIS huius problematis ex ipsa demonstratione facilè elicitur. Faciliorem tamen praxim, ad propositionem 31. huius libri inuenies.*

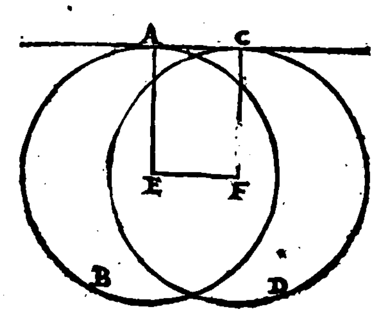
*SED & sequens problema cum Cardano absoluemus.*

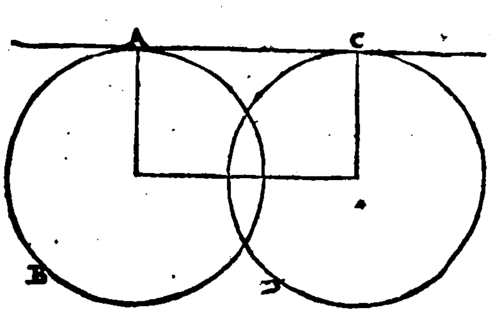
**PROPOSITIS duobus circulis, quorum neuter alterum includat; rectam lineam ducere, quæ vtrumque tangat circulum.**



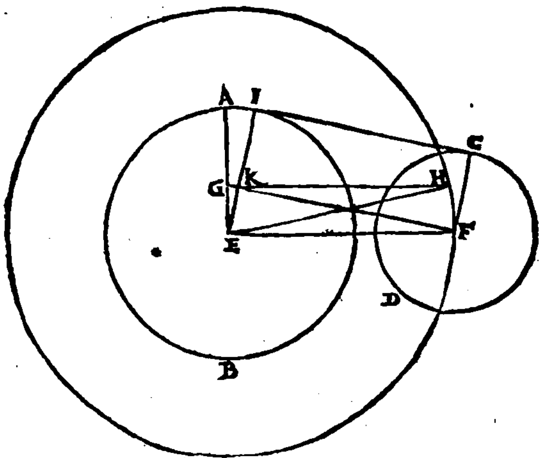

*SINT primùm duo propositi circuli æquales, A B, C D, quorum centra E, & F, recta iungantur E F, ad quam ducantur perpendiculares E A, F C, secantes circunferentias in punctis A, & C. Dico rectã p A, & C, eductam vtrumq; circulũ tangere. Cùm enim E A, F C, semidiametri circulorum æqualium sint æquales,[a] & parallelæ, quòd anguli E, & F, recti sint;[b] Erunt quoq; E F, recti. Quare, per A C, æquales & parallelæ; Ideoq;[c] & anguli A, & C, coroll. propos. 16. huius libri recta A C, vtrumque circulum tanget, cùm rectos angulos constituat in extremitatibus semidiametrorum.*

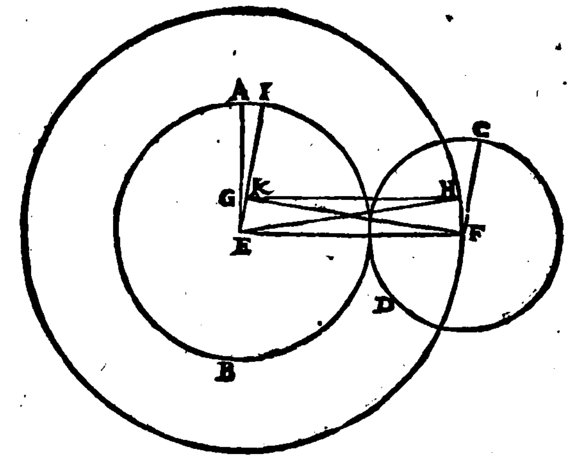
a 28. primi.
b 33. primi.
c 29. primi.

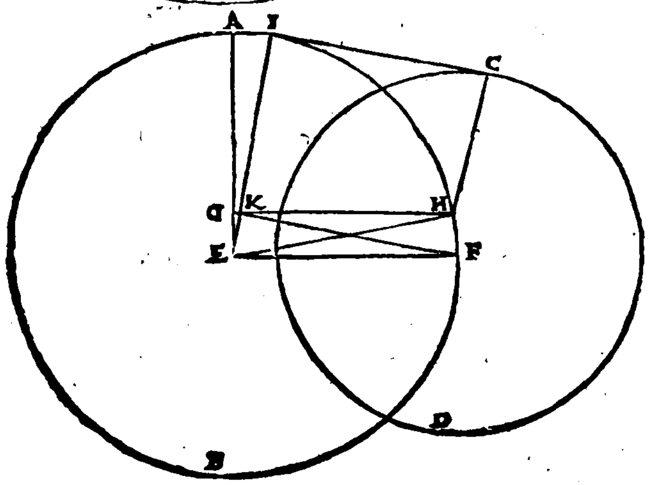
*SINT deinde duo circuli propositi inæquales A B, C D, quorum rursus centra E, & F, iungantur recta E F, ad cuius interuallum ex E, centro maioris circuli circulus describatur F H, si maior non transeat per centrum minoris. Deinde ducta ad E F, perpendiculari E A, abscindatur ex ea portio A G, semidiametro minoris circuli C D, æqualis; & ex G, ipsi E A, perpendicularis ducatur G H, vsque ad circunferentiam circuli F H, proximè descripti. Ducta autem recta H E, fiat angulo H E A, angulus F E I, æqualis; atque per F, agatur ipsi E I, parallela recta F C. Dico rectam per puncta I, & C, ductam vtrumque circulum A B, C D, contingere. Abscindatur enim ex I E, recta I K, ipsi A G, vel semidiametro F C, minoris circuli, æqualis, vt sint reliqua E G, E K, æquales quoque, ducaturq; recta K F. Quoniam igitur latera H E, E G, trianguli H E G, æqualia sunt lateribus F E, E K, trianguli F E K, & anguli ipsis contenti æquales, ex constructione:[d] Erunt anguli H G E, F K E, æquales; Ac proinde, cùm H G E, rectus sit, ex constructione, erit & F K E, rectus*

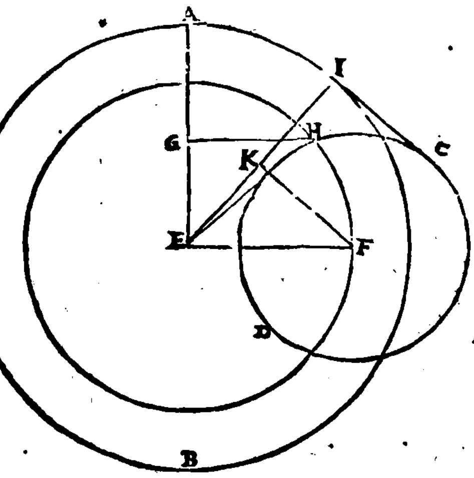
d 4. primi.

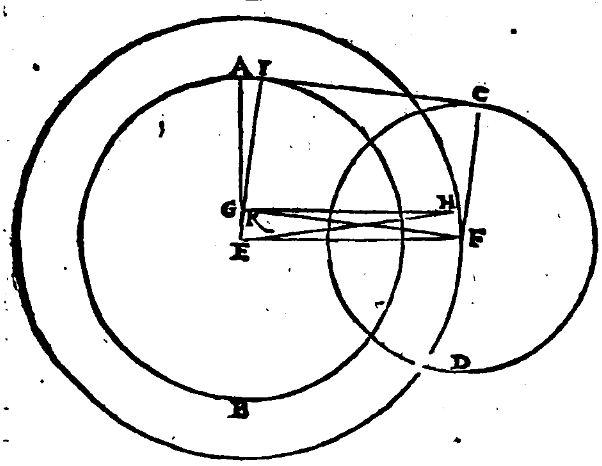
Rursus

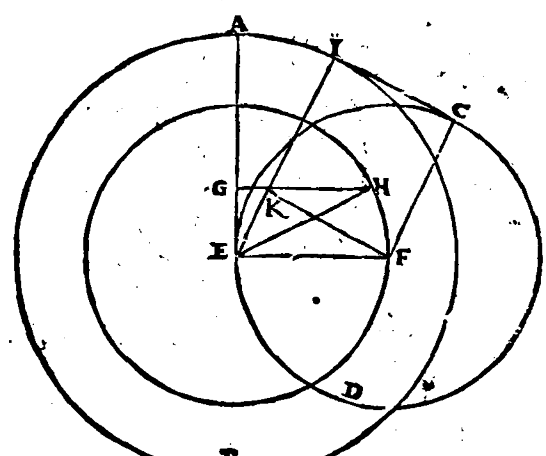


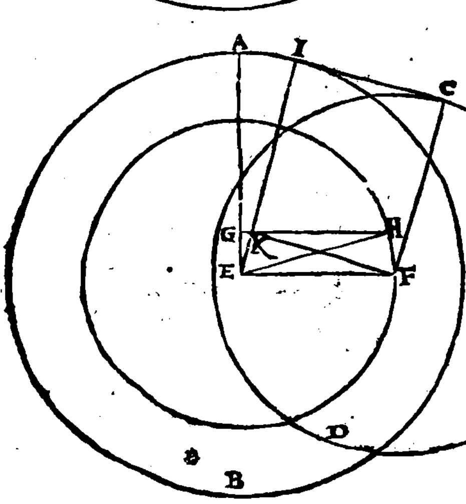



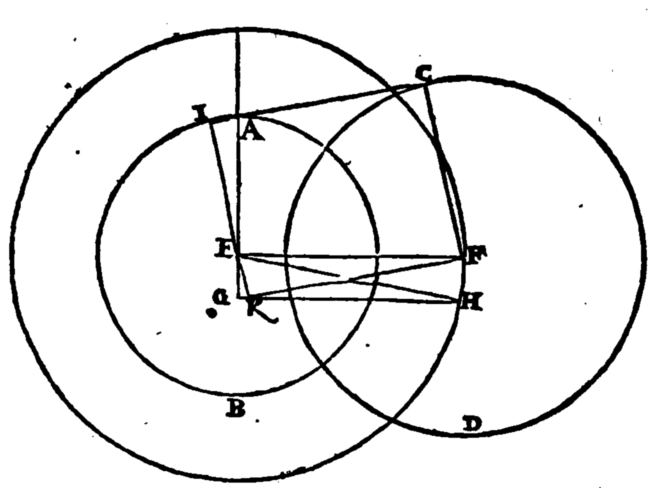




*Rursus quia* C F, I K, *æquales sunt, & parallelæ, ex constructione,* [a] *erunt quoque* I C, K F, *æquales & parallelæ; Atque propterea angulus* E I C, [b] *cũ æqualis sit externo* F K E, *rectus erit;* [c] *Ideoq; &* I C F, *rectus existet. Quocirca, per corollarium propositionis 16. huius libri, recta* I C, *vtrumque circulum continget, cùm rectos angulos efficiat in extremitatibus semidiametrorum. Quod erat propositum.*

a 33. primi.
b 29. primi.
c 29. primi.

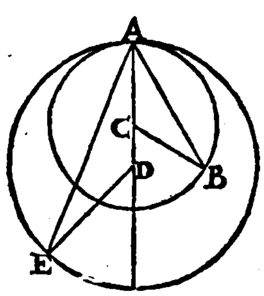
S A T I S *autem constat, si circuli propositi æquales fuerint, id quinque modis posse fieri. Aut enim alius extra alium cadit, aut se mutuò contingunt, aut se inuicẽ p centra secant, aut nõ, ita tamẽ, vt vel cẽtra consistãt in communi eorũ segmento, vel certè extra illud.*

ITEM si circuli propositi fuerint inæquales, id contingere posse septem modis. Aut enim minor totus extra maiorem cadit, aut ipsum tangit, aut ipsum secat, ita vt vel centrum eius sit in circunferentia maioris, vel intra ipsum circulum, hac tamen lege, vt circunferentia minoris citra centrum maioris transeat, vel centrum minoris sit extra circulum maiorem, vel iterum ita intra, vt circunferentia minoris per maioris centrum incedat, vel denique ita intra, vt circunferentia minoris includat centrum maioris.




QVONIAM verò, circulis inæqualibus existentibus, initium constructionis sumpsimus semper à maiori, si quis maluerit à minori incipere, id efficiet eadem constructione, demonstrationeq́, nisi quòd rectæ A E, I E, protrahendæ sunt ad G, & K, vt A G, I K, æquales sint semidiametro F C, maioris circuli; Addito insuper, angulos H E G, F E K, contentos lateribus H E, E G; F E, E K, idcirco æquales esse, quòd H E A, F E I, reliqui duorum rectorum æquales sint ex constructione. Denique angulum E I C, esse rectum ex 29. propositione libri 1. quòd & E K F, inter parallelas I C, K F, rectus sit ostensus.

QVIA verò & per punctum in circunferentia circuli datum, & per punctum extra circulum existens lineam rectam, quæ circulum tangat, ex iis, quæ demonstrata sunt, ducere possumus; per punctum quidem in circuli circunferentia positum, ex corollario propositionis 16. per punctum verò extra circulum, ex hac propositione 17. Item ostensum est hoc scholio, rectam duci posse, quæ duos circulos tangat, dummodò alter eorum in altero non totus includatur; non alienum erit hoc loco demonstrare, quo pacto per datum punctum circulus alium datum circulum tangens, siue interius, siue exterius, describendus sit: Item qua ratione describendus sit circulus tangens duos alios circulos, quorum vnus non sit totus intra alium.




SIT ergo primùm in circulo A B, cuius centrum C, datum punctum A, in circunferentia, per quod describendus sit circulus circulum A B, tangens in A. Ducta ex A, per centrum C, recta A C, sumatur in ea quoduis punctum D, ex quo ad interuallum D A, circulus describatur A E, qui circulum A B, in A, tanget; Et siquidem punctum D, fuerit vltra centrum C, cadet circulus A E, totus extra circulum A B; intra verò si punctum D, in semidiametro A C, extiterit, vt scholio propos. 13. huius libri demonstrauimus.

DEINDE extra eundem circulum A B, datum sit punctum G, per quod describendus sit circulus circulum A B, tangens. Ducta ex G, per centrum C, recta G C A, eaq́ secta bifariam in D, describatur ex D, per A, circulus A E, qui per datum punctum G, transibit, tangetq́ circulum A B, in A, per ea, quæ in scholio propositionis 13. huius libri demonstrauimus.

ALITER. Sit datum rursus punctum E, extra circulum A B. Ducta recta E A, vtcunque ex puncto dato E, quæ circulum secet, & non per centrum transeat, ducatur ex A, per centrum C, recta A C; eritq́ angulus E A C, acutus, cùm pars sit anguli semicirculi, qui recto minor est. Angulo ergo E A C, in E, æqualis constituatur A E D: coibitq́ recta E D, cum A C, in D, ob duos angulos D A E, D E A, duobus rectis minores. Quoniam igitur anguli D A E, D E A, æquales sunt, [a] erunt & latera D A, D E, æqualia. Circulus ergo ex D, per A, descriptus per datum punctum E, transibit, tangetq́ circulum A B, in A, ex iis, quæ in supradicto scholio propos. 13. huius libri demonstrauimus.

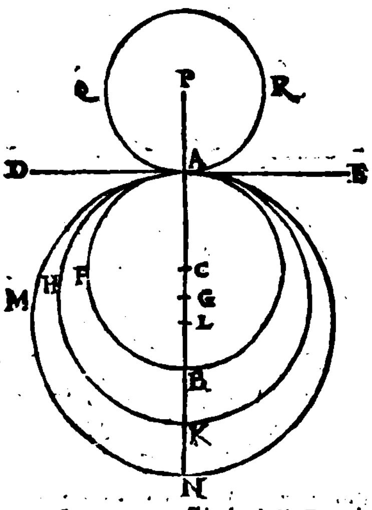
a 6. primi.

TERTIO datum sit punctum F, intra circulum A E. Ducta ex F, per centrum D, recta F A, eaq́ secta bifariam in C, describatur ex C, per A, circulus A B, qui per datum punctum F, transibit, tangétque ex dicto scholio circulum A E, in A.

ALITER. Sit datum rursus punctum B, intra circulum A E, cuius centrum D. Ducta recta quæcunque A D, per centrum D, & nō per datum punctum B, transeunte, quæ cum recta coniuncta A B, faciet angulum acutum B A D, vtpote minorem angulo semicirculi, qui recto minor est. Angulo ergo B A D, in B, æqualis fiat A B C: coibitq́ recta B C, cum A D, in C, ob duos angulos B A C, A B C, duobus rectis minores. Quoniam igitur anguli B A C, A B C, æquales sunt, [b] erunt & latera C A, C B, æqualia. Circulus ergo ex C, per A, descriptus per datum punctum B, transibit, tangetq́ circulum A E, in A, per ea, quæ à nobis scholio propos. 13. huius libri demonstrata sunt.

b 6. primi.

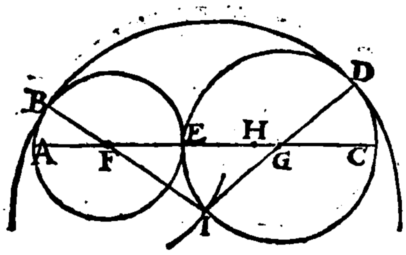
QVOD

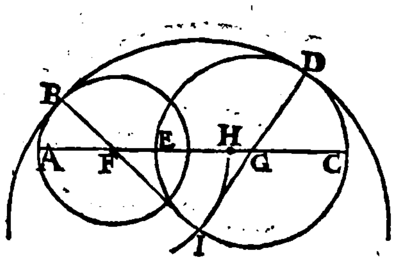



QVOD si per punctum N, extra circulum Q A R, datum describendus sit circulus tangens circulum Q A R, exteriùs, ita vt neuter intra alium cadat, ducatur ex N, puncto dato ad centrum P, circuli Q A R, recta N P, secans circunferentiam circuli in A. Diuisa deinde recta N A, bifariam in L, describatur ex L, per A, circulus, qui per datum punctum N, transibit, tangétque circulum Q A R, in A, propterea quòd vterque circulus rectam D E, quæ per A, ducitur ad N P, perpendicularis, tangit in A, ex coroll. propos. 16. huius libri.

EODEM modo, si in circunferentia circuli Q A R, datum sit punctum A, describemus circulum, qui circulum Q A R, exteriùs tangat in A. Ducta enim ex centro P, recta P A C, per datum punctum A, si ex quolibet puncto huius rectæ, per A, circulus describatur, nimirum A M N, ex centro L, tanget hic circulum Q A R, vt dictum est in A.

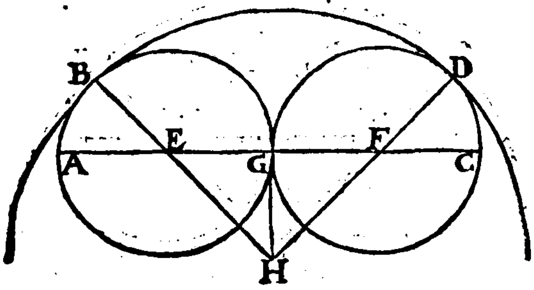
EX his liquet, per idem punctum datum plures posse circulos describi alium datum circulum tangentes, (si nimirum ex datis punctis E, B, in priori figura ducatur alia recta, quæ à rectis E A, B A, differant. Item ex punctis datis F, G, emittantur aliæ lineæ non per centra C, D, transeuntes, sed circulos secantes; ac tandem in recta A G, eiusdem figuræ, vel in P A C, posterioris figuræ, quando punctum A, in circunferentia datur, alia centra à centris C, D, L, diuersa assumantur) cùm tamen per punctum datum extra circulum vna sola linea ad easdem partes duci possit circulum tangens. Quo pacto autem circulus duos circulos tangens, quorum vnus non sit totus intra alium, describendus sit, hac ratione cum Ioanne Baptista Benedicto demonstrabimus.

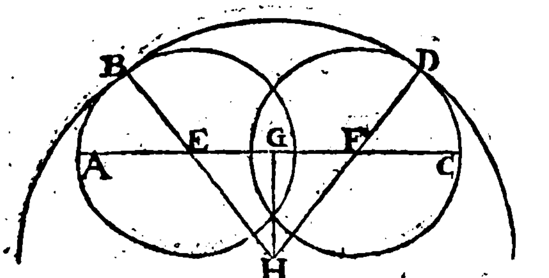



SINT primùm duo circuli se mutuò tangentes, aut secantes inæquales, A B, minor, & C D E, maior, quorũ centra F, G, per quæ recta ducatur F G, occurrens circunferentijs in A, C, quæ, si circuli se tangant in E, [a] per contactum E, transibit. Abscissa recta E H, ex semidiametro maioris circuli, quæ semidiametro minoris sit æqualis, describatur ex F, centro minoris ad interuallum rectæ H C, quæ maior est, quàm semidiameter minoris, arcus secans circunferentiam maioris in I; & ex I, per centra F, G, rectæ ducantur I F, I G, occurrentes circunferentijs in B, D. Et quia C H, ipsi I F, & H E, ipsi F B, æqualis est, per constructionem; erunt totæ C E, I B, æquales. Cùm ergo & diameter I D, diametro C E, æqualis sit, erit quoq; I B, ipsi I D, æqualis. Circulus ergo ex I, per B, descriptus transibit per D. Cùm ergo idem ex scholio propos. 13. huius libri extra vtrumq; circulum cadat totus, tanget vtrumque circulum in B, D. Quod est propositum.

a 12. tertij.

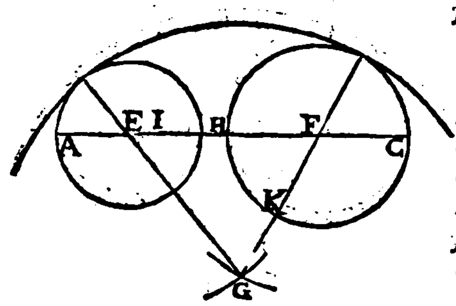


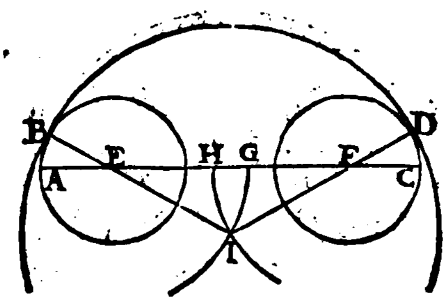

SINT deinde duo circuli se mutuò tangentes, vel secantes æquales, A B, C D, per quorum centra E, F, recta educatur A C. Diuisa deinde recta E F, inter duo centra bifariam in G, (Quando circuli se mutuò tangunt, diuiditur recta E F, bifariam in puncto cõtactus, propter semidiametros æquales æqualium circulorum) excitetur in G, ad E F, perpendicularis G H: in qua sumpto puncto H, vtcunque, ducantur ex eo per centra E, F, rectæ occurrentes circunferentijs in B, D. Quoniam igitur duo latera G E, G H, duobus lateribus G F, G H, æqualia sunt, angulosq; comprehendunt æquales, nimirum rectos; [b] erunt & bases H E, H F, æquales: Et additis semidiametris æqualibus E B, F D, totæ lineæ H B, H D, æquales erunt. Circulus igitur ex H, per B, descriptus transibit per D, cadetq; extra vtrumque circulum, ex corollario propos. 13. huius libri. Quare vtrumque tanget in B, D. Quod est propositum.

b 4. primi.

TERTIO sint duo circuli siue æquales, siue inæquales, A B, C D, quorum alter extra alterum sit totus. Per eorum centra E, F, ducatur recta A C. Et si circuli



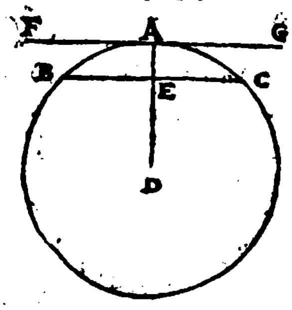

sunt inæquales, describatur ex E, centro minoris ad interuallum diametri maioris C H, arcus, quem in G, secet alter arcus ex F, centro maioris descriptus ad interuallum rectæ F I, compositæ ex semidiametro maioris F H, & H I, semidiametro minoris æquali. Ponamus enim nunc hos arcus se intersecare; quando autem se nõ secant, dicemus mox, quid agendum sit. Ex G, autem per centra E, F, rectæ ducantur secantes circunferentias in B, D. Et quia F G, ipsi F I, æqualis est: ablatis æqualibus F K, F H; reliquæ æquales erunt K G, H I. Est autem H I, sumpta æqualis semidiametro minoris E B. Igitur & K G, ipsi E B, æqualis erit. Cùm ergo & E G, diametro maioris K D, sit æqualis; erunt totæ rectæ G B, G D, æquales. Quare circulus ex G, per B, descriptus transibit per D, cadetq; extra vtrumque circulum, ex coroll. propos. 13. huius lib. ac proinde vtrumque tanget in B, D. Quod est propositum.




VERVM quia non semper duo illi arcus ex E, & F, descripti se intersecant, quod accidit propter nimiam circulorum distantiam vnius ab altero, absoluemus problema hoc alio modo, qui generalis est, siue circuli se tangant, siue non, etiamsi non se secent, & siue æquales sint, siue inæquales. Ducta recta A C, per circulorum centra, sumantur rectæ æquales A G, C H, ita vt qualibet semissem ipsius A C, superet: & ex centro E, per G, arcus G I, describatur, quem secet in I, alius arcus H I, ex centro F, per H, descriptus: ac deniq; ex I, per centra E, F, rectæ emittantur circunferentijs occurrentes in B, D. Et quoniam E G, E I, æquales sunt: si addantur æquales A E, B E, fient totæ A G, B I, æquales. Eadem ratione erunt C H, D I, æquales. Cùm ergo A G, C H, positæ sint æquales, erunt quoque B I, D I, æquales. Circulus igitur ex I, per B, descriptus transibit per D, totusq; extra vtrumque circulum cadet, ex coroll. propos. 13. huius lib. ac propterea vtrumq; tanget in B, D. Quod est propositum.

IAM verò eadem arte describemus circulum datæ magnitudinis, q; duos circulos propositos tangat, dummodò semidiameter circuli describendi maior sit, semisse rectæ A C, per centra circulorum vsq; ad circunferentias ductæ. Nam si semidiametro dati circuli rectas æquales abscindamus A G, C H, reliqua perficiemus, vt proxime dictum est.

PORRO manifestum etiam est, si ex puncto medio rectæ A C, per centra circulorum vsque ad circunferentias ductæ, describatur circulus per A, & C, eum circulum tangere vtrumque circulum A B, & C D, in A, & C, ex coroll. propos. 13. huius libri.




EX PELETARIO.

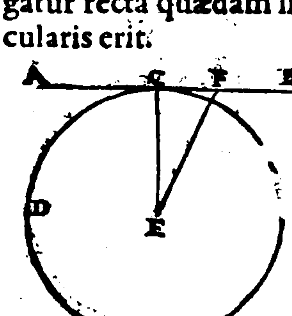
LINEAE rectæ, quæ circulum secet, lineam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat.

a 18. primi.

CIRCVLVM enim A B C, cuius centrum D, secet recta B C, cui ducenda est parallela tangens circulum A B C. Ducatur ex centro D, recta D E, perpendicularis ad B C, extendaturq; ad punctum A, in circunferentiam; & ex A, ducatur F G, perpendicularis ad A D. [a] Erit igitur F G, parallela ipsi B C, tangetque circulum in A, per corollarium propos. 16. huius lib. quod erat faciendum.

## 17. THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI circulum tangat recta quæpiam linea, à centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea, quæ adiuncta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.




a 17. primi.

b 19. primi.

RECTA linea A B, tangat in C, circulum C D, cuius centrum E, & ex E, ad C, recta ducatur E C. Dico E C, perpendicularem esse ad A B. Si enim non est, ducatur E F, perpendicularis ad A B, secans circunferentiam in D. Quoniam igitur in triangulo C E F, [a] duo anguli E C F, E F C, minores sunt duobus rectis; Et est E F C, rectus, ex constructione: erit E C F, minor. Quare [b] maior erit recta E C, hoc est, E D, quàm E F, pars quàm totum. quod est absurdum. Est igitur E C, perpendicularis ad A B. Quare si circulum tangat recta quæpiam linea, &c. Quod demonstrandum erat.

ALITER. Si E C, non est perpendicularis ad A B, erit alter angu-

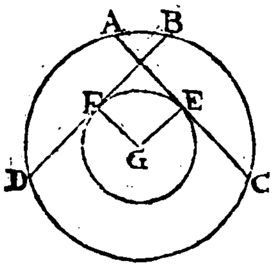
lorum

lorum ad C, obtusus, & alter acutus. Sit ergo E C B, acutus, qui cùm maior sit angulo semicirculi E C D, erit angulus semicirculi minor angulo aliquo acuto: quod est absurdum. Omnis siquidem angulus semicirculi [a] maior est omni acuto. a 16. tertij.

SCHOLIVM.

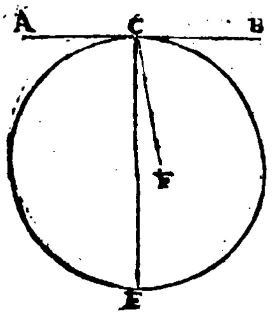
*Hinc licebit demonstrare sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile: videlicet.*

Dvobvs circulis ex eodem centro descriptis; erunt omnes rectæ lineæ interiorem circulũ tangentes, & vsq; ad circunferẽtiam exterioris circuli extensæ, inter se æquales, bifariamq; in punctis contactuũ secabuntur.



*Sint duo circuli A B C D, E F, ex eodem centro G, descripti, quos tangãt rectæ A C, B D, in punctis E, F. Dico rectas A C, B D, esse æquales, bifariamq; secari in E, F. Ducantur enim ex centro G, ad puncta contactuum E, F, rectæ G E, G F, [a] quæ ad A C, B D, perpendiculares erunt; ac proinde, per defin. 4. huius libri rectæ A C, B D, æqualiter à centro G, in circulo A B C D, distabũt, cùm perpendiculares G E, G F, æquales sint. Igitur [b] rectæ A C, B D, æquales sunt. Diuiduntur [c] autem & bifariam in E, F, à perpendicularibus G E, G F. Constat ergo id, quod propositum est.* a 18. tertij. b 14. tertij. c 3. tertij.

## THEOR. 17. PROPOS. 19. 18.

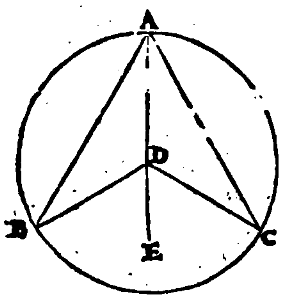


Si circulum tetigerit recta quæpiam linea, à contactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

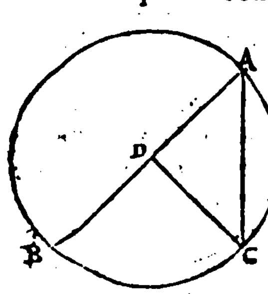
Tangat recta A B, circulum C D E, in C; & ex C, ducatur C E, perpendicularis ad A B. Dico in C E, esse centrum circuli. Si enim est extra C E, sit F, centrũ, à quo ad C, ducatur recta F C, [a] quę perpendicularis erit ad A B. Quare rectus angulus F C B, recto angulo E C B, æqualis erit, pars toti: quod est absurdum. Non igitur extra C E, centrũ circuli existet. Itaq; si circulum tetigerit recta quæpiam linea, &c. Quod erat demonstrandum. a 18. tertij.

## THEOR. 18. PROPOS. 20. 19.

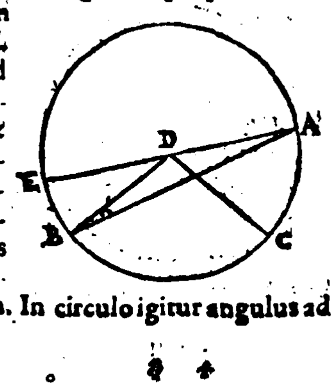
In circulo, angulus ad centrum duplex est anguli ad peripheriam, cùm fuerit eadem peripheria basis angulorum.



In circulo A B C, cuius centrum D, super basin B C, constituatur angulus B D C, ad centrum: & super eandem basin angulus B A C, ad peripheriam. Dico angulum B D C, duplũ esse anguli B A C. Includant enim primùm duæ A B, A C, duas D B, D C; & per centrum D, recta extẽdatur A E. Quoniã igitur rectæ D A, D B, æquales sunt, [b] erunt anguli D A B, D B A, æquales: Est autem externus angulus B D E, [c] æqualis duob. angulis internis D A B, D B A. Quare B D E, duplus erit alterius eorũ, vt anguli D A B. Eodem modo duplus ostẽdetur angulus C D E, anguli D A C. Quapropter totus B D C, duplus erit totius B A C. Quando enim duę magnitudines duarũ sunt duplæ, singulæ singularum; est quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum. Constat ergo propositum. b 5. primi. c 32. primi.



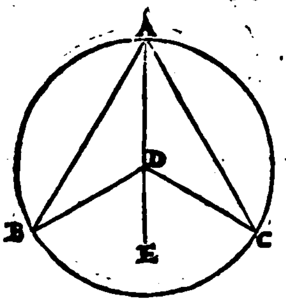
Deinde non includant rectæ A B, A C, rectas D B, D C, sed A B, per centrum extẽdatur. Quoniam igitur externus angulus B D C, [d] æqualis est duobus internis D A C, D C A: Hi autẽ duo [e] inter se sunt æquales, quòd latera D A, D C, sint æqualia; erit angulus B D C, duplus alterius eorum, nempe anguli B A C. Quod est propositum. d 32. primi. e 5. primi.



Tertio recta A B, secet rectam D C, & per centrũ D, extendatur A E. Quoniam igitur angulus E D C, ad centrum, & angulus E A C, ad peripheriam habent eandem basin E C, & recta A E. extenditur per centrum; erit angulus E D C, duplus anguli E A C, vt ostensum est in secunda parte. Simili modo erit angulus E D B, duplus anguli E A B; habent enim hi anguli eandem basin E B. Reliquus igitur angulus B D C, duplus erit reliqui anguli B A C. [f] Quando enim totum totius est duplum, & ablatum ablati; est & reliquum reliqui duplum. In circulo igitur angulus ad centrum duplex est, &c. Quod erat demonstrandum. f 20. quinti.

## SCHOLIVM.

*Ad primam partem huius propositionis demonstrandam assumptum est hoc principium.* (Si duæ magnitudines duarum magnitudinum sint duplæ, singulæ singularum; erit quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum.) *In tertia verò partis demonstratione hoc aliud principium adhibitum est.* (Si totum totius est duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.) *Quorũ vtrumque ab Euclide vniuersaliter demonstratur in omni genere multiplicium, & de quotcunque magnitudinibus, libro 5. propos. 1. & 5. Non tamẽ propterea demonstratio huius propositionis censenda est vitiosa, quasi assumat ea, quæ nondum sunt demõstrata: quia & duo illa principia lumine naturali ita cognita sunt in duplis magnitudinibus, vt facile à quouis sine vlla demonstratione concedantur, & vtraque illa propositio lib. 5. demonstrari potest ante tertium hunc librum, cùm ex eo non pendeant: adeò vt duo illa principia iure optimo adhiberi possint hoc loco, tanquam demonstrata. Neq; verò hac in re circulus ab Euclide committitur, cùm duo illa principia, per quæ propos. 20. huius libri demonstratur, hac eadem propositione non nitantur, aut alijs propositionibus, quæ ex hac 20. pendent.*



*Verum, si placet, demonstrabimus primam partem huius propositionis sine priore illo principio, & tertiam sine posteriore, (secunda enim pars neutro eorum indiget) hac ratione. Repetatur prima figura. Et quoniam*[a] *tam anguli D A B, D B A, inter se æquales sunt, quàm anguli D A C, D C A;*

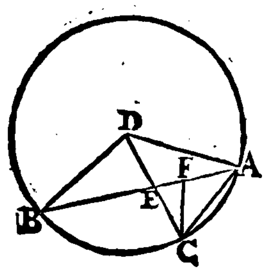
a 5. primi.

*erit totus angulus B A C, duobus angulis B, C, simul sumptis æqualis, ac proinde tres anguli B A C, B, & C, simul sumpti dupli erũt anguli B A C. Quia verò angulus B D C, æqualis est ijsdem tribus angulis B A C, B, & C. Nam*[b] *cũ B D E, duobus internis, B, & D A B, & C D E, duobus internis C, & D A C, æqualis sit, erit totus B D C, omnibus quatuor, hoc est, tribus B A C, B, & C, æqualis.) erit angulus quoq; B D C, duplus anguli B A C. quod est propositũ.*

b 32. primi.

c 32. primi. *Aliter. Quoniam*[c] *sex anguli triangulorum A B D, A C D, sunt æquales quatuor rectis, sunt autem & tres anguli B D C, C D A, A D B, quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. erunt hi tres illi sex æ-*

d 3. pron. *quales: ablatisq; communibus A D B, A D C,*[d] *reliquus B D C, reliquis B A C, B, & C, æqualis erit. Quare vt prius, erit B D C, ipsius B A C, duplus.*

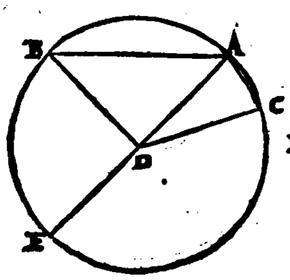


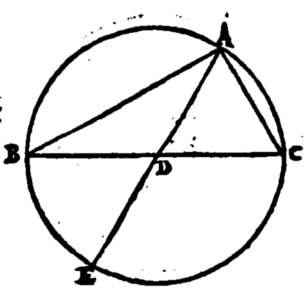
*Repetatur quoque tertia figura, vbi recta D C, rectam A B, secat, vt in E. Quoniam ergo, ducta recta A D,*[e] *duo anguli D A C, D C A, æquales sunt, estq; angulus D A C, angulo E A C, maior, erit quoque angulus D C A, eodẽ angulo E A C, maior. Si igitur fiat angulus A C F, angulo E A C, æqualis, secabit C F, rectam A E, vt in puncto F,*[f] *angulusq; E F C, æqualis erit internis angulis F A C, F C A, ac proinde anguli B A C, duplus. Quia verò*[g] *anguli D A C, D C A, æquales sunt, & ablati quoq; F A C, F C A; erunt & reliqui D A B, E C F, æquales. Cùm*[h] *ergo D A B, ipsi D B A, æqualis sit; erit quoq; E C F, eidem D B E, æqualis: Sunt autem,*[i] *& anguli D E B, F E C, ad verticem E, æquales. Igitur & reliqui anguli B D E, E F C, æquales erunt, ex corollario 1. propos. 32. lib. 1. Cùm ergo angulus E F C, ostensus sit anguli B A C, duplus; erit quoq; angulus B D C, anguli B A C, duplus. quod est propositum.*

e 5. primi.

f 32. primi.

g 5. primi.
h 5. primi.
i 15. primi.



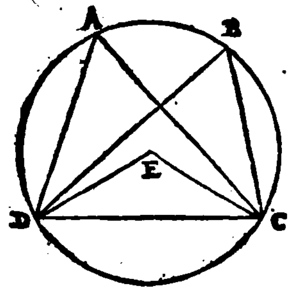


*Quod si rectæ B D, C D, in centro angulum nõ constituant, ad partes basis B C quod tum demum fit, quando segmentum B A C, est vel semicirculus, vel segmentũ minus; nihilominus spatium illud ad centrũ duplum erit anguli ad circunferentiam, qui eandem habeat basin, quam spatium illud. Ducta enim recta A E, per centrum, erit tam angulus B D E, ad centrum duplus anguli B A E, ad circunferentiam, quàm angulus C D E, ad centrum, anguli C A E, ad circunferentiam, vt ostensum est. Spatium igitur ad centrum D, basin habens B E C, constansq; ex duobus angulis B D E, C D E, duplum est totius anguli B A C. Quod est propositum.*

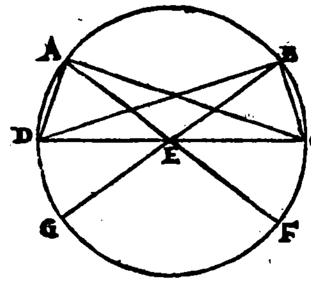
20. 
# THEOR. 19. PROPOS. 21.

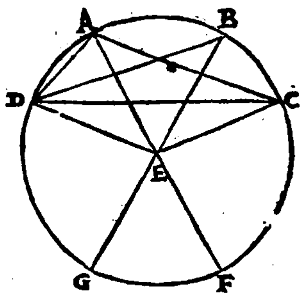
In circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli, sunt inter se æquales.

In circulo A B C D, cuius centrum E, existant anguli A, & B, in segmento D A B C. Dico eos esse æquales. Sit enim segmentum D A B C, primùm semicirculo maius; & ducantur rectæ D E, C E, ad



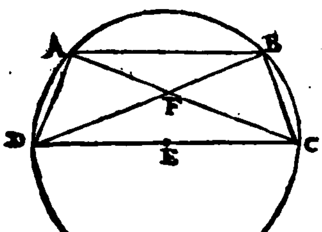

C E, ad centrum E. Quoniam igitur angulus D E C, ad centrum,[a] duplus est tam anguli D A C, quàm D B C, ad peripheriam, cùm omnes habeant eandem basin D C; erunt anguli A, & B, dimidiatæ partes anguli E.[b] Quare inter se æquales erunt. Eademq; ratione omnes alij anguli existentes in segmento D A B C, ostendentur esse æquales. a 20.tertij. b 7.pron.

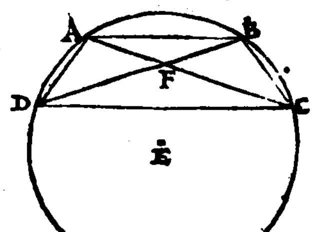


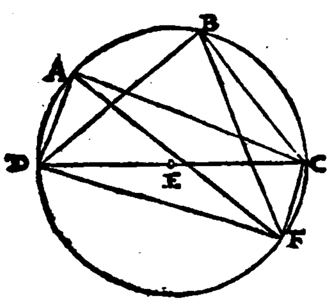

Sit deinde segmentum D A B C, vel semicirculus, vel semicirculo minus. Ducantur per centrum E, rectæ A F, B G, & in segmento minori connectantur rectæ D E, C E. Quoniam igitur angulus D E F, ad centrum,[c] duplus est anguli D A F, ad peripheriam. Similiter angulus C E F, anguli C A F; ac proinde duo anguli simul D E F, C E F, duorum angulorum simul D A F, C A F, dupli erunt, hoc est, totius anguli D A C: Sunt autem anguli D E G, G E F, æquales angulo D E F: Igitur erunt quoque tres anguli D E G, G E F, F E C, simul dupli anguli D A C. Eadem ratione erunt iidem tres anguli dupli anguli D B C.[d] Quare æquales erunt anguli D A C, D B C. c 20.tertij. d 7.pron.

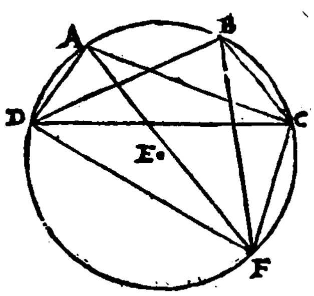
Aliter. Quoniam vt in scholio propos. præcedentis demonstrauimus, spatium ad centrũ E, cuius basis D G F C, duplum est vtriusque anguli D A C, D B C, ad circunferentiam:[e] Erunt ipsi anguli D A C, D B C, inter se æquales. e 7.pron.




Aliter. Secent sese rectæ A C, B D, in F, & connectatur recta A B. Quoniam igitur tres anguli trianguli A F D, æquales sunt tribus angulis trianguli B F C; quoniam tam illi, quàm hi[f] æquales sunt duobus rectis: Si auferantur anguli A F D, B F C,[g] qui æquales sunt; erunt reliqui A D F, D A F, reliquis B C F, C B F, æquales. Atqui & anguli A D F, B C F, æquales sunt ostensi in segmento maiori A D C B. Ergo & anguli reliq. D A C, D B C, æquales sunt. f 32.primi. g 15.primi.



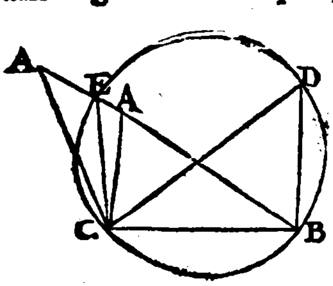




Aliter. Ductis rectis D F, C F, ad punctum in circunferentia quoduis F, includentibus centrum E, ita vt tam D A B C F, quàm F D A B C, sit segmentũ maius; iungantur quoque rectæ A F, B F. Quia igitur anguli D A F, D B F, in eodem segmento maiori D A B C F, æquales sunt; nec non & anguli F A C, F B C, in segmento etiam maiori F D A B C, existentes: si hi illis addantur, fiet totus angulus D A C, toti angulo D B C, æqualis. Itaque in circulo, qui in eodem segmento sunt, &c. Quod erat ostendendum.

## SCHOLIVM.

*Facile quoque theorema istud conuertemus hoc modo.*

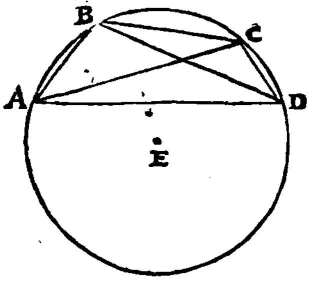
**Si à duobus punctis quatuor rectæ lineæ ducantur, ex singulis binæ, quæ ad easdem partes contineant angulos duos æquales: circulus per duo illa puncta, & alterutrum illorum angulorum descriptus, per alterum quoque angulum transibit.**

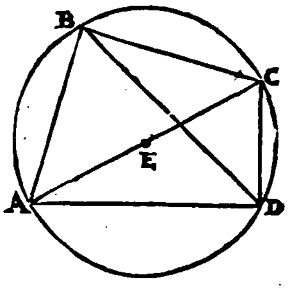



*Ex duobus enim punctis B, C, educantur quatuor rectæ lineæ B A, C A, B D, C D, bina ex singulis, constituentes ad easdem partes duos æquales angulos A, D. Dico circulum per puncta B, C, & angulum D, descriptum, transire quoque per angulum A. Si enim non transit, transibit vel vltra A, vel citra secans rectam A B, in E. Ducta ergo recta C E,[a] erunt anguli E, D, æquales. Cùm ergo & angulus A, angulo D, ponatur æqualis; erunt anguli C A B, C E B, æquales, externus, & internus, quod est absurdum.[b] Externus enim interno maior est. Transit ergo circulus per A. quod est propositum.* a 21.tertij. b 16.primi.

## THEOR. 20. PROPOS. 22.

21. QVADRILATERORVM in circulis descriptorũ anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sunt æquales.





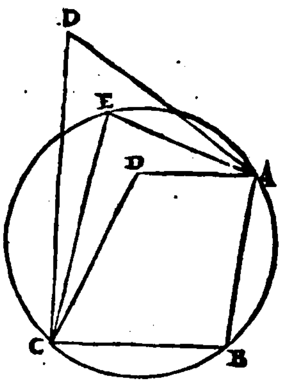

IN circulo, cuius centrum E, inscriptum sit quadrilaterum A B C D. Dico duos angulos oppositos A B C, C D A: Item B C D, D A B, æquales esse duob⁹ rectis. Ductis enim diametris duabus quadrilateri A C, B D, a erunt duo anguli A B D, A C D, in eodem segmento A B C D, æquales. Similiter erunt duo anguli C B D, C A D, in eodem segmento C B A D, æquales. Quare duo anguli A B D, C B D, hoc est, totus angulus A B C, æqualis est duobus angulis A C D, C A D. Addito igitur communi angulo C D A, erunt duo anguli A B C, C D A, æquales tribus angulis A C D, C A D, C D A. b Sed hi tres æquales sunt duobus rectis. Igitur & duo A B C, C D A, duobus erunt rectis æquales. Eodem modo ostendemus, angulos B C D, D A B, duobus esse rectis æquales. Nam rursus c duo anguli A B D, A C D, sunt æquales: Item duo B C A, B D A; ac propterea totus angulus B C D, duobus angulis A B D, B D A, æqualis erit. Addito igitur communi angulo B A D; erunt duo anguli B C D, B A D, æquales tribus angulis A B D, B D A, D A B. d Sed hi tres sunt æquales duobus rectis. Igitur & duo B C D, D A B, duobus rectis æquales erũt. Quadrilaterorum igitur in circulis descriptorum, &c. Quod demonstrandum erat.

a 21. tertij.
b 32. primi.
c 21. tertij.
d 32. primi.

### *SCHOLIVM.*

*CONVERSVM quoque huius theorematis demonstrari potest, hoc modo.*

SI in quadrilatero anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sint æquales; circulus, qui per tres quoscunque eius angulos describitur, transibit etiam per reliquum quartum angulum; Atque adeò circa ipsum quadrilaterum circulus describi potest.



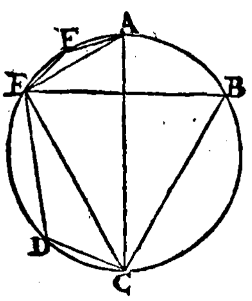

*IN quadrilatero enim A B C D, sint anguli oppositi B, & D, duobus rectis æquales, & per angulos A, B, C, circulus describatur; (Quo modo autem hoc fieri possit, ad 25. propos. huius libri, & ad 5. quarti libri ostendetur.) quem dico transire etiam per D. Si enim non, transibit vel vltra D, vel citra. Ducantur ergo rectæ C E, A E, ad circunferentiam, ita vt non secent rectas C D, A D. Quo facto, a erunt anguli B, & E, æquales duobus rectis: Erant autem & anguli B, & D, duobus rectis æquales. Igitur duo anguli B, E, æquales sunt duobus angulis B, D. Quocirca ablato communi B, remanebunt anguli D, & E, æquales: quod est absurdum. Ducta enim recta A C, b erit angulus D, maior angulo E, vel contrà, angulus E, maior angulo D. Transit igitur circulus per punctum D. Quod est propositum.*

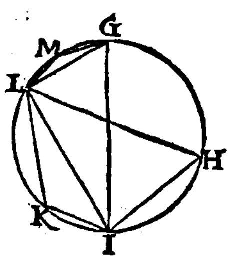
a 22. tertij.
b 21. primi.

*SATIS autem est, sumere duos tantùm angulos oppositos æquales duobus rectis, vt theorema hoc verum sit: quia si duo oppositi sunt æquales duobus rectis, erunt necessariò & reliqui duo oppositi duobus rectis æquales; cũ omnes quatuor sint quatuor rectis æquales, vt ad propos. 32. lib. 1. demonstrauimus.*

*EX hac etiam propositione facilè demonstrabimus theorema hoc insequens, quod frequenter vsurpari solet, tanquam principium, à Mathematicis: scilicet.*

SI ex semicirculis, aut circulis segmenta similia detrahantur; reliqua quoque segmenta similia erunt.






*SINT primùm in circulis A B C D E F, G H I K L M, arcus similes C D E, I K L. Dico & reliquos arcus E F A B C, L M G H I, similes esse. Sumptis enim in dictis arcubus, punctis vtcunque D, B, K, H, iungantur rectæ D C, D E, B C, B E, K I, K L, H I, H L. Quia igitur arcus C D E, I K L, similes sunt, erunt, ex definitione segmentorum similium, anguli C D E, I K L, æquales. Cùm ergo duo anguli C D E, C B E, duobus angulis I K L, I H L, sint æquales; c quòd tam illi, quàm hi sint æquales duobus rectis: d erũt & reliqui anguli C B E, I H L, æquales; ac propterea ex definitione 10. huius libri arcus E B C, L H I, similes erunt.*

c 22. tertij.
d 3. pron.

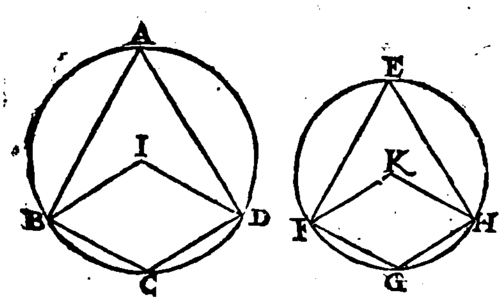
*DEINDE in semicirculis A E C, G L I, similes sint arcus E C, L I. Dico & reliquos arcus A E, G L, esse similes.*

*miles. Sumptis enim punctis D,F,K,M, vtcunque in ijs arcubus, iungantur rectæ C D, D E, C E, E F, F A, A E; I K, K L, I L, L M, M G, G L. Itaque quia arcus E C, L I, similes sunt, erunt, ex definitione anguli C D E, I K L, æquales. Cùm ergo & duo anguli C D E, E A C, duobus angulis I K L, L G I, æquales sint; [a] quòd tam illi, quàm hi sint duobus rectis æquales: erũt & reliqui anguli E A C, L G I, æquales. Sunt autem & anguli A E C, G L I, in semicirculis, hoc est, in segmentis similibus A E C, G L I, æquales, ex definitione segmentorum similium. Igitur in triangulis A E C, G L I, & reliqui anguli A C E, G I L, ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. æquales erunt. Cùm ergo duo anguli A C E, E F A, duobus angulis G I L, L M G, æquales sint; [b] quòd tam illi, quàm hi duobus sint rectis æquales; erunt quoque anguli reliqui E F A, L M G, æquales: ac proinde ex definitione similium segmentorum, arcus A E, G L, reliqui in semicirculis, similes erunt. Quod erat ostendendum.*

a 22. tertij.
b 22. tertij.

QVANDO *autem de segmentis similibus sermo hic incidit, non videntur omittenda hoc loco tria theoremata tum Geometricis rebus, tum præsertim Astronomicis pernecessaria, quorum primum sit hoc, quod nos ad defin. 10. huius libri demonstrandum recepimus: videlicet.*

ANGVLI insistentes arcubus circulorum similibus siue ad centra, siue ad circunferentias, sunt inter se æquales. Et contrà, arcus, quibus anguli æquales siue ad centra, siue ad circunferentias insistunt, similes sunt.




SINT *in circulis A B C D, E F G H, quorum centra I, K, primum arcus similes B C D, F G H, quibus ad centra insistant anguli I, K, ad circunferentias verò anguli A, E. Dico tam illos, quàm hos inter se æquales esse. Constituantur enim in illis arcubus anguli C, G, qui ex definitione segmentorum similium, æquales erunt. [c] Sunt autem tam duo anguli C, A, quàm duo G, E, duobus rectis æquales. Ablatis igitur æqualibus C, G, erunt quoq; reliqui A, E, æquales. Quorum [d] cùm dupli sint anguli I, K, [e] erunt hi quoq; æquales. Quod est propositum.*

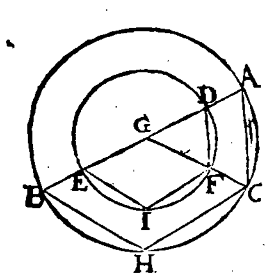
c 22. tertij.
d 20. tertij.
e 6. pron.

DEINDE *sint tam anguli I, K, quàm A, E, insistentes arcubus B C D, F G H, inter se æquales. Dico arcus B C D, F G H, esse similes. Nam si A, & E, sint æquales: sint [f] autem tam duo anguli A, C, quàm duo E, G, duobus rectis æquales, erunt & reliqui C, G, æquales; ac propterea, ex definitione similium segmentorum, arcus B C D, F G H, quibus anguli æquales A, E, ad circunferentias insistunt, similes. Si verò anguli I, K, ad centra sint æquales, [g] erunt quoq; eorum dimidia æqualia, hoc est, anguli A, E. Quare, vt priùs, arcus B C D, F G H, similes sunt. Quod erat ostendendum.*

f 22. tertij.
g 7. pron.

SECVNDVM *autem, quod nos etiam in sphæra ad finem 1. cap. demonstrauimus, huiusmodi sit.*

SI duo aut plures circuli ex eodem centro describantur, atque ex centro duę aut plures rectæ lineæ ducantur; erunt arcus inter quascunque duas lineas intercepti, similes.




DVO *circuli A B C, D E F, ex eodem centro G, descripti sint, & ex centro G, duæ rectæ educantur G B, G C. Dico arcus E F, B C, esse similes. Producta enim B G, ad A, iungantur rectæ A C, D F; Item sumptis punctis H, I, vtcunque, ducantur rectæ B H, C H, E I, F I. Quoniam igitur angulus G, ad centrum arcubus E F, B C, insistens [h] duplus est tam anguli E D F, quàm anguli B A C; [i] erunt anguli E D F, B A C, æquales. Sunt autem duo anguli E D F, E I F, duobus angulis B A C, B H C, æquales; quòd [k] tam illi, quàm hi duobus rectis sint æquales. Ablatis igitur æqualibus angulis E D F, B A C, [l] reliqui E I F, B H C, æquales erunt: ac proinde segmenta E F, B C, in quibus sunt; similia erunt, ex definitione similium segmentorum. Quod erat ostendendum.*

h 20. tertij.
i 7. pron.
k 22. tertij.
l 3. pron.

BREVIVS *sic. Quoniam [m] anguli A, D, æquales sunt, quòd vtriusque [n] duplus sit angulus G, ad centrum; erunt per antecedens theorema, arcus B C, E F, quibus ad circunferentias insistunt, similes. Quod est propositum. Vel adhuc breuiùs. Quoniam arcubus E F, B C, æquales anguli in centro insistunt, immò vnus & idem angulus B G C; erunt per antecedens theorema, arcus E F, B C, similes. Atque in hac demonstratione non est opus vlla constructione, vt manifestum est.*

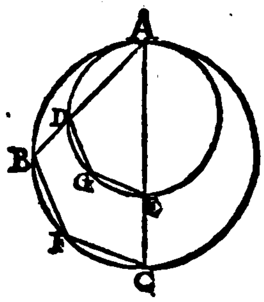
m 7. pron.
n 20. tertij.

TERTIVM *denique, quod aliter quoque in nostro Astrolabio ostendimus, hoc sit.*

SI duo, aut plures circuli se mutuò tangant interius in vno puncto, à quo duæ, aut plures rectæ educantur; erunt & arcus inter quascunque duas lineas intercepti, & arcus inter quamcunque lineam, & punctum contactus intercepti similes.

TANGANT *se mutuò interius duo circuli A B C, A D E, in puncto A, à quo duæ rectæ educantur A B, A C. Dico tam arcus D E, B C, quàm A D, A B, & A E D, A C B, similes esse. Sumptis enim duobus punctis vtcunque F, G, iungantur rectæ B F, C F, D G, E G. Quoniam igitur duo anguli D A E, D G E, duobus an-*

a 22. tertij. *gulis B A C, B F C, æquales sunt; quòd [a] tam illi, quàm hi sint duobus rectis*
b 3. pron. *æquales: ablato communi angulo B A C, [b] erunt reliqui anguli D G E, B F C, æquales; ac proinde arcus D E, B C, similes erunt, ex definitione segmentorum similium.*

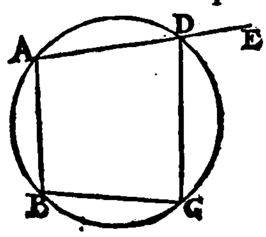


*BREVIVS sic. Quoniam angulus A, communis vtrique arcui D E, B C, ad circunferentias insistit, erunt, ex demonstratis antè proximè antecedente theorema, arcus D E, B C, quibus insistit, similes. Quod est propositum.*

c 11. tertij. *QVIA verò, si per circulorum centra ducta cogitetur recta A C, [c] hæc in contactum A, cadit, suntq́ eodem pacto arcus D E, B C, similes, fit, vt hisce similibus ablatis ex semicirculis similibus, reliqui arcus A D, A B, similes quoq; sint: atque his ablatis ex totis circunferentiis similibus, similes quoque sint reliqui arcus A E D, A C B, vt paulò antè demonstrauimus. Quod est propositum.*

*HVC etiam referri potest hoc theorema.*

SI vnum latus quadrilateri in circulo descripti producatur, erit angulus externus angulo, qui angulo ei deinceps opponitur, æqualis.

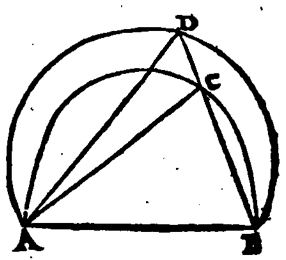


*IN circulo A B C D, descriptum sit quadrilaterum quodcunq; A B C D, cuius latus A D, producatur ad E. Dico angulum E D C, angulo B, æqualem*
d 13. primi. *esse. Cùm enim duo anguli ad D, [d] æquales sint duobus rectis: Item [e] duo B, &*
e 22. tertij. *D, in quadrilatero; erunt duo illi his duobus æquales. Ablato ergo communi angulo A D C, reliquus E D C, externus reliquo B, æqualis erit. Quod est propositum.*

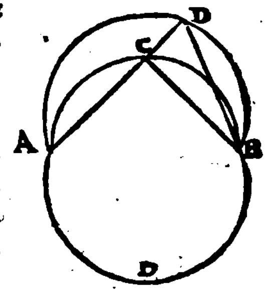
22.

## THEOR. 21. PROPOS. 23.

SVPER eadem recta linea, duo segmenta circulorum similia & inæqualia, non constituentur ad easdem partes.



SI enim fieri potest, super recta AB, constituantur ad easdem partes duo segmenta similia, & inæqualia A C B, A D B. Perspicuum est autem, quod se solùm intersecent in punctis A, & B; [a] Circulus
a 10. tertij. enim circulum non secat in pluribus punctis, quàm duobus. Vnde peripheria vnius segmenti tota erit extra peripheriam alterius. Ducatur igitur recta A D, secans circunferentias in C, & D, & connectantur rectæ C B, D B. Quoniam igitur segmenta ponuntur similia, erit per 10. definitionem huius libri angulus A C B, æqualis an-
b 16. primi. gulo A D B, externus interno: [b] quod est absurdum. Non igitur segmenta sunt similia: Quare super eadem recta linea, &c. Quod erat demonstrandum.



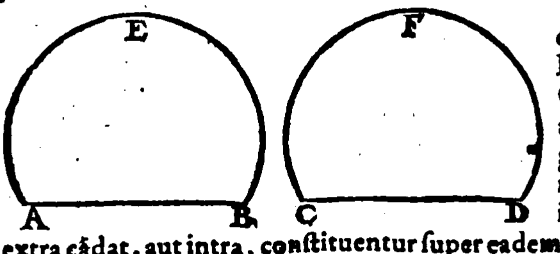
*SCHOLIVM.*

*EADEM ratione, neque ad diuersas partes super eadem recta linea duo segmenta circulorum similia, & inæqualia constituentur. Nam si alterum eorum intelligatur moueri circa lineam A B, vt iam ambo sint ad easdem partes, in idem absurdum incidemus, vt figura indicat, quoniam alterum alteri non congruet propter inæqualitatem.*

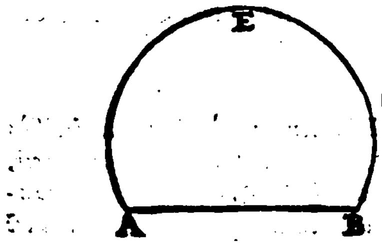
23.

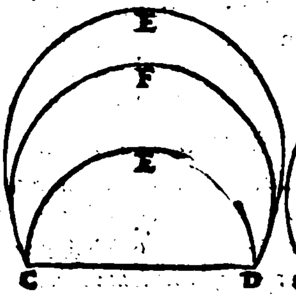
## THEOR. 22. PROPOS. 24.

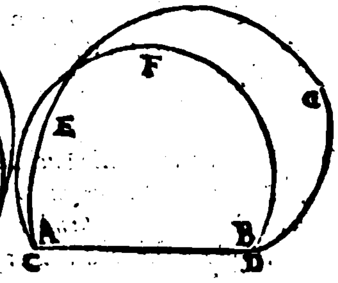
SVPER æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.



SVPER rectis lineis æqualibus AB, CD, constituta sint segmenta similia A E B, C F D. Dico ea inter se esse æqualia. Lineæ enim A B, C D, cùm sint æquales, congruent inter se, si altera alteri superponatur. Dico igitur & segmentum A E B, segmento C F D, congruere. Si enim non congruit, cadet aut extra, aut intra, aut partim extra, partim intra. Quòd si extra cadat, aut intra, constituentur super eadem recta C D, duo segmenta A E B, A F B, simi-
c 23. tertij. lia, & inæqualia, quorum vnum totum extra aliud cadit. quod est absurdum. [c] Demonstratum enim est contrarium. Quòd si partim extra cadat, partim intra, secabunt sese in pluribus punctis,
d 10. tertij. quàm duobus, nimirum in A, B, G. Quod est absurdum. [d] Circuli enim non se secant in pluribus punctis.




punctis, quàm duobus. Congruet igitur segmentum A E B, segmento C F D, atque adeò ipsa inter se æqualia erunt. Quocirca super æqualibus rectis lineis, &c. Quod erat demonstrandum.

### *SCHOLIVM.*

*NON solùm in hac propositione ostenditur, segmenta similia A E B, C F D, esse æqualia, super æquales bases A B, C D; verùm etiam ipsas peripherias, eo quòd, vt demonstratum est, sibi mutuò congruant.*

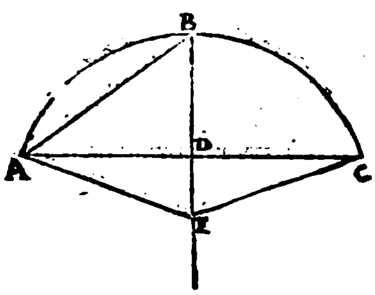
*CONVERSVM quoque huius propositionis & præcedentis, facilè demonstrabitur. Nimirum, segmenta circulorum æqualia super æquales lineas, vel super eandem constituta, esse similia. Nam propter æqualitatem, alterum alteri congruet; quare similia erunt, cum hac ratione omnes anguli in ipsis constituti æquales sint. Quòd si quis dicat, non sibi mutuò congruere segmenta; secabit necessariò vna circunferentia alteram. Vna enim extra alteram non cadet. Inæqualia namque forent segmenta, quod est contrà hypothesin. Sint ergo segmenta A F B, A G B, æqualia super eandem rectam A B, secentq; se mutuò in G. Igitur circuli A F B, A G B, secant sese in punctis A, G, B, pluribus quàm duobus, quod est absurdum. [a] Circuli enim non se intersecant in pluribus punctis, quàm duobus. Eodem modo res demonstrabitur, si æqualia segmenta super æquales rectas sint constituta: si nimirum altera alteri superponatur, &c.* a 10. tertij.

## PROBL. 3. PROPOS. 25. 24.

CIRCVLI segmento dato, describere circulum, cuius est segmentum.

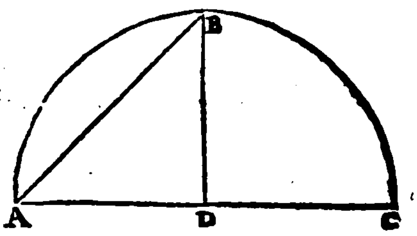
SIT segmentum circuli A B C, quod perficere oporteat. Subtendatur recta A C, quæ bifariam secetur in D, puncto, per quod perpendicularis ducatur D B, connectaturque A B. Angulus igitur D B A, vel maior est angulo D A B, vel æqualis, vel minor. Sit primùm maior, (quod quidem continget, quãdo segmentum A B C, minus fuerit semicirculo: Tunc enim, quia B D, transit per centrum, ex corollario propos. 1. huius libri, quod est extra segmẽtum, cùm ponatur esse minus; erit D A, maior, quàm D B, cùm D B, perficiens diametrum, [a] sit omnium minima, quæ ex puncto D, in circunferentiam cadunt. Quare angulus D B A, [b] maior erit angulo D A B;) fiatque angulus B A E, æqualis angulo D B A, & secet recta A E, rectam B D, productam in E. Dico E, esse centrum circuli, cuius segmentum A B C. Ducta enim recta E C, erũt latera A D, D E, trianguli A D E, æqualia lateribus C D, D E, trianguli C D E, & anguli contenti, recti. [c] Quare bases E A, E C, æquales erunt; [d] Est autem & E A, æqualis ipsi E B, quòd anguli E A B, E B A, æquales sint. Igitur tres lineæ E A, E B, E C, æquales erunt; [e] ac propterea E, centrum erit circuli A B C. quandoquidem ex E, plures quàm duæ rectæ æquales cadunt in circunferentiam.

a 7. tertij. b 18. primi. c 4. primi. d 6 primi. e 9. tertij.



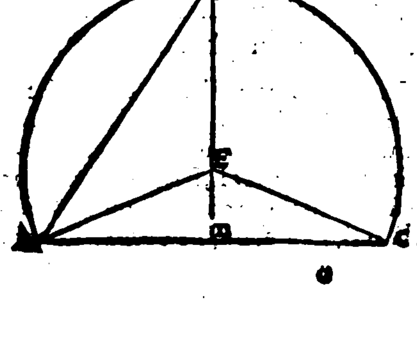

SIT deinde angulus D B A, angulo D A B, æqualis: (Quod demum continget, quando segmentum A B C, semicirculus fuerit. Tunc enim erit A C, diameter, & D, centrum, atque adeò rectæ D A, D B, æquales; quare [f] & anguli D A B, D B A, æquales erunt.) [g] Erunt igitur rectæ D A, D B, æquales: Erat autem & D C, æqualis ipsi D A, quòd recta A C, secta sit bifariam. Quapropter cùm tres rectæ D A, D B, D C, cadãt ex D, in circunferentiam, [h] erit D, centrum.

f 5. primi. g 6. primi. h 9. tertij.




SIT tertiò angulus D B A, angulo D A B, minor, (quod quidem eueniet, si segmentum A B C, semicirculo maius extiterit. Tunc enim, quoniam B D, transit per centrum, ex corollario propos. 1. huius libri. quod quidem intra segmentum, cùm maius esse ponatur, existit; [i] erit D B, omnium, quæ ex D, in circunferentiam cadunt, maxima: maior igitur erit quàm D A, [k] ideoque angulus D A B, maior

i 7. tertij. k 18. primi.



angulo D B A.) fiatque angulus B A E, æqualis angulo D B A, & secet recta A E, rectam B D, in E, puncto, quod ostendetur esse centrum eodem modo, quo id ipsum ostendimus, quando angulus D B A, maior erat angulo D A B, vt constat, si recta ducatur E C. Circuli igitur segmento dato, descripsimus circulum, cuius est segmentum. Quod facere oportebat.

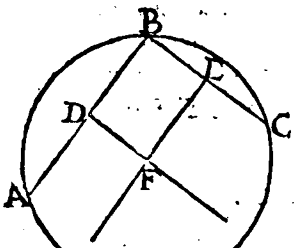
## SCHOLIVM.

*Sed fortassis hæc demonstratio Euclidis, quæ per omnia tria circuli segmenta progreditur, ita facilius instituetur. Diuisa recta A C, bifariam in D, erectaq; perpendiculari D B, & ducta A B, aut D B, minor est,*
a18. primi. *quàm D A, aut æqualis, aut maior. Si minor,[a] erit angulus D B A, maior angulo B A D. Constituto igitur angulo B A E, æquali ipsi A B D, ostendemus, vt prius, E, centrum esse. Atque hoc euenit, quando segmentum est semicirculo minus.*

b9. tertij. *Si verò D B, æqualis est ipsi D A; erunt omnes tres D A, D B, D C, æquales; [b] ac proinde D, centrum. Quæ ratio locum habet in semicirculo.*

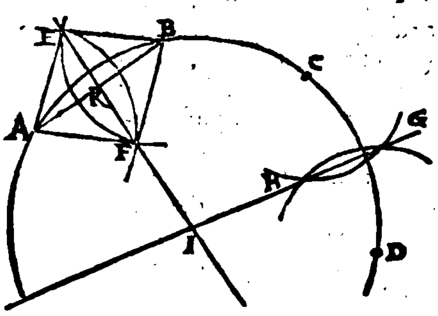
c18. primi. *Si denique D B, maior est, quàm D A,[c] erit angulus D B A, minor angulo D A B. Constituto ergo angulo B A E, æquali ipsi A B E, ostendetur E, esse centrum, vt prius. Hoc autem maiori segmento accidit.*

*Aliter idem problema hoc modo absoluetur. Positis iisdem, quæ prius, fiat angulo D B A, æqualis angulus E A B. Et si quidem recta A E, cadit infra A C, erit segmentum semicirculo minus, vt in prima figura. Si verò A E, cadit supra A C, erit segmentum semicirculo maius, vt in tertia figura: semper autem E, centrum erit, vt demonstratum est. Si denique recta efficiens cum A B, in A, angulum æqualem angulo A B D, coincidit cum A C, erit segmentum semicirculus, punctumq; D, centrum erit, vt in secunda figura.*




*Brevius tamen inuenietur centrum segmenti propositi cuiuslibet, siue illud semicirculo minus sit, siue æquale, siue maius, hac ratione. Assumantur in peripheria segmenti tria puncta vtcunque A, B, & C, quæ duabus rectis coniungantur A B, B C, quæ bifariam secentur in D, & E. Deinde ex D, & E, educantur ad A B, B C, perpendiculares D F, E F. Quoniam igitur per corollarium propos. 1. huius libri, tam D F, quàm E F, incedit per centrum circuli, cuius A B C, est segmentum, coibunt ambæ in centro, vt in F. Quare centrum est inuentum. Quod est propositum.*

*Aliter, vt Mechanici solent. Accipiantur in circunferentia duo puncta vtcunque A, & B, è quibus describantur duo arcus ad idem interuallum quodcunque, qui se intersecet in E, & F. Postea ex aliis duobus punctis C, & D, alij arcus se secantes in G, & H, describantur ad quoduis interuallum, siue idem quod prius, siue diuersum. Si igitur agantur rectæ E F, G H, transibunt ambæ per centrum. Quare punctum I, in quo coëunt, erit centrum. Quòd autem lineæ E F, G H, per centrum transeant, ita demonstrabitur. Ducantur rectæ A E, A F, B E, B F, quæ inter se æquales erunt, ob æqualitatem circulorum. Quoniam igitur latera A E, E F, trianguli A E F, æqualia sunt lateribus B E,*

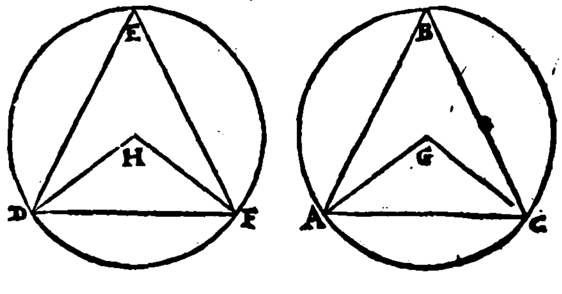



d8. primi. *E F, trianguli B E F; & bases quoque A F, B F, æquales:[d] Erunt anguli A E F, B E F, æquales. Rursus ducta recta A B, quæ secet E F, in K: quoniam latera A E, E K, trian-*
e4. primi. *guli A E K, æqualia sunt lateribus B E, E K, trianguli B E K; & anguli A E K, B E K, ostensi quoq; æquales;[e] erunt & bases A K, B K, & anguli A K E, B K E, æquales, ideoq; recti. Quare cùm E F, diuidat rectam A B, in circulo bifariam, & ad angulos rectos, transibit per centrum, ex corollario propos. 1. huius libri. Eadem ratione ostendetur G H, transire per centrum. Debent autem quatuor puncta A, B, C, D, in tali situ accipi, vt rectæ E F, G H, non in directum sibi occurrant, sed vt se mutuò secent. Quòd si quando contingat, rectas E F, G H, in directum esse constitutas, diuidenda erit recta intra circunferentiam comprehensa, bifariam. Punctum enim diuisionis erit centrum circuli: propterea quòd tunc recta illa est diameter circuli, quandoquidem per centrum transit, ex corollario propos. 1. huius libri.*

## 25. THEOR. 23. PROPOS. 26.

In æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripheriis insistũt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

In circulis æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, H, constituti sint primùm ad centra anguli æquales A G C, D H F. Dico peripherias A C, D F, quibus insistunt, siue super quas ascenderunt, esse æquales. Sumantur enim in peripheriis A B C, D E F, duo puncta B, E, ad quæ rectæ du-
a20. tertij. cantur A B, C B, D E, F E, connectanturque rectæ A C, D F. Quoniam igitur[a] anguli B, & E, dimidij sunt æqualium angulorum G, & H; erũt & ipsi æquales inter se. Quare ex definitione, segmenta A B C, D E F, similia erunt. Et quia latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia sunt lateribus




D H, H F, trianguli D H F, propter circulorum æqualitatem; & anguli, quos continent G, H, æquales, ex hypothesi; [a] erũt bases A C, D F, æquales. Cùm igitur segmenta similia A B C, D E F, sint super lineas æquales A C, D F, [b] erunt ipsa inter se æqualia. Quare si à circulis æqualibus demantur, remanebunt & segmenta A C, D F, inter se æqualia; atque adeò peripheriæ A C, D F, æquales erunt. Quod est propositum.

a 4. primi.
b 24. tertij.

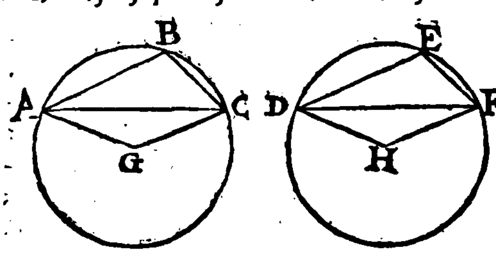
SINT deinde ad peripherias constituti duo anguli æquales B, & E; Dico rursus, peripherias A C, D F, super quas ascenderunt, esse æquales. Erunt enim, vt priùs, segmenta A B C, D E F, similia. Cùm igitur sint super æquales lineas A C, D F: (cùm enim anguli G, H, æquales sint, [c] quod sint dupli angulorum æqualium B, & E; erunt, vt priùs, rectæ A C, D F, æquales) [d] erunt ipsa inter se æqualia. Si igitur à circulis æqualibus detrahantur, remanebunt & segmenta A C, D F, æqualia: In æqualibus itaque circulis, æquales anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

c 20. tertij.
d 24. tertij.

## *SCHOLIVM.*

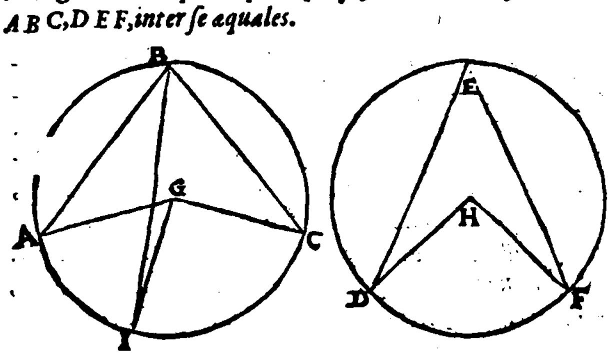
*HAEC secunda pars breuiùs ita demonstrabitur. Quoniam anguli G, H, dupli sunt angulorum æqualium B, E, erunt ipsi inter se æquales. Quare, vt ostensum est priùs, peripheriæ A C, D F, super quas ascenderunt, æquales erunt.*

*IAM verò, si quando contingat, rectas A G, C G; D H, F H, non constituere angulos in centris supra bases A C, D F, sed supra bases A B C, D E F, vt subiectæ hæ figuræ monstrant, ita secunda pars huius propositionis demonstranda est.*




*Quoniam spatia ad centra G, H, insistentia arcubus A C, D F, æqualia inter se sunt, cũ ex scholio propos. 20. huius lib. dupla sint angulorum B, E, ad circunferentias; erunt etiam anguli A G C, D H F, reliqui quatuor rectorum, quibus tam spatium circa G, quàm spatium circa H, æquale est, ex corollar. 2. propositionis 15. libri 1. inter se æquales. Quare, vt priùs, ostendemus, bases A C, D F, triangulorum A G C, D H F, æquales esse, ideóque segmenta similia A B C, D E F, ob æqualitatem angulorum B, E, super æquales bases A C, D F, esse æqualia, &c.*

*HINC etiam fit, spatia æqualia in centris, insistere arcubus æqualibus. Nam si spatia in centris G, H, insistentia arcubus maioribus A C, D F, æqualia sunt; erunt quoque, vt ostendimus anguli A G C, D H F, æquales. Igitur, vt in prima parte propositionis demonstratum est, erunt & arcus A C, D F, maiores, & minores A B C, D E F, inter se æquales.*



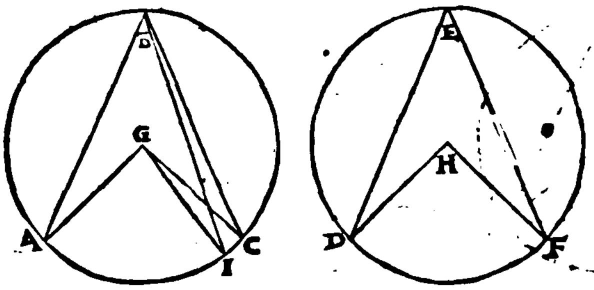

*QVOD si dicti anguli fuerint inæquales, maior insistet maiori peripheriæ, quàm minor. In circulis enim æqualibus A B C, D E F, sit angulus A G C, ad centrum maior angulo D H F, ad centrum: Item angulus A B C, ad circunferentiam, maior angulo D E F, ad circunferentiam. Dico peripheriam A C, maiorem esse peripheria D F. Si enim fiat angulus C G I, angulo D H F, & angulus C B I, angulo D E F, æqualis; erunt, vt ostensum est, peripheriæ C I, D F, æquales; ac propterea A C, maior, quàm D F.*

*PORRO propositio hæc, & tres proximè sequentes intelligendæ etiam sunt in eodem circulo. Hoc est, In eodem circulo æquales anguli æqualibus peripherijs insistunt, &c. vt ex demonstratione huius propositionis, & sequentium trium liquidò constat. Eadem enim semper demonstratio, quæ duobus, pluribúsve circulis accommodatur, locum habet in vno eodemq́; circulo.*

## THEOR. 24. PROPOS. 27. 26.

IN æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripheriis insistunt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

IN circulis æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, H, insistant primùm anguli ad centra A G C, & D H F, æqualibus peripheriis A C, D F. Dico angulos A G C, & D H F, æquales esse. Si



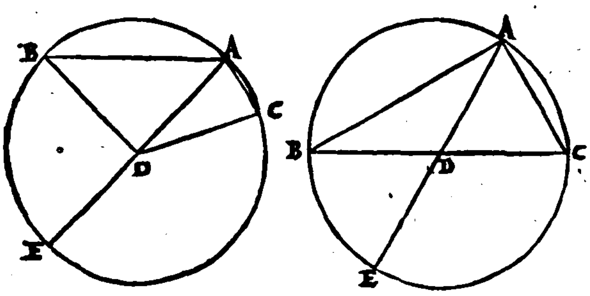
enim non sunt æquales, sit angulus G maior, fiatque angulus A G I, æqualis
a 26.tertij. angulo D H F.[a] Erunt igitur peripheriæ A I, D F, æquales. Cùm igitur peripheria A C, æqualis ponatur peripheriæ D F, erunt peripheriæ A I, A C, inter se æquales, pars, & totum; quod est absurdum. Sunt ergo anguli A G C, D H F, æquales.

INSISTANT deinde eisdem peripheriis æqualibus A C, D F, anguli B, & E, ad peripherias; quos rursus dico æquales esse. Nam si alter, vt A B C, maior est; fiat angulo E, æ-
b 26.tertij. qualis angulus A B I,[b] eruntque peripheriæ A I, D F, æquales. Quare, vt priùs, erunt peripheriæ A I, A C, æquales, pars & totum; quod est absurdum. Sunt ergo anguli A B C, D E F, æquales. In æqualibus igitur circulis, anguli, qui æqualibus peripheriis insistunt, &c. Quod demonstrandũ erat.

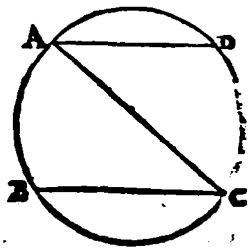
## SCHOLIVM.

*HAEC secunda pars ita quoque demonstrabitur, quando rectæ A G, C G; D H, F H, in centris angulos*
a 20.tertij. *constituunt supra bases A C, D F. Quoniam[a] anguli A B C, & E, dimidij sunt angulorum A G C, & H, quos iam ostendimus esse æquales; erunt & ipsi inter se æquales.*

*EODEM modo, spatia in centris G, H, insistentia arcubus A B C, D E F, æqualibus, æqualia erunt. Nam ablatis arcubus æqualibus A B C, D E F, ex circulis æqualibus, reliqui fient æquales arcus A I C, D F; ideoque, vt ostendimus, anguli A G C, D H F, æquales erunt: quibus ablatis ex spatijs circa centra G, H, quæ æqualia sunt, cùm quodlibet sit quatuor rectis æquale, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. reliqua erunt & spatia in centris G, H, insistentia arcubus A B C, D E F, æqualia.*



*SI verò peripheriæ fuerint inæquales, insistet maiori maior angulus, siue ad centrũ, siue ad circunferentiam, quàm minori. In figura enim scholij præcedentis sit peripheria A C, maior, quàm peripheria D F. Dico angulum A G C, maiorem esse angulo D H F; & angulum A B C, maiorem angulo D E F. Si enim fiat peripheria C I, æqualis peripheriæ D F, ducanturque rectæ I G, I B, erunt, vt ostensum est, tam anguli ad centrum C G I, D H F, quàm anguli ad circunferentiam C B I, D E F, æquales. Quare & angulus A G C, angulo D H F, & angulus A B C, angulo D E F, erit maior. Quod etiam de spatijs ad centra G, H, insistentibus arcubus A B C, D E F, intelligendum est. Nam eodem modo demonstrabimus spatium ad H, arcui D E F, insistens, maius esse spatio ad G, quod arcui A B C, insistit, si arcus D E F, maior ponatur arcu A B C.*

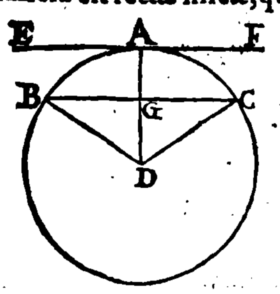


*EX hac porrò propositione colligemus, duas rectas lineas, quæ in eodem circulo æquales arcus intercipiunt, se mutuò non secantes, esse parallelas. Et si sint parallelæ, ab ipsis arcus æquales intercipi. In circulo enim A B C D, rectæ A D, B C, intercipiant arcus æquales A B, D C. Dico A D, B C, esse parallelas. Ducta namque*
b 27.tertij. *recta A C, cùm arcus A B, D C, ponantur æquales,[b] erũt anguli A C B, C A D,*
c 27.primi. *ipsis insistentes, æquales; qui cùm sint alterni,[c] erunt A D, B C, parallelæ.*

*SINT iam A D, B C, parallelæ. Dico arcus interceptos A B, D C, esse æquales.*
d 29.primi. *Cùm enim sint parallelæ A D, B C, ducta recta A C,[d] erunt anguli alterni A C B,*
e 26.tertij. *C A D, æquales; Ac proinde[e] arcus A B, D C, quibus insistunt, æquales erunt.*

*VISVM est quoque hoc loco apponere sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile: videlicet.*

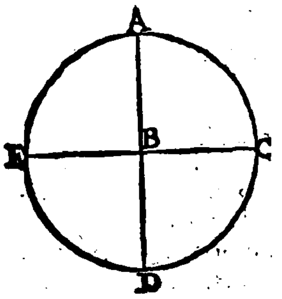
LINEA recta, quæ ex medio puncto peripheriæ alicuius ducitur tangens circulum, parallela est rectæ lineæ, quæ peripheriam illam subtendit.



*IN circulo A B C, cuius centrum D, ducatur ex A, puncto medio peripheriæ B A C, linea E F, tangens circulũ. Dico E F, parallelã esse rectæ B C, arcũ B A C, subtendenti. Ducta enim ex centro D, ad punctum contactus A, recta D A, secante*
f 27.tertij. *rectam B C, in G, connexisque rectis D B, D C,[f] erunt anguli A D B, A D C, circunferentijs æqualibus A B, A C, insistentes, æquales. Sunt autem & latera B D, D G, trianguli B D G, lateribus C D, D G, trianguli C D G, æqualia, vtrumque*
g 4.primi. *vtrique.[g] Igitur & anguli ad G, æquales sunt super bases G B, G C, ac propterea recti. Igitur & A G B, A G C, illis deinceps recti sunt. Sunt autem & anguli*
h 18.tertij. *G A E, G A F, recti,[h] quòd D A, perpendicularis sit ad E F.[i] Ergo E F, B C, paral-*
i 28.primi. *lelæ sunt. Quod est propositum.*

*Ex demonstratis in hac propositione, & antecedente, colligitur etiam hoc theorema, quod ad initium quoque triangulorum rectilineorum demonstrauimus.*

Angulus rectus in centro insistit quadranti; acutus verò arcui quadrante minori; & obtusus arcui quadrante maiori. Et contrà, angulus in centro quadranti insistens, rectus est; insistens verò arcui quadrante minori, acutus; & arcui quadrante maiori, obtusus.

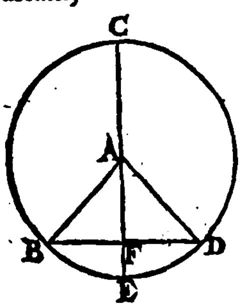



*Rectus angulus A B C, insistat arcui A C, in centro B, circuli A C D E. Dico arcum A C, quadrantem esse, &c. Productis enim rectis A B, C B, ad D, E, erunt quoque anguli A B E, C B D, recto A B C, deinceps, recti, ex defin. 10. lib. 1. nec non & angulus D B E, rectus, [a] cùm æqualis sit recto angulo A B C, ad verticem.* a 15. primi. *Omnes ergo quatuor anguli ad centrum B, æquales sunt, vtpote recti: ac propterea [b] arcus A C, C D, D E, E A, quibus insistunt, æquales erunt. Quilibet igitur eorum quadrans est.* b 26. tertij. *Et quoniam recta cum A B, in B, constituens angulum acutum, cadit in arcum A C: recta verò cum eadem A B, in B, continens angulum obtusum, cadit in arcum C D; liquidò constat, angulum acutum insistere arcui quadrante minori, obtusum verò maiori.*

*Sed insistat iam quadranti A C, angulus A B C, in centro B. Dico angulum A B C, esse rectum, &c. Productis enim rursum rectis A B, C B, ad D, E; quoniam tam C A E, quàm A C D, & A E D, semicirculus est, estque A C, quadrans; erit tam A E, quàm C D, quadrans quoque, ac proinde & D E, in semicirculo A E D, quadrans erit. Sunt ergo quatuor arcus A C, C D, D E, E A, æquales, [c] ac proinde anguli ad centrum B, illis insistentes,* c 27. tertij. *æquales erunt. Quare cùm omnes quatuor sint quatuor rectis æquales, erit eorum quilibet rectus. Et quia recta cum A B, auferens minorem arcum quadrante A C, facit in centro B, cum A B, minorem angulum recto angulo A B C; recta verò cum eadem A B, auferens maiorem arcum quadrante A C, constituit in centro B, angulum recto angulo A B C, maiorem; perspicuū est, angulum minori arcui quadrante insistentem, esse acutum; maiori verò, obtusum. Quod est propositum.*

*Pari ratione & hoc theorema ex demonstratis elicitur, quod in sinubus etiam demonstrauimus.*

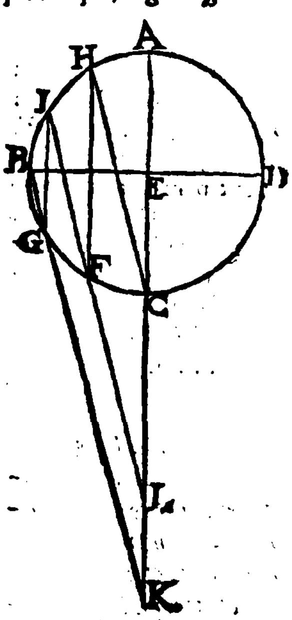
Recta linea è centro circuli ducta, secansque aliam rectam non per centrum ductam bifariam, secabit & arcum, cui hæc recta subtenditur bifariam. Et contrà, si secet arcum bifariam, secabit & rectam ei subtensam bifariam.




*Ex centro A, circuli B C D E, recta egrediēs A E, secet rectam B D, bifariam in F. Dico & arcum B E D, in E, sectam esse bifariam, &c. Ductis enim rectis A B, A D; quoniam duo latera A B, A F, duobus lateribus A D, A F, æqualia sunt, vtrumque vtrique, basisque B F, basi D F, æqualis ponitur; [d] erit angulus B A F,* d 8. primi. *angulo D A F, æqualis. Igitur [e] arcus B E, arcui D E, æqualis erit. Sectus ergo est* e 26. tertij. *arcus B D, in E, bifariam.*

*Secet iam recta A E, arcum B D, in E, bifariam. Dico rectam quoque B D, in F, bifariam esse sectam. Ductis enim rursum rectis A B, A D; quoniam arcus B E, D E, ponuntur æquales; [f] erunt & anguli B A E, D A E, in centro æquales.* f 27. tert. *Itaque quia duo latera A B, A F, duobus lateribus A D, A F, æqualia sunt, vtrumque vtrique, angulosque continent æquales, vt ostendimus; [g] erunt quoque bases B F, D F, æquales: ac proinde* g 4. primi. *recta B D, in F, secta est bifariam. Quod erat ostendendum.*

*Neque verò omittenda hoc loco videtur eximia quædā proprietas circuli, quam Ioan. Bapt. Benedictus ex Cardano lib. 16. cap. 1. de Subtilitate desumptam demonstrat. Videlicet.*



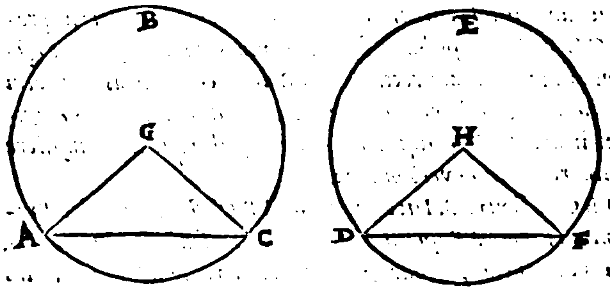

Si in circulo ductis duabus diametris sese ad angulos rectos secantibus, altera earum producatur, eique ex vna parte quotquot parallelæ agantur, diuidentes vtrumque Quadrantem in partes æquales, ac denique ex puncto extremo alterius diametri per extremum punctum proximæ parallelæ recta ducatur conueniens cum diametro producta: Erit tota recta inter punctum concursus, & concauam peripheriam circuli, omnibus parallelis vnà cum diametro, quæ producta est, simul sumptis, æqualis.

*In circulo A B C D, secent se ad rectos angulos diametri A C, B D, & A C, producatur versus C, quantumlibet. Diuiso autem Quadrante B C, in quotuis partes æquales C F, F G, G B, & Quadrante B A, in totidem, iungantur rectæ F H, G I; quæ ex scholio huius propositionis ipsi A C, parallelæ erunt, cùm arcus æquales intercipiunt. Ex B, per G, denique extendatur recta B G, occurrens A C, productæ in K. Dico rectam A K, æqualem esse omnibus parallelis A C, H F, I G, simul sumptis. Ductis enim rectis H C, I F, & productis, donec cum*

a 27.tertij. *A K, conueniant; [a] quoniam anguli C H F, H F I, arcubus æqualibus C F, H I, insistentes, sunt æquales* [illegible]
b 27.primi. *recta H C, I L, parallela. Est autē & F H, ipsi C L, parallela. Parallelogrammum ergo est C H F L; [c]* [illegible]
c 34.primi. *de recta C L, recta F H, æqualis erit. Eadem ratione erit K L, ipsi G I, æqualis: & sic deinceps, si sint plures.* [illegible]
*dita ergo communi A C, fiet tota A K, omnibus A C, H F, I G, simul sumptis æqualis. Quod est propositum.*

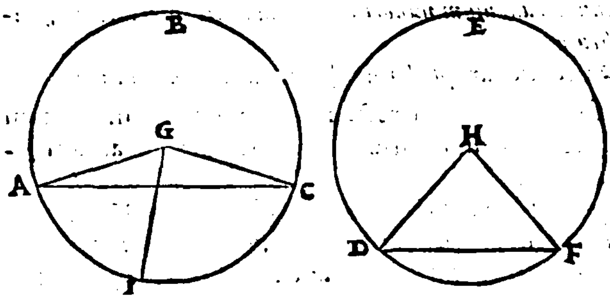
## 27. THEOR. 25. PROPOS. 28.

IN æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt: maiorem quidem maiori, minorem autem minori.




IN circulis æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, & H, sint rectę æquales A C, D F. Dico maiorem peripheriam A B C, æqualē esse maiori D E F, & minorē A C, minori D F. ductis enim rectis A G, G C, D H, H F, erunt latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, H F, trianguli D H F. Ponuntur autem & bases A C, D F, æquales.
a 8.primi. Igitur [a] anguli G, & H, æquales erunt: Ac ppterea peripheriæ A C, D F,
b 26.tertij. quibus insistunt, [b] æquales erunt; quæ ablatæ ex totis æqualibus, relinquēt etiam æquales A B C, D E F. In æqualibus ergo circulis, æquales rectæ lineæ, &c. Quod erat demonstrandum.

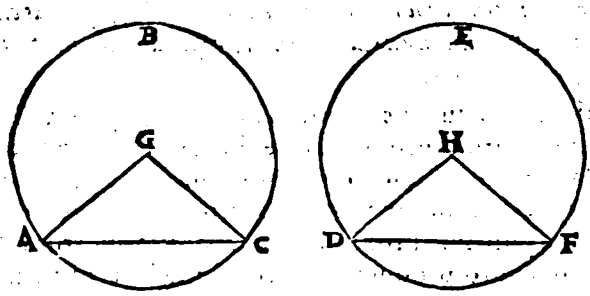
### SCHOLIVM.




*QVOD si fuerint lineæ inæquales in circulis æqualibus, auferet maior linea, maiorem peripheriam, quam minor, si loquamur de segmentis circuli minoribus semicirculo. Nam si de segmentis circuli maioribus sermo habeatur, maior linea auferet minorem peripheriam, quàm minor. In circulis enim æqualibus A B C, D E F, quorū centra G, & H, sit recta A C, maior, q̄ D F. Dico peripheriam A C, semicirculo minorem, maiorem esse peripheria D F. At peripheriam A B C, minorem peripheria D E F. Ductis enim rectis A G, G C, D H, H F, erunt latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, H F, trianguli D H F. Ponitur*
a 25.primi. *autem basis A C, maior base D F. Igitur [a] angulus A G C, maior erit angulo D H F. Fiat angulus C G I, an-*
b 26.tertij. *gulo D H F, æqualis; eritq́; propterea [b] peripheria C I, peripheriæ D F, æqualis; Ac proinde peripheria A I C, maior, quàm peripheria D F: Ideoq́; reliqua A B C, minor, quàm reliqua D E F.*

## 28. THEOR. 26. PROPOS. 29.

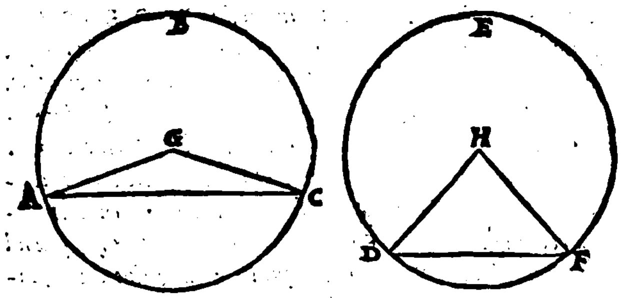
IN æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ subtendunt.




IN circulis eisdem æqualibus, ponantur æquales peripheriæ A B C, D E F; item A C, & D F. Dico rectas A C, D F, quæ eas subtendunt, esse æquales. Ductis enim lineis, vt prius, erunt latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia lateribus D H, H F, trianguli D H F. Sunt
a 27.tertij. autem & anguli G, H, [a] æquales, quòd æqualibus peripheriis A C, D F, insi-
b 4.primi. stant. Igitur [b] bases A C, D F, æquales erūt. In æqualibus ergo circulis, æquales peripherias, &c. Quod erat ostendendum.

### SCHOLIVM.

*SI autem fuerint peripheriæ inæquales, subtendet maiorem maior linea, quam minorem, si de segmentis semicirculo minoribus fiat sermo. Nam si de segmentis maioribus semicirculo loquamur, subtendet maiorem minor linea, quàm minorem. In circulis enim æqualibus A B C, D E F, quorum centra G, & H, sint peripheriæ semicirculo minores A C, D F, sitq́; A C, maior, q̄ D F: Ac proinde A B C, minor, quàm D E F. Dico lineam A C, maiorem esse, quàm D F. Ductis enim rectis A G, G C, D H, H F; erit angulus A G C, maior angulo D H F, ex scholio propositionis 27. huius libri. Cum igitur latera A G, G C, trianguli A G C, æqualia sint lateribus*




*ribus D H, H F, trianguli D H F,* [a] *erit basis A C, maior base D F, &c.* a 4. primi.

*Svnt autem proximè antecedentes quatuor propositiones 26. 27. 28. & 29. intelligendæ etiam in eodem circulo, vt in scholio propos. 26. monuimus. quemadmodū constat ex demonstrationibus adductis. Eadem enim locum habent in vno eodemq; circulo.*

*Itaqve eadem quatuor propositiones magis vniuersales fient, si ita ꝓponatur.*

In æqualibus circulis, vel eodem, æquales anguli æqualibus peripheriis insistunt, siuè ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

In æqualibus circulis, vel eodem, anguli qui æqualibus peripheriis insistunt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

In æqualibus circulis, vel eodem, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt; maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

In æqualibus circulis, vel eodem, æquales peripherias æquales rectæ lineæ subtendūt.

*Sed & sequentes propositiones demonstrare, non fuerit inutile.*

I.

Circvli, è quibus æquales rectæ lineæ auferunt similes circunferētias, æquales sunt.

*Ex circulis A B C, D E F, rectæ lineæ æquales A C, D F, abscindant similes circunferentias A B C, D E F. Dico circulos ipsos æquales esse. Nam si segmenta A B C, D E F, similia sunt, erunt & reliqua segmenta A C, D F, similia, vt ad propos. 22. demonstrauimus. Rursus quia super rectas æquales A C, D F, constituta sunt similia segmenta A B C, D E F,* [b] *ipsa inter se æqualia erunt. Eadem ratione æqualia erūt segmenta A C, D F, quæ similia sunt demonstrata. Toti ergo circuli æquales erunt. Simili modo, si rectæ æquales A C, D F, dicantur auferre similes circunferentias A C, D F, erunt ex ijs, quæ ad proposit. 22. demonstrauimus, & segmenta A B C, D E F, similia.* [c] *Tam ergo illa, quàm hæc inter se æqualia erunt: ac proinde & toti circuli æquales erunt inter se. Quod est propositum.* b 24. tertij. c 24. tertij.

II.

Ex circulis inæqualibus æquales rectæ lineæ circunferentias dissimiles auferunt.

*In eadem figura ponantur rectæ A C, D F, æquales, at circuli A B C, D E F, inæquales. Dico circunferentias A B C, D E F, dissimiles esse. Si enim similes essent, circuli ipsi, vt proximè demonstrauimus, essent æquales. Quod pugnat cum hypothesi. Dissimiles ergo sunt circunferentiæ A B C, D E F. Eadem ratione circunferentiæ A C, D F, erunt dissimiles. Quod erat ostendendum.*

III.

Ex circulis inæqualibus lineæ rectæ, quæ circūferētias similes auferūt, inæquales sunt.

*In eadem figura ponantur circuli inæquales, at circunferentiæ A B C, D E F, similes. Dico rectas A C, D F, inæquales esse. Si enim dicantur esse æquales, erūt, ex primo theoremate, circuli æquales, quod est absurdum, cùm ponantur inæquales. Sunt ergo rectæ A C, D F, inæquales. Eodem modo, si similes dicantur circunferentiæ A C, D F, demonstrabitur, rectas lineas A C, D F, inæquales esse.*

IIII.

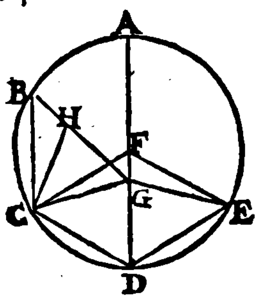
Rectæ lineæ, quæ ex quibuscunque circulis circunferentias similes inæquales auferunt, inæquales sunt.

*In eadem figura ponantur circunferentiæ A B C, D E F, similes & inæquales. Dico rectas A C, D F, inæquales esse. Aut enim circuli æquales sunt, vel inæquales. Sint primùm æquales. Si ergo rectæ A C, D F, dicantur æquales,* [d] *erunt circunferentiæ A B C, D E F, ablatæ æquales, quod est contra hypothesim. Non ergo æquales sunt rectæ A C, D F. Sint deinde circuli inæquales. Igitur rectæ A C, D F, auferentes circunferentias A B C, D E F, similes, inæquales sunt, vt in tertio theoremate demonstratum est. Non aliter ostendemus, rectas A C, D F, inæquales esse, si circunferentiæ A C, D F, ponantur similes & inæquales.* d 28. tertij.

V.

Si in diametro circuli præter centrum punctum sumatur, ab eoque in peripheriam duæ rectæ nō in easdem partes cadentes efficiant ad diametrum angulos æquales, rectæ illæ lineæ æquales erunt, & arcus abscindent æquales. Et si lineæ sint æquales, constituent rectę illæ ad diametrum angulos æquales, abscindentq; æquales arcus. Si denique arcus æquales abscindant, erunt rectæ illæ æquales, constituentq; ad diametrum angulos æquales.

*In circulo A B C D E, cuius centrum F, sumatur in diametro A D, punctum G, præter centrū, constituanturq; primùm duo anguli æquales C G D, E G D. Dico tam rectas G C, G E, quàm arcus C D, E D, æquales esse.*




a 13. primi. *Quoniam enim [a] tam duo anguli C G D, C G F, quàm duo E G D, E G F, duobus rectis æquales sunt, si demantur æquales C G D, E G D; erunt & reliqui C G F, E G F, æquales. Ductis igitur C F, E F, ad centrum, erũt duo latera F C, F G, duobus lateribus F E, F G, æqualia, anguliq; F G C, F G E, æqualibus lateribus oppositi æquales. Cùm ergo reliquorum angulorum F C G, F E G, vterq; sit recto minor; (Ducta enim recta C D, erit angulus F C D, in Isoscele F C D, acutus, ex 3. corollario propos. 17. lib. 1. ac propterea à fortiori F C G, acutus erit. Eodémque modo, ducta recta D E, angulus F E G, acutus erit,) erit ex ijs, quæ ad finem lib. 1. demonstrauimus, basis G C, basi G E, æqualis, & angulus C F G, an-*
b 26. tertij. *gulo E F G; [b] ac proinde arcus C D, E D, æquales erunt. Constat ergo propositum.*

*Deinde sint lineæ G C, G E, æquales. Dico & angulos C G D, E G D, æquales esse, & arcus C D, E D. Si enim lineæ G C, G E, sunt æquales, erunt duo latera G C, G F, æqualia duobus lateribus G E, G F. Est autem*
c 8 primi. *& basis F C, basi F E, æqualis. [c] Igitur anguli F G C, F G E, æquales erũt, ac proinde & ex duobus rectis reliqui C G D, E G D, erunt æquales. Rursus quia duo latera F C, F G, duobus lateribus F E, F G, æqualia sunt, ba-*
d 8. primi. *ses q; æquales ponuntur G C, G E; [d] erunt & anguli C F D, E F D, æquales, [e] atq; idcirco & arcus C D, E D,*
e 26. tertij. *æquales erunt. Quod est propositum.*

*Tertio sint arcus C D, E D, æquales. Dico & lineas G C, G E, & angulos C G D, E G D, esse æquales. Si*
f 27. tertij. *enim arcus C D, E D, æquales sunt, [f] erunt & anguli C F D, E F D, æquales. Quare cùm duo latera F C, F G,*
g 4. primi. *duobus lateribus F E, F G, sint æqualia, angulosq; æquales contineant; [g] erunt & bases G C, G E, æquales, & anguli F G C, F G E; ac proinde ex duobus rectis reliqui C G D, E G D. Quæ omnia demonstranda erant.*

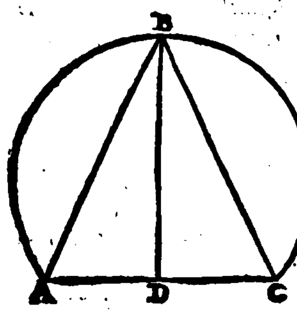
VI.

Si in diametro circuli præter centrum sumatur punctum quodpiam, in quo ad easdem partes duo anguli æquales constituãtur, insistent hi anguli æquales arcubus inæqualibus, maiorque erit ille, qui à minori portione diametri remotior est.

*In eadem figura proxima sint duo anguli æquales C G D, C G B. Dico arcum B C, arcu C D, maiorẽ esse.*
h 7. tertij. *Ductis enim rectis B C, C D, [h] quoniam recta G B, maior est, quàm recta G D, abscindatur G H, ipsi G D, æqualis, iungaturq; recta C H. Quia igitur duo latera G H, G C, duobus lateribus G D, G C, æqualia sunt, angu-*
i 4. primi. *losq; continent æquales; [i] erunt & bases C H, C D, æquales, & angulus G H C, angulo G D C, æqualis. Est autem G D C, in Isoscele F C D, acutus, ex 3. coroll. propos. 17. lib. 1. Igitur & G H C, acutus erit; ac proinde ex*
k 17. primi. *duobus rectis reliquus C H B, obtusus erit. Cùm ergo [k] duo anguli C H B, C B H, sint duobus rectis minores,*
l 19. primi. *erit C B H, acutus. Quare [l] latus B C, latere C H, maius erit. Est autem C H, recta ostensa ipsi C D, æqualis. Igitur recta B C, maior quoque erit, quàm C D; ac propterea ex scholio propos. 28. huius lib. arcus B C, arcu C D, maior erit. Quod erat ostendendum.*

## 29. PROBL. 4. PROPOS. 30.

DATAM peripheriam bifariam secare.




Sit peripheria A B C, secanda bifariam. Ducatur recta subtendens A C, qua diuisa bifariam in D, erigatur perpendicularis D B, quæ peripheriam A B C, bifariam secabit in B. Ductis enim rectis A B, C B, erunt latera A D, D B, trianguli A D B, æqualia lateribus C D, D B, trianguli C D B. Sunt autem & anguli ad D,
a 4. primi. æquales, nempe recti. Igitur [a] & bases A B, C B, æquales erunt;
b 28. tertij. Ac propterea [b] peripheriæ A B, C B, erunt æquales. Datam ergo peripheriam bifariam secuimus. Quod erat faciendum.

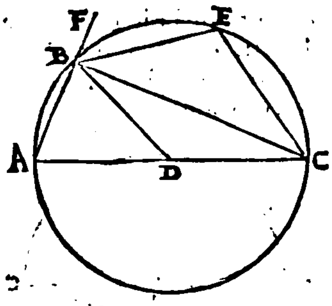
*PRAXIS.*

*Non differt praxis diuidendi datam peripheriam bifariam à praxi diuidendi rectam lineam bifariam, quam ad propos. 10. lib. 1. tradidimus. Si namque quicunque arcus proponatur, vt A B C, intelligenda semper est recta linea eum subtendens A C, etiamsi ducta non sit; atq; ex punctis A, & C, describendi arcus eodem interuallo se mutuò intersecantes supra & infra puncta A, & C, &c. non secus, ac si dicta recta A C, secanda esset bifariam. Recta enim diuidens rectam A C, bifariam, secabit quoque arcum datum bifariam.*

## 30. THEOR. 27. PROPOS. 31.

In circulo angulus, qui in semicirculo rectus est: qui autem in maiore segmẽto, minor recto: qui verò in minore segmẽto, maior est recto. Et insuper angulus maioris segmẽti, recto quidẽ maior est: minoris autẽ segmenti angulus, minor est recto.

Circvli enim A B C, cuius centrum D, diameter sit A C, constituaturque in semicirculo angulus




gulus A B C, existetq́; angulus B A C, in maiori segmento C A B.
Constituatur quoque in C E B, minori segmento angulus B E C.
Dico angulum A B C, in semicirculo rectum esse; angulum verò
B A C, in maiore segmento, minorem recto: & angulum B E C, in
minori segmento, maiorem recto. Item angulum maioris segmen
ti comprehensum recta B C, & peripheria B A C, esse recto maio-
rem. At angulum minoris segmenti comprehensum recta B C, &
peripheria B E C, recto minorem. Ducatur enim recta B D, ad cen
trum, & extendatur A B, in F. Quoniam igitur rectæ D A, D B, æ-
quales sunt, [a] erit angulus D B A, angulo D A B, æqualis. Eadem a 5. primi.
ratione erit angulus D B C, angulo D C B, æqualis, ideoque totus
angulus A B C, duobus angulis B A C, B C A, æqualis erit. [b] Est autem & angulus F B C, externus b 32. primi.
eisdem duobus internis angulis B A C, B C A, in triangulo A B C, æqualis. Quare æquales erunt
inter se anguli A B C, F B C; ac propterea vterque rectus. Rectus igitur est angulus A B C; quod
est primum.

Qvoniam verò in triangulo A B C, [c] duo anguli A B C, & B A C, sunt duobus rectis mino- c 17. primi.
res; Et est angulus A B C, ostensus rectus: Erit angulus B A C, in segmento maiori, recto minor;
quod est secundum.

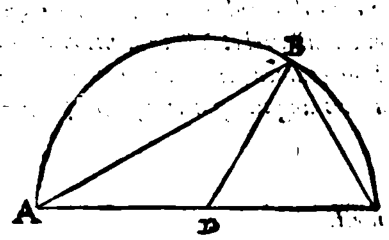
Rvrsvs quia in quadrilatero A B E C, intra circulum descripto, [d] duo anguli oppositi B A C, d 22. tertij.
& B E C, sunt duobus rectis æquales; Et angulus B A C, ostensus est recto minor: Erit B E C, an-
gulus in segmento minore, recto maior; quod est tertium.

*Satis autem est demonstrasse, vnum angulum in semicirculo, nimirum A B C, rectum esse: & in maio
ri segmento, qualis est B A C, recto minorem: at denique in segmento minori, cuiusmodi est B E C, maiorem
recto. Cùm enim omnes anguli in eodem segmento sint inter se æquales, perspicuum est, si vnus angulus in se-
micirculo rectus sit, omnes in eodem semicirculo esse rectos: Et si in maiore segmento vnus sit recto minor, om-
nes in eodem segmento esse recto minores: Et si denique in minore segmento vnus sit maior recto, omnes in eo-
dem segmento maiores esse recto. Hoc idcirco dixerim: quia Euclides non probat absolutè, quemcunque an-
gulum in segmento maiore B A C, esse recto minorem, vt constat, si alius angulus in eo segmento constituere-
tur; cùm is non contineretur à diametro, quemadmodum angulus B A C. Quare quicunque alius ostendetur
esse etiam recto minor, quia [a] æqualis est angulo B A C, in eodem segmento maiore, qui recto minor est osten-* a 21. tertij.
*sus ab Euclide.*

Amplivs cùm angulus rectus A B C, pars sit anguli segmenti maioris B A C, qui comprehen-
ditur recta B C, & peripheria B A C; erit angulus segmenti maioris, recto maior: quod est quartū.

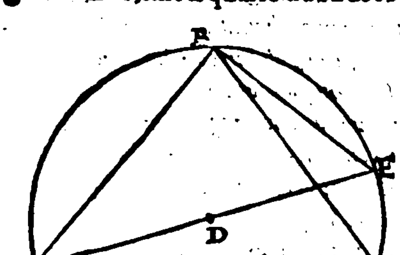
Postremo, cùm angulus segmenti minoris, comprehensus recta B C, & peripheria B E C,
pars sit quoque anguli recti F B C; Erit angulus segmēti minoris, recto minor; quod est quintum.
In circulo igitur angulus, qui in semicirculo, rectus est, &c. Quod erat demonstrandum.

*Alia demonstratio huius propositionis.*



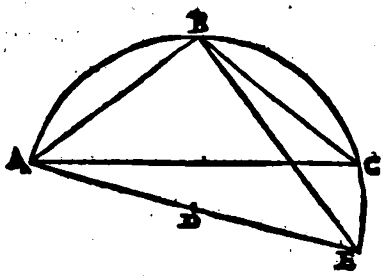

In semicirculo, cuius diameter A C, & centrum D, sit an-
gulus A B C, quem dico esse rectum. Ducta enim recta B D, [e] e 5. primi.
erunt anguli D B A, D A B, æquales, quod rectæ D A, D B, æ-
quales sint. Cùm igitur angulus B D C, externus [f] æqualis f 32. primi.
sit duobus angulis internis D B A, D A B, in triangulo A B D;
Erit angulus B D C, duplus anguli D B A. Eodem modo e-
rit angulus A D B, duplus anguli D B C; atque adeò duo an-
guli ad D, dupli erunt totius anguli A B C. Cùm igitur [g] an- g 13. primi.
guli ad D, sint duobus rectis æquales; erit angulus A B C,
eorum dimidium, rectus: quod est primum.

Vel sic. Quoniā [h] angulus D A B, angulo D B A, & angulus D C B, angulo D B C, æqualis est; h 5. primi.
erunt duo anguli A, C, angulo A B C, æquales in triangulo A B C: ac proinde angulus A B C, dimi-
dium erit trium angulorum A, C, & A B C, eiusdem trianguli. Quocirca [i] cùm tres anguli in trian- i 32. primi.
gulo A B C, sint æquales duobus rectis; erit A B C, dimidium duorū rectorum, atq; idcirco rectus.

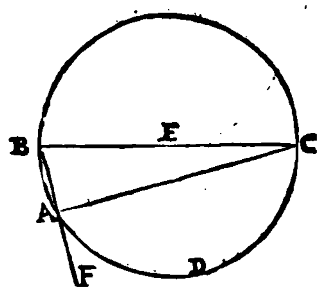



Sit rursus in segmeno maiori, cuius centrum D, angu-
lus A B C, quem dico esse recto minorem. Ducta enim dia-
metro A E, & coniuncta recta B E; erit angulus A B E, in se-
micirculo rectus, vt demonstratū est. Quare angulus A B C,
pars recti, recto minor erit: quod est secundum. Atque hæc
demonstratio in omnem angulum in minori segmento qua-
drat: quod de superiori demonstratione dici non poterat, vt
ibidem monuimus.

Sit iterum in segmento minori, cuius centrum D, angu-
lus A B C, quem dico esse recto maiorem. Ducta enim dia-



metro A E, occurrens peripheriæ productæ in E, & coniuncta recta B E; erit angulus A B E, in semicirculo rectus, vt demonstratum est; qui cùm sit pars anguli A B C, erit angulus A B C, recto maior: quod est tertium.



Iam verò ponatur segmẽtum maius A B C, & segmentũ minus A D C, quorum centrum E. Dico angulum C A B, segmenti maioris, qui videlicet constituitur à recta C A, & peripheria A B C, esse recto maiorem; At angulum C A D, segmenti minoris, qui fit à recta eadem C A, & peripheria A D C, recto minorẽ. Ducta enim diametro C B, & recta B A F,
a 2. tertij. cadet eius segmentum B A, duo puncta B, A, coniungens, [a] intra circulum, reliqua verò pars A F, extra circulum; eritque angulus B A C, in semicirculo rectus, atque adeò ei deinceps F A C, rectus quoque. Cùm igitur angulus rectilineus rectus B A C, sit pars anguli C A B, segmenti maioris, qui nimirum sub recta C A, & peripheria A B C, continetur; & angulus C A D, segmenti minoris, contentus videlicet sub recta C A, & peripheria A D C, pars quoque anguli recti F A C; constat vtrumque.

## COROLLARIVM.

*Hinc manifestum est, quòd angulus trianguli, qui reliquis duobus æqualis existit, rectus est: eò quòd illi contiguus (qui producto latere extra triangulum fit) eisdem sit æqualis. Quod quidem constat ex priore demonstratione. Vel eò quòd dimidium sit trium angulorum trian-*
a 31. primi. *guli, [a] qui duobus rectis æquiualent. Quod ex posteriore demonstratione manifestum est.*

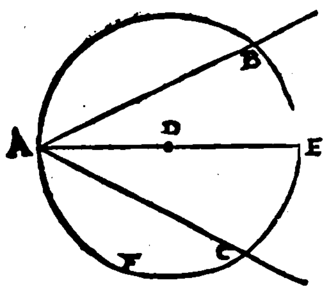
## EX CAMPANO.

*Ex hac propositione perspicuum quoque est, non valere duas illas argumentationes, quas impugnauimus ad propos. 16. huius libri, quarum vna est.*

Transitvr à maiore ad minus, & per omnia media; ergo per æquale.

*Altera verò est eiusmodi.*

Contingit reperire maius, & minus eodem; Igitur continget reperire æquale.



*In circulo enim A B C, cuius centrum D, & diameter A E, ducatur*
b 31. tertij. *recta A B. [b] Erit angulus A B E, segmenti maioris, recto maior. Quare si A B, moueatur versus A E, circa A, punctum fixum, faciet semper cum peripheria angulum recto maiorem, donec ad diametrum A E, perue-*
c 16. tertij. *nerit, [c] vbi faciet angulum semicirculi, recto minorem. Quòd si vlte-*
d 31. tertij. *rius moueatur ad A C, [d] faciet à fortiori angulum A C F, segmenti minoris, recto minorem. Transitur ergo ab angulo segmenti maioris, qui recto maior est, ad angulum semicirculi, vel etiam segmenti minoris, quorum vterque recto minor est; non tamen per angulum recto æqualem. Cùm igitur per omnes medios angulos fiat transitus, perspicuum est, vitiosas esse prædictas consequentias.*

## SCHOLIVM.

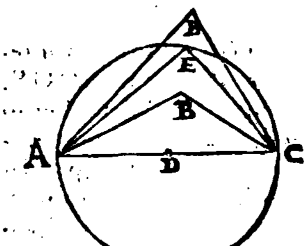
*Manifestum quoque est conuersum huius theorematis: hoc est.*

Segmentvm circuli, in quo angulus constitutus est rectus, est semicirculus: in quo verò angulus est acutus, est segmentum maius; & in quo angulus est obtusus, est segmentum minus. Et segmentum, cuius angulus recto est maior, est semicirculo maius; cuius verò angulus est recto minor, est vel semicirculus, vel semicirculo minus.

*Nam angulo existente recto, si segmentũ non sit semicirculus, erit vel maius, & sic angulus erit acutus, vel minus, & sic angulus in eo obtusus erit: quorum vtrumque pugnat cum hypothesi. Rursus angulo existente acuto, si segmentum non sit semicirculo maius, erit vel semicirculus, & sic angulus in eo erit rectus; vel minus, & sic angulus in eo erit obtusus: quorum vtrumque cum hypothesi etiam pugnat. Denique angulo existente obtuso, si segmentum non sit minus semicirculo, erit vel semicirculus, atq; ita angulus in eo rectus erit; vel maius, atq; ita angulus in eo acutus erit: quòd similiter hypothesi contrarium est. Præterea quando segmenti angulus est recto maior, si segmentum non sit maius semicirculo, erit vel semicirculus, vel semicirculo minus, & sic eius angulus recto erit minor: quod non ponitur. At quando angulus segmenti est recto minor, si segmentum non sit semicirculus, aut semicirculo minus, erit maius, atq; ita eius angulus recto quoq; maior erit. quod hypothesi aduersatur.*

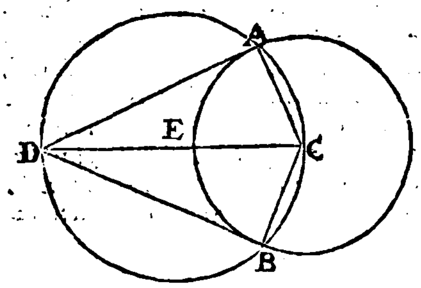
*QVIN & hoc theorema verum est; scilicet.*

SI angulo recto linea recta subtensa, hoc est, si in triangulo rectangulo latus recto angulo oppositum, bifariam secetur, & ex puncto diuisionis circa illam rectam, vel latus, circulus describatur; transibit necessariò circulus ille per angulum rectum.



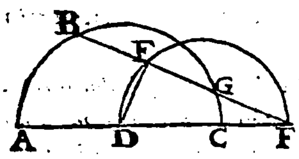

*ANGVLO enim recto A B C, subtensa recta A C, vel in triangulo rectangulo A B C, latus A C, recto angulo B, oppositum bifariam secetur in D, puncto, ex quo ad interuallum D A, vel D C, circulus describatur A E C, quem dico transire per B. Si enim transeat citra B, vel vltra; ductis rectis A E, C E, ita vt rectas A B, A C, non secent, sed vel intra eas cadant, vel extra; erit* [a] *angulus A E C, rectus quoque. Quare anguli recti B, & E, aequales erunt, quod est absurdum: cùm angulus E, sit necessariò,* [b] *vel maior, vel minor angulo B. Transit igitur circulus per punctum B: quod est propositum.* a 31. tertij. b 21. primi.

*EX iis, quae in priore parte huius propositionis demonstrata sunt, nullo negotio ex puncto extra circulum dato ducemus duas rectas ad vtramque partem rectae ex eodem puncto per centrum circuli ductae, quae circulum tangant. Id quod ad propos. 17. huius libri polliciti sumus.*

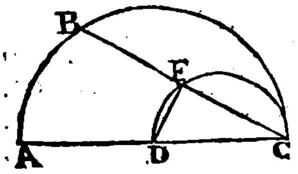



*SIT enim circulus A B, cuius centrum C, & punctum D, extra ipsum. Ducta recta D C, ex dato puncto ad centrum, eaque diuisa bifariam in E, describatur ex E, ad interuallum E C, vel E D, circulus A C B D, secans datum circulum in punctis A, B, iunganturque rectae D A, D B. Dico vtramque circulum tangere in A, & B. Ductis enim rectis A C, B C,* [c] *erit vterque angulus A, & B, in semicirculo rectus. Quare per coroll. propos. 16. huius libri, recta D A, circulum A B, tanget in A; & recta D B, eundem tanget in B: quandoquidem tam illa perpendicularis est ad extremitatem semidiametri A C, quàm haec ad extremitatẽ semidiametri C B.* c 31. tertij.

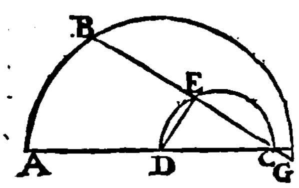
*SED & hoc theorema non iniucundum ex Pappo Alexandrino demonstrabimus hoc loco; nimirum.*




SI per centrum circuli alius circulus describatur, & per vtriusque circuli centrum recta eiiciatur, à puncto vero, vbi haec recta à posteriori circulo secatur, ducatur recta vtcunque: secabitur eius portio intra priorem circulum à circunferentia posterioris bifariam.




*SIT circulus A B C, per cuius centrum D, describatur alius circulus D E F, & per horum circulorum centra ducatur recta A F; ac denique ex puncto F, vbi circulus D E F, rectam A F, intersecat, ducatur recta F B, secans circunferentias in B, E, G. Dico B E, G E, esse aequales. Ducta enim recta D E,* [d] *erit angulus D E F, in semicirculo D E F, rectus. Igitur* [e] *recta D E, rectam B G, secat bifariam.* d 31. tertij. e 3. tertij.

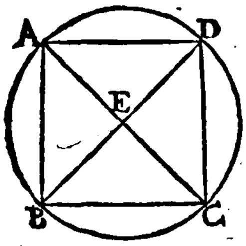



*QVOD si posterior circulus transeat per punctum C, vt in secunda figura; erit* [f] *rursum angulus D E C, in semicirculo D E C, rectus; ac* [g] *propterea B C, in E, secabitur bifariam.* f 31. tertij. g 3. tertij.

*SI denique posterior circulus totus sit intra priorem, vt in tertia figura; erit iterum* [h] *angulus D E F, in semicirculo D E F, rectus. Quare* [i] *recta D E, rectam B G, bifariam secabit. Quod erat ostendendum.* h 31. tertij. i 3. tertij.

*FACILE etiam aliud hoc theorema demonstrabitur.*

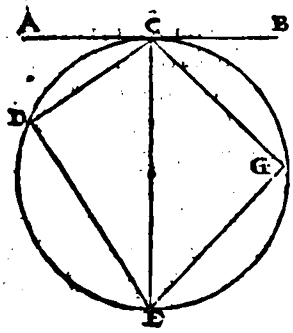
QVADRILATERVM in circulo descriptum, cuius duo latera opposita sunt parallela, & aequalia, parallelogrammum est rectangulum, hoc est, vel quadratum, vel altera parte longius.

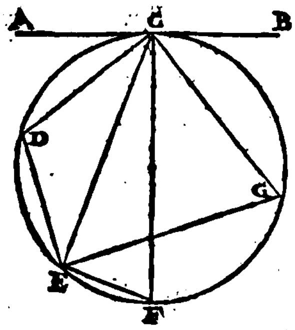



*IN circulo A B C D, descriptum sit quadrilaterum A B C D, cuius duo opposita latera A D, B C, parallela sint, & aequalia. Dico ipsum esse parallelogrammum, & rectangulum. Cùm enim rectae A D, B C, parallelae sint, & aequales,* [k] *erunt quoque A B, D C, parallelae, & aequales. Parallelogrammũ ergo est A B C D. Quia verò* [l] *& arcus A D, arcui B C, ob rectas aequales A D, B C, & arcus A B, arcui D C, ob aequales rectas A B, D C, aequalis est; erit totus arcus B A D, toti arcui B C D, & totus arcus A D C, toti arcui A B C, aequalis; ac proinde, ductis rectis B D, A C, semicirculi erunt B A D, B C D, A D C, A B C. Quare* [m] *anguli quadrilateri recti erunt. Quod est propositum.* k 33. primi. l 28. tertij. m 31. tertij.

31. ## THEOR. 28. PROPOS. 32.

SI circulum tetigerit aliqua recta linea, à cõtactu autem producatur quædam recta linea circulum secans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt iis, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis.





TANGAT recta A B, circulũ C D E, in C, puncto, à quo ducatur recta C E, diuidẽs circulũ in duo segmẽta, in quibus fiant anguli C G E, C D E. Dico angulum A C E, æqualem esse angulo C G E, in alterno segmento; & angulum B C E, angulo C D E, in alterno quoque segmento. Transeat enim primum, vt in priore figura, recta C E, per centrum. a Erit igitur vterque angulus A C E, B C E, rectus. b Sunt autem & anguli C G E, C D E, in semicirculis recti. Igitur angulus A C E, angulo C G E; & angulus B C E, angulo C D E, æqualis est.

a 18. tertij.
b 31. tertij.

NON transeat iam C E, recta per centrum, vt in figura posteriore. Ducta igitur recta C F, per centrum, connectatur recta E F: c eritque C F, perpendicularis ad A B, d & angulus C E F, rectus; ac propterea reliqui anguli E C F, E F C, e æquales erunt vni recto, vt angulo recto A C F. Dempto ergo communi angulo E C F, erit reliquus A C E, reliquo C F E, æqualis. f Est autem angulo C F E, æqualis quoque angulus C G E, cũ vterque sit in segmẽto C G E. Quare angulus A C E, angulo C G E, æqualis erit. Quoniam verò in quadrilatero C D E G, g duo anguli C D E, C G E, duobus sunt rectis æquales: h Sunt autem & duo anguli A C E, B C E, duobus rectis æquales; si auferantur æquales anguli A C E, C G E, remanebit angulus B C E, angulo C D E, æqualis. Si circulum igitur tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem, &c. Quod erat ostendendum.

c 18. tertij.
d 31. tertij.
e 32. primi.
f 21 tertij.
g 22. tertij.
h 13. primi.

*SCHOLIVM.*

POTEST *theorema hoc conuerti hoc modo.*

SI linea recta ducta ad extremitatem lineæ circulum secantis fecerit cum ipsa angulos æquales iis, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis; Linea ducta circulum tanget.

*IN eadem figura priore transeat primùm recta C E, per centrum, secans circulum C D E, & ducatur recta A B, per C, faciens angulum A C E, æqualem angulo C G E. Dico A B, tangere circulum. Quoniam a angulus C G E, rectus est, erit & angulus A C E, illi æqualis, rectus. Quare per coroll. propos. 16. huius lib. A B, circulum tanget. Iam verò C F, non transeat per centrum, construaturq; figura posterior, vt suprà. Quoniam igitur angulus A C E, æqualis ponitur angulo C G E, in alterno segmento maiore, b & hic est æqualis angulo C F E; erit & angulus A C E, æqualis angulo C F E. Addito ergo communi angulo E C F, erit angulus A C F, æqualis duobus angulis E F C, E C F: Atqui anguli E F C, E C F, æquales sunt vni recto; quòd c angulus C E F, rectus sit in semicirculo, & tres anguli in triangulo C E F, d æquales sint duobus rectis. Angulus igitur A C F, rectus quoq; erit; ideoq; per coroll. propos. 16. huius lib. A B, circulum tanget.*

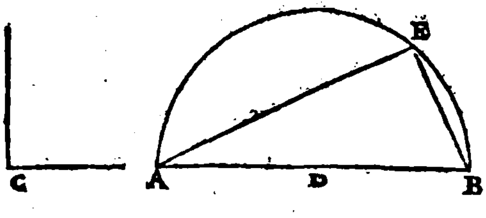
a 31. tertij.
b 21. tertij.
c 31. tertij.
d 32. primi.

*EODEM modo; si angulus B C E, æqualis fuerit angulo C D E, in alterno segmento minori, ostendetur recta A B, tangere circulum. Cùm enim e anguli B C E, A C E, duobus sint rectis æquales: f Item duo anguli C D E, C G E, duobus rectis æquales; si demantur æquales B C E, C D E, remanebunt anguli A C E, C G E, æquales. Quare, vt demonstratum iam est, recta A B, circulum tanget.*

e 13. primi.
f 22. tertij.

32. ## PROBL. 5. PROPOS. 33.

SVPER data recta linea describere segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

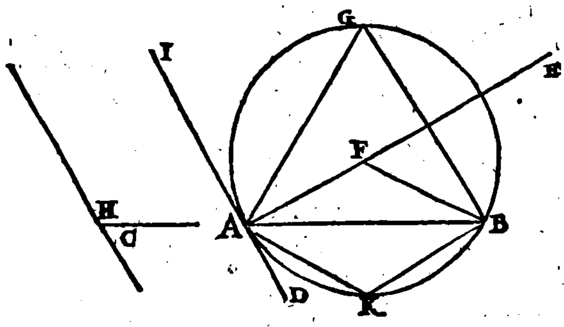


RECTA data sit A B, & datus angulus primũ rectus C. Oportet igitur super A B, segmentum describere, in quo angulus existens sit æqualis angulo recto dato C. Diuisa A B, bifariam in D, describatur centro D, interuallo autem D A, vel D B, semicirculus A E B; factumque erit, quod proponitur. Nam a angulus A E B, in descripto semicirculo rectus est, ideoque æqualis angulo C, recto.

a 31. tertij.

SIT deinde angulus datus acutus C. Ad punctum A, fiat angulus D A B, æqualis angulo C, acuto; & agatur ad D A, perpendicularis A E, quæ

cadet




cadet supra A B. Fiat deinde angulo F A B, æqualis angulus F B A, secetq; B F, rectam A E, in F. [a] Erũt igitur rectę F A, F B, æquales. Quare si centro F, & interuallo F A, circulus describatur A G B, transibit is per B. Dico igitur angulum in segmento A G B, quod descriptum est super A B, esse æqualem angulo C. Fiat enim angulus in dicto segmento A G B. Quia igitur A E, per centrũ F, transit, & ei perpendicularis est D A, tanget D A, recta circulum in A, per coroll. propos. 16. huius libri. Quapropter [b] angulus D A B, hoc est, angulus datus C, æqualis erit angulo G, in segmento alterno A G B.

a 6. primi.

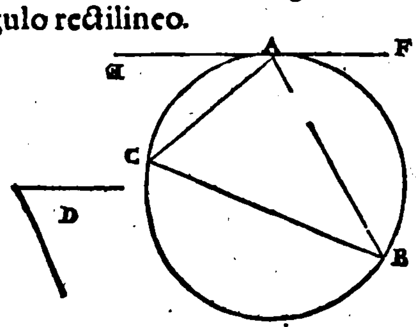
b 32. tertij.

Sit tertiò angulus datus H, obtusus. Fiat rursus angulo H, æqualis angulus I A B, & agatur ad I A, perpendicularis A E, quæ supra A B, cadet. Reliqua omnia fiant, vt priùs, descriptumque erit super A B, segmentum A K B, in quo angulus K, æqualis est angulo dato obtuso H. Nam angulus I A B, hoc est, angulus datus H, [c] æqualis est angulo K, in alterno segmento A K B. Eadem enim est demonstratio. Itaque super data recta linea descripsimus segmentum, &c. Quod efficiendum erat.

c 32. tertij.

## RROBL. 6. PROPOS. 34. 33.

A dato circulo segmentum abscindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.




Datvs circulus sit A B C, à quo auferre oporteat segmentum, in quo angulus existens æqualis sit dato angulo D. [d] Ducatur recta E F, tangens circulum in A. Fiat deinde angulus F A B, æqualis angulo dato D. Dico igitur angulum A C B, in segmento ablato A C B, æqualem esse dato angulo D. Est enim [e] angulus F A B, æqualis angulo C, in alterno segmento A C B. Cùm ergo angulo dato D, factus sit æqualis angulus F A B; erit quoque angulus C, angulo D, æqualis. A dato ergo circulo abscidimus segmentum A C B, &c. Quod erat faciendum.

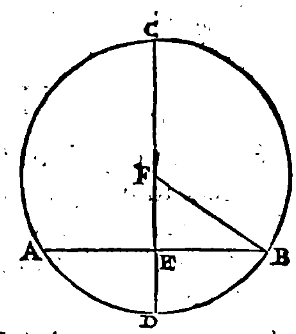
d 17. tertij.

e 32. tertij.

## THEOR. 29. PROPOS. 35. 34.

Si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuò secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis vnius, æquale est ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo.


In circulo A C B D, secant se mutuò rectæ A B, C D, in E. Dico rectangulum comprehensum sub segmentis A E, E B, æquale esse rectangulo comprehenso sub segmẽtis C E, E D. Aut enim vtraque linea transit per centrum, aut vna tantùm, aut neutra. Transeat primùm vtraq; per centrum. Quoniam igitur omnia quatuor segmenta inter se æqualia sunt, perspicuum est, rectangulum comprehensum sub duobus vnius lineæ æquale esse ei, quod sub duobus alterius lineæ comprehenditur, rectangulo, ex iis, quæ ad initium lib. 2. scripsimus.




Transeat deinde C D, sola per centrum F, diuidatque primùm rectam A B, bifariã, [f] ac propterea ad angulos rectos, coniungaturq; recta B F. Quoniam igitur C D, diuisa est per æqualia in F, & per inæqualia in E; [g] erit rectangulum sub C E, E D, vnà cum quadrato rectæ E F, æquale quadrato rectæ F D, ideoq; quadrato rectæ F B, cũ rectę F D, F B, sint æquales: Est autem quadratum rectę F B, [h] æquale quadratis rectarũ F E, E B. Igitur rectangulum sub C E, E D, vnà cũ quadrato rectæ E F, æquale quoque erit quadratis rectarum F E, E B. Quare ablato cõmuni quadrato rectæ F E, remanebit rectangulum sub C E, E D, æquale quadrato rectæ E B, hoc est, rectangulo sub A E, E B; cùm A E, E B, rectæ sint æquales: ac proinde rectangulum sub eis comprehensum, sit quadratum, ex iis, quæ ad defin. 1. lib. 2. scripsimus.

f 3. tertij.

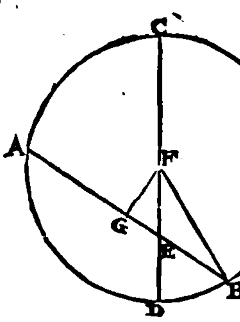
g 5. secundi.

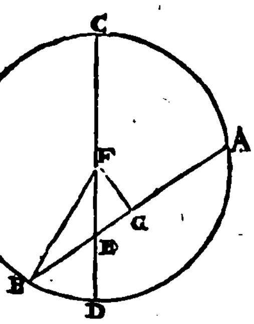
h 47. primi.

Dividat iam C D, transiens per centrum rectum A B, non bifariam. Secetur ergo A B, bifariam in G, ducanturque rectæ F G, F B; [i] eritque F G, perpendicularis ad A B. Quoniam verò rectangulum sub C E, E D, vnà cum quadrato rectæ F E, [k] æquale est quadrato rectæ F D, hoc est,

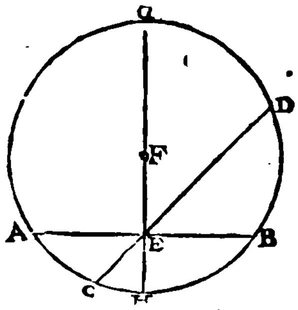
i 3. tertij.

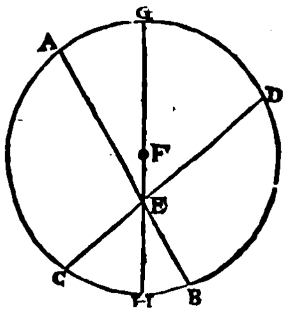
k 5. secundi.




a 47. primi. quadrato rectæ FB: Est autem quadratum rectæ FE, a æquale quadratis rectarum FG, GE; & quadratum rectæ FB, æquale quadratis rectarum FG, GB; Erit quoque rectangulum sub CE, ED, vnà cum quadratis rectarum FG, GE, æquale quadratis rectarum FG, GB. Dempto ergo communi quadrato rectæ FG, remanebit rectangulum sub CE, ED, vnà cum quadrato rectę GE, æquale quadrato
b 5. secundi. rectæ GB. Atqui etiam rectangulum sub AE, EB, vnà cum quadrato rectæ GE, b æquale est eidem quadrato rectæ GB: propterea quòd recta AB, secta est bifariam in G, & non bifariam in E. Igitur rectangulum sub CE, ED, vnà cum quadrato rectæ GE, æquale est rectangulo sub AE, EB, vnà cum quadrato eiusdem rectæ GE. Quare ablatò communi quadrato rectæ GE, remanebit rectangulum sub CE, ED, æquale rectangulo sub AE, EB. quod est propositum.



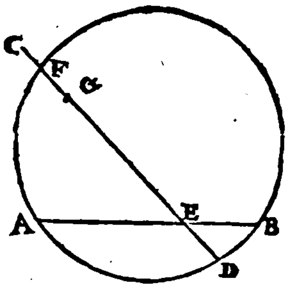




Tertio neutra per centrum transeat, siue vna illarum bifariam diuidatur, siue neutra. Ducatur per centrum F, & punctum sectionis E, recta GH. Quoniam itaque ostensum est, rectangulum sub AE, EB, æquale esse rectangulo sub GE, EH, siue AB, diuidatur bifariam, siue non: Item rectangulum sub CE, ED, æquale esse quoque eidem rectangulo sub GE, EH, siue CD, secta sit bifariam, siue non; Erit rectangulum sub AE, EB, æquale rectangulo sub CE, ED. quod est propositum. Si in circulo igitur duę rectæ lineæ sese mutuò secent, &c. Quod demonstrandũ erat.

### *SCHOLIVM.*

*Converti poterit theorema istud hoc modo.*

Si duæ rectæ ita se secent, vt rectangulum sub vnius segmentis comprehensum, æquale sit ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo; describi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus: hoc est, circulus per quælibet tria puncta earum extrema descriptus, per quartum quoque punctum transibit.




*Secent se mutuò rectæ AB, CD, in E, sitq; rectangulum sub AE, EB, æquale rectangulo sub CE, ED. Dico quatuor puncta A, D, B, C, in circunferentiam circuli cadere, hoc est, per ea circulum posse describi: adeò vt circulus per tria puncta A, D, B, descriptus, transeat necessariò per punctum etiam C. Describatur enim per tria puncta A, D, & B, circulus aliquis; (quo autem modo id fiat, ostendemus ad 5. propos. lib. 4.) qui si non transeat per C, transibit aut vltra C, vel citra, vt per F. Quoniam ergo*
a 35. tertij. *rectangulum sub FE, ED, a æquale est rectangulo sub AE, EB; & rectangulum sub CE, ED, ponitur quoque æquale eidem rectangulo sub AE, EB; Erunt rectangula sub CE, ED, & sub FE, ED, æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Transibit igitur circulus per punctum C. quod erat propositum.*

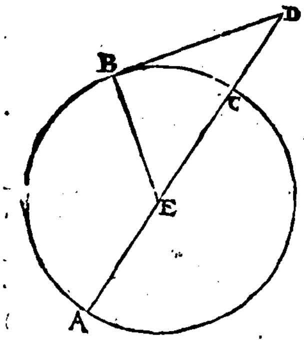
## 35. THEOR. 30. PROPOS. 36.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera verò tangat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam assumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente describitur, quadrato.

Extra circulum ABC, punctum sumatur D, à quo linea ducatur DA, secans circulum in
a 17. tertij. C, a & linea DB, circulum tangens in B. Dico rectangulum sub DA, DC, æquale esse quadrato rectæ DB. Transeat enim primùm recta DA, per centrum E, & iungatur recta EB, b quæ per-
b 18. tertij. pendicularis erit ad DB. Quoniam igitur CA, diuisa est per æqualia in E, & ei addita in rectum
c 6. secundi. & continuum CD, c erit rectangulum sub DA, DC, vnà cum quadrato rectæ EC, hoc est, cum

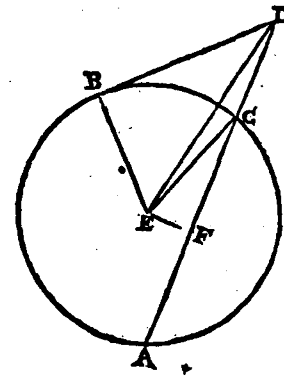
quadrato

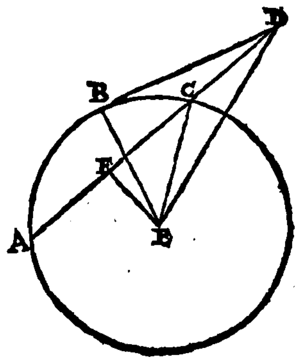
quadrato rectæ E B, æquale quadrato rectæ D E: Est autem quadratum rectæ D E, [a] æquale quadratis rectarum E B, B D. Quare rectangulum sub D A, D C, vnà cum quadrato rectæ E B, æquale erit quadratis rectarum D B, B E. Ablato igitur communi quadrato rectæ B E, remanebit rectangulum sub D A, D C, quadrato rectæ D B, æquale. Quod est propositum. a 47. primi




NON trāseat iam D A, secans p centrum E. Diuisa ergo A C, bifariam in F, ducantur rectæ E B, E C, E D, E F; [b] eritque E B, ad B D, perpendicularis; [c] & E F, ad A C. Quoniam igitur C A, diuisa est per æqualia in F, & ei addita recta C D, [d] erit rectangulum sub D A, D C, vnà cum quadrato rectæ C F, æquale quadrato rectæ D F. Addito igitur communi quadrato rectæ F E, erit rectangulum sub D A, D C, vnà cum quadratis rectarum C F, F E, æquale quadratis rectarum D F, F E. Est autem quadratis rectarum C F, F E, [e] æquale quadratum rectæ E C, ideoque & quadratum rectæ E B; Et [f] quadratis rectarum D F, F E, æquale est quadratum rectæ D E. Quare rectangulum sub D A, D C, vnà cum quadrato rectæ E B, æquale erit quadrato rectæ D E. Cùm igitur quadratum rectæ D E, [g] æquale sit quadratis rectarum D B, B E; erit & rectangulum sub D A, D C, vnà cum quadrato rectæ E B, æquale quadratis rectarum D B, B E. Ablato ergo communi quadrato rectæ B E, remanebit rectangulum sub D A, D C, quadrato rectæ D B, æquale: quod est propositū. Si igitur extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrādum.

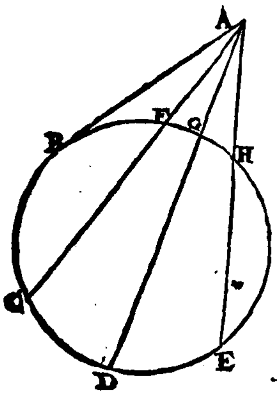
b 18. tertij. c 3. tertij. d 6. secundi. e 47. primi. f 47. primi. g 47. primi.



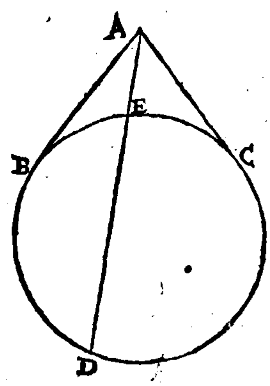

## COROLLARIVM I.

*HINC manifestum est, si à puncto quouis extra circulum assumpto plurimæ lineæ rectæ circulum secantes ducantur, rectangula comprehensa sub totis lineis, & partibus exterioribus, inter se esse æqualia. Vt si ex A, ducantur rectæ A C, A D, A E, secantes circulum in F, G, H, erunt rectangula sub A C, A F; Item sub A D, A G; & sub A E, A H, æqualia inter se. Nam ducta A B, tangente circulum, [a] erunt quadrato rectæ A B, æqualia singula illa rectangula; quare & inter se omnia æqualia erunt.* a 36. tertij.




## COROLLARIVM II.

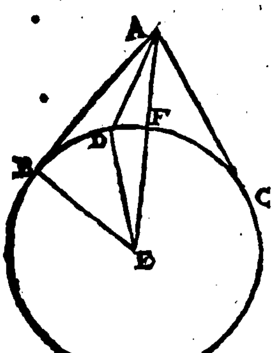
*CONSTAT etiam duas rectas ab eodem puncto ductas, quæ circulū tangant, inter se esse æquales. Ducantur enim ex A, rectæ A B, A C, tangentes circulum; quas dico esse æquales inter se. Ducta enim recta A D, quæ circulum secet in E, erit tam quadratum rectæ A B, quàm quadratum rectæ A C, [b] æquale rectangulo sub A D, A E. Quare quadrata rectarum A B, A C, inter se æqualia erunt, ac propterea rectæ A B, A C, æquales quoque erunt.* b 36. tertij.




## COROLLARIVM III.

*PERSPICVVM quoq; est, ab eodem puncto extra circulum assumpto, duci tantùm posse duas lineas, quæ circulum tangant. Si enim præter duas A B, A C, duci possit tertia A D, circulum eundem tangens; ductis rectis E B, E D, ex centro E, [c] erunt anguli A B E, A D E, recti, ideoq; æquales; quod est absurdum. Nam si ducatur recta A E, [d] erit angulus A D E, maior angulo A B E.* c 18. tertij. d 21. primi.

*ALITER. Si tertia A D, circulum etiam tangat, erunt duæ tangentes A B, A D, æquales, vt ostensum est; quod est absurdum. Ducta namque recta A E, ad centrum E, quæ circulum secet in F, [e]* e 8. tertij.



*erit A D, cùm sit propinquior minimæ A F, minor, quàm A B, quæ à minima A F, remotior est. Vel sic: Si A B, A D, sunt æquales; additis æqualibus E B, E D, erunt quoque A B, B E, ipsis A D, D E, æquales, quod est absurdum.* a *Sunt enim maiores A B, B E, quàm A D, D E. Solùm igitur duæ rectæ ducentur à puncto A, quæ circulum tangant. Quod est propositum.*

a 21. primi.

## COROLLARIVM IV.

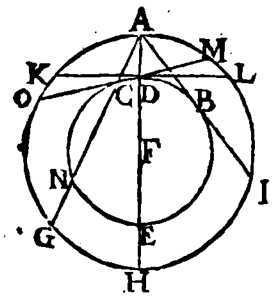
*ILLVD denique constat etiam, si duæ rectæ æquales ex puncto quopiam in conuexam peripheriam incidant, & earum vna circulum tangat, alteram quoque circulum tangere. Vt si duæ rectæ A B, A C, in antecedente figura sint æquales, & A C, tangat circulum in C, tanget quoque A B, eundem circulum in B. Si enim non tangat, ducatur A D, tangens (semper enim duæ tangentes ab eodem puncto duci possunt, vt constat ex scholio propos. 31. huius lib.) eruntque ex 2. coroll. A C, A D, æquales. Cùm ergo & A B, ipsi A C, æqualis ponatur, ducentur tres rectæ æquales A B, A C, A D, quod est absurdum.* b *Duæ enim tantùm duci possunt.*

b 8. tertij.

*ALITER. Ponantur in figura sequentis propositionis duæ rectæ æquales D B, D F, & D B, circulum tangat, in B. Dico & D F, eundem tangere in F. Ductis enim rectis E B, E F, ex centro, erunt duo latera D B, B E, duobus lateribus D F, F E, æqualia, & basis D E, communis.* c *Igitur anguli B, F, æquales erunt:* d *Sed B, rectus est. Igitur & F, rectus erit: atque idcircò D F, circulum tanget in F, ex coroll. propos. 16. huius libri.*

c 8. primi.
d 18. tertij.

## SCHOLIVM.




*FACILLIMO negotio propositionem hanc per antecedentem propositionem demonstrabimus, hoc modo. Ex puncto A, extra circulum B C D, ducatur tangens A B, & secans A E, quæ primùm per centrum F, transeat, secetque circunferentiam in D. Dico rectangulum sub A E, A D, æquale esse quadrato ex A B. Descripto namque ex F, per A, circulo A K L, producantur A E, A B, vsque ad H, I; & per D, ad A H, perpendicularis K L, quæ eundem circulum B C D, tanget in D, ex coroll. propos. 16. huius libri. Eruntque ex demonstratis in scholio propos. 3. huius libri A D, H E, æquales, ac proinde, addita communi D E, & A E, H D, æquales erunt. Item ex scholio propos. 18. huius libri A I, K L, æquales erunt, secabunturque in B, D, bifariam: ac propterea rectangula sub A B, B I, & sub K D, D L, æqualia inter se erunt, atque adeò quadrata, ob æqualitatem rectarum A B, B I; K D, D L. Itaque quoniam rectangulum sub H D, D A, hoc est, sub A E, (quæ ipsi H D, ostensa est æqualis) A D,* e *æquale est rectangulo sub K D, D L, hoc est, rectangulo sub A B, B I, siue quadrato ex A B; constat propositum.*

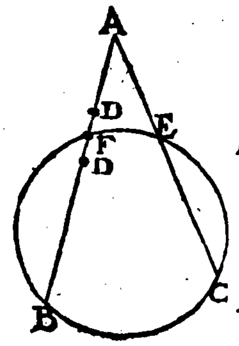
e 35. tertij.

*SED iam secans linea A N, non transeat per centrum F, secetque circunferentiam in C. Dico rursum, rectangulum sub A N, A C, quadrato ex A B, æquale esse. Descripto enim rursus ex F, per A, circulo A K L, producantur A N, A B, vsque ad G, I; & per C, ducatur O M, circulum B C D, tangens. Eruntque ex scholio propos. 3. huius libri A C, G N, æquales, ac proinde, addita communi C N, & A N, G C, æquales erunt. Item ex scholio propos. 18. huius lib. A I, O M, æquales erunt, secabunturque in B, C, bifariam: ac propterea rectangula sub A B, B I, & sub O C, C M, æqualia inter se erunt, atque adeò quadrata, ob æqualitatem rectarum A B, B I. O C, C M. Itaque quoniam rectangulum sub G C, C A, hoc est, sub A N, (quæ ipsi G C, ostensa est æqualis) A C,* f *æquale est rectangulo sub O C, C M, hoc est, rectangulo sub A B, B I, siue quadrato ex A B; constat rursus id, quod proponebatur.*

f 35. tertij.

*PRIMVM etiam corollarium huius propositionis hoc modo fermè conuertemus.*

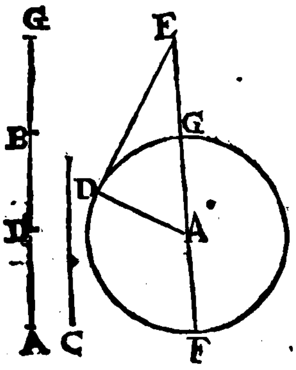
SI à puncto aliquo binæ lineæ rectæ finitę egrediantur, quę ita secentur in binas partes, vt rectangula sub totis, & segmentis prope punctum comprehẽsa sint æqualia: describi poterit per extrema puncta aliorũ segmentorum circulus, hoc est, circulus per tria puncta extrema aliorum segmentorum descriptus, per quartum etiam punctum extremũ transibit.




*EX puncto enim A, egrediantur duæ rectæ A B, A C, quæ ita secentur in punctis D, E, vt rectangula sub A B, A D, & sub A C, A E, sint æqualia. Dico quatuor puncta B, C, E, D, in circunferentiam circuli cadere; hoc est, per ea posse describi circulum: adeò vt circulus per tria puncta B, C, E, descriptus, transeat necessariò per reliquum etiam punctum D. Describatur enim per tria puncta B, C, E, (vt ad propos. 5. lib. 4. docebimus) circulus B C E, qui si dicatur nõ transire per quartum punctum D, transibit aut citra D, aut vltra, vt per F. Quoniam ergo rectangulum sub A B, A F, æquale est, ex coroll. 1. huius propos. rectangulo comprehenso sub A C, A E; & rectangulum sub A B, A D, eidem rectangulo sub A C, A E, ponitur æquale: erunt rectangula sub A B, A F, & sub A B, A D, inter se æqualia, pars & totum: quod est absurdum. Transibit ergo circulus per punctum D. Quod erat demonstrandum.*

*Licebit quoque ex demonstratis hac propositione colligere huiusmodi problema.*

Datis duabus rectis siue æqualibus, siue inæqualibus, alterutri earum rectam adiungere, vt rectangulum sub tota composita, & adiuncta comprehensum, quadrato alterius sit æquale.

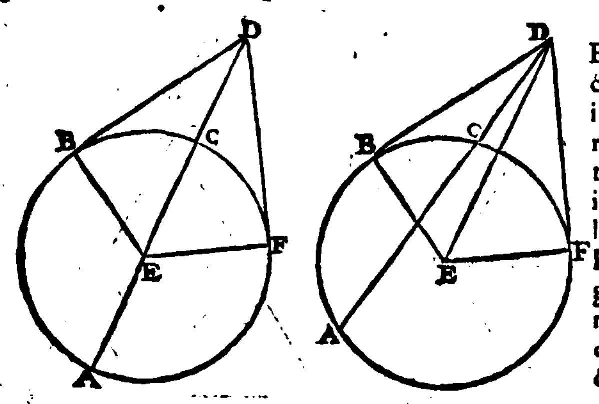



*Sint datæ duæ rectæ A B, & C, sitq; ipsi A B, maiori adiungenda recta, ita vt rectangulum comprehensum sub tota composita, & adiuncta, æquale sit quadrato rectæ C, minoris. Diuisa recta A B, bifariam in D, describatur ex quouis centro A, ad interuallum A D, dimidiatæ, circulus D F G, & ad A D, in D, excitetur perpendicularis D E, ipsi C, æqualis, ac denique ex E, per A, centrum recta extendatur E F, secans circunferentiam in G. Dico si rectæ A B, adijciatur B G, ipsi E G, æqualis, rectangulum sub tota A G, & G B, æquale esse quadrato rectæ C. Quoniam enim rectangulum sub F E, E G,* [a] *æquale est quadrato rectæ E D, (quod E D, circulum tangat in D, ex coroll. propos. 6. huius lib.) Est autem rectangulum sub F E, E G, æquale rectangulo sub A G, G B, (quod rectæ F E, E G, rectis A G, G B, æquales sint. Sumpta enim G B, ipsi E G, æqualis, & A B, ipsi F G, æqualis posita est,) & quadratum ex E D, quadrato ex C, (ob æqualitatem rectarum E D, & C, ex constructione.) æquale. Igitur & rectangulum sub A G, G B, quadrato ex C, æquale erit. Quod est propositum.* a 36. tertij.

*Non secus propositum demonstrabitur, si rectæ C, minori adiungenda sit recta, ita vt rectangulum sub tota composita & adiuncta comprehensum quadrato rectæ A B, maioris æquale sit.*

## THEOR. 31. PROPOS. 37. 36.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum secet, altera in eum incidat; sit autem, quod sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam assumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente describitur, quadrato; Incidens ipsa circulum tanget.




Extra circulum A B C, cuius centrum E, punctum sumatur D, à quo ducatur recta D A, circulum secans in C, & recta D B, incidens in circulum ad punctum B; sitque rectangulum sub D A, D C, æquale quadrato rectæ D B. Dico D B, circulum tangere in B. [a] Ducatur enim D F, tangens circulum, & iungatur rectæ E B, E F. Quod si D A, secans nō transeat per centrum E, iungatur quoque recta D E. Quoniam igitur rectangulo sub D A, D C, [b] æquale est quadratum rectæ tangentis D F; Et eidem rectangulo sub D A, D C, æquale ponitur quadratum rectæ D B: erunt quadrata rectarum D F, D B, inter se æqualia, ideoque & rectæ D F, D B, æquales inter se erunt. Itaque quia latera D F, F E, trianguli D F E, æqualia sunt lateribus D B, B E, trianguli D B E, & basis D E. communis: [c] erunt anguli D F E, D B E, æquales: [d] Atqui angulus D F E, rectus est, quod D F, circulum tangat. Igitur & angulus D B E, rectus erit. Quapropter per coroll. propos. 16. huius lib. D B, circulum tanget; quod est propositum. Si ergo extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum. a 17. tertij. b 36. tertij. c 8 primi. d 18. ...

### SCHOLIVM.

*Est autem hoc theorema conuersum præcedentis theorematis, vt perspicuum est.*

*Placet hoc loco sequens etiam theorema demonstrare.*

Si à puncto extra circulum dato duæ lineæ rectæ circulum tangentes ducantur, aut duæ lineæ vsque ad conuexam peripheriam inter se æquales; Linea recta ab eodem puncto per centrum circuli eiecta angulum ab eis comprehensum diuidit bifariam: Et contrà, Linea recta angulum ab eis comprehensum diuidēs bifariam, per centrū circuli transibit.

*In priori figura huius propositionis duæ rectæ D B, D F, circulum A B C F, tangant in B, F, punctis quæ ex 2. coroll. præcedentis propositionis æquales erunt: Vel ducantur quæcunque duæ æquales D B, D F. Et per centrum E, ducatur recta linea D E A. Dico angulum B D F, sectum esse bifariam à recta D A. Cùm enim iunctis rectis E B, F F, duo latera B D, D E, duobus lateribus F D, D E, æqualia sint, basisq; E B, basi E F, æqualis;* [a] *erunt duo anguli ad D, inter se æquales. Quod est propositum.* a 8. primi.

*DIVIDAT iam recta D A, angulum B D F, bifariam. Dico rectam D A, per centrum transire. Si enim in D A, non est centrum, sit extra ipsam centrum E, iungaturq́; recta E D, vt in posteriori figura huius propositionis. Ergo, vt demonstratum est, recta E D, angulum B D F, bifariam diuidet; ac propterea anguli B D A, B D E, cùm sint dimidiatæ partes anguli B D F, æquales inter se erunt, pars, & totum; quod est absurdum. Transit ergo recta D A, per centrum. Quod demonstrandum erat.*

FINIS ELEMENTI TERTII.

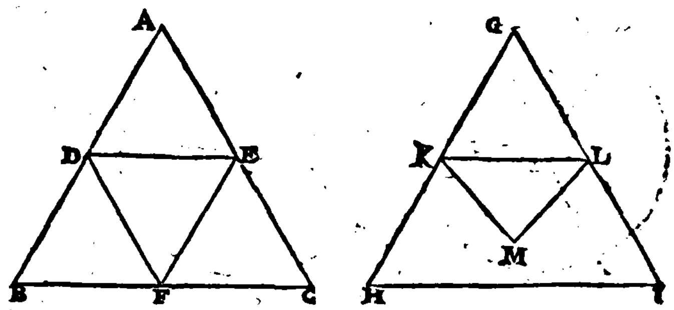
# EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVM.

## DEFINITIONES.

I.

FIGVRA rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, cùm singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli singula latera eius, in qua inscribitur, tangunt.

*AGENS Euclides quarto hoc libro de variis inscriptionibus figurarum rectilinearum in circulo, & earundem circa circulum descriptionibus: Item de inscriptionibus circuli in eisdem figuris, & circuli descriptionibus circa easdem: exponit paucis definitionibus, quid sit figuram in figura inscribi, aut circa figuram describi, incipiens à rectilineis figuris. Si igitur anguli D, E, F, trianguli interni D E F, tangãt latera A B, A C, B C, trianguli externi A B C; dicetur triãgulũ D E F, in triangulo A B C, esse inscriptũ. At quoniã angulus M, triãguli K L M, nõ tangit latus H I, triãguli G H I, nõ dicetur triangulum K L M, inscribi in triãgulo G H I, quãuis totũ illud sit intra hoc, duoq́; anguli K, L, tangãt duo latera G H, G I.*

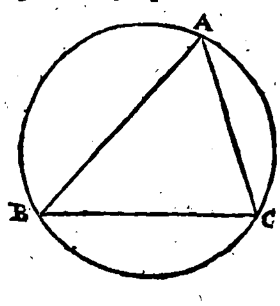



II.

SIMILITER & figura circũ figurã describi dicitur, cũ singula eius, quæ circumscribitur, latera singulos eius figuræ angulos tetigerint, circum quã illa describitur.

*E contrario dicetur triangulum A B C, describi circa triangulum D E F; quoniã singula latera illius singulos huius angulos tangunt; At triangulum G H I, non dicetur descriptũ esse circa triangulum K L M, propterea quòd latus illius H I, angulum huius M, non tangit. Idem intelligendum est de inscriptionibus, ac circumscriptionibus aliarum figurarum rectilinearum.*

*CAETERVM propriè figuræ rectilineæ dicuntur in figuris rectilineis describi, & circa easdem describi, quando inscripta, & circumscripta habent latera numero æqualia, & angulos numero æquales: quamuis hoc non sit omnino necessarium, cùm & quadratum intra triangulum describi possit, vt ad finem lib. 6. docebimus.*



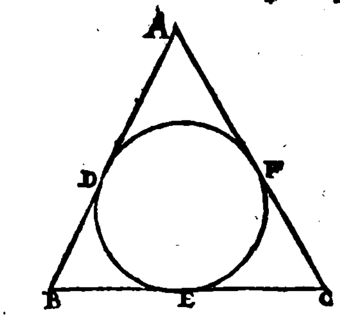

III.

FIGVRA rectilinea in circulo inscribi dicitur, cùm singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.

*VT si tangant anguli A, B, C, trianguli A B C, peripheriã circuli A B C, dicetur triãgulũ in circulo esse inscriptũ. Quòd si vel vnus tantũ angulorũ non tangeret peripheriam, nõ diceretur triangulũ esse inscriptũ in circulo.*

FIGVRA

IIII.




**Figvra** verò rectilinea circa circulum describi dicitur, cùm singula latera eius, quæ circunscribitur, circuli peripheriam tangunt.

*At verò, si latera trianguli A B C. singula tangant peripheriam circuli D E F; dicetur triangulum circa circulum esse descriptum.*

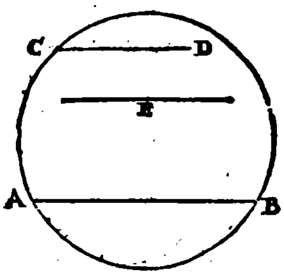
V.

**Similiter** & circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cùm circuli peripheria, singula latera tangit eius figuræ, cui inscribitur.

VI.

**Circvlvs** autem circum figurã describi dicitur, cùm circuli peripheria singulos tangit eius figuræ, quam circunscribit, angulos.

*Vicissim dicetur circulus D E F, in figura definitionis 4. inscriptus esse in triangulo A B C: At verò circulus A B C, in figura definitionis 3, descriptus esse circa triangulum A B C. Idem iudicium habeto de alijs figuris rectilineis, quæ in circulo dicuntur inscribi, vel circa eundem describi; Aut in quibus circulus dicitur inscribi, vel circa quas describi circulus dicitur.*



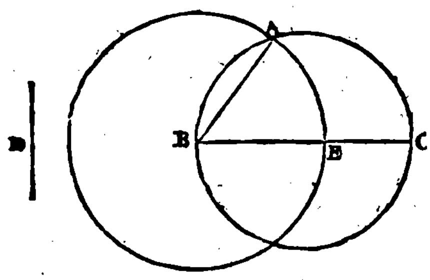

VII.

**Recta** linea in circulo accommodari, seu coaptari dicitur, cùm eius extrema in circuli peripheria fuerint.

*Vt recta linea A B, quoniam eius extrema A, & B, in peripheria circuli A B C, existunt, coaptata, seu accommodata in dicto circulo esse dicetur: Non autem recta E, vel C D; quia hæc alterum duntaxat extremorũ, nempe C, habet in peripheria circuli; Illa verò neutrum.*

# PROBL. 1. PROPOS. 1. 15

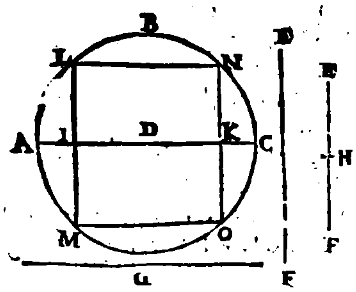
**In** dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior.




In circulo A B C, coaptãda sit recta linea æqualis re-
ctæ lineæ datæ D, quæ tamẽ maior nõ sit diametro cir-
culi dati. Cùm enim diameter [a] sit omnium rectarũ in a 15. tertij.
circulo maxima, si data recta diametro maior foret, nõ
posset in circulo aptari illi vna æqualis. Ducatur ergo
diameter B C. Itaque si data recta D, æqualis fuerit dia-
metro, aptata erit B C, illi æqualis: Si verò D, minor fue
rit diametro, [b] abscindatur B E, æqualis ipsi D; & cen- b 3. primi.
tro B, interuallo autem B E, circulus describatur E A,
secans circulum A B C, in A. Ducta igitur recta B A, erit
ea aptata in circulo A B C, æqualis datæ rectæ D. [c] Est enim B A, æqualis ipsi B E; & D; æqualis ei- c 15. defin.
dem B E, per constructionem. Quare A B, & D, inter se æquales quoque erunt. In dato ergo circu- primi.
lo rectam lineam accommodauimus, &c. Quod faciendum erat.

EX FEDERICO COMMANDINO.

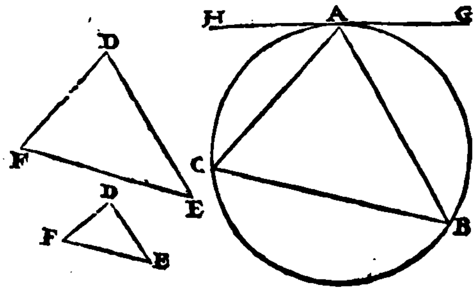
**In** dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior, & alteri datæ parallelam.




*In dato circulo A B C, cuius centrũ D, accommodãda sit recta a-*
*qualis recta E F, qua diametro maior non sit, & alteri recta G, paral*
*lela. [a] Ducatur per centrũ D, diameter A C, recta G, parallela. Quòd* a 31. primi.
*si recta E F, diametro fuerit aqualis, factũ iam erit, quod proponitur.*
*Si verò E F, diametro minor fuerit, secta ea bifariam in H, abscinda-*
*tur D I, ipsi H E, & D K, ipsi H F, aqualis, vt tota I K, toti E F, sit a-*
*qualis. [b] Et per I, K, ad angulos rectos ipsi A C, ducantur L M, N O;* b 11. primi.
*iungaturq; L N. Dico L N, accommodatam esse aqualem ipsi E F, &*
*ipsi G, parallelam. Cùm enim L M, N O, aqualiter à centro distent, [c]* c 14. tertij.
*ipsa aquales inter se erunt: [d] qua cùm diuidantur bifariam in I, &* d 3. tertij.
*K, quòd ad angulos rectos secentur à recta A C, per centrum D, transeunte; erunt & earum semisses L I, N K,*
*aquales. [e] Quia verò L I, N K, parallela etiã sunt; [f] erunt quoq; L N, I K, aquales, & parallela. Quare cùm I K,* e 28. primi.
*aqualis sit ipsi E F, & parallela ipsi G; erit etiam L N, aqualis ipsi E F; [g] & ipsi G, parallela. Eadem ratione,* f 33. primi.
*si recta ducatur M O, erit ea aqualis ipsi E F, & parallela ipsi G. Quod est propositum.* g 30. primi.

## 2. PROBL. 2. PROPOS. 2.

**IN dato circulo triangulum describere dato triangulo æquiangulum.**

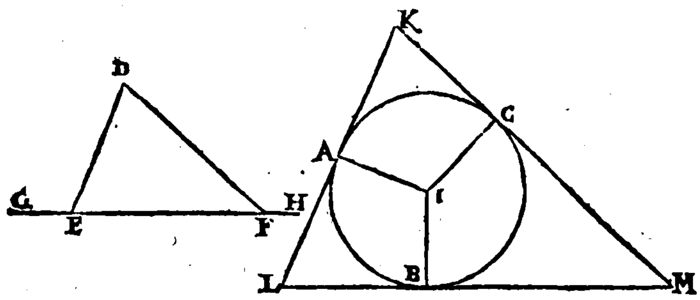



SIT in circulo A B C, dato describẽdum triangulum æquiangulum triangulo dato cuicunque D E F. Ducatur recta G H, tangens circulum in A, fiatq; angulus G A B, angulo F, æqualis, & angulus H A C, angulo E, atque extendantur rectæ A B, A C, ad circunferentiam vsque in puncta B, & C, coniungaturq; recta B C. Non cadet autem recta A C, in rectam A B, vel inter rectas A B, A G: propterea quòd anguli G A B, H A C, hoc est, anguli F, E, [a] minores sunt duobus rectis. [b] Essent autem duobus rectis æquales, si A C, in A B, caderet; vel maiores duobus rectis, si inter A B, A G, caderet. Dico triangulum A B C, circulo dato inscriptũ, esse æquiangulum dato triangulo D E F. Est enim angulus C, [c] æqualis angulo G A B, & eidem angulo G A B, æqualis est angulus F, ex constructione. Quare anguli C, & F, inter se quoque erunt æquales. Similiter quia angulus B, [d] æqualis est angulo H A C; & eidem angulo H A C, æqualis est, per constructionem, angulus E, erunt etiam anguli B, & E, inter se æquales. Cùm igitur duo anguli B, & C, trianguli A B C, æquales sint duobus angulis E, & F, trianguli D E F, [e] erũt quoque reliqui anguli A, & D, æquales. Æquiangulum est ergo triangulum A B C, triangulo D E F. Quare in dato circulo triangulum descripsimus, &c. Quod faciendum erat.

a 17. primi.
b 13. primi.
c 32. tertij.
d 32. tertij.
e 32. primi.

## 3. PROBL. 3. PROPOS. 3.

**CIRCA datum circulum triangulum describere dato triangulo æquiãgulum.**



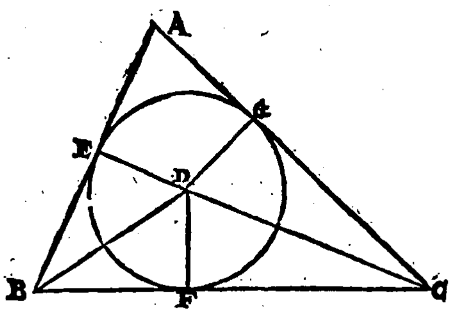

CIRCA circulum datum A B C, describẽdum sit triangulum æquiangulum dato triangulo D E F. Producto latere E F, vtrinque ad G, & H, sumptoque centro circuli I, ducatur recta vtcunque A I, & fiat angulus A I B, æqualis angulo D E G; & angulus B I C, angulo D F H. Deinde ex A, B, C, educantur ad A I, B I, C I, perpendiculares K L, L M, M K, quæ circulum tangent in punctis A, B, C, per corollarium propos. 16. lib. 3. coibuntque in punctis K, L, M. Si enim duceretur recta A C, fierent duo anguli K A C, K C A, duobus rectis minores; ac proinde A K, C K, coibunt, &c. Nam recta hæc ducta A C, caderet supra rectas A I, C I, quod hæ angulum constituant in I. Cùm enim spatium circa I, æquale sit quatuor rectis, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. hoc est, quatuor angulis ad E, & F; sintque duo anguli A I B, C I B, duobus angulis D E G, D F H, æquales; erit reliquũ spatium A I C, reliquis duobus angulis D E F, D F E, æquale: Sed [f] hi minores sunt duobus rectis. Igitur & spatium A I C, minus erit duobus rectis, ac proinde angulus erit A I C. Aliàs spatium illud esset vel æquale duobus rectis, si nimirum A I, C I, vnam rectam lineam constituerent; vel maius duobus rectis, si recta A I, producta caderet supra I C. Cadit igitur necessariò A I, producta infra C I; atque idcircò angulus fiet A I C, ad partes K, & ducta recta A C, faciet cum A K, C K, duos angulos minores duobus rectis, ideoque rectæ A K, C K, coibunt in K. Non secus ostendemus, A L, B L, coire in L; & C M, B M, in M: quia ductæ rectæ A B, B C, facient cum A L, B L, C M, B M, angulos minores duobus rectis. Descriptũ est igitur circa circulum triangulum K L M, quod dico esse æquiangulum triangulo D E F. Quoniam enim omnes anguli in quadrilatero A I B L, æquales sunt quatuor rectis, vt ad 32. propos. lib. 1. ostensum fuit; & anguli I A L, I B L, sunt duo recti: erunt reliqui A I B, & L, duobus rectis æquales. Cùm igitur [g] & anguli D E G, D E F, sint duobus rectis æquales; si auferantur æquales A I B, D E G, remanebit angulus L, angulo D E F, æqualis. Pari ratione ostendemus angulum M, æqualem esse angulo D F E. [h] Reliquus igitur angulus K, reliquo angulo D, æqualis erit; atque idcircò triangulum K L M, æquiangulum triangulo D E F. Circa datum ergo circulum, &c. Quod efficiendum erat.

f 17. primi.
g 13. primi.
h 32. primi.

## 4. PROBL. 4. PROPOS. 4.

**IN dato triangulo circulum inscribere.**

SIT describendus circulus in dato triangulo A B C. Diuisis duobus angulis A B C, A C B, bifariam

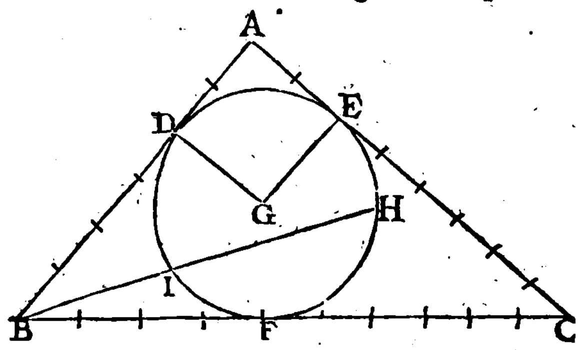


riam rectis B D, C D, quæ intra triangulum coeant in D; ducatur ex D, ad tria latera, perpendiculares D E, D F, D G. Quoniam igitur duo anguli D B E, D E B, trianguli D B E, æquales sunt duobus anguli D B F, D F B, trianguli D B F, vterque vtrique; & latus B D, commune; [a] erunt quoque latera D E, D F, æqualia. a 26. primi. Eademque ratione æqualia erunt latera D F, D G, in triangulis D C F, D C G. Cùm igitur tres rectæ D E, D F, D G, sint æquales; circulus ex D, ad interuallum D E, descriptus transibit per reliqua puncta F, & G; tangetque latera trianguli in E, F, G, per corollarium propos. 16. lib. 3. quòd latera perpendicularia sint ad semidiametros D E, D F, D G. In dato ergo triangulo circulum descripsimus. Quod erat efficiendum.

## *SCHOLIVM.*

*VERVM quoniam Euclides lib. 1. demonstrauit; [a] in omni triangulo duo latera quomodolibet assumpta reliquo esse maiora; non abs re fuerit demonstrare hoc loco, cum Ioan. Baptista Benedicto, quantò maiora sint, hoc proposito theoremate.* a 20. primi.

IN omni triangulo, si circulus inscribatur, duo quælibet latera superant reliquum recta linea, cuius quadratum quadruplum est rectanguli comprehensi sub recta ab angulo illis lateribus comprehenso in cauam peripheriam ducta, & sub eius segmento exteriore. Quòd si angulus comprehensus sit rectus, superabunt illa duo latera latus recto angulo oppositum diametro circuli triangulo inscripti.



*SIT triangulum A B C, [b] cui circulus inscribatur D E F, tangẽs latera trianguli in D, E, F, punctis: & à quouis angulo B, siue rectus is sit, siue obtusus, siue acutus, ducatur recta B H, secãs circulum in I. Dico duo latera B A, B C, superare latus A C, recta linea, cuius quadratum quadruplum est rectanguli sub B H, B I, comprehensi. Quoniam enim per coroll. 2. propos. 36. lib. 3. recta C F, rectæ C E, & recta A D, rectæ A E, æqualis est; erũt duæ rectæ F C, D A, lateri A C, æquales. Latera igitur B A, B C, latus A C, superant segmentis B D, B F: quæ cùm ex eodem corollario sint æqualia; superabunt eadem latera B A, B C, latus A C, recta, quæ dupla est segmenti B D. Sed quadratum rectæ, quæ dupla est segmenti B D, quadruplum est quadrati rectæ B D; ex scholio propos. 4. lib. 2. Et [c] quadratum rectæ B D, æquale est rectangulo sub B H, B I. Igitur latera B A, B C, superant latus A C, recta, cuius quadratum quadruplum est rectanguli sub B H, B I. Quod est propositum.* b 4. quarti. c 36. tertij.

*QVOD si angulus A, rectus sit, dico nõ solùm duo latera A B, A C, superare latus B C, recta, cuius quadratum quadruplum est rectanguli comprehensi sub recta ex A, in cauam peripheriam ducta, & eius segmento exteriore, vt ostensum est: verùm etiam excessum illum esse diametro circuli D E F, æqualem. Ductis enim ex centro G, ad puncta contactuum D, E, rectis G D, G E; [d] erunt anguli ad D, & E, recti. Cùm ergo & angulus A, ponatur rectus, [e] erunt tam rectæ A E, D G, quàm A D, E G, parallelæ inter se: atque idcircò A G, parallelogrammum erit. [f] Quare tam recta, A D, semidiametro E G, quàm recta A E, semidiametro D G, æqualis erit: hoc est, duæ rectæ A D, A E, simul toti diametro circuli erunt æquales. Superant autem duo latera A B, A C, latus B C, duabus rectis A D, A E, vt ostensum est. Nam E C, ipsi F C, & D B, ipsi F B, æqualis est, ex corollario 2. propositionis 36. libri 3. Igitur eadem latera A B, A C, superant latus B C, diametro circuli inscripti. Quod est propositum.* d 18. tertij. e 28. primi. f 34. primi.

*ITAQVE quæuis duo latera superant reliquum duabus rectis circulum triangulo inscriptum tangentibus, quæ inter angulum duobus illis lateribus comprehensum, & circulum interijciuntur. Ostensum enim est, latera A B, A C, superare latus B C, rectis tangentibus A D, A E, &c.*

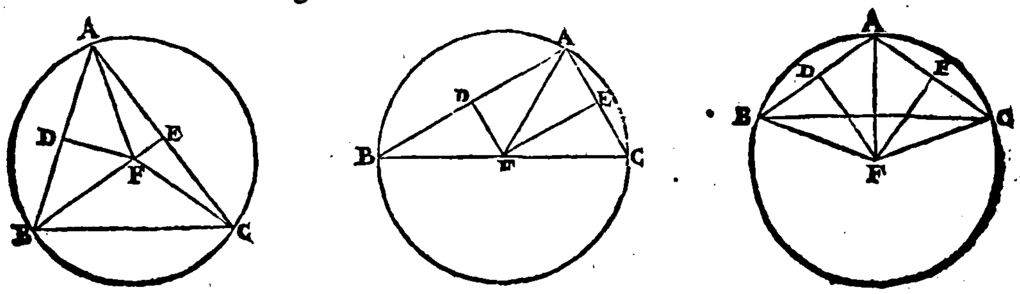
*IAM verò his ita demonstratis, si tria latera trianguli cognita sint, inueniemus nullo negotio tria puncta, in quibus circulus triangulo inscribendus latera tangere debet. Quia enim latera, verbi gratia, A B, A C, superare debent latus B C, duabus tangentibus ex A, ductis, quæ quidem æquales sunt: si dematur latus B C, notum ex notis lateribus A B, A C, relinquentur duæ tangentes A D, A E, notæ. Semissis ergo huius excessus dabit vtrumque punctum D, E. Reliquum deinde segmentum E C, dabit segmentum C F, vsque ad punctum tertium F: Vel reliquum segmentum D B, dabit segmentum B F, ad idem punctum F. Si igitur ex duobus punctis D, E, erigantur perpendiculares D G, E G, coibunt hæ in G, centro circuli inscribendi. Exempli gratia. Sit latus A B, 6. latus A C, 8. & latus B C, 10. palmorum. Dempto latere B C, 10. palmorum ex duobus lateribus*

*A B, A C, hoc eſt, ex 14.palmis relinquuntur 4.palmi. Tam ergo A D, quàm A E, duos palmos continebit. Segmentum ergo D B, continebit 4.palmos, totidemq́; ſegmentum B F, habebit. Segmentum autem E C, ac proinde & C F, erit 6.palmorum. Sic etiam dempto latere A B, 6.palmorum, ex lateribus A C, B C, id eſt, ex 18.palmis, reliqui fiunt 12.palmi. Vtrumque ergo ſegmentum C E, C F, erit 6.palmorum: ac proinde vtrumque A E, A D, 2.palmorum, & vtrumque B D, B F, 4.palmorum. Poſtremò dempto latere A C, 8.palmorum ex lateribus A B, C B, hoc eſt, ex palmis 16.remanent 8.palmi. Vtrumque ergo ſegmentum B D, B F, habebit 4.palmos: At vtrumque C F, C E, 6.palmos: & vtrumque A D, A E, 2.palmos.*

## PROBL. 5. PROPOS. 5.

.5.

CIRCA datum triangulum circulum deſcribere.



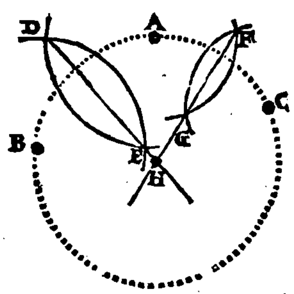

SIT circulus deſcribendus circa datum triangulum A B C. Diuidantur duo latera A B, A C, (quæ in triangulo rectangulo, vel obtuſangulo ſumenda ſunt facilitatis gratiâ, circa rectum, vel obtuſum angulum, quamuis hoc non ſit omnino neceſſarium, ſed duo quæuis latera bifariam poſſint ſecari) bifariam in D, & E, punctis, ex quibus educantur D F, E F, perpendiculares ad dicta latera, coeuntes in F. (Quòd enim coeant, patet. Nam ſi ducta eſſet recta D E, fierent anguli F D E, F E D, duobus rectis minores.) eritque F, vel intra triangulum, vel in latere B C, vel extra triangulum. Ducantur rectæ F A, F B, F C. Quoniam igitur latera A D, D F, trianguli A D F, æqualia
a 4.primi. ſunt lateribus B D, D F, trianguli B D F, & anguli ad D, recti: a erunt baſes F A, F B, æquales. Eodem modo erunt F A, F C, æquales. Cùm ergo tres rectæ, F A, F B, F C, ſint æquales, circulus deſcriptus ex F, ad interuallum F A, tranſibit quoque per puncta B, & C. Circa datum ergo triangulum circulum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

### COROLLARIVM.

a 31.tertij. *HINC manifeſtum eſt, ſi centrum intra triangulum cadat, a omnes angulos eſſe acutos,*
b 31.tertij. *quoniam omnes ſunt in maiori ſegmento circuli: ſi verò ſit in latere B C, b angulum B A C,*
c 31.tertij. *ei lateri oppoſitum, eſſe rectum, quòd ſit in ſemicirculo: Si denique cadat extra triangulum, c angulum oppoſitum B A C, obtuſum eſſe, cùm ſit in minori ſegmento circuli.*

*CONTRA verò perſpicuum eſt, ſi triangulum fuerit acutangulum, centrum cadere intra triangulum: ſi rectangulum, in latus recto angulo oppoſitum: ſi denique obtuſangulum fuerit, extra triangulum. Quod quidem facilè oſtendetur, ducendo ad incommodum aliquod, ſiue abſurdum. Quia ſi in acutangulo caderet centrum in vnum latus, eſſet angulus ei oppoſitus rectus: ſi verò extra, eſſet idem angulus obtuſus. Item ſi in rectangulo centrum caderet intra, eſſent omnes anguli acuti: ſi verò extra, eſſet angulus oppoſitus, obtuſus. Denique ſi in triãgulo obtuſangulo caderet in vnũ latus, eſſet angulus ei oppoſitus, rectus: ſi verò intra, omnes anguli eſſent acuti. Quæ omnia ex priori parte huius corollarij colliguntur, & pugnant cum hypotheſi.*

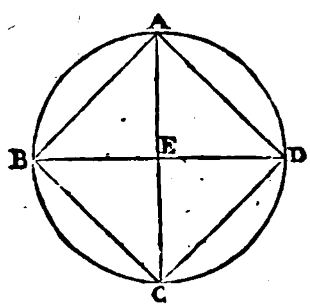
### *SCHOLIVM.*




*COLLIGITVR etiam ex hoc problemate, quanam arte deſcribendus ſit circulus, qui per data tria puncta non in vna recta linea exiſtentia tranſeat. Nam ſi data puncta tribus rectis iungantur, vt conſtituatur triangulum, facilè circa ipſum circulus deſcribetur, vt hac propoſitione traditum eſt. Quod tamen facilius efficietur praxi illa, quam tradidimus propoſ. 25.lib.3. Sint enim data tria puncta A, B, C; Ex A, & B, quouis interuallo eodem duo arcus deſcribãtur ſe interſecantes in D, & E, punctis, per quæ recta linea ducatur D H. Item ex A, & C, quouis alio interuallo eodem, vel etiam, ſi placet, priori illo, alij duo arcus delineentur, ſecantes ſeſe in F, & G, punctis, per quæ recta ducatur F H, ſecans rectam D H, in H. Dico H, eſſe centrum circuli tranſeuntis per data puncta A, B, & C. Nam ſi ducerentur* *ventur rectæ A B, A C, B C, diuiderentur latera A B, A C, trianguli A B C, bifariam à rectis D H, F H, ceu demonstratum est in praxi illa propos. 25. lib. 3. Quare vt in hoc 5. problemate Euclides ostendit, H, erit centrum circuli circa triangulum A B C, descripti. Quod est propositum.*

## PROBL. 6. PROPOS. 6. 6.

**In dato circulo quadratum describere.**

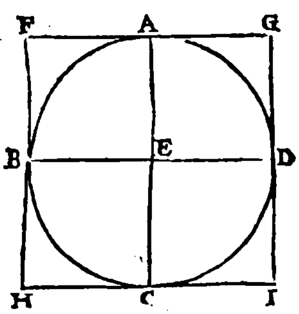


Sit in dato circulo A B C D, cuius centrum E, inscribendum quadratum. Ducantur duæ diametri A C, B D, secantes sese ad angulos rectos in centro E, & iungantur rectæ A B, B C, C D, D A. Dico A B C D, esse quadratum inscriptum in dato circulo. Nam quia latera E A, E B, trianguli A E B, æqualia sunt lateribus E C, E B, trianguli C E B, cùm omnia sint ex centro; & anguli contenti sunt recti; [a] erunt bases A B, B C, æquales. Eadem ratione æquales erũt rectæ B C, C D; Item rectæ C D, D A; Et rectæ D A, A B. Omnia igitur latera quadrilateri A B C D, æqualia inter se sunt. Quod breuius ita concludemus. Quoniam quatuor anguli ad E, æquales sunt, nimirum recti; [b] erũt quatuor arcus, quibus insistunt, æquales: [c] ac proinde & rectæ quatuor subtensæ æquales erũt. Omnia ergo latera quadrilateri A B C D, inter se æqualia sunt. Sunt autem, [d] & anguli recti, cùm omnes in semicirculis existãt. Quare quadratum erit A B C D; proptereaq; in dato circulo quadratũ descripsimus. Quod erat faciendum.

a 4. primi.
b 26. tertij.
c 29. tertij.
d 31. tertij.

## PROBL. 7. PROPOS. 7. 7.

**Circa datum circulum quadratum describere.**

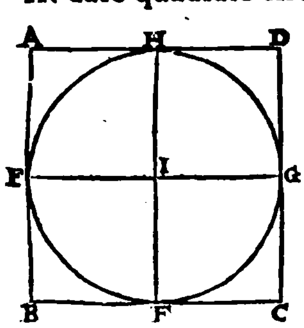


Sit circa datum circulum A B C D, cuius centrũ E, describendum quadratum. Ducantur duæ diametri A C, B D, secantes se in E, centro, ad angulos rectos; & per A, B, C, & D, educantur ad diametros lineæ perpendiculares F G, F H, H I, I G, coeuntes in punctis F, H, I, G. Quòd enim coeant A F, B F, patet ex eo, quòd ducta rectã AB, faciat cum A F, B F, duos angulos duobus rectis minores: atque ita de reliquis. Dico F H I G, esse quadratum circa circulum datum descriptum. Cùm enim anguli A E B, F B E, sint recti, [e] erũt F H, A C, parallelæ; similiterque erunt G I, A C, parallelæ. [f] Quare & F H, G I, parallelæ erunt. Eodem modo parallelæ erunt F G, H I. Quoniam igitur parallelogrammum est A C H F, [g] erunt latera opposita A C, F H, æqualia, & anguli oppositi A C H, A F H, æquales: Sed A C H, est rectus. Igitur & A F H, rectus erit. Eadem ratione ostendemus angulos H, I, G, rectos esse, & latera H I, I G, G F, æqualia esse diametris B D, A C. Quare cùm diametri sint æquales, erunt & quatuor latera F G, F H, H I, I G, æqualia, ideoque F G I H, quadratum erit; cuius quidem latera circulum tangunt, per corollarium propos. 16. lib. 3. Circa datum igitur circulum quadratum descripsimus. Quod erat efficiendum.

e 28. primi.
f 30. primi.
g 34. primi.

## PROBL. 8. PROPOS. 8. 8.

**In dato quadrato circulum describere.**

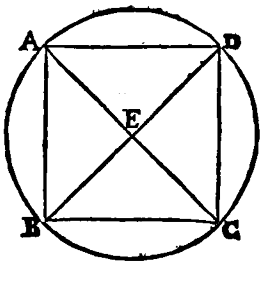


Sit in dato quadrato A B C D, inscribendus circulus. Diuisis lateribus bifariam in E, F, G, H, ducantur rectæ E G, F H, secantes se in I. Quoniam igitur A D, B C, rectæ æquales sunt, & parallelæ, erunt & dimidiæ earum A H, B F, æquales, & parallelæ. [h] Quare & A B, parallela est, & æqualis ipsi F H. Eadem ratione erit D C, parallela, & æqualis eidem F H: Itemque rectæ A D, B C, parallelæ erunt, & æquales ipsi E G. Sunt igitur parallelogramma A I, I B, C I, I D; ideoque rectæ I E, I F, I G, I H, æquales erunt rectis A H, F B, D H, A E: Sunt autem hæ inter se æquales, cùm sint semisses æqualium A D, A B, &c. Quare & rectæ I E, I F, I G, I H, æquales erunt, ac propterea circulus descriptus ex I, ad interuallum I E, transibit quoque per puncta F, G, H, qui cùm contingat latera A B, B C, C D, D A, per coroll. proposit. 16. lib. 3. [i] quòd anguli ad E, F, G, H, sint recti, descriptus erit in quadrato A C. In dato ergo quadrato circulum descripsimus. Quod efficiendum erat.

h 33 primi.
i 29. primi.

## PROBL. 9. PROPOS. 9. 9.

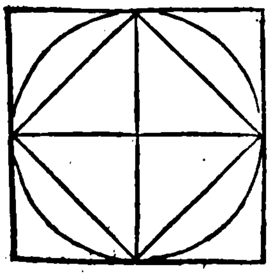
**Circa datum quadratum circulum describere.**




SIT deſcribendus circulus circa quadratum A B C D. Ducantur diametri A C, B D, ſecantes ſe in E. Quoniam igitur latera A B, A D, trianguli A B D, æqualia ſunt; [a] erũt anguli A B D, A D B, æquales: Eſt aũt angulus B A D, rectus. [b] Quare A B D, A D B, ſemirecti erũt. Similiter oſtendemus, reliquos omnes angulos ad A, B, C, D, eſſe ſemirectos, & idcirco inter ſe æquales. Cũ ergo anguli E A D, E D A, ſint æquales; [c] erunt rectæ E A, E D, æquales. Eadem ratione E A, E B, æquales erunt; nec non E B, E C; Item E C, E D. Quare circulus ex E, deſcriptus, interuallo E A, tranſibit per reliqua puncta B, C, D. Circa datum ergo quadratum circulum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

a 5. primi.
b 32. primi.
c 6. primi.

SCHOLIVM.

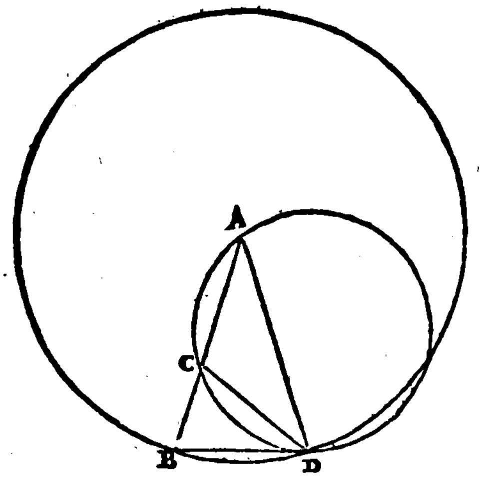


*QVOD ſi circa datum circulum deſcribatur quadratũ, & in eodem circulo aliud quadratum inſcribatur, erit quadratũ circumſcriptum quadrati inſcripti duplum. Quoniam enim latus quadrati circumſcripti æquale eſt diametro circuli, vt ex 7. propoſitione huius libri conſtat, hoc eſt, diametro quadrati inſcripti: quadratum verò diametri duplum eſt quadrati, cuius eſt diameter, vt ad 47. propoſitionem libri primi oſtendimus; Conſtat propoſitum.*

10.

## PROBL. 10. PROPOS. 10.

ISOSCELES triangulum conſtituere; quod habeat vtrumque eorum, qui ad baſin ſunt, angulorum, duplum reliqui.




SVMATVR quæuis recta linea A B, quæ [d] diuidatur in C, ita vt rectangulum ſub A B, B C, æquale ſit quadrato rectæ A C. Deinde centro A, interuallo verò A B, circulus deſcribatur, in quo [e] accommodetur recta B D, æqualis ipſi A C, iungaturque recta A D. Quoniam autem rectæ A B, A D, æquales ſunt, erit triangulum A B D, Iſoſceles. Dico vtrumque angulorum A B D, A D B, duplum eſſe reliqui anguli A. Ducta enim recta C D, [f] deſcribatur circa triangulum A C D, circulus D C A. Quoniam igitur rectãgulum ſub A B, B C, æquale eſt quadrato rectæ B D; & recta A B, ſecat circulum D C A: [g] tanget recta B D, eundem circulum D C A, in D. Quare angulus B D C, [h] æqualis eſt angulo A, in alterno ſegmento C A D. Addito igitur communi C D A, erit totus angulus A D B, æqualis duobus angulis C A D, C D A: Sed his eiſdem [i] æqualis eſt etiã angulus externus B C D. Angulus ergo B C D, æqualis erit angulo A D B, hoc eſt, angulo A B D, [k] cùm A B D, A D B, æquales ſint: ac propterea [l] rectæ C D, B D, æquales erunt. Eſt autem B D, æqualis poſita rectę A C. Igitur & C D, ipſi C A, æqualis erit; [m] ac propterea anguli C A D, C D A, æquales. Angulus igitur A D B, qui æqualis oſtenſus eſt duobus angulis C A D, C D A, duplus erit alterius eorum, anguli nimirum A. Quare & angulus A B D, duplus erit eiuſdem anguli A. Iſoſceles ergo triangulum conſtituimus habẽs, &c. Quod erat efficiendum.

d 11. ſecũdi.
e 1. quarti.
f 5. quarti.
g 37. tertij.
h 32. tertij.
i 32. primi.
k 5. primi.
l 6. primi.
m 5. primi.

COROLLARIVM.

*QVONIAM verò tres anguli trianguli A B D, [a] æquales ſunt duobus rectis, hoc eſt, quinque quintis duorum rectorum; perſpicuum eſt, angulum A, eſſe quintam partem duorum rectorum; vtrumlibet autem B, D, duas quintas partes. Item A, eſſe duas quintas partes vnius recti, & vtrumuis B, D, quatuor quintas partes: quandoquidem omnes tres [b] æquales ſunt duobus rectis, hoc eſt, decem quintis vnius recti.*

a 32. primi.
b 32. primi.

SCHOLIVM.

*POTVISSET proble ma hoc proponi ad inſtar theorematis, hoc modo.*

SI recta linea ſecetur, vt propoſ. 11. lib. 2. traditum eſt; Iſoſceles triangulum, cuius baſis maiori ſegmento æqualis eſt, vtrumuis verò laterum æqualium ipſi datæ lineæ æquale, habet vtrumlibet angulorum æqualium ad baſim, duplum reliqui.

*NON eſt autem quòd ſe excrucient Campanus & Peletarius, vt probent, rectam B D, ita applicari circulo D C A, vt eum nullo modo ſecet. Nam propterea quòd quadratum rectæ B D, æquale eſt rectangulo ſub A B,*

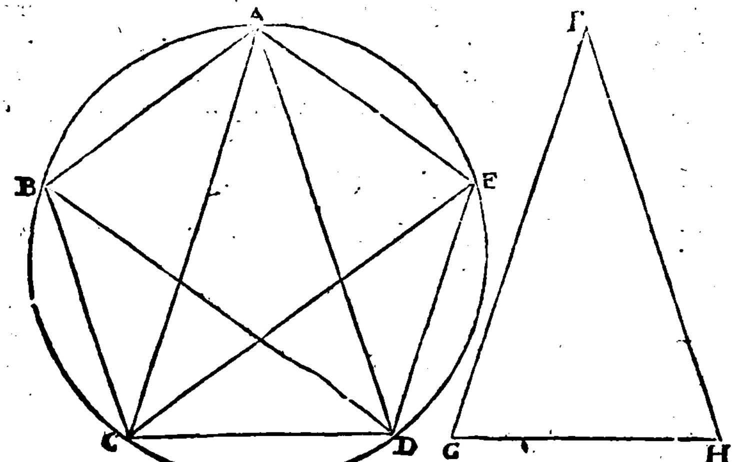
BC,

B C, ostensum est vltima propos. 3. lib. rectam B D, perpendicularem esse ad semidiametrum circuli ex D, ductam. Quare circulum tanget, & nulla ratione secabit.

*Qua arte autem construi debeat triangulum Isosceles, cuius vterius angulorum ad basim, ad reliquum habeat quamcunque proportionem datam, non solum duplam, vt hic ab Euclide factum est, tademus cum Pappo ad finem lib. 6. Qua res hactenus desiderata est.*

## PROBL. II. PROPOS. II. ii.

**In dato circulo, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inscribere.**



Sit in dato circulo A B C D E, inscribendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulũ. [a] Construatur triangulũ Isosceles F G H, ita vt vterque angulorum G, H, duplus sit reliqui F: & in circulo [b] inscribat trianġulum A C D, æquiangulum triangulo F G H, & vterque angulorum A C D, A D C, [c] bifariam diuidatur rectis C E, D B; atque rectę iungantur A B, B C, C D, D E, E A. Dico pentagonũ A B C D E, in circulo dato inscriptum, esse æquilaterũ, & æquiangulum. Cùm enim vterque angulorum A C D, A D C, duplus sit anguli C A D, & diuisus bifariam; erunt quinque anguli A D B, B D C, C A D, D C E, E C A, æquales. [d] Quare arcus A B, B C, C D, D E, E A, super quos ascenderunt, atque idcircò, [e] & rectæ A B, B C, C D, D E, E A, æquales erunt. Æquilaterum est igitur pentagonum A B C D E. Rursus quia arcus A B, E D, æquales sunt; addito communi B C D, fient æquales A B C D, E D C B. [f] Anguli ergo A E D, B A E, dictis arcubus insistentes æquales erunt. Eodem modo æquales erũt cuilibet horum angulorum reliqui anguli. Insistunt enim æqualibus arcubus, quorum singuli externis arcubus æqualibus componuntur. Æquiangulum est ergo pentagonum A B C D E. Quare cum & æquilaterum esse sit ostensum, inscriptum erit in dato circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum: Quod faciendum erat.

a 10. quarti. b 2. quarti. c 9. primi. d 26. tertij. e 29. tertij. f 27 tertij.

### COROLLARIVM.

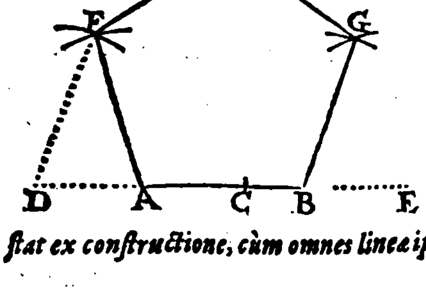
*Seqvitvr hinc, angulum Pentagoni æquilateri, & æquianguli complecti tres quintas partes duorum rectorum; vel sex quintas vnius recti. [a] Cùm enim tres anguli B A C, C A D, D A E, æquales sint, vtpote qui æqualibus arcubus B C, C D, D E, insistant; sit autem C A D, per coroll. præcedentis propositionis quinta pars duorum rectorum, vel duæ quintæ vnius recti; erit totus B A E, tres quintæ duorum rectorum: vel sex quintæ vnius recti.*

a 27. tertij.

### SCHOLIVM.

*Qvod si detur recta linea terminata C D, super ea constituemus pentagonum æquilaterum, & æquiangulum, hoc modo. [b] Fiat triangulum Isosceles F G H, habẽs vtrumlibet angulorum G, H, duplum reliqui anguli F. Deinde constituantur anguli A C D, A D C, æquales angulis G, H, coëantq; rectæ C A, D A, in A, [c] quæ efficient angulum C A D, æqualem angulo F; ac propterea trianguli A C D, vterque angulorũ A C D, A D C, duplus erit reliqui anguli C A D. Iam verò circa triangulum A C D, circulus [d] describatur A B C D E; In quo cùm sit inscriptum triangulum A C D, si anguli A C D, A D C, bifariam secentur, inscribetur, vt prius, pentagonum æquilaterum & æquiangulum, cuius latus est recta C D. Quod est propositum.*

b 10. quarti. c 32. primi. d 5. quarti.



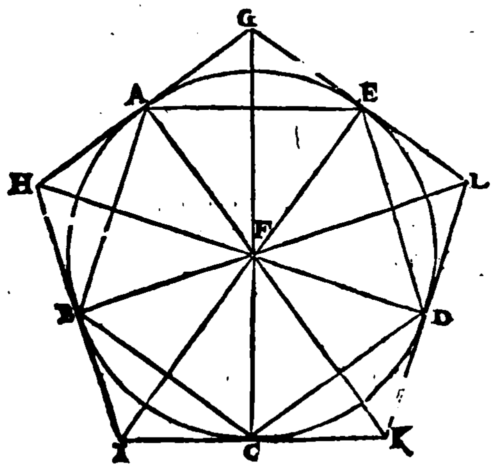
*Facilivs idem efficiemus hac ratione. Secta recta proposita A B, supra quam pentagonum æquilaterum, & æquiangulum constituendum est, in C, vt propos. 11. lib. 2. traditum est, producatur ad vtramque partem, sintq; A D, B E, maiori segmento A C, æquales. Interuallo deinde datæ rectæ A B, ex A, D, duo arcus describantur, secantes sese in F. Item ex B, E, eodem interuallo alij duo se intersecantes in G. Denique ex F, G, eodem interuallo alij duo se diuidentes in H, coniunganturq; rectæ A F, F H, H G, G B. Dico pentagonum A B G H F, super datam rectam A B, descriptum, esse æquilaterum, atq; æquiangulum. Quòd enim sit æquilaterum, constat ex constructione, cùm omnes lineæ ipsi A B, sumptæ sint æquales: hoc est, omnes arcus descripti sint ad in-*

*teruallum A B. Quod autem sit & æquiangulum, ita ostendetur. Ducta recta D F, erit A D F, Isosceles, quale ab Euclide propos. 10. constructum est, vt ex scholio eiusdem propositionis manifestum est, propterea quod basis A D, æqualis est maiori segmento A C, lineæ A B, vtrumuis verò laterum æqualium ipsi A B, æquale. Quare ex coroll. eiusdem propos. 10. angulus D A F, continebit duas quintas duorum rectorum; ac proinde reliquus angulus duorum rectorum, nimirum B A F, reliquas tres quintas duorum rectorum continebit. Cùm ergo ex corollario huius propositionis angulus pentagoni æquilateri, & æquianguli complectatur tres quintas duorum rectorum; erit B A F, angulus pentagoni æquilateri, & æquianguli. Eademq; ratione erit A B G, angulus pentagoni æquilateri, & æquianguli. Ex quo sequitur, totum pentagonum esse æquiangulum. Si enim compleatur, aut concipiatur esse completum, hoc est, super F, G, cogitentur descripta duo alia latera, cadent ea* a 21. primi. *necessariò in punctum H. Alioquin, si supra H, aut infra conuenirent, [a] essent ea vel maiora, vel minora rectis F H, G H, vt constat, si angulo H, subtenderetur basis F G: atque idcirco aliis lateribus F A, A B, B G, æqualia non forent. quod est absurdum. Pentagonum ergo A B G H F, & æquilaterum, & æquiangulum est. Quod erat ostendendum.*

12.

## PROBL. 12. PROPOS. 12.

**CIRCA datum circulum, pentagonũ æquilaterũ, & æquiangulum describere.**



SIT circa datũ circulum A B C D E, describendum pentagonũ æquilaterũ, & æquiangulum. [a] Inscribatur in eo pentagonũ æquilaterum, & æquiangulum A B C D E, & ex centro F, ducantur rectæ F A, F B, F C, F D, F E, ad quas ducantur perpendiculares G H, H I, I K, K L, L G, coeũtes in G, H, I, K, L. Cùm enim anguli G A E, G E A, duobus sint rectis minores, partes nimirum angulorum rectorum F A G, F E G; [b] coibunt rectæ A G, E G, ad partes G, & sic de aliis. Et quia ipsæ tangunt circulum, per coroll. propos. 16. lib. 3. erit descriptum pentagonum G H I K L, circa circulum; quod dico esse æquilaterum, atq; æquiangulum. Ductis enim rectis F G, F H, F I, F K, F L; erũt quadrato rectæ F H, [c] æqualia tam quadrata rectarũ F A, A H, quàm rectarum F B, B H. Quare quadrata rectarum F A, A H, æqualia erunt quadratis rectarum F B, B H. Demptis igitur quadratis æqualibus rectarum æqualium F A, F B, remanebunt quadrata rectarum A H, B H, æqualia; ideoque & rectæ A H, B H, æquales erunt. Quod etiam constat ex coroll. 2. propos. 36. lib. 3. cùm A H, B H, ex eodem puncto H, ducantur circulum tangentes in A, & B. Quoniam ergo latera A F, F H, trianguli A F H, æqualia sunt lateribus B F, F H, trianguli B F H: Est autem & basis A H, basi B H, æqualis, vt ostensum est; [d] erunt anguli A F H, B F H, æquales. Igitur [e] & anguli A H F, B H F. Duplus igitur est angulus A F B, anguli B F H; & angulus A H B, anguli B H F. Eodem modo ostendemus, angulum B F C, duplum esse anguli B F I, & angulum B I C, anguli B I F. Cùm igitur [f] anguli A F B, B F C, sint æquales, quòd insistant circunferentiis A B, B C, [g] quæ æquales sunt, cùm à rectis æqualibus subtendantur A B, B C, erunt & dimidij eorum B F H, B F I, æquales. Quocirca cùm duo anguli B F H, H B F, trianguli B F H, æquales sint duobus angulis B F I, I B F, trianguli I F B, & latus illis adiacens commune B F; [h] erunt & latera B H, B I, æqualia, & anguli B H F, B I F, æquales. Dupla est ergo recta H I, rectæ H B. Eademque ratione ostendemus G H, rectam duplam esse rectæ H A. Sunt autem ostensæ æquales H B, H A. Igitur & earũ duplæ H I, H G, æquales erunt. Similiter demonstrabimus, rectas I K, K L, L G, æquales esse cuilibet rectarum H I, H G. Æquilaterũ ergo est pentagonum G H I K L. Rursus quoniam ostensum est, angulos B H F, B I F, æquales esse, ac semisses angulorum B H A, B I C; erunt & eorum dupli B H A, B I C, æquales. Eademque ratione anguli I K L, K L G, L G H, æquales erunt cuilibet angulorum B H A, B I C. Æquiangulum igitur est pentagonum G H I K L. Quapropter cùm & æquilaterum sit ostensum, descriptum erit circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Quod efficiendum erat.

a 11. quarti.
b 13. pron.
c 47. primi.
d 8. primi.
e 4. primi.
f 27. tertij.
g 28. tertij.
h 26. primi.

### COROLLARIVM.

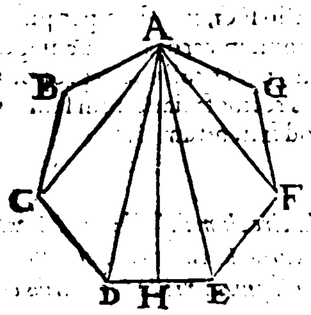
*SEQVITVR ex huius problematis demonstratione, si in circulo quæcunque figura æquilatera, & æquiangula describatur, & ad extrema semidiametrorum ex centro ad angulos ductarum excitentur lineæ perpendiculares: has perpendiculares constituere aliam figuram totidem laterum, & angulorum æqualiũ circulo circumscriptam. Eadem enim semper ratione demonstrabitur, illas perpendiculares concurrere, angulósque conficere æquales: si nimirum ab illis ad centrum ducantur rectæ, vt in pentagono factum est: quæ quidem ipsos angulos*

*angulos bifariam secabunt; quemadmodum in pentagono hic probatum est, &c.*

### *SCHOLIVM.*

*HVC referendum est theorema sequens ad figuras æquilateras, & æquiangulas spectans, quod perutile erit ad inuenienda centra circulorum circa ipsas figuras, siue intra ipsas describendorum, vt ex sequentibus patebit.*

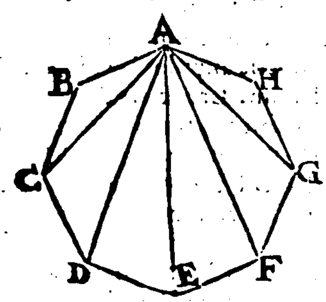
IN figura æquilatera, & æquiangula, si quidem angulorum numerus impar est, recta linea ex quouis angulo demissa secans oppositum latus bifariam, diuidit quoque angulum bifariam; Et contrà, recta linea diuidens angulum bifariam, secat quoque latus oppositum bifariam: Si verò numerus angulorum est par, recta linea ex quouis angulo ad oppositum angulum ducta secat vtrumque angulum bifariam; Et contrà, recta linea secans quemuis angulum bifariam, cadit in oppositum angulum, eumque bifariam quoque diuidit.




*SIT primùm figura æquilatera, æquiangulaq́; imparium laterum ABCDEFG, & ex angulo A, demissa recta AH, secet latus oppositum DE, bifariam. Dico angulum quoque BAG, sectum esse bifariam. Ductis enim ex A, rectis ad omnes angulos non proximos; quoniam duo latera BA, BC; duobus lateribus GA, GF, æqualia sunt, angulosq́; continent æquales, ex hypothesi; [a] erunt & bases AC, AF, æquales, & tam anguli BAC, GAF, quàm BCA, GFA; ac proinde cũ toti anguli BCD, GFE, ponantur æquales; erunt quoq; reliqui ACD, AFE, æquales. Quia igitur rursus duo latera CA, CD, duobus lateribus FA, FE, æqualia sunt, continentq́; angulos æquales, vt ostensum est; [b] erunt & bases AD, AE, æquales, & tam anguli CAD, FAE, quàm CDA, FEA. Atque ita procedendum erit, donec ad latus oppositum peruentum sit. Vbi quia rursus toti anguli CDE, FED, æquales sunt, erunt quoque reliqui ADH, AEH, æquales. Quare cùm duo latera DA, DH, duobus lateribus EA, EH, æqualia sint, angulosq́; æquales contineãt, [c] erunt etiam anguli DAH, EAH, æquales. Quocirca cùm quotuis anguli BAC, CAD, DAH, totidem angulis GAF, FAE, EAH, sint æquales, singuli singulis; erit quoq; totus angulus BAH, toti angulo GAH, æqualis; ac proinde angulus BAG, sectus erit bifariam. Quod est propositum.*

a 4. primi.
b 4. primi.
c 4. primi.

*SED iam recta AH, secet angulum BAG, bifariam. Dico eam secare quoque latus oppositum DE, bifariam. Si enim dicatur latus DE, non secari bifariam, si ex A, ducatur alia recta secans DE, bifariam, secabit eadem & angulum BAG, bifariam, vt iam ostendimus. Duæ igitur rectæ eundem angulum BAG, secabunt bifariam. quod est absurdum, cùm vna medietas maior esset, quàm altera. Recta ergo AH, secans angulum BAG, bifariam, secat quoq; latus DE, bifariam. Quod est propositum.*




*SIT deinde figura æquilatera & æquiangula parium laterum ABCDEFGH, & ex angulo A, ad angulum oppositum E, ducatur recta AE. Dico rectam AE, secare tam angulum BAH, quàm angulum DEF, bifariam. Ductis enim ex A, ad omnes angulos non proximos rectis; demonstrabimus, vt in antecedente figura quotuis angulos BAC, CAD, DAE, totidem angulis HAG, GAF, FAE, esse æquales, singulos singulis; ideoq́; totum angulum BAE, toti angulo HAE, æqualem esse, nec non & angulum DEA, FEA, esse æqualem. Vterque igitur angulus BAH, DEF, secatur bifariam. Quod est propositum.*

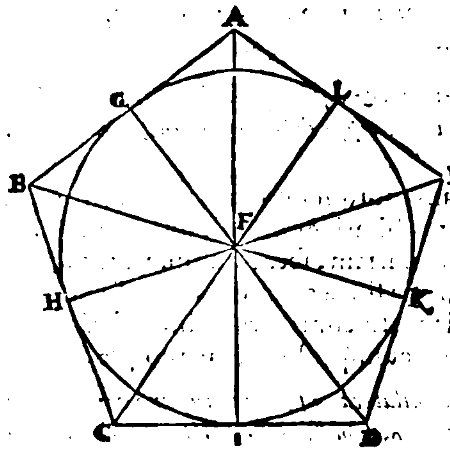
*SED recta iam AE, secet angulum BAH, bifariam. Dico eam cadere in angulum oppositum E, eúmque diuidere bifariam. Si enim non dicatur cadere in E, si ex A, ad E, ducatur alia recta, secabit ea angulum BAH, bifariam, vt iam ostendimus. Duæ igitur rectæ eundem angulum BAH, bifariam secabunt, quod est absurdum. Recta ergo AE, secans angulum BAH, bifariam, cadit in E, secátque propterea, vt demonstratum est proximè, angulum DEF, bifariam quoque. Quod est propositum.*

## PROBL. 13. PROPOS. 13. 13.

IN dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inscribere.

SIT inscribendus circulus in dato pentagono ABCDE. [a] Diuidantur duo eius anguli BAE, ABC, proximi bifariam rectis AF, BF, quæ coeant in F. Cùm enim ex scholio præcedentis propositionis rectæ AF, BF, secent opposita latera CD, DE, bifariam, necesse est, duas rectas AF, BF, se mutuò intra pentagonum secare, priusquam rectis CD, DE, occurrant. Connectantur deinde rectæ FC, FD, FE. Quoniam igitur latera AB, BF, trianguli ABF, æqualia sunt lateribus CB, BF, trianguli CBF: Sunt autem ex constructione, & anguli ipsis contenti æquales ABF, CBF; [b] erunt bases AF, CF, & anguli BAF, BCF, æquales. Cùm igitur anguli BAE, BCD, po-

*a 9. primi.*
*b 4. primi.*




ftantur æquales, & B A F, dimidiũ ſit anguli B A E, per conſtructionem; erit & B C F, dimidum anguli B C D. Diuiſus eſt ergo angulus B C D, bifariam. Simili modo oſtendemus, reliquos duos angulos C D E, D E A, diuiſos eſſe bifariam. Ducantur iam ex F, ad ſingula pentagoni latera perpendiculares F G, F H, F I, F K, F L. Quoniam igitur duo anguli F G A, F A G, trianguli F A G, æquales ſunt duobus angulis F L A, F A L, trianguli F A L, eſtque latus A F, ſubtenſum vni æqualium angulorum, commune; [a] erunt & rectæ F G, F L, æquales. Similiterque oſtendentur reliquæ perpendiculares F H, F I, F K, æquales cuilibet iſtarũ. Circulus igitur deſcriptus ex centro F, & interuallo F G, tranſibit per puncta quoque H, I, K, L. Quoniam verò latera pentagoni circulum hũc tangunt, per corollarium propoſ. 16. lib. 3. eò quòd angulos rectos faciant cum ſemidiametris F G, F H, &c. erit circulus in dato pentagono inſcriptus. Quod faciendum erat.

a 26. primi.

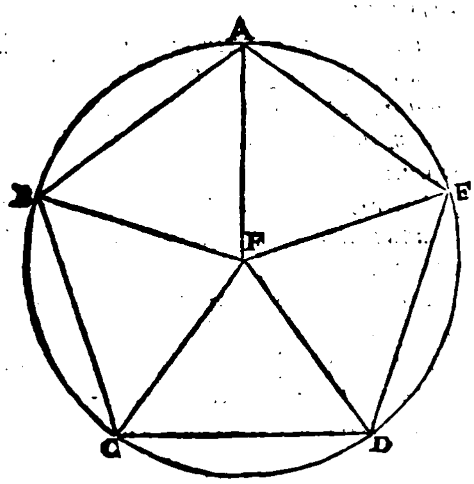
*SCHOLIVM.*

*EADEM prorſus arte in quacunque figurâ æquilatera, & æquiangula circulum deſcribemus. Semper enim oſtendemus, diuiſis duobus angulis proximis bifariam, ſi ex puncto concurſus linearum angulos diuidentium perpendiculares ducantur ad latera, eas inter ſe eſſe æquales: ac proinde punctum illud concurſus centrum eſſe circuli inſcribendi. Concurrent autem neceſſariò intra figuram duæ illæ rectæ, quæ angulos duos proximos ſecant bifariam: propterea quòd in figura imparium laterum diuidunt latera oppoſita bifariam, in figura verò parium laterum angulos oppoſitos bifariam, vt in ſcholio antecedentis propoſ. oſtenſum eſt.*

14. 

## PROBL. 14. PROPOS. 14.

CIRCA datum pentagonũ æquilaterum & æquiangulum circulum deſcribere.




SIT circa pentagonum A B C D E, æquilaterum & æquiangulũ, circulus deſcribendus. Diuiſis duobus angulis B A E, A B C, bifariam rectis A F, B F, quæ coeant in F, intra pentagonum, vt in antecedente propoſitione demonſtratum eſt; & coniunctis rectis F C, F D, F E, oſtendemus, vt in præcedenti problemate, reliquos etiã angulos B C D, C D E, D E A, ſectos eſſe bifariam. Erunt ergo omnes anguli dimidij inter ſe æquales, ꝗ toti anguli æquales ponantur. Quoniam igitur in triangulo A F B, duo anguli æquales ſunt F A B, F B A; [b] erunt rectæ F A, F B, æquales. Eademque ratione erunt reliquæ F C, F D, F E, cuilibet iſtarum æquales. Quare circulus deſcriptus ex centro F, interuallo autem F A, tranſibit quoque per puncta B, C, D, E. Circa datum ergo pentagonum, &c. Quod faciendum erat.

b 6 primi.

*SCHOLIVM.*

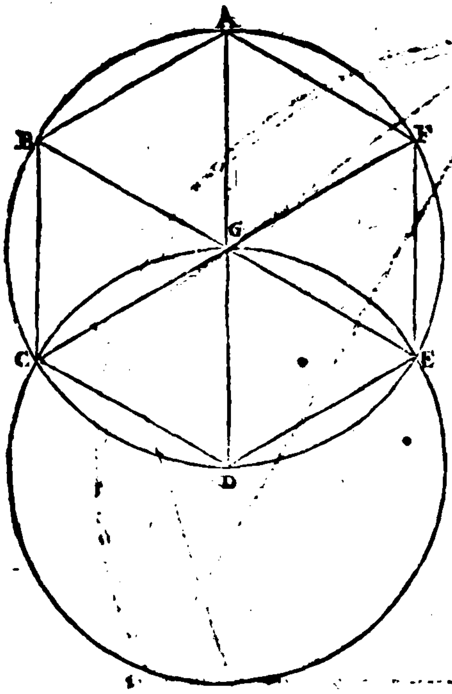
*EODEM prorſus artificio circa quamlibet figuram æquilateram, & æquiangulam circulum deſcribemus. Semper enim oſtendemus diuiſis duobus angulis proximis bifariam, rectas ex puncto concurſus linearum angulum diuidentium ad angulos figuræ ductas, inter ſe eſſe æquales: ac propterea punctum illud concurſus centrum eſſe circuli circumſcribendi, vt in ſcholio præcedentis propoſitionis diximus.*

15. 

## PROBL. 15. PROPOS. 15.

IN dato circulo, hexagonum & æquilaterum, & æquiangulum inſcribere.

SIT in dato circulo A B C D E F, cuius centrum G; inſcribendum hexagonum æquilaterum, & æquiangulum. Ducta diametro A D, deſcribatur circulus ex centro D, interuallo verò D G, qui ſecet circulum datum in punctis C, & E, è quibus per centrum G, rectæ extendantur C F, E B. Si igitur connectantur rectæ A B, B C, C D, D E, E F, F A, inſcriptum erit in dato circulo hexagonum A B C D E F; quod dico eſſe & æquilaterũ, & æquiangulum. Cùm enim recta G C, æqualis ſit rectæ G D, & recta D C, æqualis eidem rectæ D G, ex definitione circuli; erunt & rectæ




rectæ G C, D C, æquales inter se: Ideoque triangulum C D G, erit æquilaterum. Quare [a] tres anguli C G D, G D C, D C G, æquales inter se erunt: qui cum [b] æquales sint duobus rectis, erit quilibet illorum, nempe C G D, tertia pars duorum rectorum. Eodem modo erit angulus D G E, tertia pars duorum rectorum. Sunt autẽ tres anguli C G D, D G E, E G F, [c] æquales duobus rectis. Reliquus igitur angulus E G F, tertia quoque pars erit duorum rectorum. Sunt ergo tres anguli C G D, D G E, E G F, inter se æquales; quibus cum etiam [d] æquales sint ad verticem anguli F G A, A G B, B G C; erunt sex anguli ad centrum G, æquales. [e] Quare circunferentiæ, quibus insistunt, [f] ac propterea rectæ A B, B C, C D, D E, E F, F A, æquales erunt. Quapropter æquilaterum est hexagonum A B C D E F. Rursus quia circunferentia B C, æqualis est circunferentiæ A F; si addatur communis C D E F, erunt circunferentiæ B C D E F, A F E D C, æquales. Anguli igitur ipsis insistentes B A F, A B C, [g] æquales erunt. Similiterque ostendemus, reliquos angulos B C D, C D E, D E F, E F A, æquales esse cuilibet istorum, quia nimirum quilibet insistit arcui composito ex quatuor arcubus æqualibus, nimirum ex tot, quot latera continet figura inscripta, demptis duobus. Ex quo fit, angulos omnes æqualibus arcubus insistere. Quare æquiangulum quoque est hexagonum A B C D E F. In dato ergo circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum descripsimus. Quod faciendum erat.

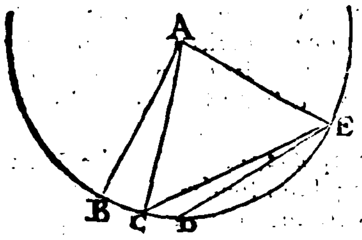
[a] 5 primi.
[b] 32. primi.
[c] 13. primi.
[d] 15. primi.
[e] 26. tertij.
[f] 29. tertij.
[g] 27. tertij.

## COROLLARIVM.

*Hinc manifestum est, hexagoni latus æquale esse semidiametro circuli. Nam D C, latus hexagoni, æquale est semidiametro D G, ex definitione circuli.*

## SCHOLIVM.

*Caeterum per ea, quæ dicta sunt de pentagono, propositione duodecima, decimatertia, & decimaquarta, describemus hexagonum æquilaterum, & æquiangulum circa datum circulum. Item in dato hexagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribemus, & denique circa idem hexagonum describemus circulum. Nam, vt hexagonum circulo circumscribatur, inscribendum prius erit hexagonum intra circulum, vt hac propositione decimaquinta docuit Euclides. Si verò circulus vel in hexagono, vel circa hexagonum describendus sit, diuidendi erunt duo anguli proximi bifariam. Reliqua deinde perficienda, vt propositione duodecima, decimatertia, decimaquarta traditur.*




*Porro ex his quoque facilè demonstrabimus, dari posse triangulum Isosceles oxygonium, cuius tertium latus vtrouis æqualium maius sit; siue in quo vtrumuis laterum æqualium tertio minus sit. Id quod ad definitionem vigesimamoctauam libri primi admonuimus. Sit enim A, centrum circuli B C D E, in quo sexta pars sit D E, & quarta B E. [a] Erit ergo subtensa D E, semidiametro æqualis. Et si ex quouis puncto C, inter B, & D, ad E, recta ducatur C E; erit hac maior, quàm D E, ex scholio propositionis vigesimanona libri tertij, hoc est, maior, quàm semidiameter. Quare iunctis duabus semidiametris A C, A E, erit triangulum A C E, Isosceles, cuius tertium latus C E, vtrouis æqualium A C, A E, maius est. Dico idem esse oxygonium. Quoniam enim [b] anguli A C E, A E C, æquales sunt, [c] & simul duobus rectis minores, erit vterque acutus. Ducta item recta A B, erit angulus B A E, quadranti B E, in centro insistens rectus, ex scholio propositionis vigesimaseptima libri tertij: ac proinde C A E, acutus erit. Oxygonium ergo est Isosceles triangulum A C E, habens tertium latus C E, vtrolibet æqualium maius. Quod est propositum.*

[a] 15. quarti.
[b] 5. primi.
[c] 17. primi.

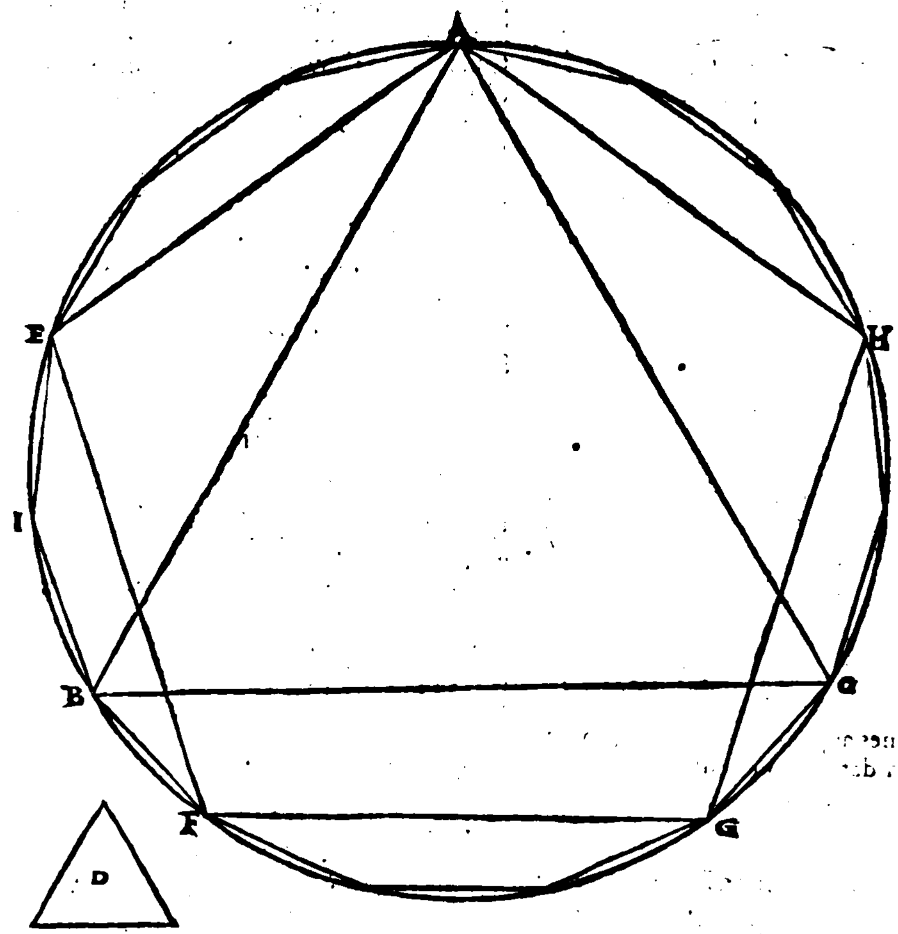
## PROBL. 16. PROPOS. 16.

16.

**In dato circulo, quintidecagonum & æquilaterum, & æquiangulum describere.**

Sit in dato circulo A B C, inscribendum Quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Constituto triangulo æquilatero D, quod ex corollario propos. 6. lib. 1. erit etiam æquiangulum; [a]

[a] 2. quarti.




inſcribatur ei æquiangulum triangulum A B C, in dato circulo, quod etiam erit æquilaterum, ex
a 26. vel 28. tertij. corollario propoſ. 6. lib. 1. [a] eruntque tres arcus A B, B C, C A, æquales, vel propter tres rectas A B, B C, C A, æquales, vel propter tres æquales angulos A, B, C, trianguli A B C. Qualium igitur partium æqualium quindecim eſt circunferentia tota A B C, talium quinque erit arcus A B, qui ter-
b 11. quarti. tia pars eſt totius circunferentiæ. [b] Inſcribatur rurſus in dato circulo pentagonum æquilaterum,
c 28. tertij. & æquiangulum A E F G H, applicans vnum angulorum ad punctum A; [c] eruntque quinque arcus A E, E F, F G, G H, H A, æquales. Qualium igitur partium æqualium quindecim eſt tota circunferentia A B C, talium trium erit arcus A E, quinta pars exiſtens totius circunferentiæ. Itaque cùm arcus A B, contineat tales partes quinque, & arcus A E, tres; continebit reliquus arcus
d 30. tertij. E B, duas. [d] Diuiſo ergo arcu E B, bifariam in I, erit arcus B I, pars decimaquinta totius circunferentiæ. Quare ducta recta B I, ſubtendet decimamquintam partem totius circunferentiæ; cui ſi a-
e 1. quarti. liæ quatuordecim, [e] æquales in circulo accommodentur, inſcriptum erit in circulo quintidecago-
f 27. tertij. num æquilaterum, quod [f] & æquiangulum eſt, cùm eius anguli ſubtendant arcus æquales, compoſitos videlicet ex 13. arcubus æqualibus omnes, vt perſpicuum eſt. In dato igitur circulo quintidecagonum, &c. Quod faciendum erat.

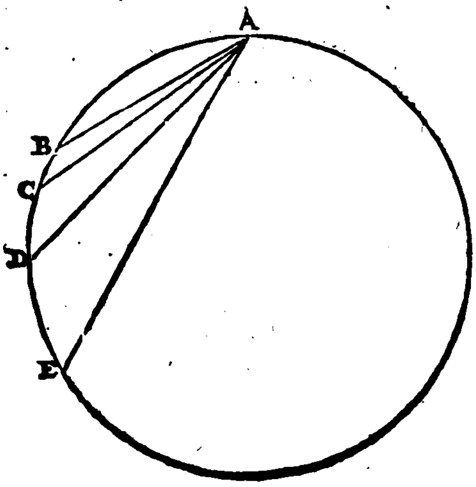
Similiter autem per ea, quæ dicta ſunt de pentagono ſuprà, propoſ. 12. 13. & 14. deſcribemus circa datum circulum quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Item in dato quintidecagono æquilatero, & æquiangulo circulum inſcribemus; & tandem circa datũ quintidecagonum deſcribemus circulum.

## SCHOLIVM.

*Ex huius problematis ſtructura, atq; demonſtratione colligi poteſt methodus, atq; ars quædam, qua infinita propemodum figuræ in dato circulo inſcribantur. Nam quia recta A B, denominatur à ternario, quòd ea ſit latus trianguli æquilateri, & recta A E, à quinario, quòd ea ſit latus pentagoni; ſi multiplicentur 3. cum 5. efficientur 15. Quare ex illis duobus lateribus in circulo deſcriptis, inſcribetur in eodem figura 15. laterum, angulorumq; æqualium, hac ratione. Denominator lateris A B, hoc eſt, 3. exceditur à denominatore lateris A E, id eſt, à 5. binario. Igitur arcus B E, continebit duo latera figuræ prædictæ; Ideoq; diuiſo arcu B E, bifariam in I, erit ſubtenſa recta B I, latus figuræ 15. laterum, angulorumque æqualium, vt demonſtratum fuit. Hac ferè arte vſus eſt Euclides in deſcribendo Quintidecagono intra circulum. Ex qua licebit nobis inferre huiuſmodi Theorema.*

Si in circulo ab eodem puncto inſcribantur duo latera duarum figurarum æquilaterarum,

rum, & æquiangularum; continebit arcus inter illa latera inclusus tot latera alterius figuræ inscribendæ in eodem circulo, quot vnitatibus inter se differũt denominatores eorundem laterum: Continebit autem figura inscribenda tot latera, angulosque æquales, quot vnitates sunt in numero, qui ex multiplicatione denominatorum producitur.




*INSCRIBANTVR in circulo A B C D E, initio semper facto à puncto A, plurima latera; Hexagoni quidẽ A B, pentagoni verò A C, & quadrati A D, trianguli denique æquilateri A E. Quoniam igitur denominator lateris A B, nimirum 6. excedit denominatorem lateris A C, nempe 5. vnitate; continebit arcus B C, inter ea latera inclusus vnũ latus figuræ 30. laterum, angulorumq; æqualium. Nam ex multiplicatione 5. cum 6. producuntur 30. Hoc autem ita esse, sic demonstrabitur. Qualium partium æqualium 30. est tota circunferentia, talium 5. est arcus A B, sexta pars circunferentiæ; & talium 6. est arcus A C, quinta pars circunferentiæ. Igitur arcus B C, vnam talem continebit partem.*

*PARI ratione arcus B D, continebit duo latera figuræ 24. laterum, angulorúmque æqualium. Nam denominator lateris A B, videlicet 6. superat dominatorem lateris A D, nimirum 4. binario; & ex multiplicatione 4. in 6. fiunt 24.*

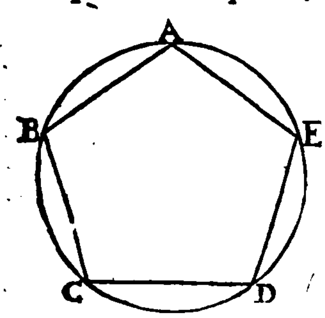
*ITA quoque arcus B E, comprehendet tria latera figuræ 18. laterum.*

*ARCVS verò C D, complectetur vnum latus figuræ 20. laterum.*

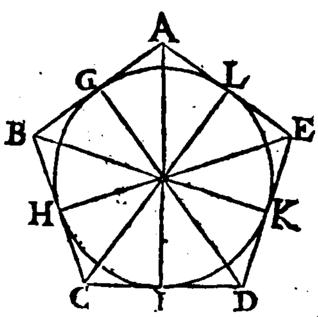
*ARCVS autem C E, duo latera figuræ 15. laterum.*

*ASCVS denique D E, continebit vnum latus figuræ 12. laterum, angulorumq; æqualium. Hac itaq; arte, ac methodo inuestigabuntur ferè infinitarum figurarum latera.*

NON est autem prætereundum hoc loco, omnem quidem figuram æquilateram circulo inscriptam, esse quoque æquiangulam: at non omnem figuram æquilateram circulo circumscriptam necessariò æquiangulam quoque esse, nisi quando numerus angulorum ipsius est impar; vel si par est, quando duo anguli proximi æquales sunt, vel duo nõ proximi, dummodo vno eorum primo posito, alter occupet locum parem quemcunque, vt quartum, (si enim secundum occuparet, esset primo proximus. quod est contra hypothesim.) sextum, octauum, decimum, &c. Qua in re nõnulli hallucinati sunt, putantes omnem figuram æquilateram circulo circumscriptam, necessariò esse quoque æquiangulam: Inter quos est Campanus, Euclidis non obscuri nominis interpres.




*SIT enim figura æquilatera, quotcunque angulorum A B C D E, circulo inscripta. Dico eam necessariò esse quoq; æquiangulam. Cùm enim latera A B, B C, C D, sint æqualia,[a] erunt arcus quoq; A B, B C, C D, æquales: ac proinde & totus arcus A B C, toti arcui B C D, æqualis erit. Reliqui ergo A D C, B E D, in eodem circulo æquales erunt. Quocirca[b] anguli A B C, B C D, illis insistentes æquales erunt: Eodemq; modo omnes anguli ostendentur esse æquales, quotquot illi sint; ac propterea figura A B C D E, æquiangula est, siue angulorum numerus sit par, siue impar. Quod ostendendum erat.* a 28. tertij. b 27. tertij.



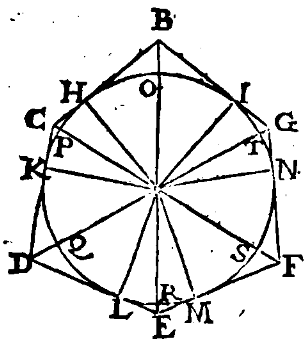

*SIT rursus figura æquilatera A B C D E, quotlibet angulorum numero imparium circulo, cuius centrum F, circumscripta. Dico enim necessariò esse quoq; æquiangulam. Ductis enim ex F, centro ad omnes angulos, & ad puncta contactuum, rectis,[c] erunt hæ ad latera perpendiculares. Et quoniam tangentes A G, A L, ex coroll. 2. propos. 36. lib. 3. æquales sunt; erunt duo latera A G, A F, duobus lateribus A L, A F, æqualia. Cùm ergo & bases F G, F L, ex centro sint æquales;[d] erunt & anguli ad A, æquales: ac proinde angulus B A E, diuisus erit bifariam. Non aliter ostendemus, reliquos omnes angulos figuræ sectos esse bifariam. Rursus quia duo latera A B, B F, duobus lateribus C B, B F, æqualia sunt, angulíq; illis contenti, ostensi æquales;[e] erunt quoq; bases A F, C F, & anguli B A F, B C F, æquales. Cùm ergo hi anguli sint semisses angulorum B A E, B C D, vt ostensum est, erunt toti anguli B A E, B C D, quoque æquales. Eadem ratione erit recta C F, rectæ E F, & angulus B C D, angulo D E A, æqualis: Atque ita deinceps, si figura plures habeat angulos, erit semper tertius quisque angulus ei, à quo tertius est, vno relicto in medio, æqua-* c 18. tertij. d 8. primi. e 4. primi.

lis: hoc est, primus (constitui autem potest primus quicunque angulus) æqualis erit tertio, tertius quinto, quintus septimo, septimus nono, &c. Atque ita omnes anguli in locis imparibus positi, æquales inter se erunt: Eademque ratione omnes anguli parium locorum, vt secundus, quartus, sextus, octauus, decimus, &c. æquales inter se erunt; cùm quartus sit à secundo tertius, & sextus à quarto tertium quoque locum occupet, &c. Itaque quoniam figura proposita habet numerum angulorum imparem, erit primus angulus, qui æqualis ostensus est omnibus angulis locorum imparium, æqualis vltimo angulo impari, qui primo proximus est. Hic autem vltimus angulus erit eadem ratione secundo angulo æqualis, qui tertius est ab vltimo, primo relicto in medio; & omnibus alijs à secundo tertium locum occupantibus, vt quarto, sexto, octauo, decimo, &c. vsque ad penultimum. Quapropter omnes anguli figuræ propositæ inter se æquales erunt. Quod erat ostendendum.

HAEC demonstratio in figuris æquilateris circulo circumscriptis, quæ habent numerum angulorum parem, locum non habet. Ex ea enim solùm concludetur, primum angulum æqualem esse tertio, quinto, septimo, nono, & alijs loca imparia occupantibus; nunquam autẽ probabitur, primum vltimo esse æqualem, eò quòd vltimus locum parem occupet, vt in quadrangulo quartum, in hexagono sextum, in octogono octauum, &c. Sic etiam solùm ex eadem demonstratione colligetur, angulum secundum æqualem esse quarto, sexto, octauo, decimo, & alijs loca paria occupantibus; nunquam autem ostendetur, secundum angulum esse primo æqualem, propterea quòd primus locum imparem occupat. Itaque soli anguli imparium locorum inter se, & soli quoque anguli locorum parium inter se semper conuincentur æquales.

QVOD si duo anguli proximi, vel etiam duo non proximi, dummodo vnus eorum in loco impari, alter verò in loco pari collocatus sit, fuerint inter se æquales, tum demum per superiorem demonstrationem concludetur omnium angulorum æqualitas. Nam si primus angulus æqualis sit secundo, (quando enim duo anguli proximi sunt æquales, licebit vnum eorum dicere primum, & alterũ secundum,) cùm ostensum sit, primum esse æqualem quoque omnibus angulis loca imparia occupantibus: secundum verò omnibus parium locorum; erunt omnes inter se æquales. Si autem primus angulus æqualis sit alicui locum parem occupanti, (quando enim duo anguli non proximi sunt æquales, quorum vnus in loco impari, & alter in loco pari existat, dicere licebit eorum vnum primum, & alterum vel quartum, vel sextum, vel octauum, &c. prout ab illo distiterit, non autem secundum, quia secundus primo proximus est.) cùm primus ostensus sit æqualis omnibus alijs locorum imparium, alter verò omnibus parium locorum, atque adeò & secundo angulo; erit quoque primus secundo æqualis: hoc est, duo proximi inter se æquales erunt. Quam ob rem, vt proximè demonstrauimus, omnes anguli inter se erunt æquales.

VERVM si dicat forsan aliquis, quanquam ex ea demonstratione colligi nequeat, omnẽ figuram æquilateram, cuius angulorum numerus sit par, circulo circumscriptum, esse quoque æquiangulam; non colligi tamen contrarium: ac proinde eam posse esse æquiangulam, non quidem propter illam demonstrationem, sed propter quampiam aliam; adeò vt nulla dari possit figura æquilatera circulo circumscripta, quin simul sit æquiangula, vt Campanus cum nonnullis alijs asseruit. Si, inquam, aliquis ita dicat, respondemus, infinitas figuras æquilateras angulorum numero parium circumscriptas circulo, nõ esse æquiangulas. Sit enim circulus ex centro A, descriptus, cuius circunferentia tribus diametris B E, C F, D G, in sex partes æquales O P, P Q, Q R, R S, S T, T O, diuidatur, quemadmodum propos. 15. in descriptione hexagoni traditum est. Deinde arcus O P, secetur inæqualiter in H, sitque maius segmentum O H, & minus P H. Arcui quoque O H, æquales sumantur O I, Q K, Q L, S M, S N, ita vt sex arcus æquales ad vtrasque partes trium semidiametrorum nõ proximorum, sed inter binas singulis relictis in medio, sumantur. Eruntque ad vtrasque partes semidiametrorum relictarum sex reliqui arcus P H, P K; R L, R M; T N, T I, æquales. Ductis item ex centro A, ad puncta H, K, L, M, N, I, rectis lineis, ducatur per H, ad H A, perpendicularis B C, secans semidiametros A O, A P, productas in B, C, quæ circulum tanget in H, ex coroll. propos. 16. lib. 3. Coibunt autem necessariò rectæ H B, A B, propterea quòd duo anguli B H A, B A H, duobus rectis minores sunt.




Est enim B H A, rectus, & B A H, insistens arcui O H, qui minor est quadrante, minor recto, ex scholio propos.
a 27. tertij. 27. lib. 3. Iungatur quoque recta B I. Et quia duo latera A H, A B, duobus lateribus A I, A B, æqualia sunt, [a] an-
b 4. primi. gulosque continent æquales æqualibus arcubus O H, O I, insistentes; [b] erunt quoque bases B H, B I, & anguli H I, æquales. Cùm ergo B H A, rectus sit ex constructione, erit & B I A, rectus: ac propterea recta B I, circulum tanget in I, conuenietque cum semidiametro A T, producta in G, ob angulos A I G, G A I, duobus rectis minores. Est namque A I G, ostensus rectus, at G A I, recto minor est, ex scholio propos. 27. lib. 3. ob arcum T I, quadrante minorem. Et quoniam duo anguli I, A, trianguli G A I, duobus angulis H, A, trianguli C A H, æquales sunt; (Nam
d 27. tertij. I, H, recti sunt, [c] & G A I, C A H, æquales sunt insistentes æqualibus arcubus T I, P H.) lateraque A I, A H, qui-
e 26. primi. bus adiacent, æqualia; [d] erunt quoque latera G I, G A, lateribus H C, C A, æqualia. Cùm ergo & B I, ipsi B H, ostensa sit æqualis; erit tota B G, toti B C, æqualis. Eadem ratione, ducta recta G N, tanget circulum in N, coibitque cum semidiametro A F, producta in F, eritque ipsi G B, æqualis. Item iuncta recta F M, circulum tanget in M, & cum semidiametro A R, producta conueniet in E, ipsique F G, æqualis erit. Similiter ducta recta E L,

tanget

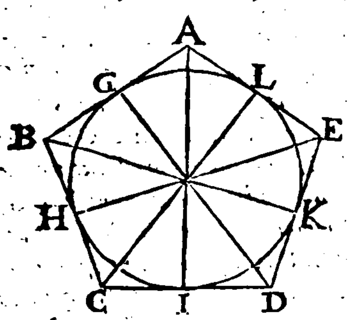
tanget circulum in L, & semidiametro A Q, protracta occurret in D; ipsiq; E F, fiet æqualis. Denique iuncta recta D K, eundem circulum tanget in K, & cum semidiametro A P, producta concurret in C; fietq; ipsi D E, æqualis. Quòd autem D K, in eodem puncto C; occurrat semidiametro A P, in quo recta B H, eidem occurrit, manifestum est. Si enim in alio puncto eam secaret, cum ducta recta C K, circulum tangeret in K, vt demonstratum est, tangerent duæ rectæ circulum in eodem puncto K; atq; adeò inter peripheriam, & tangentem interciperetur ad punctum contactus vna linea recta: quod fieri non posse, [a] Euclides demonstrauit. Est ergo hexagonum B C D E F G, circulo circumscriptum, æquilaterum. At idem esse non æquiangulum, ita demonstrabimus. Quoniam figura B C D E F G, æquilatera est, erũt quidem per ea, quæ paulò ante monstrauimus, anguli locorum imparium, nimirum B, D, F, inter se, & anguli locorum parium, vt C, E, G, inter se æquales; omnesq; secti erunt bifariam à semidiametris: At quia tres anguli trianguli A B H, [b] tribus angulis trianguli A C H, æquales sunt; ablatis rectis ad H, erunt reliqui duo reliquis duobus æquales. Est autem B A H, maior quàm C A H, ex scholio propos. 27. lib 3. quod & arcus O H, maior sit arcu P H. Igitur reliquus A B H, reliquo A C H, minor erit: qui cùm semisses sint totorum angulorum B, C, vt ostensum est; erit totus quoq; C B G, toto B C D, minor. Eodemq; modo toti anguli D, F, totis angulis E, G, minores ostendentur. Non est ergo hexagonum B C D E F G, æquiangulum. Quod erat ostendendum.

a 16 tertij. b 32. primi.

EADEM omnino constructio, & demonstratio fieri potest in octogono, decagono, & alijs figuris parium laterum, si circulus quatuor diametris secetur in 8. partes, vel quinque diametris in 10. &c.

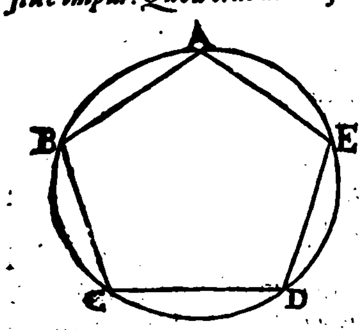
QVOD si figura æquilatera quotcunq; angulorum circulo circumscribatur per doctrinam propos. 12. descripta nimirum prius simili figura intra circulum, & ductis lineis circulum tangentibus in figuræ inscriptæ angulis, &c. vt factum est in pentagono propos. 12. tum necessariò figura illa erit simul æquiangula, vt ex demonstratione eiusdem propos. liquidò constat.

OBSERVATIONE quoque dignum est, omnem quidem figuram æquiangulam circulo circumscriptam, esse etiam æquilateram: at non omnem figuram æquiangulam circulo inscriptam necessariò æquilateram quoq; esse, nisi quando numerus laterum ipsius est impar; vel si par est, quando duo latera proxima æqualia sunt, vel duo nõ proxima, dummodo, vno eorum posito primo, alterum occupet locum parem quemcunque, vt quartum, (si enim secundum occuparet, esset primo proximum, quod est contra hypothesim.) sextum, octauum, decimum, &c. Qua in re facilè etiam quis hallucinari possit.




SIT enim figura æquiangula A B C D E, quotuis laterum circulo, cuius centrum F, circumscripta. Dico eam esse quoque necessariò æquilateram. Ductis enim ex F, centro ad puncta contactũ rectis F G, F H, F I, F K, F L, [c] quæ ad latera figuræ sunt perpendiculares; emittantur quoque ex centro F, ad angulos figuræ rectæ F A, F B, F C, F D, F E. Et quoniam tangentes A G, A L, ex 2. coroll. propos. 36. lib. 3. æquales sunt, erũt duo latera A G, A F, trianguli A G F, duobus lateribus A L, A F, trianguli A L F, æqualia. Sunt autem & bases F G, F L, ex centro æquales. [d] Igitur anguli quoque ad A, illis lateribus comprehensi æquales sunt, ideoq; angulus B A E, sectus est bifariam. Non aliter ostendemus, reliquos angulos figuræ bifariam sectos esse: ac proinde cùm toti anguli ponantur æquales, & eorum semisses æquales erunt. Quocirca duo anguli A, G, trianguli A F G, duobus angulis B, G, trianguli B F G, æquales erunt. Est autem latus F G, vni æqualium angulorum oppositum, commune. [e] Igitur latera quoq; A G, B G, æqualia erunt; atq; ideò latus A B, sectum erit bifariam in G. Eodem modo probabis, reliqua figuræ latera secta esse bifariam. Quia ergo A G, A L, dimidia æquales sunt, erunt quoq; tota lineæ A B, A E, æquales. Eademq; ratione A B, B C; & B C, C D; & C D, D E; & D E, E A, æquales erunt. Quam ob rem figura A B C D E, æquilatera est, siue numerus laterũ sit par, siue impar. Quod erat demonstrandum.

c 18. tertij. d 8. primi. e 26. primi.




SIT rursus figura æquiangula A B C D E, quotuis laterum numero imparium circulo inscripta. Dico eam necessariò esse quoq; æquilaterã. Quoniam enim anguli B A E, A B C, ponũtur æquales, [f] erũt arcus B C E, A D C, quibus insistunt, æquales: quibus demptis ex communi circulo, æquales quoque erunt reliqui arcus B A E, A B C. Dempto ergo communi arcu A B, erunt & reliqui arcus A E, B C, æquales. Eadem ratione arcus B C, arcui D E, æqualis erit; ac proinde [g] & latus A E, lateri B C, & latus B C, lateri D E, æquale erit: atq; ita deinceps, si figura plura habeat latera; erit semper tertium quodque latus ei, à quo tertium est, vno relicto in medio, æquale: hoc est, primum (constitui autem quoduis latus potest primum) æquale erit tertio, tertium quinto, quintum septimo, septimum nono, &c. atq; in hunc modum omnia latera in locis imparibus posita, æqualia inter se erunt. Eademq; ratione omnia latera parium locorum, vt secundum, quartum, sextum, octauum, decimum, &c. æqualia inter se erunt, cùm quartũ sit à secundo tertium, & sextum à quar-

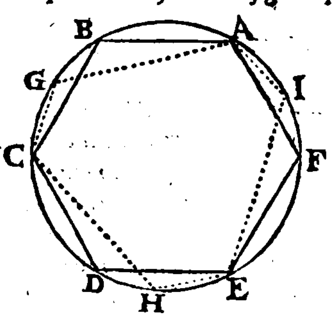
f 26. tertij. g 29. tertij.

to tertium item occupet locum, &c. Itaque quoniam proposita figura numerum laterum habet imparem, æquale erit vltimum primo, cui proximum est. Hoc autem vltimum latus eadem ratione æquale erit secundo, quod ab vltimo tertium est, primo in medio relicto; & omnibus alijs à secundo tertium locum occupantibus; vt quarto, sexto, octauo, &c. vsque ad penultimum. Quocirca omnia latera figuræ propositæ inter se æqualia erunt. Quod ostendendum erat.

Hæc etiam demonstratio in figuras æquiangulas parium laterum circulo inscriptas non quadrat. Ex ea enim solùm concludetur, primum latus esse æquale tertio, quinto, septimo, & alijs loca imparia occupantibus; nunquam autem per eam demonstrabitur, primum vltimo esse æquale, propterea quòd vltimum occupat locum parem, vt in quadrangulo quartum, in hexagono sextum, &c. Pari ratione eadem demonstratio conuincet tantùm latus secundum æquale esse quarto, sexto, octauo, & alijs loca paria possidentibus; at per eam nunquam colligetur, secundum latus esse æquale primo, eò quòd primum in loco impari locetur. Itaque sola latera imparium locorũ inter se, & sola latera in paribus locis posita inter se conuincentur esse æqualia.

QVOD si duo latera proxima, vel etiam duo non proxima, dummodo vnum eorum in loco impari, alterum verò in loco pari positum sit, fuerint inter se æqualia, tum demum superior demonstratio concludet omnium laterum æqualitatem. Nam si primum latus secundo sit æquale, (quando enim duo proxima latera æqualia sunt, dici poterit vnum primum, & alterum secundum) cùm demonstratum sit, primum æquale esse quoq; omnibus lateribus locorum imparium, secundum verò omnibus parium locorum; perspicuum est omnia inter se esse æqualia. Si autem primum latus æquale sit alicui locum parem occupanti, (quando enim duo latera non proxima sunt æqualia, ita tamen vt vnum in loco impari, & alterum in loco pari reperiatur, licebit vnum eorum appellare primum, & alterum vel quartum, vel sextum, &c. prout ab illo distiterit, non autem secundum, quia secundum primo proximum est.) cùm primum ostensum sit æquale omnibus aliis positis in locis imparibus: alterum verò omnibus loca paria occupantibus, atq; idcircò & secundo lateri; erit quoq; primum secundo æquale: ac proinde duo proxima inter se æqualia erunt. Vt ergo proximè demonstratum est, omnia latera erunt inter se æqualia.

SI quis autem dubitet, dari posse figuram æquiangulam parium laterum circulo inscriptam, quæ non sit æquilatera, (quanquam enim superior demonstratio non probet omnia latera esse æqualia, si omnes anguli æquales sint: contrarium tamen ex ea inferre non licet.) demonstrabimus id Geometricè hac ratione. Primùm quidem constat id in figuris quadrilateris. Nam figura altera parte longior æquiangula est, quippe cùm omnes eius anguli sint recti, sed nõ æquilatera. Quis autem dubitet, eam circulo posse inscribi? Deinde verò sit hexagonum æquilaterum, & æquiangulum A B C D E F, in circulo descriptum, sumaturq; in arcu B C, quoduis punctũ G, & arcui B G, in tertio arcu ab eo arcus æqualis D H; Item in quinto ab eo arcus æqualis F I; iunganturq; rectæ A G, G C, C H, H E, E I, I A. Dico hexagonum A G C H E I, æquiangulum esse, at non æquilaterum. Quòd enim sit æquiangulum, sic ostendemus. Anguli B, G, [a] æquales sunt in eodem segmento A B C. Eadem ratione æquales sunt anguli D, H, & F, I. Præterea quia arcus B G, D H, æquales sunt, per constructionem; addito cõmuni G D, erũt toti arcus B C D, G C H, æquales.




a 21. tertij.

b 27. tertij.

Igitur reliqui ex circulo arcus B F D, G F H, æquales erunt; [b] ac proinde anguli B C D, G C H, illis insistentes æquales quoq; erunt. Non aliter ostendemus & angulos D E F, H E I, & F A B, I A G, æquales inter se esse. Ergo sex anguli hexagoni A G C H E I, sex angulis hexagoni A B C D E F, æquales sunt, singuli singulis: ideoq; cùm hoc ponatur æquiangulum, erit quoq; illud æquiangulum. Quòd autem non sit æquilaterum, ita probabimus. Latus A G, latere A B, maius est, & latus G C, latere B C, minus, ex scholio propos. 29. lib. 3. Item eadem ratione latera C H, E I, lateribus C D, E F, maiora sunt, & latera H E, I A, lateribus D E, F A, minora. Cùm ergo latera A B, B C, C D, D E, E F, F A, æqualia ponatur, erunt A G, G C, C H, H E, E I, I A, inæqualia: quanquam A G, C H, E I, inter se, & G C, H E, I A, inter se, relicto semper vno in medio, æqualia sint, vt suprà ostendimus.

IDEM prorsus eodem modo demonstrabitur fieri posse in octogono, decagono, & alijs figuris parium laterum, si in circulo inscribantur prius octogonum, decagonũ, & aliæ figuræ æquilateræ, atq; æquiangulæ, &c.

QVOD si figura inscribatur circulo per doctrinam propos. 11. 15. & 16. erit ea perpetuò & æquiangula, & æquilatera, vt ex earum propositionum demonstrationibus perspicuum est.

PORRO qualemcunque figuram æquilateram & æquiangulam in circulo nouerimus inscribere, talem etiam sciemus describere circa circulum, & in ea circulum quoq; inscribere, & circa eandem describere circulum, si artem imitemur, quæ tradita fuit de pentagono, propos. 12. 13. & 14.

RVRSVS inscripta figura quacunque æquilatera, & æquiangula in circulo, inscribetur in eodem figura, quæ habeat latera duplo plura. Diuisis etenim arcubus, quos latera subtendunt, bifariam, & subtensis rectis lineis, constat propositum. Vt per triangulum æquilaterum inscriptum inscribetur & hexagonum, & ideò dodecagonum, figura 24. laterum, &c. Sic quoq; ex quadrato in circulo descripto, inscribetur octogonum, atq; adeò figura 16. laterum, figura 32. 64. 128. laterum, &c.

CÆTERVM omnes figuræ æquilateræ & æquiangulæ in circulo inscribi possunt beneficio Isosce-

lium

scelium triangulorum, vt rectè hoc loco nonnulli Euclidis interpretes monent.

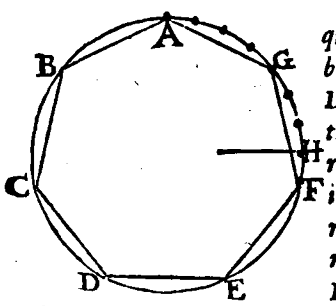
IMPARIVM enim laterum figuræ inscribentur beneficio triangulorum Isoscelium, quorum anguli æquales ad basin multiplices sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum. Vt beneficio Isoscelis, cuius vterq; angulorum ad basin æqualis est ei, qui ad verticem, descripti in circulo inscribetur prima figura imparium laterum, hoc est, triangulum æquilaterum. Nam Isosceles huiusmodi, triangulum æquilaterum erit. Quòd si in circulo inscribatur Isosceles, cuius vterque angulorum ad basin duplus sit eius, qui ad verticem, inscribetur secunda figura imparium laterum, nimirum pentagonū, in circulo, si duo anguli æquales secentur bifariam, veluti propos. 11. fuit ostensum. At heptagonum, tertia figura laterum imparium, inscribetur in circulo, per triangulum Isosceles habens vtrumque angulorum ad basin triplum eius, qui ad verticem, si duo eius anguli æquales diuidantur in tres angulos æquales ei, qui ad verticem. Ita quoque figura quarta imparium laterum, quale est Hennagonum, in circulo inscribetur beneficio Isoscelis, cuius vterq; angulorum ad basin quadruplus est eius, qui ad verticem, si vterque distribuatur in quatuor angulos æquales ei, qui ad verticem, &c.

DIVISIO autem hæc angulorum ad basin in partes æquales perfacilis est. Nam si angulo ad verticem constituantur ad basin tot anguli æquales ordine, quot vnitates sunt in numero proportionis multiplicis, quam vterque angulorum æqualium habet ad reliquū, diuisus erit angulus in partes æquales. Verùm descripto huiusmodi triangulo Isoscele in circulo, describetur figura in circulo sine diuisione angulorum ad basin; si basi accōmodentur rectæ æquales in circulo. Basis enim semper est vnū figuræ latus, vt in pentagono patuit.

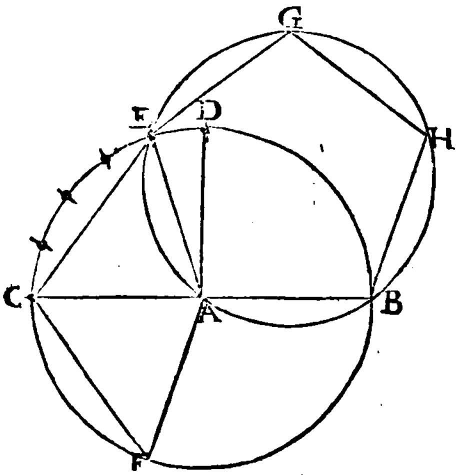
PARIVM verò laterum figuræ in circulo inscribētur, beneficio Isoscelium, quorū anguli æquales ad basin multiplices sesquialteri sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum. Vt quadratū constituens primam figuram parium laterum, inscribetur beneficio Isoscelis, cuius vterq; angulorum ab basin sesquialter est anguli ad verticem. Nam angulus ad verticem insistit quartæ parti circunferentiæ. Cùm enim duo anguli ad basin simul contineant tres angulos æquales ei, qui ad verticem, quod quilibet semel eum contineat, & dimidiatam insuper eius partem; subtendent ipsi tres partes circunferentiæ, & idcircò angulus ad verticem vnam duntaxat. Hexagonum, hoc est, secunda figura laterum parium, inscribetur beneficio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin duplus sesquialter est eius, qui ad verticem, anguli. Nam angulus ad verticem insistit sextæ parti circunferentiæ, cùm reliqui anguli simul cōpositi contineant ipsum quinquies; propterea quòd quilibet bis eum continet, & dimidiatam eius insuper partem. Ita quoque Octogonum, id est, tertia figura laterum parium inscribetur beneficio Isoscelis habentis vtrumque angulorū ad basin triplum sesquialterum anguli ad verticem, &c.

SI igitur inuenta fuerit ars, qua Isoscelia triangula construantur habentia angulos ad basin multiplices eorum, qui ad verticem sunt, angulorum, quemadmodum Euclides Isosceles fabricauit, habens vtrumque angulorum ad basin duplum anguli ad verticem, facilè in circulo describentur figuræ omnes laterum imparium. Et si arcus earum diuidantur bifariam, inscribentur quoq; omnes figuræ parium laterum, post quadratum, atq; adeò circunferentia cuiuslibet circuli in quotlibet æquales partes Geometricè diuidetur. Quæ res summam Astronomis afferret vtilitatem. Verùm hæc ars adhuc ignota extitit. Non enim rectè sibi eam vendicat Orontius Finæus in libello hactenus, vt ipse ait, desiderato de absoluta figurarum rectilinearū omnium descriptione intra circulum, &c. cùm eius demonstrationes falsæ sint, ac sophisticæ, vt Geometricè ostensum est à Petro Nonio Lusitano in libello de erratis Orontij.

NOS tamen ad finem lib. 6. ex Pappo Alexandrino lineam quandam inflexam Geometricè describemus, qua non solùm triangula Isoscelia, quorum anguli ad basin ad reliquum habeant datam proportionem, construantur, ac proinde omnes figuræ æquilateræ, & æquiangulæ in circulo describantur: verùm etiam arcus quiuis circuli distribuatur in quotcunque partes æquales, siue is quadrans sit, siue non. Quin etiam eiusdem lineæ inflexæ beneficio iucunda operatione circulus quilibet sine vllo negotio in quadratum æquale commutabitur, vt ibidem dicemus. Quæ res ad hunc vsque diem animos Mathematicorum tenuit suspensos.



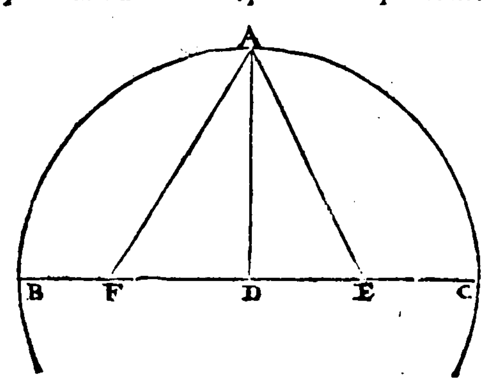

SED doceamus, si placet, qua etiam via figura quæuis æquilatera, & æquiangula circulo inscribatur sine triangulis Isoscelibus, quorum anguli ad basin ad reliquum habeāt proportionem datam. Sit ergo in circulo A B C D E F G, inscribendum heptagonum æquilaterum, & æquiangulum. Secetur eius quadrans A H, in septem partes æquales, in tot videlicet, quot latera angulósue figuræ inscribenda continet. Secabis autem quadrantem A H, in propositas partes æquales vel ex ijs, quæ ad finem lib. 6. nos demonstraturos diximus, vel beneficio circini, dilatādo eius crura modò magis, modò minus, donec reperias eorum distantiam partiri quadrātem in partes optatas. Facilius enim quadrans in quotuis æquales diuidetur partes, quàm tota circunferentia, quòd sæpius attentando, & quasi repetendo opus, clarius appareat in parua magnitudine, quàm in magna, quantum detrahi, vel addi debeat parti vni beneficio circini acceptæ, si ea parte desideratam non offerat. Secto quadrante in septem partes æquales, vel in plures, si figura plurium laterum desideretur, erit recta linea A G, quæ quatuor eiusmodi partes subtendit, latus figuræ inscribendæ. Quoniam enim in tota circunferentia quater tot partes æquales continentur, in quot quadrans diuisus est, continebitur aggregatum *ex quatuor partibus toties in tota circunferentia, quoties vna pars in quadrante: quia, quælibet pars cum alijs tribus, quarum singula in singulis alijs tribus quadrantibus accipiantur, efficit aggregatum ex quatuor partibus. Quod etiam ita perspicuum fiet. Quoniam partes eandem proportionem habent, quam earum æquemultiplicia, vt ab Euclide demonstratur lib. 5. propos. 15. (Liceat enim huc accommodare eam propositionem, cùm ex antecedentibus nullo modo pendeat.) ita se habebit vna pars ad quadrātem, vt quadruplum vnius partis, hoc est, arcus A G, ad quadruplum quadrantis, id est, ad totam circunferentiam. Qualis ergo pars quadrantis est vna illarum, in quas quadrans diuisus est, talis erit arcus A G, totius circunferentiæ. Atq; ita si quadrans diuisus sit in 7. partes, continebuntur eiusmodi partes 28. in tota circunferentia. Igitur 4. efficient $\frac{4}{28}$. hoc est, $\frac{1}{7}$. totius circunferentiæ. Ita quoq; si quadrans sectus sit in 11. partes, continebuntur eiusmodi partes 44. in tota circunferentia: atq; adeò 4. efficient $\frac{4}{44}$. hoc est, $\frac{1}{11}$. totius circunferentiæ: & sic de cæteris. Itaq; si arcui A G, quatuor partium abscindantur arcus continuè æquales, eisdemq; arcubus rectæ subtendantur, inscripta erit circulo figura proposita, vt ex demonstratis liquet.*




*IAM verò si supra datam rectam lineam quæuis figura æquilatera, & æquiangula describenda sit, efficiemus id hac ratione. Sit supra datam rectam A B, constituendum pentagonum æquilaterū, & æquiangulum. Producta B A, ad C, vt A C, ipsi A B, æqualis sit, describatur ex A, per C, arcus circuli, ductaq; A D, perpendiculari ad A C, vt quadrans sit C D, ex scholio propos. 27. lib. 3. diuidatur quadrans C D, in quinque partes æquales, in tot videlicet, quot laterum figura construenda sit; quarum 4. sint C E, iungaturq; recta A E, quæ ipsi A B, æqualis erit. Dico angulum B A E, æqualem esse angulo pentagoni æquilateri & æquianguli. Sumpto enim arcu C F, æquali arcui C E, iungantur rectæ C E, C F. Et quoniam C E, recta subtendens 4. partes quadrantis, latus est pentagoni æquilateri & æquianguli, vt proximè demonstrauimus, in circulo E C F, describendi, erit C F, alterum latus: ac proinde duo latera E C, F C, comprehendent angulum pentagoni æquilateri & æquianguli E C F. Quoniam verò, ducta recta A F, duo latera E C, C A, duobus lateribus F C, C A,*
a 8. primi. *æqualia sunt, & bases item æquales A E, A F;* [a] *erunt anguli E C A, F C A, æquales. Cùm ergo,* [b] *& anguli*
b 5. primi. *A C E, A E C, sint æquales; erit & A C F, ipsi A E C, æqualis: additoq; communi A C E, totus angulus E C F,*
c 32. primi. *duobus angulis A C E, A E C, æqualis erit. Est autem* [c] *externus B A E, eisdem internis A C E, A E C, æqualis. Igitur & E C F, B A E, inter se æquales erunt. Cùm ergo E C F, sit angulus pentagoni, erit quoq; B A E, pentagoni angulus.*
d 1. quarti. *Quocirca si circa tria puncta B, A, E, circulus describatur, & rectis A B, A E,* [d] *rectæ æquales in eo accommodentur B H, H G, G E, descriptum erit pentagonum æquilaterū & æquiangulum descriptum in circulo A B H G E, ac proinde supra datam rectam A B. Quod faciendum erat. Non est autem dubitandum, quin rectis A B, A E, æquales rectæ possint in circulo accommodari, quæ totam circunferentiam absoluant. Nam angulus pentagoni B A E, insistit tribus quintis partibus totius circunferentiæ: singula autem latera A B, A E, singulas quintas partes subtendunt: ac proinde singulæ B H, H G, G E, singulas quoque quintas partes subtendent, cùm ipsis A B, A E, sumptæ sint æquales, propterea q; totum arcum B G E, continentē tres quintas partes absoluent. Eadem ratio est de alijs figuris æquilateris, & æquiangulis.*

*SI fortè in promptu habeamus aliquam figuram æquilateram, & æquiangulam, cui supra datam rectam lineam desideramus constituere similem, siue ea in circulo aliquo descripta sit siue non: satis erit vni eius angulo æqualem angulum constituere B A E, in extremo datæ lineæ A B. Si namque, posita recta A F, æquali ipsi A B, per tria puncta B, A, E, circulus describatur, perficiemus figuram propositam, vt antè diximus.*

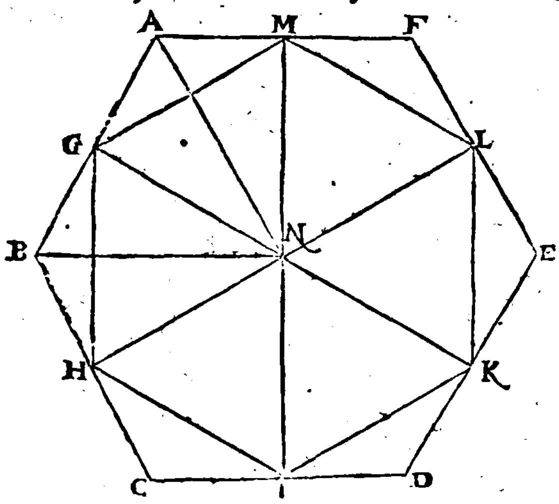
*QVONIAM verò longa est, atq; difficilis ea inscriptio pentagoni æquilateri, & æquianguli in circulo quam Euclides tradidit, placuit huic quarto libro annectere praxin quandam, qua vna eademq; opera Ptolemæus lib. 1. magnæ constructionis, in circulo dato inscribit pentagonum, & decagonum æquilaterum, & æquiangulum. Sit enim datus circulus A B C, cuius centrum D; Ducta autem diametro B C, erigatur D A perpendicularis ad B C. Deinde diuisa semidiametro C D, bifariam in E, ducatur recta E A, cui æqualis abscindatur E F. Itaq; si ducatur recta A F, erit A F, latus pentagoni, & D F, latus decagoni in dato circulo inscribendi, vt ipse demonstrat. Cæterum cùm demonstratio huius rei pendeat ex decimotertio libro Euclidis, non videtur hoc loco scribenda, sed in proprium locum, vtpote in librum decimumtertium differenda.*



*Non erit etiam præter institutum nostrum, aut ab hoc libro alienum, si sequens adhuc theorema adiungamus: videlicet.*

Si bifariæ sectiones laterum figuræ æquilateræ, & æquiangulæ rectis coniungantur lineis, inscripta erit figura æquilatera quoque & æquiangula totidem laterum in illa figura, idem centrum habens.

*Centrum figuræ æquilateræ, & æquiangulæ appellatur punctum illud, è quo circulus figuræ inscribitur, aut circumscribitur: ita vt idem sit centrum circuli & figuræ.*




*Sit igitur figura æquilatera, & æquiangula A B C D E F, cuius latera bifariam secentur in G, H, I, K, L, M, iunctis rectis G H, H I, I K, K L, L M, M G. Dico figuram G H I K L M, inscriptam figuræ A B C D E F, æquilateram esse quoq;, ac æquiangulam, idemq; centrum habere. Aequilatera quidem erit, quoniam eius latera cùm subtendant angulos æquales comprehensos æqualibus rectis, vtpote dimidiis laterum æqualium, [a] æqualia sunt. Quoniam verò tam tres anguli A M G, G M L, L M F, quàm tres F L M, M L K, K L E, [b] duobus sunt rectis æquales: Sunt autem A M G, L M F; F L M, K L E, [c] inter se æquales, cum æqualibus lateribus contineantur, subtendanturq; à basibus æqualibus; Erunt reliqui anguli G M L, M L K, æquales. Eodemq; argumento concludemus, reliquos angulos & bisce, & inter se æquales esse. Aequiangula igitur quoq; est figura G H I K L M.*

a 4. primi.
b 13. primi.
c 8. primi.

*Quod autem idem habeat centrum, ita ostendetur. Ex centro N, figuræ A B C D E F, ad omnes angulos figuræ inscriptæ ducantur rectæ N G, N H, &c. iunganturq; rectæ N A, N B. Quoniam igitur A G, G N, latera trianguli A G N, æqualia sunt lateribus B G, G N, trianguli B G N: suntq; bases A N, B N, cùm sint semidiametri circuli circa figuram descripti, æquales: [d] Aequales erunt anguli A G N, B G N, ideoq; recti. Quare N G, perpendicularis est ad latus A B; Eodemq; modo reliquæ N H, N I, &c. perpendiculares erunt ad latera B C, C D, &c. Quæ cùm ex defin. 4. lib. 3. ostendant distantias rectarum A B, B C, &c. æqualium à centro N; [e] æquales ad inuicem erunt. Circulus igitur ex N, interuallo N G, descriptus, per reliquos angulos H, I, K, L, M, incedet; Ac propterea N, centrum erit figuræ G H I K L M, hoc est, circuli circa eam figuram descripti. Quod est propositum.*

d 8. primi.
e 14. tertij.

*Neque verò & hoc omittendum est, inter omnes figuras æquilateras, & æquiangulas, solum triangulum, quadratum, & hexagonum replere locũ, hoc est, aliquot triangula, vel quadrata, vel hexagona, ita in plano posse inter se aptari, vt inter eorũ angulos nihil sit vacui, sed planã superficiem constituãt. Nam sex anguli in triangulo æquilatero, & quatuor in quadrato, & tres in hexagono æquilatero, & æquiangulo, æquales sunt quatuor rectis, quantũ nimirum est spatium circa punctum quodlibet in plano, vt ad propositionem decimamquintam libri primi ostendimus. Quoniam enim vnus angulus trianguli æquilateri continet $\frac{2}{3}$. vnius recti, quòd omnes tres contineant $\frac{6}{3}$. vnius recti, hoc est, duos rectos; continebunt sex eiusmodi anguli $\frac{12}{3}$. vnius recti, id est, quatuor rectos. Item quatuor anguli in quadrato sunt quatuor recti. Denique quia vnus angulus hexagoni æquilateri, & æquianguli continet $\frac{4}{3}$. vnius recti, quòd omnes sex contineant $\frac{24}{3}$. vnius recti, hoc est, 8. rectos, continebunt tres eiusmodi anguli $\frac{12}{3}$. vnius recti, id est, 4. rectos. Quod in alijs figuris planis æquilateris, & æquiangulis non cernitur. Nam tres anguli in pentagono æquilatero & æquiangulo æquales sunt $\frac{18}{5}$. vnius recti, hoc est, angulis rectis $3\frac{3}{5}$. duntaxat, at quatuor æquales sunt $\frac{24}{5}$. vnius recti, id est, angulis rectis $4\frac{4}{5}$. propterea quòd omnes quinque æquiualent 6. rectis; hoc est, constituunt $\frac{30}{5}$. vnius recti, atque idcircò vnus continet $\frac{6}{5}$. vnius recti, &c. Tria igitur pentagona locum replere non possunt, cùm trium in plano aptatorum tres anguli minores sint quatuor rectis; quippe qui efficiant tantùm tres angulos rectos cum tribus quintis. Eadem ratione quatuor pentagona locum replere nequeunt, propterea quòd quatuor in plano aptatorum quatuor anguli maiores sunt quatuor rectis, cùm æquales sint quatuor angulis rectis, & insuper quatuor quintis vnius recti, vt dictum est. Pari ratione neque ex heptagonis locus poterit repleri. Nam tres anguli cuiuslibet heptagoni æquilateri, & æquianguli æquales sunt $\frac{30}{7}$. vnius recti, hoc est, angulis rectis $4\frac{2}{7}$. Quoniam enim omnes septem anguli 10. rectis sunt æquales, hoc est, complectuntur $\frac{70}{7}$. vnius recti; fit, vt vnus contineat $\frac{10}{7}$. vnius recti, hoc est, vnum rectum, & præterea $\frac{3}{7}$. vnius recti: ac proinde tres contineant quatuor rectos. & $\frac{2}{7}$. vnius recti. Non ergo tribus heptagonis in plano aptatis, eorum tres anguli locum replere possunt, cùm quatuor rectos excedant. A fortiori neque quatuor heptagona locum replebunt: neque tria octogona æquilatera, & æquiangula, aut quatuor,* *neque tres aut quatuor figuræ æquilateræ, atque æquiangulæ plurium laterum, quàm octo: quippe cùm semper tres anguli simul sumpti sint maiores quatuor rectis, propterea quòd maiores sunt tribus angulis heptagoni æquilateri & æquianguli, quos ostendimus quatuor rectis esse maiores. Solum ergo triangulum æquilaterum, quadratum, & hexagonum æquilaterum atque æquiangulum, suis angulis locum replere possunt, vt diximus.*

FINIS ELEMENTI QVARTI.

---

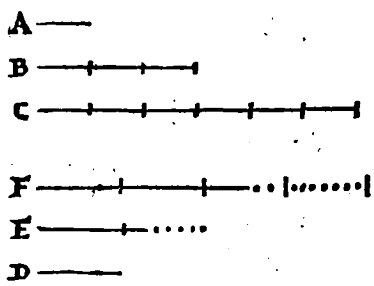
# EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVM.

## DEFINITIONES.

### I.

PARS est magnitudo magnitudinis, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

*AGIT in antecedentibus quatuor libris Euclides de quantitate continua absolutè considerata; Nunc verò duobus sequentibus de eadem disputat, non absolutè, sed prout vna ad aliam refertur, hoc est, quatenus comparata cum alia proportionem aliquam habet. Hoc quidem quinto libro docet proportiones quantitatum continuarum in genere, non descendendo ad vllam quantitatis speciem, vt ad lineam, superficiem, vel corpus aliquod. Sexto verò libro ostendit in specie, quamnam proportionem habeant inter se lineæ, anguli, circunferentiæ circulorum, triangula, & aliæ figuræ planæ. Vt igitur institutum suum seruet, definit priùs vocabula, quæ ad demonstrationes proportionum adhibentur.*




*ITAQVE ait magnitudinem illam minorem, quæ maiorem quampiam magnitudinem metitur, appellari partem. Vt quoniam magnitudo A, ter sumpta, metitur magnitudinem B; sexies autem sumpta, magnitudinem C, dicetur magnitudo A, pars magnitudinum B, & C. At verò quia magnitudo D, non metitur magnitudines E, & F, sed sumpta bis, excedit magnitudinē E, & sumpta ter, deficit à magnitudine F, sumpta autē quater, eandem superat; non appellabitur magnitudo D pars magnitudinum E, & F.*

*DVPLEX autem est pars apud Mathematicos: Quædam metitur suum totum, ita vt aliquoties repetita totū suum constituat; qualis est numerus 4. cum 8.12.16.20.&c. collatus; Quædam autem non metitur suum totum, sed aliquoties sumpta ipsum vel excedit, vel ab eodē deficit: cuiusmodi pars est numerus 4. collatus cum 6.7.9.10.18.38.&c. Prior dici solet aliquota, posterior autem aliquanta. Euclides igitur hoc loco definit partem aliquotam duntaxat, tum quia hæc solùm metitur suum totum; (Aliquanta enim non dicitur metiri suum totum) tum etiam, quia, vt ex lib. 7. constabit, pars aliquanta in numeris non dicitur ab Euclide pars, sed partes. Nam numerus 4. non est pars huius numeri 6. sed duæ partes tertiæ, quales sunt duo binarij. Accedit etiam, quòd in omnibus demonstrationibus huius quinti libri pars sumitur ab omnibus interpretibus pro parte aliquota. Vnde mirum sanè est, nonnullos interpretes Euclidis, inter quos est etiam Peletarius, contendere partem hoc loco definiri, quatenus complectitur omnem partem tam aliquotam, quàm aliquantam; cùm tamen in demonstrationibus etiam ipsi nomine partis intelligant partem aliquotam duntaxat.*

### II.

MVLTIPLEX autem est maior minoris, cùm minor metitur maiorem.

*VT in superiori exemplo tam magnitudo B, quàm magnitudo C, multiplex est magnitudinis A; quoniam hæc*

hæc vtramque illam metitur. At verò neq; magnitudo E, neq; magnitudo F, multiplex est dicenda magnitudinis D; propterea quòd hæc neutram illarum metitur. Itaque pars ad multiplex refertur, & multiplex ad partem, ita vt minor quantitas mensurans maiorem, dicatur pars maioris; Maior verò mensurata à minori, dicatur minoris multiplex.

SATIS autem perspicuè ex hac definitione colligitur, partem antea definitam esse eam, quæ perfectè metitur suum totum. Si enim 6. diceretur metiri 7. vt vult Peletarius, esset iuxta hanc definitionem, 7. multiplex ipsius 6. quod est absurdum.

CAETERVM quando duæ magnitudines minores duas alias maiores æquè metiuntur: hoc est, vna minor in vna maiore toties continetur, quoties altera minor in altera maiore; dicuntur duæ hæ maiores duarum illarum minorum æquemultiplices. Quod idem dices, si plures minores æquè metiantur plures maiores.

III.

RATIO est duarum magnitudinum eiusdem generis mutua quædam, secundùm quantitatem, habitudo.

QVANDO duæ quantitates eiusdem generis, vt duo numeri, duæ lineæ, duæ superficies, duo solida, &c. inter se comparantur secundùm quantitatem, hoc est, secundùm quod vna maior est, quàm altera, vel minor, vel æqualis; appellatur huiusmodi comparatio, seu habitudo mutua, Ratio, seu (vt alijs placet) Proportio. Itaque si comparetur linea aliqua cum superficie quapiam, vel numerus cum linea, non dicetur ea comparatio proportio, quòd neq; linea, & superficies; neq; numerus, & linea sint eiusdem generis quantitates. Similiter si conferatur linea aliqua cum alia linea secundùm qualitatem, hoc est, secundùm quòd vna est alba, & altera nigra; aut quòd vna est calida, & altera frigida, &c. quamuis ambæ sint eiusdem generis, non dicetur ea comparatio proportio, quia non fit secundùm quantitatem.

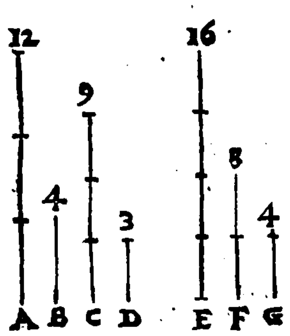
QVANQVAM autem in solis quantitatibus propriè reperitur proportio, tamen omnia alia, quæ aliquo modo naturam sapiunt quantitatis, cuiusmodi sunt tempora, soni, voces, loca, motus, pondera, & potentia, proportionem quoq; dicuntur habere, si eorum habitudo consideretur, secundùm quantitatem. Vt cùm dicimus, tempus tempore esse maius, vel minus, vel duo tempora esse æqualia, &c. appellabitur eiusmodi habitudo, proportio; quoniam tempora tunc considerantur, veluti quantitates quædam.

CAETERVM in omni proportione ea quantitas, quæ ad aliam refertur, dicitur ab Euclide, & Geometris alijs, antecedens proportionis; Ea verò, ad quam alia refertur, consequens proportionis dici solet. Vt in proportione lineæ 6. palmorum ad lineam 3. palmorum, linea 6. palmorum dicitur antecedens proportionis; at linea 3. palmorum, proportionis consequens. Quòd si è contrario consideretur proportio lineæ 3. palmorum ad lineam 6. palmorum, appellabitur antecedens, linea 3. palmorum; consequens verò linea 6. palmorum, & sic in cæteris.

IIII.

PROPORTIO verò est rationum similitudo.

QVOD hoc loco interpres proportionem appellat, illud Græcis ἀναλογία, plerisque autem Latinis proportionalitas dicitur. Quemadmodum igitur comparatio duarum quantitatum inter se, dicitur proportio; Ita comparatio duarum, vel plurium proportionũ inter se, proportionalitas solet nuncupari. Vt si proportio quantitatis A, ad quantitatẽ B, similis fuerit proportioni quantitatis C, ad quantitatem D, dicetur habitudo inter has proportiones, proportionalitas. Eodem modo, si similis fuerit proportio E, ad F, proportioni F, ad G, appellabitur hæc similitudo proportionalitas. Multæ autem habitudines proportionum, seu proportionalitates, (Nos enim cum pluribus comparationem duarum quantitatum, proportionem appellabimus: habitudinem autem proportionum, Proportionalitatem) à scriptoribus præsertim Boëtio, & Iordano, describuntur; inter quas primum semper locum obtinuerunt apud Veteres, Proportionalitas Arithmetica, Geometrica, atq; Musica, seu Harmonica, de quibus paulò post dicemus: Verùm Euclides de sola Geometrica agit hoc libro; quæ quidem duplex est, continua altera, in qua singulæ quantitates intermediæ bis sumuntur, ita vt nulla fiat proportionum interruptio, sed quælibet quantitas intermedia sit, & antecedens & consequens; Antecedens quidem quantitatis subsequentis, consequens verò quantitatis antecedentis. Vt si dicatur, quæ est proportio E, ad F, ea est F, ad G; vocabitur hæc proportionalitas, continua. Altera verò discreta, seu non continua, in qua singulæ quantitates intermediæ semel tantùm accipiuntur, ita vt fiat proportionum interruptio, nullaq; quantitas sit & antecedens, & consequens, sed vel antecedens tantùm, vel consequens tantùm. Vt si dicatur, quæ est proportio A, ad B, ea est C, ad D; appellabitur proportionalitas hæc, discreta, siue non continua.




## DE PROPORTIONIS DIVISIONIBVS.

OPERAE pretium esse arbitror, paucis hoc loco exponere, quotnam sint genera propor-

*tionum apud Mathematicos, & quænam sint præcipuæ proportionalitates, earumq́ proprietates, vel ob hanc præcipuè vtilitatem, vt ea, quæ his duobus libris ab Euclide demonstrantur de proportionibus magnitudinum, rebus possint materialibus accommodari, quando opus fuerit, & tum ea, quæ à Mathematicis de proportionibus dicuntur, tum ea, quæ à Philosophis cum Aristotele de proportione motuum disputantur, intelligi. Vt autem maior vtilitas, ac voluptas ex admirabilibus proportionum affectionibus percipi possit, instituemus paulò vberiorem tractationem in hac posteriori editione, quam in priori: reiicientes nihilominus innumera propemodum, quæ dici possent, in pleniorem nostram Arithmeticam, vbi omnia genera Proportionalitatum diligentissimè persequemur.*

PROPORTIO *igitur ab Euclide definita, diuiditur in proportionem rationalem, & irrationalem. Rationalis est ea, quæ in numeris potest exhiberi. Qualis est proportio lineæ 20. palmorum, ad lineam 10. palmorum. Hæc enim proportio in hisce numeris 20. & 10. ostenditur. Irrationalis verò proportio ea est, quæ in numeris exhiberi nequit. Qualis est proportio diametri cuiuslibet quadrati ad latus eiusdem quadrati. Hæc enim proportio in numeris reperiri non potest, vt in 10. lib. ab Euclide demonstratur. Alij dicunt, proportionem rationalem eam esse, quam habent quæuis duæ quantitates commensurabiles: Irrationalem verò eam, quam habent duæ quælibet quantitates incommensurabiles. Dicuntur autem quantitates commensurabiles, quæ habent vnam communem partem aliquotam, seu quas eadem mensura communis metitur. Cuiusmodi sunt linea 20. palmorum, & linea 8. palmorum. Nam linea 4. palmorum est vtriusque pars aliquota, similiter linea 2. palmorum. Sicut enim linea tam 4. quàm 2. palmorum metitur lineam 20 palmorum; Ita quoque eadem linea tum 4. tum 2. palmorum lineam 8 palmorum mensurat. Non aliter omnes numeri, commensurabiles dicentur, quia saltem vnitas omnes metitur. Quantitates verò incommensurabiles dicuntur, quæ nullam habent communem partem aliquotam, seu quarum nullam mensuram communem contingit reperiri. Cuiusmodi sunt diameter, & latus eiusdem quadrati. Quamuis enim quælibet harum linearū infinitas habeat partes aliquotas, vtpote partem dimidiatam, tertiam, quartam, &c. Tamen nulla pars aliquota vnius, quantumuis minima, alteram metiri potest, vt demonstratur ab Euclide lib. 10. propos. vltima. Quo in lib. multæ aliæ lineæ incommensurabiles ostenduntur, præter illas duas. Itaq; in numeris inuenitur sola proportio rationalis; At in quantitate continua tam rationalis, quàm irrationalis proportio continetur.*

ALIO *modo diuidi solet Proportio in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Aequalitatis proportio, est inter duas quantitates æquales, vt inter 20. & 20. Inter 100. & 100. Inter lineam 10. palmorum, & lineam 10. palmorum, &c. Inæqualitatis verò proportio inter duas quantitates inæquales reperitur, vt inter 20 & 10. inter 8. & 40. inter lineam 6. palmorum, & lineam 2. palmorum, &c. Habent autem hæc duo proportionum genera cum superioribus duobus eam connexionem, vt omnis proportio æqualitatis sit necessariò rationalis, sed non contra. Omnis item proportio irrationalis necessariò sit proportio inæqualitatis, sed non contra. Ex quo manifestum est, minus rectè à quibusdam diuidi proportionem rationalem, in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Quamuis enim omnis proportio rationalis sit necessariò æqualitatis, inæqualitatisue, non tamen contra omnis proportio huiusmodi est rationalis; cùm multæ proportiones inæqualitatis sint irrationales. Pari ratione perspicuum est, quosdam non satis rectè distribuere proportionem inæqualitatis, in proportionem rationalem & irrationalem. Quamuis enim omnis proportio inæqualitatis sit necessariò rationalis irrationalisue, non tamen omnis huiusmodi proportio è contrario est proportio inæqualitatis: cùm multæ proportiones rationales sint proportiones æqualitatis. Rectius igitur, meo iudicio, duplici diuisione secanda est proportio in genere, priori quidem in proportionem rationalem & irrationalem; Posteriori verò in proportionem æqualitatis & inæqualitatis; vt à nobis factum est. Ita enim membra diuidentia cum Diuiso (vt cum Dialecticis loquamur) in vtraque diuisione reciprocantur. Scio rectè posse subdiuidi tam proportionem rationalem in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis; quàm proportionem inæqualitatis in proportionem rationalem, & irrationalem; si in vtraque diuisione subintelligatur Diuisum. Sed cur duplicem nostram diuisionem, qua proportio in tota sua latitudine diuiditur, vtrique harum subdiuisionum prætulerim, supra exposui in responsione mea ad Apologiam Peletarij.*

RVRSVS proportio inæqualitatis (Relinquimus enim æqualitatis proportionē, quoniam amplius subdiuidi nequit, cùm quæcunque quantitates æquales, siue magnæ, siue paruæ fuerint, eandem semper habeat proportionem æqualitatis) subdiuiditur in proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. Maioris inæqualitatis proportio est, quando maior quantitas cum minore confertur; qualis est proportio 20. ad 10. Item lineæ 8. pedum ad lineam 6. pedum, &c. Proportio minoris inæqualitatis est, quando minor quantitas ad maiorem refertur; qualis est proportio 10. ad 20. Item lineæ 6. pedum ad lineā 8. pedum, &c. Non est autem hæc diuisio inanis & superuacanea, vt multi suspicantur. Neque enim eadem est proportio 4. ad 2 quæ 2. ad 4. sed multum inter se differunt, cùm valdè diuersus sit vsus vtriusq; vt perspicuum est iis, qui vel mediocriter in rebus Geometricis, & regula Algebræ sunt versati. Hæ igitur sunt generales diuisiones proportionis, prout complectitur omnes proportiones, nulla seclusa: Nunc autem tam proportionem maioris inæqualitatis, quàm minoris inæqualitatis, quatenus solas proportiones rationales comprehendunt, subdiuidemus; quoniam de quantitatibus, quæ habent proportiones irrationales, in 10. lib. est sermo futurus.

PROPORTIO ergo rationalis maioris inæqualitatis, distribuitur in quinque genera, vt in proportionem multiplicem, superparticularem, superpartientem, multiplicem superparticularem, & multiplicem superpartientem. Pari ratione proportio rationalis minoris inæqualitatis in eadem genera secatur, si modò singulis vocabulis præponatur præpositio (sub) vt in proportionē submultiplicem, subsuperparticularem, subsuperpartientem, submultiplicem superparticularem, & submultiplicem superpartientem. Horum autem quinque generum priora tria sunt simplicia, posteriora verò duo ex illis tribus composita, vt manifestum est. Cur verò tantùm sint quinque hæc genera proportionis rationalis tam maioris, quàm minoris inæqualitatis, post explicationem omnium harum quinque proportionum ostendemus.

## DE PROPORTIONE MVLTIPLICI.

PROPORTIO Multiplex est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem aliquoties, vt bis, ter, decies, centies, &c. continet: ita vt minor maiorem metiatur; qualis est proportio numeri 20. ad 4. Nam numerus 20. comprehendit 4. quinquies. Item proportio lineæ 30. pedum ad lineam 5. pedum, &c.

HAEC autem sub se cōtinet infinita genera. Si enim proportionis multiplicis maior quantitas minorem bis tantùm continet, dicitur proportio dupla: si ter, tripla: si decies, decupla: si centies, centupla, &c.

Ex his facilè omnes species proportionis multiplicis definiemus. Nam proportio octupla nil erit aliud, quàm habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem octies complectitur. Eodemq; modo definiendæ erunt reliquæ proportiones multiplices: vt proportio quincupla, qualis est 40. ad 8. dicetur ea, cuius maior quantitas minorē continet, quinquies. Item proportio dupla lineæ 10. cubitorum ad lineam 5. cubitorum ea, in qua maior quantitas minorem bis comprehendit, & sic de reliquis.

CAETERVM omnes proportiones multiplices in numeris integris, hoc est, omnes numeros multiplicem habentes proportionem, inuenies hoc modo. Accipe numerum, qui indicat, quoties maior numerus minorem in data proportione multiplici continet. Is enim ad vnitatem habet primam proportionem multiplicem, quæ inuestigatur: hoc est, numerus ille, & vnitas sunt primi ac minimi numeri, inter quos proposita proportio multiplex reperitur. Atque numerus ille idem, atq; vnitas dicuntur ab Arithmeticis termini eius proportionis multiplicis, quæ proponitur. Inuentis hisce terminis, inter quos prima proportio multiplex proposita reperitur, si vterque duplicetur, producentur duo numeri habentes secundam proportionem multiplicem propositam: si vterque idem triplicetur, procreabuntur numeri tertiæ proportionis multiplicis propositæ: si vterque quadruplicetur, exurgent numeri quartæ proportionis multiplicis quæsitæ. Atq; ita si iidem termini per quemuis numerum multiplicentur, producentur duo numeri proportionis multiplicis propositæ, quæ eum locum inter omnes proportiones multiplices illius speciei obtinet, quē numerus, qui vtrumque terminum multiplicauit, indicat: Adeò vt, si multiplicatio fiat per 100. procreentur duo numeri obtinentes centesimum locum inter omnes numeros propositam proportionem habentes. EXEMPLI gratia. Quærantur omnes numeri proportionis quintuplæ. Et quoniam maior numerus minorem continet quinquies in quintupla proportione, erit prima proportio quintupla inter 5. & 1. qui duo termini si ducantur in 2. reperietur secunda proportio quintupla inter 10. & 2. Si iidem termini per 3. multiplicentur, procreabuntur numeri 15. & 3. tertiæ proportionis quintuplæ: Et sic deinceps. Itaque si decima proportio quintupla quæratur, ducendi erunt *duo primi termini inuenti 5. & 1. per 10. si verò millesima reperienda sit, multiplicandi erunt ijdem termini per 1000. &c.*

*OMNES item numeri cuiusque proportionis multiplicis reperientur hoc modo. Constituatur duæ series numerorum in infinitũ progredientes: quarum inferior ab vnitate incipiat, & per seriem naturalem numerorum progrediatur; superior autem ab eo numero, qui significat, quoties maior numerus minorem in data proportione cõtinet, initium ducat, progrediaturq; per continuam additionem eiusdem numeri, primùm ad seipsum, deinde ad conflatum numerum, &c. Nam superioris ordinis numeri ad numeros ordinis inferioris, vt primus ad primum, secundus ad secundum, tertius ad tertium, &c. habent omnes proportiones multiplices speciei propositæ. Exempla hic habes in proportionibus quintuplis, septuplis, & decuplis.*

*Proportiones quintuplæ.*

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 | 75 | 80 | &c. |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | &c. |

*Proportiones septuplæ.*

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70 | 77 | 84 | 91 | 98 | 105 | &c. |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | &c. |

*Proportiones decuplæ.*

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 | 130 | 140 | &c. |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | &c. |

## DE PROPORTIONE SVPERPARTICVLARI.

*PROPORTIO superparticularis est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem semel duntaxat continet, & insuper vnam eius partẽ aliquotam, scilicet dimidiatam, tertiam, quartam, &c. Qualis est proportio 3. ad 2. Nam 3. continent 2. semel, & insuper vnitatem, quæ dimidiata pars est numeri 2. Ita quoque linea 12. pedum ad lineam 9. pedum, proportionem habet superparticularem, quia prior linea continet posteriorem semel, & insuper lineam 3. pedum, quæ tertia pars est lineæ 9. pedum, &c.*

*HAEC quoq; proportio in infinita genera diuiditur. Si enim illa pars aliquota contenta in maiori quantitate, est dimidiata pars minoris quantitatis, constituitur proportio sesquialtera; Si est tertia pars, exurgit proportio sesquitertia; si quarta, sesquiquarta; si millesima, sesquimillesima, &c. VNDE ex ipsomet vocabulo faciles erunt definitiones omnium proportionum superparticularium. Erit enim proportio sesquioctaua, quando maior quantitas minorem semel includit, & insuper octauam partem minoris: qualis est inter 9. & 8. Item inter 45. & 40. Idem habeto de reliquis iudicium.*

*INVENIENTVR omnes proportiones superparticulares, siue omnes numeri, inter quas proportio superparticularis quæcunq; reperitur hoc modo. Accipiatur numerus, qui partem aliquotam in proportione expressam denominat. Ad eum enim numerus proximè maior, qui videlicet eum vna sola vnitate superat, habebit primam proportionem superparticularẽ propositam, ita vt in minoribus numeris ea proportio reperiri nequeat. Hi duo numeri, qui termini datæ proportionis dicuntur, si duplicentur, triplicentur, vel per quemcunque alium numerum multiplicentur, gignentur alij numeri eandem proportionem habentes, nimirũ secundam, tertiam, vel eam, quam numerus multiplicans indicat. VERBI causa. Si quærantur omnes proportiones sesquiseptimæ; quoniam hic exprimitur pars septima, erit 7. minor terminus huius proportionis, maior autem erit 8. vna vnitate illum superans: atq; inter 8. & 7. prima proportio sesquiseptima existit. Qui duo termini si duplicentur, procreabuntur hi alij duo numeri 16. & 14. inter quos secunda proportio sesquiseptima cernitur: si triplicentur, erit tertia proportio eadem inter 24. & 21. Si deniq; centesima proportio eadem quæratur, ducendi erunt termini inuenti 8. & 7. per 100. vt gignantur numeri 800. & 700.*

*NVMERI quoq; omnes cuiusq; proportionis superparticularis comperientur, si constituantur duo ordines numerorum, quorum inferior à numero partem aliquotam denominante incipiat, superior verò à numero proximè maiore: vterq; verò per continuam additionem numeri, à quo initium sumit, primùm ad se, deinde ad conflatum numerum, &c. progrediatur. Exempla hic posuimus in proportionibus sesquialteris, sesquiseptimis, & sesquidecimis.*

*Proportiones sesquialteræ.*

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 39 | 42 | 45 | &c. |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | &c. |

Proportiones

*Proportiones sesquiseptimæ.*

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 | 80 | 88 | 96 | 104 | &c. |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70 | 77 | 84 | 91 | &c. |

*Proportiones sesquidecimæ.*

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 22 | 33 | 44 | 55 | 66 | 77 | 88 | 99 | 110 | 121 | 132 | &c. |
| 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 | &c. |

## DE PROPORTIONE SVPERPARTIENTE.

*PROPORTIO superpartiẽs est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem semel duntaxat continet, & insuper aliquot eius partes aliquotas, non efficientes vnam aliquotam. Qualis est proportio 8. ad 5. Nam 8. continent semel 5. & insuper tres vnitates, quarum quælibet est pars aliquota, vtpote quinta, huius numeri 5. Ipse autem ternarius ex illis compositus, non est pars vna aliquota numeri 5. Dixi partes illas aliquotas non debere constituere vnam partem aliquotam, ob multas proportiones, quæ primo aspectu videntur esse superpartientes, cùm tamen sint superparticulares; cuiusmodi proportio est inter 10. & 8. Quanquam enim 10. contineant semel 8. & duas insuper vnitates, quarum qualibet est octaua pars numeri 8. quia tamen binarius ex illis vnitatibus compositus, est quarta pars 8. non dicenda est ea proportio superpartiens, sed superparticularis, nempe sesquiquarta. Itaque vt duæ quantitates dicantur habere proportionem superpartientem, necesse est, vt maior quantitas minorem contineat semel, & plures eius partes aliquotas, quæ simul sumptæ non constituant vnam aliquotam. Quod quidam non aduertentes, mirum in modum genera proportionum inter se confundunt.*

*DIVIDITVR primùm proportio superpartiens, habita ratione numeri partium aliquotarum, in genera infinita. Si enim maior quantitas minorẽ semel comprehendit, & duas eius partes aliquotas nõ constituentes vnam, conficitur proportio superbipartiens; si tres partes aliquotas, supertripartiens; si decem, superdecupartiens, &c.*

*DIVIDITVR deinde quodlibet horũ generum, habita ratione denominationis partium aliquotarum, in infinita adhuc genera. Nam proportio superbipartiens inter duas quantitates inæquales, quarũ maior continet minorem semel, & duas eius partes tertias, dicitur superbipartiens tertias. Quòd si duæ illæ partes fuerint quintæ, appellabitur superbipartiens quintas, & ita de reliquis proportionibus superbipartientibus. Pari ratione superdecupartiens proportio inter duas quantitates inæquales, quarum maior excedit minorem decem partibus vndecimis, appellabitur superdecupartiens vndecimas. Quòd si decem illæ partes sint decimætertiæ, vocabitur proportio superdecupartiens decimastertias; & sic de reliquis omnibus superdecupartientibus proportionibus.*

*NE autem proportiones superpartientes vel inter se confundantur, vel cum proportionibus superparticularibus, quod à plerisque factum esse deprehendimus, diligenter consideranda sunt ea, quæ sequuntur. Primùm, in pronunciatione cuiuscunque proportionis superpartientis, duos indicari numeros, quorũ alter monstrat, quotnam partes aliquotæ minoris quantitatis in maiore supersint; alter verò, quotæ partes eæ sint, aut quantæ, indicat. Vt in proportione supertripartiente octauas, denotantur duo hi numeri 3. & 8. quorum prior significat, maiorem quantitatem dictæ proportionis continere semel minorem, & adhuc tres eius partes aliquotas, exprimiturq́; syllaba illa [tri] quando dicitur, supertripartiens: posterior autem per vocem [octauas] expressius ostendit, illas tres partes aliquotas, esse partes octauas minoris. Deinde in qualibet proportione supertripartiente duos prædictos numeros, (qui quidem facilè ex ipsa proportionis prolatione cognoscuntur, vt ex proximo exemplo patet) eiusmodi esse debere, vt nõ habeant vllam partem aliquotam communem, præter vnitatem, quæ quidem est omnium numerorum pars aliquota: hoc est, vt sint inter se primi. Numeros enim, qui præter vnitatem nullam aliam partem aliquotam communem admittunt, dicunt Arithmetici cũ Euclide, primos inter se, vt ex lib. 7. constabit. Tales sunt duo illi numeri 3. & 8. in superiori proportione supertripartiente octauas expressi. Nam sola vnitas, vt constat, est vtriusq; pars communis aliquota. Quare rectè denominabimus proportionem inter 11. & 8. supertri-*

*partientem octauas: qualis etiam est inter 22. & 16. Non autem rectè appellabitur proportio posterior inter 22. & 16. supersextupartiens sextasdecimas, quamuis maior minorem contineat semel, & insuper sex vnitates, quarum qualibet decimasexta pars est minoris: Non, inquam, rectè sic appellabitur; quia duo numeri 6. & 16. in ea expressi, habent partem aliquotam 2. per quam, vt in Arithmetica traditur, reducuntur $\frac{6}{16}$. ad $\frac{3}{8}$. atque ita proportio ea dicenda est, supertripartiens octauas. Sic etiam non rectè vocabitur proportio inter 9. & 6. supertripartiens sextas, quoniam duo numeri in ea denotati 3. & 6. habēt præter vnitatem, aliam communem mensuram, videlicet 3. Nam ternarius semel sumptus, se ipsum, & bis repetitus, senarium metitur, ac proinde $\frac{3}{6}$. reducentur per partem aliquotam communem 3. ad $\frac{1}{2}$. Quocirca talis proportio nuncupanda erit sesquialtera, cùm maior quantitas contineat semel minorem, & eius partem dimidiatam. Eadem ratione non rectè dicetur proportio inter 10. & 6. superquadripartiens sextas, quia duo numeri in ea notati 4. & 6. habent 2. communem partem aliquotam, præter vnitatem; atque ita dicenda erit talis proportio superbipartiens tertias, cùm maior quantitas contineat minorem semel, & duas eius partes tertias. Ex his igitur non difficile erit vnicuique, denominare conuenienter omnes proportiones superpartientes.*

*PERSPICVVM etiam ex dictis relinquitur, cur proportionem superbipartientem diuiserimus paulò antè, in proportionem superbipartientem tertias, quintas, septimas, nonas, &c. prætereuntes superbipartientem quartas, sextas, octauas, decimas, &c. Cùm enim hæ posteriores omissa, sint superparticulares, propterea quòd $\frac{2}{4}$. faciūt $\frac{1}{2}$. & $\frac{2}{6}$. constituunt $\frac{1}{3}$. & $\frac{2}{8}$. efficiunt $\frac{1}{4}$. denique $\frac{2}{10}$. æquiualent $\frac{1}{5}$. confunderentur proportiones superpartientes cum proportionibus superparticularibus, si & ipsa in numerum portionum superbipartientium referrentur. Quo modo autem dignoscendum sit, an duo quilibet numeri propositi habeant, præter vnitatem, aliquam aliam partem communem aliquotam, nécne, in Arithmetica docetur, demonstrabiturq; ab Euclide, ad initium libri 7.*

*INVENTIO omnium proportionum superpartientium cuiusque speciei sic se habet. Numerus tot vnitatibus maior denominatore partium aliquotarum, quæ in proportione nominantur, quot partes in eadem proportione exprimuntur, habebit primam proportionem speciei propositæ ad numerum easdem partes aliquotas denominantem. Qui duo termini duplicati, triplicati, vel per quemuis numerum multiplicati, gignent secundos numeros eandem proportionē habentes, tertios, vel alios, vt suprà dictum est. VERBI gratia, si inquirendi sint omnes numeri proportionis supertripartientis decimas, erunt primi huiusmodi numeri 13. & 10. quia maior superat minorem, qui partes decimas denominat, tribus vnitatibus, quot videlicet partium decimarum mentio fit, in proportione supertripartiente decimas. Dupli eorum, qui nimirum secundam proportionem constituunt, sunt 26. & 20. Tripli, 39. & 30. Centesima autem eiusmodi proportio erit 1300. ad 1000. cùm hi numeri centupli sint terminorum 13. & 10. qui primo loco inuenti sunt.*

*EOSDEM numeros omnium proportionum superpartientium reperies, si statuas duos numerorum ordines, quorum inferior incipiat à partium aliquotarum denominatore, superior autem à numero, qui numero partium nominatarum priorem illum superat: vterque deniq; ordo progrediatur per continuā additionem primi numeri sui ordinis ad seipsum, & ad numeros cōflatos, vt suprà diximus. Exempla hic adiecimus proportionū superbipartientium quintas, superoctupartientium nonas, & superseptupartientium decimas.*

*Proportiones superbipartientes quintas.*

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70 | 77 | 84 | 91 | 98 | &c. |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 | &c. |

*Proportiones superoctopartientes nonas.*

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 34 | 51 | 68 | 85 | 102 | 119 | 136 | 153 | 170 | 187 | &c. |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 | 90 | 99 | &c. |

*Proportiones superseptupartientes decimas.*

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 34 | 51 | 68 | 85 | 102 | 119 | 136 | 153 | 170 | 187 | &c. |
| 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | &c. |

## DE PROPORTIONE MVLTIPLICI SVPERPARTICVLARI.

*PROPORTIO multiplex superparticularis est habitudo maioris quātitatis ad minorem, quando*

quando maior minorem aliquoties, vt bis, ter, vel quater, &c. continet, & præterea vnam eius partem aliquotam. Cuiusmodi est proportio 9. ad 4. Continent enim 9. bis 4. (qua ex parte proportio hæc cum multiplici conuenit, vtpote cum dupla.) & insuper comprehendunt vnitatem, quæ est quarta pars numeri minoris; (qua in re proportioni superparticulari, nimirum sesquiquartæ, eadem proportio proposita similis est.) vt rectè proportio hæc composita dicatur ex multiplici, & superparticulari.

DIVIDITVR autem proportio hæc, habita ratione proportionis multiplicis, in genera infinita, veluti multiplex. Vt in duplam superparticularem; triplam superparticularem, &c. prout maior quantitas minorem bis comprehendit, aut ter, quatérve, &c. & insuper vnam partem minoris quantitatis aliquotam.

VNVMQVODQVE rursus horum generum in infinita alia subdiuiditur, habita ratione proportionis superparticularis. Nam proportio, verbi gratia, tripla superparticularis continet sub se triplam sesquialteram, (quando scilicet maior quantitas minorem ter continet, & præterea dimidiatam eius partem;) triplam sesquitertiam; triplam sesquiquartam, & ita infinitas alias.

REPERIEMVS verò omnes proportiones multiplices superparticulares cuiuslibet speciei, si aduertamus diligenter denominatorem partis aliquotæ, & proportionis multiplicis, quarum in proposita proportione mentio fit. Nam si denominatorem partis aliquotæ per denominatorem multiplicis proportionis multiplicemus, productoq; numero adijciamus vnitatem; habebit hic numerus conflatus ad denominatorem partis aliquotæ primam proportionem speciei propositæ. Et hi duo numeri duplicati, triplicati, vel per quemuis numerum multiplicati dabunt alios in eadem proportione numeros, nimirum secundos, tertios, vel alterius ordinis, pro numero vnitatum, quæ in numero multiplicante continentur, vt in aliis dictum est. EXEMPLI gratia, si inueniendi sint omnes numeri proportionis sextuplæ sesquinonæ; ducemus 9. denominatorem partis nonæ in 6. denominatorem multiplicis proportionis, productoq; numero 54. addemus 1. Conflatus namque numerus 55. ad 9. denominatorem partis nonæ expressæ habet primam proportionem sextuplam sesquinonam, ita vt in minoribus numeris integris ea dari nequeat. Dupli horum numerorum 110. & 18. erunt secundi numeri in eadem proportione: Tripli verò 165. & 27. erunt tertij, &c. ita vt eorundem centupli 5500. & 900. exhibeant centesimam proportionem eandem.

EASDEM proportiones multiplices superparticulares inuenies, si constituas duas series numerorum, quarum inferior incipiat à denominatore partis aliquotæ nominatæ, superior autem à numero conflato ex vnitate, & numero producto ex multiplicatione denominatoris partis aliquotæ eiusdem in denominatorem proportionis multiplicis expressæ: Vterq; verò ordo per continuam additionem primi numeri sui ordinis ad seipsum, & ad conflatum numerum, &c. progrediatur, vt in superioribus dictum est. Exempla hic vides proportionis duplæ sesquialteræ, triplæ sesquiseptimæ, & decuplæ sesquitertiæ.

*Proportiones duplæ sesquialteræ.*

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 | 75 | &c. |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | &c. |

*Proportiones triplæ sesquiseptimæ.*

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 22 | 44 | 66 | 88 | 110 | 132 | 154 | 176 | 198 | 220 | 242 | &c. |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70 | 77 | &c. |

*Proportiones decuplæ sesquitertiæ.*

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 31 | 62 | 93 | 124 | 155 | 186 | 217 | 248 | 279 | 310 | 341 | &c. |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 | &c. |

## DE PROPORTIONE MVLTIPLICI SVPERPARTIENTE.

PROPORTIO denique multiplex superpartiens est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior aliquoties complectitur minorem, & insuper aliquot eius partes aliquotas, non conficientes vnam: qualis est proportio 11. ad 3. Dixi, non conficientes vnam, ob causam dictam in proportione superpartiente. Nam si partes illæ aliquotæ vnam efficerent, non esset proportio multiplex superpartiens, sed multiplex superparticularis. Vt proportio 20. ad 6. non dicenda est multiplex superbipartiens sextas, quamuis 20. contineant ter 6. & duas *ſextas; quia duæ ſextæ conficiunt vnam tertiam partem. Quare vocabitur proportio tripla ſeſquitertia.*

*DISTRIBVITVR autem hæc proportio primùm, habita ratione proportionis multiplicis, vt multiplex in duplam ſuperpartientem; triplam ſuperpartientem, &c.*

*DEINDE quælibet harũ, habita ratione numeri partium, ſub ſe cõtinet genera infinita. Vt ſub tripla ſuperpartiente, continetur tripla ſuperbipartiens; tripla ſupertripartiens, &c.*

*POSTREMO quæuis iſtarum, habita ratione denominationis partium aliquotarum, in genera adhuc infinita ſecatur. Vt tripla ſupertripartiens diuiditur in triplam ſupertripartientem quartas; in triplam ſupertripartientem quintas, &c. Quarum omnium definitiones & exempla non difficile eſt cuiuis ex dictis depromere, &c.*

*OMNES proportiones multiplices ſuperpartientes poſtremæ diuiſionis ita inueniemus. Denominator partium aliquotarum propoſitarum multiplicetur per denominatorem proportionis multiplicis propoſitæ, productoq; numero addatur numerus partium aliquotarũ expreſſus. Conflatus enim numerus ad earundem partium aliquotarum denominatorem habet primam proportionem earum, quæ inueſtigantur. Atq; hi duo numeri, ſi duplicentur, triplicentur, vel per alium quemcunque numerum multiplicentur, dabunt ſecundos numeros, tertios, & alios in eadem proportione. VELVTI ſi quærantur omnes proportiones quadruplæ ſuperoctupartientes vndecimas, ducemus 11 denominatorem partium vndecimarum in 4. denominatorem proportionis quadruplæ, numeroq; procreato 44. adijciemus 8. numerum octo partium. Nam conflatus numerus 52. ad 11. denominatorem partium habet primam proportionem quæſitam. Secundi numeri erunt 104. & 22. Tertij 156. & 33. nimirum illorum dupli, tripli, &c. Centupli autem eorundem, vt 5200. & 1100. habent centeſimam proportionem inter omnes quadruplas ſuperoctupartientes vndecimas.*

*QVOD ſi duo numerorum ordines conſtituantur, quorũ inferior incipiat à denominatore partium aliquotarum propoſitarum, & per continuam eiuſdem additionem, primùm ad ſe, deinde ad numerum conflatum, &c. progrediatur; ſuperior verò incipiat à numero conflato ex numero producto ex eodem partium denominatore in denominatorẽ multiplicis proportionis datæ, & ex numero partium expreſſo, ac per eiuſdem continuam additionem primùm ad ſe, deinde ad conflatum numerum, &c. progrediatur; obtinebimus quoque omnes numeros oblatæ proportionis, vt in ſuperioribus quoq; diximus. Exempla hic vides in proportione dupla ſuperbipartiente tertias, dupla ſuperquintupartiente ſextas, & quintupla ſupertripartiente quintas.*

*Proportiones duplæ ſuperbipartientes tertias.*

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 | 80 | 88 | 96 | 104 | 112 | &c. |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 39 | 42 | &c. |

*Proportiones duplæ ſuperquintupartientes ſextas.*

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 34 | 51 | 68 | 85 | 102 | 119 | 136 | 153 | 170 | 187 | 204 | &c. |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 | 66 | 72 | &c. |

*Proportiones quintuplæ ſupertripartientes quintas.*

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 28 | 56 | 84 | 112 | 140 | 168 | 196 | 224 | 252 | 280 | 308 | &c. |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | &c. |

## DE PROPORTIONIBVS RATIONALIBVS MINORIS INAEQVALITATIS.

*OMNIA, quæ dicta hactenus ſunt de quinque generibus proportionũ rationalium maioris inæqualitatis, intelligenda ſunt quoque de quinque generibus correſpondentibus minoris inæqualitatis, præmiſſa tamen ſemper præpoſitione (ſub,) vt dictum eſt. Nam ſi in exemplis allatis conferantur minores quantitates cum maioribus, habebuntur proportiones minoris inæqualitatis correſpondentes. Quemadmodum enim proportio 100. ad 1. eſt centupla, ita proportio 1. ad 100. eſt ſubcentupla. Sicut etiam proportio 11. ad 3. eſt tripla ſuperbipartiens tertias, ita proportio 3. ad 11. eſt ſubtripla ſuperbipartiens tertias; Atque ita de cæteris.*

*NON videtur autem hoc loco prætermittenda inſignis vtilitas tabulæ Pythagoricæ, quam cap. 4. noſtræ Arithmeticæ conſtruximus, in omnibus proportionibus rationalibus inueniendis: quæ eiuſmodi eſt. Conſtructa tabula Pythagorica, (Eſt autem conſtructio facillima, cùm numeri in ſiniſtro latere conſtituant ſeriem numerorum naturalem, in infinitumq; progredi poſſint; quælibet autem linea in tranſuerſum procreetur ex continua additione numeri in ſiniſtro latere, à quo incipit, ad ſeipſum, & ad numerum conflatum, & ſic in infinitum:*

*infinitum: ita vt hæ lineæ in transuersum nil aliud sint, quàm progreßiones Arithmeticæ numerorum, quorum differentiæ sint primi numeri earundem linearum.) primùm omnes numeri cuiusuis proportionis multiplicis reperientur hoc modo. Denominator datæ proportionis multiplicis in suprema linea acceptus ad vnitatem in sinistro latere habet primam eam proportionē multiplicem: Numeri autem sub eodem denominatore descendentes per lineam rectam ad numeros sub vnitate in latere sinistro positos, singuli ad singulos, habent secundam, tertiam, quartam, & alias proportiones eiusdem speciei, in infinitum. Vt prima proportio noncupla erit inter 9. supremæ lineæ ad 1. in sinistro latere; secunda inter 18. sub 9. ad 2. sub 1; tertia inter 27. eiusdem lineæ à 9. descendentis; & 3. in sinistro latere, &c. atque ita de aliis proportionibus multiplicibus dicendum est.*

DEINDE *omnes numeri cuiusuis proportionis superparticularis sic inuenientur. Ad denominatorem partis aliquotæ, quæ in proportione exprimitur, in latere supremo acceptum habet proximè insequens numerus primam proportionem datam: Et si per lineam rectam ab hisce duobus numeris descēdamus, reperiemus omnes alios numeros eiusdē proportionis, vt de multiplicibus dictum est. Verbi gratia, prima proportio sesquioctaua erit 9. ad 8. aliæ verò ordine erunt inter numeros sub illis positos, vt secunda inter 18. & 16. tertia inter 27. & 24. &c.*

TERTIO *sic reperies omnes proportiones superpartientes cuiuslibet speciei. Post denominatorem partium aliquotarum, quarum in proportione data mentio fit, in supremo latere acceptū numera tot numeros, quot partes in eadem proportione nominantur. Vltimus enim ad denominatorē earundem partium habebit primam proportionem superpartientem propositam. Secunda autem, tertia, quarta, & aliæ ordine, reperientur inter numeros sub illis duobus collocatos. Exempli causa, si quis omnes numeros proportionis superoctupartiētis vndecimas desideret, sumat in latere supremo denominatorem partium, id est, 11. post quem numeret hos octo numeros, propter octo partes, 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. Vltimus enim 19. ad 11. habet primam proportionem superoctupartientem vndecimas. Secundam habebit numerus 38. ad 22. tertiam. 57. ad 33. & alias alij numeri sub 19. & 11. per rectam lineam descripti.*

QVARTO *numeros omnes cuiuslibet proportionis multiplicis superparticularis inuenies hac ratione. In supremo latere accipe numerum, qui ad denominatorem partis aliquotæ expressæ habeat proportionem multiplicem, cuius mentio fit. Numerus enim proximè insequens habebit ad denominatorem partis aliquotæ primam proportionem propositam: Secundam autem, tertiam, & alias habebunt numeri sub illis duobus positi. Vt autem scias numerum, qui ad denominatorem partis aliquotæ habeat multiplicem proportionem propositam, sumendus est denominator partis in supremo latere, & in sinistro denominator proportionis multiplicis: Vel prior denominator in sinistro latere, & posterior in supremo.*

TABVLA PYTHAGORICA.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | 36 | 38 | 40 | 42 | 44 | 46 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 39 | 42 | 45 | 48 | 51 | 54 | 57 | 60 | 63 | 66 | 69 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 | 44 | 48 | 52 | 56 | 60 | 64 | 68 | 72 | 76 | 80 | 84 | 88 | 92 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 | 75 | 80 | 85 | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 | 115 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 | 66 | 72 | 78 | 84 | 90 | 95 | 102 | 108 | 114 | 120 | 126 | 132 | 138 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70 | 77 | 84 | 91 | 98 | 105 | 112 | 119 | 126 | 133 | 140 | 147 | 154 | 161 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 | 80 | 88 | 96 | 104 | 112 | 120 | 128 | 136 | 144 | 152 | 160 | 168 | 176 | 184 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 | 90 | 99 | 108 | 117 | 126 | 135 | 144 | 153 | 162 | 171 | 180 | 189 | 198 | 207 |
| 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 | 130 | 140 | 150 | 160 | 170 | 180 | 190 | 200 | 210 | 220 | 230 |
| 11 | 22 | 33 | 44 | 55 | 66 | 77 | 88 | 99 | 110 | 121 | 132 | 143 | 154 | 165 | 176 | 187 | 198 | 209 | 220 | 231 | 242 | 253 |
| 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | 72 | 84 | 96 | 108 | 120 | 132 | 144 | 156 | 168 | 180 | 192 | 204 | 216 | 228 | 240 | 252 | 264 | 276 |
| 13 | 26 | 39 | 52 | 65 | 78 | 91 | 104 | 117 | 130 | 143 | 156 | 169 | 182 | 195 | 208 | 221 | 234 | 247 | 260 | 273 | 286 | 299 |
| 14 | 28 | 42 | 56 | 70 | 84 | 98 | 112 | 126 | 140 | 154 | 168 | 182 | 196 | 210 | 224 | 238 | 252 | 266 | 280 | 294 | 308 | 322 |

IN *angulo enim communi reperies numerum multiplicem, quem desideras. Exempli gratia. Inueniendi sint omnes numeri proportionis triplæ sesquiquintæ. Primùm quæratur numerus ad denominatorem partis aliquotæ, hoc est, ad 5. triplus, nimirum 15. quem reperies in communi angulo denominatoris proportionis triplæ, qui est 3. & denominatoris partis aliquotæ, qui est 5. quorum alteruter in supremo latere, & alter in si-*

*nistro sumatur. Deinde hic numerus triplus, nimirum 15. accipiatur in latere supremo. Numerus enim 16. proximè insequens ad denominatorem partis aliquotæ, id est, ad 5. habet primam proportionem triplam sesquiquintã. Alias proportiones eiusdẽ speciei reperies in numeris, q́ sub illis duobus ponuntur, vt de aliis dictũ est.*

*QVINTO, & vltimo, reperientur omnes numeri cuiuslibet proportionis multiplicis superpartientis, hoc modo: In latere supremo accipiatur numerus, qui ad denominatorem partium aliquotarum habeat proportionem multiplicem propositam: qui quidem inuenietur quoque in angulo communi denominatoris proportionis multiplicis, & denominatoris partium aliquotarum. Deinde post acceptum numerũ multiplicem numerentur tot numeri, quot partium aliquotarum fit mentio. Vltimus namque ad denominatorẽ partium aliquotarũ comperietur habere primam datam proportionem multiplicem superpartientem. Alias proportiones eiusdem speciei reperies sub illa prima, vt de aliis diximus. Vt si cupiat quis omnes proportiones quadruplas supertripartientes quintas, Primùm inquirat numerum quadruplum denominatoris partium quintarum, qui est 5. Inueniet autem eum numerum esse 20. quippe qui in angulo communi denominatoris proportionis quadruplæ, qui est 4. & denominatoris partium quintarum, qui est 5. descriptus sit. Deinde post numerum hunc 20. inuẽtum nùmeret in supremo latere tres hos numeros, 21. 22. 23. quòd tres partes quintæ nominentur. Nam vltimus 23. ad 5. hoc est, ad denominatorem partium, habet primam proportionem quadruplam supertripartientem quintas. Numeri aliarum proportionum eiusdem speciei continentur sub duobus illis numeris, vt in aliis traditum est.*

*INVENTIS hac arte omnibus numeris cuiuslibet proportionis maioris inæqualitatis, si minores cum maioribus conferantur, inuenti quoq; erunt omnes numeri eiusdem proportionis minoris inæqualitatis.*

*NEQVE verò silentio transiri debet hoc loco admirabilis quædam proprietas cuiuslibet proportionis rationalis; quæ sic se habet. Inuentis minimis, siue primis terminis, numerísue cuiuslibet proportionis, si constituatur progressio, seu proportionalitas Arithmetica, incipiens à numero, qui vna vnitate minor sit, quàm differentia minimorum illorum numerorum, progrediens q́; per ipsammet eandem differentiam numerorum minimorum, cadent inter primos numeros illius proportionis tot numeri in serie naturali numerorum, quot vnitates sunt in primo termino constitutæ tuæ proportionalitatis Arithmeticæ; Inter secundos verò, qui primorum dupli sunt, tot, quot in secundo termino eiusdem progressionis continentur vnitates; Inter tertios autem tot, quot vnitates in tertio termino eiusdem progressionis continentur: atq; ita deinceps. Exempli gratia, si proponatur portio dupla, cuius minimi numeri sunt 2. & 1. constituetur progressio incipiens ab 0. (quòd differentia inter 2. & 1. sit 1. & figura 0. vna vnitate minor, quàm 1.) progrediens q́; per continuam additionem vnitatis, nimirum differentiæ inter 2. & 1. primùm ad 0. deinde ad conflatum numerum 1. Postea ad numerum confectum 2. &c. hoc scilicet modo: 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. &c. Itaq; inter primos numeros duplæ proportionis, hoc est, inter 2. & 1. nullus cadit medius numerus; Inter secundos, qui sunt 4. & 2. cadet vnus medius, nimirum 3. Inter tertios 6. 3. duo medij intercipiuntur 5. 4. Inter quartos 8. 4. tres medij existunt, 7. 6. 5. & sic deinceps. Id quod in hac formula apparet, vbi numeri extremi cuiuslibet lineæ habent proportiones omnes duplas, vt primam, secundam, tertiam, &c. Multitudines autẽ numerorum seriei naturalis inter eos cadentium respondent numeris superioris proportionalitatis Arithmeticæ.*

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2. | 1. | | | | | | | | | |
| 4. | 3. | 2. | | | | | | | | |
| 6. | 5. | 4. | 3. | | | | | | | |
| 8. | 7. | 6. | 5. | 4. | | | | | | |
| 10. | 9. | 8. | 7. | 6. | 5. | | | | | |
| 12. | 11. | 10. | 9. | 8. | 7. | 6. | | | | |
| 14. | 13. | 12. | 11. | 10. | 9. | 8. | 7. | | | |
| 16. | 15. | 14. | 13. | 12. | 11. | 10. | 9. | 8. | | |
| 18. | 17. | 16. | 15. | 14. | 13. | 12 | 11. | 10. | 9. | |
| 20. | 19. | 18. | 17. | 16. | 15. | 14. | 13. | 12. | 11. | 10. |

*QVOD si superiori proportionalitati Arithmeticæ superponas seriem naturalem numerorum, quæ ab 1. incipiat, ita vt singuli eius termini singulis terminis constitutæ tuæ Arithmeticæ proportionalitatis respondeant, dicto citius cognoscemus, quotnam numeri cadant medij inter quosuis duos numeros proportionis duplæ. Numeri enim seriei huius naturalis indicabunt, quem locum duo numeri duplæ proportionis obtinent, respondentes verò numeri in proportionalitate Arithmetica constituta multitudinem numerorum inter illos cadentium significabunt. Exemplum hic vides.*

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ordo proportionum duplarum. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | &c. |
| Multitudo mediorũ numerorũ. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | &c. |

Itaque

*Itaq; si scire cupias, quot numeri cadant inter vndecimos numeros proportionis duplæ, cape in serie naturali numerum 11. cui supponitur numerus 10. Dico ergo 10. numeros inter illos intercipi, & sic de cæteris.*

PROPONATVR *deinde proportio decupla, cuius termini minimi sunt 10. & 1. Differentia eorũ est 9. & numerus vna vnitate minor, 8. Progreßio ergo Arithmetica incipiet ab 8. progredieturq; per continuam additionem 9. primùm ad 8. deinde ad numerum conflatum 17. & sic deinceps; vt hic videre licet, vbi suprà scripsimus etiam seriem numerorum naturalem, cuius idem vsus hic est, qui suprà fuit in proportione dupla.*

| Ordo proportionum decuplarum. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | &c. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Multitudo mediorũ numerorum. | 8 | 17 | 26 | 35 | 44 | 53 | 62 | 71 | &c. |

*Itaque inter primos numeros decuplæ proportionis cadent 8. numeri medij; Et 17. inter secundos: Et 26. inter tertios. At inter octauos intercipientur 71. numeri medij. & sic de cæteris. Vt hæc formula declarat.*

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | | |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 |

RVRSVS *detur proportio quæcunque superparticularis. Et quoniam duo minimi numeri differunt sola vnitate, quemadmodum & minimi numeri proportionis duplæ, inseruient hic eadem progreßiones, quæ in dupla proportione, ita vt idem numerus sit numerorum mediorum hic, qui ibi. Vt hic perspicuum est in proportione sesquioctaua.*

| Ordo proportionis sesquioctauæ. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | &c. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Multitudo medior. numerorum. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | &c. |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9. | 8. | | | | | | |
| 18. | 17. | 16. | | | | | |
| 27. | 26. | 25. | 24 | | | | |
| 36. | 35. | 34. | 33. | 32. | | | |
| 45. | 44. | 43. | 42. | 41. | 40. | | |
| 54. | 53. | 52. | 51. | 50. | 49. | 48. | |
| 63. | 62. | 61. | 60. | 59. | 58. | 57. | 56. |

OFFERATVR *quoque proportio superquadrupartiens septimas, cuius minimi termini sunt 11. & 7. Differentia eorum est 4. Progreßio ergò Arithmetica incipiet à 3. progredieturq; per 4. vt hic patet, vnà cum serie naturali ei superimposita.*

| Ordo propor. superquadr. sept. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | &c. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Multitudo medior. numerorũ. | 3 | 7 | 11 | 15 | 19 | 23 | 27 | 31 | &c. |

IGITVR *inter primos numeros proportionis superquadrupartientis septimas comprehenduntur 3. numeri medij. Et 7. inter secundos: Et 23. inter sextos, atq; ita de cæteris, vt hic vides.*

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | 11. | 10. | 9. | 8. | 7. | | | | | | |
| | | | | 22. | 21. | 20. | 19. | 18. | 17. | 16 | 15. | 14 | | | | |
| | | 33 | 32. | 31. | 30. | 29. | 28 | 27 | 26 | 24 | 24 | 23 | 22. | 21. | | |
| 44 | 43. | 42. | 41. | 40 | 39. | 38. | 37. | 36 | 35. | 34 | 33. | 32. | 31. | 30. | 29. | 28. |

ITEM *data sit proportio dupla, sesquisexta, cuius numeri minimi sunt 13. & 6. Differentia eorum est 7. Incipiet ergo progreßio à 6, habebitq; differentiam 7. inter eius numeros, vt hic cernitur, vnà cum serie naturali numerorum.*

| Ordo proport. dupl sesquisex. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | &c. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Multitudo med. numerorum. | 6 | 13 | 20 | 27 | 34 | 41 | 48 | 55 | &c. |

INTER *primos ergo numeros proportionis duplæ sesquisextæ cadent 6. medij numeri; inter secundo, 13. & inter octauos, 55 &c. veluti hic cernitur.*

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | 13. | 12. | 11. | 10 | 9. | 8. | 7. | 6. | | | | | | | |
| | | | 26. | 25. | 24. | 23. | 22. | 21. | 20. | 19. | 18. | 17. | 16 | 15. | 14. | 13. | 12. | | | |
| 39. | 38. | 37. | 36. | 35. | 34. | 33. | 32. | 31. | 30. | 29. | 28. | 27.26 | 25. | 24. | 23 | 22. | 21. | 20. | 19. | 18. |

POSTREMO *propositum sit idem experiri in proportione dupla superbipartiente tertias, cuius minimi termini sunt 8. & 3. Et quia eorum differentia est 5. sumet progreßio Arithmetica initium à 4. habe-*

búntque eius numeri differentiam 5. veluti hîc manifestum est, vnà cum numerorum naturali serie.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ordo propor. dupl. superbip. tertias. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | &c. |
| Multitudo mediorum numerorum. | 4 | 9 | 14 | 19 | 24 | 29 | 34 | 39 | 44 | &c. |

Cadent ergo inter duos primos numeros proportionis duplæ superbipartientis tertias, 4. numeri medij, & inter secundos, 9. & inter septimos, 34. &c. vt hîc perspicuum est.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | 8. | 7. | 6. | 5. | 4. | 3. | | | | | | | |
| | | | | | 16. | 15. | 14. | 13. | 12. | 11. | 10. | 9. | 8. | 7. | 6. | | | | | |
| | | | 24 | 23. | 22. | 21. | 20. | 19. | 18. | 17. | 16. | 15. | 14. | 13. | 12. | 11. | 10. | 9. | | |
| 32. | 31. | 30. | 29. | 28. | 27. | 26. | 25. | 24. | 23. | 22. | 21. | 20. | 19. | 18. | 17. | 16. | 15. | 14. | 13. | 12. |

MANIFESTVM autem est, quod de proportionibus maioris inæqualitatis hoc loco diximus, verum quoque esse de minoris inæqualitatis proportionibus, cùm ijdem numeri inter maiorem numerum ac minorem, & inter minorem, ac maiorem interijciantur.

CAETERVM ex iis, quæ de quinque speciebus proportionis rationalis tam maioris, quàm minoris inæqualitatis diximus, perspicuè colligitur, non posse plura esse genera proportionis rationalis maioris inæqualitatis, quàm quinque iam exposita. Cum enim, vt Euclides demonstrat propos. 5. lib. 10. commensurabiles quantitates quæcunque, inter quas, vt diximus, est proportio rationalis, inter se proportionem eam habeant, quam numerus ad numerum; fit, vt omnis proportio rationalis quarumcunque, quantitatum continuarum assignari, seu exhiberi possit in numeris. Aut igitur maior numerus comprehendit minorem, ad quem refertur, aliquoties perfectè; qua ratione constituitur proportio multiplex: Aut semel tantummodo, ac præterea vnam eius partem aliquotam; & sic habetur proportio superparticularis: Aut semel duntaxat, & insuper plures partes eius aliquotas non facientes vnam; & conficitur proportio superpartiens: Aut aliquoties, & vnam eius partem aliquotam; & colligitur proportio multiplex superparticularis: Aut denique aliquoties, & plures eius partes aliquotas non facientes vnã; & exurgit proportio multiplex superpartiens. Neque verò alio modo maior quantitas minorem continere, aut minor quantitas à maiore contineri potest. Eadem ratione constat, totidem esse genera proportionis minoris inæqualitatis. Rectè ergo proportionem rationalem tũ maioris inæqualitatis, tũ minoris, in quinque genera, quæ exposuimus, partiti sumus.

## DE PROPORTIONVM RATIONALIVM DENOMINATORIBVS.

QVONIAM verò non exiguus est vsus Denominatorum proportionum rationalium, quas hactenus exposuimus, non abs re erit, paucis docere, à quibusnam numeris singulæ proportiones denominentur. Denominator ergo cuiuslibet proportionis, dicitur is numerus, qui exprimit distinctè, & apertè habitudinem vnius quãtitatis ad alteram. Vt denominator proportionis octuplæ est 8. Nam hic numerus indicat, maiorem quantitatem proportionis octuplæ, continere minorem octies. Similiter denominator proportionis sesquiquintæ est $1\frac{1}{5}$; quoniam iste numerus significat, maiorem quantitatem proportionis sesquiquintæ, continere minorem semel, & quintam eiusdem partem. Atque ita de reliquarum proportionum denominatoribus dicendum erit. Inde factum est, vt arbitror, quòd Euclides in lib. 6. & plerique alij Mathematici, appellent denominatorem cuiusuis proportionis, quantitatem illius; quia denominator, vt diximus, ostendit, quanta sit vna quantitas ad alteram, cum qua confertur, vt ex propositis exemplis constat.

Ex iis autem, quæ diximus, facile colligi potest denominator cuiusque proportionis. Denominator enim proportionis multiplicis, quæcunque ea sit, est numerus integer tot continens vnitates, quoties maior quantitas minorem continere dicitur in ea proportione, cuius denominator quæritur. Vt proportionis duplæ denominator est 2. Noncuplæ, 9. Centuplæ, 100. millecuplæ, 1000. &c. Denominatores autem proportionum submultiplicium multiplicibus correspondentium, sunt partes aliquotæ à denominatoribus proportionum multiplicium, quibus respondent, denominatæ. Vt denominator proportionis subduplæ, est $\frac{1}{2}$; subquintuplæ, $\frac{1}{5}$. subnoncuplæ, $\frac{1}{9}$: subcentuplæ, $\frac{1}{100}$: submillecuplæ, $\frac{1}{1000}$. Eodem modo denominatores aliarum proportionum submultiplicium reperiemus. Itaque denominator cuiuscunque proportionis submultiplicis

tiplicis est numerus fractus, cuius numerator perpetuò est vnitas, denominator autem, numerus proportionem multiplicem correspondentem denominans, vt ex prolatis exemplis patet. Neq; verò vlla difficultas est in cuiusq; proportionis multiplicis, vel submultiplicis denominatore reperiendo, si ea quæ dicta sunt, rectè intelligantur: quippe cum ipsa prolatio proportionis denominatorem offerat, vt ex datis exemplis manifestum est.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis superparticularis est vnitas cum parte illa aliquota, quam maior quantitas debet vltra minorem comprehendere. Vt proportionis sesquialteræ denominator est $1\frac{1}{2}$; sesquioctauæ, $1\frac{1}{8}$; sesquimillesimæ, $1\frac{1}{1000}$, &c. Neq; difficile erit denominatorem cuiusq; proportionis superparticularis inuenire; cum ipsa proportionis prolatio denominatorem exprimat per suam partem aliquotam, vt ex datis exemplis perspicuum est. Denominatores autem proportionum subsuperparticularium correspondentium, sunt fractiones, quarum numeratores vna tantum vnitate minores sunt earundem denominatoribus. Vt denominator proportionis subsesquialteræ, est $\frac{2}{3}$; subsesquioctauæ, $\frac{8}{9}$; subsesquimillesimæ, $\frac{1000}{1001}$; &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis subsuperparticularis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partis aliquotæ in proportione expressæ, & pro eiusdem fractionis denominatore, numerus vnitate maior. Vt denominator proportionis subsesquidecimæ, est $\frac{10}{11}$. cum huius fractionis numerator sit numerus denominans partem decimam, nimirum 10. denominator autem eiusdem fractionis numeratorem superet vnitate, &c. Reperiemus quoq; denominatorem cuiusuis proportionis subsuperparticularis hoc modo. Denominatorem correspondentis proportionis superparticularis reuocabimus ad vnam fractionem, vt in Arithmetica docuimus; cuius quidem numerator superabit hic semper vna vnitate denominatorem, qui etiam denominator est partis aliquotæ, cuius mentio fit in oblata proportione. Nam si huius fractionis terminos inuertamus, vt ex numeratore fiat denominator, & ex denominatore numerator, habebimus denominatorem propositæ proportionis subsuperparticularis. Vt si offeratur proportio subsesquiseptima: quoniam denominator proportionis sesquiseptimæ, quæ illi respondet, est $1\frac{1}{7}$. qui reuocatur ad hanc fractionem $\frac{8}{7}$. cuius numerator vna vnitate maior est, quàm denominator partis aliquotæ. Quare si eam fractionem inuertamus hoc modo $\frac{7}{8}$. dicemus denominatorem proportionis subsesquiseptimæ esse $\frac{7}{8}$. Facilius deniq; cuiusuis proportionis subsuperparticularis denominator fortassis reperietur, si inueniantur primi numeri habentes proportionem superparticularem respondentem, vt suprà docuimus. Nam fractio, cuius numerator sit eorum numerorum minor, denominator verò maior, erit denominator propositæ proportionis. Vt si proponatur proportio subsesquiseptima: quoniam primi, siue minimi numeri habentes proportionem sesquiseptimam, sunt 8. & 7. si ex minore fiat numerator, & ex maiore denominator, conficiemus hanc fractionem $\frac{7}{8}$. pro denominatore proportionis subsesquiseptimæ propositæ, vt prius.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis superpartientis est vnitas cum illis partibus aliquotis non efficientibus vnam, quas maior quantitas debet vltra minorem continere. Vt denominator proportionis supertripartientis septimas est $1\frac{3}{7}$; supertripartientis vigesimas, $1\frac{3}{20}$. &c. Neq; vlla difficultas est in huiusmodi denominatoribus inueniendis: propterea quòd prolatio ipsa proportionis denominatorem proprium exhibet, vt ex superioribus exemplis liquidò constat. Denominatores autem proportionum subsuperpartientium, sunt fractiones, quarum numeratores tot vnitatibus minores sunt, quàm earundem fractionum denominatores, quot partibus aliquotis maior quantitas minorem superat. Vt denominator proportionis subsupertripartientis septimas, est $\frac{7}{10}$; subsupertripartientis vigesimas, $\frac{20}{23}$; &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis subsuperpartientis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partium aliquotarum, quæ in proportione exprimuntur; cui si addatur numerus earundem partium, habebitur eiusdem fractionis denominator. Vt denominator proportionis subsuperquadripartientis vndecimas, est $\frac{11}{15}$, cum huius fractionis numerator sit numerus denominans partes vndecimas, nimirum 11. cui additus est numerus 4. quatuor partium, vt fiat eiusdem fractionis denominator 15. Denominator autem proportionis subsupertripartientis quintas est hac fractio, $\frac{5}{8}$. Nam eius numerator est numerus denominans partes quintas, nimirum 5. Denominator autem 8. eiusdem fractionis conflatus est ex illo numeratore 5. & ex numero 3. trium partium. Eademq; ratione reperiemus & aliarũ proportionum subsuperpartientium denominatores. Quos hac etiam ratione inuenies. Reuoca denominatorem proportionis cuiusque superpartientis correspondentis ad vnã fractionem, vt in Arithmetica docuimus; cuius quidem numerator denominatorem, qui partes etiam aliquotas expressas denominat, superabit hic semper tot vnitatibus, quot sunt partes aliquotæ. Nam huius fractionis numeri inuersi, vt ex numeratore fiat denominator, & ex denominatore numerator, dabunt denominatorem propositæ propositionis subsuperpartientis. Vt denominator proportionis subsuperdecupartiẽtis decimastertias est $\frac{13}{23}$. quia denominator proportionis superdecupartientis decimastertias est $1\frac{10}{13}$. qui ad hãc fractionem $\frac{23}{13}$. reuocatur, cuius numeri inuersi efficiunt hanc fractionem $\frac{13}{23}$. Denique facilius cuiusuis proportionis subsuperpartientis denominator inuenietur fortaßis, si reperiantur primi vel minimi numeri habentes proportionem superpartientem correspondentem, vt suprà tradidimus. Fractio etenim, cuius numerator sit eorũ numerorum minor, denominator autẽ maior, denominator erit propositæ proportionis subsuperpartientis. Veluti si proponatur proportio subsuperquadrupartiens nonas: quoniam minimi numeri habentes proportionem superquadrupartientem nonas, sunt 13. & 9. faciemus fractionem $\frac{9}{13}$. pro denominatore proportionis subsuperquadrupartientis nonas: & sic de cæteris.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis multiplicis superparticularis est numerus integer multiplicem proportionem expressam denominãs, cum illa parte aliquota, quam maior quantitas continere debet vltra minorem quantitatem. Vt denominator proportionis triplæ sesquiseptimæ, est $3\frac{1}{7}$. Quintuplæ sesquinonæ, $5\frac{1}{9}$, &c. Vt nullus omnino labor sit, exhibere denominatorem cuiuslibet proportionis multiplicis superparticularis; quippe cùm ipsa prolatio proportionis distinctè exprimat & denominatorem multiplicis proportionis, & partem aliquotam, vt exempla proposita declarant. Denominatores autem proportionum submultiplicium superparticularium, sunt fractiones, quarum numeratores numeri sunt denominantes partes aliquotas in proportionibus expressas. Vt denominator proportionis subtriplæ sesquiseptimæ, est $\frac{7}{22}$; subquintuplæ sesquinonæ, $\frac{9}{46}$, &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis submultiplicis superparticularis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partis aliquotæ: qui si multiplicetur per denominatorem proportionis multiplicis, addaturq́; vnitas numero producto, habebitur denominator eiusdem fractionis. Vt denominator proportionis subquadruplæ sesquisextæ, est $\frac{6}{25}$; cùm huius fractionis numerator 6. denominet partes sextas, isq́; ductus sit in 4. denominatorem proportionis quadruplæ, ac producto numero 24. addita vnitas, vt eiusdem fractionis denominator conficiatur 25. &c. Iidem denominatores proportionum submultiplicium superparticularium inuenientur, si denominator cuiusuis proportionis multiplicis superparticularis respondentis reuocetur ad vnam fractionem, vt in Arithmetica docuimus, multiplicando nimirum denominatorem multiplicis proportionis per denominatorem fractionis ei adhærentis, & producto numero vnitatem, id est, numeratorem eiusdem fractionis addendo. Nam si huius fractionis termini commutent ordinem inter se, fiet denominator proportionis propositæ. Vt si detur proportio subquadrupla sesquisexta: quoniam denominator correspondentis proportionis quadruplæ sesquisextæ est $4\frac{1}{6}$. ducemus 4. id est, denominatorem multiplicis proportionis, in 6. hoc est, in denominatorem fractionis adhærentis, numeroq́; producto 24. addemus 1. nimirum numeratorem eiusdem fractionis, vt totum denominatorem $4\frac{1}{6}$. reuocemus ad fractionem $\frac{25}{6}$. Cuius termini si inter se ordinem permutent, fiet hæc fractio $\frac{6}{25}$. pro denominatore proportionis subquadruplæ sesquisextæ. Eodémque modo in cæteris agendum erit. Denique facilius fortasse denominatorem cuiusque proportionis submultiplicis superparticularis inuenies, si duos primos, minimósve numeros proportionis multiplicis superparticularis correspondentis reperias, vt suprà traditum est. Nam fractio, cuius numerator sit minor eorum numerus, denominator autem maior, erit denominator proportionis propositæ. Vt si offeratur proportio subtripla sesquiseptima: quoniam primi siue minimi numeri proportionis triplæ sesquiseptimæ sunt 22. & 7. fiet ex illis fractio hæc $\frac{7}{22}$. pro denominatore proportionis subtriplæ sesquiseptimæ, atq; ita de cæteris.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis multiplicis superpartientis, est numerus integer denominans proportionem multiplicem in ea expressam, cum illis partibus aliquotis, non constituentibus vnam, quas maior quantitas vltra minorem debet comprehendere. Vt denominator proportionis triplæ superquincupartientis octauas, est $3\frac{5}{8}$; quadruplæ superbipartiẽtis quin-

*tis quintas, $4\frac{2}{5}$. &c. Nihil enim difficultatis habet hæc inuentio denominatorum in proportionibus multiplicibus superpartientibus, quòd apertè & distinctè in qualibet earum exprimatur tam denominator proportionis multiplicis in ea contentæ, quàm partes aliquotæ, vt perspicuè in exemplis prolatis apparet. Denominatores verò proportionum submultiplicium superpartientium, sunt fractiones, quarum numeratores numeri sunt denominantes partes aliquotas, quæ in proportionibus expressæ sunt. Vt denominator proportionis subtriplæ superquincupartientis octauas, est $\frac{8}{29}$; subquadruplæ superbipartientis quintas, $\frac{5}{22}$, &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis submultiplicis superpartientis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partium aliquotarum: quem si multiplices per denominatorem proportionis multiplicis, numeroq; producto addas partium aliquotarum numerum, obtinebis eiusdem fractionis denominatorem. Vt denominator proportionis subduplæ superoctupartientis decimastertias, est $\frac{13}{34}$; quia huius fractionis numerator 13. denominat partes tertias decimas: qui si ducatur in 2. denominatorem duplæ proportionis, productoq; numero 26. adiiciatur numerus 8. octo partiũ, conficietur eiusdẽ fractionis denominator 34. &c. Denominatorem quoq; cuiuslibet proportionis submultiplicis superpartientis sic reperies. Reduc denominatorem proportionis multiplicis superpartientis, quæ propositæ respondet, ad vnam fractionem, vt in Arithmetica præcepimus, nimirum multiplicando denominatorem multiplicis proportionis per denominatorem fractionis ei adhærẽtis, & producto numero addendo numeratorem eiusdem fractionis. Nam huius fractionis termini, si inter se permutent ordinem, dabunt fractionem, quæ denominator erit proportionis submultiplicis superpartiẽtis. Veluti si proponatur proportio subquintupla supertripartiens decimas, reducemus denominatorem correspondentis proportionis quintuplæ supertripartiẽtis decimas, hoc est, $5\frac{3}{10}$. ad hanc fractionem $\frac{53}{10}$. quod fit ducendo 5. in 10 productóque numero addendo 3. vt fiat numerator 53. cui idem denominator 10. supponendus est. Nam si hæc fractio terminos permutet, fiet denominator proportionis subquintuplæ supertripartientis decimas, $\frac{10}{53}$ &c. Sed forsitan facilius denominatorem cuiusuis proportionis submultiplicis superpartientis obtinebis, si primos, siue minimos numeros proportionis multiplicis superpartientis respondentis reperias, ex eisq; fractionem constituas, sumendo minorem pro numeratore, & maiorem pro denominatore. Fractio enim hæc dabit denominatorem proportionis propositæ. Vt si proponatur proportio subquintupla supertripartiens decimas: quoniam minimi numeri in proportione quintupla supertripartiente decimas sunt 53 & 10. constituetur ex eis denominator proportionis propositæ hæc fractio $\frac{10}{53}$. & sic de cæteris.*

*DENOMINATOR denique proportionis æqualitatis perpetuò est vnitas: quia vna quantitas debet in ea proportione esse æqualis alteri, ac proinde vna alteram continere semel, & nihil præterea: quod quidem vnitas significat.*

*EX his, quæ de proportionum denominatoribus diximus, perspicuum esse puto, denominatores proportionũ maioris inæqualitatis re & nomine ipsas proportiones maioris inæqualitatis denominare; denominatores verò proportionum minoris inæqualitatis re tantùm, non autem & verbo, siue nomine denominare proportiones minoris inæqualitatis. Id quod ex prolatis exemplis liquidò constat. Nam denominator, verbi gratia, proportionis triplæ superquadrupartientis nonas, qui est $3\frac{4}{9}$. hoc est, tria integra, & quatuor nonæ partes, re & verbo denominat eam proportionem, cùm distinctè, aperteq; nobis indicet, in ea maiorem quantitatem continere minorem ter, & insuper quatuor eius partes nonas. At verò denominator correspondentis proportionis subtriplæ superquadrupartientis nonas, nimirum $\frac{9}{31}$. id est, nouem trigesimæprimæ partes, re quidem ipsa proportionem subtriplam superquadrupartientem nonas denominat, cùm verè significet, minorẽ quantitatem in ea esse maioris nouem partes trigesimas primas, quod omnino necessarium est, vt minor quantitas ad maiorem habeat proportionem subtriplam superquadrupartientem nonas: Verbo autem, siue nomine, eam proportionem nequaquam denominat; quippe cùm $\frac{9}{31}$. hoc est, nouem partes trigesimæprimæ cum nomine proportionis subtriplæ superquadrupartientis nonas nihil videantur habere commune, sed penitus ab eo discrepare.*

*QVARE si denominator alicuius proportionis minoris inæqualitatis numeris expressus sit, nimirum per fractionem, vt dictum est; vt scias, quo pacto proportionem, quam denominat, efferre debeas, vide quam proportionem habeat denominator eius fractionis ad numeratorem: quod scies, si partiaris denominatorem fractionis per numeratorẽ. Nam Quotiens denominabit proportionem, quam denominator fractionis habet ad numeratorẽ. Eodem enim nomine proportionẽ dati denominatoris proportionis minoris inæqualitatis pronunciabis, præposita tantũ syllaba, sub, quo illa denominatoris fractionis ad numeratorem appellatur. Vt si detur* *denominator $\frac{1}{8}$. dicetur eius proportio suboctupla. Quando enim numerator fractionis est vnitas, proportio dati denominatoris erit submultiplex ab eiusdem fractionis denominatore denominata. Quòd si datus denominator sit, $\frac{20}{327}$. Diuiso denominatore 327. per numeratorem 20. fit Quotiens $16\frac{7}{20}$. Denominator igitur fractionis $\frac{20}{327}$. ad numeratorem habet proportionem sedecuplam superseptupartientem vigesimas: ac proinde proportio cuius denominator est $\frac{20}{327}$. dicenda est subsedecupla superseptupartiens vigesimas, & sic de cæteris.*

*Quia verò nō semper commodè omnes proportiones propriis nominibus appellari possunt, (quis enim proportionem, verbi gratia, 37. ad 1. commode dixerit triginta septuplam, vel trigecuplam septuplam, vel alio id genus nomine? Quis item commodè proportionem 48. ad 29. dixerit supernouemdecupartientem vigesimasnonas? &c.) solent Geometræ plerunque in suis scriptis exprimere proportionem quamcunque per primos, siue minimos numeros eius proportionis. Vt proportionē 13. ad 1. vel 39. ad 3. vel 390. ad 30. malunt dicere eam, quam habent 13. ad 1. quàm tredecuplam. Et vicissim proportionem 1. ad 13. vel 3. ad 39. vel 30. ad 390. potius dicunt eam, quam habet 1. ad 13. quàm subtredecuplam. Ita quoque proportionem 52. ad 40. vocant proportionem 13. ad 10. quæ aliàs diceretur supertripartiens decimas. Proportionem verò 40. ad 52. appellant eam, quæ est 10. ad 13. quæ proprio nomine diceretur subsupertripartiens decimas, & sic de aliis.*

*QVANQVAM autem proportio quælibet exprimi possit per minimos eius numeros, vt diximus: pernecessaria tamen est cognitio denominatoris eiusdem proportionis, vt habitudinem vnius numeri ad alterum cognoscamus. Nam etiamsi aliquis proportionem numeri 1700. ad 400. dicat esse eam, quæ est numeri 17. ad 4. non intelligam tamen planè, quænam sit illa proportio, nisi eius denominatorem cognouero, qui est $4\frac{1}{4}$. Hic enim manifestè declarat, maiorem numerum continere minorem quater, & insuper quartam eius partem. Atque hic denominator facilius ex minimis numeris alicuius proportionis percipitur, quàm ex numeris non minimis. Quòd si quando minimi numeri alicuius proportionis sint ita magni, vt denominator ex illis non facilè possit intelligi, recurrendum erit ad præceptum, quod mox subiungam, & ex quo denominator proportionis inter quosuis duos numeros, siue minimi ij sint, siue non, notus efficitur.*

*QVOD si proportionem quamcunque per eius numeros minimos efferunt Mathematici, licebit nobis multò commodius proportionem quorumlibet duorum numerorum explicare per eius proportionis denominatorem, ita vt proportionem 100. ad 20. dicamus eam, cuius denominator est 5. Item proportionem 48. ad 38. eam, cuius denominator est $1\frac{5}{19}$. quæ dicenda esset superquintupartiens decimasnonas. Sic etiam proportio 20. ad 100. dici potest ea, quæ habet denominatorem $\frac{1}{5}$. Et proportio 38. ad 48. ea, cuius denominator est $\frac{19}{24}$. atque ita de reliquis: quoniam videlicet denominator clarissimè demonstrat habitudinem vnius numeri ad alium, vt dictum est.*

*DENOMINATOR porrò proportionis inter duos quosuis numeros ita reperietur. Diuidatur numerus antecedens, qui nimirum ad alium refertur, per consequentem. Quotiens enim numerus, reducta prius fractione, si qua adsit, ad minimos numeros, vt in Arithmetica tradidimus, erit eius proportionis denominator. Veluti proposita proportione 39. ad 3. vel 390. ad 30. dicemus denominatorem eius esse 3. Quotientem videlicet numerum diuisionis 39. per 3. vel 390. per 30. Quòd si vicissim conferantur 3. cum 39. vel vel 30. cum 390. erit quotiens diuisionis fractio hæc $\frac{3}{39}$. vel $\frac{30}{390}$. Nam quando minor numerus per maiorē diuiditur, Quotiens semper est fractio, cuius numerator est minor numerus, & denominator, maior, vt in Arithmeticis explicauimus. Et quia vtraque fractio, si eius numeri ad minimos reuocentur, reducitur ad hæc $\frac{1}{13}$. dicemus denominatorem proportionis 3. ad 39. vel 30. ad 390. esse $\frac{1}{15}$. Rursus data proportione 52. ad 40. ex diuisione 52. per 40. fit Quotiens $1\frac{12}{40}$. cuius fractio reducitur ad hanc $\frac{3}{10}$. Igitur denominator proportionis 52. ad 40. erit $1\frac{3}{10}$. Si autem proportio offeratur 40. ad 52. inuenietur denominator, siue Quotiens $\frac{40}{52}$. hoc est, in minimis numeris, $\frac{10}{13}$. Præterea proportio 100. ad 20. denominatorem habebit 5. Diuisis enim 100. per 20. Quotiens est 5. Proportionis verò 20. ad 100. denominator erit $\frac{1}{5}$. propterea quòd diuisis 20. per 100. Quotiens est $\frac{20}{100}$. id est, in minimis numeris, $\frac{1}{5}$. Denique denominator proportionis 48. ad 10. erit $4\frac{4}{5}$. quòd diuisis 48. per 10. Quotiens fit $4\frac{8}{10}$. hoc est, in numeris minimis, $4\frac{4}{5}$. At denominator proportionis 10. ad 48. erit $\frac{10}{48}$. id est, in minimis numeris 5 $\frac{5}{24}$. Et quia denominator fractionis $\frac{5}{24}$. ad numeratorem habet proportionem quadruplam superquadrupartientem quintas, (quòd diuisis 24. per 5. Quotiens fiat $4\frac{4}{5}$.) appellabitur proportio 10. ad 48. subquadrupla superquadrupartiens quintas. Vt enim ritè efferatur proportio minoris inæqualitatis, denominanda prius est proportio denominatoris fractionis ad numeratorem, vt suprà diximus.*

*INVENTO denominatore proportionis duorum numerorum in minimis numeris, vt dictum est, eoq́; reducto ad vnam fractionem, vt in Arithmetica traditum est, erunt numerator, & denominator fractionis, minimi numeri, inter quos illa proportio reperitur. In multiplici tamen proportione, quando nimirum denominator inuentus non habet annexam fractionem, erūt denominator inuentus, & vnitas, minimi numeri illius proportionis. Vt quoniam denominator proportionis 348. ad 120. est $2\frac{9}{10}$. si reducatur ad hanc vnam fractionem, $\frac{29}{10}$. (quod fit, ducendo integrum numerum 2. in denominatorē fractionis 10. productoq́; numero eiusdem fractionis numeratorem 9. addendo.) erunt 29. & 10. minimi numeri habentes proportionem eandem, quam 348. ad 120. Sic etiam, quia denominator porportionis 824. ad 1133. est $\frac{8}{11}$. erunt 8. & 11. minimi numeri proportionis 824. ad 1133. Item quia denominator proportionis 84. ad 12. est 7. erunt in ea proportione*

minimi

minimi numeri 7.& 1.Viciſsim numeri minimi proportionis 12.ad 84.cuius denominator eſt $\frac{1}{7}$. erunt 1.& 7. Itaq; propoſitis duobus numeris quibuſcunq; ſi quærantur minimi numeri, eandem quam illi habentes proportionem, inueniendus erit denominator proportionis eorum, vt dictum eſt, isq; ad vnam fractionem redigendus. Huius enim fractionis numerator & denominator, erunt minimi numeri quæſiti. Vt ſi quærantur minimi numeri proportionis, quam habent 400.ad 90. Diuiſo antecedente per conſequentē terminum,fit Quotiens $4\frac{4}{9}$.in minimis numeris. Quo reuocato ad hanc fractionem $\frac{40}{9}$.dicemus,minimos numeros proportionis 400.ad 90.eſſe 40.& 9.Eademq; ratio eſt de cæteris.

IAM verò ſi,propoſitis duabus proportionibus,cognoſcere velis,vtrum earū maior ſit,vel minor,dices eam maiorē eſſe,cuius denominator maior eſt:minorē verò eam,cuius denominator eſt minor.Quòd ſi denominatores ſint æquales,proportiones quoq; æquales eſſe pronunciabis.Vt ſi proponātur duæ hæ proportiones,ſuperoctupartiens decimasquintas, & ſuperdecupartiens decimasſeptimas, quarū denominatores ſunt $1\frac{8}{15}$. & $1\frac{10}{17}$. dices priorē poſteriore eſſe minorem: quia denominator $1\frac{8}{15}$.minor eſt denominatore $1\frac{10}{17}$.Quà verò arte cognoſcas,vtra duarū fractionū maior ſit,vel minor,an verò æquales ſint,tradidimus in Arithmetica.Eadem ratione,ſi offerantur duæ proportiones,quarū denominatores ſint $10\frac{1}{1000}$. $9\frac{1}{101}$.dicemus priorem eſſe maiorem. Quanquam enim fractio $\frac{1}{1000}$.minor ſit fractione $\frac{1}{101}$.numerus tamē integer 10.integro numero 9.maior eſt.Sic ſi dentur duæ proportiones,vna 17.ad 11.altera 18.ad 12.dices illam hac eſſe maiorem; quia illius denominator $1\frac{6}{11}$.maior eſt huius denominatore $1\frac{1}{2}$.Cæterū,quādo duæ proportiones proponuntur in numeris,dignoſcemus facilè,vtra earū ſit maior,etiamſi earū denominatores non inquiramus, hac ratione:Multiplicto antecedente termino prioris proportionis in terminū conſequentem poſterioris,& termino antecedente poſterioris in conſequentē terminum prioris; cuius proportionis antecedens terminus maiorem numerum produxerit,illa proportio maior eſt:Et ſi duo æqules numeri geniti fuerint,proportiones inter ſe æquales erunt.Vt ſi proponantur duæ proportiones 17.ad 11.& 18.ad 12.comperiemus priorē maiorem eſſe,quia illius antecedens 17.in huius conſequentem 12.ductus procreat 204. at antecedens huius 18.in conſequentē illius 11.producit tantummodò 198. Rurſus ſi dentur duæ proportiones 18.ad 12. & 108. ad 72.producetur idem numerus 1296.tam ex prioris antecedente 18. in poſterioris conſequētem 72. q; ex antecedente poſterioris 108. in conſequentem prioris 12.multiplicato. Quare proportiones ipſæ æquales inter ſe erunt. Ratio huiuſce operationis eſt:quia hac ratione,propoſitis quatuor numeris,multiplicātur inter ſe tam extremi duo, quàm duo intermedij,vt in datis exemplis patet.Igitur ſi procreentur numeri æquales,erit eadem proportio primi ad ſecundum, quæ tertij ad quartum, vt ab Euclide demonſtratur lib.7.propoſ.19. Hinc fit,ſi primus in quartum producat maiorem numerum,quàm ſecundus in tertium,maiorē eſſe primum, quàm vt eandem habere poſſit proportionem ad ſecundum, quàm tertius ad quartum: quandoquidem minor eſſe deberet,vt eundem numerum poſſet producere,ac proinde eandem habere proportionem.

DESIDERANTVR nonnunquā duo numeri in quacunque proportione, ſiue ij primi ſint, ſiue non; hos ergo, vt inueniamus, multiplicabimus quemcunque numerum aſſumptum, vel diuidemus per propoſitæ proportionis denominatorem. Nam productus numerus ad aſſumptum, qui multiplicatus eſt, vel aſſumptus, qui diuiſus eſt,ad Quotientem habebit proportionem propoſitam. Verbi gratia,ſi ſint inueniendi duo numeri in proportione quintupla,ducemus quemcunque numerum,vt 100.in denominatorem 5.Productus enim numerus 500.ad multiplicatum numerum 100. proportionem habebit quintuplam. Vel eundem numerum 100. diuidemus per denominatorem 5. Nam diuiſus numerus 100. ad Quotientem 20. habebit quoque datam proportionem quintuplam. Ita quoque ſi inueniendi ſint duo numeri in proportione dupla ſeſquitertia, cuius denominator eſt $2\frac{1}{3}$.multiplicabimus quemuis numerum,vt 24.per $2\frac{1}{3}$. Productus enim numerus 56.ad numerum multiplicatum 24. habet proportionem denominatam à $2\frac{1}{3}$. Item ſi numerum 24. diuidamus per $2\frac{1}{3}$. habebit diuiſus numerus 24. ad Quotientem $10\frac{2}{7}$. proportionem datam duplam ſeſquitertiam. Sed vt fractiones vitentur,ſiquidem per multiplicationem rem expedire lubet, accipiendus erit numerus multiplicandus,qui numeretur à denominatore partis aliquotæ, vel pluriū partium,quarū in proportione fit mentio: In proportione tamē multiplici,quia nullius partis fit mentio,aſſumi poteſt quilibet numerus. Vt ſi deſiderentur duo numeri proportionis triplæ ſuperbipartientis nonas, accipiendus erit numerus à 9.numeratus, qualis eſt 18.vel 27.36.45.&c. Quilibet enim horum ductus in denominatorem $3\frac{2}{9}$.gignet numerum integrum: vt ductis 45. in $3\frac{2}{9}$. fit numerus 145. qui ad aſſumptum numerum 45. proportionem habet datam. Sic etiam ſi cupiat quis proportionem ſubquadruplam, cuius denominator eſt $\frac{1}{4}$.ſumendus erit numerus à 4.numeratus, vt 12. Hic enim ductus in denominatorem $\frac{1}{4}$. producet 3.numerum integrum, qui ad aſſumptum 12. habet proportionem ſubquadruplam. Si verò per diuiſionem agendum ſit, & fractiones vitandæ, ſumendus erit in proportione multiplici numerus à denominatore proportionis numeratus. In aliis autem proportionibus, reuocandus erit denominator proportionis ad vnam fractionem, numerusq; ſumendus à numeratore numeratus.Vt ſi quæratur proportio quintupla,ſumendus erit,verbi gratia,numerus 30.à 5.numeratus.Hic enim diuiſus per denominatorem 5.facit Quotientem 6.ad quem proportionem habet quintuplam.Si autem deſideretur proportio,cuius denominator ſit $4\frac{3}{7}$. reuocato eo ad fractionem $\frac{31}{7}$. ſumendus erit numerus à 31. numeratus, vt 62. Nam hoc diuiſo per $\frac{31}{7}$. fit Quotiens 14. ad quē acceptus numerus 62.habet proportionem à $4\frac{3}{7}$.denominatam,nimirum quadruplam ſupertripartientē ſeptimas. Cæterùm ſi duo numeri proponantur, cupiatq; quis alios duos in eadem proportione reperire, satis erit, si vtrumque per quemuis numerum multiplicet, aut diuidat. Numeri enim producti, aut Quotientes eandem habebunt proportionem, quam propositi duo numeri. Item si proposito quouis numero, inueniendus sit alius, qui ad eum proportionem habeat datam vel ad quem is datam habeat proportionem, assequeris primùm, si propositum numerum per denominatorem proportionis multiplices: at secundum obtinebis, si eundem per denominatorem proportionis diuidas. Quòd si proportio detur in duobus numeris, proponaturq; tertius quispiam numerus siquidem inueniendus sit quartus, ad quem tertius datus eandem habeat proportionem, quam primus datus ad secundum: siquidem denominator proportionis duorum numerorum datorum notus est, diuidendus erit tertius numerus datus per denominatorem. Quotiens enim numerus erit, quem quærimus. Vel certè, siue denominator cognitus sit, siue non, multiplicandus erit tertius numerus per secundum datum: hoc est, per consequentem terminum datæ proportionis, productusq; numerus per primum, siue per antecedentem terminũ, diuidendus. Vt si dentur duo numeri 4. 7. quorum proportionis denominator est $\frac{4}{7}$. detur item tertius numerus 20. Diuide numerum 20. per denominatorem $\frac{4}{7}$. producetúrq; quartus numerus quæsitus 35. Vel multiplica tertium numerum 20. per secundum 7. & productum numerum 140. partire per primum 4. Ad Quotientem enim 35. habebit tertius numerus 20. eandem proportionem, quam 4. ad 7. Si verò inueniendus sit quartus, qui ad tertium eandem habeat proportionem, quam dati duo numeri: si quidem denominator notus est, ducendus is erit in tertium numerum. Productus enim numerus erit, quem quæris. Vel siue notus sit denominator, siue non, multiplicandus erit tertius numerus per primum datum, nimirum per terminum antecedentem, & numerus productus per secundum, id est, per consequentem terminum, diuidendus. Vt datis eisdem duobus numeris 4. 7. & tertio 20. multiplica 20. per $\frac{4}{7}$. denominatorem gigneturq; quæsitus numerus $11\frac{3}{7}$. Vel duc tertium numerum 20. in primum 4. numerumq; productum 80. partire per secundum 7. Nam ad tertium 20. habebit Quotiens $11\frac{3}{7}$. eandem proportionem, quam 4. ad 7.

QVIA verò diximus, eam proportionem esse maiorem, cuius denominator maior est, fit, vt in proportionibus multiplicibus detur minima, nimirum dupla, denominata à 2. nõ autem maxima: propterea quòd numerus 2. inter omnes denominatores proportionum multiplicium est minimus: maximus autem dari non potest, cùm numeri augeantur in infinitum. Efficitur quoq;, inter proportiones superparticulares reperiri maximam, nimirum sesquialteram, denominatam à $1\frac{1}{2}$. non autem minimam: quia numerus $1\frac{1}{2}$. omnium denominatorum proportionum superparticularium maximus est: minimus autem dari non potest cùm denominatores fractionum progredi poßint in infinitum. Constat autem ex iis, quæ in Arithmetica tradidimus, fractionem, cuius denominator maior est, minorem esse, si idem sit numerator; fractionem autem, cuius denominator minor est, si idem sit numerator, maiorem esse. Cùm ergo denominator 2. sit omnium minimus, erit fractio $\frac{1}{2}$. omnium, quæ numeratorem habent 1. (quales sunt fractiones denominatorum proportionum superparticularium) maxima. Colligitur denique, in aliis proportionibus maioris inæqualitatis neque minimam posse dari, neque maximam. Quod intelligendum est de vltimis speciebus. Nam si de vltimis speciebus non sit sermo, erit superbipartiens inter superpartientes, minima; superpartiens autem tertias, maxima. Inter multiplices autem superparticulares maxima erit multiplex sesquialtera: minima verò, dupla superparticularis. Inter multiplices denique superpartientes maxima erit multiplex superpartiens tertias; minima verò, dupla superbipartiens. E contrario in proportionibus submultiplicibus datur maxima, nimirum subdupla, non autem minima: In subsuperparticularibus autem reperitur minima, vt subsesquialtera, non autem maxima: In aliis deniq; proportionibus minoris inæqualitatis neq; maxima, neq; minima dari potest. Quæ omnia perspicua erunt, si denominatores proportionum inter se conferantur.

COLLIGITVR etiam, hanc esse connexionem inter proportionem maioris inæqualitatis, æqualitatis, & minoris inæqualitatis, vt quælibet proportio maioris inæqualitatis maior sit proportione æqualitatis: quælibet verò proportio minoris inæqualitatis, minor: propterea quòd quilibet denominator proportionis maioris inæqualitatis, quantumuis minimus, maior est vnitate, quæ denominator est proportionis æqualitatis, cùm ille minor esse nequeat, quàm vnitas cum vna parte aliquota: At denominator proportionis minoris inæqualitatis semper minor est, quàm vnitas, cùm sit fractio, cuius numerator à denominatore superatur, vt ex iis, quæ suprà diximus, patet. Itaq; proportio æqualitatis media est inter proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. Vbi hoc animaduersione dignũ est, Proportionẽ maioris inæqualitatis decrescendo appropinquare semper magis ac magis in infinitum proportioni æqualitatis, nunquam tamen ad eam peruenire: E contrario verò proportionem minoris inæqualitatis crescendo semper magis, ac magis in infinitum accedere ad eandem proportionem æqualitatis, nunquã tamen eam attingere. Nam quælibet proportione multiplici proposita datur minor, ac minor, vsq; ad duplam, quæ omnium multiplicium est minima. Deinde hac datur minor, nimirum superparticularis, vel superpartiens quæcunque: in qua cùm minima non poßit dari, omnisq; proportio eiusmodi maior sit proportione æqualitatis, liquidò constat, proportionẽ maioris inæqualitatis ad æqualitatis proportionem non posse peruenire, etiamsi in infinitum decrescendo ad ipsam accedat. Rursus cùm omnis proportio minoris inæqualitatis minor sit proportione æqualitatis, non poßit autem in ea reperiri maxima, manifestum quoq; est, proportionem minoris inæqualitatis attingere non posse proportionem æqualitatis, licet in infinitum crescendo ad eam accedat. Sed vt vtrumque exemplo etiam discatur, sciendum

sciendum est, si inter duos numeros quosuis non proximos interponatur quilibet numerus intermedius, maior scilicet vno eorum, & altero minor; proportionem maioris numeri ad minorẽ diuisam esse in duas minores, quarum vna est maioris numeri ad medium interpositum, altera verò numeri medij ad minorem. Item proportionem minoris numeri ad maiorem diuisam esse in duas maiores, quarum vna est minoris numeri ad medium interpositum, altera verò medij ad maiorem. Vt si inter duos numeros 6.3. ponatur medius 4. hoc modo, 6.4.3. proportio 6. ad 3. quæ dupla est, diuisa erit in sesquialteram 6. ad 4. & sesquitertiam 4. ad 3. quarum vtraq; minor est proportione dupla 6. ad 3. Contrà verò proportio 3. ad 6. quæ subdupla est, diuisa erit in subsesquitertiam 3. ad 4. & subsesquialteram 4. ad 6. quarum vtraque maior est proportione subdupla 3. ad 6. Idem fit, si inter eosdem numeros 6.3. interponatur medius 5. hoc modo, 6.5.3. Tam enim proportio 6. ad 5. sesquiquinta, quàm proportio superbipartiens tertias 5. ad 3. minor est proportione dupla 6. ad 3. Contrà verò tam proportio subsuperbipartiens tertias 3. ad 5. quàm subsesquiquinta 5. ad 6. maior est proportione subdupla 3. ad 6. Quæ omnia ex denominatoribus probari possunt. Verùm vtrumque demonstrabitur hac ratione. Quoniam medius numerus minor est maiore dato, & maior minore, habebit maior datus ad minorem datũ, maiorẽ proportionem, quàm idem maior ad medium, & quàm medius ad minorem. At verò minor ad maiorem habebit minorem proportionem, quàm idem minor ad medium, & quàm medius ad maiorem, vt manifestum est, vel ex defin. 20. lib. 7. vt ibidem explicabimus, vel ex propos. 8. huius lib. 5. vbi demonstrat Euclides, propositis duabus quantitatibus inæqualibus, maioris ad tertiam aliquam esse maiorem proportionẽ, quàm minoris: At è contrario, tertiam eandem quantitatem ad minorem habere maiorem proportionem, quàm ad maiorem. Ex quo sequitur id, quod diximus: nimirum positis his tribus numeris 6 4.3. maiorem esse proportionem eiusdem numeri 6. ad minorem 3. quàm ad medium 4. maiorem: Item maiorem esse proportionem maioris numeri 6. ad 3. quàm minoris 4. ad eundem 3. Contrà verò maiorem esse proportionem eiusdem numeri 3. ad minorem 4. quàm ad maiorem 6. Item maiorem esse proportionem maioris numeri 4. ad 6. quàm minoris 3. ad eundem 6. Eademq; in cæteris ratio est. His positis erit proportio dupla 4. ad 2. diuisa hic, 4.3.2. in duas minores. Et tam proportio 8. ad 6. quæ eadem est, quæ 4. ad 3. diuisa hic, 8.7.6. quàm proportio 6. ad 4. quæ eadem est, quæ 3. ad 2. hic, 6.5.4. in duas minores. Item tam proportio 16. ad 14. quæ eadem est, quæ 8. ad 7. diuisa hic, 16.15.14. & proportio 14. ad 12. quæ eadem est, quæ 7. ad 6. hic, 14.13.12. quàm proportio 12. ad 10. quæ eadem est, quæ 6. ad 5. hic, 12.11.10. & proportio 10. ad 8. quæ eadem est, quæ 5. ad 4. hic, 10.9.8. in duas minores: atq; ita fieri potest in infinitum. E contrario verò proportio subsesquialtera 4. ad 6. diuisa erit hic, 4.5.6. in duas maiores. Et tam proportio 8. ad 10. quæ eadem est, quæ 4. ad 5. diuisa hic, 8.9.10. quàm proportio 10. ad 12. quæ eadem est, quæ 5. ad 6. hic, 10.11.12. in duas maiores. Item tam proportio 16. ad 18. quæ eadem est, quæ 8. ad 9. diuisa hic, 16.17.18. & proportio 18. ad 20. quæ eadem est, quæ 9. ad 10 hic, 18.19.20 quàm proportio 20. ad 22. quæ eadem est, quæ 10. ad 11. hic, 20.21.22. & proportio 22. ad 24. quæ eadem est, quæ 11. ad 12. hic, 22.23.24. in duas maiores: atq; huius incrementi nunquam erit finis. Idemq; experiri licebit in quibusuis aliis proportionibus. Vt proportio decupla 10. ad 1. diuisa hic est, 10.6.1. in duas minores: Et proportio subsuperseptupartiens vndecimas 11. ad 18. diuisa hic, 11.15.18. in duas maiores, &c.

## DE PROPORTIONALITATIBVS.

PROPORTIONALITAS ab Euclide definita in plura genera diuiditur, vt videre licet apud Boetium, Iordanum, & alios Arithmeticos: sed præcipuæ proportionalitates, quas auctores nominati Medietates vocant, sunt hæ tres; Arithmetica, Geometrica, & Musica, siue Harmonica.

ARITHMETICA proportionalitas, siue Medietas est, quando tres, vel plures numeri per eandem differentiam progrediuntur. Vt hi numeri 4.7.10.13.16. quorum quilibet suum antecedentem ternario superat, dicuntur constituere proportionalitatem Arithmeticam. Est autem duplex, continua, & discreta. Continua est, quando in progressione numerorum nulla fit interruptio, sed quilibet cum proximè antecedente confertur, vt in dato exemplo fit. Discreta autem est, quando in numerorum progressione interruptio fit, ita vt bini tantùm inter se conferantur, non autem quilibet cum proximè præcedente. Vt in his numeris contingit, 4.7.8.11.30.33. Nam eadem differentia est inter binos 4.7. & 8.11. & 30.33. non autem inter 4.7. & 7.8. &c.

GEOMETRICA proportionalitas, siue Medietas est, quando tres, vel plures numeri eandem proportionem habent: quam quidem Euclides definiuit. Hæc enim propriè proportionalitas dicitur, siue Analogia: aliæ verò impropriè, cùm non sit eadem semper inter earum terminos proportio, ita vt rectius Medietates dicantur, propter medios terminos, qui certa quadam ratione inter extremos interijciuntur. Vt hi numeri, 2.6.18.54. quoniam quilibet ad suum antecedentem eandem habet proportionem triplam, constituunt proportionalitatem Geometricam. Hæc duplex quoque est, continua, & discreta, vt in 4. defin. huius libri explicauimus.

*Continua cernitur in datis numeris, discreta autem in hisce sex, 2.3.12.18.20.30. Nam bini tantùm 2.3. & 12.18. & 20.30. eandem habent proportionem sesquialteram; non autem quilibet ad proximè præcedentem.*

*MVSICA siue Harmonica proportionalitas, siue Medietas est, quando tres numeri ita ordinantur, vt eadem sit proportio maximi ad minimum, quæ differentiæ inter maiores duos ad differentiam inter duos minores: ita vt nec eadem inter eos sit differentia, vt in Arithmetica, nec eadem proportio, vt in Geometrica. Vt tres hi numeri, 3.4.6. quoniam eadem est proportio maximi 6. ad minimum 3. quæ differentiæ inter maximum 6. & medium 4. nimirum numeri 2. ad differentiam inter medium 4. & minimum 3. id est, ad 1. (cùm vtrobique proportio sit dupla.) constituunt proportionalitatem, siue Medietatem Musicam, siue Harmonicam: Ipsi verò neque eandem habent differentiam, neque eandem proportionem, vt patet. Sic etiam tres hi numeri, 42.12.7. Harmonicam proportionalitatem constituunt, quia eadem proportio est maximi 42. ad minimum 7. quæ differentiæ inter maximum 42. & medium 12. hoc est, numeri 30. ad differentiam 5. inter medium 12. & minimum 7. cùm vtrobique proportio sit sextupla. Dicitur autem huiusmodi proportionalitas Musica, siue Harmonica, quia plerunque eius numeri habent proportiones eas, in quibus consonantiæ Musicæ consistunt. Vt in priori exemplo inter 6. & 4. est proportio sesquialtera, constituẽs consonantiam, quæ Diapente dicitur, siue Quinta. Item inter 4. & 3. est proportio sesquitertia, constituẽs consonantiam, quam Diatessaron, siue Quartam vocant. Denique inter extremos 6. & 3. cernitur proportio dupla, quæ Diapason consonantiam, siue Octauam constituit. Atque eodem modo in plerisque alijs idem cernitur.*

## PROPRIETATES ALIQVOT TRIVM PROPORtionalitatum, siue Medietatum, quas explicauimus.

### I.

*IN tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, minor est proportio maximi ad medium, quàm medij ad minimum. Vt hic patet. 2.4.6. Nam proportio 6. ad 4. est sesquialtera; & 4. ad 2. dupla.*

*AT in tribus numeris proportionalitatis Musicæ, maior est proportio maximi ad medium, quàm medij ad minimum. Vt hic vides. 3.4.6. Proportio enim 6. ad 4. est sesquialtera; & 4. ad 3. sesquitertia.*

*IN tribus denique numeris proportionalitatis Geometricæ, eadem est proportio maximi ad medium, quæ medij ad minimum, vt ex eius definitione constat, apparetque in hisce tribus numeris 3.6.12. Tam enim 12. ad 6. quàm 6. ad 3. duplam habet proportionẽ. Qua in re Geometrica proportionalitas medium locum tuetur inter Arithmeticam atque Harmonicam, cùm in Arithmetica inter maiores numeros minor sit proportio, quàm inter minores; Contra verò in Harmonica inter maiores numeros maior, quàm inter minores: In Geometrica autem eadem inter maiores, quæ inter minores, vt explicatum est.*

### II.

*ARITHMETICA proportionalitas habet terminorum differentias æquales, proportiones verò eorundem inæquales.*

*GEOMETRICA è contrario differentias terminorum habet inæquales, proportiones verò eorundem æquales.*

*HARMONICA denique neque differentias, neque proportiones terminorum æquales habet. Patet hoc ex superioribus exemplis.*

### III.

*IN tribus numeris Arithmeticæ proportionalitatis, medius eadem sui parte, vel partibus minorẽ superat, & à maiori superatur. Vt hic, 3.7.11. Medius 7. superat minorem 3. quatuor vnitatibus, quæ efficiunt $\frac{4}{7}$. ipsius medij 7. Item medius idem 7. superatur à maiore 11. quatuor quoque vnitatibus, quæ constituunt eiusdem medij $\frac{4}{7}$. Item hic, 15.20.25. medius 20. superat minorem 15. quinque vnitatibus, quæ efficiunt $\frac{1}{4}$. ipsius medij 20. Item medius idem 20. superatur à maiore 25. quinque quoque vnitatibus, quæ constituũt $\frac{1}{4}$. eiusdem medij 20.*

*AT in tribus numeris proportionalitatis Geometricæ, medius eadem sui parte, vel partibus minorem superat, quæ parte, vel partibus maioris à maiore superatur. Vt hic, 4.6.9. medius 6. superat minorem 4. binario, qui est $\frac{1}{3}$. medij, superaturque à maiore 9. ternario, qui quoque est $\frac{1}{3}$. maioris. Sic etiam hic, 9.15.25. vbi est continua proportio superbipartiens tertias, medius 15. superat minorem 9. sex vnitatibus, quæ faciunt $\frac{2}{5}$. ipsius medij 15. Et idem medius 15. superatur à maiore 25. decem vnitatibus, quæ efficiunt quoque $\frac{2}{5}$. ipsius maioris 25.*

*IN tribus denique numeris Harmonicæ proportionalitatis, medius eadem parte, vel partibus minoris minorem superat, quæ parte, vel partibus maioris à maiore superatur. Vt hic, 3.4.6. medius 4. superat minorem*

3. vnita-

3. vnitate, quæ est $\frac{1}{3}$. eiusdem minoris, superaturq́ à maiore 6. binario, qui quoq; est $\frac{1}{3}$. eiusdem maioris. Rursus in hac proportionalitate Harmonica, 42.12.7. medius 12. superat minorem 7. quinque vnitatibus, quæ sunt $\frac{5}{7}$. ipsius minoris 7. Et idem medius 12. superatur à maiore 42. triginta vnitatibus, quæ sunt $\frac{30}{42}$. hoc est, in minimis numeris, $\frac{5}{7}$. quoq; ipsi maioris 42.

## IIII.

In tribus numeris Arithmeticæ proportionalitatis, summa extremorum dupla est medij. Vt hic, 3.7.11. summa extremorum 14. dupla est medij 7.

At in tribus numeris proportionalitatis tam Geometricæ, quàm Harmonicæ, summa extremorum superat duplum medij numero, quo differentia maiorum differentiam minorum superat. Vt hic, 4.6.9. & 3.4.6. tam summa 13. extremorum 4.9. superat duplum medij 6. hoc est, 12. vnitate, qua differentia maiorum, nimirum 3. superat 2. differentiam minorum, quàm summa 9. extremorum 3.6. duplum medij 4. id est, 8. superat vnitate, qua differentia maiorum, nimirum 2. superat differentiam minorum, quæ est 1. Sic etiam hic, 9.15.25. vbi est continua proportio superbipartiens tertias, summa 34. extremorum 9.25. superat duplum medij 15. hoc est, 30. numero 4. quo eodem differentia maiorum, 10. differentiam minorum 6. superat. Item in hac proportionalitate Harmonica, 42.12.7. summa 49. extremorum duplum medij 12. id est, 24. superat numero 25. quo differentia maiorum 30. superat differentiam minorum 5.

## V.

In tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, extremi inter se multiplicati procreant numerum, qui à quadrato medij superatur numero, qui fit ex differentia minorum in maiorum differentiam. Vt hic, 3.7.11. numerus 33. factus ex 3. in 11. superatur à 49. quadrato medij, numero 16. qui fit ex differentia 4. in differentiam 4.

At in tribus numeris proportionalitatis Geometricæ, numerus ex primo in tertiũ genitus, quadrato medij æqualis est, vt hic, 4.6.9. Extremi inter se multiplicati faciunt 36. quadratum medij.

In tribus numeris deniq; Harmonicæ proportionalitatis, numerus ex multiplicatione extremorum inter se genitus superat quadratum medij numero, qui fit ex differentia minorũ in differentiam maiorum. Vt hic, 42.12.7. numerus 294. factus ex 42. in 7. superat 144. quadratum medij numero 150. qui fit ex differentia 30. in differentiam 5. Qua in re etiam medium locũ obtinet Geometrica proportionalitas inter Arithmeticam, & Harmonicam; quippe cùm in Arithmetica minus producatur ex primo in tertium, quàm ex medio in se, in Harmonica verò plus; & in Geometrica idem numerus gignatur.

## VI.

In tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, summa extremorum in medium ducta producit numerum, qui duplum producti ex primo in tertium superat numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorum duplicatam. Vt hic, 3.7.11. Summa extremorum 14. in medium 7. facit 98. qui numerus superat numerum 66. qui duplus est producti 33. ex primo in tertium, numero 32. qui fit ex differentia 4. in differentiam 4. duplicatam, hoc est, in 8.

In tribus autem numeris Geometricæ proportionalitatis, summa extremorum in medium multiplicata gignit numerum, qui duplum producti ex primo in tertium superat numero, qui fit ex differentia minorum, in differentiam maiorum. Vt hic, 4.6.9. Summa 13. extremorum in medium 6. facit 78. qui numerus duplum producti ex 4. in 9. id est, 72. superat numero 6. ex differentia 2. in differentiam 3. genito.

Deniqve in tribus numeris proportionalitatis Harmonicæ, ex summa extremorum in medium procreatur, numerus duplus producti ex primo in tertium. Vt hic, 3.4.6. Ex summa extremorum 9. in medium 4. fit numerus 36. duplus producti 18. ex 3. in 6.

## VII.

Qvatvor numeris in proportionalitate Geometrica non continuè proportionalibus datis, si secundus est inter extremos medius in proportionalitate Arithmetica, erit tertius inter eosdem extremos medius in Harmonica proportionalitate: Et si secundus medius est in proportionalitate Harmonica, erit tertius in Arithmetica medius. Vt hic, 6.9.8.12. quoniam ita est 6. ad 9. vt 8. ad 12. Et sunt 6.9.12. proportionales Arithmeticè, cùm eundem habeant excessum 3. vides 6.8.12. Harmonicè proportionales esse, cùm eadem sit proportio 12. ad 6. quæ differentiæ maiorum 4. ad 2. differentiam minorum. Item hic, 6.8.9.12. quia ita est 6 ad 8, vt 9. ad 12. Et sunt 6.8.12. proportionales Harmonicè, vt diximus, vides 6.9.12. Arithmeticè esse proportionales, cùm eundem excessum 3. habeant.

Item quatuor numeris datis, quorum alteruter mediorum sit inter extremos medios in proportionalitate Arithmetica, & alter in Harmonica; erunt quatuor dati numeri Geometricè non continuè proportionales. Vt quia datis his 4. numeris 4.6.8.12. tertius 8. medius est Arithmeticè inter extremos 4.12. & secundus 6. inter eosdem extremos 4.12. medius est Harmonicè; vides ita esse 4. ad 6. vt 8. ad 12. Et 4. ad 8. vt 6. ad 12.

## VIII.

Propositis quotquot numeris continuè proportionalibus siue Arithmeticè, siue Geometricè, siue Harmonicè, (continuantur autem plures numeri in proportionalitate Harmonica, quando tres primi sunt

*Harmonicè proportionales, item tres primum insequentes, relicto primo; & relictis primis duobus, alij tres, qui sequuntur; nec non primis tribus relictis, subsequentes tres, & sic deinceps.) erunt in eadem proportionalitate constituti numeri, qui in locis tam imparibus, quàm paribus, atq; etiam partim in imparibus, partim in paribus alternis locantur, dummodo æqualis multitudo numerorum inter quosuis impares, & pares, vel inter partim impares, partim pares alternis interijciantur: cuiusmodi sunt primus, tertius, quintus, septimus, &c. Item secundus, quartus, sextus, &c. Præterea primus, quartus, septimus, &c. Insuper primus, quintus, nonus, &c. atq; ita deinceps. Id quod in exemplis, quæ sequuntur, perspicuum est.*

## PROPORTIONALITATES ARITHMETICÆ.

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 7 | 11 | 15 | 19 | 23 | 27 | 31 | 35 | 39 | 43 | 47 | 51 | 55 | 59 |
| 3 | | 11 | | 19 | | 27 | | 35 | | 43 | | 51 | | 59 |
| | 7 | | 15 | | 23 | | 31 | | 39 | | 47 | | 55 | |
| 3 | | | 15 | | | 27 | | | 39 | | | 51 | | |
| | 7 | | | 19 | | | 31 | | | 43 | | | 55 | |
| 3 | | | | 19 | | | | 35 | | | | 51 | | |

## Proportionalitates Geometricæ.

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 10 | 20 | 40 | 80 | 160 | 320 | 640 | 1280 | 2560 | 5120 | 10240 | 20480 | 40960 | 81920 |
| 5 | | 20 | | 80 | | 320 | | 1280 | | 5120 | | 20480 | | 81920 |
| | 10 | | 40 | | 160 | | 640 | | 2560 | | 10240 | | 40960 | |
| 5 | | | 40 | | | 320 | | | 2560 | | | 20480 | | |
| | 10 | | | 80 | | | 640 | | | 5120 | | | 40960 | |
| 5 | | | | 80 | | | | 1280 | | | | 20480 | | |

## Proportionalitates Harmonicæ.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 252 | 280 | 315 | 360 | 420 | 504 | 630 | 840 | 1260 | 2520 |
| 252 | | 315 | | 420 | | 630 | | 1260 | |
| | 280 | | 360 | | 504 | | 840 | | 2520 |
| 252 | | | 360 | | | 630 | | | 2520 |
| | 280 | | | 420 | | | 840 | | |
| 252 | | | | 420 | | | | 1260 | |

## IX.

*QVOTQVOT numeris proportionalibus datis siue in Arithmetica proportionalitate, siue Geometrica, aut Harmonica, si singuli per aliquem numerũ eundem multiplicentur, aut diuidantur, habebunt quoq; producti numeri, vel Quotientes proportionalitatem Arithmeticam, vel Geometricam, aut Harmonicam. Vt hic vides singulos multiplicatos per 4. Item diuisos per 4.*

| *Arithmetica proport.* | | | *Geometrica proport.* | | | *Harmonica proport.* | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 28 | 36 | 20 | 40 | 80 | 60 | 84 | 140 |
| *Producti* | | | *Producti* | | | *Producti* | | |
| 80 | 112 | 144 | 80 | 160 | 320 | 240 | 336 | 560 |
| *Quotientes* | | | *Quotientes.* | | | *Quotientes.* | | |
| 5 | 7 | 9 | 5 | 10 | 20 | 15 | 21 | 35 |

*CAETERVM in Geometrica, & Harmonica proportionalitate, numeri producti, & Quotientes retinent eandem specie proportionem, quam numeri multiplicati, aut diuisi habent: At in Arithmetica non seruant eandem differentiam: Sed producti numeri habent differentiam differentiæ multiplicatorum numerorum multiplicem à numero multiplicante denominatam. Vt in dato exemplo quadruplam. Differentia enim inter 20. & 28. est 8. at inter 80. & 112. est 32. Quotientem verò differentia ad differentiam numerorum diuisorum habet proportionem submultiplicem à diuisore denominatam, præposita particula, sub. Vt in dato exemplo subquadruplam. Nam differentia inter 20. & 28. est 8. at inter 5. & 7. est duo. Eadem proportio differentiarum inter productos numeros, & multiplicatos, atque inter Quotientes, numerosq; diuisos reperitur in proportionalitate Geometrica, & Harmonica. Ita vides differentias numerorum 80. 160. 320. Item numerorum 240. 336. 560. quadruplas esse differentiarum inter numeros 20. 40. 80. & inter numeros 60. 84.*

*60. 84. 140. At verò differentias numerorum 5.10.20. & numerorum 15.21.35. esse earundem differentiarum subquadruplus.*

## DE PROPORTIONALITATE ARITHMETICA.

### I.

*DATIS duobus numeris quibuscunque, si eorum differētiam maiori addas, habebis tertium terminum in proportionalitate Arithmetica vtroq; dato maiorem. Et si eandem differentiam huic tertio addas, conficies quartum adhuc maiorem in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps reperies infinitos alios semper maiores, si differentiam vltimo inuento semper adijcias. Vt datis duobus numeris 4.11. quorum differentia est 7. constituetur hæc proportionalitas Arithmetica, quæ extendi potest in infinitum.*

4. 11. 18. 25. 32. 39. 46. 53. 60. 67. &c.

*Quòd si eandem differentiam à minori subtrahas, quando subtrahi potest, habebis rursus tertium terminum in eadem proportionalitate vtroq; minorem. Et si differentiam eandem à tertio detrahas, reliquus fiet quartus adhuc minor in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps inuenies alios minores, si differentiam ab vltimo inuēto semper demas, donec subtractio amplius fieri nequeat. Vt datis duobus numeris 30.34. quorum differentia est 4. constituetur hæc proportionalitas Arithmetica vsq; ad 2, quæ vlterius progredi nequit, cum differentiā 4. amplius subtrahi nequeat à 2.*

34. 30. 26. 22. 18. 14. 10. 6. 2.

*EADEM proportionalitas extendetur, etiamsi differentia non assumatur, hoc modo: Datis duobus numeris, à maiore duplicato detrahe minorem. Reliquus enim numerus erit tertius terminus vtroq; dato maior. A quo duplicato, si proximè præcedentem subtrahas, habebis quartum; & sic in infinitum. Vt datis duobus numeris 4.15. si à 15. duplicato, hoc est, à 30. subtrahas 4. reliquus erit tertius terminus 26. Ab huius duplo 52. si quoq; demas 15. habebis quartum terminum 37. & sic deinceps, vt hìc apparet, 4.15.26.37.48. &c.*

*RVRSVS datis duobus numeris; si ex duplo minoris detrahas maiorem, relinquetur tertius terminus vtroq; minor. Et si ex huius duplo proximè præcedentem demas, relinques quartum terminum adhuc minorem; & sic deinceps, donec amplius subtractio fieri nequeat. Vt datis duobus numeris 20.27. si ex 20. duplicato, id est, ex 40. detrahas 27. reliquus fiet tertius terminus 13. Ab huius duplo 26. si quoq; detrahas 20. manebit quartus terminus 6. Et quia ab huius duplo 12. præcedens terminus 13. subtrahi nō potest, non poterit proportionalitas vlterius progredi, vt hìc vides, 27.20.13.6.*

### II.

*QVANDO terminorum numerus est impar, summa extremorum æqualis est summæ quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter distantium: dupla autem medij termini, à quo extremi æqualiter distant, vt hìc:*

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28.

*Summa 4. & 28. Item 7. & 25. Item 10. & 22. Item 13. & 19. Item duplum medij termini 16. semper est 32.*

*QVANDO autem numerus terminorum est par, summa extremorum æqualis semper est summæ quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter remotorum, vt hìc:*

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31.

*Summa 4. & 31. Item 7. & 28. Item 10. & 25. Item 13. & 22. Item 16. & 19. semper est 35.*

*ITAQVE quando numerus terminorum impar est, habebit summa omnium terminorum ad medium terminum ab extremis æqualiter distantem, hoc est, ad semissem summæ extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, proportionem multiplicem à numero terminorum denominatam. Cùm enim summa extremorum, vel quorumlibet duorum ab extremis æquali interuallo distantium, dupla sit termini medij, continebitur medius terminus, siue semissis summæ extremorū, in summa omnium terminorum toties, quot sunt termini; semel quidem in ipso medio termino, & bis in qualibet summa duorum à medio termino æqualiter distantium: ac proinde omnium terminorum summa ad semissem aggregati extremorum; hoc est, ad medium terminum, proportionem habebit multiplicem, cuius denominator est numerus terminorum. Vt in hac serie nouem numerorum.*

6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30.

*Summa omnium terminorum continebit medium terminum 18. hoc est, semissem summæ extremorum 6. & 30. toties, quot vnitates sunt in 9. numero terminorum, id est, summa omnium terminorum ad 18. semissem summæ extremorū, siue ad medium terminum, proportionē habebit noncuplam. Eademq; in cæteris est ratio.*

*SVMMAM igitur omnium terminorum proportionalitatis Arithmeticæ, cuius terminorum numerus impar est, facilè inueniemus, si semissem aggregati extremorum, (quod semper par est, quando terminorum numerus est impar) per numerum terminorum multiplicemus. Vt in hac serie 11. terminorum:*

7. 19. 31. 43. 55. 67. 79. 91. 103. 115. 127.

*Summa extremorum est 134. Cuius semissis 67. quæ à medio termino 67. non differt, in 11. numerū termi-*

norum ducta producit 737. summam omnium terminorum. Atq; hæc ratio conuenit etiam in proportionalitatem, cuius terminorum numerus est par: sed quando extremorum summa impar est (quando enim terminorum numerus est par, potest esse summa extremorum impar, non autem semper par) erit eius semissis, numerus integer cum $\frac{1}{2}$.

QVANDO autem terminorum numerus est par, habebit summa omnium terminorum ad summam extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, proportionem multiplicē à semisse numeri terminorum denominatam. Cùm enim summa quorumlibet duorum ab extremis æqualiter distantium æqualis sit summæ extremorum, continebitur hæc summa extremorum toties in summa omnium terminorum, quoties vnitas in dimidiato numero terminorum continetur, semel nimirum in summa quorumlibet duorum ab extremis distantium æqualiter: atq; idcircò summa omnium terminorum ad summam extremorum proportionem habebit multiplicem à dimidiato numero terminorum denominatam. Vt in hac serie 10. terminorum.

6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33.

Summa omnium terminorū summam extremorum 6. & 33. quæ est 39. continebit quinquies, hoc est, summa omnium terminorum ad 38. summam extremorum habebit proportionem quintuplam. Et sic de alijs.

SVMMAM ergo omnium terminorum proportionalitatis Arithmeticæ, cuius terminorū numerus par est, obtinebimus, si summam extremorum in dimidiatum numerum terminorum (qui terminorum numerus dimidium habebit sine fractione vnitatis, cùm par ponatur) ducamus. Vt in hac serie 10. terminorum.

6. 11. 16. 21. 26. 31. 36. 41. 46. 51.

Summa extremorum est 57. quæ in 5. semissem numeri terminorum ducta efficit 285. summam omnium terminorum. Hæc ratio conuenit etiam in proportionalitatem, cuius terminorum numerus est impar: sed semissis numeri terminorum semper erit integer cum $\frac{1}{2}$. cùm numerus terminorum ponatur impar.

VIDES igitur satis esse, vt summa inueniatur, si extremi termini, vnà cum terminorum numero cogniti sint. Quo pacto autem ex cognito altero extremorum, terminorum numero, atq; differentia, in cognitionem alterius extremi peruenire possimus, iamiam docebimus.

III.

SI in proportionalitate Arithmetica quotuis terminorum alterum extremorum, numerum terminorum, & differentiam cognoscamus, reperiemus alterum extremum, hoc modo: Numerum proximè minorem numero terminorum in differentiam datam ducemus, & productum minori extremo cognito adijciemus, vel eundem numerum productum ex maiore extremo noto detrahemus. Nam ibi conficiemus maius extremū, quod quæritur, hîc autem reliquum fiet minus extremū ignotum. Exempli causa. Si proponatur minus extremum notum 4. numerus terminorum 12. & differentia 5. multiplicabimus 11. nimirū numerum proximè minorem terminorum numero, per differentiam datam 5. productoq; 55. minus extremum 4. adijciemus. Summa enim 59. erit extremum maius. Vt in his 12. terminis manifestum est, quorum differentia est 5.

4. 9. 14. 19. 24. 29. 34. 39. 44. 49. 54. 59.

Si verò proponatur maius extremum notum 59. & idem terminorum numerus 12. cum differentia eadem 5. auferemus numerum 55. productum ex 11. numero, qui numero terminorum proximè minor est, in differentiam 5. ex noto maiore extremo 59. Reliquus enim numerus 4. erit minus extremum. Vt in eodem exemplo perspicuum est.

NECESSE autem est, si minus extremum inquiratur, numerū productum ex numero, qui numero terminorum proximè minor est, in differentiam, minorem esse maiore extremo cognito, vt subtractio fieri possit: Alioquin quæstio erit impossibilis: hoc est, fieri non poterit, vt datus numerus possit esse maius extremum in progressione vlla, cuius differentia, & numerus terminorum ita se habeant, vt proponitur. Vt si quis daret maius extremum 20. numerum terminorum 6. & differentiam 5. non posset inueniri minus extremum: propterea quòd numerus 25. productus ex 5. qui proximè minor est terminorum numero, in differentiam 5. maior est dato maiore extremo 20. Quòd si quando contingat, productum illum numerū maiori extremo esse æqualem, ita vt subtractione facta, relinquatur 0. erit quidem quæstio possibilis, sed minus extremum erit 0. Vt si in posteriori hoc exemplo maius extremum proponeretur 25. fieret hæc proportionalitas Arithmetica:

0. 5. 10. 15. 20. 25.

IIII.

SI duo extremi termini noti sint, vnà cum numero terminorum, reperiemus differentiam numerorū hoc pacto: Dempto minore extremo à maiore, diuidemus reliquum numerum per numerum proximè minorem numero terminorum. Nam Quotiens erit differentia quæsita. Vt si quis dicat, esse 10. terminos proportionalitatis cuiuspiam Arithmeticæ, cuius numeri extremi sint 7. & 52. Dempto minore extremo 7. ex maiore 52. reliquum numerum 45. partiemur per 9. numerum proximè minorem numero terminorum. Quotiens enim 5. erit differentia, quæ quæritur, vt hîc apparet.

7. 12. 17. 22. 27. 32. 37. 42. 47. 52.

VERVM

VERVM vt fractiones vitentur, progreßioq́ proposita locum habeat in numeris integris, necesse est, minore extremo detracto ex maiore, vt reliquus numerus poßit numerari à numero, qui terminorum numero proximè minor est. Si enim non numeretur, differentia inuenta erit, vel fractio, vel numerus integer cum fractione: quæstio tamen erit poßibilis. Vt si quis proponat extremos terminos, 2. & 38. & numerum terminorum 9. Demptis 2. ex 38. & reliquo numero 36. diuiso per 8. reperitur differẽtia $4\frac{1}{2}$. vt patet in hoc exemplo.

2. $6\frac{1}{2}$. 11. $15\frac{1}{2}$. 20. $24\frac{1}{2}$. 29. $33\frac{1}{2}$. 38.

## V.

SI duo termini extremi, vnà cum differentia, noti sint, eliciemus numerum terminorum hac ratione: Detracto minore extremo à maiore, partiemur reliquum numerum per differentiam. Nam si Quotienti adijciamus 1. conflabimus numerum terminorum quæsitum. Vt datis duobus extremis 10. & 40. cum differentia 3. Ablatis 10. ex 40. & reliquo numero 30. diuiso per 3. fit Quotiens 10. Addita ergo 1. fit numerus terminorum 11. vt hic videre licet:

10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34 37. 40.

SED vt quæstio proposita sit poßibilis, hoc est, vt verè in rerum natura existat progreßio aliqua, quæ habeat omnes conditiones propositas, necesse est, minore extremo subducto ex maiore, reliquũ numerum à differentia numerari. Si enim non numeretur, Quotiens non erit numerus integer, ac proinde indicare non poterit numerum terminorum, etiamsi addatur 1. Fieri enim non potest, vt detur progreßio aliqua, cuius terminorum numerus non sit integer.

## VI.

SI duo extremi termini, vnà cum omnium terminorum summa, noti sint, explorabimus & numerũ terminorum, & differentiam, hac arte: Summam omnium terminorum per extremorum summam partiemur. Quotiens enim dabit dimidiatum numerum terminorum, & duplicatus totum numerum indicabit. Inuento autem terminorum numero, cùm & duo extremi termini cogniti sint, inueniemus differentiam, vt in 4. regula traditum est; si nimirum, minore extremo dempto ex maiore, reliquum numerum diuidamus per numerum proximè minorem numero terminorum inuento. Verbi gratia. Si summa proponatur 515. & extremi termini 20. & 83. diuidemus summam 515. per 103. summam extremorum. Quotiens enim 5. duplicatus dabit numerum terminorum 10. quorum differẽtiam obtinebimus, si dempto minore extremo 20. ex maiore 83. reliquum numerum 63. partiamur per 9. numerum proximè minorem numero terminorum inuento. Nam Quotiens 7. erit differentia, vt hic cernis.

20. 27. 34. 41. 48. 55. 62. 69. 76. 83.

Vides ergo, vt quæstio sit poßibilis, hoc est, vt re vera existat aliqua progreßio, in qua omnium terminorum summa, & duo extremi ita se habeant, vt proponitur, necesse esse, vt summa omnium terminorum data à summa extremorum numeretur. Alioquin terminorũm numerus erui non poterit, si Quotiens non sit numerus integer: Vel certè, si summa omnium terminorum data à summa extremorum nõ numeretur, necesse esse, vt diuisa summa omnium terminorũ per extremorum summam, Quotiens sit numerus integer cum $\frac{1}{2}$. vt nimirum duplicatus efficere poßit numerum terminorum integrum.

## VII.

SI trium terminorum extremi habeant proportionem duplam, medius ad differentiam habebit triplam proportionem: Si verò extremorum proportio maior sit, quàm dupla, proportio medij ad differentiam, minor erit, quàm tripla: Si denique minor sit extremorum proportio, quàm dupla, maior erit proportio medij ad differentiam, quàm tripla. Vt hic, 8.12.16. proportio extremorum 16. & 8. est dupla: & medij 12. ad differentiam 4. tripla. Hic autem, 8.14.20. proportio inter extremos 20. & 8. est dupla sesquialtera, nimirum maior, quàm dupla: & medij 14. ad differentiam 6. dupla sesquitertia, minor videlicet, quàm tripla. Hic denique 8. 11.14. extremi 14. & 8. proportionem habent supertripartientem quartas, quæ minor est, quàm dupla: & medius 11. ad differentiam 3. triplam superbipartientem tertias, hoc est, maiorem, quàm triplam.

## VIII.

INTER quosuis duos numeros constitues medium proportionalem Arithmeticè, si eorum summæ accipias semissem. Vt datis duobus numeris 6. & 30. summa eorum est 36. Huius ergo semißis 18. medio loco proportionalis est Arithmeticè inter 6. & 30. vt hic manifestum est, 6.18.30. Itaque si medius terminus constituendus sit numerus integer, necesse est, vtrumque numerorum datorũ esse vel parem, vel imparem, vt videlicet summa extremorum semper sit par, hoc est, vt poßit habere dimidium sine fractione vnitatis. Nam quando summa extremorum impar est: quod accidit cùm alter extremorum par est, & alter impar, erit medius terminus integer numerus cum semisse vnitatis. Vt datis numeris duobus 8.25. summa eorũ est 33. Huius ergo dimidium $16\frac{1}{2}$. medius terminus erit hoc modo, 8. $16\frac{1}{2}$. 25.

## IX.

INTER quosuis autem duos numeros constitues, quotquot quis iusserit, medios proportionales Arithmeticè, hoc modo: Minorem detrahe ex maiore; reliquum deinde numerum partire per numerũ proximè maiorem numero mediorum constituendorum. Quotiens enim erit differentia proportionalitatis Arithmeticæ, quam si minori numero proposito adijcias, conflabis primũ medium. Huic si eandem differentiam addas, conficies secundum, & sic deinceps. Vel si eam differẽtiam à maiori numero proposito subtrahas, relinquetur vltimus medius. A quo si eandem differentiam demas, remanebit penultimus, & sic deinceps. Veluti si inter 6. & 114. constituendi sint 11. termini medij, detrahemus 6. ex 114. Reliquum numerum 108. per 12. (qui numerus proximè maior est numero mediorum constituendorum.) partiemur. Quotiens enim 9. erit differentia terminorum proportionalitatis. Sic ergo se habebunt 11. termini medij inter 6. & 114.

6. 15. 24. 33. 42. 51. 60. 69. 78. 87. 96. 105. 114.

SED quoniam plerunque tales duo numeri proponuntur, inter quos non possunt cadere numeri integri medij proportionales, propterea quòd inuentus Quotiens pro differentia non semper numerus integer est; si fractiones vitare velis, necesse est, duos propositos numeros esse eiusmodi, vt dempto minore ex maiore, reliquus à numero, qui proxime maior est numero mediorum constituendorum, numeretur: quos ita facilè reperies. Accipe pro minore extremo quemcunque numerum, eumq; adde cuicunque alij numero, quem numerus proximè maior numero mediorum inueniendorum metitur. Conflatus enim numerus maius extremum proportionalitatis erit. Vt si velis duos numeros, inter quos cadant 8. numeri proportionales Arithmeticè, primus autem sit, verbi gratia 7. Adde hunc numerum 7. ad quemuis numerum, quem nouenarius, (qui proximè maior est numero mediorum constituendorum) metitur, nimirum ad 72. conficiesq; maius extremum 79. Differentiam autem inuenies, vt dictum est, detrahendo 7. ex 79. & reliquum numerum 72. per 9. diuidendo. Quotiens enim 8. erit differentia, vt hic vides.

7. 15. 23. 31. 39. 47. 55. 63. 71. 79.

QVOD si quis proponat & minus extremum, & differentiam proportionalitatis, inuenies maius extremum, ita vt inter minus & maius cadant quotuis medij numeri habentes illam differentiam, si numerũ proximè maiorem numero mediorum constituendorum per datam differẽtiam multiplices, numeroq; producto minus extremum addas. Vt si quis velit inter 5. & quempiam maiorem numerum constituere 9. terminos medios, quorum differentia sit 4. Multiplicanda erunt 10. per 4. & producto numero 40. addendum minus extremum 5. Nam inter conflatum numerum 45. & datũ minus extremum 5. intercipiuntur 9. medij termini cum differentia data 4. Vt hic manifestum est.

5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. 33. 37. 41. 45.

HAC alia etiam iucunda operatione cõstitues quotuis medios proportionales inter datos duos numeros. Vtrumque datorum numerorum partire per numerum proximè maiorem numero mediorum constituendorum. Quotientes sub illis colloca, quemque sub suo, & ab eisdem Quotientibus ascende per continuam eorum additionem, addendo primò quemque ad seipsum, deinde ad numerum conflatum, atque ita deinceps, ita vt duas proportionalitates Arithmeticas instituas à Quotientibus incipientes, & per eosdem progredientes, tot terminorum, (exclusis datis duobus numeris) quot medij termini desiderantur. Postremò adde singulos terminos vnius ordinis singulis terminis aduersis alterius ordinis, id est, maximum vnius minimo alterius; proximum deinde sub illo, proximo supra hunc, &c. Numeri enim conflati dabunt medios optatos. Exempli gratia: Sint inter 15. & 100. constituendi 4. medij termini Arithmeticè proportionales. Vtroque diuiso per 5. hoc est, per numerum proximè maiorem numero mediorum, fiunt Quotientes 3. & 20. Constitues ergo hos ordines 4. terminorum sub 15. & 100. Arithmeticè proportionalium per eorundem Quotientum continuam additionem, addendo primùm 3. ad 3. vt fiant 6. Item 3. ad 6. vt fiant 9. Item 3. ad 9. vt fiant 12. Rursus addendo 20. ad 20. vt fiant 40. Item 20. ad 40. vt fiant 60. Item 20. ad 60. vt fiant 80. vt hic vides.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 32 | 49 | 66 | 83 | 100 |
| 12 | | | | | 80 |
| 9 | | | | | 60 |
| 6 | | | | | 40 |
| 3 | | | | | 20 |

EX 12. supremo primi ordinis, & infimo 20. secundi ordinis fiunt 32. pro primo medio. Ex 9. & 40. fiunt 49. pro secundo medio. Ex 6. & 60. fiunt 66. pro tertio medio. Deniq; ex 3. & 80. fiunt 83. pro quarto medio. Itaque in primo ordine semper descendendum est à supremo ad infimum vsq;, in secundo verò ab infimo ad supremum vsq; ascendendum.

EST autem dignum consideratione, differentiam Quotientum, qui sunt minimi numeri duorum ordinum constitutorum, esse quoque differentiam proportionalitatis constituendæ. Ita vides differentiam in proposito exemplo esse 17. quæ differentia etiam est inter Quotientes 3. & 20. Quocirca inuentis Quotientibus, si minor à maiore subtrahatur, & reliquus numerus minori extremo dato adijciatur, & huic composito

numero

numero idem ille numerus reliquus addatur, & ita deinceps, constituentur ijdem termini medij, etiamsi duo illi ordines non instituantur.

VIDES ergo, vtrumq; numerum propositum numerari debere à numero, qui numerum mediorum vna vnitate superat, si fractiones euitandæ sint: Vel certè inueniendos esse duos extremos, vt in priori parte huius regulæ præcepimus. In ijs enim fractiones quoque vitantur, etiamsi eos numerus numero mediorum proximè maior non numeret: quia minore Quotiente detracto ex maiore, semper numerus integer relinquitur; vt in exemplis prioris illius regulæ apparet. Nam in tertio eorum, verbi gratia, inter 5. & 45. constituendi sunt 9. termini medij. Si igitur vterque per 10. diuidatur, fiunt Quotientes $\frac{5}{10}$. & $\frac{45}{10}$. hoc est, $\frac{1}{2}$. & $4\frac{1}{2}$. quorum differentia est 4. numerus integer, ex cuius continua additione ad minus extremum datum medij termini optati conficiuntur: qui ijdem reperientur, si per Quotientes $\frac{1}{2}$. & $4\frac{1}{2}$. duo ordines instituantur ascendentes, vt dictum est, per ipsorum Quotientum additionem continuam, &c.

## X.

NVMERVM quemlibet propositum distribuemus in partes, quotquot quis iusserit, proportionalitatem Arithmeticam seruantes, hac ratione. Diuiso dato numero per semissem numeri terminorum, secabimus Quotientem in duas partes inæquales vtcunque, pro extremis terminis proportionalitatis. Deinde quia iam dati sunt duo termini extremi, cum numero terminorum, detrahemus minus extremum ex maiore, partiemurq; reliquum numerum per numerum proximè minorem numero terminorum. Ita namque prodibit in Quotiente differẽtia, vt ex 4. regula patet. Si igitur hæc differẽtia addatur minori extremo assumpto, deinde ad numerum conflatum, atq; ita deinceps, constituetur numerus terminorum datus, quorum summa proposito numero æqualis est: ac proinde datus numerus in numerum partium Arithmeticè proportionalium sectus erit. Exempli causa, si numerus 830. distribuendus sit in 10. partes proportionales Arithmeticè; partiemur eum per 5. semissem terminorum, Quotientemq; 166. secabimus in 20. & 146. terminos extremos proportionalitatis constituendæ. Deinde deductis 20. ex 146. numerum reliquum 126. diuidemus per 9. numerum proximè minorem numero terminorum. Quotiens enim 14. (vt in 4. regula dictum est) differentia erit proportionalitatis. Vt hic vides:

20. 34. 48. 62. 76. 90. 104. 118. 132. 146.

Rursus si numerus 10. diuidendus sit in 10. partes proportionales Arithmeticè, diuidemus eum per 5. semissem terminorum: Quotiẽtem verò 2. in duas partes inæquales secabimus $\frac{1}{2}$. & $1\frac{1}{2}$. pro extremis terminis proportionalitatis. Dempto deinde minore extremo $\frac{1}{2}$. ex maiore $1\frac{1}{2}$. partiemur reliquam 1. per 9. numerũ proximè minorem numero partium constituendarum. Quotiens enim $\frac{1}{9}$. differentia erit continuè addenda minori extremo $\frac{1}{2}$. & numero conflato, &c. Quæ additio, vt facilior fiat, reducemus minus extremum $\frac{1}{2}$. & differentiam $\frac{1}{9}$. ad eandem denominationem, vt ad $\frac{9}{18}$. & $\frac{2}{18}$. Sic ergo diuisus erit numerus 10. in 10. partes Arithmeticè proportionales, quarũ prima est $\frac{1}{2}$. siue $\frac{9}{18}$. vltima verò $1\frac{1}{2}$. siue $1\frac{9}{18}$. & differẽtia $\frac{2}{18}$. siue $\frac{1}{9}$.

$\frac{9}{18}$. $\frac{11}{18}$. $\frac{13}{18}$. $\frac{15}{18}$. $\frac{17}{18}$. $1\frac{1}{18}$. $1\frac{3}{18}$. $1\frac{5}{18}$. $1\frac{7}{18}$. $1\frac{9}{18}$.

Certum autem est, hac ratione varijs modis datum numerum diuidi posse in propositum numerum partium proportionalium, prout videlicet, diuiso dato numero per semissem numeri terminorum, Quotiens in alias partes binas inæquales pro terminis extremis sectus fuerit.

IDEM efficiemus hac ratione: Numero dato, ac si esset summa omnium terminorum constituendorum, diuiso per numerum terminorum datum, dabit Quotiens duplicatus summam extremorum: propterea quòd huius extremorum summæ semissis, id est, Quotiens inuentus ductus in numerum terminorum, hoc est, in diuisorem, producit summam omnium terminorum, nimirũ datum numerum, vt in 2. regula dictum est. Quare si Quotientem duplicatum in duos numeros inæquales secemus pro terminis extremis: & minore detracto ex maiore, reliquum numerum per numerum proximè minorẽ numero terminorum dato diuidamus, dabit Quotiens differentiam, vt in 4. regula diximus. Quam si ad minus extremum factum adijciamus, & iterũ ad conflatum numerum, & sic deinceps, constituta erit proportionalitas Arithmetica, quæ imperatur. Veluti, si numerus 198. secandus proponatur in 9. partes Arithmeticè proportionales, partiemur eum per 9. terminorum numerum, vt fiat Quotiens 22. qui duplicatus dabit 44. summam extremorũ. Constituto igitur minore extremo 10. ac proinde maiore 34. si detrahamus 10. ex 34. & reliquum numerum 24. per 8. numerum proximè minorem numero terminorum partiamur, gignetur differentia 3. Sic ergo stabunt 9. termini proportionalitatis Arithmeticæ conficientes summam 198.

10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34.

Hic etiam manifestum est, varijs modis datum numerũ distribui posse in datum numerum partium, prout videlicet Quotiens primus duplicatus, quem summam esse diximus extremorum, in alias atq; alias partes binas sectus fuerit, pro extremis duobus terminis.

SED fortassè facilius (quanquam operatio aliquantò longior sit) idem hoc absolues hac ratione: Cape tot numeros Arithmeticè quomodocunque proportionales, in quot partes datus numerus distribuendus est, & singulos in datum numerum duc, procreatosq; numeros per summam omnium terminorum sumptorum ex 2. regula inuentam partire. Quotientes enim dabunt partes, quas quæris. Verbi gratia. Sit diuidendus numerus 525. in 10. partes proportionales Arithmeticè. Sume 10. numeros Arithmeticè proportionales quoscunque, 4.7.10.13.16.19.22.25.28.31. quorum summa est 175. Ductis autem singulis in datum numerum 525. creabuntur hi 10. numeri 2100.3675.5250.6825.8400.9975.11550.13125.14700.16275. quibus singulis diuisis per summam 175. tuorum numerorum in proportionalitate Arithmetica acceptorum, gignetur hæ 10. partes, quas quæris.

12. 21. 30. 39. 48. 57. 66. 75. 84. 93.

IDEM obtinebis, si datum numerum per assumptorum numerorum summam partiaris, Quotientemq; in singulos assumptos numeros ducas. Producti enim numeri dabunt partes, quas quæris. Vt in dato exemplo, si datus numerus 525. diuidatur per 175. summam assumptorum numerorum, fit Quotiens 3. quo ducto in singulos numeros assumptos, 4.7.10.&c. gignentur eædem partes, quæ prius, 12.21.30.&c.

VT autem operatio fiat facilior, ac breuior, satis est, priores duos numeros proportionalitatis acceptæ multiplicare per datum numerum, productosq; numeros per summam omnium terminorum eiusdem acceptæ proportionalitatis partiri. Vel satis est, dato numero per summam assumptorum numerorũ diuiso, Quotientem in duos priores assumptos numeros ducere. Ita enim reperiẽtur primæ duæ partes numeri dati, quarum differentia addita maiori, fiet tertia, & eadem differẽtia addita tertiæ, faciet quartam, & sic deinceps. Liquidò autem hic quoq; constare puto, datum numerum variis modis distribui posse in partes, quotquot quis imperauerit, proportionales: prout scilicet alij atq; alij numeri eiusdem proportionalitatis Arithmeticæ fuerint assumpti, vel quorum alia atq; alia sit differentia.

HAC via partes inuentæ habent ordinatim easdem proportiones inter se, quæ inter terminos proportionalitatis assumptæ eodem ordine reperiuntur. Perpetuò autem singuli numeri acceptæ proportionalitatis ad singulas partes inuentas, primus ad primã, secundus ad secundam, &c. eandem omnino habent proportionem, Sic vides, inter primas partes inuentas 12.21. esse proportionem supertripartientem quartas, qualis est inter primos numeros acceptos 4.7.&c. Item 4. ad 12. & 7. ad 21. & 10. ad 30. &c. habere eandem prorsus proportionem, nimirum subtriplam.

ITAQVE si accipiatur proportionalitas Arithmetica, cuius primi duo numeri habeant proportionem duplam, ita vt primus sit differentia omnium terminorum, habebunt primæ partes duplam quoq; proportionem, atq; ideò prima erit quoq; differentia, ex cuius additione aliæ partes coaceruẽtur. Vt si in superiore exemplo accepisses hos 10. terminos, 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10. quorum summa est 55. Vel hos 10. numeros, 3.6.9.12.15.18.21.24.27.30. quorum summa est 165. multiplicassesq; primum quemque in datum numerum 525. & productos numeros 525.1575. per summam quemlibet propriam, vt priorem per 55. & posteriorem per 165. diuisisses, inuenisses primam partem $9\frac{6}{11}$. quæ eadem est differentia. Quare partes omnes 10. constituentes proportionalitatem Arithmeticam fuissent hæ:

$9\frac{6}{11}$. $19\frac{1}{11}$. $28\frac{7}{11}$. $38\frac{2}{11}$. $47\frac{8}{11}$. $57\frac{3}{11}$. $66\frac{9}{11}$. $76\frac{4}{11}$. $85\frac{10}{11}$. $95\frac{5}{11}$.

## DE PROPORTIONALITATE GEOMETRICA.

### I.

DATIS quibusuis duobus numeris, si denominatorem proportionis, quã habent, conferendo maiorẽ cum minore, hoc est, si diuiso maiore per minorẽ, Quotientem ducas in maiorem, gignes tertium terminũ in proportionalitate Geometrica vtroq; dato maiorem. Et si eundem denominatorem, siue Quotientem, in hunc tertium ducas, produces quartum adhuc maiorem in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps constitues infinitos alios semper maiores, si denominatorem, Quotientémve, per vltimum inuentũ semper multiplices. Vt datis duobus numeris 4.12. denominator proportionis 12. ad 4. est 3. quòd diuisis 12. per 4. Quotiens fiat 3. Si igitur ducas 3. in 12. & iterum in productum, & sic in infinitum, constitues hanc proportionalitatem Geometricam, quæ in infinitum potest extendi.

4. 12. 36. 108. 324. 972. 2916. 8748. &c.

Quòd si minorem cum maiore conferas, & denominatorem proportionis, quam habent, id est, diuiso minore per maiorem, Quotientem ducas in minorem: Vel, quod idem est, per denominatorẽ proportionis, quam maior ad minorem habet, diuidas minorem, creabitur tertius numerus proportionalis vtroq; minor. Ex quo eadem via reperies quartum adhuc minorem, & sic in infinitum. Vt datis duobus numeris 8.16. denominator proportionis 8. ad 16. est $\frac{1}{2}$. quòd diuisis 8. per 16. Quotiens fiat $\frac{1}{2}$. denominator autem proportionis 16. ad 8. est 2. quòd diuisis 16. per 8. Quotiens fiat 2. Si igitur ducas $\frac{1}{2}$. in 8. vel diuidas 8. per 2. Idemq; cum producto numero facias, constituetur hæc proportionalitas Geometrica, progrediens quoque in infinitum versus minores numeros, sicut illa in infinitum versus maiores numeros progrediebatur.

16. 8. 4. 2. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{32}$. $\frac{1}{64}$. &c.

EXTENDETVR quoq; eadem proportionalitas in infinitũ, etiamsi denominator proportionis ignotus sit, hoc modo: Datis duobus numeris, duc maiorem in se, & productum per minorẽ diuide. Quotiens enim erit tertius terminus vtroq; maior. Hunc si iterum in se ducas, productumq; per proximè præcedentẽ terminũ diuidas, dabit Quotiens quartũ terminũ, & sic deinceps. Vt datis duobus numeris, 3.6. Ducto 6. in se, fit 36.

quo

*quo diuiso per 3. fit 12. tertius terminus. Rursus ducto 12. in se, fit 144. quo diuiso per 6. fit 24. quartus terminus: atq; ita in infinitum, vt hic vides, 3.6.12.24.48. &c.*

RVRSVS *datis duobus numeris, si minorem in se duxeris, productúmque per maiorem diuiseris, dabit Quotiens tertium terminum vtroque minorem. Quem si rursum in se duxeris, productúmque per proximè præcedentem terminum diuiseris, dabit Quotiens quartum terminum adhuc minorem, & sic deinceps. Vt datis duobus numeris 6.18. Ducto 6. in se, fit 36. quo diuiso per 18. fit 2. tertius terminus. Rursus ducto 2. in se, fit 4. quo diuiso per 6. fit* $\frac{4}{6}$. *siue* $\frac{2}{3}$. *in minimis numeris pro quarto termino: atque ita in infinitum, vt hic apparet.*

18. 6. 2. $\frac{2}{3}$. $\frac{2}{9}$. $\frac{2}{27}$. &c.

IAM *verò si quamcunque proportionem non multiplicem (in multiplici enim, si regulam præscriptam sequaris, nulla est difficultas) extendere velis in numeris integris ad quotlibet terminos maiores, efficies id iucunda hac & facili operatione. Cape tot terminos continuè proportionales eius proportionis multiplicis ab 1. incipientis, cuius denominator denominat partem, vel partes aliquotas, cuius, vel quarum in data proportione fit mentio; tot inquam cape terminos, quot in proposita proportionalitate non multiplici terminos desideras. Vltimus enim eorum erit primus terminus tuæ proportionis non multiplicis. Eum ergo si multiplices per denominatorem datæ proportionis, & iterum numerum productum in eundem denominatorem ducas, atque ita deinceps, constitues terminos optatos. Vbi hoc est mirabile, si termini imperati hac via reperiantur, non posse vltra terminos propositos proportionalitatem extendi sine fractione. Verbi gratia, si inueniendi sint 7. termini proportionis sesquialteræ: Quoniam denominator fractionis* $\frac{1}{2}$. *cuius mentio fit, est 2. sumendi sunt 7. termini proportionis duplæ, videlicet 1.2.4.8.16.32.64. Si ergo à 64. incipias, constitues 7. terminos proportionalitatis sesquialteræ, & non plures; hos nimirum:*

64. 96. 144. 216. 324. 486. 729.

*Inuenientur autem facilè hi termini, si ad primum 64. adijcias eius dimidium, & ad secundum 96. iam factum, eius quoq; dimidium, &c. Sic quoque si desiderentur 6. termini proportionis duplæ superbipartientis quintas, accipiendi sunt 6. termini proportionis quintuplæ, propter denominatorem partium quintarũ, qui est 5. videlicet 1.5.25.125.625.3125. Nam si ab vltimo 3125. incipias, reperies hos 6. terminos in proportione dupla superbipartiente quintas.*

3125. 7500. 18000. 43200. 103680. 248832.

*Qui termini facilè reperientur, si duas quintas partes primi ad eundem primum duplicatum adijcias, & rursus* $\frac{2}{5}$. *secundi iam facti ad eundem secundum duplicatum, &c. Atq; numeri hac via inuenti semper minimi sunt in sua proportione, ita vt alij totidem termini in eadem proportione continua reperiri, qui minores illis sint, sit prorsus impossibile, nisi fractiones admittere velimus. In proportione porrò multiplici quacunque minimi termini quotcunque perpetuò incipiunt ab 1. Vt tres minimi termini in proportione continua quadrupla sunt hi, 1.4.16.*

## II.

QVANDO *numerus terminorum continuè proportionalium impar est, numerus genitus ex multiplicatione extremorum inter se, æqualis est numero, qui ex quorumlibet duorum ab extremis æqualiter distantium, multiplicatione inter se creatur, & ei quoque, qui ex medio in se ipsum ducto producitur. Vt in his 5. numeris proportionis sesquialteræ:*

16. 24. 36. 54. 81.

*tam ex 16. in 81. quàm ex 24. in 54. & ex 36. in se, procreatur numerus 1296.*

QVANDO *autem proportionaliũ terminorũ numerus est par, etiamsi non continuè sint proportionales, dummodò bini continuam proportionem interrumpentes, habeat vnam eandemq; inter se proportionem, hoc est, dummodo secundus & tertius; Item quartus & quintus; necnon sextus & septimus, &c. (quibus in locis proportio interrumpitur) sint quoque non continuè proportionales, in diuersa tamen proportione ab ea, quam primus habet ad secundum, & tertius ad quartum, & quintus ad sextum, &c. Quando, inquam, terminorum numerus est par, numerus ex ductu extremorum vnius in alterum productus semper æqualis est numero, qui ex multiplicatione quorumlibet duorum ab extremis æqualiter distantium inter se gignitur. Vt hic in 6. numeris duplæ proportionis continuæ.*

3. 6. 12. 24. 48. 96.

*Ex 3. in 96. & ex 6. in 48. & ex 12. in 24. producitur idem semper numerus 288.*

*Item in hac sesquitertia non continua 8. terminorum, vbi bini proportionem continuam interrumpentes habent vnam eandemq; proportionem, videlicet triplam, quæ à sesquitertia diuersa est.*

3. 4. 12. 16. 48. 64. 192. 256.

*idem omnino numerus 768. fit ex 3. in 256. & ex 4. in 192. & ex 12. in 64. & ex 16. in 48.*

HINC sequitur, quando terminorum numerus impar est, numerum ex ductu extremorum vnius in alterum, vel ex duorũ quorumlibet æqualiter ab extremis, vel à medio distantium multiplicatione inter se procreatum, esse quadratum, (Dicitur quadratus numerus is, qui ex multiplicatione alicuius numeri in seipsum producitur; numerusq; ipsum producens latus eius, siue radix appellatur.) cuius radix, siue latus est medius numerus: quia nimirum idem numerus gignitur ex medio in seipsum; ac proinde medius eius radix quadrata est. Numerum verò ex tribus inter se multiplicatis productum, quorum duo sunt vel extremi, vel ab extremis æqualiter remoti, tertius autem, medius, esse cubum, (Numerus ille dicitur cubus, qui producitur ex numero aliquo in seipsum ducto, & iterum in productum numerũ: & numerus ille, qui in se ductus, & iterum in productum, cubum producit, latus eius cubicum, siue radix cubica appellatur.) cuius latus, siue radix est medius numerus: quia videlicet gignitur ex medio in se cubice ducto, hoc est, primùm in se, deinde in productum ex alijs duobus inter se multiplicatis. In se enim facit productum ex alijs duobus: ac proinde in hunc procreatum iterum ductus producit cubum.

SEQVITVR quoq; quando sunt 4. numeri siue continuè, siue nõ continuè proportionales, numerum ex mutua omnium multiplicatione productum, (Dicuntur tres, vel plures numeri se mutuò multiplicare continuè, quando vnus ducitur in alium, & productus numerus in tertium, & hic productus numerus in quartum, & sic deinceps, donec omnes numeri sint multiplicati.) esse quadratum, cuius latus, siue radix est numerus ex primo in quartum, vel ex secundo in tertium genitus. Nam ex multiplicatione mutua omnium 4. numerorum inter se idem procreatur numerus, quem producit numerus factus ex primo in quartum, si in productum ex secundo in tertium (qui producto ex primo in quartum æqualis est) multiplicetur. Quando autem sunt 6. numeri, siue continuè, siue non continuè proportionales, dummodo bini numeri proportionem continuam interrumpentes sint quoq; non continuè proportionales, fiet cubus ex mutua multiplicatione omnium 6. numerorum inter se, cuius radix latúsve est numerus ex multiplicatione extremorum, vel duorũ quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, productus: quia videlicet gignitur ex numero, qui fit ex duobus extremis inter se multiplicatis, in se cubice multiplicato: hoc est, semel in se, nimirum in productum ex duobus, qui sunt extremis proximi, & iterum in productum: quando videlicet hic productus numerus ducitur in productum ex duobus medijs: quippe cùm tres hi numeri producti sint inter se æquales.

## III.

SI propositis quotcunque terminis continuè proportionalibus, minus extremum à maiore subtrahatur, & reliquus numerus per numerum vna vnitate minorem denominatore proportionis, (quam quilibet propositorum numerorum ad minorem habet, qui illi proximus est) diuidatur, Quotiens denique maiori extremo adijciatur, conflabitur summa omnium terminorum. Vt hic in proportione continua tripla.

2. 6. 18. 54. 162. 486. 1458. 4374. 13122.

Dempto minore extremo 2. ex maiore 13122. & reliquo numero 13120. diuiso per 2. per numerum scilicet vna vnitate minorem denominatore 3. proportionis triplæ, quam quilibet eorum numerorum ad proximè antecedentem minorem habet, fit Quotiens 6560. cui si addatur maius extremum, 13122. fit summa omnium 19682. Item in hac sesquitertia continua.

243. 324. 432. 576. 768. 1024.

Subducto minore extremo 243. ex maiore 1024. & reliquo numero 781. diuiso per $\frac{1}{3}$. (qui numerus vna vnitate minor est denominatore $1\frac{1}{3}$.) fit Quotiens 2343. Addito ergo maiore extremo 1024. fit omnium terminorum summa 3367.

ITAQVE vt vides, ad explorandam summam quotcunque terminorum proportionalitatis Geometricæ satis est, si duo extremi cognoscantur, vnà cum proportionis denominatore. Quo verò artificio inuestigandus sit vltimus terminus cuiusuis proportionalitatis Geometricæ quotcunque terminorum, etiamsi medios numeros ignoremus, copiosè tradidimus in progreßionibus in nostra Arithmetica practica, vt superuacaneum sit ea hoc loco repetere.

## IIII.

PROPOSITIS quotlibet numeris se mutuò æqualiter superantibus, id est, Arithmeticè proportionalibus; si totidem alij numeri sumantur, habentes easdem proportiones, quas illi, eodem ordine sumptæ; superabunt se quoq; posteriores hi numeri æqualiter, hoc est, erunt Arithmeticè proportionales, sicut illi. Vt si sex hi numeri 4. 7. 10. 13. 16. 19. Arithmeticè proportionales proponantur, sumanturq; alij sex cum iisdem proportionibus, cuiusmodi sunt hi, 20. 35. 50. 65. 80. 95. cõperies ipsos quoq; Arithmeticè esse proportionales; quippe cùm habeant differentiam 15. Sed caue putes, hanc proprietatem posse conuerti: Neq; enim si dentur quotuis numeri Arithmeticè proportionales, & totidem alij Arithmeticè quoq; proportionales sumantur, etiamsi vtrobique eadem sit differentia, necessariò hi illis proportionales erunt. Id quod perspicuum est in hisce duabus proportionalitatibus Arithmeticis:

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20.
3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21.

Vbi prioris duo primi numeri 2.4. habent proportionem duplam, at posterioris duo primi 3.5. superbipartientem tertias. Item primus numerus 3. in posteriore ordine ad primum numerum 2. in ordine priore habet sesquialteram proportionem, secundus autem 5. ad secundum 4. sesquiquartam, &c.

## V.

Dvobvs quibusuis numeris datis, si eorum alterutro in quotlibet partes distributo, singulæ partes in alterum ducantur, & singuli numeri producti per priorem numerum diuidantur, constituent omnes Quotientes simul sumpti posteriorem numerum, habebuntq; ordine easdem omnino proportiones inter se, quas partes prioris numeri inter se eodem ordine habent: at singuli Quotientes, siue partes posterioris numeri ad singulas partes prioris, vt prima ad primã, secunda ad secundam, &c. vnam eandemq; prorsus habebunt proportionem. Veluti, datis duobus numeris 57.285. si prior secetur in partes, quæ simul additæ ipsum conficiunt, 2.5.10.40. & earum qualibet in posteriorẽ numerum 285. ducatur, gignẽtur hi numeri 570.1425.2850.11400. quibus sigillatim per numerum priorem 57. diuisis, fiunt Quotientes, 10.25.50.200. qui in vnam collecti summam constituunt posteriorem numerum 285. habentq; easdem proportiones, quas habent partes 2.5.10.40. nimirum duplam sesquialteram, duplam, & quadruplam: singuli verò ad singulas partes, vt 10. ad 2. & 25. ad 5. & 50. ad 10. & 200. ad 40. eandem omnino proportionem habent, nimirum quintuplam.

Easdem partes numeri posterioris obtinebis, si eum per priorem, qui in partes distributus est, partiaris, Quotientemq; factum in singulas partes eiusdem prioris numeri ducas. Vt in eodem exemplo, diuiso numero 285. per 57. fit Quotiens 5. quo ducto in 2.5.10.40. partes numeri 57. fiunt partes numeri 285. hæ 10 25 50. 200. vt prius.

Hinc facilè elicitur, quo pacto duo quilibet numeri secandi sint in partes componentes ipsis numeris æquales, ita vt partes vnius sint partibus alterius proportionales, collatis tum partibus vtriusque numeri inter se, tum & partibus vnius cum partibus alterius. Atque hac proprietate nititur tertia ratio distribuendi numerum propositum in quotuis partes Arithmeticè proportionales, quam in regula 10. proportionalitatis Arithmeticæ præscripsimus. Nam sumptis totidem numeris Arithmeticè proportionalibus, erit eorum summa, numerus in illos, tanquam in partes ipsum componentes, diuisus. Quare si singulæ hæ partes in datum numerum ducantur, & producti numeri per summam illam diuidantur; Vel si per assumptorum numerorum summam datus numerus diuidatur, ac Quotiens in singulos eos numeros ducatur; producentur partes totidem numeri propositi in eisdem proportionibus. Quare Arithmeticè quoq; proportionales erunt, vt ex antecedente regula 4. manifestum est.

## VI.

Qvotlibet numeris continuè proportionalibus datis, erunt eorum differentiæ continuè quoque in eadem proportione proportionales. Vt in apposito exemplo tam numeri, quàm eorum differentiæ, habent continuam proportionem sesquialteram.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Differentiæ. | 32. | 48. | 72. | 108. | 162. | 243. | |
| | 64. | 96. | 144. | 216. | 324. | 486. | 729. |

Eadem ratione in hoc altero exemplo, quod sequitur, habent & numeri, & eorum differẽtiæ duplam proportionem. Vbi vides differentias non differre à numeris duplæ proportionis, quorum sunt differentiæ. Id quod soli proportioni duplæ cuicunque accidit: quia in ea quilibet numerus maior proximè præcedẽtem minorem superat, ipsomet numero proximè antecedente, cuius duplus est, hoc est, quem bis continet.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Differentiæ. | 7 | 14 | 28 | 56 | 112 | 224 | 448 | 896 | |
| | 7 | 14 | 28 | 56 | 112 | 224 | 448 | 896 | 1792 |

## VII.

Datis quotcunque numeris continuè proportionalibus, si eorum summa per eos sigillatim diuidatur, erunt Quotientes conuerso ordine in eadem proportione continuè proportionales. Et si Quotientum summa per ipsos Quotientes sigillatim diuidatur, creabuntur iidem prorsus Quotientes ordine conuerso: atq; ita in infinitum. Summa autem eorum Quotientum æqualis erit numero, qui fit ex primo Quotiente in vltimum, vel ex multiplicatione duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, vel denique, si terminorum numerus est impar, ex medio in seipsum ducto. Quod sanè incredibile videri possit. Exempli causa. Si dentur hi 4. numeri continuè proportionales in proportione dupla. 3.6.12.24. si eorum summa 45. per singulos diuidatur, erunt Quotientes 15. $7\frac{1}{2}$. $3\frac{3}{4}$. $1\frac{7}{8}$. conuerso ordine in eadem proportione dupla continuè proportionales. Et si per hosce Quotientes diuidatur eorum summa $28\frac{1}{8}$. prodibunt ordine conuerso iidem omnino Quotientes, & ita deinceps in infinitum. Ipsa verò summa $28\frac{1}{8}$. æqualis est numero, qui fit ex 15. in $1\frac{7}{8}$. vel ex $7\frac{1}{2}$. in $3\frac{3}{4}$. Sic etiam datis his 5. terminis in continua proportione tripla, 2.6.18.54.162. si eorum summam partiemur per eos sigillatim, efficiemus hos 5. Quotientes 121. $40\frac{1}{3}$. $13\frac{4}{9}$. $4\frac{13}{27}$. $1\frac{40}{81}$. in eadem continua proportione tripla. Quorum summa $180\frac{61}{81}$. producitur vel ex 121. in $1\frac{40}{81}$. vel ex $40\frac{1}{3}$. in $4\frac{13}{27}$. vel denique ex $13\frac{4}{9}$. in seipsum. Vbi duo consideratione sunt digna. Primum, quando terminorum numerus est impar, summam

Quotientum esse numerum quadratum, cuius radix est medius terminus: quippe qui ex medio termino in seipsum ducto procreetur, vt dictum est. Deinde, eosdem semper Quotiẽtes gigni ex diuisione summæ quotcunque terminorũ proportionis eiusdem cõtinuæ, quantumuis termini illi sint magni, aut parui, dummodo terminorum numerus idem semper sit. Veluti, si sint tres termini continuè dupli, siue magni, siue parui, erunt perpetuò hi Quotientes 7. $3\frac{1}{2}$. $1\frac{3}{4}$. Si sint quatuor, hi Quotientes erunt 15. $7\frac{1}{2}$. $3\frac{3}{4}$. $1\frac{7}{8}$. In quinque numeris continuè triplis, erunt hi semper Quotientes, 121. $40\frac{1}{3}$. $13\frac{4}{9}$. $4\frac{13}{27}$. $1\frac{40}{81}$. Ac denique in quinque numeris continuam proportionem sesquialteram habentibus reperientur hi Quotientes, $13\frac{3}{16}$. $8\frac{19}{24}$. $5\frac{31}{36}$. $3\frac{49}{54}$. $2\frac{49}{81}$.

Ex hac proprietate inueniemus quotcunque terminos in data proportione continuè proportionales, quorum summa æqualis sit numero, qui fit ab extremis inter se multiplicatis, vel ex duobus medijs quibuslibet æqualiter distantibus ab extremis, vel etiam ex termino medio in seipsum ducto, si numerus terminorum fuerit impar. Nam si sumantur tot termini in data proportione continuè proportionales, quot inueniendi sunt, siue magni, siue parui, eorumque summa per eosdem seorsum diuidatur, erunt Quotientes numeri, qui desiderantur. Quòd si summa debeat esse numerus quadratus, accipiendi erũt termini, quorum numerus impar sit, & dato numero terminorum impari æqualis, &c. Quæ res miraculi instar quodammodo censeri possit, dari posse in data proportione, quotquot quis iusserit, terminos continuè proportionales, quorum summa ex multiplicatione primi termini in vltimum gignatur: cùm contrarium huius experiamur in omnibus proportionibus continuis inæqualitatis, quarum termini sint numeri integri; & in alijs etiam omnibus, quarũ numeri fractiones habent admixtas, nisi hi numeri Quotientes sint producti ex diuisione summæ alicuius quotcunque terminorum continuè proportionalium, per ipsos terminos proportionales, vt diximus.

Eodem modo satisfaciemus quæstioni, si quis petat duos numeros datam habentes proportionem, quorum summa æqualis sit numero ex eorum multiplicatione vnius in alterũ procreato. Nam si sumantur quilibet duo numeri in proportione data, atque eorum summa per eosdem sigillatim diuidatur, satisfiet quæstioni propositæ per Quotientes inuentos. Vt si cupiat quis duos numeros, inter quos reperiatur proportio tripla superbipartiens nonas, accipiemus vel hos duos numeros 29.9. vel 87.27. proportionem datam habentes, vel alios quosuis. Summa etenim priorum 38. diuisa per 29. & 9. vel posteriorum summa 114. per 87. & 27. diuisa dabit Quotientes $1\frac{9}{29}$. & $4\frac{2}{9}$. proportionem eandem habentes, quam 29. & 9. vel 87.27. ordine tamen conuerso, & quorum aggregatum est $5\frac{139}{261}$. qui videlicet numerus ex ductu etiam $1\frac{9}{29}$. in $4\frac{2}{9}$. gignitur.

## VIII.

Inter duos quoscunque numeros constituemus medium Geometricè proportionalem, si eos inter se multiplicemus, & procreati numeri radicem quadratam accipiamus. Vt datis duobus numeris 6. & 96. ex vno in alterũ, fit numerus 576. cuius radix quadrata 24. erit medio loco proportionalis inter datos numeros hoc modo, 6.24.96. Nam 96. ad 24. habent proportionẽ quadruplam, qualem etiã habent 24. ad 6. Itaque si inter datos duos numeros constituendus sit numerus medius rationalis, qui videlicet exprimi possit, necesse est vt numerus ex vno in alterum productus sit quadratus. Nisi enim quadratus sit, non habebit radicem in numeris, sed eius radix erit numerus, quem Arithmetici surdum, vel irrationalem vocant, explicantque hoc modo, radix quadrata talis numeri: Veluti, datis duobus numeris 7. & 9. fiet ex vno in alterum numerus 63. qui radicem non habet. Dicemus ergo radicem quadratam numeri 63. quæ quidem numeris exprimi nequit, esse medio

| 7. | R.q.63. | 9. |
|---|---|---|

loco proportionalem inter numeros datos 7. & 9. hoc modo, quæ quidem radix maior est, quàm 7. cùm huius quadratum sit 49. minor verò quàm 8. cùm huius quadratum sit 64. Neque verò numerus 7. cum aliqua fractione, qui medius est inter 7. & 8. radix esse potest, etiamsi vnitas in infinitum cogitetur esse diuisa: quia omnis talis numerus cum fractione producit numerum cum fractione, vt ad defin. 8. demonstrabimus, cuiusmodi non est numerus 63.

## IX.

Si quis inuenire velit tres numeros in Arithmetica proportionalitate, inter quorum binos singuli cadant medij Geometricè proportionales, assequetur id hac ratione: Sumantur tres numeri quicunque, quorum secundus primi sit quintuplus, & tertius eiusdem primi septuplus. Quadrati enim numeri eorũ erunt Arithmeticè proportionales, & primus numerus acceptus in secundum ductus producet medium proportionalem Geometricè inter primum quadratum, & secundum, in proportione primi assumpti numeri ad secundum: secundus verò numerus assumptus in tertium ductus gignet medium proportionalem inter secundum quadratum, & tertium, in proportione, quam inter se habent secundus, ac tertius numerus assumptus. Id quod perspicuè in hoc exemplo apparet.

| Tres numeri assump. | Primus 8. | | Quintupl.pri.40. | | Septup.pri.56. |
|---|---|---|---|---|---|
| Quadr. Arith. prop. | 64 | | 1600 | | 3136. |
| Medij Geometr. | | 320 | | 2240 | |

Differentia enim trium quadratorum est 1536. & medij proportionales inter eos, 320. & 2240. producti ex 8. in 40. & ex 40. in 56.

Hinc facilè reperies tres numeros quadratos, qui se æqualibus differentijs mutuò superẽt, si pro radicibus

bus eorum sumes tres numeros, quorum secundus sit primi quintuplus, & tertius eiusdem primi septuplus, vt diximus.

PARI ratione, dato quouis quadrato; reperientur alij duo maiores cum illo constituentes proportionalitatem Arithmeticam. Si enim radix dati quadrati statuatur primus numerus, & alij duo numeri sumantur, quorum alter illius radicis sit quintuplus, & septuplus alter, erunt quadrati numeri horum duorum numerorum, quos quærimus. Vt si detur quadratus numerus 64. erit eius radix 8. primus numerus; secundus, 40. & tertius, 56. &c.

INVENTIS autem tribus quadratis Arithmeticè proportionalibus, si eos per quemuis numerum eundem multiplices, vel per quamuis partem aliquotam, si quam habent, diuidas, erunt producti quoq; numeri, aut Quotientes Arithmeticè proportionales, inter quorum binos singuli etiam medij in Geometrica proportionalitate intercipiuntur: qui medij reperientur eodem modo, si nimirum medij inter quadratos inueti per eundem illum numerum multiplicentur, vel per eandem illam partem aliquotam diuidantur. Vt si superiores quadrati, vnà cum medijs proportionalibus duplicentur, creabuntur hi numeri.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Arithmet. proport. | 128 | | 3200 | | 6272 |
| Medij Geomet. | | 640 | | 4480 | |

Si verò diuidantur ijdem per 8. partem aliquotam communem quadratorum, (sunt autem quælibet partes aliquotæ quadratorum, partes etiam aliquotæ mediorum) prodibunt hi numeri.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Arithmet. proport. | 8 | | 200 | | 392 |
| Medij Geomet. | | 40 | | 280 | |

Habebunt autem hi numeri hoc modo inuenti easdem semper proportiones, quas quadrati, eorumq; medij inter se habent. Quòd si hos 8. 200. 392. diuidas per 4. inuenies alios, 2. 50. 98. Arithmeticè proportionales, inter quos cadunt Geometricè medij, 10. & 70. Et si deniq; hos 2. 50. 98. partiaris per 2. habebis alios, 1. 25. 49. inter quos medij Geometricè sunt, 5. & 35.

VBI hoc etiam admiratione videtur dignum, quandocunque inter tres numeros Arithmeticè proportionales, siue quadrati sint, siue non, cadunt duo medij Geometricè proportionales, vnus inter primum & secundum, & inter secundum ac tertium alter; quadratum prioris medij, & quadratum secundi numeri Arithmeticæ proportionalitatis, & quadratũ posterioris medij constituere proportionalitatem Arithmeticam: Vt in posteriori exemplo, quadrati numeri horum trium numerorum, 40. 200. 280. sunt 1600. 40000. 78400. Arithmeticè proportionales, habentes differentiam eandem communem 38400. & sic de cæteris.

## X.

INTER quoscunque duos numeros reperiemus quotcunque medios continuè proportionales, iucunda sanè & artificiosa operatione: quam vt planius explicem, dicenda pauca sunt de radicum generibus, & quo pacto numeri ex suis radicibus gignantur. In omni ergo proportione continua, quæ ab 1. incipit, secundus terminus radix est omnium numerorum insequentium. Ea enim radix bis posita, atq; ita in seipsam ducta, producit tertium terminum, qui est numerus quadratus, radixq; ipsa quadrata dicitur. Eadem radix ter posita, & primùm in se, & iterum in productum multiplicata gignit quartũ terminum, qui cubus est, & propterea radix eius cubica appellatur. Deniq; si eadem radix ponatur quater, & fiant tres multiplicationes, primùm in se, deinde in productum, tertiò iterum in vltimum productum, fiet quintus terminus: Et si ponatur quinquies, fiantq; quatuor ordine multiplicationes, orietur sextus terminus, atq; ita in infinitum. Quo pacto autem omnes hæ radices nominari debeant, & signari, non est huius loci declarare, sed ad Algebram tota hæc res spectat, vbi etiam docebimus, qua arte ex dato numero eruendæ sint. Nunc, vt intelligatur res, de qua agimus, notandæ sunt tres infrà scriptæ proportionalitates continuæ, quarum duæ primæ sunt Arithmeticæ, nimirum duæ series naturales numerorum ab 1. incipientes, tertia verò Geometrica ab 1. quoq; initium ducẽs. Vbi perspicuè apparebit, quàm egregium vsum habeat series numerorum naturalis in re proposita.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Numerus mediorum. | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | &c. |
| Numeri significantes radices. | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | &c. |
| Numeri Geomet. proport. | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | &c. |

Prima complectitur numeros mediorum constituendorum: secunda numeros, qui significant genera radicum, hoc est, quoties terminus secundus tertiæ proportionalitatis, quem radicem omnium insequentium diximus, ordine poni debeat, vt multiplicatus numeros proportionalitatis Geometricæ illis respondentes procreet. Verbi gratia, vnitas medij ordinis significat, numerum 2. tertij ordinis, qui radix est omnium aliorum, semel positum non esse multiplicandum, sed ipsummet esse radicẽ omnium ex nulla sui multiplicatione productum. At numerus 2. eiusdem secundi ordinis indicat, eandem radicem 2. tertij ordinis positam bis hoc modo, 2. 2. & ita in se multiplicatam gignere 4. tertium terminũ eiusdem tertij ordinis. Sic numerus 3. medij ordinis denotat, radicem eandem 2.infimi ordinis positam ter hoc modo, 2. 2. 2. atq; ita multiplicatam producere 8.quartum terminum infimi ordinis. Nam ex radice 2.primo loco posita in eandem 2.positam secundo loco fit numerus 4. & ex hoc producto in radicem 2.tertio positam loco gignitur numerus 8.quartus nimirum proportionalitatis Geometricæ sub numero 3.ordinis secundi. Idem dices de alijs. Vt, verbi gratia, numerus 7.secundæ proportionalitatis monstrat, radicē eandem 2. tertij ordinis positam septies, hoc pacto, 2.2.2.2. 2.2.2. & in se continuè sexies multiplicatam producere 128.octauum numerum Geometricæ proportionalitatis illi numero 7.suppositum. Nam ex 2.primi loci in 2.secundi loci fiunt 4. & ex 4.in 2. tertij loci fiunt 8. & ex 8.in 2.quarti loci fiunt 16.& ex 16.in 2.quinti loci fiunt 32.& ex 32.in 2.sexti loci fiunt 64.& denique ex 64.in 2.septimi loci fiunt 128.&c. Atque hoc non solùm verum est in proposita proportione continua dupla, sed in omnibus alijs ab vnitate incipientibus, quicunque numerus secundum locum occupet, tanquam radix aliorum, & qui proportionem denominat.

ITAQVE si constituere vis quotlibet medios inter duos propositos numeros, cape numerum mediorum constituendorū in primo ordine. Nam ex vtroq; numero dato extrahenda est radix, quæ toties ordine posita, & continuè multiplicata vtrumq; producat, quot vnitates continentur in numero secundi ordinis, qui infra numerum mediorum constituendorum in supremo ordine acceptum scriptus est. Radices inuentas sub datis numeris colloca, quamq; sub suo, & ab eisdem ascende per continuam vtriusque multiplicationē, (ducendo primùm quamq; radicem inuentam in se, deinde in numerum productum, & sic deinceps.) ita vt duas proportionalitates Geometricas multiplices instituas à radicibus incipiētes, & ab eisdem denominatas, tot terminorum, (exclusis datis duobus numeris) quot medij termini quærūtur. Post hæc singulos terminos vnius ordinis duc in singulos terminos alterius ordinis aduersos & oppositos, hoc est, maximum vnius in minimū alterius: proximum deinde sub illo in proximū supra hunc, &c. Ita vt in vno ordine semper descendas à supremo ad infimum vsq;, in altero verò ab infimo vsq; ad supremum ascendas, vt in exemplis patebit. Numeri enim procreati dabunt medios terminos, quos quærimus. Exempli causa, si inter 9. & 144. inueniendus sit vnus terminus medio loco proportionalis, sumemus in primo ordine 1. & sub hoc termino in secundo ordine numerum 2.qui indicat, ex vtroq; numero dato eruendam esse radicem quadratā, quæ videlicet bis posita, per eius multiplicationem vtrumq; producat, vt declarauimus. Radices autem quadratæ inuentæ sunt 3.& 12. Et quia vnus tantū medius terminus desideratur, non sunt instituendæ proportionalitates Geometricæ à radicibus incipientes, quæ plures terminos habeant, sed ipsæ radices inter se multiplicandæ. Numerus enim procreatus 36. erit medio loco proportionalis inter 9. & 144. vt hic vides, 9.36.144. Sic etiam si inter 18. & 288.constituendus sit vnus terminus medius: quoniam hi numeri radices quadratas non habent, signabimus priorē hoc modo, R.q.18. posteriorem autem sic, R.q.288. Hæ autem radices inter se multiplicatæ faciunt 72.terminum medium proportionalem inter 18. & 288. hoc modo, 18.72.288. Vbi etiam admiratione dignum est, duos numeros, quorum neuter potest efferri, inter se multiplicatos gignere numerū rationalem: cuius rei demonstratio ex lib.10.petenda est. Quo pacto autem inter se multiplicandi sint duo numeri surdi, qui nimirum efferri non possunt, quales sunt R.q.18.& R.q.288.docebimus in Algebra.

RVRSVS si dati sint duo numeri 16.& 625.inter quos tres medij constituendi sint, accipiemus in primo ordine numerum mediorum 3.cui in ordine secundo subscribitur numerus 4. Igitur ex vtroque dato numero extrahenda est radix, quæ quater posita, & continuè multiplicata vtrumque producat, quæ quadrati quadrata, vel Zensizensica dici solet, cuiusmodi in dato exemplo sunt 2.& 5. Constitues ergo hos ordines trium terminorum sub 16.& 625.Geometricè proportionalium in proportione multiplici, incipientes ab eisdem radicibus 2.& 5.à quibus proportiones horum ordinum denominantur, vt hic apparet:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 16 | 40 | 100 | 250 | 625 |
| 8 | | | | 125 |
| 4 | | | | 25 |
| 2 | | | | 5 |

Ex 8.supremo primi ordinis in 5.infimum secundi ordinis fiunt 40.pro primo medio. Ex 4.in 25.fiunt 100. pro medio secundo. Denique ex 2.in 125. fiunt 250.pro tertio medio.

SCITV autem dignum est, medios terminos inuentos cum duobus extremis datis continere proportionem continuam eam, quæ inter radices datorum numerorum reperitur. Sic enim in dato exemplo vides ita esse 625.ad 250.& 250.ad 100.& 100.ad 40.& 40.ad 16.vt 5.ad 2. Quapropter, inuentis radicibus, si maior per minorem diuidatur, & per Quotientem, qui denominator est proportionis radicum inuentarum multiplicetur minor numerus datus, & productus numerus rursum per eundem Quotiētem multiplicetur, atq; ita deinceps, constituentur intra duos extremos datos medij termini ijdem, etiamsi duo illi ordines proportionū multiplicium à radicibus denominatarum non instituantur. Vt in exemplo dato. Diuisa radice 5.per radicem 2. fit Quotiens $2\frac{1}{2}$.denominator videlicet proportionis 5.ad 2. Si igitur ducas minorem numerum datum 16. in $2\frac{1}{2}$.gignes 40.primum medium: Et si rursus ducas 40.in $2\frac{1}{2}$.procreabis 100. secundum medium: Et denique si centum ducas in $2\frac{1}{2}$.produces 250.tertium medium.

PERSPI-

*Perspicuum autem est, inter datos quoslibet numeros nō semper constitui posse numerum terminorum propositum, qui sint rationales, sed plerunque inuentos terminos esse irrationales: propterea quòd dati numeri non habent semper illas radices, quæ extrahendæ sunt: aut certè non habent eam proportionem, quam aliqui duo numeri, ex quibus eæ radices possunt extrahi, quod etiam satis esset. Sicut enim inter 16. & 625. qui habent radices quadratiquadratas, hoc est, quæ quater positæ eos suis multiplicationibus producunt, tres medij termini incidunt: ita quoq; inter 48. & 1875. qui illis 16. & 625. proportionales sunt, licet non habeant similes radices, cadunt tres medij termini, vt hic patet:*

48. 120. 300. 750. 1875.

*Quamobrem si quis desideret duos numeros, inter quos cadant, quotquot voles, termini medij rationales in data proportione, accipiendi sunt duo numeri quomodocunque datam habentes proportionē. Eorum enim vterque si toties ponatur, quot termini medij quærendi sunt, & adhuc semel & continuè multiplicetur, erunt vltimi duo numeri producti, quos quærimus. Inter eos enim medij termini constituentur eo modo, quem exposuimus: hoc est, vel instituendo sub illis duos ordines proportionum multiplicium, quas assumpti numeri denominent, tot terminorum, quot medij termini quæruntur; vel multiplicādo minorem eorum per denominatorem proportionis datæ, quæ est inter acceptos duos numeros, &c. Verbi gratia, si quis velit duos numeros, inter quos constitui possint quatuor termini medij rationales in proportione superbipartiente tertias, cuius denominator est $1\frac{2}{3}$. sumemus duos numeros 6. & 10. habentes datam proportionem superbipartientem tertias, & vtrumque quinquies ponemus hoc modo, 6.6.6.6.6. & 10.10.10.10.10. Ex multiplicatione enim continua vtriusque existent hi numeri 7776. & 100000. inter quos constitues quatuor medios numeros proportionales, vt hic vides:*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7776 | 12960 | 21600 | 36000 | 60000 | 100000 |
| 1296 | | | | | 10000 |
| 216 | | | | | 1000 |
| 36 | | | | | 100 |
| 6 | | | | | 10 |

*Qui quidē medij termini inueniūtur vel ex 1296. in 10. & ex 216. in 100. & ex 36. in 1000. & ex 6. in 10000. vel ex denominatore $1\frac{2}{3}$. proportionis superbipartientis tertias in minorem numerum inuentū 7776. & iterum in numerum productum, &c.*

## XI.

*Numerum quemcunque datum distribuemus in quotuis partes proportionales Geometricè in data proportione hoc modo: Cape tot numeros continuè proportionales in data proportione, siue minimos, siue nō minimos, in quot partes datus numerus distribuendus est, & per eorum summam datum numerum partire. Quotiens namque per singulos terminos in data proportione acceptos multiplicatus procreabit partes dati numeri seruantes datam proportionem inter se. Veluti si datus numerus 756. secandus sit in 6. partes continuè proportionales in proportione dupla: si sumantur 6. termini continuè dupli, 3.6.12.24.48.96. quorū summa est 189. & per hanc summam datus numerus 756. diuidatur, Quotiens autem 4 per singulos acceptos numeros multiplicetur, procreabuntur hi 6. numeri continuè dupli, conficientesq; simul in vnam summam collecti datum numerum 756. videlicet:*

12. 24. 48. 96. 192. 384.

*Eædem partes inuenientur, si sumantur hi alij sex numeri continuè dupli, $\frac{1}{100}$. $\frac{2}{100}$. $\frac{4}{100}$. $\frac{8}{100}$. $\frac{16}{100}$. $\frac{32}{100}$. quorum summa est $\frac{63}{100}$. Vel hi 6. alij, 100.200.400.800.1600.3200. quorū summa est 6300. Nam datus numerus 756. diuisus per summam priorem $\frac{63}{100}$. facit 1200. qui Quotiens ductus in primum numerum acceptum $\frac{1}{100}$. dabit primam partem 12. vt prius, &c. At idem numerus datus 756. diuisus per posteriorem summam 6300. facit Quotientem $\frac{756}{6300}$. qui ductus in primum numerum assumptum 100. producit eandem partem primam 12. & sic de cæteris.*

*Quod si cupias numerum, qui secari possit in quotuis partes proportionales sine vlla fractione. (Nam nisi seruetur id, quod iam præcipiemus, incidemus plerunque in fractiones) assequeris propositum, si sumas quemcunque numerum multiplicem summæ totidem terminorum proportionalium assumptorum. Vt si quis quærat numerum, qui possit distribui in 5 numeros integros sesquialteram proportionem continuam habentes; sumptis 5. terminis in sesquialtera proportione continuè quibuscunque, vt 64.96.144.216.324. quorum summa est 844. accipiemus huius summæ quemcunque numerum multiplicem, nimirum decuplum 8440. Hic enim per præceptum traditum secabitur in 5. numeros integros proportionis sesquialteræ continuæ, cum eo diuiso per summam acceptorum numerorum, Quotiens necessariò fit numerus integer.*

*Hinc nullo negotio satisfaciemus quæstioni, qua iubeamur in data proportione cōtinua reperire quotuis numeros, qui in vnam summam collecti constituant numerum quemcunque datum. Nam si datus numerus secetur in tot partes proportionales datæ proportionis, vt docuimus, soluta erit quæstio. Vt si quis inuenire velit 4. numeros triplæ proportionis continuæ, quorum summa sit 100. secandus erit hic numerus 100. in 4. nu-*

*meros proportionis triplæ, vt in $2\frac{1}{2}$. $7\frac{1}{2}$. $22\frac{1}{2}$. $67\frac{1}{2}$. Hi enim conficiunt datum numerum 100. Quòd si conficere debeant summam 400. erunt numeri quæsiti in tripla proportione continua hi, 10. 30. 90. 270. Horum enim summa est 400. Si deniq; summam conficere debeant, non superantem 1. erunt huiusmodi numeri, $\frac{1}{40}$. $\frac{3}{40}$. $\frac{9}{40}$. $\frac{27}{40}$. Summa enim horum est $\frac{40}{40}$. hoc est, 1.*

## DE PROPORTIONALITATE HARMONICA.

### I.

TRES *numeri in proportionalitate Harmonica inuenientur ex tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ quibuscunque, si primus in secundum, ac tertium, & secundus in tertium multiplicetur. Vt subiecta exempla demonstrant.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *Arithm.* | 1. 2. 3. | 3. 7. 11. | 4. 6. 8. | 10. 60. 110. |
| *Harmon.* | 2. 3. 6. | 21. 33. 77. | 24. 32. 48. | 600. 1100. 6600. |

*In omnibus enim ex primo termino Arithmeticæ proportionalitatis in secundum & tertium fit primus terminus Harmonicæ, & secundus: ex secundo verò in tertium, tertius.*

ALIO *modo, & in idem recidit, gignitur Harmonica proportionalitas ex Arithmetica. Nam medius terminus Arithmeticæ proportionalitatis ductus in extremos gignit extremos Harmonicæ: extremi verò eiusdẽ Arithmeticæ inter se multiplicati creant medium Harmonicæ. Vt in iisdem exemplis manifestum est.*

HINC *fit, extremos terminos Harmonicæ proportionalitatis, ac proinde & differentias, eandem habere proportionem, quam extremi Arithmeticæ, ex qua orta est, habent: quia videlicet extremi Arithmeticæ per eundem medium multiplicati produxerunt Harmonicæ extremos.*

QVAPROPTER *si reperiendi sint tres numeri proportionalitatis Harmonicæ, quorum extremi, atq; adeò & differentiæ, datam habeant proportionem, sumendi sunt duo numeri proportionem datam habentes, & inter eos medius Arithmeticæ proportionalitatis constituẽdus: ac deniq; ex hisce tribus terminis inueniendi tres in proportionalitate Harmonica, vt diximus. Vt si quærantur tres, quorum extremi habeant proportionem sesquitertiam, sumemus 3. & 4. inter quos ea proportio reperitur: sed quia eorũ summa 7. impar est, non potest inter eos collocari medius integer in proportionalitate Arithmetica, ducemus vtrumque per aliquem numerum parem, nimirum per 2. Inter productos enim 6. 8. cadet integer medius proportionalis Arithmeticè, 7. nimirum semissis eorum summæ. Ex his igitur tribus 6. 7. 8. Arithmeticè proportionalibus orientur hi tres Harmonicè proportionales, 42. 48. 56. quorum extremi, atq; adeò & differẽtiæ, proportionem sesquitertiam datam habent.*

SEQVITVR *etiam, binos numeros trium terminorum proportionalitatis Harmonicæ binis Arithmeticæ, ex qua orta est, conuerso ordine esse proportionales: hoc est, in Harmonica ita esse secundum ad primum, vt in Arithmetica tertius est ad secundum. Item in illa sic esse tertium ad secundum, vt in hac est secundus ad primum: quia nimirum priores duo in Harmonica producti sunt ex posterioribus duobus in Arithmetica per primum eundem multiplicatis: Duo verò posteriores Harmonicæ procreati sunt ex prioribus duobus Arithmeticæ in tertium ductis. Vt ex superioribus exemplis perspicuum est.*

VICISSIM *si primus numerus Harmonicæ proportionalitatis ducatur in secundum, ac tertium, & secundus in tertium, procreati erunt tres numeri Arithmeticæ proportionalitatis. Vel (quod idem est) si medius terminus Harmonicæ in duos extremos ducatur, gignentur duo extremi Arithmeticæ; duo verò extremi Harmonicæ inter se multiplicati producent medium Arithmeticæ: eodem scilicet prorsus modo, quo ex Arithmetica proportionalitate Harmonicam oriri diximus. Ita vides ex hac Harmonica 2. 3. 6. gigni hanc Arithmeticam, 6. 12. 18. Siue enim ducas primum 2. in secundum 3. & tertium 6. Item secundum 3. in tertium 6. produces 6. 12. 18. siue ducas medium 3. in extremos 2. 6. facies extremos 6. 18. & ex primo 2. in tertium 6. medium 12.*

HARMONICA *proportionalitas dicitur continuari vltra tres terminos, siue ad maiores numeros progrediendo, siue regrediendo ad minores, quando primi tres numeri sunt proportionales Harmonicè, & tertio adiunguntur duo cum eo constituentes quoq; eandem proportionalitatem Harmonicam, & in eadem omnino proportione. Deinde vltimo, qui quintus est, adiunguntur eodem modo alij duo; atq; vltimo, siue septimo, alij duo, & sic in infinitum. Hoc autem fit versus maiores numeros progrediendo, si posteriores duo numeri ducantur in denominatorem proportionis, quam tertius ad primũ habet. Vt datis his tribus numeris 2. 3. 6. Harmonicè proportionalibus, si posteriores duo, 3. 6 ducantur in 3. denominatorem proportionis 6. ad 2. fient 9. 18. atq; ita erunt iam quinque termini, 2. 3. 6. 9. 18. Harmonicè proportionales. Et si posteriores duo 9. 18. ducantur iterum in 3. denominatorẽ proportionis, erunt septem hi termini, 2. 3. 6. 9. 18. 27. 54. continuè proportionales Harmonicè: & sic progredi poterimus in infinitum, ita vt semper Harmonica proportionalitas cõtinuetur per terminos locorũ imparium, vt per tertium, quintũ, septimũ, nonum, &c. Quòd si versus minores terminos progredi libeat, diuidendi erunt minores duo numeri per denominatorẽ proportionis extremorũ: Et posteriores duo minores inuẽti iterum diuidendi per eundem denominatorẽ, & sic deinceps in infinitum. Vt datis his*

tribus

tribus numeris,18.9.6.si minores duo,9.6.diuidantur per 3.denominatorem proportionis inter extremos 18.6. fient 3.2.atq; ita erũt iam quinque termini 18.9.6.3.2. Et si rursus duo posteriores inuenti 3.2.diuidantur per eundem denominatorẽ 3.adiuncti erunt vltimo termino 2.alij duo in Harmonica proportionalitate hoc modo,18.9.6.3.2.1.$\frac{2}{3}$.Atq; ita deinceps progredi licebit in infinitum.

ALIO modo,& quidem magis propriè,continuatur proportionalitas Harmonica,siue ad maiores numeros progrediendo,siue ad minores, quando primi tres numeri sunt Harmonicè proportionales: Item,relicto primo,alij sequentes tres; & relictis duobus,sequentes alij tres, atq; ita deinceps: Sed in hac continuatione nunquã erit eadem proportio inter extremos trium,quæ inter extremos aliorũ trium. Vt in his 4.numeris, 3. 4.6.12. continuata dicitur proportionalitas Harmonica, quoniam tam tres 3.4.6. q̃ tres 4.6.12. Harmonicè proportionales sunt: sed priorum extremi 3.6.proportionem habent duplam,at extremi posteriorum 4.12.triplam.Item continua esse dicitur Harmonica proportionalitas in his quinque terminis,10.12.15.20.30.quia & in tribus, 10.12.15. & in tribus, 12.15.20. & in tribus, 15.20.30. Harmonica proportionalitas reperitur, licèt extremi quorumlibet trium non habeant easdem proportiones. Quo pacto autem in vtramque partem hoc modo continuanda sit,quando continuari potest,(neque enim semper ad maiores numeros progrediendo potest hoc modo extendi) aut quo pacto quotlibet numeri continuè Harmonicè proportionales,vt exposuimus, reperiri possint,ex ijs, quæ sequuntur,constabit.

## II.

INTER quosuis datos duos numeros constitues medium Harmonicè proportionalem, hac ratione. Numerum,qui fit ex datorum duorum numerorũ differentia in eorum minorẽ,partire per eorundem summam, Quotientemq; minori adde.Conflatus enim numerus erit medius,quem quæris.Vel eandem differentiam datorum numerorum duc in maiorem,& productum partire per eorundem summam. Si enim Quotientem ex maiore dato subtrahas,reliquus fiet medius terminus quæsitus.Vt inter duos numeros 15.& 60.inuẽturus medium,duc eorũ differentiam 45.in minorem 15.& numerum productum 675. partire per eorum summam 75. Nam si Quotientem 9.minori 15.adijcias,conflabis medium terminũ 24. vt hic patet, 15.24.60. Eundem medium reperies,si eandem differentiam 45.ducas in maiorem 60. & productum 2700.per eorum summam 75. diuidas. Quotiens enim 36. ex maiore 60.detractus relinquet eundem medium terminum 24.

VIDES ergo,quando summa datorum duorum numerorum non metitur productum ex eorundem differentia in minorem eorum,vel in maiorem,medium inuentum esse necessariò integrum cum fractione. Vt si inter 7.& 10.inueniendus sit medius, duc eorum differẽtiam 3.in minorem 7. & productum 21.per eorundem summam 17.partire. Quotiens enim 1$\frac{4}{17}$.additus eidem minori 7.facit medium terminum 8$\frac{4}{17}$.Vt hic vides 7.8$\frac{4}{17}$.10. Quia tam 10.ad 7.habent proportionem supertripartientem septimas,quàm differẽtia maiorum 1$\frac{13}{17}$.ad minorem differentiam 1$\frac{4}{17}$. Vel eorum differentiam 3.duc in maiorem 10.productumq; numerum 30. partire per eorum summam 17. Quotiens enim 1$\frac{13}{17}$.subtractus ex maiore 10. reliquum faciet eundem medium terminum 8$\frac{4}{17}$.

ALII tradunt medij termini inuentionẽ inter duos numeros datos in proportionalitate Harmonica hoc modo: Inuentis duobus minimis numeris in proportione duorũ numerorũ datorum, iubent Quotientem, qui fit ex diuisione differentiæ datorum duorum numerorum per summam minimorum duorũ inuentorum,duci in minorem inuentum,& productum numerũ minori dato adijci: Vel eundem Quotientem duci in maiorem inuentum,& productum numerum ex maiore dato subtrahi.Semper enim vel ille conflatus numerus,vel hic reliquus dabit medium terminum,qui quæritur. Vt si inter 20.& 30.sit inueniendus medius:minimi numeri proportionis inter 20.& 30.sunt 2.3.Si igitur differentia datorum numerorum 10.diuidatur per inuentorum summam 5.fit Quotiens 2.quem si ducamus in minorem inuentum 2.& productum 4.minori dato 20.addamus,vel si eundem Quotientem 2. ducamus in maiorem inuentum 3. & productum 6.ex dato maiore 30. demamus,inuenietur semper medius terminus 24.Vt hic apparet,20.24.30.

BREVIVS ita medius terminus reperietur. Diuidatur datorum numerorum differẽtia per numerum, qui denominatorem proportionis,quã dati numeri habent,vna vnitate superat. Quotiens enim minori termino additus dabit medium. Vt datis numeris 10.40.habentibus proportionem quadruplam; si eorum differentia 30. diuidatur per 5.qui numerus denominatorẽ proportionis vna vnitate superat, fiet Quotiens 6. qui additus minori termino 10. conficiet medium terminum 16.hoc modo,10.16.40.

SED ad memoriam iuuandã inueniemus fortasse commodius (licèt aliquantò longiore operatione) medium terminum inter duos extremos datos hoc modo: Si duo extremi nõ sint impares,vel pares, sed vnus par, & alter impar,duplica illos,& inter duplicatos constitue medium Arithmeticè proportionalem,qui semper erit semissis summæ eorum. Per hos deinde tres numeros Arithmeticè proportionales quære ex regula 1. tres Harmonicè proportionales. Ita enim inuentus erit medius terminus inter duos, qui eandem inter se proportionem habent,quam dati duo extremi. Quòd si fiat,vt primus inuentus ad secundum,ita primus datus ad aliud: hoc est, si per primum inuentum diuidatur numerus ex secundo inuento in primum datum factus, reperietur medius inter duos datos extremos. Vt si inter 7.& 10. inueniendus sit medius; duplica eos, vt fiant 14.& 20. Summa enim horum 34. par est,cuius semissis 17. est medius Arithmeticè inter 14. & 20.hoc modo 14.17.20. Ex his tribus inuenientur hi tres Harmonicè proportionales,238.280.340. Si ergo fiat vt primus inuentus 238. ad secundum 280. ita primus datus 7. ad aliud, inuenietur numerus $8\frac{4}{17}$. qui medius est Harmonicè inter 7. & 10. qui ab initio propositi fuerunt.

III.

PROPOSITIS duobus numeris, reperiemus tertium vtroq; maiorem in proportionalitate Harmonica, quando id fieri potest, (Pulchrè autem operatio docebit, quando id fieri nequeat) hac ratione. Numerum ex vno in alterum genitum partiemur per numerum qui relinquitur, subtracta amborum differentia ex minore termino dato: Quotiens enim erit tertius terminus vtroque dato maior, quem quærimus. Quòd si quando diuisor reperiatur esse 0. vel quando amborum differentia ex minore termino subtrahi nequit, impossibile est, datis duobus numeris posse adiungi tertium maiorem in proportionalitate Harmonica. Vt si duo termini minores dentur 12. 16. diuidemus numerum ex eis procreatum 192. per 8. qui numerus relinquitur, si amborum differentia 4. ex minore 12. detrahatur. Quotiens enim 24. cum datis duobus constituit hanc Harmonicam proportionalitatem, 12. 16. 24. Hanc extendemus, si ad duos terminos 16. 24. tertium adiungamus: nimirum diuidendo 384. numerum ex 16. in 24. factum, per 8. qui numerus remanet facta subtractione differentia amborũ, quæ est 8. ex minore 16. Inuenietur enim numerus 48. Quare ita stabunt 4. termini Harmonicè proportionales, 12. 16. 24. 48. Quòd si tentemus his adiungere alium maiorẽ, frustrà laborabimus. Nam datis duobus vltimis 24. 48. reperietur diuisor esse 0. Differentia enim amborum, quæ est 24. subtracta ex minore 24. relinquit 0. Quòd si quis proponat hos duos numeros, 10. 12. adiungetur illis tertius vtroque maior, 15. Ad hos verò duos, 10. 11. apponetur tertius $12\frac{2}{9}$. Et ad duos 90. 99. tertius 110. At verò ad 3. 6. nullus adiũgi poterit: quia differentia inter ambos, quæ est 3. dempta ex minore 3. relinquit 0. Atque eodem modo, quando dati numeri habent proportionem duplam, non potest illis adiungi tertius proportionalis, quia differentia amborum semper est minori termino æqualis. Multò magis cùm dati numeri habent proportionem dupla maiorem, non inuenietur tertius maior illis proportionalis Harmonicè, quia differentia amborum tunc semper maior est minore termino, atq; idcircò subtractio fieri nequit. Vt si dentur numeri 3. 7. quorũ proportio est dupla sesquitertia, nimirum maior, quàm dupla, vides amborum differentiam 4. maiorem esse minore termino 3. Quare illis non adiungetur vllus tertius proportionalis.

ALII ita inuestigant tertium terminum. Ducunt datorum numerorum differentiam in maiorem, numerumq; productum per numerum, qui relinquitur, subtracta eadem differentia ex minore numero, diuidunt; Quotientemq; deniq; maiori adijciunt, vt tertium conficiant. Vt datis duobus numeris, 12. 16. si eorum differentia 4. ducatur in 16. & productus numerus 64. diuidatur per 8. (qui numerus relinquitur, subtracta eadem differentia, 4. ex minore 12.) fit Quotiens 8. qui additus ad maiorem 16. facit tertium 24. vt prius.

ITAQVE, vt duobus numeris adiungi possit tertius maior proportionalis, necesse est, illorum proportionem esse vel superparticularem, vel superpartientem, nimirum dupla minorem. Ex quo liquidò constat, Harmonicam proportionalitatem non posse progredi in infinitum versus maiores numeros, si de continuatione secundo modo accepta loquamur, quæ propria est, vt in prima regula diximus. Nam cùm primùm ventum erit ad duos numeros, quorum proportio dupla est, vel maior, ibi necessariò proportionalitas consistet, & vltrà non promouebitur.

SEQVITVR quoque ex priori regula, quando minor terminus superat differentiam amborum sola vnitate, tertium procreari ex primo in secundum: quia productus hic numerus diuisus per illam vnitatem facit tertium numerum, vt diximus. Constat autem numero per vnitatem diuiso, Quotientem esse eundem numerum diuisum. Vt si dentur duo numeri 6. 11. quia minor 6. superat amborum differentiam 5. sola vnitate, erit tertius proportionalis numerus 66. qui fit ex 6. in 11. veluti hic vides, 6. 11. 66. Idem cernitur in hisce numeris, 2. 3. 6. & 10. 19. 190. Semper enim tertius fit ex primo in secundum: quia primus superat differentiam priorum duorum sola vnitate.

EX posteriori verò regula sequitur, quando minor terminus superat amborum differentiam sola vnitate, tertium procreari, si productus ex amborum differentia in maiorem, maiori adijciatur: quia productus ille diuisus per illam vnitatem, non facit diuersum Quotientem ab eo producto, &c. Vt datis eisdem numeris 6. 11. si differentia 5. ducatur in 11. & productus 55. addatur maiori 11. fiet tertius terminus 66. vt prius.

QVARE facilè quoque reperiri possunt tres numeri Harmonicè proportionales, si pro primo sumatur quilibet numerus, pro secundo verò eius duplus, detracta prius vnitate, pro tertio deniq; numerus, qui ex primo fit in secundum. Vt si primus sit 8. erit secundus 15. & tertius 120. & sic de cæteris. Proportio autẽ tam extremorum, hoc modo inuentorum, quàm differentiarum, semper erit multiplex à medio, qui perpetuò impar est, denominata. Vt in his proximis tribus, 8. 15. 120. proportio est quindecupla.

VNDE si quærantur tres minimi numeri integri Harmonicè proportionales in quacunque proportione multiplici, siquidem denominator est numerus impar, statuemus eum denominatorẽ in medio: semissem autem numeri proximè maioris in primo loco. In tertio deniq; collocabimus eum, qui ex primo in secundum fit. Vt si desiderẽtur tres numeri integri, & minimi in proportione septupla, locabimus 7. in medio & 4. (id est, semissem numeri 8. proximè maioris, quã 7.) in primo loco, & in tertio numerum 28. ex 4. in 7. procreatum, vt hic vides, 4. 7. 28. Si verò denominator est par, statuemus numerum proximè maiorem in primo loco: in tertio verò collocabimus numerum, qui fit ex illo proximè maiore in denominatorem: In medio deniq; ponemus denomina-

denominatorem duplicatum. Vt si inueniendi sint tres minimi integri in proportione octupla, constituemus 9. qui numerus proximè maior est denominatore 8. in primo loco; & in tertio numerum 72. ex 9. in 8. genitum; in medio denique duplum denominatoris, nimirum 16. vt hic apparet, 9.16.72.

QVOD si tres numeri Harmonicè proportionales in data proportione inueniendi sint, siue illi minimi sint, & integri, siue non, agendum erit hoc modo: In medio statuemus denominatorem datæ proportionis: In primo verò semissem numeri, qui denominatorem vna vnitate superat: In tertio denique loco locabimus numerum ex multiplicatione primi per medium factum. Veluti si quærantur tres in data proportione dupla supertripartiente septimas, erit denominator huius proportionis, $2\frac{3}{7}$. collocandus in medio. & in primo numerus $1\frac{5}{7}$. nimirum semissis numeri $3\frac{3}{7}$. qui denominatorem $2\frac{3}{7}$. vnitate superat. Tertius denique erit $4\frac{8}{49}$. factus ex primo $1\frac{5}{7}$. in medium $2\frac{3}{7}$. Ita igitur stabunt tres numeri inuenti, $1\frac{5}{7}.2\frac{3}{7}.4\frac{8}{49}$. qui ad hos tres eiusdem denominationis reuocabuntur, $\frac{84}{49}.\frac{119}{49}.\frac{204}{49}$. si prius quilibet ad vnicam fractionē reducatur: Numeratores autem 84.119.204. erūt numeri integri Harmonicè proportionales, eritq; extremorum proportio, ac proinde & differentiarum, dupla supertripartiens septimas, quæ videlicet data est.

## IIII.

DVOBVS numeris datis, reperiemus tertium vtroque minorem in proportionalitate Harmonica, hoc modo: Numerum ex vno in alterum productum partiemur per summam ex maiore dato, & amborum differentia collectam. Quotiens enim erit is, qui quæritur. Vt si dentur duo nnmeri 6.12. si diuidamus numerum 72. ex 6. in 12. factum, per 18. summam ex 12. & amborum differentia 6. collectam, reperiemus tertium 4. minorem vtroque illis proportionalem, vt hic cernis, 4.6.12. Hanc extendemus regrediendo versus minores numeros, si duobus 4.6. minorem tertium adiungamus 3. hoc modo, 3.4.6.12. qui numerus 3. inuenietur, diuidendo numerum 24. factum ex 4. in 6. per 8. summam videlicet ex 6. & amborum differentia 2. collectam. Eodem modo duobus minoribus 3.4. adiungetur tertius minor $2\frac{2}{7}$. Atq; in hunc modum decrescet proportionalitas qualibet Harmonica continuè in infinitum. Vbi animaduertere licet admirabilem sanè varietatem inter has tres proportionalitates Arithmeticam, Harmonicam, & Geometricam; quæ varietas tribus hisce propositionibus explicatur.

I. ARITHMETICA augetur in infinitum, sed in infinitum non decrescit.

II. HARMONICA contra, decrescit in infinitum sed in infinitum augeri non potest. Quod intelligendum est, si ita continuari debeat, vt quilibet tres numeri habeant proportionalitatem Harmonicam: hoc est, vt primus, secundus, ac tertius sint Harmonicè proportionales: Item secundus, tertius, & quartus: Item tertius, quartus, & quintus, &c. Nam aliàs in vtramque partem extendi potest in infinitum, sicut Geometrica, vt suprà in regula 1. diximus.

III. GEOMETRICA denique & augetur, & decrescit in infinitum.

EST & hoc notatu dignū, in cubo reperiri quatuor terminos in Harmonica proportionalitate continuatos, qui variè inter se comparati præcipuas perfectasq; consonantias Musicas exprimunt. Nam 6. eius bases quadratæ; 8. anguli solidi. 12. latera; & 24. anguli plani constituunt hos 4. terminos 6.8.12.24. continuè proportionales Harmonicè. Proportio autem 8. ad 6. est sesquitertia, quæ consonantiam Diatessaron, siue Quartam constituit. Proportio verò 12. ad 8. sesquialtera est, continens consonantiam Diapenten, siue Quintam. Proportio deinde 12. ad 6. vel 24. ad 12. dupla est, explicans consonantiam Diapason, siue Octauam. At proportio 24. ad 8. tripla est, efficiens consonantiam Diapason & Diapenten, hoc est, Duodecimam. Deniq; proportio 24. ad 6. quadrupla existit, exhibens consonantiam Disdiapason, siue Decimamquintam.

## V.

DATIS quotlibet numeris Arithmeticæ proportionalitatis, si quicunque numerus, siue minimus, siue non minimus, ab eis numeratus, per singulos diuidatur, erunt Quotientes conuerso ordine Harmonicè proportionales. Et vicissim, datis quotlibet numeris in proportionalitate Harmonica, si numerus, quem metiuntur, per singulos diuidatur, erunt Quotientes ordine conuerso Arithmeticè proportionales. Verbi gratia: Sint Arithmeticè proportionales, 1.2.3.4.5.6. Numerus, quem metiuntur, est 720. ex eorum continua multiplicatione inter se procreatus. At minimus ab eis numeratus erit 60. quem reperies per ea, quæ in Arithmetica practica capite decimo scripsimus. Priore ergo per singulos datos diuiso, inuenientur hi in proportionalitate Harmonica continua:

720. 360. 240. 180. 144. 120.

Posteriore autem per eosdem datos diuiso, reperientur hi:

60. 30. 20. 15. 12. 10.

Atque hi numeri inuenti easdem proportiones habent, quas dati numeri Arithmeticæ proportionalitatis, bini ac bini, conuerso tamen ordine: nimirum vt in Harmonica primus ad secundum, ita in Arithmetica secundus ad primum. Et vt in Harmonica secundus ad tertium, ita in Arithmetica tertius ad secundum, &c. Numeri quoq; per minimum numeratum inuenti, sunt minimi in suis proportionibus. Quòd si vicissim numerus ab inuentis numeratus diuidatur per singulos inuentos, gignentur totidem numeri Arithmeticè pro-

*portionales: Et si quidem minimus, quem metiuntur, diuidatur, prodibunt iidem numeri Arithmeticè proportionales, per quos Harmonicè proportionales inuenti sunt, & eodem quidem ordine, quo dati sunt, sed ordine conuerso, si cum inuentis in Harmonica proportionalitate conferantur. Semper enim si in vna proportionalitate progrediantur numeri à minoribus ad maiores, in altera à maioribus ad minores progressus fit, & contrà.*

*IGITVR si quis cupiat quotcunque terminos continuè Harmonicè proportionales, sumendi sunt totidem termini Arithmeticè quomodolibet proportionales, & numerus ab eis numeratus, (& minimus quidem, si minimi desiderentur) per singulos diuidendus, vt diximus.*

## VI.

*DATIS tribus numeris in proportionalitate Harmonica, tantùm fit ex priorum differentia in tertium, quantum ex differentia posteriorum in primum. Vt hic cernis. Nam tum ex 2. in 12. tum ex 4. in 6. fit numerus 24. Ratio huiusce rei est: quia cùm sit, vt 12. primus ad 6. secundum, ita 4. tertius ad 2. quartum; erit numerus ex primo 12. in quartum 2. factus, æqualis numero, qui ex secundo 6. fit in tertium 4. vt ex 2. regula proportionalitatis Geometricæ manifestum est. Idem constat in pluribus terminis, si terni ac terni sumantur, cum suis differentijs, vt in his 6 terminis apparet:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Differentiæ* | 2 | 4 | |
| *Propor. Har.* | 6 | 8 | 12 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Differentiæ.* | 30 | 10 | 5 | 3 | 2 | |
| *Proport. Harmon.* | 60 | 30 | 20 | 15 | 12 | 10 |

*Nam ex 30. in 20. & ex 10. in 60. fiunt 600. Item ex 10. in 15 & ex 5. in 30. fiunt 150. Rursus ex 5. in 12. & ex 3. in 20. fiunt 60. Ac denique ex 3. in 10. & ex 2. in 15. fiunt 30. Atque ita, vt vides, iucunda operatione probare potes, num dati quotcunque termini, aut inuenti, seruent continuam proportionalitatem Harmonicam, nec ne. Nam sumptu ternis, ac ternis, cum suis differentijs, si differentiæ commutato ordine ducantur in primum terminum, ac secundum, producantq; vtrobique numeros æquales, erunt termini omnes continuè proportionales Harmonicè; sin minus, nequaquam.*

## VII.

*QVOD si quis reperire velit quinque minimos numeros, in quibus omnes tres proportionalitates existant: ita vt primi tres numeri habeant proportionalitatem Arithmeticam: Relicto autem primo, tres insequentes proportionalitatem Geometricam, & tres postremi proportionalitatem Harmonicam: ac deniq; primus, tertius, & quintus habeant datam proportionē continuam Geometricam. Vel si reperire quis velit tres numeros in data proportione continuè proportionales, ita vt inter primum ac secundum cadat medius Arithmeticè proportionalis, & inter secundum ac tertium medius Harmonicè proportionalis, medius denique trium datorum numerorum sit inter medios inuentos medius proportionalis Geometricè, atq; quinque numeri ita inuenti sint minimi omnium, in quibus ea contingant; efficiendum id erit hac ratione:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 9. | 6. | 3. | $1\frac{1}{2}$. | 1. |
| 9. | 6. | 3. | $\frac{3}{2}$. | 1. |
| 18. | 12. | 6. | 3. | 2. |

*SIT data proportio tripla, in qua tres minimi sumantur termini, 9.3.1. Inter primos duos statuatur medius Arithmeticè, 6. Per hunc diuidatur quadratus medij numeri 3. assumpti, & Quotiens $1\frac{1}{2}$. inter 3. & 1. statuatur, vt in primo ordine hic posito apparet. Sed quia hic Quotiens integer est cum fractione, reuocabimus eum ad vnicam fractionem hanc $\frac{3}{2}$. vt in secundo ordine vides. Quòd si eius numeratorem 3. accipiamus, relicto denominatore, & alios numeros secundi ordinis per denominatorē 2. multiplicemus, procreabimus quinque minimos numeros quæsitos, vt in tertio ordine cernis. Nam 18. 12. 6. Arithmeticam habent proportionalitatem: 12. 6 3. Geometricam: & 6. 3. 2. Harmonicam: ac denique 18. 6. 2. triplam datam. Quòd si nō inueniendi sint minimi quinque termini in his tribus proportionalitatibus cōtinuatis, accipi possunt quicunque tres numeri datam proportionem habentes continuam, & cum eis duo medij: nimirum secundus, & quartus, inuestigandi, vt dictum est.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. | 2. | 3. | $4\frac{1}{2}$. | 9. |
| 1. | 2. | 3. | $\frac{9}{2}$ | 9. |
| 2. | 4. | 6. | 9. | 18. |

*SI minores termini cum maioribus conferendi sint, & data sit proportio subtripla, inueniemus eodem artificio ex his tribus minimis, 1.3.9. subtriplis hos quinque, 2.4.6.9.18. Nam 2.4.6. seruant proportionalitatem Arithmeticam: 4.6.9. Geometricam: 6.9.18. Harmonicam; & 2.6.18. subtriplam propositam. Inueniendi modum conspicis in hisce tribus ordinibus appositis.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 9. | $7\frac{1}{2}$. | 6. | | 4. |
| 9. | $\frac{15}{2}$. | 6. | | 4. |
| 18. | 15. | 12. | $9\frac{3}{5}$. | 8. |
| 18. | 15. | 12. | $\frac{48}{5}$. | 8. |
| 80. | 75. | 60. | 48. | 40. |

*RVRSVS sit data proportio sesquialtera, in qua tres minimi termini sint, 9.6.4. Inter 9. & 6. medius est Arithmeticè, $7\frac{1}{2}$. vt in primo ordine. Reuocetur ad vnicam hanc fractionem $\frac{15}{2}$. vt in secundo ordine. Sumpto autem numeratore 15. pro secundo numero, relicto denominatore, ducantur alij in secundo ordine in denominatorem, 2. vt in tertio ordine factum est: Et quadratus numerus numeri 12. nimirū 144. diuidatur per 15. ac*

Quotiens

Quotiens $9\frac{3}{5}$. in minimis terminis, statuatur medius inter 12. & 8. eiusdem tertij ordinis. Hunc numerum $9\frac{3}{5}$. reuocabimus ad hanc vnicam fractionem $\frac{48}{5}$. vt in quarto ordine. Sumpto denique numeratore 48. pro penultimo numero, relicto denominatore, ducemus alios quarti ordinis in denominatorem 5. inuentiq́; erunt quinque minimi numeri quæsiti, vt in quinto ordine apparet.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4. | | 6. | | 9. |
| 4. | 5. | 6. | $7\frac{1}{5}$. | 9. |
| 4. | 5. | 6. | $\frac{36}{5}$. | 9. |
| 20. | 25. | 30. | 36. | 45. |

Si minores numeri cum maioribus comparandi sint, inuenientur in proportione data subsesquialtera quinque termini minimi, vt hic vides in quarto ordine. Eademq́; in cæteris est ratio.

Potes quoque, si placet, in primo ordine omnes quinque numeros constituere, & fractiones, si quæ sint, ad vnicam denominationē minimam reuocare, & deinde quamlibet ad vnicam fractionem. Nam si numeratores pro illis substituas, denominatore cōmuni relicto, & reliquos numeros integros per communē denominatorē multiplices, efficies quinque numeros minimos integros quæsitos. Vt si subquadrupla proportio proponatur, erunt minimi tres termini, 1.4.16. Additis simul 1.4. erit summæ dimidium $2\frac{1}{2}$. medius Arithmeticè inter eos. Et si diuidatur quadratus numerus numeri 4. per $2\frac{1}{2}$. fit Quotiens $6\frac{2}{5}$. medius Harmonicè inter 4. & 16. Duæ autem fractiones reducentur ad minimam denominationem, vt in secundo ordine. Et fractionibus singulis ad vnicam fractionem reuocatis, constituetur tertius ordo. Sumptis autem numeratoribus, relinquendo denominatorem communem, & numeris integris per denominatorem communē multiplicatis, constituentur quinque minimi numeri quæsiti, vt in quinto ordine vides. Atq́; in hunc modum quotcunq́; terminos proportionem aliquam seruantes, in quibus permistæ sunt fractiones: ad totidem terminos integros reduces, quando res exigit.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $2\frac{1}{2}$. | 4. | $6\frac{2}{5}$. | 16. |
| 1. | $2\frac{5}{10}$. | 4. | $6\frac{4}{10}$. | 16. |
| 1. | $\frac{25}{10}$. | 4. | $\frac{64}{10}$. | 16. |
| 10. | 26. | 40. | 64. | 160 |

## VIII.

Qvando quatuor numeri ita ordinantur, vt ipsi sint Geometricè proportionales non continuè, vnus autem mediorum cum extremis seruet proportionalitatem Arithmeticam, alter verò Harmonicam, ita vt in quatuor illis numeris omnes tres proportionalitates, quas diximus, reperiantur, dicuntur quatuor illi numeri constituere Harmoniam maximam. Quando autem quatuor numeri ita ordinantur, vt in ipsis repertantur duæ duntaxat proportionalitates, vt vel Geometrica, & Arithmetica: vel Geometrica, & Harmonica; vel Harmonica, & Arithmetica, dicuntur illi quatuor numeri Harmoniam minorem constituere.

Maximam Harmoniam, in qua extremi termini habeant etiam proportionē datam, ita constitues: Sit data proportio, quæ 6. ad 1. quam extremi termini habere debent. Quoniam summa eorum est impar, accipio eorum duplos 12. & 2. inter quos medius Arithmeticè constituatur 7. hoc modo, 12.7.2. Quòd si eorum summa fuisset par, accepissem statim medium inter eos in proportionalitate Arithmetica. Ex his tribus Arithmeticè proportionalibus inueniantur tres Harmonicè proportionales per primā regulam, 84.24.14. quorum extremi habent proportionem datam, nimirum eandem, quam 12. ad 2. vel 6. ad 1. Si igitur inter extremos 84.14. qui semper ita inuenti pares erunt, statuatur etiam medius Arithmeticè, 49. erunt quatuor quæsiti numeri, 84.49.24.14. Nam extremi habent datam proportionem, quam 6. ad 1. Deinde in eis reperiuntur omnes tres proportionalitates. Inter ipsos enim quatuor existit Geometrica proportionalitas non continua, cùm eadem sit proportio 84. ad 49. quæ 24. ad 14. vel 84. ad 24. quæ 49. ad 14. vt liquidò constat ex 7. proprietate trium harum proportionalitatum. At inter 84.49.14. Arithmetica. Ac deniq́; inter 84.24.14. Harmonica ex constructione, vt hic vides.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tres proportio- | 84. | 49. | 24. | 14. | nalitates simul. | | | | |
| Geometricè proport. | 84. | 49. | 24. | 14. | Vel | 84. | 24. | 49. | 14. |
| Arithmeticè proport. | 84. | | 49. | | 14. | | | | |
| Harmonicè proport. | 84. | | 24. | | 14. | | | | |

Rursus sit data proportio, quæ 3. ad 2. Quoniam iterum eorum summa est impar, sint eorum dupli 6.4. inter quos statuatur medius in Arithmetica proportionalitate, 5. hoc modo, 6.5.4. Ex his per primam regulam inuenio Harmonicè proportionales 30.24.20. Constituto autem medio Arithmeticè 25. inter 30. & 20. erunt eadē ratione quatuor numeri quæsiti, 30.25.24.20. cū habeant omnes tres proportionalitates, vt hic apparet.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Geometricè proport. | 30. | 25. | 24. | 20. | Vel | 30. | 24. | 25. | 20. |
| Arithmeticè proport. | 30. | | 25. | | 20. | | | | |
| Harmonicè proport. | 30. | | 24. | | 20. | | | | |

Eosdem 4. numeros maximæ harmoniæ reperiemus, si pro extremis sumamus quosuis duos numeros datam proportionem habentes, pares, vel impares. Si enim inter hos statuatur medius Arithmeticè: fiat au-

tem, vt inuentus ad primum extremum, ita alter extremus ad aliud, erit hic inuentus in Harmonica proportionalitate medius inter eosdem extremos. Quando enim in 4. numeris Geometricè proportionalibus, quales sunt 4. inuenti, vnus mediorum est medius in proportionalitate Arithmetica, alter mediorum medius est in Harmonica inter eosdem extremos, vt suprà diximus in 7. proprietate harũ trium proportionalitatũ. Quando igitur hi 4. numeri inuenti sunt integri, factum erit, quod proponitur: si verò admista sint fractiones, reducemus eos ad integros, vt ad finem antecedentis regulæ 7. scripsimus. Vt si proportio data sit dupla, statuemus extremos, 12. & 6. Dimidium summæ eorũ 9. erit medius terminus inter eos Arithmeticè proportionalis, hoc modo, 12. 9. 6. Si igitur fiat, vt 9. ad 6. ita 12. ad aliud: Vel vt 9. ad 12. ita 6. ad aliud, inuenietur semper numerus 8. inter 12. & 6. in Harmonica proportionalitate medius. Quare sic stabunt 4. numeri maximæ Harmoniæ, 12. 9. 8. 6. Postremò si in eadem proportione dupla extremorum sumamus pro extremis, 20. & 10. inueniemus medium Arithmeticè, 15. & Harmonicè $13\frac{1}{3}$. in minimis numeris, hoc modo, 20. 15. $13\frac{1}{3}$. 10. Si ergo tertium numerum ad vnicam fractionem $\frac{40}{3}$. reuocemus, & eius numeratorem 40. denominatore relicto, tertium statuamus, inuenientur alij, si inuentos per denominatorem 3. multiplicemus, vt hic vides, 60. 45. 40. 30.

MINOREM autem Harmoniam sic reperiemus. Si in 4. numeris debet reperiri sola proportionalitas, Geometrica cum Arithmetica, cape tres numeros continuè proportionales Geometricè, quorum extremi pares ambo sint, vel impares. Si enim inter extremos statuas medium in proportionalitate Arithmetica, habebis 4. numeros quæsitos. Vt si sumantur hi tres numeri sesquialteri, 16. 24. 36. & inter extremos inueniatur medius Arithmeticè proportionalis, 26. erũt 4. quæsiti numeri, 16. 24. 26. 36. quorum tres 16. 24. 36. Geometricè, & tres 16. 26. 36. Arithmeticè proportionales sunt, ex constructione.

SI verò sola Geometrica cũ Harmonica desideretur, cape quoq; tres numeros quoscunque continuè proportionales Geometricè. Si enim inter extremos inuenias medium in Harmonica proportionalitate, habebis 4. numeros, qui quæruntur. Vt si sumantur ijdem tres sesquialteri, 16. 24. 36. inuenietur inter extremos medius in Harmonica proportionalitate, $22\frac{2}{13}$. Sic ergo stabunt 4. numeri inuenti, 16. $22\frac{2}{13}$. 24. 36. qui reducentur ad hos integros, 208. 286. 312. 468. Si accepisses hos numeros tres duplos, 20. 10. 5. inuenisses inter extremos medium Harmonicum 8. hoc modo, 20. 10. 8. 5.

SI denique optes solam Harmonicam cum Arithmetica proportionalitate, accipe tres quoslibet Harmonicè proportionales. Si namque inter medium, & alterutrum extremorum statuas medium Arithmeticum, inuenti erunt quatuor numeri, quos quærimus. Vt si sumantur hi tres 6. 8. 12. erit inter priores duos medius Arithmeticè proportionalis 7. Quare 4. inuenti numeri erunt hi, 6. 7. 8. 12. At inter posteriores duos erit medius in Arithmetica proportionalitate, 10. Sic ergo stabunt 4. inuenti numeri, 6. 8. 10. 12. qui omnes (quod casu quodam fortuito in hoc exemplo accidit) sunt Arithmeticè proportionales, & non solùm tres 8. 10. 12. ex constructione: at soli tres accepti 6. 8. 12. habent proportionalitatem Harmonicam.

## IX.

SI inueniendi sint quotcunque numeri Arithmeticè proportionales continuè, inter quorum binos ac binos cadant singuli medij Harmonicè proportionales integri, efficietur id hac ratione: Sumantur tot termini Arithmeticè proportionales, quot quæruntur, & bini in proportione binorum proximorum minimi. Si enim accipiatur minimus numerus numeratus à summis binorum minimorum acceptorũ, atq; hic in singulos acceptos numeros Arithmeticè proportionales ducatur, procreabuntur numeri, qui quæruntur. Sint enim, verbi gratia, inueniendi quatuor. Cape quatuor quoscunque numeros Arithmeticè proportionales, 3. 6. 9. 12. & 1. 2. minimos terminos proportionis 3. ad 6. & 2. 3. minimos proportionis 6. ad 9 & 3. 4. minimos in proportione 9. ad 12. eruntq; tres summæ binorum minimorum 3. 5. 7. atq; ab his minimus numeratus, 105. Si igitur hunc ducas seorsum in singulos acceptos, 3. 6. 9. 12. procreabis 4. numeros Arithmeticè proportionales, quos desideras, 315. 630. 945. 1260. Nam inter primum & secundum in Harmonica proportionalitate medius est, 420. Inter secundum & tertium, 756. Inter tertium & quartum, 1080. vt hic cernis.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Arithm. proport. | 315 | | 630 | | 945 | | 1260 |
| Medij Harmon. | | 420 | | 756 | | 1080 | |

ITAQVE si vis duos in data proportione duorum numerorum, inter quos cadat vnus integer medius Harmonicè, sume duos minimos in data proportione, & eorum summam duc in duos data proportionis. Vt si data sit proportio tripla inter 4. & 12. erũt minimi termini, 1. 3. quorũ summã 4. si duxeris in 4. & 12. efficies 16. & 48. numeros quæsitos. Medium Harmonicum inter eos erit 24. Vt hic vides, 16. 24. 48. Si data proportionis numeri fuissent minimi 1. 3. duxissemus vtrumque in eorum summam 4. factiq; essent hi duo numeri 4. 12. inter quos cadit Harmonicè medius 6.

## X.

SI autem volueris quotcunque terminos in continua proportione Geometrica data, inter quorum binos, ac binos, bini medij integri cadant, vnus in proportionalitate Arithmetica, & alter in Harmonica, assequeris id hoc artificio: Sume tot minimos numeros continuè proportionales Geometricè, quot desiderantur, & singulos multiplica per summam duorum in eadem proportione minimorum: Et si quidem producti fuerint om-

nes

ne; pares,ipsi erunt,quos quærimus; sin minus,eorum dupli dabunt quæsitos numeros. Sint enim inueniendi, verbi gratia,tres in proportione sesquialtera. Cape totidem minimos in data proportione,4.6.9.& duos minimos in eadem,2.3. Horum summam 5.duc in singulos acceptos,& productos numeros,quoniam non omnes pares sunt, dupla, habebisq; propositos numeros 40.60.90. Nam inter 40.60. medium Harmonicum est, 48. Arithmeticum 50. Et inter 60.90.Harmonicum medium est,72. Arithmeticum 75.Vt hic vides:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Geometr.propor. | 40 | | | 60 | | | 90 |
| Mediј Harmon. | | 48 | | | 72 | | |
| Mediј Arithmet. | | | 50 | | | 75 | |

HINC facilè reperies duos numeros in data proportione, inter quos intercipiantur duo medij, alter secundùm proportionalitatem Arithmeticam, & secundùm Harmonicam alter. Sumptis enim minimis terminis data proportionis, si eorum summam vel in duos illos minimos terminos, vel in duos quoscunque alios numeros datam habentes proportionem duxeris, erunt numeri producti, si pares sunt, quæsiti: si verò vterq; non est par,erunt eorũ dupli,quos quærimus. Vt si data sit proportio sesquitertia, cuius minimi numeri sunt 3.4.eorumq; summa,7. Si ergo duces 7.in 3.& 4.vel in 12.& 16.datam quoq; habentes proportionem,produces vel 21.28.vel 84.& 112. Et quia priores duo nõ sunt pares,erunt eorum dupli,42.56.ij,quos quærimus. Posteriores autem duo, quia pares sunt, erunt quæsiti. Tam enim inter illos, quàm inter hos cadunt duo medij, quos quærimus,vt hic manifestum est:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Numeri inuenti. | 42 | | | 56 | | 84 | | | 112 |
| Mediј Harmon. | | 48 | | | Vel | | 96 | | |
| Mediј Arithm. | | | 49 | | | | | 98 | |

## XI.

SI verò quis petat sibi dari tres numeros in proportionalitate Harmonica, inter quorũ binos bini cadant medij,alter in proportionalitate Arithmetica,& in Geometrica alter,exequemur id hac methodo:Inueniantur, per 9.regulam proportionalitatis Geometricæ, tres numeri Arithmeticè proportionales 2.50.98. inter quorum priores binos sit medius Geometricè,10. & inter binos posteriores,70.statuanturq; ordine sic,2.10.50.70. 98. Minimus autem numerus ab his quinque numeratus sit 2450. Quo diuiso per eosdem quinque numeros, Quotientes sint,1225.245.49.35.25. Si igitur omnes Quotientes sint pares, vel impares, erunt primus,tertius, & quintus, vt 1225.49.25. ij numeri,qui quæruntur. Sunt enim Harmonicè proportionales, vt constat ex 5. regula, cùm sint Quotientes producti ex diuisione numeri 2450. quem numeri 2.50.98. Arithmeticè proportionales numerant,per eosdem numeros 2.50.98. Inter binos autem cadunt Geometricè proportionales, 245. secundus Quotiens; & 35.tertius Quotiens. Habent enim 1225.245.49.easdem proportiones conuerso ordine, quas continuè proportionales 2.10.50.habent,vt constat ex 7.regula proportionalitatis Geometricæ.Eodemq; modo 49.35.25. easdem habebunt proportiones,quas conuerso ordine habent continuè proportionales 50.70. 98. cùm tam illi, quàm hi, sint Quotientes producti per diuisionem eiusdem numeri 2450. per 2.10.50. & per 50.70.98. Certum autem est,inter binos eosdem 1225.49. & inter 49.25. cadere quoque singulos Arithmeticè proportionales, cùm omnes pares ponantur, vel impares. Quòd si non omnes sint pares, duplicandi erunt omnes 5.Quotientes,vt pares numeri fiant,qui idem omnino præstabũt,quod quærimus. Habebunt enim easdem proportiones,quas eorum subdupli habent, ac proinde tam inter primũ ac tertium secundus, quàm inter tertium & quintum quartus medio loco erit Geometricè proportionalis. Cùm ergo inter eosdem cadant medij Arithmeticè,constat propositum. Exemplum superius ob oculos hic positum esse vides:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tres Harm.proport.inuent. | 1225 | | | 49 | | | 25 |
| Mediј Arithmet. | | 637 | | | 37 | | |
| Mediј Geometr. | | | 245 | | | 35 | |

## XII.

RVRSVS si quærantur tres numeri in Arithmetica proportionalitate, inter quorum binos cadant bini proportionales,Geometricè vnus,& alter Harmonicè,satisfaciemus quæstioni hoc modo: Reperiatur iterum per 9.regulam proportionalitatis Geometricæ, tres numeri Arithmeticè proportionales, 2.50.98. inter quorum binos singuli medij cadant in proportionalitate Geometrica; sumanturq; duo minimi, 1. 25. in proportione priorum duorum: Item duo minimi 25.49.in proportione duorum posteriorum; & horum summa,26. 74. numerent minimum numerum 962. in quem tres illi inuenti 2.50.98.ducantur. Producti enim numeri, 1924.48100.94276. erunt, quos inquirimus. Cùm namque easdem proportiones habeant, quas eorum submultiplices 2.50.98. fit,vt quemadmodum inter binos horum singuli cadant medij Geometricè,ita quoq; inter binos illorum singuli intercipiantur medij in eadem proportionalitate Geometrica. Deinde quia summa minimorum numerorum 1.25.& 25.49.in proportionibus 2.ad 50.& 50.ad 98.(qui tres,2.50.98. Arithmeticè,sunt cè sunt proportionales) numerant minimum numerum 962. qui in eos tres, 2.50.98. ductus produxit 1924. 48100.94276. cadent inter binos horum trium singuli medij Harmonicè proportionales, vt in 9. regula traditum est. Exemplum ergo cum medijs sic stabit:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Arithm. proport. inuent. | 1924 | | | 48100 | | | 94276 |
| Medij Harmon. | | 3700 | | | 63700 | | |
| Medij Geometr. | | | 9620 | | | 67340 | |

## XIII.

Ex his, quæ diximus, inuenire quis poterit tres numeros proportionales, siue Arithmeticè, siue Geometricè, siue Harmonicè, inter quorum binos cadant terni medij, vnus Arithmeticè, alter Geometricè, & reliquus Harmonicè. Sint enim primùm inueniendi tres Arithmeticæ proportionalitatis. Per antecedentem regulam 12. reperiantur tres numeri Arithmeticæ proportionalitatis, inter quorum binos cadant bini medij: vnus in Geometrica proportionalitate, & in Harmonica alter. Qui tres numeri si fuerint omnes pares, vel impares, cadent quoq; inter binos singuli Arithmeticè proportionales, atq; adeò quæstioni satisfacient. Si verò nō omnes pares sint, aut impares, eorum dupli erunt, quos quærimus. Exemplum hic habes, in tribus numeris antecedentis regulæ, qui omnes pares sunt, vt hîc apparet:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Arith. proport. | 1924 | | | | 48100 | | | | 94276 |
| Medij Harm. | | 3700 | | | | 63700 | | | |
| Medij Geomet. | | | 9620 | | | | 67340 | | |
| Medij Arithm. | | | | 25012 | | | | 71188 | |

Deinde inueniendi sint tres numeri in Geometrica proportionalitate, inter quorum binos cadant terni medij, in singulis proportionalitatibus singuli, sitq; proportio data, quam medij Geometricæ proportionalitatis efficere debent, nimirum sesquialtera. Cape quinque numeros minimos datæ proportionis continuè proportionales, 16.24.36.54.81. & duos minimos 4.9. in proportione primi 16. ad tertium 36. & tertij 36. ad quintum 81. Horum minimorum summam 13. duc in eundem primum 16. tertium 36. & quintum 81. Producti enim numeri 208.468.1053. duplicati, (quoniam ipsi non omnes pares sunt, aut impares; aliàs non essent duplicandi) nimirū 416.936.2106. (vt inter binos cadere possint singuli medij Arithmeticè) sunt ij, quos quærimus. Nam inter binos cadunt bini medij, alter Harmonicè, & Arithmeticè alter, vt ex 10. regula patet: Et inter eosdem cadunt medij Geometricè, nimirum dupli eorum, qui fiunt ex eadem summa 13. duorum minimorum in secundum 24. & tertium 54. ab initio acceptos: quemadmodum hîc manifestum est.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Geometr. proport. | 416 | | | | 936 | | | | 2106 |
| Medij Harmon. | | 576 | | | | 1296 | | | |
| Medij Geometr. | | | 624 | | | | 1404 | | |
| Medij Arithm. | | | | 676 | | | | 1521 | |

Postremo sint inueniendi tres in Harmonica proportionalitate. Inuentis tribus in Harmonica proportionalitate, 1225.49.25. inter quorum binos cadant bini Medij, vnus Arithmeticè, & alter Geometricè, vt in 11. regula docuimus, sint proportionis priorum duorum minimi duo numeri 25.1. & proportionis duorum posteriorum minimi duo numeri 49.25. quorum summæ 26.74. numerent minimum numerum 962. Hunc si in tres inuētos duxeris, gignes tres quæsitos 1178450.47138.24050. Nam inter binos cadent bini medij, vnus Arithmeticè, & alter Geometricè, quemadmodum inter eorum submultiplices 1225.49.25. nimirum numeri, qui fiunt ex eodem 962. in medios suprà inuentos. Item inter eosdem binos cadent singuli medij Harmonicè, vt ex 12. regula constat, cùm producti sint ex minimo numerato à summis minimorū terminorum, in omnes tres. Exemplum hic habes:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Harm. prop. | 1178450 | | | | 47138 | | | | 24050 |
| Medij Arit. | | 612794 | | | | 35594 | | | |
| Med. Geom. | | | 235690 | | | | 33670 | | |
| Med. Harm. | | | | 90650 | | | | 31850 | |

## XIIII.

Pari ratione comperiemus duos numeros proportionem habentes duplicatam datæ proportionis, inter quos cadant tres medij, vnus in proportionalitate Arithmetica, & in Geometrica alius, & tertius in Harmonica. Sit enim data proportio 6. ad 3. & tres minimi in ea numeri, 4.2.1. eritq; ex defin. 10. huius libri proportio 4. ad 1. duplicata proportionis 2. ad 1. vel 6. ad 3. datæ. Ducatur summa 5. ex 4. & 1. collecta in duos quosuis numeros

numeros habentes eandem proportionem, quam 4. ad 1. hoc est, duplicatam datæ proportionis, vt in 12. & 3. Producti autem numeri 60. 15. duplicentur, si ambo non sint pares, vel impares. Dupli enim 120. 30. sunt quos quærimus. Et si vterque esset par, aut impar, ipsi essent quæsiti, & duplicatio non foret necessaria. Ita autem se habent tres medij inter 120. & 30. vt hic apparet.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Duo numeri inuenti. | 120 | | | | 30 |
| Medius Arithmet. | | 75 | | | |
| Medius Geometr. | | | 60 | | |
| Medius Harmon. | | | | 48 | |

XV.

POSTREMO si lubeat numerum quemcunque propositum distribuere in quotuis partes, Harmonicam proportionalitatem seruantes, efficies id hac ratione: Cape per 5. regulam tot numeros Harmonicè proportionales, in quot partes numerus est distribuendus. Si enim per eorum summam diuides numeros, qui ex dato numero in numeros acceptos fiunt, erunt Quotientes partes, quas quæris, eruntq; acceptis numeris eodem ordine proportionales. Vel si per summam acceptorum numerorum partiaris datum numerum, & Quotientem in singulos numeros acceptos ducas, erunt numeri procreati, quos quæris. Vt si numerus 130. distribuendus sit in tres partes Harmonicè proportionales; si sumantur tres numeri 6. 8. 12. ex 5. regula inuenti, & per eorum summam 26. diuidantur numeri 780. 1040. 1560. qui ex dato numero 130. in assumptos numeros 6. 8. 12. gignuntur, erunt Quotientes 30. 40. 60. partes, quas inquirimus. Vel si datum numerum 130. per 26. summam acceptorum numerorum diuidas, & Quotientem 5. ducas in singulos acceptos, 6. 8. 12. erunt procreati numeri 30. 40. 60. eædem partes, quas inquirimus. Constituunt enim datum numerum 130. suntq; Harmonicè proportionales. sicuti aßūpti numeri, 6. 8. 12. Eodē modo diuidetur numerus 10. in has tres partes, $2\frac{4}{13}$. $3\frac{1}{13}$. $4\frac{8}{13}$. eodem modo proportionales. Eademq; ratio est de pluribus partibus.

## QVO PACTO EX PROPORTIONE AEQVALITATIS OMNES INAEQVALITATIS PROPORTIONES RATIONALES ORIANTVR.

POSITIS tribus terminis æqualibus, siue vnitatibus, siue numeris, mirabile dictu est, quàm facili & iucunda ratione, ex varia illorum inter se additione, omnes proportiones rationales inæqualitatis in tribus terminis gignantur, hoc ordine:

AEQVALES termini, siue numeri, procreant numeros duplos: DVPLI triplos: TRIPLI quadruplos: QVADRVPLI quintuplos: & sic in infinitum.

DEINDE ex multiplicibus terminis inuentis, si ordinem inuertant, gignentur omnes superparticulares, hoc seruato ordine: DVPLI inuersi producunt sesquialteros: TRIPLI inuersi sesquitertios: QVADRVPLI inuersi sesquiquartos: atq; ita deinceps.

TERTIO ex terminis superparticularibus inuentis, si inuertant quoque ordinem, producentur omnes superpartientes, hac serie: SESQVIALTERI inuersi exhibēt superbipartientes: SESQVITERTII inuersi supertripartientes: SESQVIQVARTI inuersi superquadrupartientes, &c.

QVARTO ex ijsdem terminis superparticularibus eo ordine, quo inuenti sunt, nascentur omnes multiplices superparticulares, hoc ordine:

SESQVIALTERI dant duplos sesquialteros: DVPLI sesquialteri triplos sesquialteros: TRIPLI sesquialteri quadruplos sesquialteros, &c. SESQVITERTII item gignunt duplos sesquitertios: DVPLI sesquitertij triplos sesquitertios: TRIPLI sesquitertij quadruplos sesquitertios, &c. SESQVIQVARTI rursus efficiunt duplos sesquiquartos: DVPLI sesquiquarti triplos sesquiquartos: TRIPLI sesquiquarti quadruplos sesquiquartos, &c.

QVINTO ex terminis superpartiētibus inuentis eliciētur oēs multiplices superpartientes, hoc ordine:

SVPERBIPARTIENTES generant duplos superbipartientes. DVPLI superbipartientes, triplos superbipartientes: TRIPLI superbipartientes quadruplos superbipartientes, &c. SVPERTRIPARTIENTES quoque pariunt duplos supertripartientes; DVPLI supertripartientes, triplos supertripartientes: TRIPLI supertripartientes, quadruplos supertripartientes, &c. SVPERQVADRVPARTIENTES itē gignunt duplos superquadrupartientes: DVPLI superquadrupartiētes, triplos superquadrupartiētes: TRIPLI superquadrupartiētes, quadruplos superquadrupartiētes, atq; sic de cæteris.

MODVS autem, quo omnes hæ proportiones ex tribus terminis æqualibus generantur eo ordine, quem exposuimus, est vnicus, isq; facillimus, nimirum hic:

SVMMA collecta ex primo termino datæ proportionalitatis, ex qua alia generari debet, semel sumpto, & secundo bis, & tertio semel, exhibet primum terminum proportionalitatis Geometricæ constituendæ.

SECVNDVS terminus Geometricæ proportionalitatis constituendæ oritur ex secundo, & tertio termino datæ proportionalitatis, ex qua alia oriri debet, semel sumpto.

TERTIVM terminum proportionalitatis Geometricę constituendæ offert tertius terminus datæ proportionalitatis, ex qua alia erui debet, sumptus semel.

*ATQVE hoc præceptum triplex sub oculos ponitur, hoc apposito typo, vbi liquidò constat, qui termini datæ proportionalitatis sumendi sint vel semel, vel bis, vel omittendi, vt termini alterius proportionalitatis constituantur.*

## TYPVS PROCREATIONIS VNIVS PROPORTIONIS GEOMETRICAE EX ALIA GEOMETRICA.

| *Ordo terminorum datæ proportionalitatis.* | *Primus.* | *Secundus.* | *Tertius.* |
|---|---|---|---|
| *Primus constituitur, si dati termini ita sumantur.* | *Semel.* | *Bis.* | *Semel.* |
| *Secundus constituitur, si termini dati ita sumantur.* | | *Semel.* | *Semel.* |
| *Tertius constituitur, si ita sumantur dati termini.* | | | *Semel.* |

*SEQVVNTVR iam exempla generationis omnium proportionum ex æqualitatis proportione. Proponimus autem duas æqualitatis proportiones: vnam in vnitatibus, alteram verò in binarijs. Vbi hoc notatione dignum videtur, ex vnitatibus procreari semper minimos terminos cuiusque proportionalitatis trium terminorum.*

## GENERATIO MVLTIPLICIVM.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Aequalitatis proportio.* | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| *Dupli ex æqualibus creati.* | 4 | 2 | 1 | 8 | 4 | 2 |
| *Tripli ex duplis.* | 9 | 3 | 1 | 18 | 6 | 2 |
| *Quadrupli ex triplis.* | 16 | 4 | 1 | 32 | 8 | 2 |
| *Quintupli ex quadruplis.* | 25 | 5 | 1 | 50 | 10 | 2 |

## GENERATIO SVPERPARTICVLARIVM.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Dupli inuerso ordine.* | 1 | 2 | 4 | 2 | 4 | 8 |
| *Sesquialt. ex duplis inuersis.* | 9 | 6 | 4 | 18 | 12 | 8 |
| *Tripli ordine conuerso.* | 1 | 3 | 9 | 2 | 6 | 18 |
| *Sesquitert. ex tripl. inuersis.* | 16 | 12 | 9 | 32 | 24 | 18 |
| *Quadrupli ordine conuerso.* | 1 | 4 | 16 | 2 | 8 | 32 |
| *Sesquiquart. ex quadr. conuersis.* | 25 | 20 | 16 | 50 | 40 | 32 |

## GENERATIO SVPERPARTIENTIVM.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Sesquialteri inuersi.* | 4 | 6 | 9 | 8 | 12 | 18 |
| *Superbip. ex sesquialt. inuersis.* | 25 | 15 | 9 | 50 | 30 | 18 |
| *Sesquiter. ordine inuerso.* | 9 | 12 | 16 | 18 | 24 | 32 |
| *Supertr. ex sesquit. inuersis.* | 49 | 28 | 16 | 98 | 56 | 32 |
| *Sesquiquart. conuerso ordine.* | 16 | 20 | 25 | 32 | 40 | 50 |
| *Superquadrup. ex sesquiq. conuersis.* | 81 | 45 | 25 | 162 | 90 | 50 |

## GENERATIO MVLTIPLICIVM SVPERPARTICVLARIVM.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Sesquialteri directo ordine.* | 9 | 6 | 4 | 18 | 12 | 8 |
| *Dupli sesquialteri ex sesquialt.* | 25 | 10 | 4 | 50 | 20 | 8 |
| *Tripli sesquialt. ex dupl. sesquialt.* | 49 | 14 | 4 | 98 | 28 | 8 |
| *Quadrupl. sesquial. ex tripl. sesquial.* | 81 | 18 | 4 | 162 | 36 | 8 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Sesquitertij ordine recto. | 16 | 12 | 9 | 32 | 24 | 18 |
| Dupli sesquitert. ex sesquitert. | 49 | 21 | 9 | 98 | 42 | 18 |
| Tripli sesquitert. ex dupl. sesquitert. | 100 | 30 | 9 | 200 | 60 | 18 |
| Quadrupl. sesquit. ex tripl. sesquit. | 169 | 39 | 9 | 338 | 78 | 18 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Sesquiquarti ordine recto. | 25 | 20 | 16 | 50 | 40 | 32 |
| Dupli sesquiquar. ex sesquiquar. | 81 | 36 | 16 | 162 | 72 | 32 |
| Tripli sesquiq. ex dupl. sesquiquar. | 169 | 52 | 16 | 338 | 104 | 32 |
| Quadr. sesquiq. ex tripl. sesquiq. | 289 | 68 | 16 | 578 | 136 | 32 |

## GENERATIO MVLTIPLICIVM SVPERBIPARTIENTIVM.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Superbipart. ordine recto. | 25 | 15 | 9 | 50 | 30 | 18 |
| Dupli superbipart. ex superbipart. | 64 | 24 | 9 | 128 | 48 | 18 |
| Tripli superbipart. ex dupl. superbip. | 121 | 33 | 9 | 242 | 66 | 18 |
| Quadrup. superbip. ex trip. superbip. | 196 | 42 | 9 | 392 | 84 | 18 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Supertripart. directo ordine. | 49 | 28 | 16 | 98 | 56 | 32 |
| Dupli supertripart. ex supertripart. | 121 | 44 | 16 | 242 | 88 | 32 |
| Tripli supertrip. ex dupl. supert. | 225 | 60 | 16 | 450 | 120 | 32 |
| Quadr. supertrip. ex tripl. supertrip. | 361 | 76 | 16 | 722 | 152 | 32 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Superquadrup. recto ordine. | 81 | 45 | 25 | 162 | 90 | 50 |
| Dupli superquadr. ex superquadr. | 196 | 70 | 25 | 392 | 140 | 50 |
| Trip. superquadr. er dupl. superq. | 361 | 95 | 25 | 722 | 190 | 50 |
| Quadrup. superquad. ex trip. superq. | 576 | 120 | 25 | 1152 | 240 | 50 |

| | | |
|---|---|---|
| 361 | | |
| 95 | | |
| 95 | 95 | |
| 25 | 25 | 25 |
| 576 | 120 | 25 |

*Hic enim perspicuè cernis, quoslibet tres terminos ex tribus proximè antecedentibus procreatos esse ex præscripto triplicis præcepti superioris. Vt verbi gratia, postremi hi tres, 576.120.25. ita producti sunt ex tribus antecedentibus, 361.95.25. Primus 576. coaceruatus est ex primo 361. semel, & ex secundo 95. bis, & ex 25. semel. Secundus autem 120. conflatus est ex secundo 95. semel, & ex tertio 25. semel. Tertius denique 25. est tertius 25. semel sumptus, vt hæc apposita formula demonstrat. Atque hoc eodem modo omnes alij geniti sunt, initio facto à terminis æqualibus, 1.1.1. vel 2.2.2.*

## QVO PACTO VICISSIM OMNIS PROPORTIO INAEQVALITATIS AD AEQVALITATIS PROPORTIONEM REVOCETVR.

*Propositis rursus tribus terminis inæqualibus in quacunque proportione, restituetur vicissim proportio æqualitatis, non minus iucunda, quàm facili ratione, per variam subtractionem terminorum inæqualium, vnius ab altero. Ita autem res expedietur triplici hoc præcepto:*

Minimvs trium terminorum inæqualium datorum statuatur vnum extremum proportionis, ad quam reductio fit.

Minimo eodem subtracto ex medio, reliquus numerus constituatur in medio loco proportionis, ad quam fit reductio.

Svmma collecta ex constituto iam extremo semel, & medio termino bis sumpto, subtrahatur ex maximo datorum trium numerorum, & reliquus numerus alterũ extremum nouæ proportionis fiat.

*Hac ratione quæuis proportio trium terminorum inæqualium reuocabitur ad aliam proportionem, conferendo semper maiores numeros cum minoribus; & hac rursus eodem modo ad aliam, atque ita deinceps, donec tres termini æquales occurrant. Quòd si tres dati termini habeant continuam proportionem duplam, reducentur ij prima statim operatione ad æqualitatem. Id quod exempla, quæ sequuntur, planum facient.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Quintupla proportio. | 150 | 30 | 6 |
| Quadrupla. | 96 | 24 | 6 |
| Tripla. | 54 | 18 | 6 |
| Dupla. | 24 | 12 | 6 |
| Aequalitatis proportio. | 6 | 6 | 6 |

*Hoc enim exemplum monstrat, quintuplam proportionem reuocatam esse ad quadruplam, quadruplam ad triplam, triplam ad duplam, & denique duplam ad æqualitatem. In hoc altero verò exemplo vides proportionem supertripartientem quartas reduci ad sesquitertiam, sesquitertiam ad triplam, triplam ad duplam, ac duplam tandem ad æqualitatem.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Proportio supertripartiens quartas. | 49 | 28 | 16 |
| Sesquitertia. | 9 | 12 | 16 |
| Tripla. | 9 | 3 | 1 |
| Dupla. | 4 | 2 | 1 |
| Proportio æqualitatis. | 1 | 1 | 1 |

*Vides ergò vltimam proportionem inæqualitatis semper esse duplam, hanc verò statim ad æqualitatem reduci.*

*Est autem animaduersione dignum, si tres numeri dati fuerint in sua proportione minimi, proportionem æqualitatis, ad quã fit reductio, consistere in tribus vnitatibus: Si verò non fuerint minimi, proportionem illam æqualitatis consistere in tribus numeris æqualibus, quorum quilibet tot vnitates continet, quotum locum occupãt tres termini dati inter omnes tres terminos eiusdem generis proportionis. Ita vides in posteriori exemplo tres datos numeros 49.28.16. minimos esse in proportione supertripartiente quartas, atque reductionem factam esse ad hanc æqualitatem, 1.1.1. At in priori exemplo occupant tres numeri dati, 150 30.6. sextum locum inter omnes tres numeros continuæ proportionis quintuplæ, proptereaq; æqualitas inuenta est inter hos tres senarios, 6.6.6. Minimi enim, siue primi numeri quintuplæ proportionis sunt, 25.5.1. Secundi, 50. 10.2. Tertij, 75.15.3. Quarti, 100.20.4. Quinti, 125.25.5. Sexti autem, 150.30.6. vt manifestum est. Idem experiri licebit in omnibus alijs proportionibus.*

*Sed & hoc obseruatione non indignum videtur, quamlibet proportionem primo loco ad eam reduci, ex qua ortum habuit. Vt in priori exemplo quintupla reducta est ad quadruplam, ex qua orta est: quadrupla ad triplam. Hæc enim illam genuit, & sic de cæteris vsq; ad æqualitatẽ. In exemplo verò posteriori, Supertripartiens reuocata est ad sesquitertiam ordine inuerso. Constat autem, numeros sesquitertios conuerso ordine gignere supertripartientes, vt suprà diximus. Item sesquitertia hæc, conferẽdo maiores numeros cum minoribus, reducta est ad triplam ordine inuerso, quemadmodum tripla inuersa generat sesquitertiam. Deinde tripla, conferendo maiores item numeros cum minoribus, redacta est ad duplam, & hæc ad æqualitatem, &c.*

*Neque verò silentio prætereundum censeo, ex tribus terminis cuiuscunque proportionalitatis Geometricæ, siue ea æqualitatis sit, siue inæqualitatis, gigni posse quamlibet trium proportionalitatum, quas suprà explicauimus, si ipsi termini varijs modis inter se coagmententur. Proportionem enim trium terminorũ Geometricam procreare aliam Geometricam trium terminorum, si primus terminus semel: secundus bis, & tertius semel pro primo termino sumatur: pro secundo autem secundus, & tertius semel; pro tertio denique ipse tertius semel, perspicuè constat ex ijs, quæ paulò antè scripsimus de ortu omnium proportionum inæqualitatis ex æqualitatis proportione.*

*At verò vt ex eadem Geometrica proportionalitate gignatur Arithmetica trium terminorum, seruabis hoc præceptum triplex.*

Svmmam ex primo, & secundo termino bis, & tertio semel collectam fac primum terminum Arithmeticæ proportionalitatis.

Svmmam verò ex primo, secundo, & tertio semel confectam, statue secundo loco.

Tertivm denique terminum constitue tertium.

*Cuius quidem productionis typum hic vides.*

## TYPVS PROCREATIONIS PROPORTIONIS ARITHMETICAE EX GEOMETRICA.

| Ordo terminorum datæ proportionalitatis. | Primus. | Secundus. | Tertius. |
|---|---|---|---|
| Primus fit ex datis terminis, ita coaceruatis. | Bis. | Bis. | Semel. |
| Secundus verò sic. | Semel. | Semel. | Semel. |
| Tertius denique hoc modo. | | | Semel. |

Nihil

*NIHIL porrò interest, vtrum minimum numerum proportionalitatis Geometricæ facias primum terminum, an verò maximum, vt ex sequentibus exemplis apparebit.*

## GENERATIO ARITHMETICAE PROPORTIONALITATIS EX GEOMETRICA.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Geometr. proport.* | 1 | 1 | 1 | 4 | 4 | 4 | 9 | 6 | 4 | 4 | 6 | 9 |
| *Arithmet. proport.* | 5 | 3 | 1 | 20 | 12 | 4 | 34 | 19 | 4 | 29 | 19 | 9 |

*CONSIDERATIONE autem dignissimum est, differentiam constitutæ proportionalitatis Arithmeticæ semper æqualem esse summæ primorum duorum terminorum Geometricæ proportionalitatis, per quam constituitur. Sic vides in primo exemplo differentiam esse 2. summã ex 1.1. in secundo, 8. summam scilicet ex 4.4. In tertio 15. quæ summa conficitur ex 9.6. In quarto denique, 10. nimirum summam ex 4. 6. collectam, atque ita in alijs.*

*ITAQVE si Arithmetica proportionalitas constituatur ex proportione æqualitatis, erit differentia dupla vnius termini æqualis: vt perspicuum est in prioribus duobus exemplis.*

*DENIQVE Harmonicam proportionalitatem oriri quoque ex Geometrica, hoc alio præcepto tripliciplanum fiet.*

SVMMAM collectam ex primo bis, & secundo ter, & tertio semel sumpto, statue in primo loco proportionalitatis Harmonicæ.

SVMMAM verò confectam ex secundo bis, & tertio semel sumpto, in secundo loco.

SVMMAM denique secundi & tertij, in tertio loco.

*Vbi etiam nihil interest, vtrum minimus terminus dicatur primus, vel maximus. Typum porrò huius generationis hic expressum vides.*

## TYPVS PROCREATIONIS HARMONICAE PROPORTIONALITATIS EX GEOMETRICA.

| *Ordo terminorum datæ proportionalitatis.* | *Primus.* | *Secundus.* | *Tertius.* |
|---|---|---|---|
| *Primus fit ex terminis datis, sic in vnum collectis.* | *Bis.* | *Ter.* | *Semel.* |
| *Secundus verò sic.* | | *Bis.* | *Semel.* |
| *Tertius denique hoc modo.* | | *Semel.* | *Semel.* |

## GENERATIO PROPORTIONALITATIS HARMONICAE EX GEOMETRICA.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Geom. proport.* | 1 | 1 | 1 | 4 | 4 | 4 | 9 | 6 | 4 | 4 | 6 | 9 |
| *Harm. proport.* | 6 | 3 | 2 | 24 | 12 | 8 | 40 | 16 | 10 | 35 | 21 | 15 |

*IAM verò è contrario reducetur Harmonica proportionalitas quæcunque ad æqualitatem hoc pacto.*

DETRAHE minimum terminũ ex medio, & quod relinquitur, fac medium terminum proportionalitatis constituendæ.

HOC medio inuento sublato ex minimo datæ proportionalitatis Harmonicæ, erit reliquus numerus, vnum extremorum proportionalitatis.

DENIQVE minimus datus semel, & medius inuentus bis in vnam summam collecti, & ex maximo dato subtracti, dabunt duplum alterius extremi. Semissis ergo huius erit ipsum alterum extremum.

*HAC ratione reuocabitur Harmonica proportionalitas vel ad æqualitatem, vel ad proportionalitatem aliquam Geometricam, quæ ad æqualitatem redigetur, vt suprà docuimus. Semper autem Harmonica proportionalitas proposita oritur ex illa Geometrica, si superius præceptum adhibeatur, ad quam per hoc præceptum reuocata est. Exempla hic vides:*

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Harm. proport.* | 6 | 3 | 2 | 24 | 12 | 8 | 40 | 16 | 10 | 35 | 21 | 15 |
| *Geom. proport.* | 1 | 1 | 1 | 4 | 4 | 4 | 9 | 6 | 4 | 4 | 6 | 9 |

ALIA EXEMPLA.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Harmon.proport.* | 3 | 4 | 6 | 60 | 40 | 30 | 24 | 16 | 12 |
| *Geometr.proport.* | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | 5 | 10 | 20 | 2 | 4 | 8 |
| *Aequalitas.* | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 5 | 5 | 5 | 2 | 2 | 2 |

*At proportionalitas Arithmetica reuocabitur ad æqualitatẽ, vel ad Geometricam proportionalitatem, per quam constituitur, hoc modo:*

Minimvm terminum fac vnum extremorum. Subducto deinde eodem minimo ex medio, erit reliquus numerus conflatus ex medio constituendæ proportionalitatis, & altero extremo. Igitur si hic numerus reliquus duplus est minimi, secto eo bifariam, erit dimidiata pars tam medius terminus, quàm alterum extremorum; reductaq́; erit data proportionalitas Arithmetica ad æqualitatem, ex qua ortum traxit.

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 9 | 15 |
| 3 | 3 | 3 |

*Vt si detur Arithmetica proportionalitas, 3. 9. 15. si in Geometrica constituenda facias vnum extremum 3. ex minimo proportionalitatis Arithmeticæ datæ, & hunc eundem numerum demas ex dato medio 9. supererunt 6. qui numerus duplus est minimi 3. Redigitur ergo data proportionalitas ad æqualitatem hanc, 3. 3. 3. ex qua oritur secundum superius præceptum.*

Si verò reliquus ille numerus non est duplus minimi, secandus erit in duas partes, quæ cum minimo constituant proportionalitatem Geometricam continuam. Ad hanc enim illa reuocata erit.

| | | |
|---|---|---|
| 34 | 19 | 4 |
| 9 | 6 | 4 |

*Vt si data sit Arithmetica proportionalitas, 34. 19. 4. Facto in Geometrica extremo vno, 4. minima datæ Arithmeticæ proportionalitatis, eoq́; subducto ex medio 19. relinquitur numerus 15. qui non est duplus minimi. Quare secto eo in 6. & 9. reducetur illa Arithmetica ad hanc Geometricam 9. 6. 4. ex qua rursus ortum ducet, ex præscripto superioris præcepti.*

*Sed quoniam reliquus ille numerus non potest semper diuidi in tales duas partes, quæ cum minimo constituant continuam proportionalitatem Geometricam, (quo pacto autem ea diuisio facienda sit, & quando fieri in numeris nequeat, docebimus ad proposit. 17. lib. 6.) nisi numeri surdi, irrationalésve adsciscantur; reuocabimus quamcunque proportionalitatem Arithmeticam statim ad æqualitatẽ, ex qua, si termini æquales cum differentia proposita coaceruentur, ortum duxit; hoc pacto.*

Minimvs terminus datus fiat vnus ex duobus extremis. Differẽtia autem proportionalitatis subducta ex medio, reliquus numerus fiat medius: & eadem differentia duplicata, atque ex maximo termino sublata, fiat reliquus numerus alter extremorum.

| | | |
|---|---|---|
| 20 | 27 | 34 |
| 20 | 20 | 20 |

*Vt si data sit Arithmetica proportionalitas, 20. 27. 34. cuius differentia est 7. si 20. fiat vnum extremorum, & differentia 7. dematur ex 27. & eadem duplicata ex 34. reliqui erunt alij duo termini æquales, 20. 20. Ex hac æqualitate, cognita differentia 7. quam termini Arithmeticæ proportionalitatis habere debent, conficietur ipsa proportionalitas Arithmetica hac ratione.*

Vnvs terminorum æqualium fiat minus extremum. Huic addatur differentia data, vt fiat secundus terminus. Eidem denique minori extremo adiiciatur data differentia duplicata, vt efficiatur maius extremum.

*Vt in dato exemplo, minus extremum erit 20. cui si differentia 7. addatur, fiet medius terminus 27. Et si eadem differentia 7. duplicata adijciatur eidem minimo extremo 20. conflabitur maius extremũ 34. Eodem pacto data hac æqualitate, 15. 15. 15. si ex ea constitui debeat proportionalitas Arithmetica, cuius differentia sit 20. addatur hac differentia ad 15. vnum terminorum æqualium, vt habeas secundum terminum 35. Quòd si eadem differentia duplicata, hoc est, numerus 40. ad eundem terminum æqualem adijciatur, fiet tertius terminus 55. Primus autem est 15. vnus terminorum æqualium, vt hic vides:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Differentia 20.* | 15 | 15 | 15 |
| | 15 | 35 | 55 |

*Atqve pauca hæc prælibasse hoc loco sufficiat ex infinitis, quæ de immensa proportionum, proportionalitatumq́; vi ac natura, innumerabilibusq́; proprietatibus dici possent. Plura enim, & quidem scitu periucunda in pleniore nostra Arithmetica, Deo annuente, explicabimus. Nunc ad Euclidem interpretandum reuertamur.*

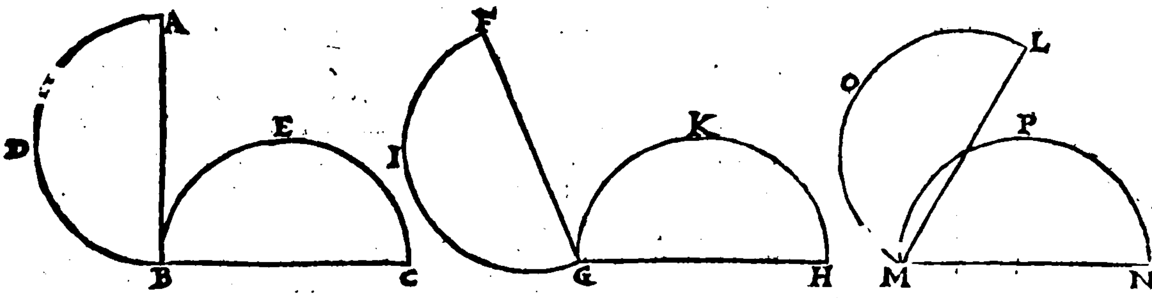
V.

Rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quę possunt multiplicatæ sese mutuò superare.

*Qvoniam Euclides in tertia definitione habitudinem duarum magnitudinum eiusdem generis, vocauerat*

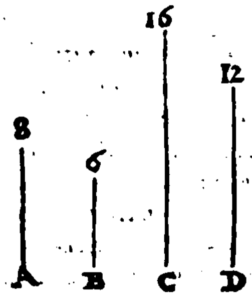
cauerat rationem, quã nos cum aliis auctoribus proportionẽ dicimus; explicat nunc definitione hac 5. quidnam requirant duæ quantitates eiusdem generis, vt proportionem dicantur habere. Neq; enim omnes lineæ, neq; etiam omnes anguli plani, quamuis sint eiusdem generis quantitatis, proportionem habent inter se, vt mox dicemus. Ait igitur, illas magnitudines dici proportionem habere inter se, quarum vtrauis multiplicata ita augetur, vt alteram tandem superet; adeò vt si alterutra quantumuis multiplicata nunquam alteram excedat, nulla ratione proportionem habere dicantur. Vt diameter, & latus eiusdem quadrati, dicentur habere proportionem, (licet irrationalem, quæ nullo possit numero exprimi) quia latus multiplicatum per 2. hoc est, bis sumptum, excedit diametrum. Cum enim duo latera quadrati, ac diameter constituant triangulum Isosceles,[a] erunt duo latera quadrati diametro eiusdem maiora. Ita quoq; circumferentia circuli, & diameter eiusdem, proportionem habent, (quamuis nondum sit nobis explorata atq; cognita) quia diameter multiplicata per 4. hoc est, sumpta quater, circumferentiam superat, cùm omnis circumferentia circuli, vt ab Archimede demonstratur, ter duntaxat cõprehendat diametrum eiusdem, & particulam adhuc paulo minorem septima parte diametri. Eodem modo multa curuilinea cum rectilineis proportionẽ habebunt, quia & æqualitas & inæqualitas inter ea reperitur, cum & Hippocrates Chius Lunulam quandam, quæ figura est contenta duobus arcubus circulorum, instar Lunæ nouæ, quando falcata esse cernitur: & Archimedes parabolam quadrarit, hoc est, ille cuidam lunulæ, hic verò parabolæ quadratũ inuenerit æquale. Hinc enim fit, vt & quadratum detur maius ea lunula, ac parabola; Atq; econtrario lunula & parabola maior eo quadrato. Huc accedit, quòd Archimedes in lib. de Spiralibus demonstrauit, lineam aliquam rectam esse circumferentiæ circuli æqualem, & aliam duplam, triplam aliam, &c. ac proinde & quadratum aliquod circulo esse æquale, vt in libello de dimensione circuli demonstrauit. De æqualitate porrò lineæ rectæ, & circularis: quadrati, & circuli, ad calcẽ lib. 6. agemus. Adde, à Proclo quoq; inter angulos rectilineos, ac curuilineos æqualitatem demonstrari. Ostendit enim lib. 3. in primum Euclidis, ad 12. Axioma, quod ipsi est 4. Postulatum, tam recto angulo, quam obtuso, & acuto, exhiberi posse angulum curuilineum æqualem. Sic enim an-

a 20. primi.



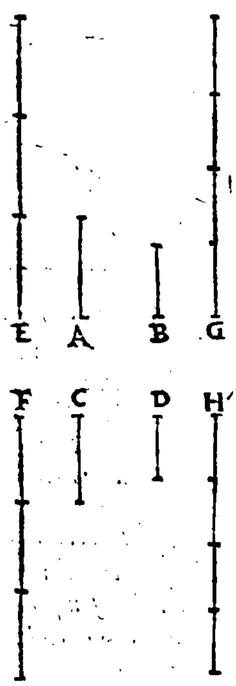

gulus rectus A B C, contentus rectis æqualibus A B, B C, circa quas semicirculi describantur A D B, B E C. Quoniam igitur anguli semicirculorum A B D, C B E, sunt æquales; addito communi angulo mixto A B E, fiet angulus totus curuilineus D B E, toti angulo recto A B C, æqualis. Similiter ostendes, angulum curuilineum I G K, æqualem esse obtuso F G H; necnon curuilineum O M P, acuto L M N, dummodo hic ab angulis semicirculorum L M O, N M P, auferas communem angulum mixtum, qui continetur recta linea L M, & curua M P. Ex quibus constat, alterutrum angulorum multiplicatum posse alterum excedere, quare proportionem inter se habebunt. At verò linea finita ad lineam infinitam non habebit proportionem, quia finita quomodocunq; multiplicata, infinitam nequit superare. Sic neq; linea cum superficie, neq; superficies cum corpore, eandem ob causam, vllam habebit proportionem. Deniq; non censebitur habere proportionem angulus contactus cum angulo rectilineo, quia angulus cõtactus quantumuis multiplicatus, minor adhuc semper existit quouis angulo rectilineo, etiam minimo, vt propos. 16. lib. 3. demonstrauimus. Itaq; vt apertius Euclides explicaret, quænam magnitudines eiusdem generis proportionem dicantur habere, hoc est, quas magnitudines eiusdẽ generis in definitione 3. intellexerit, voluit hac definitione eas intelligi, quæ hanc conditionẽ habeant, vt alterutra multiplicata alterã possit superare, alias verò non, etiamsi in eodẽ quantitatis genere videantur comprehendi, quales sunt linea finita & infinita; angulus rectilineus, & angulus contactus, &c. Hanc ob causam in plerisq; demonstrationibus proportionum, iubet toties multiplicare vnam propositarũ magnitudinũ, quæ proportionem ponuntur habere inter se, donec alteram excedat. Quod etiam facit propos. 1. lib. 10. & in plerisq; aliis propositionibus. Taceant igitur, qui putant, per magnitudines eiusdem generis in definitione Proportionis, quam Euclides Rationem dixit, intelligendas esse, quæ sub eodem genere proximo, siue infimo continentur. Hac enim ratione non esset proportio inter angulos rectilineos, & curuilineos, aut inter figuras rectilineas, curuilineasq;, cum non sub eodem contineatur genere proximo: quod falsum esse diximus. Sileant quoq;, qui existimãt, intelligendas esse magnitudines in eodem genere quantitatis, siue in eodẽ genere subalterno, vt Logici loquuntur; ita vt satis sit, ut duæ quantitates dicantur habere proportionem si sint vel lineæ, vel superficies, vel corpora, vel anguli, vel numeri. Ita enim proportio esset inter angulum rectilineum, & angulum contactus, cùm in genere anguli contineantur: Item proportionem haberent inter se, linea finita, & linea infinita, cum in genere lineæ existant: quorum vtrumq; falsum esse, liquidò ex hac definitione constat.

PERSPICVVM est ex his, quàm ineptè, & quàm falsò, hanc definitionem exposuerit Orontius. Ait enim Euclidem non definire, seu docere, quanam magnitudines proportionem dicantur habere, sed qualē proportionem duæ quæcunque propositæ quantitates habeant. Itaque, inquit, vult Euclides, si magnitudo A, ad magnitudinem B, referatur, & ambæ multiplicentur æqualiter, hoc est, ambarum sumantur quæcunque æquè multiplicia, nempe C, tam multiplex ipsius A, quam multiplex D, ipsius B habere magnitudines A, & B, eā inter se proportionem, quam earū æquè multiplicia C, & D. Non aduertit autem hoc, quod ait, non esse definitionem, sed Theorema decimumquintum huius 5. lib. vbi demonstratur ab Euclide, Partes cum pariter multiplicibus in eadem proportione esse, hoc est, A, & B, magnitudines eandem habere proportionē, quam earū æque multiplicia C, & D. Non ergo ita est intelligēda hæc definitio, præsertim cum tam ignota sit hæc proportio inter C, & D, quā illa inter A, & B, quandoquidem semper eadem est. Quare non rectè nos Euclides perduceret ad notitiam proportionis inter A, & B. Est ergo sensus huius definitionis ille, quem exposuimus, vt liquido constat ex verbis Euclidis.



## VI.

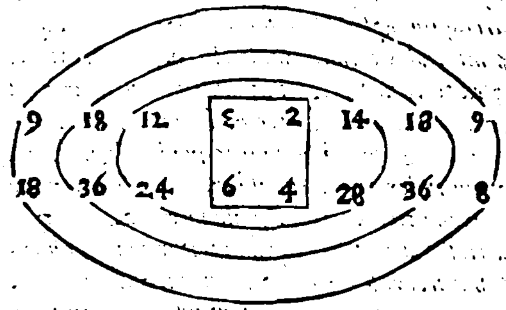
**In eadem ratione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æque multiplicia, à secundæ & quartæ æque multiplicibus, qualiscunq; sit hęc multiplicatio, vtrumq; ab vtroq; vel vna deficiunt, vel vna æqualia sunt, vel vna excedunt; si ea sumantur, quæ inter se respondent.**



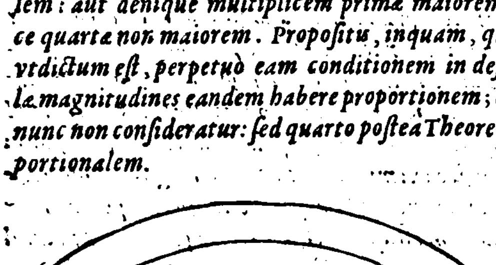
EXPLICAT hoc loco Euclides, quasnam conditiones requirant, apud Geometras, magnitudines, vt eandem dicantur habere proportionem. Quod vt exequatur, cogitur confugere ad earum æque multiplicia, vt complectatur omnes proportiones magnitudinum, tam rationales, quam irrationales. Sint igitur quatuor magnitudines A, prima B, secunda; C, tertia; & D, quarta, sumanturque primæ, & tertiæ æquemultiplicia quæcunque; E, quidem ipsius A; & F, ipsius C: Item sumantur secundæ, & quartæ alia quæcunque æquemultiplicia, G, quidem ipsius B; & H, ipsius D; siue hæc duo posteriora sint ita multiplicia secundæ, & quartæ, sicut priora duo multiplicia sunt primæ, & tertiæ, siue non. Quòd si iam inter se conferantur sumpta æquè multiplicia ea, quæ inter se respondent, vt multiplex primæ, & multiplex secundæ inter se, hoc est, E, & G; Item multiplex tertiæ, & multiplex quartæ inter se, hoc est F, & H, deprehensumque fuerit perpetuò, ea ita inter se habere, vt si E, multiplex primæ magnitudinis A, minus fuerit, quàm G, multiplex secundæ magnitudinis B; etiam F, multiplex tertiæ magnitudinis C, minus sit quàm H, multiplex quartæ magnitudinis D: Aut si E, æquale fuerit ipsi G, etiā F, æquale sit ipsi H: Aut denique si E, maius fuerit quàm G, etiam F, maius sit quàm H: (quod est vtrumque ab vtroque vel vna deficere, vel vna æqualia esse, vel vna excedere) ita vt in nullo genere multiplicium contrarium possit reperiri, id est, vt nunquam E, minus sit quàm G, quin & F, minus sit quam H; & vt nunquam E, æquale sit ipsi G, quin & F, ipsi H, sit æquale; Denique vt nunquam E, maius sit quàm G, quin & F, maius sit, quàm H. Si; inquàm, deprehensum fuerit, æque multiplicia quæuis accepta, perpetuò sese ita habere, vt dictum est; dicetur eadem esse proportio primæ magnitudinis A, ad secundam magnitudinem B, quæ est proportio tertiæ magnitudinis C, ad quartam magnitudinem D. Quòd si deprehenderetur aliquando, etiam in solo vno genere multiplicium, multiplex E, deficere à multiplici G, non autem multiplex F, deficere à multiplici H, aut E, æquale esse ipsi G, at F, non æquale ipsi H; Aut denique E, excedere ipsum G; at F, non excedere ipsum H, quamuis in infinitis aliis multiplicibus conditio prædicta reperiatur, nulla ratione dicetur quantitates propositæ eandem habere proportionem, sed diuersas, vt ex defin. 8. fiet perspicuum.

ITAQVE vt demonstratione aliqua, per hanc 6. definitionem, concludantur quatuor quantitates eandem habere proportionem, ostendendum erit, (quod quidem perdiligenter ab Euclide & hoc 5. lib. & in aliis seruatur) quæcunque æque multiplicia primæ, & tertiæ collata cum quibuscunque æque multiplicibus secundæ, & quartæ, habere semper conditionem prædictam defectus, æqualitatis, aut excessus; ita vt nunquam contrarium eius inueniri possit. Similiter si quatuor quantitates concedantur eandē habere proportionē, cōcedatur quoque, necesse est, qualibet æque multiplicia primæ, & tertiæ collata cū quibuslibet æque multiplicibus secundæ, & quartæ, habere eandem defectus, æqualitatis, aut excessus cōditionem. Debent enim definitio & definitum reciprocari. Vt autem perspiciatur quonam pacto, propositis quatuor magnitudinibus eandem

eandem proportionem habētibus: quādam æquè multiplicia primæ, & tertiæ magnitudinis, à quibusdam æquè multiplicibus secundæ & quartæ magnitudinis, vtrumque ab vtroq; vnà deficiant; alia verò vna æqualia sint; alia deniq; vnà excedant, si ea sumantur, quæ inter se respondent; placet vnum exemplum proferre in numeris. Sint igitur 4. numeri 3.2.6.4. sumanturq; primi & tertij æquè multiplices, nẽpe quadrupli 12. & 24. Item secūdi & quarti sumantur alij æquè multiplices, vt septupli 14. & 28. Vides igitur tam 12. multiplicem primi deficere à 14. multiplice secūdi, quàm 24. multiplicem tertij à 28. multiplice quarti. Rursus primi & tertij sumātur alij æquè multiplices, nimirū sextupli, 18. & 36. Itē secūdi & quarti sumantur alij æquè multiplices, vt noncupli 18. & 36. Vides ergo, tam 18. multiplicem primi æqualem esse 18. multiplici secundi, quàm 36. multiplicem tertij, 36. multiplici quarti. Postremò primi, & tertij sumantur alij æquè multiplices, nempe tripli 9. & 18. Item secundi, & quarti alij æquè multiplices, vt dupli 4. & 8. Vides igitur tam 9. multiplicem primi, excedere 4. multiplicem secundi, quàm 18. multiplicem tertij; superare 8. multiplicem quarti. Si igitur in omnibus æquè multiplicibus, in quacunque sumantur multiplicatione, semper deprehendatur, vnum trium horum verum esse, dicetur eadem esse proportio 3. ad 2. quæ est 6. ad 4. aliàs non.

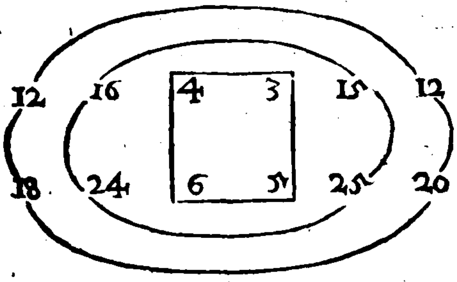



CAMPANVS verò atq; Orontius, longè aliter definitionem hanc exponunt. Dicunt enim Euclidem velle tum demum quatuor magnitudines eandem habere proportionem, cùm primæ & tertiæ æquè multiplicia, à secundæ & quartæ æquè multiplicibus, vtrumq; ab vtroq;, vel vnà deficiunt proportionaliter, hoc est, in eadem proportione, vel vnà æqualia sunt, vel vnà excedunt proportionaliter, si ea sumantur, quæ inter se respondent. Clarius, vt ait Campanus, quando earum æquè multiplicia proportionalia sunt, id est, cùm eandem proportionē habet multiplex primæ ad multiplex secundæ, quā multiplex tertiæ ad multiplex quartæ. Sed quis non videt, si ita intelligatur definitio, Euclidem idem per idem definire? Quod sanè absurdum est. Præterea si Euclides vult, eas magnitudines in eadem esse proportione, quarum æquè multiplicia (si sumantur, & inter se conferantur eo ordine, quo dictum est) in eadem proportione existunt; cur obsecro in 4. Theoremate huius libri demonstrat, si fuerint quatuor magnitudines in eadem proportione, earum æquè multiplicia eo ordine, quem diximus, sumpta, eandem quoq; habere proportionem? Immò cùm illud Theorema per hanc definitionem ostendatur, perspicuum est idem per idem demonstrari, quod ridiculum est, veluti eo loco admonebimus. Accedit etiam, si ita interpretemur definitionem, plurima Theoremata 5. huius lib. non posse demonstrari, vt proprijs locis monebimus. Intelligenda est igitur definitio, vt exposuimus; nimirum propositis quatuor magnitudinibus, si quotiescunque multiplex primæ deficit à multiplici secundæ, vel æquale est, vel excedit; necessariò etiam multiplex tertiæ tunc deficiat à multiplici quartæ, vel æquale sit, vel excedat, quicunq; sit ille defectus, excessúsve, non considerando, an proportionalis sit, an non; ita vt nunquam contingat, multiplicem primæ à multiplici secundæ deficere, multiplicem verò tertiæ non deficere à multiplici quartæ: aut multiplicem primæ æqualem esse multiplici secundæ, multiplicem verò tertiæ multiplici quartæ non æqualem: aut denique multiplicem primæ maiorem esse multiplice secundæ, at multiplicem tertiæ multiplice quartæ non maiorem. Propositis, inquam, quatuor magnitudinibus, quarum æquè multiplicia sumpta, vt dictum est, perpetuò eam conditionem in defectu, æqualitate, & excessu seruant; dicuntur quatuor illæ magnitudines eandem habere proportionem; quicquid sit de earum æquè multiplicium proportione, quæ nunc non consideratur: sed quarto postea Theoremate demonstrabitur, eum defectum, excessúmve esse proportionalem.




PORRO Campanus conatur ostendere, definitionem hanc intelligi debere de proportionali defectu, & excessu. Nam si de quocunque intelligeretur, essent, ait, quatuor hi numeri 4.3.6.5. in eadē proportione. Si enim primi & tertij, vtpotè 4. & 6. sumantur æquè multiplices numeri, vt dupli, 8. & 12. Item secundi & quarti, nempe 3. & 5. æquè multiplices, vt dupli quoq;, 6. & 10. excedet tam 8. multiplex primi, 6. multiplicē secundi, quàm 12. multiplex tertij, 10. multiplicem quarti. Idemq; cernitur si primi, & tertij sumātur quadrupli 16. & 24. secundi verò ac quarti, capiantur tripli 9, & 15. Si igitur sufficit, vt æquè multiplicia accepta vnà excedant sese quomodocunq;, & non requiritur vt proportionaliter se mutuò superent, erit eadē proportio 4. ad 3. quæ est 6. ad 5. quod falsum est, cū proportio 4. ad 3. sit sesquitertia: proportio verò 6. ad 5. sesquiquinta. Intelligēdus igitur est excessus, aut defectus æquè multiplicium proportionalis: Ita enim fiet, non esse eandem proportionem 4. ad 3. quæ est 6. ad 5. quòd eorum æquè multiplices non sese excedant proportionaliter, vt constat. Veruntamen dicendum est, Campanum mirum in modum hallucinatum fuisse.

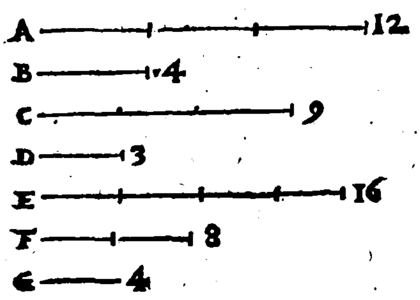
*Quamuis enim numeri æquè multiplices ab eo prolati ſeſe vna excedant; tamen quamplurimi alij reperientur, quorum multiplex primi excedet quidem multiplicem ſecundi, vel æqualis erit; at multiplex tertij deficiet à multiplice quarti. Si enim in eius exemplo primi & tertij ſumantur quadruplices 16. & 24. At ſecundi & quarti, quincuplices ſumantur, 15. & 25. excedet quidem 16. multiplex primi, 15. multiplicem ſecundi; At 24. multiplex tertij non excedet 25. multiplicem quarti, ſed deficiet. Quòd ſi primi & tertij ſumantur tripli 12. & 18. At ſecundi, & quarti ſumantur quadrupli, 12. & 20. erit 12. multiplex primi æqualis 12. multiplici ſecundi; At verò 18. multiplex tertij, æqualis nõ erit 20. multiplici quarti, ſed ab eo deficiet. Cùm igitur non deprehendantur quælibet æquè multiplicia dictorũ numerorum ſic ſe habere, vt ſi multiplex primi excedit multiplex ſecundi, multiplex tertij excedat quoq; neceſſariò multiplex quarti; quamuis id in nonnullis æquè multiplicibus ita eſſe contingat; non dicentur, iuxta hanc definitionẽ 6. dicti numeri eandem habere proportionem, vt adhuc clarius conſtabit ex 8. definitione.*




*CÆTERVM definitio iſta complectitur etiam tres magnitudines eandem habentes proportionem, ſi modò ſecunda bis ponatur, vt quatuor habeantur. Exempli cauſa; Eadem dicetur proportio 9. ad 6. quæ 6. ad 4. quoniam æquè multiplicia quæcunque ſumpta ad 9. & 6. vel vnà deficiunt ab æquè multiplicibus ſumptis ad 6. & 4. vel æqualia ſunt, vel vnà excedunt, &c.*

## VII.

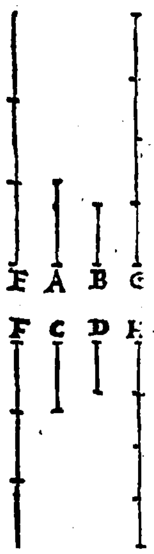
EANDEM autem habentes rationem magnitudines, Proportionales vocentur.




*VT ſi magnitudinum A, B, C, D, eadem ſit proportio A, ad B, quæ C, ad D; dicentur eæ magnitudines proportionales. Eadem ratione, ſi eadem ſit proportio E, ad F, quæ F, ad G; dicentur magnitudines E, F, G, proportionales. Sunt autẽ quædam magnitudines proportionales continuè, inter quas reperitur proportionalitas continua, quales ſunt magnitudines E, F, G; Quædam verò proportionales ſunt non continuè, ſed diſcretè, cuiuſmodi ſunt magnitudines A, B, C, D. In his enim interruptio fit proportionum; in illis verò nequaquam, vt dictum eſt in 4. definitione.*

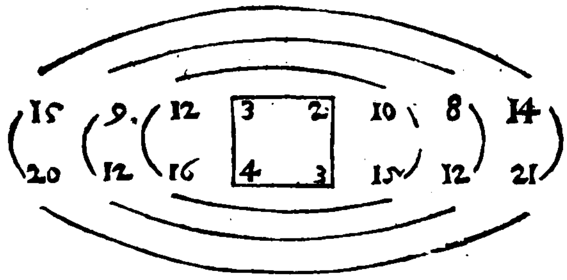
## VIII.

CVM verò æquè multiplicium multiplex primæ magnitudinis exceſſerit multiplicem ſecundæ; At multiplex tertiæ non exceſſerit multiplicem quartæ; tunc prima ad ſecundam maiorem rationem habere dicetur, quàm tertia ad quartam.




*DECLARAT hic Euclides, quamnam conditionem habere debeant quatuor magnitudines, vt maiorem dicatur habere proportionem prima ad ſecundam, quàm tertia ad quartam, dicens: Si ſumpta ſint æquè multiplicia primæ & tertiæ; Item alia æquè multiplicia ſecundæ & quartæ; deprehenſumq; fuerit aliquãdo, (licèt nõ ſemper) multiplex primæ maius eſſe multiplice ſecundæ, multiplex autem tertiæ non eſſe maius multiplice quartæ, ſed vel minus, vel æquale; dicetur maior eſſe proportio primæ magnitudinis ad ſecundam, quàm tertiæ ad quartam: vt perſpicuum eſt in appoſito exemplo, in quo primæ magnitudinis A, & tertiæ C, ſumpta ſunt triplicia E, & F; ſecundæ verò B, & quartæ D, quadruplicia G, & H. Et quoniam E, multiplex primæ maius quidem eſt, quàm G, multiplex ſecundæ; At F, multiplex tertiæ maius non eſt, quàm H, multiplex quartæ, immò minus; dicetur maior eſſe proportio A, primæ magnitudinis, ad B, ſecundam, quàm C, tertiæ, ad D, quartam.*

*NON eſt autem neceſſe, vt quatuor magnitudinum, prima ad ſecundam dicatur maiorem habere proportionem, quàm tertia ad quartam, æquè multiplicia ſecundum quamuis multiplicationem ſic ſe habere, vt multiplex quidem primæ excedat multiplex ſecundæ, at multiplex tertiæ non excedat multiplex quartæ; ſed ſatis eſt, vt ſecundum aliquam multiplicationem ita ſe habeant. Poteſt namque interdum fieri, vt tam multiplex primæ maius ſit multiplice ſecundæ, quàm multiplex tertiæ multiplice quartæ: Item vt & multiplex primæ minus ſit multiplice ſecundæ, & multiplex tertiæ multiplice quartæ: Tamẽ quia hoc non contingit in omni multiplicatione, ſed aliquando multiplex primæ ſuperat quidem multiplex ſecundæ, at multiplex tertiæ vel minus eſt, vel æquale multiplici quartæ: propterea maiorem dicetur habere proportionem prima magnitudo ad ſecundam, quàm tertia ad quartam; non autem eandem, vt perſpicuum eſt in appoſito exemplo.*




*Itaque vt quatuor magnitudines dicantur proportionales, necesse est vt æquemultiplicia earum, iuxta quasuis multiplicationes accepta, vel vnà deficiãt, vel vnà æqualia sint, vel vnà excedant, vt in 6. defin. fuit expositum. Vt autem maiorem dicatur habere proportionem prima ad secundam quam tertia ad quartam, satis est vt secundum aliquam multiplicationem, multiplex primæ excedat multiplex secundæ, multiplex verò tertiæ nõ superet multiplex quartæ; quamuis iuxta innumeras alias multiplicationes, æque multiplicia primæ, ac tertiæ vnà excedant æque multiplicia secundæ, & quartæ.*

*Quod si quando è contrario multiplex primæ deficiat à multiplici secundæ, non autem multiplex tertiæ à multiplici quartæ: dicetur prima magnitudo ad secundam minorem habere proportionem, quam tertia ad quartam; quamuis secundum plurimas alias multiplicationes, æque multiplicia primæ & tertiæ vnà deficiant ab æque multiplicibus secundæ, & quartæ. Vt in eisdem numeris propositi exempli, minor dicetur proportio 2. ad 3. quam 3. ad 4. &c.*

## CVR EVCLIDES IN DEFIN. VI. ET VIII. QVATVOR MAGNITVDINES PROPORTIONALES, ET NON PROPORTIONALES PER EARVM AEQVE MVLTIPLICIA DEFINIERIT.

*Quoniam mirum alicui videri possit, cur Euclides tum demum quatuor magnitudines eandem dixerit habere proportionem, hoc est, ita esse primam ad secundam, vt est tertia ad quartam, cum æquemultiplicia primæ ac tertiæ iuxta quamcunque multiplicationem, & æquemultiplicia secundæ ac quartæ iuxta quamcunq; etiam multiplicationẽ accepta ita se habent, vt quotiescunq; multiplex primæ maius est quàm multiplex secundæ, multiplex quoq; tertiæ maius sit quàm multiplex quartæ; quotiescunq; verò multiplex primæ æquale est multiplici secundæ, multiplex etiam tertiæ æquale sit multiplici quartæ; quotiescunq; deniq; multiplex primæ minus est quàm multiplex secundæ, multiplex etiam tertiæ minus sit quàm multiplex quartæ: Item quare tum demum quatuor magnitudinum prima ad secundam maiorem esse proportionem voluerit, quàm tertia ad quartam, cum aliqua æquemultiplicia primæ ac tertiæ, & alia æquemultiplicia secundæ ac quartæ accepta ita se habent, vt multiplex primæ sit maius quàm multiplex secundæ: at multiplex tertiæ maius non sit, quàm multiplex quartæ, sed vel æquale, vel minus. Quoniam, inquam, mirum alicui uideri hoc possit, quòd ex illo excessu, æqualitate, & defectu æque multiplicium eo ordine sumptorum non statim appareat similitudo proportionum, dissimilitudóue: aperiendum videtur hoc loco, quare ita magnitudines tum proportionales, tum non proportionales definire voluerit Euclides.*

*Ad hanc difficultatẽ respondetur, Euclidem eas magnitudines voluisse appellare proportionales, quarum æquemultiplicia ita se habent, vt dictum est; quia non habuit quid notius, per quod explicare potuisset magnitudines tam incommensurabiles, quàm commensurabiles eandem proportionem, vel non eandem habentes: neque verò opus esse, vt ratio afferatur, cur res aliqua hoc aut illo modo definiatur; sed satis esse, vt nunquam res definita asseratur alicui conuenire, nisi prius definitionem traditam eidem conuenire, demonstretur. Id quod in alijs etiam definitionibus cernitur. Nam quemadmodum Euclides defin. 10. lib. 1. angulum rectum appellauit eum, qui fit à linea super aliam lineam ad angulos æquales cadente, ita vt nunquam ei concedendum sit, angulum quempiam esse rectum, nisi prius ostenderit, eum ab eiusmodi linea effici. Item quemadmodum definitione vltima lib. 3. definiuit similia circulorum segmẽta esse, in quibus anguli existentes sunt æquales, ita vt tunc solum ei concedendum sit, segmenta esse similia, cum probauerit angulos in eis existentes esse æquales: sic etiã defin. 6. & 8. huius lib. vocauit quatuor magnitudines proportionales, & nõ proportionales, quarũ æquemultiplicia eam conditionem habẽt, quam explicauit, ita vt nunquam ei credendum sit, cum quatuor magnitudines appellabit eandem habere proportionẽ, vel non eandẽ, nisi prius demonstrauerit, conditionem eam illis magnitudinibus conuenire. Sed quanquam responsio hæc vera sit, ac propria, tamen quia ex illa definitione non videtur colligi posse, verè magnitudines, quarũ æque multiplicia illam conditionẽ habent, esse proportionales, vel non proportionales; etiamsi eas solũ Euclides velit appellare proportionales, vel non proportionales: explicabimus paulò accuratius, Euclidem rectè eo modo definiuisse magnitudines proportionales, & nõ proportionales, atq; adeo sine vlla dubitatione cõcedi posse à quouis, illas, quibus defin. 6. cõuenit, verè eandem habere proportionẽ; illas verò, quibus definitio 8. conuenit, non eandem proportionẽ habere.*

*Quod vt planius fiat, reuocandum ad memoriam est, duplicem esse proportionẽ; Rationalem, quæ inter quãtitates cõmensurabiles existit, atq; adeò omnis in numeris reperiri potest. Et irrationalem, quæ inter quãtitates incõmensurabiles existit, & nullo modo in numeris potest reperiri. Si igitur Euclides de Rationalibus duntaxat proportionib. disputationẽ instituisset, potuisset quatuor magnitudines proportionales definire eo* modo, quo lib. 7. defin. 20. proportionales quatuor numeros definiuit, nimirum: Magnitudines proportionales sunt, cum prima secundæ, & tertia quartæ, æquè multiplex est, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certè (vt nos ad eam defin. addidimus) cũ prima secundam, & tertia quartã æqualiter cõtinet, eandemq; insuper illius partẽ, vel easdem partes. Non proportionales verò magnitudines ita definire potuisset: Magnitudines nõ proportionales sunt, hoc est, prima ad secundam habet maiorem proportionem, quàm tertia ad quartam, cùm prima secundæ magis multiplex est, vel maior pars, maioresve partes, quàm tertia quartæ: Vel certè cùm prima secundam sæpius continet, quàm tertia quartã, siue eadem pars, aut partes vtrobique supersint, siue nõ: Vel cùm prima secundam toties continet, quoties tertia quartam, sed prima maiorem insuper partem, maioresve partes secundæ includit, quàm tertia quartæ. Potuisset, inquam, Euclides ita definire magnitudines proportionales, ac non proportionales, si de solis rationalibus proportionibus ageret: quia omnes proportiones magnitudinum exhiberi possent in numeris, ac proinde definiri, vt numerorum proportiones eadem, vel diuersæ, vt diximus. Nam proportio numerorum (vt ex Campano, aliisq; scriptoribus, defin. 24. lib. 7. adiunximus) est habitudo quædam vnius numeri ad alterum, secundùm quod illius est multiplex, vel pars, partesve: Vel certè secundùm quod illum cõtinet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partem, vel partes. Quæ omnia perspicua sunt, tum ex definitionibus quinque specierum proportionis rationalis tam maioris inæqualitatis, quàm minoris inæqualitatis, de quibus suprà egimus; tum ex iis, quæ in defin. 20. & 24. lib. 7. scripsimus.

QVONIAM verò Euclides non solùm proportiones Rationales, sed Irrationales etiam complecti voluit, non potuit eo modo quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales definire: propterea quòd in proportione irrationali maior magnitudo neq; multiplex esse potest minoris, neq; eam semel aut aliquoties, & insuper aliquam eius partem aut partes continere: Minor item maioris neq; pars esse potest, neq; partes; quippe cùm magnitudines irrationalem habentes proportionem incommensurabiles sint, ita vt nullam partem aliquotam communem; quamuis minimam, possint habere. Quocirca coactus est sese conuertere ad proportiones magnitudinum rationales, hoc est, ad proportiones numerorum, cùm omnis proportio rationalis, siue magnitudinum commensurabilium sit, vt proportio numeri ad numerum, vt lib. 10. propos. 5. demonstratur: Coactus, inquam, est inuestigare aliquid, quod certum sit conuenire quibuslibet quatuor numeris, siue magnitudinibus commensurabilibus, eandem habentibus proportionem, vel non eandem: adeò vt, si idem illud conuenire demonstretur quatuor magnitudinibus, etiam incommensurabilibus, iure optimo magnitudines illæ quatuor proportionales etiam dici possint, vel non proportionales: quandoquidem eandem habent proprietatem, quam quilibet quatuor numeri proportionales, vel non proportionales, immò quam quælibet quatuor magnitudines commensurabiles, eandem habentes proportionem, vel non eandem, necessariò habere demonstratur. Neq; enim aliunde cognoscere, vel explicare aliter possumus magnitudines incommensurabiles proportionales esse, aut non proportionales, nisi per aliquid, quod certum sit conuenire, vt diximus, numeris quibuscunque, vel magnitudinibus commensurabilibus, eandem, vel non eandem habentibus proportionem, in quibus euidenter similitudo, dissimilitudove proportionum cernitur. Quemadmodum quia, quando in circulorum segmentis anguli æquales existentes, sunt commensurabiles quatuor rectis, hoc est, quando sunt eadem pars, vel eadem partes quatuor rectorũ, sunt quoq; ipsa segmenta eadem pars, vel eadem partes circulorum, vt ad finem lib. 6. demonstrabimus; vt meritò similia appellentur, ac propterea & omnia segmenta alia, in quibus sunt anguli æquales, etiamsi non sint commensurabiles quatuor rectis, dicantur quoq; similia: quandoquidem, quando anguli quatuor rectis commensurabiles sunt, verè illa segmenta similia sunt, hoc est, eadem pars, vel eadem partes circulorũ, licèt hoc in segmẽtis, quãdo anguli in eis existentes quatuor rectis sunt incommensurabiles, nõ cernatur, quòd tunc segmenta neq; eadem pars, neq; eadem partes possint esse circulorum, sed ipsis circulis omnino incommensurabilia existant. Neq; enim aliud indicium habere possumus, segmenta similia esse, aut dissimilia, nisi angulorum in eis existentium æqualitatem, vel inæqualitatem, ex qua veram similitudinem, aut dissimilitudinem segmentorum circulis commensurabilium colligimus. Quam ob rem sicut nemo similitudinem hanc segmentorum in dubium reuocat, quanquam hæc similitudo in segmentis, quæ circulis incommensurabilia sunt, non ita euidenter appareat, vt in segmentis quæ circulis sunt commensurabilia; ita non rectè fecerit, qui similitudinem proportionum in magnitudinibus incommensurabilibus in dubium reuocet, quando comperiet, illis conuenire, quod omnibus magnitudinibus proportionem eandem rationalem habentibus, conuenire certum sit, licèt hæc proportionum similitudo non tam euidens sit in magnitudinibus incommensurabilibus.

ITAQVE quoniam, propositis quatuor numeris proportionalibus, sumptisq; primi ac tertii æquè multiplicibus, iuxta quamuis multiplicationem, item secundi ac quarti æquè multiplicibus secundùm quamuis etiam multiplicationem, semper verum est, vt mox demonstrabimus, si multiplex primi maior est multiplice secundi, multiplicem tertii maiorẽ quoq; esse necessariò multiplice quarti; Et si ille æqualis est, hunc quoque esse æqualem; & si minor, minorem: Et contrà quia, propositis quatuor numeris, sumptis æquè multiplicibus primi ac tertii iuxta quãuis multiplicationem, item æquè multiplicibus secundi ac quarti iuxta quamuis etiam multiplicationem, si multiplice primi existente maiore, quàm multiplex secundi, multiplex tertii maior quoq; sit, quàm multiplex quarti; Et si illo existente æquali, hic quoque æqualis sit; & si illo existente minore, hic similiter minor existat: perpetuò verum est, quatuor illos numeros esse proportionales. Rursus, quia

*quia propositis quatuor numeris, quorum primus ad secundum maiorem proportionẽ habeat, quàm tertius ad quartum, sumptisq; æquemultiplicibus primi ac tertij, item æquemultiplicibus secundi ac quarti, necessariò interdum accidit, vt multiplex primi maior sit multiplice secundi, multiplex verò tertij nõ sit maior multiplice quarti: Et contrà, quia quatuor propositis numeris, sumptisq; æquemultiplicibus primi ac tertij, item æquemultiplicibus secundi ac quarti, si accidat nonnunquam, multiplicem primi maiorem esse multiplice secundi, at multiplicem tertij non maiorem multiplice quarti, sine vlla dubitatione verum est, maiorem esse proportionem primi ad secundum, quàm tertij ad quartum. Quoniam, inquam, ita se res semper habet, in numeris, atq; adeò & in magnitudinibus commensurabilibus, ita vt contrarium nunquam inueniatur, non immeritò dicentur quæcunque quatuor magnitudines, etiam incommensurabiles, eandem habere proportionẽ, cum sumptis æquemultiplicibus primæ ac tertiæ iuxta quamuis multiplicationem, item æquemultiplicibus secundæ ac quartæ, secundùm quamuis etiam multiplicationem, perpetuò deprehenditur, multiplicem tertiæ maiorem esse multiplice quartæ, quotiescunq; multiplex primæ maior est multiplice secundæ; multiplicem verò tertiæ æqualem esse multiplici quartæ, quando multiplex primæ æqualis est multiplici secũdæ; multiplicem denique tertiæ minorem esse multiplice quartæ, hoc ipso, quòd multiplex primæ minor est multiplice secundæ. Eadem ratione iure optimo dicentur quatuor quæcunque magnitudines tam commensurabiles, quàm incommensurabiles, non habere eandem proportionem, sed maiorem esse proportionẽ primæ ad secundam, quàm tertiæ ad quartam, cùm, sumptis æquemultiplicibus, vt dictum est, interdum contingit, multiplicem primæ esse maiorem multiplice secundæ, multiplicem verò tertiæ non maiorem multiplice quartæ: quandoquidem prior conditio in omnibus numeris proportionalibus, posterior autem in non proportionalibus perpetuò reperitur, vt iamiam demonstrabimus; nullumq; aliud indicium habere possumus, quo magnitudines incommensurabiles cognoscantur esse proportionales, vel non proportionales: præsertim cùm magnitudines incommensurabiles alijs magnitudinibus, quæ hoc modo proportionales esse demonstrantur, sæpenumerò alia via ostendantur eandem habere proportionem, quam numerus ad numerum, vt nullo modo dubitandum sit, quin omnes magnitudines, etiam incommensurabiles, quarum æquemultiplices ita se habent, vt in 6. defin. dictum est, sint proportionales, &c. Nisi enim hoc verum esset, sequeretur hauddubiè ex illa proportionalitate aliquando absurdum aliquod manifestum: quod tamen hactenus non accidit, sed potius ea, quæ ex magnitudinibus in eo sensu proportionalibus demonstrantur verissima esse plerunque alia via, vt diximus, ostenduntur; vt postea etiam demonstrabimus. Quæ cùm ita sint, liquidò constare existimo, cur Euclides in duabus illis definitionibus adhibuerit (& quidem rectè) magnitudinum propositarum æquemultiplices magnitudines. Sed iam id, quod polliciti sumus, Geometricè demonstremus, adscitis nonnullis propositionibus lib. 7. quæ nullo modo ex 6. & 8. defin. aut ex demonstrationibus huius lib. 5. pendent, vt commodissimè ante librũ 5. possint demonstrari; atque adeò hic assumi, vt iam demonstrata. Hoc autem efficiemus quatuor propositionibus, quæ sequuntur.*

## I.

PROPOSITIS quatuor numeris proportionalibus, sumptisq; primi ac tertij æquemultiplicibus iuxta quamuis multiplicationem, item secundi & quarti æquemultiplicibus iuxta quamcunque etiam multiplicationem; si multiplex primi maior sit multiplice secundi, erit quoque multiplex tertij maior multiplice quarti; & si multiplex primi æqualis sit multiplici secundi, erit & multiplex tertij æqualis multiplici quarti: si denique multiplex primi sit multiplice secũdi minor, erit & multiplex tertij multiplice quarti minor.

*HABEAT numerus primus A, ad secundum B, eandem proportionem, quam tertius C, ad quartum D; sumanturq; primi A, & tertij C, æquemultiplices E, F: Item secundi B, & quarti D, æquemultiplices G, H, qualiscunque hæc multiplicatio sit.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| E, 9. | A, 3. | C, 6. | F, 18. |
| G, 4. | B, 2. | D, 4. | H, 8. |
| | | | |
| E, 18. | A, 3. | C, 6. | F, 36. |
| G, 18. | B, 2. | D, 4. | H, 36. |
| | | | |
| E, 12. | A, 3. | C, 6. | F, 24. |
| G, 14. | B, 2. | D, 4. | H, 28. |

*Dico si E, multiplex primi A, maior est, quàm G, multiplex secundi B, maiorem quoq; esse F, multiplicem tertij C, quàm H, multiplicem quarti D. Et si E, æqualis sit ipsi G, æqualem quoque esse F, ipsi H. Si deniq; E, minor sit quàm G, minorem quoq; esse F, quàm H. Quoniam enim est, vt A, ad B, ita C, ad D;* [a] *erit permutando etiam, vt A, ad C, ita B, ad D:* [b] *Vt autem A, ad C, ita est E, ad F; quòd idem numerus ipsos A, C, multiplicans produxerit ipsos E, F, quippe cùm E, & F, ipsorum A, & C, sumpti sint æquemultiplices. Et eadem de causa, vt B, ad D, ita est G, ad H. Igitur ex lemmate propos. 14. lib. 7. erit quoq; vt E, ad F, ita G, ad H;* [c] *Et permutando vt E, ad G, ita F, ad H. Quocirca si E, maior est quàm G, erit quoq; F, maior quàm H, vt in primo exemplo: Si verò F, æqualis est ipsi G, erit quoq; F, ipsi H, æqualis, vt in secundo exemplo: Si deniq; E, minor est quàm G, erit quoq; F, minor quàm H, vt in tertio exemplo. Quod erat demonstrandum.*

a 13. septimi.
b 17. septimi.
c 13. septimi.

## II.

PROPOSITIS quatuor numeris non proportionalibus, ita vt maior sit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum, ſi ſumantur æquemultiplices primi ac tertij, item æquemultiplices ſecundi ac quarti, fieri poteſt, vt multiplex primi maior ſit; quàm multiplex ſecundi, multiplex autem tertij non maior, quàm multiplex quarti.

*HABEAT primus numerus A, ad ſecundam B, maiorem proportionem, quàm tertius C, ad quartum D. Dico fieri poſſe, vt ſumptis æquemultiplicibus primi A, & tertij C, item æquemultiplicibus ſecundi B, & quarti D, multiplex ipſius A, primi ſit maior, quàm multiplex ipſius B, ſecundi; at multiplex ipſius C, tertij maior non ſit, quàm multiplex ipſius D, quarti. Multiplicantes enim ſe mutuò numeri B, D, faciant E. Et quoniam D, metitur E, ex pronunc. 7. lib. 7. & E, metitur genitum ex C, in E, ex eodem pronunciato; metietur quoque D, eundem genitum ex C, in E, ex pronunc. 11. lib. 7. Metiatur D, genitum ex C, in E, per F; fietq; propterea ex D, in F, numerus, quem D, per F, metitur, ex pronunc. 9. lib. 7. hoc eſt, numerus idẽ, qui fit ex C, in E. Quia igitur idem numerus gignitur ex D, primo in F, quartum; qui ex C, ſecundo fit in E, tertium; [a] erit vt D, primus ad C, ſecundum, ita E, tertius ad F, quartum: Et conuertendo, vt C, ad D, ita F, ad E.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| K, 56. | H, 7. | O, 21. | I, 28. |
| F, 8. | G, 1. | A, 3. | C, 4. |
| | E, 6. | B, 2. | D, 3. |
| M, 54. | N, 6. | P, 20. | L, 30. |
| K, 160. | H, 440. | O, 60. | I. 20. |
| F, 8. | G, 22. | A, 3. | C, 1. |
| | E, 80. | B, 8. | D, 10. |
| M, 160. | N, 80. | P, 24. | L, 30. |

a 19. ſeptimi.

*RVRSVS quia B, metitur E, ex pronunc. 7. lib. 7. & E, metitur procreatum ex A, in E, ex eodem pronunciato; metietur quoq; B, eundem procreatum ex A, in E, ex pronunc. 11. lib. 7. Metiatur B, procreatum ex A, in E, per F, G; fietq; idcircò ex B, in F G, numerus, quem B, metitur per F G, ex pronunc. 9. lib. 7. hoc eſt, numerus idem, qui fit ex A, in E. Quia igitur idem numerus ex B, primo in F G, quartum, & ex A, ſecundo in E, tertium gignitur, [b] erit vt B, primus ad A, ſecundum, ita E, tertius ad F G, quartum: Et conuertendo, vt A, ad B, ita F G, ad E. Quoniam ergo eſt, vt F G, ad E, ita A, ad B; Eſt autem proportio A, ad B, poſita maior quàm C, ad D; erit quoq; proportio F G, ad E, maior quàm C, ad D: Oſtenſum autem eſt, eſſe vt C, ad D, ita F, ad E. Igitur proportio F G, ad E, maior quoq; erit proportione F, ad E, ac proinde numerus F G, maior erit numero F: quæ omnia ex ijs, quæ in defin. 20. lib. 7. ſcripſimus, perſpicuè conſequũtur. Superet igitur F G, ipſum F, numero G.*

b 19. ſeptimi.

*SVMANTVR iam ipſorũ F, G, C, æquè multiplices K, H, I, ea lege, vt H, ſit quidẽ maior q̃ E, at I, non minor quàm D. Eritq; ex ſcholio propoſ. 5. lib. 7. totus K H, ita multiplex totius F G, vt eſt multiplex K, ipſius F, vel I, ipſius C. Sumantur rurſus ipſorum D, E, æquè multiplices L, M N, ea lege, vt L, ſit multiplex ipſius D, proximè maior, quàm I; hoc eſt, tales æquè multiplices, vt ſubtracto numero D, ex L, reliquus numerus maior non ſit, quàm I. ſed vel æqualis, vt in ſecundo exemplo, vel minor; vt in primo exemplo contingit. Et quoniam oſtenſum eſt ita eſſe D, ad C, vt E, ad F, & ita eſt C, ad I, vt F, ad K, ex conſtructione, quòd I, K, ſumpti ſint ipſorum C, F, æquemultiplices, [c] erit quoque ex æquo, vt D, ad I, ita E, ad K.*

c 14. ſeptimi.

*PRÆTEREA quoniam oſtenſum eſt eſſe D, ad C, vt E, ad F; erit permutando quoque D, ad E, vt C, ad F. Vt autem D, ad E, ita eſt L, ad M N; quòd idem numerus ipſos D, E, multiplicans fecerit L, M N, quippe cum L, M N, ſumpti ſint ipſorum D, E, æquemultiplices: Et eadem de cauſa, vt C, ad F, ita eſt I, ad K. Igitur ex lemmate propoſ. 14. lib. 7. erit quoque, vt L, ad M N, ita I, ad K, & permutando, vt L, ad I, ita M N, ad K.*

*QVIA ergo eſt, vt totus L, ad I, ita totus M N, ad K: Et vt D, ex L, ablatus ad eundem I, ita E, ex MN, ablatus ad eundem K: erit quoq; ex theor. 6. ſcholij propoſ. 22. lib. 7. vt reliquus ex L, ad I, vt reliquus ex MN, ad K: Eſt autem reliquus ex L, non maior quàm I, ſed vel minor, vt in priori exemplo, vel æqualis, vt in poſteriori; propterea quòd reliquus ex L, cum D, facit ipſum L, multiplicem ipſius D, proximè maiorem ipſo I, ex conſtructione. Igitur & reliquus ex M N, maior non erit quàm K; atq; idcirco ſi ex M N, detrahatur N, ipſi E, æqualis erit reliquus M, vel minor ipſo K, vt in priori exẽplo, vel æqualis, vt in poſteriori. Cum ergo H, multiplex ipſius G, ſit maior quàm E, vel N, ex conſtructione; erit totus K H, toto M N, maior.*

*DENIQVE ſumpto O, ita multiplici ipſius A, vt K H, multiplex eſt ipſius F G, vel I, ipſius C; Item P, ita multiplici ipſius B, vt M N, multiplex eſt ipſius E, vel L, ipſius D: quoniam oſtenſum eſt, ita eſſe F G, ad E, vt A, ad B, ſumptiq; ſunt ipſorum F G, & A, primi ac tertij, æquemultiplices K H, & O, item ipſorum E, & B, ſecundi ac quarti; æquemultiplices M N, & P, ſequitur ex antecedente propoſ. ſi K H, maior eſt quàm M N, ipſum quoq; O, maiorẽ eſſe quàm P. Cum ergo K H, oſtenſus ſit maior quàm M N, erit quoq; O, maior quàm P. Quocirca cum O, I, ſint æquemultiplices ipſorũ A, C, primi ac tertij, & P, L, æquemultiplices ipſorum B, D, ſecundi ac quarti, demonſtratumq; ſit, maiorẽ eſſe O, quàm P, ſit autẽ I, minor quàm L, ex conſtructione: fieri poteſt, vt exiſtẽte maiore proportiõe primi A, ad ſecundũ B, quàm tertij C, ad D, quartũ, ſumptiſq; æquemultiplicibus, vt dictum eſt, multiplex primi nimirum O, maior ſit quàm P, multiplex ſecundi, multiplex autem tertij, nimirum I, maior non ſit quàm L, multiplex quarti. Quod demonſtrandum erat.*

*QVOD ſi minor ſit proportio primi ad ſecũdum, quàm tertij ad quartum, ſumanturq; æquemultiplices primi*

*primi ac tertij, item æquemultiplices secundi ac quarti, fieri quoq; potest, vt nonnunquam multiplex primi sit minor multiplice secundi, multiplex verò tertij non sit multiplice quarti minor.*

*In eodem enim exemplo, minor est proportio C, primi ad D, secundum, quàm A, tertij ad B, quartum: demonstratumq; est, I, multiplicem primi C, minorem esse, quàm L, multiplicem secundi D, at O, multiplicem tertij A, minorem esse quàm P, multiplicem quarti B.*

## III.

Propositis quatuor numeris, sumptisque æquemultiplicibus primi ac tertij iuxtà quamuis multiplicationem, item æquemultiplicibus secundi ac quarti iuxta quamuis etiam multiplicationẽ, si multiplice primi existente maiore, quàm multiplex secundi, multiplex tertij maior quoque sit necessariò, quàm multiplex quarti: & si illo existente æquali, hic quoque semper sit æqualis; illo denique existente minore, hic quoque perpetuò minor sit: Erit eadem proportio primi ad secundum, quæ tertij ad quartum.

| | | | |
|---|---|---|---|
| E, 9. | A, 3. | C, 6. | F, 18. |
| G, 4. | B, 2. | D, 4. | H, 8. |
| | | | |
| E, 18. | A, 3. | C, 6. | F, 36. |
| G, 18. | B, 2. | D, 4. | H, 36. |
| | | | |
| E, 12. | A, 3. | C, 6. | F, 24. |
| G, 14. | B, 2. | D, 4. | H, 28. |

*Sint quatuor numeri A, B, C, D, sumanturq; primi A, & tertij C, æquemultiplices qualescunque E, F; Item secundi B, & quarti D, æquemultiplices G, H, qualiscunq; etiam hæc sit multiplicatio. Dico si E, F, multiplices primi ac tertij semper sint vel maiores, quàm G, H, multiplices secundi & quarti, vel æquales, vel minores: ita esse A, primum ad B, secundum, vt C, tertium ad D, quartum. Si namq; foret maior proportio A, ad B, vel minor, quàm C, ad D; fieri posset, veluti in antecedente propos. demonstratum est, vt E, multiplex primi esset aliquãdo maior, aut minor, quã G, multiplex secundi, at F, multiplex tertij non maior, aut minor, quàm H, multiplex quarti. Quod est cõtra hypothesin. Est ergo A, ad B, vt C, ad D. Quod erat ostendendum.*

## IIII.

Propositis quatuor numeris, sumptisq; primi ac tertij æquemultiplicibus, item secundi & quarti æquemultiplicibus; si quando contingat, multiplicem primi maiorẽ esse multiplice secundi, multiplicem verò tertij non maiorem multiplice quarti: Maior erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum.

| | | | |
|---|---|---|---|
| E, 21. | A, 3 | C, 4. | F, 28. |
| G, 20. | B, 2 | D, 3. | H, 30. |

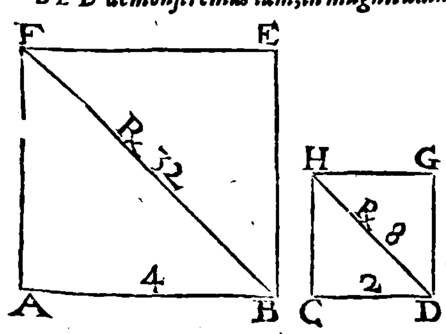
*Sint quatuor numeri A, B, C, D. sumptisq; ipsorum A, & C, primi ac tertij æquemultiplicibus E, & F, item ipsorum B, & D, secundi ac quarti æquemultiplicibus G, & H, sit E, multiplex primi A, maior, quàm G, multiplex secundi B, at F, multiplex tertij C, non maior quàm H, multiplex quarti D. Dico maiorem esse proportionem primi A, ad B. secundum, quàm C, tertij ad D, quartum. Quoniam enim maior est E, quàm G, at F, non maior quàm H; erit maior proportio E, ad G, quàm F, ad H, cùm illa sit proportio maioris inæqualitatis, hæc verò vel æqualitatis, vel minoris inæqualitatis. Igitur ex theor. 10. propos. 22. lib. 7. erit quoq; permutando maior proportio E, ad F, quàm G, ad H.[a] Est autem, vt E, ad F, ita A, ad C; quòd idem numerus ipsos A, C, multiplicans procreauit E, & F, quippe cùm E, F, æquemultiplices sint ipsorum A, C; Eademq; de causa est, vt G, ad H, ita B, ad D. Maior igitur erit quoq; proportio A, ad C, quàm B, ad D: Et permutando, ex theor. 10. propos. 22. lib. 7. maior erit etiam proportio A, ad B, quàm C, ad D. Quod ostendendum erat.* a 17. septimi.

*Qvod si multiplex primi sit minor multiplice secundi, sed multiplex tertij non sit minor multiplice quarti; minor erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| E, 28. | A, 4. | C, 3. | F, 21. |
| G, 30. | B, 3. | D, 2. | H, 20. |

*Eadem enim omnino demonstratio est, si pro maiore proportione dicatur vbique minor proportio, nulla alia re mutata. Vt in hoc exemplo apparet, vbi quatuor numeri sunt A, B, C D, & E, multiplex primi A, minor est, quàm G, multiplex secundi B, sed F, multiplex tertij C, minor non est, quàm H, multiplex quarti, &c.*

*Sed demonstremus iam, in magnitudinibus, quæ alijs incommensurabiles sunt, & quæ ex definitione 6. proportionales sunt, eam plerunque reperiri proportionem, quæ in numeris exhiberi possit: adeò vt verè proportionales sint magnitudines, quibus definitio 6. conuenit, quandoquidem ex magnitudinibus proportionalibus in eo sensu sumptis verum consequitur, & nihil absurdi inde inferri potest. Hoc enim paulò antè demonstraturos nos etiam recepimus. Sit ergo recta A B, verbi gratia, recta C D, dupla, & super ipsas rectas describantur quadrata A B E F, C D G H; cum diametris B F, D H. Et quia ex scholio propos. 47. lib. 1. tam quadratum diametri B F, quadrati lateris A B, hoc est, quadrati A B E F, quàm*



quadratum diametri D H, quadrati lateris C D, hoc est, quadrati C D G H, duplum est; si ponatur latus A B, 4. & latus C D, 2. erit quadratum A B E F, 16. & quadratũ diametri B F, eius duplum, 32. ac proinde diameter ipsa B F, erit radix quadrata numeri 32. quæ numeris exprimi nequit, cùm ea maior sit, quã 5. minor autem quã 6. nullusq; numerus inter 5. & 6. medius, hoc est, cõpositus ex 5. & fractione aliqua vnitatis, in se ductus possit numerum integrũ 32. producere, vt ex Lemmate sequenti perspicuum fiet. Quadratum autẽ C D G H, erit 4. & quadratũ diametri D H, eius duplum, 8. ac proinde diameter ipsa D H, erit radix quadrata numeri 8. quæ numeris etiam exprimi nequit, cùm ea maior sit, quàm 2. minor autẽ, quàm 3. &c. ita vt proportio tam A B, ad B F, quàm C D, ad D H, sit irrationalis, diameterq; propterea B F, lateri A B, & diameter D H, lateri C D, incommensurabilis. Vides igitur, id quod Euclides propos. vlt. lib. 10. demonstrauit ex ijs, quæ lib. 6. de magnitudinibus proportionalibus per defin. 6. huius 5. lib. demonstrata sunt, Diametrum nimirum quadrati lateri eiusdem quadrati esse incommensurabilem, esse re ipsa verissimum, quippe cùm idem nos alia via sine proportionibus hoc loco ostenderimus.

RVRSVS quoniam diametri B F, D H, diuidunt angulos rectos quadratorum bifariam, vt in scholio propos. 34. lib. 1. & in coroll. 2. propos. 4. lib. 2. ostendimus, erunt anguli A B F, A F B, C D H, C H D, semirecti, ideoq; inter se æquales. Cùm igitur & recti anguli A, C, sint æquales, æquiangula erũt triangula A B F, C D H.
a 4. sexti. Quare [a] erit, vt A B, ad B F, ita C D, ad D H. Et permutando vt A B, ad C D, ita B F, ad D H. Est autem posita recta A B, rectæ C D, dupla. Igitur & B F, ipsius D H, dupla erit. Itaq; cũ ex defin. 6. huius lib. eò deducti simus, vt credamus diametrũ B F, diametri D H, esse duplam, quamuis vtraq; diameter ad suum latus habeat proportionem irrationalem, (Nam propos. 4 lib. 6. ex qua ostendimus, ita esse A B, ad B F, vt C D, ad D H, pendet ex propos. 2. & hæc ex 1. eiusdem lib. 6. Prima autẽ propos. lib. 6. vim suam accipit ex defin. 6. huius 5. lib. Item permutata proportio, qua hic etiam vsi sumus, sine eadem defin. 6. demonstrari non potest in magnitudinibus incommensurabilibus, vt ex propos. 16. lib. 5. constat.) videamus, an aliunde cognoscere possimus, diametrum B F, diametri D H, verè duplam esse, vt ex defin. 6. conclusum est, hoc ipso, quòd latus A B, lateris C D, duplum ponitur, etiamsi proportio tam lateris A B, ad diametrum B F, quã lateris C D, ad diametrum D H, irrationalis sit. Hoc autẽ sine proportionibus facile ita cognoscemus: Quoniam latus A B, lateris C D, duplum est, erit ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum A E, quadrati C G, quadruplum. Posito ergo quadrato A E, 4. erit quadratum C G, I. Et quia tam quadratum diametri B F, quadrati A E, quã quadratum diametri D H, quadrati C G, ex scholio propos. 47. lib. 1. duplum est; erit quadratum diametri B F, 8. & quadratũ diametri D H, 2. atq; idcircò illud huius quadruplum erit. Quocirca ex scholio propos. 4. lib. 2. recta B F, rectæ D H, dupla erit. Vides ergo rursus, si procedamus per ea, quæ ex defin. 6. huius lib. de magnitudinibus proportionalibus demõstrata sunt, nos peruenisse ad conclusionẽ veram, nimirum diametros duorum quadratorũ habere proportionem inter se duplam, si latus vnius sit lateris alterius duplum: vt dubium non sit, quin magnitudines verè proportionales sint, quarum æquemultiplicia eam conditionem habent, quam defin. 6. præscribit. Porrò ex regulis quoq; numerorum irrationalium, quæ in Algebra traduntur, constat diametrũ B F, hoc est, R. 32. habere duplam proportionem ad diametrum D H, id est, ad R. 8. Nam siue R. 32. diuidatur per R. 8. Quotiens fit R. 4. hoc est, numerus 2. qui proportionem diametri B F, ad diametrum D H, denominat; siue R. 8. multiplicetur per 2. producitur R. 32. Atq; hoc modo omnia, quæ de magnitudinum incommensurabilium proportionibus demonstrantur ex defin. 6. huius lib. explicari poterunt per regulas numerorũ irrationalium. Quæ res argumento rursum est, magnitudines, quibus defin. 6. huius lib. conuenit, verè esse proportionales; quandoquidem calculus numerorum irrationalium cum demonstrationibus, quæ ex ea defin. pendent, perpetuò consentire comperitur, vt ijs, qui in Algebræ præceptis versati sunt, notissimum est.

## LEMMA.

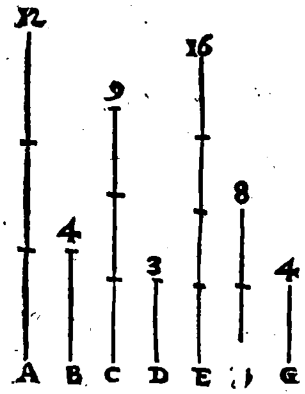
QVOD autẽ nullus numerus compositus ex 5. & fractione aliqua vnitatis, quamuis vnitas in infinitũ secetur, gignere possit integrum numerũ 32. hoc modo facilè demonstrabimus. Sit enim numerus 5. cũ quacunq; fractione $\frac{3}{7}$. hoc modo $5\frac{3}{7}$. reuoceturq;, vt in Arithmetica tradidimus, ad hanc vnicam fractionẽ $\frac{38}{7}$. Certum autẽ est, denominatorem 7. non metiri numeratorem 38. Alioquin diuisis 38. per 7 fieret Quotiẽs numerus integer sine fractione, quod est contra hypothesin. Multiplicetur iam fractio $\frac{38}{7}$. in se, (quod fiet, vt in Arithmetica diximus, demonstrabimusq; ad finem lib. 9. si tam numerator 38. in se, quã denominator 7. in se ducatur.) gignaturq; fractio $\frac{1444}{49}$. ita vt numerator huius 1444. sit quadratus numeratoris illius 38. & denominator 49 quadratus denominatoris 7. Et quia latus 7. non metitur latus 38. vt
b 16. octaui. ostendimus, [b] nõ metietur quoq; quadratus 49. quadratũ 1444. Quare diuiso quadrato 1444. per quadratum 49. Quotiens non erit numerus integer, sed ei adhærebit fractio aliqua. Aliàs quadratus 49. metiretur quadratũ 1444. cuius contrariũ demonstrauimus. Atq; eadẽ ratione demonstrabitur, quemcunq; numerum integrum cum fractione qualibet in seipsum ductum gignere numerũ integrũ cũ fractione. Quòd si fractio, cuius numerator denominatore minor sit, in se ducatur, producetur semper fractio, cuius numerator etiã minor est denominatore. Nã

cùm

*cùm numerator fractionis productæ sit numerus quadratus numeratoris datæ fractionis, denominator autem quadratus numerus denominatoris, sit autem datæ fractionis numerator minor denominatore; erit quoq; illius quadratus numerus quadrato huius minor. Ita ex* $\frac{2}{3}$. *in se gignitur fractus numerus* $\frac{4}{9}$. *cuius numerator denominatore minor est. Itaq; quæcunque fractio in se multiplicata gignit numerum non integrum, nisi quando numerator datæ fractionis à denominatore numeratur, sed ea fractio numerus integer potius est: qualis est fractio* $\frac{100}{25}$. *quæ 4. integras vnitates constituit.*

## IX.

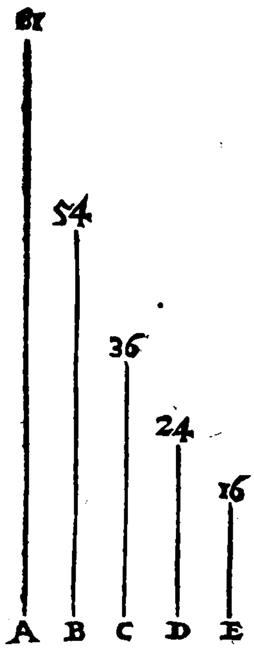
PROPORTIO autem in tribus terminis paucissimis consistit.




*QVONIAM omnis Analogia, seu proportionalitas, quam interpres, vt dictum est, proportionē nominat, similitudo est duarum, vt plurium proportionum; omnis autē proportio habet & antecedentem terminum, & consequentem, necesse est, in omni proportionalitate reperiri, vt minimū, duos terminos antecedentes, ac duos consequentes. Quare si proportionalitas fuerit non continua, requirentur saltē quatuor termini, siue magnitudines; At verò si fuerit continua, erunt cū minimū tres termini; quoniā terminus medius bis sumitur, cū sit consequens terminus vnius proportionis, & antecedens alterius: Atq; hic est minimus numerus terminorū proportionalitatis. Nam in duobus terminis quibuscunq; solùm proportio, non autem proportionalitas reperitur.*

## X.

CVM autem tres magnitudines proportionales fuerint; Prima ad tertiam duplicatam rationē habere dicitur eius, quā habet ad secundam: At cū quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartā triplicatā rationē habere dicitur eius, quam habet ad secundā: Et semper deinceps, vno amplius, quamdiu proportio extiterit.




*VELVTI si sint magnitudines A, B, C, D, E, cōtinuè proportionales, ita vt ea sit proportio A, ad B, quæ B, ad C & C, ad D; & D, ad E: Proportio A, magnitudinis primæ ad C, magnitudinē tertiam, dicitur duplicata eius proportionis, quā habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinē secundam: quoniā inter A, & C, duæ proportiones reponuntur, quæ æquales sunt proportioni A, ad B; nimirum proportio A, ad B, & B, ad C, vt propterea proportio A, ad C, intercipiat quodammodo proportionē A, ad B, duplicatā, id est, bis ordine positam. At proportio A, magnitudinis primæ ad D, magnitudinē quartam, dicitur triplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinē secundam: quia inter A, & D, reperiuntur tres proportiones, quæ æquales sunt proportioni A, ad B; nimirum proportio A, ad B; B, ad C, & C, ad D, atque idcircò proportio A, ad D, includit quodammodo proportionem A, ad B, triplicatam, id est, ter ordine positam. Sic quoq; proportio A, ad E, dicitur quadruplicata proportionis A, ad B: propterea quòd quatuor proportiones interijciuntur inter A, & E, quæ æquales sunt proportioni A, ad B, &c.*

*QVOD si è contrario ea sit proportio E, ad D, quæ D, ad C; & C, ad B; & B, ad A; dicetur proportio E, ad C, duplicata proportionis E, ad D; At verò proportio E, ad B, dicetur triplicata proportionis E, ad D; sic quoq; proportio E, ad A, dicetur quadruplicata proportionis E, ad D, &c.*

*INTERPRETES nonnulli colligunt ex hac defin. si proponantur plures quantitates cōtinuè proportionales, proportionē primæ quantitatis ad tertiam, esse duplā proportionis primæ quantitatis ad secundā, eò q; Euclides illam vocet duplicatā proportionē huius. Eodem modo volunt, proportionem primæ quantitatis ad quartā esse triplam proportionis, quā habet prima quantitas ad secundā, &c. Quod tamen nulla est ratione concedendū. Neq; enim Euclides hoc significare voluit, sed docuit tantummodò, proportionē primæ quantitatis ad tertiā, appellari duplicatā eius proportionis, quā habet prima quantitas ad secundam; propterea q; inter primam quantitatē, ac tertiam, reperitur quodammodo proportio primæ quantitatis ad secundam duplicata: quippe cùm inter primam quantitatē, ac tertiam interponantur duæ proportiones æquales ei proportioni, quam habet prima quantitas ad secundam, & sic de cæteris, vt diximus. Non autē intellexit, illam duplam esse huius, ne Theorema proponeret, quod meritò quispiam concedere recusaret. Quis enim affirmabit, in his numeris continuè proportionalibus, 25.5.1. proportionem 25. ad 1. duplam esse proportionis 25. ad 5. cùm potius eam quis dixerit esse quincuplam? At verò, illam dici huius duplicatam ad sensum expositum, nemo inficiabitur;*

eò quòd bis sit posita, & continuè, proportio 25. ad 5. Deinde quo modo erit proportio 1. ad 25. dupla proportionis 1. ad 5. cùm illa minor sit, hæc autẽ maior? Nam per propos. 8. huius lib. quantitas 1. ad quantitatem 5. maiorem proportionem habet, quàm ad quantitatem 25. propterea quòd 25. maior est, quàm 5. Dicetur tamen illa huius duplicata, ob causam iam explicatam, licèt sit eius quinta pars. Quare etsi proportio 25. ad 1. dicitur duplicata proportionis quincuplæ, tamen decupla proportio est eiusdem dupla. Quemadmodum etiam proportio octupla dupla est proportionis quadruplæ, cùm tamen quadruplæ duplicata, sit sedecupla, vt hic patet 16. 4. 1. Denique in tribus magnitudinibus æqualibus, vel in tribus æqualibus numeris, 4. 4. 4. atq; adeò continuè proportionalibus, qui fieri potest, vt proportio primi ad tertium dupla sit proportionis primi ad secundum, cùm sit omnino eadem? Duplicata tamen dicetur illa huius, propterea quòd hæc ordine bis posita est continuè inter primum numerum & tertium.

SED auctores, qui proportionem primæ quantitatis ad tertiam volunt esse duplam proportionis, quam prima quantitas habet ad secundam, (inter quos auctores est etiam Federicus Commandinus hoc loco: quod valde miror, cùm alioquin Mathematicus sit præstantissimus) dicunt in hac defin. requiri terminos inæquales, primamq; debere esse maiorem; ita vt definitio hæc intelligenda sit necessariò de proportione continua maioris inæqualitatis. Quare mirum non est, vt aiunt, neq; proportionẽ 1. ad 25. proportionis 1. ad 5. neq; proportionem 4. ad 4. proportionis 4. ad 4. duplam esse. Verùm hæc expositio non solùm vera non est, sed Euclidi prorsus est contraria: quippe qui assumat plerisq; in locis, triplicatã proportionẽ reperiri in proportione minoris inæqualitatis. Locus clarissimus est, vt alios omittã, in propos. 12. lib. 12. vbi demonstrat similes conos, & cylindros in triplicata ratione esse diametrorũ, quæ in basibus. Nam si conferatur maior conus, vel cylindrus ad minorem, necessariò in secunda parte eius demonstrationis, assumit Euclides demonstratum esse propos. 8. eiusdem lib. 12. pyramides similes, etiamsi minor ad maiorem referatur, in triplicata esse homologorum laterum ratione; vt eo in loco annotauimus. Huc accedit, propositiones illas, in quibus figuræ aliquæ demonstrantur habere rationem laterum homologorum duplicatam, vel triplicatam, cuiusmodi est 19. & 20. lib. 6. & 11. 12. 18. 19. lib. 8. & 33. lib. 11. & 12. 18. lib. 12. non fore vniuersales, si solùm de proportione maioris inæqualitatis essent intelligendæ. Explicanda ergo est hæc definitio, vt nos exposuimus.

ITAQVE hoc loco Euclides explicat tantũ, quidnã intelligendũ sit nomine proportionis duplicatæ, triplicatæ, &c. vt demonstrationes sequẽtium librorũ percipiantur, rebusq; possint materialibus accommodari. Non autem determinat, quænam proportio sit alterius dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. Exempli gratia, quoniam ex propos. 20. lib. 6. constat, proportionẽ quadrati ad quadratũ duplicatam esse proportionis, quam habet latus priorũ quadrati ad latus posteriorũ: colligendum erit, si continuetur proportio laterum in tribus terminis, proportionẽ quadrati ad quadratũ, esse eam, quæ est primi termini ad tertium, ita vt si prioris quadrati latus fuerit trium palmorum, posterioris autẽ vnius palmi, prius quadratum ad posterius habeat proportionem, quã 9. ad 1. ita vt illud nouies hoc complectatur. Nam proportio 9. ad 1. quæ est noncupla, dicitur iuxta hanc definitionem, duplicata proportionis triplæ, qualis est 9. ad 3. vel 3. ad 1. vt in his numeris 9. 3. 1. perspicuum est. Non autem inferendum erit, proportionem quadrati ad quadratum, duplo esse maiorẽ proportione lateris ad latus. Sic etiam quadratum posterius ad prius proportionem habebit, quam 1. ad 9. ita vt illud sit huius nona pars, propterea quòd proportio 1. ad 9. dicitur duplicata proportionis 1. ad 3. vt in eisdem his numeris 1. 3. 9. manifestum est. Simili ratione, quoniam lib. 12. propos. vltima, demonstratur, sphæras inter se rationem habere suarum diametrorum triplicatam, colligendum erit, sphæram illam, cuius diameter continet tres palmos, ad sphæram, cuius diameter est vnius palmi tantùm, proportionem habere, quam 27. ad 1. Hæc enim triplicata dicitur triplæ proportionis, vt hic apparet, 27. 9. 3. 1. &c. Sic etiam propositis duabus sphæris, quarum diametri proportionem habent decuplam, habebunt sphæræ ipsæ proportionem millecuplam, cùm hæc sit decuplæ triplicata, vt hic patet, 1000. 100. 10. 1. Quis autem dixerit vnquam, millecuplam proportionem esse triplo tantummodò maiorem proportione decupla, & non potius trigecuplam decuplæ esse triplam?

CAETERVM proposita quacunq; proportione rationali, si eius denominator in se ipsum multiplicetur, exurget denominator proportionis, quæ duplicata dicitur propositæ proportionis. Vt quia ex multiplicatione 4. denominatore scilicet proportionis quadruplæ, in se, producuntur 16. ideò proportio sedecupla, dicetur duplicata quadruplæ proportionis, vt hic cernitur, 16. 4. 1. Item hic, 48. 12. 3. E contrario, cũ ex multiplicatione $\frac{1}{4}$. denominatore videlicet proportionis subquadruplæ, in se, producatur $\frac{1}{16}$. dicetur proportio subsedecupla, duplicata proportionis subquadruplæ. Quòd si denominator rursus in illud productũ multiplicetur, procreabitur denominator proportionis triplicatæ; vt in priori exemplo, ex multiplicatione 4. in 16. producũtur 64. denominator proportionis, quæ quadruplæ dicitur triplicata, vt hic vides, 64. 16. 4. 1. Item hic, 192. 48 12. 3. Rursus si in posterius hoc productum multiplicetur idem denominator, inuenietur denominator proportionis quadruplicatæ, atq; ita de cæteris. Itaq; proportionis duplicatæ denominator producitur ex denominatore propositæ proportionis bis posito, atq; ita multiplicato. Vt numerus denominãs proportionẽ duplicatã proportionis triplæ, producitur ex 3. denominatore triplæ proportionis, bis posito, in hũc modũ, 3. 3. ac sic multiplicato: Nam ter tria faciũt 9. denominatorẽ noncuplæ proportionis, quæ duplicata dicitur triplæ, vt hic cerni potest, 9. 3. 1. Item hic, 18. 6. 2. At verò denominator proportionis triplicatæ gignitur ex propositæ proportionis denominatore ter posito, & sic multiplicato. Vt in dato exẽplo, denominator triplicatæ proportionis, nẽpe 27. procreatur ex

3. ter

3.ter posito sic,3.3.3.atq; ita multiplicato,dicendo ter tria ter,&c. Ita proportio quadruplicata exorietur ex denominatore quater posito; Quincuplicata ex eodem quinquies posito,atq; ita multiplicato,&c. Itaque duplicatio,triplicatio,quadruplicatio,&c. proportionis cuiuslibet,de qua in hac definitione agitur,nihil aliud est,quàm multiplicatio denominatorum proportionum intermediarum inter se. Ex hac enim multiplicatione procreatur denominator proportionis,quam extremi termini inter se habent: quæ propterea illius proportionis,cuius denominator multiplicatus est,duplicata dicitur,vel triplicata,vel quadruplicata,&c. prout videlicet dnnominator bis positus est,vel ter,vel quater,&c. atque sic multiplicatus fuit,vt exposuimus. Verbi gratia, propositis hisce quatuor numeris continuè proportionalib. in proportione quadrupla,primus 192. ad quartũ 3.proportionem habet denominatam à 64. quæ proportio dicitur triplicata proportionis quadruplæ: quia denominator 64.proportionis extremorum 192. & 3. producitur ex denominatore 4.proportionis quadruplæ ter posito, ob tres proportiones quadruplas inter extremos interiectas, atq; ita multiplicato,dicendo quater quatuor sunt 16. & quater 16.sunt 64. Sic etiam inuersis iisdem numeris, vt sint continuè proportionales in proportione subquadrupla,primus 3. ad quartum 192,proportionem habet denominatam à $\frac{1}{64}$. quæ proportio dicitur triplicata proportionis subquadruplæ: quia denominator $\frac{1}{64}$.proportionis primi numeri 3.ad quartum 192. producitur ex denominatore $\frac{1}{4}$.proportionis subquadruplæ ter posito, & sic multiplicato, ob tres proportiones subquadruplas inter extremos interpositas. Nam ex $\frac{1}{4}$. in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{16}$. & ex $\frac{1}{16}$. in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{64}$. Nihil obstat ergo,quò minus proportio 3.ad 192. à $\frac{1}{64}$.denominata dici possit triplicata proportionis subquadruplæ 3. ad 12. quanquam illa minor sit, quàm hæc: quia videlicet denominator $\frac{1}{64}$. productus est ex denominatore $\frac{1}{4}$.ter posito,& sic multiplicato,vt diximus. Non tamen proportio 3.ad 192.à $\frac{1}{64}$.denominata dici potest triplo maior proportione subquadrupla 3.ad 12.quia denominator $\frac{1}{4}$. triplicatus nõ facit denominatorem $\frac{1}{64}$. sed $\frac{3}{4}$.atq; ita proportio subsesquitertia dicetur tripla proportionis subquadruplæ: sicut etiam non proportio à 64.denominata, sed proportio duodecupla, est proportionis quadruplæ tripla; propterea quòd denominator 4.triplicatus non producit denominatorem 64.sed 12. Porrò continuatis quotcunque numeris proportionalibus, siue maiores cum minoribus, siue minores cum maioribus conferantur,denominatorem proportionis primi ad vltimum gigni ex denominatoribus intermediarum proportionũ inter se multiplicatis,demonstrabimus ad defin.5.lib.6. Proportionem autem aliquam tum demum esse alterius duplam,vel triplam,&c.cùm illius denominator huius denominatoris duplus est,vel triplus,&c. ita vt proportio decupla sit dupla quintuplæ,& sextupla sit tripla duplæ,&c. ostendemus ad finem libri 9.tractatumq; est hoc argumentum copiosè à Rodulpho Volumnio in Disputatione de Proportione proportionum. Nunc satis sit, hoc ipsum communi hominum iudicio ex sensilibus rebus confirmare. Si igitur Agens aliquod ad Patiens proportionem habeat (verbi gratia) decuplam,ita vt Agens sit 10.& Patiẽs 1.quis tam mente captus erit,qui non statim intelligat, si idem Agens augeatur,vt fiat 20.Patiens autem maneat 1.Agens tunc duplo maiorem habere potentiam respectu eiusdem Patientis,quàm prius? Quare proportio vigecupla,cuius dènominator 20. duplus est denominatoris 10.dupla est proportionis decuplæ;nõ autem proportio centupla, vt auctores contrariæ sententiæ volunt: sed tamen hæc proportio centupla dicetur duplicata proportionis decuplæ propter multiplicationem denominatoris 10.in se,& propter duas proportiones decuplas,quæ inter numeros centuplam proportionem habentes interijciuntur,vt hic apparet,100.10.1. Sic etiam si è contrario, Agens aliquod ad Patiens habeat proportionem,verbi gratia,subdecuplam,ita vt Agens sit 1.& Patiens 10.quis tam hebes fuerit,ac rudis,qui non intelligat, Agens, quod sit 2.duplo esse potentius respectu eiusdem Patientis 10.quàm Agens 1.? Cùm ergo Agens 2.ad Patiens 10.habeat proportionem subquintuplam, cuius denominator $\frac{1}{5}$. vel $\frac{2}{10}$. conflatur ex denominatore $\frac{1}{10}$.bis sumpto, erit profectò proportio subquintupla proportionis subdecuplæ dupla; non autem illa, quæ subcentupla est, vt prædicti auctores volunt, cùm hæc longè minor sit,quàm subdecupla. Dicetur tamen proportio subcentupla proportionis subdecuplæ duplicata, propter causam sæpius explicatam, vt hic patet, 1. 10. 100.

| Denominatores. | 4 | 4 | 4 | |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Num.propor. | 192 | 48 | 12 | 3 |

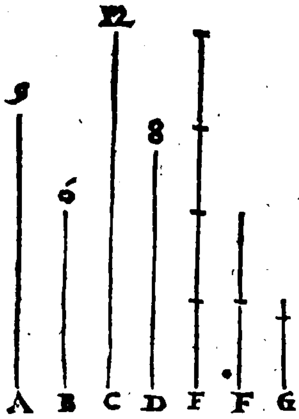
| Denominatores. | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Num.propor. | 3 | 12 | 48 | 192 |

Ex his, quæ diximus, non obscurè colligi potest, proportionem duarum quantitatum, quibus nullum interponitur medium, sapere naturam quodammodo lineæ, cùm ex nulla alia proportione producatur: Proportionem verò, cuius quantitates intercipiunt vnicum medium in continua proportionalitate habere conditionem superficiei quadratæ, quoniam gignitur ex duabus proportionibus æqualibus; quemadmodum & quadratum ex duabus lineis æqualibus conficitur. Denique proportionem, cuius quantitatibus duo media in continua proportionalitate interijciuntur, obtinere naturam solidi, atq; adeò cubi, cùm oriatur ex tribus æqualibus proportionibus, quemadmodum etiã cubus ex tribus lineis æqualibus consurgit. Verùm de his plura inuenies apud Arithmeticos, qui Algebræ regulam exposuerunt.

## XI.

HOMOLOGAE, seu similes ratione magnitudines, dicuntur antecedẽtes quidem antecedentibus, consequentes verò consequentibus.

*DEFINIVIT suprà proportionalitatem, proportionum esse similitudinem. Docet iam, non solùm in proportionalitate quauis proportiones dici similes; Verùm etiã terminos ipsos, seu quantitates, similes dici, homologásve; dicẽs, antecedentes magnitudines appellari homologas, seu similes proportione inter se, nec nõ consequẽtes inter se; vt intelligeremus in quamplurimis demonstrationibus, quænam latera figurarum inter se comparata, antecedentia debeãt esse proportionum, & quænam consequentia, vt in 6. lib. perspicuum fiet. Si igitur est proportio A, ad B, quæ C, ad D; dicetur quantitas A, similis quantitati C; & B, similis ipsi D. Propter similitudinem enim proportionum, necesse est, vtramq; magnitudinem antecedentẽ vel æqualem esse vtrique consequenti, vel eodem modò maiorem, aut minorem. Aliàs nõ haberet vtraq; antecedens ad vtramque consequentem proportionem eandem. Exemplum habes in magnitudinibus propositis, in quibus antecedentes maiores sunt eodem modo consequentibus, vtpote dimidio maiores. Aliud exemplum vides in magnitudinibus E, F, G, cõtinuè proportionalibus, vbi tam E, & F, homologa sunt, quàm F, & G, vt constat. Atq; hanc ob causam Euclides in defin. 6. & 8. iussit accipi æquè multiplicia prima & tertiæ magnitudinum, hoc est, antecedentium. Item alia æquè multiplicia secundæ, & quartæ magnitudinum, nimirum cõsequẽtium. Hæ enim similes sunt in magnitudinibus proportionalibus, vt ex hac definitione constat: in magnitudinibus verò non proportionalibus dissimiles.*

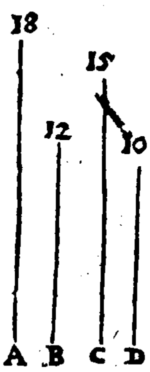



*ORONTIVS, & nonnulli alij interpretes, longè aliter definitionem hanc exponunt. Putant enim Euclidem docere, in magnitudinibus proportionalibus variè inter se conferri posse & antecedentes magnitudines, & consequentes; veluti in sequentibus definitionibus patebit. Verùm si verba definitionis diligentius ponderentur, & vsus eiusdem in 6. lib. consideretur, nostram expositionem huic anteferendam esse, nemo dubitabit.*

## XII.

ALTERNA ratio, est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

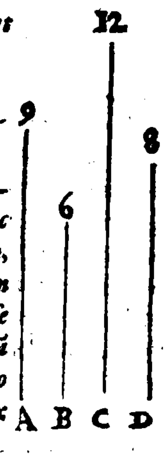
*EXPLICAT hic quosdam modos argumẽtandi in proportionibus, quorũ frequentissimus est vsus apud Geometras. Hi autem sunt numero sex: Primus dicitur proportio alterna, siue permutata: Secundus, inuersa, seu proportio è contrario: Tertius, compositio rationis, seu coniuncta proportionalitas: Quartus, diuisio rationis, vel disiuncta proportionalitas. Quintus, conuersio rationis, siue euersa proportionalitas: Sextus deniq; vocatur proportio ex æqualitate, seu æqua proportio. Alterna igitur, seu permutata proportio, inquit, est, cùm propositis quatuor magnitudinibus proportionalibus, infertur eandẽ esse proportionẽ antecedentis prioris proportionis ad antecedentẽ posterioris, quam habet consequẽs illius ad consequentẽ huius. Vt si ponamus proportionẽ A, ad B, quã C, ad D, & propterea concludamus, eandem esse proportionẽ A, ad C, quæ est B, ad D, dicemur argumẽtari à permutata proportione. Græci scriptores in hac argumentatione vtuntur hoc ferè modo loquendi: Vt est A, ad B, ita C, ad D; Igitur permutando, seu vicissim, erit quoq; A, ad C, vt B, ad D. Firmã autem esse huiusmodi illationem, demonstrabitur propos. 16. lib. huius. Cæterùm in hoc modo argumentandi, necesse est omnes quatuor magnitudines esse eiusdem generis, vt inter binas, vt vt assumptas proportio esse possit. Non enim rectè infertur. Vt linea A, ad lineam B, ita numerus C, ad numerum D; ergo permutando, vt linea A, ad numerum C, ita linea B, ad numerum D; cùm nulla sit proportio lineæ ad numerum, aut contrà, vt perspicuum est ex defin. 5. In alijs autem modis argumentandi, qui sequuntur, possunt esse priores magnitudines in vno genere magnitudinis; & posteriores in alio genere magnitudinis, vt ex demonstrationibus huius lib. 5. constabit.*




## XIII.

INVERSA ratio, est sumptio consequentis, ceu antecedentis, ad antecedentem, velut ad consequentem.

*VT si ex eo, quod est A, ad B, vt C, ad D, inferamus, ita esse B, ad A, vt D, ad C, hoc est, consequentes ad antecedentes referamus; dicemur argumentari ab inuersa proportione. In hac argumentatione sic ferè loquuntur auctores: Vt est A, ad B, ita C, ad D; Igitur conuertendo, vel è contrario, erit quoque B, ad A, vt D, ad C. Quem quidem modum argumentandi certum esse, ostendetur in corollario propos. 4. huius lib. Porrò duæ priores magnitudines possunt esse vnius generis, & posteriores alterius. Rectè namq; licebit inferre; vt se habet linea A, ad lineã B, ita se habet triangulum, seu numerus C, ad triangulum, seu numerum D. Igitur inuertendo vt linea B, ad lineam A, ita triangulum, seu numerus D, ad triangulum, seu numerum C, vt ex corollario propos. 4. constabit.*

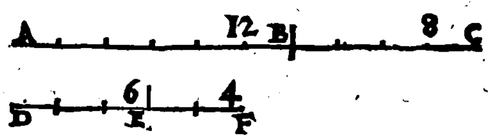



COMPOSI-

## XIIII.

COMPOSITIO rationis, est sumptio antecedentis cũ consequente, ceu vnius ad ipsam consequentem.

*SIT proportio A B, ad B C, quæ D E, ad E F; Si igitur ex hoc colligatur, eam quoque esse proportionem totius A C, nempe antecedentis cum consequente, ad B C, consequentem, quam habet tota D F, antecedens nimirum cum consequente, ad E F, consequẽtem; dicetur huiuscemodi argumentatio compositio rationis, eò quod ex antecedente & consequẽte componatur aliud nouum antecedens. Hunc autẽ modum dicendi apud Græcos scriptores reperies in hac argumentatione: Vt A B, ad B C, ita D E, ad E F; componendo ergo erit & A C, ad B C, vt D F, ad E F. Demonstrabitur hic modus argumentandi hoc lib. propos. 18.*



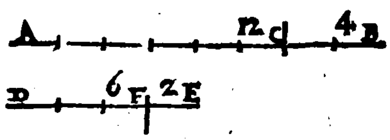

*HVIC modo argumentandi per compositionem rationis addi possunt alij duo: Primus dici potest, Compositio rationis conuersa; quando nimirum sumitur antecedens, & consequens, veluti vna, quæ cum antecedente conferatur. Vt si est, vt A B, ad B C, ita D E, ad E F, inferimusq́; Ergo vt A C, ex antecedente & consequente conflata, ad antecedentem A B, ita est D F, ex antecedente & consequente composita, ad antecedentem D E. Quam argumentationem esse validam, demonstrabimus ad propos. 18. huius lib. In qua quidem hoc modo dicendi vti poterimus. Ergo per compositionem rationis conuersam.*

*ALTER modus dici potest, Compositio rationis contraria: quando nimirum refertur eadem magnitudo antecedens ad antecedentem, & consequentem, ceu ad vnam. Vt si est, vt A B, ad B C, ita D E, ad E F, inferimusq́; per compositionem rationis contrariam. Igitur erit vt A B, antecedens ad totam A C, ex antecedente, & consequente compositam, ita D E, antecedens ad D F, ex antecedente, & consequente compositam. Atque hanc argumentandi formulam valere, ad propos. 18. huius lib. ostendemus.*

## XV.

DIVISIO rationis, est sumptio excessus, quo consequẽtem superat antecedens, ad ipsam consequentem.

*VT si dicatur, quæ proportio est totius A B, ad C B, ea est totius D E, ad F E; Igitur erit & A C, excessus, quo antecedens consequentem superat, ad C B, consequẽtem, vt D F, excessus, quo consequentem excedit antecedens, ad F E, consequentem. In diuisione autem hac rationis ita loquuntur auctores: ergo diuidendo, &c. Hæc porrò illatio ostendetur propos. 17. huius lib.*




*POSSVNT etiam huic argumentandi modo adiungi alij duo. Primum Diuisionem rationis conuersam dicere possumus: quando nimirum consequens ad excessum, quo consequentem superat antecedens, refertur. Vt si est, vt A B, ad C B, ita D E, ad F E, concludimusq́; per diuisionẽ rationis conuersam. Ergo erit, vt C B, consequens ad A C, excessum, quo antecedens consequentem superat, ita F E, consequens ad D F, excessum, quo antecedens superat consequentem. Valere autem hanc argumentationem, ostendemus ad 17. propos. huius lib.*

*PERSPICVVM autem est, vt vtraque harum argumentationum per Diuisionem rationis locum habeat; nimirum & illa Euclidis, & nostra, antecedentem debere esse maiorem consequente. Aliàs Diuisio fieri non posset.*

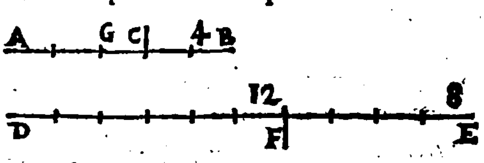
*ALTER modus appellari potest Diuisio rationis contraria: quando videlicet confertur antecedens cum excessu, quo consequens antecedentem superat. Vt cùm dicimus: Ita se habet A C, ad A B, vt D F, ad D E. Igitur erit quoq; per diuisionem rationis contrariam vt A C, antecedens ad C B, excessum, quo consequens antecedentem superat, ita D F, antecedens ad F E, excessum, quo antecedentem superat consequens. Qui modus argumentandi demonstrabitur etiam à nobis ad propos. 17. huius libri.*

*PORRO manifestum est, in hac diuisione rationis contraria consequentem debere esse maiorem antecedente, vt sumi possit excessus, quo consequens antecedentem superat.*

## XVI.

CONVERSIO rationis, est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsam consequentem.

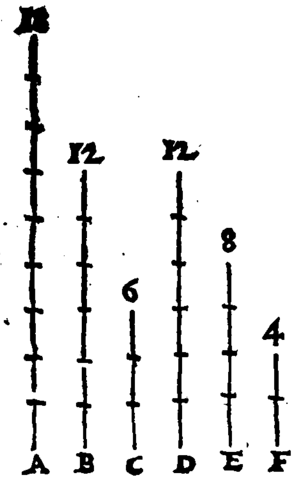
*QVOD si colligamus hoc modo: Sicut est tota magnitudo ad A B, ad C B, ita tota D E, ad F E: Igitur ita etiam erit eadem A B, ad A C, excessum, quo consequentem superat antecedens, vt D E, ad D F; Dicemur per conuersionem rationis argumentari. Vnde sic ferè loquuntur scriptores: Igitur per conuersionem rationis, &c. Confirmabitur autem hic argumentandi modus in corollario propos. 19. huius libri.*



*Liqvido etiam constat, in hoc modo argumentandi per conuersionem rationis antecedentem debere consequentem superare, vt excessus, quo antecedens consequentem superat, sumi possit.*

### XVII.

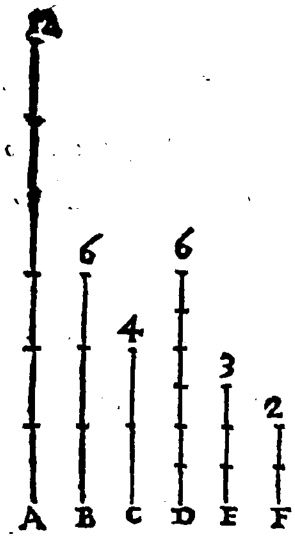
Ex æqualitate ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ sumantur, & in eadem ratione: cùm vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam, sic & in secundis magnitudinibus prima ad vltimam sese habuerit.




Vel aliter. Sumptio extremorum, per subductionem mediorum.

*Sint plures magnitudines duabus A, B, C, & totidem D, E, F, sintq́; binæ ac binæ in eadem proportione, hoc est, A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Si igitur inferatur, propterea eam esse proportionē A, ad C, primæ ad vltimam in primis magnitudinibus, quæ est D, ad F, primæ magnitudinis ad vltimam in secundis magnitudinibus; dicetur huiusmodi argumentandi formula desumpta ex æquo, siue ex æqualitate. in qua scilicet extrema magnitudines, subductis medijs, colliguntur habere vnā, eandemq́; inter sese proportionem, vt in altera definitione exprimitur. Quoniam verò duobus modis ex æqualitate licet argumentari in proportionibus, vno quidem, quando sumimus binas ac binas magnitudines in eadem proportione, ordinatè procedendo, altero verò, cùm ordo inuertitur; explicat Euclides duabus sequentibus definitionibus, quid sit Ordinata proportio, & quid proportio Perturbata.*

### XVIII.

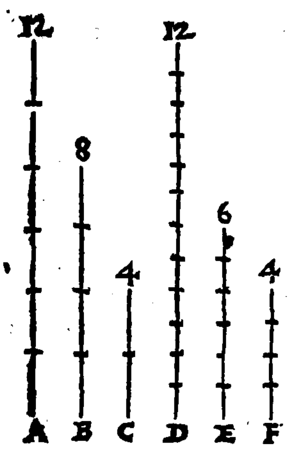



Ordinata proportio est, cùm fuerit, quemadmodum antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem; fuerit etiam, vt consequens ad aliud quidpiam, ita consequens ad aliud quidpiam.

*Vt quando fuerit A, ad B, vt D, ad E; Rursus vt B, consequens ad aliud quidpiam, vt ad C, ita E, consequens ad F, aliud quidpiam; dicetur talis proportio, Ordinata: quia idem ordo tam in primis tribus magnitudinibus, quàm in secundis seruatur; cùm vtrobique conferatur primùm prima cum secunda, deinde secunda cum tertia. Quando ergo in modo argumentandi ex æqualitate seruatur Ordinata proportio, demonstratur propos. 22. huius lib. eam argumentationem esse bonam.*

### XIX.

Pertvrbata autem proportio est, cùm tribus positis magnitudinibus, & aliis, quæ sint his multitudine pares, vt in primis quidem magnitudinibus se habet antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem. Vt autem in primis magnitudinibus consequens ad aliud quidpiam, sic in secundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

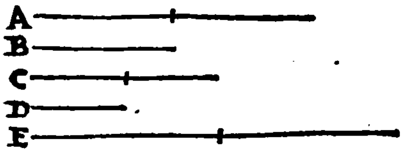



*Si autem sit, quemadmodum A, ad B, ita E, ad F; Deinde vt in primis magnitudinibus B, consequens ad C, aliud quidpiam, ita in secundis magnitudinibus aliud quidpiam, D, ad E, antecedentem magnitudinem; nuncupabitur huiuscemodi proportio, Perturbata: quòd non seruetur idem ordo in proportionibus magnitudinum: quippe cùm in primis magnitudinibus conferatur prima cum secunda, at in secundis secunda cum tertia; deinde in primis secunda cum tertia, at in secundis prima cum secunda. Quando igitur in modo argumentandi ex æqualitate seruatur Perturbata proportio, demonstratur, eam argumētationem esse bonam, propositione 23. huius libri. Porrò tam perturbata proportio, quàm ordinata, semper infert ex æqualitate eandem extremorum proportionem, etiamsi plures magnitudines ponantur, quàm tres, vt ex propos. 22. & 23. huius libri perspicuum fiet.*

*Vtvntvr Euclidis interpretes hoc libro, & in alijs, vbi de proportionibus magnitudinum agitur, axiomate quodam: quod vt hic subijceremus, nō inutile fore iudicauimus. Illud autem eiusmodi est:*

Qvam

QVAM proportionem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habebit quæuis magnitudo proposita ad aliquam aliam; & eandem habebit quæpiam alia magnitudo ad quamuis magnitudinem propositam.

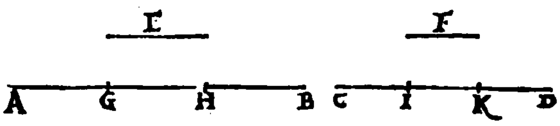



*VT, quā proportionem habet A, ad B, eandem habebit magnitudo proposita C, ad aliquam aliam, nempe ad D. Item eandem habebit quapiam alia E, ad propositam C. Quamuis enim ignoremus interdum, quænam sit quarta illa magnitudo, dubitandum tamen non est, eam esse posse in rerum naturā, cùm id contradictionem non implicet, vt Philosophi loquuntur, neq; absurdi aliquid ex eo consequatur.*

## THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

SI sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum, æquè multiplices; quàm multiplex est vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

SINT quotcunque magnitudines A B, C D, totidem magnitudinum E, F, æquè multiplices. Dico magnitudines A B, C D, simul, tam esse multiplices magnitudinū E, F, simul, quàm est multiplex A B, ipsius E, vel C D, ipsius F. Cùm enim A B, C D, sint æquè multiplices ipsarum E, & F, si A B, diuidatur in magnitudines A G, G H, H B, ipsi E, æquales, & C D, quoque in magnitudines C I, I K, K D, ipsi F, æquales; (Diuidi autem poterit quælibet in partes omnino æquales, cùm A B, C D, sint ipsarum E, F, æquè multiplices, atque ideò toties E, in A B, perfectè contineatur, quoties F, in C D, vt ex iis, quæ in defin. 2. huius libri scripsimus, constat.) erunt magnitudines A G, G H, H B, tot numero, quot sunt magnitudines C I, I K, K D. Quoniam verò A G, & E, æquales inter se sunt, si ipsis addantur æquales C I, & F, [a] erunt A G, C I, simul æquales ipsis E, & F, simul. Eodem modo erunt G H, & I K, simul, æquales ipsis E, & F, simul; Necnon H B, & K D, eisdem E, & F. Quoties igitur E, in A B, vel F, in C D, continetur, toties & E, F, simul, in A B, C D, simul comprehēduntur: Ideoque, quàm multiplex est A B, ipsius E, tam sunt multiplices A B, C D, simul ipsarum E, & F, simul, vt constat ex iis, quæ in definitione 2. huius libri scripsimus. Quare si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinū, &c. Quod erat demonstrandum. *a 2. pron.*

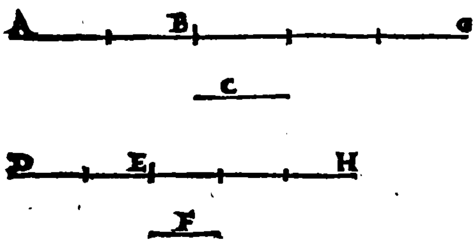



### SCHOLIVM.

*HOC idem demonstrabitur vniuersè propos. 12. in omni genere proportionis, tam rationalis, quàm irrationalis. Necessarium autem fuit, idipsum prius hoc loco in proportione multiplici demonstrare: quia ex eo aliæ propositiones demonstrandæ sunt, antequam propositio 12. possit demonstrari.*

## THEOR. 2. PROPOS. 2. 2.

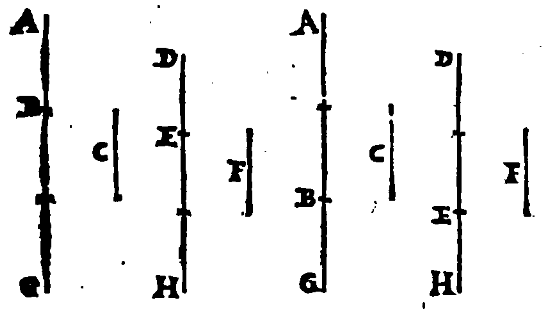
SI prima secundæ æquè fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta secundæ æquè multiplex, atque sexta quartæ; erit & composita prima cum quinta, secundæ æquè multiplex, atque tertia cum sexta, quartæ.




SIT magnitudo prima A B, tam multiplex secundæ C, quàm est multiplex D E, tertia, quartæ F; Rursus tam sit multiplex B G, quinta ipsius C, secundæ, quàm multiplex est E H, sexta ipsius F, quartæ. Dico A B, primam cum B G, quinta, compositam, tam multiplicem esse secundæ C, quàm multiplex est D E, tertia composita cum sexta E H, ipsius F, quartæ. Cùm enim A B, D E, sint æquè multiplices ipsarum C, F; erunt in A B, tot magnitudines ipsi C, æquales, quot sunt in D E, æquales ipsi F. Eadem ratione erunt & in B G, tot æquales ipsi C, quot sunt in E H, æquales ipsi F. Si igitur æqualibus multitudinibus A B, D E, addantur æquales multitudines B G, E H; [b] erunt totæ multitudines A G, D H, æquales. Quare toties comprehenditur C, in A G, quoties F, in D H; Ideoque tam multiplex est A B, (prima composita cum quinta) ipsius C, secundæ, quàm multiplex est D H, (tertia composita cum sexta) ipsius F, quartæ. Si prima itaque secundæ fuerit multiplex, &c. Quod erat ostendendum. *b 2. pron.*

### SCHOLIVM.

*QVOD si prima magnitudo, & tertia, æquales fuerint secundæ, & quartæ; Quinta verò & sexta, æquè*

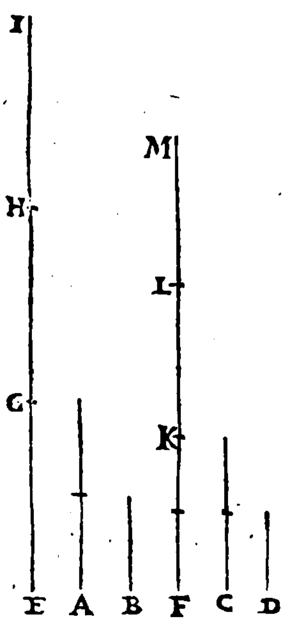



*multiplices secundæ, & quartæ. Vel prima, & tertia, æquè multiplices fuerint secundæ & quartæ; At quinta & sexta, æquales secundæ, & quartæ: Erit eadem ratione tota A G, (prima & quinta) tam multiplex secundæ C, quàm multiplex est tota D H, (tertia ac sexta) ipsius F, quartæ. Semper enim A G, multitudo magnitudinum æqualium ipsi C, ostendetur æqualis esse ipsi D H, multitudini magnitudinum ipsi F, æqualium, vt perspicuũ est in appositis figuris. Si verò tam prima & tertia, quàm quinta, & sexta æquales ponantur secundæ, & quartæ, luce clarius est, primã & quintam simul, atque tertiam & sextam simul, æquè multiplices esse, nimirum duplices, secundæ & quartæ magnitudinum.*

*Hoc quoque ab Euclide concludetur in omni genere proportionis vniuersè propos. 24. sed operæ pretium fuit, idipsum prius in proportione multiplici demonstrare, vt ea, quæ sequuntur, demonstrari possint.*

## 3. THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI sit prima secundæ æquemultiplex, atque tertia quartæ; sumantur autem æquemultiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo, sumptarum vtraque vtriusque æquemultiplex; altera quidem secundæ, altera autem quartæ.




SIT prima magnitudo A, tam multiplex secundæ B, quàm multiplex est C, tertia quartæ D; sumanturque E, F, æquemultiplices primæ & tertiæ A, & C. Dico ex æquo tam multiplicem esse E, ipsius B, secundæ, quàm est F, ipsius D, quartæ. Nam cùm E, & F, sint æquemultiplices ipsarum A, & C; si distribuantur E, & F, in magnitudines ipsis A, & C, æquales, vt in E G, G H, H I, & F K, K L, L M; erunt tot partes in E, æquales ipsi A, quot sunt in F, æquales ipsi C. Quoniam verò E G, F K, æquales sunt ipsis A, & C; sunt autem A, & C, æquemultiplices ipsarum B, & D, ex hypothesi; Erunt & E G, F K, earundem B, & D, æquemultiplices. Pari ratione erunt G H, K L; Item H I, L M, æquemultiplices earundẽ B, & D. Quoniam igitur E G, prima magnitudo, tam est multiplex secundæ B, quàm est multiplex F K, tertia quartæ D. Item G H, quinta tam multiplex est eiusdem secundæ B, quàm multiplex est K L, sexta eiusdem quartę D, [a] Erit & E H, composita ex prima & quinta, tam multiplex secundæ B, quàm est multiplex F L, composita ex tertia & sexta, quartæ D. Rursus cùm sit E H, prima tam multiplex secundæ B, quàm multiplex est F L, tertia quartæ D, vt proximè demonstratum est; sit autem & H I, quinta, tam multiplex secundæ B, quàm est L M, sexta multiplex quartæ D; [b] Erit & E I, composita ex prima & quinta, tam multiplex secundæ B, quàm est F M, composita ex tertia ac sexta, multiplex quartæ D. Eademque est ratio, si plures fuerint partes in E, & F. Si sit ergo prima secundæ æquemultiplex, atque tertia quartæ, &c. Quod ostendendum erat.

a 2. quinti.

b 2. quinti.

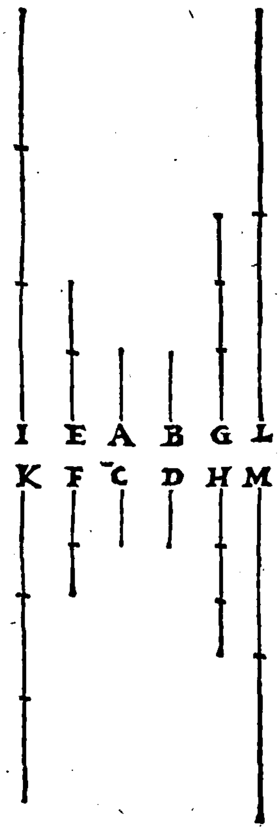
*SCHOLIVM.*

*OSTENDETVR hoc theorema, propositione 22. non solùm in magnitudinibus æquemultiplicibus, sed etiam in omnibus, quæ bina sumptæ eandem habent proportionem, siue rationalem, siue irrationalem: sed necessarium fuit, ipsum prius hic in proportione multiplici demonstrare, vt insequens propositione 4. demonstrari possit.*

## 4. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æquemultiplices primæ & tertiæ, ad æquemultiplices secundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si, prout inter se respondent, ita sumptæ fuerint.

SIT proportio A, ad B, quæ C, ad D, sumanturque primæ A, & tertiæ C, æquemultiplices E, & F. Item, secundæ B, & quartæ D, æquemultiplices G, & H, iuxta quamuis multiplicationem: siue E, F, ita multiplices sint ipsarum A, C, sicut G, H, ipsarum B, D, siue non. His positis, constat ex definitione 6. huius lib. si E, deficit à G, etiam F, deficere ab H. Et si E, æqualis est ipsi G, etiã F, æqualem esse ipsi H. Et denique si E, excedit G, etiam F, excedere H. Alioquin non esset, per defin. 6. eadem




eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, si earum æquemultiplicia non semper ita se haberent. Dico iam, multiplicia primæ ac tertiæ, non solùm vnà deficere à multiplicibus secundæ ac quartæ, aut vnà æqualia esse, aut vnà excedere, vt diximus: sed eandem quoque inter se proportionem habere, nimirum ita esse E, multiplicem primæ A, ad G, multiplicem secundæ B, vt F, multiplicem tertiæ C, ad H, multiplicem quartæ D. Hoc est, si rursus E, statuatur prima magnitudo; G, secunda; F, tertia; & H, quarta: sumanturque ipsarum E, F, æquemultiplicia qualiacunque; Item ipsarum G, H, quæcunque etiam æquemultiplicia; Multiplicia ipsarum E, F, à multiplicibus ipsarum G, H, vel vnà deficere, vel vnà æqualia esse, vel vnà excedere, vt vult defin. 6. Idem namq; est, quatuor magnitudines eandem habere proportionem, & earum æquemultiplicia sumpta, vt diximus, vel vnà deficere, vel vnà æqualia esse, vel vnà excedere. Capiantur enim rursus I, K, ipsarum E, F, æquemultiplices; Item L, M, æquemultiplices ipsarum G, H. Quoniam igitur tam multiplex est E, prima ipsius A, secundæ, quàm F, tertia ipsius C, quartæ; sumptæ sunt autem & I, K, æquemultiplices ipsarum E, F, primæ ac tertiæ: [a] Erunt quoque ex æquo I, K, æquemultiplices ipsarum A, C, secundæ & quartæ. Eadem ratione erunt L, M, ipsarum B, D, æquemultiplices. Et quia ponitur proportio A, primæ ad B, secundam, quæ C, tertiæ ad D, quartam; ostensæque sunt I, K, æquemultiplices primæ & tertiæ, A, C; Item L, M, æquemultiplices secundæ & quartæ, B, D; [b] fit vt si I, multiplex primæ deficit ab L, multiplici secundæ, etiam K, multiplex tertiæ necessariò deficiat ab M, multiplici quartæ: & si I, æqualis est ipsi L, etiam K, ipsi M, sit necessariò æqualis: & denique si I, excedit ipsam L, etiam K, excedat necessariò ipsam M: Idémque ostendetur in quibuscunque æquemultiplicibus magnitudinum E, & F, nec non magnitudinum G, & H: quia semper hæc æquemultiplicia, quæcunque sint, [c] æquemultiplicia quoque erunt magnitudinum A, C, & B, D. Itaque cùm I, & K, sint æquemultiplices primæ E, & tertiæ F; Item L, & M, æquemultiplices secundæ G, & quartæ H; ostensumque sit, si I, multiplex primæ minor fuerit, quàm L, multiplex secundæ, multiplicem tertiæ K, minorem quoque esse, quàm M, multiplicem quartæ, &c. atque hoc contingere in quacunque multiplicatione: [d] Erit, vt E, prima ad G, secundam, ita F, tertia ad H, quartam. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

a 3. quinti.

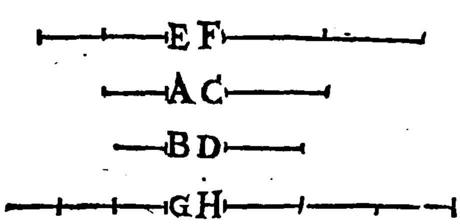
b 6. definit. quinti.

c 3. quinti.

d 6. definit. quinti.

## COROLLARIVM.

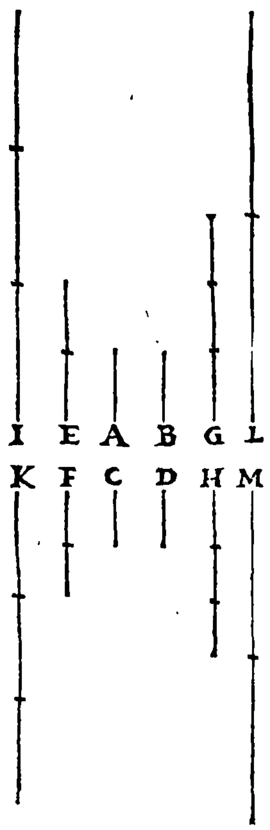
*HINC facilè demonstrabitur Inuersa ratio, quam Euclides definitione decimatertia explicauit; hoc est, si quatuor magnitudines fuerint proportionales, easdem & contrà, seu inuersa ratione, proportionales esse. Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico esse conuertendo, vt B, ad A, ita D, ad C. Sumptis enim E, F, æquemultiplicibus ipsarum A, C, primæ, ac tertiæ; Item G, H, æquemultiplicibus ipsarum B, D, secundæ & quartæ: quoniam ex eo, quòd A, prima ad B, secundam se habet, vt C, tertia ad D, quartam, [a] necessariò sequitur, si E, multiplex primæ minor fuerit quàm G, multiplex secundæ, vel æqualis, vel maior, etiam F, multiplicem tertiæ minorem esse, vel æqualem, vel maiorem, quàm H, multiplicem quartæ; Perspicuum est, si è contrario G, maior fuerit, quàm E, vel æqualis, vel minor, etiam H, maiorem fore, vel æqualem, vel minorem, quàm F, secundùm quamcunque multiplicationem sint sumpta hæc æquemultiplicia. Nam si vtraque E, F, minor est, quàm vtraque G, H, erit contrà vtraque G, H, maior, quàm vtraque E, F: & si vtraque E, F, æqualis est vtrique G, H, erit è contrario, vtraque G, H, vtrique E, F, quoque æqualis: Et denique si vtraq; E, F, maior est, quàm vtraque G, H, erit vice versa, vtraque G, H, minor, quàm vtraque E, F. Itaq; quoniam primæ B, & tertiæ D, sumpta sunt æquemultiplicia G, H; Item secundæ A, & quartæ C, æquemultiplicia E, F, ostensumq; est G, H, vel vnà excedere E, F, vel vnà æqualia esse, vel vnà deficere, secundùm quamcunq; multiplicationem ea multiplicia su-*




a 6. defin. quinti.

*mantur;* [a] *erit vt B, prima ad A, secundam, ita D, tertia ad C, quartam. Quod erat demonstrandum.*

a 6. definit. quinti.




## *SCHOLIVM.*

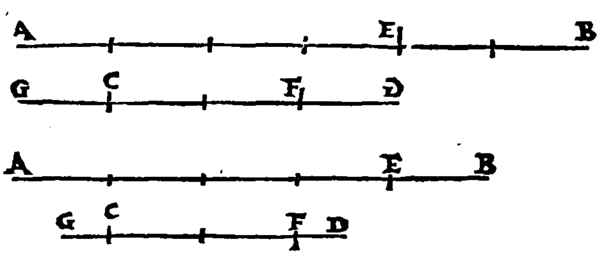
*HAEC propositio cum suo corollario vera est, siue duæ magnitudines A, B, sint eiusdem generis cum duabus magnitudinibus C, D, siue non, vt ex demonstratione liquet.*

*ORONTIVS quartũ hoc Theorema sic conatur demonstrare. Postquam ex 3. propos. huius lib. ostendit I, K, esse æquemultiplices magnitudinum A, C; Item L, M, esse æquemultiplices magnitudinum B, D, infert statim per conuersum 6. definitionis, iuxta suam expositionem, ita esse I, ad L, vt K, ad M. Quare per eandem definitionem, inquit, erit quoque E, ad G, vt F, ad H. Quæ quidem demonstratio admodum est vitiosa, tum quia secundùm hunc sensum demonstratur idem per idem, nimirum datis quatuor magnitudinibus proportionalibus, æquemultiplices primæ ac tertiæ ad æquemultiplices secundæ & quartæ eandem habere proportionem, ex eo, quòd ex 6. defin. vt ipse explicauit, æquemultiplices primæ ac tertiæ ad æquemultiplices secundæ & quartæ eandem habent proportionem; quod est absurdum: tum etiam, quia eodem modo statim à principio licuisset illi inferre, sic esse, per 6. defin. E, ad G, vt F, ad H, sine acceptione nouarum magnitudinum æquemultiplicium. Non enim est maior ratio in illis, quàm in his. Reÿcienda est ergo huiuscemodi demonstratio, vnà cum expositione 6. definitionis, vt suprà diximus. At iuxta nostram interpretationem eiusdem definitionis, constat solùm, si I, minor est, quàm L, vel æqualis, vel maior, etiam K, minorẽ esse, vel æqualem, vel maiorem, quàm M; quemadmodum & idem constat in æquemultiplicibus E, F, G, H, & in quibuscunque alÿs, si sumantur, prout inter se respondent. Vnde ex 6. defin. rectè colligitur, ita esse E, primam ad G, secundam, vt est F, tertia ad H, quartam, quandoquidem illis 6. definitio conuenit.*

5.

# THEOR. 5. PROPOS. 5.

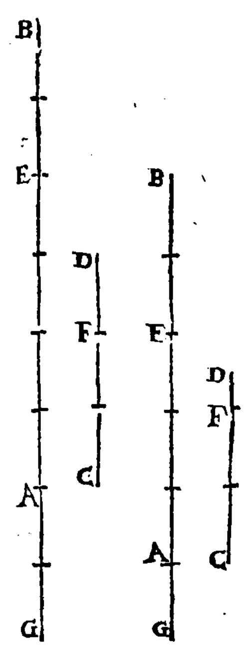
SI magnitudo magnitudinis æquè fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius.




ITA multiplex sit tota AB, totius CD, vt est multiplex AE, ablata ablatæ CF, siue AE, CF, ablatæ sint totis AB, CD, commensurabiles, vt in prima figura: siue incommensurabiles, vt in secunda figura. Itẽ siue AE, CF, compositæ sint ex eisdem partibus, ex quibus totæ AB, CD, componuntur, vt in priori figura: siue non ex eisdem, vt in posteriori figura. Dico reliquam EB, ita esse multiplicem reliquæ FD, vt est tota AB, totius CD. Ponatur enim EB, ita multiplex cuiuspiá magnitudinis, videlicet ipsius GC, vt est AE, multiplex ipsius CF, vel tota AB, totius CD. Quoniam igitur AE, EB, æque sunt multiplices ipsarum CF, GC; [a] erit tota AB, totius GF, ita multiplex, vt AE, ipsius CF, hoc est, omnes omnium, vt vna vnius: Sed tam multiplex etiam ponitur AB, ipsius CD, quàm est multiplex AE, ipsius CF. Igitur AB, tam est multiplex ipsius GF, quàm multiplex est ipsius CD; [b] atq; idcircò æquales sunt GF, CD. Ablata igitur communi CF, æquales erũt GC, FD. Tá multiplex igitur erit EB, ipsius FD, q̃ multiplex est ipsius GC. Sed ita multiplex posita fuit EB, ipsius GC, vt AE, ipsius CF, hoc est, vt tota AB, totius CD. Quare tá multiplex est reliqua EB, reliquæ FD, q̃ est tota AB, totius CD: quod est propositũ.

a 1. quinti.

b 6. pron.




ALITER. Sit ita multiplex tota AB, totius CD, vt ablata AE, ablatę CF. Dico reliquum EB, reliquæ FD, esse sic multiplicem, vt est tota totius. Posita enim GA, ita multiplici ipsius FD, vt est AE, ipsius CF, vel vt tota AB, totius CD: quoniam AE, GA, æquè multiplices sunt ipsarum

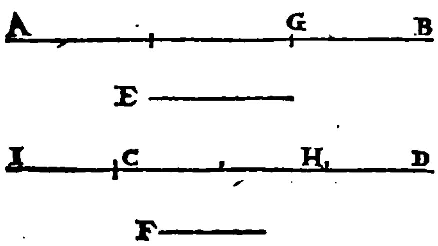
rum C F, F D; [a] erit tota G E, sic multiplex totius C D, vt A E, ipsius C F: Sed ita quoq; multiplex est A B, eiusdem C D, vt A E, ipsius C F, ex hypothesi. Æquemultiplices sunt igitur G E, A B, ipsius C D; [b] atque adeò inter se æquales. Quare dempta communi A E, æqualet erunt G A, E B: Ideoque æquemultiplices ipsius F D; cum G A, sit multiplex posita ipsius F D: Atqui ita est multiplex posita G A, ipsius F D, vt A B, ipsius C D. Igitur & E B, reliqua sic erit multiplex ipsius F D, reliquæ, vt A B, tota totius C D; quod est propositum. Si magnitudo itaque magnitudinis æquè fuerit multiplex, &c. Quod erat demonstrandum. a 1. quinti. b 6. pron.

*SCHOLIVM.*

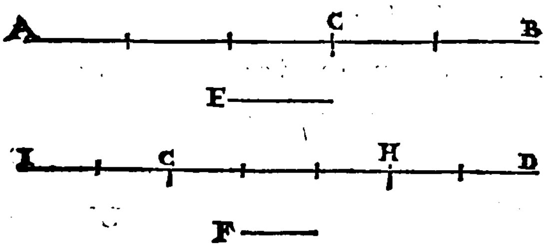
*VNIVERSE idipsum demonstrabitur propos. 19. in magnitudinibus cuiuscunque proportionis, & non tantùm multiplicis, vt hic factum est.*

## THEOR. 6. PROPOS. 6. 6.

SI duæ magnitudines duarum magnitudinum sint æquemultiplices, & detractæ quædam sint earundem æquemultiplices: & reliquæ eisdem aut æquales sunt, aut æquè ipsarum multiplices.




SINT magnitudines A B, C D, æquemultiplices ipsarum E, F; & detractæ A G, C H, earundẽ E, F, æquemultiplices. Dico reliquas G B, H D, aut esse æquales eisdem E, F, aut certè earundẽ æquemultiplices. Cùm enim A B, sit multiplex ipsius E, & ablata quoque A G, eiusdem E, multiplex; erit reliqua G B, vel æqualis ipsi, E, vel eius multiplex; aliâs inæqualis, vel nõ multiplex magnitudo, addita multiplici, componeret multiplicẽ. quod est absurdum. Sit igitur primũ G B, æqualis ipsi E. Dico etiam H D, ipsi F, esse æqualem. Ponatur enim C I, æqualis ipsi F. Et quia prima A G, tam est multiplex secundæ E, q̃ C H, tertia multiplex est quartæ F; & quinta G B, æqualis est secundæ E, sicut & C I, sexta æqualis est quartę F; [c] erit A B, prima cum quinta, ita multiplex secundæ E, vt H I, tertia cũ sexta multiplex est quartæ F: Atqui C D, ipsius F, erat quoq; tam multiplex q̃ A B, multiplex est ipsius E. Æquemultiplices igitur sunt H I, C D, ipsius F; [d] Ideoq; æquales inter se. Quare dempta C H, cõmuni, remanebunt C I, H D, æquales. Cùm igitur C I, posita sit æqualis ipsi F, erit quoq; H D, eidem F, æqualis. Quod est propositũ. c 2. quinti. d 6. pron.




SIT deinde G B, multiplex ipsius E. Dico ita quoq; esse multiplicem H D, ipsius F. Posita namque C I, ita multiplici ipsius F, vt est multiplex G B, ipsi E; [e] erit, vt prius, A B, ita multiplex ipsius E, vt H I, multiplex est ipsius F. [f] Quare iterum æquales erunt H I, C D; atque adeò dempta communi C H, & reliquæ C I, H D, æquales erunt: Sed C I, est ita multiplex ipsius F, vt G B, ipsius E, multiplex est, ex hypothesi. Igitur & H D, tam multiplex erit ipsius F, quàm G B, ipsius E, multiplex est. quod est propositum. Si duæ itaque magnitudines duarum magnitudinum sint æquemultiplices, &c. Quod ostendendum erat. e 2. quinti. f 6. pron.

*SCHOLIVM.*

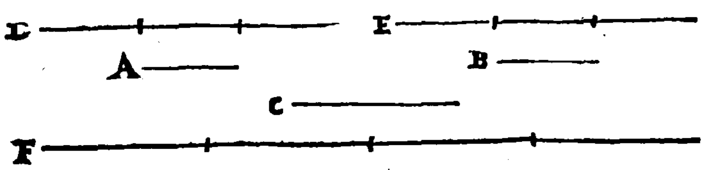
*HOC quoq; ostendemus vniuersè propos. 24. in omni genere proportionis.*

*BREVIVS totam propos. ita demonstrabimus. Quoniam A B, C D, sunt ipsarum E F, æquemultiplices; erũt in A B, tot magnitudines æquales ipsi E, quot sunt magnitudines in C D, æquales ipsi F. Rursus quia A G, C H, earundem E, F, æquemultiplices sunt; erũt quoq; in A G, tot magnitudines ipsi E, æquales, quot sunt magnitudines in C H, ipsi F, æquales. Si igitur ex æqualibus multitudinibus A B, C D, demantur multitudines æquales A G, C H; remanebunt multitudines G B, H D, æquales. Quare toties continebitur E, in G B, quoties F, continetur in H D: ac proinde si G B, æqualis sit ipsi E, erit quoq; H D, ipsi F, æqualis: Si autem G B, multiplex sit ipsius E; erit ita multiplex H D, ipsius F, vt G B, multiplex est ipsius E: quandoquidem toties E, in G B, continetur, quoties F, in H D, existit, vt ostensum est.*

## THEOR. 7. PROPOS. 7. 7.

AEQVALES ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales.

SINT duæ magnitudines A, B, æquales inter se, & tertia quæuis C. Dico A, & B, habere eandem proportionem ad C. Item C, vicissim ad A, & B, eandem quoq; proportionẽ habere. Sumantur D, E, æquemultiplices ipsarum æqualium A, B; [g] eruntq; D, E, æquales inter se. Capiatur rursus F, vtcunque multiplex ipsius C. Quoniam igitur D, E, æquales sunt, sit vt vtraque vel minor sit q̃ F, vel g 6. pron.

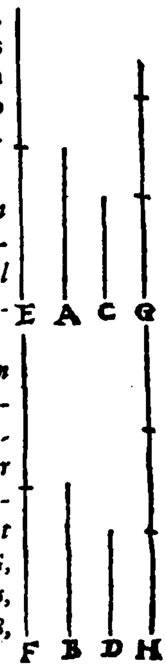



æqualis, vel maior, iuxta quamcunque multiplicationem ea multiplicia sumantur. Quare cùm D, E, æquemultiplices primæ A, & B, tertiæ, minores sint ipsa F, multiplice secundæ & quartæ C, (est enim C, instar duarum magnitudinum, &c.) vel æquales, vel maiores; [a] erit ea proportio primæ A, ad C, secundam, quæ tertiæ B, ad C, quartam.

*a 6. definit. quinti.*

EODEM pacto ostendemus F, vel minorem esse vtraque D, E, vel vtrique æqualem, vel maiorem. Igitur cùm F, multiplex primæ & tertiæ C, vnà deficiat à D, & E, æquemultiplicibus secundæ A, & quartæ B; vel vnà æqualis sit, vel maior; [b] Erit quoque ea proportio primæ C, ad secundam A, quæ tertiæ C, ad quartam B; quod est propositum. Posset breuius secunda hæc pars ostendi per coroll. 4. propos. ex inuersa ratione. Cùm enim ostensum iam sit, esse A, ad C, vt B, ad C; erit conuertẽdo C, ad A, vt C, ad B. Æquales ergo ad eandem, eandẽ habent rationẽ: Et eadem ad æquales. quod erat demonstrãdum.

*d 6. definit. quinti.*




*SCHOLIVM.*

*PERSPICVVM est, nihil posse in hac propos. colligi ex 6. defin. iuxta expositionẽ Campani ac Orontij. Neq; enim per demonstrationem constat, vtramq; multiplicem D, & E, eandem habere proportionẽ ad multiplicem F: sed solùm cùm illæ sint æquales, vtramque esse vel minorem, vel æqualem, vel maiorem multiplici F. Idemq; cernitur in omnibus ferè propositionibus, quæ per 6. defin. propositum colligunt: Vt meritò illa expositio reiecta sit à nobis.*

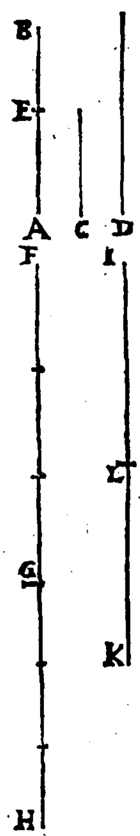
*EODEM ferè modo ostendemus, æquales magnitudines ad alias inter se æquales, eandem habere rationem, si loco multiplicis F, sumantur duæ æquemultiplices: quod Euclides ob facilitatem omisit: vtitur tamen eo nonnunquam in iis, quæ sequuntur, perinde ac si in hac propositione 7. esset demonstratum. Sint enim tam A, & B, inter se æquales, quàm C, & D, inter se. Dico esse A, ad C, vt B, ad D. Sumptis enim E, & F, æquemultiplicibus ipsarum A, & B, prima & tertia. Item G, & H, æquemultiplicibus ipsarum C, & D, secundæ & quartæ; [a] erunt tam E, & F, inter se æquales, quàm G, & H, inter se. Quare si E, multiplex primæ deficit à G, multiplice secundæ, etiam F, multiplex tertiæ, ab H, multiplice quartæ deficiet: & si æqualis, æqualis: & si superat, superabit. [b] Eadem ergo est proportio A, primæ ad C, secundam, quæ B, tertiæ ad D, quartam. Quod est propositum.*

a 6. pron.

b 6. defin. quinti.

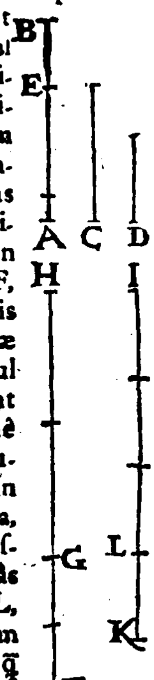
## 8. THEOR. 8. PROPOS. 8.

INAEQVALIVM magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quàm minor: Et eadem ad minorẽ, maiorem rationem habet, quàm ad maiorem.




SINT magnitudines inæquales, A B, maior, & C, minor; Tertia autem quælibet D. Dico proportionem A B, ad D, maiorem esse proportione C, ad D. At è conuerso, maiorem esse proportionem D, ad C, quàm D, ad A B. Intelligatur enim in A B, magnitudine maiore, magnitudo A E, æqualis minori C, vt sit reliqua E B. Vtraque deinde E B, A E, æqualiter multiplicetur, hac lege, vt G F, multiplex ipsius E B, maior quidem sit, quàm D; At H G, multiplex ipsius A E, non sit minor eadem D, sed vel maior, vel æqualis. In priori figura necesse fuit sumere G F, H G, triplas ipsarum E B, A E, quia dupla ipsius A E, esset minor, quàm D. Loco triplarum potuissent accipi quæcunque aliæ æquemultiplices maiores. In posteriori autem figura satis est, sumere ipsarum E B, A E, duplas G F, H G; quia vtraque G F, H G, maior est, q̃ D. Possent tamen pro duplis sumi quæcunque aliæ maiores æquemultiplices. Quoniam igitur duæ F G, G H, æquemultiplices sunt duarũ B E, E A; [a] erit & tota F H, ita multiplex totius A B, vt H G, ipsius A E, hoc est, ipsius C, cùm æquales sint positæ C, & A E. Capiatur quoq; ipsius D, multiplex I K, quæ proximè maior sit, quàm H G, nempe dupla, vt in priori figura. Quòd si dupla maior non fuerit, quàm H G, sumatur tripla, vel quadrupla, &c. In posteriori figura accepta est I K, ipsius D, quadrupla, quia tam dupla, quàm tripla minor est, quàm H G, at quadrupla iam maior est. Abscissa ergo L K, quæ æqualis sit ipsi D, non erit I L, maior, quàm H G, (aliàs I K, non esset multiplex ipsius D, proximè maior quàm H G: sed & I L, maior quoque esset q̃ H G. Quòd si I K, dupla sit ipsius D, perspicuum est, I L, non esse maiorem, quàm H G, cùm H G, posita sit non minor q̃ D, hoc est, quàm I L,) & idcircò H G, erit vel æqualis ipsi I L, vel maior.

*a 1. quinti.*




Et

Et quia F G, maior est posita, quàm D; L K, verò æqualis eidem D; erit quoque F G, maior quàm L K. Cùm ergo H G, non minor sit quàm I L, vt demonstratum est, sed vel æqualis, vel maior; erit tota F H, maior quàm I K Itaque cùm F H, H G, sint æquemultiplices primæ A B, & tertiæ C; atque I K, multiplex ipsius D, quæ instar est secundæ & quartæ: sit autem F H, multiplex primæ, maior quàm I K, multiplex secundæ; At H G, multiplex tertiæ non sit maior, quàm I K, multiplex quartæ, immò minor, ex hypothesi; (sumpta enim est I K, multiplex ipsius D, maior quàm H G,) [a] erit maior proportio A B, primæ ad D, secundam, quàm C, tertiæ ad D, quartam. *a 8. definit. quinti.*

QVONIAM verò è contrario I K, multiplex primæ D, (ponatur enim nunc D, prima ac tertia; At C, secunda, & A B, quarta) maior est quàm H G, multiplex secundæ C; At I K, multiplex tertiæ D, maior non est, quàm F H, multiplex quartæ A B, immò minor, cùm F H, maior sit, quàm I K, vt ostensum est; [b] erit maior proportio D, primæ ad C, secundam, quàm D, tertiæ ad A B, quartam: quod est propositū. Inæqualium igitur magnitudinū maior ad eandem, &c. Quod erat ostendendū. *b 8. definit. quinti.*

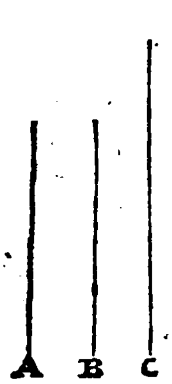
*SCHOLIVM.*

*RECTE autem animaduertit Petrus Nonius in sua Algebra de Proportione agens, per hanc propos. 8. probari non posse, angulum rectum maiorem habere proportionem ad quemuis alium angulum, quàm angulum semicirculi ad eundem illum angulum, quanquam rectus angulus maior sit angulo semicirculi: quia excessus anguli recti supra angulum semicirculi, qui est angulus contingentiæ, quantumuis multiplicatus superare nequit tertium illum angulum, quod tamen in huius propos. demonstratione requiritur. Nam F G, multiplex excessus E B, superare debet tertiam magnitudinem D, vt patuit. Neq; hoc mirum cuipiam videatur. Nam angulus rectus ad angulum semicirculi nō dicitur propriè habere proportionem, cum eum excedat angulo contactus, qui non eiusdem naturæ est cum vtroque angulo, quod ita multiplicari non possit, vt alterutrum illorum tandem excedat. Quemadmodum enim, si ad lineam vnius palmi addi posset vnū punctum, vt fieret linea vno puncto lineam vnius palmi excedens, non diceretur propriè linea illa composita maior, quàm linea vnius palmi, propterea quòd excessus est indiuisibilis, & alterius naturæ; Item quemadmodum, si ad figuram planam quamcumq; apponeretur linea vnius palmi, non diceretur hæc magnitudo ex diuersis magnitudinibus conflata ad figuram illam planam habere propriè proportionem maioris inæqualitatis: quòd excessus non sit eiusdem naturæ cum plana illa figura: Ita quoq; non habet angulus rectus propriè ad angulū semicirculi proportionem maioris inæqualitatis; quippe cum angulo semicirculi adiectus sit angulus contactus, vt efficiatur angulus rectus; atq; adeò rectus angulus angulum semicirculi excedat quantitate diuersæ naturæ, vt dictum est. Itaq; non solum eæ magnitudines proportionem propriè non habent, quarum alterutra multiplicata alteram superare nequit, vt ad defin. 5. huius lib. diximus: sed neq; eæ propriè dicetur habere proportionem, vt idem Petrus Nonius annotauit, quarum excessus diuersam ab eis naturam habet, cuiusmodi sunt angulus rectus, & angulus semicirculi. Adeo vt tunc solum propriè magnitudines dicantur habere proportionem inter se, quando & alterutra multiplicata alteram superare potest, & excessus earum multiplicatus superare quoq; potest vtramq;. Fateor rem hanc esse perobscuram, & quæ vix rectè intelligi possit: Verùm hoc prouenit ex indiuisibilitate anguli contactus per lineam rectam. Huius generis sunt alia nonnulla in rebus Geometricis, quæ verissima quidem sunt propter demonstrationem euidentem, sed alia ex parte talem inducunt difficultatem, vt ab ea non facilè intellectus se expediat. Verbi gratia, Verissimum est sphæram tangere planum in puncto, vt à Theodosio demonstratur propos. 3. lib. 1. Sed qua ratione fiat, vt hinc non sequatur, si globus continuè moueatur super planum, lineam rectam describi compositam ex punctis, nemo ad hunc vsq; diem sic explicauit, vt omni ex parte difficultas sit sublata.*

## THEOR. 9. PROPOS. 9.

9.

QVAE ad eandem, eandem habent rationem, æquales sunt inter se: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoque sunt inter se æquales.



A B C

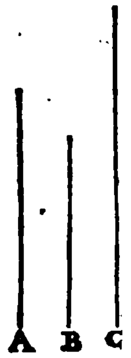
HABEANT primùm A, & B, eandem rationem ad C; Dico A, & B, esse inter se æquales. Sit enim, si fieri potest, altera, nempe A, maior, & B, minor. [c] Erit igitur maior proportio A, maioris ad C, quàm B, minoris ad eandem C; quod est contra hypothesin. Non ergo inæquales sunt A, & B, sed æquales. Habeat deinde C, eandem proportionem ad A, & B; Dico rursus A, & B, esse æquales. Nam si altera, nempe A, esset maior, & B, minor; [d] haberet C, ad B, minorem, maiorem proportionem, quàm ad A, maiorem: quod est contra hypothesin. Non igitur maior erit A, quàm B, sed æqualis. Quæ igitur ad eandem, eandem habent rationem, &c. Quod demonstrandum erat. *c 8. quinti. d 8. quinti.*

*SCHOLIVM.*

*CONVERTIT hæc propositio nona vtramque partem theorematis septimi, vt manifestum est.*

## 10. THEOR. 10. PROPOS. 10.

AD eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est: Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est.



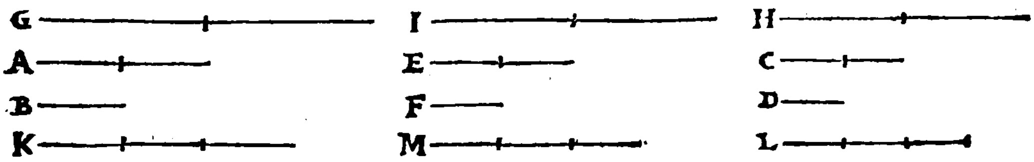
HABEAT primùm A, ad C, maiorem proportionem, quàm B, ad eandem C. Dico A, maiorem esse, quàm B. Si enim A, foret ipsi B, æqualis, [a] haberent A, & B, eandem
a 7. quinti. proportionem ad C: Si autem A, minor esset, quàm B, [b] haberet B, maior ad C, pro-
b 8. quinti. portionem maiorem, quàm A, minor ad eandem C; quod est cōtra hypothesin. Non est igitur A, æqualis vel minor quàm B, sed maior. Habeat secundò C, ad B, maiorem proportionem, quàm ad A. Dico B, minorem esse, quàm A. Non enim æqualis erit B, ipsi A; [c] alioqui haberet C, eandem proportionem ad A, & B; quod est contra hy-
c 7. quinti. pothesin. Neque verò B, maior erit, quàm A; [d] aliàs haberet C, ad minorem A, maio-
d 8. quinti. rem proportionem, quàm ad B, maiorem: quod magis est contra hypothesin. Minor igitur est B, quàm A; quod est propositum. Ad eandem igitur magnitudinē rationem habentium, &c. Quod erat demonstrandum.

*SCHOLIVM.*

*HAEC quoque propositio conuertit vtramque partem theorematis 8. vt perspicuum est.*

## 11. THEOR. 11. PROPOS. 11.

QVAE eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem.



SINT proportiones A, ad B; & C, ad D, eædem proportioni E, ad F. Dico & proportiones A, ad B, & C, ad D, easdem esse inter se secundùm defin. 6. hoc est, sumptis æquemultiplicibus ipsarum A, C: Item æquemultiplicibus ipsarum B, D; semper contingere, vt multiplices ipsarum A C, à multiplicibus ipsarum B, D, vel vnà deficiant, vel vnà æquales sint, vel vnà excedant. Sumantur enim ad omnes antecedētes A, C, E, æquemultiplices quæcunque G, H, I; & ad omnes consequentes B, D, F, aliæ quæcunque æquemultiplices K, L, M. Quoniam igitur ponitur esse A, prima ad B,
e 6. definit. quinti. secundam vt E, tertia ad F, quartam; [e] fit, vt si G, multiplex primæ deficit à K, multiplice secundæ, deficiat quoque I, multiplex tertiæ ab M, multiplice quartæ; Et si G, æqualis est ipsi K, vel maior,
f 6. definit. quinti. æqualis quoque sit I, ipsi M, vel maior: [f] Sed (vt eodem modo ostendetur) si I, minor est, quàm M, vel æqualis, vel maior, est quoque H, minor, quàm L, vel æqualis, vel maior: propterea quòd ponitur esse E, prima ad F, secundam, vt C, tertia ad D, quartam. Quare si G, multiplex primæ A, deficit à K, multiplice secundæ B, deficiet quoque H, multiplex tertiæ C, ab L, multiplice quartæ D; Et si G, æqualis est, vel maior quàm K, etiam H, æqualis erit, vel maior quàm L. Idemque ostende-
g 6. definit. quinti. tur accidere in quibuscunq; aliis æquemultiplicibus. [g] Quapropter erit A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam. Quæ igitur eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem. Quod erat ostendendum.

*SCHOLIVM.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| A, 3. | B, 2. | C, 6. | D, 4. |
| E, 9. | F, 6. | G. 12. | H, 8. |

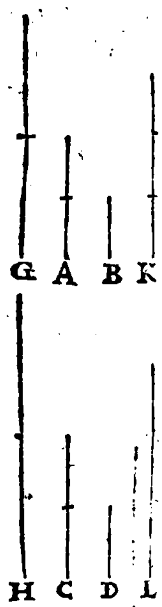
*EADEM ratione, Quæ eisdem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem. Vt si sit, vt A, ad B, ita C, ad D: sit autem E, ad F, vt A, ad B. & G, ad H, vt C, ad D: erit quoque E, ad F, vt G, ad H.*
a 11. quinti. *Quia enim proportiones E, ad F, & C, ad D, eædem sunt proportioni A, ad B; [a] erit vt E, ad F, ita C, ad*
b 11. quinti. *D. Rursus quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eædem sunt proportioni C, ad D. [b] erit quoque vt E, ad F, ita G, ad H.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A, 3. | B, 2. | C, 6. | D, 4. | E, 9. | F, 6. |
| G, 12. | H. 8. | I, 18. | K, 12. | L, 30. | M, 20. |

*RVRSVS, si sint proportiones A, ad B; C, ad D; & E, ad F, eædem inter se; sit autem vt A, ad B, ita G, ad H; & vt C, ad D, ita I, ad K; & vt E, ad F, ita L, ad M, erunt quoque proportiones G, ad H; I, ad K; & L, ad M, eædem inter se. Nam vt proximè in quatuor proportionibus ostensum est, vt G, ad H, ita est I, ad K; propterea quòd hæ proportiones similes sunt proportionibus A, ad B, & C, ad D. Eodem modo erit vt I, ad K, ita L, ad M; cū proportiones I, ad K, & L, ad M, eædem sint proportionibus C, ad D, & E, ad F, quæ æquales sunt. Item erit vt G, ad H, ita L, ad M: cùm hæ proportiones eædem sint proportionibus A, ad B, & E, ad F, quæ æquales ponuntur. Eadem ratio est de pluribus.*

THEOR.

## THEOR. 12. PROPOS. 12. 12.

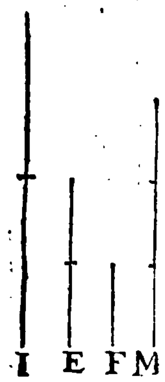


SI sint magnitudines quotcunque proportionales: quemadmodum se habuerit vna antecedentium ad vnam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

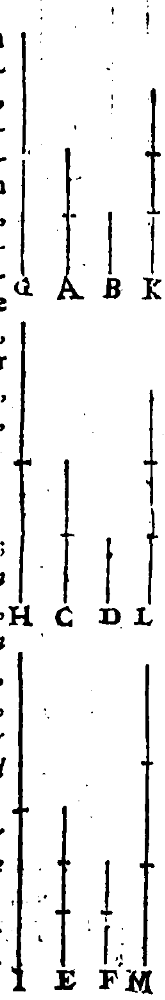
QVOD in propos. 1. de proportione multiplici demonstrauit, ostēdit hîc de omni genere proportionis etiam irrationalis. Sint ergo quotcunque magnitudines A, B; C, D; E, F, proportionales, hoc est, sit A, ad B, vt C, ad D, & E, ad F. Dico vt est vna antecedentium ad vnam consequentium, nimirum A, ad B, ita esse omnes antecedentes simul A, C, E, ad omnes consequentes simul B, D, F. Sumptis enim G, H, I, æquè multiplicibus antecedētium; & K, L, M, æquemultiplicibus consequētium, [a] erunt omnes G, H, I, simul omnium A, C, E, simul ita multiplices, vt vna vnius, nempe vt G, ipsius A; & omnes K, L, M, simul omnium B, D, F, simul ita multiplices, vt vna vnius, nimirum vt K, ipsius B. Quoniam verò ponitur esse A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam, & vt alia E, tertia ad aliam F, quartam; [b] fit vt si G, multiplex primæ deficit à K, multiplice secundæ, deficiat quoque H, multiplex tertiæ ab L, multiplice quartæ, & I, ab M; Et si G, æqualis est ipsi K, vel maior, æqualis quoque sit H, ipsi L, & I, ipsi M, vel maior: Ac proinde si G, minor est, vel æqualis, vel maior quàm K; & omnes G, H, I, simul omnibus K, L, M, simul minores sint, vel æquales, vel maiores. [c] Quocirca vt est A, prima ad B, secundam: ita erit A, C, E, tertia ad B, D, F, quartam. Si sint itaque magnitudines quotcunque proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

a 1. quinti.
b 6. definit. quinti.
c 6. definit. quinti.

## THEOR. 13. PROPOS. 13. 13.



SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia verò ad quartam maiorem rationem habuerit, quàm quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam maiorem rationem habebit, quàm quinta ad sextam.



SIT prima A, ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam: sit autem proportio C, tertiæ ad D, quartam maior, quàm E, quintæ ad F, sextam. Dico & proportionem A, primæ ad B, secundam esse maiorem, quàm E, quintæ ad F, sextam, secundùm definitionem 8. hoc est, sumptis æquemultiplicibus ipsarum A, E: Item æquemultiplicibus ipsarum B, F, cōtingere posse, vt multiplex ipsius A, excedat multiplicem ipsius B, at multiplex ipsius E, multiplicem ipsius F, non excedat. Sumptis enim G, H, I, æquemultiplicibus antecedentium; Et K, L, M, æquemultiplicibus consequentium, cùm sit A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam; [d] fit vt si G, multiplex primæ excesserit K, multiplicem secundæ, excedat quoque H, multiplex tertiæ ipsam L, multiplicem quartæ, &c. At quando H, excedit ipsam L, [e] non necessariò I, excedit ipsam M, sed æqualis aliquando erit, vel minor, quòd maior ponatur proportio C, primæ ad D, secundam, quàm E, tertiæ ad F, quartam. Igitur si G, excedit K, non necessariò I, excedit M. [f] Maior est ergo proportio A, primæ ad B, secundam, quàm E, tertiæ ad F, quartam. Quam ob rem si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam, &c. Quod ostendendum erat.

d 6. definit. quinti.
e 8. definiti quinti.
f 8. definit. quinti.

### SCHOLIVM.

*QVOD si proportio C, tertiæ ad D, quartam minor fuerit, quàm E, quintæ ad F, sextam; erit quoque proportio A, primæ ad B, secundam minor quàm E, quintæ ad F, sextam. Si enim proportio C, ad D, minor est quàm E, ad F, hoc est, proportio E, primæ ad F, secundam maior, quàm C, tertiæ ad D, quartam: [a] fit vt si I, excedit ipsam M, non necessariò H, excedat ipsam L, sed aliquando deficiat, vel ei æqualis sit. [b] Sed si H, deficit ab L, vel ei æqualis est, etiam G, deficiet à K, vel ei erit æqualis, eò quòd ponatur C, prima ad D, secundam, vt A, tertia ad B, quartam. Quare si I, excedit ipsam M, non necessariò G, excedet ipsam K; [c] atq; idcirco maior erit proportio E, primæ ad F, secundam, quàm A, tertiæ ad B, quartam, hoc est, proportio A, ad B, minor erit quàm E, ad F: Quod est propositum.*

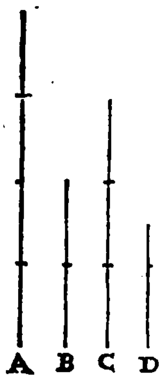
a 8. definit. quinti.
b 6. defin. quinti.
c 8. definit. quinti.

EODEM *modo: Si prima ad secundam, maiorē habuerit rationem, quàm tertia ad quartam, tertia autem ad quartam, maiorem habuerit, quàm quinta ad sextam: Prima quoque multò magis ad secundam, maiorem rationem habebit, quàm quinta ad sextam.*

QVOD *si prima ad secundam, minorē habuerit rationem, quàm tertia ad quartam; tertia autem ad quartam, minorem habuerit, quàm quinta ad sextam: Prima quoq; multò magis ad secundam, minorem rationem habebit, quàm quinta ad sextam.*

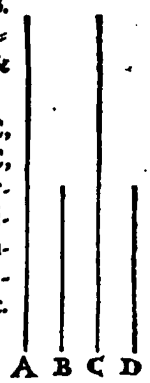
## 14. THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; Prima verò quàm tertia maior fuerit, erit & secunda maior, quàm quarta. Quòd si prima fuerit æqualis tertiæ, erit & secunda æqualis quartæ: Si verò minor, & minor erit.




SIT enim A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam. Dico si A, maior fuerit, quàm C, fore quoque B, maiorem quàm D. Quòd si A, æqualis fuerit ipsi C, æqualem quoque esse B, ipsi D: Si denique A, minor fuerit quàm C, minorem quoque esse B, ipsi D. Sit primùm A, maior, quàm C, [a] eritque propterea proportio A, maioris ad B, maior quàm C, minoris ad eandem B. Quoniam igitur est C, prima ad D, secundam, vt A, tertia ad B, quartam; Proportio autem A, tertiæ ad B, quartã, maior est, vt ostendimus, quàm C, quintæ ad B, sextam: [b] Maior quoque erit proportio C, primæ ad D, secundam, quàm C, quintæ ad B, sextam. [c] Minor est ergo D, quàm B; Ideoque B, maior erit quàm D. Quod est propositum.

a 8. quinti. b 13. quinti. c 10. quinti.

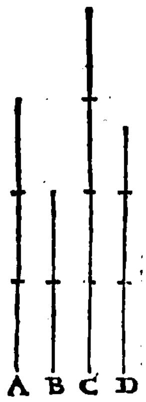



SIT deinde A, æqualis ipsi C; [d] eritque idcircò A, ad B, vt C, ad B. Quoniam igitur proportiones C, ad D, & C, ad B, eædem sunt proportioni A, ad B, [e] erunt quoque inter se eædem proportiones C, ad D, & C, ad B; [f] Ideoque æquales erunt B, & D. Quod est propositum.

d 7. quinti. e 11. quinti. f 9. quinti.

SIT tertiò A, minor quàm C; [g] eritque ob hoc maior proportio C, maioris ad B, quàm A, minoris ad B, eandem. Quoniam igitur est C, prima ad D, secundam, vt A, tertia ad B, quartam; est autem proportio A, tertiæ ad B, quartam minor, quàm C, quintæ ad B, sextam; [h] Minor quoque erit proportio C, primæ ad D, secundam, quàm C, quintæ ad B, sextam; [i] Ideoque B, minor erit, quàm D. quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

g 8. quinti. h 13. quinti. i 10. quinti.




### SCHOLIVM.

*QVOD si secunda maior sit, vel æqualis, vel minor, quàm quarta: erit quoque eadem ratione prima maior, vel æqualis, vel minor, quàm tertia. Sit enim primùm B, maior, quàm D, vt in prima figura. Dico & A, maiorem esse, quàm C. Cùm enim B, maior sit, quàm D;* [a] *erit maior proportio C, ad D, quàm C, ad B. Quia igitur est, vt prima A, ad secundam B, ita tertia C, ad quartam D. Proportio autem C, tertiæ ad D, quartam ostensa est maior, quàm C, quintæ ad B, sextam;* [b] *erit quoque proportio A, primæ ad B, secundam maior, quàm C, quintæ ad B, sextam:* [c] *ac proinde A, maior erit, quàm C. quod est propositum.*

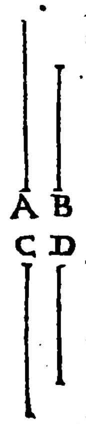
a 8. quinti. b 13. quinti. c 10. quinti.

*DEINDE sit B, æqualis ipsi D, vt in secunda figura. Dico & A, ipsi C, esse æqualem. Cùm enim B, ipsi D, sit æqualis;* [d] *erit C, ad B, vt C, ad D. Est autem quoque A, ad B, vt C, ad D.* [e] *Igitur erit quoque ita A, ad B, vt C, ad B;* [f] *proptereaq́; A, ipsi C, æqualis erit. quod est propositum.*

d 7. quinti. e 11. quinti. f 9. quinti.

*TERTIO sit B, minor quàm D, vt in tertia figura. Dico & A, minorem esse, quàm C. Cùm enim B, minor sit, quàm D,* [g] *erit minor proportio C, ad D, quàm C, ad B. Quia igitur est, vt A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam: Proportio autem C, tertiæ ad D, quartam ostensa est minor, quàm C, quintæ ad B, sextam,* [h] *erit quoque proportio A, primæ ad B, secundam minor, quàm C, quintæ ad B, sextam.* [i] *Igitur maior erit C, quàm A; ac proinde A, minor erit, quàm C. quod est propositum.*

g 8. quinti. h 13. quinti. i 10. quinti.

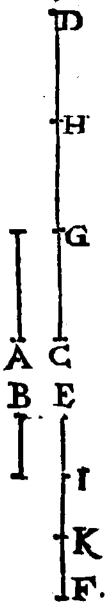



*NON demonstrauit autem Euclides, si prima maior est, vel æqualis, vel minor, quàm secunda, tertiam quoque maiorem esse, vel æqualem, vel minorem, quàm quartam; (quo tamen argumentandi modo plerique Geometrarum, tum veterum, tum recentiorum vtuntur) quia id perspicuum est ob similitudinem proportionum. Hinc enim fit, si vtraq; est proportio maioris inæqualitatis, vtramque antecedentem magnitudinem, id est, primam ac tertiam maiorem esse vtraque magnitudine consequente, hoc est, secunda ac quarta: Si verò vtraque proportio est æqualitatis, vtramque magnitudinem antecedentem vtrique consequenti æqualem esse. Si denique vtraque proportio est minoris inæqualitatis, vtramque antecedentem magnitudinem vtraq; consequente esse minorem.*

*VERBI gratia, si est vt A, ad B, ita C, ad D; erit vtraque proportio vel maioris inæqualitatis, vel æqualitatis, vel minoris inæqualitatis. Quocirca si A, prima maior est, quàm B, secunda, erit & C, tertia maior, quàm D, quarta: Et si æqualis, æqualis; Et si minor, minor. Quod est propositum. Quod tamen Geometricè ostendemus cum Federico Commandino, licèt id non sit necessarium, ad propositionem decimamsextam huius libri.*

THEOR.

## THEOR. 15. PROPOS. 15. 15.



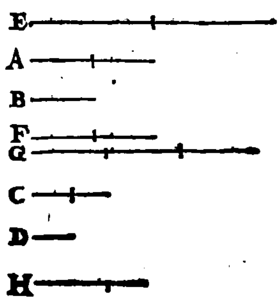

PARTES cùm pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si prout sibi mutuò respondent, ita sumantur.

SINT partium A, & B, æquemultiplices C D, & E F. Dico ita esse C D, ad E F, vt A, ad B. Cùm enim C D, & E F, sint æquemultiplices ipsarum A, & B; continebitur A, toties in C D, quoties B, in E F. Diuidatur ergo C D, in partes C G, G H, H D, æquales ipsi A; & E F, in partes E I, I K, K F, æquales ipsi B; [a] eritque C G, ad E I, vt A, ad B, quòd C G, & A, æquales inter se sint, necnon E I, & B. Eadem ratione erit G H, ad I K; & H D, ad K F, vt A, ad B; [b] ideoque C G, G H, H D, ad E I, I K, K F, eandem habebunt proportionem. Quocirca vt C G, ad E I, hoc est, vt A, ad B, [c] ita erit C D, ad E F, nempe omnes C G, G H, H D, simul, ad omnes E I, I K, K F, simul. quod est propositum. Partes itaque cùm pariter multiplicibus, &c. Quod erat demonstrandum.

a 7. quinti.
b 11. quinti.
c 12. quinti.

## THEOR. 16. PROPOS. 16. 16.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt.




HIC demonstratur Alterna, siue Permutata proportio, seu ratio, quæ definitione 12. explicata est. Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico vicissim, seu permutando, esse quoq; A, ad C, vt B, ad D. Sumantur enim ipsarum A, B, primæ, ac secundæ, æquemultiplices E, F; Item ipsarum C, D, tertiæ & quartæ, æquemultiplices G, H; [d] eritque E, ad F, vt A, ad B: cùm E, & F, sint pariter multiplices partium A, & B. Eadem ratione erit G, ad H, vt C, ad D. Cùm igitur proportiones E, ad F, & C, ad D, sint eædem proportioni A, ad B; [e] erunt & ipsæ inter se eædem. Rursus quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eædem sunt proportioni C, ad D; [f] erunt & ipsæ eædem inter se: hoc est, vt est E, prima ad F, secundam, ita erit G, tertia ad H, quartam. [g] Quare si E, prima maior est, quàm G, tertia, vel æqualis, vel minor, erit quoque F, secunda maior, quàm H, quarta, vel æqualis, vel minor, in quacunque multiplicatione accepta sint æquemultiplicia E, F, & æquemultiplicia G, H. [h] Est igitur A, prima ad C, secundam, vt B, tertia ad D, quartam (cùm E, & F, sint æquemultiplices primæ A, & tertiæ B; At G, & H, æquemultiplices C, secundæ, & D, quartæ, & illæ ab his vnà deficiant, vel vnà æquales sint, vel vnà excedant, &c.) quod est propositum. Si quatuor igitur magnitudines proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt. Quod ostendendum erat.

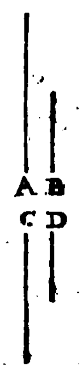
d 15. quinti.
e 11. quinti.
f 11. quinti.
g 14. quinti.
h 6. definit. quinti.

### SCHOLIVM.

*PORRO demonstratio huius propositionis locum solùm habet, quando quatuor magnitudines sunt eiusdem generis. Nam si duæ A, B, essent vnius generis, & duæ C, D, alterius; essent quoq; multiplices E, F, vnius generis, in quo videlicet sunt A, B, & multiplices G, H, alterius, in quo nimirum existunt C, D. Quare nō posset dici E, maior q̃ G, vel æqualis, vel minor; ac proinde nihil colligeretur ex defin. 6. huius lib. Vsurpanda igitur erit permutata proportio in solis quatuor magnitudinibus eiusdem generis. Quod nonnulli Philosophi nō aduertentes in graues errores incidunt, cùm eam adhibeant in rebus diuersorum generum.*

*EX hoc & illud demonstrabitur, quod ad finem scholij propos. 14. ex ipsa similitudine proportionū ostendimus, recepimusq; nos demonstraturos hoc loco, videlicet.*

SI prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; prima verò, quàm secunda, maior fuerit: Erit & tertia maior, quàm quarta; Et si æqualis, æqualis; & si minor, minor.



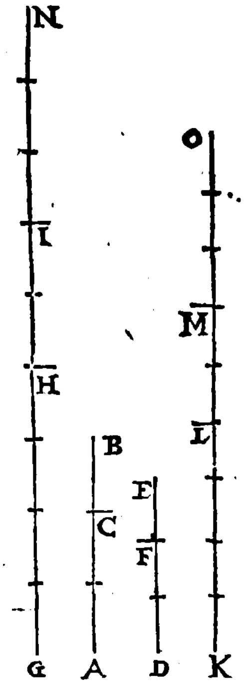

*QVANQVAM id, quod hîc proponitur, per se notum sit, vt ad propositionem 14. diximus, demonstrabimus tamen illud cum Federico Commandino, hoc modo: Sit vt A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam. Dico, si A, prima maior est, quàm B, secunda; & C, tertiam maiorem esse quarta D, & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem. [a] Erit enim permutando, vt A, ad C, ita B, ad D. [b] Quare si A, prima maior est, quàm B, tertia, erit & C, secunda maior, quàm D, quarta; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Quod est propositum.*

a 16. quinti.
b 14. quinti.

*SED & hæc demonstratio locum duntaxat habet, cùm quatuor magnitudines sunt eiusdem generis. Quare satius est illud ex natura proportionum monstrare, vt à nobis ad propositionem decimamquartam factum est. Ita enim verum erit semper id, quod proponitur, etiamsi magnitudines A, B, in vno genere, & C, D, in alio contineantur: immò verò licet A, B, sint quantitates continuæ, & C, D, numeri, &c.*

17. ## THEOR. 17. PROPOS. 17.

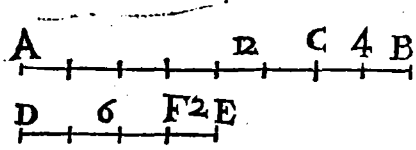
SI compositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diuisæ proportionales erunt.



HOC loco demonstrat Euclides Diuisionem rationis, quam definitione 15. explicauit. Sint enim compositæ magnitudines A B, C B, & D E, F E, proportionales, hoc est, sit A B, ad C B, vt D E, ad F E. Dico & diuisas easdem proportionales esse, hoc est, vt est A C, ad C B, ita esse D F, ad F E, in eo sensu, quem definitione 6. exposuimus. Ipsarum enim A C, C B, D F, F E, æquemultiplices capiatur eodem ordine G H, H I, K L, L M; [a] eritque G I, ita multiplex ipsius A B, vt est G H, ipsius A C, hoc est, vt K L, ipsius D F. Sed vt est multiplex K L, ipsius D F, [b] ita quoque multiplex est K M, ipsius D E. Æquemultiplices ergo sunt G I, K M, ipsarum A B, D E. Capiantur rursus I N, M O, æquemultiplices ipsarum C B, F E. Quoniam igitur sic est multiplex H I, prima secundæ C B, vt L M, tertia quartæ F E: Item tam est multiplex I N, quinta secundæ C B, quàm multiplex est M O, sexta quartæ F E; [c] erit & H N, sic multiplex secundæ C B, vt L O, multiplex est quartæ F E. Itaque cùm sit A B, prima ad C B, secundam, vt D E, tertia ad F E, quartam; sumptæque sint æquemultiplices G I, K M, primæ ac tertiæ A B, D E; Item secundæ & quartæ C B, F E, æquemultiplices H N, L O, [d] fit vt si G I, multiplex primæ A B, deficit ab H N, multiplice secundæ C B, etiam K M, multiplex tertiæ D E, deficiat ab L O, multiplice quartæ F E; & si æqualis, æqualis; & si excedit, excedat. Quòd si deficiat tã G I, ab H N, quàm K M, ab L O; ablatis communibus H I, L M, deficiet quoq; G H, ab I N, & K L, ab M O. Et si G I, æqualis fuerit ipsi H N, & K M, ipsi L O; ablatis communibus H I, L M, erit & G H, æqualis ipsi I N, & K L, ipsi M O. Et si denique G I, excesserit ipsam H N, & K M, ipsam L O; ablatis communibus H I, L M, excedet quoq; G H, ipsam I N, & K L, ipsam M O. Quam ob rem cùm G H, K L, sumptæ sint æquemultiplices primæ A C, & tertiæ D F; Item I N, M O, æquemultiplices secundæ C B, & quartæ F E; ostensumque sit, (in quacunque multiplicatione illæ æquemultiplices fuerint acceptæ) æquemultiplices primæ & tertiæ ab æquemultiplicibus secundæ & quartæ, vel vnà deficere, vel vnà æquales esse, vel vnà excedere; [e] Erit A C, prima ad C B, secundam, vt D F, tertia ad F E, quartam. quod est propositum. Si compositæ igitur magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

a 1. quinti. b 1. quinti. c 2. quinti. d 6. definit. quinti. e 6. definit. quinti.

### SCHOLIVM.



*EX his facilè demonstrabimus modum illum argumentandi, quem definitione 15. Diuisionem rationis conuersam diximus: Hoc est, si est, vt A B, ad C B, ita D E, ad F E; esse quoq; vt C B, ad A C, ita F E, ad D F. quod ita patet. Quoniam est vt A B, ad C B, ita D E, ad F E; [a] erit diuidendo, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Igitur conuertendo erit quoq; vt C B, ad A C, ita F E, ad D F. Quod est propositum.*

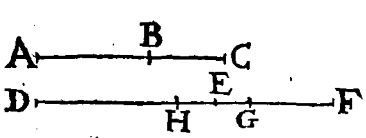
a 17. quinti.

*NVLLO etiam negotio demonstrabitur modus ille argumentandi, quem ad eandem definit. 15. Diuisionem rationis contrariam appellauimus, & in quo antecedens magnitudo minor est, quàm consequens: non autem maior, vt in Diuisione rationis, quam Euclides definiuit, & ea, quam proximè demonstrauimus. Sit enim vt A C, ad A B, ita D F, ad D E. Dico esse quoque per Diuisionem rationis contrariam, vt A C, ad C B, ita D F, ad F E. Quoniam enim est, vt A C, ad A B, ita D F, ad D E; erit conuertendo vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. [b] Ergo diuidendo, vt C B, ad A C, ita F E, ad D F: Ac proinde conuertendo rursus, vt A C, ad C B, ita D E, ad F E. Quod est propositum.*

b 17. quinti.

18. ## THEOR. 18. PROPOS. 18.

SI diuisæ magnitudines sint proportionales, hæ quoque compositæ proportionales erunt.



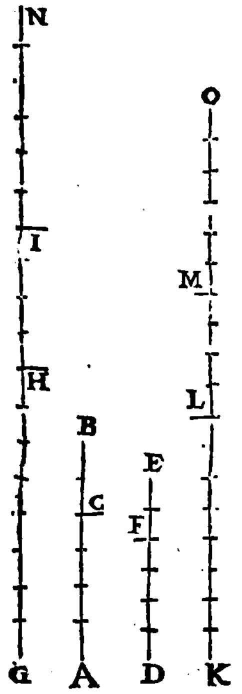
DEMONSTRAT hoc loco Euclides compositionem rationis, quam definitione 14. descripsit. Sint enim diuisæ magnitudines A B, B C. & D E, E F, proportionales, hoc est, A B, ad B C, vt D E, ad E F. Dico & compositas proportionales esse, hoc est, vt est A C, ad B C, ita esse D F, ad E F. Si enim non est, vt A C, ad B C, ita D F, ad E F, habebit D F, ad aliquam magnitudinẽ minorem ipsa E F, vel maiorem, eandem proportionem, quam A C, ad B C. Habeat primùm D F, ad G F, minorem ipsa E F, si fieri potest, eandem proportionem, quam A C, ad B C. Quoniam igitur est, vt A C, ad B C, ita D F

ad G F

ad G F; [a] Erit diuidendo quoque, vt A B, ad B C, ita D G, ad G F: Sed vt A B, ad B C, ita posita quoque est D E, ad E F. [b] Igitur erit etiam, vt D G, prima ad G F, secundam, ita D E, tertia ad E F, quartam. Cùm ergo D G, prima maior sit, quàm D E, tertia, [c] erit quoque G F, secunda maior, quàm E F, quarta, pars quàm totum. Quod est absurdum. a 17. quinti. b 11. quinti. c 14. quinti.

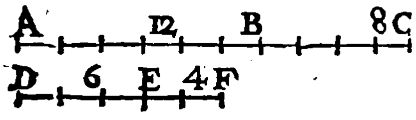
HABEAT deinde, si fieri potest, D F, ad H F, maiorem ipsa E F, eandem proportionem, quam A C, ad B C. Quoniam igitur est, vt A C, ad B C, ita D F, ad H F; [d] erit diuidendo quoque vt A B, ad B C, ita D H, ad H F. Sed vt A B, ad B C, ita posita etiam est D E, ad E F, [e] Igitur erit quoque vt D H, prima ad H F, secundam, ita D E, tertia ad E F, quartam. Cùm ergo D H, minor sit, quàm D E, tertia, [f] erit quoque H F, secunda minor, quàm E F, quarta, totum quàm pars. quod est absurdum. Non igitur habebit D F, ad minorem ipsa E F, aut ad maiorem, eandem proportionem, quam A C, habet ad B C. Ergo D F, ad ipsam E F, erit, vt A C, ad B C. quod est propositum. Itaque si diuisæ magnitudines sint proportionales, &c. Quod demonstrandum erat. d 17. quinti. e 11. quinti. f 14. quinti.

*SCHOLIVM.*




*HANC propositionem demonstrant nonnulli cum Campano eadem fermè ratione, qua antecedentem propositionem Euclides demonstrauit, hoc videlicet modo: Sint diuisæ magnitudines A C, C B, D F, F E, proportionales: hoc est, A C, ad C B, vt D F, ad F E. Dico eas etiam compositas proportionales esse, vt A B, quidem ad C B, ita D E, ad F E. Sumatur enim, vt in antecedente propositione, ipsarum A C, C B, D F, F E, æquemultiplices G H, H I, K L, L M; Item ipsarum C B, F E, aliæ æquemultiplices I N, M O; [a] eruntq; rursus G I, K M, ipsarum A B, D E, æquemultiplices. [b] Item H N, L O, ipsarum C B, F E, vt in præcedenti Theoremate ostensum est. Quoniam verò ponitur esse A C, prima ad C B, secundam, vt D F, tertia ad F E, quartam: sumptæq; sunt G H, K L, æquemultiplices primæ ac tertiæ A C, D F: Item secundæ & quartæ C B, F E, æquemultiplices I N, M O, [c] fit vt si G H, multiplex primæ A C, deficit ab I N, multiplice secundæ C B, etiam K L, multiplex tertiæ D F, deficiat ab M O, multiplice quartæ F E: & si æqualis, æqualis: & si excedit, excedat. Quòd si deficiat tam G H, ab I N, quàm K L, ab M O; additis communibus H I, L M, deficiet quoque G I, ab H N, & K M, ab L O. Et si G H, æqualis fuerit ipsi I N, & K L, ipsi M O: additis communibus H I, L M, erit & G I, ipsi H N, æqualis, & K M, ipsi L O. Et deniq; si G H, excesserit ipsam I N, & K L, ipsam M O: additis communibus H I, L M, excedet quoq; G I, ipsam H N, & K M, ipsam L O. Quoniam ergo si G I, multiplex primæ A B, deficit ab H N, multiplice secundæ C B: etiam K M, multiplex tertiæ D E, deficit ab L O, multiplice quartæ F E: & si æqualis, æqualis: & si excedit, excedit: [d] erit A B, prima ad C B, secundam, vt D E, tertia ad F E, quartam. Quod est propositum. Itaque si diuisæ magnitudines sint proportionales, &c. Quod erat ostendendum.* a 1. quinti. b 2. quinti. c 6. defin. quinti. d 6. defin. quinti.

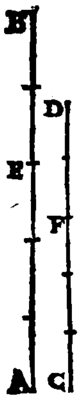
*VERVM hæc demonstratio non rectè colligit propositum ex defin. 6. propterea quòd H N, L O, non sunt ita multiplices ipsarum C B, F E, vt multiplices acceptæ sunt I N, M O, earundem C B, F E. Vnde meritò dubitare quis posset, an secundum quamcunque multiplicationem æquemultiplices seruent eam conditionem defectus, æqualitatis, atque excessus, quam Euclides in 6. defin. postulauit; quandoquidem in hac demonstratione liberum nõ est assumere ipsarum C B, F E, quascunque æquemultiplices: sed tales duntaxat, quales consurgunt ex H I, I N, & ex L M, N O, multiplicibus acceptis. Id quod in antecedentis propositionis demonstratione obijci non potest: quippe cùm I N, M O, sumptæ sint ipsarum C B, F E, æquemultiplices qualescunque, ipsæq; eædem remanent æquemultiplices earundem C B, F E, in diuisa proportionalitate. Quam ob rem præferenda est Euclidis demonstratio huic demonstrationi Campani. Libuit autem eam quoq; explicare, ne eam studiosus Lector, relicta illa Euclidis, arriperet, vt bonam: præsertim cùm ostensiua sit, illa verò Euclidis ducat nos ad id, quod fieri non potest.*




*HINC facilè etiam confirmabimus duos illos modos argumentandi, quos ad defin. 14. descripsimus. Priorem diximus compositionem rationis conuersam. Sit enim vt A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico per compositionem rationis conuersam, esse quoq; vt A C, ad A B, ita D F, ad D E. Quoniam enim est, vt A B, ad B C, ita D E, ad E F, erit conuertendo; vt B C, ad A B, ita E F, ad D E. [e] Igitur & componendo erit, vt A C, ad AB. ita D F, ad D E. quod est propositum.* e 18. quinti.

*POSTERIOREM modum vocauimus compositionem rationis contrariam. Sit ergo rursus vt A B, ad B C, ita D E, ad E F. Dico per compositionem rationis contrariam, esse quoq; vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Quoniam enim est, vt A B, ad B C, ita D E, ad E F: erit conuertendo, vt B C, ad A B, ita E F, ad D E. [f] Igitur & componendo erit vt A C, ad A B, ita D F, ad D E: ac proinde conuertendo rursus erit, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Quod est propositum.* f 18. quinti.

19. ## THEOR. 19. PROPOS. 19.

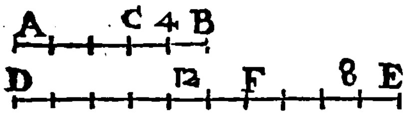


SI quemadmodum totum ad totum, ita ablatum se habuerit ad ablatum: vt reliquum ad reliquum, vt totum ad totum se habebit.

QVOD in propos. 5. demõstratum est de multiplici proportione, hoc loco de omni proportione, etiam irrationali demonstratur. Sit enim tota A B, ad totam C D, vt ablata A E, ad ablatam C F. Dico & reliquam E B, esse ad reliquam F D, vt est tota A B, ad totam C D.
a 16. quinti. Cùm enim sit A B, ad C D, vt A E, ad C F,[a] erit & permutando A B, ad AE, vt C D, ad C F.[b]
b 17. quinti. Diuidendo ergo erit E B, ad A E, vt F D, ad C F.[c] Quare permutando rursus erit E B, ad
c 16. quinti. FD, vt A E, ad C F, hoc est, vt tota A B, ad totam C D; cùm posita sit A B, ad C D, vt A E, ad C F. Si igitur quemadmodum totum ad totum, &c. Quod demonstrandum erat.

### COROLLARIVM.

*HINC facilè demonstrabitur modus ille argumentandi in proportionibus, qui sumitur à conuersione rationis, iuxta 16. defin.*



*SIT enim, vt A B, ad C B, ita D E, ad F E. Dico per conuersionem rationis esse quoque, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Cùm enim sit, vt A B, ad C B, ita D E, ad*
a 17. quinti. *F E,[a] erit quoque diuidendo, vt A C, ad C B, ita D F,*
b 18. quinti. *ad F E. Igitur & conuertendo, vt C B, ad A C, ita F E, ad D F:[b] ac propterea componendo quoque, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Quod est propositum.*

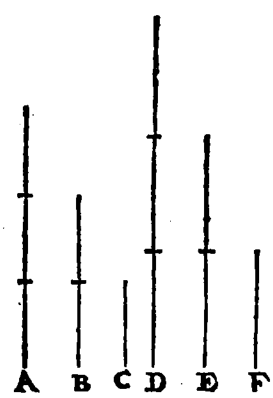
### SCHOLIVM.

*OMNES Euclidis interpretes conuersionem rationis demonstrant hac ratione. Quoniam est, vt A B, ad*
c 16. quinti. *C B, ita D E, ad F E;[c] erit permutando, vt tota A B, ad totam D E, ita C B, ablata ad ablatam F E.[d] Igitur*
d 19. quinti. *vt tota A B, ad totam D E, ita erit quoque reliqua A C, ad reliquam D F. Et proinde permutando rursus, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F. Quod est propositum.*

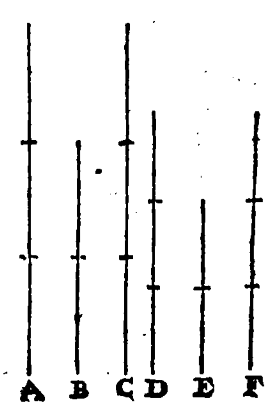
*SED quis non videt, hanc demonstrationem conuenire solùm magnitudinibus eiusdem generis, cùm in ea vsurpetur alterna, siue permutata proportio, quæ vim tantùm habet in eiusdem generis magnitudinibus, vt & in defin. 12. & in propos. 19. monuimus? Quare cùm Euclides, & alij Geometræ modum hunc argumentandi à conuersione rationis adhibeant in omnibus magnitudinibus, etiam non eiusdem generis, reiecta hac communi interpretum demonstratione; nostram aliam excogitauimus, quæ omnibus magnitudinibus congruit. Ea enim locum habet, etiamsi priores duæ quantitates A B, C B, sint vnius generis, nimirum lineæ, posteriores verò duæ D E, F E, alterius generis, nimirum vel superficies, vel anguli, vel corpora, vel denique numeri: propterea quòd in ea non assumpta fuit alterna, siue permutata proportio.*

20. ## THEOR. 20. PROPOS. 20.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima, quàm tertia maior fuerit, erit & quarta, quàm sexta, maior. Quòd si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ: sin illa minor, hæc quoque minor erit.

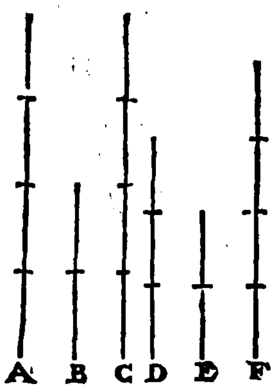


SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, sitque A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F: sit autem primùm A, prima maior quàm C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem F, sexta. Cùm enim A, maior
a 8. quinti. sit quàm C,[a] erit maior proportio A, ad B, quàm
b 13. quinti. C, ad B. Est autem vt A, ad B, ita D, ad E.[b] Maior igitur proportio quoque erit D, ad E, quàm C, ad B: At vt C, ad B, ita est F, ad E. (Cùm enim sit B, ad C, vt E, ad F, erit conuertendo vt C, ad B, ita F, ad E.) Maior igi-
c 10. quinti. tur quoque proportio erit D, ad E, quàm F, ad E.[c] Quare D, maior erit, quàm F. Quod est propositum.



SIT deinde A, æqualis ipsi C. Dico & D, æqualem esse ipsi F. Cùm
d 7. quinti. enim A, sit ipsi C, æqualis,[d] erit A, ad B, vt C, ad B. Est autem vt A, ad
e 11. quinti. B, ita D, ad E.[e] Igitur erit & D, ad E, vt C, ad B: At vt C, ad B, ita est F, ad E, per inuersam rationẽ, vti priùs. Quare erit quoque D, ad E, vt
f 9. quinti. F, ad E.[f] Ideoque æquales erunt D, & F. Quod est propositum.

SIT




Sit tertiò A, minor quàm C. Dico & D, minorem esse, quàm F. Cùm enim A, minor sit quàm C, [a] erit minor proportio A, ad B, quàm C, ad B. Sed vt A, ad B, ita est D, ad E. [b] Minor ergo quoque proportio est D, ad E, quàm C, ad B. Est autem conuertendo, vt prius, vt C, ad B, ita F, ad E. Igitur minor est quoq; proportio D, ad E, quàm F, ad E, [c] proptereaq; D, minor erit quàm F. Quod est propositum. Si sint itaque tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c. Quod erat ostendẽdum.

a 8. quinti.
b 13. quinti.
c 10. quinti.

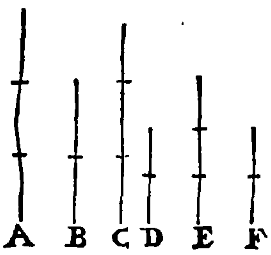
*SCHOLIVM.*

*Porro propositione 22. ostendet Euclides, A, & D, magnitudines non solùm esse maiores, vel æquales, vel minores duabus magnitudinibus C, & F, vt hic demonstrauit: sed etiam illas ad has eandem habere proportionẽ ex æqualitate: quod quidem demonstrare non poterat, nisi prius theorema hoc ostendisset, vt ex eadem propos. 22. erit perspicuum.*

## THEOR. 21. PROPOS. 21.

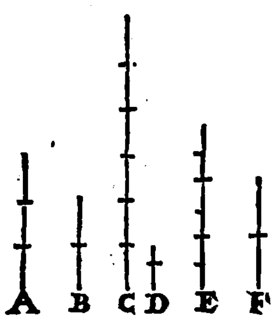
21.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima quàm tertia maior fuerit: erit & quarta, quàm sexta maior. Quòd si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ; sin illa minor, hæc quoque minor erit.




Sint tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F; quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; sitque earum proportio perturbata, hoc est, sit vt A, ad B, ita E, ad F, & vt B, ad C, ita D, ad E: Sit autem primùm A, prima maior quàm C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem sexta F. Cùm enim A, maior sit quàm C, erit maior proportio [d] A, ad B, quàm C, ad B: Est autem vt A, ad B, ita E, ad F. [e] Maior ergo quoque prroportio est E, ad F, quàm C, ad B. Quoniam verò vt B, ad C, ita est D, ad E, erit conuertendo vt C, ad B, ita E, ad D. Quare maior quoque erit proportio E, ad F, quàm E, ad D; [f] Ideoq; maior erit D, quàm F. Quod est propositum.

d 8. quinti.
e 13. quinti.
f 10. quinti.

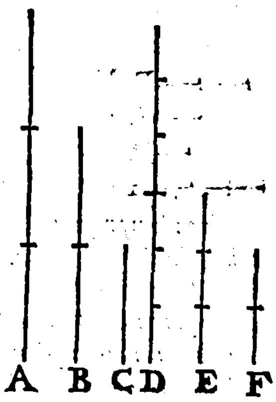



Sit deinde A, ipsi C, æqualis. Dico D, quoque ipsi F, esse æqualem. Cùm enim A, sit æqualis ipsi C, [g] erit A, ad B, vt C, ad B: Sed vt A, ad B, ita est E, ad F. [h] Igitur erit vt C, ad B, ita E, ad F: Est autem ex inuersa ratione, vt C, ad B, ita E, ad D, veluti prius. Igitur erit quoque vt E, ad F, ita E, ad D; [i] atque idcircò D, ipsi F, æqualis erit. Quod est propositum.

g 7. quinti.
h 11. quinti.
i 9. quinti.

Sit tertiò A, minor, quàm C. Dico & D, minorem esse, quàm F. Cùm enim A, sit minor quàm C, [k] erit minor proportio A, ad B, quàm C, ad B: Vt autem A, ad B, ita est E, ad F. [l] Minor est ergo proportio E, ad F, quàm C, ad B. Quoniam verò, vt antè, ex inuersa ratione, est vt C, ad B, ita E, ad D; erit quoque minor proportio E, ad F, quàm E, ad D; [m] ac propterea D, minor erit, quàm F. quod est propositum. Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c. Quod ostendendum erat.

k 8. quinti.
l 13. quinti.
m 10. quinti.




*SCHOLIVM.*

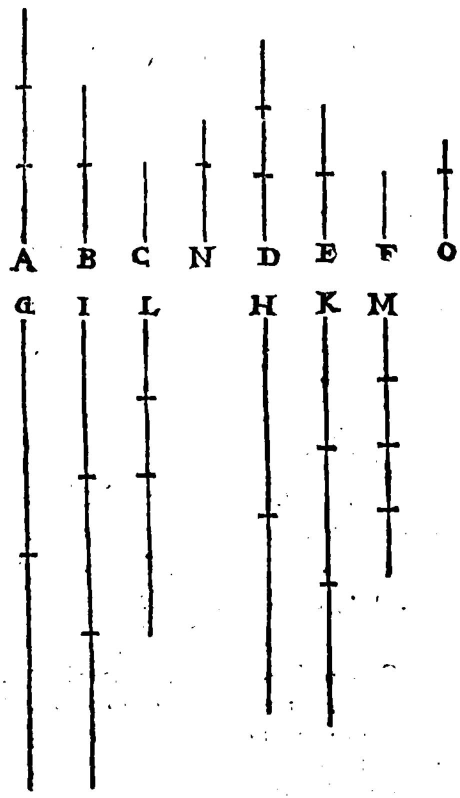
*Cæterum propositione 23. ostendet Euclides duas magnitudines A, & D, non solùm esse maiores, vel æquales, vel minores, duabus magnitudinibus C, & F, sed etiam illas ad has eandem habere proportionẽ ex æqualitate: quod quidem sine auxilio huius theorematis demõstrare nõ poterat, vt ex propositione illa vigesimatertia patebit.*

## THEOR. 22. PROPOS. 22.

22.

Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

Iam hìc demonstrat Euclides modum argumentandi in proportionibus ex æqualitate, quando proportio est ordinata. Sint enim primùm tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F: sitque




a 4. quinti. b 4. quinti. c 10. quinti. d 6. definit. quinti.

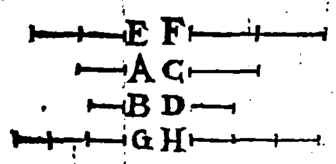
A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Dico quoque ex æqualitate esse A, ad C, vt D, ad F. Sumptis enim ipsarum A, D, æquemultiplicibus G, H; Item ipsarum B, E, æquemultiplicibus I, K; Item ipsarum C, F, æque multiplicibus L, M; cùm sit A, prima ad B, secundam, vt D, tertia ad E, quartam, [a] erit quoque G, multiplex primæ A, ad I, multiplicem secundæ B, vt H, multiplex tertiæ D, ad K, multiplicem quartæ E. Eadem ratione, cùm sit B, prima ad C, secundam, vt E, tertia ad F, quartam; [b] erit I, multiplex primæ B, ad L, multiplicem secundæ C, vt K, multiplex tertię E, ad M, multiplicem quartæ F. Quoniam igitur sunt tres magnitudines G, I, L, & aliæ tres H, K, M, quæ binæ in eadem proportione sumuntur; [c] fit vt si G, prima superat tertiam L, superet necessariò quoque H, quarta sextam M; Et si æqualis, æqualis; Et si deficit, deficiat. Itaque cùm G, H, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, vel deficiant vnà ab L, M, æquemultiplicibus secundæ C, & quartę F, vel vnà æquales sint, vel vnà excedant: in quacunque multiplicatione sumpta sint ea multiplicia; [d] erit A, prima ad C, secundam, vt D, tertia ad F, quartam. Quod est propositum.

DEINDE sint plures magnitudines tribus, ita vt sit etiam C, ad N, vt F, ad O. Dico adhuc esse vt A, ad N, ita D, ad O. Cùm enim iam sit ostensum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, vt D, ad F; ponatur autem C, ad N, vt F, ad O; erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, F, O, quæ binæ in eadem ratione sumuntur. Ergo ex æqualitate in tribus magnitudinibus ostensa, rursus erit, vt A, ad N, ita D, ad O. Eodemque modo idem ostendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor: sicut id in quatuor demonstratum fuit, per tres; Et sic de pluribus. Itaque si sint quotcunque magnitudines, &c. Quod erat ostendendum.

## *SCHOLIVM.*

*CAETERVM non videtur hoc loco dissimulandum Theorema quoddam antiquis Mathematicis valde familiare, quanquam à nemine, quod sciam, sit adhuc demonstratum. Id autem eiusmodi est.*

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; Habebunt etiam æquemultiplices primę ac tertiæ, ad secundam & quartam, eandem rationem: Item æquemultiplices secundæ, & quartæ ad primam & tertiam, eandem rationem habebunt. Et contrà, eandem rationem habebunt secunda & quarta ad æquemultiplices primæ & tertiæ: Item prima ac tertia ad æquemultiplices secundæ & quartæ, rationem habebunt eandem.




a 22. quinti. b 22. quinti. c 22. quinti. d 22. quinti.

*SIT enim vt A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam; sumanturq; E, F, ipsarum A, C, æquemultiplices: Item G, H, æquemultiplices ipsarum B, D. Dico ita esse E, ad B, vt F, ad D: Item ita G, ad A, vt H, ad C. Et contrà, ita esse B, ad E, vt D, ad F: Item ita A, ad G, vt C, ad H. Quoniam enim est, vt E, ad A, ita F, ad C, ex constructione, cùm vtrobique sit eadem proportio multiplex; ponitúrq; vt A, ad B, ita C, ad D; [a] erit ex æquo, vt E, ad B, ita F, ad D. Rursus quia est, vt G, ad B, ita H, ad D, quòd vtrobique sit eadem proportio multiplex, ex constructione; estq; vt B, ad A, ita D, ad C; (Cùm enim ponatur, vt A, ad B, ita C, ad D, erit conuertendo, vt B, ad A, ita D, ad C.) [b] erit ex æquo, vt G, ad A, ita H, ad C.*

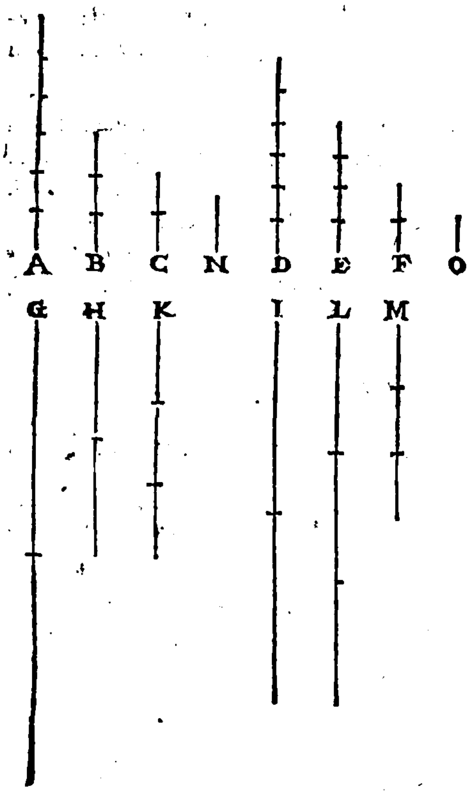
*DEINDE, quia est vt B, ad A, ita D, ad C, per inuersam rationem; Et vt A, ad E, ita C, ad F, quòd ex constructione vtrobique sit eadem proportio submultiplex; [c] erit ex æquo, vt B, ad E, ita D, ad F. Rursus quia ponitur, vt A, ad B, ita C, ad D; estq; vt B, ad G, ita D, ad H, quòd ex constructione sit vtrobique eadem proportio submultiplex; [d] erit ex æquo, vt A, ad G, ita C, ad H. Quod est propositum.*

*EX quo constat modus argumentandi, quo frequentissimè vtuntur Geometræ, maximè Archimedes, Apollonius Pergæus, Theon, & alij. Videlicet vt A, ad B, ita est C, ad D. Ergo vt E, dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. ipsius A, ad B, ita quoq; erit F, dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. ipsius C, ad D. Item vt A, ad B, ita est C, ad D. Igitur vt A, ad duplum, vel triplum, vel quadruplum, &c. ipsius B, nimirum ad G, ita erit quoq; C, ad duplum vel triplum, vel quadruplum, &c. ipsius D, videlicet ad H.*

THEOR.

# THEOR. 23. PROPOS. 23. 23.

SI sint tres magnitudines, aliæque ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.



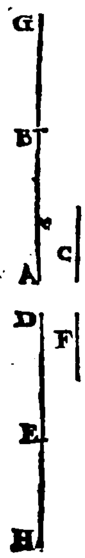

DEMONSTRATVR hîc ratio ex æqualitate, quando proportio est perturbata. Sint enim tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitque perturbata earum proportio, hoc est, sit vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico quoque ex æqualitate esse vt A, ad C, ita D, ad F. Sumptis enim ipsarum A, B, D, æquemultiplicibus G, H, I; Item ipsarum C, E, F, æquemultiplicibus K, L, M; [a] Erit vt A, ad B, ita G, ad H, cùm G, H, sint ipsarum A, B, æquemultiplices. At vt A, ad B, ita est E, ad F. [b] Igitur vt G, ad H, ita quoq; est E, ad F; [c] Sed vt E, ad F, ita quoque est L, ad M; quòd L, M, sint ipsarum E, F, æquemultiplices. [d] Igitur erit quoque vt G, ad H, ita L, ad M. Rursus quoniam est B, prima ad C, secundam, vt D, tertia ad E, quartam; [e] erit quoque vt H, multiplex primæ B, ad K, multiplicem secundæ C; ita I, multiplex tertiæ D, ad L, multiplicem quartæ E. Quia igitur sunt tres magnitudines G, H, K, & aliæ tres I, L, M, quæ binæ in eadem ratione sumuntur, estq; earum proportio perturbata; cùm ostensum sit esse vt G, ad H, ita L, ad M: Et vt H, ad K, ita I, ad L; [f] fit vt si G, prima superat tertiam K, superet quoque quarta I, sextam M; & si æqualis, æqualis; & si deficit, deficiat. Itaque cùm G, & I, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, à K, & M, æquemultiplicibus secundæ C, & quartæ F, vel vnà deficiant, vel vnà æquales sint, vel vnà excedant; [g] erit vt A, prima ad C, secundam, ita D, tertia ad F, quartam. quod est propositum. Itaque si sint tres magnitudines, &c. Quod demonstrandum erat.

*a 15. quinti. b 11. quinti. c 15. quinti. d 11. quinti. e 4. quinti. f 21. quinti. g 6. defin. quinti.*

*SCHOLIVM.*

*QVOD si fuerint plures magnitudines tribus, fueritq; earum proportio perturbata, nimirum si fuerit A, ad B, vt F, ad O; & B, ad C, vt E, ad F; & C, ad N, vt D, ad E. Dico adhuc esse vt A, ad N, ita D, ad O. quanquam proportio ex æqualitate, quando proportio est perturbata, apud Geometras in vsu non sit in pluribus magnitudinibus, quàm in tribus. quæ causa fuit, cur Euclides antecedentem propositionem de quotquot magnitudinibus, hanc autem de tribus duntaxat proposuerit, quamuis vera etiam sit de pluribus. quod ita probatur. Cùm iam sit ostensum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, vt E, ad O: Ponatur autem esse ita C, ad N, vt D, ad E, erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, E, O, quæ binæ in eadem sumuntur proportione, & earum proportio est perturbata. Ergo rursus ex æqualitate in tribus magnitudinibus ostensa, erit vt A, ad N, ita D, ad O. Eodemq; modo idem ostendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor, sicut id in quatuor fuit demonstratum, per tres; Et sic de pluribus. Quod est propositum.*

# THEOR. 24. PROPOS. 24. 24.




SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad secundam eandem rationem, quam sexta ad quartam: Etiam composita prima cum quinta, ad secundam eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta, ad quartam.

QVOD proposit. 2. demonstrauit Euclides de sola proportione multiplici, demonstrat hoc loco de omni proportione, etiam irrationali. Sit enim A B, prima ad C, secundam, vt D E, tertia ad F, quartam; Item B G, quinta ad C, secundam, vt E H, sexta ad F, quartam. Dico ita esse A G, compositã ex prima ac quinta, ad secundam C, vt est D H, composita ex tertia & sexta, ad quartam F. Cùm enim sit vt B G, ad C, ita E H, ad F; erit conuertendo vt C, ad B G, ita F, ad E H. Quoniam igitur est A B, ad C, vt D E, ad F; & C, ad B G, vt F, ad E H; [h] erit ex æquali A B, ad B G, vt D E, ad E H. [i] Componendo igitur erit vt tota A G, ad B G, ita tota D H, ad E H. Itaque cùm rursus sit A G, ad B G, vt D H, ad E H; & B G, ad C, vt E H, ad F; [k] erit ex æquali A G, ad C, vt D H, ad F. quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

*h 22. quinti. i 18. quinti. k 22. quinti.*

### SCHOLIVM.

*Haec propositio vera est, siue magnitudines A B, B G, & C, sint eiusdem generis cum magnitudinibus D E, E H, & F, siue non, vt ex demonstratione constat.*

*Eodem ferè modo ostendetur in omni genere proportionis id, quod Theoremate 6. huius lib. demonstratum est in multiplicibus magnitudinibus duntaxat. Videlicet:*

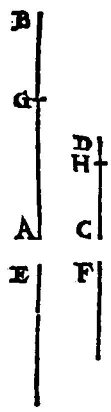
Si duæ magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant proportionem; & detractæ quædam habeant ad easdem eandem proportionem: & reliquæ ad easdem eandem proportionem habebunt.

*Habeant enim A G, D H, ad C, & F, eandem proportionem, hoc est, sit A G, ad C, vt D H, ad F. Item detracta A B, D E, ad easdem C, F, eandem habeant proportionem; ita vt sit quoque A B, ad C, vt D E, ad F. Dico & reliquas B G, E H, eandem habere proportionem ad easdem C, F, hoc est, esse B G, ad C, vt E H, ad F.*
a 22. quinti. *Cùm enim sit vt A B, ad C, ita D E, ad F; erit conuertendo vt C, ad A B, ita F, ad D E. Quoniam igitur est A G,*
b 17. quinti. *ad C, vt D H, ad F; & C, ad A B, vt F, ad D E; [a] erit ex æqualitate A G, ad A B, vt D H, ad D E. [b] Diuidendo*
c 22. quinti. *ergo erit quoq; vt B G, ad A B, ita E H, ad D E. Itaq; cùm rursus sit B G, ad A B, vt E H, ad D E; & A B, ad C, vt D E, ad F: [c] erit ex æquali B G, ad C, vt E H, ad F. Quod est propositum.*

25.

## THEOR. 25. PROPOS. 25.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.



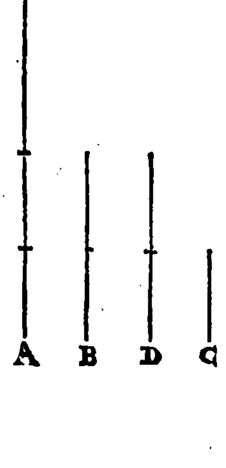

Sit enim A B, ad C D, vt E, ad F, sitque A B, omnium maxima, & F, minima. Dico duas A B, & F, simul esse maiores duabus C D, & E, simul. Auferatur enim ex A B, magnitudo A G, æqualis ipsi E; & ex C D, alia C H, æqualis ipsi F. Erit igitur A G, ad C H, vt E, ad F, hoc est, vt A B, ad C D. Quare cũ sit tota A B, ad totam C D,
a 19. quinti. vt ablata A G, ad ablatam C H; [a] erit quoque vt tota A B, ad totam C D, ita reliqua G B, ad reliquam H D: Est autem A B, (cùm sit omnium maxima) maior, quàm C D. Igitur & G B, maior erit quàm H D. Quoniam verò A G, & E, æquales sunt; si ipsis addantur æquales F, & C H, nimirum F, ipsi A G, & C H, ipsi E; fient A G, & F, simul æquales ipsis E, & C H, simul. Additis igitur inæqualibus G B, & H D, fient A B, & F, simul maiores quàm E, & C D, simul, cũ G B, sit maior quàm H D. Quod est propositum. Si ergo quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

### SCHOLIVM.

*Necessario autem sequitur, si antecedens magnitudo vnius proportionis fuerit omnium maxima, consequentem alterius esse omnium minimam: vt in proposito exemplo*
a 14. quinti. *cernere licet. Cùm enim sit vt A B, ad C D, ita E, ad F, & A B, prima maior, quàm tertia E: [a] erit quoque C D, secunda maior quàm F, quarta. Item quia maior est A B, quàm C D, erit quoque E, maior, quàm F, ob eandem proportionem A B, ad C D, & E, ad F, vt in scholio propositionis 14. ostendimus. Quòd si è contrario antecedens vnius proportionis fuerit omnium minima, erit consequens alterius omnium maxima, vt constat, si dicatur esse F, ad E, vt C D, ad A B. Debent quoque omnes quatuor magnitudines esse eiusdem generis, aliàs non posset vna magnitudo componi ex maxima & minima, immò neque ex reliquis duabus. Addit hoc in loco Federicus Commandinus theorema aliud huic 25. non dissimile; videlicet:*

Si tres magnitudines fuerint proportionales: Maxima & minima maiores erunt, quàm dupla reliquæ.

*Sit vt A, ad B, ita B, ad C, sitq; A, maxima, & C, minima. Dico A, & C, simul maiores esse dupla ipsius B. Sumpta enim D, ipsi B, æquali, erit vt A, ad B, ita D, ad C. Igitur A, & C, simul maiores erunt, quàm B, & D, simul,*
b 25. quinti. *[b] vt proximè demonstratum est, hoc est, quàm dupla ipsius B. Quod est propositum.*

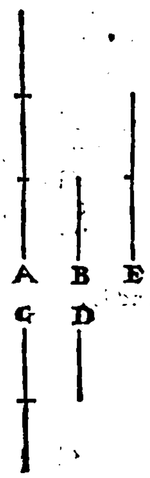



*Hic finem Euclides imponit quinto libro. Verùm quia Campanus, & nonnulli alij adijciunt alias quasdam propositiones, quibus sæpe numero grauissimi scriptores, vt Archimedes, Apollonius, Ioannes Regiomontanus, & alij vtuntur, easque quasi essent Euclidis, citant; placuit eas huic quinto libro annectere, & maxima, qua fieri potest, breuitate demonstrare, necnon in numerum ac seriem propositionum Euclidis referre. Omnes autem traduntur de magnitudinibus improportionalibus, quarum prima hæc est.*

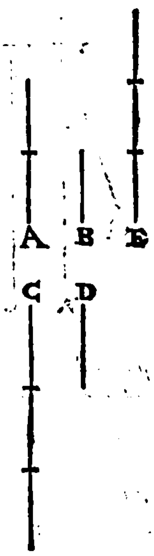
THEOR.

## THEOR. 26. PROPOS. 26. 26.

SI prima ad secundam maiorem habuerit proportionem, quàm tertia ad quartam: habebit conuertendo secunda ad primam minorem proportionem, quàm quarta ad tertiam.




HABEAT enim A, ad B, maiorem proportionem, quàm C, ad D. Dico proportionem B, ad A, minorem esse proportione D, ad C. Intelligatur enim esse E, ad B, vt C, ad D; eritque proportio A, ad B, maior quoque quàm E, ad B; [a] ac propterea A, maior erit quàm E. [b] Quare minor erit proportio B, ad A, maiorem, quàm B, ad E, minorem: Sed vt est B, ad E, ita est conuertendo D, ad C. Igitur proportio B, ad A, minor est quoque, quàm D, ad C. Quod est propositum. a 10. quinti. b 8. quinti.




### SCHOLIVM.

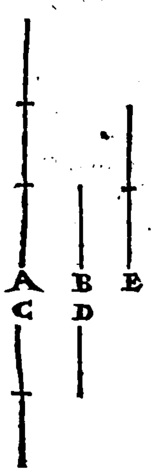
*EODEM ferè modo demonstrabimus, si prima ad secundam habuerit minorem proportionem, quàm tertia ad quartam, conuertendo maiorem esse proportionem secunda ad primam, quàm quarta ad tertiam; dummodo vocem maioris mutemus in vocem minoris, & contrà.*

*SIT enim minor proportio A, ad B, quàm C, ad D. Dico conuertendo B, ad A, maiorem habere proportionem, quàm D, ad C. Intelligatur enim esse E, ad B, vt C, ad D; Eritq; proportio A, ad B, etiam minor, quàm E, ad B, [a] ac propterea A, minor erit, quàm E. [b] Quare maior erit proportio B, ad A, minorem, quàm B, ad E, maiorem. Sed vt B, ad E, ita est conuertendo D, ad C. Igitur & proportio B, ad A, maior est, quàm D, ad C. Quod est propositum.* a 10. quinti. b 8. quinti.

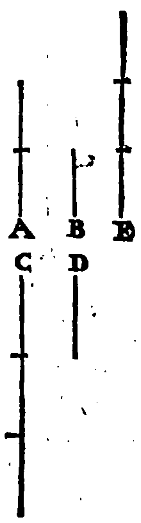
*ALITER. Quoniam minor est proportio A, ad B, quàm C, ad D; erit maior proportio C, ad D, quàm A, ad B. [c] Igitur conuertendo minor erit proportio D, ad C, quàm B, ad A, ac proinde maior erit proportio B, ad A, quàm D, ad C. Quod est propositum.* c 26. quinti.

## THEOR. 27. PROPOS. 27. 27.

SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionē, quàm tertia ad quartam: Habebit quoque vicissim prima ad tertiam maiorem proportionem, quàm secunda ad quartam.




HABEAT enim A, ad B, maiorem proportionem, quàm C, ad D. Dico permutando maiorem esse quoque proportionem A, ad C, quàm B, ad D. Intelligatur namque esse E, ad B, vt C, ad D; eritque proportio A, ad B, maior etiam, quàm E, ad B: [a] Ideoque A, maior erit, quàm E. [b] Quare maior erit proportio A, ad C, quàm E, ad C. [c] Quoniam verò permutando est, vt E, ad C, ita B, ad D. (cùm posita sit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, maior quoque erit, quàm B, ad D. Quod est propositum. a 10. quinti. b 8. quinti. c 16. quinti.




### SCHOLIVM.

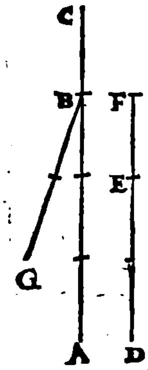
*SIMILITER ostendemus, si prima ad secundam minorem habuerit proportionem, quàm tertia ad quartam, vicissim prima ad tertiam minorem esse proportionem, quàm secunda ad quartam.*

*SIT namque minor proportio A, ad B, quàm C, ad D. Dico permutando, minorem quoque esse proportionem A, ad C, quàm B, ad D. Intelligatur enim esse E, ad B, vt C, ad D; Eritq; proportio A, ad B, minor quoque, quàm E, ad B; [a] Ac propterea A, minor erit, quàm E. [b] Quare minor erit proportio A, ad C, quàm E, ad C. [c] Sed permutando, vt E, ad C, ita B, ad D. (cùm posita sit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, minor quoque erit, quàm B, ad D. Quod est propositum.* a 10. quinti. b 8. quinti. c 16. quinti.

*ALITER. Quoniam minor est proportio A, ad B, quàm C, ad D, erit maior proportio C, ad D, quàm A, ad B. [d] Ergo permutando, maior etiam erit proportio C, ad A, quàm D, ad B: [e] ac proinde conuertendo, minor erit proportio A, ad C, quàm B, ad D. Quod est propositum.* d 27 quinti. e 26. quinti.

## 28. THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoq; composita prima cum secunda, ad secundam maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam.

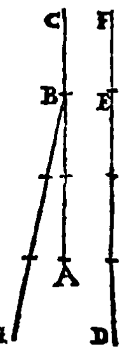


SIT maior proportio A B, ad B C, quam D E, ad E F. Dico & componendo maiorem esse proportionem A C, ad B C, quã D E, ad E F. Intelligatur enim esse G B, ad B C, vt D E, ad E F: eritque proportio A B, ad B C, maior quoque, quam G B, ad B C: ᵃ Ideoque A B, maior quam G B. Addita ergo communi B C, fiet A C, maior quam G C, ᵇ maiorq; propterea erit proportio A C, ad B C, quam G C, ad B C. Sed componendo, ᶜ vt est G C, ad B C, ita est D F, ad E F. (quòd posita sit GB, ad B C, vt D E, ad E F.) Maior ergo etiam erit proportio A C, ad B C, quam DF, ad E F. Quod est propositum.

*a 10. quinti. b 8. quinti. c 18. quinti.*

### *SCHOLIVM.*

*EADEM ratione ostendemus, si proportio prima ad secundam minor fuerit, quam tertia ad quartam, minorem quoq; esse proportionem primæ & secundæ simul, ad secundam, quam tertiæ & quartæ simul ad quartam.*



*SIT enim minor proportio A B, ad B C, quam D E, ad E F. Dico & componendo minorem esse proportionē A C, ad B C, quã D F, ad E F. Intelligatur enim esse G B, ad B C, vt D E, ad E F, eritq; proportio A B, ad B C, minor quoque, quam G B, ad B C, ᵃ ideoque A B, minor erit, quam G B. Addita ergo communi B C: fiet A C, minor quam G C, ᵇ minórque propterea erit proportio A C, ad B C, quam G C, ad B C. Sed componendo, vt G C, ad B C, ita est D F, ad E F. (quòd posita sit G B, ad B C, vt D E, ad E F.) Minor ergo etiam erit proportio A C, ad B C, quam D F, ad E F. Quod est propositum.*

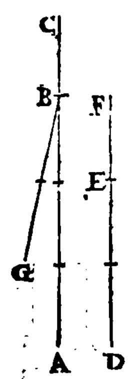
a 10. quinti. b 8. quinti.

*ALITER. Quoniam minor est proportio A B, ad B C, quàm D E, ad E F, erit maior proportio D E, ad E F, quàm A B, ad B C. ᶜ Igitur componendo, maior quoq; proportio erit D F, ad E F, quàm A C, ad B C, ac propterea, minor erit proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F. quod est propositum.*

c 28. quinti.

## 29. THEOR. 29. PROPOS. 29.

SI composita prima cum secunda ad secundam maiorem habuerit proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam: Habebit quoq; diuidendo prima ad secundam maiorem proportionem, quam tertia ad quartam.

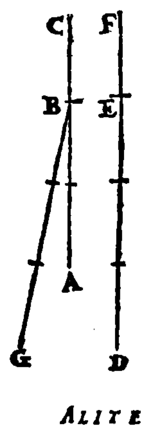


SIT maior proportio A C, ad B C, quam D F, ad E F. Dico & diuidendo maiorem esse proportionem A B, ad B C, quam D E, ad E F. Intelligatur enim esse G C, ad B C, vt D F, ad E F: eritque proportio A C, ad B C, maior quoque proportione G C, ad B C: ᵃ ideoque maior erit A C, quam G C. Ablata ergo communi B C: maior erit A B, quam G B: ᵇ Ac propterea maior erit proportio A B, ad B C, quam G B, ad B C. ᶜ Sed diuidendo, vt est G B, ad B C, ita est D E, ad E F. (Posita namque est G C, ad B C, vt D F, ad E F.) Igitur maior quoque erit proportio A B, ad B C, quam D E, ad E F. Quod est propositum.

*a 10. quinti. b 8. quinti. c 17. quinti.*

### *SCHOLIVM.*

*QVOD si prima cum secunda ad secundam, minorem proportionem habuerit, quam tertia cum quarta, ad quartam; habebit & diuidendo prima ad secundam, proportionem minorem, quam tertia ad quartam.*



*SIT enim minor proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F. Dico diuidendo quoque minorem esse proportionem A B, ad B C, quam D E, ad E F. Intelligatur enim esse G C, ad B C, vt D F, ad E F, eritque proportio A C, ad B C, minor quoque, quam G C, ad B C: ᵃ ideoque minor erit A C, quàm G C. Ablata ergo communi B C; minor erit A B, quàm G B: ᵇ Ac propterea minor erit proportio A B, ad B C, quàm G B, ad B C: ᶜ Sed diuidendo est, vt G B, ad B C, ita D E, ad E F. (Posita namque est G C, ad B C, ut D F, ad E F.) Igitur minor quoque proportio erit A B, ad B C, quam D E, ad E F. Quod est propositum.*

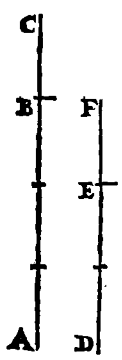
a 10. quinti. b 8. quinti. c 17. quinti.

*ALITER.*

Aliter. *Quoniam minor proportio est A C, ad B C, quàm D F, ad E F; erit maior proportio D F, ad E F, quàm A C, ad B C.* [a] *Igitur & diuidendo, maior erit proportio D E, ad E F, quàm A B, ad B C: atq; idcirco minor erit proportio A B, ad BC, quàm D E, ad E F. Quod est propositum.* a 29. quinti.

## THEOR. 30. PROPOS. 30. 30.

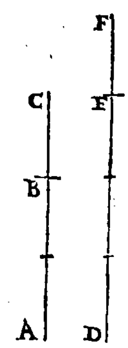
Si composita prima cum secunda, ad secundam habuerit maiorem proportionem, quàm composita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem proportionem, quàm tertia cum quarta, ad tertiam.




Sit maior proportio AC, ad B C, quàm D F, ad E F. Dico per conuersionem rationis, minorem esse proportionem A C, ad A B, quàm D F, ad D E. Cùm enim sit A C, ad B C, maior proportio, quàm D F, ad E F; [a] erit & diuidendo, maior proportio A B, ad B C, quàm D E, ad E F. [b] Quare conuertendo, minor erit proportio B C, ad A B, quàm E F, ad D E; [c] Ac propterea & componendo, minor erit proportio totius A C, ad A B, quàm totius D F, ad D E. Quod est propositum. *a 29. quinti. b 26. quinti. c 28. quinti.*

### SCHOLIVM.

*Non dissimili ratione ostendemus, si composita prima cum secunda minorem habuerit proportionem ad secundam, quàm composita tertia cũ quarta ad quartam, per conuersionem rationis, maiorem esse proportionem primæ & secundæ ad primam, quàm tertiæ & quartæ ad tertiam.*

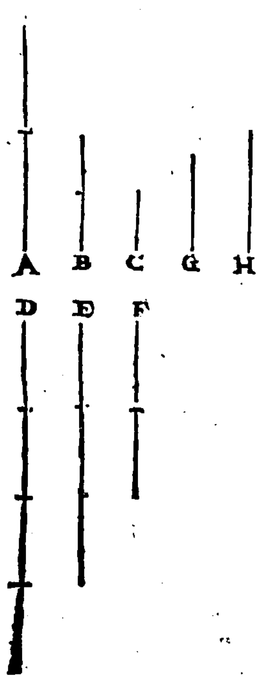



*Sit enim minor proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F. Dico per conuersionem rationis maiorem esse proportionem A C, ad A B, quàm D F, ad D E. Cùm enim minor sit proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F;* [a] *erit & diuidendo minor proportio A B, ad B C, quàm D E, ad E F. Quare* [b] *conuertendo, erit maior proportio B C, ad A B, quàm E F, ad D E:* [c] *Ac proinde & componendo maior proportio erit A C, ad A B, quàm D F, ad D E. Quod est propositum.* a 29. quinti. b 26. quinti. c 28. quinti.

Aliter. *Quoniam minor est proportio A C, ad B C, quàm D F, ad E F; erit maior proportio D F, ad E F, quàm A C, ad B C.* [d] *Ergo per conuersionem rationis minor erit proportio D F, ad D E, q̃ A C, ad A B: Hoc est, maior proportio erit A C, ad A B, quàm D F, ad D E. Quod est propositum.* d 30. quinti.

## THEOR. 31. PROPOS. 31. 31.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam, quàm primæ posteriorum ad secundam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quàm secundæ posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate maior proportio primæ priorum ad tertiam, quàm primæ posteriorum ad tertiam.

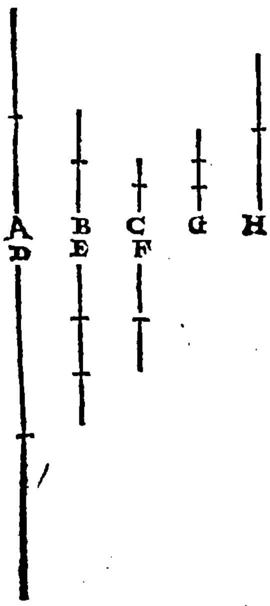



Sint tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitq; maior proportio A, ad B, quàm D, ad E; Item maior B, ad C, quàm E, ad F. Dico ex æqualitate maiorem quoque esse A, ad C, quàm D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, vt E, ad F; eritq; propterea proportio B, ad C, maior, quàm G, ad C; [a] Ideoque B, maior erit, quàm G. Quare [b] maior erit proportio A, ad G, minorem quàm A, ad B, maiorem. Ponitur autem proportio A, ad B, maior quàm D, ad E. Multò ergo maior erit proportio A, ad G, quàm D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E; eritque propterea maior proportio A, ad G, quàm H, ad G; [c] Ideoque A, maior erit, quàm H. [d] Quare maior quantitas A, ad C, habebit maiorem proportionem, quàm minor quantitas H, ad eandem C: [e] Atqui vt H, ad C, ita est, ex æqualitate D, ad F. (quoniam vt D, ad F, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo proportio quoque erit A, ad C, quàm D, ad F. Quod est propositum. *a 10. quinti. b 8. quinti. c 10. quinti. d 8. quinti. e 22. quinti.*

### SCHOLIVM.

*Eadem ratione ostendemus, si fuerit proportio A, ad B, quæ D, ad E: At B, ad C, maior quàm E, ad F: Vel contrà, si proportio A, ad B, fuerit maior quàm D, ad E: At B, ad C, eadem, quæ E, ad F; ex æqualitate maiorem esse quoque proportionem A, ad C, quàm D, ad F.*

*Sit enim primum A, ad B, vt D, ad E, sed maior proportio B, ad C, quàm E, ad F. Intelligatur esse G, ad C, vt E, ad F; eritq; propterea proportio B, ad C,*




a 10. quinti. *maior, quàm G, ad C:* [a] *Ideoq; B, maior erit, quàm G.* [b] *Quare maior erit pro-*
b 8. quinti. *portio A, ad G, quàm A, ad B. Ponitur autem A, ad B, vt D, ad E. Igitur & proportio A, ad G, maior erit, quàm D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E; eritq; propterea maior proportio A, ad G, quã H, ad G:* [c] *Ideoq; A, maior*
c 10. quinti. *erit, quàm H.* [d] *Quare maior erit proportio A, ad C, quàm H, ad C.* [e] *Atqui vt*
d 8. quinti. *H, ad C, ita est, ex æqualitate, D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; &*
e 22. quinti. *vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo proportio quoq; erit A, ad C, quàm D, ad F. Quod est propositum.*

*D*EINDE *sit maior proportio A, ad B, quàm D, ad E. sed B, ad C, vt E, ad F. Intelligatur esse G, ad C, vt E, ad F: eritq; propterea etiam B, ad C, vt G, ad*
f 9. quinti. *C:* [f] *ideoq; B, ipsi G, æqualis erit.* [g] *Quare erit A, ad G, vt A, ad B. Ponitur au-*
g 7. quinti. *tem proportio A, ad B, maior quàm D, ad E. Igitur & proportio A, ad G, maior erit, quàm D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E; eritq; propterea*
h 10. quinti. *maior proportio A, ad G, quàm H, ad G:* [h] *Ideoq; A, maior erit, quàm H.* [i] *Qua-*
i 8. quinti. *re maior proportio erit A, ad C, quàm H, ad C.* [k] *Atqui vt H, ad C, ita est, ex æ-*
k 22. quinti. *qualitate D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo erit quoque proportio A, ad C, q̃ D, ad F. Quod est propositum.*

*N*ON *dissimiliter demonstrabimus, si proportiones priorum magnitudinum minores fuerint, etiam proportionem extremarũ esse minorem. Idemq; eueniet, si fuerit A, ad B, vt D, ad E; sed minor sit proportio B, ad C, quàm E, ad F: Aut contrà; si proportio A, ad B, fuerit minor, quàm D, ad E; at B, ad C, sit, vt E, ad F. Eadem namque semper erit demonstratio, si modò vocem, maioris, vbique permutes in vocem minoris, vt patet.*

*Q*VOD *si plures fuerint magnitudines tribus, siue omnes proportiones in vno ordine magnitudinum sint maiores, vel minores omnibus proportionibus in alio ordine magnitudinum; siue vna tantùm maior, quàm vna vel duæ, &c. ostendemus maiorem vel minorem quoque esse proportionem primæ priorum ad vltimam, q̃ primæ posteriorum ad vltimam, ea methodo, quam propos. 22. tradidimus: adhibendo propos. 22. loco huius propos. 31. quando tres magnitudines vnius ordinis proportionales sunt tribus magnitudinibus alterius ordinis: item vsurpando hoc scholium, quando vna tantùm proportio in tribus magnitudinibus æqualis est vni tantùm proportioni in tribus magnitudinibus alterius ordinis.*

| | |
|---|---|
| A. | E. |
| B. | F. |
| C. | G. |
| D. | H. |

*N*AM *si maior est proportio A, ad B, quàm E, ad F; & maior B, ad C, quàm F, ad G; & maior*
l 31. quinti. *C, ad D, quàm G, ad H:* [l] *erit ex æquo maior proportio A, ad C, quàm E, ad G. Quia igitur rursus*
m 31. quinti. *maior proportio est A, ad C, quàm E, ad G; & maior C, ad D, quàm G, ad H,* [m] *erit quoq; ex æquo maior proportio A, ad D, quàm E, ad H.*

*Q*VOD *si tres magnitudines A, B, C, tribus E, F, G, proportionales sint, sed maior sit propor-*
n 22. quinti. *tio C, ad D, quàm G, ad H;* [n] *erit ex æquo A, ad C, vt E, ad G. Ergo ex hoc scholio, maior proportio erit A, ad D, quàm E, ad H.*

*S*I *verò maior proportio sit A, ad B, quàm E, ad F; sed tres B, C, D, proportionales sint tribus F, G, H; erit ex hoc scholio maior proportio A, ad C, quàm E, ad G: Et rursus maior A, ad D, quàm E, ad H.*

*S*I *autem maior sit proportio A, ad B, quàm E, ad F: sed B, ad C, vt F, ad G; at maior proportio C, ad D, quàm G, ad H. Vel A, ad B, vt E, ad F: sed maior proportio B, ad C, quàm F, ad G; at C, ad D, vt G, ad H. erit semper ex hoc scholio, maior proportio A, ad C, quàm E, ad G: ac proinde rursus maior A, ad D, quàm E, ad H, &c.*

*I*DEM *concludes, si omnes proportiones, vnius ordinis sint minores omnibus proportionibus alterius ordinis, vel vna, vel duæ. Item si sint plures magnitudines, vt propositione 22. diximus.*

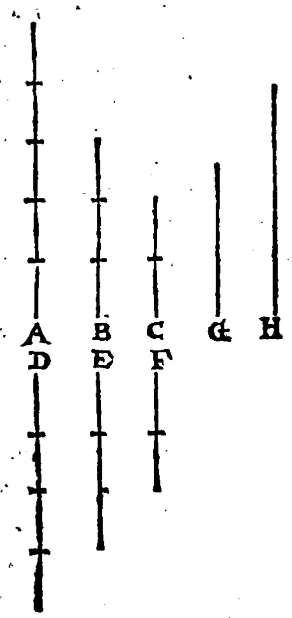
22.

## THEOR. 32. PROPOS. 32.

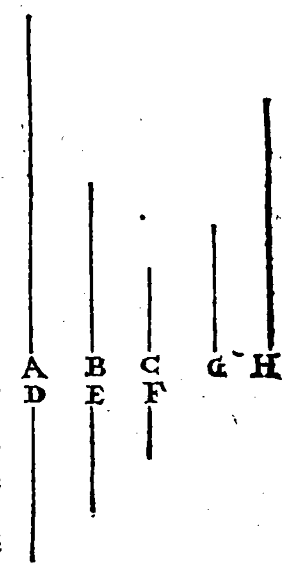
SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam, quàm secundæ posteriorum ad tertiam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quàm primæ posteriorum ad secundam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quàm primæ posteriorum ad tertiam.

SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitque maior proportio A, ad B, q̃ E, ad F. Item maior B, ad C, quàm D, ad E. Dico esse quoque maiorem proportionem ex æqualitate A, ad C, quàm D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, vt D, ad E; eritque propterea proportio B, ad C,
a 10. quinti. maior quàm G, ad C: [a] Ideoque maior erit B, quàm G. [b] Quare maior erit proportio A, ad G, mi-
b 8. quinti. norem, quàm eiusdem A, ad B, maiorem: Est autem proportio A, ad B, maior, quàm E, ad F. Multò ergo maior est proportio A, ad G, quàm E, ad F. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt E, ad F: Eritq;

propterea



propterea maior proportio A, ad G, quàm H, ad G; [a] ideoque maior erit A, quàm H. [b] Quocirca A, maior ad C, maiorem habebit proportionem, quàm H, minor ad eandem C: [c] At vt H, ad C, ita est ex æqualitate D, ad F. (Quoniam vt D, ad E, ita est G, ad C; & vt E, ad F, ita est H, ad G.) Maior ergo etiam est proportio A, ad C, quã D, ad F. Quod est propositum. a 10. quinti. b 8. quinti. c 23. quinti.



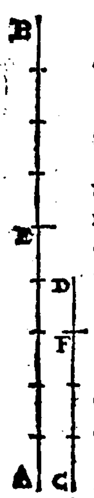
### SCHOLIVM.

*EADEM ratione, si fuerit proportio A, ad B, quæ E, ad F; At B, ad C, maior quàm D, ad E. Vel contrà, proportio A, ad B, maior quàm E, ad F: At B, ad C, eadem, quæ D, ad E; ostendemus, ex æqualitate maiorem esse proportionem A, ad C, quàm D, ad F, vt in proposita figura perspicitur.*

*HAVD secus ostendemus, si proportiones priorum magnitudinũ minores fuerint, etiam extremarum proportionem esse minorem, &c.*

*QVOD si fuerint plures magnitudines tribus, demonstrabimus, maiorem quoque vel minorem esse proportionem primæ priorum ad vltimam, quàm primæ posteriorum ad vltimam, ea arte, qua vsi sumus propos. 23. &c. Quæ omnia perspicua sunt, si diligenter demonstrationes scholij præcedentis propositionis considerentur.*

## THEOR. 33. PROPOS. 33. 33.



SI fuerit maior proportio totius ad totum, quàm ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quàm totius ad totum.

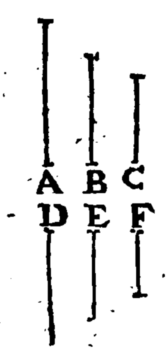
SIT maior proportio totius A B, ad totam C D, quàm ablatæ A E, ad ablatam C F. Dico & proportionem reliquæ E B, ad reliquam F D, maiorem esse, quàm totius A B, ad totam C D. Cùm enim maior sit proportio A B, ad C D, quàm A E, ad C F; [d] erit quoque permutando maior proportio A B, ad A E, quàm C D, ad C F; [e] ac propterea per conuersionem rationis, minor erit proportio A B, ad E B, quàm C D, ad F D. [f] Permutando igitur, minor quoque erit proportio A B, ad C D, quàm E B, ad F D; hoc est, E B, reliqua ad reliquã F D, maiorem habebit proportionem, quàm tota A B, ad totam C D. Quod est propositum. d 27. quinti. e 30. quinti. f 27. quinti.

### SCHOLIVM.

*QVOD si tota ad totam habuerit minorem proportionem, quàm ablata ad ablatam, habebit & reliqua ad reliquam minorem proportionem, quàm tota ad totam, vt ex modo demonstrandi liquet, ponendo semper vocem, minoris, pro voce, maioris; & vocem maioris, pro voce, minoris.*

## THEOR. 34. PROPOS. 34. 34.

SI sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsi æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad primam posteriorum, quàm secundæ ad secundam; & hæc maior quàm tertiæ ad tertiam, & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem proportionem, quàm omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorem autem, quàm prima priorum ad primam posteriorum; maiorem denique etiam, quàm vltima priorum ad vltimam posteriorum.

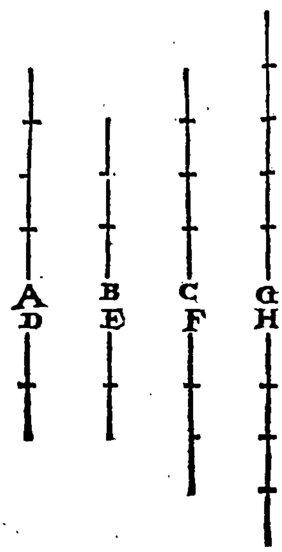


SINT primùm tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F; Sit autem maior proportio A, ad D, quàm B, ad E; Item maior B, ad E, quàm C, ad F. Dico proportionem ipsarum A, B, C, simul ad ipsas D, E, F, simul maiorem esse proportione ipsarum B, C, simul ad ipsas E, F, simul; minorem verò, proportione A, ad D; maiorem denique etiam proportionem C, ad F. Cùm enim maior sit proportio A, ad D, quàm B, ad E; [g] erit permutando maior A, ad B, quàm D, ad E. [h] Igitur componendo, maior erit proportio ipsarum A, B, simul ad B, quàm ipsarum D, E, simul ad E. [i] Permutando ergo rursus, maior erit proportio g 27. quinti. h 28. quinti. i 27. quinti.

A,B,simul ad D,E,simul,quàm B,ad E. Itaque cùm tota A,B,ad totam D,E,maiorem habeat pro-
a 33. quinti. portionem, quàm ablata B, ad ablatam E;[a] habebit quoque reliqua A, ad reliquam D, maiorem proportionem,quàm tota A,B,ad totam D,E. Eadem ratione,maior erit proportio B,ad E,quàm totius B,C,ad totam E,F. Multò ergo maior erit proportio A, ad D,quàm B,C, totius ad totam E,
b 27. quinti. F. [b] Permutando igitur,maior erit proportio A, ad B, C, quàm D, ad E, F;[c] & componendo ergo
c 28. quinti. maior est proportio totius A,B,C, ad B,C, q̃ totius D,E,F,ad E,F.[d] Et rursus permutando,maior
d 27. quinti. proportio omnium A,B,C,simul ad omnes D,E,F,simul,quàm B,C ad E,F. quod est primum.

Itaqve cùm sit maior proportio totius A,B,C, ad totam D,E,F, quàm ablatæ B,C, ad abla-
e 33. quinti. tam E,F;[e] erit & maior proportio reliquæ A, ad reliquam D, quàm totius A,B,C, ad totam D,E, F. quod est secundum.

f 27. quinti. Qvoniam verò maior est proportio B,ad E,quàm C,ad F;[f] erit permutando maior quoque
g 28. quinti. B,ad C,quàm E,ad F;[g] & componendo, maior totius B C,ad C,quàm totius E,F,ad F;[h] & rursus
h 27. quinti. permutando, maior B,C, ad E, F, quàm C, ad F. Est autem maior proportio A,B,C,ad D,E,F, vt ostendimus,quàm B,C,ad E,F Multò ergo maior erit proportio omnium A,B,C,ad omnes D,E, F,quàm vltimæ C,ad vltimam F; quod est tertium.




Deinde sint quatuor magnitudines vtrobique cum eadem hypothesi, hoc est,sit quoque maior proportio tertiæ C,ad F,tertiam,quàm G,quartæ ad H,quartam. Dico eadem consequi. Vt enim iam in tribus est ostensum, maior est proportio B, ad E, quàm B,C,G, ad E,F,
i 27. quinti. H. Multò ergo maior erit A,ad D,quàm B,C,G,ad E,F,H.[i] Permutan-
k 28. quinti. do ergo,maior erit A,ad B,C,G,quàm D,ad E,F,H;[k] & componendo
l 27. quinti. maior A,B,C,G, ad B,C,G,quàm D,E,F,H,ad E,F,H;[l] & permutãdo A, B, C, G, ad D, E, F, H, maior quàm B, C, G, ad E, F, H. quod est primum.

Itaqve cùm sit maior proportio totius A,B,C,G,ad totam D,E,
m 33. quinti. F,H,quàm ablatæ B,C,G,ad ablatam E,F,H;[m] erit & reliquæ A,ad reliquam D, maior proportio, quàm totius A,B,C,G, ad totam D,E,F, H;quod est secundum.

Qvoniam verò,vt in tribus est demonstratum,maior est proportio B,C,G,ad E,F,H, quàm G, ad H; & maior A,B,C,G, ad D,E,F,H, quàm B,C,G,ad E,F,H,vt fuit ostensum; multò maior erit proportio A,B, C, G, ad D, E, F, H, quàm vltimæ G, ad vltimam H; quod est tertium.

Eadem arte concludes, eadem consequi in quinque magnitudinibus per quatuor,& in sex per quinque, & in septem, per sex,&c. quemadmodum ostendimus in quatuor, per tres. Constat ergo totum Theorema,&c.

FINIS ELEMENTI QVINTI.

EVCLI-

# EVCLIDIS ELEMENTVM SEXTVM.

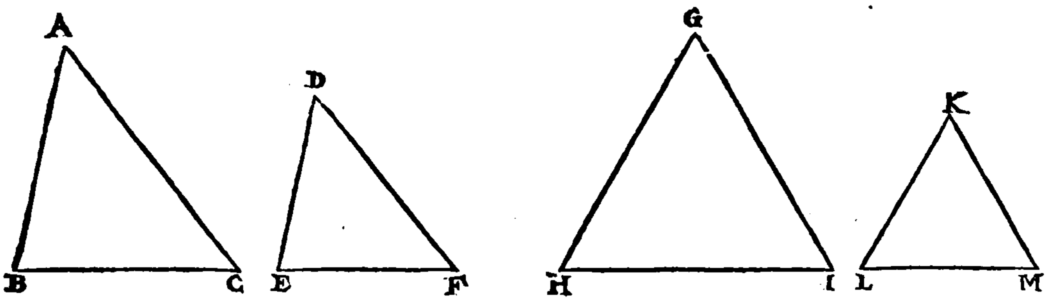
## DEFINITIONES.

### I.

SIMILES figuræ rectilineæ ſunt, quæ & angulos ſingulos ſingulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.

*VT triangula A B C, D E F, ſimilia dicentur, ſi fuerint æquiangula, ita vt angulus A, angulo D; & B, ipſi E; & C, ipſi F, æqualis ſit: Item latera circa æquales angulos proportionalia, hoc eſt, vt A B, ad A C, ita D E, ad D F; & vt A B, ad B C, ita D E, ad E F; & vt A C, ad C B, ita D F, ad F E.*

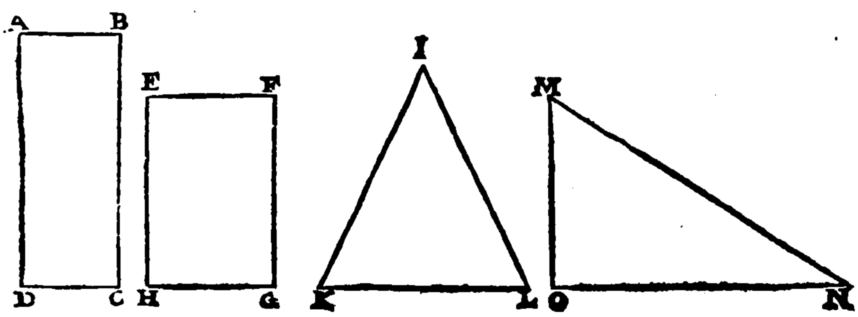
*QVOD ſi anguli vnius æquales fuerint angulis alterius, ſinguli ſingulis, at latera circa æquales angulos non proportionalia, aut contrà; non dicentur tales figuræ ſimiles: cuiuſmodi ſunt quadratum, & figura altera parte longior. Hæ etenim figuræ habent quidem angulos æquales, vtpote rectos, at latera vnius lateribus alterius proportionalia non ſunt; quip-*



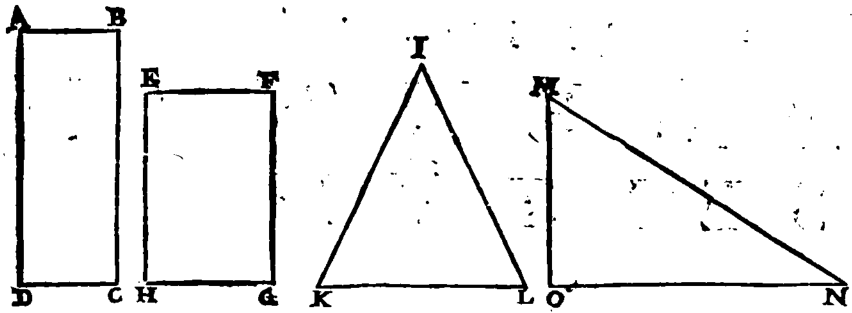

*pe cùm latera quadrati circa quemuis angulum rectum habeant proportionem æqualitatis: latera verò figuræ altera parte longioris circa quemuis angulum rectum, proportionem inæqualitatis. Ex quibus conſtat, omnes figuras rectilineas æquiangulas, & æquilateras, quæ & angulos & latera habent numero æqualia, eſſe ſimiles, quanquam inter ſe maximè ſint inæquales. Cuiuſmodi ſunt triangula æquilatera G H I, K L M. Propter laterum enim æqualitatem, erit G H, ad G I, vt K L, ad K M: Item G H, ad H I, vt K L, ad L M: & G I, ad I H, vt K M, ad M L, cùm ſemper ſit proportio æqualitatis. Idem dicendum eſt de quadratis, pentagonis æquilateris & æquiangulis, nec non de hexagonis, heptagonis, octogonis, & de alijs id genus figuris rectilineis æquiangulis, atque æquilateris.*

### II.

RECIPROCAE autem figuræ ſunt, cùm in vtraque figura antecedentes & conſequentes rationum termini fuerint.




*VT ſi in parallelogrammis A B C D, E F G H, latera A B, B C, ita proportionalia fuerint lateribus E F, F G, vt vtrobiq; ſit & antecedens & cõſequens diuerſarũ proportionũ, hoc eſt, vt ſit ea proportio*




A B, ad E F, quæ F G, ad B C: seu eadē A B, ad F G, qua E F, ad B C; (vtroque enim modo A B, est antecedens vnius proportionis, & B C, consequens alterius, in figura A B C D; quēadmodum & primo modo E F, est consequens vnius, & F G, antecedens alterius; vel secundo modo F G, consequens, & E F, antecedens, in figura E F G H,) dicentur huiusmodi parallelogramma reciproca, quamuis similia non sint. Similiter erunt triangula I K L, M N O; reciproca, si fuerit vt I K, ad M N, ita M O, ad I L; vel vt I K, ad M O, ita M N, ad I L. Neq; memini me inuenisse apud Geometras vsum reciprocarum figurarum in aliis figuris, quàm in parallelogrammis, & triangulis.

### III.

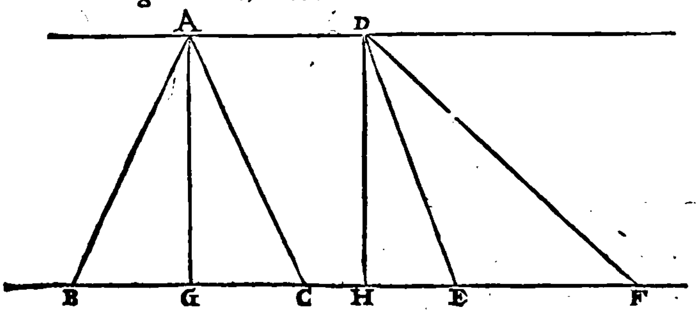
SECVNDVM extremā, & mediam rationem recta linea secta esse dicitur, cùm vt tota ad maius segmentum, ita maius ad minus se habuerit.


*Si linea recta quæuis A B, ita diuidatur in C, inæqualiter, vt sit, quemadmodum tota A B, ad maius segmentum A C, ita A C, maius segmentum ad C B, minus segmentum; dicetur diuisa esse secundum extremam, & mediam rationem. Quam quidem diuisionem docebit Euclides propos. 30. huius lib. eamq; sub aliis verbis iam docuit lib. 2. propos. 11. vt fiet perspicuum propos. 30. huius lib. Sunt autem penè innumeræ dignitates atq; vtilitates lineæ hoc modo diuisæ, vt ex libris Stereometriæ constabit, præsertim lib. 13. vt non immeritò à quibusdam dicta sit diuina proportio, in quam linea eo modo est diuisa.*

### IIII.

ALTITVDO cuiusq; figuræ est linea perpēdicularis à vertice ad basin deducta.

*Si à vertice A, trianguli A B C, ad basin B C, perpendicularis ducatur A G; dicetur hæc perpendicularis, altitudo trianguli A B C, ita vt tantam dicatur habere altitudinem triangulum, quanta est perpendicularis A G. Sic etiam perpendicularis D H, ducta à D, vertice trianguli D E F, ad basin E F, ad partes E, protractam, appellabitur altitudo trianguli D E F. Itaq; si duarum figurarum perpendiculares à verticibus ad bases (siue hæ protractæ sint, siue nō) demissæ, fuerint æquales, eandem dicentur huiusmodi figuræ habere altitudinem.*




*Tunc autem huiusmodi perpendiculares erunt æquales, cùm bases figurarum, ac vertices in eisdem constituti fuerint parallelis, cuiusmodi sunt perpendiculares A G, D H, triangulorum A B C, D E F, in eisdem parallelis constitutorum. Cùm enim anguli A G H, D H G, interni ex eadem parte sint duobus rectis æquales, immò duo recti; [a] erunt rectæ A G, D H, parallelæ; Sunt autem & A D, G H, parallelæ, eò quòd ponantur triangula in eisdem esse parallelis constituta. Igitur parallelogrammum erit A D H G; [b] ac propterea latera opposita A G, D H, æqualia erunt. Eandem igitur dicentur ea triangula habere altitudinem. Quòd si in eisdem triangulis vertices ponantur C, & F, bases verò A B, & D E, non habebunt ea eandem altitudinem. Perpendicularis enim ducta ex F, ad basin D E, protractam æqualis non est perpendiculari ex C, ad basin A B, deductæ, cùm nec triangula ipsa in eisdem parallelis possint constitui, vt manifestum est.*

a 28. primi.

b 34. primi.

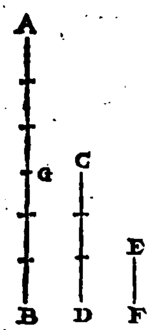
*RECTE verò ab Euclide altitudo figuræ cuiusuis definita est per lineam perpendicularem, quæ à vertice ad basin deducitur: quoniam, vt scribit Ptolemæus in libello de Analemmate, & referente Simplicio, in libro de Dimensione, mensura cuiuscunq; rei debet esse stata, determinataq;, & nō indefinita: Inter omnes autem rectas lineas, penes quas meritò Geometræ, sicut & vulgus, omnia metiuntur, sola linea perpendicularis certa est, determinataq; longitudinis, aliæ autem omnes incertæ indeterminataq;. Quâ de re plura scripsimus ad initium commentariorum, quos in Sphæram Ioan. de Sacro bosco edidimus.*

### V.

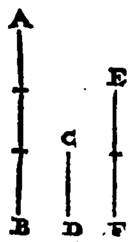
RATIO ex rationibus componi dicitur, cùm rationū quantitates inter se multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.

*QVONIAM denominator cuiuslibet proportionis exprimit, quanta sit magnitudo antecedens ad consequentem: (vt denominator quadruplæ proportionis, nempe 4. ostendit, in quauis proportione quadrupla antecedentem magnitudinem quater continere consequentem: denominator verò proportionis subquadruplæ, videlicet $\frac{1}{4}$. indicat antecedentem esse partem quartam consequentis, &c.) dici solet propterea denominator à Geometris, quantitas proportionis: vt idem significet quantitas alicuius proportionis, quod denominator. Vult igitur hæc definitio proportionem aliquã ex duabus, vel pluribus proportionibus componi, quando harum denominatores, seu quantitates inter se multiplicata effecerint illam proportionem, seu (vt vertit Zambertus) effecerint illius proportionis quantitatem, siue denominatorem. Vt proportio duodecupla componi dicitur ex dupla, & sextupla: quoniam denominator proportionis duodecuplæ, nimirum 12. producitur ex multiplicatione denominatoris duplæ proportionis, nempe ex 2. in denominatorem sextuplæ, hoc est, in 6. Sic eadem proportio duodecupla dicitur componi ex tripla & quadrupla. Nam ex multiplicatione 3. in 4. producitur idem denominator 12. duodecuplæ proportionis. Eadem ratione proportio trigecupla componi dicitur ex dupla, tripla, & quintupla. Nam harum denominatores 2. 3. 5. inter se multiplicati gignunt 30. denominatorem illius. Sic etiam proportio dupla dicetur componi ex sesquialtera, & sesquitertia: quia sesquialteræ denominator $1\frac{1}{2}$. ductus in $1\frac{1}{3}$. denominatorem sesquitertiæ, gignit 2. denominatorẽ duplæ. Rursus eadem proportio dupla componetur ex sesquiseptima, & supertripartiente quartas. Nam harum proportionum denominatores $1\frac{1}{7}$. $1\frac{3}{4}$. inter se multiplicati procreant 2. denominatorem duplæ. Item eadem dupla proportio componi dicetur ex sesquiquarta, & dupla sesquialtera; propterea quòd harum denominatores $\frac{4}{5}$. $2\frac{1}{2}$. inter se multiplicati producunt quoque eundem denominatorem 2. proportionis duplæ. Atque ita ex infinitis alijs proportionibus componi dicetur dupla proportio: quod etiam de quauis alia proportione dici potest, vt paulò pòst patebit.*

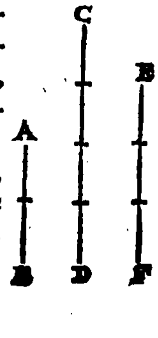
*PORRO quemadmodum in magnitudinibus continuè proportionalibus, proportio primæ ad vltimam componi dicitur ex proportione primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, tertiæ ad quartam, &c. cùm illa ex his intermedijs constet. & illius denominator ex harum denominatoribus inter se multiplicatis producatur, vt quinto libro defin. 10. exposuimus: ita vt si fuerint duæ proportiones æquales intermediæ, ex quibus dicitur componi, dicatur proportio primæ magnitudinis ad vltimam duplicata proportionis primæ ad secundam; si tres, triplicata, &c. Sic etiam in magnitudinibus quibuscunque ordine positis, proportio primæ ad vltimam dicetur componi ex proportione primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartã, &c. donec extiterit proportio; quoniam denominator proportionis primæ magnitudinis ad vltimam consurgit ex denominatoribus proportionum intermediarum inter se multiplicatis. Quod quidem primùm inductione quadam Theonis Alexandrini, quam hoc loco adducit, confirmabimus: Deinde verò idem duabus demonstrationibus, quarum vna traditur ab Eutocio Ascalonita lib. 2. Archimedis de Sphæra & Cylindro, theoremate 4. & in 1 lib. Apollonij Pergæi de Conicis elementis, propos. 11. Altera autem à Vitellione lib. 1. propos. 11. suæ Perspectiuæ, comprobabimus.*




*THEON igitur rem propositam ita conatur absoluere. Habeat A B, ad C D, rationem datam, veluti duplam, aut triplam, aut quamlibet aliam; & C D, ad E F, eandem quoque datam. Dico quòd ipsius A B, ad E F, ratio constat ex A B, ad C D; & ex C D, ad E F, ratione: vel quòd ipsius A B, ad C D, rationis quantitas multiplicata in ipsius C D, ad E F, rationis quantitatem, efficit ipsius A B, ad E F, rationis quantitatem. Sit enim primùm A B, quàm C D, maior; & C D, quàm E F: & sit quidem A B, ipsius C D, dupla, & C D, ipsius E F, tripla. Quoniam igitur C D, ipsius E F, tripla est, ipsius autem C D, dupla est A B erit A B, ipsius E F, sextupla. Quoniam si triplum alicuius duplicamus, fit sextuplum: hoc enim est propriè compositio. Vel sic. Quoniam A B, dupla est ipsius C D, diuidatur A B, in ipsis C D, æqualia, hoc est, A G, & G B: & quoniam C D, ipsius E F, tripla est; æqualis autem est A G, ipsi C D; & A G, igitur ipsius E F, tripla est: Id propterea & G B, ipsius E F, tripla est. Tota igitur A B, ipsius E F, sextupla est. Ipsius igitur A B, & E F, ratio connectitur per C D, medium limitem, composita ex ipsius A B, ad C D; & C D, ad E F, ratione.*




*SIMILITER autem, & si minor fuerit C D, vtraq; ipsarum A B, & E F, idipsum colligitur. Sit enim rursus A B, ipsius C D, tripla: At C D, ipsius E F, sit dimidia. Et quoniam C D, ipsius E F, dimidia est; Ipsius autẽ C D, tripla est A B; erit A B, sesquialtera ipsius E F. Si enim alicuius dimidium triplicamus, habebit ipsum semel, & dimidium. At quoniam A B, ipsius C D, tripla est; & C D, ipsius E F, dimidia: qualium A B, æqualium ipsi C D, trium talium est E F, duorũ. Quare sesquialterum est A B, ipsius E F. Igitur ratio ipsius A B, ad E F, connectitur per C D, medium limitem, composita ex ipsius A B, ad C D; & C D, ad E F, ratione.*

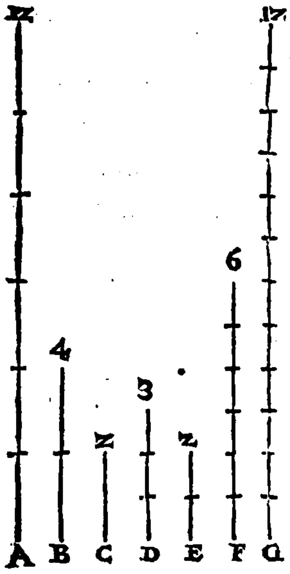



*SED iam rursus sit C D, vtraq; ipsarum A B, & E F, maior: & sit quidem A B, ipsius C D, dimidium, & C D, ipsius E F, sesquitertium. Quoniam igitur, qualium est A B, duorũ, talium est C D, quatuor: qualium autem C D, quatuor, talium E F, trium. Et qualium igitur A B, duorũ, talium E F, trium. Connectitur igitur rursus ratio ipsius A B, ad E F, per C D, medium* *limitem, quæ duorum est ad tria. Similiter quoque & in pluribus, & in reliquis casibus. Et manifestum est, quòd si à composita ratione queuis vna compositarum auferatur, vno simplicium eiecto, reliqua compositarum assumetur.*

HAEC *ad verbum desumpsimus ex Theone, iuxta interpretationem Zamberti.*

EVTOCII *verò demonstratio ita se habet.*

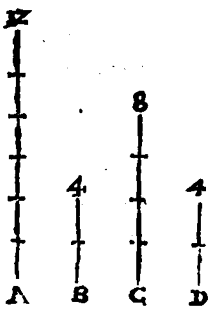
SINT *tres magnitudines A, B, C. Dico proportionem A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B; & B, ad C. Quod quidem facilè demonstrabitur, assumpto prius hoc principio: Quantitatem, seu denominatorem cuiusuis proportionis multiplicatum in consequẽtem magnitudinem proportionis eiusdem, producere antecedentem. Cùm enim denominator indicet habitudinem antecedentis ad consequentem, necesse est, consequentem sumptam secundùm denominatorem, hoc est, multiplicatam in denominatorem, restituere antecedentem. Vt quia 12. ad 3. habent proportionem quadruplam, idcircò 3. multiplicata in 4. producunt 12. Item quia 4. ad 20. habent proportionẽ subquintuplam, cuius denominator est $\frac{1}{5}$. fit, vt $\frac{1}{5}$. in consequẽtem 20. efficiat 4. &c. Sit igitur proportionis A, ad B, denominator D: proportionis verò B, ad C, denominator sit E; & D, multiplicans E, producat F. Dico F, esse quantitatem, siue denominatorem proportionis A, ad C, hoc est, si multiplicetur F, in C, produci A. Producatur namque G, ex multiplicatione F, in C. Dico G, ipsi A, æqualem esse, ac proinde & A, fieri ex F, in C. Cùm enim D, sit denominator proportionis A, ad B, si multiplicetur D, in B, producetur A. Eadem ratione, si E, multiplicetur in C, producetur B. Quoniam igitur F, & E, multiplicantes C, producunt G, & B; (nam ex F, in C, fit G; & ex E, in C, fit B, vt dictum est,) [a] erit vt F, ad E, ita G, ad B. Rursus quia D, multiplicans E, & B, producit F, & A; [b] erit vt E, ad B, ita F, ad A; & permutando vt E, ad F, ita B, ad A; & conuertendo rursus, vt F, ad E, ita A, ad B: Vt autem F, ad E, ita ostensum est esse G, ad B. Igitur vt A, ad B, ita G, ad B: Ideoq; æquales erunt quantitates A, & G. Quam ob rem cùm G, producatur ex F, in C, producetur quoque A, ex F, in C; proptereaq; F, quantitas erit proportionis A, ad C. Quod est propositum.*



a 18. septimi.
b 17. septimi.

| | | |
|---|---|---|
| A, 100. | B, 20. | C, 5. |
| D, 5. | E, 4 | |
| G, 100. | F, 20. | |

SIMILIS *ratio est in pluribus magnitudinibus. Semper enim proportio prima ad vltimã componetur ex proportionibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. Vt si fuerint quatuor magnitudines A, B, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad B, B, ad C, & C, ad D. Nam si intelligantur tres magnitudines A, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad C, & C, ad D, vt ostensum est: At verò eadem ratione proportio A, ad C, componitur ex proportionibus A, ad B, & B, ad C. Igitur proportio A, ad D, componitur quoq; ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Quod est propositũ. Idem cernes in 5. 6. 7. vel quotcunque magnitudinibus.*

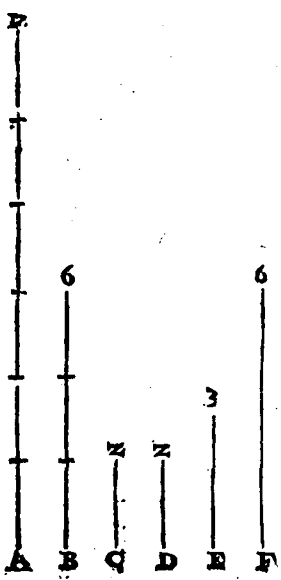


VITELLIO *denique huiuscemodi affert demonstrationem.*

SINT *tres magnitudines A, B, C, Dico proportionem A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B; & B, ad C. Hoc autem demonstrabitur, assumpto eodem principio Eutocij. Denominatorẽ videlicet proportionis multiplicatum in magnitudinem consequentem proportionis, producere antecedentem magnitudinem. Sit namque D, denominator proportionis A, ad B; & E, denominator proportionis B, ad C; At F, denominator proportionis A, ad C. Demonstrandum est igitur F, produci ex D, in E, quod ita fiet: Quoniam quod ex F, prima quantitate in C, quartam producitur, æquale est ei, quod ex D, secunda in B, tertiam gignitur, cũ semper producatur A; (nam ex F, denominatore in C, consequentem producitur A, antecedens: similiter ex D, denominatore in B, consequentem producitur antecedens A,) [c] erit vt F, prima ad D, secundam, ita B, tertia ad C, quartam. Cùm igitur E, sit denominator proportionis B, ad C; erit quoque E, denominator proportionis F, ad D. Quare E, multiplicans consequentem D, producet antecedentem F. Quod est propositum. Hæc Vitellio.*

| | | |
|---|---|---|
| A, 100. | B, 20. | C, 5. |
| D, 5. | E, 4. | |
| E, 20. | | |

c 19. septimi.



IDEM *ostendetur in pluribus magnitudinibus, vt prius ex Eutocio. Veluti datis sex magnitudinibus A, B, C, D, E, F, componetur proportio A, ad F, ex proportio-*

| A. | B. | C. | D. | E. | F. |
|---|---|---|---|---|---|
| 12. | 6. | 3. | 2. | 1. | 4. |

*proportionibus A,ad B; B,ad C; C,ad D; D,ad E; & E,ad F. Nam vt ostensum est, proportio A,ad F, componitur ex proportione A, ad B; & B, ad F. Hæc autem proportio B,ad F, componitur ex proportione B, ad C, & C,ad F. Et hæc proportio C,ad F, componitur ex proportione C,ad D, & D,ad F: Atq; hæc tandem proportio D,ad F, componitur ex proportione D, ad E, & E, ad F. Igitur proportio A,ad F, ex omnibus proportionibus intermedijs componitur: hoc est, denominator proportionis A, ad F, gignitur ex quinque denominatoribus quinque proportionum intermediarum inter se multiplicatis.*

*Ex his liquidò constat id, quod ad defin.10.lib.5.docuimus: nimirum Continuatis quotlibet quantitatibus continuè proportionalibus, proportionem primæ ad vltimam componi ex omnibus proportionibus intermedijs æqualibus, hoc est, denominatorem proportionis, quam prima ad vltimam habet, produci ex denominatore proportionis, quam prima habet ad secundam, in seipsum multiplicato, & ex eodem in numerũ productum, & sic deinceps, donec tot multiplicationes fiant, vna minus, quot proportiones inter primam quantitatem, & vltimã sunt interpositæ: Adeò vt duplicata proportio alicuius proportionis consurgat, cùm huius proportionis denominator bis ponitur, (propter duas æquales proportiones inter primam quantitatẽ & tertiam positas) atque ita in se multiplicatur: triplicata verò, quando idem denominator ter ponitur, (propter tres proportiones æquales inter primam quantitatem, & tertiam positas) atq; ita multiplicatur, primùm in se, deinde iterum in numerum productum. Et sic de quadruplicata, quintuplicata, & de alijs dicendum est in infinitum. Est enim eadem demonstratio in magnitudinibus continuè proportionalibus, & in magnitudinibus non proportionalibus: Solùm in illis denominatores æquales erunt. Vt si A,B,C, ponantur continuè proportionales, æquales erunt denominatores D,E, & F, erit denominator proportionis duplicatæ, &c.*

*Etsi autem demonstratio tam Eutocij, quàm Vitellionis propriè quadrat in proportiones tantùm rationales, cùm vtraque propositionibus lib.7. Euclidis nitatur: quia tamen, quæ de numerorum proportionibus demonstrantur, conueniunt quoq; magnitudinibus incommensurabilibus, hoc est, proportionibus irrationalibus, dici potest vtraq; demonstratio omnibus proportionibus conuenire.*

*Verum etiamsi non constaret, propositis pluribus magnitudinibus denominatorem proportionis, quam prima ad vltimã habet, produci ex multiplicatione denominatorũ intermediarum proportionũ inter se, vt demonstrauimus; nõ tamen propterea demonstrationes, in quibus compositio proportionũ adhibetur, minus certæ erunt: quippe cũ in illis hæc denominatorũ multiplicatio non vsurpetur. Nam quemadmodũ, propositis pluribus magnitudinibus continuè proportionalibus, primã ad tertiam dixit Euclides defin.10. lib.5. habere proportionẽ duplicatam eius, quã prima habet ad secundam: nimirum compositã ex duabus proportionibus intermedijs æqualibus: primã verò ad quartam habere proportionem triplicatam eius, quã prima ad secundam habet, hoc est, compositam ex tribus intermedijs proportionibus æqualibus: & sic deinceps; nulla facta mentione multiplicationis denominatorũ: Ita quoq; si ponãtur ordine plures magnitudines eiusdem generis non continuè proportionalibus, dicetur prima ad vltimã habere proportionẽ compositam ex omnibus proportionibus intermedijs, licet inter se non sint omnes æquales, siue aliquæ sint maioris inæqualitatis, & aliquæ æqualitatis, & aliquæ minoris inæqualitatis, siue omnes eiusdem generis sint, solùm eam ob causam, quod illæ proportiones intermediæ sint inter extremas duas magnitudines interiectæ; quemadmodũ defin.10.lib.5. proportio primæ ad tertiam dicebatur duplicata, hoc solo nomine, quia duæ proportiones æquales interpositæ sunt inter extremas duas magnitudines: Adeò vt nõ sit aliud discrimen inter hanc compositionẽ proportionum, & illam duplicationẽ, triplicationẽ, &c. quæ lib.5. explicata est, quàm quòd in duplicatione, triplicatione, &c. proportionũ interijciuntur proportiones omnes æquales: in cõpositione verò proportionũ non necesse est, interpositas proportiones æquales esse. Multiplicatio tamen denominatorũ vtilis est, vt sciamus, quænam sit illa proportio quæ alterius dicitur duplicata, triplicata, etc. vel quæ ex propositis proportionibus cõposita esse dicitur:*

*Verbi gratia. Vt sciamus, quæ proportio sit illa, quæ dicitur duplicata proportionis decuplæ, ponemus 10. denominatorem decuplæ proportionis bis hoc modo, 10.10. & vnum in alterum ducemus. Numerus enim genitus 100. denominator est proportionis, quæ decuplæ est duplicata. Vt autem habeamus denominatorem proportionis, quæ eiusdem decuplæ triplicata dicitur, ponemus 10. denominatorem ter hoc modo, 10.10.10. & primum in secundum ducemus, & numerum productum 100. in tertium. Nam numerus hic procreatus 1000. denominat proportionem decuplæ triplicatam. Quod de alijs quoq; proportionibus dicendum est. Sed hoc etiam discemus absq; denominatorum multiplicatione. Nam si continuentur tres numeri in proportione data, vt in tractatu proportionum, cùm de proportionalitate Geometrica agebamus, docuimus, habebunt duo extremi numeri proportionem datæ proportionis duplicatam: si verò continuentur quatuor numeri, habebunt extremi duo triplicatam proportionem datæ proportionis. Conferendus autem est maior cum minore, quando data proportio est maioris inæqualitatis: minor verò cum maiore, cùm data proportio minoris inæqualitatis est. Veluti si desideretur proportio decuplæ proportionis duplicata, continuabimus tres numeros in proportione decupla, hoc modo, 1.10.100. Vel 3.30.300. Nam proportio 100. ad 1. vel 300. ad 3. quæ centupla est, dicetur decuplæ duplicata. Eodem modo proportio 1. ad 100. vel 3. ad 300. quæ subcentupla est, dicitur duplicata proportionis subdecuplæ 1. ad 10. vel 3. ad 30.*

*Eadem ratione, vt cognoscamus, quænã sit proportio illa, quæ (verbi gratia) cõponi dicitur ex tripla,* *dupla, sesquialtera, & sesquitertia, statuemus ordine harũ denominatores hoc modo, 3. 2. $1\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{3}$. eosq; inter se multiplicabimus, primùm 3. in 2. deinde productum numerũ 6. in 1. $\frac{1}{2}$. & hunc rursus numerũ procreatum 9. in $1\frac{1}{3}$. & sic deinceps, si plures essent denominatores. Vltimus enim productus 12. est denominator proportionis, quæ ex datis proportionibus cõponi dicitur; ita vt proportio duodecupla componi dicatur ex tripla, dupla, sesquialtera, & sesquitertia. Hoc aũt intelligemus etiam sine hac multiplicatione denominatorum. Si namq; proportiones componentes continuentur in numeris, ita vt primus ad secundum habeat primam proportionem componentem, secundus ad tertium secundam, tertius ad quartum tertiam, quartus ad quintum quartam, & ita deinceps; erit proportio, quam primus numerus habet ad vltimum, composita ex datis proportionibus. Vt in proximo exẽplo proportiones datæ, videlicet tripla, dupla, sesquialtera, & sesquitertia, continuantur in his numeris 36. 12. 6. 4. 3. Vel in his 108. 36. 18. 12. 9. Vel in his 12. 4. 2. $1\frac{1}{3}$. 1. Vbique enim primus numerus ad secundum proportionem habet triplam, secundus ad tertium duplam, tertius ad quartũ sesquialteram, & quartus ad quintum sesquitertiam. Proportio ergo primi ad vltimum, quæ duodecupla est, componi dicitur ex quatuor illis proportionibus, vt prius. Quo pacto autẽ quotuis proportiones continuandæ sint in numeris integris minimis, docet Euclides lib. 8. propos. 4.*

ITAQVE *cùm Euclides demonstrat hoc lib. propos. 23. æquiangula parallelogrãma habere proportionem compositã ex duabus proportionibus, quas duo latera circa vnũ angulum vnius habent ad duo latera circa angulum æqualem alterius, nihil aliud intelligit, quàm si duæ illæ proportiones laterum continuentur in tribus quantitatibus, eam proportionẽ parallelogrãma inter se habere, quam prima quantitas ad tertiam habet. Vt si proportio vnius lateris primi parallelogrammi ad vnũ latus secundi fuerit, vt 8. ad 3. proportio verò alterius lateris ad alterũ latus, vt 1. ad 2. nihil aliud est intelligendũ, quàm si sumantur tres numeri, 24. 9. 18. quorũ primus ad secundũ est, vt 8. ad 3. & secundus ad tertium, vt 1. ad 2. proportionẽ parallelogrãmi primi ad secundũ esse eandem, quam habet primus numerus 24. ad tertium 18. quæ est sesquitertia. Proportio enim 24. ad 18. componitur, vt dictum est, ex proportionibus 24. ad 9. & 9. ad 18. hoc est, ex proportionibus 8. ad 3. & 1. ad 2. quas inter latera esse diximus.*

PORRO *quemadmodũ interpretes nonnulli Euclidis volebant in defin. 10. lib. 5. duplicatã proportionem, & triplicatam, &c. verè esse maiorẽ illa, cuius duplicata, vel triplicata dicitur, nimirũ duplam, vel triplam, &c. ac propterea eam definitionem esse intelligendam de magnitudinibus continuè proportionalibus in proportione maioris inæqualitatis; quod tamen falsum esse ibi indicauimus: ita ijdem volunt etiam in hac cõpositione proportionũ, extremorum proportionẽ, quæ ex proportionibus intermediis cõponi dicitur, verè esse maiorẽ qualibet intermediarum componentium, vtpote conflatam ex additione omnium intermediarũ proportionũ inter se, ac proinde omnes intermedias proportiones debere esse minores extremorũ proportione. Verùm hoc falsum est, & Euclidi omnino repugnans, vt ex proximo exẽplo, quod ex propos. 23. huius lib. protulimus, perspicuum est. Nam propositis tribus hisce numeris, 24. 9. 18. qui habent easdem proportiones ordine inter se, quas latera vnius parallelogrãmi ad latera alterius parallelogrammi habent; erit proportio parallelogrãmi ad parallelogrammum eadem, quæ 24. ad 18. nimirum ex laterum proportionibus cõposita, vt Euclides demonstrat. Quis autem non videt, proportionem 24. ad 18. quæ sesquitertia est, multò minorem esse proportione 24. ad 9. quæ dupla est superbipartiens tertias? Sed de hac re plura scribemus ad finem lib. 9.*

HAEC *cum ita sint, si quis velit habere quotlibet proportiones datam proportionem componentes, id est, quarum denominatores inter se multiplicati gignant datæ proportionis denominatorẽ, statuendi erunt inter duos numeros datæ proportionis quoscunq; tot numeri medij quicunq;, quot proportiones componẽtes desiderantur, minus vno. Vt si quis velit tres proportiones, ex quibus cẽtupla proportio componatur, satisfiet quæstioni, si inter 100. & 1. duos numeros ponamus medios, hoc modo, 100. 50. 10. 1. Nam extremorum proportio 100. ad 1. componitur ex intermediis tribus, hoc est, ex dupla, quintupla, & decupla. Ita quoq;, si alios numeros statuas medios hoc modo, 100. 10. 3. 1. componetur eadem proportio 100. ad 1. ex decupla, tripla, sesquitertia, & tripla. Sic etiam vides hic, 2. 3. 1. 10. 1. duplam proportionem compositam esse ex quatuor, nimirum ex subsesquialtera, tripla, subdecupla, & decupla. Quòd si quis petat quotuis proportiones datam proportionem componentes, quæ etiam omnes datæ sint præter vnam, continuabimus ab vno extremo datæ proportionis omnes datas proportiones componentes ordine. Hæ enim cum proportione, quam vltimus medius ad alterum extremum datæ proportionis habet, componẽt datam proportionẽ. Vt si quis dicat, Da mihi quinq; proportiones, quarum quatuor sint, dupla, tripla, sesquialtera, & quintupla sesquitertia, componentes proportionem sesquialteram inter 9. & 6. statuemus hos quatuor numeros medios, 9. $4\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$. 1. $\frac{3}{16}$. 6. ita vt 9. ad $4\frac{1}{2}$. habeant proportionem duplam, & $4\frac{1}{2}$. ad $1\frac{1}{2}$. triplam: & $1\frac{1}{2}$. ad 1. sesquialteram: & 1. ad $\frac{3}{16}$. quintuplam sesquitertiam. Ex his etenim quatuor, vnà cum proportione $\frac{3}{16}$. ad 6. quæ eadem est, quæ 1. ad 32. componitur proportio sesquialtera 9. ad 6. Idem eueniet, si datæ quatuor proportiones cõtinuentur à minori extremo 6. hoc modo, 6. 12. 36. 54. 288. 9. ita vt 12. ad 6. habeant proportionem duplam; & 36. ad 12. triplam; & 54. ad 36. sesquialteram: & 288. ad 54. quintuplam sesquitertiam. Nam quinta proportio 9. ad 288. eadem est, quæ prius $\frac{3}{16}$. ad 6. qualis est 1. ad 32.*

EX *his nullo negotio satisfaciemus quæstioni, qua quispiam postulat sibi dari quotuis numeros, qui inter se multiplicati procreent datum quemcunq; numerum. Si namque sumantur duo numeri habentes proportionem*

*portionem à dato numero denominatam,& inter eos statuantur tot numeri quicunque, minus vno, quot numeri desiderantur,erunt denominatores proportionum intermediarum,qui quæruntur. Nam ij inter se multiplicati producunt denominatorem proportionis extremorũ,vt demonstratum est, hoc est, numerũ datum. Veluti si quis petat tres numeros,ex quorum mutua multiplicatione gignantur 100.statuemus inter duos numeros 500.5.centuplam proportionẽ habẽtes,duos medios numeros quoscunque, hoc modo, 500.250.50.5.eruntque tres quæsiti numeri, 2.5.10. nimirum denominatores proportionum 500. ad 250. & 250. ad 50. & 50. ad 5. Nam ex 2. in 5. fiunt 10. & ex 10. in 10. fiunt 100. Quod si quis postulet vnum numerum, qui vnà cum quotlibet aliis datis, si inter se multiplicentur, producat datum quemcunque numerum: Sumendi erunt rursus duo numeri proportionem habentes à dato numero,qui produci debet,denominatam,& ab alterutro eorum continuandæ proportiones à datis aliis numeris denominatæ.Denominator enim proportionis inter alterum numerum,& vltimum continuatorum erit numerus,quem quærimus. Vt si dentur hi quatuor numeri, 2. 3. $1\frac{1}{2}$.$5\frac{1}{3}$.quæraturque quintus alius, qui in numerum ex illorum mutua multiplicatione productum ductus gignat datum hunc numerum $1\frac{1}{2}$.accipiemus duos numeros 9.& 6.proportionem sesquialteram habentes a dato numero $1\frac{1}{2}$.denominatam: & à 9.continuabimus quatuor proportiones à 2.3.$1\frac{1}{2}$.$5\frac{1}{3}$.denominatas,hoc modo,9.$4\frac{1}{2}$.$1\frac{1}{2}$.1.$\frac{3}{16}$.6. Quintus enim numerus quæsitus erit denominator proportionis $\frac{3}{16}$.ad 6.nimirum $\frac{1}{32}$.Nam quinque hi numeri,2.3.$1\frac{1}{2}$.$5\frac{1}{3}$.$\frac{1}{32}$.quorum priores quatuor dati sunt, quintus autem inuetus, inter se multiplicati procreant datum numerum $1\frac{1}{2}$.idem quintus numerus $\frac{1}{32}$.inuenietur, si quatuor proportiones à datis numeris denominatæ continuentur à numero 6. hoc modo,6.12.36.54.288.9. Denominator enim proportionis 9.ad 288.est $\frac{1}{32}$. vt prius.Sic etiam si quærendi sint quatuor numeri, qui inter se multiplicati procreent 1.statuemus inter quosuis datos numeros æquales proportionem æqualitatis ab 1. denominatam habentes,tres medios numeros quoslibet,vt hic vides,4. 2.1. 3.4. Nam denominatores proportionum 4.ad 2.& 2.ad 1.& 1.ad 3.& 3.ad 4.nimirum 2. 2.$\frac{1}{3}$. $\frac{3}{4}$.sunt quatuor numeri,qui quæruntur, quippe cum inter se multiplicati gignant 1.*

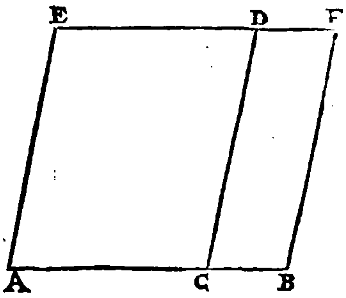
FACILIVS huiusmodi quæstiones soluuntur,si tot numeri quicunque, minus vno,quot petuntur, inter se multiplicentur & per vltimum numerum productum diuidatur datus numerus qui gigni debet.Quotiens enim & assumpti numeri,qui multiplicati inter se sunt,erunt quos quærimus.Vt in proxima quæstione,si hi tres numeri, verbi gratia, 4.5.6 inter se multiplicẽtur,& per numerum productũ 120.diuidatur 1. quæ produci debet.fiet Quotiens $\frac{1}{120}$.Quatuor ergo numeri quæsiti sunt 4.5.6.$\frac{1}{120}$.Nam ex 4.in 5.fiunt 20. & ex 20.in 6.fiunt 120.& ex 120.in $\frac{1}{120}$.fit 1.*

POSTREMO neque hoc prætermittẽdum est,videlicet: Quemadmodum, ordine positis quotcunque numeris,denominator proportionis extremorum producitur ex omnibus denominatoribus intermediarũ proportionum,vt demonstrauimus:ita positis quotcunque numeris ordine,ita tamen,vt quilibet insequens sit suo antecedente maior,differentia extremorum coaceruatur ex omnibus differentiis intermediorũ numerorum. Vt hic 3.7.12.20.30.100.713.differentia inter 3.& 713.est 710. At differentia inter 3. & 7. est 4. Inter 7. & 12. est 5.Inter 12.& 20.est 8.Inter 20.& 30.est 10.Inter 30.& 100.est 70.Inter 100.denique & 713. est 613. quæ omnes differentiæ,4.5.8.10.70.613.conficiunt 710.differentiam extremorum.*

ATQVI hæc dicta sint de quinque definitionibus ab Euclide hoc 6.lib.positis,quibus addendam esse censemus sequentem sextam,quæ multum conducet,vt facilius intelligantur 27.28.29.& 30.propositiones huius libri,& quamplurima alia decimi libri.Ea autem est eiusmodi.*

## VI.

PARALLELOGRAMMVM secundum aliquam rectam lineam applicatum, deficere dicitur parallelogrãmo,quando non occupat totam lineã:Excedere verò, quando occupat maiorẽ lineam,quàm sit ea,secundum quã applicatur:ita tamen, vt parallelogrammũ deficiens,aut excedens eandem habeat altitudinem cum parallelogrammo applicato,constituatque cum eo totum vnum parallelogrammum.



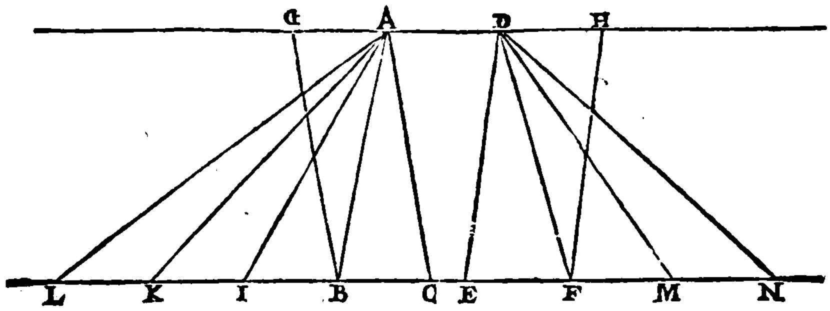

*SIT data recta linea A B,supra quam constituatur parallelogrammum A C D E,quod non occupet totam lineam A B,sed desit C B;& ducta B F,parallela ipsi C D,donec cum E D,protracta cõueniat in F, compleatur totum parallelogrammum A B F E. Parallelogrammum igitur A D, applicatum secundum rectã A B,deficere dicitur parallelogrammo D B,ita vt D B,appelletur defectus.*

*RVRSVS sit data recta linea A C,supra quam constituatur parallelogrammũ A B F E,quod habeat latus A B,maius recta data A C:& ducatur C D,ipsi B F,parallela.Parallelogrammũ igitur A F, applicatũ secundum rectam A C,excedere dicitur parallelogrammo D B,ita vt D B, vocetur excessus.*

*HIC autem defectus D B, vel excessus, in rectangulis quidem esse potest vel quadratum, vel altera parte longior figura:In non rectangulis autem vel Rhombus,vel Rhomboides,vt perspicuum est.*

1. ## THEOR. 1. PROPOS. 1.

TRIANGVLA & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, vt bases.




SINT duo triangula A B C, D E F, eandem habentia altitudinem, quorũ bases B C, E F. Itẽ duo parallelográma C G, E H, eiusdem altitudinis, quorũ eædem bases B C, E F. Dico ita esse triangulum A B C, ad triãgulum D E F, & parallelogrammum C G, ad parallelogrammum E H, vt est basis B C, ad basin E F. Hoc est, si basis B C, statuatur prima magnitudo, & basis E F, secunda: At triangulum A B C, vel parallelogrammum C G, tertia, & triangulum D E F, vel parallelogrammum E H, quarta; æquemultiplicia primæ ac tertiæ ab æquemultiplicibus secundæ & quartæ vel vnà deficere, vel vnà æqualia esse, vel vnà excedere, vt definitio 6. lib. 5. exigit. Collocentur enim tam triangula, quàm parallelogramma inter easdem parallelas G H, L N. (Nam vt in definitione 4. dictum est, triangula & parallelogramma tum demum eandem habebunt altitudinem, cùm inter easdem fuerint constituta parallelas: sic enim perpendiculares à verticibus ad bases demissæ æquales erunt,) & ex B L, sumantur quotcunque rectæ B I, I K, K L, ipsi B C, æquales; Item ex F N, abscindantur quotcunque

a 38. primi. rectæ F M, M N, æquales rectæ E F. Deinde ex A, & D, deducantur rectæ A I, A K, A L; D M, D N. [a] Erunt igitur triangula A B C, A I B, A K I, A L K, super æquales bases, & inter easdẽ parallelas constituta, inter se æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triangula D E F, D F M, D M N. Quàm multiplex est ergo recta C L, rectæ B C, tam multiplex quoque erit triangulum A C L, trianguli A B C; & quàm multiplex est recta E N, rectæ E F, tam quoque multiplex erit triangulum D E N, trianguli D E F: quia in tot triangula æqualia sunt diuisa tota triangula A C L, D E N, in quot rectas æ-

b 38. primi. quales sectæ fuerunt totæ rectæ C L, E N. Quoniam verò si basis C L, æqualis fuerit basi E N, [b] necessariò triangulum A C L, æquale est triangulo D E N; ac proinde si C L, maior fuerit quàm E N, necessariò A C L, maius est, quàm D E N, & si minor, minus; deficient propterea vnà C L, recta, & triangulum A C L, æquemultiplicia primæ magnitudinis B C, & tertiæ A B C, ab E N, recta, & triangulo D E N, æquemultiplicibus secundæ E F, & quartæ D E F, vel vnà æqualia erunt, vel vnà

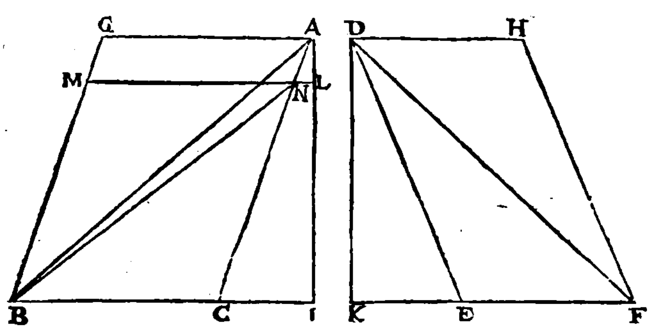
c 6. definit. quinti. excedent, si ea sumantur, quæ inter se respondent. [c] Quare quæ proportio est primæ B C, ad secundam E F, basis ad basin, ea est tertiæ A B C, ad quartam D E F, trianguli ad triangulum. Sicut igitur basis ad basin, ita est triangulum ad triangulum. quod est propositum.

d 15. quinti. e 34. primi. f 34. primi. g 11. quinti. QVONIAM autẽ [d] vt triangulum A B C, ad triangulum D E F, ita est parallelogrammum C G, ([e] quod duplum est trianguli A B C.) ad parallelogrammum E H; ([f] quod est duplum trianguli D E F,) perspicuum est, [g] ita quoque esse parallelogrammum ad parallelogrammũ, vt est basis ad basin. Quod tamen eodem argumento confirmari potest, quo vsi sumus in triangulis, si prius ex punctis I, K, L, educantur rectæ parallelæ ipsi B G: nec non ex punctis M, N, parallelæ ipsi F H, &c. Triangula igitur & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo; ita se habent inter se, vt bases. Quod erat demonstrandum.

### *SCHOLIVM.*

*SED & conuersum huius demonstrabimus. Videlicet:*

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, vt bases, æquales habẽt altitudines, vel eandem.




*SIT triangulum A B C, ad triangulum D E F; & parallelogrammum A G B C, ad parallelogrammum D E F H, vt basis B C, ad basin E F. Dico eorum altitudines, nimirum perpendiculares A I, D K, esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit A I, si fieri potest, maior, quàm D K. Abscissa igitur I L, ipsi D K, æquali, ductáque L M, ipsi B C, parallela, quæ latus A C, secet in N, coniunctáque recta B N,* [a] *erit*

a 1. sexti.

b 11. quinti. *N B C, triangulum ad triangulum D E F, vt basis B C, ad basim E F; cùm altitudines L I, D K, ponantur æquales: Sed fuit etiam A B C, ad D E F,*

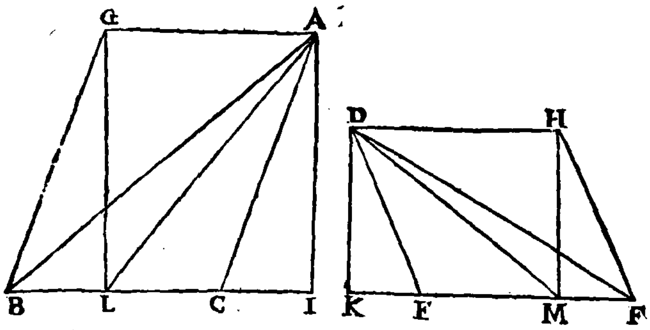
c 9. quinti. *vt B C, ad E F.* [b] *Igitur triangula N B C, A B C, ad triangulum D E F, eandem habent proportionem;* [c]

*At*

*Ac proinde æqualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt altitudines A I, D K, sed æquales. Eadem est ratio in parallelogrammis. Simili enim argumento ostendemus, parallelogramma N M B C, A G B C, æqualia esse, si altitudines A I, D K, inæquales dicantur, & L I, D K, æquales.*

*ADDIT hoc loco Federicus Commandinus aliud theorema, quod nos breuius demõstrabimus. Videlicet:*

TRIANGVLA, & parallelogramma, quorum æquales sunt bases, vel eadem, ita se habent inter se, vt altitudines.

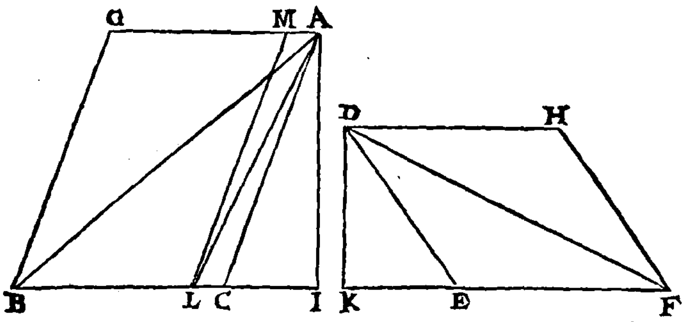



*SINT duo triangula A B C, D E F; & parallelogramma A G B C, D E F H, habentia bases æquales B C, E F. Dico esse triangulum A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammum A G B C, ad parallelogrammum D E F H, vt altitudo A I, est ad altitudinem D K. Si enim sumantur rectæ I L, K M, basibus B C, E F, æquales, ducantúrque rectæ L A, M D; [a] erit triangulum A L I, triangulo A B C, æquale, cùm sint super bases æquales L I, B C, & inter easdem parallelas A G, I B. Eodem modo æquale erit triangulum D K M, triangulo D E F. [b] Quare erit vt A B C, ad D E F, ita A L I, ad D K M: [c] Est autem, vt A L I, ad D K M, ita A I, ad D K. (Nam si bases ponantur A I, D K, erunt rectæ æquales L I, K M, altitudines.) Igitur & A B C, ad D E F, erit, vt A I, ad D K. Quod est propositum.* a 38. primi. b 7. quinti. c 1. sexti.

*QVONIAM verò est, [d] vt A B C, ad D E F, ita parallelogrammum A G B C, [e] quod trianguli A B C, duplum est ad parallelogrammum D E F H, [f] quod trianguli D E F, est duplum: [g] Erit quoq; A G B C, ad D E F H, vt A I, ad D K. Quod tamen eodem modo confirmari potest, si rectæ ducantur L G, M H. Idem sequetur, si triangula, & parallelogramma eandem habuerint basin.* d 15. quinti. e 34. primi. f 34. primi. g 11. quinti.

*HOC verò conuertemus etiam, ad hunc modum.*

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, vt altitudines, æquales habent bases, si vnam & eandem non habeant.




*SIT triangulum A B C, ad triangulum D E F; & parallelogrammũ A G B C, ad parallelogrammũ D E F H, vt altitudo A I, ad altitudinem D K. Dico eorũ bases B C, E F, æquales esse. Si enim non sunt æquales, sit B C, si fieri potest, maior, quàm E F. Abscissa igitur B L, ipsi E F, æquali, ductaq; recta L A; erit, vt proximè demonstrauimus, A B L, ad D E F, vt A I, ad D K: Sed vt A I, ad D K, ita ponitur esse A B C, ad D E F. [h] Igitur A B L, A B C, ad D E F, eandem habent proportionem. [i] Ac proinde inter se æqualia sunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt bases B C, E F, sed æquales. Eademq; est ratio de parallelogrammis. Simili enim argumento, ducta L M, ipsi G B, parallela, ostendemus, parallelogramma M G B L, A G B C, æqualia esse, si bases B C, E F, dicantur inæquales, & B L, E F, æquales.* h 11. quinti. i 9. quinti.

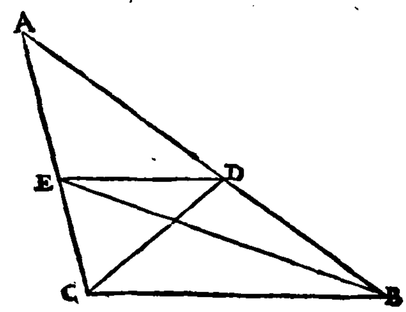
*IN omnibus autem his non variabitur demonstratio, etiamsi triangula & parallelogramma sint rectangula, ita vt altitudines sint ipsorum latera, vel vnum fuerit rectangulum, alterum verò non. Nos assumpsimus casum difficiliorem, quando scilicet neutrum est rectangulum. Ita enim demonstratio maiore indiget nonnunquam constructione.*

## THEOR. 2. PROPOS. 2.

2.

SI ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ ad sectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipsius trianguli latus parallela.

IN triangulo A B C, ducatur primùm recta D E, parallela lateri B C. Dico latera A B, A C, secta esse proportionaliter in D, & E, hoc est, esse vt A D, ad D B, ita A E, ad E C. Ductis enim rectis C D, B E, [a] erunt triangula D E B, D E C, super eandem basin D E, & inter easdem parallelas D E, B C, constituta, inter se æqualia. [b] Quare vt triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita est triangulum idem A D E, ad triangulum D E C: [c] Atqui vt triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita est a 37. primi. b 7. quinti. c 1. sexti.



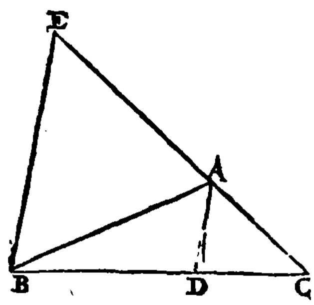
baſis A D, ad baſin D B; (cùm hæc triangula ſint eiuſdem altitudinis, vt conſtat, ſi per E, agatur parallela recta ipſi AB.) & eadem ratione, vt triangulum A D E, ad triangulum D E C; ita eſt baſis A E, ad baſin E C. *a 11. quinti.* [a] Vt igitur A D, ad D B, ita eſt A E, ad E C, (cũ hæ duæ proportiones eædem ſint ꝓportioni trianguli A D E, ad triangulũ D E B, & eiuſdem trianguli A D E, ad triangulum D E C.) quod eſt propoſitum.

SECET deinde recta D E, latera AB, AC, proportionaliter. Dico D E, parallelam eſſe reliquo lateri B C. Ductis enim rurſum rectis C D, B E, *b 1. ſexti.* [b] erit vt baſis A D, ad baſin D B; ita triangulum A D E, ad triangulum D E B, cùm ſint eiuſdem altitudinis: Ponitur autem vt *c 11. quinti.* AD, ad D B, ita AE, ad E C. [c] Igitur erit vt triangulum A D E, ad triangulum DE B, ita A E, ad E C. *d 1. ſexti.* Sed rurſus [d] vt baſis A E, ad baſin E C, ita eſt triangulum A D E, ad triangulum D E C, cũ ſint altitudinis eiuſdẽ. *e 11. quinti.* [e] Igitur vt triangulum A D E, ad triangulum D E B, ita eſt triangulũ idem A D E, *f 9. quinti.* ad triangulum D E C. [f] Æqualia ergo ſunt triangula D E B, & D E C: Ac propterea cùm eandem *g 39. primi.* habeant baſin D E, [g] inter eaſdem erunt collocata parallelas. Igitur parallela eſt D E, ipſi B C. qđ eſt propoſitũ. Si itaq; ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit, &c. Quod erat oſtendendum.

3.

## THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI trianguli angulus bifariam ſectus ſit, ſecans autẽ angulum recta linea ſecuerit & baſin: baſis ſegmenta eandem habebũt rationem, quam reliqua ipſius trianguli latera. Et ſi baſis ſegmenta eandem habeant rationem, quã reliqua ipſius trianguli latera; recta linea, quæ à vertice ad ſectionem producitur, bifariam ſecat trianguli ipſius angulum.



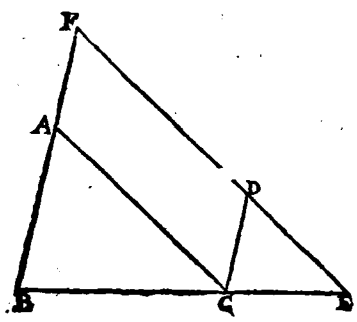
IN triangulo A B C, recta A D, ſecet primò angulum B A C, bifariam. Dico eſſe vt B A, ad A C, ita B D, ad D C. Agatur enim per B, recta B E, parallela ipſi AD, donec cum C A, producta conueniat in E; (coibunt autem omninò B E, C A, propterea quòd anguli C, & *h 17. primi.* C B E, minores ſunt duobus rectis. Cùm enim C, & C D A, [h] minores duobus rectis ſint; *i 29. primi.* [i] ſit autem angulus C D A, angulo C B E, externus interno, æqualis: erunt quoq; C, & C B E, duobus rectis minores.) *k 29. primi.* [k] eritq; angulus E B A, æqualis alterno B A D; & angulus E, externo D A C. Cùm igitur duo anguli B A D, D A C, æquales ponantur; erũt & anguli E B A, & E, inter ſe æquales; *l 6. primi.* [l] Ideoq; & rectæ B A, E A, inter ſe æquales. *m 7. quinti.* [m] Vt igitur E A, ad A C, ita B A, ad eandẽ *n 2. ſexti.* A C: [n] Atqui vt E A, ad A C, ita eſt B D, ad D C; cùm in triangulo B C E, recta A D, ſit parallela lateri B E. *o 11. quinti.* [o] Igitur vt B A, ad A C, ita eſt B D, ad D C. quod eſt propoſitum.

SIT deinde vt B A, ad A C, ita B D, ad D C. Dico rectam A D, bifariam ſecare angulum B A C. Agatur enim rurſus per B, recta B E, ipſi A D, parallela coiens cum C A, protracta in E. Quoniam *p 2. ſexti.* igitur vt B A, ad A C, ita ponitur B D, ad D C. [p] Vt autem B D, ad D C, ita eſt E A, ad A C; (quòd *q 11. quinti.* in triangulo B C E, recta A D, ſit lateri B E, parallela.) [q] Erit vt B A, ad A C, ita E A, ad eandẽ A C, *r 9. quinti.* [r] Æquales igitur ſunt B A, & E A, inter ſe, *s 5. primi.* [s] ac propterea anguli A B E, & E, æquales quoq; erunt. *t 29. primi.* [t] Cùm igitur angulus A B E, æqualis ſit alterno B A D; & angulus E, externo D A C, erunt & duo anguli B A D, D A C, inter ſe æquales. quod eſt propoſitum. Itaque ſi trianguli angulus bifariam ſectus ſit, &c. Quod erat demonſtrandum.

4.

## THEOR. 4. PROPOS. 4.

AEQVIANGVLORVM triangulorũ proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa ſunt latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur.

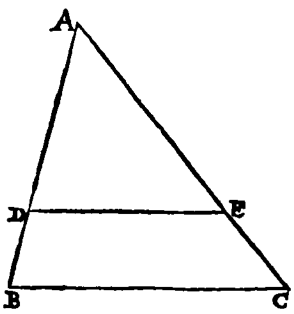


SINT æquiangula triangula A B C, D C E, ſintque æquales anguli A B C, D C E; & A C B, D E C; & B A C, C D E. Dico eſſe A B, ad B C, vt D C, ad C E; & B C, ad C A, vt C E, ad E D; & AB, denique ad A C, vt D C, ad D E. Ita enim latera circa æquales angulos ſunt proportionalia, homologaq; ſunt ea latera, quę æqualibus angulis ſubtenduntur. hoc eſt, & antecedentia omnia æquales reſpiciunt angulos, & conſequentia ſimiliter. Conſtituantur latera B C, C E, ſecundum lineam rectam, ita vt angulus D C E, externus ſit æqualis interno A B C; pariterq; exter- *u 17. primi.* nus A C B, interno D E C. Et quia duo anguli A B C, A C B, [u] minores ſunt duobus rectis: eſt autẽ angulo A C B, æqualis an-

gulus

gulus D E C; erunt & anguli B, & E, duobus rectis minores. [a] Quare rectæ B A, & E D, productæ a 13. primi.
ad partes A, D, coibunt. Producantur ergo, & conueniant in F. Quoniam verò angulus externus
D C E, æqualis est interno opposito A B C; [b] parallelæ erunt C D, & B F. Eadem ratione, parallelæ b 28. primi.
erunt C A, & E F; quòd angulus externus A C B, sit æqualis interno D E C. Parallelogrammũ
est igitur A C D F; [c] propterea recta A F, æqualis rectæ C D; & recta C A, rectæ D F. Quoniam igi c 34. primi.
tur in triangulo B E F, recta A C, parallela est lateri E F, [d] erit A B, ad A F, hoc est, ad D C, (quæ æ- d 2. sexti.
qualis est ipsi A F,) vt B C, ad C E. Permutando [e] igitur erit A B, ad B C, vt D C, ad C E. Rursus e 16. quinti.
quia in eodem triangulo B E F, recta C D, parallela est lateri B F, [f] erit B C, ad C E, vt F D, hoc est, f 2. sexti.
vt C A, (quæ æqualis est ipsi F D,) ad E D. Permutando [g] igitur erit B C, ad C A, vt C E, ad E D. g 16. quinti.
Cùm igitur sit A B, ad B C, vt D C, ad C E; & B C, ad C A, vt C E, ad E D: [h] erit & ex æquali A B, ad h 22. quinti.
C A, vt D C, ad E D. Quod est propositum. Æquiangulorum ergo triangulorum proportionalia
sunt latera, &c. Quod erat demonstrandum.

## COROLLARIVM.



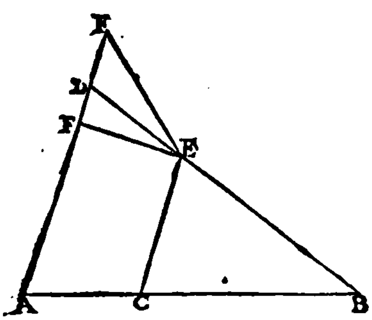
*Hinc fit, lineam rectam, quæ parallela ducitur vni lateri in triangulo, auferre triangulum toti triãgulo simile. Ducatur enim in triãgulo A B C, lateri B C, parallela D E. Dico trianguluũ A D E, toti triangulo A B C, esse simile. Aequiangula namq; sunt,* [a] *cũ anguli A D E, A E D, æquales sint angulis A B C, A C B, externi internis; & angulus A, communis. Quare, vt demonstratum est,* [b] *habent latera circa æquales angulos proportionalia; Ac proinde, ex definitione, similia sunt.*

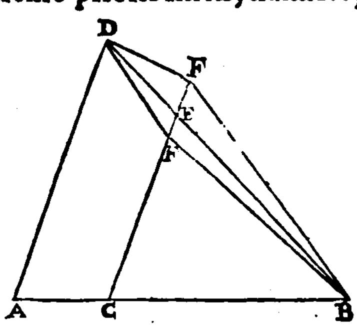
a 29. primi.
b 4. sexti.

## SCHOLIVM.

*Non alienum à nostro instituto esse puto, si hic demonstremus duo theoremata, quorum primum Federicus Commandinus demonstrat in libello Archimedis de ijs, quæ vehuntur in aqua: Secundum verò in Commentarijs in Apollonij Conica. Horum primum est:*

Si ex duobus punctis cuiusuis rectæ, quorũ alterum sit extremum, alterũ verò intra lineam, duæ parallelæ inter se ad easdem partes educantur, ita vt proportionẽ habeant eandem, quam rectæ inter ipsas, & alterum extremum punctum inclusæ: Recta coniungens extremum vnius earum cum extremo prioris lineæ, transibit per extremũ alterius lineæ.



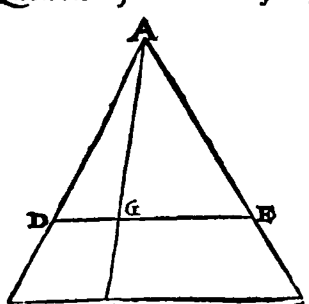


*Sit recta A B, & ex punctis A, & C, educantur duæ parallelæ A D, C E, proportionem habentes, quam A B, B C, ita vt sit A D, ad C E, sicut A B, ad B C; vel C E, ad A D, vt B C, ad A B. Dico rectam, quæ coniungit extrema B, & E, transire p punctum D. Item rectam, quæ coniungit extrema B, & D, transire p punctum E. Si enim recta B E, nõ transit p D, coëat cũ A D, in F, puncto, quod sit vel supra D, vel infra, vt in prima figura. Quoniam igitur p coroll. huius propos. triãgula B A F, B C E, similia sunt;* [c] *erit vt A B, ad A F, ita B C, ad C E: Et permutando,* [d] *vt A B, ad B C, ita A F, ad C E. Vt autem A B, ad B C, ita erat quoq; A D, ad C E.* [e] *Igitur erit, vt A F, ad C E, ita A D, ad C E:* [f] *Ac propterea æquales erunt rectæ A F, A D, pars & totum. Quod est absurdum. Transit ergo recta B E, per punctum D. Quod est primum.*

c 4. sexti.
d 16. quinti.
e 11. quinti.

*Rursus si recta B D, non transit per E, transeat per F, punctum, quod sit vel supra E, vel infra, vt in secunda figura. Quoniam ergo p coroll. huius propos. triangula B A D, B C F, similia sunt;* [g] *erit, vt A B, ad A D, ita B C, ad C F;* [h] *& permutando, vt A B, ad B C, ita A D, ad C F: Vt autem A B, ad B C, ita quoq; erat A D, ad C E.* [i] *Igitur erit, vt A D, ad C F, ita A D, ad C E:* [k] *Ac proinde æquales erunt rectæ C F, C E, pars & totum. Quod est absurdum. Transit ergo recta B D, per E. Quod est secundum. Alterum verò est:*

f 9. quinti.
g 4. sexti.
h 16. quinti.
i 11. quinti.
k 9. quinti.



Si in triangulo quouis vni lateri parallela recta agatur, & ex quocunq; puncto illius lateris ad angulũ oppositũ recta educatur linea: diuidentur linea parallela, & latus illud in easdẽ rationes.

*In triãgulo A B C, ducta sit D E, lateri B C, parallela, & ex puncto F, quocunq; ad angulũ A, rectà extendatur F A, secans D E, in G. Dico esse, vt B F, ad F C, ita D G, ad G E. Quoniam enim triangula A F B, A G D, ex coroll. huius propos. similia sunt;* [l] *erit vt A F, ad B F, ita A G, ad D G;* [m] *& permutando, vt A F, ad A G, ita B F, ad D G. Atq; eodem argumento concludemus esse, vt A F, ad A G, ita F C, ad G E.* [n] *Igitur erit, vt B F, ad D G, ita F C, ad G E; & permutando vt B F, ad F C, ita D G, ad G E. Quod est propositum.*

l 4. sexti.
m 16. quinti.
n 11. quinti.

*B 4*

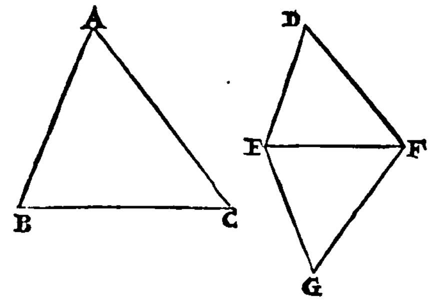
*Aliter. Quoniam triangula A B F, A D G, similia sunt, nec non triangula A F C, A G E, per corollarium huius propositionis* [a] *erit, vt B F, ad F A, ita D G, ad G A. Item vt F A, ad F C, ita G A, ad G E.* [b] *Ex æquo igitur, vt B F, ad F C, ita erit D G, ad G E. Quod erat demonstrandum.*

a 4. sexti.
b 22. quinti.

5. 

## THEOR. 5. PROPOS. 5.

Si duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera subtenduntur.



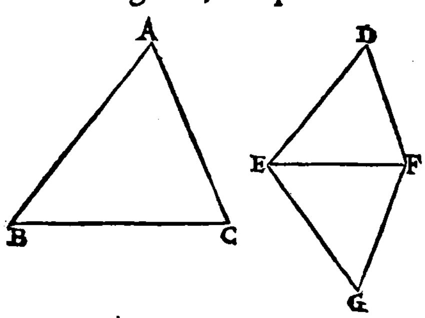
Habeant triangula A B C, D E F, latera proportionalia, sitque A B, ad B C, vt D E, ad E F; & B C, ad C A, vt E F, ad F D; & A B, denique ad A C, vt D E, ad D F. Dico triangula esse æquiangula, angulum scilicet A, æqualem esse angulo D; & angulum B, angulo E; & angulum C, angulo F. Sic enim anguli æquales respiciunt homologa latera. Fiat angulus F E G, æqualis angulo B; & angulus E F G, angulo C; conueniantque rectæ E G, F G, in G: [a] eritque reliquus angulus G, reliquo angulo A, æqualis. Æquiangula igitur sunt triangula A B C, G E F. Quare [b] vt A B, ad B C, ita est G E, ad E F. Vt autem A B, ad B C, ita ponitur D E, ad E F. [c] Igitur vt G E, ad E F, ita est D E, ad E F, eandem: [d] proptereaque æquales erunt G E, D E. Rursus, [e] quoniam vt B C, ad C A, ita est E F, ad F G; Vt autem B C, ad C A, ita ponitur E F, ad F D; [f] erit vt E F, ad F G, ita eadem E F, ad F D; [g] ideoque æquales erunt F G, F D. Itaque cùm latera E G, F G, æqualia sint lateribus D E, D F, vtrumque vtrique; & basis communis E F; [h] erunt anguli G, & D, æquales; [i] ac propterea & reliqui anguli G E F, G F E, reliquis angulis D E F, D F E, æquales erunt. Quamobrem cùm angulus G, æqualis sit angulo A; erit & angulus D, eidē angulo A, æqualis, eodemq; modo angulus D E F, angulo B, & angulus D F E, angulo C, æqualis erit. quod est propositum. Si duo igitur triangula latera proportionalia habeant, &c. Quod ostendendum erat.

a 32. primi.
b 4. sexti.
c 11. quinti.
d 9. quinti.
e 4. sexti.
f 11. quinti.
g 9. quinti.
h 8. primi.
i 4. primi.

6. 

## THEOR. 6. PROPOS. 6.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualesque habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.



Sit angulus B, trianguli A B C, æqualis angulo E, trianguli D E F, sintque latera A B, B C, proportionalia lateribus D E, E F, hoc est, sit A B, ad B C, vt D E, ad E F. Dico reliquos angulos reliquis angulis æquales esse, angulum scilicet A, angulo D, & angulum C, angulo F. Ita enim æquales anguli homologa latera respiciunt. Fiat angulo B, æqualis angulus F E G; & angulo C, angulus E F G; eritque, vt in præcedenti propositione dictum est, triangulum G E F, triangulo A B C, æquiangulum. Quare [k] vt A B, ad B C, ita est G E, ad E F. Sed vt A B, ad B C, ita ponitur D E, ad E F. [l] Igitur vt D E, ad E F, ita est G E, ad eandem E F; [m] atq; idcirco D E, G E, æquales erunt. Itaque cùm latera D E, E F, æqualia sint lateribus G E, E F, & anguli ipsis contenti æquales quoque; (Nam angulo B, cui factus est æqualis angulus F E G, æqualis est positus angulus D E F, proptereaq; æquales ad inuicem erunt anguli D E F, G E F,) [n] erunt reliqui anguli D, E F D, reliquis angulis G, E F G, æquales. Cùm ergo angulus G, sit æqualis angulo A, & angulus E F G, angulo C; erunt etiam angulis A, C, æquales anguli D, E F D; & ob id æquiangula erūt triangula A B C, D E F. quod est propositum. Si igitur duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, &c. Quod erat demonstrandum.

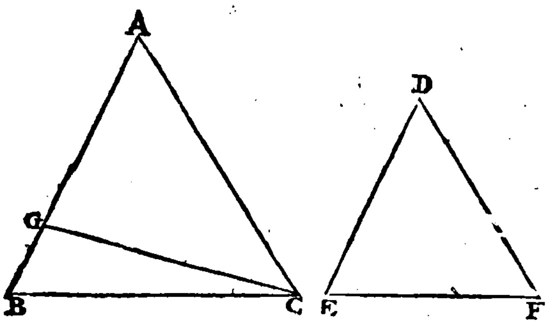
k 4. sexti.
l 11. quinti.
m 9. quinti.
n 4. primi.

7. 

## THEOR. 7. PROPOS. 7.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant, reliquorum verò simul vtrumque aut minorem, aut non minorem recto: Aequiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.

Sit angulus A, trianguli A B C, æqualis angulo D, trianguli D E F; & latera A C, C B, circa angulum A C B, proportionalia lateribus D F, F E, circa angulum F, hoc est, sit vt A C, ad C B, ita D F, ad F E; hac tamen lege, vt quilibet reliquorum angulorum B, & E, sit vel minor recto, vel non minor.




nor. Dico æquiangula esse triangula angulos scilicet A C B, & F, circa quos sunt latera ꝓportionalia, & angulos B, & E, æquales esse. Sit enim primùm tam B, quàm E, recto minor: Quo posito, si anguli A C B, & F, nõ sunt æquales, sit A C B, maior, quàm F; fiatque ipsi F, æqualis A C G. Cùm igitur & angulus A, angulo D, ponatur æqualis, [a] erit & reliquus A G C, reliquo E, æqualis; ideoque triangula A G C, D E F, æquiangula erunt. Quare [b] vt AC, ad C G, ita erit D F, ad F E: Sed vt D F, ad F E, ita ponitur A C, ad C B. [c] Vt igitur A C, ad C G, ita erit eadem A C, ad C B; [d] ac propterea æquales erunt C G, C B; [e] & anguli C B G, C G B, æquales. Cùm igitur angulus B, ponatur recto minor, erit & C G B, minor recto, ideoque ei deinceps A G C, recto maior; [f] cùm A G C, C G B, sint duobus rectis æquales: Est autem ostensus angulus A G C, angulo E, æqualis. Maior igitur recto est quoque angulus E: Sed positus est etiam recto minor. Quod est absurdum.

a 32. primi.
b 4. sexti.
c 11. quinti.
d 9. quinti.
e 5. primi.
f 13. primi.

Sit deinde tam B, angulus, q̃ E, recto non minor; eritque vt prius, angulus B, angulo C G B, æqualis; ideoque & C G B, recto non minor erit; ac propterea angulus C B G, C G B, in triangulo B C G, non minores erunt duobus rectis, sed vel maiores, vel æquales duobus rectis. quod est absurdum. [g] Sunt enim duobus rectis minores. Non ergo inæquales sunt anguli A C B, & F, sed æquales, [h] atque idcircò reliqui etiam anguli B, & F, æquales erunt. quod est propositum. Si duo itaque triangula vnum angulum vni angulo æqualem, &c. Quod demonstrandum erat.

g 17. primi.
h 32. primi.

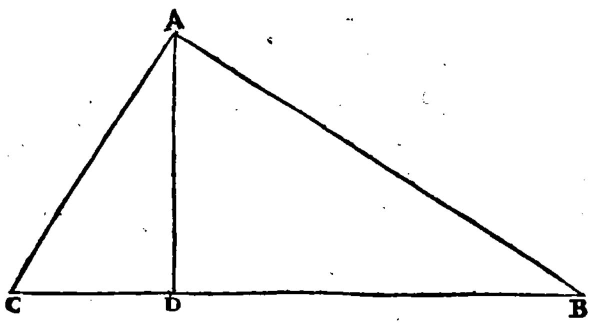
## SCHOLIVM.

*Addidit Euclides, vtrumque angulorum reliquorum B, & E, debere esse vel minorem recto, vel non minorem. Nam aliàs, manente tota hypothesi, non sequeretur, triangula esse æquiangula. Si enim in eodem triangulo A B C, sit C G, æqualis ipsi C B, (quod fieri potest quando angulus B, acutus est, & maior angulo A. Sic enim [a] erit latus C A, latere C B, maius. Si igitur ex C, ad interuallum C B, circulus describatur, secabit is rectam A B, priusquam rectam A C, quæ longior est, quàm C B, secet. Secabit autem ille circulus necessariò rectam A B, propterea quòd ob acutum angulum B, recta A B, intra eum circulum cadit: quippe cùm infra contingentem lineam ducatur, quæ ad B, angulum rectum constituit cum C B, vt patet ex propositione 16. lib. 3.) habebunt duo triangula A B C, A G C, vnum angulum vni angulo æqualem, immò angulum A, communem; & circum alios angulos A C B, A C G, latera proportionalia, hoc est, [b] vt A C, ad C B, ita erit eadem A C, ad C G, cùm æquales ponantur rectæ C B, C G: & tamen non sunt vllo modo æquiangula triangula A B C, A G C, vt constat. Quod ideò euenit, quia non vterque angulorum A B C, A G C, minor est recto, vel non minor. Immò A B C, est quidem recto minor; A G C, verò recto maior. Cùm enim C G, C B, latera æqualia sint, [c] & ideò anguli C B G, C G B, æquales; [d] erit vterque eorum recto minor, [e] ac propterea A G C, recto maior.*

a 19. primi.
b 7. quinti.
c 5. primi.
d 17. vel 32. primi.
e 13. primi.

## THEOR. 8. PROPOS. 8. 8.

Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit: quæ ad perpendicularem triangula, tum toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.




In triangulo A B C, angulus B A C, sit rectus, à quo ad basin perpendicularis agatur A D. Dico triangula A D B, A D C, similia esse, & toti triangulo A B C, & inter se. Cùm enim in triangulis A B C, D B A, anguli B A C, & A D B, sint recti, & angulus B, communis; [a] erunt & reliqui anguli A C B, & D A B, æquales. Æquiangulum est igitur triangulũ D B A, triangulo A B C; [b] ac propterea habebunt latera circa æquales angulos proportionalia, &c. hoc est, erit vt C B, ad B A, ita B A, ad B D; & vt B A, ad A C, ita B D, ad D A; & vt B C, ad C A, ita B A, ad A D. Ita enim latera homologa æqualibus angulis opponuntur, vt vult propositio 4. huius libri. Quare simile est triangulum A D B, toti triangulo A B C. Eodem modo ostendetur, triangulum A D C, simile eidem triangulo A B C. Nam anguli B A C, & A D C, sunt recti, & angulus C, cõmunis; [c] ac propterea reliqui anguli A B C, & C A D, æquales. Quare [d] vt B C, ad C A,

a 32. primi
b 4. sexti.
c 32. primi.
d 4. sexti.

ita est C A,ad C D: & vt C A,ad A B,ita C D,ad D A;& vt C B,ad B A,ita C A,ad A D. Sic enim opponuntur quoque homologa latera angulis æqualibus,ex præscripto propos.4.huius lib. Non secus demonstrabitur, similia inter se esse triangula A D B,& A D C, cùm anguli A D B,A D C, sint recti,& anguli A B D,C A D,ostensi æquales, nec non anguli B A D, A C D; Atque idcircò sit [a] vt B D,ad D A,ita D A,ad D C; & vt D A,ad A B,ita D C,ad C A; & vt A B, ad B D,ita C A,ad A D. Si igitur in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit,&c. Quod erat demonstrandum.

*a 4.sexti.*

## COROLLARIVM.

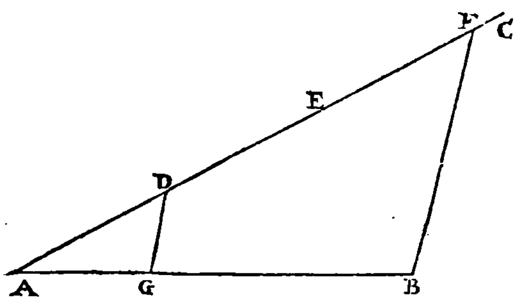
*Ex hoc manifestum est, perpendicularem, quæ in rectangulo triangulo ab angulo recto in basin demittitur, esse medium proportionalem inter duo basis segmenta: Item vtrumlibet laterum angulum rectum ambientium, medium proportionale inter totam basin, & illud segmentum basis, quod ei lateri adiacet.*

*OSTENSVM est enim, esse vt B D,ad D A, ita D A,ad D C; ac propterea D A, esse mediam proportionalem inter B D, & D C: Item esse vt C B,ad B A, ita B A,ad B D: & idcircò B A, mediam esse proportionalem inter C B, & B D: Denique esse vt B C,ad C A, ita C A, ad C D; ideoq; C A, esse proportionalem mediam inter B C, & C D. Quod est propositum.*

11.

## PROBL. 1. PROPOS. 9.

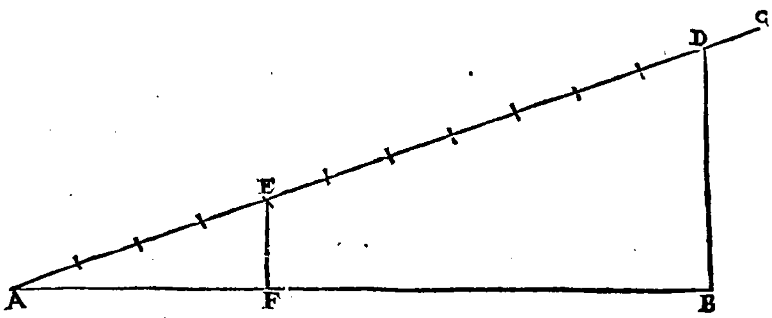
A DATA recta linea imperatam partem auferre.



IMPERETVR, vt ex linea A B, auferamus partem tertiam. Ex A, ducatur recta A C, vtcunque faciens angulum C A B; & ex A C, abscindantur tot partes æquales cuiuslibet magnitudinis, quota pars detrahenda est ex A B, vt in pposito exemplo tres A D, D E, E F. Deinde ex F, ad B, recta ducatur F B, cui per D, parallela agatur D G. Dico A G, esse partem tertiam imperatam rectæ A B. Nam cùm in triangulo A B F, lateri F B, parallela sit recta D G; [b] erit vt F D, ad D A, ita B G, ad G A. [c] Componendo igitur, vt F A, ad D A, ita B A, erit ad G A: Sed F A, ipsius A D, est tripla, ex constructione. Igitur & B A, ipsis A G, erit tripla, ideoque A G, tertia pars erit ipsius A B, quæ imperabatur. A data ergo recta linea imperatam partem abstulimus. Quod faciendum erat.

*b 2.sexti.*
*c 18.quinti.*

## *SCHOLIVM.*

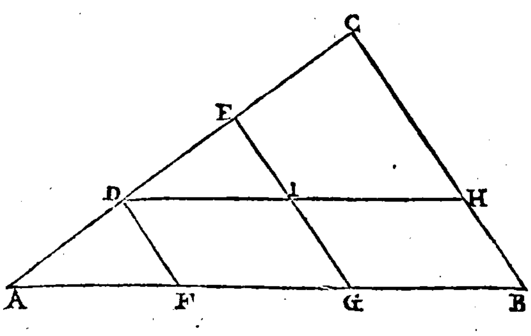


*QVOD si ex A B, auferenda sit pars non aliquota, sed quæ plures aliquotas non efficientes vnam complectatur, nimirũ quæ contineat quatuor vndecimas ipsius A B, sumendæ erunt ex A C, vndecim partes æquales vsque ad D, punctũ, ex quo ad B, recta ducatur D B; & huic parallela E F, ex E, termino quatuor partium. Nam A F, erit pars imperata. Erit enim rursus vt D A, ad A E, ita B A, ad A F: Quare & conuertendo, vt A E, ad A D, ita A F, ad A B: Est autem A E, pars continens quatuor vndecimas ipsius A D, ex constructione. Igitur & A F, eadem pars erit rectæ A B. Quod est propositum. Non aliter detrahetur ex A B, pars complectens quotcunq; partes ipsius aliquotas, nõ facientes vnam.*

12.

## PROBL. 2. PROPOS. 10.

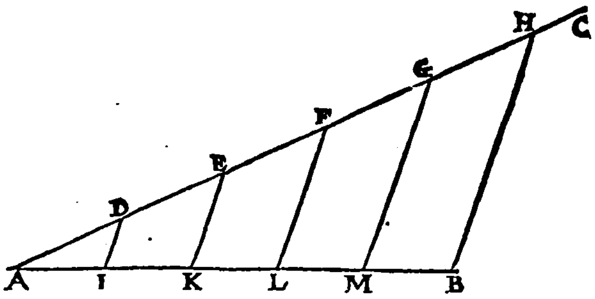
DATAM rectam lineam insectam similiter secare, vt data altera recta secta fuerit.



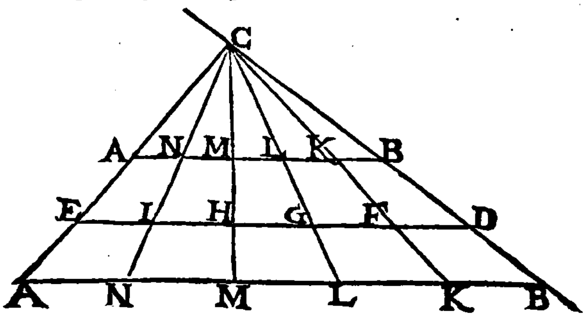
SIT recta A B, secanda similiter, vt secta est recta A C, in D, & E; hoc est, in partes, quæ sint partibus A D, D E, E C, proportionales. Coniungantur datæ duæ lineæ ad A, facientes angulum quemcunq; B A C, & connectatur recta B C. Deinde ex D, E, agantur D F, E G, parallelæ ipsi B C. Dico rectam A B, similiter esse sectam

sectam in F,& G,vt est secta A C,in D,& E. Nam [a] vt A D,ad D E,ita est A F,ad F G. Proportionales ergo sunt partes A F, F G, partibus A D, D E. Quòd si ducatur D H, ipsi F B, parallela,secans E G,in I; [b] erit rursus,vt D E,ad E C,ita D I,ad I H,hoc est,ita F G,ad G B; [c] quòd F G,ipsi D I, & G B,ipsi I H,æqualis sit. Quare proportionales quoque erunt partes F G, G B, partibus D E, E C. Eademq; ratio est de pluribus partibus, si ex E,& C, ipsi A B,parallelæ agantur,&c. Itaque datam rectam lineam insectam similiter secuimus, vt data altera recta secta fuit. Quod faciendum erat. a 2. sexti. b 2. sexti. c 34. primi.

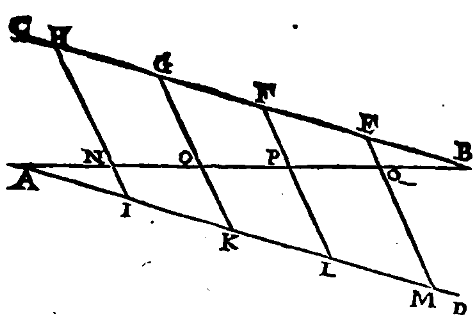
*SCHOLIVM.*




*Ex hoc problemate colligi potest facilis admodum via ac ratio diuidendi lineam rectam datam in partes quotcunque æquales: id quod nos ad propos. 10. lib. 1. facturos recepimus,& alia iam via idem ad propos. 40. lib. 1. demonstrauimus. Sit enim data recta A B. diuidenda in quinque partes æquales. Ducta recta A C, faciente cū A B, quemcunque angulum C A B, sumantur ex ea quinque partes æquales A D, D E, E F, F G, G H. Quia igitur linea recta A H, vtcunque est diuisa, si ex H, ad B, ducatur recta H B,& huic ex punctis D,E,F,G, parallelæ agantur D I, E K, F L, G M; erit A B, similiter diuisa, vt A H, vt constat ex demonstratione huius problematis. Cùm igitur A H, sit diuisa in quinque partes æquales, erit & A B, in totidem æquales partes diuisa. Haud aliter in plures partes æquales diuidetur eadem recta A B.*

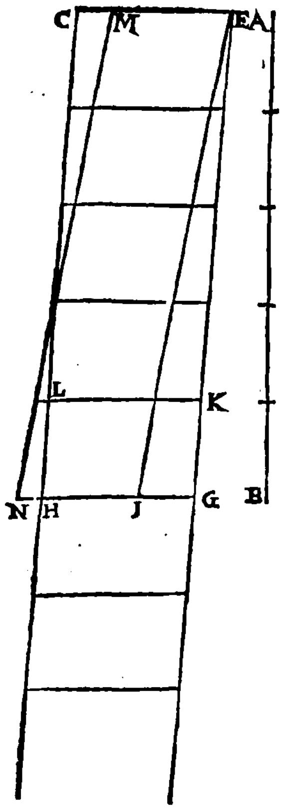



*Hvic rationi diuidendæ lineæ rectæ in quotcunque partes æquales, adiungi possunt alia nō iniucūda: vt propos. 10. lib. 1. sumus polliciti, atque ad propos. 40. lib. 1. demonstrauimus. Sit enim rursus data linea recta A B, diuidenda in quinq; partes æquales. Ducatur ex B, recta B C, vtcunque faciens angulum cum A B; Deinde ex assumpto puncto D, siue supra B, siue infra, agatur D E, parallela ipsi A B, ex qua abscindantur quinque æquales partes D F, F G, G H, H I, I E, ea lege tamen, vt si D, est supra B, recta D E, ex quinque partibus æqualibus constans, minor sit, quàm A B, maior verò, si D, existit infra B. Postremò ex A, per E, recta ducatur A C, occurrens ipsi B C, in C, puncto, à quo per puncta F,G,H,I, rectæ ducantur C K, C L, C M, C N, quas dico diuidere rectam A B, in quinque partes æquales. Cùm enim D E, sit parallela ipsi A B, diuidentur E H, & A M, in triangulo C A M, proportionaliter, ex scholio propos. 4. huius lib. Cùm ergo E H, secta sit bifariam in I, secta quoq; erit A M, bifariam in N. Eadem ratione recta N L, in triangulo C N L; & recta M K, in triangulo C M K; & recta L B, in triangulo C L B, secta erit bifariam. Est ergo A N, ipsi N M; & N M, ipsi M L, & M L, ipsi L K; & L K, ipsi K B, æqualis; ac proinde A B, secta erit in quinque partes æquales. Quod est propositum.*




*Aliter. Ab extremis punctis A, & B, educantur duæ rectæ B C, A D, inter se parallelæ; hoc est, constituentes angulos A B, æquales: Et ex B C, abscindantur quatuor partes æquales B E, E F, F G, G H, vt sint tot partes, vna minus, in quot est linea diuidenda; His autē ex A D, totidem æquales resecentur A I, I K, K L, L M. Ductis igitur rectis E M, F L, G K, H I, secantibus rectam A B, in N, O, P, Q, dico ipsam A B, sectam esse in quinque partes æquales. Cùm enim æquales sint, & parallelæ G H, I K, [a] erunt & H I, G K, parallelæ; Eademq; ratione parallelæ erunt G K, F L, E M. Quare cùm A M, secta sit in quatuor æquales partes, erit & A Q, similiter in quatuor partes æquales diuisa, vt constat ex demonstratione huius 10. propos. Eadem ratione diuisa erit & B N, in quatuor partes æquales, eo quòd B H, in totidem est partes æquales diuisa. Quare cùm tam A N, quàm B Q, æqualis sit singulis partibus N O, O P, P Q; erunt omnes quinque partes A N, N O, O P, P Q, Q B, inter se æquales. Quod est propositum.* a 33. primi.

*Aliter. Præparetur prius instrumentum huic rei accommodatum in hunc modum: Ductis duabus rectis inter se parallelis vtcunque C D, E F; ex vtraq; abscindantur partes inter se æquales quotcunque, saltem tot, in quot partes diuidenda proponitur linea, & bina puncta correspondentia lineis rectis iungantur. Deinde beneficio circini capiatur longitudo rectæ A B, diuidendæ, eaq; ex aliquo puncto lineæ C E, vt ex E, transferatur in instrumentum ad punctum I, illius lineæ transuersæ, quæ tot spatia terminat, in quot partes lineæ*

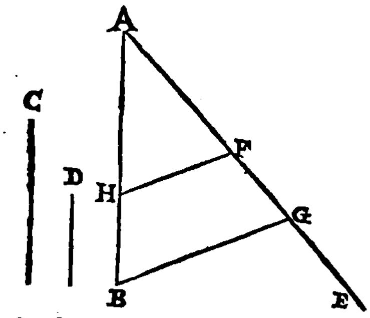



*proponitur diuidenda, qualis in exemplo eſt recta G H: ea enim includit quin*
*que ſpatia. Poſtremò ex E, ad I, recta ducatur E I, quam dico diuiſam eſſe in*
a 33.primi. *quinque æquales partes. Cùm enim G K, H L, æquales ſint, & parallelæ, [a] e-*
*runt quoq; G H, K L, parallelæ. Eodemq; modo omnes lineæ inter rectas C D,*
*E F, inter ſe parallelæ oſtendentur. Quare, vt ex demonſtratione huius 10. pro-*
*poſitionis liquet, quemadmodum E G, diuiſa eſt in quinque partes æquales,*
*ita ſimiliter in totidem diuiſa erit E I. Nam ſi punctum E, ſumptum non fue-*
*rit idem quod E, vel C, producenda eſt I E, donec cum F E, vel D C, coëat. Tunc*
*enim, vt in hac 10. propoſ. probatum eſt, erunt rectæ E I, E G, ſimiliter diuiſæ.*
*Quòd ſi fortè I E, nec cum F E, nec cum D C, concurrat, ſed vtrique ſit paral-*
b 34.primi. *lela, [b] erunt ſingulæ partes rectæ E I, ſingulis partibus rectæ E G, æquales, ob*
*parallelogramma inter parallelas incluſa. Cùm ergo omnes partes rectæ E G,*
*ſint æquales, erunt quoque omnes partes rectæ E I, æquales. Si igitur be-*
*neficio circini ſingulæ partes lineæ E I, transferantur in rectam propoſitam*
*A B, ipſi E I, æqualem, diuiſa erit & A B, in quinque partes æquales. Quod eſt*
*propoſitum.*

ES T *autem nonnunquam neceſſe lineas parallelas extra inſtrumentum producere. Vt ſi eadem linea transferatur ab M, vſque ad N, punctum lineæ G H, protractæ, erit quoq; M N, diuiſa in quinque partes æquales. Vt conſtat. ſi ducatur ex M, ipſi E G, parallela, vſque ad rectam G H: Vel ſi N M. producatur, donec cum G E, producta conueniat. Quòd ſi linea diuidenda fuerit admodum breuis, accipiendæ erunt partes parallelarum C D, E F, minores, &c. Si verò linea ſit longiuſcula, & diuidenda in paucas partes æquales; transferri poterit in duplo plura ſpatia, vel in triplo plura, vel quadruplo plura, &c. Nam duo, vel tria, vel quatuor ſpatia, &c. dabunt vnam partem. Vt ſi diuidenda ſit in tres partes, transferaturq; in ſex ſpatia, dabunt duo ſpatia vnam partem: ſi transferatur in quindecim ſpatia, dabunt quinque ſpatia vnam partem, propterea quòd quinque ſpatia conficiunt tertiam partem quindecim ſpatiorum. Sic ſi linea diuidenda in duas æquales partes transferatur in octodecim ſpatia, dabunt nouem ſpatia vnam partem; quippe cùm nouem ſpatia conſtituant ſemiſſem octodecim ſpatiorum: & ſic de cæteris.*

EO D E M *modo, ad ſimilitudinẽ huius propoſitionis, licebit nobis facili negotio ſequens problema, quod non rarò à Geometris adhibetur, demonſtrare. quod eſt eiuſmodi:*

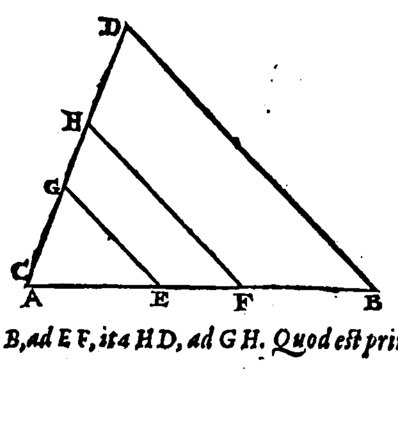
DA T A M rectam ſecare in duas partes, quæ habeant proportionẽ quamcunque datam.




SI T *ſecanda recta A B, in duas partes, quæ habeant proportionem inter ſe, quam rectæ C, & D. Ex A, ducatur linea A E, faciens angulum A, quemcunque, ex qua abſcindatur recta A F, ipſi C, & F G, ipſi D, æqualis: Ducta deinde G B, ducatur ei per F,*
c 2.ſexti. *parallela F H. Dico A B, ſectam eſſe in H, ſecundùm proportionem C, ad D. Hoc autem manifeſtum eſt, [c] cùm ſit, vt A F, ad F G, atque adeò, vt C, ad D, ita A H, ad H B.*

PO S T R E M O *inſeremus huic loco theorema quoddam ad linearum etiam ſectiones pertinens, deſumptum ex Federico Commandino in lib. Archimedis de ijs quæ vehuntur in aqua. Nimirũ:*

SI duę rectæ lineæ ſecentur in binis punctis proportionaliter, erunt quoque intermediæ ſectiones in eadem proportione cum quibuslibet ſegmentis duobus.


SE C E N T V R *rectæ A B, C D, proportionaliter in binis punctis E, F, & G, H, ita vt ſit A E, ad E B, ſicut C G, ad G D; Item A F, ad F B, vt C H, ad H D. Dico ſectiones inter medias E F, G H, proportionales quoq; eſſe cum duobus ſegmẽtis F B, H D; vel cum duobus A E, C G, hoc eſt, eſſe F B, ad E F, vt H D, ad G H. Item A E, ad E F, vt C G, ad G H. Cùm enim ſit, vt A E, ad E B, ita C G, ad G D; erit componendo, vt A B, ad E B, ita C D, ad G D. Item cùm ſit, vt A F, ad F B, ita C H, ad H D; erit componẽdo, vt A B, ad F B, ita C D, ad H D; & conuertendo, vt F B, ad A B, ita H D, ad C D. Itaque cùm ſit vt F B, ad A B, ita H D, ad C D; Et vt A B, ad E B,*
d 22. quinti. *ita C D, ad G D; [d] Erit ex æquo, vt F B, ad E B, ita H D, ad G D; Et conuertendo, vt E B, ad F B, ita G D, ad H D; Et per conuerſionem rationis, vt E B, ad E F, ita G D, ad G H; Et diuidendo, vt F B, ad E F, ita H D, ad G H. Quod eſt primum.*

RV R S V S.

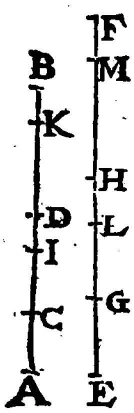
RVRSVS, quia est, vt A E, ad E B, ita C G, ad G D: Et vt E B, ad E F; ita G D, ad G H, vt ostensum est; Erit ex æquo, vt A E, ad E F, ita C G, ad GH. Quod est secundum.

BREVIVS idem demonstrabitur hoc modo. Conueniant duo puncta A, & C, in vnum, vt fiat angulus B C D, vel B A D; iunganturq; rectæ D B, H F, G E. Quia igitur ponitur, vt A E, ad E B, ita C G, ad G D; [a] Parallela erit G E, ipsi D B. Rursus cum ponatur, vt A F, ad F B, ita C H, ad G D; [b] Parallela erit quoque H F, ipsi D B. [c] Quare & G E, H F, inter se parallelæ erunt: Ac propterea [d] erit, vt A E, ad E F, ita CG, ad G H. Quod est secundum. a 2. sexti. b 2. sexti. c 30. primi. d 2. sexti.

EODEM modo, si puncta extrema B, D, conueniant in vnum, &c. ostendemus esse, vt B F, ad E F, ita H D, ad G H; & conuertendo, vt E F, ad F B, ita G H, ad H D. Quod est primum.

SED neq; omittendum videtur hoc loco theorema, quod sequitur.

SI linea recta sit secta in quotcunque partes Arithmeticè proportionales, & alia recta secetur in totidem partes, quæ easdem inter se, quas illæ, proportiones habeant: erunt quoque partes huius lineæ Arithmeticè proportionales.




RECTA linea A B, secta sit in partes A C, C D, D B, Arithmeticè proportionales, hoc est, habentes eundem excessum. [e] Secetur autem recta E F, in partes E G, G H, H F, illis proportionales. Dico has partes eundem quoq; habere excessum, hoc est, Arithmeticè esse proportionales. Sit enim C I, ipsi A C; & D K, ipsi C D, æqualis: vt I D, sit excessus inter C D, A C; & K B, excessus inter D B, C D, atque adeò ipsi I D, æqualis. Sit quoque G L, ipsi E G, & H M, ipsi G H, æqualis: vt L H, excessus sit inter G H, E G; & M F, excessus inter H F, & G H. Probandum est, excessus L H, M F, æquales esse. Quoniam igitur est, vt A C, ad C D, ita E G, ad G H; erit permutando quoque vt A C, ad E G, ita C D, ad G H. Item quoniam est, vt C D, ad D B, ita G H, ad H F; erit quoque permutando, vt C D, ad G H, ita D B, ad H F. Atque ita si plures fuerint partes, habebunt semper partes lineæ A B. ad partes lineæ E F, singulæ ad singulas, eandem proportionem, quamuis partes vnius lineæ non sint continuè proportionales. Itaque cum sit, vt C D, ad G H, ita A C, ad E G, hoc est, ita C I, ad G L; [f] erit quoque reliqua I D, ad reliquam L H, vt tota C D, ad totam G H. Rursus quia est, vt D B, ad H F, ita C D, ad G H, hoc est, ita D K, ad H M; [g] erit quoq; reliqua K B, ad reliquam M F, vt tota D B, ad totam H F, vel vt ablata D K, ad ablatam H M, hoc est, vt C D, ad G H. Erat autem quoque I D, ad L H, vt C D, ad G H. [h] Igitur erit vt I D, ad L H, ita K B, ad M F. Est autem I D, ipsi K B, æqualis. [i] Igitur & L H, ipsi M F, æqualis erit: atque idcirco E G, G H, H F, Arithmeticè proportionales erunt, cum excessus habeant æquales. Quod est propositum. e 10. sexti. f 19. sexti. g 19. sexti. h 11. quinti. i 14. quinti.

HOC theorema nullo modo conuerti potest. Non enim sequitur, si duæ lineæ sectæ sint in partes Arithmeticè proportionales, partes vnius habere easdem proportiones, quas partes alterius habent. Nam si lineæ E F, secunda pars statuatur G M, ita vt excessus inter E G, G M, sit L M: Deinde ipsi G M, post M, sumatur portio ipsi G M, æqualis, eiq; adijciatur idem excessus L M: fient tres partes Arithmeticè proportionales in linea E F, & tamen non habent easdem proportiones inter se, quas habent partes lineæ A B: [k] quippe cum minor sit proportio E G, ad G M, quàm E G, ad G H, hoc est, quàm A C, ad C D. k 8. quinti.

INFERTVR hinc aliud hoc theorema.

SI duæ lineæ inæquales ad alias duas eandem habeant proportionem, minor ad minorem, & maior ad maiorem, erit quoque excessus priorum ad excessum posteriorum, vt priorum vna ad vnam posteriorum.

VT in superiori figura, quoniam erat, vt A C, ad E G, hoc est, vt C I, ad G L, ita C D, ad G H; ostensum est ita quoque esse excessum I D, ad excessum L H, vt C D, ad G H. Itaque si A C, C D, sint duplæ, aut dimidiatæ partes ipsarum E G, G H, erit quoque I D, dupla vel pars dimidiata ipsius L H, &c.

EX his quoque hoc problema absoluemus.

LINEAM rectam datam in quotuis partes Arithmeticè proportionales secare.

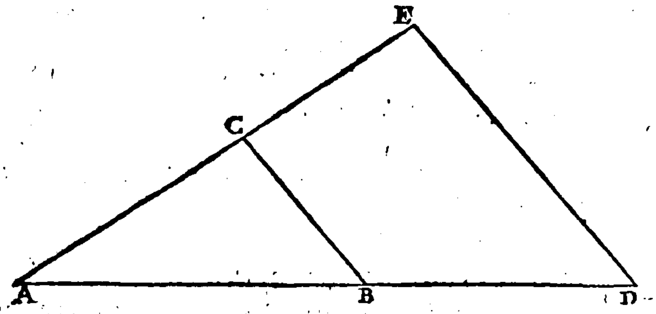
SIT enim recta E F, secanda in tres partes Arithmeticè proportionales. Sumantur tres rectæ A C, C D, D B, quomodocunque Arithmeticè proportionales componentes rectam lineam A B. Si igitur data recta E F, [l] secetur similiter in G, H, vt A B, in C, D, secta est; erunt partes E G, G H, H F, Arithmeticè proportionales, vt demonstratum est. l 10. sexti.

HAEC omnia vera etiam sunt in numeris, & in quibusuis aliis magnitudinibus, cum semper eadem sit demonstratio. Atque ex his desumpsimus in 10. regula proportionalitatis Arithmeticæ postremam rationem distribuendi datum numerum in quotuis partes Arithmeticè proportionales. Nam per eam diuiditur datus numerus in partes, quæ easdem habent proportiones, quas assumpti numeri proportionalitatis Arithmeticæ: cum semper fiat vt summa assumptorum numerorum ad datum numerum, ita singuli numeri assumpti ad aliud; Hinc enim fit, numeros assumptos cum partibus dati numeri inuentis eandem habere proportionem. Quare vt hic ostensum est, partes inuentæ sunt Arithmeticè proportionales.

C

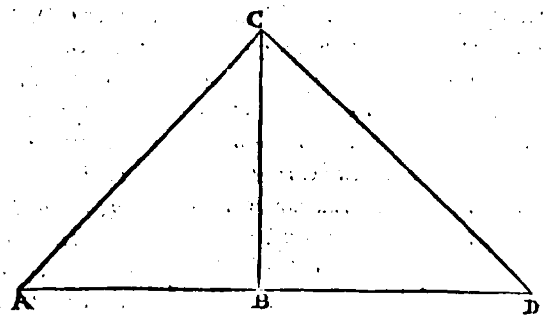
10. PROBL. 3. PROPOS. 11.

DVABVS datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenire.

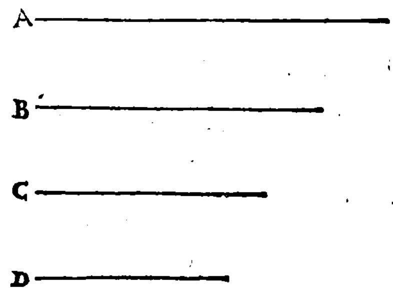



SINT duæ rectæ A B, A C, ita dispositę, vt efficiant angulum A, quemcunque, sitque inuenienda illis tertia proportionalis, sicut quidem A B, ad A C, ita A C, ad tertiam. Producatur A B, quam volumus esse antecedentem, & capiatur B D, æqualis ipsi A C, quæ consequēs esse debet, siue media. Deinde ducta recta B C, agatur illi ex D, parallela D E, occurrens ipsi A C, productæ in E. Dico C E, esse tertiam proportionalem: hoc est, esse vt A B, ad A C, ita A C, ad C E. Cùm enim in triangulo A D E, lateri D E,
a 4. sexti. paralela sit recta B C; [a] erit vt A B, ad B D, ita A C, ad C E: [b] Sed vt A B, ad B D, ita eadem A B, ad
b 7. quinti. A C, æqualem ipsi B D. Vt igitur A B, ad A C, ita A C, ad C E. quod est propositum. Duabus ergo datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.

*SCHOLIVM.*

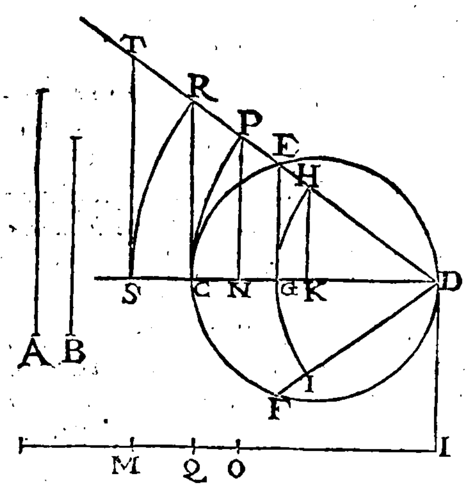



*ALITER idem demōstrabimus, hoc modo: Duæ rectæ datæ A B, B C. constituantur ad angulum rectum A B C, & coniungatur recta A C. Producta autem A B, antecedente, ducatur ex C, ad A C, perpendicularis C D, occurrens ipsi A B, productæ in D. Dico B D, esse tertiam proportionalem. Cùm enim in triangulo A C D, angulus A C D, sit rectus, & ab eo ad basin A D, deducta perpendicularis C B; erit per corollarium propositionis 8. huius libri, B C, media proportionalis inter A B, & B D, hoc est, vt A B, ad B C, ita erit B C, ad B D. Quod est propositum.*




*INVENTA autem tertia linea continuè proportionali, si primā omiseris, & alijs duabus tertiā inueneris, habebis quatuor lineas cōtinuè ꝓportionales. Vt si lineis A, & B, adinueniatur tertia ꝓportionalis C, & duabus B & C, tertia ꝓportionalis D, erūt quatuor lineæ A, B, C, D, cōtinuè ꝓportionales. Eadē arte reperietur quinta ꝓportionalis, sexta, septima, octaua, & sic in infinitū.*

*EXPEDITIVS reperiemus quotlibet lineas continuè ꝓportionales in data proportione, hoc modo: Sit primùm data proportio lineæ A, maioris ad minorem B. Circa rectam C D, ipsi A, æqualem describatur circulus C E D F, in quo applicentur D E, D F, ipsi B, æquales. Applicata autē regula punctis E, F, ducatur recta E G, quæ ad C D perpendicularis erit. Cū enim recta D C, per centrū transiens secet arcum E C F, bifariam, (ablatis enim æqualibus arcubus D E, D F, ex semicirculis æqualibus D E C, D F C, reliqui arcus C E, C F, æquales erunt.) secabit eadem & rectā ductam E F, bifariam, ꝑ ea, quæ in scholio propos. 27. lib. 3. ostendimus. [a] Igitur & ad*




a 3. tertij. *angulos rectos. Et quoniā, si duceretur recta E C, [b] angulus*
b 31. tertij. *ad E, in semicirculo rectus esset; erit ex coroll. propos. 8. huius lib. D E, media proportionalis inter C D, D G: ac proinde D G, erit tertia proportionalis ipsis C D, D E, hoc est, datis duabus A, & B. Quòd si ex D, per G, arcus describatur, secans rectam D E, D F, in H, I: applicataq; regula ad puncta H, I, ducatur recta H K; erit D K, quarta proportionalis. Nā propter angulos H D G, I D G, (qui [c] ob æquales arcus E C,*
c 27. tertij.
d 26. tertij. *F C, æquales sunt) [d] arcus H G, I G, æquales erunt, ac propterea, ex scholio propos. 27. lib. 3. recta ducta H I, bi-*
e 3. tertij. *fariam secabitur in K; [e] ideoq; & ad angulos rectos. [f] Parallelæ ergo sunt E G, H K. [g] Vt igitur recta E D, ad*
f 28. primi. *D G, ita erit D H, hoc est, D G, ad D K. Sunt ergo quatuor lineæ C D, D E, D G, D K, continuè proportionales.*
g 2. vel 4. sexti. *Quòd si ex D, per K, alius arcus describatur, secans rectas D E, D F, inuenietur eadem arte quinta proportionalis, atq; ita in infinitum.*

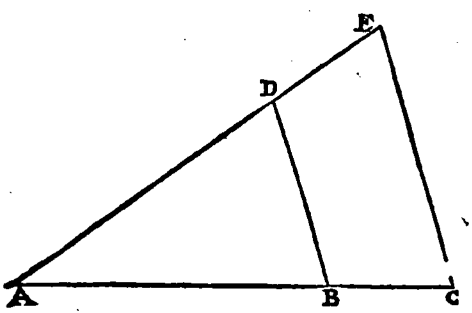
*DEINDE sit data proportio lineæ B, minoris ad maiorem A. Ductis duabus rectis D C, L M, ad D L, perpendi-*

*pendicularibus, abscindantur rectæ D N, L O, minori B, æquales; applicataq; regula ad puncta O, N, ducatur recta N P.* [a] *quæ ad D C, perpendicularis erit,* [b] *cùm sit parallela ipsi D L. Sumpta deinde recta D C, æquali* a 29. primi. *ipsi A, maiori, describatur ex D, per C, arcus secans rectam N P, in P, extendaturq; ex D, per P, recta D P T, e-* b 33. primi. *ritq; D P, ipsi D C, hoc est, ipsi A, æqualis. Abscissa quoq; L Q, ipsi D C, æquali, applicataq; ad punctum Q, C, regula, ducatur recta C R, quæ eadem ratione ad D C, perpẽdicularis erit, & ipsi N P, parallela.* [c] *Et quoniam* c 2. vel 4. sexti. *est, vt N D, ad D P, hoc est, vt B, ad A, (quòd N D, D P, ipsis B, A, acceptæ sint æquales) ita C D, ad D R, hoc est, ita D P, ad D R; erunt tres rectæ N D, D P, D R, continuè proportionales: ideoq; D R, ipsis B, A, tertia proportionalis erit. Quòd si ex D, per R, arcus describatur secans D C, in S, & recta D S, æqualis auferatur L M: applicataq; regula ad puncta M, S, recta ducatur S T; erit D T, quarta proportionalis. Nam eadem ratione erit S T, ipsi C R, parallela, & ad D C, perpendicularis.* [d] *Quare erit, vt C D, ad D R, hoc est, vt A, ad D R, ita S D,* d 2. vel 4. *id est, D R, ad D T. Sunt ergo quatuor lineæ N D, D P, D R, D T, continuè proportionales. Quòd si ex D, per T,* sexti. *alius arcus describatur, secans rectam D C, protractam, inuenietur eadem arte quinta proportionalis, atque ita in infinitum.*

*Ex his sanè magno labore inter duas rectas datas reperiemus duas medias proportionales, non quidem Geometricè omnino, sed quasi attentando, & praxim ipsam iterum atq; iterum repetendo, donec id, quod quærimus, assequamur. Vt si inter C D, D K, inuenienda sint duæ mediæ proportionales, descripto circa maiorem C D, circulo C E D F, erigemus ex K, ad C D, perpendicularem K H, ducemusq; D H, ea lege, vt ex puncto E, (vbi D H, circunferentiæ occurrit) perpendicularis ad D C, demissa E G, auferat rectam D G, rectæ D H, æqualem, hoc est, vt arcus ex D, per H, descriptus transeat per punctum G. Hoc enim facto, erunt D E, D H, inter C D, D K, mediæ proportionales. Nam, vt ostendimus, est vt C D, ad D E, ita D E, ad D G, ex coroll. propos. 8. huius lib.* [e] *Et vt D E, ad D G, ita D H, hoc est, D G, ad D K. Sunt ergo quatuor rectæ C D, D E, D H, D K, con-* e 2. vel 4. *tinuè proportionales, ac proinde D E, D H, inter C D, D K, mediæ proportionales sunt. Quòd si rectæ D H, D G,* sexti. *comperiantur non esse æquales, siquidem D H, fuerit minor, eleuanda erit D H, magis: si verò maior, magis deprimenda, donec deprehendantur æquales D H, D G.*

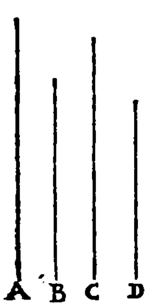
## PROBL. 4. PROPOS. 12. 10.

**TRIBVS datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.**




SINT tres lineæ rectæ A B, B C, A D, quibus inuenienda sit quarta proportionalis; sicut quidem A B, ad B C, ita A D, ad quartam. Disponantur primæ duę A B, B C, secundùm lineam rectam, quæ sit A C: Tertia verò A D, cũ prima A B, faciat angulum A, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur B D, cui per C, parallela ducatur C E, occurrens rectæ A D, productæ, in E, puncto. Dico D E, esse quartam proportionalem. Cùm enim in triangulo A C E, lateri C E, acta sit parallela B D; [a] erit vt A B, ad B C, ita A D, ad D E. Quare D E, quarta est proportionalis; a 2. sexti. ac propterea, tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenimus. Quod faciendũ erat.

### SCHOLIVM.

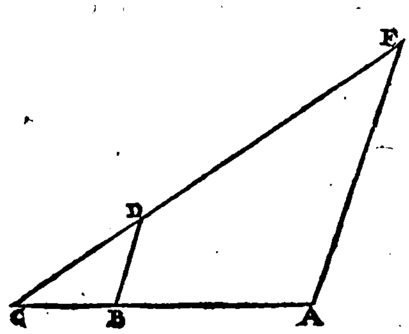



*HINC facilè elicimus, quonam pacto, datis duabus rectis lineis, duæ aliæ in eadem cum illis proportione reperiri possint. Si enim datæ sint duæ rectæ lineæ A, B, in quacunque proportione, si tertia qualibet accipiatur C, & ei quarta proportionalis inueniatur D, vt sit quemadmodum A ad B, ita C, ad D, factum erit, quod proponitur. Eadem arte inuenientur sex lineæ, octo, decem, duodecim, &c. quarũ binæ semper eandem habeant proportionem.*

*OSTENDEMVS etiam cum Pappo sequens Problema. Videlicet;*

**TRIBVS datis rectis lineis, quartam inuenire, quæ sit ad tertiam, vt prima ad secundam.**

*SINT tres rectæ A B, B C, C D, oporteátque inuenire quartam, quæ ad C D, tertiam sit, vt A B, prima ad B C, secundam. Disponantur primæ duæ A B, B C, in directum, vt faciant rectam A C: Tertia verò C D, cũ secunda B C faciat angulum C quemcunq;. Deinde ex B, ad D, recta ducatur B D, cui per A parallela ducatur A E, occurrens rectæ C D, productæ in E. Dico E D, esse quartam, hoc est, esse E D, ad D C, tertiam, vt est A B, prima ad B C, secundam. Hoc autem manifestum est,* [a] *cùm A C, E C, proportionaliter secentur in B, & D, punctis.* a 2. sexti.

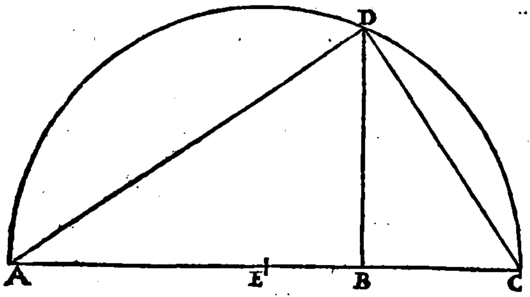



*ALITER. Ex secunda C B fiat prima, & ex prima A B, fiat*

21. sexti. *secunda, [a] atque inueniatur tribus C B, B A, C D, quarta proportionalis D E: Vt sit secunda C B, ad primam B A, vt tertia C D, ad quartam D E. Erit enim & conuertendo A B, prima ad B C, secundam vt D E, quarta ad C D, tertiam.*

## 9. PROBL. 5. PROPOS. 13.

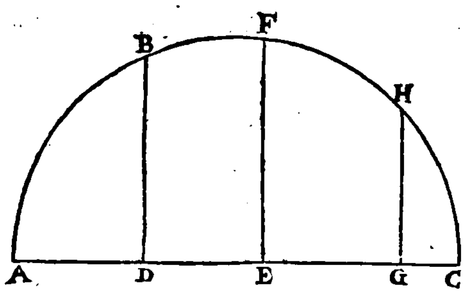
DVABVS datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.




SINT duæ rectæ A B, B C, quibus media inuenienda est proportionalis, dispositę secundùm lineam rectam A C. Diuisa A C, bifariam in E, ex E, centro, & interuallo E A, vel E C, semicirculus describatur A D C: Deinde ex B, ad A C, perpendicularis educatur B D, ad circunferentiam vsque. Dico B D. esse mediam proportionalem inter A B, & B C. Ductis enim rectis A D, C D; [a] erit angulus A D C, rectus in semicirculo. Cùm igitur ex angulo recto A D C, trianguli rectanguli A D C, deducta sit ad basin A C, perpendicularis D B; erit per corollarium propositionis 8. huius lib. B D, media proportionalis inter A B, & B C. Duabus ergo datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.

a 31. tertij.

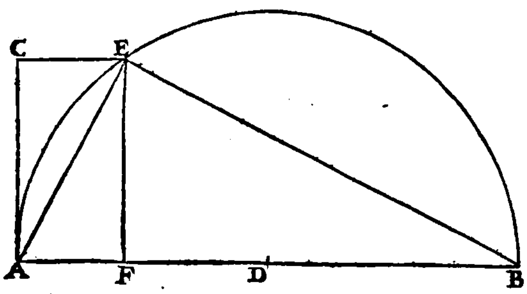
### SCHOLIVM.




*PERSPICVVM hinc fit, lineam rectam, quæ in circulo à quouis puncto diametri ipsi diametro perpendicularis ducitur ad circunferentiam vsque, mediam esse proportionalem inter duo diametri segmenta, quæ à perpendiculari facta sunt. Detur enim semicirculus A B C, & ex puncto D, diametri A C, ducatur ad circunferentiam recta D B, perpendicularis ipsi A C. Dico D B, esse proportionalem mediam inter A D, & D C. Id quod liquidò constat ex demonstratione huius problematis. Si enim* a 31. tertij. *ducantur rectæ A B, C B, [a] fiet angulus A B C, rectus. Quare per corollarium propos. 8. constat propositum. Eadem ratione erit perpendicularis E F, media proportionalis inter A E, & E C. Item G H, inter A G, & G C, atque eodem modo de alijs quibuscunque dicendum est, quæ ex quibusuis punctis diametri ad ipsam diametrum perpendiculares ducentur.*

### EX PELETARIO.

DATA recta linea, aliam rectam, (quæ minor non sit, quàm dupla illius) ita secare, vt data recta sit media proportionalis inter segmenta huius.

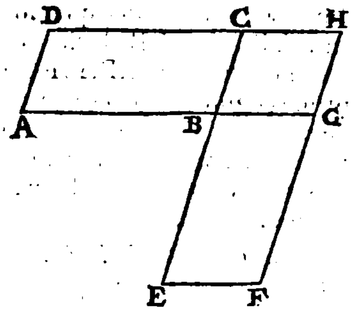



*SIT data recta A C, & diuidenda proponatur recta A B, (quæ minor non sit, quàm dupla ipsius A C, sed vel dupla, vel maior) ita vt inter huius segmenta, media proportionalis sit A C. Disponatur rectæ A B, A C, ad angulum rectum B A C, & diuisa A B, bifariam in D, ex D, centro, interuallo autem D A, vel D B, semicirculus describatur A E B. Deinde per C, ducatur ipsi A B, parallela C E, secans, vel tangens circunferentiam in E, puncto: (Secabit autem necessariò C E, circunferentiam, vel tanget. Nam si minor sit quàm dimidium rectæ A B, hoc est, minor, quàm semidiameter ad angulos rectos erecta ex D, secabit circunferentiam: tanget autem eandem circunferentiam, si æqualis sit dimidio rectæ A B, hoc est, æqualis semidiametro ex D, ad angulos rectos eductæ. Cùm ergo positum sit A C, non esse maiorem dimidio rectæ A B, secabit necessariò A C, circunferentiam, aut tanget.) à quo demittatur ad A B, perpendicularis E F. Dico A C, esse mediam proportionalem inter segmenta A F, F B. Ductis enim rectis A E, B E, erit, vt iam* b 34. primi. *est demonstratum ex corollario propos. 8. huius libri, E F, media proportionalis inter A F, & F B. [b] Cùm igitur E F, æqualis sit ipsi A C, eò quòd parallelogrammum sit A C E F: (est enim C E, ipsi A F, parallela per constru-* c 28. primi. *ctionem, [c] & A C, ipsi E F, propter angulos rectos C A F, & E F A,) erit & A C, media proportionalis inter A F, & F B. Quod est propositum.*

THEOR.

## THEOR. 9. PROPOS. 14. 13.

AEQVALIVM,& vnum vni æqualem habẽtium angulum, parallelogrammorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum vnum angulum vni angulo æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia.




SINT duo parallelogrãma æqualia A B C D, B E F G, habentia angulos A B C, E B G, æquales. Dico latera circum hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse vt A B, ad B G, ita E B, ad B C. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt A B, & B G, vnam efficiant lineam rectam. Quo facto, cùm anguli A B C, E B G, sint æquales, erunt & E B, B C, vna recta linea, vt ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demonstrauimus. Producantur iam D C, & F G, donec coeant in H. Quoniam igitur æqualia sunt parallelogramma D B, B F: *a* erit vt D B, ad B H, ita B F, ad idem B H: Sed vt D B, ad B H, *b* ita est A B, basis ad basin B G, quòd parallelogramma sint eiusdem altitudinis; & similiter vt B F, ad B H, ita est basis E B, ad basin B C. Igitur vt A B, ad B G, ita est E B, ad B C. Quod est propositum.

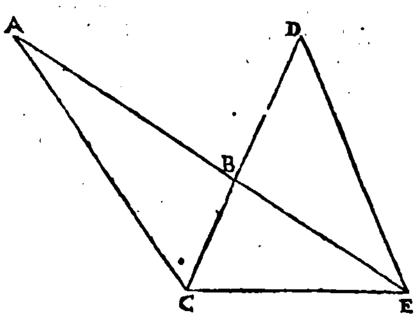
*a 7. quinti.* *b 1. sexti.*

E CONTRARIO, sint iam latera circa æquales angulos A B C, E B G, reciproca, hoc est, vt A B, ad B G, ita E B, ad B C. Dico parallelogramma D B, B F, esse æqualia. Facta enim eadem constructione, cùm sit, vt A B, ad B G, ita E B, ad B C: *c* Vt autem A B, ad B G, ita D B, ad B H; & vt E B, ad B C, ita B F, ad idem B H; erit quoque vt D B, ad B H, ita B F, ad idem B H; *d* Atque idcircò æqualia erunt parallelogramma D B, B F. Æqualium igitur, & vnum vni æqualem habentium angulum, &c. Quod erat demonstrandum.

*c 1. sexti.* *d 9. quinti.*

## THEOR. 10. PROPOS. 15. 14.

AEQVALIVM, & vnum vni æqualem habentium angulum, triangulorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum vnum angulum vni æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia.




SINT duo triangula æqualia A B C, D B E, habentia angulos, qui ad B, æquales. Dico latera circa hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse vt A B, ad B E, ita D B, ad B C. Coniungantur enim triangula ad angulos æquales, ita vt A B, B E, vnam efficiant lineam rectam. Quo facto, cùm anguli A B C, D B E, sint æquales; erunt & D B, B C, vna recta linea, vt demonstratum est ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo. Ducta igitur recta C E: quoniam æqualia sunt triãgula A B C, D B E; *e* erit vt A B C, ad B C E, ita D B E, ad idem B C E. Sed vt triangulum A B C, ad triangulum B C E, *f* ita est basis A B, ad basin B E, quòd hæc triangula eiusdem sint altitudinis; & similiter vt D B E, ad B C E, ita est basis D B, ad B C. Quare vt A B, ad B E, ita est D B, ad B C. Quod est propositum.

*e 7. quinti.* *f 1. sexti.*

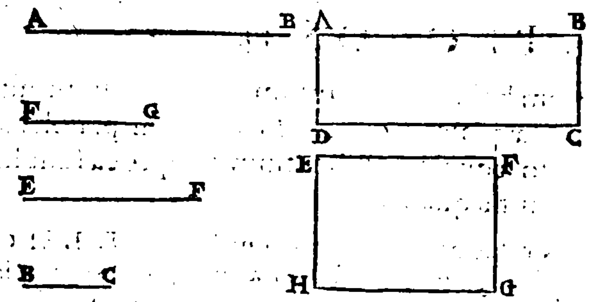
IAM verò contrà, sint latera circa angulos æquales, qui ad B, reciproca, hoc est, vt A B, ad B E, ita D B, ad B C. Dico triangula A B C, D B E, esse æqualia. Facta enim constructione eadem, cùm sit vt A B, ad B E, ita D B, ad B C; vt autem A B, ad B E, *g* ita triangulum A B C, ad triangulum B C E; & vt D B, ad B C, ita triangulum D B E, ad triangulum idem B C E: Erit vt A B C, ad B C E, ita D B E, ad idem B C E; *h* proptereaque æqualia erunt triangula A B C, D B E. Æqualium igitur, & vnum vni æqualem habentium angulum, &c. Quod ostendendum erat.

*g 1. sexti.* *h 9. quinti.*

## THEOR. 11. PROPOS. 16. 15.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod sub mediis comprehenditur, rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale fuerit ei, quod sub mediis continetur, rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT quatuor rectæ proportionales A B, F G, E F, B C; vt quidem A B, ad F G, ita E F, ad B C: Sitque rectangulum A B C D, comprehensum sub extremis A B, B C; rectangulum verò E F G H,

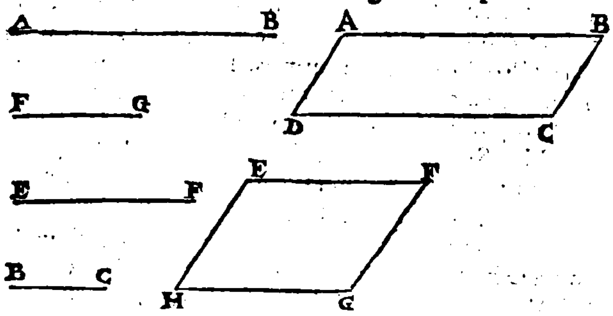


cōprehensum sub mediis EF, FG. Dico rectangula A C, E G, esse æqualia. Cùm enim anguli recti B, & F, sint æquales, & sit vt A B, ad F G, ita E F, ad B C: erūt latera circa æquales angulos B, & F, reciproca. a Quare parallelogrāma A C, E G, æqualia erūt. Quod est propositū.

a 14. sexti.

CONTRA verò, sint iam æqualia rectangula A C, E G. Dico quatuor rectas lineas A B, F G, E F, B C, esse proportionales, hoc est, esse vt AB, ad F G, ita E F, ad B C. Cùm enim æqualia sint rectangula A C, E G, habeantque angulos æquales, nempe rectos B, & F; b erunt latera circa hosce angulos reciproca; sicut quidem A B, ad F G, ita E F, ad B C. Itaque si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

b 14. sexti.



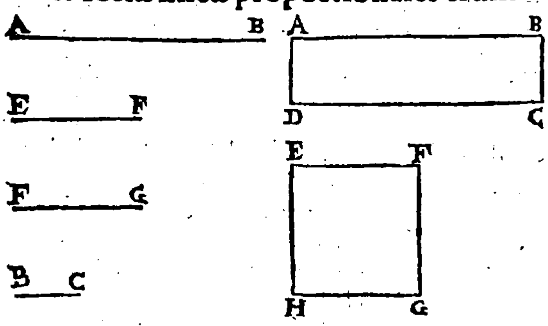
SCHOLIVM.

*IDEM verū est, etiamsi parallelogramma A C, E G, non sint rectangula, dummodò sint æquiangula, ita vt anguli dictis rectis lineis comprehensi sint æquales. Veluti manifestum est in hac figura. Eadem enim prorsus est demonstratio.*

16.

## THEOR. 12. PROPOS. 17.

SI tres rectæ lineæ sint proportionales: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod à media describitur, quadrato. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale sit ei, quod à media describitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.



SINT tres rectæ lineæ AB, E F, & B C, proportionales; vt quidem A B, ad E F, ita E F, ad B C: sitq; rectangulum A B C D, contentum sub extremis A B, B C; & quadratū mediæ E F, sit E F G H. Dico æqualia esse rectangulum A C, & quadratum E G. Sumpta enim recta F G, quæ æqualis sit ipsi E F, erūt quatuor lineæ AB, E F, F G, B C, proportionales; vt quidem AB, ad E F, ita F G, ad B C; eritque quadratum E G, comprehēsum sub mediis E F, F G, propter æqualitatem rectarum E F, F G. c Quare rectangulum A C, comprehensum sub extremis A B, B C, æquale est quadrato E G, hoc est, rectangulo sub mediis E F, F G, comprehenso. Quod est propositum.

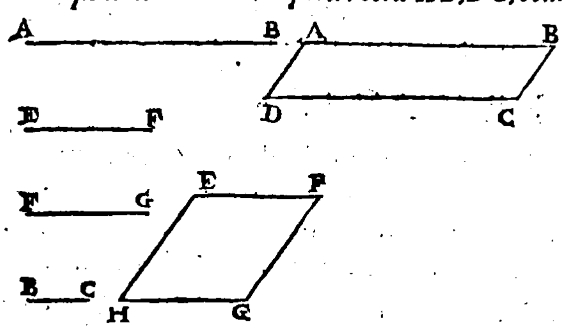
c 16. sexti.

SED sint iam æqualia rectangulum A C, & quadratum E G. Dico esse vt A B, ad E F, ita E F, ad B C. Cùm enim æqualia sint rectangula A C, & E G; d erit vt AB, ad E F, ita F G, ad B C: e Vt autem F G, ad B C, ita est E F, ipsi F G, æqualis, ad eandem B C. Quare vt A B, ad E F, ita est E F, ad B C. Si tres igitur rectæ lineæ sint proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

d 16. sexti.
e 7. quinti.

COROLLARIVM.

*Ex posteriori huius theorematis parte efficitur, quamlibet rectam lineā esse mediam proportionalem inter quasuis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato illius æquale. Ex eo enim quod recta A B, B C, comprehendunt rectangulum æquale quadrato rectæ E F, ostēsum fuit, esse vt A B, ad E F, ita E F, ad B C. Quare E F, media est proportionalis inter A B, & B C.*



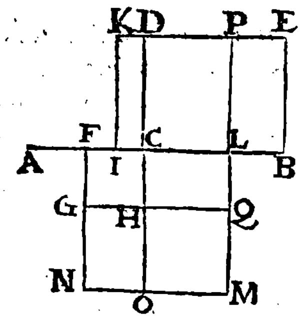
SCHOLIVM.

*EADEM omnino consequuntur, etiamsi parallelogramma nō sint rectangula, dummodò sint æquiangula, ita vt E G, sit Rhōbus, & A C, Rhomboides. Non enim dissimilis erit in his demonstratio, vt figura indicat.*

*LIBET hoc loco cum Peletario demonstrare problema non inutile ad lineas proportionales spectans; quod est eiusmodi:*

SECTA

SECTA linea recta in duas partes vtcunque, alterutram earum ita rursus partiri in duas partes, vt omnes tres partes sint continuè proportionales.



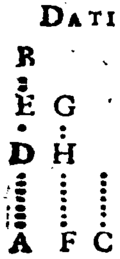

*SIT recta A B, diuisa in C, vtcunq; oporteatq; partem C B, ita secare in duas alias partes, vt omnes tres partes continuè proportionales sint. Secetur A C, bifariam in F; & F C, iterū bifariam in I, vt C I, quarta pars sit primæ partis A C: & ex B, I, erigātur duæ perpendiculares B E, I K, primæ parti A C, æquales, ducaturq; recta E K, ita vt rectangulum I E, comprehensum sit sub A C, prima parte, & recta I B, cōposita ex altera parte B C, & ex C I, quarta parte primæ partis. Et quoniā A C, diuisa est bifariam in F, eiq; addita in rectum C B,* [a] *erit rectangulum sub A B, B C, vnà cum quadrato ex C F, æquale quadrato ex B F. Est aūt rectangulum I E, minus rectangulo sub A B, B C, vnà cū quadrato ex C F. (Ducta enim C D, ad A B, perpendiculari, erit rectangulum C E, contentū sub A C, C B, minus rectangulo sub A B, B C: At rectangulum C K, quadrato ex C F, æquale, cùm vtrumq; quarta pars sit quadrati ex A C; rectangulum quidē C K,* [b] *quia sic est rectangulum C K, ad quadratū ex A C, hoc est, ad rectangulum sub A C, C D, vt C I, ad C A: ac proinde cū C I, sit quarta pars rectæ A C, erit & C K, quarta pars quadrati ex A C: At verò quadratum ex C F, quarta pars est eiusdem quadrati ex A C, ex scholio propos. 4. lib. 2.) Igitur minus quoq; erit quadrato ex B F. Si igitur* [c] *fiat quadratū rectāgulo I E, æquale, erit eius latus minus recta F B; maius autē, q̄ F C quippe cùm quadratū ex F C, æquale sit ostensum rectangulo C K, ac propterea minus rectangulo I E. Sit ergo latus illud F L. Dico partē C B, ita sectam esse in L, vt tres partes A C, C L, L B, sint continuè proportionales. Describatur enim ex F L, quadratū F M, rectaq; D C, extendatur ad O, & latus M L, ad P, sumptisq; duabus F G, L Q, ipsi C F, æqualibus, ducatur recta G Q, secans C O, in H. Eritq; C G, quadratum rectæ C F, ob æqualitatem rectarum C F, F G. Et quia ablatis æqualibus F C, F G, ex æqualibus F L, F N, reliquæ C L, G N, æquales sunt;* [d] *& est C L, ipsi H Q, & G N, ipsi H O, æqualis: æquales quoq; erunt H Q, H O ideoq; H M, quadratū erit rectæ C L. Rursus quia tam rectangulum C Q comprehenditur sub C L, & C H, siue C F, semisse ipsius A C, q̄ rectangulum G O, sub G N, siue C L, & G H, siue C F, semisse eiusdem A C, siue C D* [e] *erunt duo rectangula C Q, G O, simul æqualia rectangulo C P, comprehenso sub eadem C L, & C D, quæ ipsis C H, G H, simul æqualis est. Itaq; cùm rectangulum I E, quadrato F M, æquale sit; & rectangulum C K, quadrato C G; & rectangulum C P, duobus rectangulis C Q, G O, simul: erit reliquum rectangulum L E, comprehensum sub B E, siue A C, & B L, reliquo quadrato H M, æquale. Quocirca cū datis tribus rectis A C, C L, L B, rectangulum L E, sub extremis A C, B L, comprehensum æquale sit quadrato H M, mediæ C L;* [f] *erunt ipsæ tres lineæ A C, C L, L B, continuè proportionales. Quod est propositum.*

[a] 6. secūdi.
[b] 1. sexti.
[c] 14. secundi.
[d] 34. primi.
[e] 1. secūdi.
[f] 17. sexti.

*IN numeris idem problema ita perficietur. Posteriori parti numeri propositi adijciatur prioris partis pars quarta, & conflatus numerus in priore partē ducatur. Huius deinde producti numeri quadrata radix eruatur. Nam si ex radice inuenta dematur semissis prioris partis, reliqua fiet secunda pars proportionalis, quam si ex posteriori parte dati numeri subtrahas, reliqua erit tertia pars. Veluti si linea A B, ponatur 76 pars autem A C, 36. & C B, 40. adijciemus C I, hoc est, 9. quartā partē prioris partis 36. ad C B, id est, ad 40. posteriore partem, & conflatū numerum 49. lineam scilicet I B, in priorem partē 36 siue in lineam A C, ducemus, atque ex producto numero 1764. hoc est, ex rectangulo I E, radicem quadratā eruemus 42. pro linea F L, ex qua si detrahemus C F, semissem partis A C, nimirū 18. reliqua erit pars C L, 24. Hac ablata ex tota posteriori parte C B, 40. remanebit tertia pars L B, 16. Sunt ergo tres partes A C, C L, L B, numeri A B, 76. hæ tres, 36. 24. 16. continuè proportionales. Ex quo constat, quando radix quadrata extrahi nequit ex eo producto problema effici nō posse in numeris. Atq; hinc intelligentur ea, quæ lib. 5. in tractatione proportionū prope finem scripsimus, cū de ortu proportionalitatis Geometricæ ex Arithmetica proportionalitate ageremus. Sed quādo hactenus cum Euclide de lineis proportionalibus disputauimus, non alienū erit à nostro instituto, de eisdem quoq; cū Pappo Alexandrino disserere, qui datis duobus terminis ex tribus cuiuscunq; Medietatis, siue Arithmeticæ siue Geometricæ, siue Harmonicæ, tertium inquirit: Et in Geometrica proportionalitate aliter, quam ab Euclide factum est. Hoc autem exequemur sequentibus propositionibus, quarum prima hæc sit.*

## I.

DATIS duabus rectis lineis, mediā proportionalem in Arithmetica proportionalitate inuenire.




*SINT datæ duæ rectæ A B, & C, (quæ per vnitates in longū dispositas hic repræsentantur) inter quas media in proportionalitate Arithmetica sit inuenienda. Minori C, ponatur æqualis F H. & ex maiore A B, abscindatur alia æqualis A D. Diuiso autē segmento B D, bifariam in E, sumatur ipsi D E, æqualis H G. Dico F G, esse mediā Arithmeticè proportionalē inter A B, & C. excedit. n. A B, ipsam F G, excessu B E; & F G, ipsam C, excessu G H, siue D E. Cū ergo duo excessus B E, D E, sint æquales, ex constructione, liquidò cōstat rectas A B, F G, & C, Arithmeticè proportionales esse.*

*HINC efficitur mediā lineā F G, esse semissē summæ ex extremis conflatæ. Cū enim tam A D, q̄ C, ipsi F H, sit æqualis, erit summa ex A D, & C, ipsius F H, dupla. Est autem & D B, ipsius H G, dupla.* [g] *Igitur & summa ex A B, & C, totius F G, dupla erit; ac proinde F G, semissis erit summæ extremarum. Quod est propositum.*

[g] 1. quinti.

II.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Arithmetica proportionalitate inuenire.

*SINT in eadem figura, datæ duæ rectæ A B, & F G, quibus inuenienda sit tertia minor in Medietate Arithmetica. Ex minore F G, detrahatur recta G H, excessui B E, quo A B, ipsam F G, superat, æqualis: & ipsi F H, ponatur æqualis C. Dico C, esse tertiam proportionalem minorem. Excedit enim A B, ipsam F G, excessu B E; & F G, ipsam C, excessu G H: qui quidem duo excessus B E, G H, ex constructione æquales sunt.*

III.

DATIS duabus rectis lineis, maiorem extremitatem in proportionalitate Arithmetica inuenire.

*SINT in eadem figura, datæ duæ rectæ C, & F G, quibus inuenienda sit tertia maior in Medietate Arithmetica. Sumatur A F, ipsi F G, æqualis, eiq; addatur E B, excessui G H, quo F G, ipsam C, superat, æqualis. Dico A B, esse tertiam proportionalem maiorem; ita vt tres A B, F G, & C, sint proportionales Arithmeticè. Nam A B, excedit ipsam F G, excessu B E; & F G, ipsam C, excessu G H. Cùm ergo duo excessus B E, G H, ex constructione sint æquales, patet propositum.*

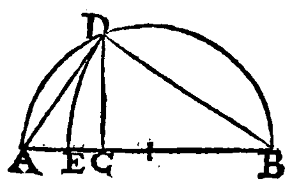
*ITAQVE datis duobus numeris inæqualibus 30. 16. si semissis excessus, nimirum 7. minori 16. adijciatur, conflabitur medius proportionalis Arithmeticè, 23. vt hic apparet, 30. 23. 16. Vel medius terminus habebitur, si summæ extremorum semissis sumatur; vt in eodem exemplo patet. Summa enim extremorum est 46, & eius semissis 23. medium terminum constituit.*

*SI verò ex minore 16. detrahatur excessus 14. reliquum erit minus extremum 2. in Medietate Arithmetica, vt hic vides, 30. 16. 2.*

*SI denique maiori 30. adijciatur excessus 14. conficietur maius extremum 44. in proportionalitate Arithmetica, vt hic patet, 44. 30. 16.*

IIII

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Geometrica proportionalitate inuenire.




*SINT datæ rectæ A B, B C, eundem terminum B, habentes, inter quas inuenienda sit media Geometricè proportionalis. Descripto circa maiorem A B, semicirculo A D B, excitetur ex C, ad A B, perpendicularis C D; & ex B, per D, arcus describatur secans A B, in E. Dico B E, mediam proportionalem esse inter A B, B C, in proportionalitate Geometrica. Ductis enim rectis A D, B D; [a] erit angulus A D B, rectus. Igitur ex corol. propos. 8. huius lib. recta B D, hoc est, ipsi æqualis B E, media proportionalis erit inter A B, B C. Quod est propositũ.*

a 31. tertij.

V.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in proportionalitate Geometrica inuenire.

*SINT in eadem figura, datæ rectæ A B, B E, eundem possidentes terminum B, quibus inuenienda sit minor tertia Geometricè proportionalis. Descripto circa maiorem A B, semicirculo A D B, describatur ex B per E, arcus secans circunferẽtiam A D B, in D, puncto, ex quo ad A B, perpendicularis demittatur D C. Dico B C, tertiam proportionalem esse ipsis A B, B E. Ductis enim rectis A D, B D [b] erit angulus A D B rectus. Igitur ex coroll. propos. 8. huius lib. erit B D, hoc est, ipsi æqualis B E, media proportionalis inter A B, B C: id est, erit A B, ad B E, vt B E, ad B C. Quod est propositum.*

b 31. tertij.

VI.

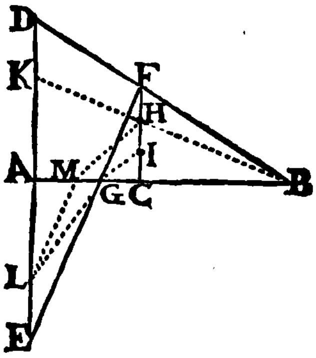
DATIS duabus lineis rectis, maiorem extremitatem in Geometrica proportionalitate inuenire.

*SINT in eadem figura, datæ rectæ C B, B E, eundem terminũ B, possidentes, quibus inuenienda sit maior tertia Geometricè proportionalis. Ex C. termino minoris excitetur ad E B, perpendicularis C D, quam arcus ex B per E, descriptus secet in D. Ducta autem recta B D, excitetur ad eam in D, perpendicularis D A, secans B E, productam in A. Dico A B, tertiam proportionalem esse ipsis C B, B E. Quoniam enim angulus A D B, rectus est; erit ex coroll. propos. 8. huius lib. B D. hoc est, B E, ipsi æqualis, media proportionalis inter B C, & A B: Hoc est, erit C B, ad B E, vt B E, ad A B. Quod est propositum.*

VII.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Harmonica proportionalitate inuenire.

*SINT datæ rectæ A B, B C, eundem terminum B, possidentes, inter quas inuenienda sit media Harmonicè proportionalis. Ducta per A, ad A B, perpendiculari D E, ponantur æquales A D, A E, quantæcunque. Excitetur quoque ex C, ad A B, perpendicularis C F, secans ductam rectam B D, in F, puncto, ex quo ad E, recta ducatur*




*catur F E, secans A B, in G. Dico B G, esse mediam Harmonicè proportionalem inter A B, B C: hoc est, esse A B, primam ad tertiam B C, vt A G, excessum inter primam A B, ac mediam B G, ad G C, excessum inter mediam B G, & tertiam B C. Quoniam enim [a] C F, parallela est ipsi D E, ob rectos angulos A, C; erit ex scholio propos. 4. huius libri triangulum B C F, triangulo B A D, simile: hoc est, erit vt A B, ad A D, ita B C, ad C F; & permutando, vt A B, ad B C, ita A D, ad C F: hoc est, ita A E, ad C F. Rursus ob similitudinem triangulorũ A E G, C F G, [b] erit vt A E, ad A G, ita C F, ad C G; & permutando vt A E, ad C F, ita A G, ad G C. Erat autem vt A E, ad C F, ita A B, ad B C. Igitur erit quoque A B, ad B C, prima linea ad tertiam, vt A G, excessus inter primã A B, & mediam B G, ad G C, excessum inter mediam B G, & tertiam B C. Quod est propositum.*

a 28. primi. b 4. sexti.

*Non determinantur autem magnitudines rectarum A D, A E: quia vtcunque sumantur, siue maiores, siue minores, eadem media B G, inuenietur. Sint enim aliæ æquales A K, A L: Ducta autem recta B K, secet perpendicularem C F, in H, iungaturq́; recta L H: quam dico per G, transire. Si enim transeat per aliud punctum, vt per M, inter A, & G; ostendemus eodem modo, esse vt A B, ad B C, ita A M, ad M C. Fient enim rursus triangula æquiangula A L M, M H C, si recta est H M L. Est autem vt A B, ad B C, ita A G, ad G C, vt ostensum est. Igitur erit quoq; A M, ad M C, vt A G, ad A C. quod est absurdum. Nam [c] minor est proportio A M, ad G C, quàm A G, ad G C: Sed adhuc minor est proportio A M, ad M C, q̃ ad G C. Multò ergo minor erit proportio A M, ad M C, quàm A G, ad G C. Non ergo ita est A M, ad M C, vt A G, ad G C: ac propterea H L, non secabit A G, in M. Eodem modo non secabit G C. Transit igitur per G: atq; idcircò eadem media B G, inuenietur per rectas A K, A L, æquales.* c 8. quinti.

## VIII

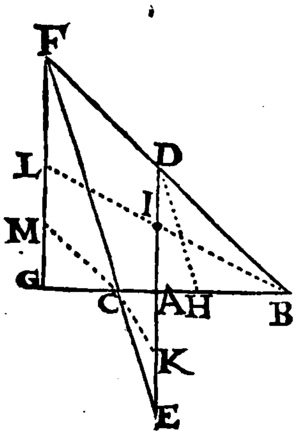
Datis duabus rectis lineis, minorẽ extremitatem in Harmonica Medietate inuenire.

*Sint in eadem figura, datæ rectæ A B, B G, eundem possidentes terminum B, quibus inuenienda sit minor tertia Harmonicè proportionalis. Ducta D E, ad A B, perpendiculari, ponantur æquales A D, A E, quantacunque: iuncta autem recta B D, ducatur ex E, per G, recta secans B D, in F, puncto, ex quo ad A B, perpendicularis demittatur F C. Dico B C, ipsis A B, B G, esse Harmonicè proportionalem: Hoc est, esse A B, primam ad B C, tertiam, vt A G, excessus inter primam & secundam, ad G C, excessum inter secundam ac tertiam. Quod quidem demonstrabitur, vt in præcedenti propositione.*

*Non determinantur etiam hic magnitudines rectarum A D, A E: quia vtcunque sumantur, siue maiores, siue minores, eadem tertia B C, reperietur. Sint enim aliæ æquales A K, A L: Ducta autem recta B K, secet perpendicularem C F in H, iungaturq́; recta L G; quam dico cadere in H. Si enim cadat infrà, vt in I: ostendemus eodem modo, esse vt A B, ad B C, ita A K, ad C H: hoc est, ita A L, ad C H. Vt autem A B, ad B C, ita erat A G, ad G C. Erit igitur quoq; vt A G, ad G C, ita A L, ad C H. Et quia, si recta linea est L G I, ob similitudinem triangulorũ A L G, C I G, [d] est vt A L, ad A G, ita C I, ad G C, erit permutando, vt A L, ad C I, ita A G, ad G C. Cùm ergo ostensum sit, esse vt A G, ad G C, ita A L, ad C H; erit A L, ad C H, vt ad C I. [e] Æquales sunt igitur C H, C I, totum & pars. quod est absurdum. Non ergo cadet L G, infra H: eodemq; modo ostendemus non cadere supra. Cadit ergo in H, vbi B K, perpendicularem C F, secat; ac proinde ex H, demissa perpendicularis H C, ad A B, exhibebit eandem tertiam minorem B C, proportionalem Harmonicè.* d 4. sexti. e 9. quinti.

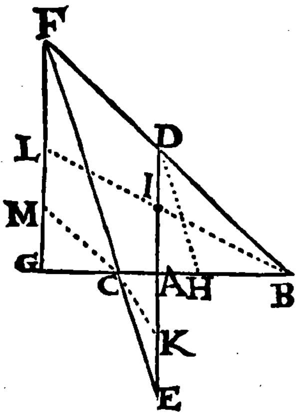
*Hinc sequitur, datis tribus rectis Harmonicè proportionalibus, minimam esse maiorẽ excessu, quo media minimã superat. Cùm enim sit, vt A B, ad B C, ita A G, ad G C: sit autẽ A B, prima maior, q̃ A G, excessus inter primã A B, & mediam B G; [f] erit quoq; B C, tertia maior, q̃ G C, excessus inter mediã B G, & minimã B C.* f 14. quinti.

## IX.




Datis duabus lineis rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire.

*Sint datæ rectæ A B, B C, eundem habentes terminum B, quibus inuenienda sit maior tertia Harmonicè proportionalis. Ducta per A, ad B C, perpendiculari D E, ponantur æquales A D, A E, quantæcunque, ducaturq́; recta B D, quam productam secet E C, producta in F, puncto, (quòd autem conueniant B D, E C, mox demonstrabimus) ex quo ad B C, productam demittatur perpendicularis F G. Dico G B, ipsis C B, B A, Harmonicè proportionalem esse: Hoc est, esse G B, primam ad B A, tertiam, vt G C, excessum inter primam G B, & mediam B C, ad C A, excessum inter mediam C B, & tertiam B A. [g] Quoniam enim G F, ipsi A D, parallela est, ob angulos rectos G, A, erit ex scholio propos. 4. huius lib. triangulum B A D, triangulo B G F, simile: id est, erit vt G B, ad G F, ita B A, ad A D; & permutando, vt G B, ad B A, ita G F, ad A D: hoc est, ad A E. Rursus ob similitudinem triangulorum F G C, E A C; [h]* g 28. primi. h 4. sexti.



erit vt F G,ad G C,ita E A,ad C A: & permutando vt F G,ad A E,ita G C,ad C A. Erat autem vt F G,ad A E,ita G B,ad B A. Igitur erit quoq; vt G B prima, ad B A, tertiam, ita G C,excessus inter primam G B, & mediam B C,ad C A,excessum inter mediam B C,& tertiam B A. Quod est propositum.

QVOD autem B D,E C,conueniant, sic probabitur. Quoniam B C ponitur media,& B A,tertia,siue minima,maior erit B A,tertia,quàm C A,excessus,quo media B C, minimam B A, superat, vt ad finem antecedentis problematis ostendimus. Nisi enim maior esset A B,quàm A C,non posset reperiri tertia maior. Cùm ea inuenta semper demonstraretur tertia A B, maior excessu A C,quo media tertiã superat. Abscindatur ergo A H,ipsi A C,æqualis, connectaturq; recta H D. Quoniam igitur latera A E, A C, lateribus A D, A H, æqualia sunt, angulosq; comprehendunt æquales, vtpote rectos, siue ad

a 4.primi. verticem A; [a] erunt & anguli A C E,A H D,æquales: qui cùm alterni sint,[b]

b 27.primi. erunt rectæ E C,H D, parallelæ; [c] ac proinde anguli interni D H C, H C F,

c 29.primi. duobus rectis æquales erũt. Cùm ergo [d] angulus D H C,maior sit interno an-

d 16.primi. gulo B; erũt duo anguli B C F,C B F,duobus rectis minores. [e] Quocirca B D,E C,coibũt. Quod est propositũ.

e 13. pron. NON determinantur quoq; hic magnitudines rectarum A D, A E: quia vtcunque sumantur siue maiores, siue minores, eadem tertia B G, reperietur. Sint enim aliæ æquales A I, A K: Ducta autem recta B I, quæ producta secet perpendicularem F G,in L,ducatur K C,quam productam dico cadere in L. Si enim cadat infra,vt in M; ostendemus eodem modo,esse vt G B,ad B A, ita G L,ad A I, id est, ad A K. Vt autem G B, ad B A, ita erat G C,ad C A. Erit igitur,vt G C,ad C A,ita G L,ad A K. Et quia, si recta linea est K C M, ob similitu-

f 4.sexti. dinem triangulorum G M C,A K C, [f] est vt G M,ad G C,ita K A,ad A C: erit permutando,vt G M,ad K A,ita G C,ad C A. Cùm ergo ostensum sit, esse vt G L, ad A K,ita G C,ad C A; erit quoque G M,ad A K,vt G L,ad

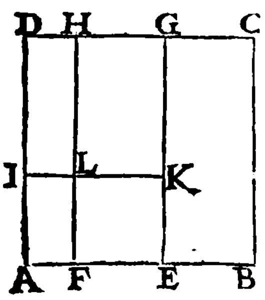
g 9.quinti. A K. [g] Aequales sunt igitur G M,G L,pars & totum.quod est absurdum. Non ergo cadet K C,infra L: eademque ratione neque supra cadet. Cadit ergo in L,vbi B I,producta perpendicularem F G,secat; ac proinde ex L, demissa perpendicularis L G, ad G B, cadet in G, exhibebitq; eandem tertiam G B, maiorem, Harmonicè proportionalem.

EX his perspicuum est, quando duo numeri proportionem habent duplam, vel dupla maiorem, illis non posse adiungi tertium maiorem in proportionalitate Harmonica,vt in tractatione proportionum in 3.regula proportionalitatis Harmonicæ diximus. Quia enim ostendimus, B A,minimam lineam esse maiorem excessu A C,quo media B C,minimam A B, superat; erit A B,maior semisse ipsius B C: ac proinde B C,ad A B,media ad minimam,minorem proportionem habebit,quàm duplam. Quòd si B C,ad A B,esset dupla,vel maior, quàm dupla, esset A B, vel æqualis ipsi A C, vel minor. Quare,vt ostensum est,non posset reperiri tertia maior in Harmonica proportionalitate: quia E C,cum B D,non coiret.

SED demonstremus etiam cum Ioanne Baptista Benedicto, qua ratione ijdem termini proportionalitatis Harmonicæ in numeris reperiantur. Hinc enim patebit ratio quarundam praxiũ,quas in tractatione proportionum in lib.5.explicauimus. Vtemur autẽ nonnullis propositionibus libri 7.cùm eæ ex lib.5. & 6.nõ pendeant,atq; idcircò ante hos libros demonstrari possint. Hinc igitur exordium sumemus.

## X.

Ex datis quibusuis duobus numeris, tres numeros Harmonicè proportionales, quorum extremi eandem proportionem habeant, quam dati duo numeri, reperire.



EX qualibet recta A B,describatur quadratum A B C D. Sumptisq; duabus partibus æqualibus B E, E F, in latere A B, ducantur E G,F H, ipsis A D, B C,parallelæ. Item sumpta recta A I,æquali ipsi B E,vel E F,agatur I K, ipsis A B,D C,parallela secans F H,in L. Erit rectangulum A G,contẽtum sub A B, (id est, sub summa rectarum A E,E B: [h] cùm E G, sit ipsi B C, ideoq; ipsi A B,

h 34.primi. æqualis) & A E, (maiore scilicet parte summæ A B.) Rectangulum verò E C, continebitur sub A B,(hoc est, sub eadem summa rectarum A E, E B,) & E B, (minore videlicet parte eiusdem summæ A B.) Tam deniq; rectangulum A K, quàm G L,sub partibus A E, E B, comprehendetur; propterea quòd A I,sum-

i 34.primi. pta est ipsi E B, æqualis; & H L,L K, ipsis A E, E B, æquales. [i] Cùm enim F H,

k 34.primi. ipsi A D, hoc est,ipsi A B; & F L,ipsi A I,hoc est,ipsi E B,sit æqualis: erit reliqua H L,reliquæ A E,æqualis: [k] At K L, ipsi E F, siue ipsi E B, æqualis est. Ex quo fit, duo rectangula A K,K H, simul continere duplum eius, quod sub partibus A E,E B,continetur. Dico rectangulum A G; & summam duorum rectangulorum A K, K H; &

l 36.primi. rectangulum E C,constituere proportionalitatem Harmonicam: hoc est vt est A G,primum,ad E C,tertium,

m 7.quinti. ita esse I H,excessum inter primũ A G,& secundum H L I A E G, ad A L, excessum inter secundũ H L I A E G, & tertium E C,siue F G,[l] quod ipsi E C,æquale est. Nam cùm H L, ipsi A E; & L F,ipsi E B, æqualis sit,vt o-

n 1.sexti. stendimus; [m] erit A E,ad E B,vt H L,ad L F. Vt autem A E,ad E B, [n] ita est A G,ad E C: Et vt H L,ad L F, ita

est

*est H I, ad A L. Igitur erit quoq; A G, primum ad E C, tertium, vt H I, excessus inter primum ac medium, ad A L, excessum inter medium ac tertium. Quod est propositum.*

*ITAQVE si A E, ponatur 6. & E B, 4. erit summa A B, 10. quam si ducamus in A E, & E B, fiet A G, 60. & E C, 40. Duplum autem eius, quod fit ex A E, in E B, hoc est, H L I A E G, fiet 48. medium Harmonicum. Tres igitur numeri Harmonicè proportionales erunt 60. 48. 40. quorum extremi eandem proportionem habent, quam dati numeri 6. 4. Cum enim eadem summa 10. ex 6. & 4. collecta multiplicans vtrunq; 6. 4. produxerit extremos 60. 40. [a] erit 60. ad 40. vt 6. ad 4. Quod etiam patet ex figura. [b] Est enim A G, id est, 60. ad E C, id est, ad 40. vt A E, id est, 6. ad E B, id est, ad 4.* a 17. septimi. b 1. sexti.

*HAC arte si summa quorumlibet duorum numerorum datorum ducatur in vtrumq; seorsum, gignentur extremi termini proportionalitatis Harmonicè eandem habentes proportionem, quam dati duo numeri: Medius autem terminus erit numerus duplus eius, qui fit ex multiplicatione datorū duorum numerorū inter se.*

## ALITER.

*INTER datos duos numeros 6. 4. statuatur medius Arithmeticè proportionalis, 5. nimirum semissis eorum summæ, hoc modo. 6. 5. 4. Deinde medius 5. in extremos 6. & 4. ductus gignat 30. & 20. inter quos statuatur medius 24. quem extremi inter se multiplicati producunt, hoc modo, 30. 24. 20. Dico hos tres esse Harmonicè proportionales. Quoniam enim tres numeri 60. 48. 40. qui fiunt ex summa 10. datorum numerorum 6. 4. in datos numeros 6. & 4. & ex 4. in 6. bis, dupli sunt trium numerorum hic inuētorum, quòd hi producti sint ex semisse summæ datorum numerorum in datos numeros, & ex 4. in 6. semel, vt perspicuū est: erit quoq; tam excessus inter 60. & 48. duplus excessus inter 30. & 24. quàm excessus inter 48. & 40. ipsius excessus inter 24. & 20. vt ad propos. 10. ostendimus. Cùm ergo tres numeri 60. 48. 40. sint Harmonicè proportionales, vt in præcedenti problemate demonstrauimus; erunt quoq; eorum semisses, 30. 24. 20. [c] easdem habentes proportiones, Harmonicè proportionales: quandoquidem & excessus eandem proportionem habent, quam excessus numerorum, 60. 48. 40. quippe cùm excessus numerorum 30. 24. 20. semisses sint horum numerorum 60. 48. 40. excessuum, vt dictum est.* c 15. quinti.

| | | |
|---|---|---|
| 60. | 48. | 40 |
| 30. | 24. | 20 |

## XI.

DATIS duobus numeris, medium Harmonicè proportionalem inuenire.

*SINT duo numeri dati A B, 15. & B C, 10. inter quos inueniendus sit medius proportionalis Harmonicè. Dematur ex maiore A B, 15. numerus B D, minori B C, 10. æqualis, & reliquus numerus A D, 5. nimirum*

A . . . E . . D . . . . . . . . . B . . . . . . . . . C

*differentia datorum numerorum, ducatur in minorem B C, 10. productusq; numerus 50. diuisus per A C, 25. summam datorum numerorum, faciat Quotientem D E, 2. qui additus minori B D, 10 faciat B E, 12. Dico B E, esse medium proportionalem Harmonicè inter A B, B C, hoc modo, 15. 12. 10. Quoniam enim numero, qui ex A D, in B C, fit, diuiso per A C, Quotiens est D E; producetur idem numerus diuisus ex D E, Quotiente in diuisorem A C, vt constat ex defin. Diuisionis. Quia igitur idem numerus fit ex A C, primo, in D E, quartum, qui ex B C, vel B D, secundo, in A D, tertium; [d] erit A C, primus ad B C, secundum, vt A D, tertius ad D E, quartum: Et diuidendo, A B, ad B C, primus datus ad tertium datum, vt A E, excessus inter primū A B, & medium inuentum, B E, ad D E, excessum inter medium B E, & B D, siue tertium B C. Sunt ergo A B, B E, B C, nimirum 15. 12. 10. Harmonicè proportionales. Quod est propositum.* d 19. septimi, vel 16. sexti.

*ITAQVE si differentia datorum numerorum ducatur in minorem, numerusq; productus diuidatur per datorum numerorum summam, ac deniq; Quotiens minori adiiciatur, conflabitur medius terminus Harmonicæ proportionalitatis.*

## XII.

DATIS duobus numeris, minorem extremum in proportionalitate Harmonica inuenire.

*SINT duo numeri dati A B, 15. & A C, 12. quibus inueniendus est minor Harmonicè proportionalis.*

A . . . . . . . . . E . . C . . . B . . . D

*Addatur B D, æqualis ipsi B C, excessui inter datos numeros. Per hanc summam A D, 18, collectam ex maiore numero, & differentia datorum numerorum, diuidatur numerus 36. factus ex minore dato A C, in B C, differentiam datorum numerorum; & Quotiens C E, ex minore dato A C, detrahatur. Dico reliquum A E, 10. esse terminum tertium minorem quæsitum, hoc modo, 15. 12. 10. Quoniam enim numero, qui ex A C, in B C, fit, diuiso per A D, Quotiens est C E: producetur idem numerus diuisus ex C E, Quotiente in diuisorem A D, multiplicato, vt ex Diuisionis defin. manifestum est. Quia igitur idem numerus gignitur ex A D, primo, in C E,*

A . . . . . . . . . E . . C . . . B . . . D

*quartum, qui ex B C, secundo in A C, tertium; [e] erit A D, primus ad B C, secundum, hoc est, ad B D, vt A C, tertius ad C E, quartum. Et diuidendo, A B, ad B D, hoc est, ad B C, vt A E, ad C E: Et permutando, A B, primus datus, ad A E, tertium inuentum, vt B C, excessus inter primum A B, & medium A C, ad C E, excessum inter* e 19. septimi vel 16. sexti.

medium A C, & tertium A E. Sunt igitur tres numeri A B, A C, A E, id est, 15. 12. 10. Harmonicè proportionales. Quod est propositum.

ITAQVE si per summam ex maiore numero, & ex differentia datorum numerorum collectam diuidatur numerus ex minore numero in differentiam eandem datorum numerorum procreatus, Quotiensq́; ex minore dato detrahatur, reliquus fiet minor extremus in proportionalitate Harmonica.

ALITER.

SINT rursum dati duo numeri A B, 15. & A C, 12. quibus inueniendus sit minor in Harmonica Medietate. Maiori A B, addatur B D, æqualis differentiæ B C, 3. datorum numerorum: Et per summã A D, 18. diuidatur

A . . . . . . . . . E . . C . . . B . . . D

numerus 180. ex multiplicatione datorum numerorum A B, A C, hoc est, 15. 12. inter se procreatus, sitq́; Quotiens A E, 10. Dico A E, minorem extremum esse in Medietate Harmonica. Quoniã enim numero, qui ex A B, in A C, gignitur, diuiso per A D, Quotiens fit A E; producetur idem numerus diuisus ex A E, Quotiente in diuisorem A D, multiplicato, vt ex defin. Diuisionis constat. Quia igitur idem numerus fit ex A D, primo in A E, quartum, qui ex A B, secundo in A C, tertium; [a] erit A D, primus ad A B, secundũ, vt A C, tertius ad A E, quartum; ac proinde cum A D, maior sit, quàm A B, erit quoque A C, maior quàm A E. Quare erit & diuidendo B D, id est, B C, ad A B, vt C E, ad A E: Et conuertendo A B, ad B C, vt A E, ad C E: Et permutando A B, primus ad A E, tertium inuentum, vt B C, excessus inter primum A B, & medium A C, ad C E, excessum inter mediũ A C, & tertium A E. Sunt igitur tres numeri A B, A C, A E, hoc est, 15. 12. 10. Harmonicè proportionales. Quod est propositum.

[a] 19. septimi. vel 16. sexti.

ITAQVE si per summam ex maiore numero, & ex differentia datorum numerorum collectam diuidatur numerus ex multiplicatione datorum numerorum inter se procreatus, erit Quotiens minor terminus extremus Harmonicæ Medietatis.

XIII.

DATIS duobus numeris, maiorẽ extremũ in Harmonica proportionalitate inuenire.

SINT dati duo numeri A B, 10. & A C, 12. quibus inueniendus sit tertius maior in Medietate Harmonica.

A . . . . . . . D . . B . . C . . . E

Ex minore A B, detrahatur B D, æqualis differentiæ B C, 2. datorum numerorum. Et per reliquum numerum A D, 8. diuidatur numerus 24. factus ex maiore numero A C, 12. in differentiam datorum numerorum B C, 2. vel B D. Quotiens autem C E, 3. maiori numero A C, 12. adyciatur. Dico summam A E, 15. esse terminum maiorem in proportionalitate, siue Medietate Harmonica, hoc est, tres numeros A E, A C, A B, nimirum 15. 12. 10. esse Harmonicè proportionales. Quoniam enim numero, qui ex A C, in B D, fit, diuiso per A D, Quotiẽs fit C E, producetur idem numerus diuisus ex C E, Quotiente in diuisorem A D, multiplicato. Quia igitur idem numerus gignitur ex A C, primo in B D, quartum, qui ex C E, secundo in A D, tertium; [b] erit A C, primus ad C E, secundum, vt A D, tertius ad B D, quartum: Et componendo A E, ad C E, vt A B, ad B D, hoc est, ad B C: Et permutando A E, primus ad A B, tertium, vt C E, excessus inter primum A E, & medium A C, ad excessum B C, inter medium A C, & tertium A B. Sunt ergo tres numeri A E, A C, A B, nimirum 15. 12. 10. Harmonicè proportionales. Quod est propositum.

[b] 19. septimi vel 16. sexti.

ITAQVE datis duobus numeris, si eorum differentia ex minore auferatur, & per reliquum numerum diuidatur numerus ex maiore numero in differentiam datorum numerorum procreatus, Quotiensq́; maiori numero adiiciatur, conflabitur maior terminus extremus Medietatis Harmonicæ.

ALITER.

SINT rursum duo dati numeri A B, 10. & A C, 12. quibus inueniendus sit maior in Harmonica Medietate. Ex minore A B, demantur B D, æqualis excessui B C, datorum numerorum: Et per reliquum numerum A D, 8. diuidatur numerus 120. factus ex multiplicatione datorum numerorum A B, 10. & A C. 12. procreatus, Quotiensq́; sit A E, 15. Dico A E, esse terminũ maiorem in proportionalitate Harmonica. Quoniam enim numero,

A . . . . . . . . D . . B . . C . . . E

qui fit ex A B, in A C, diuiso per A D. Quotiens est A E; producetur idem numerus diuisus ex A E, Quotiente in diuisorem A D, ex defin. Diuisionis. Quia igitur idem numerus gignitur ex A B, primo in A C, quartum, qui ex A D, secundo in A E, tertium, [c] erit A B, primus ad A D, secundum, vt A E, tertius ad A C, quartũ; ac proinde cum A B, maior sit quàm A D, erit & A E, maior quam A C. Et cum sit, vt A E, ad A C, ita A B, ad A D; erit per conuersionem rationis A E, ad C E, vt A B, ad B D, hoc est, ad B C: Et permutando A E, primus inuentus ad A B, tertium, vt C E, excessus inter primum A E, & medium A C, ad B C, excessum inter medium A C, & tertium A B: Igitur tres numeri A E, 15. A C, 12. A B, 10. Harmonicè proportionales sunt. Quod est propositum.

[c] 19. septimi vel 16. sexti.

ITAQVE datis duobus numeris, si eorum differentia ex minore auferatur, & per reliquum numerum diuidatur numerus ex multiplicatione datorum numerorum inter se genitus, dabit Quotiens maiorem terminum extremum Medietatis Harmonicæ.

POSTREMO libet quoq; ex Pappo praxes illas demonstrare, quibus ad finem tractationis proportionum

num ex æqualitatis proportione omnes proportiones rationales, & vicissim ex inæqualitatis proportione quælibet æqualitatem, ac deniq; ex quauis proportionalitate Geometrica & Geometricam, & Arithmeticam, & Harmonicam, oriri docuimus. Sic ergo ex proportionalitate Geometrica tam æqualium terminorũ, quàm inæqualium, gignitur proportionalitas alia Geometrica inæqualium terminorum.

## XIIII.

PROPOSITIS tribus terminis Geometricè proportionalibus, siue æqualibus, siue inæqualibus; Summa ex primo semel, secundo bis, & tertio semel collecta: ac summa conflata ex secundo & tertio semel: ac tertius semel, sunt Geometricè proportionales.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A, 1. | B, 1. | C, 1. | A, 12. | B, 6. | C, 3. |
| D, 4. | E, 2. | F, 1. | D, 27. | E, 9. | F, 3. |

*SINT tres termini continuè proportionales Geometricè, A,B,C: sitq; D, summa ex A, semel, & B, bis, & C, semel collecta: At E, summa ex B, & C, semel conflata, ac deniq; F, ipsi C, æqualis. Dico D,E,F, Geometricè quoq; proportionales esse. Cùm enim sit A, ad B, vt B, ad C; erit quoq; componendo A,B, simul ad B, vt B C, simul ad C. [a] Igitur omnes antecedentes simul, nimirum A,B, & B,C, ad omnes consequentes simul, nimirum ad B,C, vt vna antecedens, hoc est, B,C, ad vnam consequentem C. Est autem D, æqualis ipsis A,B, & B,C: Et E, ipsis B,C: ac denique F, ipsi C. Igitur erit quoq; D, ad E, vt E, ad F: ac proinde D,E,F, Geometricè sunt proportionales. Quod est propositum.* a 12. quinti.

| | | |
|---|---|---|
| A, | B, | C, |
| 1. | 1. | 1. |
| | | |
| D. | E. | F. |
| 4. | 2. | 1. |

*HINC manifestum est, si termini A,B,C, sint æquales; D,E,F, esse duplos. Nam B, C, simul dupli erunt ipsius C; ac propterea & E, ipsius F: quòd E, ipsis B, C: & F, ipsi C, sit æqualis. Cùm ergo D,E,F, sint continuè proportionales, ipsi erunt in dupla proportione. Quòd si termini æquales A,B,C, sint vnitates, generabitur dupla proportionalitas D, E,F, in minimis terminis 4.2.1. propterea quòd F, æqualis est ipsi C, hoc est, vnitati.*

| | | |
|---|---|---|
| A. | B. | C. |
| 4. | 2. | 1. |
| | | |
| D. | E. | F. |
| 9. | 3. | 1. |

*SI verò A,B,C, sint dupli, erunt geniti D,E,F, tripli. Nam si B, ipsius C, duplus est; erit summa ex B,C, collecta, id est, E, ipsius C, hoc est, ipsius F, triplus: ac proinde D,E,F, continuam proportionem triplam habebunt. Atq; eodẽ modo ex triplis orientur quadrupli, ex quadruplis quintupli, & sic in infinitũ.*

| | | |
|---|---|---|
| A. | B. | C. |
| 1. | 2. | 4. |
| | | |
| D. | E. | F. |
| 9. | 6. | 4. |

*AT si termini A,B,C, sint dupli inuerso ordine, erunt D,E,F, geniti, sesquialteri. Nam cùm B, sit semissis ipsius C, erit summa ex B, C, collecta, hoc est, E, ipsius C, siue ipsius F, sesquialtera. Eodem modo si A,B,C, sint conuerso ordine tripli, erunt procreati D,E,F, sesquitertij. Nam B, erit ipsius C, tertia pars. Igitur summa ex B,C, conflata, id est, E, continebit C, siue F, semel & insuper eius partem tertiam: ac propterea D,E,F, habebunt continuam proportionem sesquitertiam. Pari ratione ex quadruplis inuersis nascentur sesquiquarti, & ex inuersis quintuplis sesquiquinti, atq; ita in infinitum. Non aliter monstrabimus, aliarum proportionum generationes ex alijs proportionibus rectè esse præscriptas in tractatione proportionum. Item rectè quamcunq; proportionem inæqualitatis ad æqualitatem reuocari: quippe cùm in ea reductione retexamus quodammodo operationem, qua inæqualitatis proportionem ex æqualitate gigni tradidimus.*

| | | |
|---|---|---|
| A. | B. | C. |
| 1. | 3. | 9. |
| | | |
| D. | E. | F. |
| 16. | 12. | 9. |

## XV.

PROPOSITIS tribus terminis, siue æqualibus, siue inæqualibus, Geometricè proportionalibus; Summa ex primo bis, secundo bis, & tertio semel collecta: ac summa ex primo, secundo, & tertio semel conflata: ac denique tertius semel, sunt Arithmeticè proportionales.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A, 1. | B, 1. | C, 1. | A, 12. | B, 6. | C, 3. |
| D, 5. | E, 3. | F, 1. | D, 39. | E, 21. | F, 3. |

*SINT tres termini Geometricè proportionales A,B,C: sitq; D, summa collecta ex A, bis, ex B, bis, & ex C, semel: At E, summa conflata ex A,B,C, semel: Ac denique F, ipsi C, æqualis. Dico D,E,F, esse Arithmeticè proportionales. Quoniam enim summa ex A, bis, & B, bis, & C, semel, hoc est, terminus D, superat summam ex A,B,C, semel, hoc est, terminum E, aggregato ex A,B, semel collecto: Item summa ex A,B,C, hoc est, terminus E, superat terminum C, siue F, eodem aggregato ex A,B, semel collecto; erit idem excessus inter D, & E, qui inter E, & F: ac propterea D,E,F, Arithmeticam proportionalitatem, siue Medietatem constituent. Quod est propositum.*

| | | |
|---|---|---|
| A. | E. | C. |
| 3. | 20. | 1. |
| | | |
| D. | E. | F. |
| 47. | 24. | 1. |

*EADEM prorsus ratione oritur proportionalitas Arithmetica ex tribus terminis quibuscunque, etiamsi non sint proportionales: vt in hoc exemplo perspicuum est.*

XVI.

PROPOSITIS tribus terminis siue æqualibus, siue inæqualibus Geometricè proportionalibus; Summa collecta ex primo bis, ex secundo ter, & tertio semel: ac summa conflata ex secundo bis, & tertio semel: & denique summa ex secundo semel, & tertio semel coaceruata, Harmonicè proportionales sunt.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A, 1. | B, 1. | C, 1. | A, 12. | B, 6. | C, 3. |
| D, 6. | E, 3. | F, 2. | D, 45. | E, 15. | F, 9. |

*SINT tres termini Geometricè proportionales A, B, C: sitq́; D, summa collecta ex A, bis, ex B, ter, & ex C, semel: At E, summa ex B, bis, & C, semel conflata: Ac denique F, summa ex B, semel, & C, semel collecta. Dico D, E, F, constituere proportionalitatem, siue Medietatem Harmonicam. Quoniam enim est, vt A, ad B, ita B, ad C; erunt ex scholio propos. 22. lib. 5. vt A, bis ad B, ita B, bis ad C. Igitur componendo, vt A, bis, & B, semel, ad B, ita B, bis, & C, semel ad C.* a 12. quinti. *a Igitur vt omnes antecedentes simul, nimirum A, bis, & B, ter, & C, semel, hoc est, terminus D, ad omnes consequentes simul, nimirum ad summam ex B, C, id est, ad F, ita vnum antecedens, nimirum A, bis, & B, semel ad B. Est autem A, bis, & B semel excessus, quo A, bis, & B, ter, & C, semel, superant B, bis, & C, semel: hoc est, excessus inter D, primum terminum, & medium E: At B, excessus, quo B, bis, & C, semel, superant summam ex B, C, hoc est, excessus inter E, medium, & F, tertium. Igitur erit vt D primus ad F, tertium, ita excessus inter primum & medium, ad excessum inter medium ac tertium; ideoq́; D, E, F, Harmonicè proportionales erunt. Quod est propositum.*

*SEMPER autem minimi termini procreantur D, E, F, quando dati termini A, B, C, sunt vnitates; vt in exemplis prolatis manifestum est. Quando autem A, B, C, non sunt vnitates, etiamsi in sua proportione minimi sint, non semper creantur minimi termini D, E, F. Id quod liquidò constat in his exemplis.*

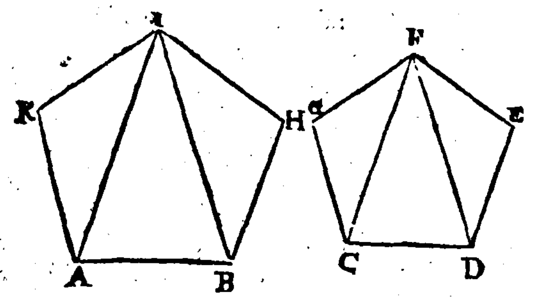
| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A, 9. | B, 6. | C, 4. | A, 1. | B, 4. | C, 16. | A, 9. | B, 12. | C, 16. |
| D, 40. | E, 16. | F, 10. | D, 30. | E, 24. | F, 20. | D, 70. | E, 40. | F. 28. |

*In primo enim exemplo, ex minimis terminis proportionis sesquialtera, & in secundo ex minimis terminis subquadrupla proportionis, & in tertio ex minimis terminis subsesquitertia proportionis, gignuntur tres in proportionalitate Harmonica non minimi. Quòd si termini inuertantur, tum demum (quod mirum est) minimi termini Medietatis Harmonica procreabuntur, vt hæc exempla demonstrant.*

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A, 4. | B, 6. | C, 9. | A, 16. | B, 4. | C, 1. | A, 16. | B, 12. | C, 9. |
| D, 35. | E, 21. | F, 15. | D, 45. | E, 9. | F, 5. | D, 77. | E, 33. | F, 21. |

## 19. PROBL. 6. PROPOS. 18.

A DATA recta linea dato rectilineo simile similiterque positum rectilineum describere.



SIT data recta A B, super quã describendũ sit rectilineum rectilineo C D E F G, similesimiliterque positum. Ducantur ex quolibet angulo, vt ex F, ad singulos angulos oppositos, rectæ lineæ, quæ rectilineum resoluant in triangula C D F, D E F, F G C. Deinde angulo D C F, æqualis fiat angulus B A I; & angulo C D F, angulus A B I, coeantque rectæ A I, B I, in puncto I; (coibunt enim omnino, propterea quòd duo anguli I A B, I B A, duobus rectis minores sunt, cùm æquales sint duobus angulis F C D, F D C, a qui duobus rectis sunt minores.) b eritque reliquo angulo C F D, reliquus angulus A I B, æqualis; totumque triangulum A I B, toti triangulo C F D, æquiangulum. Rursus angulo F D E, æqualis fiat angulus I B H; & angulo D F E, angulus D I H: Et c quia duo anguli E D F, E F D, minores sunt duobus rectis; erunt quoque duo anguli H B I, H I B, duobus rectis minores; ac proinde rectæ B H, I H, coibunt. Coeant ergo in puncto H; eritq́; eadem ratione triangulũ B H I, triangulo D E F, æquiangulũ. Præterea angulo C F G, fiat æqualis angulus A I K; & angulo F C G, angulus I A K: d Et q̃a duo anguli G C F, G F C, minores sunt duob⁹ rectis; erũt & duo anguli K A I, K I A, duobus rectis minores; atq; idcirco rectę A K, I K, couenient in aliquo pũcto.

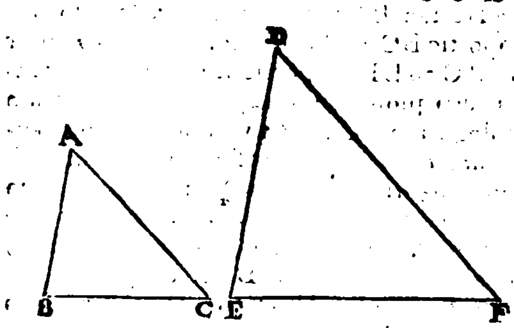
a 17. primi. b 32. primi. c 17. primi. d 17. primi.

Conueniant

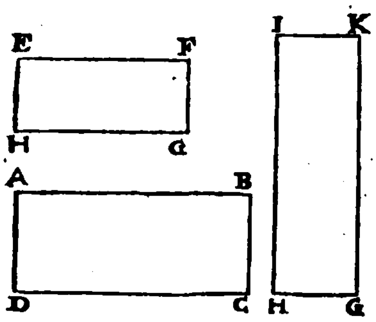
Conueniant ergo in K: eritque triangulum quoque A K I, triangulo C G E, æquiangulum. Atque ita procedatur, donec absoluantur omnia triangula rectilinei propositi, si plura extiterint. Dico igitur rectilineum A B H I K, rectilineo C D E F G, simile esse, similiterq; positum. Cùm enim angulus I A B, cõstitutus sit æqualis angulo F C D; & angulus I A K, angulo F C G; erit totus angulus B A K, toti angulo D C G, æqualis: Eademque ratione angulus A B H, angulo C D E, æqualis erit; & reliqui reliquis, vt cõstat ex constructione; cũ singulę partes vnius singulis partibus alterius factæ sint æquales. Quare æquiangulum erit rectilineũ A B H I K, rectilineo C D E F G. Quoniam verò, [a] ita est A B, ad B I, vt C D, ad D F; & ita B I, ad B H, vt D F, ad D E; [b] erit ex æquo ita A B, ad B H, vt C D, ad D E. Quare latera circa æquales angulos A B H, C D E, proportionalia sunt, [c] quẽadmodum & latera circa æquales angulos H, & E, proportionalia sunt, ob triangula æquiangula B H I, D E F. [d] Rursus ita est H I, ad I B, vt E F, ad F D; & ita I B, ad I A, vt F D, ad F C; & ita I A, ad I K, vt F C, ad F G; [e] Igitur ex æquo erit ita H I, ad I K, vt E F, ad F G; & ideò latera quoque circa æquales angulos H I K, E F G, proportionalia erunt, & sic de cæteris. Quamobrem rectilinea, cũ sint æquiangula, habeantque latera circa æquales angulos proportionalia, similia sunt, similiterq; descripta. A data ergo recta linea, dato rectilineo simile similiterque positum rectilineum descripsimus. Quod faciendum erat.

a 4. sexti
b 22. quinti.
c 4. sexti.
d 4. sexti.
e 22. quinti.

## SCHOLIVM.

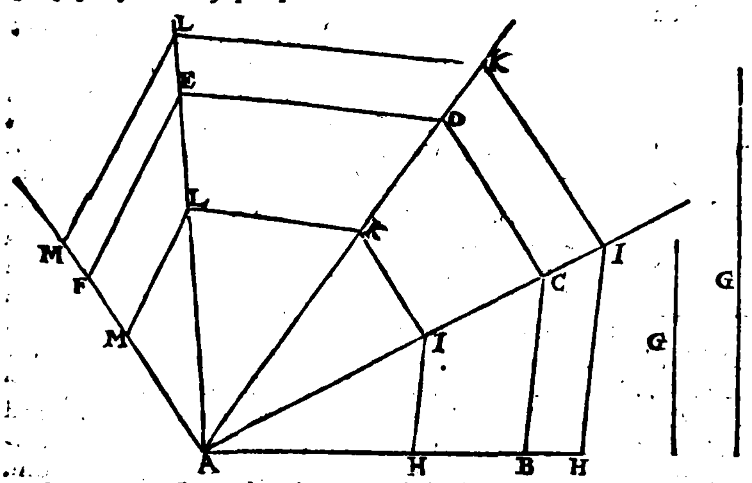



*DICVNTVR autẽ rectilinea super lineas rectas descripta, esse similia, & similiter posita, quando anguli æquales constituuntur super ipsas rectas lineas, & tam reliqui æquales anguli, q̃ latera proportionalia semper ordine sese consequuntur. Vt triangula A B C, D E F, non solùm erũt similia, sed etiam super rectas B C, E F, similiter descripta, si anguli B C, æquales fuerint angulis E, F, & ita sit A B, ad B C, vt D E, ad E F, etc. At supra rectas B C, D E, nõ dicentur similiter esse descripta, (quamq̃ similia sint.) cùm anguli B C, nõ sint æquales angulis D, E.*




*Similiter rectangula A C, E G, similia, dicentur similiter esse descripta super rectas D C, H G, quoniam vt A D, ad D C, ita est E H, ad H G, & c. At verò rectangula A C, I G, non dicentur similiter descripta super rectas D C, H G, quamuis sint similia, vt manifestum est. Eadem tamen similiter erunt descripta super rectas D C, I H, vel super rectas A D, H G.*

*CAETERVM omnes figuræ secundùm constructionẽ huius problematis descriptæ, sunt necessariò similiter positæ, vt patet in rectilineis A B H I K, C D E F G, super lineas A B, & C D, descriptis. Item omnes æquilateræ figuræ, & æquiangulæ, sunt quoque positæ similiter super qualibet earum latera.*

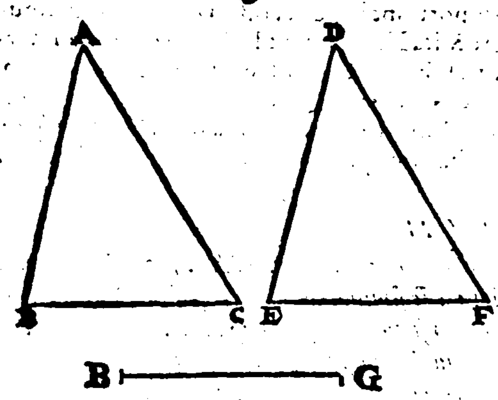



*FORTASSIS autem expeditius Problema propositum conficiemus ad hunc modum: Sit dato rectilineo A B C D E F, super datam rectam G, vel aliam ei æqualem, describendum simile rectilineum, similiterq; positum. Productis duobus lateribus A B, A F, circa angulum A, educantur ex A, ad omnes alios angulos rectæ A C, A D, A E, quantũlibet. Deinde ex A B, abscindatur A H, æqualis datæ rectæ G, vel certè ex ipsa A B, vlterius producta, si fortè G, fuerit maior, quàm A B. Post hæc per H, agatur recta H I, lateri B C, parallela, & per I, recta I K, lateri C D, parallela, & sic deinceps, donec omnia latera suas habeant parallelas demptis duobus lateribus productis A B, A F: factumq; erit, quod proponitur: hoc est, figura A H I K L M, super rectam A H, datæ rectæ G, æqualem, similis erit, similiterq; posita figuræ propositæ A B C D E F, super rectam A B, constitutæ. Cùm enim angulus H A M, sit cõmunis; & anguli A B C, A F E, [a] æquales sint angulis A H I, A M L; Item angulis A C B, A C D, æquales sint anguli A I H, A I K, hoc est, toti angulo B C D, æqualis sit angulus totus H I K; Eodemq; modo anguli C D E, D E F, æquales sint angulis I K L, K L M: Aequiangula erunt rectilinea A B C D E F, A H I K L M. Sed & latera circum æquales angulos* a 29. primi.

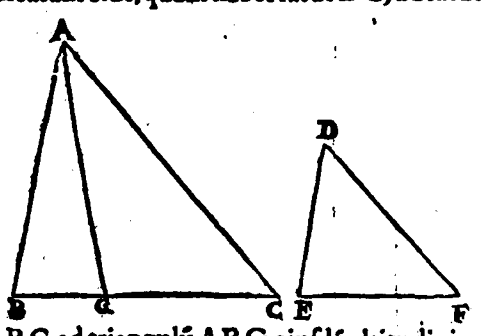
*habent proportionalia. Cùm enim triangula A H I, A I K, A K L, A L M similia sint, per coroll. propos. 4. huius*
24. sexti. *libri, triangulis A B C, A C D, A D E, A E F; Erit, [a] vt A B, ad B C, ita A H, ad H I, Rursus, vt B C, ad C A, ita H I, ad I A; Et vt C A, ad C D, ita I A, ad I K: Ac proinde, ex æquo, vt B C, ad C D, ita H I, ad I K, &c. Igitur, ex defin. similia sunt rectilinea A B C D E F, A H I K L M, atque adeo similiter posita, per ea, quæ proximè hoc scholio scripsimus.*

## THEOR. 13. PROPOS. 19.

17. **Similia triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.**



SINT triangula similia A B C, D E F, habentia angulos æquales B, & E; item C, & F, &c. Et sit vt AB, ad B C, ita D E, ad E F, &c. Dico triangula inter se rationem habere duplicatam eius, quam habet latera homologa B C, & E F; vel A B, & D E; vel A C, & D F: hoc est, si homologis lateribus B C, E F, inueniatur tertia proportionalis B G; ita esse triangulum A B C, ad triangulum D E F, vt rectã B C, ad rectam B G: ac proinde cũ ex defin. 10. lib. 5. proportio B C, ad B G, dicatur duplicata proportionis B C, ad E F; proportioné trianguli ad triangulum dici quoq; duplicatã proportionis laterum homologorum B C, E F. Ita vt nihil aliud sit, triangula duo, vel duas quaslibet figuras similes, similiterq; positas habere proportioné duorum laterum homologorũ duplicatam, quã ita esse triangulum ad triangulum, vel figuram ad figurã, vt est prima linea ad tertiam, cũ tres lineæ fuerint continuè proportionales in proportione duorũ laterũ homologorum: quales hîc sunt tres lineæ rectæ B C, E F, B G, continuè proportionales in proportione homologorum laterum B C, E F. Sint ergo primùm latera B C, E F, æqualia, ac proinde & tertia proportionalis B G, illis æqualis: ita vt proportio B C, ad B G, quæ duplicata dicitur proportionis lateris B C, ad latus E F, sit proportio æqualitatis.
a 26. primi. Quoniam igitur triangula A B C, D E F, habent quoq; proportionem æqualitatis, [a] quod ipsa inter se æqualia sint, ob angulos B, C, angulis E, F, æquales, & æqualitaté laterũ B C, E F, quibus adiacent: erit triangulum ad triangulum, vt recta B C, ad rectam B G. Cùm ergo hæc proportio dicatur duplicata proportionis laterum homologorum B C, E F, dicetur quoque proportio trianguli A B C, ad triangulum D E F, proportionis, quam latus B C, ad latus E F, habet, duplicata. Quod etiã hinc constare potest. Quoniam, vt dictum est, triangula A B C, D E F, æqualia sunt, hoc est, proportionem æqualitatis habent, sicut & latera homologa B C, E F: Proportio autem æqualitatis duplicata solùm efficit proportionem æqualitatis: (Positis enim tribus magnitudinibus æqualibus, dicetur prima ad tertiam habere proportionem duplicatam proportionis, quã habet prima ad secundam, vt constat ex defin. 10. lib. 5. cùm tamen prima ad tertiam habeat proportionem æqualitatis, sicuti & prima ad secundam,) habebit triangulum A B C, ad triangulum D E F, proportionem duplicatam eius, quam habet latus B C, ad latus E F. Quod est propositum.



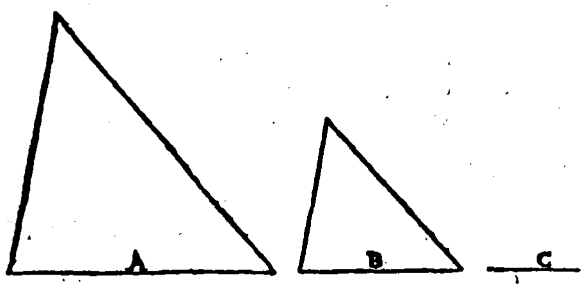
b 11. sexti. SIT deinde B C, latus latere E F, maius, & ex B C, [b] abscindatur rectis B C, E F, tertia proportionalis B G, ducaturq; recta A G. Quia igitur est vt A B ad B C, ita D E, ad E F: erit permutando vt A B, ad D E, ita B C, ad E F: Vt autem B C, ad E F, ita est per constru-
c 11. quinti. ctioné E F, ad B G. Vt ergo A B, ad D E, [c] ita erit E F,
d 15. sexti. ad B G. Quare cùm triangula A B G, D E F, habeãt latera circa angulos B, E, æquales reciproca, [d] ipsa inter se æqualia erunt; & propterea vt triangulum
e 7. quinti. A B C, ad triangulum D E F, [e] ita erit triangulum A B C, ad triangulum A B G: Vt autẽ triangulum
f 1. sexti. A B C, ad triangulũ A B G, eiusdẽ altitudinis, [f] ita est basis B C, ad basin B G. Igitur vt triangulum A B C, ad triangulum D E F, ita est B C, ad B G. Atqui cùm tres lineæ B C, E F, B G, sint continuè proportionales, proportio primæ B C, ad tertiã B G, duplicata dicitur proportionis B C, primæ ad E F, secundã. Igitur & triangulũ A B C, ad triangulũ D E F, proportioné habet duplicatã proportionis lateris B C, ad latus E F. Similia igitur triangula inter se sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

### COROLLARIVM.

*HINC manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint; vt est prima ad tertiã, ita esse triangulũ super primã descriptũ ad triangulũ supra secundã simile similiterq; descriptũ.*

*SINT enim tres rectæ proportionales A, B, C; & super primã A, & secundam B, constituta triangula A, & B, similia, similiterq; descripta. Dico, vt est recta A, prima ad rectam C, tertiam, ita esse triangulum A, ad triangulum B. Nam proportio rectæ A, ad rectam C, est, per definitionem, duplicata proportionis rectæ A,*

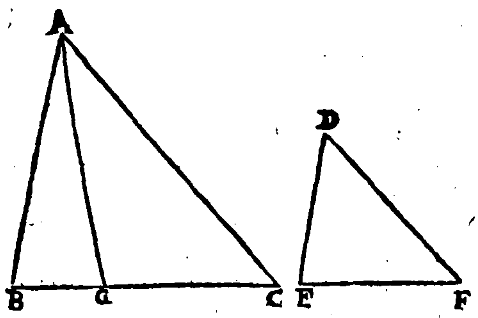
ad




*ad rectam B.* [a] *Cùm igitur triangulum A, ad triangulum B, habeat quoque proportionem duplicatam recta A, ad rectam B; erit vt recta A, ad rectam C, ita triangulum A, ad triangulum B.* a 19. sexti.

*Eodem modo ostendes, ita esse triangulum supra secundam ad triangulũ supra tertiam simile similiterque descriptum, vt est prima linea ad tertiam. Sint enim proportionales tres C, B, A, & super B secundam, & A, tertiam constituantur triangula similia similiterque posita B, & A. Dico, vt est recta C, ad rectam A, ita esse triangulum B ad triangulum A. Nam proportio C, ad A, duplicata, est proportionis C ad B, hoc est, rectæ B, ad rectã A.* [b] *Cùm igitur & triangulum B, ad triangulum A, habeat proportionem duplicatam rectæ B, ad rectam A, quoniam B, & A, sunt latera homologa; Erit vt C, recta ad rectam A, ita triangulum B, ad triangulum A.* b 19. sexti.

## SCHOLIVM.

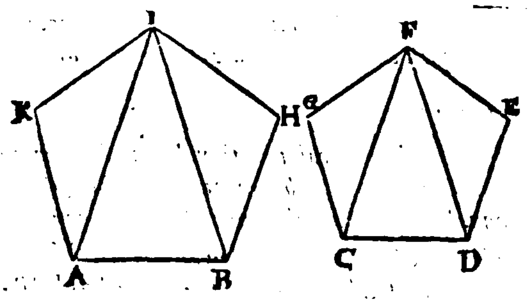



*Itaque si proportio lateris B C, ad latus E F, nota sit in numeris, nimirum vt 6. ad 5. cognoscemus quoque ex hac propos. 19. in numeris, quam proportionem habeat triangulum A B C ad triangulum D E F. Si enim proportio 6. ad 5. cõtinuetur in tribus numeris, hoc modo 36. 30. 25. erit triangulum ad triangulum, vt 36. ad 25. hoc est, habebit proportionẽ, cuius denominator est $1\frac{11}{25}$. Quia enim proportio 36. ad 25. est duplicata proportionis 36. ad 30. siue 6. ad 5. quam latera homologa ponuntur habere: Habent autem & triangula proportionem laterum homologorum duplicatam, vt hoc theoremate ostensum est; erit triangulum ad triangulum, vt 36. ad 25. Eandem proportionem triangulorum cognoscemus, si denominatorem proportionis laterum homologorum, nimirum $1\frac{1}{5}$. in se multiplicemus. Productus enim numerus $\frac{36}{25}$. id est, $1\frac{11}{25}$. erit denominator proportionis, quæ duplicata est proportionis laterum, ac proinde & denominator proportionis triangulorum, quòd hæc etiam duplicata sit eiusdem proportionis laterum.*

*Sic etiam, si latera homologa haberent proportionem, quam 10. ad 1. haberent triangula proportionem, quam 100. ad 1. cùm hæc illius sit duplicata, vt hic apparet, 100. 10. 1. Vel etiam quia denominator decuplæ proportionis, id est, 10. in se multiplicatus gignit 100. denominatorem proportionis, quæ decuplæ duplicata est.*

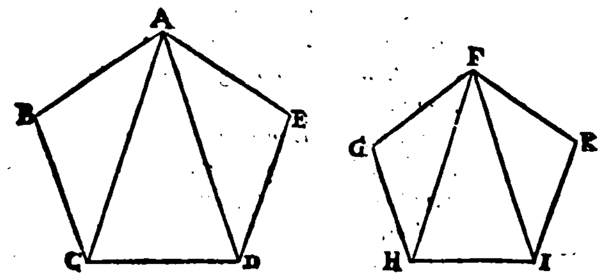
## THEOR. 14. PROPOS. 20. 18.

SIMILIA polygono in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia & homologa totis: Et polygona duplicata habent eam inter se rationem, quam latus homologum ad homologum latus.




SINT polygona similia A B C D E, F G H I K, habẽtia angulos æquales B A E, G F K: Item angulos B, G, & sic deinceps: habeant autem latera proportionalia circa angulos æquales; vt quidem A B, ad B C, ita F G, ad G H; & vt B C, ad C D, ita G H, ad H I, &c. Dico primùm, hæc polygona diuidi in triangula similia, quæ sunt numero æqualia. Ab angulis enim B A E, G F K, rectæ educantur ad singulos angulos oppositos, quæ sint A C, A D, F H, F I; diuisaque erunt polygona in triangula numero æqualia. Quoniam verò angulus B, æqualis est angulo G, ex hypothesi, & circa ipsos latera proportionalia; [a] æquiangula erunt triangula A B C, F G H, habẽtia angulos B A C, G F H, æquales; Item angulos A C B, F H G, lateribus homologis oppositos: [b] Ideoque latera habebunt circa æquos angulos proportionalia; ac propterea inter se similia erunt: Eadem ratione erunt similia triangula A E D, F K I, habentia angulos E A D, K F I, & angulos A D E, F I K, æquales. Deinde [c] quia est vt A C, ad C B, ita F H, ad H G, ob similitudinem triangulorum A B C, F G H; vt autem C B, ad C D, ita est, ex hypothesi, H G, ad H I, ob similitudinem polygonorum; [d] erit ex æquo vt A C, ad C D, ita F H, ad H I. Et quoniam angulus B C D, æqualis ponitur angulo G H I; est autem & ablatus A C B, ostensus æqualis ablato F H G; erit & reliquus A C D, reliquo F H I, æqualis. [e] Quare triangula A C D, F H I, cùm habeant

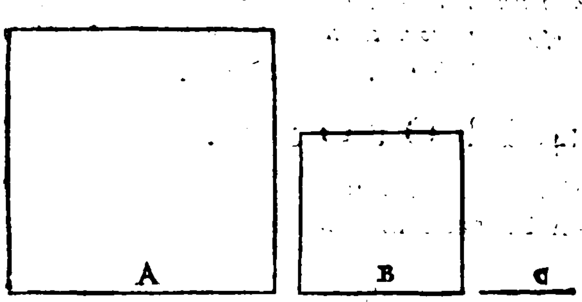
a 6. sexti
b 4. sexti.
c 4. sexti.
d 22. quinti.
e 6. sexti.




latera, circa æquales angulos A C D, F H I, proportionalia, æquiangula erunt; ideoq; similia. Eademq; ratio est de aliis omnibus triangulis, si plura fuerint. Dico præterea triangula hæc esse homologa totis polygonis, hoc est, ita esse quodlibet triãgulum in vno polygono, ad suũ correspondens triangulum in altero polygono, vt polygonũ ad polygonũ. Quoniã enim similia sunt triangula A B C, F G H; [a] erit eorũ proportio du-
a 19. sexti. plicata proportionis homologorũ laterum A C, F H. Atq; eodẽ argumento proportio triangulorũ A C D, F H I, duplicata erit proportionis eorundem laterum homologorum A C, F H. Quare vt triangulum A B C, ad triangulum F G H, ita erit triangulum A C D, ad triangulum F H I, cùm vtraque hæc proportio triangulorum sit duplicata eiusdem proportionis lateris A C, ad latus F H. Neque dissimili ratione concludetur quoque esse triangulum A D E, ad triangulum F I K, vt A C D, ad F H I: Atq; ita deinceps, si plura fuerint triangula. Sunt igitur proportionalia triangula vnius polygoni cum triangulis alterius, ita vt triangula vnius sint antecedentia, & triangula alterius consequentia proportionum. Vt autem
b 12. quinti. vnum antecedens ad vnum consequens, [b] ita sunt omnia antecedentia ad omnia consequẽtia. Igitur vt quodlibet triangulum vnius polygoni ad sibi respondẽs triangulum alterius, ita erit totum polygonum ad totum polygonum; ideoque triangula homologa erunt totis polygonis.

Dico postremò, polygona inter se proportionem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa: hoc est, si homologis lateribus, verbi gratia, A B, F G, inueniatur tertia linea proportionalis, ita esse polygonum A B C D E, ad polygonũ F G H I K, vt est prima linea A B, ad tertiam inuentam: ac proinde, cùm proportio A B, ad illam tertiam, dicatur duplicata proportionis A B, ad F G; dici quoque proportionem polygoni ad polygonum duplicatam proportionis laterum homologorum A B, F G. Cùm enim sit, vt triangulum A B C, ad triangulum F G H, ita polygo-
c 19. sexti. num A B C D E, ad polygonum F G H I K; Triangulum verò A B C, ad triangulum F G H, [c] habeat proportionem duplicatam eius, quã habent latera homologa A B, F G, hoc est, eandem quam habet A B, ad illam tertiam inuentam; habebunt quoque polygona inter se proportionem duplicatam proportionis eorundem laterum homologorum A B, F G, hoc est, eandem, quam habet A B, ad illam tertiam inuentam. Itaq; similia polygona in similia triangula diuiduntur, &c. Quod demonstrandum erat.

## COROLLARIVM.




*Hinc manifestum est, si fuerint tres rectæ lineæ proportionales, vt est prima ad tertiam, ita esse polygonum super primam descriptum, ad polygonum super secundam simile, similiterq; descriptũ: Vel ita esse polygonum super secundam descriptum ad polygonum super tertiam simile similiterq; descriptum.*

*Hoc nõ aliter demonstrabitur ex hoc theoremate, quàm ostensum fuit corollarium præcedentis theorematis ex suo theoremate: Vt perspicuum est in hac figura apposita.*

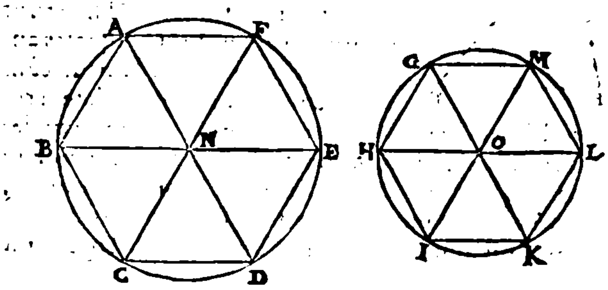
## SCHOLIVM.

*Qvando polygona similia sunt pentagona, vt in figura, demonstrabitur etiam hoc modo triangula media A C D, F H I, similia esse. Quoniam anguli A C B, F H G, æquales sunt, ob similitudinem triangulorum A B C, F G H; si auferantur ex angulis B C D, G H I, qui æquales etiam sunt, ob similitudinem polygonorum: æquales erunt & reliqui anguli A C D, F H I. Eademq; ratione æquales ostendentur anguli A D C, F I H: ac*
a 32. primi. *propterea, [a] & reliqui C A D, H F I, æquales erunt. Igitur cùm æquiangula sint triangula A C D, F H I, [b] ha-*
b 4. sexti. *bebunt latera circa angulos æquales proportionalia, ac proinde similia erunt.*

*At verò quando polygona habent plures angulos, demonstrandum est, triangula media similia esse, ex æqualitate, & propos. 6. huius lib. vt in propositione factum est: quia nõ possunt probari anguli æquales, præter vnum, qui videlicet prope præcedens triangulum simile existit, qualis est angulus A C D & F H I. Nam angulus A D C, ostendi non potest æqualis angulo F I H; quod tunc alia adhuc triangula supersint vsq; ad triangula similia A E D, F K I, &c. Hoc ideò dixerim, ne quis existimet, frustra in propos. nos dixisse, ita esse A C, ad C B, vt F H, ad H G: Et ita C B, ad C D, vt H G, ad H I; ac proinde ex æqualitate ita A C, ad C D, vt F H, ad H I; ideoq; cùm anguli A C D, F H I, sint æquales, similia esse triangula A C D, F H I. Hæc enim demonstratio est omnino necessaria, conuenitq; omnibus polygonis quotcunq; angulorũ; cùm omnia triangula media eo modo*

ostendantur

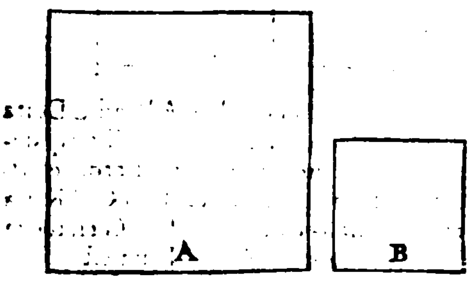
ostendantur esse similia, vt perspicuum est. Nam si triangula A D E, F I K, non essent vltima, demonstrarentur similia hoc modo: Quoniam est vt A D, ad D C, ita F I, ad I H, ob similitudinem triangulorum A C D, F H I: Item vt D C, ad D E, ita I H, ad I K, ob similitudinem polygonorũ; erit ex æquo, vt A D, ad D E, ita F I, ad I K. Et quia angulus C D E, æqualis ponitur angulo H I K: Est autem & ablatus A D C, ostensus ablato F I H, æqualis; erit & reliquus A D E, reliquo F I K, æqualis. [a] Quare triangula A D E, F I K, similia erunt; cùm habeant latera circa æquales angulos A D E, F I K, proportionalia. Atq; ita deinceps, si fuerint plura triangula. a 6. sexti.



Q V O D si polygona similia, fuerint æquilatera & æquiangula, diuidentur quoq; in similia triangula, & numero æqualia, & homologa totis; ductis è centris circulorũ ipsa circumscribẽtium ad omnes angulos rectis lineis. Sint enim polygona similia, æquilatera, & æquiangula A B C D E F, G H I K L M, quæ circumscribantur à circulis circa centra N, O, ex quibus rectæ ducantur N A, N B, &c. Dico triangula N C D, O I K, similia esse, & homologa totis polygonis. Quoniã enim anguli C N D, I O K, æquales sunt, (quòd æquè submultiplices sint quatuor rectorum. Nam vtrumq; spatium N, & O, quatuor rectis æquiualens, ex corollario 2. proposit. 15. libri 1. diuiditur in angulos & numero, & magnitudine æquales. Cùm enim anguli in centro N, insistant æqualibus arcubus, [b] ipsi inter se æquales erunt: eademq; ratione anguli in centro O, æquales erunt.) Sunt autem & latera circum ipsos proportionalia, cùm vtrobiq; sit proportio æqualitatis: [c] Similia erunt triangula N C D, O I K. Eademq; est ratio de cæteris. At verò hæc triangula esse homologa totis polygonis, nullo negotio demonstrabitur. Cùm enim tota polygona sint ipsorum triangulorum æquè multiplicia, vt patet; [d] habebunt vtique eandem cum ipsis proportionem. b 27. tertij. c 6. sexti. d 15. quinti.

P O R R O ex hoc theoremate perfacilè demonstrabimus theorema illud, quod iam aliter in scholio propositionis 4. lib. 2. ostendimus. Nimirum:

S I linea recta dupla fuerit lineæ rectæ, quadratũ illius quadruplum erit quadrati huius: Et contrà, si quadratũ quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum erit lateris huius.



S I T primùm recta A, dupla rectæ B. Dico quadratum A, quadruplum esse quadrati B. Cùm enim omnia quadrata sint similia, vt constat ex defin. 1. huius lib. erit, per hanc propositionem, proportio quadrati A, ad quadratum B, duplicata proportionis laterum homologorum A, & B; quæ cùm inter se proportionem habeant duplam, erit proportio quadratorum quadrupla. Quadrupla enim proportio duplicata est duplæ proportionis, vt hic apparet, 1. 2. 4.

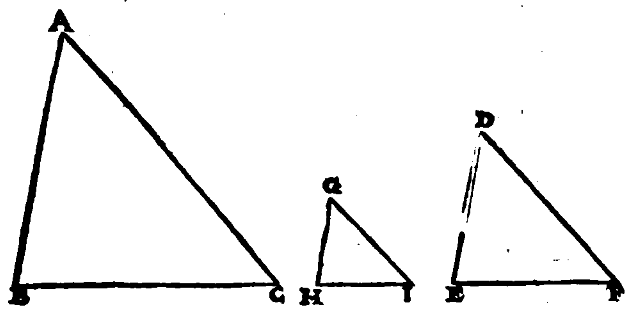
S I T deinde quadratum A, quadruplum quadrati B. Dico latus A, duplum esse lateris B. Cùm enim proportio quadratorum, quæ ponitur quadrupla, duplicata sit proportionis laterum homologorum, vt dictum est, habebunt latera homologa A, & B. proportionem duplam. Nam quadrupla proportio duplicata est proportionis duplæ, vt in exemplo adducto superius apparet.

I T A Q V E si proportio lateris A B. ad latus F G, in polygonis, quæ in propos. descripsimus, nota sit in numeris, nimirum vt 5. ad 4. cognoscemus quoq; ex hac propos. 20. in numeris, quam proportionem habeat polygonum A B C D E, ad polygonum F G H I K. Si enim proportio 5. ad 4. continuetur in tribus numeris, hoc modo, 25. 20. 16. erit polygonum ad polygonum, vt 25. ad 16. hoc est, habebit proportionem, cuius denominator est $1\frac{9}{16}$. Quia enim proportio 25. ad 16. est duplicata proportionis 25. ad 20. siue 5. ad 4. quam homologa latera A B, F G, ponuntur habere; demonstratumq; est hoc theoremate, polygona quoq; habere duplicatam proportionem eius, quã latera homologa habent, erit polygonum ad polygonum, vt 25. ad 16. Idem denominator proportionis polygonorum cognoscetur, si denominator proportionis laterum homologorum, nimirum $1\frac{1}{4}$. in se multiplicetur. Productus enim numerus $\frac{25}{16}$. id est, $1\frac{9}{16}$. erit denominator proportionis, quæ duplicata dicitur eius, quam latera homologa habent, ex ijs, quæ in defin. 10. lib. 5. scripsimus; ac proinde & denominator proportionis polygonorum; cùm hæc sit etiam duplicata eiusdem proportionis laterum homologorum.

S I C etiam, si latera homologa haberent proportionem decuplam, haberent polygona proportionem centuplam; cùm hæc illius sit duplicata, vt hic apparet, 100. 10. 1. Vel etiam quia denominator 10. proportionis decuplæ in se multiplicatus gignit denominatorem 100. proportionis centuplæ, quæ decuplæ duplicata dicitur.

## THEOR. 15. PROPOS. 21. 20.

Q V Æ eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia.



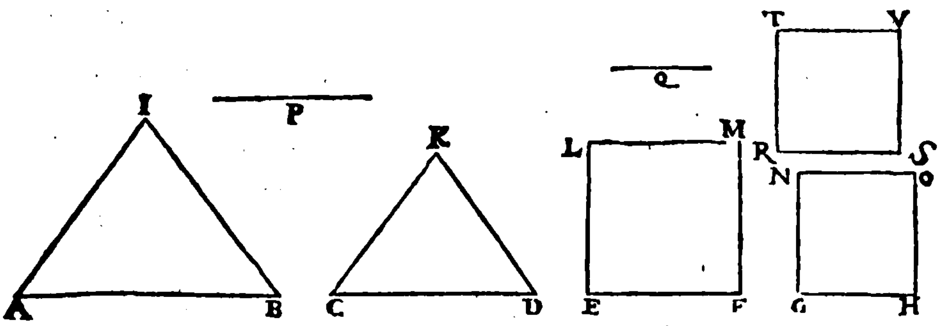

Sɪɴᴛ rectilinea A B C, D E F, rectilineo G H I, similia. Dico & ipsa inter se esse similia. Cùm enim propter similitudinem, anguli rectilinei A B C, æquales sint angulis rectilinei G H I; Item eadem de causa anguli rectilinei D E F, æquales angu-

a 1. pron. lis eiusdem rectilinei G H I: [a] erunt anguli rectilinei A B C, æquales angulis rectilinei D E F. Rursus cùm ob eandem similitudinem, latera rectilinei A B C, proportionalia sint lateribus rectilinei G H I, ea videlicet iis, quæ circum æquales sunt angulos: Item eandem ob causam, latera rectilinei D E F, proportionalia lateribus eiusdem

b 11. quinti. rectilinei G H I; [b] erunt quoque latera rectilinei A B C, lateribus rectilinei D E F, proportionalia, ea nimirum iis, quæ angulos ambiunt æquales. Atq; adeo per definitionem, similia existẽt rectilinea A B C, D E F. Quæ igitur eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia. Quod erat ostendendum.

21. 
## THEOR. 16. PROPOS. 22.

Sɪ quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea similia similiterque descripta, proportionalia erunt. Et si à rectis lineis similia similitérque descripta rectilinea, proportionalia fuerint: ipsæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.




Sɪɴᴛ primùm quatuor rectæ A B, C D, E F, G H, proportionales, vt quidem A B, ad C D, ita E F, ad G H; Constituanturque super A B, C D, duo quæcunque rectilinea similia similiterq; descripta A B I, C B K; Item super E F, G H, alia duo quæcunque rectilinea similia similiterq; descripta, E F M L, G H O N. Dico, & hæc rectilinea esse proportionalia, vt quidem A B I, ad C D K, ita

c 11. sexti. E M, ad G O. [c] Inueniatur enim rectis A B, C D, tertia proportionalis P; & rectis E F, G H, tertia

d 22. quinti. proportionalis Q. [d] eritque ex æquo, vt A B, ad P, ita E F, ad Q: Vt autem A B, ad P, ita est rectilineum A B I, ad rectilineum C D K, simile similiterque descriptum, ex corollario propositionis 20. huius libri. vel si fuerint triangula, ex corollario propositionis 19. Et eadem ratione vt E F, ad Q,

e 11. quinti. ita rectilineum E M, ad rectilineum G O. [e] Igitur vt A B I, ad C D K, ita erit E M, ad G O. Quod est propositum.

Dᴇɪɴᴅᴇ sint A B I, C D K, E M, G O, rectilinea proportionalia. Dico quatuor rectas A B, C D,

f 12. sexti. E F, G H, esse quoque proportionales, vt quidem A B, ad C D, ita E F, ad G H. [f] Inueniatur enim tribus rectis A B, C D, E F, quarta proportionalis R S, super quã describatur rectilineum R S V T,

g 21. sexti. simile rectilineo E M, similiterque positum; [g] & ob id rectilineo G O. Quoniam igitur est, vt A B, ad C D, ita E F, ad R S; erit quoque, vt iam est ostensum, vt A B I, ad C D K, ita E M, ad R V. Vt au-

h 11. quinti. tem A B I, ad C D K, ita quoq; ponitur E M, ad G O. [h] Igitur erit vt E M, ad R V, ita E M, ad G O. [i]

i 9. quinti. Atque idcircò æqualia erunt R V, G O. Quæ cùm sint similia similiterque posita, consistent ne-

k 7. quinti. cessariò, vt mox ostendemus, super rectas R S, G H, æquales. [k] Quare erit, vt E F, ad R S, ita E F, ad

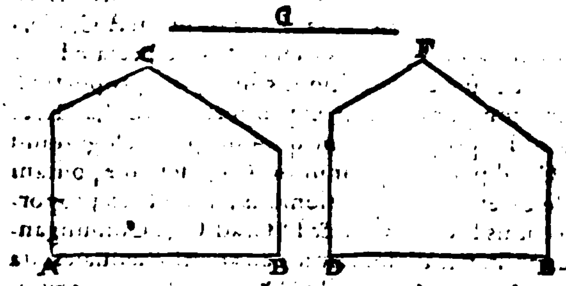
l 11. quinti. G H. Ponitur autem E F, ad R S, vt A B, ad C D. [l] Igitur erit quoque vt A B, ad C D, ita E F, ad G H. Quamobrem si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

### LEMMA.

*Qᴠᴏᴅ autem æqualia rectilinea similia similiterq; descripta, qualia sunt G O, R V, consistant super rectas æquales, ita ostendetur. Si enim inæquales sunt G H, R S; sit G H, maior. Cùm igitur, ob similitudinem rectilineorum, sit vt G H, ad H O, ita R S, ad S V; Ponatur au-*

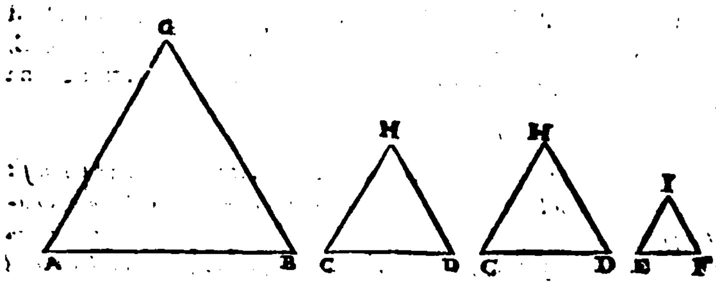
a 14. quinti. *tem G H, maior quàm R S; [a] erit quoque H O, maior quàm S V; & propterea rectilineum G O, maius rectilineo R V, cùm hoc intra ipsum possit constitui; quod est absurdum, cùm sit contra hypothesin. Non ergo inæquales sunt rectæ G H, R S. Quod est propositum.*

ALITER.

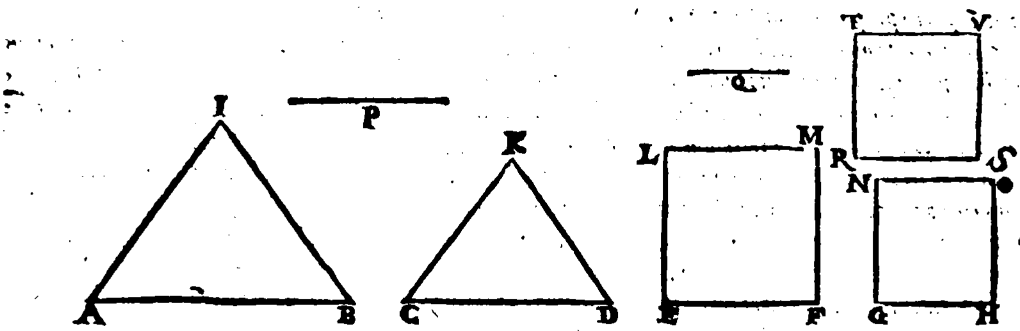


*Aliter.* *Sint duo triangula A B C, D E F, æqualia, & similia similiterq́; posita. Dico latera homologa, cuiusmodi sunt rectæ A B, D E, esse æqualia. Si enim nõ credantur æqualia, sit A B, maius, quàm D E; inueniaturq́; rectis A B, D E, tertia proportionalis G. Quoniã ergo est, vt A B, ad D E, ita D E, ad G; Est autem A B, maior, quàm D E: Erit quoq; D E, maior, quàm G; ac propterea multò maior A B, quàm G. Vt verò A B, ad G, ita est rectilineũ A B C, ad rectilineum D E F, per corollarium propositionis 19. vel 20. huius libri. Igitur cùm A B, maior sit, quàm G; erit quoque rectilineum A B C, maius rectilineo D E F: quod est absurdum, cùm positum sit æquale. Non ergo maior est A B, recta, quàm recta D E. Sed neque minor erit eadem ratione; quia & rectilineum A B C, minus ostenderetur rectilineo D E F: quod est contra hypothesin. Quare æquales sunt rectæ A B, D E.*

## SCHOLIVM.



*Eodem modo, si fuerint tres rectæ proportionales; erunt & rectilinea similia similiterq́; descripta ab eis, proportionalia; &c. Si enim sumatur linea media, eiusq́; rectilineum bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor rectilinea proportionalia, vt hic Euclides demonstrauit. Cùm igitur id, quod à secunda est descriptum, æquale sit ei, quod à tertia, immò idem: manifestum est quod proponitur.*



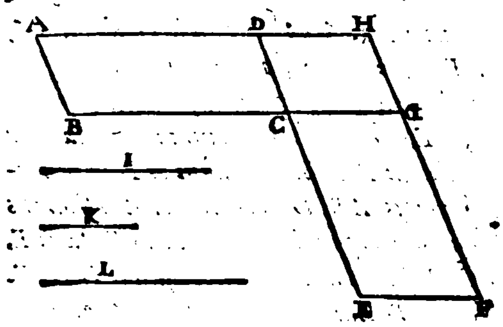
*Brevivs tota hæc propositio demonstrabitur, hoc modo: Ponatur primùm esse vt A B, ad C D, ita E F, ad G H. Dico esse quoq; vt A B I, ad C D K, ita E M, ad G O. [a] Cùm enim sit proportio rectilinei A B I, ad C D K, duplicata proportionis A B, ad C D; Item proportio rectilinei E M, ad rectilineum G O, duplicata proportionis E F, ad G H; erunt proportiones A B I ad C D K; & E M ad G O, æquales; quandoquidem duplicatæ sunt proportionum æqualium A B ad C D; & E F, ad G H. Quod est primum.* [a] 19. vel 20. sexti.

*Ponatvr deinde esse, vt A B I, ad C D K, ita E M, ad G O. Dico esse quoque, vt A B, ad C D, ita E F, ad G H. [b] Cùm enim sit proportio A B I, ad C D K, duplicata proportionis A B, ad C D: Item proportio E M, ad G O, duplicata proportionis E F, ad G H: Erunt proportiones A B, ad C D; & E F, ad G H, æquales: quandoquidem earum proportiones duplicatæ A B I, ad C D K; & E M, ad G O, æquales ponuntur. Quod est secundum.* [b] 19 vel 20. sexti.

## THEOR. 17. PROPOS. 23. 24.

**Aeqviangvla** parallelogramma inter se rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.

Sint parallelogramma æquiangula AC, C E, habẽtia angulos B C D, E C G, æquales. Dico proportionem eorũ esse compositá ex duabus proportionibus, quas habẽt duo latera vnius circa angulum æqualẽ, ad duo latera alterius circa angulũ æqualẽ, ita vt antecedentia proportionũ sint in vno parallelogrãmo, & conseqentia in altero: hoc est, proportionẽ AC, parallelogrammi ad parallelogrammum CF, compositam esse ex proportionibus rectæ B C, ad C G, rectam, & rectæ D C, ad rectam C E: Vel etiam ex proportionibus rectæ B C, ad rectam C E, & rectę D C, ad rectã C G:




Id eſt, ſi ſumantur tres lineæ I, K, L, ita vt I, ad K, ſit, ſicut B C, latus ad latus C G; & K, ad L, vt latus D C, ad latus C E; ita eſſe parallelogrammum A C, ad parallelogrammum C F, vt eſt recta I, ad rectam L: ac proinde cùm ex definitione 5. huius lib. proportio I, ad L, componi dicatur ex proportionibus I, ad K, & K, ad L; proportionem quoque parallelogrammi A C, ad parallelogrammum C F, dici compoſitam eſſe ex eiſdem proportionibus, hoc eſt, ex proportionibus B C, ad C G, & D C, ad C E. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt B C, C G, efficiant vnam lineam rectam: Quo poſito, cùm anguli B C D, E C G, ſint æquales, erunt & D C, C E, vna recta linea, vt ad propoſitionem 15. libri 1. ex Proclo demonſtrauimus. Producantur deinde A D, F G, donec conueniant in H; Sumptaque recta I, quacunque, [a] inueniatur tribus B C, C G, & I, quarta proportionalis K: Item tribus D C, C F, & K, quarta proportionalis L. Quoniam igitur eſt, [b] vt B C, ad C G, ita A C, ad C H. Vt autem B C, ad C G, ita poſita eſt I, ad K; [c] erit quoque vt A C, ad C H, ita I, ad K. Eodemque argumento oſtendes eſſe, vt H C, ad C F, ita K, ad L. Nam vt D C, ad C E, [d] ita eſt H C, ad C F. Cùm ergo poſita ſit K, ad L, vt D C, ad C E, erit quoque H C, ad C F, vt K, ad L. [e] Ex æquo igitur erit, vt A C, ad C F, ita I, ad L. Sed proportio I, ad L, per 5. defin. huius lib. componitur ex proportionibus B C, ad C G; & D C, ad C E. Ex his eiſdem ergo proportionibus componetur quoq; proportio parallelogrammi A C, ad parallelogrammum C F. Eademque ratione oſtendemus, proportionem A C, ad C F, componi ex proportionibus B C, ad C E, & D C, ad C G; dummodo parallelogramma ita coniungantur ad angulos æquales, vt B C, C E, efficiant vnam rectam lineam, &c. Æquiangula itaque parallelogramma inter ſe rationem habent, &c. Quod erat oſtendendum.

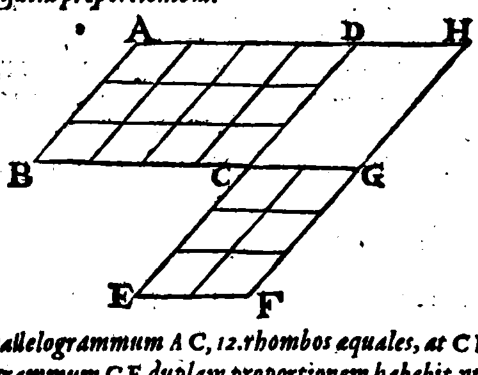
a 12. ſexti.
b 1. ſexti.
c 11. quinti.
d 1. ſexti.
e 22. quinti.

## SCHOLIVM.

*EXPEDITIVS idem demonſtrabitur, hoc modo: Coniunctis parallelogrammis, vt prius; [a] Cùm ſit vt A C, ad C H, ita B C, ad C G: & vt C H, ad C F, ita D C, ad C E; Proportio autem A C, ad C F, componatur, per definitionem, ex intermedijs proportionibus A C, ad C H; & C H, ad C F; componetur quoque eadem proportio A C, ad C F, ex proportionibus B C, ad C G, & D C, ad C E, quæ illis intermedijs ſunt æquales. Quod eſt propoſitum.* (a 1. ſexti.)

*HANC porrò propoſ. demonſtrat etiam Euclides in numeris lib. 8. propoſ. 5.*

*ITAQVE ſi proportiones laterum, nimirũ B C, ad C G, & D C, ad C E, notæ ſint in numeris, veniemus quoq; ex hac propoſ. 23. in cognitionem proportionis parallelogrammi A C, ad parallelogrammum C F, in numeris, hoc modo: Sit proportio B C, ad C G, eadem, quæ 11 ad 5. & D C, ad C E, eadem quæ 7. ad 11. atque hæ duæ proportiones continuentur in tribus numeris 77. 35. 55. ita vt ſit 77. ad 35. ſicut 11. ad 5. & 35. ad 55. vt 7. ad 11. Et quia proportio 77. ad 55. componitur ex proportionibus 77. ad 35. & 35. ad 55. hoc eſt, ex proportionibus laterum, erit vt 77. ad 55. ita parallelogrammum A C, ad parallelogrammum C F; [b] quod proportio parallelogrammorum ſit etiam compoſita ex eiſdem proportionibus laterum: hoc eſt, proportio parallelogrammorum denominabitur à $1\frac{2}{5}\frac{2}{}$. Continuabuntur autem duæ datæ proportiones in tribus numeris vel ex ijs, quæ propoſ. 4. lib. 8. demonſtrantur, vel certè hoc modo: Poſita priore proportione 11. ad 5. fiat vt 7. ad 11. (quæ eſt poſterior proportio) ita 5. ad aliud, inuenieturq; numerus $7\frac{6}{7}$. Ita ergo ſtabunt tres numeri habentes duas illas proportiones 11. 5. $7\frac{6}{7}$. Quòd ſi tertius reuocetur ad hanc vnicam fractionem $\frac{55}{7}$. & alij duo numeri per denominatorem 7. multiplicentur, erunt duo producti numeri 77. 35. & numerator 55. tres numeri integri in eiſdem proportionibus.* (b 23. ſexti.)




*SIC etiam ſi proportiones laterum ſint, vt 4. ad 2. & 3. ad 3. continuabuntur duæ hæ proportiones in hiſce tribus numeris 4. 2. 2. Vel in hiſce minimis 2. 1. 1. Et quia primus ad tertium eſt duplus, erit quoque parallelogrammorum proportio dupla. Id quod ex hac figura perſpicuum eſt. Nam ſi latus B C, diuidatur in 4. partes æquales, & C G, in 2. At D C, in 3. & C E, in 3. ita vt B C, ad C G, proportionem habeat duplam, at D C, ad C E, proportionem æqualitatis, vt poſitum eſt: ducantur autem per puncta diuiſionum lateribus parallelæ, continebit parallelogrammum A C, 12. rhombos æquales, at C F, ſolùm 6. atq; adeò parallelogrammum A C, ad parallelogrammum C F, duplam proportionem habebit, vt dictum eſt.*

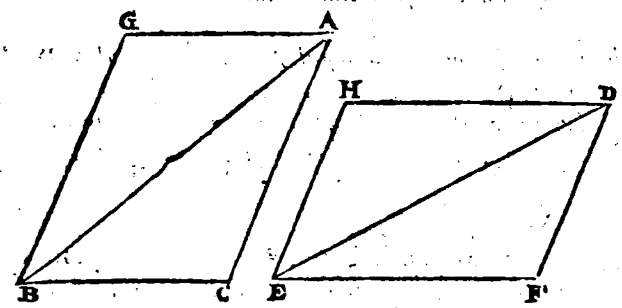
*PERSPICVVM autem eſt, alteram proportionũ componentium poſſe eſſe maiorem proportione compoſita, & æqualem. In priori enim exemplo proportio lateris B C, ad C G, eſt vt 11. ad 5. hoc eſt, cuius denominator eſt $2\frac{1}{5}$. quæ maior eſt proportione parallelogrammorum, cùm huius denominator ſit $1\frac{2}{5}\frac{2}{}$. In poſteriori verò exemplo proportio lateris B C, ad C G, eſt dupla, quemadmodum & proportio parallelogrammorum.*

Vt vel hinc etiam constare possit, hanc proportionum compositionem non esse additionem, vt nonnulli interpretes volunt. Item proportionem maioris inaequalitatis posse componi tum ex proportione minoris inaequalitatis, tùm ex aequalitatis proportione; quod ijdem interpretes negant. In exemplo namque priori proportio lateris D C, ad C E, est minoris inaequalitatis, in posteriori verò, aequalitatis. Sed hac de re plura scribemus ad finem libri 9.

DEMONSTRAT hoc loco Federicus Commandinus nonnulla alia, quae vel ad compositionem proportionum pertinent, vel ex ea demonstrantur, non inutilia, quae nos quoq; afferre decreuimus, mutatis tamen nonnihil demonstrationibus: Sunt autem ea, quae sequuntur.

I.

TRIANGVLA, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent, proportionẽ habent ex lateribus æqualem angulum comprehendentibus compositam.

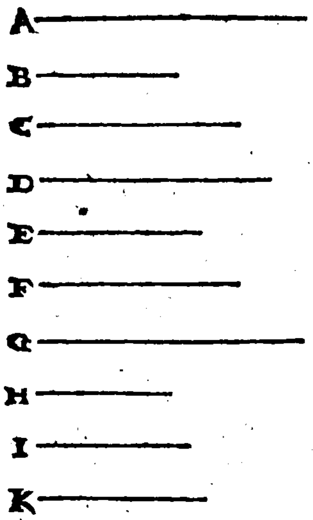


SINT triangula A B C, D E F, angulum C, angulo F, habentia aequalem. Dico proportionem triãguli A B C, ad triangulũ D E F, compositam esse ex lateribus, hoc est, ex proportione B C, ad E F, & ex proportione A C, ad D F: Vel ex proportione B C, ad D F, & ex proportione A C, ad E F. Completis enim parallelogrammis C G, F H, erũt ea aequiangula; [a] atque adeò eorum proportio ex lateribus componetur. Cùm ergò triangula A B C, D E F, cum ipsis, [b] quorum sunt dimidia, [c] eandem habeant proportionem: Erit quoq; proportio trianguli A B C, ad triangulum D E F, composita ex proportionibus laterum B C, A C, ad latera E F, D F.

a 23. sexti.
b 34. primi.
c 15. quinti.

II.

PROPORTIONEM ex duabus proportionibus, vel pluribus componere.

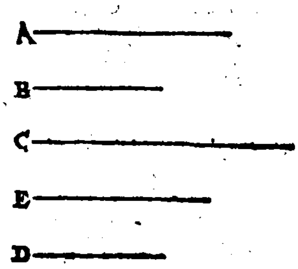


HOC, quo modo fiat, facilè colligitur ex demonstratione huius propos. 23. Sint enim tres proportiones A, ad B; C, ad D; & E, ad F, in lineis exhibitae. Oportet iam ex ipsis vnam proportionem componere. [d] Fiat vt A, ad B, ita G, ad H; & vt C, ad D, ita H, ad I; & vt E, ad F, ita I, ad K. Dico proportionem G, ad K, compositam esse ex tribus datis proportionibus. Cùm enim ea composita sit ex proportionibus G, ad H; H, ad I; & I, ad K, per definitionem 5. huius libri, composita etiam erit ex proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F; quòd his illae sumptae sint aequales.

d 12. sexti.

III.

PROPORTIONEM minorem ex maiore auferre.



SIT proportio A, ad B, minor auferenda ex proportione maiore C, ad D. [e] Fiat, vt A, ad B, ita C, ad E; statuaturq; E, terminus medius inter C, & D. Dico ablatam esse proportionem A, ad B, ex proportione C, ad D, reliquamq; esse proportionem E, ad D. Cùm enim proportio C, ad D, componatur ex proportionibus C, ad E, & E, ad D: Si proportio C, ad E, hoc est A, ad B, auferatur, relinquetur proportio E, ad D.

e 12. sexti.

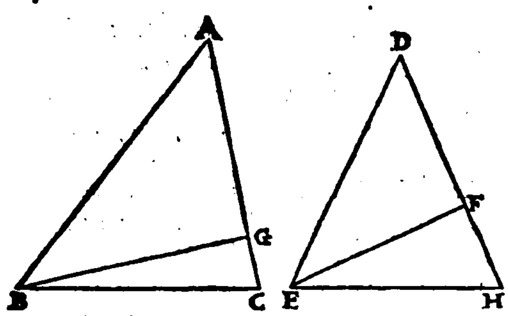
VERVM haec compositio, & detractio proportionum non est additio, & subtractio propriè, quia aliàs totũ esset aequale parti, & minus, & maior proportio posset detrahi ex minore, vt ad finem lib. 9. ostendemus.

IIII.

TRIANGVLA, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent, eandem proportionem habent, quam rectangula, quæ sub lateribus æqualem angulum comprehendentibus continentur.

SINT triangula A B C, D E F, angulum A, angulo D, habentia aequalem. Dico esse triangulum A B C, ad triangulum D E F, vt rectangulum sub A B, A C, ad rectangulum sub D E, D F. Ductis enim ad A C, D F, perpendicularibus B G, E H; erunt triangula A B C, D E H, aequiangula, vt constat ex corollario primo, propositionis 32. libri 1. cùm duo anguli A, A G B, duobus angulis D, D H E, sint aequales. [f] Igitur erit, vt G B, ad B A, ita H E, ad E D: Vt autem G B, ad B A, [g] ita est rectangulum sub B G, A C, ad rectangulum sub A B, A C. (Nam si bases ponantur G B, B A, erit eorum eadem altitudo A C.) Et eadem ratione, vt

f 4. sexti.
g 1. sexti.




a 11.quinti. b 15.quinti. c 41.primi.

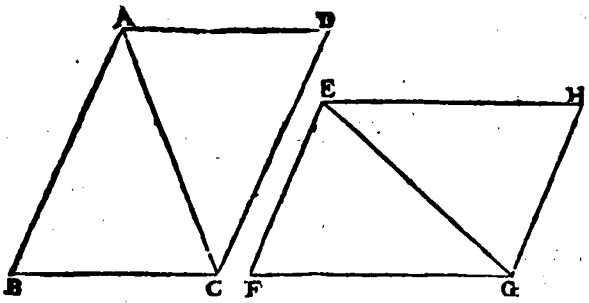
*H E,ad E D,ita est rectangulum sub E H,D F,ad rectangulum sub D E, D F.* [a] *Rectangulum igitur sub B G, A C,ad rectangulum sub A B, A C, est, vt rectangulum sub E H,D F,ad rectangulum sub D E,D F; & permutando,rectangulum sub B G,A C, ad rectangulum sub E H,D F,vt rectangulum sub A B, A C,ad rectangulum sub D E,D F. Sed vt rectangulum sub B G, A C, ad rectangulum sub E H, D F,* [b] *ita est triangulum A B C, ad triangulum D E F,* [c] *quod hæc triangula sint rectangulorum illorum dimidia. (Habent enim easdem cum illis bases A C,D F,altitudinesq; easdem B G,E H: ac proinde inter easdem cum illis parallelas sunt constituta.) Igitur erit quoq; triangulum A B C,ad triangulum D E F,vt rectangulum sub A B, A C, ad rectangulum sub D E,D F. Quod est propositum.*

d 23. sexti.

ALITER,*& facilius. Ex theoremate 1. huius scholij, proportio trianguli A B C, ad triangulum D E F, composita est ex proportionibus A B,ad D E, & A C, ad D F:* [d] *Sed & proportio rectanguli sub A B, A C, ad rectangulum sub D E,D F, ex eisdem proportionibus A B, ad D E, & A C, ad D E, composita est. Igitur erit triangulum A B C,ad triangulum D E F,vt rectangulum sub A B, A C, ad rectangulum sub D E, D F. Quod est propositum.*

## V.

PARALLELOGRAMMA inter se æquiangula, eandem habent proportionem, quam rectangula sub lateribus ipsorum æqualem angulum continentibus comprehensa.

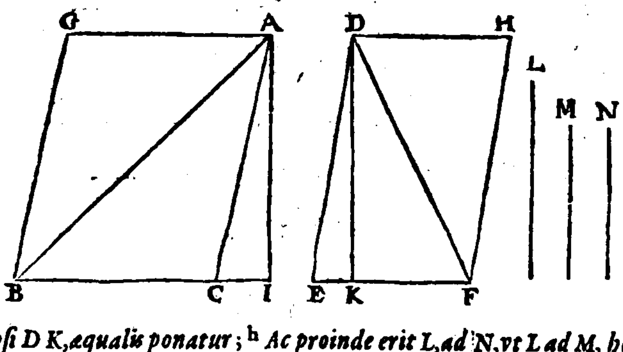



e 15.quinti. f 34.primi. g 11.quinti.

SINT *parallelogramma A B C D, E F G H, æquiangula inter se, quorum anguli B, & F, sint æquales. Dico esse, vt parallelogrammum B D, ad parallelogrammum F H,ita rectangulum sub A B,B C,ad rectangulum sub E F,F G. Ductis enim diametris A C, E G, quæ angulos æquales B,F, subtendant; habebunt triangula A B C, E F G,angulũ B,angulo F,æqualem. Quare, vt iam demonstrauimus, erit, vt triangulum A B C,ad triangulum E F G, ita rectangulum sub A B, B C, ad rectangulum sub E F,F G,* [e] *Cum ergo parallelogramma B D,F H,eandem habeat proportionem,quam triangula A B C,E F G;* [f] *quod hæc ipsorum sint dimidia;* [g] *Erit quoq; vt parallelogrammum B D,ad F H, parallelogrammum,ita rectangulum sub A B, B C,ad rectangulum sub E F,F G. Quod est propositum.*

## VI.

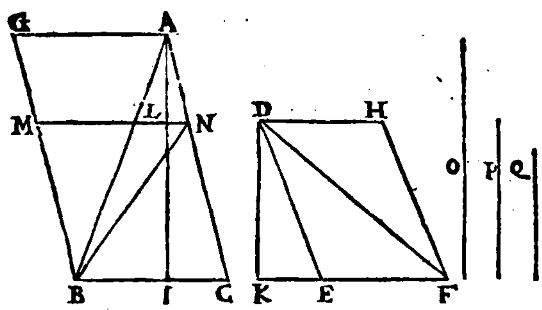
TRIANGVLA & parallelogramma inter se proportionem habēt compositam ex proportione basium,& proportione altitudinum.




h 7.quinti. i 1.sexti. k 11.quinti.

SINT *triangula A B C, D E F, & parallelogramma C G, E H, quorum altitudines A I,D K. Dico eorum proportionem compositam esse ex proportione basis B C, ad basin E F, & proportione altitudinis A I, ad altitudinē D K. Sint enim primùm altitudines æquales,bases verò vel æquales etiam,vel inæquales: Fiatq;,vt B C,ad E F, ita L,ad M. Vt aũt A I,ad D K,ita M,ad N. Quo facto erit M, ipsi N, æqualis, quod & A I, ipsi D K,æqualis ponatur;* [h] *Ac proinde erit L,ad N,vt L ad M, hoc est,vt B C,ad E F.* [i] *At verò vt B C,ad E F, ita est triangulum A B C, ad triangulum D E F,& parallelogrammũ C G,ad parallelogrammũ E H.* [k] *Igitur quoq; erit,vt L,ad N,ita triangulum A B C,ad triangulum D E F,& parallelogrammum C G,ad parallelogrammum E H: Sed proportio L,ad N,composita est ex proportione L,ad M,hoc est,ex proportione basis B C, ad basin E F,& ex proportione M,ad N,hoc est,altitudinis A I,ad altitudinem D K. Proportio ergo trianguli A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammi C G, ad parallelogrammum E H,ex eisdem proportionibus est composita. Quod est propositum.*

SINT *iam altitudines A I,D K,inæquales,& A I, maior, bases verò B C,E F, vel æquales, vel etiam inæquales. Fiat,vt A I,ad D K,ita O,ad P; & vt B C,ad E F,ita P,ad Q. Abscissa deinde I L,æquali ipsi D K: ducatur per L, ipsi B C, parallela L M,secans A C, in N, iungaturq; recta B N. Quoniam igitur est triangulum A B C, ad*




*A B C, ad triangulum N B C; & parallelogrammum C G, ad parallelogrammum C M, vt altitudo A I, ad altitudinem I L, vel ad D K, ipsi I L, æqualem, hoc est, vt O ad P per ea, quæ ad 1. propositionem huius libri ex Commandino ostendimus; quòd triangulorum & parallelogrammorum eadem sit basis B C: Et vt triangulum N B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammum C M, ad parallelogrammum E H,* [a] *ita est basis B C, ad basin E F, (cùm eadem sit altitudo) hoc est, ita P, ad Q:* [b] *erit ex æquo A B C, ad D E F, & C G, ad E H, vt O, ad Q. Quare cùm proportio O, ad Q componatur ex proportione O, ad P, hoc est, ex proportione altitudinis A I, ad altitudinem D K; & ex proportione P, ad Q, hoc est, ex proportione basis B C, ad basin E F: Ex eisdem proportionibus cõponetur proportio trianguli A B C, ad triangulum D E F, & parallelogrammi C G, ad parallelogrammum E H. Quod est propositum.*

a 1. sexti.

b 22. quinti.

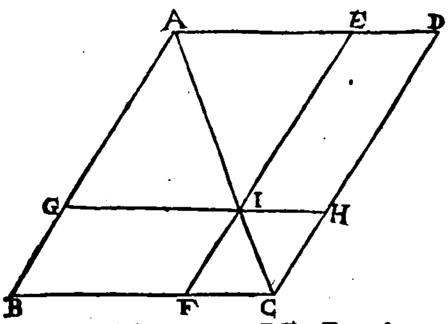
*EODEM pacto ostendetur proportio trianguli D E F, cuius altitudo minor est, ad triangulum A B C, & parallelogrammi E H, ad parallelogrammum C G, composita esse ex proportione basis E F, ad basin B C, & proportione altitudinis D K, ad altitudinem A I. Si enim fiat, vt E F, ad B C, ita Q, ad P; & vt D K, ad A I, ita P, ad O, & reliqua fiant, vt prius;* [c] *erit triangulum D E F, ad triangulum N B C & parallelogrammum E H, ad parallelogrammum C M, vt E F, ad B C hoc est, vt Q, ad P. Item triangulum N B C, ad triangulum A B C, & parallelogrammum C M, ad parallelogrammum C G, vt L I, seu D K, ad A I, hoc est, vt P, ad O. ex ijs, quæ ad propos. 1. huius lib. ex Commandino demõstrauimus.* [d] *Ex æquo igitur erit, vt D E F, ad A B C, & E H, ad C G, ita Q, ad O. Quocirca cùm proportio Q, ad O, componatur ex proportione Q, ad P, hoc est, ex proportione basis E F, ad basin B C; & ex proportione P, ad O, id est, ex proportione altitudinis D K, ad altitudinem A I; componetur etiam proportio D E F, ad A B C, & E H, ad C G, ex eisdem proportionibus. Quod est propositum.*

c 1. sexti.

d 22. quinti.

## PROBL. 18. PROPOS. 24. 22.

IN omni parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt parallelogramma & toti, & inter se sunt similia.




ESTO parallelogrammum A B C D, in quo ducatur diameter A C, & per quodlibet eius punctum I, ducantur duæ rectæ E F, G H, parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico parallelogramma E G, F H, circa diametrum, similia esse & toti parallelogrammo, & inter sese. Quòd enim æquiangula sint toti, facilè ostendetur. Nam angulus G A E, idem est, qui angulus B A D: [a] & angulus externus A E I, æqualis interno A D C; & angulus A G I, externus interno A B C; & angulus E I G, externus interno B F I; & hic externus interno B C D. Quare æquiangulum est E G, parallelogrammum parallelogrammo B D: Et eadem ratione eidem B D, æquiangulum erit F H. Quòd autem latera circa æquales angulos habeat proportionalia lateribus totius, hoc modo demonstrabimus. Cùm triangulum A G I, æquiangulum sit triangulo A B C; & triangulum A E I, triangulo A D C, vt perspicuum est ex 29. propositione libri 1. vel etiam ex corollario propositionis 4. huius libri, [b] erit vt A B, ad B C, ita A G, ad G I; atque ita latera circa æquales angulos B, & G, proportionalia sunt. Rursus [c] erit, vt B C, ad C A, ita G I, ad I A; Item vt C A, ad C D, ita I A, ad I E. [d] Ex æquo igitur, vt B C, ad C D, ita est G I, ad I E; ac propterea & latera circa æquales angulos B C D, G I E, proportionalia existunt. Non aliter demonstrabuntur latera circa reliquos angulos æquales, esse proportionalia. Quare per definitionem, simile erit parallelogrammum E G, toti parallelogrammo B D. Eadem arte ostendes parallelogrammum F H, simile esse eidem parallelogrammo B D; [e] atque adeò & ipsa inter se similia erunt. In omni ergo parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, &c. Quod erat ostendendum.

a 29. primi.

b 4. sexti.

c 4. sexti.

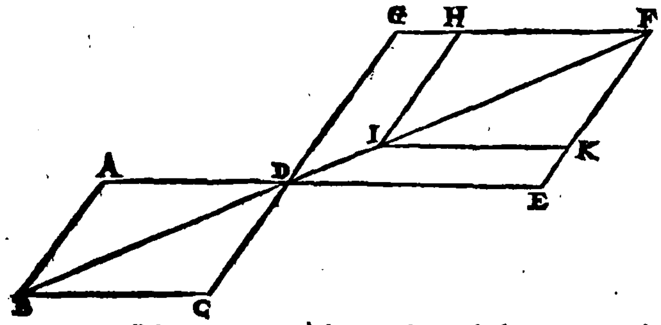
d 22. quinti.

f 21. sexti.

### SCHOLIVM.

*INTELLIGENDA autem sunt parallelogramma circa diametrum totius esse talia, quæ habeant vnum angulum cum toto parallelogrammo communem, vt manifestum est ex forma demonstrationis.*

*QVOD si circa diametrum alicuius parallelogrammi productam consistat parallelogrammum aliud, ita vt duo huius latera rectas duas componant lineas cum duobus lateribus alterius, vel certè illa his sint parallela, ijsdem ferè medijs ostendetur hoc illi esse simile. Parallelogrammi enim A B C D, diameter B D sit producta ad F, circa quam consistat parallelogrammum D E F G, cuius duo latera D E, D G, rectas lineas efficiant cum A D, D C, lateribus parallelogrammi A C. Dico parallelogrammum G E, simile esse parallelogrammo*

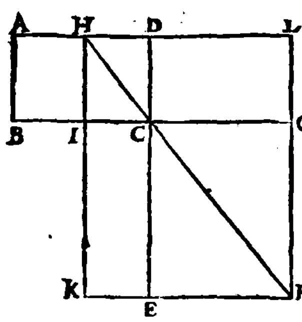


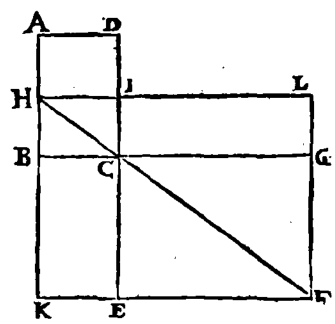

A C. *Quòd enim ambo inter se sint æquiangula, facilè ostendetur.* a29.primi. [a] *Nam quia angulus A, æqualis est angulo alterno A D G; huic autem æqualis quoq́; est alternus angulus G; erunt æquales anguli A, & G.* b34.primi. [b] *Quare his oppositi C, & E, æquales quoq́; erũt.* c15.primi. [c] *Rursus, quia anguli A D C, G D E, ad verticem, sunt æquales,* d34.primi. [d] *erũt his quoq́; oppositi A B C, G F E, æquales. Igitur æquiangula sunt G E, A C, parallelogramma. Quòd autem latera habeant proportionalia circum æquales angulos, hac ratione fiet perspicuum. Cùm triangulum B A D, æquiangulũ sit triangulo D G F; & triangulũ B C D, triangulo D E F, vt cõstat ex propos. 29. lib. 1* e4.sexti. [e] *Erit vt B A, ad A D, ita D G, ad G F. Rursus vt A D, ad D B, ita G F, ad F D; & vt D B, ad D C, ita F D, ad F E,* f22.quinti. [f] *ac ꝓpterea ex æquo vt A D, ad D C ita G F, ad F E. Sunt igitur latera circa angulos A, A D C, proportionalia lateribus circa angulos G, G F E, q̃ illis æquales sunt. Nõ secus ostendes, reliqua latera circa angulos æquales proportionalia esse. Quare similia sunt parallelogrãma A C, G E.*

*Qvod si circa eandem diametrum consistat parallelogrammum H I K F, habens latera parallela lateribus parallelogrammi A C, idem demonstrabitur. Nam productis A D, C D, donec occurrant rectis F K, F H; productis in E, & G;* g34.sexti. *erit H K, similis ipsi G E,* [g] *vt Euclides demonstrauit: Atqui eadem G E, simile est quoque A C, vt nunc ostendimus.* h21.sexti. [h] *Igitur & H K, A C, inter se similia sunt. Quod est propositum.*

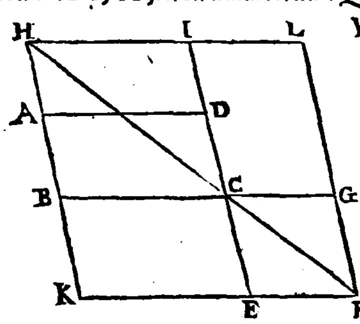
*Sed & absoluemus cum Peletario sequens problema.*

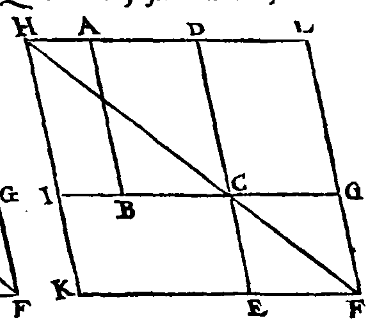
Datis duobus parallelogrammis æquiangulis, sed non similibus: ex quouis illorum alteri simile resecare.



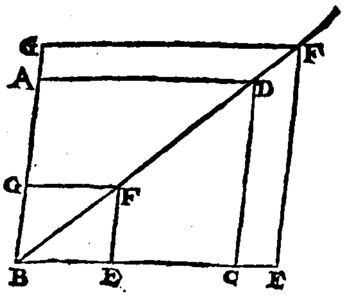




*Dvo parallelogramma æquiangula, sed non similia, sint A B C D, C E F G; & ex A B C D, abscindendum sit parallelogrammum ipsi C E F G, simile. Coniungantur ambo ad angulos æquales B C D, E C G, ita vt sit vna linea recta B C G, & propterea, vt ad propos. 15. lib. 1. demonstratũ est, E C D, quoque vna recta linea. Deinde ducta diameter F C, producatur, donec in H, secet vel latus A D, vel latus A B; (Neque enim in punctum A, cadet: quia A C, esset simile ipsi C F, vt demonstratum est, quod est contra hypothesim) & per H, ducatur H I, parallela ipsi A B, vel ipsi A D. Dico parallelogrammum abscissum H C, simile esse ipsi C F. Si enim totum parallelogrammum K L, compleatur, erunt H C, C F, circa diametrum. Quare inter se similia erũt, vt Euclides demonstrauit in hac propositione.*




*Eadem autem arte ferè alterutrum ipsorum augeri poterit, vt fiat simile alteri. Sit enim augendum A B C D, vt fiat ipsi C E F G simile. Coniungãtur vti prius, & diameter F C, extẽdatur, donec in H, secet vel latus B A, protractũ, vel latus D A, protractũ. Neq́; enim in punctũ A, cadet: quia A C, esset ipsi C F, simile, vt demonstratũ est, quod nõ ponitur. Deinde ꝑ H, ducatur H I, parallela ipsi A D, vel ipsi A B, donec secet vel latus C D, protractũ, vel C B, protractum in I. Dico parallelogrammum auctum H C, simile esse parallelogrammo C F. Nam si compleatur totum parallelogrammum K L, consistent H C, C F, circa diametrum.* i24.sexti. [i] *Quare similia inter se erunt.*

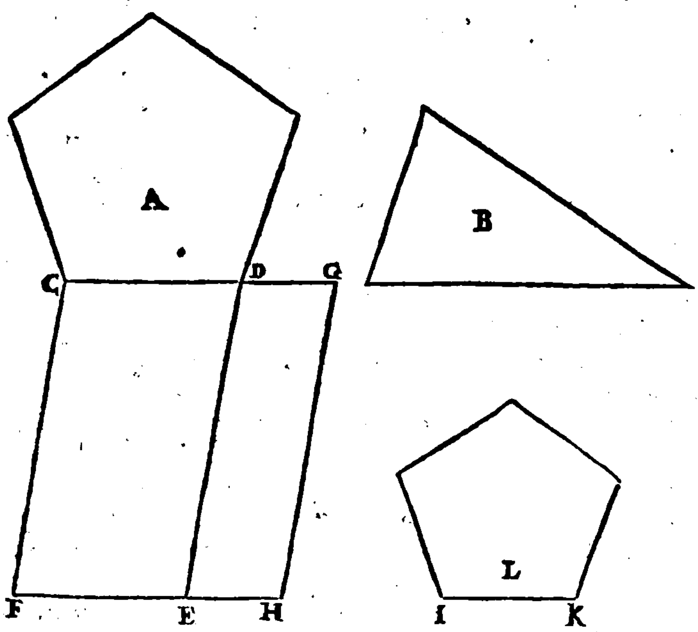



*Perspicvvm autem est, ex demonstratione huius theorematis facta ab Euclide, & ex probatione theorematis à nobis propositi in hoc scholio, parallelogramma circa eandem diametrum non solùm esse similia, verùm etiam similiter posita. Vnde proposito quouis parallelogrammo A B C D, si maius debeat describi illi simile similitérque positum, producendum erit latus vnum, nempe B C; Atque ex E, quolibet puncto vltra C, ipsi C D, parallela E F, ducenda, secans diametrum B D, productam in F; & per F, ducenda F G, parallela ipsi A D, occurrens rectæ B A, ꝓductæ in G.* k24.sexti. [k] *Erit enim parallelogrammum G E, simile similiterq́;*

*similiterq; positum ipsi A C, & maius eodem. Quòd si minus debeat describi, sumendum erit punctum E, citra C, & reliqua peragenda, vt prius, vt figura indicat.*

## PROBL. 7. PROPOS. 25. 25.

DATO rectilineo simile, similiterque positum; & alteri dato æquale idem constituere.

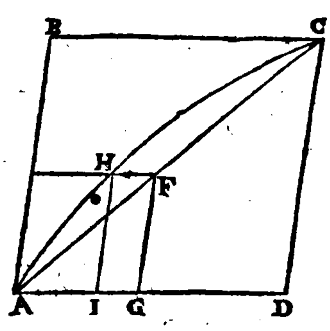



SINT data duo rectilinea A, & B; sitque constituendum aliud rectilineum, quod simile quidem sit ipsi A, æquale verò ipsi B. Super C D, vnum latus rectilinei, cui simile debet constitui, [a] constituatur parallelogrammum C E, in quouis angulo, æquale rectilineo A; Et super rectam D E, in angulo E D G, qui æqualis sit angulo D C F, parallelogrammum D H, æquale ipsi B; eritq; tam C D G, quàm F E H, linea vna recta, vt demonstratum est propositione 45. libri 1. [b] Inueniatur iam inter rectas C D, D G, media proportionalis I K; [c] super quam constituatur rectilineum L, simile ipsi A, similiterque positum. Dico L, æquale esse alteri rectilineo B. Cum enim sint proportionales tres rectæ C D, I K, D G; erit per corollarium propositionis 19. vel 20. huius libri, vt C D, prima ad D G, tertiam, ita A, rectilineum super primam C D, ad rectilineum L, super I K, secundam simile similiterque descriptum: [d] Vt autem C D, ad D G, ita est parallelogrammum C E, ad parallelogrammum D H, eiusdem altitudinis. [e] Igitur erit vt C E, ad D H, ita A, ad L. [f] Vt autem C E, ad D H, ita est A, ad B: propterea quòd parallelogrammum C E, rectilineo A; & parallelogrammum D H, rectilineo B, constructum est æquale. [g] Quare erit, vt A, ad B, ita A, ad L; [h] propterea; que æqualia erunt rectilinea B, & L. Est autem & L, simile ipsi A, similiterque positum, per constructionem. Dato igitur rectilineo simile similiterque positum, & alteri dato æquale idem constituimus. Quod erat faciendum.

*a 44. vel 45 primi.*
*b 13. sexti.*
*c 18. sexti.*
*d 1. sexti.*
*e 11. quinti.*
*f 7. quinti.*
*g 11. quinti.*
*h 9. quinti.*

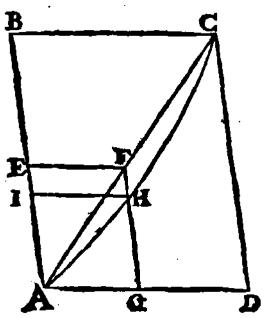
## THEOR. 19. PROPOS. 26. 23.

SI à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, & simile toti, & similiter positum, communem cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum consistit.




EX parallelogrammo B D, abscissum sit parallelogrammum E G, simile ei, similiterque positum, habens cum ipso angulum communem E A G. Dico E G, consistere circa diametrum totius B D. Ducantur enim rectæ A F, C F, quæ si fuerint vna linea recta, perspicuum est, cum A F, sit diameter ipsius E G, & A C, diameter ipsius B D, parallelogrammum E G, consistere circa diametrum A F C, totius parallelogrammi. Quòd si A F, C F, non dicantur efficere lineam rectam; ducatur totius parallelogrammi diameter A C, secans latus E F, in H, puncto, per quod ipsi F G, parallela agatur H I. Quoniam igitur parallelogramma B D, E I, sunt circa eandem diametrum A H C; [i] ipsa erunt similia, similiterque posita. [k] Quare erit vt B A, ad A D, ita E A, ad A I: Sed vt B A, ad A D, ita quoque est E A, ad A G; quod parallelogramma B D, E G, ponantur etiam similia, similiterque posita. [l] Igitur erit vt E A, ad A I, ita E A, ad A G. [m] Ac propterea æquales erunt rectæ A I, A G; pars & totum. Quod est absurdum.

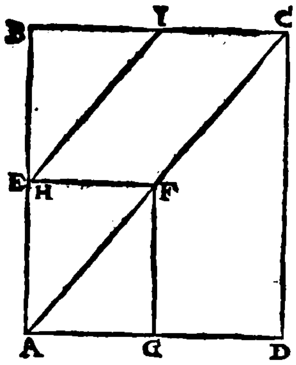
*i 24. sexti.*
*k 1. definit. sexti.*
*l 11. quinti.*
*m 9. quinti.*

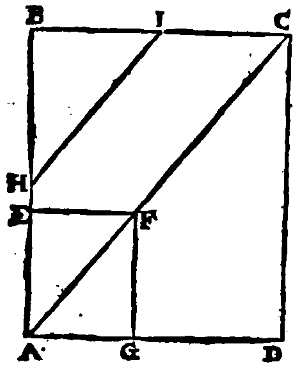


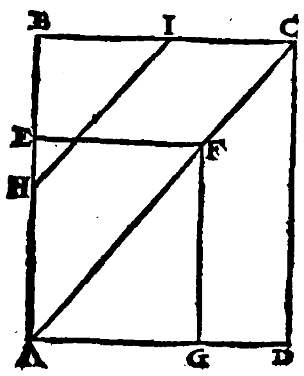

a 24. sexti. b 1. definit. sexti. c 11. quinti. d 9. quinti.

Quod si dicatur, recta A H C, secare alterum latus F G; Tunc ducta H I, parallela ipsi E F; [a] erūt rursus similia parallelogramma B D, I G, similiterque posita. [b] Quare erit, vt D A, ad A B, ita G A, ad A I: Sed vt D A, ad A B, ita quoque est G A, ad A E, ob similitudinem parallelogrammorum B D, E G. [c] Igitur erit vt G A, ad A I, ita G A, ad A E; [d] ideoque æquales erunt rectæ A I, A E: pars & totum. Quod est absurdum. Constituūt ergo rectæ A F, F C, vnam rectam lineam; hoc est, ducta diameter A C, transit per punctum F; & ducta diameter A F, cadit in punctum C. Itaque si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, &c. Quod erat demonstrandum.

## SCHOLIVM.

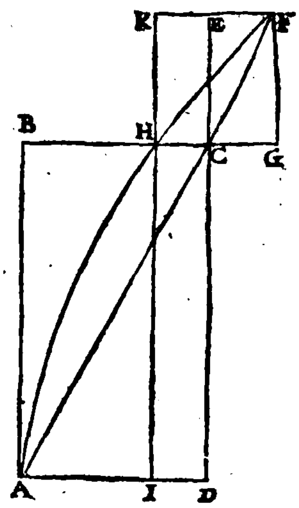



a 15. quinti. b 11. quinti. c 30. primi. d 6. sexti. e 28. primi. f 2. sexti.

*Aliter idem theorema demonstrabimus ostensiuè hoc modo: Diuisis lateribus A B, B C, bifariam in punctis H, I, siue punctum H, cadat in punctum E, siue suprà, siue infrà; ducantur rectæ H I, A F. Quoniam igitur, propter similitudinem parallelogrammorum, est vt A B, ad B C, ita A E, ad E F; Vt autem tota A B, ad totam B C; [a] ita est dimidia H B, ad dimidiam B I; [b] erit vt H B, ad B I, ita A E, ad E F. Triangula igitur H B I, A E F, cùm habeāt circa angulos B, E, (qui æquales sunt, ob similitudinē parallelogrammorum B D, E G: Vel quia vnus est internus, & alter externus in parallelis B C, E F; [c] quæ parallelæ sunt, cùm vtraq; parallela sit ipsi A D.) latera proportionalia, [d] erūt æquiangula, habebuntq; æquales angulos B H I, E A F, externum, & internum inter rectas H I, A F. [e] Quare parallelæ erunt rectæ H I, A F. Quoniam verò recta, quæ ex puncto A, ad punctum C, duci concipitur, [f] parallela quoque est rectæ H I; propterea quòd latera A B, B C, trianguli tunc constituti A B C, proportionaliter essent secta in H, & I, vtpote bifariam; efficitur, vt ducta recta A C, eadem fiat, quæ A F, transeatq; per punctum F; cùm ex puncto A, solùm vna linea parallela rectæ H I, posset duci, vt manifestum est. Consistunt ergo B D, E G, parallelogramma similia, similiterq; posita circa eandem diametrum A F C. Quod est propositum.*



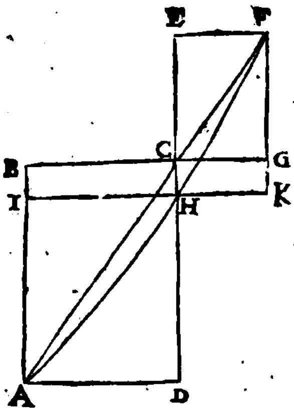

*Quod si duo parallelogramma similia similiterq; posita non habeant angulum communem, sed vnum sit extra aliud, hac tamen lege, vt ita sint connexa inter se secundùm duos eorum angulos æquales, vt duo latera vnius cū duobus lateribus alterius duas rectas lineas constituant: demonstrabimus iisdem ferè mediis, ea circa eandem consistere diametrum. Sint enim duo parallelogramma similia, similiterq; posita B D, E G, quæ ad angulos æquales B C D, G C E, ita coniungantur, vt lineæ B C, C G, in directum iaceant, et ob id, per ea, quæ ad proposit. 15. lib. 1. ostendimus, lineæ D C, C E, vnam quoque lineam rectam componant. Dico parallelogrāma B D, E G, circa eandem consistere diametrum, hoc est, diametrum A C, cū diametro F C, vnam rectam lineam conficere. Si enim A C, F C non faciunt vnam lineam rectam, ducatur ex A, ad F, linea recta secans B C, in H, puncto, per quod agatur H I, parallela ipsi C D, occurrens rectæ F E, productæ in K. Quoniam igitur parallelogramma B I, K G, circa eandem diametrum A H F, producta consistunt, efficiuntq; duæ rectæ B H, H I, cum duabus rectis H G, H K, duas lineas rectas, ipsa erunt similia similitérque posita, per ea, quæ ad propositionem vigesimam quartam huius libri demonstrauimus.*

g 8. quinti. h 10. quinti.

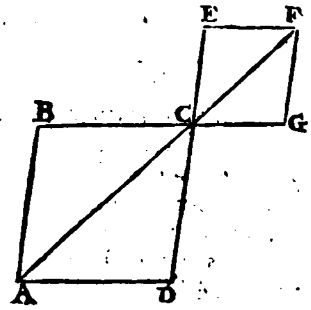
*Quare erit vt H B, ad B A, ita F K, ad K H. [g] Habet autem C B, maior ad B A, proportionem maiorem, quàm H B, minor ad eandem B A: & est, vt C B, ad B A, ita F E, ad E C, eò quòd parallelogramma B D, E G, ponuntur similia similitérque descripta. Igitur & F E, ad E C, hoc est, ad sibi æqualem K H, maiorem habebit proportionem, quàm H B, ad B A, hoc est, quàm F K, ad K H. Quam ob rem si F E, ad K H; maiorem habeat proportionem, quàm F K, ad eandem K H; [h] erit E F, maior quàm F K; pars quàm totū. Quod est absurdum.*

*Quod si quis dicat, rectam A H F, secare latus C D. Tunc per H, ducta recta B C, parallela H I, quæ occurrat*

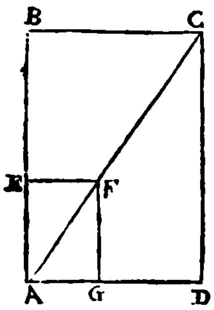
currat

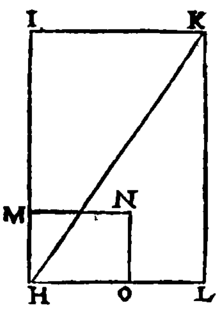



currat recta F G, protracta in K; erunt rursus similia similiterq́; posita parallelogramma I D, E K, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. ostendimus. Quare erit vt H D, ad D A, ita F K, ad K H. [a] Habet autem C D, ad D A, maiorem proportionem, q̃ H D, ad D A, & est vt C D, ad D A, ita F G, ad G C; propterea quòd parallelogramma B D, E G, similia similiterq́; posita, sunt concessa. Igitur & F G, ad G C, hoc est, ad sibi æqualem K H; maiore habebit proportionem q̃ F K, ad K H; [b] ideoq́; F G, maior erit, q̃ F K; pars q̃ totũ. Quod est absurdum. a 8. quinti. b 10. quinti.

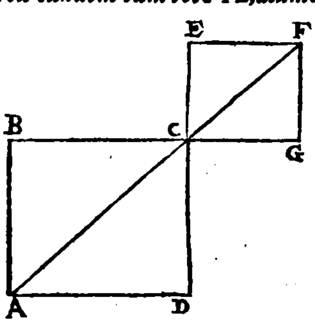


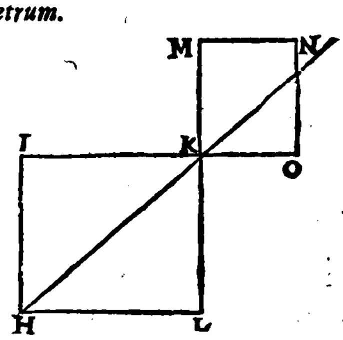

OSTENSIVE idem hac ratione ostendetur. Quoniam propter similitudinem parallelogrammorũ B D, E G, anguli B, E, sunt æquales, estq́; vt A B, ad B C, ita C E, ad E F; habebunt triangula A B C, C E F, circa angulos æquales B, & E, latera proportionalia; [c] atq́; idcirco æquiãgula erũt, habebuntq́; angulos B C A, E F C, æquales. Addito ergo cõmuni angulo B C F, erũt duo anguli B C A, B C F, duobus angulis E F C, B C F, æquales: [d] Sed hi inter parallelas B C, E F, æquales sunt duobus rectis. Igitur & B C A, B C F, duobus erunt rectis æquales; [e] Ac propterea A C, F C, vnam component rectam lineam. Quod est propositum. c 6. sexti. d 29. primi. e 14. primi.




RECTE autem Euclides in theoremate voluit, parallelogrammum à toto ablatum nõ solùm esse toti simile, verùm etiam similiter positũ, vt ostendatur circa eandem esse cum toto diametrum. Nam si ex altera parte longiori B D, abscindatur altera parte longius E G, circa eandem cum toto diametrum consistens, [f] erit E G simile similiterq́; positum. f 24. sexti. At verò si in rectangulo I L, quod sit æquilaterum & æquiangulum ipsi B D, sumatur H M, æqualis ipsi E F, & M N, æqualis ipsi A E, &c. erit quidem rectangulum M O, æquale, & simile rectangulo E G, propter æqualitatem laterum, & angulorum, qui sunt recti; & ob id simile rectangulo I L; sed tamen quia non est similiter positum, non consistet circa eandem cum toto I L, diametrum.



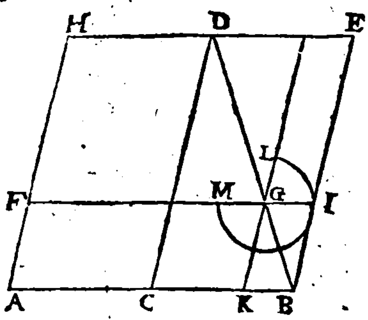




IDEM quoq́; hic perspicitur in rectangulis similibus, quorum vnum est extra alterum, secundùm tamen angulos eorum ita inter se connexa, vt duo latera vnius in directum iaceant cum duobus lateribus alterius, qualia sunt parallelogramma rectangula B D, E G; & I L, M O. in quibus E G, quidem consistit circa eandem diametrũ cum rectangulo B D, quoniam est similiter positum. At verò M O, minimè consistit circa eandem diametrum cum rectangulo I L, quia non est similiter positum, quãuis simile sit, cùm prorsus sit æquale ipsi E G. Nam K M, æqualis est ipsi E F, & M N, ipsi F C, &c.

## THEOR. 20. PROPOS. 27. 26.

OMNIVM parallelogrammorum secundùm eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumq́ue figuris parallelogrammis similibus similiterq́ue positis, ei, quod à dimidia describitur; maximum id est, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum simile existens defectui.

DETVR recta A B, diuisa bifariam in C, superq́ue eius dimidiam B C, constituatur quodcunque parallelogrammum C D E B, cuius diameter B D. Si igitur compleatur totum parallelogrammum A B E H, erit parallelogrammũ A D, super dimidiam A C, consistens, applicatum secundùm A B, deficiens parallelogrãmo C E, & existens simile defectui C E. Dico parallelogrammum A D, ad dimidiam A C, applicatum deficiensq́ue parallelogrammo C E, maximum esse omnium, quæ secundùm A B, rectam applicantur, deficiuntq́ue parallelogrammis similibus similiterq́; positis ipsi C E. Sumpto enim puncto G, vtcunque in diametro B D, & ductis p G, rectis F G I, K G, quæ sint parallelæ rectis A B B E; erit parallelogrammum F K, secundùm rectam A B, applicatũ, deficiens parallelogrammo K I, [a] quod ipsi C E, simile est, similiterq́ue positum; cùm sit circa eandem a 24. sexti.



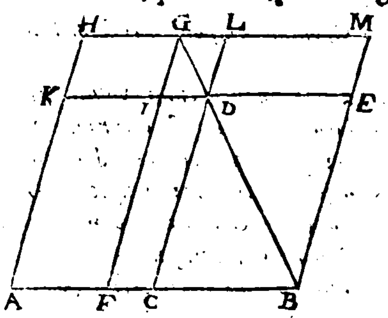

a 43. primi. dem cum C E, diametrum. a Quoniam verò complementa C G, G E, æqualia sunt; si addatur commune K I, erunt quoque æqualia C I, K E: b Est autem C I, æquale ipsi C F, propter bases æquales A C, C B. Igitur & C F, K E, æqualia erunt; additoque cõmuni C G, æqualia erũt parallelogrammum A G, & gnomon L M. Quare cũ C E, maius sit gnomone L M, (continet enim C E, præter gnomonẽ, parallelogrammum adhuc D G,) erit quoque A D, c æquale existens ipsi C E, propter bases æquales A C, C B, maius q̃ parallelogrammũ A G, eodem parallelogrammo D G. Eodemque modo ostendetur A D, maius esse omnibus parallelogrammis, quæ ita secundùm rectam A B, applicantur, vt punctum G, sit inter puncta B, & D, hoc est, quæ occupãt maiorẽ lineam semisse A C, habentq; minorem altitudinem, quàm A D; dummodo defectus similes sint ipsi C E.

b 36. primi.

c 36. primi.

d 36. primi. ALITER demonstrabitur A D, maius esse parallelogrammo A G, hoc modo: d Parallelogramma F D, D I, sunt æqualia, cùm bases H D, D E, sint æquales: Est autem D I, maius, quàm G E, hoc est, quàm complementum C G, (e quod ipsi G E, æquale est,) parallelogrammo D G. Igitur & F D, maius erit, quàm C G, parallelogrammo eodem D G. Atque idcirco addito communi C F, maius erit A D, quàm A G, parallelogrammo eodem D G.

e 43. primi.




QVOD si punctum G, sumatur in diametro B D, producta extra parallelogrammum C E. Tunc ducta per G, recta H M, quæ sit parallela ipsi A B, occurratq; rectis A K, B E, protractis in H, & M; Item ducta G F, parallela ipsi A H; erit parallelogrammum A G, applicatum secundùm rectam A B, deficiẽs parallelogrammo F M, f quod ipsi C E, est simile, similiterq; positũ, cùm sit circa eandem diametrum cum C E. Dico adhuc maius esse A D, ipso A G. Protracta enim C D, ad L, erũt æquales rectæ H L, L M, g cùm æquales sint æqualibus A G, C B, h ideoq; æqualia parallelogramma H D, D M. i Cùm igitur D M, sit æquale complemento D F; erit & H D, æquale ipsi D F. Est autem H D, maius quàm H I, parallelogrammo I L. Quare & D F, maius erit, quàm H I, eodem parallelogrammo I L; Ac propterea cõmuni addito A I, maius erit A D, quàm A G, eodem parallelogrammo I L. Iisdem argumentis concludes A D, maius esse quocunque parallelogrammo ita applicato secundùm rectam A B, vt punctum G, sit vltra D, in diametro B D, producta; hoc est, quod occupat minorem lineam semisse A C, habetq; maiorem altitudinem, quàm A D; dummodo defectus similis existat parallelogrammo C E. Itaque omnium parallelogrammorũ secundùm eandẽ rectam lineam applicatorũ, &c. Quod erat demonstrandũ.

f 24. sexti.

g 34. primi.
h 36. primi.
i 43. primi.

## SCHOLIVM.

*MANIFESTVM autem est, lineam, ad quam parallelogrammum deficiens applicatur, esse vel maiorem dimidiata A C, qualis est A K, in priori figura; vel minorem, cuiusmodi est A F, in figura posteriori: prout punctum G, sumitur vel in diametro B D, vel in ea producta ad partes D.*

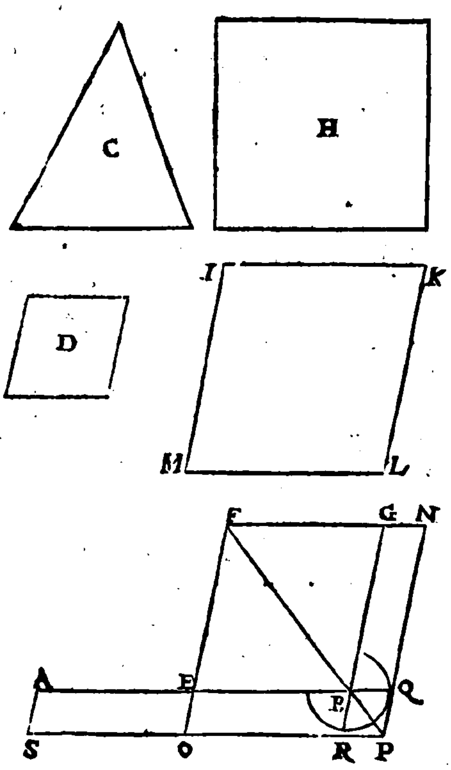
## 27. PROBL. 8. PROPOS. 28.

AD datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrammo dato. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, nõ maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, cùm similes fuerint defectus & eius, quod ad dimidiam applicatur, & eius, cui simile deesse debet.

AD datam rectam lineam A B, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum æquale, deficiens parallelogrammo, quod sit simile dato alteri parallelogrammo D. Secta A B, bifariam in E, super medietatem E B, k describatur parallelogrammum E F G B, simile ipsi D, similiterq; positum; & compleatur totum parallelogrammum A H G B. Si igitur A F, æquale est ipsi C; cùm sit applicatum ad A B, deficiens parallelogrammo E G, simili ipsi D; factum erit, quod iubetur. Si autem A F, maius est quàm C; (Neque enim minus esse debet. Nam cùm per propositionem præcedentem, ipsum sit omnium applicatorum maximum, dummodo defectus sint similes, non posset applicari vllum ad A B, quod esset ipsi C, æquale, sed omnia essent minora. Propterea adiunxit Euclides; Oportet autem datum rectilineum, &c.) erit quoque sibi æquale E G, maius q̃ C. Sit igitur maius rectilineo L. (Qua verò ratione excessus duorum rectilineorum sit inquirendus, docuimus ad propos. 45. lib. 1.) l & constituatur parallelogrammum K L M N, simile quidem similiterq; positum ipsi D, seu ipsi E G, æquale verò excessui inuento L; vt sit E G, æquale rectilineo C, & parallelogrammo K M, simul; & ob id maius q̃ K M. Cùm igitur ob similitudinem sit vt E F, ad F G, ita N K, ad K L; erunt quoq; latera E F, F G, maiora lateribus N K, K L. Si enim his illa forent æqualia, vel minora, esset etiam E G, æquale ipsi N L, vel minus, vt constat. Quare abscissis rectis F O, F Q, quæ

k 18. sexti.

l 25. sexti.

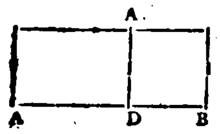



quæ sint æquales ipsis K N, K L, & completo parallelogrammo F Q P O; erit hoc ipsi L N, æquale, & eidem simile similiterque positum, & propterea ipsi E G: [a] atque adeò circa eandem diametrũ cum E G, consistet, quæ sit B F. Productis iam rectis Q P, O P, erit parallelogrammum A P, ad rectam A B, applicatum deficiens parallelogrammo P B, [b] quod simile est ipsi E G, similiterque positum, & propterea ipsi D. Dico igitur A P, æquale esse ipsi C, rectilineo. [c] Nam cùm P G, æquale sit complemento P E; si addatur commune P B, erit & B Q, æquale ipsi E R, hoc est, ipsi E S, [d] quod æquale est ipsi E R, propter bases æquales E A, E B. Quare si æqualibus A O, B Q, commune addatur E P, erit A P, æquale gnomoni T V. Sed gnomon T V, æqualis est rectilineo C, (Nam cùm E G, parallelogrammũ æquale sit ipsi C, vnà cum L N; si auferantur æqualia Q O, L N, remanebit gnomon T V, ipsi C, æqualis.) Igitur & A P, eidem C, æquale erit. Ad rectam ergo A B, applicatum est parallelogrammum A P, deficiens parallelogrammo P B, quod simile est dato parallelogrammo D, & æquale existens rectilineo dato C. Quod faciendum erat.

a 26. sexti.
b 24. sexti.
c 43. primi.
d 36. primi.

### *SCHOLIVM.*

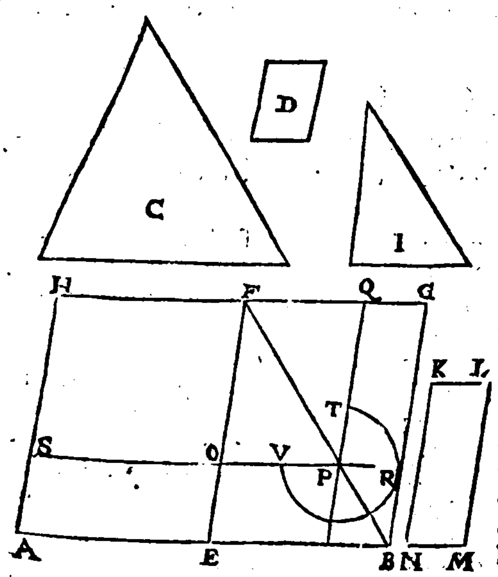
*MOVENT hoc loco dubium quoddam Iacobus Peletarius, & Nicolaus Tartalea, quod iuxta nostram constructionem locum non habet, cùm super E B, constituerimus E G, parallelogrammum non solùm simile ipsi D, verùm etiam similiter positum; quod ipsi minimè fecerunt. Qua de re, si placet, consule eorum Commentarios.*




*PERSPICVVM autem est, si ad rectam applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, ipsum applicatum æquale esse rectangulo, quod sub segmẽtis lineæ per applicationem factis continetur. Vt si ad A B, applicetur A C, deficiens quadrato C B, erit A C, applicatum, rectangulum contentum sub A D, & D C. Cùm ergo D C, æqualis sit ipsi D B, propter quadratum C B; continebitur quoque A C, sub segmentis A D, D B, per applicationem factis. Quod est propositum.*

## PROBL. 9. PROPOS. 29. 28.

**AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammũ applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.**



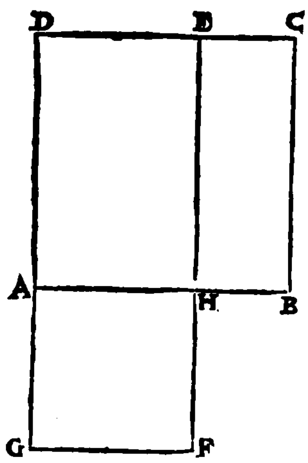

AD datam rectam lineam A B, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum æquale, excedens parallelogrammo, quod simile sit dato alteri parallelogrammo D. Diuisa A B, bifariam in E; [e] super dimidiam E B, construatur parallelogrammum E F G B, simile ipsi D, similiterque positum. [f] Deinde rectilineo C, & parallelogrammo E G, constituatur quadratum H, æquale; [g] cui quidem fiat parallelogrammum I K L M, æquale, simile verò ipsi E G, similiterque positum; eritq; propterea I K L M, maius quàm E F G B, quandoquidem æquale est quadrato H, quod constructum est rectilineo C, vna cum parallelogrammo E G, æquale. Cùm igitur ob similitudinem M K, E G, sit vt M I, ad I K, ita E F, ad F G, erunt quoque latera M I, I K, lateribus E F, F G, maiora. Si enim illa his forent æqualia, vel minora, esset quoque M K, vel æquale ipsi E G, vel minus, vt perspicuum est. Productis igitur F E, F G, vt rectæ F O, F N, æquales sint rectis I M, I K, & completo parallelogrammo O N; erit hoc simile similiterq; positũ ipsi E G, cũ sit æquale ipsi M K, & simile, similiterq; positum. [h] Quare O N, E G circa eandem diametrũ consistet, quæ sit F P. Productis iam A B, G B, ad Q R, & P O, donec cum A S, ipsi F O, parallela conueniat in S, erit parallelogrammũ A P, applicatũ ad rectã A B, exceedens

e 18. sexti.
f 14. secundi.
g 25. sexti.
h 26. sexti.

a 24. sexti. parallelogrammo Q R, [a] quod simile est ipsi E G, ac propterea ipsi D. Dico igitur A P, æquale esse b 36. primi. rectilineo C. [b] Nam cùm A O, E R, sint æqualia, [c] & E R, æquale complemento B N; erit & A O, c 43. primi. ipsi B N, æquale. Addito ergo communi O Q, fiet A P, æquale gnomoni E P G. Atqui gnomon E P G, æqualis est rectilineo C. (Nam cùm M K, hoc est, O N, æquale sit rectilineo C, vnà cũ E G; si auferatur commune E G, remanebunt æqualia gnomon E P G, & rectilineum C.) Igitur & A P, æquale erit rectilineo C. Ad datam ergo rectam A B, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum applicatum est A P, excedens parallelogrammo R Q, quod simile est alteri dato D. Quod faciendum erat.

## 29. PROBL. 10. PROPOS. 30.

**Propositam** rectam lineam terminatam extrema, ac media ratione secare.




Sit recta A B, secanda extrema ac media ratione. Descripto super d 29. sexti. eam quadrato A B C D; [d] ad latus D A, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato A C, & excedens parallelogrammo A F, simili ipsi quadrato, ita vt sit A F, quoq; quadratum, cum quadrato solum quadratum sit simile. Secet autem recta E F, rectam A B, in H. Dico A B, in H, sectam esse extrema ac media ratione. Cùm enim æqualia sint D F, & A C; si dematur cõmune A E, remanebunt æqualia G H, H C; e 14. sexti. quæ cũ habeant angulos æquales A H F, B H E, vtpote rectos; [e] erunt latera circa illos reciproca; hoc est, erit vt E H, hoc est, vt A B, ipsi E H, æqualis, ad H E, hoc est, ad A H, ipsi H F, æqualem, vt A H, ad H B. Quare cùm sit, vt tota A B, ad segmentum A H, ita segmentum A H, ad segmentum H B, secta est A B, extrema ac media ratione, per definitionem. Propositam ergo rectam lineam terminatam, &c. Quod erat faciendum.

Aliter quoq; ostendemus A B, esse sectam in H, extrema ac media ratione. Cùm tres lineæ dentur A B, A H, H B, sitq; rectangulum H C, comprehensum sub prima A B, & tertia H B, æquale quadrato f 17. sexti. mediæ A H; [f] erunt ipsæ proportionales: vt A B, quidem prima ad A H, secundam, ita A H, secunda ad H B, tertiam. Quare per definitionem secta est A B, in H, extrema ac media ratione.


g 11. secundi. Aliter totum problema conficiemus. [g] Diuidatur A B, in C, ita vt rectangulum sub tota A B, & segmento C B, æquale sit quadrato alterius segmenti A C. Dico A B, in C, esse sectam extrema ac media h 17. sexti. ratione. [h] Erunt enim rursus, vt prius, tres lineæ A B, A C, C B, continuè proportionales. Constat ergo propositum.

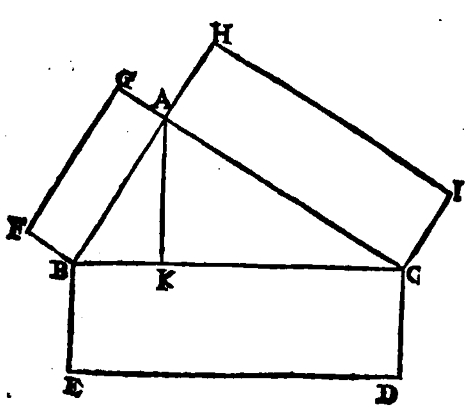
### SCHOLIVM.

*Praxis diuisionis lineæ rectæ extrema ac media ratione instituenda est, vt ad propositionem 11. lib. 2. tradidimus.*

*Habet autẽ admiranda hæc sectio lineæ extrema ac media ratione insignes vtilitates proprietatesq́; vt in libris Stereometriæ manifestum erit, vt non sine causa à plerisque Mathematicis linea ita diuisa diuinam quodammodo, ob admirabilem eius vim, ac naturam, dicatur habere proportionem: Ab alijs verò simpliciter vocetur diuisa proportionaliter.*

## 31. THEOR. 21. PROPOS. 31.

**In** rectangulis triangulis, figura quæuis à latere rectum angulum subtendente descripta, æqualis est figuris, quæ priori illi similes, & similiter positæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.




Triangvlvm rectangulum sit A B C, habens angulum B A C, rectum; describaturq́ue super B C; i 18. sexti. quæcunque figura rectilinea B C D E, [i] cui similes similiterq́ue positæ super A B, A C, constituantur A B F G, A C I H. Dico figuram B D, æqualem esse duabus figuris A F, A I. Demissa enim ex A, ad B C, perpendiculari A K; erit per coroll. propos. 8. huius lib. vt B C, ad C A, ita C A, ad C K. Quare vt B C, ad C K, prima linea ad tertiam, ita figura B D, super primam, ad figuram C H, super secundam, similem similiterq́ue positam, per corollarium propos. 19. vel 20. huius lib. & conuertendo vt C K, ad B C, ita figura C H, ad figuram B D. Non secus ostendetur, esse quoque vt B K, ad B C, ita figuram B G, ad figuram B D; cùm tres lineæ B C, B A, B K, sint quoq; proportionales, &c. Quoniam igitur est vt C K, prima

prima quantitas ad B C, secundam, ita C H, tertia ad B D, quartam; Item vt B K, quinta quantitas ad B C, secundam, ita B G, sexta ad B D, quartam; [a] erit vt prima C K, cum quinta B K, ad B C, secundam, ita tertia C H, cum sexta B G, ad B D, quartam: Sunt autem prima C K, & quinta B K, simul æquales secundæ B C. Igitur tertia C H, & sexta B G, simul æquales quoque erunt quartæ B D. Quod est propositum. a 24. quinti.

ALITER. [b] Cum triangulo A B C, simile sit triangulum K A C, sintque homologa latera ipsorum B C, C A; (Nam est vt B C, ad C A, in triangulo A B C, ita C A, ad C K, in triangulo K A C,) [c] habebit triangulum K A C, ad triangulum A B C, duplicatam proportionem eius, quam habet C A, ad B C. [d] Habet autem & figura C H, ad figuram B D, proportionem duplicatam proportionis C A, ad B C. [e] Quare erit vt triangulum K A C, ad triangulum A B C, ita figura C H, ad figuram B D. Eadem ratione ostendetur esse, vt triangulum K B A, ad triangulum A B C, ita figuram B G, ad figuram B D. Quoniam ergo rursus est, vt K A C, prima quantitas ad A B C, secundam, ita C H, tertia ad B D, quartam; Item, vt K B A, quinta ad A B C, secundam, ita B G, sexta ad B D, quartam; [f] erit & prima K A C, composita cum quinta K B A, ad secundam A B C, vt composita tertia C H, cum sexta B G, ad quartam B D: Sunt autem K A C, K B A, prima & quinta simul æquales secundæ A B C. Igitur C H, B G, tertia & sexta simul, æquales quoque erunt quartæ B D. Quod est propositum. b 8. sexti. c 19. sexti. d 19. vel 20. sexti. e 11. quinti. f 24. quinti.

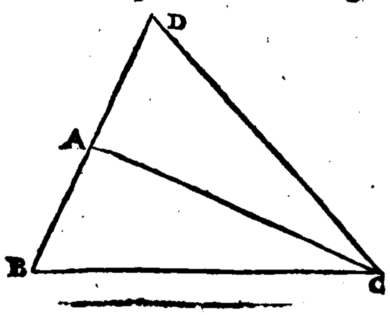
ALITER. Vt quadratum rectæ A C, prima quantitas, ad quadratũ rectæ B C, secundam quantitatem, ita est figura C H, tertia quantitas ad figuram B D, quartam quantitatem; [g] cum vtraque proportio sit duplicata proportionis A C, ad B C. Similiter erit, vt quadratum rectæ A B, quinta quantitas, ad quadratum rectæ B C, secundam quantitatem, ita figura B G, sexta quantitas, ad figuram B D, quartam quantitatem. [h] Quocirca erit, vt prima quantitas cum quinta, nimirũ quadratum rectæ A C, cum quadrato rectæ A B, ad secundam, hoc est, ad quadratũ rectæ B C, ita tertia quantitas cum sexta, nimirum figura C H, cum figura B G, ad quartam, videlicet ad figuram B D: [i] Sunt autem quadrata rectarum A C, A B, simul æqualia quadrato rectæ B C. Igitur & figuræ C H, B G, figuræ B D, æquales erunt. Quod est propositum. In rectangulis igitur triangulis, figura quæuis, &c. Quod erat ostendendum. g 19. vel 20. sexti. h 24. quinti. i 47. primi.

*SCHOLIVM.*

*VIDES igitur, longè esse vniuersalius theorema hoc Euclidis, quod sese ad omnes figuras similes similiterq́; descriptas extendit, quàm illud Pythagoræ inuentum, quod sola quadrata includit, vt propos. 47. primi lib. monuimus. Videtur tamen & theorema illud, quod ibi ex Pappo demonstrauimus, aliqua ex parte adhuc esse vniuersalius, quàm hoc, cum illud de omni triangulo, parallelogrammisq́; etiam non similibus; Hoc verò de triangulo tantummodo rectangulo, figurisq́; similibus, & similiter positis, proponatur.*

*CONVERTEMVS etiam theorema hoc ex Campano non aliter, quàm 47. propositionem primi lib. in hunc modum.*

SI figura, quæ ab vno laterum trianguli describitur, æqualis sit eis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, figuris similibus similiterque positis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.

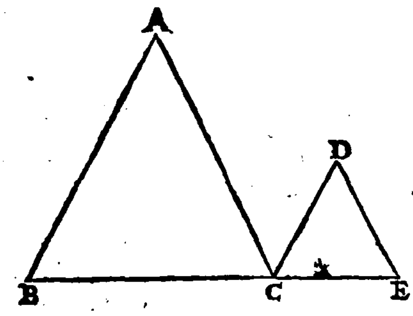



*DETVR triangulum A B C, sitq́; figura quæuis super latus B C, descripta æqualis duabus figuris sibi similibus similiterq́; descriptis super reliqua latera A B, A C. Dico angulum B A C, esse rectum. Ducatur enim A D, ad A C, perpendicularis, quæ sit ipsi A B, æqualis, & connectatur recta C D. Quoniam igitur angulus C A D, rectus est, [a] erit figura super C D, (quæ similis sit ei, quæ super B C, similiterq́; posita) descripta æqualis figuris super A D, A C, descriptis, quæ ei similes sint, similiterq́; posita: Est autẽ figura super A D, æqualis figuræ super A B, ob æqualitatem laterum. Igitur figura super C D, æqualis erit figuris super A B, A C. Cum igitur figura super B C, eisdem figuris super A B, A C, æqualis ponatur, erunt figuræ super C D, B C, inter se æquales, ac propterea rectæ C D, B C, æquales erunt, vt constat ex lemmate propos. 22. huius lib. Quoniam igitur latera A D, A C, trianguli A D C, æqualia sunt lateribus A B, A C, trianguli A B C; & basis D C, ostensa est quoq; æqualis basi B C; [b] erunt anguli D A C, B A C, æquales. Quare cum D A C, rectus sit, ex constructione, rectus quoque erit B A C. Quod est propositum.* a 31. sexti. b 8. primi.

## THEOR. 22. PROPOS. 32. 30.

SI duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secundum vnum angulum composita fuerint, ita vt homologa eorum latera sint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.

HABEANT triangula A B C, D C E, latera A B, A C, lateribus D C, D E, proportionalia, vt qui-

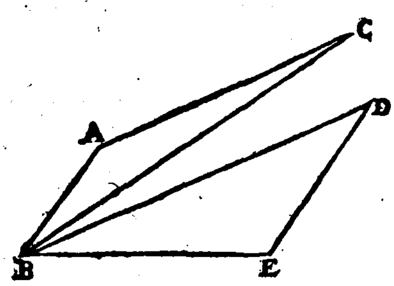



dem AB, ad A C, ita D C, ad D E, componantur que ad angulum A C D, ita vt latera homologa A B, D C: Item A C, D E, inter se sint parallela. Dico duo latera reliqua B C, C E, rectam componere lineam. Cùm enim parallelæ sint AB, D C, [a] erit angulus A, alterno A C D, æqualis: Eademque ratione angulus D, eidem A C D, æqualis erit; ac propterea A, & D, inter se quoque existent æquales. Quoniam igitur triangula A B C, D C E, habent latera circa æquales angulos A, & D, proportionalia; ipsa [b] erunt inter se æquiangula, habebuntque æquales angulos B, & D C E. Additis ergo æqualibus A, & A C D, erunt duo anguli B, & A, duobus angulis D C E, A C D, hoc est, angulo A C E, æquales. Rursus addito cõmuni A C B, fient tres anguli trianguli A B C, duobus angulis A C E, A C B, æquales: [c] Sed illi tres æquales sunt duobus rectis. Ergo & duo A C E, A C B, duobus erunt rectis æquales: [d] Atque idcirco B C, C E, vnam rectam lineam constituent. Itaque si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant. &c. Quod erat demonstrandum.

a 29. primi.
b 6. sexti.
c 32. primi.
d 14. primi.

## *SCHOLIVM.*

*DEBENT autem prædicta duo triangula ita secundum vnum angulum esse composita, vt vterq; angulorum à lateribus proportionalibus comprehensus, alternus sit illi angulo, secundum quem triangula componuntur; veluti in figura theorematis factum esse vides. Nam angulo A C D, secundum quem triangula sunt composita, alternus est tam angulus A, quàm angulus D, quorum vterque lateribus proportionalibus continetur. Hinc enim efficitur, angulos A, & D, esse æquales, & propterea triangula esse æquiangula; atque adeo ex B C, C E, vnam rectam lineam componi, vt ex demonstratione liquet.*

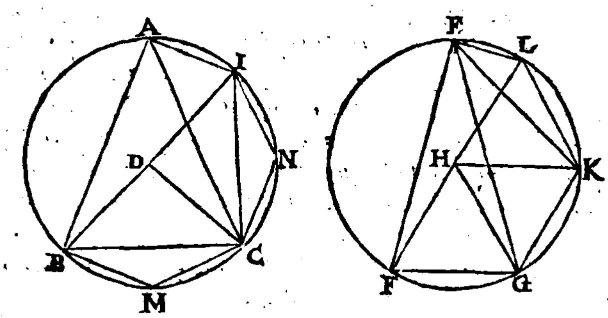



*QVOD si vterque angulorum lateribus proportionalibus comprehensus non fuerit alternus angulo, secundum quem triangula componuntur, licet reliqua hypotheses theorematis seruentur, non colligitur necessario conclusio. Nam duo triangula A B C, D B E, habent duo latera A B, A C, duobus lateribus D E, D B, proportionalia, vt quidem A B, ad A C, ita D E, ad D B, compositaq; sunt ad angulum C B D, ita vt tam homologa latera A B, D E, quàm A C, D B, sint parallela: Nihilominus reliqua duo latera C B, B E, non constituunt vnam lineam rectam, propterea quod angulo C B D, non sit alternus vterque angulorum A, & D, immo neuter eorum, vt perspicuum est. Quamobrem demonstratio theorematis locum non habet.*

# THEOR. 23. PROPOS. 33.

32.

IN æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripheriis, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant: Insuper verò & sectores, quippe qui ad centra consistunt.




SINT duo circuli æquales A B C, E F G, quorum centra D, H; sumanturq; ex circulis duo arcus quicunq; B C, F G, quibus ad centra quidem insistant anguli B D C, F H G; ad circunferentias verò anguli B A C, F E G. Dico esse ex sententia defin. 6. lib. 5. vt arcum B C, ad arcum F G, ita angulum B D C, ad angulum F H G; & angulum B A C, ad angulum F E G; & sectorem insuper B D C, qui rectis B D, D C, & arcu B C, continetur, ad sectorem F H G, quem comprehendunt rectæ F H, H G, & arcus F G. Ductis enim rectis B C, F G, [e] applicentur ipsis in circulis æquales rectæ; C I, quidem ipsi B C: At verò G K, K L, ipsi F G: ducanturque rectæ I D, K H, L H. Quoniam igitur æquales sunt rectæ B C, C I, [f] erunt quoque æquales arcus B C, C I; [g] ac propterea & anguli B D C, C D I, æquales erunt. Eadem ratione æquales erunt & arcus F G, G K, K L, & anguli F H G, G H K, K H L. Quàm multiplex ergo est arcus B C I, ipsius arcus B C, tam multiplex erit angulus B D I, seu aggregatum angulorum prope centrum D, insistentium arcui B C I, anguli B D C: Et quàm multiplex est arcus F G K L, ipsius arcus F G, tam multiplex erit angulus F H L, seu aggregatũ angulorũ prope centrum H, arcui F G K L, insistentium, anguli F H G: quia in tot angulos æquales diuisi sunt anguli B D I, F H L, in quot arcus æquales secti sunt arcus B C I, F G K L. Quoniam verò si arcus B C I, æqualis fuerit arcui

e 1. quarti.
f 28. tertij.
g 27. tertij.

FGKL, a necessariò angulus BDI, angulo FHL, æqualis est; Ac proinde si arcus BCI, maior fuerit arcu FGKL, necessariò angulus BDI, maior est angulo FHL; & si minor, minor: Deficiet propterea vna arcus BCI, & angulus BDI, æquemultiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BDC, ab FGKL, arcu, & angulo FHL, æquemultiplicibus secundæ magnitudinis FG, & quartæ FHG; vel vnà æqualia erunt; vel vnà excedet; si ea sumantur, quæ inter se respondent. b Quare quæ proportio est arcus BC, primæ magnitudinis, ad arcum FG, secundam magnitudinem, ea erit anguli BDC, tertiæ magnitudinis, ad angulum FHG, quartam magnitudinem. Atq; hoc verum etiam est de spatiis in centris: hoc est, ita erit arcus BAC, ad arcum FEG, vt spatium ad centrum D, insistens arcui BAC, ad spatium ad centrum H, insistens arcui FEG: vt ex demonstratione patet. Nam & hæc spatia, si æqualia sunt, insistunt æqualibus arcubus; & si inæqualia, inæqualibus, &c.

a 27. tertij. b 6. definit. quinti.

QVONIAM verò vt angulus BDC, ad angulũ FHG, c ita est angulus BAC, ad angulũ FEG; d cùm illi horum sint dupli; perspicuum est, e ita esse quoque angulum BAC, ad angulum FEG, vt est arcus BC, ad arcum FG. Quod tamen eisdem argumentis demonstrari potest, quibus vsi sumus in angulis ad centra constitutis, si prius ducantur rectæ IA, KE, LE, &c. Quòd si ad circunferentias constituti sint anguli eiusmodi BAC, FEG, vt rectæ ductæ BD, CD; FH, GH, nõ constituant angulos in centris versus arcus BMC, FG; sumenda erunt spatia BDC, FHG, quæ dupla etiam sunt angulorum ad circunferentias, ex scholio propos. 20. lib. 3.

c 15. quinti. d 20. tertij. e 11. quinti.

CONSTITVANTVR iam in segmentis BC, CI, anguli BMC, CNI, f qui æquales erunt, cùm insistant arcubus æqualibus BAC, CBAI. Quare similia erunt segmenta BMC, CNI, g atque adeò inter se æqualia, propterea quòd sunt super rectas BC, CI, æquales. Additis igitur triangulis BDC, CDI, h quæ æqualia quoque sunt, fient sectores BDC, CDI, æquales. Quapropter tam multiplex erit sector BDI, sectoris BDC, quàm est multiplex arcus BCI, ipsius arcus BC. Similiter ostendemus, sectorem FHL, tam multiplicem esse sectoris FHG, quàm multiplex est arcus FGKL, ipsius arcus FG. Quoniam verò si arcus BCI, æqualis fuerit arcui FGKL, sector quoque BDI, sectori FHL, æqualis est; (vt in sectoribus BDC, CDI, ostensum fuit,) & si maior, maior; & si minor, minor: Deficient propterea vna arcus BCI, & sector BDI, æquemultiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BDC, ab arcu FGKL, & sectore FHL, æquemultiplicibus secundæ magnitudinis FG, & quartæ FHG; vel vnà æqualia erunt; vel vnà excedent; si ea sumantur, quæ inter se respondent. i Quamobrem quæ proportio est arcus BC, primę magnitudinis, ad arcum FG, secundam magnitudinem, ea erit sectoris BDC, tertiæ magnitudinis, ad sectorem FHG, quartam magnitudinem. In æqualibus ergo circulis, anguli eandem habent rationem cum peripheriis, &c. Quod demonstrandum erat.

f 27. tertij. g 24. tertij. h 4. primi. i 6. definit. quinti.

COMMODIVS fortasse instituetur demonstratio hoc modo: Sumantur quotuis circuli æquales circulo ABC, atque in singulis sumantur singuli arcus arcui BC, æquales, quibus insistant anguli tam ad centra, quàm ad circunferẽtias. Erunt enim omnes hi anguli æquales angulis BDC, BAC, ob æqualitatem arcuum, quibus insistunt; ac proinde eorum aggregata ita multiplicia erunt angulorum BDC, BAC, vt est multiplex aggregatum omnium arcuum ipsius arcus BC. Deinde sumantur etiam quotuis circuli æquales circulo EFG, & in singulis accipiantur singuli arcus arcui FG, æquales, &c. Hac enim ratione vitabitur confusio linearum, & angulorum in circulis ABC, EFG, quę necessariò oritur, quando arcus BC, FG, sunt magni, & eorum multiplices accipiendi sunt, vt perspicuum est. Nam si arcus essent BCI, FGL, quibus insistunt anguli BDI, FHL, ad centra, & BAI, FEL, ad circunferentias; non poterunt eorum multiplices sumi sine confusione, vt patet. Hæc autem confusio vitatur, si plures circuli æquales adhibeantur, vt diximus.

## COROLLARIVM I.

*HINC manifestum est, sic esse sectorem ad sectorem, vt est angulus ad angulum Vtraque enim proportio eadem est proportioni arcus ad arcum.* a *Quare & inter se eadem erunt.* a 11. quinti.

## COROLLARIVM II.

*PERSPICVVM quoque est, vt est angulus in centro ad quatuor rectos, ita esse arcum subtensum illi angulo ad totam circunferentiam. Et contrà, vt sunt quatuor recti ad angulum in centro, ita esse totam circunferentiam ad arcum illi angulo subtensum.*

*NAM vt est angulus in centro ad angulum rectum in centro,* b *ita est arcus illi angulo subtensus ad quadrantem angulo recto subtensum. Quamobrem erit vt angulus in centro ad quadruplum anguli recti, nempe ad quatuor rectos; ita arcus illi angulo subtensus ad quadruplum quadrantis, nimirum ad totam circunferentiam, per ea, quæ ad 22. propos. lib. 5. demonstrauimus. Quod est primum. Quoniam igitur est, vt angulus in centro ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo subtensus ad totam circunferentiam; erit & conuertendo, vt quatuor recti ad angulum in centro, ita tota circunferentia ad arcum angulo in centro subtensum. Quod est secundum. Verùm hoc etiam ita demonstrabitur.* c *Cùm sit, vt angulus rectus in centro ad angulum in centro, ita quadrans angulo recto subtensus ad arcum illi angulo subtensum; erit quoque, per ea, quæ ad propos. 22. lib. 5. ostẽdimus, vt quadruplum anguli recti, nempe quatuor recti, ad angulum in centro, ita qua-*

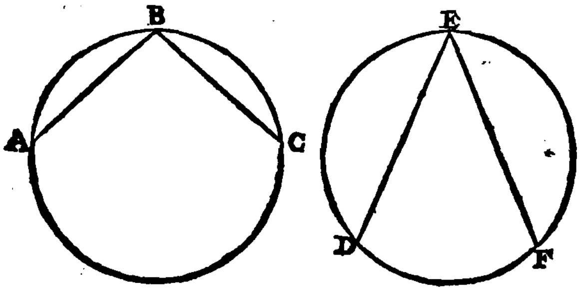
b 33. sexti. c 33. sexti.

druplum quadrantis, nimirum tota circunferentia, ad arcum illi angulo subtensum. Quod est propositum.

IDEM verum est de spatio in centro: hoc est, vt est spatium in centro ad quatuor rectos, ita est arcus subtensus illi spatio ad totam circunferentiam, &c. vt ex demonstratione patet.

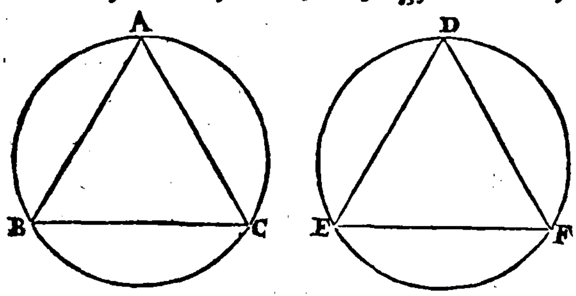
## SCHOLIVM.

CAETERVM ex theoremate hoc luce clarius colligitur, angulum, qui circunferentiæ alicui insistit, referendum esse ad arcum, qui basis est ipsius anguli, non autem ad arcum, in quo existit. Non enim eadem est proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum, si sumantur arcus, in quibus anguli existunt, vt vult Euclides in proposito hoc theoremate. Sint enim circuli æquales A B C, D E F, in quibus anguli ad circunferẽtiam constituti sint B, E; maior quidem B, minor autem E. Quo posito, erit arcus A C, maior arcu D F, ex scholio propos. 26. lib. 3. ac propterea reliquus arcus A B C, minor reliquo arcu D E F. Quare proportio anguli B, ad angulum E, est maioris inæqualitatis; proportio verò arcus A B C, ad arcum D E F, minoris inæqualitatis. Non ergo eadem est proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum. Quòd si sumamus arcus, super quos anguli ascenderũt, quales sunt arcus A C, D F, tum demũ erit angulus B, ad angulum E, vt arcus A C, ad arcum D F, vt rectè demonstrauit Euclides. Quocirca cùm dicimus angulum esse in segmento, aliud intelligere debemus, quàm cùm dicimus, angulum insistere segmento, seu arcui. Id quod in expositione defin. 8. lib. 3. monuimus.



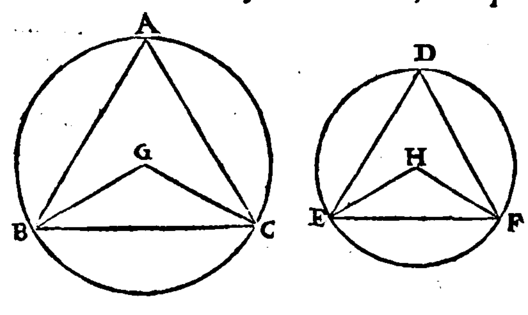

NON obscurè quoq; ex hoc theoremate demonstrari potest, similitudinem segmentorum in circulis similium, quæ Euclides definitione 10. lib. 3. definiuit per angulos æquales in ipsis segmentis existentes, consistere in eo, quòd segmenta, seu circunferentiæ similes, ad integras circunferentias circulorũ eandem habeant proportionem: & propterea quando segmenta totis circulis commensurabilia sunt, qualis pars est vna circunferentia totius suæ circunferentiæ, talis quoq; sit alia circunferentia similis totius suæ circunferentiæ; veluti in expositione prædictæ definitionis docuimus. Sint enim primùm duo circuli æquales A B C, D E F, in quibus anguli ad circunferẽtias constituantur æquales B A C, E D F: Quo posito, segmenta B A C, E D F, iuxta Euclidis definitionem præfatam dicentur similia. Manifestum autem est, eorum circunferentias habere eandem proportionem ad integras circulorum circunferẽtias. Cùm enim ob circulorum æqualitatem, [a] arcus B C, E F, quibus anguli æquales insistunt, sint æquales; efficitur reliquas circunferentias B A C, E D F, esse quoq; æquales. Quare ad totas circunferentias, quæ æquales etiam ponuntur, [b] eandem proportionẽ habebunt: Atq; idcircò, quæ pars est arcus B A C, totius circunferentiæ A B C A, eadem pars erit arcus E D F, totius circunferentiæ D E F D.

a 26. tertij.
b 7. quinti.




SINT deinde duo circuli inæquales A B C, D E F, in quibus anguli ad circunferẽtias constituantur æquales B A C, E D F: Quo posito, dicentur segmenta B A C, E D F, ex Euclidis sententia, similia. Dico rursus arcus B A C, E D F, eandem habere proportionem ad integras suas circunferentias. Ducantur enim ad centra G, H, rectæ B G, C G, E H, F H. Quoniã igitur anguli A, & D, æquales ponuntur, erũt quoq; ad centra anguli G, & H, æquales, [c] cũ hi illorum dupli existant: Vel erunt spatia ad centra, æqualia, cùm hæc quoq; sint angulorum ad circunferentias dupla, ex scholio propos. 20. lib. 3. [d] Quare quatuor recti ad angulum, vel spatium G, eandem habebũt rationem, quam ad angulum, vel spatium H. Atqui vt quatuor recti ad angulum, vel spatium G, ita est tota circunferentia A B C A, ad arcum B C: Et vt quatuor recti ad angulum, vel spatium A, ita est tota circunferentia D E F D, ad arcum E F, ex corollario 2. huius proposit. 33. [e] Igitur vt tota circunferentia A B C A, ad arcum B C, ita erit tota circunferentia D E F D, ad arcum E F. Per conuersionem ergo rationis erit quoque, vt tota circunferentia A B C A, ad arcum B A C, ita tota circunferentia D E F D, ad arcum E D F. Et conuertendo, vt arcus B A C, ad totam circunferentiam A B C A; ita arcus E D F, ad totam circunferentiam D E F D. Quocirca quæ pars est arcus B A C, totius circunferentiæ A B C A, eadem pars erit arcus E D F, totius circunferentiæ D E F D. Quod est propositum.

c 20. tertij
d 7. quinti.
e 11. quinti.

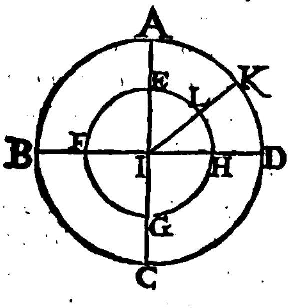



CONSTAT

CONSTAT igitur rectè Euclidem vocasse ea circulorum segmenta similia, in quibus anguli existentes inter se sunt aequales: quandoquidē huiusmodi segmenta eandē habent proportionē ad circulos suos integros.

FACILE ex his demonstrabitur, theorema illud, quod ad calcem cap. 1. in sphaera, & ad propos. 22. lib. 3. sine proportionibus ostendimus, videlicet:

SI duo aut plures circuli ex eodem centro describantur, atque ex centro duę aut plures rectæ lineæ ducantur; erunt arcus inter quascunque duas lineas intercepti similes.




SINT duo circuli A B C D, E F G H, circa idem centrū I, descripti. Si igitur egrediantur è centro I, duae rectae I B, I D, efficientes vnam lineam rectam B D, manifestum est, arcus B A D, F E H, similes esse, cū sint semicirculi. Rursus si ex I, egrediantur duae rectae I A, I D, constituentes angulum rectū A I D, perspicuum quoq; est, arcus A D, E H, similes esse, cùm ex scholio propos. 27. lib. 3. sint Quadrantes suorum circulorum.

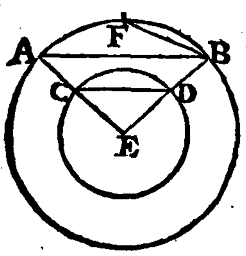
EMITTANTVR iam ex I, duae rectae I D, I K, faciētes quemcunq; angulum nō rectum D I K. Dico adhuc arcus D K, H L, similes esse, hoc est, ita esse arcum D K, ad totam circunferentiam A B C D, vt est arcus H L, ad totam circunferentiam E F G H. Quoniā enim vt angulus D I K, ad quatuor rectos, ita est ex coroll. 2. huius propos. tam arcus D K, ad totam circunferentiam A B C D, quàm arcus H L, ad totam circunferentiam E F G H; [a] erit vt arcus D K, ad totam circunferentiam A B C D, ita arcus H L, ad totam circunferentiam E F G H: ac proinde arcus D K, H L, similes erunt. Quod est propositum. a 11. quinti.

BREVIVS idem confirmabitur hoc modo: Quoniam arcubus D K, H L, insistunt in centro I, anguli aequales, immò idem; erunt ex scholio propos. 22. lib. 3. arcus D K, H L, similes: ac proinde ad totas circunferentias eandem proportionem habebunt, vt paulò antè ostensum est.

EADEM ratione ostendemus arcus B A K, F E L, similes esse, id est, habere ad totas circunferentias eandem proportionem.

SED placet etiam hìc demonstrare lemma, quod ad propos. 6. lib. 3. Theodosii proposuimus, cùm ad multa alia conducat. Illud autem est eiusmodi.

AEQVALES rectæ lineæ ex circulis inæqualibus auferunt arcus inæquales, maiorq; est arcus minoris circuli, quàm vt similis sit arcui circuli maioris.

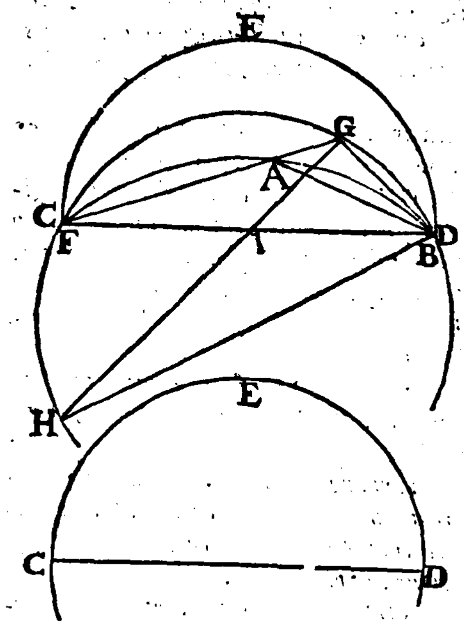



SINT circuli inaequales A B, C D, circa idem centrū E, descripti. Ducantur autē ex E, duae rectae vtcunq; E A, E B, secantes circulos in A, B, & C, D, punctis; eruntq; arcus A B, C D, similes, vt proximè demonstrauimus. Et quoniam rectae E A, E B, sectae sunt in C, D, proportionaliter, quòd tam E A, E B, q̃ E C, E D, inter se aequales sint: [b] erūt ductae rectae A B, C D, parallelae; atq; ideò triangula E A B, E C D, ex coroll. propos. 4. huius lib. similia erunt. [c] Erit igitur vt E A, ad A B, ita E C, ad C D. Est autem E A, maior q̃ E C. [d] Igitur & A B, maior erit, q̃ C D. Accommodetur ergo ipsi C D, in circulo A B, aequalis B F; eritq; ex scholio propos. 28. lib. 3. arcus A B, maior arcu F B. Quare cū arcus C D, arcui A B, similis sit; erit arcus C D, maior, quàm vt similis sit ipsi F B. Aequales igitur rectae C D, B F, ex circulis inaequalibus A B, C D, arcus inaequales auferunt, maiorq; est arcus C D, circuli minoris, quàm vt similis sit arcui F B, circuli maioris. Quod est propositum. b 2. sexti. c 4. sexti. d 14. quinti.

HINC perspicuum est, multò magis minorē lineam ex circulo minore auferre arcum maiorem, q̃ vt similis sit ei, quem ex circulo maiore aufert linea minor. Cùm enim recta C D, aequalis ipsi B F, auferat arcū C D, maiorem, quàm vt similis sit arcui F B, multò magis linea maior, quàm C D, auferet maiorem arcum, quàm vt similis sit arcui F B; cùm illa maiorem arcum abscindat, q̃ C D, vt in scholio propos. 28. lib. 3. ostendimus.

HAEC autē demonstratio propositum tantùm colligit, quando arcus abscissi sunt semicirculo minores, quales sunt B F, C D; vt ex ipsa demonstratione constat. Nam aliàs non constitueretur angulus in E, centro communi: quod tamen ad demonstrationem requiritur. Verùm nihilominus erit, si arcus semicirculo minor circuli minoris maior est, quàm vt similis sit arcui semicirculo minori circuli maioris, multò maiorem esse arcum semicirculo maiorem circuli minoris, quàm vt similis sit arcui semicirculo minori circuli maioris. Quòd si quando contingat, rectam C D, ex minori circulo auferre semicirculum, vt quando est diameter circuli; liquidò constat, semicirculum minoris circuli maiorem esse, quàm vt similis sit arcui semicirculo minori circuli maioris; neq; opus tunc erit alia demonstratione.

HINC etiam nullo negotio ostendemus, aequales rectas lineas ex circulis inaequalibus auferre arcus simpliciter, et absolutè inaequales, ita vt arcus minoris circuli simpliciter maior sit arcu circuli maioris; & nō solùm maior, q̃ vt similis sit. Sint enim rectae lineae C D, B F, aequales, auferatq; C D, arcum minoris circuli C E D, & F B, arcum circuli maioris F G B. Dico simpliciter arcū C E D, maiorē esse arcu F G B. Congruente enim recta C D, rectae F B, cadet necessariò arcus C E D, extra arcum F G B; atq; idcircò arcus C E D, maior erit arcu F G B; cū ille hunc totū intra se contineat, sintq; ambo arcus in eandem partē caui, atq; eadem extrema puncta habeant, vt vult Archimedes in suppositionibus antè lib. 1. de Sphaera & cylindro. Neq; verò arcus C E D,



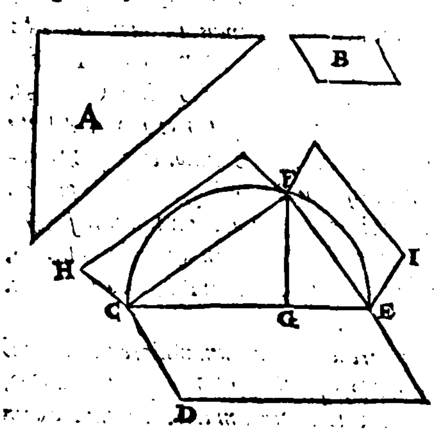

arcui F G B, congruet, aut intra ipsum cadet. Nam si dicatur congruere, congruet etiã tota circunferentia circuli C E D, toti circunferẽtiæ circuli F G B, atq; adeò æquales erunt circuli. quod est absurdum, cũ inæquales ponantur. Si verò arcus C E D, dicatur cadere intra arcũ F G B, cuiusmodi est arcus C A D; quoniam, vt paulò antè ostẽdimus, arcus C E D, id est, C A D, maior est, q̃ vt similis sit arcui F G B; sumatur arcus B F H, arcui C A D, similis, atq; ideò maior arcu F G B: Assumpto autem in arcu C A D, puncto A, vtcunq;, ducantur rectæ A F, A B, productaq; recta F A, donec arcum F G B, secet in G, ducantur rectæ G H, G B. Itaq; quoniam arcus C A D, H F B, similes sunt; erunt anguli C A D, H G B, in illis segmentis existentes æquales.
a 16. primi. [a] Quia verò angulus C A D, angulo C G B, maior est, externus interno; et angulus C G B, angulo H G B, maior quoq;, totũ parte; erit multò maior angulus C A D, angulo H G B. quod est absurdũ. Ostensus enim est æqualis. Non ergo arcus C E D, cadet intra arcũ F G B: sed neq; ei cõgruit; vt demonstratum est. Cadet ergo extra: atq; ideò maior erit arcus C E D, arcu F G B, vt dictum est. Quod est propositum.

Ex quo liquidò constat, multò magis maiorem lineam ex circulo minore auferre arcum maiorem simpliciter eo, quem minor linea ex circulo maiore abscindit.

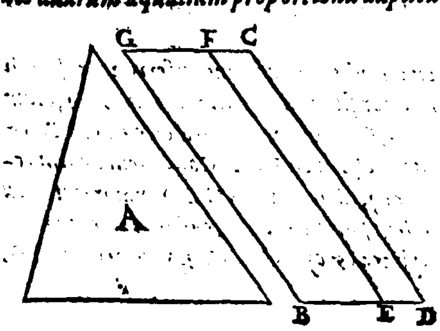
QVONIAM verò Euclides multa dixit de inuentione linearum proportionalium, nihil verò de superficierum, vel planorũ proportionalium inuestigatione nobis præscripsit; non abs re me facturũ existimo si nonnulla problemata, atq; theoremata, quorũ multa circa inuentionem superficierum proportionalium versantur, scitu non iniucunda, loco appendicis, partim ex peritis Geometris, partim ex inuentis proprijs, huic 6. lib. annectam; quippe quæ ex demonstratis ab Euclide facili negotio deducãtur: Hinc autẽ exordium capiemus.

## I.

À DATO rectilineo imperatam partem auferre, ita tamen, vt & ablatum, & id, quod relinquitur, simile sit cuiuis rectilineo dato, similiterque positum.

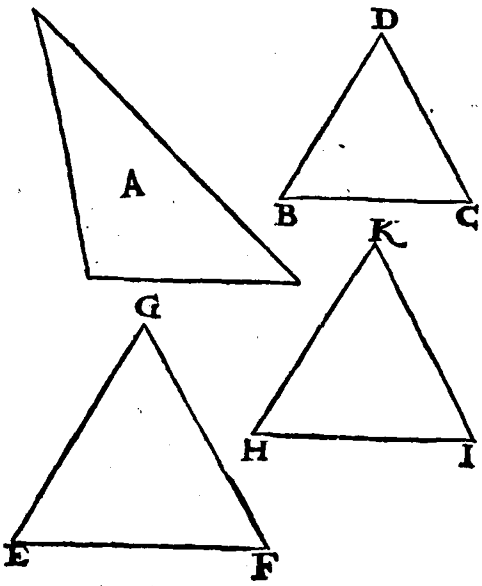



SIT ex rectilineo A, auferenda tertia pars, quæ similis sit similiterq; posita rectilineo B, relinquatq; rectilineũ eidem
b 25. sexti. B, simile, & similiter positũ. [b] Constituatur rectilineũ C D, æquale quidem ipsi A, simile verò, & similiter positũ ipsi B: superq; vnum eius latus C E, semicirculus describatur C F E.
c 9. sexti. [c] Deinde ablata parte tertia G E, imperata videlicet, ex C E, agatur G F, ad C E, perpendicularis, connectanturq; rectæ C F, F E,
d 18. sexti. [d] super quas construantur rectilinea F H, F I, similia similiterq; posita ipsi C D. Dico igitur factum esse, quod iubetur.
e 31. tertij. [e] Cùm enim angulus C F E, rectus sit, quippe qui in semicirculo existat;
f 31. sexti. [f] erit rectilineũ C D, æquale rectilineis H F, F I, atq; adeò, si auferatur rectilineum F I, simile similiterq; positum ipsi B, ex rectilineo C D, hoc est, ex æquali A, relinquetur rectilineũ H F, simile quoq; ipsi B, similiterq; positũ. Quòd autẽ rectilineum ablatum F I, sit tertia pars rectilinei C D, ita ostendetur.
g 4. sexti. [g] Quoniam est vt recta C G, ad G F, ita
h 8. sexti. recta C F, ad F E; [h] quod triangula C G F, C F E, sint similia: Habet autẽ C G, ad G E, proportionẽ duplicatam proportionis C G, ad G F, propterea quod proportionales sunt tres rectæ C G, G F, G E, ex corol. propos. 8. huius li-
i 19. vel 20. sexti. bri. [i] Item rectilineum H F, ad rectilineum F I, proportionẽ quoq; habet duplicatã proportionis laterũ homologorum C F, F E: Erit vt recta C G, ad G E, ita rectilineũ H F, ad rectilineũ F I: quandoquidem hæ proportiones duarum æqualium proportionũ duplicatæ sunt. Componẽdo igitur erit, vt C E, ad G E, ita duo rectilinea H F, F I, simul, hoc est, rectilineum C D, quod est illis æquale, ad rectilineum F I: Est autem C E, ipsius G E, tripla, per constructionem. Igitur & rectilineum C D, triplum erit rectilinei F I: Ac propterea hoc illius tertia pars existet. Quod est propositũ.




QVOD si pars imperata, nempe tertia, simpliciter sit auferenda, fiet id breuissimè, hac arte:
k 45. primi. [k] Rectilineum datũ A, reuocetur ad parallelogrammum G D, æquale; & ex latere B D, auferatur D E, tertia pars imperata: & per E, agatur ipsi B G, parallela E F. Dico D F, tertiam esse partem ipsius D G, hoc est,
l 1. sexti. rectilinei dati A. Cùm enim sit [l] vt D E, ad D B, ita D F, ad D G: Sit

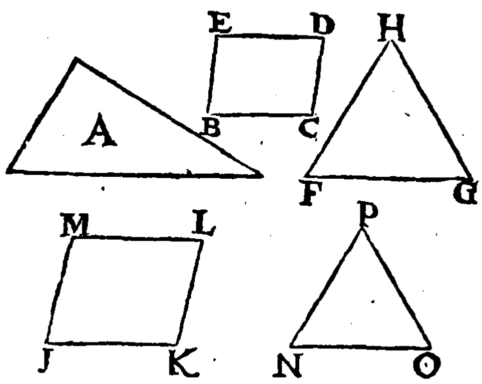
D G: Sit aũt ꝑ constructionẽ D E, ipsius D B, pars tertia; erit & D F, ipsius D G, tertia pars. Quod est propositũ.




## II.

**Dvobvs datis rectilineis tertiũ proportionale inuenire.**

*Sint data duo rectilinea A, & B C D, quibus inueniendum sit tertium proportionale.* [a] *Constituatur ipsi A,* a 25.sexti.
*rectilineum æquale E F G, simile verò similiterq; positum ipsi B C D. Deinde lateribus homologis E F, B C,* [b] *inueniatur tertia linea proportionalis H I;* [c] *super quam con-* b 11.sexti. c 18.sexti.
*stituatur rectilineum H I K, simile similitérque positum ipsis E F G, B C D. Dico H I K, esse tertium proportionale. Cùm enim proportionales sint rectæ E F, B C, H I;*
[d] *erunt & rectilinea E F G, B C D, H I K, ab illis descripta* d 22.sexti.
*(cùm sint similia, similiterq; posita) proportionalia. Cùm ergo E F G, per constructionem, æquale sit ipsi A; erunt & rectilinea A, B C D, H I K, ꝓportionalia. Quod est ꝓpositũ.*



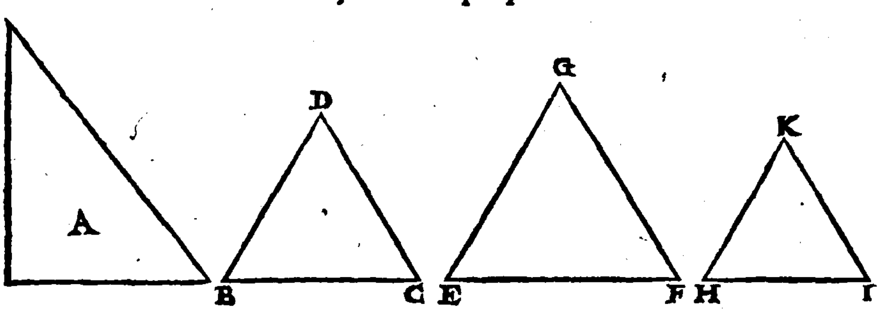

## III.

**Tribvs datis rectilineis, quartũ proportionale inuenire.**

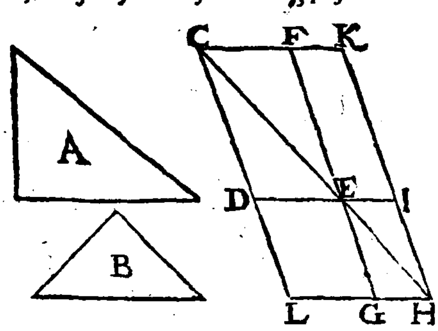
*Tria rectilinea data sint A, B C D E, F G H, quibus* e 25.sexti.
*quartum sit inueniendum proportionale.* [e] *Construatur rectilineum I K L M, æquale quidem ipsi A, simile verò similiterq; positum ipsi B C D E. Tribus deinde rectis I K,*
*B C, F G,* [f] *inuenta quarta proportionali N O;* [g] *consti-* f 12.sexti.
*tuatur super N O, rectilineum N O P, ipsi F G H, simile si-* g 18.sexti.
*militerq; positum. Dico N O P, rectilineum esse quartum proportionale. Cũ enim quatuor rectæ I K, B C, F G, N O,*
*sint proportionales;* [h] *erunt & rectilinea similia similiterq;* h 22.sexti.
*posita ab ipsis descripta I L, B D, F G H, N O P, proportionalia. Cùm igitur I L, constructum sit æquale ipsi A; erunt & quatuor rectilinea A, B D, F G H, N O P, proportionalia. Quod est propositum.*

## IIII.

**Dvobvs datis rectilineis, medium proportionale inuenire.**




*Sint duo rectilinea A, B C D, quibus medium inueniendum est proportionale.* [i] *Con-* i 25.sexti.
*stituatur rectilineũ E F G, æquale ipsi A, et simile similiterq; positum ipsi B C D. Duabus deinde rectis E F, B C,* [k] *inuenta media proportionali H I;* [l] *construatur super H I, rectilineum H I K, simi-* k 13.sexti.
*le similiterq; positum ipsis E F G, B C D. Dico H I K, medium esse proportionale quæsitum. Cùm enim propor-* l 18.sexti.
*tionales sint tres rectæ E F, H I, B C;* [m] *erũt quoq; rectilinea ab ipsis descripta E F H, H I K, B C D, proportio-* m 22.sexti.
*nalia, cùm sint similia similiterq; posita. Cùm ergo E F G, constructum sit, æquale ipsi A; erunt quoq; rectilinea A, H I K, B C D, proportionalia; hoc est, erit vt A, ad H I K, ita H I K, ad B C D: ac proinde H I K, medium proportionale erit inter A, & B C D. Quod est propositum.*



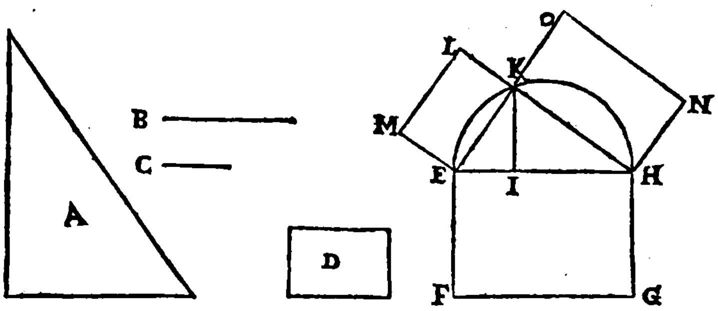

*Aliter. Sit rursus inter rectilinea A, & B, perquirendum mediũ proportionale.* [n] *Constituatur ipsi A, æqua-* n 45.primi.
*le parallelogrammũ quodcunq; C D E F;* [o] *Ipsi verò B, æ-* o 25.sexti.
*quale parallelogrammũ E G H I, simile verò similiterq; positum ipsi C D E F. Connectanturq; hæc parallelogramma ad angulos æquales, vt D E, E I, efficiant vnã lineã rectam, ac propterea ꝑ ea, quæ ad propos. 15. lib. 1. demõstrauimus, vna quoq; linea recta cõponatur ex F E, E G, perficiaturq;*

*totum parallelogrammum K L. Dico vtrumlibet E K, vel E L, mediũ esse proportionale inter D F, G I, hoc est, inter A, & B. Cùm enim similia sint, similiterq; posita D F, G I; erit vt D E, ad E F, ita G H, ad H I; hoc est, ita*
a 34. primi. *E I, ad E G; [a] quòd recta E I, E G, rectis G H, H I, æquales sint. Permutando ergo vt D E, ad E I, ita F E, ad E G:*
b 1. sexti. *[b] Vt autem D E, ad E I, ita est D F, ad E K; & vt F E, ad E G, ita E K, ad G I. Igitur vt D F, ad E K, ita E K, ad G I; ac proinde E K, medium proportionale erit inter D F, G I, hoc est, inter A, & B. Quod est propositum.*

c 26. sexti. QVOD *etiam in hunc modum confirmari potest: Cùm D F, G I, similia sint, similiterq; posita, [c] consistent ea circa eandem diametrum. Quare complementa E K, E L, æqualia erunt. Vt autem D F, ad E K, ita est*
d 1. sexti. *E L, ad G I, [d] quòd vtraque proportio eadem sit proportioni D E, ad E I. Igitur erit, vt D F, ad E K, ita E K, ad G I. Quod est propositum.*

## V.

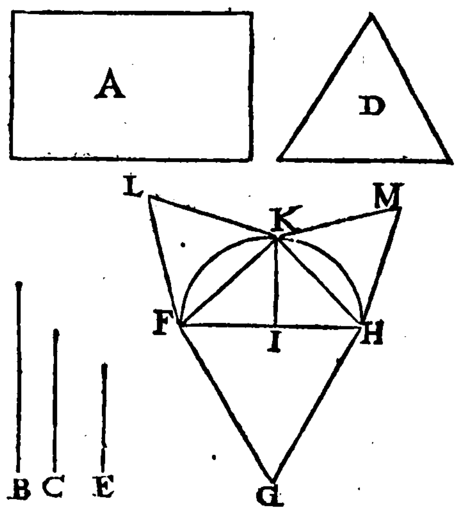
DATO rectilineo duo rectilinea æqualia constituere, quæ similia sint, similiterq; descripta cuicunque rectilineo, habeantq; inter se proportionem propositam quamcunque.




e 25. sexti. *SIT datum rectilineum A, dataq; proportio recta B, ad C, oporteatq; constituere duo rectilinea, quæ ipsi A, æqualia sint, habeantq; proportionem, quam B, & C; ac similia similiterq; posita sint rectilineo cuiuis D. [e] Constituatur rectilineũ E F G H, æquale ipsi A, & simile similiterq; positum ipsi D. Diuiso deinde latere eius E H, in I, secundùm proportionem B, ad C, ex ijs, quæ ad propos. 10. huius lib. demonstrauimus: describatur circa E H, semicirculus E K H. & ex I, ducatur ad E H, perpendicularis I K, connectanturq;*
f 18. sexti. *recta E K, H K. [f] Describantur iam super E K, K H, rectilinea E K L M, K H N O, ipsi E G, vel ipsi D, similia si-*
g 31. tertij. *militerq; posita; quæ dico æqualia etiam esse ipsi E G, seu ipsi A, habereq; proportionẽ datam B, ad C. [g] Cùm*
h 31. sexti. *enim angulus E K H, in semicirculo existens rectus sit, [h] erunt rectilinea E L, H O, æqualia rectilineo E G, cùm*
i 4. sexti. *sint similia inter se, similiterq; descripta. [i] Quoniam verò est, vt E I, ad I K, ita E K, ad K H, cùm triangula E I K, E K H, similia sint; Est autẽ E I, ad I H, in proportione duplicata proportionis E I, ad I K; quòd tres E I,*
k 19. vel 20 sexti. *I K, I H, sint, ex corollario propos. 8. huius lib. proportionales: [k] Item E L, ad H O, in proportione duplicata eius, quam habet latus E K, ad latus homologum K H; erit vt E I, ad I H; hoc est, vt B, ad C, ita E L, ad H O. Dato ergo rectilineo A, exhibuimus duo simul æqualia E L, H O, quæ similia sunt, similiterq; posita, dato rectilineo D, habentq; proportionem inter se datam B, ad C. Quod est propositum.*

## VI.

DATO rectilineo, duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuiuis rectilineo similia sint, similiterque descripta, lateraque eorum homologa habeant inter se proportionem datam.

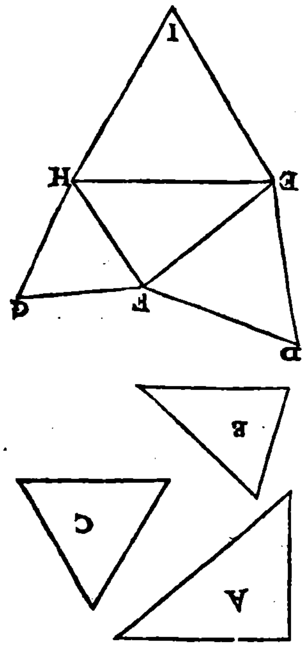



l 11. sexti.
m 25. sexti. *DETVR rectilineũ A, & proportio recta B, ad rectam C; oporteatq; constituere duo rectilinea ipsi A, æqualia, & similia ipsi D, proposito similiterq; posita, quorũ latera homologa proportionẽ habeant, quam B, ad C. [l] Inuẽta ipsis B, C, tertia proportionali E; [m] fiat rectilineũ F G H, æquale ipsi A, & simile similiterq; positũ ipsi D. Diuisoq; latere F H, in I, secundùm proportionẽ B, ad E, vt ad propos. 10. huius libri ostendimus; describatur circa F H, semicirculus F K H; & ex I, ducatur ad F H, perpendicularis I K, connectanturq; recta F K, H K.*
n 18. sexti. *[n] Describantur iam super F K, H K, rectilinea F K L, H K M, ipsi F G H, vel ipsi D, similia similitérque posita. Dico hæc rectilinea æqualia esse ipsi F G H, vel ipsi A, eorumq; latera homologa F K, H K, proportionem habere datam recta B, ad rectam C.*
o 31. tertij. *[o] Cùm enim angulus F K H, in semicirculo rectus sit;*
p 31. sexti. *[p] erunt rectilinea F K L, H K M, rectilineo F G H, ideoq; & rectilineo A, æqualia.*
q 4. sexti. *[q] Quoniã verò est, vt F I, ad I K, ita F K, ad H K, ob similitudinem triangulorũ F I K, F K H: Est autem F I, ad I H, in proportione duplicata proportionis F I, ad I K; (quod tres F I, I K, I H, proportionales sint, ex coroll. propos. 8. huius lib.) ac propterea in proportione duplicata proportionis laterũ homologorũ F K, H K. Item & proportio B, ad E, (æqualis proportioni F I, ad I H, ex constructione,) in duplicata est proportione proportionis B, ad C, ex defin. Igitur eadẽ erit proportio F K, ad H K, quæ B, ad C; quandoquidẽ ipsarũ duplicatæ proportiones F I, ad I H, & B, ad E, æquales sunt. Constat ergo propositũ.*

DVOBVS

VII.

DVOBVS datis rectilineis, æquale rectilineum constituere, quod simile sit, similiterque positum cuius rectilineo dato.

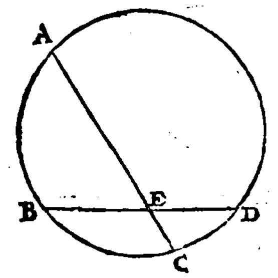


*DVO rectilinea data sint A, & B, quibus æquale sit construendum, simile similiterq; positum ipsi C. [a] Fiat ipsi A, æquale D E F, simile autem similiterq; positum ipsi C. Item ipsi B, æquale constituatur G F H simile vero eidem C, similiterq; positum. Deinde rectilinea D E F, G F H, ita inter se connectantur, vt latera eorum homologa E F, F H, constituant angulum E F H, rectum, cui subtendatur recta E H, [b] super quam describatur rectilineum, I H E, simile similiterq; positũ ipsis D E F, G F H, hoc est, ipsi C. [c] Perspicuum autem est E H I, æquale esse duobus D E F, G F H; atq; idcirco duobus A, & B. Quod est propositum.* a 25. sexti. b 18. sexti. c 31. sexti.

*BREVIVS. Constituatur parallelogrammum æquale duobus rectilineis A, & B, per ea, quæ ad propos. 45. lib. 1. docuimus. [d] Si enim huic parallelogrammo construxerimus æquale rectilineum E H I, quod simile sit, similiterq; positum alteri dato rectilineo C; constitutum erit rectilineum E H I, æquale duobus rectilineis A, B, & simile, similiterq; positum rectilineo C. Quod erat faciendum.* d 25. sexti.

VIII.

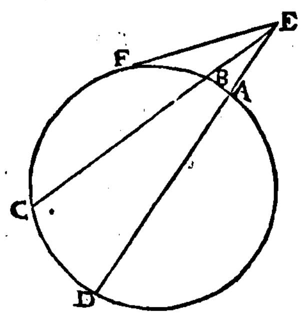
SI in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuò secuerint: Erunt segmenta vnius segmentis alterius reciproca.



*IN circulo A B C D, se mutuò secent rectæ A C, B D, in E. Dico segmenta A E, E C, esse reciproca segmentis B E, E D: Hoc est, esse vt A E, ad B E, ita E D, ad E C: Vel vt A E, ad E D, ita B E, ad E C. [e] Cùm enim rectangulum sub A E, E C, comprehensum æquale sit rectangulo sub B E, E D, contento; [f] erunt latera circa æquales angulos reciproca. Quod est propositum.* e 35. tertij. f 14. sexti.

IX.

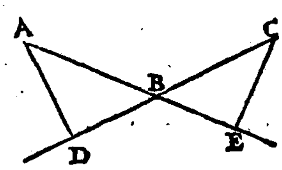
SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ circulum secantes: Erunt totę, & segmenta extra circulum reciproca. Quòd si ab eodem puncto linea ducatur, quæ circulum tangat; Erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectam, quæ circulum secet, & eius segmentum exterius.

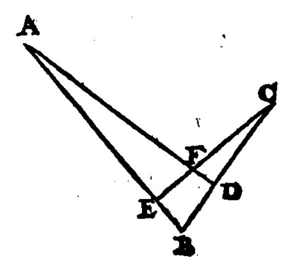


*EXTRA circulum A B C D, sumatur punctum E, à quo cadant rectæ E C, E D, secantes circulum in A, & B. Dico rectas E C, E B, esse reciprocas rectis E D, E A: Hoc est, esse, vt E C, ad E D, ita E A, ad E B: Vel vt E C, ad E A, ita E D, ad E B. Ducta enim E F, tangẽte circulum in F [g] erit rectangulum sub E C, E B, quadrato rectæ E F, æquale: Item rectangulum sub E D, E A, eidem quadrato rectæ E F, æquale. Quare & rectangula sub E C, E B, & sub E D, E A, æqualia erunt: [h] Ac propterea latera eorum circa angulos æquales reciproca. [i] Quoniam autẽ quadrato rectæ E F, æquale est tam rectangulum sub E C, E B, quàm rectangulum sub E D, E A; [k] erunt tam tres rectæ E C, E F, E B, quàm tres E D, E F, E A, proportionales, atque adeò E F, media proportionalis inter quamlibet lineam, quæ circulum secet, & segmentum eius exterius. Quod est propositum.* g 36. tertij. h 14. sexti. i 36. tertij. k 17. sexti.

X.

SI duæ rectæ lineæ sese mutuò secuerint, & à duobus earum terminis perpendiculares sibi mutuò demittantur: erunt duæ lineæ, quarum vna inter vnum terminorum & sectionem, altera verò inter sectionem, & prioris lineę assumptę perpendicularem interiicitur, aliis duabus eodem modo inclusis reciprocæ.

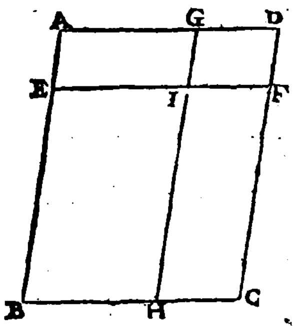




*DVAE rectæ A B, C B, se mutuò secent in B, & ex terminis A, C, ad ipsas demittantur perpendiculares; A D, quidem ad C B, at verò C E, ad A B quæ perpendiculares cadent in A B, C B, protractas vltra B, si angulus A B C, fuerit obtusus: in ipsas verò introrsum si idem angulus acutus fuerit, vt figura indicant. Dico rectas A B, B E, (quarum prior interijcitur inter terminum A, & sectionem B: posterior verò inter sectionem B, & perpendicularem C E, quæ nimirum ad ipsam A B, assumptã ducitur) reciprocas esse duabus C B, B D, (quæ*

*inter similes terminos includuntur) hoc est, esse vt A B, ad B C, ita B D, ad B E: Vel vt A B, ad B D, ita B C, ad B E. Cùm enim anguli A B D, A D B, trianguli A B D, æquales sint angulis C B E, C E B, trianguli C B E.*
a 15. primi. *(Nam A D B, C E B, recti sunt; a & A B D, C B E, ad verticem in priori figura æquales; in posteriori autem*
b 4. sexti. *vnus & idem angulus) erunt triangula A B D, C B E, æquiangula. b Quare erit vt A B, ad B D, ita C B, ad B E: Ac propterea permutando quoque, vt A B, ad B C, ita B D, ad B E. Quod est propositum.*

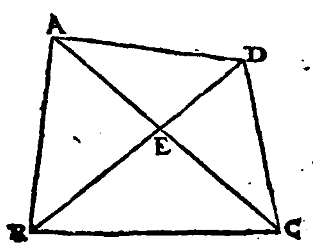
*PORRO eadem ratione segmenta perpendicularium A D, C E, in posteriori figura se mutuò secantium*
c 4. sexti. *in F, erunt reciproca. Cùm enim triangula A F E, C F D, sint æquiangula; c erit vt A F, ad F E, ita C F, ad F D: Et permutando quoque, vt A F, ad C F, ita F E, ad F D. Quod est propositũ.*



## X I.

In parallelogrammo, duæ rectæ lateribus parallelæ se mutuò secantes, diuidunt parallelogrammum in quatuor parallelogramma proportionalia.

*In parallelogrammo A B C D, duæ rectæ E F, G H, lateribus A D, D C, parallelæ se mutuò secent in I. Dico quatuor parallelogramma E G, G F, B I,*
d 1. sexti. *I C, esse proportionalia. d Cùm enim sit, vt E I, ad I F, ita E G, ad G F: Item*
e 11. quinti. *vt E I, ad I F, ita B I, ad I C; e Erit quoque, vt E G, ad G F, ita B I, ad I C. Quod est propositum.*



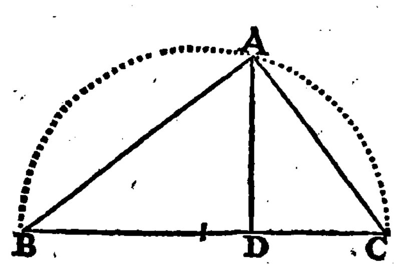
## X I I.

Omne quadrilaterum à duabus diametris se mutuò secantibus diuiditur in quatuor triangula proportionalia.

*DIVIDANT diametri A C, B D, se mutuò secantes in E, quadrilaterum A B C D. Dico quatuor triangula A E D, C E D, A E B, C E B, esse propor*
f 1. sexti. *tionalia. f Erit enim vt A E, ad E C, ita triangulum A E D, ad triangulum*
g 11. quinti. *C E D; & triangulum A E B, ad triangulum C E B. g Quare vt triangulum A E D, ad triangulum C E D, ita triangulum A E B, ad triangulum C E B.*
h 1. sexti. *Eademque ratione ostendes esse, vt B E A, ad D E A, ita B E C, ad D E C; h cùm vtraque proportio eadem sit proportioni B E, ad E D. Constat ergo propositũ.*

## X I I I.

In triangulo rectangulo, in quo perpendicularis ab angulo recto demissa secat basim extrema ac media ratione, tria latera sunt continuè proportionalia. Et si tria latera trianguli rectanguli sunt continuè proportionalia, perpendicularis ad basim ex angulo recto demissa secat basim extrema ac media ratione.



*In rectangulo triãgulo A B C, ex angulo recto A, demissa perpendicularis A D, secet basim B C, in D, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum B D; ac propterea ex theoremate 9. ad propos. 47. lib. 1. latus A B, latere A C, maius. Dico tria latera B C, B A, A C, esse continuè proportionalia. Quoniam enim per hypo-*
i 17. sexti. *thesin est vt B C, ad B D, ita B D, ad D C; i erit quadratũ ex B D, rectangulo sub B C, C D, æquale. Rursus quia ex coroll. propos. 8.*
k 17. sexti. *huius lib. A C, media proportionalis est inter B C, C D; k erit quoque quadratum ex A C, eidem rectangulo sub B C, C D, æquale. Quare quadrata ex B D, A C, æqualia inter se erunt, ac proinde & rectæ ipsæ æquales erunt. Est autem, ex corollario propos. 8. huius lib. A B, inter B C, B D, media proportionalis. Igitur eadem A B, media proportionalis erit inter B C, A C: hoc est, erit vt B C, ad A B, ita A B, ad A C. Quod est propositum.*

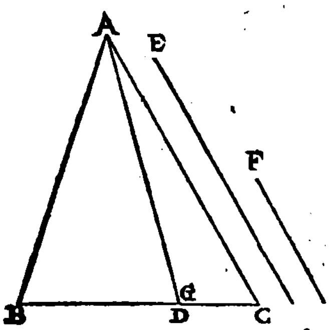
*SINT deinde tria latera B C, A B, A C, in triangulo rectangulo A B C, continuè proportionalia: hoc est, sit B C, ad A B, vt A B, ad A C, demittaturque perpendicularis A D, ad basim B C. Dico B C, sectam esse in D, extrema ac media ratione. Quoniam enim est, vt B C, ad A B, ita A B, ad A C: Est autem vt B C, ad A B, ita*
l 11. quinti. *quoque A B, ad B D; quòd A B, media proportionalis sit inter B C, B D, ex coroll. propos. 8. huius lib. l erit vt*
m 9. quinti. *A B, ad A C, ita A B, ad B D: m ac proinde æquales erunt A C, & B D. n Vt igitur A C, ad C D, ita erit B D, ad C D. Sed vt A C, ad C D, ita est B C, ad A C, quod ex coroll. propos. 8. huius lib. A C sit media proportionalis*
n 7. quinti. *inter B C, & C D. o Igitur erit quoque B C, ad A C, hoc est, ad B D, vt A C, hoc est, vt B D, ad C D: ac propterea*
o 11. quinti. *B C, in D, secta erit extrema ac media ratione. Quod est propositum.*

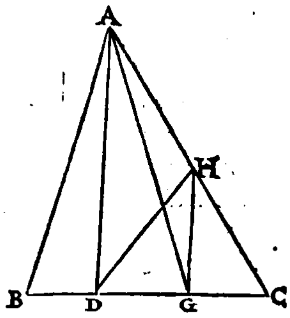
*ITAQVE si super datam rectam B C, construendum sit triangulum rectangulum, cuius tria latera continuè proportionalia sint, secanda erit data recta B C, extrema ac media ratione in D. Descripto deinde semicirculo B A C, circa eandem datam B C, erigenda erit ad B C, perpendicularis D A; iungendæque rectæ B A,*
p 31. tertij. *C A. Triangulum enim A B C, rectangulum erit, p cùm angulus B A C, in semicirculo rectus sit; ac proinde cùm perpendicularis A D, secet basim extrema ac media ratione; tria latera continuè proportionalia erunt, vt proximè demonstratum est.*

A DATO

## XIIII.

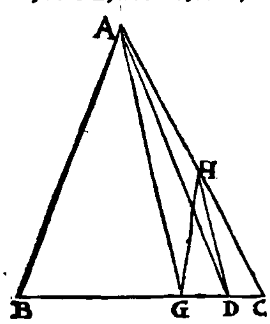
**A DATO puncto in latere trianguli lineam rectam ducere, quæ triangulum diuidat in duo segmenta, secundùm proportionem datam.**




*SIT triangulũ A B C, oporteatq; à dato puncto D in eius latere B C, lineam rectam ducere, quæ triangulum secet in duo segmenta secundùm proportionem datam E, ad F. Diuidatur B C, in G, secundùm proportionem E, ad F, cadatq; primò punctum G, in datum punctum D, vt in prima figura, ducaturq; recta D A. [a] Quoniam igitur est vt B D, ad D C, ita triangulum* a 1.sexti. *B D A, ad triangulum C D A, secabit recta D A, triangulum datum secundùm proportionem datam B G, ad G C, hoc est, E, ad F. Quod erat faciendum.*

*CADAT deinde punctum G, inter C, & D, vt in secunda figura. Ducatur ergo recta D A, cui per G, parallela agatur G H, coniungaturq; recta D H. Dico rectam D H, secare triangulum datum secundùm proportionem datam, hoc est, esse trapezium B D H A, ad triangulum C D H, vt E, ad F, seu vt B G, ad G C. Ducta enim recta G A; [b] erunt triangula H G A, G H D, æqualia, cùm sint super eandem basin G H, & inter easdem parallelas G H, D A.* b 37.primi. *Addito igitur communi triangulo C G H, fient æqualia triangula C G A, C D H: [c] Ac proinde triangulum A B C, eandem habebit proportionem ad C G A, & ad C D H.* c 7. quinti. *[d] Diuidendo igitur, erit vt triangulum B G A, ad triangulum C G A, ita trapezium B D H A, ad triangulum C D H.* d 17. quinti. *[e] Est autem B G A, ad C G A, vt B G, ad G C. Igitur erit & trapezium B D H A, ad triangulum C D H, vt B G, ad G E, hoc est, vt E, ad F. Quod est propositum.* e 1. sexti.

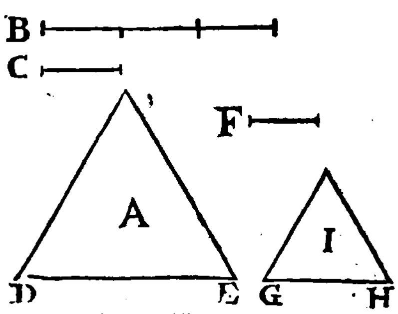



*CADAT tertiò punctum G, inter B, & D, ducaturq; recta D A, cui rursus per G, agatur parallela G H. Dico igitur rursus rectam ductam D H, secare triangulum A B C, secundùm proportionem datam E, ad F, hoc est, esse triangulum B D H, ad trapezium C D H A, vt E, ad F. Ducta enim recta G A; [f] erunt,* f 37 primi. *vt prius, triangula H G A, G H D, æqualia; additoq; communi B G H, æqualia* g 7. quinti. *fient B G A, B D H. [g] Quare erit A B C, ad B G A, vt ad B D H. [h] Diuidendo ergo erit C G A, ad B G A, ita trapezium C D H A, ad triangulum B D H, & conuertendo, vt B G A, ad C G A, ita B D H, ad trapezium C D H A.* h 17. quinti. *[i] Est autem B G A, ad D G A, vt B G, ad G C.* i 1.sexti. *Igitur & B D H, ad trapezium C D H A, erit vt B G, ad G C, hoc est, vt E, ad F. Quod est propositum.*

*HINC perspicuum est, quonam modo imperata pars ex triangulo sit auferenda per lineam rectam, quæ à quouis dato puncto lateris ducatur. Si enim per rectam lineam à dato puncto ductam diuidatur triangulum secundùm proportionem multiplicem, cuius denominator vnitate minor sit denominatore partis imperatæ, (vt secundùm proportionem triplam, si quarta pars imperetur, &c.) factum erit, quod iubetur, vt manifestum est. Habebit enim tunc totum triangulum ad segmentum ablatum proportionem multiplicem, cuius denominator æqualis est denominatori partis propositæ, cum priori denominatori proportionis multiplicis assumptæ addatur vnitas, quæ antè deerat.*

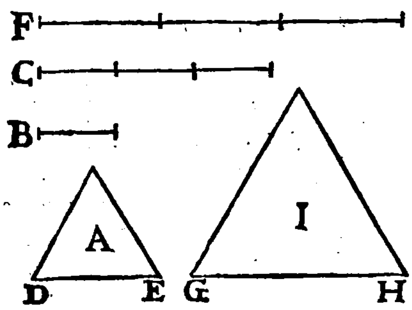
## XV.

**DATO rectilineo simile similiterq; positum rectilineum describere, maius, vel minus, secundùm proportionem datam.**




*SIT rectilineum datum A, cui simile similiterq; positum sit describendum maius, secundùm proportionem datam B, ad C. Tribus rectis B, C, & D E, (sit autem D E, vnum latus rectilinei dati quodcunq; [k]) inueniatur quarta proportionalis F.* k 12. sexti. *Deinde duabus D E, & F, [l] inueniatur media proportionalis G H;* l 13 sexti. *[m] super quam ipsi A, describatur rectilineum I, simile, similiterque positum.* m 18. sexti. *Dico I, maius esse, quàm A, secundùm proportionem datam B, ad C. Cùm enim proportionales sint tres rectæ D E, G H, & F, erit per corollarium propositionis 19. vel 20. libri huius, vt D E, prima ad F, tertiam, hoc est, per constructionem, vt B, ad C, ita rectilineum A, super primam ad rectilineum I, super secundam, illi simile similiterq; positum. Quod erat faciendum.*

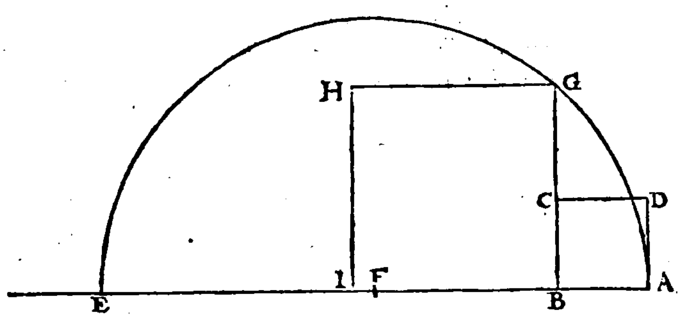
*NON secus dato rectilineo A, minus rectilineum I, describemus, illi simile, similitérque positum, secun-*




dum proportionem datam B, ad C. Veluti in hac figura factum esse cernis. Eadẽ enim prorsus est constructio, atq; demonstratio.

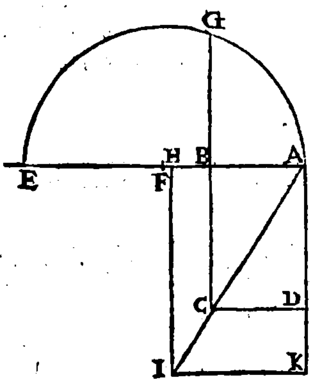
FACILE igitur ex his quadratum quodcunque, vel aliud rectilineum duplicabimus, triplicabimus, quadruplicabimus, &c. Atq; aliud constituemus, quod sit illius dimidium, vel tertia pars, vel quarta, vel quinta, &c. seruata nihilominus semper eadem rectilineorum similitudine, quemadmodum quadratorum eadem remanet similitudo. Si namq; proportio B, ad C, sumatur vt 1. ad 2. vel 1. ad 3. vel 1. ad 4. &c. Item vt 2. ad 1. vel 3. ad 1. vel 4. ad 1. &c. reliqua verò perficiantur, vt prius; habebitur rectilineum simile similiterq; descriptum, quod propositi rectilinei duplum existet, vel triplum, vel quadruplum, &c. Vel quod dimidium erit, vel tertia pars, vel quarta, &c. eius, quod proponitur.

NON videtur autem omittenda praxis Alberti Dureri, qua ipse facilè duplicat, triplicat, quadruplicat, &c. quadratum, seu parallelogrammum quodcunque oblatũ. Ex hac enim construemus quoq; rectilineum simile similiterq; descriptum cuicunque rectilineo dato, maius, aut minus, secundùm datam proportionem quamcunque. Tametsi autem Albertus huius praxis nullam affert rationem, sed eam simpliciter proponit; non multum tamen eius demonstratio à praecedenti differt, vt mox ostendemus.




SIT igitur quadratum ABCD, quintuplicandum. Producto latere A B, ad partes B, quantumlibet, sumatur quinque partes ipsi A B, aequales, à puncto B, incipiendo, vsq; ad E, vt sit B E, quintupla ipsius A B. Diuisa deinde tota A E, bifariam in F, describatur ex F, ad interuallum F A, vel F E, semicirculus A G F, producaturq; latus B C, ad circunferentiam vsque in G. Dico quadratum B G H I, ex B G descriptũ, quintuplum esse quadrati A B-C D. Erit enim per corollarium propos. 13. huius libri B G, media proportionalis inter E B, B A. Igitur erit vt E B, prima ad B A, tertiam, ita B H, quadratum secundae, ad A C, quadratum tertiae, ex corollario propos. 20. huius libri. Est autem E B, per constructionem, ipsius A B, quintupla. Igitur & quadratũ B H, quadrati A C, quintuplum erit. Quod est propositum.

QVOD si recta B E, sumatur sextupla lateris A B, erit & quadratum rectae B G, quadrati A B C D. sextuplum: Si autem B E, fuerit tertia pars ipsius A B, erit & quadratum B H, tertia pars quadrati A C. Denique in quacunque proportione sumatur B F, ad A B, eandem habebit quadratum B H, ad quadratum A C.




SIT rursus rectangulum A B C D, cui inueniendum sit simile similiterque positum, quod duplum sit ipsius. Ex latere A B, producto sumatur B E, dupla ipsius A B. Diuisa deinde tota A E, bifariam in F; & ex F, descripto semicirculo, vt prius, & producta C B, ad G; erit B G, vnum latus rectanguli quaesiti. Quare si abscindatur A H, aequalis ipsi B G, & per H, agatur ipsi B G, parallela H I, occurrens diametro A C, protractae in I, perficiaturq; parallelogrammum H K; [a] erit H K, ipsi B D, simile similiterq; positum: quod etiam aio duplum esse ipsius B D. Cùm enim proportionales sint tres rectae E B, B G, B A, ex corollario propos. 13. huius libri; Erit vt prius, sicut E B, prima ad B A, tertiam, ita rectangulum H K, supra A H, secundam (sumpta enim fuit A H, ipsi B G, secundae aequalis) ad rectangulum B D, supra tertiam A B, quod est simile similiterq; descriptum. Quod est propositum.

a 24. sexti.

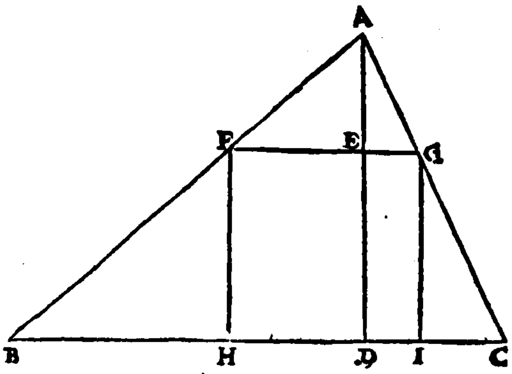
EODEM modo, si supra A B, constitutum fuerit quodcunque rectilineum, erit quod ex B G, illi simile, similiterq; positum describitur, ipsius duplum. Atq; in hunc modum semper eam proportionem habebit rectilineum ex B G, ad rectilineum simile ex A B, quam habere ponetur recta E B, ad rectam B A, ex constructione.

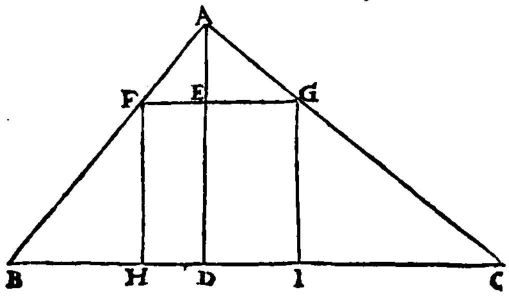
PERSPICVVM autem est, hanc praxim vnà cum eius demonstratione à nostra anteà tradita nõ differre, nisi quòd haec simul tradit inuentionẽ lineae mediae proportionalis. Hanc enim ob causam Albertus coniungit in rectum, & continuum lineas E B, B A, quae proportionem habent datam, vt statim, vna operatione, mediam proportionalem obtineat, &c.

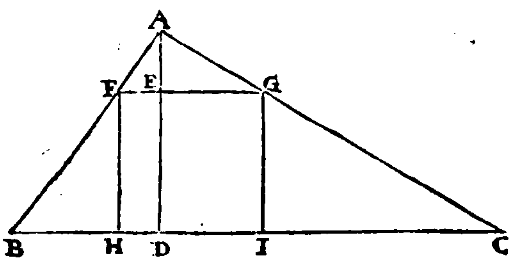
## XVI.

IN dato triangulo quocunque quadratum describere.

SIT



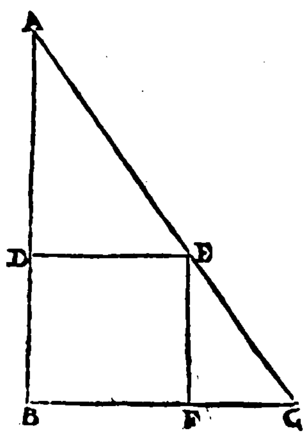




*Sit datũ triangulum A B C, acutangulum. Ex angulo quocunque A, ad B C, perpendicularis demittatur A D, quæ intra triangulum cadet, ex scholio propoſ. 13. libri 2. Hæc autem in E, ita ſecetur per ea, quæ in ſcholio propoſ. 10. huius libri docuimus, vt eadem ſit proportio A E, ad E D, quæ A D, ad B C. Deinde per E, agatur F G, ipſi B C, parallela. Poſtremò ex F, & G ipſi D E paralleIæ ducantur F H, G I. Dico F G I H, rectilineum triangulo A B C, inſcriptum, eſſe quadratũ. Cùm enim F G ipſi B C, ſit parallela; erit vt B D, ad D C, ita F E, ad E G, ex ſcholio propoſit. 4. huius lib. & componendo, vt B C, ad D C, ita F G, ad E G. [a] Sed vt D C, ad A D, ita eſt E G, ad A E; quòd per coroll. propoſ. 4. huius lib. triangula A D C, A E G ſint ſimilia. [b] Igitur erit ex æquo, vt B C, ad A D, ita F G, ad A E. Quia verò per conſtructionẽ eſt, vt A D, ad B C, ita A E, ad E D; [c] erit rurſus ex æquo, vt B C, ad B C, ita F G, ad E D: Eſt autẽ B C ipſi B C, æqualis, immò eadẽ. Aequalis igitur eſt & F G, ipſi E D. [d] Quare cũ F G, ipſi H I; & E D, ipſis F H, G I, æqualis exiſtat, Erunt quatuor latera F G, G I, I H, H F, æqualia inter ſe. [e] Et quia anguli E D H, F H D, duobus rectis æquales ſunt: Eſt autem E D H per conſtructionem, rectus; erit & F H D, rectus. Quocirca per ea, quæ ad defin. 1. lib. 2. demonſtrauimus, & reliqui anguli H F G, F G I, G I H, recti ſunt in parallelogrammo F G I H; Ac propterea F I, quadratum eſt. Quod eſt propoſitum.*

a 4. ſexti.
b 22. quinti.
c 22. quinti.
d 34. primi.
e 29. primi.

*Non ſecus idem problema abſoluemus, ſi datũ triangulum fuerit rectangulum, vel obtuſangulum, dummodo ex angulo recto, vel obtuſo perpendicularem demittamus, vt in poſterioribus duobus triangulis apparet. Ita enim ſemper cadet perpendicularis A D, intra triangulum, ex ſcholio propoſitionis 13. lib. 2.*



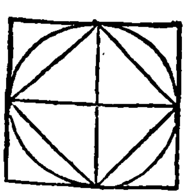

*Quod ſi in triangulo rectangulo quadratum deſcribere libeat, ita vt duo eius latera duobus trianguli lateribus circa angulum rectum nitantur; diuidemus perpendicularẽ A B, in D, ita vt eadem ſit proportio A D. ad D B, quæ A B, ad B C, & per D, quidem ipſi B C, parallelam ducemus D E; per E, verò ipſi A B, aliam parallelam E F. [f] Quoniam igitur eſt, vt B C, ad A B, ita D E, ad A D; quòd triangula A B C, A D E, ſimilia ſint, per coroll. propoſ. 4. huius libri. Eſt autem per conſtructionem, vt A B, ad B C, ita A D, ad D B, [g] erit ex æquo, vt B C, ad B C, ita D E, ad D B: Eſt autem B C, ſibi ipſi æqualis, immò eadem. Aequalis igitur eſt & D E, ipſi D B. Quare vt prius, D E F B, quadratum eſt. Quod eſt propoſitum.*

f 4. ſexti.
g 22. quinti.

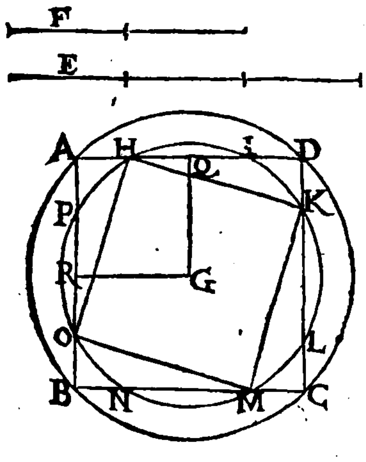
*Verum hoc problemate Commandini multò ingenioſius eſt id, quod ſequitur.*

## XVII.

Intra datum quadratum, aliud quadratum deſcribere in data proportione maioris inæqualitatis. Oportet autem datam proportionem dupla non eſſe maiorem.



*Sit quadratum A B C D, intra quod deſcribẽdum ſit quadratum, ad quod habeat quadratum A B C D, proportionem eandem maioris inæqualitatis, quàm recta E, ad rectam F, quæcunque ea ſit, dummodo maior non ſit, quàm dupla. Nam ſi latera quadrati ſecentur bifariam, punctaq; diuiſionum rectis iungantur lineis, inſcriptum erit quadratum intra aliud, vt ad finẽ libri 4. demõſtrauimus, idem cum eo centrum habens. Et quia circulus intra quadratum A B C D, deſcriptus eſt quadrato illi inſcripto circumſcriptus, vt in hac figura perſpicuum eſt, erit quadratum A B C D, illius quadrati inſcripti duplum, ex ſcholio propoſ. 9. lib. 4. Cùm ergo minus quadratum intra quadratum A B C D, deſcribi nequeat, quàm illud, cuius circulus circumſcriptus latera quadrati A B C D, tangit, vt patet: liquidò conſtat, quadratum A B C D, ad nullum quadratum inſcriptum proportionem poſſe habere dupla maiorem. Sit igitur data proportio E, ad F, minor quàm dupla; nimirum ſeſquialtera. Inueniatur ex propoſ. 15. huius ſcholij*

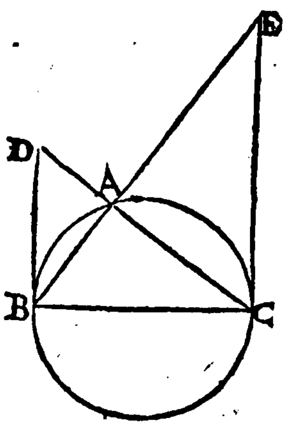



*quadratum, ad quod habeat datum quadratum A B C D, proportionem datam E, ad F. Eritq́ eius semidiameter maior, quàm semidiameter quadrati, cuius circulus circumscriptus latera quadrati A B C D, tangit; quod nimirum quadrati A B C D, subduplum est, vt diximus, minor verò semidiametro quadrati A B C D. Igitur si ex centro G, quadrati dati describatur circulus æqualis ei, qui circa inuentum quadratum describitur, secabit is latera quadrati A B C D, in punctis H, I, K, L, M, N, O, P. Iungantur rectæ H K, K M, M O, O H, relictis quatuor punctis I, L, N, P, in medio. Dico H K, M O, esse quadratum in circulo H I K L M N O P, descriptum, atq́ adeò æquale ei, quod inuentum est, ita vt quadratum A B C D, ad quadratum H K M O, habeat datam proportionem E, ad F. Descripto enim circulo circa datum quadratum A B C D, ex centro G, ductisq́ ex G, ad latera A D, A B, perpendicularibus G Q, G R, [a] secta erunt tam rectæ A D, A B, quàm rectæ H I, O P, bifariam in Q, R. Et quia A D, A B, æquales sunt, [b] æqualiter distabunt à centro G, proptereaq́ & H I, O P, æqualiter ab eodem centro distabunt. [c] Quare æquales erunt H I, O P, ideoq́ & earum semisses Q H, Q I, R O, R P, inter se erunt æquales. Sunt autẽ & semisses Q A, Q D, R A, R B, æqualium laterum æquales. Igitur si illæ ab his demantur, reliquæ erunt æquales H A, D I, P A, O B. Eademq́ ratione, si ducantur aliæ perpendiculares ad latera B C, C D, ostendentur æquales N B, M C, L C, K D, & inter se, & illis quatuor H A, D I, P A, O B. Item quia æquales sunt H I, O P, si addantur æquales I D, P A, fient tota æquales H D, A O: Atq́ eadem de causa æquales erunt B M, K C, & inter se, & illis duabus H D, A O. Itaq́ quia duo latera A O, A H, duobus lateribus D H, D K, æqualia sunt, angulosq́ continent æquales, nimirum rectos; [d] erunt & bases H K, H O, æquales. Eodemq́ modo demonstrabuntur K M, M O, æquales & inter se, & duabus H K, H O. Aequilatera ergo est figura H K M O. Dico & rectangulam esse. Cùm enim latera H K, K M, M O, O H, æqualia sint, [e] erunt & quatuor arcus, quos subtendunt, æquales, ac proinde Quadrantes erunt. Semicirculi ergo sunt O H K, H K M, K M O, M O H, [f] ac proinde quatuor anguli H, K, M, O, in illis semicirculis recti erunt. Igitur H K M O, quadratum est, atque adeò inuento quadrato æquale, cùm idem circulus vtrumque circumscribat. Circulus enim H K M O, descriptus est ad interuallum semidiametri circuli, inuento quadrato circumscripti. Quod est propositum.*

a 3. tertij.
b 14. tertij.
c 14. tertij.
d 4. primi.
e 28. tertij.
f 31. tertij.

## XVIII.

SI ad diametrum circuli in extremis punctis duę perpendiculares excitentur, & ab eisdem extremis per vnum idemq́; punctum circunferentiæ duæ aliæ rectæ circulum secantes ducantur, occurrentes duabus perpendicularibus; erit rectangulum comprehensum sub vtralibet secantium, & eius segmento interiore, quadrato diametri æquale.

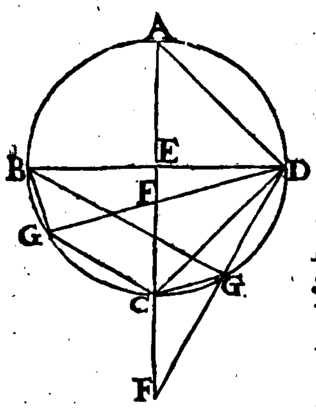



*HAEC propositio est Cardani libro 16. de Subtilitate, capite 1. sicut & quæ sequitur. Vtramque autem demonstrauit Ioannes Baptista Benedictus. Sit ergo circulus A B C, cuius diameter B C, ad quam in B, C, excitentur duæ perpendiculares B D, C E, ac per assumptum quoduis punctum A, in circunferentia ex eisdem punctis B C, eductæ rectæ B A, C A, secent perpendiculares in E, D. Dico tam rectangulum sub E B, B A, quàm sub D C, C A, quadrato diametri B C, æquale esse. Quoniam enim in triangulo rectangulo B C E, ex angulo recto C, demissa est C A, ad basin B E, perpendicularis; [g] quòd angulus B A C, in semicirculo rectus sit: erit ex corollario propositionis 8. huius libri B C, media proportionalis inter E B, E A. Quare [h] rectangulum sub extremis E B, B A, æquale erit quadrato mediæ B C. Eademq́ ratione eidem quadrato æquale erit rectangulum sub D C, C A: propterea quòd B C, media quoq́ proportionalis est inter D C, C A, ex eodem corollario propositionis 8. huius libri. Constat ergo id, quod proponitur.*

g 31. tertij.
h 17. sexti.

## XIX.

SI in circulo duæ diametri sese ad rectos angulos secent, & ab vnius extremo puncto recta ducatur vtcunque secans circunferentiam, & alteram diametrum, siue productam, siue non productam; erit rectangulum comprehensum sub duobus segmentis huius lineæ ductæ: quorum vnum inter extremũ punctum prioris diametri, & secundam diametrum, alterum verò inter idem punctum extremum, & circunferentiam interiicitur, æquale quadrato intra circulum descripto.

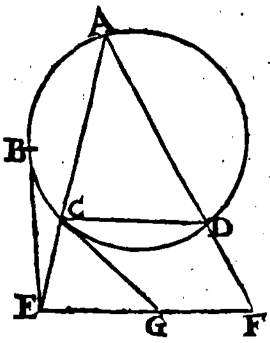


In circulo A B C D, cuius centrum E, secent se ad angulos rectos duæ
diametri A C, B D, ducaturq; ex puncto D, recta vtcunq; D F, secans diame-
trum A C, in F, & circumferentiam in G. Dico rectangulum sub F D, D G,
quadrato intra circulum descripto esse æquale. Ductis enim rectis D C, C G,
erunt triangula D C F, D C G, æquiangula inter se. Nam angulus C D F, cō-
munis est, & angulus D C F, angulo D G C, æqualis; [a] ac proinde & reliquus a 32. primi.
D F C, reliquo D C G, æqualis. Quòd autem anguli D C F, D G C, æquales
sint, ita ostendemus. Si punctum quidem F, est intra circulum; [b] erunt an- b 27. tertij.
guli D C F, D G C, insistentes quadrantibus æqualibus A D, D C, æquales: Si
verò punctum F, est extra circulum, ducta recta A D, [c] erunt anguli D A C, c 27. tertij.
D C A, insistentes quadrantibus æquales: [d] Sed tam D A C, D G C, [e] quàm d 22. tertij.
D C A, D C F, æquales sunt duobus rectis. Igitur ablatis æqualibus D A C, e 13. primi.
D C A, reliqui D G C, D C F, æquales quoq; erunt. Quam ob rem cum trian-
gula D C F, D C G, æquiangula sint; [f] erit vt D F, ad D C, ita D C, ad D G: hoc est, tres lineæ D F, D C. D G, f 4. sexti.
continuè proportionales erunt. [g] Igitur rectangulum sub extremis D F, D G, æquale est quadrato mediæ g 17. sexti.
D C, hoc est quadrato intra circulum descripto, cum D C, latus sit quadrati circulo inscripti, vt constat ex
propos. 6. lib. 4. Quod est propositum.

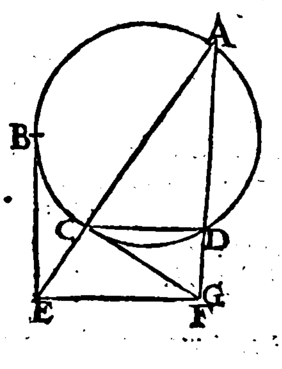
Aliter. Ducta recta B G, [h] erit angulus B G D, in semicirculo rectus; atq; idcirco duo triãgula B G D, h 31. tertij.
D E F, cum habeant angulos rectos B G D, D E F, & angulum B D G, vel E D F, communem, [i] æquiangula e- i 32. primi.
runt. [k] Igitur erit, vt D F, ad D E, ita D B, ad D G. [l] Rectangulum ergo sub D F, D G, æquale erit rectangulo k 4. sexti.
sub D B, D E. [m] Sed rectangulo sub D B, D E, æquale est quadratũ rectæ A D, hoc est, quadratum circulo inscri l 16. sexti.
ptum; propterea quòd ex coroll. propos. 8. huius lib. A D, media proportionalis est inter D B, D E, vt patet, si m 17. sexti.
ducatur recta A B. [n] Fiet enim triangulum rectangulum B A D, & ex angulo recto perpendicularis demissa n 31. tertij.
erit A E. Igitur & rectangulum sub D F, D G, eidem quadrato rectæ A D, æquale erit. Quod est propositum.

## XX.

Dato circulo, & duobus punctis siue extra circulum, siue intra, dummodo neutrum sit in circumferentia; per ea puncta duas rectas ducere ad aliquod vnum punctum circumferentiæ, ita vt recta coniungens duo puncta, quibus duæ illæ rectæ circumferentiam secant, parallela sit rectæ data duo puncta connectenti.

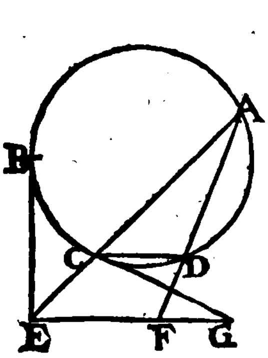


Hoc problema non minus acutum quàm curiosum in tres propositiones Pappus distribuit: quod nos in vnam redigentes multò clarius demonstrabimus. Sit ergo circulus A B C D, & primum duo data puncta E, F, extra circulum, quæ per rectam E F, coniungantur. Si igitur ex E, F, ducendæ sint rectæ ad aliquod punctum concauæ circumferentiæ, &c. ita agemus. Ex E, ducatur recta E B, tangens circulum in B, & duabus E F, E B, tertia proportionalis inueniatur, cui æqualis sit E G, cadatque primum G, punctum inter E, & F, quod fit, quando E F, maior est, quàm E B. Ducta igitur G C, recta circulum tangente in C, versus priorem tangentem E B, ducatur ex E, per C, recta secans concauam peripheriam in A, iungaturq; recta A F, secans circumferentiam in D. Dico ductam rectam C D, ipsi E F, parallelam
esse. Quoniam enim tres rectæ E F, E B, E G, continuè proportionales sunt,
[o] erit rectangulum sub E F, E G, quadrato ex E B, æquale: [p] Est autem eidem quadrato ex E B, æquale re- o 17. sexti.
ctangulum sub E A, E C. Igitur rectangulum sub E F, E G, rectangulo sub E A, E C, æquale erit: ac proin- p 36. tertij.
de ex scholio proposit. 36. libri 3. per quatuor puncta A, C, G, F, circulus describi poterit. [q] Duo ergo anguli q 22. tertij.
C A F, C G F, oppositi in quadrilatero A C G F, intra eũ circulum descripto æquales sunt duobus rectis, ideoq;
duobus angulis ad G, [r] qui duobus etiam rectis æquales sunt, æquales. Dempto igitur communi C G F, erit r 13. primi.
reliquus C G E, reliquo A, æqualis: [s] Est autem & angulus D C G, angulo A, in s 32. tertij.
alterno segmento æqualis. Igitur anguli D C G, C G E, inter se æquales erũt,
atq; ideo, cũ sint alterni, [t] rectæ C D, E F, parallelæ erunt. Quod est propositũ. t 27. primi.



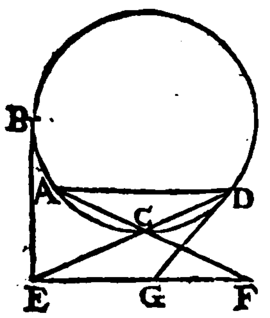
Cadat deinde punctum G, in punctum F. quod accidit, quando E F,
ipsi E B, æqualis est. Ducta igitur rursus recta G C, circulum tangente in C,
versus priorem tangentem E B, ducatur ex E, per C, recta concauam peripheriam secans in A, iungaturq; recta A F, secans circunferẽtiam in D. Dico rursus ductam rectam C D, ipsi E F, esse parallelam. Quoniã enim æquales sunt,
E B, E F, [u] estq; rectangulum sub A E, E C, quadrato ex E B, æquale: erit quo- u 36. tertij.
que idem rectangulum quadrato sub E F, æquale. Quare [x] si circa triangu- x 1. quarti.
lum A C F, circulus describatur, cùm eum secet recta E A, recta autem E F, y 37. tertij.
eidem applicetur, [y] tanget recta E F, eum circulum. [z] Angulus ergo E F C, z 32. tertij.

a 32. tertij. *angulo A, in alterno segmento illius circuli æqualis erit:* [a] *Est autem & angulus F C D, eidem angulo A, in al-*
*terno segmento circuli A B C D, æqualis. Igitur æquales inter se erunt anguli E F C, F C D: qui cùm sint al-*
b 27. primi. *terni,* [b] *erunt rectæ C D, E F, parallelæ. Quod est propositum.*

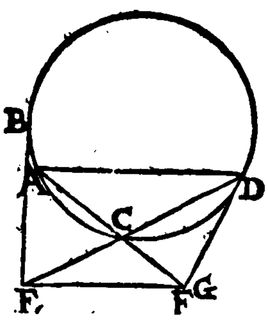



*CADAT tertiò punctum G, vltra F. quod contingit, quando E F, minor est*
*quàm E B. Facta igitur eadem constructione, quoniam tres rectæ E F, E B, E G,*
c 17. sexti. *continuè proportionales sunt,* [c] *erit rectangulum sub E F, E G, quadrato ex E B,*
d 36. tertij. *æquale:* [d] *Est autem eidem quadrato ex E B, æquale rectangulum sub A E, E C.*
*Igitur rectangulum sub E F, E G, hoc est, sub E G, E F, rectangulo sub E A, E C,*
*æquale erit: ac proinde ex scholio propositionis 36. libri 3. per quatuor puncta A,*
e 21. tertij. *C, F, G, circulus describi poterit,* [e] *Duo ergo anguli A, G, in eodem segmento*
*C A G F, illius circuli, cuius chorda esset ducta recta C F, inter se æquales e-*
f 32. tertij. *runt:* [f] *Est autem angulus G C D, angulo A, in alterno segmento dati circu-*
*li A B C D, æqualis. Igitur idem angulus G C D, angulo G, æqualis erit: ac proin*
g 27. primi. *de, cùm duo hi anguli sint alterni,* [g] *parallelæ erunt C D, E F. Quod est pro-*
*positum.*

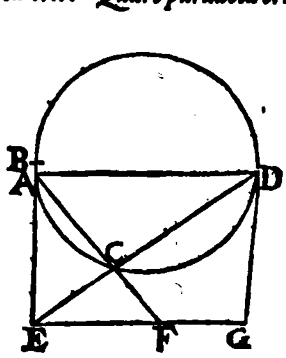
*SI verò ex eisdem punctis datis E, F, ducendæ sint duæ rectæ ad aliquod punctum conuexæ circumferen-*
*tiæ, quæ productæ secent concauam peripheriam in duobus punctis, ita vt recta per ea transiens sit paral-*
*lela rectæ puncta E, F, connectenti, hoc modo procedemus. Ducta recta E B, cir-*
*culum tangente in B, inueniatur duabus rectis E F, E B, tertia proportionalis*
*E G, cadátque primum G, punctum inter E, F. Ducta igitur ex G, recta G D,*
*tangente circulum in D, non tamen versus priorem tangentem E B, ducatur*
*E D, secans circunferentiam in C, puncto, per quod recta eijciatur ex F, secans*
*circunferentiam in A. Dico rectam A D, ductam esse rectæ E F, parallelam. Quo-*




h 17. sexti. *niam enim tres rectæ E F, E B, E G, continuè sunt proportionales,* [h] *erit rectan-*
i 36. tertij. *gulum sub E F, E G, quadrato ex E B, æquale:* [i] *Est autem & rectangulum sub*
*E D, E C, eidem quadrato ex E B, æquale. Igitur æqualia inter se erunt rectan-*
*gula sub E F, E G, & sub E D, E C: ac proinde ex scholio propositionis 36. lib. 3.*
k 21. tertij. *per quatuor puncta C, D, F, G, circulus describi potest.* [k] *Duo ergo anguli*
*C D G, & F, in eodem segmento C D F G, illius circuli, cuius chorda esset du-*
l 32. tertij. *cta recta C G, inter se erunt æquales.* [l] *Est autem angulus C D G, angulo A, in alterno segmento dati cir-*
m 27. primi. *culi A B C D, æqualis. Igitur & angulus F, angulo A, alterno æqualis erit,* [m] *ideoq; parallelæ erunt A D, E F.*
*Quod est propositum.*

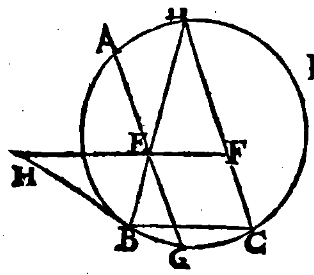


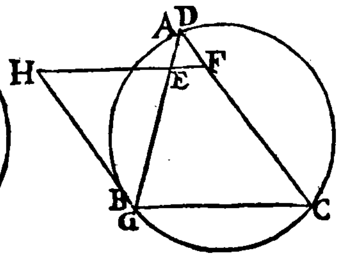

*CADAT deinde punctum G, in F. Ducta igitur rursus recta G D, tangen-*
*te circulum in D, non tamen versus priorem tangentem E B, ducatur recta*
*E D, secans circunferentiam in C, puncto, per quod recta ducta ex F, secet cir-*
*cunferentiam in A. Dico ductam rectam A D, rectæ E F, parallelam esse. Cùm*
*enim æquales sint E B, E F, (quòd sit E F, ad E B, vt E B, ad E F.) erunt earum*
*quadrata æqualia: Est autem rectangulum sub E D, E C, quadrato ex E B, æ-*
n 5. quarti. *quale. Igitur & quadrato ex E F. Quia ergo,* [n] *si circa triangulum C D F, cir-*
o 37. tertij. *culus describatur, recta E D, eum secat, & E F, applicata est,* [o] *tanget E F, eum*
p 32. tertij. *circulum.* [p] *Angulus ergo E F C, angulo F D E, in alterno segmento eius circu-*
q 32. tertij. *li æqualis erit:* [q] *Est autem angulus F D E, angulo A, in alterno segmento cir-*
*culi A B C D, æqualis. Igitur & angulus E F C, eidem angulo A, alterno æqua-*
r 27. primi. *lis erit.* [r] *Quare parallelæ erunt A D, E F. Quod est propositum.*




*CADAT tertiò punctum G, vltra F. Facta ergo eadem constructione,*
s 17. sexti. *cùm tres rectæ E F, E B, E G, sint continuè proportionales,* [s] *erit rectangulum*
t 36. tertij. *sub E F, E G, siue sub E G, E F, æquale quadrato ex E B:* [t] *Est autem eidem qua-*
*drato æquale rectangulum sub E D, E C. Igitur rectangulum sub E G, E F, re-*
*ctangulo sub E D, E C, æquale erit; proptereaq; ex scholio propositionis 36. li-*
u 22. tertij. *bri 3. circa quatuor puncta C, D, G, F, circulus potest describi.* [u] *Duo ergo an-*
*guli E D G, C F G, oppositi in quadrilatero C D G F, intra eum circulum de-*
*scripto, æquales erunt duobus rectis, ac proinde æquales duobus angulis ad F,*
x 13. primi. [x] *qui etiam duobus sunt rectis æquales. Dempto ergo communi C F G, reliquus*
y 32. tertij. *C D G, reliquo C F E, æqualis erit:* [y] *Est autem angulus G D C, angulo A, in al-*
*terno segmento dati circuli A B C D, æqualis. Igitur & angulus C F E, eidem*
z 27. primi. *angulo C A D, alterno æqualis erit:* [z] *atque idcircò parallelæ erunt A D, E F.*
*Quod est propositum.*

*SED sint iam data puncta E, F, intra circulum A B C D. Ducta recta A G, per E, vtcunque, inueniatur*
tribus



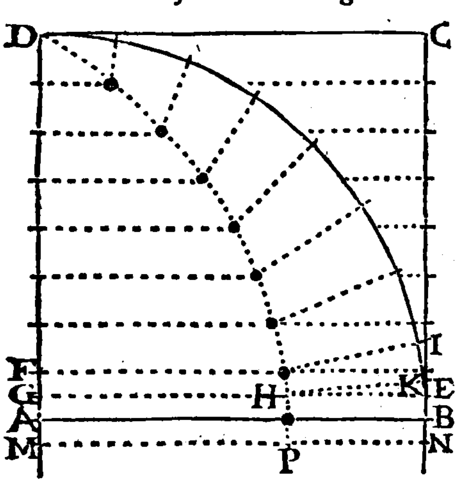

*tur tribus rectis E F, E A, E G, quarta proportionalis, cui æqualis sit E H,) cadétque necessariò punctū H, extra circulū.* [a] *Nam cùm rectangulum sub E F, E H, æquale sit rectangulo sub E A, E G; fit vt, si H, dicatur esse in circunferētia, describi possit circulus circa quatuor puncta A, F, G, H, ex scholio propos. 35. lib. 3. quod absurdum est, cùm circulus per tria puncta A, G, & H, in circunferentia descriptus transeat vltra F. Non ergo H, est in circunferentia. A fortiori non erit intra circulum: cadit ergo extra.) ducaturq; H B, circulum tangens in B. Ducta enim recta ex B, per E, secante circunferentiam in D, & ex D per F, recta secante circunferētiam in C; dico ductā rectam B C, parallelam esse rectæ E F. Quia enim ita est E F, ad E A, vt E G, ad E H;* [b] *erit rectangulum sub E F, E H, æquale rectangulo sub E A, E G:* [c] *Est autem rectangulum sub E A, E G, æquale rectangulo sub E D, E B. Igitur & rectangulum sub E F, E H, eidem rectangulo sub E D, E B, æquale erit; ac propterea ex scholio propos. 35 lib. 3. circa quatuor puncta B, H, D, F, circulus poterit describi.* [d] *Quare duo anguli H B D, & D F H, in eodem segmento D F B H, illius circuli, cuius chorda esset ducta recta D H, æquales erunt.* [e] *Est autem angulus H B D, angulo C, in alterno segmento dati circuli A B C D, æqualis. Igitur & angulus D F H, angulo eidem C, æqualis erit, externus interno.* [f] *Parallelæ ergo sunt rectæ B C, E F. Quod est propositum.*

a 16. sexti. b 16. sexti. c 35. tertij. d 21. tertij. e 32. tertij. f 28. primi.

QVOD *si contingat, tangentem H B, cadere in punctum G, non erit ducenda alia linea B D, sed A G, quæ in principio ducta est, propositum concludet, vt perspicuum est in secunda figura.*

## DE MIRABILI NATVRA LINEAE CVIVSdam inflexæ, per quam & in circulo figura quotlibet laterum æqualium inscribitur, & circulus quadratur, & plura alia scitu iucundissima perficiuntur.

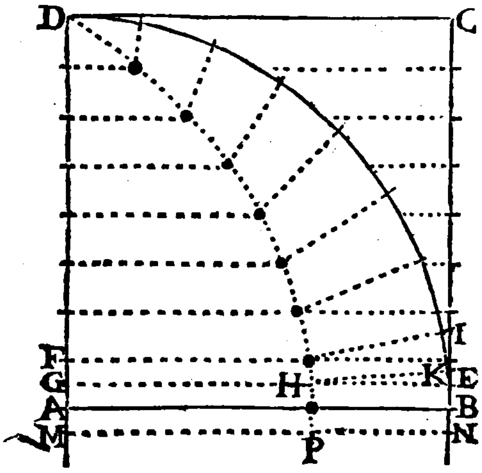
FORTE *superiori anno incidi in librum 4. Pappi Alexandrini, vbi lineam quandam inflexam explicat, quam, vt ait, Dinostratus, & Nicomedes, & nonnulli iuniores excogitârunt ad circuli quadraturam, ideoq; ab officio τετραγωνίζουσα ab eisdem appellata est, à nobis eadem de causa Quadratrix dicetur. Quanquam autem prædicti auctores huiusmodi lineam conentur describere per duos motus imaginarios duarū rectarum, quæ in re principium petunt, vt propterea à Pappo reijciatur, tanquam inutilis, & quæ describi non possit: nos tamen eam sine illis motibus Geometricè describemus per inuentionem quotuis punctorum, per quæ duci debeat, quemadmodum in descriptionibus conicarum sectionum fieri solet. Hanc inuentionem Epilogi loco huic sexto libro adiungendam esse censuimus; propterea quòd beneficio huius lineæ problemata Geometrica scitu periucunda, & quæ ad hunc vsque diem desiderata sunt, summa facilitate conficiuntur. Id quod ad finem libri 4. facturos nos hoc loco recepimus, reijciendo tamen pleniorem Quadraturæ circuli tractationem in librum de mensurationibus magnitudinum. Sic ergo descriptio lineæ Quadratricis fiet.*




IN *quadrato A B C D, describatur quadrans B D. Si igitur, vt volunt inuentores lineæ Quadratricis, tam semidiameter A D, æquabiliter ferri intelligatur circa centrum A, quàm latus supremum C D, deorsum versus æquabiliter quoque, ita vt quo tempore punctum D, circunferentiam D B, vniformi semper motu percurrit, eodem recta D C, vniformi etiam motu descendens ad latus A B, perueniat, sic tamen, vt perpetuo lateri A B, sit parallela, & cum lateribus A D, B C, angulos rectos efficiat; secabunt se continuè semidiameter in circunferentia D B, circumacta & recta D C, deorsum lata, in punctis, quæ lineam Quadratricem describent, hoc est, per quæ linea Quadratrix transibit, cuiusmodi est linea inflexa D E. Sed quia duo isti motus vniformes, quorum vnus per circunferentiam D B, fit, & alter per lineas rectas D A, C B, effici nō possunt, nisi proportio habeatur circularis lineæ ad rectam, meritò à Pappo descriptio hæc reprehenditur: quippe cùm ignota adhuc sit ea proportio, & quæ per hanc lineam inuestiganda proponatur. Quare nos Geometricè eandem lineam Quadratricem describemus hoc modo: Arcus D B, in quotuis partes æquales diuidatur, & latus vtrumque A D, B C, in totidem æquales partes. Facillima diuisio erit, si & arcus D B, & vtrumque latus A D, B C, secetur primùm bifariam, deinde vtraq; se-*

missis iterum bifariam, & singulæ rursum partes iterum bifariam, atque ita deinceps, quantum libuerit: Quò autem plures extiterint diuisiones, eò accuratius Quadratrix linea describetur. Nos ad confusionem vitandam secuimus tam arcum D B, quàm duo latera A D, B C, in octo partes æquales.

DEINDE bina puncta laterum A D, B C, æqualiter distantia à latere D C, vel A B, coniungantur lineis rectis occultis, atq; ex centro A, aliæ rectæ occultæ ad singula diuisionum puncta Quadrantis D B, extendantur. Vbi enim hæ rectæ priores rectas intersecabunt, prima primam, secunda secundam, &c. per ea puncta Quadratrix linea congruenter ducenda est, ita vt non sit sinuosa, sed æquabiliter semper progrediatur, nullum efficiens gibbum, aut angulum alicubi: qualis est linea inflexa D E, secans semidiametrum A B, in E.




SED quia punctum E, in latere A B, inueniri Geometricè non potest, cùm ibi omnis sectio rectarum cesset; vt illud sine notabili errore, qui scilicet sub sensum cadat, reperiamus, vtemur hoc artificio. Infimam partem A F, lateris A D, si satis exigua non sit, secabimus bifariam continuè, donec infima particula sit perexigua: Eodemq; modo infimam partem B I, arcus D B, bifariam continuè diuidemus, donec tot fiant subdiuisiones, quot in parte A F, factæ sunt, vt particula B K, talis pars sit totius arcus D B, qualis pars est A G, totius lateris A D. Particulæ deinde A G, æquales abscindemus B L, B N, A M, ducemusq; rectas occultas G L, M N. Ducta verò ex A, centro recta occulta A K, quæ secet G L, in H puncto, quod accuratissimè notetur, sumemus ipsi G H, æqualem M P. Si enim Quadratricem vsque ad H, descriptam continuabimus æquabili atque vniformi extensione vsque ad P, secabit Quadratrix linea latus A B, in E, puncto, quod quæritur. Nam propter paruam rectarum G H, A E, M P, inter se distantiam, efficitur, vt fermè sint æquales, licet Geometricè loquendo, recta A E, semper maior sit aliquantò, quantumuis parum eæ rectæ inter se distent: sed excessus ille circino deprehendi non potest. Id quod etiam in circunferentia circuli contingit. Rectæ namque G L, A B, M N, si parum inter se distent, in circulo omnino æquales iudicabuntur, quamuis verè A B, aliquantò maior sit. Itaque si tres illæ rectæ G H, A E, M P, perexiguam habeant distantiam inter se, dubitari non potest, punctum E, in quo Quadratrix linea semidiametrum A B, secat ab eo, quod verè in Quadratrice ibi existit, non differre: dummodo puncta H, P, exquisitè, & summa adhibita diligentia, inuenta sint.

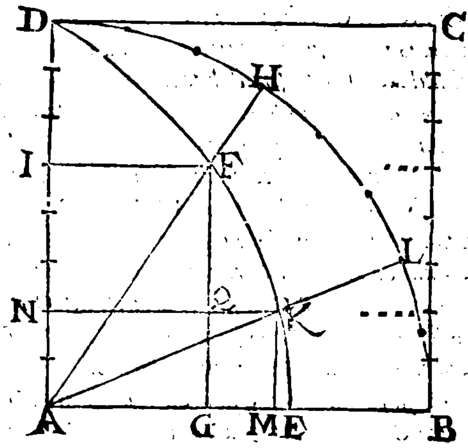
RECTAM porrò A D, vocabimus latus Quadratricis, & rectam A E, eiusdem basin, ac denique punctum A, centrum.

ESSE autem hanc lineam inflexam D E, à nobis per puncta descriptam Geometricè eandem, quam Dinostratus & Nicomedes per duos illos motus imaginarios describi concipiebant, perspicuum est. Nam si semidiameter A D, circa centrum A, per arcum D B, eodem tempore moueatur vniformi motu, quo latus D C, deorsum fertur motu quoque vniformi; fit vt, quando semidiameter A D, pertransiuit quamcunque partem arcus D B, tunc latus D C, similem partem laterum D A, C B, percurrerit: Aliàs aut duo illi motus non essent vniformes, aut non eodem tempore ad latus A B, tam semidiameter A D, quàm latus D C, perueniret. Cùm ergo rectæ ex centro A, per partes arcus D B, emissæ, & lineæ parallelæ per partes laterum D A, C B, ductæ, abscindant semper ex arcu D B, & ex lateribus D A, C B, partes similes ex constructione, liquidò constat, puncta lineæ inflexæ D E, à nobis Geometricè inuenta à punctis, quæ à duobus illis motibus reperirentur, non differre. Hæc igitur est descriptio lineæ Quadratricis, quæ Geometrica appellari potest, quemadmodum & conicarum sectionum descriptiones, quæ per puncta etiam fiunt, vt ab Apollonio traditur, Geometricæ dicuntur, cùm tamen magis errori sint obnoxiæ, quàm nostra descriptio, propter inuentionem plurimarum linearum mediarum proportionalium, quæ ad earum descriptiones sunt necessariæ, quibus in Quadratricis desciptione opus non est. Quare nisi quis totam sectionum conicarum doctrinam, quam tanto ingenij acumine Apollonius Pergæus persecutus est, vt propterea Magnus Geometra appellatus sit, reijcere velit, tanquã inutilem, & non Geometricam, (quod neminem facturum existimo, cùm sectiones conicas ad demonstrationes adhibuerint præstantissimi Geometræ. Nam Menechmus Hyperbola, ac Parabola vsus est in duarum linearum mediarum proportionalium inter quasuis duas rectas inuentione: & Archimedes ipse multa præclarè de eisdem sectionibus conicis demonstrauit: ac denique eiusmodi sectiones insignem vsum habent in re Gnomonica, vt ex nostra Gnomonica apparet) admittere omnino cogetur descriptionẽ hanc nostram Quadratricis lineæ, vt Geometricam. Adde quòd linea conchilis, qua Nicomedes duas medias lineas proportionales acutissimè inuestigat, per puncta etiam describitur, vt in libro de Mensurationibus dicemus. Sed iam lineæ Quadratricis vsum nonnullis propositionibus exponamus.

I.

SI ex centro per quæuis puncta lineæ Quadratricis rectæ ducantur vsque ad circunferentiam Quadrantis ex eodem centro descripti, & ex eisdem punctis ad basim demittantur

tur perpendiculares; & aliæ rectæ eidem basi parallelæ: erunt arcus Quadrantis inter semidiametros interiecti perpendicularibus, vel segmentis semidiametri inter parallelas positis, proportionales.



*Ex centro A, per puncta F, K, in Quadratrice vtcunque accepta ducatur recta occurrentes arcui Quadrantis in H, L, demittanturq́; ad basim A E, perpẽdiculares F G, K M: & ducantur F I, K N, eidem A E, parallelæ. Dico, vt est totus arcus D B, ad arcum H B, ita esse totum latus D A, ad perpendicularem F G, vel ad segmẽtum I A, &c. Quia enim eadem pars est arcus D H, totius arcus D B, quæ pars est recta D I, totius lateris D A, vt ex descriptione lineæ Quadratricis manifestum est, siue ea cogitetur descripta duobus illis motibus proportionalibus Dinostrati, & Nicomedis, siue ea ratione, quam nos præscripsimus; cùm in ea semper arcus D H, tot particulas totius arcus D B, cõplectatur, quot partes totius rectæ D A, recta D I, continet, propterea quòd rectæ A H, I F, se intersecant in puncto F, Quadratricis: Neque hæc similitudo impeditur, etiamsi tã arcus D H, toti arcui D B, quàm recta D I, toti lateri D A, sit incommensurabilis, cùm perpetuò Quadratrix eadem vniformitate progrediatur per omnia sua puncta. Si enim recta D I, nõ est talis pars, siue commensurabilis, siue incommensurabilis, totius lateris D A, qualis pars est arcus D H, totius arcus D B; si cogitetur talis pars minor, quàm D I, vel maior, secabit parallela ex puncto eius extremo ducta rectã A H, vel supra F, vel infra, in puncto, per quod Quadratrix describenda est; ac proinde ea non transibit per F. quod est absurdum, & contra hypothesim. Quia, inquam, eadem pars est arcus D H, totius arcus D B, quæ pars est recta D I, totius lateris D A; erit quoq; reliquus arcus H B, eadem pars totius arcus D B, quæ pars est reliqua recta I A, totius lateris D A. Quocirca erit, vt totus arcus D B, ad arcum H B, ita totum latus D A, ad rectam I A, hoc est, ad rectam F G, [a] quæ ipsi I A, æqualis est, ac proinde & tam diuidendo erit, vt arcus D H, ad arcum H B, ita recta D I, ad rectam I A, vel F G, quàm conuertendo, vt arcus H B, ad arcum D B, ita recta F G, vel I A, ad rectam D A, &c.* a 34. primi.

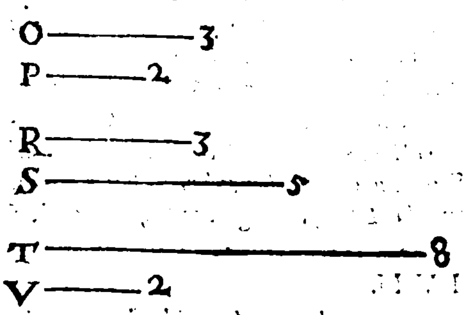
*Eadem ratione erit, vt arcus D B, ad arcum L B, ita recta D A, ad rectam N A, siue ad K M, [b] quæ ipsi N A, æqualis est: Et vt arcus D L, ad arcum L B, ita recta D N, ad rectam N A, siue K M: Et vt arcus L B, ad arcum D B, ita recta K M, vel N A, ad rectam D A. Quoniam igitur est, vt L B, ad D B, ita K M, ad D A: Et vt D B, ad H B, ita D A, ad F G; erit ex æquo, vt L B, ad H B, ita K M, ad F G; Et conuertendo, vt H B, ad L B, ita F G, ad K N, hoc est, ita I A, ad N A: Et diuidendo vt H L, ad L B, ita I N, ad N A, vel ita F Q, ad Q G.* b 34. primi.

*Rursvs quia est, vt D H, ad H B, ita D I, ad I A: Et vt H B, ad L B, ita I A, ad N A; erit ex æquo, vt D H, ad L B, ita D I ad N A, siue ad K M. Semper ergo arcus inter semidiametros intercepti perpendicularibus, siue segmentis semidiametri inter parallelas positis proportionales sunt. Quod est propositum.*

## II.

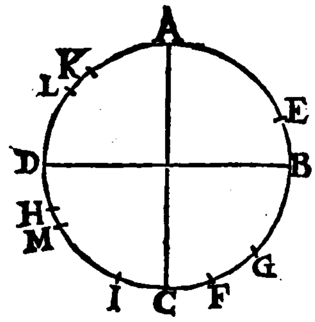
Datvm arcum circuli in datam proportionem diuidere.

*Sit primùm arcus H B, in figura antecedente diuidendus in proportionem datam rectæ O, ad rectam P. Ducta ex puncto H, ad centrum A, recta H A, secante Quadratricem in F; ducatur F I, basi A E, parallela. Deinde recta I A, ita secetur in N, ex scholio propos. 10. huius lib. vt sit I N, ad N A, quemadmodum O, ad P. Ductaq́; N K, basi A E, parallela secante Quadratricem in K, emittatur ex centro A, per K, recta secans arcum H B, in L. Dico arcum H B, in L, sectum esse in proportionem datam O, ad P. Quoniam enim, vt propos. 1. ostendimus, vt H L, ad L B, ita est I N, ad N A: Est autem I N, ad N A, ex constructione, vt O, ad P; [c] erit quoque H L, ad L B, vt O, ad P.* c 11. quinti.



*Deinde totus Quadrans D B, secandus sit in proportionem R, ad S. Diuisa semidiametro D A, in I, vt sit D I, ad I A, sicuti R, ad S, ducatur I F, ipsi A E, parallela secans Quadratricem in F. Ducta igitur recta A F H; erit ex propos. 1. D H, ad H B, vt D I, ad I A; hoc est, vt R, ad S.*

*Tertio sit idem Quadrans D B, secandus in duos arcus, ita vt totus Quadrans ad vnum eorum habeat proportionem datam T, ad V. Tribus rectis T, V, D A, inueniatur quarta proportionalis, cui æqualis abscindatur A N. Ducta autem N K, ipsi A E, parallela secante Quadratricem in K, ducatur ex A, per K, recta A K L. Dico Quadrantem in L, sectum esse, vt proponitur. Est enim ex propos. 1. D B, ad L B, vt D A, ad N A; hoc est, vt T, ad V.*




QVARTO semicirculus A B C, diuidendus sit in datā proportionem, videlicet in triplam. Secetur vterq; Quadrans A B, B C, secundùm datam proportionem triplam in E, F, & arcui A E, vel B F, æqualis abscindatur arcus E G. Si igitur ex arcu communi A B C, æqualia demantur, nimirum duo arcus A E, B F, simul & arcus A G; reliqua æqualia fient, nimirū duo arcus E B, F C, simul, & arcus G C. Et quoniam est, vt A E, ad E B, ita B F, ad F C; a 12. quinti. [a] erunt A E, B F, simul ad E B, F C, simul, hoc est, arcus A G, ad arcum G C, vt A E, ad E B: Habet autē A E, ad E B, datā proportionē triplam. Igitur & arcus A G, ad arcum G C, eandem proportionem datam habebit.

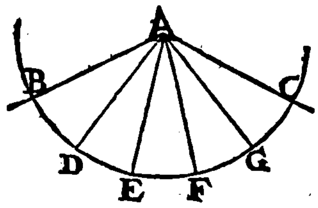
QVINTO in eandem proportionem secandus sit arcus A C D, tres Quadrantes continens. Diuisis tribus Quadrantibus A B, B C, C D, in eam proportionem in E, F, H, sumatur arcus E G, ipsi B F, & arcus G I, ipsi C H, æqualis. Si igitur ex communi arcu A C D, demantur æqualia, nimirum tres arcus A E, B F, C H, simul, & arcus A B I; reliqua fient æqualia, nimirum tres arcus E B, F C, H D, simul, & arcus I D. Et quia tres arcus A E, B F, C H, ad tres arcus E B, F C, H D, b 12. quinti. eandem habent proportionem; [b] habebunt omnes tres arcus simul ad omnes tres simul, hoc est, arcus A B I, ad arcum I D, eandem proportionem, quam vnus arcus A E, ad vnum arcum E B, videlicet datam.

POSTREMO sit eodem modo diuidendus arcus A C K. Diuisis rursus tribus Quadrantibus, & arcu D K, vt proponitur, in E, F, H, L, sumatur arcus E G, arcui B F, & arcus G I, arcui C H, & arcus I M, arcui D L, æqualis. Si igitur ex communi arcu A C K, æqualia auferātur, videlicet quatuor arcus A E, B F, C H, D L, simul, & arcus A B M; reliqua æqualia fient, quatuor scilicet arcus E B, F C, H D, L K, simul, & arcus M K. Et quia quatuor arcus A E, B F, C H, D L, ad quatuor arcus E B, F C, H D, L K, eandem proportionem habent; c 12. quinti. [c] habebunt omnes quatuor simul, ad omnes quatuor simul, id est, arcus A B M, ad arcum M K, eandem proportionē, quam vnus A E, ad vnum E B, eam videlicet, quæ data est. Constat ergo id, quod proponitur.

## COROLLARIVM.

*Ex his facile quemuis angulum rectilineum in duos angulos datam habentes proportionem partiemur, atq; adeò & quemlibet arcum, & angulum in quotuis partes æquales.*

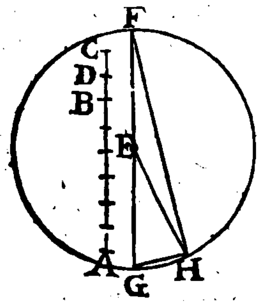
DESCRIPTO namque arcu ex angulo dato, eoq; arcu diuiso, vt iubetur, si ex angulo ad punctum diuisionis recta ducatur, erit angulus diuisus, vt arcus: d 33. sexti. [d] cùm sit vt arcus ad arcum, ita angulus ad angulum in centro.




QVOD si arcus, vel angulus secandus sit in quotuis æquales partes, diuidendus erit in duas partes proportionem habentes multiplicem denominatam à numero, qui vna vnitate minor sit numero partiū propositarum. Vt si arcus B C, vel angulus B A C, diuidendus sit in quinque partes æquales, secandus erit arcus B C, in G, in proportionem quadruplam. Nam G C, arcus erit quinta pars arcus B C, cui si quatuor æquales abscindantur G F, F E, E D, D B, diuisus erit arcus B C, in quinque partes æquales. Et si ex A, ducantur rectæ A G, A F, A E, A D, sectus quoque erit angulus B A C, in quinque angulos æquales. Quod est propositum.

## III.

ISOSCELES triangulum constituere, cuius vterque angulorum æqualium ad reliquum habeat proportionem datam.




SIT data proportio rectæ A B, ad rectam B C. Diuisa B C, in D, bifariam, & descripto ex centro E, circulo quantocunque F G H, ductaq; in eo diametro F G; secetur ita semicircunferentia F H G, in H, vt eadem sit proportio arcus F H, ad arcum H G, quæ rectæ A B, ad rectam B D: iunganturq; rectæ H E, H G. Dico Isoscelis trianguli E G H, vtrumque angulorum æqualium ad basin G H, habere ad reliquum angulum G E H proportionem datam A B, ad B C. Cùm enim sit, vt A B, ad B D, ita arcus F H, ad arcum H G: e 33. sexti. Et vt arcus F H, ad arcum H G, [e] ita angulus F G H, ad angulum G F H; f 11. quinti. [f] erit vt A B, ad B D, ita angulus F G H, ad angulum G F H: Vt autem B D, ad g 20. tertij. B C, ipsius B D, duplam, ita est angulus G F H, ad angulum G E H, [g] qui duplus est anguli G F H. Igitur ex æquo erit vt A B, ad B C, ita angulus E G H, ad angulum G E H. Quod est propositum.

## COROLLARIVM.

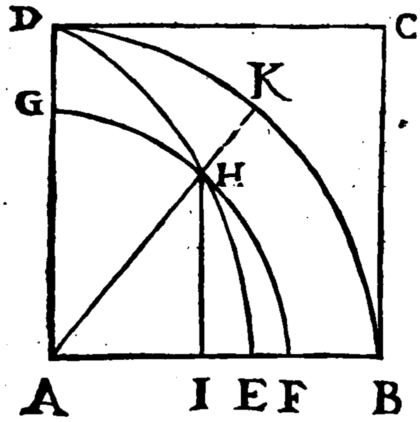
*ITAQVE si construantur triangula Isoscelia, in quibus anguli æquales ad basim, ad reliquum proportiones habeāt, tum multiplices sesquialteras, tum multiplices ordine, describentur*

*tur per priora omnes figuræ æquilateræ parium laterum: per posteriorem verò figuræ æquilateræ laterum imparium in circulo, vt ad finem lib. 4. ostendimus.*

*IDEM efficiemus sine huiusmodi triangulis, si totam circunferentiam in tot æquales partes secemus, vt in corollario proximè antecedente docuimus, quot latera angulósve figura inscribenda habere debet, &c.*

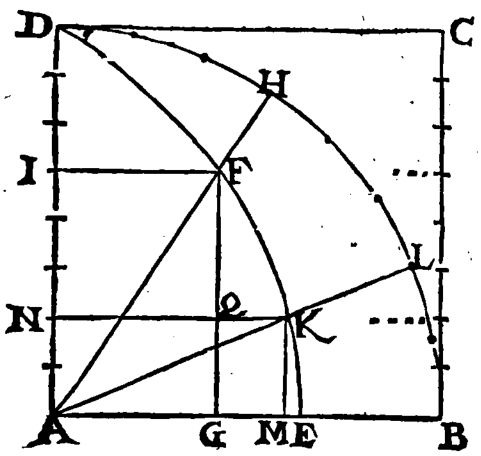
IIII.

SI Quadrantis, & Quadratricis idem centrum sit, erunt arcus Quadrantis, semidiameter, & basis Quadratricis continuè proportionales.



*SIT Quadrans, & Quadratrix ex eo descripta, vt suprà. Dico arcum B D, semidiametrum D A, & Quadratricis basin A E, continuè esse proportionales, hoc est, esse B D, ad D A, vt D A, ad A E. Sin minus, sit vt B D, ad D A, ita D A, ad A F, maiorem ipsa A E, minorémve, sitq́; primùm A F, maior quàm A E. Descripto ex centro A, quadrante F G, per F, secante Quadratricem in H, ducatur per H, semidiameter A H K, demittatúrque perpendicularis H I. Quoniam igitur ponitur arcus B D, ad rectam D A, vt D A, hoc est, vt A B, ad A F: estq́; vt A B, semidiameter ad semidiametrum A F, ita arcus B D, ad arcum F G; (Cùm enim sit ex Pappi demonstrationibus, vt & nos in libro de Mensurationibus ostendemus, diameter ad diametrum, vt circunferentia circuli ad circunferentiam circuli; [a] erit quoque semidiameter A B, ad semidiametrum A F, vt eadem circunferentia ad eandem circunferentiam; [b] ac proinde etiam vt quarta pars circunferentiæ ad quartam partem circunferentiæ, hoc est, vt arcus B D, ad arcum F G,) [c] Erit quoque arcus B D, ad rectam D A, vt idem arcus B D, ad arcum F G: [d] ac propterea æquales erunt recta D A, & arcus F G. Quia verò ex theoremate 1. est, vt arcus B D, ad arcum B K, ita recta D A, ad rectam H I; & vt arcus B D, ad arcum B K, ita arcus F G, ad arcum F H, quòd arcus B D, B K, arcubus F G, F H, similes sint, vt suprà in hoc scholio ostensum est: [e] Erit quoque recta D A, ad rectam H I, vt arcus F G, ad arcum F H. Cùm ergo recta D A, ostensa sit arcui F G, æqualis; [f] erit quoque recta H I, arcui F H, æqualis. quod est absurdum. Est enim recta H I, minor arcu F H, cùm ea sit semissis chordæ subtendentis arcum duplum arcus F H: (Nam recta A F, [g] secat eam chordam bifariam, ac proinde & arcum; ex scholio propositionis vigesimæ septimæ libri tertij.) chorda autem semper suo arcu minor sit. Non ergo est arcus B D, ad semidiametrum D A, vt D A, ad rectam maiorem base A E, Quadratricis.*

a 15. quinti.
b 15. quinti.
c 11. quinti.
d 9. quinti.
e 11. quinti.
f 14. quinti.
g 3. tertij.



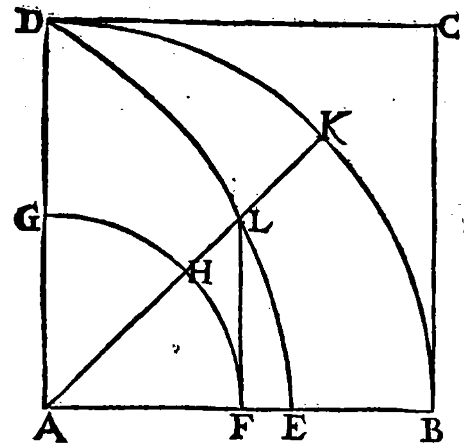
*SIT deinde, si fieri potest, A F, minor, quàm A E. Descripto igitur ex centro A, per F, Quadrante F G, erigatur ex F, ad A E, perpendicularis F L, secans Quadratricem in L, puncto, per quod semidiameter ducatur A L K, secãs arcum F G, in H. Ostendemus ergo, vt prius, arcum F G, rectæ D A, æqualem esse: Item, ita esse arcum B D, ad arcum B K, hoc est, arcum F G, ad arcũ F H, vt est recta D A, ad rectam L F. Quare cũ arcus F G, ostensus sit æqualis rectæ D A, erit quoque arcus F H, æqualis rectæ L F. Quod est absurdum. Est enim recta L F, maior arcu F H: Nam si ex L, duceretur versus G, alia recta tangẽs circulum F G, sicut L F, eundem tangit in F, essent hæ tangentes æquales, ex scholio propos. 36. libri 3. arcusq́; inter eas interceptus secaretur bifariam in H, propterea quòd ex scholio proposit. 37. libri 3. angulus ab eis comprehensus bifariam diuideretur, [h] ac proinde & angulus in centro A, si ad alterũ punctum contactus recta adiungeretur; [i] ideoq́; & arcus, quibus insistunt, æquales forent. Igitur cùm ex Archimede ad initium de Sphæra, & Cylindro, duæ illæ tangentes simul maiores sint arcu ab eis comprehenso, erit & earum semissis L F, maior semisse F H, illius arcus. Non est ergo arcus B D, ad semidiametrum D A, vt D A, ad rectam minorem base A E, Quadratricis: Sed neq́; vt D A, ad maiorẽ, vt ostẽsum est. Igitur vt D A, ad ipsam basin A E. Quod est propositũ.*

h 4. vel 8. primi.
i 26. tertij.

COROLLARIVM I.

*HINC facilè reperiemus rectam cuilibet arcui circuli, cuius Quadrans est B D, ex quo Quadratrix descripta est, æqualem.*

*QVONIAM enim est arcus B D, ad D A, vt D A, ad A E; erit conuertendo quoq́; A E, ad D A, vt D A, ad*




a 11.quinti. b 9.quinti. c 11.quinti. d 14.quinti.

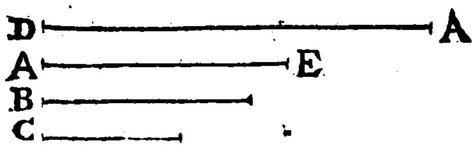
arcum Quadrantis B D. Si igitur duabus rectis A E, A D, inueniatur tertia proportionalis; [a] erit A D, ad eã tertiam, vt ad arcũ B D, cũ vtraq; proportio sit eadem, quæ A E, ad A D; [b] Quare tertia illa proportionalis arcui Quadrantis B D, æqualis erit: Et si duplicetur, fiet recta æqualis semicircunferentiæ eiusdem circuli: si verò quadruplicetur, fiet recta toti circunferentiæ æqualis. Quòd si arcui B K, qui minor est Quadrante, inuenienda sit recta æqualis; fiat vt D A, ad perpendicularem L F, ex L, ad A B, demissam, ita tertia illa proportionalis ad aliud, inuentaq; erit quarta hæc recta æqualis arcui B K. Nam cùm sit, ex theor. 1. vt D A, ad perpendicularem L F, ita arcus D B, ad arcum B K; [c] erit quoq; tertia illa proportionalis ad quartam lineam inuentam, vt arcus D B, ad arcum B K: Est autem tertia illa proportionalis æqualis arcui Quadrantis D B. [d] Igitur & quarta linea inuenta æqualis erit arcui B K. Si verò arcui, qui maior sit quadrãte, inuenienda sit recta æqualis, reperienda primùm erit recta æqualis Quadranti, vel semicirculo, vel tribus Quadrantibus, prout arcus datus includit vnum aut duos, aut tres quadrantes: Deinde alia recta æqualis reliquo arcui, qui minor Quadrante est. Nam duæ hæ rectæ coniunctæ erunt toti arcui proposito æquales.

## COROLLARIVM II.

*SEQVITVR quoque ex his, si basis Quadratricis A E, statuatur semidiameter alicuius circuli eius latus A D, Quadranti eiusdem circuli esse æqualem, & lineam lateris duplam esse æqualem semicircunferentiæ eiusdem circuli, & lineam quadruplam toti circunferentiæ esse æqualem.*

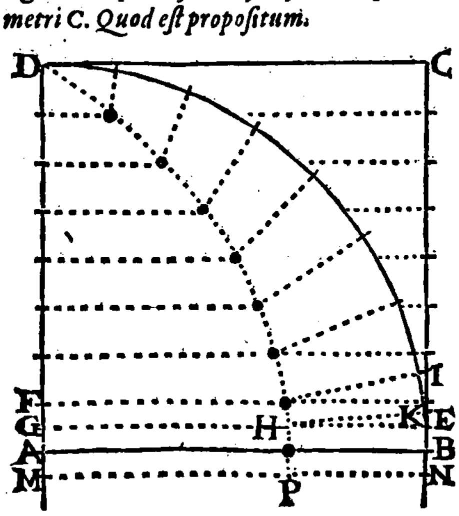
CVM enim, vt suprà ex Pappo diximus, semidiametri semicircunferẽtijs circulorum, atq; adeò & quadrantibus sint proportionales; erit vt D A, ad A E, hoc est, vt tertia illa proportionalis ad D A, ita Quadrans B D, ad Quadrantem semidiametri A E: Est autem tertia illa proportionalis æqualis Quadranti B D, vt ostensum est. [e] Igitur & recta D A, Quadranti semidiametri A E, æqualis erit. Dupla linea ergo ipsius D A, semicircunferentiæ circuli, cuius semidiameter A E; & quadrupla toti circunferentiæ erit æqualis.

e 14. quinti.




EADEM ratione, si duæ rectæ eandem proportionem habeant, quam D A, A E, & minor ponatur semidiameter alicuius circuli, ostendetur maior æqualis Quadranti illius circuli, &c. Sit enim D A, ad A E, vt recta aliqua B, ad rectam C. Erit ergo permutando D A, ad B, vt A E, ad C. Vt autem A E, ad C, ita est Quadrans semidiametri A E, ad Quadrantem semidiametri C, vt suprà ex Pappo dictum est. Igitur erit quoq; D A, ad B, vt quadrans semidiametri A E, ad quadrantem semidiametri C. Cùm ergo D A, æqualis sit, vt ostensum est, quadranti semidiametri A E, [f] erit quoq; B, æqualis quadranti semidiametri C. Quod est propositum.

f 14. quinti.




g 15. quinti.

SED si lubeat per numeros explorare, quamnam proportionem plus minus habeat ex hoc præclaro inuento circunferentia circuli ad eius diametrum, vel (quod idem est) semicircunferentia ad semidiametrum, [g] cùm sit vt circunferentia ad diametrum, ita semicircunferentia ad semidiametrum, efficiemus id hoc modo: Cogitemus Quadrantem D B, in figura, in qua Quadratricem descripsimus, diuisum esse in gradus 90. & singulos gradus in Min. 60. vt totus arcus D B, complectatur 5400. particulas æquales. Si igitur latus D A, concipiamus in totidem æquales particulas diuisum esse, erit parallela ex vltima particula vsque ad Quadratricem educta fermè æqualis basi A E, ob exiguam distantiam illius parallelæ, & basis A E cùm in ea figura parallela quoq; G H, auferens A G, particulam sextamdecimã, quæ $\frac{1}{16}$. multò maior est, quàm $\frac{1}{5400}$. vix à base A E, superetur: ita vt sine errore notabili eam parallelam pro base accipere possimus. Quia verò vltima illa particula lateris D A, est sinus arcus Min. 1. & parallela illa sinus complementi, nimirum arcus grad. 89. Min. 59. vt constat, si ponatur A G, vltima particula, & arcus B K, vltimum Minutum, ducaturque recta A H. Nam G H, erit sinus anguli G A H, grad. 89. Min. 59. ac proinde A G, sinus anguli A H G, Min. 1. posito sinu toto A H, vt in tractatione Sinuum ostendimus. Si igitur sinus totus A H, statuatur 10000000. (Ita enim exquisitius *stitius proportio optata inuenietur, q̃ si sinus totus ponatur tantum 100000. cùm in hoc sinus grad. 89. Min. 59. à sinu toto non differat.) erit A G, 2909. & G H, 9999999. at totũ latus D A, earundem partiũ erit 15708600. vt constat, si 5400. particulæ lateris D A, ducatur in vnam A G, quam diximus esse 2909. Duplum ergo lateris D A, erit 31417200. Et quoniam ex coroll. 2. huius propos. 4. duplum lateris D A, æquale est semicircunferẽtiæ, cuius semidiameter A E; erit proportio semicircunferentiæ illius ad semidiametrum A E, eadem ferè, quæ numeri 31417200. ad 9999999. denominata à* $3\frac{1417203}{9999999}$. *hoc est, in minimis terminis, à* $3\frac{157467}{1111111}$. *quæ proportio minor est, quàm tripla sesquiseptima, siue tripla superdecupartiens septuagesimas, maior autem quàm tripla superdecupartiens septuagesimas primas; inter quas duas proportiones vera proportio circunferentiæ ad diametrum consistit, vt ab Archimede demonstratum est.*

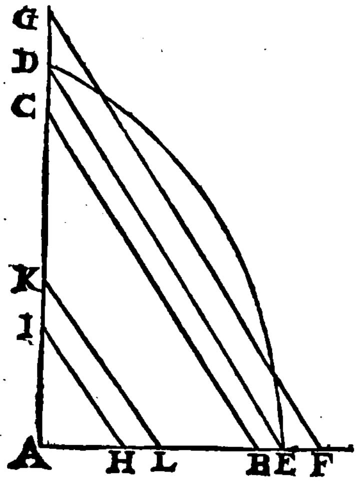
*ITAQVE vt recta linea circunferẽtiæ circuli inueniatur æqualis, satis est punctum E, inuenire, etiamsi tota linea Quadratrix non sit descripta: Vt autem arcus, vel angulus in datam proportionem secetur, nõ indigemus puncto E, vt perspicuum est.*

## V.

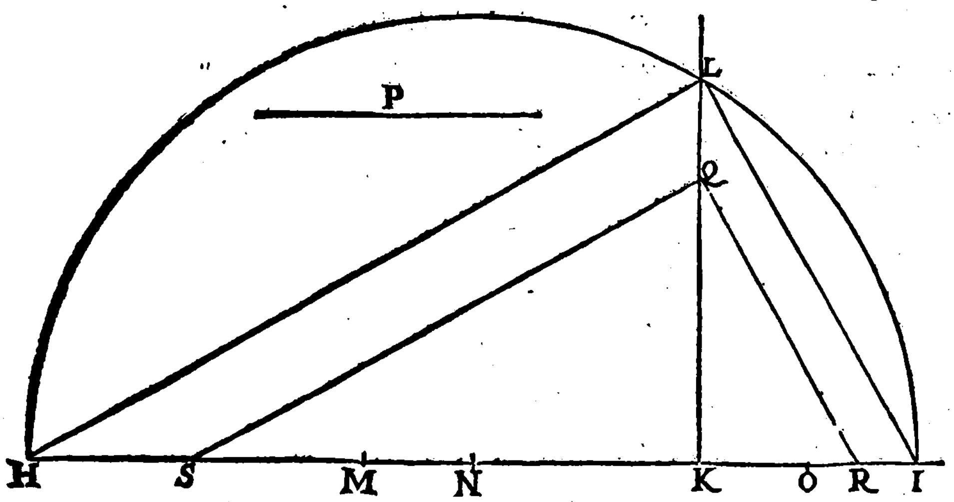
### DATO circulo quadratum æquale constituere.

*QVONIAM Archimedes demonstrauit circulum quemcunque æqualem esse triangulo rectangulo, cuius vnum latus circa angulum rectum semidiametro circuli, alterum verò circunferentiæ eiusdem æquale est; atq; hinc nos propos. 4. figurarum Isoperimetrarum in Commentarijs in Sphæram ostendimus, eundem circulum rectangulo comprehenso sub semidiametro, & semicircunferentia, æqualem esse: si ex coroll. præcedentis propos. inueniatur linea recta æqualis semicircunferentiæ dati circuli, & rectangulo contento sub illa recta, & semidiametro* [a] *construatur quadratum æquale, erit idem hoc quadratum dato circulo æquale.* a 14. secũdi.

*INVENIETVR autem recta æqualis semicircunferentiæ, vel Quadranti, vel toti circunferentiæ,* [b] *si fiat vt basis Quadratricis descripta ad eiusdem latus, ita semidiameter dati circuli ad aliud. Inuenta enim quarta linea æqualis erit Quadranti circuli, vt in coroll. 2. præced. propos. diximus, atq; adeò duplicata efficiet lineam semicircunferentiæ æqualem; quadruplicata autem rectam toti circunferentiæ æqualem exhibebit.* b 12. sexti.

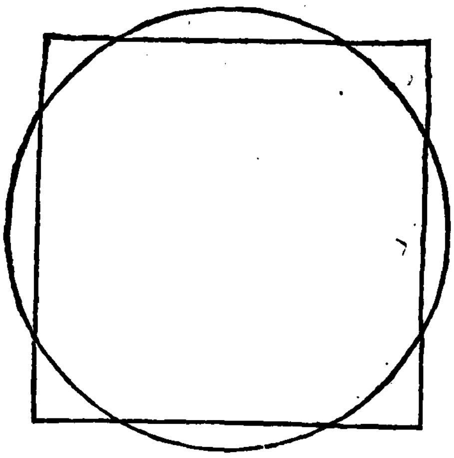



*VERVM vt expeditius quilibet circulus possit quadrari, construendæ erũt duæ figuræ quadrandis circulis aptissimæ, hoc modo: Constituatur angulus rectus D A E, sitq; A D, æqualis semidiametro Quadratricis, ex quo Quadratrix descripta est, & A E, basi eiusdem Quadratricis æqualis: Vel ex centro A, noua Quadratrix describatur D E, cuius latus A D, & basis A E. Ducta autem recta D E, constructum erit vnum instrumentum circulis quadrandis aptissimũ. Si enim circuli quadrandi semidiameter æqualis sit rectæ A E, erit recta A D, circunferentiæ Quadrantis eiusdem circuli æqualis, vt ex coroll. 2. antecedentis propos. liquet. Si autem semidiameter minor sit, q̃ A E, abscindemus ei æqualem A B, parallelamq; ipsi D E, agemus B C. Si deniq; semidiameter sit maior, q̃ A E, abscindemus ei æqualem A F, ex A E, producta, & per F, ipsi D E, parallelam agemus F G. Erit enim ex coroll. 2. præcedentis propos. recta A C, æqualis circunferentiæ Quadrantis, cuius semidiameter A B: Recta verò A G, circunferentiæ Quadrantis æqualis erit; cuius semidiameter A F:* [c] *propterea quòd est, vt A E, ad A D, ita tam A B, ad A C, q̃ A F, ad A G,* c 2. vel 4. sexti.




*DEINDE ducta recta H I, cuiuscunque longitudinis, excitetur ad eam perpendicularis quantacunq; K L; paratumq; erit alterum instrumentum quadrandis circulis accommodatum.*

*PER duo hæc instrumẽta nullo negotio quemcunq; circulum quadrabimus hac ratione: Sit quadrandus*



circulus, cuius semidiametro in priori instrumento æqualis sit recta A B, & per B, ipsi D E, parallela agatur B C. In posteriori verò instrumẽto sumantur duæ K M, M H, ipsi A C, æquales, & recta K I, semidiametro A B, æqualis. Diuisa autem tota recta H I, bifariam in N, describatur ex N, ad interuallum N H, vel N I, semicirculus secans perpendicularem K L, in L. Dico quadratum ex K L, circulo dato, cuius semidiameter A B, in priori instrumento, vel K I, in posteriori, æquale esse. Quoniam enim K L, media proportionalis est inter K H, K I, ex scholio propos. 13. huius lib. [a] erit quadratum ex K L, rectangulo sub K H, K I, æquale. Cùm ergo hoc rectangulum circulo dato sit æquale, vt ad initium huius propositionis diximus, quòd K H, sit æqualis semicircunferentiæ, & K I, semidiametro; erit quoq; idem quadratum ex K L, dato circulo, cuius semidiameter A B, vel K I, æquale. Si igitur quadratum rectæ K L, describatur, & ex eius centro ad interuallum A B, in priori instrumento, vel K I, in posteriori circulus describatur, habebitur quadratum æquale circulo, vt in apposita figura apparet.

a 17. sexti.

Caeterum diuisio rectæ H I, in posteriori instrumento in duas partes æquales facilè sic fiet. Diuisa semidiametro K I, bifariam in O, (hæc enim quia minor est, quàm H I, facilè bifariam secabitur.) accipiatur recta K O, æqualis M N. Nam N, punctum erit medium rectæ H I. Cùm enim æquales sint M N, O I; addita communi N O, erit N I, ipsi M O, æqualis: Est autem M O, ipsi H N, æqualis. (quia enim æquales sunt H M, M K; additis æqualibus M N, K O, tota æquales fient H N, M O.) Igitur & N I, ipsi H N, æqualis erit.

## VI.

Dato quadrato circulum æqualem describere.

Sit datum quadratum, cuius latus P. Huic in posteriori instrumento antecedentis propos. ex perpendiculari K L, abscindatur æqualis K Q. Proposito autem quouis circulo, cuius semidiameter K I, inueniatur per antecedentem propos. ei quadratum æquale, cuius latus K L. Deinde ducta recta L I, agatur ei parallela Q R. Dico circulum, cuius semidiameter K R, æqualem esse quadrato dato, cuius latus K Q, vel P. Inuenta namq; per propos. antecedentẽ recta K H, quæ semicircunferentiæ circuli, cuius semidiameter K I, sit æqualis, ductaq; recta L H, agatur ei parallela Q S. Quoniam igitur, ob triangulorum similitudinem, est vt H K, ad K L, ita S K, ad K Q; & vt K L, ad K I, ita K Q, ad K R: erit ex æquo, vt H K, ad K I, ita S K, ad K R. Cùm ergo H K, æqualis sit semicircunferentiæ circuli, cuius semidiameter K I, erit quoq; ex coroll. 2. propos. 4. S K, æqualis semicircunferentiæ circuli, cuius semidiameter K R. Quia verò K Q, ex coroll. propos. 8. huius lib. media proportionalis est inter S K, K R; quòd angulus R Q S, rectus sit, [b] quippe cùm eius partes R Q K, S Q K, partibus I L K, H L K, recti anguli H L I, æquales sint: (Nam [c] angulus H L I, rectus est, cùm sit in semicirculo, vt patet ex praxi antecedentis propos. qua K L, media proportionalis inter H K, K I, reperitur.) [d] erit quadratum ex K Q, æquale rectangulo sub S K, K R, hoc est, circulo, cuius semidiameter K R: hoc est, circulus semidiametri K R, æqualis est quadrato lateris K Q, vel P. Quod est propositum.

b 29. primi.
c 31. tertij.
d 17. sexti.

## COROLLARIVM.

Ex his, quæ demõstrata sunt, construemus circulum cuicunque figuræ rectilineæ æqualem; & contrà, cuicunque circulo figuram rectilineam æqualem constituemus, quæ alteri datæ figuræ rectilineæ cuicunque similis sit. Nam si datæ figuræ rectilineæ [e] describamus quadratum æquale, & huic quadrato circulum æqualem constituamus, ex propos. 6. erit hic idem circulus datæ figuræ rectilineæ æqualis.

e 14. secundi.

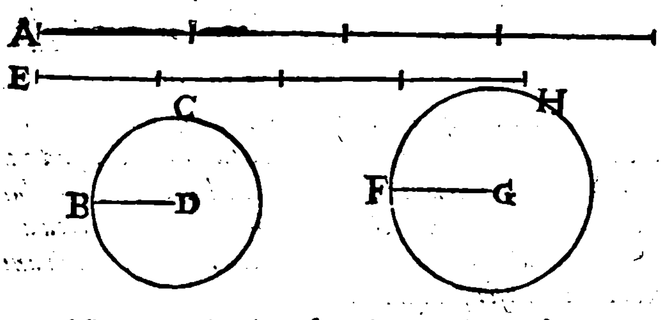
Rvrsvs si, per propos. 5. dato circulo quadratum æquale construamus, huic autem quadrato [f] constituamus figuram rectilineam æqualem, & similem alteri datæ rectilineæ figuræ, erit eadem hæc figura rectilinea constituta, dato circulo æqualis. Quod est propositum.

f 25. sexti.

## VII.

Datae rectæ lineæ circunferentiam circuli reperire æqualem.

Qvo pacto recta linea reperiatur circunferentiæ dati circuli æqualis, docuimus propositione 5. nunc autem, vt vicissim recta data lineæ circunferentia circuli æqualis inueniatur, ita agendum erit. Sit data recta A, cui circunferentia æqualis inuenienda est. Descripto quouis circulo B C, ex centro D, inueniatur ei recta æqualis E. quod facilè ita fiet: In priori instrumento propos. 5. sumatur A H, æqualis semidiametro B D, descripti circuli, & per H, agatur ipsi D E, parallela H I. Nam A I, quadruplicata dabit rectam E, circunferentiæ

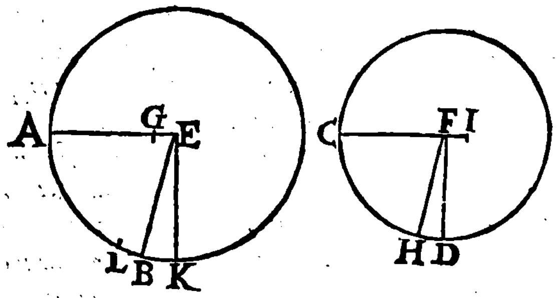



*rentiæ circuli B C, æqualem, vt propositione 5. diximus. Deinde tribus rectis E, A, B D, inueniatur quarta proportionalis F G, atque ex G, ad interuallum G F, circulus describatur F H. Dico eius circunferentiam datæ rectæ A, æqualem esse. Cùm enim sit, vt E, ad A, ita B D, ad F G; hoc est, [a] ita tota* a 15. quinti.
*diameter circuli B C, ad totam diametrum circuli F H: Sit autem vt diameter ad diametrum, ita circunferentia B C, ad circunferentiam F H, vt Pappus demonstrauit; [b] erit quoq; vt E, ad A, ita circunferentia B C, ad circunferentiam F H. Cùm ergo E, facta sit æqualis circunferentia B C;* b 11. quinti.
*[c] erit & recta A, circunferentia F H, æqualis: hoc est, circunferentia circuli F H, inuenta est datæ rectæ A, æqualis. Quod est propositum.* c 14. quinti.

*Aliter, & facilius. Quartæ parti rectæ datæ A, accipiatur æqualis A K, in priori instrumento propos. 5. & per K, agatur K L, ipsi D E, parallela. Nam circunferentia circuli, cuius semidiameter A L, æqualis erit datæ rectæ A; propterea quòd eius circunferentiæ quadrans æqualis est rectæ A K, quartæ parti datæ rectæ A, vt propositione 5. declarauimus.*

## VIII.

Datis duobus circulis inæqualibus, datoque arcu in vno eorum, ex altero arcum æqualem abscindere. Oportet autem arcum in maiore circulo datum non esse maiorem circunferentia minoris circuli.




*Sint duo circuli inæquales A B, C D, quorum centra E, F, & semidiametri A E, C F; sitq; A B, maior, & C D, minor. Datus autem primùm sit in minori circulo arcus C D, cui æqualis abscindendus sit ex maiore. Quoniam circulus A B, circulo C D, maior est, erit & semidiameter A E, semidiametro C F, maior. Abscindatur ergo A G, ipsi C F, æqualis, seceturq; arcus C D, ita in H, ex propos. 2. vt eadem sit proportio arcus C H, ad arcum H D, quæ rectæ A G, ad rectam G E: arcuique C H, similis auferatur arcus A B. quod facilè fiet, si ducta recta F H, angulo C F H, æqualis fiat angulus A E B. Dico arcum A B, dato arcui C D, æqualem esse. Quoniam enim est, vt A G, ad G E, ita arcus C H, ad arcum H D. Et conuertendo, vt E G, ad A G, ita arcus D H, ad arcum C H; erit componendo quoque A E, ad A G, hoc est, ad C F, ipsi A G, æqualem, vt arcus C D, ad arcum C H: Est autem, vt A E, semidiameter ad semidiametrum C F, [d] hoc est, vt tota diameter ad totam diametrum, ita circunferentia circuli A B, ad cir-* d 15. quinti.
*cunferentiam circuli C D, vt Pappus demonstrauit, hoc est, ita arcus A B, ad similem arcum C H. [e] Igitur e-* e 11. quinti.
*rit quoq;, vt arcus C D, ad arcum C H, ita arcus A B, ad eundem arcum C H; ac proinde arcus C D, A B, [f] æ-* f 9. quinti.
*quales inter se erunt. Quod est propositum.*

*Datus deinde sit in maiore circulo arcus A B, non maior, quàm circunferentia circuli C D, minoris, ex quo arcui A B, æqualis arcus abscindendus est. Quoniam circulus A B, maior est circulo C D, erit & semidiameter A E, semidiametro C F, maior. Producta ergo C F, ad I, vt C I, ipsi A E, sit æqualis; secetur per propositionem 2. arcus A B, in L, vt eadem sit proportio A B, ad B L, quæ C F, ad F I; arcuique B L, sumatur æqualis arcus B K, ac toti arcui A K, similis auferatur C D. quod facilè fiet, si ducta recta E K, angulo A E K, angulus C F D, æqualis fiat. Dico arcum C D, arcui dato A B, æqualem esse. Quoniam enim est, vt C F, ad F I, ita arcus A B, ad arcum B L, id est, ad arcum B K, ipsi B L, æqualem; erit componendo quoque vt C I, ad F I, ita arcus A K, ad arcum B K: Et per conuersionem rationis, vt C I, ad C F, hoc est, vt A E, ad C F, ita arcus A K, ad arcum A B: Est autem, vt semidiameter A E, ad semidiametrum C F, [g] hoc* g 15. quinti.
*est, vt tota diameter ad totam diametrum, ita, ex demonstratis à Pappo, circunferentia circuli A B, ad circunferentiam circuli C D, id est, ita arcus A K, ad arcum similem C D. [h] Igitur erit etiam, vt arcus* h 11. quinti.
*A K, ad arcum A B, ita idem arcus A K, ad arcum C D, propterea que arcus A B, C D, [i] æquales erunt inter* i 9. quinti.
*sese. Quod est propositum.*

### COROLLARIVM I.

*Ex his, quæ demonstrata sunt, manifestum est, cuiuis datæ rectæ abscindi posse ex circulo quouis, cuius circunferentia minor non sit, quàm recta data, circunferentiam æqualem, quemadmodũ suprà ostensum est in coroll. propos. 4. data cuilibet circunferẽtia inueniri posse* *rectam æqualem, hoc modo: Inueniatur per ea, quæ paulò antè in coroll. 1. propos. 4. ostendimus, recta linea quadranti dati circuli æqualis; & si quidem hæc linea inuenta æqualis fuerit rectæ lineæ datæ, erit circunferentia quadrantis datæ rectæ lineæ æqualis.*

*Si verò illa recta quadranti circuli inuenta æqualis, fuerit maior, quàm data recta linea; secetur quadrantis circunferentia in duas partes, ex propos. 2. ita vt quadrãs ad vnam partem habeat eandem proportionem, quam inuenta recta linea ad lineam rectam datam. Pars enim illa quadrantis datæ rectæ lineæ erit æqualis. Nam cùm sit, vt inuenta recta ad datam rectam, ita quadrans ad illum arcum abscissum; sit autem recta inuenta quadranti æqualis,* a *erit quoque data linea recta arcui abscisso æqualis.*

a 14. quinti.

*Si denique recta illa inuenta æqualis quadranti, fuerit minor, quàm recta linea data; sumatur illius dupla, quæ nimirum circunferentiæ semicirculi sit æqualis. Nam si hæc æqualis fuerit datæ rectæ lineæ, erit circunferentia semicirculi eidem datæ rectæ æqualis.*

*Si autem dupla illa recta linea fuerit maior, quàm data linea recta, secetur semicirculi circunferentia in duos arcus, ita vt semicircunferentia ad vnum eorũ eandem habeat proportionem, quam dupla illa recta linea ad datam rectam. quod quidem facilè fiet, si data recta ex dupla illa linea recta abscindatur æqualis, & semicircunferentia secetur, per propos. 2, vt secta est recta illa dupla. Erit enim componendo, vt tota illa recta dupla ad partem abscissam, hoc est, ad datam rectam, ita tota semicircunferentia ad arcum abscissum. Arcus enim ille datæ rectæ æqualis erit. Cùm enim sit, dupla illa recta ad rectam datam, ita semicircunferentia ad eum arcum; sit autem recta illa dupla æqualis semicircunferentiæ;* b *erit quoq; data recta illi arcui æqualis.*

b 14. quinti.

*Si denique dupla illa recta linea fuerit minor, quàm data linea recta, addatur ei prior linea inuenta, quæ nimirum quadranti circuli est æqualis, vt tota recta composita æqualis sit circunferentiæ trium quadrantum, & tripla prioris lineæ inuentæ. Nam si hæc linea tripla fuerit datæ rectæ æqualis; erit arcus trium quadrantum eidem datæ rectæ æqualis.*

*Si verò tripla illa linea recta fuerit maior, quàm recta linea data, secetur circunferentia trium quadrantum in duos arcus, ex propos. 2. ita vt ad vnum eorum eandem habeat proportionem, quam tripla illa recta ad rectam datam. quod facilè etiam fiet, si data recta ex tripla illa linea recta abscindatur recta æqualis, & circunferentia trium quadrantum secetur, per propos. 2. vt recta illa tripla secta est. Nam componendo erit, vt tota illa recta tripla ad partem abscissam, id est, ad datam rectam, ita tota circunferentia trium quadrantum ad arcum abscissum. Arcus enim ille datæ rectæ lineæ erit æqualis. Quoniam enim est, vt tripla illa recta ad rectam datam, ita circunferentia trium quadrantum ad arcum abscissum; estq; tripla illa recta circunferentiæ trium quadrantum æqualis;* c *erit quoque data linea recta æqualis illi arcui abscisso.*

c 14. quinti.

*Denique si tripla illa linea recta fuerit minor, quàm data recta linea, addatur ei rursus prior linea inuenta quadranti æqualis, vt tota recta composita fiat æqualis toti circunferentiæ circuli, & prioris lineæ inuentæ quadrupla. Si namque linea hæc quadrupla fuerit æqualis datæ rectæ lineæ, erit tota circunferentia dati circuli datæ lineæ rectæ æqualis.*

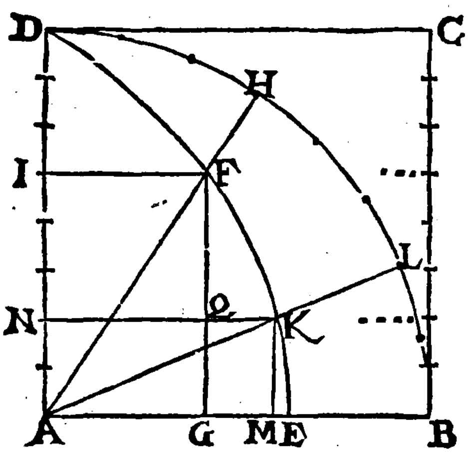
*At verò si illa linea quadrupla maior fuerit, quàm data recta linea, (minor esse non potest: alioquin data recta esset maior, quàm circunferentia dati circuli. quod est contra hypothesin) secetur tota circunferentia in duos arcus, ex propos. 2. vt ad vnum eorũ eandem proportionem habeat, quam quadrupla illa linea ad datam rectam. quod facilè etiam fiet, si ex quadrupla illa recta auferatur recta æqualis datæ rectæ, & tota circunferentia circuli secetur, vt quadrupla illa recta est secta. Erit namque componendo, vt tota illa quadrupla recta ad partem abscissam, id est, ad datam rectam, ita tota circunferentia circuli ad arcum abscissum. Arcus enim ille datæ rectæ erit æqualis. Cùm enim sit, vt quadrupla illa linea ad rectam lineam datam, ita tota circunferentia ad arcum abscissum; sit autem illa linea quadrupla toti circunferentiæ æqualis;* d *erit quoq; data recta linea arcui abscisso æqualis.*

d 14. quinti.

*Aliter, & breuius: Inuenta ex coroll. 1. propos. 4. vel ex propos. 5. recta æquali circunferentiæ dati circuli, abscindatur ex ea datæ rectæ lineæ æqualis, & tota circunferentia per propos. 2. secetur, vt secta est inuenta illa recta, in duas partes. Nam componendo erit, vt tota illa recta ad eius partem ablatam, hoc est, ad datam rectam, ita tota circunferentia ad arcum*

*cum abscissum. Cùm ergo tota illa recta sit æqualis toti circunferentiæ,* [a] *erit quoque data recta arcui abscisso æqualis. Quod est propositum.* a 14.quinti.

COROLLARIVM. II.




*Ex ijs quoque, quæ dicta sunt, inferri potest, tam arcus, quàm angulos rectilineos reperiri incommensurabiles inter se. Sit enim arcus H B, & angulus rectilineus H A B. Dico tam arcum H B, secari posse in duos arcus inter se incommensurabiles, quàm angulum H A B, in duos angulos incommensurabiles inter se. Descripta enim Quadratrice D E, quæ rectam H A, secet in F, ducatur per F, basi A E, parallela F I. Deinde inuentis duabus rectis inter se incommensurabilibus, vt libro 10. docetur, diuidatur recta I A, in N, ex scholio propos. 10. huius lib. ita vt I N, ad N A, eandem proportionem habeat, quam duæ rectæ inuentæ; atque adeò & I N, N A, incommensurabiles quoque sint. Ducta autem recta N K, ipsi A E, parallela, quæ Quadratricem secet in K, ducatur ex centro A, per K, recta secans arcum H B, in L. Dico tam arcus H L, L B, quàm angulos H A L, L A B, inter se esse incommensurabiles. Quoniam enim per propos. 1. est, vt I N, ad N A, ita arcus H L, ad arcum L B: sunt autem I N, N A, incommensurabiles; erunt & arcus H L, L B. incommensurabiles. Cùm ergo sit quoq;,* [b] *vt arcus H L, ad arcum L B, ita angulus H A L, ad angulum L A B; erunt etiam anguli H A L, L A B, incommensurabiles inter se. Quod est propositum.* b 33. sexti.

FINIS ELEMENTI SEXTI.